



HAL
open science

Études statistiques et géométriques de champs aléatoires shot noise. Similarités et différences avec les modèles gaussiens.

Antoine Lerbet

► To cite this version:

Antoine Lerbet. Études statistiques et géométriques de champs aléatoires shot noise. Similarités et différences avec les modèles gaussiens.. Probabilités [math.PR]. Université de Poitiers, 2022. Français. NNT: . tel-03774818

HAL Id: tel-03774818

<https://theses.hal.science/tel-03774818v1>

Submitted on 12 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École Doctorale : Sciences et Ingénierie des Systèmes,
Mathématiques, Informatique

Secteur de Recherche : **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée par :

Antoine LERBET

**Études statistiques et géométriques de champs
aléatoires shot noise. Similarités et différences avec les
modèles gaussiens.**

Directeur de Thèse : **Julien MICHEL**

Co-Directrice de Thèse : **Hermine BIERME**

Soutenue le 20 juin 2022

Devant la Commission d'Examen

Hermine BIERME	Professeur, Université de Tours	Co-directrice
Jean-François COEURJOLLY	Professeur, Université de Grenoble Alpes	Examinateur
Agnes DESOLNEUX	Directrice de Recherche CNRS, Centre Borelli	Examinatrice
Celine DUVAL	Professeur, Université de Lille	Examinatrice
Edith GABRIEL	Directrice de Recherche INRAE, BioSP unit	Rapporteur
Raphaël LACHIEZE-REY	Maître de Conférences, Université de Paris Cité	Rapporteur
Julien MICHEL	Professeur, Université Poitiers	Directeur

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier l'Université de Poitiers, l'École Doctorale SISMI ainsi que le Laboratoire de Mathématiques et Applications qui m'ont permis d'effectuer cette thèse dans d'excellentes conditions de travail.

Je remercie fortement mes deux directeurs de thèse Julien et Hermine. Ce travail n'aurait jamais pu se faire sans vous, et je vous en suis très reconnaissant. Votre gentillesse et votre bienveillance sont des qualités qui m'ont permis d'avoir un cadre de travail idéal. Je remercie particulièrement Hermine, pour m'avoir encadré pendant mes stages de master, puis de m'avoir poussé à m'inscrire en doctorat, tu as eu raison et sans toi je serais passé à côté d'une très belle expérience. Bien sûr, je te remercie pour nos nombreuses discussions mathématiques, tes connaissances couplées à ta pédagogie ont été très précieuses.

Je voudrais également remercier les professeurs Edith Gabriel et Raphaël Lachièze-Rey d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Jean-François Coeurjolly, Agnès Desolneux et Céline Duval d'avoir complété le jury en tant qu'examinateur et examinatrices. Je vous remercie sincèrement pour toutes vos critiques constructives qui ont rendu ce travail meilleur.

L'aboutissement de cette thèse n'aurait pas été possible sans l'aide de tous les membres du laboratoire. Merci à Philippe pour ton aide informatique précieuse, sans laquelle Matlab serait encore mon pire ennemi, merci à Léa, Nathalie, Myriam et Jocelyne pour leur bienveillance et leur disponibilité (mention spéciale à Jocelyne pour l'impression de ce beau manuscrit). J'en profite également pour remercier tous les professeurs du LMA qui m'ont accompagné tout au long de mes études et m'ont donné envie de continuer dans le monde universitaire, avec une pensée particulière pour Hermine, Julien, Pol, Samuel, Alessandra, Sandrine, Arnaud, Jean-Michel, Paul, Farida, Nadir, Yousri... et bien d'autres.

Mais que serait une thèse sans collègues doctorants ? J'ai eu la chance de rencontrer énormément de personnes au cours de ces quatre ans, dont certaines sont devenues des amis. Carlos, ta gentillesse et ta bonne humeur sont inégalables, et même si ta réputation d'être un gros mangeur de tout et n'importe quoi (et surtout n'importe quoi) est largement justifiée, tu es et resteras mon Colombien préféré. Merci à mes colocataires de bureau Pietro, Romain et Megdad. Pietro, bravo, tu as réussi à contaminer Romain avec ton tiroir à post-it raffiné... merci pour ça, mais surtout pour ton humour et ta joie de vivre. Romain, le roi de MT180, tes cocktails et le gouffre vont énormément me manquer.

Merci d'être à la fois le meilleur représentant des doctorants et un ami. Megdad, merci d'avoir été le calme pendant la tempête, sans toi j'aurais sûrement arrêté ma thèse à la découverte de mon bureau;). Simone, tu es un grand connaisseur de football malgré ton mauvais choix de club à supporter. Viva l'Inter! PS : Je t'autorise à supporter la France pour la prochaine coupe du monde. Petite mention pour Léa, qui a utilisé le même fond que moi pour sa photo de trombinoscope... Je remercie également Paolo, Paul, Mathilde, Abir, Sahar, ainsi que tous les autres doctorants que j'ai pu côtoyer. Pour finir, je tiens à remercier particulièrement Victor, tu as été un grand soutien avant et pendant cette thèse. On apprend toujours en discutant avec toi, j'espère assister bientôt à ta soutenance!

J'aurais eu du mal à venir à bout de cette thèse sans mes amis. Une pensée particulière pour Valou, a.k.a Christopher Froome; Lolo, la force tranquille; Amel, mon juge préféré; et Chérif, le plus beau des Mauritaniens. Merci à tous les responsables du chantier Léa, Héléne, Nini, Romain, Charlène, Aymar, Carlos, Julien sans oublier le boss Marc. Schuk et Brahim, merci pour les camps d'entraînement, ensemble on est plus fort! Enfin, merci à toute la famille Chauvinoise qui m'a permis de déconnecter sur les terrains durant ces quatre années.

Si je suis bien sûr d'une chose, c'est que rien de cette thèse n'aurait pu se faire sans mes parents. Vous m'avez offert un cadre idéal tout au long de ma vie et je ne vous en remercierai jamais assez. Papa, ton exigence m'a permis d'avoir de grandes ambitions et je suis heureux de te dire aujourd'hui que je suis devenu docteur, comme toi. Maman, tout le monde rêve d'avoir une mère aussi bienveillante que toi, je suis sûr que toi aussi en tant que docteur tu es fière de moi. Un grand merci à Lucie et Claire de m'avoir supporté toutes ces années! Lu, plus d'une fois tu as été d'un grand soutien dans ma vie et pour cela je te remercie énormément. Courage pour la fin de ta thèse, c'est pour bientôt! Clarie, sache que si on me regarde c'est parce que je te ressemble;). Ma petite Nora, tonton Lantoine a enfin fini sa thèse, comme toi.

J'aimerais remercier tous les membres de ma famille, qui de près ou de loin, ont fait que je suis aujourd'hui. Une petite pensée particulière aux docteurs qui m'ont précédé et ouvert la voie : Papi, Jojo, Papa, Maman, Fred, Anne, Gilles, Jean, et la toute dernière Laura. Papi, merci de m'avoir transmis une partie de tes facilités mathématiques. La relève est enfin arrivée, tu peux ranger tes chemises. Enfin, merci Mamy pour ta gentillesse et ta bonne humeur à chaque fois qu'on se voit.

Un énorme merci à la femme qui partage ma vie. Malgré les apparences, ton grand cœur m'a beaucoup aidé ces deux dernières années. Tu es arrivée comme une fleur au bon moment. C'est maintenant mon tour de prendre soin de toi pour que tu puisses réussir ta thèse! Merci également à Christophe, Coco, Charlotte et Toto pour votre accueil dans

votre belle famille.

Pour terminer, j'ai une pensée toute particulière pour mes grands-parents paternels Pépé et Jojo. Vous avez été d'un soutien inimaginable tout au long de ma vie, notamment concernant mes études. Vous m'avez transmis votre force et elle ne me quittera jamais. MERCI! Cette thèse, c'est la vôtre.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Processus ponctuel	12
1.1 Définition et caractérisation	13
1.1.1 Définition	13
1.1.2 Caractérisation	14
1.2 Processus de Poisson	16
1.2.1 Structure spatiale complètement aléatoire	16
1.2.2 Processus de Poisson inhomogène	18
1.3 Caractéristique d'un processus ponctuel	21
1.3.1 Moments	21
1.3.2 Fonction de distance	27
1.4 Vers d'autres modèles	28
1.4.1 Processus en cluster	28
1.4.2 Processus de Cox	31
1.5 Estimation et inférence	40
1.5.1 Estimation des statistiques	40
1.5.2 Test de l'aléatoire complet	52
1.5.3 Estimation dans les modèles paramétriques	55
2 Champ aléatoire	58
2.1 Définitions et premiers exemples	58
2.2 Champ aléatoire shot noise	62
2.3 Association et théorème limite	69
2.4 Géométrie des niveaux d'excursion	75

2.4.1	Périmètre des champs shot noise	78
2.4.2	Asymptotique en haute intensité	84
3	Inférence statistique sur des champs aléatoires shot noise stationnaires	87
3.1	Introduction and notation	89
3.2	Asymptotic behaviour of moments	91
3.3	Isotropic shot noise random field	100
3.4	Parameters estimation on Gaussian shot noise random field	103
3.5	Conclusion and perspective	112
3.6	Proof of results	115
4	Étude du périmètre des champs aléatoires shot noise par une approche élémentaire	120
4.1	Introduction and notation	122
4.2	Previous results	124
4.2.1	General formula	124
4.2.2	Isotropic smooth Gaussian random fields	126
4.2.3	Isotropic smooth shot noise fields	126
4.2.4	Asymptotics for high and small λ	128
4.3	Gaussian shot noise random field and previous results	130
4.4	Elementary approximation	133
4.4.1	The elementary Gaussian function	133
4.4.2	The elementary Gaussian shot noise random field	137
4.5	Classification between Gaussian and shot noise fields	143
4.6	Appendix	152
4.6.1	Proof of Theorem 4.2.4	152
4.6.2	Proof of Theorem 4.2.5	155
4.6.3	Algorithms	156
	Perspectives	159
	Bibliographie	160

INTRODUCTION

En tant que bons gestionnaires, les administrations ont su mettre en place des tactiques afin de collecter puis d'exploiter les nombres qui nous entourent. Les premières données ainsi recueillies ont permis de réaliser les premières études statistiques, avec par exemple au XVIIIème siècle l'apparition des premières tables de mortalité. Au fil du temps, ce type de données sociales est devenu de plus en plus présent et le développement de techniques d'analyse statistique a permis des avancées mathématiques importantes. Elles ont été utiles pour une meilleure compréhension de beaucoup de domaines, en permettant par exemple la baisse de la mortalité et l'amélioration de la santé. Aujourd'hui, que cela soit positif ou négatif, les avancées technologiques permettent la collecte de données en grande quantité. De la gestion financière aux données dites sociales, en passant par les jeux vidéos, la politique, le sport, les données sont omniprésentes dans la vie quotidienne de chaque personne. Plus important encore, les méthodes professionnelles ont dû s'adapter et évoluer afin de tirer parti de ces données. Pour ne citer qu'eux, en quelques années les domaines de la santé, la finance, le transport, les télécommunications, l'aéronautique, la géographie se sont totalement transformés.

Les données ne sont plus seulement considérées comme des simples nombres, on peut par exemple les interpréter sous forme de points (voir Figure 1.0.1). En dimension 1, les points peuvent représenter les instants où se passent certains événements comme une naissance, un séisme, un appel d'urgence reçu dans un service hospitalier, etc. L'échelle temporelle utilisée dans ces exemples n'est pas la seule utilisable, la dimension peut être l'argent, la vitesse, ou tout autre quantité mesurable. En dimension 2, les points sont vus par deux coordonnées et peuvent représenter toute sorte de position. L'exemple le plus commun est lorsque les deux coordonnées sont métriques, les points représentent alors des positions spatiales telles que celles d'antennes satellite, de neurones de notre cerveau sur une coupe fine, d'épicentres de séismes, d'arbres dans une forêt, de buts lors d'un match

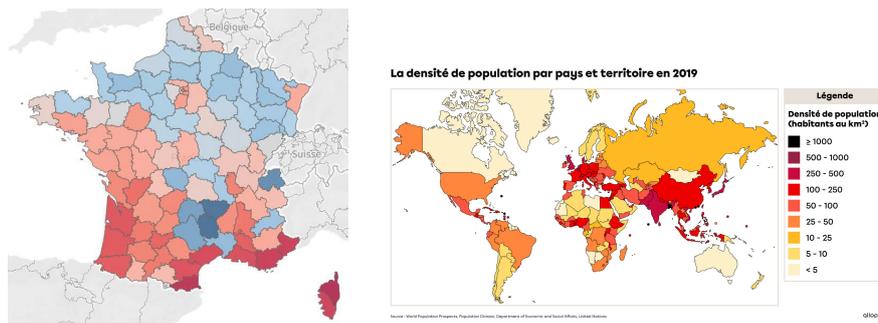


FIGURE 0.0.1 – Exemple de données sous forme de carte. À gauche, un exemple de répartition de la température en France. À droite, celui de la densité de population dans le monde.

de football ou encore le lieu d'un certain type de crimes. Ces données sont modélisées par des modèles aléatoires qu'on appelle processus ponctuels et c'est le thème du Chapitre 1. Le modèle le plus connu, que l'on peut voir comme l'analogie de l'indépendance dans une étude statistique classique, est le processus de Poisson où les points sont indépendants les uns des autres. Les autres modèles de processus ponctuels sont catégorisés entre les modèles répulsifs et agrégatifs.

On peut aussi trouver des données sous forme de carte, comme une carte météorologique des températures de France ou celle de la répartition de la population mondiale (Figure 0.0.1). Ce type de données est rencontré principalement en physique et en sciences naturelles mais aussi en analyse de texture et machine learning, en neurosciences et plus généralement en imagerie médicale. Les processus aléatoires utilisés pour modéliser ce type de données sont les champs aléatoires, que l'on peut aussi appeler fonctions aléatoires, et c'est le thème du Chapitre 2. Ils sont représentés par une collection de variables aléatoires, finie ou infinie, où l'indépendance a peu d'intérêt. Sur la carte de la répartition de la population mondiale, les pays proches ont tendance à avoir une densité similaire, contrairement aux pays un peu plus éloignés. Le modèle devra alors être corrélé positivement afin que les variables aient une tendance à avoir une valeur similaire lorsque leur position est assez proche.

La plupart du temps, l'hypothèse d'indépendance entre points est également trop restrictive. Les processus en cluster sont un exemple important de modèle agrégé, tout en restant stationnaire. Un autre exemple, lorsque l'intensité du processus de Poisson n'est plus déterministe, mais provient de la réalisation d'une expérience aléatoire, les points ne sont plus forcément indépendants entre eux et leur corrélation est uniquement déterminée par l'expérience aléatoire sous-jacente. C'est ce qu'on appelle les processus de Cox et c'est un premier lien qui existe entre champs aléatoires et processus ponctuels : à partir d'une image, on obtient des points. Le champ aléatoire le plus populaire est le modèle gaussien, menant au processus ponctuel très connu de Cox log-gaussien. Il permet le calcul des statistiques classiques comme la fonction de corrélation par paire et la fonction K , qui ne dépendent que de la fonction de covariance du champ gaussien. Un autre modèle de

champ aléatoire, également populaire mais moins étudié, est le champ shot noise et c'est un deuxième lien qui existe entre champs aléatoires et processus ponctuels : à partir de points, on obtient une image. En effet, un tel champ est construit à partir d'un processus ponctuel et d'une forme géométrique, représentée par ce qu'on appelle noyau : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ le champ est défini par

$$X(x) = \sum_{(x_i, m_i) \in \phi_X} m_i g(x - x_i),$$

où $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction déterministe appelée noyau, et ϕ_X est un processus de Poisson marqué sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda_X dx F(dm)$ *i.e.* les x_i sont les points d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ_X dans \mathbb{R}^d et les m_i sont les marques positives de loi F que l'on suppose à valeurs dans \mathbb{R}_+ , indépendantes du processus de Poisson. Autrement dit, la valeur en un point x est une somme de contribution de chaque point x_i , représentée par $g(x - x_i)$. On retrouvera cette définition ainsi qu'une présentation de ce modèle dans le Chapitre 2. La malléabilité calculatoire du champ shot noise permet là aussi le calcul des statistiques d'ordre 2 du processus de Cox shot noise, qui en fait un modèle très étudié [Møl03, DP12] ainsi qu'une extension spatio-temporelle [MD10, DP16].

L'estimation de l'intensité et les fonctions de corrélation permettent l'estimation des paramètres de nombreux modèles. En dehors de ces statistiques classiques, les fonctions de distance sont des statistiques propres aux processus ponctuels, donnant une autre information que les fonctions de corrélation. Elles permettent par exemple de construire des tests de validation de modèles. Lorsque la stationnarité n'est pas une hypothèse acceptable, l'intensité n'est plus constante et l'estimer est une problématique importante et encore d'actualité [MCR⁺19]. Par définition, les estimateurs obtenus sont des champs aléatoires, faisant encore une fois le lien entre processus ponctuels et champs aléatoires. En considérant un jeu de données ponctuelles $x = (x_i)_i$, la méthode des noyaux consiste à sommer un noyau autour de chaque point x_i : l'estimateur est un champ shot noise. Une force de cet estimateur est qu'il a la capacité d'être lisse lorsqu'on lui choisit un noyau lisse.

Maintenant que nous avons entrevu quelques relations entre processus ponctuels et champs aléatoires, notamment shot noise, nous avons compris une partie de l'intérêt de ce modèle. De plus, le théorème de Campbell permet une faisabilité de calcul qu'il est très rare de trouver en dehors du cas gaussien. En particulier, les moments et les lois finies dimensionnelles sont connus, par exemple la fonction de covariance est donnée pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ par

$$\text{Cov}(X(x), X(y)) = \lambda \mathbb{E}[M^2] \int_{\mathbb{R}^2} g(x - c) g(y - c) dc,$$

où $M \sim F$, impliquant que la fonction de corrélation ne dépend pas du processus de Poisson mais uniquement du noyau. Une autre qualité de ce modèle provient de sa structure de faible dépendance, mise en lumière par la notion d'association et les résultats

de Bulinski [BS07]. Par cette association, sous certaines conditions sur le champ X , les estimateurs des moments $\mathbb{E}[X(x)^k]$ et des moments $\mathbb{E}[X(x_1) \dots X(x_k)]$ sont asymptotiquement normaux pour tout $x, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. L'objectif du travail effectué dans le Chapitre 3 est de montrer la normalité asymptotique de ces estimateurs couplés entre eux et d'explicitier leurs variances et covariances asymptotiques. Ces résultats ne sont pas surprenants et il est fort probable qu'ils puissent être établis en utilisant la théorie des chaos Poissonien [PT11, Zhe11], mais il semble que le point de vue associé ainsi que la méthode employée ne soient pas classiques et aient un fort potentiel. Dans un souci d'inférence paramétrique, nous utiliserons nos résultats pour montrer la normalité asymptotique des estimateurs des paramètres ainsi que pour calculer leurs variances et covariances asymptotiques. Un modèle très intéressant est construit lorsqu'on choisit la marque M de loi exponentielle de paramètre μ et un noyau gaussien (*i.e.* on considère $g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}$), que l'on appelle champ shot noise gaussien avec marque exponentielle et que l'on note $X_{\lambda,\mu,\sigma}$. Pour avoir une idée du rôle des différents paramètres, des simulations pourront être trouvées au Chapitre 2 et au Chapitre 3 (par exemple Figure 2.2.2 et Figure 3.4.1). Outre la stationnarité, ce modèle possède de nombreuses propriétés. La première est que le champ conserve les bonnes propriétés du noyau gaussien, comme son isotropie et sa régularité, celle-ci impliquant que le champ soit de classe \mathcal{C}^∞ presque sûrement. De plus, si l'on considère la variance σ^2 comme une variable temporelle t , le champ spatio-temporel est une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla^2 X$$

où $\nabla^2 = \partial_{t_1}^2 + \partial_{t_2}^2$ est l'opérateur de Laplace. On peut observer ce phénomène sur la Figure 0.0.2. Il est intéressant de noter que dans ce modèle spatio-temporel, l'aléatoire ne provient que des points du processus de Poisson réalisés au temps t_0 , l'évolution temporelle étant déterministe. Ensuite, on montrera au Chapitre 4 la remarquable propriété d'invariance d'échelle

$$\left\{ X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}}(x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\} \stackrel{fdd}{=} \left\{ X_{\lambda, \mu, \sigma}(kx) \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

pour tout facteur $k \in \mathbb{R}_+^*$ qui peut être interprété comme le pas de discrétisation lors d'un zoom sur une partie d'une image. Enfin, étant donné que l'on sait calculer le produit de convolution de deux gaussiennes, ce noyau permet le calcul explicite des intégrales qui interviennent dans les moments, avec par exemple une covariance encore gaussienne de variance un peu plus grande

$$\text{Cov}(X(x), X(y)) = \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2} e^{-\|x-y\|^2/4\sigma^2}.$$

Dans ce modèle stationnaire, une simple étude des moments $\mathbb{E}[X(0)^k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ ne permet pas d'estimer les 3 paramètres. En fait, on montrera que toutes les variables marginales de ce modèle suivent des lois gamma, loi qui ne dépend que de 2 paramètres. Ainsi, avec les moments de la loi marginale il est logique de s'attendre à ne pas pouvoir

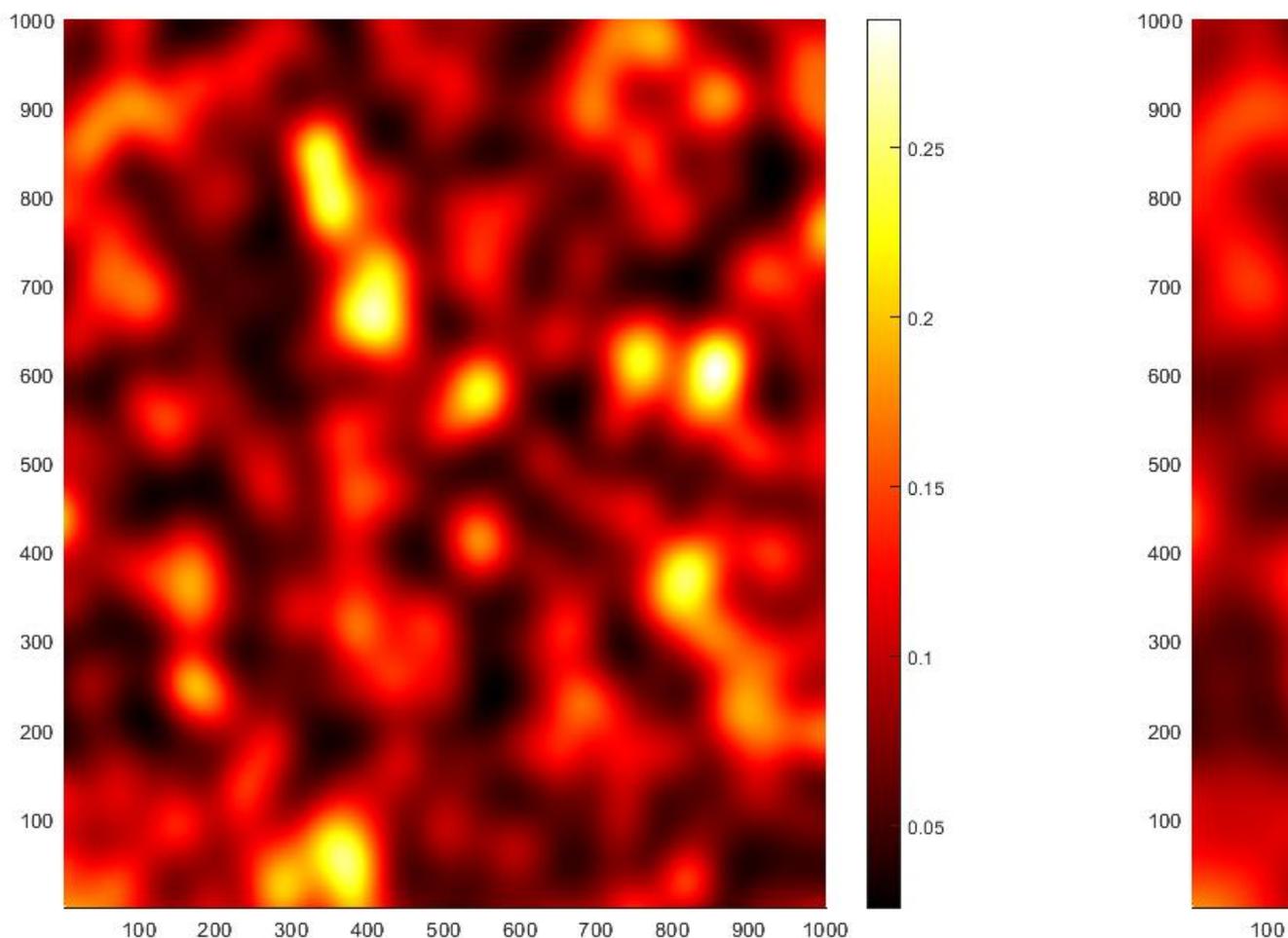


FIGURE 0.0.2 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ de 3 champs shot noise d'intensité $\lambda = 0.001$ avec noyau gaussien de paramètre $\sigma = 30, 40, 50$, de gauche à droite.

identifier les 3 paramètres. Pour estimer le paramètre σ , on utilisera une transformation de la fonction de covariance, à savoir la fonction de corrélation

$$\text{Cor}(X(x), X(y)) = e^{-\|x-y\|^2/4\sigma^2},$$

puisqu'elle ne dépend ni de λ ni de μ . Il est important de dire que la fonction de corrélation ne dépend que du noyau, quelque soit le choix du noyau et de la marque. L'estimation de la fonction de corrélation permet donc une estimation de σ de plusieurs manières. Dans le Chapitre 3, on cherchera à donner une méthode efficace et rapide afin d'optimiser son estimation. Ensuite, des simulations et une étude numérique permettront d'observer la qualité des estimations (voir Figure 3.4.3, Figure 3.4.4 et Figure 3.4.5).

Un autre aspect du modèle shot noise est sa relation avec le modèle gaussien. À haute

intensité (*i.e.* lorsque $\lambda \rightarrow \infty$), un champ shot noise se comporte de la même manière qu'un champ gaussien. Plus précisément, en notant X_λ un champ shot noise d'intensité λ , le champ normalisé Z_λ défini par

$$Z_\lambda(x) = \frac{X_\lambda(x) - \mathbb{E}[X_\lambda(x)]}{\sqrt{\lambda}},$$

converge vers un champ gaussien B au sens des lois finies dimensionnelles [HS85], où B a la même covariance que Z_λ puisque on a

$$\text{Cov}(Z_\lambda(x), Z_\lambda(y)) = \frac{1}{\lambda} \text{Cov}(X_\lambda(x), X_\lambda(y)) = \mathbb{E}[M^2] \int_{\mathbb{R}^2} g(x-c)g(y-c)dc,$$

qui ne dépend pas de λ . Intuitivement, cette normalité asymptotique à haute intensité vient du fait que l'union de deux processus de Poisson indépendants de paramètres λ_1 et λ_2 est un encore processus de Poisson, cette fois de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Ainsi un champ shot noise d'intensité $\lambda \in \mathbb{N}$ peut être vu comme la somme de λ champs shot noise indépendants de paramètre 1, le théorème central limite donnant ensuite le résultat. Ce résultat théorique a suscité beaucoup d'intérêt dans des domaines scientifiques variés [KM95, CH01, AY10], et est toujours d'actualité [LM21]. On observe ce lien sur la Figure 0.0.3 où il est difficile de distinguer une simulation d'un champ shot noise d'un champ gaussien lorsque λ est grand. À l'inverse, le modèle shot noise avec une petite intensité n'a pas le même visuel qu'un champ gaussien, comme illustré par les deux premières simulations de la Figure 0.0.3. Cela montre le large panel de modélisations possibles de ce modèle et, bien qu'il soit pour certains jeux de paramètres très proche du modèle gaussien, il en est également assez loin pour d'autres paramètres conservant tout son intérêt.

À l'instar des fonctions de distance pour les processus ponctuels, les caractéristiques géométriques des niveaux d'excursion des champs aléatoires sont des statistiques propres à ce type d'objet. Rappelons qu'une excursion de niveau $u \in \mathbb{R}$ d'un champ X dans une fenêtre d'observation $T \subset \mathbb{R}^2$ est définie par l'ensemble aléatoire

$$E_X(u) = \{x \in T \mid X(x) \geq u\}.$$

En suivant la théorie des courbures de Lipschitz-Killing (ou des fonctionnelles de Minkowski, selon le contexte), il y a 3 caractéristiques géométriques qui permettent une description de l'ensemble : l'aire, le périmètre et la caractéristique d'Euler. Les deux premières sont des quantités très utilisées pour quantifier l'occupation et la régularité de l'ensemble. La caractéristique d'Euler est un peu moins répandue, elle compte le nombre de composantes connexes moins le nombre de trous, et quantifie la structure topologique de l'ensemble. En voyant ces caractéristiques géométriques comme des fonctions (aléatoires) du niveau d'excursion, leur loi marginale est hors de portée et le calcul de leur espérance est loin

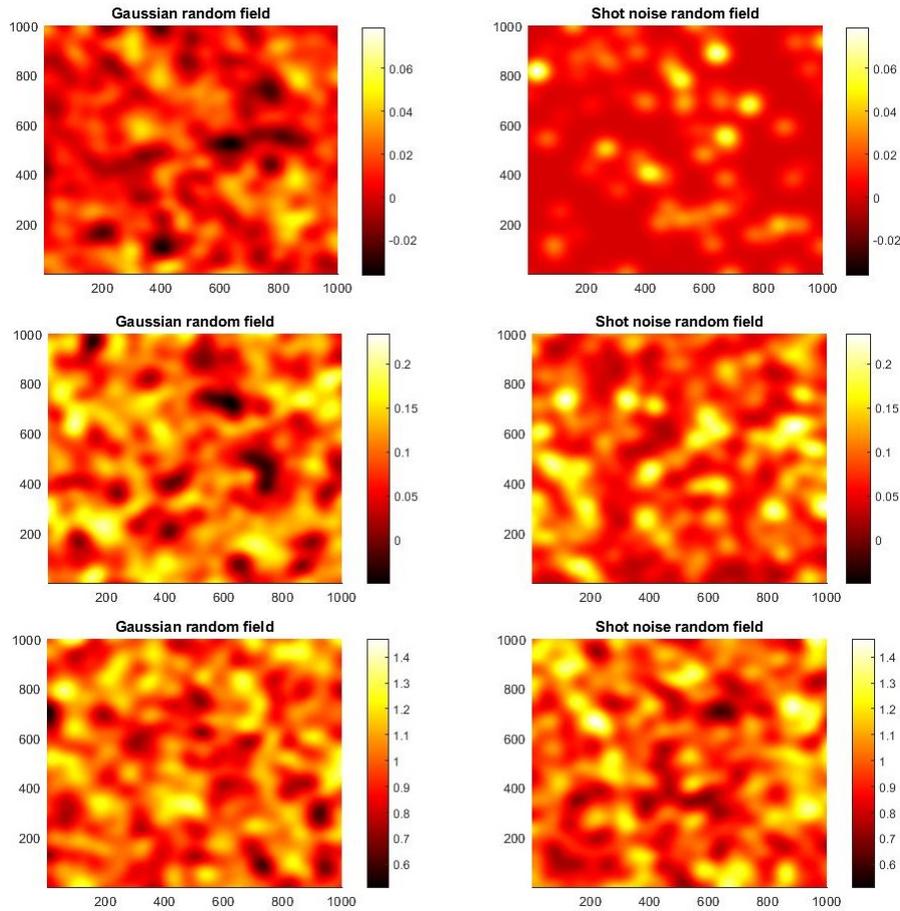


FIGURE 0.0.3 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ de 3 champs shot noise d'intensité λ et 3 champs gaussiens avec la même moyenne, variance et covariance. De haut en bas : $\lambda = 0.0001, 0.001$ et 0.01 .

d'être trivial. Par stationnarité des champs étudiés, on cherche à calculer

$$\begin{aligned}
 u \rightarrow \overline{\mathcal{L}(E_X(u))} &= \frac{\mathbb{E}[\mathcal{L}(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}, \\
 u \rightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))} &= \frac{\mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}, \\
 u \rightarrow \overline{\chi(E_X(u))} &= \frac{\mathbb{E}[\chi(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)},
 \end{aligned}$$

appelées densité d'aire, de périmètre et de caractéristique d'Euler. Puisque $\overline{\mathcal{L}(E_X(u))} = \mathbb{P}(X(0) \geq u)$, la connaissance de la densité d'aire est équivalente à celle de la loi marginale du champ. À ce titre, on connaît explicitement cette fonction pour un champ gaussien, et généralement sous forme d'intégrale pour un champ shot noise, à l'exception de cas particuliers où la loi marginale est explicite, comme le modèle avec noyau gaussien et marque exponentielle. Le périmètre et la caractéristique d'Euler exigent une connaissance plus fine du champ, étant donné que la corrélation des variables intervient. Le cas gaussien a été très étudié [AT07, AW09], et on connaît maintenant des expressions explicites en fonction des paramètres [BD20]. A partir d'une image, on estime aisément les 3 géomé-

tries d'intérêt d'une excursion vue comme une image binaire par des programmes comme **bwperim** et **bweuler** sur matlab, ou l'estimateur proposé dans [ABDB21]. En suivant les travaux [BD21], il faut ensuite corriger le biais par un facteur $\pi/4$ pour les modèles isotropes. Ces estimations peuvent être utilisées à des fins d'inférence paramétrique ou pour construire un test de validation du modèle gaussien [BDBDE19].

Dans le Chapitre 4, ces fonctions nous ont permis d'élaborer une règle de classification. Le but de la classification n'est pas le même que celui d'un test d'hypothèse. En effet, lors d'un test d'hypothèse, les deux hypothèses n'ont pas la même importance puisque l'on cherche principalement à contrôler l'erreur de première espèce (*i.e.* l'erreur consistant à rejeter l'hypothèse nulle à tort). Lorsqu'on élabore une méthode de classification, les deux classes ont la même importance. Évidemment, au vu de notre modèle d'intérêt et dans la continuité de leur relation, nous souhaitons ici classifier la classe des champs gaussiens avec covariance gaussienne et celle des champs shot noise de même covariance (et bien évidemment de même moyenne). Observons sur la Figure 0.0.3 la difficulté, pour certains jeux de paramètres, de distinguer ces deux modèles. Concrètement, pour une moyenne et une fonction de covariance gaussienne données (*i.e.* pour un triplet de paramètres (λ, μ, σ) donné), nous voulons déterminer si une réalisation d'un champ X est gaussien ou shot noise. Pour cela, nous allons premièrement simuler plusieurs champs gaussiens ainsi que plusieurs champs shot noise, avec les paramètres estimés, afin de mesurer la différence de leurs fonctions géométriques (aire et périmètre) estimées avec leurs formules théoriques. Ainsi, nous avons ce qu'on appelle un "ensemble d'entraînement" nous permettant de comprendre le comportement de ces géométries selon les classes. En pratique, nous mesurons ces différences par une distance L^2 discrète et nous observons des points dans \mathbb{R}^2 dont une coordonnée représente la distance par rapport à la densité d'aire et l'autre coordonnée pour la densité de périmètre. Nous utiliserons ensuite une analyse discriminante quadratique afin de permettre une bonne flexibilité dans la séparation des classes. On observera une bonne classification lorsque le champ de départ est gaussien, mais une moins bonne classification lorsque la simulation de départ est shot noise.

La littérature des caractéristiques géométriques des champs shot noise est beaucoup moins fournie. La raison principale est que les hypothèses nécessaires aux théories générales ne sont pas toujours vérifiées. Les deux hypothèses principales qui posent problème sont la forte régularité du champ ainsi que l'existence d'une densité bornée pour la marginale. Une théorie spécifique avec un point de vue adapté à ce modèle est nécessaire. L'idée est d'utiliser un cadre de travail fonctionnel, relâchant les hypothèses contraignantes et permettant la connaissance presque partout des géométries [BD16, BD20, Lac16a]. Dans cette thèse, on s'intéressera à la densité de périmètre et on appellera fonctionnelle de

périmètre la fonction définie $\forall h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\overline{\text{LP}_X(h)} = \int_{\mathbb{R}} h(u) \overline{\text{Per}(E_X(u))} du.$$

Concernant la régularité du champ, nous travaillons dans l'espace des fonctions à variation bornée, qui est moins restrictif que les hypothèses nécessaires pour les champs gaussiens. La régularité du champ provient essentiellement de la régularité du noyau, c'est pourquoi nous aurons $g \in \text{SBV}(\mathbb{R}^2)$ comme principale hypothèse, nous permettant de travailler à la fois avec des noyaux lisses (par exemple le noyau gaussien) et à la fois avec des noyaux constants par morceaux (par exemple une indicatrice d'un ensemble). Les Théorèmes 2.4.3 et 2.4.4 donnent l'expression de $\overline{\text{LP}_X(h)}$, dans le cas où le noyau est lisse et également dans le cas où le noyau est élémentaire. Ils représentent les principaux résultats obtenus pour les modèles shot noise [BD16, BD20]. Seulement, pour un champ shot noise lisse avec un noyau gaussien, le calcul de $\overline{\text{Per}(E_X(u))}$ nécessite de multiples approximations numériques d'intégrales dont un ajustement est nécessaire en fonction des paramètres (λ, μ, σ) . L'algorithme 2.4.1 décrit la procédure à suivre. En pratique, le temps de calcul est un peu long mais ce qui pose surtout problème est le besoin d'adapter l'approximation numérique en fonction des valeurs des paramètres du champ.

L'idée du Chapitre 4 est de discrétiser le noyau gaussien et d'utiliser le cadre de travail des fonctions élémentaires. Pour ce faire, nous considérons le champ shot noise gaussien élémentaire $X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}$ défini pour tout $n \geq 1$ par

$$X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(x) := \sum_i m_i k_{\sigma}^{(n)}(x - x_i),$$

où $k_{\sigma}^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{B(0, r_i^{(n)})}(x)$ est une discrétisation de $k_{\sigma}(x) = e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}$, avec $r_i^{(n)} = \sigma \sqrt{-2 \log(i/n)}$ de sorte que quand $x \in B(0, r_i^{(n)}) \setminus B(0, r_{i+1}^{(n)})$ on a $\frac{i}{n} \leq k_{\sigma}(x) < \frac{i+1}{n}$ et $k_{\sigma}^{(n)}(x) = i/n$ tels que

$$\|k_{\sigma} - k_{\sigma}^{(n)}\|_{\infty} = 1/n.$$

Ces deux noyaux sont très proches l'un de l'autre et par conséquent leurs shot noise respectifs le sont également. Par exemple, on a convergence de $X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)$ vers $X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)$ dans $L^2(\Omega)$. On exprimera la fonctionnelle de périmètre du champ élémentaire lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 (voir Théorème 4.4.6), qui est calculable rapidement et sans besoin d'intervention manuelle par les algorithmes de la section 4.6.3. La question qui se pose naturellement est la suivante : la densité de périmètre obtenue à la limite du cadre élémentaire, que l'on note $\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(u)})}}$, est-elle égale à la densité de périmètre du champ X ? La réponse est non. On observera numériquement qu'il y a un décalage avec la densité de périmètre qui provient de la variation totale, ce qui nous amènera à proposer une conjecture (qui ne sera pas résolue dans cette thèse) : pour presque tout niveau $u \in \mathbb{R}$, la densité de périmètre obtenue à la limite du cadre élémentaire normalisée

par sa variation totale (*i.e.* l'intégrale du périmètre) est égale à la densité de périmètre normalisée par sa variation totale :

$$\frac{\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(u)})}}}{\overline{\overline{\text{TV}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(u)})}}} = \frac{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(u)})}}{\overline{\text{TV}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(u)})}}.$$

Dans l'objectif de comparer un champ gaussien et un champ shot noise, une deuxième classification est possible en comparant les fonctions géométriques estimées non plus avec la théorie gaussienne mais avec les géométries obtenues dans le cadre shot noise. Puisque la marginale du champ suit une loi gamma, la densité d'aire est connue explicitement. Grâce au travail dans le cadre élémentaire, l'autre coordonnée représentant la densité de périmètre (et normalisée par la variation totale) est facilement approchable par les algorithmes de la section 4.6.3. En conclusion, la même procédure permet une deuxième règle de classification. Cette fois on observera des bons résultats numériques lorsque le champ de départ est shot noise et des moins bons résultats si il est gaussien. Par un critère simple de minimisation d'erreur, le couplage des deux classifications nous permettra d'avoir d'excellents résultats. Par exemple, le triplet de paramètres $(\lambda, \mu, \sigma) = (0.001, 0.01, 50)$ ne permet pas de distinguer visuellement un champ shot noise d'un champ gaussien et les deux règles de classification couplées permettent d'avoir 100% de classification correcte sur un échantillon de 200 champs (100 gaussiens et 100 shot noise).

Revenons en arrière sur les liens entre champs shot noise et champs gaussiens. Au vu des résultats de convergence en haute intensité, il est logique de s'attendre à ce que la densité de périmètre d'un champ shot noise soit proche de celle d'un champ gaussien. C'est effectivement le cas pour les champs lisses : il y a une convergence des transformées de Fourier de la densité de périmètre de Z_λ vers celle de la densité de périmètre du champ gaussien B [BD16], qui rappelons le, est connue explicitement. On peut observer cette proximité sur la Figure 4.5.8 où les courbes sont de plus en plus proches. C'est l'une des forces des résultats numériques de classification, en haute intensité il est difficile de distinguer les deux modèles et les caractéristiques géométriques sont également de moins en moins différentiables ; malgré tout pour ces jeux de paramètres les résultats de la classification sont excellents. En revanche, dans le cadre élémentaire le périmètre du champ shot noise n'est pas du tout proche de celui du champ gaussien, étant donné qu'il explose vers l'infini à la vitesse $\sqrt{\lambda}$. En conclusion, à haut régime, il n'y avait aucune chance pour que la densité de périmètre obtenue à partir du cadre élémentaire soit proche de celui du champ shot noise lisse.

L'autre objectif du Chapitre 4 est d'étudier le comportement de la densité de périmètre d'un champ shot noise lisse (et isotrope) pour toutes les valeurs de λ . Ainsi, nous avons amélioré le résultat connu pour le haut régime en comparant directement la transformée de Fourier de la densité de périmètre d'un champ shot noise (non normalisé) avec

celle d'un champ gaussien de même moyenne et de même covariance. Plus précisément, notre Théorème 4.2.4 donne une borne sur la différence des transformées de Fourier, indépendamment de la valeur de λ . Ce résultat est de grand intérêt et il faut l'interpréter comme suit : les deux transformées de Fourier convergent vers l'infini, à la même vitesse $\sqrt{\lambda}$ et leur différence est bornée par une constante. Plus innovant encore, nous avons découvert un autre comportement pour les petites valeurs de λ . Dans ce petit régime, notre Théorème 4.2.5 donne le comportement de la transformée de Fourier de la densité de périmètre et borne leur différence par une constante multipliée par $\lambda^{\frac{2}{1+\beta}}$, où $\beta \in (0, 1)$. Cette fois, l'interprétation du résultat est la suivante : quand $\lambda \rightarrow 0$, les deux quantités convergent vers 0, à la même vitesse λ et leur différence converge vers 0 à la vitesse $\lambda^{\frac{2}{1+\beta}}$ (c'est à dire plus vite qu'en λ).

Grâce à ces résultats, on identifiera la limite $\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(u)})}$ obtenue par le cadre élémentaire : c'est la même que le comportement limite du bas régime. Ainsi, en bas régime, la densité de périmètre (sans normalisation par la variation totale) est très proche de la densité de périmètre obtenue à la limite du cadre élémentaire. Enfin, par les propriétés d'invariance d'échelle, nous donnerons une interprétation de ces résultats non plus en fonction de λ , mais en fonction de σ , motivée par la dimension temporelle qu'il peut représenter. On observe ainsi un comportement élémentaire en temps petit (Proposition 4.4.10) et un comportement gaussien en temps grand (Proposition 4.3.2).

Cette thèse est organisée comme suit. Le Chapitre 1 et le Chapitre 2 sont des chapitres introductifs, qui traitent respectivement des processus ponctuels et des champs aléatoires. Dans le Chapitre 1, on présentera la théorie générale des processus ponctuels et on introduira plusieurs modèles. Nous verrons comment on peut inférer sur leurs paramètres et discuterons de plusieurs méthodes d'estimation des statistiques liées à cet objet. Le but du Chapitre 2 est principalement de mettre en avant les qualités du modèle shot noise. Ensuite, on fera un état de l'art sur les caractéristiques géométriques des niveaux d'excursion des champs gaussiens et shot noise, en mettant l'accent sur les similitudes que possèdent ces deux modèles. Le Chapitre 3 est un article en pré-publication, qui traite des propriétés asymptotiques des estimateurs des moments de champ shot noise. Une étude particulière sera élaborée lorsque le noyau est gaussien et la marque exponentielle, avec pour objectif l'estimation des paramètres. Enfin, le Chapitre 4 est également un article en pré-publication, dont les objectifs peuvent être divisés en 3 parties. Le premier objectif est d'étudier le comportement de la densité de périmètre en fonction de l'intensité du processus de Poisson. Le deuxième est d'obtenir des expressions de la densité de périmètre plus explicites que celles déjà connues, par une approche de discrétisation du noyau. Enfin, le troisième objectif est de proposer une méthode de classification afin de distinguer, par des caractéristiques géométriques, le modèle shot noise du modèle gaussien.

CHAPITRE

1

PROCESSUS PONCTUEL

L'éventail des domaines où des données sous forme de points sont rencontrées est impressionnant : radioastronomie (position des galaxies [DPP⁺04]), géologie (localisation des gisements d'or [FB02]), sylviculture (position des arbres [Rip05, Dig13, CSKM13, MW07]), localisation des feux de forêts [JMS12]), démographie (position des humains ou des maisons [AB12]), épidémiologie (localisation des cas de cancer [Dig90, BTMH05]), biologie (localisation du centre de cellules biologiques [Rip77, Dig86]), localisation des insectes [HI83]), sismologie (localisation des tremblements de terre [Oga88, CM01]). Le but de ce chapitre est d'étudier les outils nécessaires pour modéliser et analyser ce type de données. Après un rappel rapide des fondamentaux de la théorie des processus ponctuels, on s'intéressera principalement à la construction de modèles aléatoires, à leur analyse ainsi qu'à leur simulation. Pour terminer, nous estimerons les statistiques et les paramètres des différents modèles afin d'ajuster au mieux les données aux modèles. Sauf mention contraire, toutes les simulations et études de cas réels sont effectuées soit à partir du logiciel matlab, soit à partir du logiciel R à l'aide du package spatstat [BT05, BRT15]. Régulièrement mis à jour par de nombreux collaborateurs, spatstat est un outil à code source ouvert pour l'analyse de modèles de points spatiaux.

Les nombreux domaines d'application et les nombreuses données sous forme de points sont des raisons suffisantes pour justifier la part importante des processus ponctuels. Cette importance prend encore plus d'ampleur lorsqu'on conçoit leur présence dans d'autres objets de différentes branches de la géométrie aléatoire. La construction d'ensembles aléatoires à partir d'un processus ponctuel est monnaie courante : les points sont considérés comme les centres d'objets géométriques que l'on superpose. L'exemple le plus connu

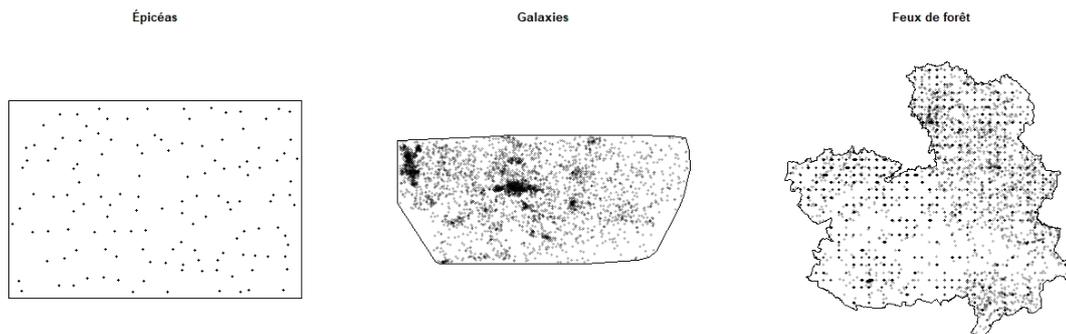


FIGURE 1.0.1 – Exemples de données sous forme de points. À gauche, la position des Épicéas norvégiens dans une forêt naturelle en Allemagne. La région d'étude fait 56m par 38m. Au centre, la position dans le ciel de 4215 galaxies dans le Superamas de Shapley (déterminée par l'ascension droite et la déclinaison). À droite, la position des feux de forêt dans la région de Castilla-La Mancha en Espagne entre 1998 et 2007. La région d'étude s'étend sur environ 400km par 400km.

est certainement le modèle booléen où les objets géométriques sont des boules et les points issus d'un processus de Poisson [CSKM13]. La décomposition en tessellations, objet géométrique qui partitionne le plan en polygones peut également se faire à partir d'un processus ponctuel. Les plus connues sont les tessellations de Voronoi où les cellules sont construites à partir du point le plus proche : toute la cellule possède le même point comme point le plus proche [CSKM13]. Enfin, l'exemple qui nous intéressera le plus dans cette thèse est le lien entre processus ponctuel et champ aléatoire. Si l'on reprend la construction d'ensembles aléatoires mais qu'on additionne les fonctions support à la place de les superposer, on obtient un champ aléatoire shot noise. Ces derniers seront largement étudiés dans la suite du manuscrit.

La suite de ce chapitre est largement inspiré des 3 ouvrages suivant [MW04], [CSKM13] et [BRT15].

1.1 Définition et caractérisation

1.1.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus ponctuel est un objet aléatoire que l'on identifie à une configuration de points dans un espace S . Une configuration $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ est un ensemble de points au plus dénombrable issus d'une expérience aléatoire dans S . Pour des raisons de visualisation, nous supposons que $S = \mathbb{R}^d$ ou $S \subset \mathbb{R}^d$. On dit qu'une configuration est localement finie si elle possède un nombre fini de points dans tout borélien borné de S . On note C^{lf} l'ensemble de ces configurations.

Définition 1.1.1 (Processus ponctuel). *Un processus ponctuel sur S est une application Φ qui à une réalisation du hasard $\omega \in \Omega$ associe une configuration localement finie $x = \Phi(\omega) \in \mathcal{C}^{lf}$ telle que pour tout borélien borné $B \subset S$, le nombre de points de Φ dans B noté $N_\Phi(B)$ est une variable aléatoire discrète et finie.*

On note \mathcal{C}^{lf} l'ensemble de ces configurations localement finies

$$\mathcal{C}^{lf} = \{x \subseteq S \mid N_x(B) < \infty \text{ pour tout } B \subseteq S \text{ borné}\}$$

que l'on munit de la tribu \mathcal{C}^{lf} engendrée par les ensembles $E_{B,k} = \{x \in \mathcal{C}^{lf} \mid N_x(B) = k\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et B un borélien borné. C'est la plus petite tribu telle que pour tout borélien borné $B \in S$ la fonction $x \mapsto N_x(B)$ est mesurable [VL00]. Ainsi défini, le processus ponctuel Φ est une fonction mesurable sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathcal{C}^{lf}, \mathcal{C}^{lf})$. Autrement dit, Φ est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des configurations localement finies. La mesure de probabilité induite sur \mathcal{C}^{lf} est appelée la loi de Φ .

De façon similaire, on peut définir un processus ponctuel Φ par une variable aléatoire mais à la différence que l'ensemble d'arrivée n'est plus celui des configurations de points, mais celui des mesures aléatoires de comptage. Ce point de vue est un peu moins classique mais intéressant selon le contexte.

Exemple 1.1.2 (Processus binomial uniforme). *Fixons un compact non vide $S \subset \mathbb{R}^d$ et un entier n . On appelle processus binomial Φ le processus ponctuel qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $\Phi(\omega) = (U_1(\omega), \dots, U_n(\omega))$, où les U_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur S . Pour tout B borné, on a $\mathbb{P}(U_i \in B) = \frac{\lambda_d(B \cap S)}{\lambda_d(S)}$, où λ_d est la mesure de Lebesgue de dimension d . Par suite, $N_\Phi(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{U_i \in B\}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda_d(B \cap S)}{\lambda_d(S)}$.*

1.1.2 Caractérisation

Un processus ponctuel est dit simple lorsque la probabilité qu'il ait un point double est nulle. La plupart des processus ponctuels sont simples et le processus binomial en est un exemple. Dans la suite, nous ferons toujours l'hypothèse de simplicité (même si cela n'est plus précisé). Avant de voir d'autres exemples de processus ponctuels, intéressons nous à ce qui les caractérise.

Définition 1.1.3. *Soit Φ un processus ponctuel sur S . Les familles des lois marginales de dimension finie, appelé fidis (pour finite-dimensional distributions), est l'ensemble des lois marginales $(N_\Phi(B_1), \dots, N_\Phi(B_m))$, où $\forall i = 1, \dots, m$ les B_i sont des boréliens bornés de S et $m \in \mathbb{N}$.*

Un processus ponctuel est entièrement caractérisé par sa fidis. C'est la caractérisation la plus élémentaire et par suite, la plus forte que l'on puisse faire. L'hypothèse de simplicité

du processus permet de caractériser un processus ponctuel avec des conditions beaucoup plus faibles.

Définition 1.1.4. *Soit Φ un processus ponctuel sur S . On appelle probabilité du vide la famille $v(B) = P(N_\Phi(B) = 0)$, où $B \subset S$ parcourt les boréliens bornés.*

Théorème 1.1.5 (Mönch, Théorème 9.2.XII de [DV08]). *Un processus ponctuel simple est caractérisé par les probabilités du vide.*

Ce théorème est une extension du théorème original de Rényi sur les processus de Poisson [Kin67]. L'idée est de voir que la famille des probabilités du vide suffit à déterminer l'ensemble complet des fidis.

Reprenons un instant l'exemple du processus binomial uniforme, on a alors pour tout $B \subset S$ borélien borné :

$$\begin{aligned} v(B) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \notin B\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i \notin B) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda_d(B \cap S)}{\lambda_d(S)} \right)^n \end{aligned}$$

Ainsi un processus ponctuel simple est binomial uniforme si et seulement si sa probabilité du vide est $v(B) = \left(1 - \frac{\lambda_d(B \cap S)}{\lambda_d(S)} \right)^n$.

Il existe aussi une caractérisation fonctionnelle d'un processus ponctuel.

Définition 1.1.6 ([MW04]). *Soit Φ un processus ponctuel sur S . On appelle fonctionnelle génératrice de Φ la fonction $G_\Phi(u) = \mathbb{E} \left[\prod_{s_i \in \Phi} u(s_i) \right]$, où $u: S \rightarrow [0, 1]$ avec $\{s \in S \mid u(s) < 1\}$ borné.*

Puisque l'on suppose que Φ est localement finie, la fonctionnelle G_Φ est bien définie pour cet ensemble de fonctions u .

Théorème 1.1.7 ([DV08]). *Un processus ponctuel est caractérisé par sa fonctionnelle génératrice.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction génératrice du vecteur $(N_\Phi(B_1), \dots, N_\Phi(B_n))$ pour des boréliens bornés B_1, \dots, B_n est donnée par

$$G_{N_\Phi(B_1), \dots, N_\Phi(B_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}[t_1^{N_\Phi(B_1)} \dots t_n^{N_\Phi(B_n)}] = G_\Phi(u), \quad (1.1.1)$$

avec $u(s) = t_1^{\mathbf{1}_{\{s \in B_1\}}} \dots t_n^{\mathbf{1}_{\{s \in B_n\}}}$ pour t_1, \dots, t_n dans $[0, 1]$. On a clairement que u est à valeurs dans $[0, 1]$ et que $\{s \in S \mid u(s) < 1\}$ est borné puisque les B_i , $i = 1, \dots, n$ sont bornés. Ainsi, étant donné que la fidis caractérise la loi du processus Φ , la caractéristique fonctionnelle caractérise la loi de Φ . \square

De manière similaire à la fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle, les dérivées de G permettent de retrouver les moments factoriels [CSKM13], dont l'importance sera développée dans la section statistiques de ce chapitre.

1.2 Processus de Poisson

1.2.1 Structure spatiale complètement aléatoire

Quel que soit le type de données que l'on veut étudier, l'une des premières questions que l'on se pose est de savoir si les différents éléments ont un lien. Lorsqu'on étudie des points spatiaux, la question devient : est ce que les points sont indépendants ? Bien que répartis indépendamment les uns des autres, les points d'un processus binomial ne possèdent pas cette propriété. En effet, le nombre de points étant déterministe, la connaissance qu'il y ait un certain nombre de points dans une région nous permet de savoir combien il y a de points dans le complémentaire de la région. C'est incompatible avec ce qu'on considère comme indépendant. On dit qu'un processus ponctuel est indépendant si les nombres de points dans k régions disjointes $N_\Phi(B_1), \dots, N_\Phi(B_k)$ forment k variables aléatoires indépendantes.

Cette condition d'indépendance n'est cependant pas suffisante pour définir un processus complètement aléatoire. En effet, bien qu'indépendants entre eux, les points peuvent avoir plus de chance d'être localisés à certains endroits plutôt qu'à d'autres. Si l'on rajoute une condition d'homogénéité, c'est à dire que les points n'ont pas de préférence pour une localisation, alors on définit exactement un modèle de processus ponctuel.

Définition 1.2.1. *Un processus ponctuel Φ sur \mathbb{R}^d est complètement aléatoire si il a les deux propriétés suivantes :*

- *homogénéité, c'est à dire que le nombre moyen de points dans un sous ensemble B de \mathbb{R}^d est proportionnel à son volume $\nu_d(B)$ où ν_d désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d (et par suite ne dépend pas de sa position)*
- *indépendance, c'est à dire que pour B_1, \dots, B_k des sous ensembles disjoints de \mathbb{R}^d , les variables aléatoires $N(B_1), \dots, N(B_k)$ sont indépendantes.*

Le coefficient de proportionnalité, notons le λ , qui apparaît dans la propriété d'homogénéité, est ce qu'on définira plus tard comme l'intensité d'un processus ponctuel.

Ce processus permet de modéliser certains phénomènes physiques (par exemple des événements rares) mais n'est pas réaliste pour la plupart des données. Il sert néanmoins de modèle référence pour comparer des données. Toute étude statistique pourrait commencer par un test d'aléatoire complet en utilisant ce modèle comme hypothèse nulle [CSKM13, BRT15, IPSS08, EHKM18]. Son importance résulte principalement dans la construction d'autres modèles que l'on construit à partir de lui et avec des structures de dépendance (par exemple les processus de cluster et de Cox que l'on verra juste après). La possibilité de nombreux calculs permet aussi d'utiliser ce modèle pour différents objets probabilistes : ensembles aléatoires tels que les modèles booléens, champs aléatoires tels que les champs shot noise.

Propriété 1.2.2. Soit Φ un processus complètement aléatoire sur \mathbb{R}^d , alors on a les deux propriétés suivantes :

- stationnarité : la loi du processus est invariante par translation, c'est à dire que $\Phi + s$ a la même loi que Φ pour tout vecteur $s \in \mathbb{R}^d$.
- isotropie : la loi du processus est invariante par rotation, c'est à dire que $R.\Phi$ a la même loi que Φ pour toute rotation R .

Si on suppose de plus qu'il y a une probabilité négligeable qu'une petite région contienne plus qu'un point, alors le nombre de points suit une loi bien connue qui explique pourquoi ce modèle est souvent appelé processus ponctuel de Poisson homogène.

Propriété 1.2.3. Soit Φ un processus complètement aléatoire d'intensité λ sur \mathbb{R}^d . Supposons de plus que $\frac{\mathbb{P}(N(B) > 1)}{\nu_d(B)} \rightarrow 0$ quand $\nu_d(B) \rightarrow 0$. Alors pour tout compact $B \subset \mathbb{R}^d$, le nombre de points $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\nu_d(B)$.

Si on partitionne la région B (que l'on peut supposer avoir la forme que l'on veut, puisque Φ est homogène) en plusieurs (beaucoup) petits sous ensembles disjoints de même aire, $N(B)$ devient le nombre de succès d'un grand nombre d'événements indépendants dont chaque succès a la même petite probabilité, ce qui implique une distribution Poissonnienne. Cette remarquable propriété permet de caractériser un processus de Poisson facilement.

Proposition 1.2.4. Un processus simple Φ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ sur \mathbb{R}^d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- la probabilité du vide de Φ est $v(B) = \exp(-\lambda|B|)$, avec $B \subseteq S$ bornée.
- la fonctionnelle génératrice de Φ est

$$G_{\Phi}(u) = \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - u(s)) \lambda ds \right).$$

Démonstration. Rappelons que le caractère suffisant vient de la caractérisation du processus Φ par ces fonctions. Il reste donc à calculer ces caractéristiques pour un processus de Poisson. Étant donné que $N_{\Phi}(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\nu_d(B)$ il est clair que $v(B) = \exp(-\lambda\nu_d(B))$. Pour la fonctionnelle génératrice, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $u(s) = 1 - \sum_{i=1}^n (1 - t_i) \mathbf{1}_{C_i}(s)$ avec $t_i \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et C_1, \dots, C_n des ensembles compacts disjoints deux à deux. On a $\{s \in S \mid u(s) < 1\} \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ qui est bien

un ensemble borné. De plus on a

$$\begin{aligned}
G_{\Phi}(u) &= \mathbb{E} \left[\prod_{x_i \in \Phi} \left(1 - \sum_{j=1}^n (1 - t_j) \mathbf{1}_{C_j}(x_i) \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n t_j^{N_{\Phi}(C_j)} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [t_j^{N_{\Phi}(C_j)}] \\
&= \prod_{j=1}^n \exp \left(- (1 - t_j) \lambda \nu_d(C_j) \right) \\
&= \exp \left(- \sum_{j=1}^n (1 - t_j) \lambda \nu_d(C_j) \right) \\
&= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - u(s)) \lambda ds \right)
\end{aligned}$$

puisque $N_{\Phi}(C_1), \dots, N_{\Phi}(C_n)$ sont indépendants et que pour $i = 1, \dots, n$ la variable $N_{\Phi}(C_i)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \nu_d(C_i)$. La preuve pour toute fonction u suit des arguments classiques de la théorie de la mesure. \square

Fixons un compact $W \subset \mathbb{R}^d$ où nous souhaitons simuler un processus de Poisson homogène d'intensité λ . Soit $K \subset W$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(K) = 0 | N(W) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(K) = 0, N(W) = n)}{\mathbb{P}(N(W) = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(K) = 0) \mathbb{P}(N(W \setminus K) = n)}{\mathbb{P}(N(W) = n)} \\
&= \left(1 - \frac{|K|}{|W|} \right)^n
\end{aligned}$$

On observe que, conditionnellement au nombre de points dans W , la probabilité du vide du processus de Poisson est la même que la probabilité du vide d'un processus binomial dans W . Ainsi, conditionnellement au nombre de points, leur répartition est uniforme dans W . Par conséquent, un algorithme simple pour simuler un processus de Poisson (voir Figure 1.2.2) homogène d'intensité λ sur W est :

1.2.2 Processus de Poisson inhomogène

Un modèle plus réaliste est le processus de Poisson inhomogène, qui garde la propriété d'indépendance mais autorise un changement d'intensité spatiale.

Définition 1.2.5. *Un processus ponctuel Φ d'intensité $\lambda : s \mapsto \lambda(s)$ localement intégrable sur \mathbb{R}^d est de Poisson s'il a les deux propriétés suivantes :*

Algorithme 1 Simulation d'un processus de Poisson homogène

```

 $x \leftarrow \{\emptyset\}$ 
 $N \leftarrow \text{Poisson}(\lambda \nu_d(W))$ 
for  $i=1, \dots, N$  do
   $x_i \leftarrow \text{Uniform}(W)$ 
   $x = x \cup x_i$ 
end for

```

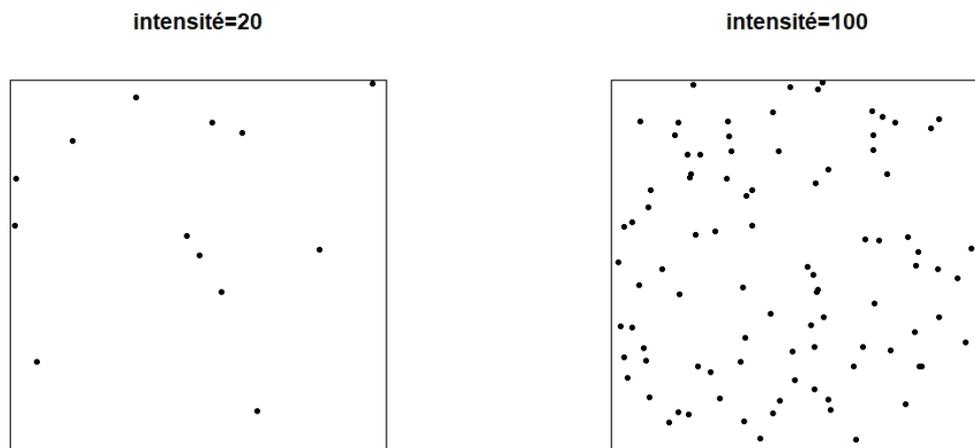


FIGURE 1.2.2 – Simulations de processus de Poisson homogène sur $W = [0, 1]^2$ avec deux intensités différentes : $\lambda = 20$ à gauche et $\lambda = 100$ à droite.

- *indépendance*, c'est à dire que pour B_1, \dots, B_k des sous ensembles disjoints de \mathbb{R}^d , les variables aléatoires $N_\Phi(B_1), \dots, N_\Phi(B_k)$ sont indépendantes.
- *loi de Poisson*, c'est à dire que pour tout compact $B \subset \mathbb{R}^d$, le nombre de points $N_\Phi(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\int_B \lambda(s) ds$.

La fonction d'intensité représente la distribution spatiale des points et la quantité $\lambda(s)ds$ est approximativement la probabilité d'avoir un point dans une petite boule de centre s et d'aire ds .

Comme pour le cas homogène, le processus est complètement caractérisé par sa probabilité du vide et sa caractéristique fonctionnelle.

Proposition 1.2.6. *Un processus Φ est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ sur \mathbb{R}^d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *la probabilité du vide de Φ est $v(B) = \exp\left(-\int_B \lambda(s) ds\right)$*

— la caractéristique fonctionnelle de Φ est

$$G_{\Phi}(u) = \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - u(s)) \lambda(s) ds \right)$$

Beaucoup de propriétés d'un processus de Poisson sont vraies pour le cas inhomogène, incluant bien sûr le cas homogène. En voici quelques unes :

Définition 1.2.7. Soit Φ_1, \dots, Φ_n des processus ponctuels définis sur un même espace S . On appelle superposition l'union $\bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ des processus.

Propriété 1.2.8. Soit Φ_1, \dots, Φ_n des processus de Poisson indépendants définis sur \mathbb{R}^d , avec $\forall i = 1, \dots, n$, Φ_i d'intensité $\lambda_i : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ localement intégrable. Alors la superposition de Φ_1, \dots, Φ_n est un processus de Poisson d'intensité $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Démonstration. Utilisation de l'indépendance et de la caractérisation par la probabilité du vide. \square

La notion d'éclaircissement ci-dessous est importante et intervient notamment dans la simulation d'un processus de Poisson inhomogène.

Définition 1.2.9. Soit $p : \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$ une fonction (d'éclaircissement) mesurable et Φ un processus ponctuel. On appelle $\tilde{\Phi} \subset \Phi$ un éclaircissement indépendant de Φ de probabilité p , le processus ponctuel où chaque point $x \in \Phi$ a été conservé avec probabilité $p(x)$ (et par conséquent enlevé avec probabilité $1 - p(x)$) indépendamment des autres points.

Propriété 1.2.10. Soit Φ un processus de Poisson défini sur \mathbb{R}^d d'intensité $\lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ localement intégrable et $p : \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$ une fonction d'éclaircissement. Alors $\tilde{\Phi}$, le processus Φ éclairci par la fonction p , est un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$.

Par cette propriété, nous avons une méthode simple pour simuler un processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ localement bornée sur un compact W :

La procédure de simulation ci-dessus est valable en remplaçant le maximum de la fonction intensité par n'importe quel majorant de la fonction. Lorsque la fonction d'intensité a une grande amplitude de valeurs, il peut être plus optimal de découper la fenêtre de simulation en sous fenêtres. Cela évite d'avoir une fonction d'éclaircissement trop petite, ce qui signifie beaucoup de points x_i simulés alors que peu valideront la condition dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 Simulation d'un processus de Poisson non homogène

```

 $x \leftarrow \{\emptyset\}$ 
 $M \leftarrow \max_{x \in W} \lambda(x)$ 
 $N \leftarrow \text{Poisson}(M)$ 
for  $i=1, \dots, N$  do
   $x_i \leftarrow \text{Uniform}(W)$ 
   $U \leftarrow \text{Uniform}([0, 1])$ 
  if  $\frac{\lambda(x_i)}{M} \geq U$  then
     $x = x \cup x_i$ 
  end if
end for

```

1.3 Caractéristique d'un processus ponctuel

1.3.1 Moments

Commençons cette section par une petite comparaison avec les moments classiques d'une variable aléatoire réelle. Bien qu'ils ne permettent pas toujours de caractériser une variable aléatoire (un contre-exemple classique est celui de la loi log-normale), les moments sont des outils importants qui donnent une idée assez précise du comportement d'une variable aléatoire réelle, permettant même une caractérisation dans certains cas. Le premier moment, l'espérance, permet d'avoir une première idée (bien que grossière dans certaines situations) du comportement d'une variable aléatoire. Elle est en particulier au centre de la loi des grands nombres, l'un des théorèmes les plus importants de la théorie des probabilités, utilisée abondamment en statistiques. Le moment du deuxième ordre, la variance, permet de déterminer si la variable aléatoire peut souvent prendre des valeurs plus (si la variance est grande) ou moins (si la variance est petite) proches de l'espérance. Elle est au centre du théorème central limite, un autre théorème limite omniprésent. Cependant, cette étude classique devient plus compliquée lorsqu'on parle de processus ponctuels. En effet, par comparaison avec les variables aléatoires réelles dont les moments sont des nombres réels, les équivalents des moments pour les processus ponctuels sont des mesures.

Définition 1.3.1. *Soit Φ un processus ponctuel sur S . Supposons que le nombre de points moyen dans tout compact $K \subset S$ est fini, $\mathbb{E}[N_\Phi(K)] < \infty$. Alors il existe une mesure Λ , appelée mesure d'intensité, définie par $\Lambda(B) = \mathbb{E}[N_\Phi(B)]$, $\forall B \subset S$. Si la mesure d'intensité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ν_d , c'est à dire qu'il existe une fonction λ sur S telle que $\Lambda(B) = \int_B \lambda(s) ds$, alors λ est appelée la fonction d'intensité.*

Cette fonction d'intensité s'interprète comme une fonction de densité où $\lambda(s) ds$ représente approximativement la probabilité qu'il y ait un point dans une petite boule de

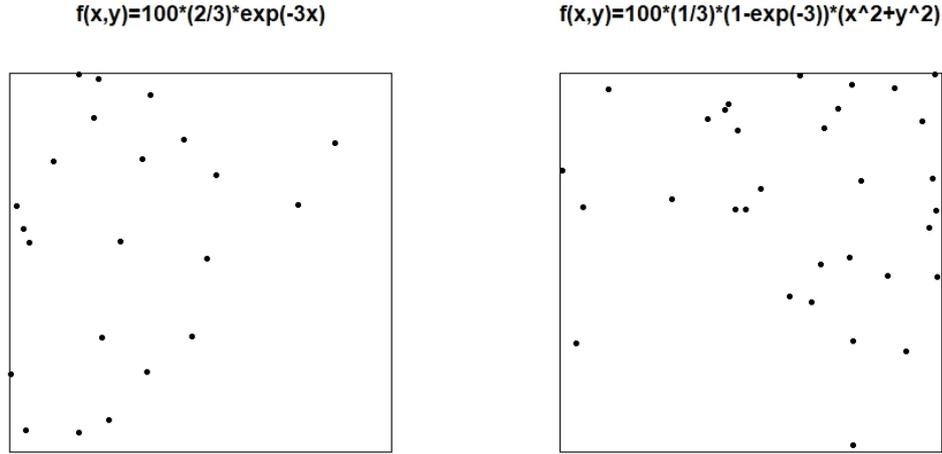


FIGURE 1.2.3 – Simulations de processus de Poisson non homogène sur $W = [0, 1]^2$ avec deux intensités différentes : $\lambda(x, y) = 100 \times \frac{2}{3}e^{-3x}$ à gauche et $\lambda(x, y) = 100 \times \frac{1}{3}(1 - e^{-3})(x^2 + y^2)$ à droite. Les deux processus ont le même nombre de points moyen sur W .

centre s et de volume ds . Pour un processus de Poisson, la fonction d'intensité λ dans la Définition 1.2.5 est sans surprise la même fonction que la fonction d'intensité définie ci-dessus et dans le cas homogène cette fonction est constante. Plus généralement, dès lors que Φ est stationnaire, la mesure d'intensité devient invariante par translation et par conséquent elle s'écrit comme une constante λ multipliée par la mesure de Lebesgue, $\Lambda(B) = \lambda\nu_d(B)$.

La mesure d'intensité Λ peut se réécrire comme suit :

$$\Lambda(B) = \mathbb{E} \left[\sum_{x_i \in \Phi} \mathbf{1}[x_i \in B] \right]$$

Par des arguments classiques de combinaison linéaire et par limite monotone, on retrouve les formules de Campbell [Cam09b].

Théorème 1.3.2. *Soit Φ un processus ponctuel sur S de mesure d'intensité Λ . Alors pour toute fonction mesurable positive f on a :*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_i \in \Phi} f(x_i) \right] = \int_S f(s) \Lambda(ds) \quad (1.3.1)$$

Quand le processus ponctuel a une fonction d'intensité alors (1.3.1) devient :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \Phi} f(x) \right] = \int_S f(x) \lambda(x) dx \quad (1.3.2)$$

Si de plus cette fonction d'intensité est constante, alors (1.3.1) devient :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_i \in \Phi} f(x_i) \right] = \lambda \int_S f(s) ds \quad (1.3.3)$$

Ce théorème, aussi simple soit-il, est notamment à la base de beaucoup de calculs sur les champs aléatoires shot noise.

Une autre question naturelle lorsqu'on est confronté à des données ponctuelles est de savoir si les points sont corrélés entre eux. Les statistiques ci-dessous ont pour principal but de distinguer les processus selon 3 classes : les processus réguliers également appelés répulsifs, les processus indépendants que l'on restreint sans perte de généralité aux processus de Poisson, et les processus de cluster où les points ont tendance à s'attirer. Il est important de faire attention à ne pas confondre corrélation et variation de l'intensité. Une agrégation spatiale entre les points n'implique pas nécessairement que le processus est de type cluster, mais simplement qu'ils sont plus proches les uns des autres que ce qui est attendu par un processus complètement aléatoire. Un exemple de points réguliers est celui des Épicéas de la Figure 1.0.1, les points sont répartis sur toute la fenêtre sans être trop proches les uns des autres. Des exemples de points agrégés sont plutôt ceux des galaxies et des feux de forêts de la Figure 1.0.1.

Définition 1.3.3. *Supposons que $\mathbb{E}[N_\Phi(K)^2] < \infty$ pour tous les compacts K inclus dans S . Alors il existe une mesure $\mu^{(2)}$, appelée mesure du second ordre, définie par $\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E}[N_\Phi(B_1)N_\Phi(B_2)]$, $\forall B_1, B_2 \subset S$.*

La mesure du second ordre $\mu^{(2)}$ peut se réécrire comme suit :

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbf{1}[x_1 \in B_1] \mathbf{1}[x_2 \in B_2] \right] \quad (1.3.4)$$

et toujours par des arguments classiques d'intégration, on obtient une formule de type Campbell :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2) \right] = \int_{S^2} f(x_1, x_2) \mu^{(2)}(d(x_1, x_2)) \quad (1.3.5)$$

où f est une fonction mesurable positive définie sur S^2 .

Bien que cette mesure du second ordre semble naturelle, il est plus habituel d'utiliser le moment du second ordre factoriel défini ci-dessous.

Définition 1.3.4. *Lorsqu'elle existe, nous définissons le moment du second ordre factoriel $\alpha^{(2)}$ par la mesure*

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi}^{\neq} \mathbf{1}[(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2] \right],$$

avec $B_1, B_2 \subset S$ et où $\sum_{x_1, x_2 \in \Phi}^{\neq}$ signifie que la somme concerne les points x_1, x_2 distincts.

La seule différence entre $\mu^{(2)}$ et $\alpha^{(2)}$ est que la somme se fait sur l'ensemble des couples $(x_1, x_2) \in \Phi$ dans un cas, alors que dans l'autre elle ne se fait que sur les couples

$(x_1, x_2) \in \Phi$ dont les points x_1 et x_2 sont distincts. Ce lien étroit entre ces deux mesures se voit en distinguant les couples de points différents et égaux dans (1.3.4), on obtient alors l'égalité suivante :

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) + \Lambda(B_1 \cap B_2)$$

L'intérêt de $\alpha^{(2)}$ réside dans la potentielle existence d'une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ν_{2d} . Cette hypothèse est très souvent admise en pratique.

Définition 1.3.5. *Si la mesure du moment factoriel du second ordre $\alpha^{(2)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ν_{2d} , c'est à dire qu'il existe une fonction $\lambda^{(2)}$ telle que $\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1 \times B_2} \lambda^{(2)}(s, t) ds dt$, alors $\lambda^{(2)}$ est appelée la densité du produit de second ordre.*

Cette densité du produit de second ordre s'interprète de façon approximative, similairement à la fonction d'intensité, comme la probabilité $\lambda^{(2)}(s, t) ds dt$ d'observer un couple de points dans deux petites boules de centre s et t et d'aire ds et dt .

Similairement aux formules (1.3.1)-(1.3.5), on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi}^{\neq} f(x_1, x_2) \right] = \int_{S^2} f(s, t) \lambda^{(2)}(s, t) ds dt \quad (1.3.6)$$

Si Φ est un processus de Poisson sur \mathbb{R}^d d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors on a

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \lambda^2 \nu_d(B_1) \nu_d(B_2) + \lambda \nu_d(B_1 \cap B_2)$$

et

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \lambda^2 \nu_d(B_1) \nu_d(B_2) = \Lambda(B_1) \Lambda(B_2).$$

En particulier un processus de Poisson admet une densité du produit de second ordre $\lambda^{(2)}(s, t) = \lambda^2$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Si le processus de Poisson a une intensité non homogène $\lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ alors on a similairement $\lambda^{(2)}(s, t) = \lambda(s) \lambda(t)$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Une statistique du second ordre souvent utilisée en pratique est la fonction de corrélation par paire définie pour $s, t \in \mathbb{R}^d$ par

$$g_{\Phi}(s, t) = \frac{\lambda^{(2)}(s, t)}{\lambda(s) \lambda(t)}, \quad (1.3.7)$$

qui vaut 1 lorsque Φ est Poissonien. Cette fonction permet de mesurer si le processus dévie du cas Poissonien : $g_{\Phi}(s, t) > 1$ indique que des couples de points ont plus de chance de se produire autour de s et t qu'un processus de Poisson (qui, rappelons le, est caractérisé par sa propriété d'indépendance), tandis que $g_{\Phi}(s, t) < 1$ indique le contraire.

Propriété 1.3.6. Soit Φ un processus ponctuel avec une fonction d'intensité λ et une densité de produit du second ordre $\lambda^{(2)}$. Le processus $\tilde{\Phi}$ aminci indépendamment par la fonction p a une fonction d'intensité et une densité de produit du second ordre données par $\tilde{\lambda}(s) = p(s)\lambda(s)$ et $\tilde{\lambda}^{(2)}(s, t) = p(s)p(t)\lambda^{(2)}(s, t)$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Une conséquence directe de cette propriété est que la fonction g est invariante par amincissement. Une autre statistique du second ordre très utilisée en pratique est la mesure suivante.

Définition 1.3.7. Soit Φ un processus ponctuel sur $S \subset \mathbb{R}^d$ qui possède une fonction d'intensité λ telle que la mesure définie pour tout $B \in S$ par

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{\nu_d(A)} \mathbb{E} \left[\sum_{(x_i, x_j) \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[x_i \in A, x_j - x_i \in B]}{\lambda(x_i)\lambda(x_j)} \right],$$

ne dépend pas du choix de $A \in S$. On dit alors que Φ a une intensité du second ordre pondérée stationnaire et on appelle \mathcal{K} le moment réduit du second ordre.

Dans le cas stationnaire, Φ a une intensité du second ordre pondérée stationnaire et $\lambda\mathcal{K}(B)$ s'interprète comme l'espérance du nombre de points dans B conditionnellement à ce que Φ ait un point en 0.

Propriété 1.3.8. Soit Φ un processus ponctuel tel que sa fonction de corrélation par paire g est invariante par translation. Alors, Φ a une intensité du second ordre pondérée stationnaire et $\mathcal{K}(B) = \int_B g_{\Phi}(s) ds$ où g est, par un petit abus de notation, la fonction de corrélation par paire $g_{\Phi}(s - t) = g_{\Phi}(s, t)$.

Si Φ est stationnaire et que g_{Φ} existe, il est clair que g_{Φ} est invariante par translation. La réciproque n'est pas vraie, la classe des processus ponctuels telle que g_{Φ} est invariante par translation est plus large que celle des processus ponctuels stationnaires telle que g_{Φ} existe. De même que pour la fonction g_{Φ} , la mesure \mathcal{K} est invariante par amincissement. En pratique, on préfère s'appuyer sur la fonction K suivante.

Définition 1.3.9. Soit Φ un processus ponctuel sur \mathbb{R}^d . On définit la fonction $K : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ par $K(r) = \mathcal{K}(B(0, r)) = \frac{1}{\nu_d(A)} \mathbb{E} \left[\sum_{(x_i, x_j) \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[x_i \in A, \|x_j - x_i\| \leq r]}{\lambda(x_i)\lambda(x_j)} \right]$ où $A \subset \mathbb{R}^d$.

Bien que définie en tout généralité, en pratique lors de l'étude de la fonction K il est souvent fait l'hypothèse de stationnarité [BRT15]. Dans ce cas stationnaire, on interprète $\lambda K(r)$ comme le nombre moyen de points de X dans une boule de rayon r centré à un point de X , sans compter ce point. Mathématiquement on a :

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[\text{nombre de } r\text{-voisin de } x \mid x \in \Phi] \quad (1.3.8)$$

où les r -voisins sont les voisins à distance plus petite que r . Par stationnarité, cette égalité ne dépend pas du choix de x . La Propriété 1.3.8 nous donne le lien entre la fonction K et la fonction g_Φ :

$$K(r) = \int_{B(0,r)} g_\Phi(s) ds \quad (1.3.9)$$

Et lorsque le processus est isotrope, la formule se réduit par changement de variable en coordonnées polaires par

$$K(r) = \sigma_d \int_0^r n^{d-1} g(n) dn \quad (1.3.10)$$

où σ_d désigne la superficie de la boule unité de dimension d .

Empiriquement, cette fonction est vue comme une fonction de répartition des distances entre les couples de points du processus. Si Φ est un processus de Poisson, alors la condition d'avoir un point $x \in \Phi$ n'influe pas sur le nombre attendu de r -voisins qui est de $\lambda \omega_d r^d$, avec ω_d le volume de la boule unité. Il paraît alors logique de comparer la fonction K d'un processus Φ avec $r^d \omega_d$. C'est le rôle de la fonction L .

Définition 1.3.10. Soit Φ un processus ponctuel sur \mathbb{R}^d . On définit la fonction $L : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ par

$$L(r) = \left(\frac{K(r)}{\omega_d} \right)^{1/d}. \quad (1.3.11)$$

La fonction L devient alors l'identité pour un processus de Poisson. Lorsque l'on dévie de l'identité, on retrouve deux catégories de processus : $L(r) > r$ indique un processus en cluster tandis que $L(r) < r$ indique une régularité. Attention toutefois à ne pas tirer de conclusions hâtives, l'absence de corrélation n'est pas synonyme d'indépendance : $L(r) = r$ n'implique pas que le processus est de Poisson [BS84]. Nous verrons plus loin comment estimer ces statistiques et, par exemple, utiliser ces statistiques pour inférer sur les paramètres de certains modèles.

Les statistiques d'ordre supérieur sont définies de la même manière que celles d'ordre 2. On notera $\mu^{(n)}$ les moments d'ordre n et $\alpha^{(n)}$ les moments factoriels d'ordre n . Lorsqu'elles existent, les densités de produit d'ordre n seront notées $\lambda^{(n)}$. Leur utilisation en pratique est cependant moindre que les statistiques d'ordre 1 et 2. Dans de ce manuscrit, nous n'aurons besoin que des formules de Campbell :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi}^{\neq} f(x_1, \dots, x_n) \right] = \int_{S^n} f(s_1, \dots, s_n) \lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n \quad (1.3.12)$$

qui se réduisent dans le cas Poissonnien puisque par la propriété d'indépendance du processus de Poisson on a $\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \lambda(s_1) \dots \lambda(s_n)$ pour tout $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^d$.

1.3.2 Fonction de distance

La corrélation n'est qu'un aspect de la dépendance et quand il s'agit de processus ponctuels, d'autres statistiques spécifiques peuvent être étudiées et notamment celles basées sur les distances entre points. Nous proposons ici une petite revue des deux statistiques les plus utiles. Ce sont des outils complémentaires à la corrélation et une analyse complète d'un jeu de données devrait étudier à la fois la corrélation et les distances entre points. Leur estimation et leur utilisation pratiques se feront dans la dernière partie de ce chapitre.

Définition 1.3.11. *Soit Φ un processus ponctuel stationnaire défini sur S . La fonction de contact F est définie sur \mathbb{R}_+ par*

$$F(r) = \mathbb{P}(\Phi \cap B(0, r) \neq \emptyset). \quad (1.3.13)$$

La fonction du plus proche voisin G est définie sur \mathbb{R}_+ par

$$G(r) = \frac{1}{\lambda|A|} \mathbb{E} \left[\sum_{s \in \Phi \cap A} \mathbf{1}[(\Phi \setminus s) \cap B(s, r) \neq \emptyset] \right], \quad (1.3.14)$$

avec A n'importe quel sous-ensemble de S .

En d'autres termes, F est la probabilité de rencontrer un point du processus à une distance plus petite que r de l'origine (ou par stationnarité de n'importe quel point fixé de S), tandis que G est la probabilité de rencontrer un point du processus à une distance plus petite que r d'un point fixé du processus Φ . Alternativement, on peut définir la fonction G par

$$G(r) = \mathbb{P}((\Phi \setminus s) \cap B(s, r) \neq \emptyset \mid s \in \Phi). \quad (1.3.15)$$

Lorsque Φ est un processus de Poisson homogène, le nombre de points dans $B(0, r)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \omega_d r^d$ et on a alors

$$F(r) = 1 - \exp(-\lambda \omega_d r^d) \quad (1.3.16)$$

De plus, l'information que Φ a un point en s n'a aucune influence sur le reste du processus et par suite on a

$$G(r) = F(r) = 1 - \exp(-\lambda \omega_d r^d)$$

Il arrive également d'utiliser d'autres fonctions construites à partir de F et G , comme la fonction J introduite par [VLB96] et définie sur \mathbb{R}_+ par $J(r) = \frac{1-G(r)}{1-F(r)}$. Immédiatement, on remarque que $J(r) = 1$ pour un processus de Poisson. La réciproque n'est cependant pas vraie : $J = 1$ n'implique pas que le processus est de Poisson [BV97]. La connaissance de ces fonctions de distance permet en particulier de tester si un processus est complètement aléatoire par la comparaison entre la forme théorique Poissonnienne et la courbe

empirique de données ponctuelles observées.

En dehors du cadre Poissonien, il est difficile de calculer explicitement ces fonctions de distance. Néanmoins, pour une observation de données ponctuelles, nous pouvons les estimer et en donner l'interprétation suivante : pour des petites valeurs de r , $F(r) < G(r)$ indique un cluster tandis que $F(r) > G(r)$ indique une régularité. L'utilisation de la fonction J est intéressante dans cette interprétation car il suffit de la comparer avec la fonction constante égale à 1.

1.4 Vers d'autres modèles

Il arrive que la différence de densité de points ne vienne pas seulement de l'hétérogénéité du processus. C'est le cas lorsque les points sont corrélés entre eux. La corrélation entre les points peut être négative, on parle alors de processus répulsif, les principaux étant les processus déterminantaux et la plupart des processus de Gibbs. Les points de ce type de processus ne peuvent pas être trop proches et sont caractérisés par une forme de régularité et de répulsion. Pour les lecteurs intéressés par les processus déterminantaux, vous pouvez consulter [HKP09], [LMR15] et [BLMV17]. Pour les processus de Gibbs, on pourra se référer à [MW04] et [BRT15]. Les points peuvent avoir plus souvent tendance à s'attirer qu'à se repousser, la corrélation est alors positive et on parle de processus agrégé. Il y a une ambiguïté entre cluster et hétérogénéité, les deux ont une densité de points qui varie spatialement, mais pour des raisons différentes : intensité constante avec dépendance aléatoire entre les points pour les processus en cluster, contre une variation spatiale de l'intensité pour les processus hétérogènes (sans forcément de dépendance entre les points, comme les processus de Poisson hétérogènes). Les exemples classiques de données de points en cluster sont la localisation des cas de cancer chez les hommes, la position des arbres dans une forêt, celle des galaxies dans l'univers, etc. Des modèles qui permettent de modéliser ce genre de données sont présentés dans la suite.

1.4.1 Processus en cluster

Un processus en cluster est construit en deux étapes. Dans un premier temps, nous considérons un processus ponctuel Y que nous appelons les points parents. Ensuite, chaque parent $p \in Y$ donne naissance à des enfants X_p répartis autour des parents. Le processus Φ formé uniquement de l'union des processus enfants est appelé processus de cluster. Les processus les plus utilisés sont ceux de Neyman Scott, connus pour leur facilité de construction et leur calcul pratique, dont les hypothèses lors des différentes étapes sont les suivantes :

- les points parents sont issus d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ ,
- les processus enfants sont identiquement distribués et indépendants,

- les points enfants issus d'un même parent sont répartis indépendamment selon une densité $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ centrée au point parent.

Les choix possibles qu'il reste concernent N_X le nombre de points enfants par parent et l'intensité k avec laquelle ces points sont répartis. Dans les deux exemples suivants, nous considérerons des processus où le nombre N_X de points enfants par parent est Poissonnien de paramètre μ , et par suite les processus enfants sont des processus de Poisson d'intensité $\mu k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ centrée aux points parents.

Processus de Matern cluster

Dans le processus de Matern cluster, les enfants sont répartis uniformément autour des parents dans un disque de rayon r i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on choisit $k(x) = \frac{\mathbf{1}(\|x\| \leq r)}{\omega_d r^d}$ avec ω_d le volume de la boule unité de dimension d . La simulation sur W du processus nécessite la simulation des parents sur une fenêtre plus large que la fenêtre de simulation finale W . En effet, des parents situés à l'extérieur de W peuvent donner naissance à des points enfants à l'intérieur de W . Pour simuler de façon exacte le processus de Matern cluster, il suffit de simuler les parents sur la fenêtre $W_{\oplus r} = W \oplus B(0, r) = \{x = a + b \in \mathbb{R}^d \mid a \in W, b \in B(0, r)\}$.

Algorithme 3 Simulation d'un processus de Matern cluster

```

 $x \leftarrow \{\emptyset\}$ 
 $N \leftarrow \text{Poisson}(\lambda \nu_d(W_{\oplus r}))$ 
for  $i = 1, \dots, N$  do
   $y_i \leftarrow \text{Uniform}(W_{\oplus r})$ 
   $N_i \leftarrow \text{Poisson}(\mu)$ 
  for  $j = 1, \dots, N_i$  do
     $x_i^j \leftarrow \text{Uniform}(B(y_i, r))$ 
    if  $x_i^j \in W$  then
       $x = x \cup x_i^j$ 
    end if
  end for
end for

```

Il en va de même pour tout processus en cluster avec une fonction d'intensité du processus enfant à support compact. La Figure 1.4.4 représente 2 simulations du processus de Matern cluster. Des parents à l'extérieur de W donnent naissance à des enfants à l'intérieur (trait bleu d'un cercle rouge à l'extérieur vers un point noir à l'intérieur), et des parents à l'intérieur donnent naissance à des enfants à l'extérieur (trait jaune d'un cercle rouge à l'intérieur vers un point vert à l'extérieur). Nous verrons que ce modèle fait partie de la classe des processus de Cox shot noise, ainsi une étude statistique de ce modèle sera faite à ce moment là.

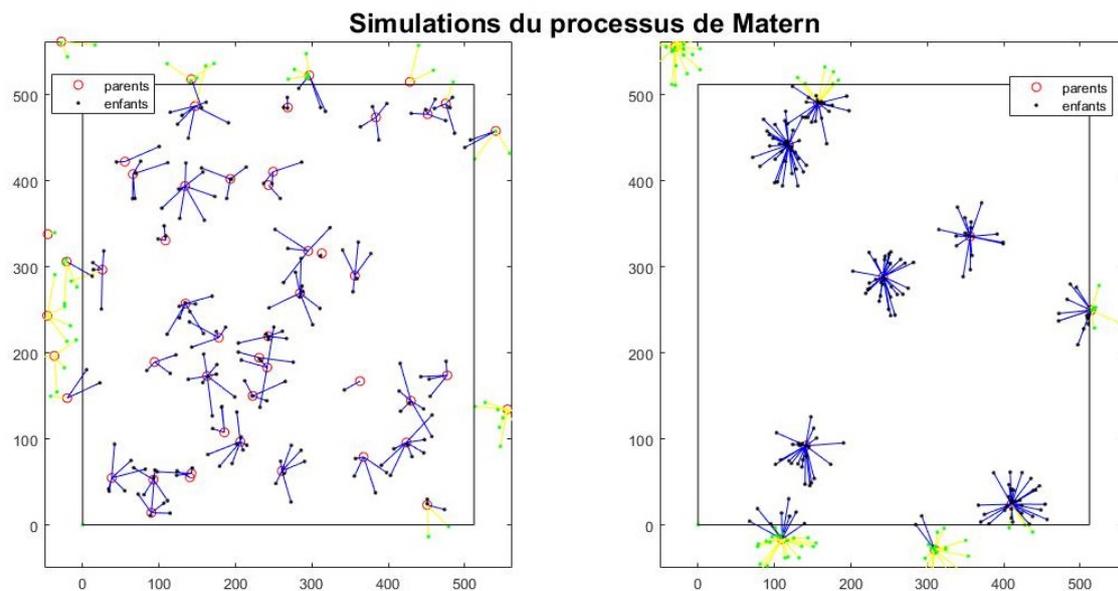


FIGURE 1.4.4 – Simulations du processus de Matern cluster sur $W = [0, 512]^2$. Le nombre de points moyen dans W est de 250 sur les deux simulations. A gauche, l'intensité des points parents est assez grande ($\lambda = \frac{50}{512^2}$) et le nombre moyen d'enfants est petit ($\mu = \frac{1}{5}$). A droite, l'intensité des points parents est plus petite ($\lambda = \frac{10}{250^2}$) et le nombre moyen d'enfants est plus grand ($\mu = \frac{1}{25}$). Le rayon de la densité du processus enfants est $r = 50$ pour les deux simulations. Seuls les points enfants (en noir) sont finalement observés.

Processus de Thomas

Dans le processus de Thomas, les enfants sont répartis autour des parents selon une densité gaussienne centrée de variance σ^2 , i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on choisit $k(x) = \frac{2}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2})$. Cette fonction n'étant pas à support compact, la simulation des points parents sur une plus grande fenêtre que W ne suffit pas à la simulation exacte du processus. En effet, il existe une probabilité non nulle qu'un point parent très loin de la fenêtre de simulation W puisse donner naissance à un enfant dans W . Remarquons que cette probabilité augmente avec la variance σ^2 . Une simulation approchée avec une erreur faible est possible en simulant les points parents sur une fenêtre assez large. Par exemple, on sait que plus de 99% de la densité d'une Gaussienne centrée se trouve entre -3σ et $+3\sigma$. Ainsi en simulant les points parents sur une fenêtre $W_{\oplus 3\sigma} = \{s \in \mathbb{R}^2 \mid d(s, \partial W) \leq 3\sigma\}$ il y a une faible probabilité qu'un point en dehors de cette fenêtre donne naissance à un point dans W .

La Figure 1.4.5 représente 2 simulations approchées du processus de Thomas. La marge de 3σ dans l'élargissement de la fenêtre de simulation des parents a l'air suffisante : peu de parents proches de la bordure de $W_{\oplus 3\sigma}$ donnent naissance à un enfant dans W . Il est également possible de simuler exactement le processus. En effet, le nombre de parents sur \mathbb{R}^2 qui donne réellement naissance à un enfant sur W est fini et provient d'un processus

Algorithme 4 Simulation approchée d'un processus de Thomas

```

 $x \leftarrow \{\emptyset\}$ 
 $N \leftarrow \text{Poisson}(\lambda \nu_d(W_{\oplus 3\sigma}))$ 
for  $i = 1, \dots, N$  do
   $y_i \leftarrow \text{Uniform}(W_{\oplus r})$ 
   $N_i \leftarrow \text{Poisson}(\mu)$ 
  for  $j = 1, \dots, N_i$  do
     $x_i^j \leftarrow \text{Gauss}(y_i, \sigma^2)$ 
    if  $x_i^j \in W$  then
       $x = x \cup x_i^j$ 
    end if
  end for
end for

```

de Poisson d'intensité que l'on peut expliciter [Møl03]. Nous verrons également que ce modèle fait partie de la classe des processus de Cox shot noise, ainsi, comme pour les processus de Matern cluster, une étude statistique de ce modèle sera faite à la section 1.4.2.

1.4.2 Processus de Cox

La plus grande classe de processus agrégés est sûrement celle des processus de Cox. Un processus de Cox (ou processus doublement aléatoire) Φ est un processus de Poisson d'intensité aléatoire. La construction de ces processus se fait alors en deux temps :

1. réalisation d'un champ aléatoire X sur \mathbb{R}^d à valeurs positives,
2. réalisation d'un processus de Poisson d'intensité X .

Les champs aléatoires seront étudiés dans le chapitre suivant. Un champ aléatoire X sur \mathbb{R}^d peut aussi être appelé fonction aléatoire sur \mathbb{R}^d , c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $X(x)$ est une variable aléatoire. Souvent dans les applications, le champ aléatoire n'est pas observé et seuls les points sont observés. Similairement aux conditions pour un processus de Poisson, il faut que le champ aléatoire soit positif et localement intégrable pour que le processus de Cox soit bien défini. La structure et les propriétés d'un processus de Cox proviennent essentiellement de la structure du champ sous jacent. Par exemple, la stationnarité du champ est équivalente à la stationnarité du processus, et il en va de même pour l'isotropie. La fonction d'intensité est donnée par $\lambda(s) = \mathbb{E}[X(s)]$ et plus généralement la densité de produit d'ordre n est

$$\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E}[X(s_1) \dots X(s_n)] \quad (1.4.1)$$

En particulier, cela implique que la fonction de corrélation par paire est

$$g_{\Phi}(s, t) = \frac{\mathbb{E}[X(s)X(t)]}{\mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)]} \quad (1.4.2)$$

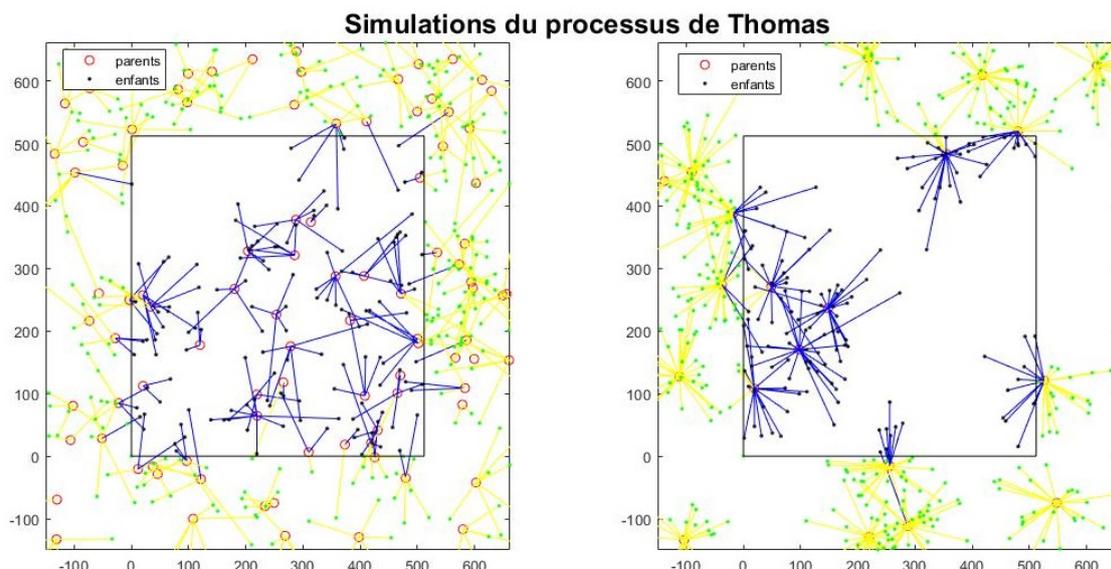


FIGURE 1.4.5 – Simulations du processus de Thomas sur $W = [0, 512]^2$. Le nombre de points moyen dans W est de 250 sur les deux simulations. A gauche, l'intensité des points parents est assez grande ($\lambda = \frac{50}{512^2}$) et le nombre moyen d'enfants est petit ($\mu = \frac{1}{5}$). A droite, l'intensité des points parents est plus petite ($\lambda = \frac{10}{512^2}$) et le nombre moyen d'enfants est plus grand ($\mu = \frac{1}{25}$). L'écart type de la densité du processus enfant est $\sigma = 50$ pour les deux simulations. Seuls les points enfants (en noir) sont finalement observés.

La caractérisation de ces processus est possible par la probabilité du vide

$$v(B) = \mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_B X(s) ds\right) \right],$$

ainsi que par sa caractéristique fonctionnelle

$$G_\Phi(u) = \mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_S (1 - u(s)) X(s) ds\right) \right].$$

La simulation d'un processus de Cox se fait en deux étapes. Tout repose sur la simulation du champ aléatoire.

1. simuler un champ aléatoire X sur W ,
2. simuler un processus de Poisson non homogène comme l'algorithme 2 d'intensité X sur W .

Processus de Cox élémentaire

Un premier exemple élémentaire est celui où le champ $X(x) = \lambda(x)$ est déterministe, le processus de Cox est alors simplement un processus de Poisson d'intensité λ . Ainsi les processus de Cox forment une classe plus large que les processus de Poisson. Un deuxième

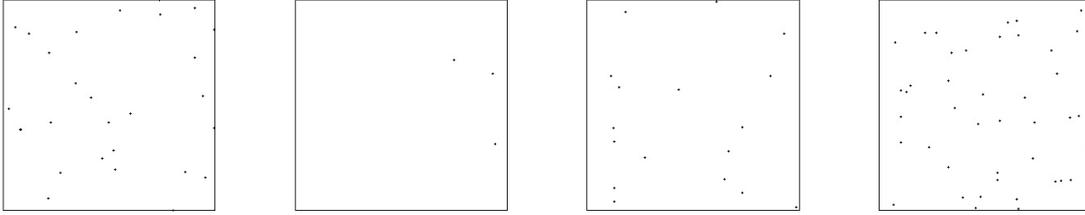


FIGURE 1.4.6 – Quatre simulations du processus de Cox mixé sur $W = [0, 1]^2$. La variable M du processus de Cox mixé suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = \frac{1}{50}$ de sorte que le nombre de points moyen sur chaque simulation est de 50.

exemple élémentaire est lorsque le champ aléatoire $X(x) = M$ est constant égal à M une variable aléatoire, le processus est alors appelé de Cox mixé. Ce modèle permet un large choix de variables comme intensité mais n'est pas ergodique dans le sens où, avec une seule réalisation, on ne peut pas le distinguer d'un processus de Poisson homogène. Si l'on observe plusieurs fois une même expérience, alors ce modèle devient utile et on pourra le différencier du processus de Poisson. La Figure 1.4.6 représente 4 simulations où l'intensité du processus de Poisson suit une loi exponentielle. On observe une grande disparité sur le nombre de points, au sens où la variance du nombre de points semble plus grande que pour un processus de Poisson. Cette observation n'est pas réduite au cas exponentielle. Soit $B \subset \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(N(B)) &= \alpha^{(2)}(B \times B) + \Lambda(B) - \Lambda(B)^2 \\ &= \mathbb{E}[M^2]|B|^2 + \mathbb{E}[M]|B| - \mathbb{E}[M]^2|B|^2 \\ &= \mathbb{E}[M]|B| + \text{Var}(M)|B|^2 \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\text{Var}(N(B)) \geq \mathbb{E}[M]|B|$ et donc que le nombre de points est plus dispersé que dans le cas Poissonien. En reprenant l'exemple du processus de Cox mixé avec $M \sim \mathbb{E}(\frac{1}{50})$ et observé sur $W = [0, 1]^2$ on obtient que $\text{Var}(N(W)) = 50 + 50^2 = 2550$, tandis qu'un processus de Poisson avec la même moyenne aurait une variance de 50 seulement.

Processus de Cox log-gaussien

Un champ aléatoire gaussien est un champ aléatoire tel que toutes les combinaisons linéaires des variables du champ sont des variables aléatoires gaussiennes. Ils seront étudiés dans le Chapitre 2. Le champ prenant des valeurs négatives, il n'est pas possible de définir un processus de Cox d'intensité un champ gaussien. C'est pourquoi on considère un processus de Cox log-gaussien qui est un processus de Cox d'intensité l'exponentielle d'un champ gaussien. Mathématiquement, si Y est un champ gaussien, on considère le champ $X(x) = \exp(Y(x))$ comme intensité aléatoire. Les paramètres sur lesquels on peut jouer sont les suivants :

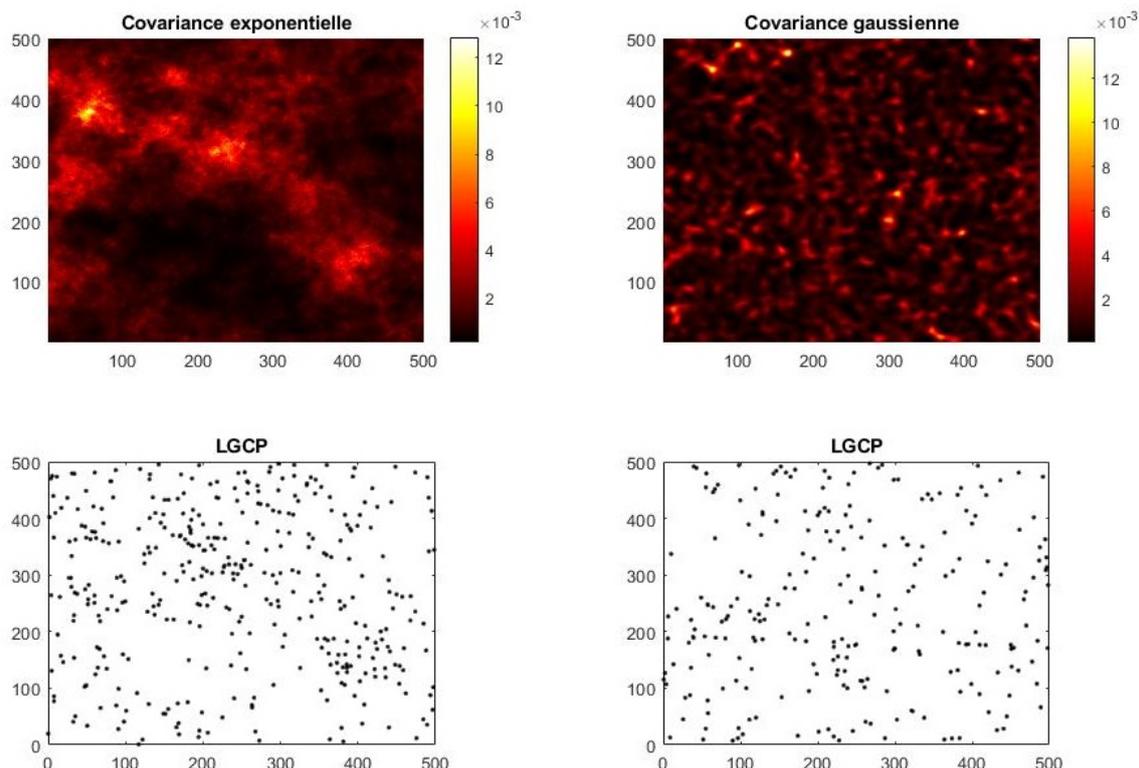


FIGURE 1.4.7 – Simulation du processus de Cox log-gaussien.

- la fonction moyenne du champ $m_Y(x) = \mathbb{E}[Y(x)]$ avec $x \in \mathbb{R}^d$,
- la fonction de covariance du champ $K_Y(x, y) = \text{Cov}[Y(x), Y(y)]$ avec $x, y \in \mathbb{R}^d$.

La propriété de stationnarité est souvent requise, facilitant grandement l'étude statistique d'un jeu de données. Dans ce cas, il est nécessaire que la fonction moyenne m_Y soit constante et que la fonction de covariance K_Y ne dépende que de la différence des deux points, i.e. $K_Y(x, y) = \tilde{K}_Y(x - y)$. Parfois il est possible de supposer également de l'isotropie, on a alors $K_Y(x, y) = \tilde{K}_Y(\|x - y\|)$. Réciproquement, si la fonction de covariance ne dépend que de la distance des points, alors le champ est isotrope, et par suite le processus de Cox l'est aussi. Des fonctions de covariance isotropes très utilisées en pratique sont par exemple la covariance exponentielle $K(r) = ve^{-\frac{r}{\sigma}}$ et la covariance gaussienne $K(r) = ve^{-\frac{r^2}{\sigma}}$, où v et s sont deux paramètres représentant respectivement un facteur d'échelle et un coefficient de lissage. Plus précisément, v détermine les variations des valeurs de la fonction par rapport à sa moyenne, une petite valeur de v impliquant une fonction de covariance proche de sa moyenne. De son côté, σ décrit la régularité de la fonction, une petite valeur signifiant que les valeurs de la fonction évoluent très vite. La Figure 1.4.7 représente deux simulations du processus de Cox log-gaussien sur $W = [0, 500]^2$. Les champs gaussiens ont une structure de covariance exponentielle (à droite) et gaussienne (à gauche) avec $v = 0.5$ et $\sigma = 100$ dans les deux cas. La moyenne du champ est $m = -7$ afin d'avoir un nombre de points pas trop important.

Propriété 1.4.1. *Soit Φ un processus de Cox log-gaussien et Y son champ gaussien associé. Alors la densité de produit d'ordre n est donnée par*

$$\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \exp(M(s_1, \dots, s_n) + K(s_1, \dots, s_n)/2)$$

avec

$$\begin{cases} M(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^n m(s_i) \\ K(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^n K_Y(s_i, s_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_Y(s_i, s_j) \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Démonstration. Voir [MSW98]. Comme Φ est un processus de Cox, alors par (1.4.1) on a

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n X(s_i) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \exp(Y(s_i)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^n Y(s_i) \right) \right] \end{aligned}$$

On reconnaît alors la transformée de Laplace de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n Y(s_i)$ évaluée en

1. Or par définition du champ gaussien, $\sum_{i=1}^n Y(s_i)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $M(s_1, \dots, s_n)$ et de variance $K(s_1, \dots, s_n)$. On sait par ailleurs que la transformée de Laplace de $\mathcal{N}(M(s_1, \dots, s_n), K(s_1, \dots, s_n))$ est donnée par

$$c(t) = \exp(tM(s_1, \dots, s_n) + \frac{t^2 K(s_1, \dots, s_n)}{2})$$

et ainsi la densité de produit d'ordre n est

$$\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \exp(M(s_1, \dots, s_n) + K(s_1, \dots, s_n)/2).$$

□

Corollaire 1.4.2. *Soit Φ un processus de Cox log-gaussien et Y son champ gaussien associé. Supposons que Y est stationnaire. Alors la densité de produit d'ordre n est donnée par*

$$\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{g}_\Phi(x_i - x_j)$$

avec $g_\Phi(x_1, x_2) = \tilde{g}_\Phi(x_1 - x_2) = \exp(\tilde{K}_Y(x_1 - x_2))$

Démonstration. Voir [MSW98]. Par la propriété (1.4.1) appliquée au cas où Y est stationnaire, c'est à dire où

$$\begin{cases} m_Y(x_i) = m_Y \\ K_Y(x_i, x_j) = \tilde{K}_Y(x_i - x_j) \end{cases} \quad (1.4.4)$$

on a $\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \exp(nm_Y + \tilde{K}_Y(0)n/2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{K}_Y(s_i - s_j))$.

Ainsi on a

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^{(1)}(s) = \exp(m_Y + \tilde{K}_Y(0)/2) \\ \lambda^{(2)}(s_1, s_2) = \exp(2m_Y + \tilde{K}_Y(0) + \tilde{K}_Y(s_1 - s_2)) \end{cases} \quad (1.4.5)$$

et donc $g_\Phi(s_1, s_2) = \tilde{g}_\Phi(s_1 - s_2) = \exp(\tilde{K}_Y(s_1 - s_2))$.

Finalement on a bien

$$\lambda^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{g}(s_i - s_j).$$

□

Sans surprise, la fonction de corrélation par paire du processus de Cox log-gaussien s'exprime directement à partir de la fonction de covariance du champ gaussien. La comparaison de la fonction de corrélation par paire avec celle d'un processus de Poisson nous permet de faire une première interprétation de la dépendance entre les points. Si la fonction de covariance K_Y est positive, alors la fonction de corrélation par paire g est supérieure à 1. Les points du processus de Cox auront ainsi tendance à s'attirer et on caractérisera de cluster ce processus. Dans le cas inverse, si la fonction de covariance K_Y est négative, la fonction de corrélation par paire g est inférieure à 1 comme pour les processus répulsifs. En pratique, souvent, on considère des fonctions de covariance K_Y positives résultant en des processus de Cox en cluster.

Processus de Cox shot noise

Un champ aléatoire shot noise est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$X(x) = \sum_{(x_i, m_i) \in \phi_X} m_i g(x - x_i), \quad (1.4.6)$$

où $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction déterministe appelée noyau, et ϕ_X est un processus de Poisson marqué sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda_X dx F(dm)$ i.e. les x_i sont les points d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ_X dans \mathbb{R}^d et les m_i sont les marques positives de loi F que l'on suppose à valeurs dans \mathbb{R}_+ , indépendant du processus de Poisson. Ce modèle de champs aléatoires est au cœur de cette thèse et sera détaillé par la suite. Pour l'instant, retenons simplement que c'est un champ positif dès que le noyau est positif et lorsqu'on prend un noyau intégrable avec une marque intégrable, le champ est localement intégrable. Dans toute la suite, nous ferons toujours ces hypothèses.

Définition 1.4.3. *Un processus de Cox shot noise Φ est un processus de Cox d'intensité un champ aléatoire shot noise défini par (1.4.6).*

Ce modèle a été principalement étudié par Møller dans [Mø103]. On a supposé ici que la mesure d'intensité du processus de Poisson Φ_X était de la forme $\lambda_X dx F(dm)$. Cela revient à supposer la stationnarité spatiale du processus. Les processus de Cox shot noise pourraient être définis plus largement, sans stationnarité, mais cela engendre des complications de calculs que nous préférons éviter ici. Le champ aléatoire X ainsi défini est stationnaire et par suite le processus de Cox Φ l'est aussi. Si l'on suppose que le noyau g est isotrope, le champ aléatoire X devient isotrope et le processus de Cox aussi. Sans aucune restriction, nous ferons toujours l'hypothèse que le noyau g est de masse totale 1, quitte à multiplier la marque par une constante.

Lorsque la marque m est constante, un processus de Cox shot noise avec une fonction déterministe g est équivalent à un processus de Neyman Scott avec un nombre d'enfants Poissonien et d'intensité du processus des enfants $x \mapsto mg(x)$. C'est pourquoi en reprenant $g(x) = \frac{\mathbf{1}(\|x\| \leq R)}{w_d R^d}$ le processus de Cox est équivalent au processus de Matern cluster, et en reprenant $g(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2})$ on retrouve le processus de Thomas. C'est en ce sens que les processus de Cox shot noise viennent généraliser les processus de Neyman-Scott, avec un nombre d'enfants Poissonien mais de paramètre aléatoire. Cependant, la classe des processus de Cox shot noise n'est pas plus large que celle des processus de Neyman-Scott car, rappelons-le, dans sa définition générale le nombre d'enfants par parent d'un processus de Neyman-Scott n'est pas obligatoirement de Poisson.

Propriété 1.4.4. *Soit Φ un processus de Cox shot noise stationnaire avec X défini par 1.4.6 avec $\|g\|_1 = 1$ et $M \sim F$. Alors sa constante d'intensité est*

$$\lambda_\Phi = \lambda_X \mathbb{E}[M] \quad (1.4.7)$$

De plus, si pour tout $s, t \in \mathbb{R}^2$, $I_2(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s-x)g(t-x)dx < \infty$, alors la fonction de corrélation par paire de Φ est

$$g_\Phi(s, t) = 1 + \frac{\mathbb{E}[M^2]I_2(s, t)}{\lambda_X \mathbb{E}[M]^2} = g_\Phi(s-t) \quad (1.4.8)$$

Démonstration. Par la formule de Campbell (1.3.3) on a

$$\begin{aligned} \lambda_\Phi(s) &= \mathbb{E} \left[\sum_{(x,m) \in \Phi_X} mg(s-x) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} mg(s-x) \lambda_X F(dm) dx \\ &= \lambda_X \mathbb{E}[M] \end{aligned}$$

Par la formule de Campbell (1.3.6) on a

$$\begin{aligned}
\lambda^{(2)}(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{(x,m)\in\Phi_X} mg(s-x) \sum_{(y,n)\in\Phi_X} ng(t-y)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{\neq \\ (x,m),(y,n)\in\Phi_X}} mg(s-x)ng(t-y)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{(x,m)\in\Phi_X} m^2g(s-x)g(t-x)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} mg(s-x)ng(t-y)\lambda_X^2 F(dm)dx F(dn)dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} m^2g(s-x)g(t-x)\lambda_X F(dm)dx \\
&= \lambda_\Phi(s)\lambda_\Phi(t) + \lambda_X\mathbb{E}[M^2]I_2(s, t)
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi que la fonction de corrélation par paire est

$$g_\Phi(s, t) = 1 + \frac{\mathbb{E}[M^2]I_2(s, t)}{\lambda_X\mathbb{E}[M]^2}$$

□

Le choix des notations est de suivre les notations classiques. C'est pourquoi, dans le cas d'un processus de Cox shot noise, il est nécessaire de noter g_Φ la fonction de corrélation par paire du processus de Cox Φ . Faisons attention à ne pas la confondre avec le noyau du champ shot noise g .

Puisque la fonction g est positive, la fonction de corrélation par paire g_Φ est supérieure à 1, valeur de référence du processus de Poisson. En ce sens, le processus de Cox shot noise est un modèle où les points sont en cluster.

Souvent en pratique, la condition $I_2(s, t) < \infty$ ne pose pas de problème. Il suffit, par exemple, de supposer que le noyau g soit borné en plus d'être intégrable. Nous présentons deux modèles intéressants par leurs possibilités de calculs, que l'on a déjà aperçues dans la classe des processus en cluster, sauf qu'ici nous ne supposerons pas forcément que la marque soit constante.

Exemple 1.4.5. Soit Φ un processus de Cox shot noise sur \mathbb{R}^2 de noyau

$$g(x) = \frac{\mathbf{1}(\|x\| \leq R)}{\pi R^2}$$

avec $R > 0$. En choisissant comme densité cette loi uniforme sur la boule de rayon R , et en prenant une marque constante, le modèle de Cox est équivalent au modèle de Matern cluster. Le modèle Φ est une extension du processus de Matern cluster puisqu'ici la marque peut être aléatoire. Le calcul de $I_2(s, t)$ revient à un calcul géométrique de l'aire

de l'intersection de deux cercles de rayon R dont les centres sont à distance $\|t - s\|$ l'un de l'autre. Ainsi on a

$$I_2(s, t) = \frac{2}{\pi^2 R^2} \left[\arccos\left(\frac{\|t - s\|}{2R}\right) - \frac{\|t - s\|}{2R} \sqrt{1 - \frac{\|t - s\|^2}{4R^2}} \right] \quad (1.4.9)$$

Le noyau étant isotrope, la fonction de corrélation par paire l'est aussi (comme on l'observe dans (1.4.9)) et par (1.4.8) on obtient

$$g_\Phi(r) = 1 + \frac{2\mathbb{E}[M^2]}{\lambda_X \mathbb{E}[M]^2 \pi^2 R^2} \left[\arccos\left(\frac{r}{2R}\right) - \frac{r}{2R} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}} \right] \quad (1.4.10)$$

pour $r \leq 2R$ et $g(r) = 1$ pour $r > 1$. Par (1.3.10) et des techniques d'intégration trigonométriques on a

$$K(r) = \pi r^2 + \frac{\mathbb{E}[M^2]}{\lambda_X \mathbb{E}[M]^2} \left[2 + \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{2r^2}{R^2} - 4 \right) \cos^{-1}\left(\frac{r}{2R}\right) - 2 \sin^{-1}\left(\frac{r}{2R}\right) + \frac{2r}{R} \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)^3} - \frac{3r}{R} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}} \right] \right] \quad (1.4.11)$$

pour $r \leq 2R$ et $K(r) = \pi r^2$ pour $r > 1$.

La représentation parents-enfants dans la Figure 1.4.8 permet de visualiser le lien entre les processus en cluster et les processus de Cox shot noise. La seule différence réside dans le choix de la marque. La marque exponentielle accentue la variance dans le nombre de points d'un cluster. On observe des parents qui ne donnent naissance à aucun enfant d'un côté et des parents qui ont beaucoup d'enfants de l'autre.

Exemple 1.4.6. Soit Φ un processus de Cox shot noise sur \mathbb{R}^2 de noyau

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec $\sigma > 0$. Si on choisit cette densité gaussienne de variance σ^2 , et en supposant de plus que la marque est constante, le modèle de Cox est équivalent au modèle de Thomas. Ici la marque n'est plus obligatoirement constante, elle est aléatoire de loi F , et en ce sens Φ est une extension du processus de Thomas. Le calcul de $I_2(s, t)$ revient à calculer la densité de la loi de la somme de deux gaussiennes de variance σ^2 centrées en s et t . Ainsi on a

$$I_2(s, t) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|s - t\|^2}{4\sigma^2}\right) \quad (1.4.12)$$

Là aussi la fonction de corrélation est isotrope (puisque le noyau g l'est), ainsi par (1.4.8) on obtient

$$g_\Phi(r) = 1 + \frac{\mathbb{E}[M^2]}{\lambda_X \mathbb{E}[M]^2} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2}\right) \quad (1.4.13)$$

Par (1.3.10) on a ensuite

$$K(r) = \pi r^2 + \frac{\mathbb{E}[M^2]}{\lambda_X \mathbb{E}[M]^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2}\right)\right) \quad (1.4.14)$$

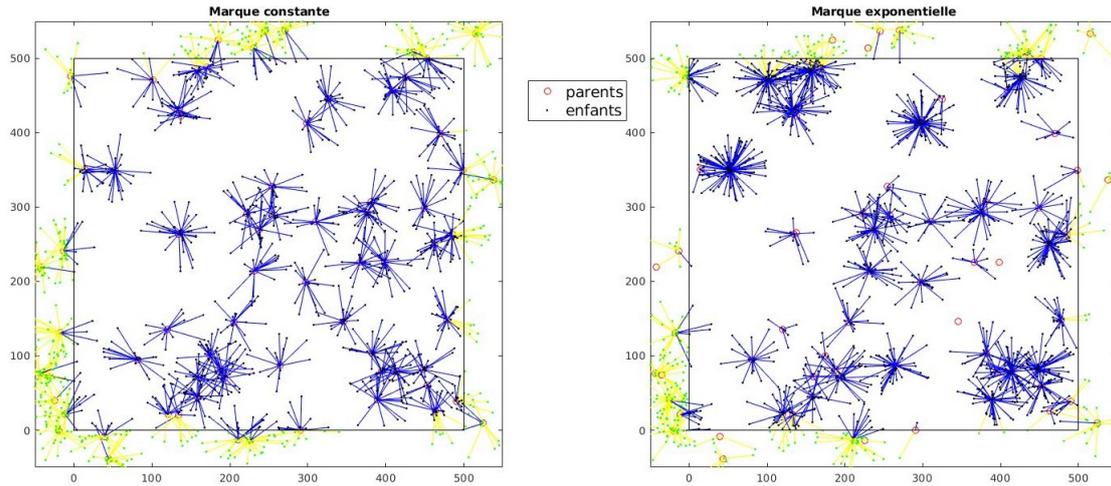


FIGURE 1.4.8 – Simulations sur $W = [0, 500]^2$ du processus de Cox shot noise de noyau la boule de rayon 50. L'intensité $\lambda = \frac{50}{500^2}$ correspond à une moyenne de 50 points sources du champ shot noise sur W . Ce sont les mêmes points sources sur les deux figures. A gauche, la marque est constante égale à 20, tandis qu'à droite la marque est de loi exponentielle de moyenne 20. Ainsi, le nombre de points moyen du processus de Cox dans W est de 1000 sur les deux simulations. Seuls les points enfants (en noir) sont finalement observés.

D'autres exemples de noyaux ont été considérés dans [JGW13] comme le processus en cluster de Cauchy et celui de variance-gamma.

Propriété 1.4.7. *Soit Φ un processus de Cox shot noise stationnaire. Sa fonctionnelle génératrice est donnée par*

$$G_{\Phi}(u) = \mathbb{E} \left[- \prod_{(x,m) \in \Phi_X} \exp \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} (1 - u(s)) m g(s - x) F(dm) ds \right) \right]$$

pour toute fonction $u : S \rightarrow [0, 1]$ telle que $\{s \in S \mid u(s) < 1\}$ soit borné.

1.5 Estimation et inférence

1.5.1 Estimation des statistiques

L'étude des données sous forme de points repose en partie sur la bonne estimation des statistiques étudiées à la section 1.3. Cette analyse exploratoire permet ensuite de tester l'homogénéité dans la répartition des points, leur dépendance entre eux, ou encore d'inférer sur les paramètres d'un modèle. Cette section fait un état de l'art sur les différents estimateurs non paramétriques de ces statistiques. Des études de cas où l'on estime ces statistiques se trouvent dans [Dig13]. Dans toute la suite, on supposera observer une seule fois un processus sur une fenêtre bornée $W \subset \mathbb{R}^2$. Comme souvent lorsqu'on étudie des processus spatiaux, l'observation sur une fenêtre bornée W n'implique en aucun cas

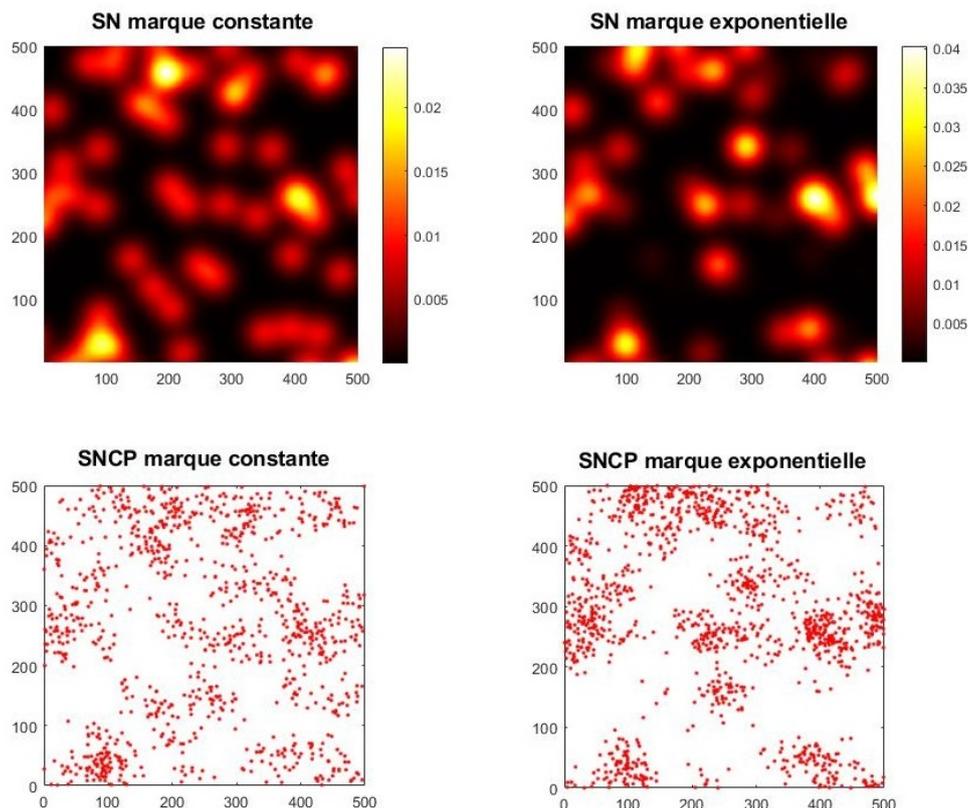


FIGURE 1.4.9 – Simulations sur $W = [0, 500]^2$ du processus de Cox shot noise de noyau la gaussienne de variance 50^2 . En haut, les champs aléatoires shot noise sont d'intensité $\lambda = \frac{50}{500^2}$, correspondant à une moyenne de 50 points sources du champ shot noise sur W . Ce sont les mêmes points sources sur les deux champs. A gauche, la marque est constante égale à 20, tandis qu'à droite la marque est de loi exponentielle de moyenne 20. En bas, un processus de Cox associé à son champ aléatoire. Ainsi, le nombre de points moyen du processus de Cox dans W est de 1000 sur les deux simulations.

que le processus n'est défini que sur W . Bien au contraire, il est souvent implicite que le modèle étudié soit défini sur \mathbb{R}^2 et que W ne soit qu'une petite région où l'on observe les points. Les statistiques définies à la section 1.3 en sont en partie impactées. Par exemple, toutes les statistiques de distance entre points ne peuvent que rarement être estimées sans prendre une correction liée aux effets de bords. En effet, il est possible que le plus proche voisin d'un point à la frontière de W soit à l'extérieur de W . Cette notion importante de frontière dépend des statistiques que l'on considère. Par exemple pour les fonctions $r \mapsto F(r)$ et $r \mapsto G(r)$, la correction n'est pas la même selon la valeur de r (voir Figure 1.5.10).

Estimation de l'intensité : Tout comme la moyenne pour un échantillon de variables aléatoires réelles, l'intensité est la première statistique que l'on souhaite estimer. Si l'on suppose que l'intensité est constante, alors on estime naturellement l'intensité par

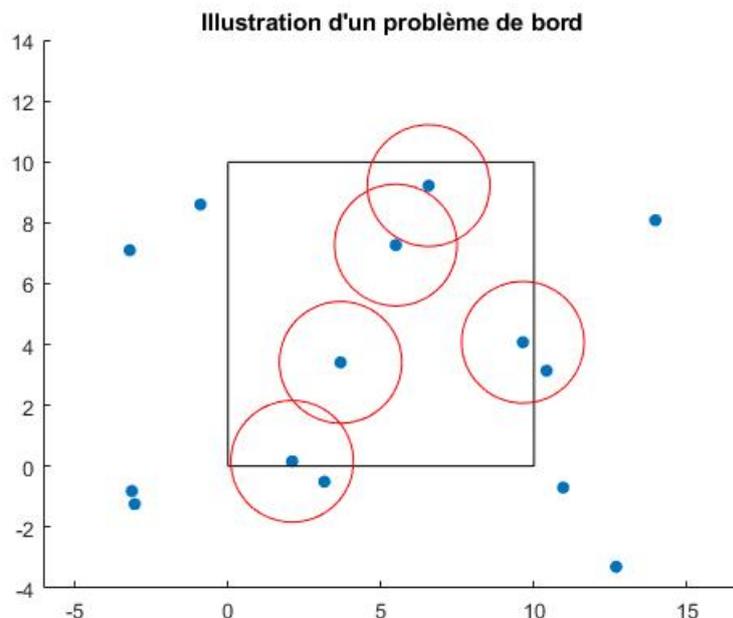


FIGURE 1.5.10 – Illustration d'un problème de bord. Des points en dehors de la fenêtre d'observation $W = [0, 10]^2$ doivent être pris en compte lors de l'estimation de $F(2)$ et $G(2)$.

$$\hat{\lambda} = \frac{N_{\Phi}(W)}{|W|} \quad (1.5.1)$$

Cet estimateur est non biaisé. Dans le cas d'un processus de Poisson on peut faire des calculs un peu plus fins. Tout d'abord la variance de $\hat{\lambda}$ est donnée par $\frac{\lambda}{|W|}$. C'est aussi un estimateur consistant (au sens où l'on agrandit à l'infini la fenêtre d'observation) et asymptotiquement normal. Dans les autres cas, une étude asymptotique de $\hat{\lambda}$ peut être possible et on se référera à [HP10] pour plus de détails sur le sujet.

Maintenant, supposons que les points ne sont pas répartis partout selon la même intensité. Il n'est alors plus question d'estimer un nombre réel mais une fonction $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Un modèle dépendant souvent de plusieurs paramètres peut être suggéré dans certain cas. La forme de la fonction d'intensité est alors connue et son estimation se transforme en une estimation paramétrique. Chaque modèle ayant sa propre forme d'intensité, nous ne nous attarderons pas sur ce type d'estimation. À titre d'exemple [Waa07] estime l'intensité d'un processus de Neymann-Scott et procède à une étude sur la position des arbres dans une forêt tropicale. Si l'on a aucun a priori sur la forme de la fonction d'intensité, il est nécessaire d'utiliser un estimateur non paramétrique. Une revue des propriétés d'estimateur par tessellation et par noyau peut être trouvée dans [van12]. L'estimateur à noyau est une façon d'estimer l'intensité en lissant les points. L'idée est de transformer les points (vue comme des masses de Dirac) en fonction d'intensité par un lissage autour

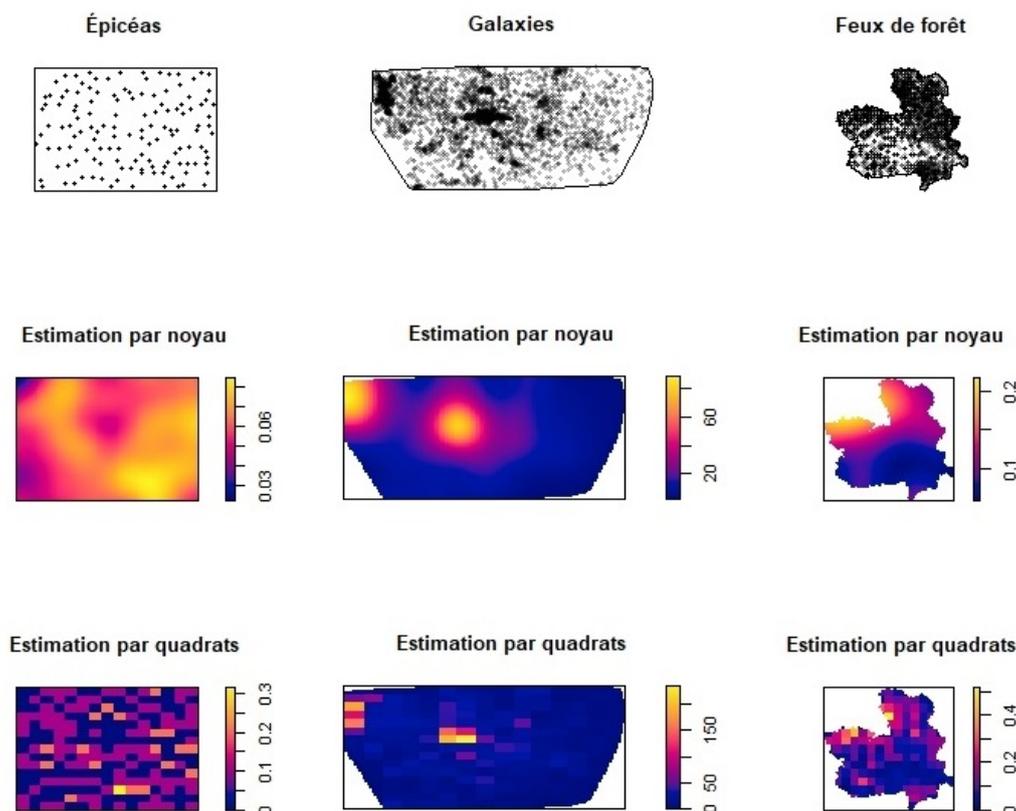


FIGURE 1.5.11 – Estimation de l'intensité sur les données présentées à la Figure 1.0.1. La deuxième ligne correspond à l'estimation à noyau et la troisième ligne correspond à l'estimation par quadrats.

de chaque point. Il a été introduit par Diggle [Dig85] :

$$\hat{\lambda}_b(s) = \sum_{x \in \Phi \cap W} k_b(s - x) \quad (1.5.2)$$

avec $k_b(s) = \frac{k(s/b)}{b^2}$, où b joue le rôle de bande de lissage et k est une fonction de masse totale égale à 1 que l'on appelle noyau. Il est difficile de ne pas voir le lien entre l'estimateur à noyau et un champ aléatoire shot noise. Des exemples classiques de noyau sont le noyau gaussien $\frac{1}{2\pi} \exp(-\|s\|^2/2)$ et le noyau d'Epanechnikov $\prod_{i=1}^2 \frac{3}{4} \mathbf{1}(|s_i| \leq 1)(1 - |s_i|^2)$. La principale difficulté de ce type d'estimation ne réside pas tellement dans les choix de noyau mais plutôt dans le choix de la bande de lissage. Pour le noyau gaussien, cela revient au choix de la variance. Une valeur trop petite de b peut produire une estimation trop pointue, tandis qu'une trop grande valeur de b produira une estimation trop lisse, se rapprochant de la constante du cas stationnaire. Différentes règles existent mais aucune ne donne une entière satisfaction. Dans spatstat, plusieurs options permettent de déterminer b selon le critère qui nous importe [BRT15].

L'estimateur défini par (1.5.2) sous-estime l'intensité et particulièrement au bord de

W . En effet, en considérant ce type d'estimateur, la contribution provenant d'éventuels points à l'extérieur de W n'est pas prise en compte. Pour atténuer ce problème, il est nécessaire d'introduire le facteur de correction de bord $e(s) = \int_W k_b(s-t)dt$ qui représente la perte d'intensité en s liée aux effets de bords. On considère alors les estimateurs suivants :

$$\widehat{\lambda}_b^U(s) = \frac{1}{e(s)} \sum_{x \in \Phi \cap W} k_b(s-x) \quad (1.5.3)$$

$$\widehat{\lambda}_b^L(s) = \sum_{x \in \Phi \cap W} \frac{k_b(s-x)}{e(x)} \quad (1.5.4)$$

La différence se trouve uniquement dans la correction : $\widehat{\lambda}_b^U(s)$ est corrigé uniformément tandis que $\widehat{\lambda}_b^L(s)$ est corrigé localement. L'estimateur $\widehat{\lambda}_b^U$ est non biaisé lorsque l'intensité est constante mais légèrement biaisé dans le cas général [BRT15]. L'estimateur $\widehat{\lambda}_b^L$ est lui biaisé dans tous les cas, mais possède une plus petite erreur quadratique. Il permet également de conserver le nombre total de points observés [MW04]

$$\mathbb{E} \left[\int_W \widehat{\lambda}_b^L(s) \right] = N_\Phi(W) \quad (1.5.5)$$

La deuxième ligne de la Figure 1.5.11 représente les estimateurs à noyau des données présentées à la Figure 1.0.1. Le noyau utilisé est le noyau gaussien (corrigé uniformément comme dans 1.5.3) et la bande de lissage b est choisie par une règle de décision dépendant uniquement de la fenêtre d'observation W . L'intensité de la position des arbres est presque constante, contrairement à l'intensité de la position des galaxies et des feux de forêt, où l'on observe une vraie différence d'intensité spatiale. D'autres estimateurs à noyau ont été construits à partir de (1.5.2) notamment par Guan qui a proposé un estimateur consistant sous certaines hypothèses [Gua08].

L'estimation de l'intensité d'un processus de Cox permet de retrouver le champ aléatoire non observé sous-jacent. Un champ aléatoire est souvent un objet lisse. C'est en particulier le cas d'un champ shot noise avec un noyau lisse. Un exemple très utilisé, pour de nombreuses motivations qui seront détaillées dans les prochains chapitres, est lorsque l'on considère un champ shot noise avec un noyau gaussien. Ce sont en particulier ces champs qui sont utilisés dans le processus de Thomas et plus généralement dans les modèles présentés à l'Exemple 1.4.6. L'estimateur à noyau (lisse) a l'avantage d'être un estimateur lisse et par suite il est intéressant de l'utiliser pour estimer l'intensité d'un processus de Cox d'une intensité lisse. Comme énoncé précédemment, l'estimateur à noyau n'est rien d'autre qu'un champ shot noise sur les points observés. Ainsi, lorsqu'on considère un processus de Cox shot noise, l'estimateur à noyau est lui-même un champ shot noise. Ne nous faisons pas d'illusion : un shot noise sur les points enfants ne peut pas prétendre à être égal à un shot noise sur les points parents. C'est ce qu'on observe sur la Figure 1.5.12 où l'on a simulé un champ shot noise, un processus de Cox à partir de ce champ shot noise, ainsi que deux estimations de l'intensité par la méthode des noyaux. Le champ

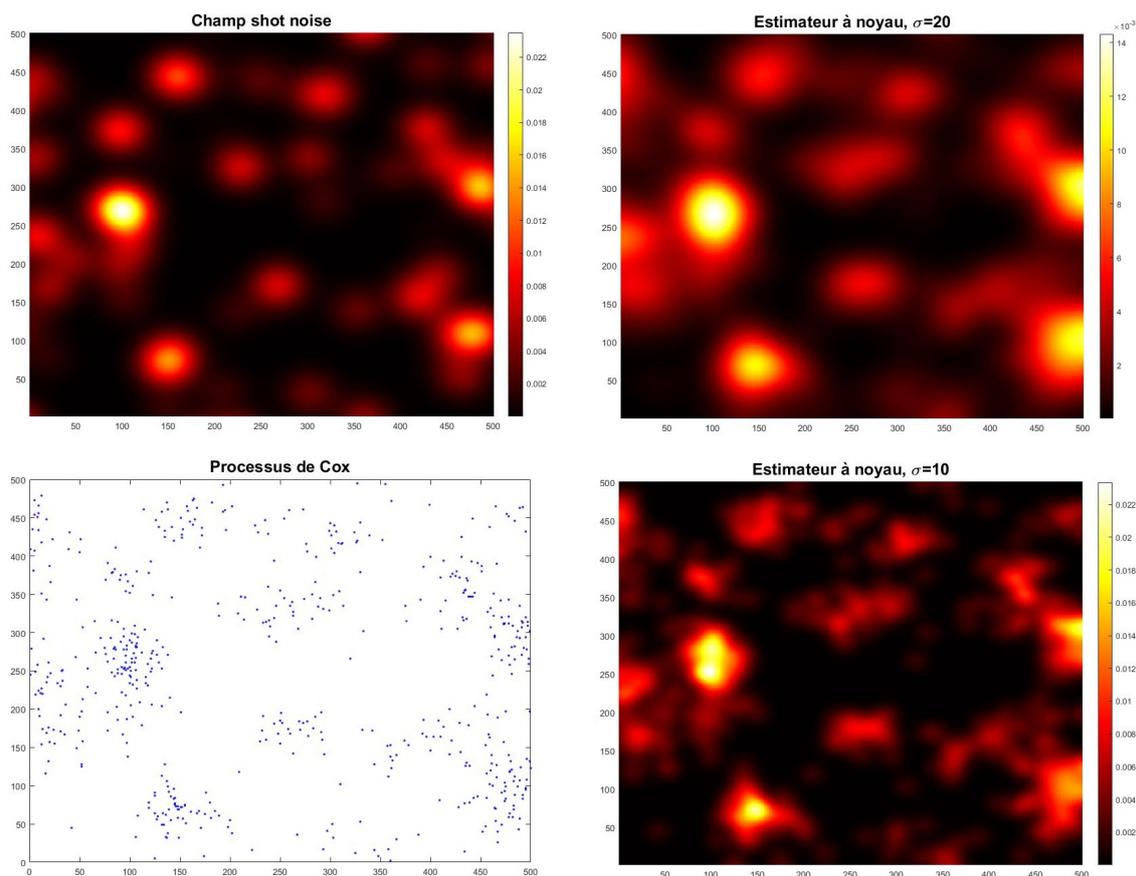


FIGURE 1.5.12 – Estimation de l'intensité d'un processus de Cox shot noise sur $W = [0, 500]^2$. En haut à gauche, le champ aléatoire shot noise avec un noyau gaussien de variance 20^2 , marque exponentielle de moyenne 10 et intensité du processus ponctuel sous-jacent $\lambda = \frac{50}{500^2}$. En bas à gauche, une réalisation du processus de Cox shot noise associé au champ du dessus. A droite, deux estimations de l'intensité par la méthode des noyaux. En haut à droite, le noyau utilisé est le noyau gaussien de variance 20^2 . En bas à droite, le noyau utilisé est le noyau gaussien de variance 10^2 .

shot noise étant lisse avec un noyau gaussien de paramètre $\sigma = 20$, l'intensité a été estimée à partir d'un noyau gaussien de paramètre $\sigma = 20$ (en haut) et $\sigma = 10$ (en bas). L'estimation est dans les deux cas assez satisfaisante, bien que comme écrit plus haut, un champ shot noise sur les points enfants ne peut pas être exactement égal à un champ shot noise sur les points parents.

Une autre façon d'estimer l'intensité de façon non paramétrique est d'utiliser la méthode des quadrats. L'idée est de diviser la fenêtre d'observation W en plusieurs régions disjointes B_1, \dots, B_m . On suppose souvent que ces régions sont de même volume. On peut imaginer simplement que W est un carré et qu'on le divise en plusieurs petits carrés. On estime alors l'intensité sur chaque petit carré par (1.5.1) comme si le processus était homogène dans ce carré. Cette hypothèse peut être loin de la vérité mais si l'intensité est assez lisse et que les quadrats ne sont pas trop grands, alors cela revient à supposer que

l'intensité est constante par quadrat pas trop grand, ce qui n'est pas très loin de la vérité. Algorithmiquement le seul choix consiste dans le nombre, et par conséquent le volume, des quadrats. Si le nombre de quadrats est trop faible alors l'approximation de l'intensité par une intensité constante par quadrats est grossière. Au contraire, si le nombre de quadrats est trop grand, ils isolent trop les points et par conséquent l'estimateur ne sera pas du tout lisse et possédera beaucoup de 0. Dans tous les cas, l'estimateur d'intensité obtenu n'est pas une fonction lisse et cela en pose les limites. La troisième ligne de la Figure 1.5.11 représente l'estimation par quadrats où on a choisi arbitrairement 15×15 quadrats. Le résultat n'est pas très bon pour la position des arbres, où le nombre de points est un peu trop petit pour choisir une répartition en 15^2 quadrats. Le résultat est assez convenable pour les deux autres exemples, le nombre de points étant beaucoup plus important. Concernant l'estimation de l'intensité d'un processus de Cox, la Figure 1.5.13 représente la simulation d'un champ shot noise (le même qu'à la Figure 1.5.12) et l'estimation par quadrats de l'intensité du processus de Cox (le même qu'à la Figure 1.5.12). Sans perte de généralité, W étant carré, les quadrats sont des carrés et le seul choix est celui du nombre de carrés formant la partition de W . On observe que, comme dit précédemment, l'intensité n'est pas du tout lisse, et ce peu importe le choix du nombre de quadrats. Visuellement, les estimations ressemblent moins à l'intensité du champ shot noise qu'aux estimateurs à noyau de la Figure 1.5.12. De plus, il n'est pas facile de désigner le "meilleur" estimateur parmi les 3 choix du nombre de quadrats proposés. Enfin, il est intéressant de noter qu'une application de l'estimateur par quadrats est que l'on peut construire un test d'homogénéité [BRT15].

Dans un style similaire, les estimations par tessellations méritent également d'être citées car elles sont faciles d'utilisation. Le principe d'une tessellation est de diviser le fenêtre d'observation en régions disjointes, comme pour les quadrats, mais à la différence que cette division dépend des points. La plus connue est la tessellation de Voronoi où chaque point $x_i \in \Phi$ est au centre d'une cellule représentant tous les points de W qui ont x_i comme point le plus proche (voir [Aur91] pour plus de détails à ce sujet). L'estimateur d'intensité de Voronoi consiste ensuite en une intensité constante, l'inverse de son aire, sur chaque cellule. Une méthode avec des résultats théoriques et numériques de qualité a récemment été mise en œuvre par le lissage et le rééchantillonnage de cet estimateur [MCR⁺19].

Estimation des statistiques du second ordre : La comparaison d'une estimation d'une fonction de corrélation (principalement g, K ou L) avec une formule théorique comme celle d'un processus de Poisson permet deux choses : choisir un modèle et inférer sur ce modèle. Dans toute cette partie, nous supposons que le processus est stationnaire. Cette hypothèse est motivée par le fait qu'une différence entre l'estimateur empirique et la forme théorique ne provient pas forcément de la corrélation entre les points. Elle peut être, comme dans le cas d'un processus de Poisson non homogène, la cause d'une variation spatiale de l'intensité.

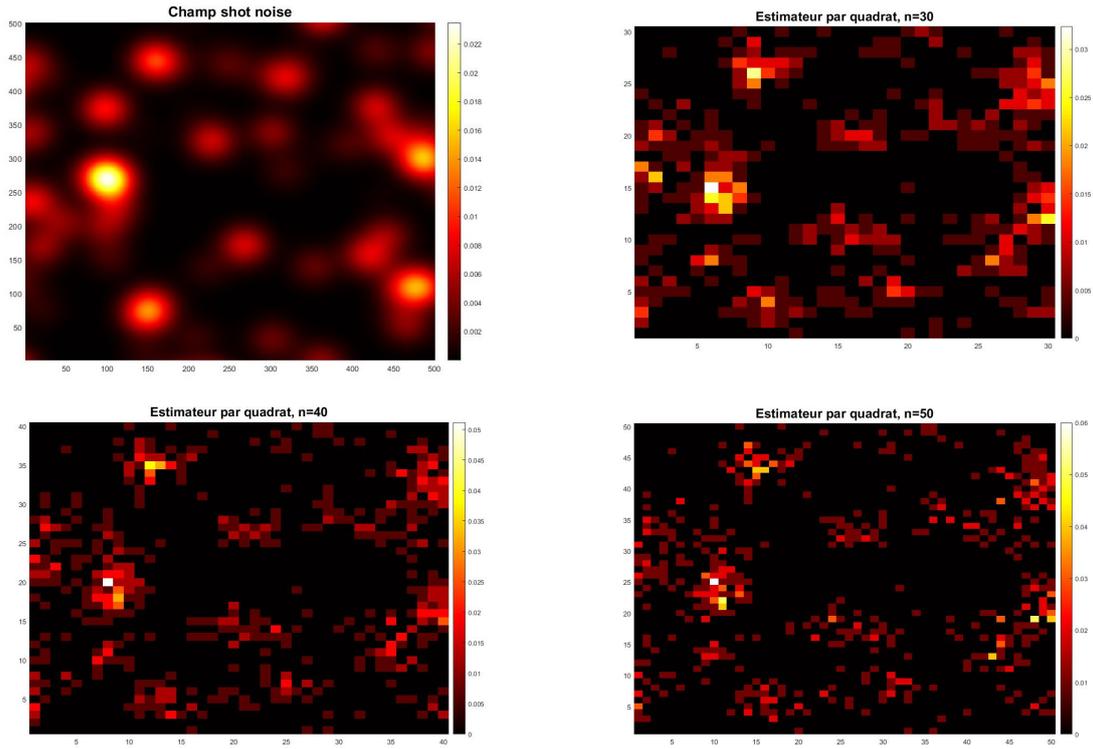


FIGURE 1.5.13 – Estimation de l’intensité d’un processus de Cox shot noise sur $W = [0, 500]^2$. En haut à gauche, le même champ aléatoire qu’à la Figure 1.5.12. Les 3 autres figures sont des estimations de l’intensité du processus de Cox de la Figure 1.5.12 par la méthode des quadrats avec 30^2 , 40^2 , et 50^2 quadrats.

En pratique, le carré de l’intensité λ^2 qui intervient dans la fonction K n’est pas connu et on doit l’estimer par (1.5.1). L’estimateur empirique de la fonction K est alors donné par

$$\widehat{K}(r) = \frac{|W|}{N_{\Phi}(W)^2} \sum_{x,y \in \Phi \cap W}^{\neq} \mathbf{1}[\|x - y\| \leq r] \quad (1.5.6)$$

On peut aussi estimer λ^2 par $\frac{N_{\Phi}(W)(N_{\Phi}(W)-1)}{|W|^2}$ qui est non biaisé pour un processus de Poisson [BRT15]. Si W est une grande fenêtre d’observation alors l’estimateur défini par (1.5.6) n’est pas dérangeant. Dans le cas contraire, cette statistique est clairement sous-estimée (voir Figure 1.5.14) par le fait qu’on ne distingue pas un point $x \in \Phi$ à la frontière de W qui ne peut avoir qu’un nombre restreint de voisins à distance plus petite que r (une partie de la boule de centre x_1 est de rayon r tombe à l’extérieur de W , voir Figure 1.5.10) d’un autre point de Φ plus loin de la frontière et dont sa boule de rayon r est entièrement dans W .

La première stratégie que l’on peut adopter est de ne considérer que les points $x \in \Phi$ dont tous les potentiels voisins sont dans W . Autrement dit, pour $r > 0$, on ne considère que les $x \in \Phi$ dont leur boule de rayon r est incluse dans W . C’est

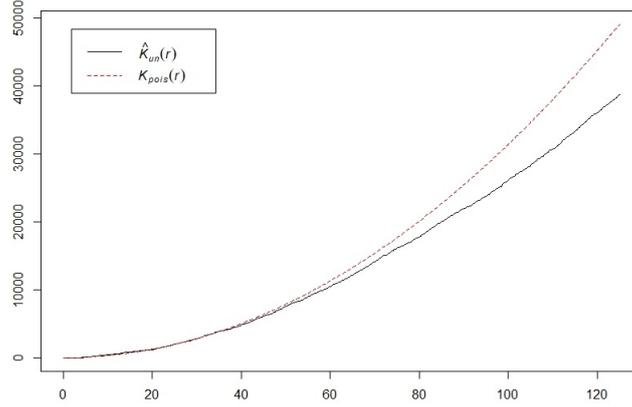


FIGURE 1.5.14 – Estimation de la fonction K d'un processus de Poisson simulé sur $W = [0, 500]^2$ et d'intensité $\lambda = \frac{200}{500^2}$.

pourquoi on introduit $d(s, \partial W)$, la plus petite distance entre s et la frontière de W et $W_{\ominus r} = \{s \in W \mid d(s, \partial W) \geq r\}$, l'ensemble des points de W dont la distance avec la frontière de W est plus petite que r . L'estimateur de K devient alors

$$\widehat{K}_{bord}(r) = \frac{|W|}{N_{\Phi}(W)N_{\Phi}(W_{\ominus r})} \sum_{x \in \Phi \cap W_{\ominus r}} \sum_{y \in \Phi \cap W, y \neq x} \mathbf{1}[\|x - y\| \leq r] \quad (1.5.7)$$

Bien qu'individuellement non biaisés, le mélange des différents termes intervenant dans l'estimateur (1.5.7) fait de \widehat{K}_{bord} un estimateur légèrement biaisé. Le principal inconvénient de ce type de correction de bord est qu'on perd de l'information en ne considérant qu'une partie des points. Pour une fenêtre assez grande, cela ne pose pas de problème important, mais pour des données plus petites, cela peut vite poser des problèmes pour des r assez grands.

Une autre façon de voir les problèmes de bord est celui du biais de simulation. L'idée est d'étendre la fenêtre W en se disant qu'un point proche de la frontière pourrait avoir un r -voisin à l'extérieur de W . Prenons l'hypothèse que le processus soit isotrope sur \mathbb{R}^2 , alors la probabilité qu'un voisin à distance r soit tombé à l'intérieur de W est la fraction de la longueur du cercle de centre x et de rayon r se trouvant à l'extérieur de W sur la longueur totale du cercle, autrement dit la quantité

$$p(x, r) = \frac{\nu_1(W \cap \partial b(x, r))}{2\pi r}$$

On définit alors l'estimateur corrigé par

$$\widehat{K}_{iso}(r) = \frac{|W|}{N_{\Phi}(W)^2} \sum_{x, y \in \Phi \cap W}^{\neq} \mathbf{1}[\|x - y\| \leq r] \frac{1}{p(x, \|x - y\|)} \quad (1.5.8)$$

Sans surprise, cette correction de bord est de plus en plus conséquente pour des valeurs de r de plus en plus grandes.

Une troisième méthode qui mérite d'être citée est celle de la correction par translation.

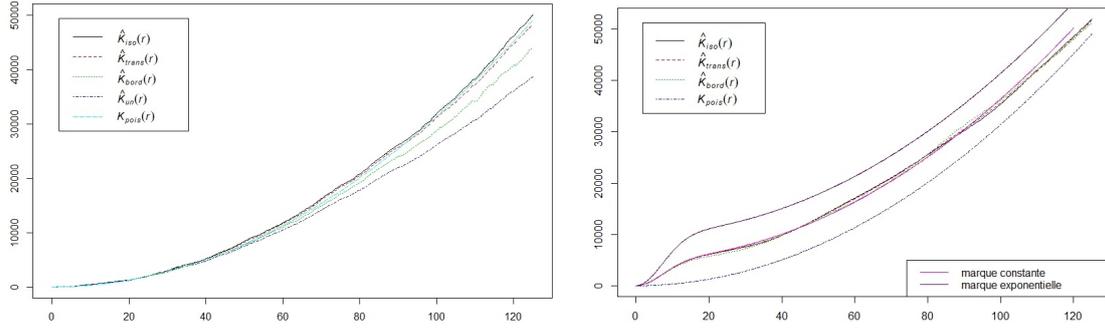


FIGURE 1.5.15 – À gauche : estimation de la fonction K sur la même simulation que la Figure 1.5.14. À droite : estimation de la fonction K d’une simulation sur $W = [0, 500]^2$ du SNCP d’intensité $\lambda = \frac{50}{500^2}$ avec une marque constante $m = 20$ et un noyau gaussien de paramètre $\sigma = 5$.

Soit $W_x = \{x + y, y \in W\}$ le translaté de W par x . Considérons un point de départ x et un point d’arrivée y possible (au sens que les deux points soient dans W). Notons $v = y - x$ le vecteur qui va de x à y . La condition que les deux points soient dans W se réécrit comme $x \in W \cap W_{-v}$. La probabilité que le point de départ soit dans cet ensemble est représentée par son volume, qui par exemple n’est pas difficile à calculer si W est un rectangle. L’estimateur corrigé devient alors

$$\hat{K}_{trans}(r) = \frac{|W|}{N_{\Phi}(W)^2} \sum_{x,y \in \Phi \cap W}^{\neq} \mathbf{1}[||x - y|| \leq r] \frac{|W|}{|W \cap W_{x-y}|} \quad (1.5.9)$$

La partie gauche de la Figure 1.5.15 illustre parfaitement l’importance des corrections de bord. Les trois corrections décrites par les équations (1.5.7), (1.5.8) et (1.5.9) sont représentées et améliorent l’estimation. On remarque néanmoins que pour cette simulation, la correction en réduisant la fenêtre d’observation et donnée par 1.5.7 est moins bonne que les deux autres corrections. La partie droite de la Figure 1.5.15 illustre le regroupement des points du SNCP (processus de Cox shot noise). On compare cette estimation avec trois fonctions théoriques : SNCP marque constante, Poisson homogène et SNCP marque exponentielle. Les estimations sont corrigées par les correcteurs de bord (1.5.7), (1.5.8) et (1.5.9). Les courbes empiriques sont proches les unes des autres en suivant de très près la courbe théorique, en particulier pour les petites valeurs de r , et cela montre l’importance de cette statistique qui permet de distinguer des modèles.

La fonction L peut être estimée simplement à partir des estimations de la fonction K et par la relation (1.3.11). La comparaison entre la fonction L d’un processus de Poisson (qui, rappelons le, est l’identité) et l’estimation à partir de données permet d’indiquer si les points sont indépendants, répulsifs ou en cluster. La Figure 1.5.16 illustre cette séparation : la position des arbres est régulière, tandis que les galaxies ont tendance à se regrouper en cluster. Un point négatif des fonctions K et L est leur côté cumulatif : elles prennent en compte tous les couples de points à distance plus petite ou égale à r . La fonction de corrélation par paire arrive alors comme une alternative intéressante, puisqu’elle

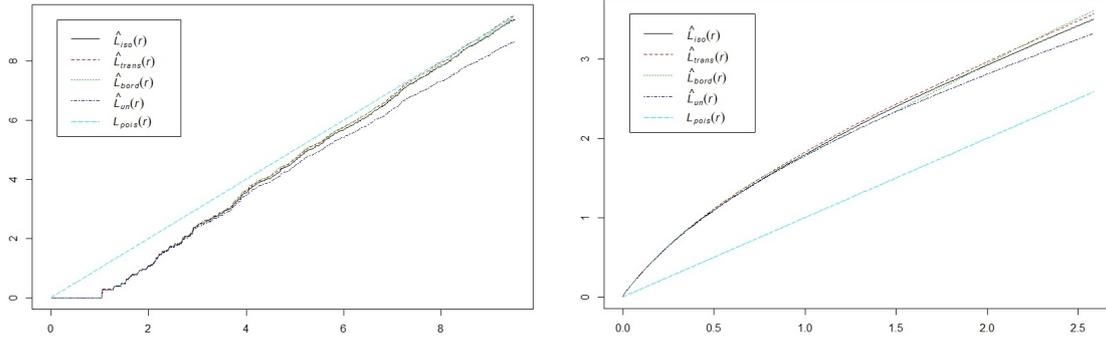


FIGURE 1.5.16 – Estimation de la fonction L sur les données présentées à la Figure 1.0.1 : à gauche la position des arbres, à droite la position des galaxies.

ne considère que les points à distance exactement égale à r . Supposons que le processus Φ est isotrope sur \mathbb{R}^2 et par un abus de notation, on gardera $g(s, t) = g(\|s - t\|)$. Rappelons que dans ce cas, on peut également définir g à partir de K par

$$g(r) = \frac{K'(r)}{2\pi r} \quad (1.5.10)$$

Il n'y a pas de "meilleure" statistique entre g et K . Il semble que K soit très performante pour inférer sur les modèles. De son côté g permet une interprétation plus précise que K : g ne prend en compte que les couples de points à distance r tandis que K prend en compte tous les couples de points à distance plus petite ou égale à r . Cette nature cumulative peut rendre difficile la compréhension du processus. L'estimation de la fonction g ne peut pas se faire directement à partir de la dérivée de l'estimation de la fonction K , étant donnée la forme constante par morceaux de l'estimateur \hat{K} . Le lissage par noyau, méthode déjà rencontrée dans l'estimation de l'intensité, permet de résoudre ce problème. L'idée est de remplacer l'indicatrice $\mathbf{1}(\|x - y\| \leq r)$ par une fonction plus lisse $k(r - \|x - y\|)$:

$$\hat{g}(r) = \frac{|W|}{2\pi r N_{\Phi}(W)^2} \sum_{x, y \in \Phi \cap W}^{\neq} k_b(r - \|x - y\|) \quad (1.5.11)$$

avec k_b défini au dessus comme un noyau de lissage. Pour les mêmes raisons que la fonction K , cet estimateur est sous estimé à cause des problèmes de bords. Le même style de corrections utilisées au dessus pour la fonction K peut être utilisé pour la fonction g . Pour ne pas alourdir cette partie, nous ne les détaillerons pas ici mais les lecteurs intéressés peuvent consulter [IPSS08, BRT15].

Estimation des fonctions de distance : Soit $I \subset W$ un ensemble fini de points dans W choisis arbitrairement et indépendamment de Φ . Notons $\#I$ son cardinal. Alors, pour tout $r \geq 0$, on estime la fonction de contact F par

$$\hat{F}(r) = \frac{1}{\#I} \sum_{s_i \in I} \mathbf{1}(\Phi \cap W \cap b(s_i, r) \neq \emptyset) \quad (1.5.12)$$

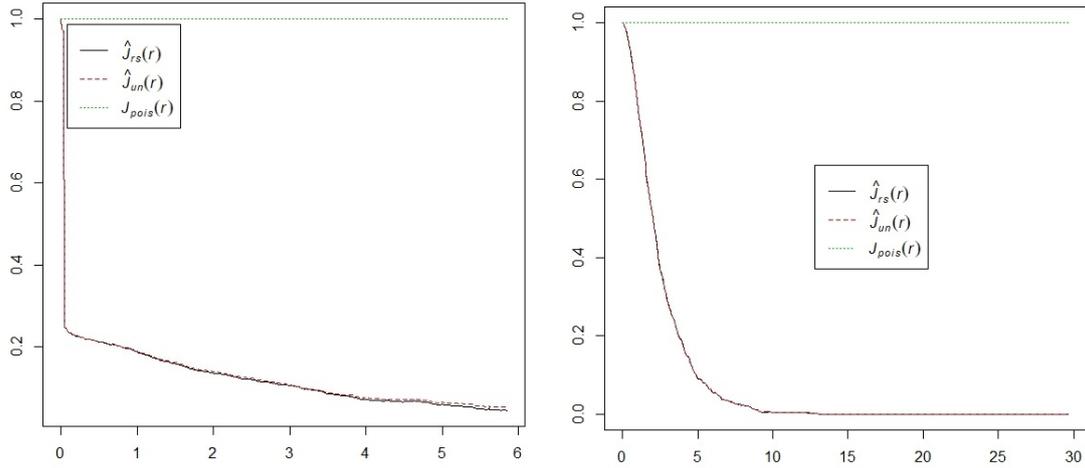


FIGURE 1.5.17 – Estimation de la fonction J : à gauche sur la position des feux de forêt, à droite sur la simulation du SNCP utilisée à la Figure 1.5.15.

Sans les effets de bord, cet estimateur serait non biaisé. Le fait d'intersecter le processus avec la fenêtre W rend (1.5.12) biaisé. Encore une fois, cet estimateur est biaisé par le fait qu'il pourrait y avoir des points du processus à l'extérieur de W mais à distance plus petite que r . Avant de proposer des corrections de bord, on estime la fonction du plus proche voisin par

$$\widehat{G}(r) = \frac{1}{N_{\Phi}(W)} \sum_{x \in \Phi \cap W} \mathbf{1}((\Phi \setminus x) \cap W \cap b(x, r) \neq \emptyset) \quad (1.5.13)$$

Ces deux estimateurs sans correction de bord peuvent être mis en place si on est intéressé que pour des petites valeurs de r ou si W est très grand. Il existe sinon des méthodes de correction similaires aux méthodes rencontrées lors de l'estimation de la fonction K . La correction la plus rencontrée pour ces fonctions est celle de la restriction au bord. Pour la fonction F cela revient à supposer que les points $s_i \in I$ choisis arbitrairement sont à distance de W plus petite que r . L'idée ici n'est pas de choisir de nouveaux points s_i pour toute valeur de r , mais pour r fixé de ne considérer que $I_r = I \cap W_{\ominus r}$:

$$\widehat{F}_{bord}(r) = \frac{1}{\#I_r} \sum_{s_i \in I_r} \mathbf{1}(\Phi \cap W \cap b(s_i, r) \neq \emptyset) \quad (1.5.14)$$

L'estimateur (1.5.14) ainsi défini est sans biais. Ce n'est pas exactement pareil avec la fonction g puisque l'estimateur devient

$$\widehat{G}_{bord}(r) = \frac{1}{N_{\Phi}(W_{\ominus r})} \sum_{x \in \Phi \cap W_{\ominus r}} \mathbf{1}((\Phi \setminus x) \cap W \cap b(x, r) \neq \emptyset) \quad (1.5.15)$$

L'estimateur (1.5.15) ainsi défini n'est pas sans biais mais approximativement sans biais au sens que le numérateur et le dénominateur sont individuellement des estimateurs sans biais du numérateur et du dénominateur de la fonction G définie en (1.3.14) et (1.3.15). D'autres types de correction peuvent être employés comme celui de Kaplan-Meier [BG97].

La fonction J s'estime à partir des estimateurs des fonctions F et G puisque $J(r) = \frac{1-F(r)}{1-G(r)}$. Rappelons que la fonction J s'interprète comme suit : $\widehat{J}(r) < 1$ représente des points en cluster et $\widehat{J}(r) > 1$ représente des points répulsifs. C'est ainsi que la Figure 1.5.17 illustre l'agrégation des feux de forêt présentée à la Figure 1.0.1 et confirme l'agrégation des points du SNCP rencontrée à la Figure 1.5.15.

1.5.2 Test de l'aléatoire complet

Lorsque l'on observe des données sous forme de points, la première question qu'un statisticien se pose est : est-ce que l'hypothèse d'aléatoire complet est envisageable ? En fait, il est surtout question d'écarter l'idée car dans la plupart des cas, ce modèle n'est pas réaliste et la partie la plus intéressante des statistiques des processus ponctuels commence avec la recherche des corrélations spatiales. Cependant, si l'hypothèse pouvait être acceptée, il n'y aurait pas besoin de considérer de modèle plus compliqué, avec toutes les possibilités de calculs qui en découlent. Comme toutes données réelles, on ne peut pas s'attendre à ce que nos observations concordent parfaitement à la théorie. Le but des tests statistiques est de quantifier l'erreur entre les données et la théorie afin de savoir si elle est significative ou si elle pourrait provenir du hasard. Concrètement, en testant une hypothèse, on souhaite connaître la loi d'une statistique sous réserve que l'hypothèse soit vraie afin de déterminer si il est possible que notre observation concorde, à une précision donnée, avec cette loi. Cette notion de précision est très importante et statistiquement elle est synonyme de confiance. On accepte que le test échoue, mais on ne souhaite pas que cela arrive souvent. Diminuer l'erreur est possible mais un sacrifice sur la précision des résultats doit être fait.

On souhaite ici tester l'hypothèse nulle H_0 que les points peuvent être modélisés par un processus de Poisson homogène en considérant comme alternative H_1 sa négation :

H_0 : Φ est un processus de Poisson homogène

H_1 : Φ n'est pas un processus de Poisson homogène

Dans la littérature, il existe beaucoup de tests de l'aléatoire complet car c'est un sujet important. Le premier, très simple à mettre en pratique, s'appuie sur les quadrats introduits un peu plus haut comme méthode de l'estimation de l'intensité. L'idée est de diviser la région d'observation W en quadrats B_1, \dots, B_k de même volume. Sous l'hypothèse H_0 , les nombres de points dans chaque quadrat suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda|B|$ (où B est n'importe quel quadrat) et sont indépendants les uns des autres. Le paramètre λ étant inconnu, on l'estime comme dans 1.5.1 par $\widehat{\lambda} = \frac{N_\Phi(W)}{|W|}$. La statistique de test est

$$T = \sum_{j=1}^k \frac{\left(N_\Phi(B_j) - \frac{N_\Phi(W)}{k}\right)^2}{\frac{N_\Phi(W)}{k}} \quad (1.5.16)$$

La principale motivation de cette statistique de test est que, sous H_0 , T suit asymptotiquement une loi du χ^2 avec $k - 1$ degrés de liberté. Par conséquent, si $T > \chi_{k-1, \alpha}^2$ ou

si $T < \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$, le test rejette l'hypothèse H_0 avec un niveau de signification de α . Les notations $\chi_{k, \alpha}^2$ sont les notations habituelles du quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du χ^2 à k degrés de liberté.

Pour que ce test soit efficace, il ne faut pas diviser la région W en un trop grand nombre de quadrats car cela impliquerait des quadrats avec peu de points. Il ne faut pas non plus prendre un nombre de quadrats trop petit car la taille de l'échantillon serait alors trop faible. L'application de ce test aux données de la Figure 1.0.1 nous permet de conclure qu'il ne peut pas provenir d'un processus complètement aléatoire. En effet, en choisissant de diviser les régions d'observations en 25 quadrats, nous obtenons une p-valeur très petite : $3,7.e^{-4}$ pour la position des arbres et $2,2.e^{-16}$ pour la position des galaxies et la position des feux de forêt. Si on avait choisi un autre nombre de quadrats, la conclusion serait la même pour la position des galaxies et des feux de forêt. Néanmoins, le nombre d'arbres du jeu de données n'étant pas énorme (134), le test ne permet pas de rejeter l'hypothèse CSR pour tout choix de nombre de quadrats. Par exemple, la répartition en 9 quadrats donne une p-valeur de 0,12. La simulation du SNCP à la Figure 1.5.15 (effectuée pour illustrer l'estimateur de la fonction K) donne une p-valeur de $2,2.e^{-16}$ ce qui permet de rejeter l'hypothèse CSR. D'autres jeux de paramètres du SNCP permettent d'arriver à la même conclusion.

Toute une série de test est basée sur les différentes statistiques présentées à la section 1.3, principalement les fonctions g , K , L , F , G et J . Le raisonnement étant le même pour toutes ces fonctions, notons $S(r)$ l'une de ces fonctions. Le calcul explicite de $S(r)$ pour le modèle Poissonien rend possible des tests en comparant la fonction théorique avec leurs estimations présentées à la section 1.5.1, que l'on note $\widehat{S}(r)$. Comme on souhaite construire un test sur une unique statistique de test T à valeurs dans \mathbb{R} , il est nécessaire de transformer ces statistiques fonctionnelles en statistiques réelles. Une première façon, un peu simpliste, est de fixer r_0 et de ne considérer qu'une seule valeur de la fonction $S(r_0)$. La statistique de test est alors

$$T = |\widehat{S}(r_0) - S_p(r_0)| \quad (1.5.17)$$

Une deuxième méthode consiste à prendre l'écart maximum sur l'intervalle $[0, R]$

$$T = \max_{r \leq R} |\widehat{S}(r) - S_p(r)| \quad (1.5.18)$$

Enfin, la méthode la plus utilisée est de considérer l'ensemble de la fonction sur l'intervalle $[0, R]$ en intégrant les différences

$$T = \int_0^R |\widehat{S}(r) - S_p(r)|^2 dr \quad (1.5.19)$$

Théoriquement, si les observations proviennent d'un processus de Poisson, alors la statistique de test T devrait être égale à 0. En pratique, par principe de l'aléatoire et des données, il n'est pas raisonnable d'espérer que $T = 0$. Cependant, si T est assez petit, on conclura que le modèle de Poisson est envisageable. En revanche, si la statistique de test T est trop grande, cela signifie que la statistique du processus considéré est trop éloignée de la théorie Poissonnienne et on conclura que les points ne peuvent pas être modélisés par le processus de Poisson. Pour déterminer ce qu'on vient d'appeler "assez petit" et "trop grande", il est nécessaire de calculer la variance de la statistique de test T sous l'hypothèse H_0 . Les calculs étant ici impossibles, on utilisera le principe de test de Monte Carlo. Le but est de comprendre le comportement du test dans le cas où H_0 est vraie. Le principe de Monte Carlo est de simuler m réalisations sous l'hypothèse H_0 , d'estimer les statistiques $S(r)$ pour chacune des réalisations et ainsi d'avoir m réalisations de la statistique de test $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$ sous H_0 . La valeur critique du test T_c qui détermine la limite entre l'acceptation et le rejet de H_0 est alors le maximum des m réalisations de la statistique de test. La règle est de rejeter H_0 si $T > T_c = \max_{i \leq m} T^{(i)}$. Le test a un niveau de signification de $\alpha = \frac{1}{m+1}$. Souvent $m = 19$ ou 99 , correspondant à un niveau de signification de 0.05 et 0.01 respectivement.

Le résultat de ce test sur la position des galaxies et des feux de forêt (voir Figure 1.0.1) est sans ambiguïté : l'hypothèse CSR est rejetée. En effet, la statistique de test T calculée à partir de (1.5.19) et de n'importe quelle fonction (g, K, L, F, G, J) est plus grande que $m = 99$ simulations de processus de Poisson. Ici, la borne R de l'intégrale n'influe pas le résultat du test. On peut ainsi conclure avec un niveau de signification de 0.01 que ces données ne sont pas CSR. Le résultat du test sur la position des arbres n'est pas aussi catégorique. La plupart des fonctions (L, F, G, J) rejettent l'hypothèse CSR avec un niveau de signification de 0.01 . La fonction K rejette l'hypothèse si on prend une valeur de R pas trop grande (par exemple $R < 6$) au niveau 0.01 mais on ne peut pas arriver à cette conclusion avec un niveau aussi précis pour d'autres valeurs de R (par exemple $R > 7$). Enfin, en utilisant la fonction g , il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse CSR. Cela peut s'expliquer par le fait que la fonction g n'est pas très stable pour le nombre d'arbres du jeu de données (134), au sens que même lorsqu'on simule un processus de Poisson, l'estimation de la fonction g diffère souvent de la fonction g théorique.

Une extension intéressante de cette méthode est de rejeter H_0 si la valeur observée est plus grande que k statistiques parmi les simulations de la statistique de test $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$. La valeur critique ne correspond plus au maximum des $T^{(i)}$ mais au k -ième maximum des $T^{(i)}$. Cela influe bien entendu sur le niveau de signification du test qui augmente à $\alpha = \frac{k}{m+1}$. Si $k = 5$, c'est à dire si la valeur critique T_c est la 5-ième plus grande statistique des $T^{(i)}$, il faut simuler $m = 99$ ou 499 réalisations du test sous H_0 pour récupérer un niveau de signification de 0.05 et 0.01 respectivement.

D'autres tests peuvent être trouvés dans [IPSS08]. Enfin, [EHKM18] a proposé un test reposant sur des statistiques géométriques s'inspirant de ce qui se fait sur les niveaux

d'excursion des champs aléatoires, domaine important de cette thèse dans les Chapitres 2 et 4.

1.5.3 Estimation dans les modèles paramétriques

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ des points observés sur $W \subset \mathbb{R}^2$ compact. Dans la plupart des données, le modèle de Poisson homogène n'est pas retenu et à partir de ce constat, il faut choisir un autre modèle. Si on pense que les points sont indépendants les uns des autres, mais que la répartition n'est pas homogène spatialement, alors le modèle de Poisson non homogène est la piste à privilégier. La répartition des points peut nous donner une idée de la forme de la fonction d'intensité, dépendant alors de plusieurs paramètres que l'on note θ . Dans ce cas l'estimation par maximum de vraisemblance est souvent possible, puisque la densité du processus Φ , par rapport au processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda = 1$, est donnée par

$$f_\theta(x) = \exp\left(|W| - \int_W \lambda_\theta(s) ds\right) \prod_{i=1}^n \lambda_\theta(x_i). \quad (1.5.20)$$

On se référera à [MW04] pour plus de détails.

Si on pense que les points sont dépendants les uns des autres, la modélisation par le processus de Poisson, même non homogène, est irréaliste. Ces modèles ont souvent plusieurs paramètres et leur estimation est un sujet de grand intérêt. Par exemple, pour un processus de Matern cluster, il y a 3 paramètres à estimer : l'intensité du processus parent λ , le nombre d'enfants moyen par parent m et le rayon du noyau uniforme r . Concernant le processus de Thomas, seul le paramètre du noyau r est remplacé par la variance du noyau gaussien σ^2 . Leur généralisation, via les processus de Cox shot noise, change le paramètre m par le ou les paramètres de la loi de la marque du processus ponctuel sous-jacent au champ shot noise. Dans ces cas, la méthode du maximum de vraisemblance est rarement mise en pratique car elle est très coûteuse algorithmiquement [MW04]. Les méthodes pour inférer sur ce type de modèle reposent beaucoup sur les moments d'ordre 2, souvent représentés par la fonction K ou la fonction g_Φ . La connaissance théorique de ces fonctions (voir par exemple (1.4.11) et (1.4.14)) nous permet d'ajuster les paramètres du modèle pour que l'estimateur de ces fonctions corresponde "au mieux" à une forme théorique. Plus précisément, si θ désigne le vecteur des paramètres à estimer, on considère :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_{r_1}^{r_2} [\hat{K}^c(u) - K_{th}^c(u; \theta)]^2 du \quad (1.5.21)$$

où Θ est l'ensemble des valeurs que l'on pense que θ peut prendre, r_1 et r_2 sont choisis en fonction des valeurs d'intérêt de la statistique K . La quantité c permet quant à elle d'avoir un contrôle sur la disparité de la fonction K , en pratique il est souvent utilisé $c = 1/4$. Cette méthode est appelée la méthode du minimum de contraste. De nombreuses études par simulation ont montré leur efficacité. C'est également un estimateur fortement

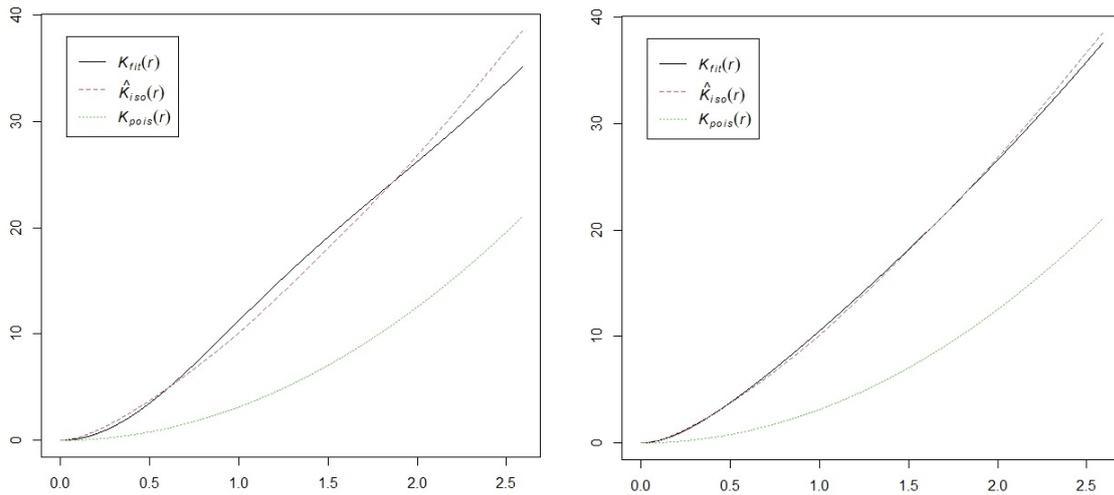


FIGURE 1.5.18 – Qualité de l’ajustement de deux modèles sur la position des galaxies dans le Superamas de Shapley.

consistant et asymptotiquement normal si le processus Φ est Poissonien [Hei92]. Elle a deux qualités très appréciées en pratique. La première est qu’elle est très facile à mettre en place avec un faible coût algorithmique. La deuxième qualité est qu’elle permet une évaluation visuelle directe de la qualité d’ajustement au modèle. L’application de cette méthode peut être mise en oeuvre assez facilement grâce au package spatstat du logiciel R [BT05]. Les différents tests sous simulation sont excellents. Pour tous les processus de Cox et de cluster étudiés dans ce chapitre, dès que le nombre de points n’est pas trop petit, les paramètres sont très bien estimés et la proximité de la courbe théorique de la fonction K (avec paramètre estimé) avec celle de la fonction K estimée permet de valider visuellement l’ajustement aux modèles. Sur les données réelles, les résultats sont plutôt bons comme peut le montrer la Figure 1.5.18 où l’on a considéré la position des galaxies. Rappelons que l’hypothèse CSR sur ce jeu de données a été clairement rejetée et que une visualisation graphique de l’estimation de la fonction L suggère un modèle en cluster. A gauche de 1.5.18, on a considéré le modèle de Thomas, ainsi les paramètres à estimer sont $\theta = (\lambda, m, \sigma)$. L’estimateur du minimum de contraste est

$$\hat{\theta} = (0.07, 270.14, 0.54)$$

correspondant à un processus de Thomas avec une intensité des points parents faible, un nombre d’enfants par parent élevé répartis très proches de leurs parents. A droite, on a considéré le modèle de Cox log-gaussien stationnaire de moyenne m et avec une covariance exponentielle $C(r) = V \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2}\right)$. Ainsi les paramètres à estimer sont $\theta = (m, V, \sigma^2)$. L’estimateur du minimum de contraste est

$$\hat{\theta} = (1.90, 2.10, 1.09).$$

Le modèle qui s’ajuste le mieux à ces données est le processus de Cox log gaussien dont la fonction K est très proche de l’estimation.

A titre purement bibliographique, il existe d'autres méthodes d'estimation des paramètres reposant sur les statistiques du second ordre : la vraisemblance composée introduite par [Gua06] et la vraisemblance de Palm [TOS08]. Une revue des différentes méthodes s'appuyant sur les moments d'ordre 2 est présente dans [DP12]. Pour les processus non homogènes, [Waa07, WG09] proposent une méthode d'estimation en deux étapes : les paramètres liés à la fonction d'intensité sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, comme si le processus était Poissonnien, puis les paramètres liés à l'interaction entre les points sont estimés par la méthode du minimum de contraste. Une étude théorique asymptotique de cette procédure est proposée dans [WG09].

CHAPITRE

2

CHAMP ALÉATOIRE

2.1 Définitions et premiers exemples

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et T un ensemble d'indices arbitraires.

Définition 2.1.1. *Une fonction aléatoire réelle (potentiellement à valeurs vectorielles) indexée par T est une fonction de la forme $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^p$ où pour tout $t \in T$, $X(\cdot, t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$.*

Pour $\omega \in \Omega$, la fonction $t \in T \mapsto X(\omega, t) \in \mathbb{R}^p$ représente une trajectoire (ou une réalisation) de X . Par la suite, on utilisera le raccourci $X(t)$ au lieu de $X(\omega, t)$. Ainsi, X représente une collection de variables aléatoires réelles $X = \{X(t), t \in T\}$, c'est à dire que pour tout $t \in T$ on a $X(t) : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$ mesurable.

La plupart du temps nous étudierons des fonctions aléatoires à valeurs dans \mathbb{R} ($p = 1$) et dans toute la suite de ce chapitre, on s'intéressera au cas où $T \subset \mathbb{R}^d$ avec $d > 1$ et on appellera la fonction aléatoire X un champ aléatoire. Lorsque $T \subset \mathbb{R}$, cas non étudié ici, X est appelé processus aléatoire. Si $T = \mathbb{R}^d$ ou $T = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, d\}$ (avec $a_i < b_i$ des réels) alors X est un champ aléatoire avec un paramètre continu. En revanche si $T = \mathbb{Z}^d$ alors on dit que X est un champ aléatoire avec un paramètre discret.

En pratique on observera le champ aléatoire dans une fenêtre $W \subset T$ et même si le champ est défini avec un paramètre continu, l'observation est discrète. Par exemple, en supposant que l'on étudie un champ aléatoire X défini sur $T = \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans \mathbb{R} ,

une réalisation de X peut être observée sur $W = [1, 1024]^2 \cap \mathbb{Z}^2$. Cet exemple permettrait de modéliser une image 1024×1024 en niveaux de gris. Par sa capacité visuelle et les nombreuses applications possibles, on prendra régulièrement cet exemple de la dimension 2.

Exemple 2.1.2. *Un premier exemple élémentaire sur $T = \mathbb{Z}^d$ est celui où l'on considère que les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées. On dit alors que le champ est un bruit blanc.*

Définition 2.1.3. *La loi d'un champ aléatoire X sur T est définie par sa famille de lois finies dimensionnelles (plus connue sous le nom abrégé de fidis, pour finite-dimensional distribution en anglais), c'est à dire par la loi de tous les vecteurs aléatoires $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ pour t_1, \dots, t_n des éléments de T et $n \in \mathbb{N}$.*

L'étude des lois finies dimensionnelles est rarement une tâche facile. Par sa propriété d'indépendance, le bruit blanc fait partie des exceptions. La propriété de distribution identique n'est pas indispensable. En effet, on peut construire un champ aléatoire X comme une collection de variables indépendantes chacune de loi $\mathbb{P}_{X(t)}$ (non forcément la même pour tout t). C'est le théorème de Lomnicki-Ulam [Spo13] et dans ce cas les lois finies dimensionnelles sont explicites comme le produit des lois marginales. L'ajout de dépendance entre les variables pose certaines difficultés. Néanmoins, sous des conditions de consistance, le théorème de Kolmogorov ([Spo13]) assure l'existence d'un champ aléatoire à partir d'une famille de fidis.

La fonction moyenne et la fonction de covariance permettent de donner une première idée sur le comportement d'un champ aléatoire.

Définition 2.1.4. *Le champ aléatoire X est dit intégrable si $\mathbb{E}[X(t)] < \infty$ pour tout $t \in T$. On définit alors la fonction moyenne par*

$$m_X : t \in T \rightarrow \mathbb{E}[X(t)]. \quad (2.1.1)$$

Définition 2.1.5. *Le champ aléatoire X est dit de second ordre si $\mathbb{E}[X(t)^2] < \infty$ pour tout $t \in T$. On définit alors la fonction de covariance par*

$$C_X : (s, t) \in T^2 \rightarrow \text{Cov}[X(s), X(t)] \in \mathbb{R}. \quad (2.1.2)$$

On dit que le champ est centré lorsque $m_X = 0$, sinon on se permet souvent de considérer $Y(t) = X(t) - m_X(t)$ le champ centré, la fonction de covariance étant inchangée. Pour qu'une fonction C définie sur $T \times T$ soit une fonction de covariance, il est nécessaire qu'elle remplisse certains critères [Spo13] :

1. la symétrie : $C(t, s) = C(s, t)$ pour tout $(s, t) \in T \times T$
2. la positivité : $\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j C(t_i, t_j) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, $t_1, \dots, t_k \in T$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1.6. *Un champ aléatoire X sur T est dit gaussien si pour tout $k \geq 1$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ la loi du vecteur $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ est gaussienne.*

Rappelons qu'un vecteur est gaussien si toutes combinaisons linéaires de ses coordonnées sont gaussiennes. Par sa définition, c'est un autre exemple de champ où l'on peut calculer ses fidis. De la même façon qu'une variable aléatoire gaussienne, l'une des principales forces d'un champ gaussien est qu'il est entièrement caractérisé par sa fonction moyenne et sa fonction de covariance. Inversement, à partir d'une fonction moyenne et d'une fonction de covariance, par le théorème de consistance de Kolmogorov [Bil95], nous avons l'existence d'un champ gaussien possédant ces caractéristiques [LG13].

Rentrons un peu plus dans des exemples de fonctions de covariance. Il est possible de construire des champs aléatoires sur \mathbb{R}^d avec $d > 1$ à partir de processus aléatoires sur \mathbb{R} , et cela de plusieurs manières [Bie19]. Ainsi, même si nous étudions principalement les champs aléatoires sur \mathbb{R}^2 , il est intéressant de parler des fonctions de covariance sur \mathbb{R} . L'exemple suivant mène au célèbre mouvement Brownien.

Exemple 2.1.7. *Un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} est un processus gaussien centré de fonction de covariance $C(s, t) = \frac{1}{2} (|s| + |t| - |s - t|)$.*

La construction élégante de ce processus peut être trouvée dans [LG13] ou [Bie19]. Les deux principales extensions sur \mathbb{R}^d sont le champ de Lévy Chentsov et la surface Brownienne.

Exemple 2.1.8. *Un champ de Lévy Chentsov sur \mathbb{R}^d est un champ gaussien centré de fonction de covariance*

$$C(s, t) = \frac{1}{2} (\|s\| + \|t\| - \|s - t\|),$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d .

Exemple 2.1.9. *Une surface Brownienne est un champ gaussien sur \mathbb{R}^d centré de fonction de covariance*

$$C(s, t) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{2} (|s_i| + |t_i| - |s_i - t_i|),$$

où $s, t \in \mathbb{R}^d$ et pour $x \in \mathbb{R}^d$ on note $x = (x_1, \dots, x_d)$ ses coordonnées.

Dans le chapitre sur les processus ponctuels, nous avons introduit deux propriétés très utilisées en pratique : la stationnarité et l'isotropie. Ces hypothèses sont également pratiques lorsqu'on étudie les champs aléatoires, permettant par exemple d'avoir une fonction moyenne constante par stationnarité et, par isotropie, de réduire la complexité de la fonction de covariance à une dépendance sur la distance entre les points uniquement (fonction sur \mathbb{R}_+ au lieu de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$).

Définition 2.1.10. *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in T\}$ est dit stationnaire s'il est invariant par translation, c'est à dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h, x_1, \dots, x_n \in T$, le vecteur $(X(x_1), \dots, X(x_n))$ a même loi que $(X(x_1 + h), \dots, X(x_n + h))$.*

La stationnarité implique en particulier que pour tout $s \in T$, $X(s)$ a même loi que $X(0)$. L'un des principaux avantages est que l'étude statistique des premiers moments est simplifiée, en particulier $m_X(s) = m_X(0)$ pour tout $s \in T$. Si l'on suppose de plus que le champ est d'ordre 2, alors la fonction de covariance est réduite d'une variable, puisque pour tout $s, t \in T$ on a $C_X(s, t) = C_X(s - t, 0)$. Par conséquent, nous ferons régulièrement l'abus de notation $C_X(s - t) = C_X(s - t, 0)$ et nous verrons la fonction de covariance comme une fonction sur T . Cette nouvelle fonction satisfait l'inégalité $|C_X(t)| \leq C_X(0)$, $t \in T$.

Définition 2.1.11. *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in T\}$ avec $T = \mathbb{R}^d$ est dit isotrope s'il est invariant par rotation, c'est à dire si pour toute rotation $R \in SO$ de T , $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in T$, le vecteur $(X(x_1), \dots, X(x_n))$ a même loi que $(X(Rx_1), \dots, X(Rx_n))$.*

L'isotropie implique en particulier que pour tout $s \in T$, $X(s)$ a même loi que $X(\|s\|e_1)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d . Lorsque le champ est d'ordre 2, en supposant l'isotropie en plus de la stationnarité, la fonction de covariance est réduite à une fonction sur \mathbb{R}_+ , étant donné que pour tout $s, t \in T$ on a $C_X(s, t) = C_X(\|s - t\|e_1, 0)$. Là aussi, on fera l'abus de notation $C_X(s, t) = C_X(\|s - t\|)$ en voyant la fonction de covariance comme une fonction sur \mathbb{R}_+ .

Un exemple de champ isotrope, mais non stationnaire, est celui de Lévy Chentsov. D'autres exemples de champs isotropes sont les champs gaussiens avec une matrice de covariance ne dépendant que de la distance entre les variables. Les familles de fonctions de covariance isotropes les plus connues sont celles de la famille exponentielle $C(r) = ve^{-\frac{r}{4\sigma^2}}$ et celles de la famille gaussienne $C(r) = ve^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}}$ avec $v, \sigma > 0$. Les notations v et σ ne sont pas classiques mais sont choisies pour faire le lien, par la suite, avec les champs shot noise. Le paramètre $v \geq 0$ représente la variance et $\sigma > 0$ est un paramètre d'échelle, quantifiant le lien entre la distance des coordonnées et leur corrélation. Plus précisément, un petit σ représente une corrélation forte entre points proches et une corrélation faible entre points éloignés. Inversement, une grande valeur de σ constitue une corrélation plus lisse en atténuant la différence de corrélation entre points proches et points éloignés.

Simuler un champ gaussien sur une fenêtre discrète T revient à simuler un (grand) vecteur gaussien. La méthode de simulation classique repose sur la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance, opération devenant trop coûteuse algorithmiquement pour un grand vecteur. Les simulations de la Figure 2.1.1 ont été effectuées avec des algorithmes plus rapides utilisant la diagonalisation des matrices circulantes [DN97]. Les moments du champ ont été écrits sous cette forme pour faire le lien avec les 4 simulations de la Figure 2.2.2.

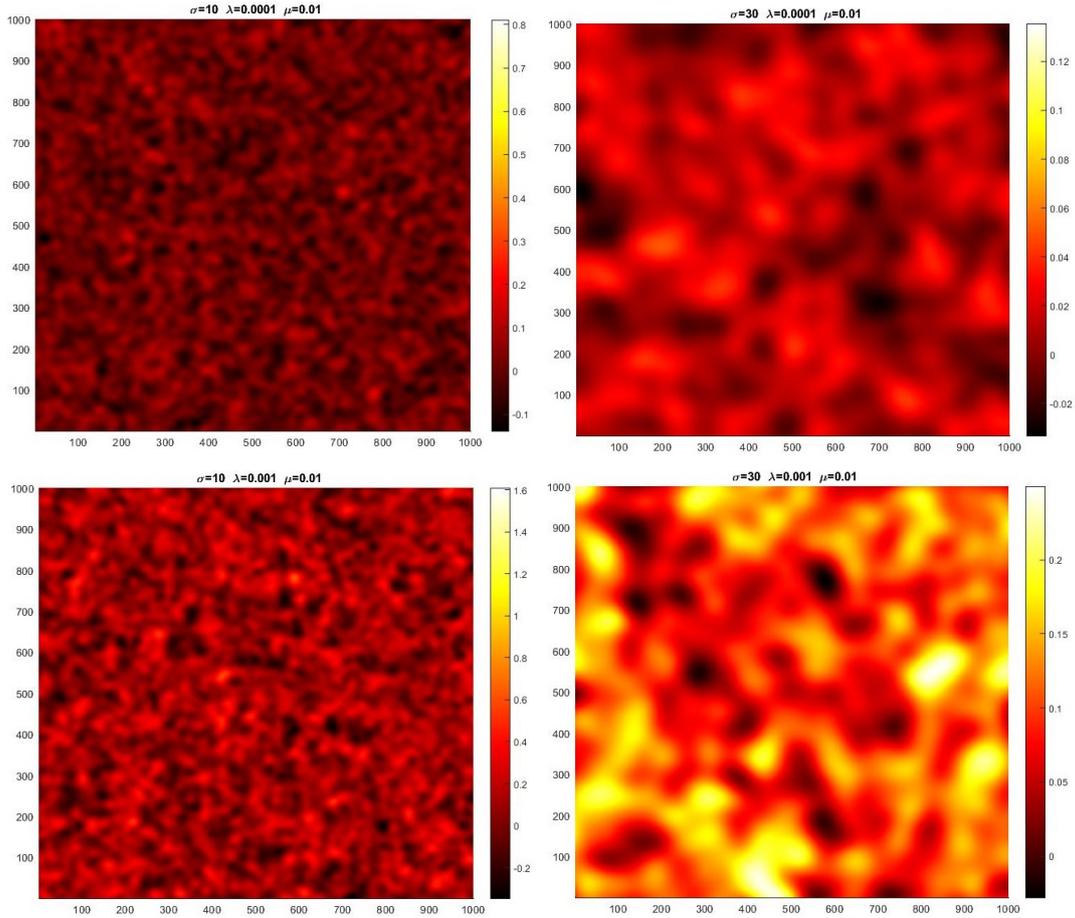


FIGURE 2.1.1 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ de 4 champs gaussiens stationnaires avec une covariance gaussienne de paramètre $\sigma = 10$ ou 30 (de gauche à droite). Les deux autres paramètres contiennent les informations de la moyenne et de la variance tel que $m_X = \frac{\lambda}{\mu}$ et $C_X(0) = \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2}$.

2.2 Champ aléatoire shot noise

Il est temps d'entrer plus en détails dans le modèle étudié dans ce manuscrit. Rappelons nous, nous avons déjà évoqué à plusieurs reprises les champs shot noise dans le Chapitre 1 : la première fois lors de l'introduction des modèles de Cox d'intensité aléatoire shot noise, où nous avons pu faire le lien avec des processus ponctuels très connus tel que le processus de Thomas ; puis une deuxième fois lorsqu'on souhaitait estimer l'intensité de données ponctuelles par la méthode des noyaux. En effet, l'estimateur de l'intensité consiste dans ce cas à sommer un noyau sur les points : c'est le principe d'un champ shot noise. Littéralement, il faut comprendre "shot" comme le jet d'une configuration de points puis "noise" comme le rajout d'un bruit, le noyau, autour de chaque point. Mathématiquement, un champ aléatoire shot noise est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$X(x) = \sum_{(x_i, m_i) \in \phi_X} m_i g(x - x_i), \quad (2.2.1)$$

où $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction déterministe appelée noyau, et ϕ_X est un processus de Poisson marqué sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda_X dx F(dm)$ *i.e.* les x_i sont les points d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ_X dans \mathbb{R}^d et les m_i sont les marques positives de loi F que l'on suppose à valeurs dans \mathbb{R}_+ , indépendantes du processus de Poisson. Un champ shot noise peut être défini de façon plus générale, notamment sans hypothèse d'homogénéité du processus de Poisson [Ric77], mais dans ce manuscrit on se restreindra à cette définition là. Introduit initialement par Campbell [Cam09b, Cam09a], le processus shot noise sur \mathbb{R} a été très étudié durant le XXème siècle pour modéliser des phénomènes physiques avec un premier article théorique fondamental de S.O. Rice [Ric44]. Plus récemment, le processus a aussi été utilisé dans la théorie des réseaux [BB09, CH01, AY10], en gestion du risque pour les produits d'assurance [KM95] et en finance [Sch17]. La généralisation aux dimensions supérieures est due à D.J. Daley [Dal71]. La normalité asymptotique en haute intensité ($\lambda \rightarrow \infty$) est un résultat [HS85] très fort dans l'histoire du modèle, venant généraliser les résultats unidimensionnels [Pap71], et peut être vue comme un lien entre le cadre gaussien et les modèles discrets de géométrie stochastique tel que le modèle Booléen [CSKM13]. Le modèle 2D a été largement utilisé en synthèse de texture [VW91, GGM10] et en analyse d'image [BD20]. Enfin, récemment, les caractéristiques géométriques des ensembles d'excursion du modèle shot noise ont été de grand intérêt pour Biermé et Desolneux [BD16, BD20] et Lachieze-Rey [Lac16a]. En dimension 2, le périmètre de ces ensembles trouve tout son sens et sera étudié à la fin de ce chapitre ainsi que dans le Chapitre 4.

Par le théorème de Campbell [Kin93], on sait que la somme (2.2.1) est absolument convergente presque sûrement si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \min(|mg(x)|, 1) \lambda dx F(dm) < \infty$$

ce qui est vérifié en particulier si le noyau g ainsi que la loi de la marque M , donnée par F , sont intégrables. Sans trop de restrictions, nous ferons très souvent les hypothèses suivantes **(H)**

1. la marque M est presque sûrement positive et a ses 4 premiers moments finis *i.e.* $\mathbb{E}[M^4] < \infty$;
2. le noyau g est une fonction positive, continue, bornée et Lebesgue intégrable sur \mathbb{R}^d .

Comme le montre la proposition suivante, l'outil principal d'étude de la loi d'un champ shot noise est sa fonction caractéristique, qui est un corollaire du théorème de Campbell.

Propriété 2.2.1. *Soit X un champ shot noise défini par (2.2.1), $n \in \mathbb{N}^*$, x_1, \dots, x_n des points de \mathbb{R}^d et u_1, \dots, u_n des réels. Alors la fonction caractéristique du vecteur aléatoire*

$(X(x_1), \dots, X(x_n))$ en (u_1, \dots, u_n) est donnée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(i(u_1 X(x_1) + \dots + u_n X(x_n)) \right) \right] \\ &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \left[1 - \exp \left(i \sum_{j=1}^n u_j m g(x_j - x) \right) \right] \lambda dx F(dm) \right) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Cette propriété permet de connaître la famille des lois finies dimensionnelles. En particulier, la loi marginale est connue. Le calcul peut être mené à terme lorsqu'on choisit une marque exponentielle et un noyau gaussien [BB88]. En effet, si X est défini sur \mathbb{R}^2 , $M \sim \mathcal{E}(\mu)$ et $g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$, alors pour $y \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuX(y)}] &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} [1 - \exp(iumg_\sigma(y-x))] \lambda dx F(dm) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^2} \left[1 - \frac{\mu}{\mu - iug_\sigma(y-x)} \right] \lambda dx \right) \\ &= \exp \left(-2\pi\lambda \int_{\mathbb{R}_+} r \left[1 - \frac{\mu}{\mu - iu \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)} \right] dr \right) \\ &= \exp \left(2\pi\lambda \int_{\mathbb{R}_+} \frac{riu \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)}{\mu - iu \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)} dr \right) \\ &= \exp \left(2\pi\lambda\sigma^2 \left[\ln \left(\mu - iu \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \right) \right]_0^\infty \right) \\ &= \exp \left(2\pi\lambda\sigma^2 \left[\ln(\mu) - \ln\left(\mu - \frac{iu}{2\pi\sigma^2}\right) \right] \right) \\ &= \left(\frac{2\pi\mu\sigma^2}{2\pi\mu\sigma^2 - iu} \right)^{2\pi\lambda\sigma^2}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi gamma : $X(y) \sim \Gamma(2\pi\lambda\sigma^2, \frac{1}{2\pi\mu\sigma^2})$. C'est malheureusement l'un des rares cas où l'on peut calculer la loi marginale de façon totalement explicite. Par exemple, remplacer la marque exponentielle par une constante ne permet pas d'expliciter l'intégrale (2.2.2). Les paramètres de la loi gamma ne dépendant pas de la position y , la loi marginale est identique en tout point $X(y) \stackrel{loi}{=} X(0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^2$. Cette propriété est vraie sans hypothèse ni sur le noyau, ni sur la marque, et est une conséquence de la propriété suivante.

Propriété 2.2.2. *Soit X un champ shot noise défini par 2.2.1. Alors X est stationnaire.*

Démonstration. Soit x_0, x_1, \dots, x_n des éléments de \mathbb{R}^d . Alors par le changement de variable $y = x - x_0$ dans (2.2.2), on obtient que

$$(X(x_1 + x_0), \dots, X(x_n + x_0)) \stackrel{loi}{=} (X(x_1), \dots, X(x_n)).$$

□

Notons

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} g(-c)dc \quad (2.2.3)$$

$$I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(-c)g(x-c)dc \quad (2.2.4)$$

et faisons l'hypothèse que g a une masse totale unitaire, *i.e.* $I_1 = 1$, sans aucune perte de généralité étant donné que le champ a même loi si l'on divise le noyau par I_1 et qu'on multiplie la marque par I_1 .

Les formules de Campbell détaillées au Chapitre 1 permettent le calcul de tous les moments. En particulier on a

$$\mathbb{E}[X(0)] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} mg(-c)\lambda dc F(dm) = \lambda \mathbb{E}[M] \quad (2.2.5)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(x)X(y)] &= \mathbb{E} \left[\sum_i m_i^2 g(x-x_i)g(y-x_i) \right] + \mathbb{E} \left[\sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j g(x-x_i)g(y-x_j) \right] \\ &= \int_S m^2 g(x-c)g(y-c)\lambda dc F(dm) \\ &\quad + \int_S \int_S mn g(x-c)g(y-a)\lambda^2 dc F(dm) da F(dn) \\ &= \lambda \mathbb{E}[M^2] I_2(y-x) + \lambda^2 \mathbb{E}[M]^2 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

où \sum_i est un raccourci pour $\sum_{(x_i, m_i) \in \Phi_X}$ et $S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Ainsi, la covariance entre deux variables du champ est donnée par

$$\text{Cov}(X(x), X(y)) = \lambda \mathbb{E}[M^2] I_2(y-x). \quad (2.2.7)$$

Une conséquence remarquable est que la fonction de corrélation ne dépend plus de l'intensité du processus de Poisson, ni de la marque, mais uniquement de la partie déterministe du modèle, à savoir le noyau :

$$\text{Cor}(X(x), X(y)) = \frac{\text{Cov}(X(x), X(y))}{\sqrt{\text{Var}(X(x))\text{Var}(X(y))}} = \frac{I_2(y-x)}{I_2(0)} \quad (2.2.8)$$

Le calcul explicite de ces statistiques est possible pour les noyaux dont l'intégrale (2.2.4) est calculable. Par exemple, si $d = 2$ et que le noyau est gaussien, *i.e.* $g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$

alors la fonction de covariance est une gaussienne puisque

$$\begin{aligned}
 I_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp\left(\frac{-\left(\|c\|^2 + \|x - c\|^2\right)}{2\sigma^2}\right) dc \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp\left(\frac{-\left(\|\sqrt{2}c - x/\sqrt{2}\|^2 + \|x/\sqrt{2}\|^2\right)}{2\sigma^2}\right) dc \\
 &= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4\sigma^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|a - x/\sqrt{2}\|^2}{2\sigma^2}\right) da \\
 &= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4\sigma^2}\right). \tag{2.2.9}
 \end{aligned}$$

Les propriétés de régularité du champ aléatoire sont surtout dues aux propriétés du noyau g . Pour $k \in \mathbb{N}$, si g est de classe \mathcal{C}^{k+1} et que $g^{(l)}$ est intégrable pour tout $l = 1, \dots, k+1$ alors le champ X est presque sûrement de classe \mathcal{C}^k (généralisation aux cas multidimensionnels de [BD11]). Par exemple, un shot noise avec noyau gaussien est de classe \mathcal{C}^∞ presque sûrement. Dans la plupart des exemples étudiés dans cette thèse, le noyau g est isotrope, ou au moins symétrique. Cette isotropie se transmet également au champ aléatoire.

Propriété 2.2.3. *Soit X un champ shot noise défini par (2.2.1) avec g un noyau isotrope. Alors X est isotrope.*

Démonstration. Soit x_1, \dots, x_n des éléments de \mathbb{R}^d et R une matrice de rotation de \mathbb{R}^d . Alors par le changement de variable $y = Rx$ dans (2.2.2), on obtient que

$$(X(Rx_1), \dots, X(Rx_n)) \stackrel{\text{loi}}{=} (X(x_1), \dots, X(x_n)).$$

□

L'existence de la densité, ainsi que sa propriété d'être bornée ou non, est une question importante lorsqu'on étudie les niveaux d'excursion [BD11, AAD⁺19]. Reprenons un instant l'exemple d'un champ shot noise avec un noyau gaussien et une marque exponentielle. La marginale suit une loi gamma, dont la densité est bornée si et seulement si son premier paramètre est supérieur ou égal à 1, c'est à dire que $2\pi\lambda\sigma^2 \geq 1$. Récemment, les travaux de [AAD⁺19] ont permis de conclure sur l'existence d'une densité bornée avec des conditions sur la marque et le noyau. Par exemple, la marginale $X(0)$ a une densité bornée si l'on suppose que la marque a une densité bornée et que $\mathbb{E}[1/|g(-T_1)|] < \infty$, en notant T_1 le point du processus de Poisson le plus proche de l'origine. Ce résultat permet en particulier de retrouver la condition sur λ et σ dans le cas d'un noyau gaussien avec marque exponentielle. En notant $T_1 = (|T_1| \cos(\theta_{T_1}), |T_1| \sin(\theta_{T_1}))$ avec θ_{T_1} l'argument de T_1 , il est évident que θ_{T_1} suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ tandis que pour $r \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|T_1| \leq r) = 1 - \mathbb{P}(N_{\phi_X}(B(0, r)) = 0) = 1 - e^{-\lambda\pi r^2},$$

montrant que $|T_1|^2 \sim \mathcal{E}(\lambda\pi)$ et que la densité de $|T_1|$ est $f_{|T_1|}(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}$. On reconnaît ainsi la loi de Rayleigh de paramètre $\frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$, et ainsi que T_1 est un vecteur gaussien bi-dimensionnel, dont les coordonnées sont indépendantes, centrées et de même variance $\frac{1}{2\lambda\pi}$.

Enfin, un atout non négligeable de ce modèle est la possibilité d'effectuer très facilement des simulations approchées. On a déjà vu comment simuler un processus de Poisson au Chapitre 1. On a aussi été confronté aux problèmes de bord dans la simulation des processus ponctuels en cluster. Pour simuler un processus en cluster sur $T \subset \mathbb{R}^2$, la solution était de simuler le processus des parents sur une fenêtre d'observation finie G qui contient T , de sorte que la probabilité pour qu'un parent en dehors de G puisse donner naissance à un enfant dans T soit très petite. Pour simuler un champ shot noise X défini par (2.2.1) sur une fenêtre d'observation discrétisée $T \subset \mathbb{Z}^2$, il suffit de procéder de la même manière en restreignant le processus de Poisson ϕ_X à un ensemble borné $G \subset \mathbb{R}^2$, un peu plus large que T . Cette notion « d'un peu plus large » est propre à chaque modèle, et plus particulièrement à chaque noyau. On sait que g est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 , mais si elle tend très vite vers 0, alors on pourra choisir G seulement un peu plus grand que T , sans faire trop d'erreur. Une fois la position des points simulée, on peut ajouter la marque par une simple simulation d'une variable aléatoire réelle $M \sim F$. Ensuite, il ne reste qu'à suivre la définition d'un champ shot noise en sommant le noyau translaté aux points de Φ_X .

Algorithme 5 Simulation approché d'un champ shot noise

```

 $\Phi_X$  une simulation du processus ponctuel marqué d'intensité  $\lambda \mathbf{1}_{x \in G} dx F(dm)$ 
for  $x \in T$  do
     $X(x) \leftarrow 0$ 
    for  $(x_i, m_i) \in \Phi_X$  do
         $X(x) = X(x) + m_i g(x - x_i)$ 
    end for
end for

```

Le choix de la fenêtre G est un compromis entre erreur et rapidité numérique. Prenons encore une fois l'exemple d'un champ shot noise gaussien, *i.e.* $g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$. Pour $x \in T$, la contribution au champ $X(x)$ provenant d'un point $x_i \in \Phi_X$ se mesure par $g_\sigma(x - x_i)$. Sachant que plus de 99% de la masse d'une densité gaussienne centrée se trouve dans $B(0, 3\sigma)$, on peut restreindre G , avec une erreur acceptable (qui dépend néanmoins de λ), à l'ensemble $T + B(0, 3\sigma) = \{y = x + z, x \in T, z \in B(0, 3\sigma)\}$. La Figure 2.2.2 ne représente qu'un petit éventail du potentiel du modèle shot noise gaussien. À gauche, les sources lumineuses sont identifiables, tandis qu'à droite elles ont commencé à se mélanger. Cette différence est due au changement dans les paramètres de la gaussienne ($\sigma = 10$ à gauche, $\sigma = 30$ à droite). L'augmentation du nombre de sources lumineuses est due aux changements dans le paramètre d'intensité du processus de Poisson ($\lambda = 0.0001$

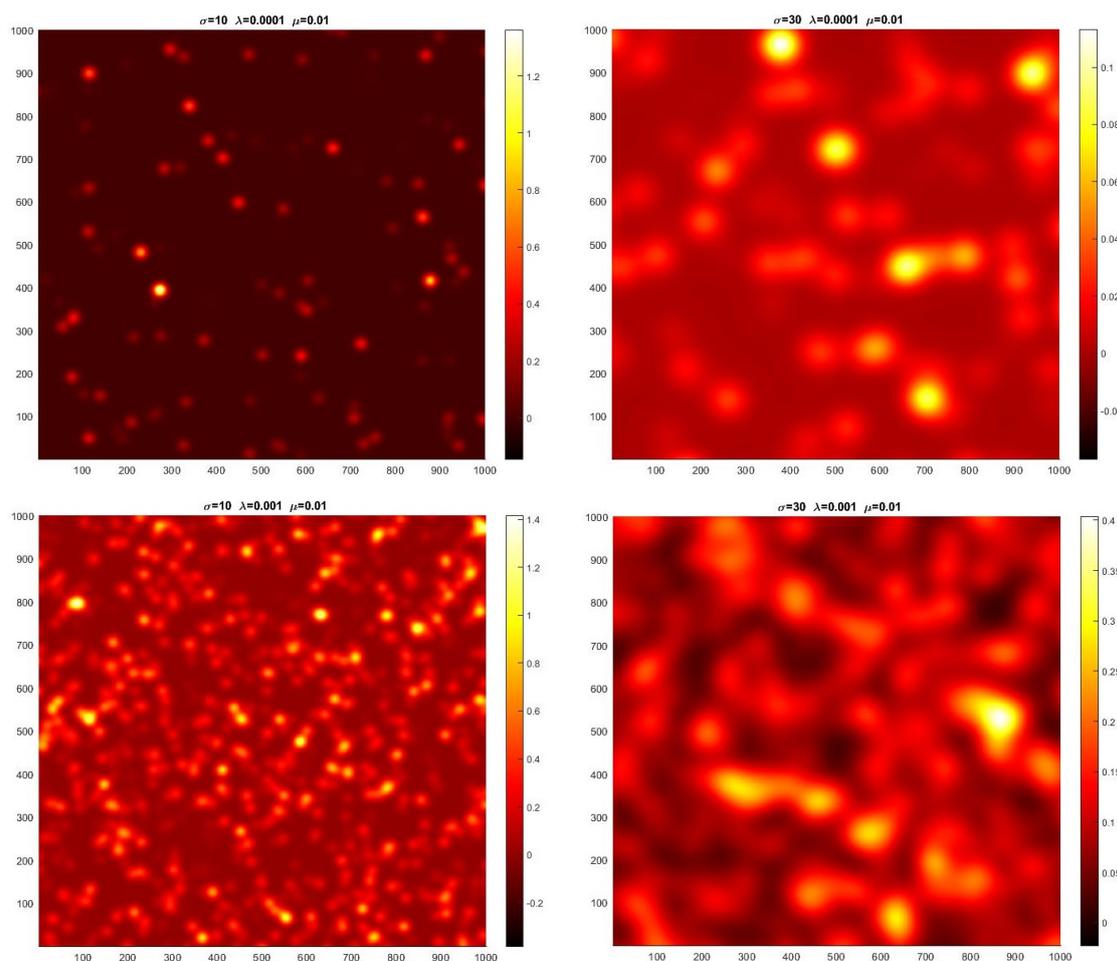


FIGURE 2.2.2 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ de 4 champs shot noise gaussiens avec une marque exponentielle.

en haut, $\lambda = 0.001$ en bas). Rappelons que $\lambda = 0,0001$ représente déjà un nombre moyen de 100 points sur T . Ces paramètres sont choisis pour que chacune de ces simulations ait la même moyenne et la même covariance que celles de la Figure 2.1.1.

Lorsque le noyau est à support compact, cette simulation approchée peut même être une simulation exacte. En effet, si il existe $R > 0$ tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| > R$, alors une simulation du processus de Poisson sur une fenêtre $G = T + B(0, R) = \{y = x + z, x \in T, z \in B(0, R)\}$ permet une simulation exacte de X .

En pratique, il y a une méthode basée sur les propriétés de la transformée de Fourier d'un produit de convolution qui permet l'utilisation des algorithmes de transformation de Fourier rapides [DV90]. Concrètement, on discrétise G en pixels et on suppose que λ n'est pas trop grand, disons $\lambda < 0.01$ si chaque pixel est un carré unité, de sorte que la probabilité d'avoir deux points dans un pixel est négligeable. Ensuite, on approche le processus de Poisson Φ_X sur chaque pixel par une loi de Bernoulli de paramètre $1 - e^{-\lambda} \approx \lambda$. La transformation de Fourier rapide permet un calcul rapide de la convolution discrète

de Φ_X avec le noyau g , préalablement discrétisé sur les pixels de G . Enfin, la restriction sur la fenêtre du milieu renvoie la simulation approchée souhaitée. L'algorithme suivant est un exemple d'application permettant une simulation d'un shot noise gaussien avec une marque exponentielle sur $T = [0, 1000]^2$ (Figure 2.2.2). La grande fenêtre de simulation est $G = [0, N]^2$ avec $N = 1000 + 6\sigma$.

Algorithme 6 Simulation approché d'un champ shot noise par FFT

```

for  $k = 1 : N$  do
  for  $l = 1 : N$  do
     $g(k, l) \leftarrow \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{(k^2+l^2)/2\sigma^2}$ 
     $Points(k, l) \leftarrow \mathcal{B}(\lambda)$ 
    if  $Points(k, l) = 1$  then
       $Points(k, l) \leftarrow \mathcal{E}(\mu)$ 
    end if
  end for
end for
 $H \leftarrow \text{ifft2}(\text{fft2}(Points) * \text{fft2}(g))$ 
 $X \leftarrow H([3\sigma, 1000 + 3\sigma]^2)$ 

```

où `fft2` (respectivement `ifft2`) est une fonction de transformée de Fourier rapide à deux dimensions (respectivement une fonction de transformée de Fourier inverse).

2.3 Association et théorème limite

Depuis les années 1950, beaucoup de notions de mélange ont été introduites. L'un des objectifs est de quantifier la structure de dépendance des variables afin d'obtenir des théorèmes limites comme la normalité asymptotique. L'idée heuristique est que si la corrélation entre des variables éloignées est faible, alors asymptotiquement elles peuvent être considérées statistiquement comme indépendantes. Le plus connu est celui du mélange fort (dit aussi α -mélange) introduit par Rosenblatt [Ros56]. Une bonne référence qui traite le sujet est [Dou94]. Dans ce cadre, le premier théorème limite pour les champs aléatoires est dû à Bolthausen [Bol82] avec une condition de vitesse de décroissance du coefficient du α -mélange. Malheureusement, il est difficile de vérifier les hypothèses de mélange et, en particulier, il n'y a aucun résultat de mélange pour le modèle shot noise. Pire encore, des exemples de processus simples et pouvant prétendre à n'avoir qu'une faible structure de dépendance ne sont pas fortement mélangeant [And84].

La bonne notion pour quantifier la dépendance des modèles shot noise est celle d'association introduite par Esary [EPW67]. Il est bien connu que l'indépendance d'un couple (X, Y) peut être caractérisée par $\text{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$ pour toutes fonctions boréliennes f, g telles que la covariance a un sens. L'ensemble des fonctions test f, g peut être réduit à l'espace des fonctions boréliennes positives, à celui des fonctions boréliennes bornées ou

encore à l'espace des fonctions continues bornées à support compact... L'idée de l'association est de décrire la dépendance des variables d'un champ aléatoire par l'étude de sa structure de covariance sur une classe bien particulière de fonctions tests. À ma connaissance, les relations entre mélange et association n'ont pas été comprises. La principale référence de cette partie est le livre de Bulinski [BS07].

Notons $\mathcal{M}(n)$ la classe des fonctions boréliennes bornées croissantes par cordonnées $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $X_I = \{X(x_i), i \in I\}$ et $\mathcal{M} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Définition 2.3.1. *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in T\}$ est dit associé si pour tout ensemble fini $I \subset T$ et $f, g \in \mathcal{M}(|I|)$ on a*

$$\text{Cov}(f(X_I), g(X_I)) \geq 0$$

Théorème 2.3.2 ([Pit82]). *Soit X un champ gaussien. Alors X est associé si et seulement si $\text{Cov}(X(s), X(t)) \geq 0$ pour tout $s, t \in T$.*

Le théorème suivant justifie la pertinence de la notion d'association pour les modèles shot noise.

Théorème 2.3.3 ([BS07] théorème 3.8.). *Soit X un champ aléatoire shot noise défini par (2.2.1) tel que la marque m est positive presque sûrement et que le noyau g est mesurable positif. Supposons de plus que $X(x) < \infty$ presque sûrement pour tout $x \in T$. Alors X est associé.*

Les hypothèses du théorème sont en particulier vérifiées si l'on suppose **(H)**. Ce théorème est à la base des résultats asymptotiques que l'on formulera au Chapitre 3. La notion suivante de faible association, ou de positive association, est due à Burton [BDD86] et recouvre une classe plus large de modèles.

Définition 2.3.4. *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in T\}$ est dit faiblement associé ou associé positivement si pour tous ensembles finis disjoints $I, J \subset T$ et $f \in \mathcal{M}(|I|)$, $g \in \mathcal{M}(|J|)$ on a*

$$\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) \geq 0$$

Soit I, J disjoints, $f \in \mathcal{M}(|I|)$, $g \in \mathcal{M}(|J|)$ et supposons que X soit associé. Quitte à agrandir f, g comme des fonctions dans $\mathcal{M}(|I| + |J|)$, avec f (respectivement g) qui vaut 0 sur le prolongement des $|J|$ dernières variables (respectivement des $|I|$ premières variables), on a immédiatement que $\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) \geq 0$ et par suite qu'un champ associé est aussi faiblement associé. À l'inverse, il existe des champs aléatoires faiblement associés qui ne sont pas associés. Pour la catégorie des champs gaussiens, un corollaire du Théorème 2.3.2 est que ces deux notions sont équivalentes.

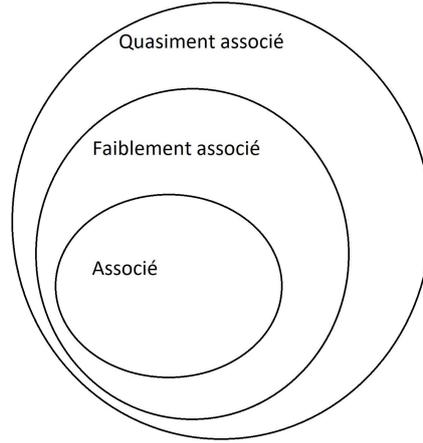


FIGURE 2.3.3 – Inclusion des notions d'association pour un champ de carré intégrable.

Maintenant, on va restreindre l'étude de nos champs aux réseaux $T = \mathbb{Z}^d$, ce qui, dans une vision inférentielle, n'est pas une perte de généralité. De plus, on va changer la classe des fonctions test en considérant celle des fonctions Lipschitz. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitz si

$$\text{Lip}(f) := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_1} < \infty,$$

où on a noté $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$ et $\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$.

Définition 2.3.5. *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ de carré intégrable est dit quasiment associé si pour tous ensembles finis disjoints $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ et toutes fonctions Lipschitziennes $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ on a*

$$|\text{cov}(f(X_I), g(X_J))| \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I, j \in J} |\text{Cov}(X(x_i), X(x_j))| \quad (2.3.1)$$

La notion de quasi association est due à Bulinski [BS01]. Comme le montre le théorème suivant, c'est une classe encore plus large que celle des processus positivement associés, et donc plus large que les processus associés.

Théorème 2.3.6 ([BS07] Théorème 5.3.). *Soit $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire faiblement associé de carré intégrable. Alors X est quasiment associé.*

La preuve de ce théorème sera présentée un peu plus loin dans un cadre vectoriel.

Définition 2.3.7 ((BL, θ) dépendance). *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ est dit (BL, θ) dépendant s'il existe une suite décroissante $\theta = (\theta_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs qui tend vers 0 telle que pour tous ensembles finis disjoints $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ et toutes fonctions Lipschitziennes bornées $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ on a*

$$|\text{Cov}(f(X_I), g(X_J))| \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \min(|I|, |J|)\theta_r$$

où $r = \text{dist}(I, J) = \min\{\|i - j\|_\infty \mid i \in I, j \in J\}$.

Initialement introduit par Doukhan et Louhichi [DL99] pour les processus à une dimension, l'utilisation de la (BL, θ) dépendance pour les champs aléatoires est principalement due à Bulinski [BS07].

On dit qu'un champ stationnaire satisfait la condition de susceptibilité finie de Newman si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\text{Cov}(X(0), X(j))| < \infty \quad (2.3.2)$$

et dans ce cas le coefficient de Cox-Grimmet [CG84] défini par

$$u(r) := \sum_{\|j\|_\infty \geq r} |\text{Cov}(X(0), X(j))| \quad (2.3.3)$$

est fini pour tout $r \in \mathbb{Z}_+$. Sous cette condition, il est évident qu'un champ quasiment associé est (BL, θ) dépendant avec $\theta_r = u(r)$ le coefficient de Cox-Grimmet. En revanche, il existe des champs aléatoires (BL, θ) dépendants qui ne sont pas quasiment associés.

Lorsqu'on étudie le comportement asymptotique d'un champ aléatoire, le nombre d'observations n'est pas augmenté par la répétition d'observations sur une fenêtre fixée $U \subset T$ mais par la croissance de la taille de la fenêtre d'observation $U_n \subset T$. L'avantage d'étudier les champs aléatoires associés est qu'on peut montrer les théorèmes limites classiques en imposant seulement des conditions sur le comportement asymptotique de la fonction de covariance, comme sur le coefficient de Cox-Grimmet. C'est pourquoi le rôle de ce coefficient est similaire aux coefficients de mélange, avec l'avantage d'être plus facile à exploiter. Les théorèmes limites établis dans la suite sont basés sur la notion d'ensemble croissant au sens de Van Hove. On se référera à [BS07] pour plus de détails sur ce sujet mais par souci de simplicité le lecteur pourra imaginer que l'on observe un champ aléatoire sur une image $U_n = [0, n-1]^2 \subset \mathbb{Z}^2$ avec n^2 pixels.

Notons $S(U_n)$ la somme partielle des marginales du champ

$$S(U_n) = \sum_{x \in U_n} X(x)$$

permettant de définir l'estimateur de la moyenne du champ comme

$$\widehat{M}_1 = \frac{S(U_n)}{|U_n|}.$$

Avant d'énoncer le théorème central limite, regardons la limite de la variance de $S(U_n)$.

Théorème 2.3.8 ([BS07]). *Soit $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire stationnaire satisfaisant la condition de susceptibilité finie de Newman et $(U_n)_n$ une suite d'ensembles réguliers croissants. Alors quand $n \rightarrow \infty$ on a*

$$\frac{\text{Var}(S(U_n))}{|U_n|} \rightarrow \sigma_1^2,$$

où $\sigma_1^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{Cov}(X(0), X(j))$.

Le premier théorème limite pour les variables associées est dû à Newman [New80] dans les années 1980 et dans un cadre unidimensionnel. Sa généralisation aux dimensions supérieures ainsi que sous l'hypothèse plus générale de (BL, θ) dépendance revient à Bulinski [BS07].

Théorème 2.3.9. *Soit $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire (BL, θ) dépendant stationnaire centré de carré intégrable. Alors pour toute suite (U_n) d'ensembles réguliers croissants, quand $n \rightarrow \infty$ on a*

$$\frac{S(U_n)}{\sqrt{|U_n|}} = \sqrt{|U_n|} \widehat{M}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2). \quad (2.3.4)$$

Il est clair que la condition que X soit centré n'est là que pour alléger les notations : si X est un champ associé, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ le champ $X + c$ est encore associé. Cela est dû au fait que si $f \in \mathcal{M}(n)$ alors la fonction $f(\cdot + c)$ est encore une fonction bornée croissante par coordonnées. Par exemple, un champ shot noise satisfaisant **(H)** est positif presque sûrement et par conséquent il n'est pas centré, voir (2.2.5). Dans ce cas, la convergence se note

$$\frac{S(U_n) - |U_n| \mathbb{E}[X(0)]}{\sqrt{|U_n|}} = \sqrt{|U_n|} (\widehat{M}_1 - \mathbb{E}[X(0)]) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2).$$

L'inférence statistique par méthode des moments sur les modèles de champs aléatoires nécessite une version vectorielle de toutes ces notions. La première référence qui traite cette extension est [BDD86] et on se référera encore une fois au livre de Bulinski [BS07].

Définition 2.3.10. *Un champ aléatoire $X = \{(X^{(1)}(x), \dots, X^{(k)}(x)), x \in \mathbb{Z}^d\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^k est dit associé si pour tout ensemble fini $I \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{M}(k|I|)$, $g \in \mathcal{M}(k|I|)$ on a*

$$\text{Cov}(f(X_I), g(X_I)) \geq 0.$$

Il est dit faiblement associé si l'inégalité $\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) \geq 0$ est vérifiée pour tout $f \in \mathcal{M}(k|I|)$ et $g \in \mathcal{M}(k|J|)$ où $I, J \subset \mathbb{R}^2$ sont disjoints.

Définition 2.3.11. *Un champ aléatoire $X = \{(X^{(1)}(x), \dots, X^{(k)}(x)), x \in \mathbb{Z}^d\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^k de carré intégrable est dit quasiment associé si pour tous ensembles finis disjoints $I, J \in \mathbb{Z}^d$ et toutes fonctions Lipschitziennes $f : \mathbb{R}^{k|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{k|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ on a*

$$|\text{cov}(f(X_I), g(X_J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{i \in I, j \in J} \sum_{r, q=1}^k |\text{Cov}(X^{(r)}(i), X^{(q)}(j))|$$

Proposition 2.3.12. *Soit $X = \{(X^{(1)}(x), \dots, X^{(k)}(x)), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^k de carré intégrable et associé positivement. Alors X est quasiment associé.*

Démonstration. Cette preuve adapte la preuve de Bulinski [BS07] au cadre vectoriel. Soit $X = \{(X^{(1)}(x), \dots, X^{(k)}(x)), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire faiblement associé à valeurs dans \mathbb{R}^k . Soit $I, J \in \mathbb{Z}^d$ deux ensembles finis disjoints, $f : \mathbb{R}^{k|I|} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{k|J|} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions Lipschitziennes.

Notons

$$\begin{cases} f_{\pm}(X_I) = f(X_I) \pm \text{Lip}(f) \sum_{i \in I} \sum_{r=1}^k X^{(r)}(i) \\ g_{\pm}(X_J) = g(X_J) \pm \text{Lip}(g) \sum_{j \in J} \sum_{q=1}^k X^{(q)}(j) \end{cases}$$

Les fonctions f_+ et g_+ sont alors croissantes par coordonnées et les fonctions f_- et g_- sont décroissantes par coordonnées. On a alors premièrement

$$\begin{cases} \text{Cov}(f_+(X_I), g_+(X_J)) \geq 0 \\ \text{Cov}(f_-(X_I), g_-(X_J)) = \text{Cov}(-f_-(X_I), -g_-(X_J)) \geq 0 \end{cases}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient alors :

$$\text{Cov}(f_+(X_I), g_+(X_J)) + \text{Cov}(f_-(X_I), g_-(X_J)) \geq 0,$$

d'où

$$2\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) + 2\text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r,q=1}^k \text{Cov}(X^{(r)}(i), X^{(q)}(j)) \geq 0,$$

et enfin

$$\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) \geq -\text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r,q=1}^k \text{Cov}(X^{(r)}(i), X^{(q)}(j)) \quad (2.3.5)$$

Deuxièmement, on a

$$\begin{cases} \text{Cov}(-f_+(X_I), g_-(X_J)) = \text{Cov}(f_+(X_I), -g_-(X_J)) \geq 0 \\ \text{Cov}(f_-(X_I), -g_+(X_J)) = \text{Cov}(-f_-(X_I), g_+(X_J)) \geq 0. \end{cases}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient cette fois :

$$\text{Cov}(-f_+(X_I), g_-(X_J)) + \text{Cov}(f_-(X_I), -g_+(X_J)) \geq 0,$$

d'où

$$-2\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) + 2\text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r,q=1}^k \text{Cov}(X^{(r)}(i), X^{(q)}(j)) \geq 0,$$

et enfin

$$\text{Cov}(f(X_I), g(X_J)) \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r,q=1}^k \text{Cov}(X^{(r)}(i), X^{(q)}(j)) \quad (2.3.6)$$

On conclut que le champ X est quasiment associé en combinant (2.3.5) et (2.3.6). \square

Les champs à valeurs vectorielles, par la notion de (BL, θ) dépendance vectorielle, ont aussi leur théorème central limite.

Définition 2.3.13 ([BS07]). *Un champ aléatoire $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^k est (BL, θ) dépendant si il existe une suite décroissante $\theta = (\theta_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs qui tend vers 0 telle que pour tous ensembles finis disjoints $I, J \in \mathbb{Z}^2$ et toutes fonctions Lipschitziennes bornées $f : \mathbb{R}^{k|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{k|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ on a*

$$|\text{cov}(f(X_I), g(X_J))| \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g)\min(|I|, |J|)\theta_r$$

où $r = \text{dist}(I, J)$.

Là encore, un champ quasiment associé satisfaisant la condition de Newman est (BL, θ) dépendant en prenant $\theta_r = u(r) := \sum_{\|j\|_\infty \geq r} \sum_{q=1}^k |\text{Cov}(X^{(r)}(0), X^{(q)}(j))|$ le coefficient de Cox-Grimmet vectoriel.

Théorème 2.3.14 ([BS07]). *Soit $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire (BL, θ) dépendant stationnaire centré de carré intégrable à valeurs dans \mathbb{R}^k . Alors pour toute suite (U_n) d'ensembles réguliers croissants quand $n \rightarrow \infty$ on a*

$$\frac{1}{\sqrt{|U_n|}} \sum_{x \in U_n} X(x) \rightarrow \mathcal{N}(0, C),$$

où C est la matrice $k \times k$ d'éléments $C_{lm} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X^{(l)}(0), X^{(m)}(j))$.

L'application de ce théorème aux champs vectoriels de type

$$Y(x) = (X(x), X(x)^2, X(x)X(x+h))$$

avec $h \in \mathbb{Z}^d$, permettra dans le Chapitre 3 une étude statistique des moments et des paramètres d'un champ shot noise X .

2.4 Géométrie des niveaux d'excursion

Dans toute cette section nous supposons que les champs aléatoires sont définis sur \mathbb{R}^2 et observés sur $T \subset \mathbb{R}^2$. Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on utilisera les notations $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ pour $i = 1, 2$ et $x = (x_1, x_2)$ ainsi que le gradient $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x))$.

Tout comme les fonctions de distance pour les processus ponctuels, les caractéristiques géométriques des champs aléatoires sont des statistiques très populaires [KL01, AT07, BST12, Lac15b, AAD⁺19, BD20] avec notamment des applications en imagerie médicale

[CW99, DBD20] et en astrophysique [Wor95]. Ils ont également permis la construction d'un test d'aléatoire complet [EHKM18], faisant le lien avec les processus ponctuels et les modèles shot noise. Ces caractéristiques reposent sur la notion d'ensemble d'excursion (voir Figure 2.4.4).

Définition 2.4.1. Soit X un champ aléatoire réel sur \mathbb{R}^2 . L'ensemble d'excursion de niveau $u \in \mathbb{R}$ dans une fenêtre d'observation T est défini par

$$E_X(u, T) = \{x \in T \mid X(x) \geq u\} \quad (2.4.1)$$

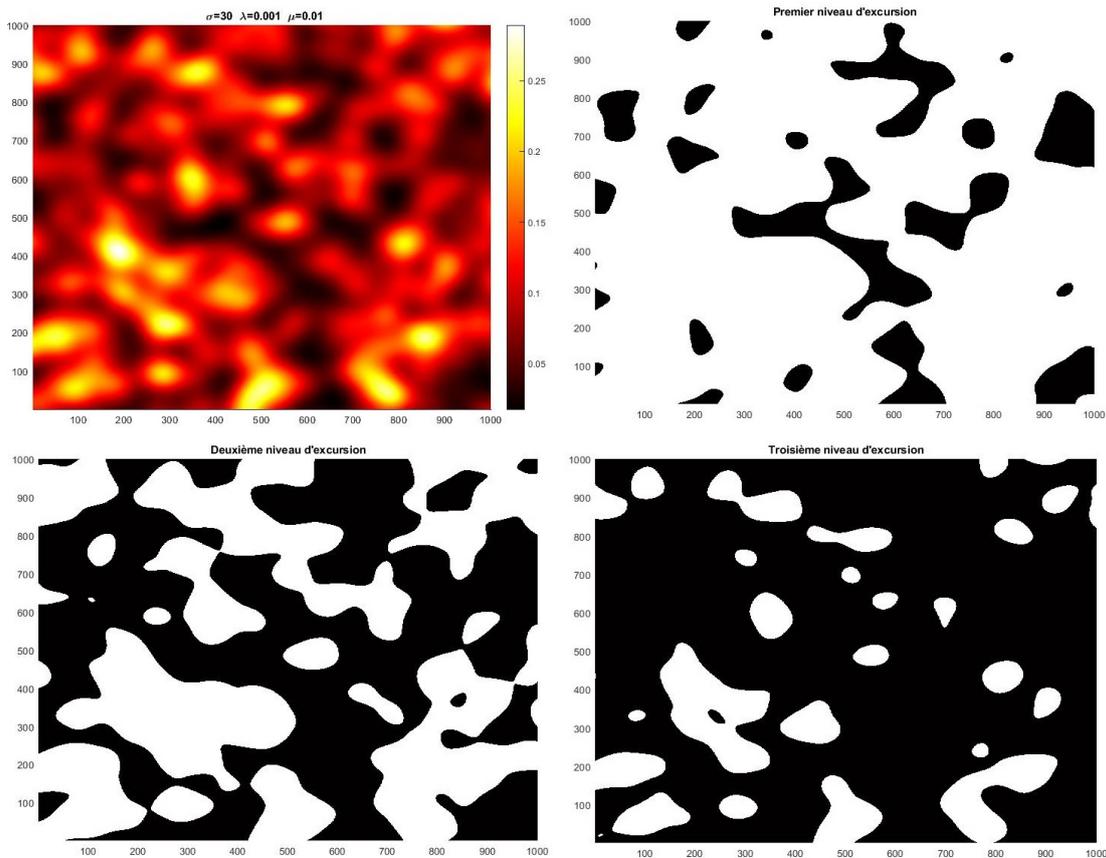


FIGURE 2.4.4 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ d'un champ aléatoire shot noise et de 3 niveaux d'excursion (en blanc). Le deuxième niveau correspond à $u = \mathbb{E}[X(0)]$ tandis que le premier et le troisième niveau correspondent respectivement à $u = \mathbb{E}[X(0)] - \sqrt{\text{Var}[X(0)]}$ et $u = \mathbb{E}[X(0)] + \sqrt{\text{Var}[X(0)]}$.

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ compact avec une frontière \mathcal{C}^2 par morceaux, que l'on note usuellement ∂E , peut être décrit à l'aide de 3 caractéristiques. Son aire $\mathcal{L}(E)$ et son périmètre $\mathcal{H}^1(\partial E)$, où \mathcal{L} est la mesure de Lebesgue de dimension 2 et \mathcal{H}^1 la mesure de Hausdorff de dimension 1, sont des quantités fondamentales d'un ensemble qui permettent de décrire son occupation et sa régularité. Sa caractéristique d'Euler $\chi(E)$, qui compte le nombre de composantes connexes moins le nombre de trous, rend quant à elle possible la compréhension de la topologie de l'ensemble. Selon le cadre de travail, ces caractéristiques

géométriques sont parfois appelées courbure de Lipschitz-Killing, voir fonctionnelles de Minkowski [EHKM18].

Un ensemble d'excursion est un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^2 et on s'intéresse à ses 3 caractéristiques géométriques : la fonction aire $u \rightarrow \mathcal{L}(E_X(u, T))$, la fonction périmètre $u \rightarrow \text{Per}(E_X(u, T))$ et la fonction de caractéristique d'Euler $u \rightarrow \chi(E_X(u, T))$. Toutes ces fonctions aléatoires, vues comme des processus sur les niveaux d'excursion, ne sont pas stationnaires et les lois marginales, pour un niveau $u \in \mathbb{R}$, sont hors de portée. C'est pourquoi nos quantités d'intérêt sont les espérances de ces fonctions aléatoires. Sans perte de généralité dans l'étude de notre modèle shot noise, on supposera de plus que les champs sont stationnaires, d'où la définition suivante.

Définition 2.4.2. *Soit X un champ aléatoire "gentil" réel stationnaire sur \mathbb{R}^2 . Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit la densité d'aire par*

$$u \rightarrow \overline{\mathcal{L}(E_X(u))} = \frac{\mathbb{E}[\mathcal{L}(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}, \quad (2.4.2)$$

la densité de périmètre par

$$u \rightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))} = \frac{\mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}, \quad (2.4.3)$$

et la densité de caractéristique d'Euler par

$$u \rightarrow \overline{\chi(E_X(u))} = \frac{\mathbb{E}[\chi(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}. \quad (2.4.4)$$

où T est n'importe quelle fenêtre d'observation dans \mathbb{R}^2 .

Le terme "gentil" fait ici référence au "nice" d'Adler [AT07], afin que tout soit convenablement défini. À ce stade, sans hypothèse de régularité, la notion de périmètre d'un ensemble mesurable dans \mathbb{R}^2 est un petit peu floue. Elle sera définie pour nos ensembles d'intérêts dans la suite de ce chapitre.

La caractéristique la plus simple à étudier est celle de l'aire puisqu'elle ne dépend que de la loi marginale. En effet, par stationnarité et Fubini on a facilement que

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}(E_X(u, T))] = \int_T \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X(x) \geq u}] dx = \mathcal{L}(T) \mathbb{P}(X(0) \geq u) \quad (2.4.5)$$

La normalité asymptotique de $\mathcal{L}(E_X(u, T_n))$ (lorsque T_n est une suite d'ensembles croissants réguliers) pour une large classe de champs aléatoires stationnaires a été prouvée dans [BST12], sous des hypothèses de faible association et de densité bornée des lois marginales.

Concernant les deux autres géométries, de nombreux résultats sont connus pour les champs gaussiens stationnaires. Sous des conditions de régularité, comme celle que le

champ soit presque sûrement une fonction de Morse de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, le Théorème 11.7.2 de [AT07] permet de calculer facilement la densité de caractéristique d'Euler. De son côté, les Théorèmes 6.8 et 11.3 de [AW09] donnent l'expression de la densité de périmètre pour des champs gaussiens, sous l'hypothèse principale que le champ soit presque sûrement de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Par exemple dans [BD20], en considérant un champ gaussien $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ centré, stationnaire et isotrope de fonction de covariance C sur \mathbb{R}_+ , on a pour presque tout $u \in \mathbb{R}$ les formules explicites suivantes :

$$\overline{\text{Per}(E_X(u))} = \sqrt{\frac{\pi\lambda_2}{2}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_2^2}} \quad (2.4.6)$$

et

$$\overline{\text{TC}(E_X(u))} = \frac{\lambda_2}{\sigma_2^2} u \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_2^2}} \quad (2.4.7)$$

où l'on a noté $\lambda_2 = -C^{(2)}(0)$ le deuxième moment spectral et $\sigma_2^2 = C(0)$ la variance d'une marginale. En reprenant les notations de la Figure 2.1.1, la Figure 2.4.5 illustre ce qu'il est possible de faire avec les champs gaussiens, où en considérant une covariance gaussienne on obtient $\lambda_2 = \frac{\lambda}{4\pi\mu^2\sigma^4}$ et $\sigma_2^2 = \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2}$, ce qui permet d'explicitier totalement (2.4.6) et (2.4.7).

Cependant, lorsque le champ n'est pas gaussien, il est plus difficile d'avoir des formules explicites. Une exception est celle des champs aléatoires infiniment divisibles pour lesquels [AST13] ont étudié le comportement asymptotique de la loi du nombre de points critiques lorsque le niveau d'excursion $u \rightarrow \infty$. Par la théorie de Morse, les points critiques d'une fonction sont étroitement liés à la caractéristique d'Euler des niveaux d'excursion. Ainsi, ces résultats ont permis le calcul asymptotique de $\overline{\chi(E_X(u))}$ pour des haut niveaux u , conditionnellement à ce que les niveaux d'excursion ne soient pas vides, sous des hypothèses de régularité comme celle que le champ soit presque sûrement une fonction de Morse $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Les travaux de Lachièze-Rey [Lac15a, Lac15b], faisant le lien entre la caractéristique d'Euler et des outils variographiques, ont permis un relâchement de certaines hypothèses de régularité. Ils permettent le calcul de $u \rightarrow \overline{\chi(E_X(u))}$ sous l'hypothèse que $(X(0), \partial_1 X(0), \partial_2 X(0))$ a une densité bornée et que le champ est presque sûrement une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ avec des dérivées Lipschitz, hypothèse plus faible que l'habituelle fonction de Morse $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. En particulier, ces résultats viennent généraliser les résultats sur les champs gaussiens [AT07].

2.4.1 Périmètre des champs shot noise

Les précédentes hypothèses, que cela soit lié à la régularité du champ ou à l'existence d'une densité bornée, ne sont pas toujours vérifiées pour les champs shot noise. Par conséquent, le calcul des caractéristiques géométriques à partir de ces résultats n'est pas

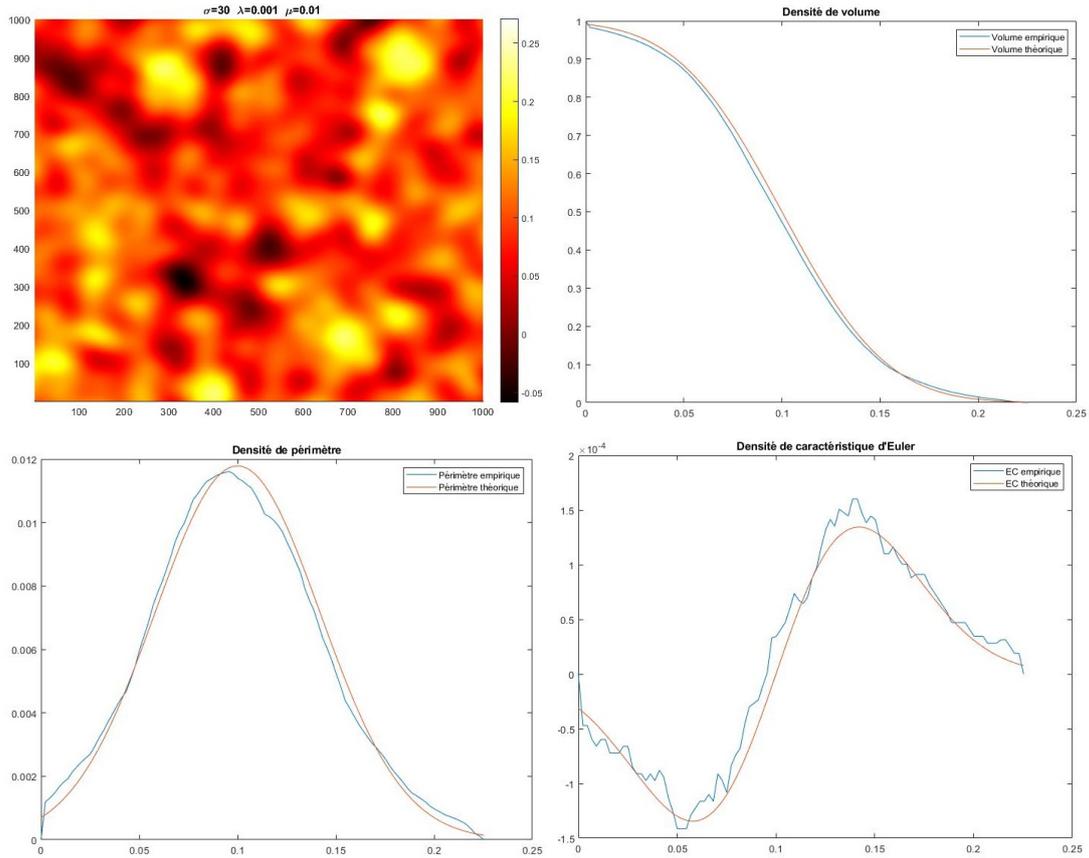


FIGURE 2.4.5 – Simulations sur $T = [0, 1000]^2$ d'un champ aléatoire gaussien avec covariance gaussienne et estimations de ses 3 caractéristiques géométriques. Les 3 courbes théoriques ont été calculées avec (2.4.5), (2.4.6) et (2.4.7).

possible. L'un des problèmes est l'hypothèse que $X(0)$ a une densité bornée. Par exemple, si le noyau g est à support compact, il existe une probabilité strictement positive qu'une marginale de X soit nulle. Ceci est incompatible avec l'hypothèse d'existence d'une densité bornée [AAD⁺19], mettant ainsi de côté tous les noyaux à support compact. Un deuxième problème est l'hypothèse de régularité du champ. En effet, pour qu'un champ shot noise soit lisse il est nécessaire que le noyau g soit lisse, mettant ainsi de côté tous les modèles où le noyau est constant par morceaux. Pour palier à ces problèmes, les idées de [BD16, BD20] sont, en premier lieu, de regarder ces fonctions dans leur globalité en adoptant un point de vue fonctionnel. Pour h une fonction test lisse (dans un sens que l'on précisera plus tard), on introduit la fonctionnelle du périmètre par

$$\text{LP}_X(h, T) = \int_{\mathbb{R}} h(u) \text{Per}(E_X(u), T) du. \quad (2.4.8)$$

La connaissance de cette fonctionnelle permet une connaissance presque partout du périmètre. En particulier, pour $\nu \in \mathbb{R}$, en calculant (2.4.8) avec $h_\nu(u) = e^{i\nu u}$ on obtient les transformées de Fourier du périmètre.

Dans le même esprit fonctionnel, Lachièze-Rey [Lac16a] s'est également affranchi de l'hypothèse de la densité bornée dans l'étude de la caractéristique d'Euler d'un champ shot noise. Les autres conditions de régularité sont certes un peu plus faibles que l'habituelle Morse $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, mais ne permettent pas pour autant une étude pour les modèles shot noise non lisses. C'est pourquoi, deuxièmement, le cadre très intéressant pour étudier les géométries des champs shot noise est celui des fonctions spéciales à variations bornées. Il permet au noyau du champ d'être constant par morceaux, sans lui enlever la possibilité classique d'être lisse.

Rappelons brièvement quelques définitions. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ est dite continue approximativement en $x \in T$ si

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}(B(x, \rho))} \int_{B(x, \rho)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

L'ensemble des points où la fonction n'est pas continue approximativement est négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^2 [AFP00]. Parmi ces points, un point $x \in T$ est dit de saut approximatif s'il existe deux réels $f^+(x)$, $f^-(x)$ tels que $f^+(x) > f^-(x)$ et un vecteur unité $\nu_f(x)$ avec

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int_{B_{\nu_f(x)}^+(x, \rho)} |f(y) - f^+(x)| dy = 0,$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int_{B_{\nu_f(x)}^-(x, \rho)} |f(y) - f^-(x)| dy = 0,$$

où $B_{\nu}^+(x, \rho)$ et $B_{\nu}^-(x, \rho)$ désignent respectivement la demi-boule $\{y \in B(x, \rho), \langle y - x, \nu \rangle > 0\}$ et la demi-boule $\{y \in B(x, \rho), \langle y - x, \nu \rangle < 0\}$. On note J_f l'ensemble des points de saut approximatifs. Une fonction $f \in \text{SBV}(T)$ si $f \in L^1(T)$ et a sa dérivée distributive représentée par une mesure de Radon finie dans T donnée par

$$\int_T f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_l}(x) dx = - \int_T \phi(x) D_l f(dx),$$

pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(T, \mathbb{R})$, $l = 1, 2$ et pour $Df = (D_1 f, D_2 f)$ une mesure à valeurs dans \mathbb{R}^2 telle que

$$Df = \nabla f \mathcal{L} + (f^+ - f^-) \nu_f \mathcal{H}^1 \llcorner J_f,$$

où $\nabla f \mathcal{L}$ est la partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $(f^+ - f^-) \nu_f \mathcal{H}^1 \llcorner J_f$ est la partie saut. La notation $\mathcal{H}^1 \llcorner J_f$ désigne la restriction de la mesure \mathcal{H}^1 à l'ensemble J_f . La différence entre les fonctions spéciales à variations bornées et les fonctions à variations bornées est que pour ces dernières la mesure de Radon Df possède une troisième composante qui s'annule sur les ensembles qui ont une mesure \mathcal{H}^1 finie et qui est désignée comme la partie de Cantor de Df [AFP00].

Ce cadre de travail est de grand intérêt pour étudier le périmètre d'un ensemble mesurable. Si on suppose que E un ensemble mesurable tel que sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_E \in \text{SBV}(T)$, alors on définit le périmètre de E dans T par

$$\text{Per}(E, T) = \sup \left\{ \int_E \text{div} \varphi dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^1(T, \mathbb{R}^2), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}, \quad (2.4.9)$$

et on définit ces ensembles comme les ensembles de périmètre fini dans T . Cette définition du périmètre concorde avec la définition classique par la mesure de Hausdorff pour les ensembles de périmètre fini dans T avec une bordure \mathcal{C}^1 par morceaux [AFP00]. C'est dans ce cadre de travail que Biermé et Desolneux [BD16] ont réussi à calculer le périmètre des niveaux d'excursion de plusieurs champs shot noise. En fait, si $f \in \text{SBV}(T)$ alors l'ensemble d'excursion $E_f(u, T)$ est un ensemble de périmètre fini dans T pour presque tout $u \in \mathbb{R}$ et c'est par l'équation (2.4.9) que l'on définit le périmètre $\text{Per}(E_f(u, T))$ qui apparait dans l'équation (2.4.3). Une fois de plus par stationnarité, notre quantité d'intérêt est

$$\overline{\text{LP}_X(h)} = \frac{\mathbb{E}[\text{LP}_X(h, T)]}{\mathcal{L}(T)} = \int_{\mathbb{R}} h(u) \overline{\text{Per}(E_X(u))} du.$$

Théorème 2.4.3 (Théorèmes 1 et 2 et Proposition 1 de [BD16]). *Soit X un champ shot noise défini par (2.2.1). Supposons que le noyau g est une fonction spéciale à variations bornées et intégrable telle que son gradient ∇g est intégrable et sa partie saut est finie $\int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) \mathcal{H}^1(dy) < \infty$. Alors la fonctionnelle du périmètre moyen s'écrit, pour toute fonction $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, comme la somme d'un terme lisse avec un terme de saut :*

$$\begin{aligned} \overline{\text{LP}_X(h)} &= \mathbb{E}[h(X(0)) \|\nabla X(0)\|] \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \int_{J_g} \left(\int_{mg^-(y)}^{mg^+(y)} \mathbb{E}[h(s + X(0))] ds \right) \mathcal{H}^1(dy) F(dm). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

De plus, en prenant $h_\nu(u) = e^{i\nu u}$, on obtient que la transformée de Fourier de la fonction du périmètre moyen est

$$\begin{aligned} \overline{\text{LP}_X(h_\nu)} &= \mathbb{E}[e^{i\nu X(0)} \|\nabla X(0)\|] \\ &+ \mathbb{E}[e^{i\nu X(0)}] \frac{\lambda}{i\nu} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{J_g} (e^{i\nu mg^+(y)} - e^{i\nu mg^-(y)}) \mathcal{H}^1(dy) F(dm). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Dans le cas où le noyau g est constant par morceaux, la partie lisse s'annule et des calculs explicites sont possibles, notamment lorsque le noyau est une indicatrice d'un compact (boule, rectangle, ...) [BD16]. Dans le cas où le noyau g est de classe \mathcal{C}^2 alors la partie saut s'annule et la partie lisse se calcule comme suit.

Théorème 2.4.4 (Théorème 3 de [BD20]). *Soit X un champ shot noise défini par (2.2.1) et T un ouvert borné de \mathbb{R}^2 tel que sa frontière soit une courbe régulière par morceaux.*

Supposons que le noyau g soit intégrable, isotrope et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que chaque dérivée partielle $\frac{\partial^{|j|}g}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}}$ soit intégrable pour tout $j = (j_1, j_2)$ où $|j| = j_1 + j_2 \leq 2$.

Alors X est un champ stationnaire, isotrope, presque sûrement de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tel que $X(0)$ et $\partial_1 X(0)$ sont intégrables, satisfaisant les hypothèses du Théorème 2 de [BD20]. Par conséquent $X \in \text{SBV}(T)$ presque sûrement et $\text{Per}(E_X(u, T))$ est intégrable pour presque tout $u \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a

$$\overline{LP_X(h)} = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}[h(X(0))|\partial_1 X(0)|].$$

Si on suppose de plus que toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont de carrés intégrables, alors pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, en notant h_ν la fonction $u \mapsto e^{i\nu u}$, on a

$$\overline{LP_X(h_\nu)} = \int_0^\infty \frac{1}{v} \varphi(\nu, v) S_0(\nu, v) dv \quad (2.4.12)$$

avec φ la fonction caractéristique de $(X(0), \partial_1 X(0))$ donnée par

$$\varphi(\nu, v) = \mathbb{E}[e^{i\nu X(0) + i v \partial_1 X(0)}] = \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} [e^{i[\nu m g(x) + v m \partial_1 g(x)]} - 1] F(dm) dx\right),$$

et où on a noté

$$S_0(\nu, v) = -i\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} m \partial_1 g(x) e^{i[\nu m g(x) + v m \partial_1 g(x)]} F(dm) dx.$$

Reprenons l'exemple illustré sur la Figure 2.2.2 en considérant le champ shot noise $X_{\lambda, \mu, \sigma}$ formé par un noyau gaussien couplé à une marque exponentielle. Par le calcul de sa fonction caractéristique, on a déjà vu que chaque marginale suit une loi gamma. Le même type de calculs nous donne

$$\varphi(\nu, v) = \exp\left(\lambda \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{ir(\nu\sigma^2 - vrcos(\theta))e^{-r^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^4\mu - i(\nu\sigma^2 - vrcos(\theta))e^{-r^2/2\sigma^2}} d\theta dr\right) \quad (2.4.13)$$

et

$$S_0(\nu, v) = i\lambda \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\sigma^4\mu r^2 cos(\theta)e^{-r^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^4\mu - i(\nu\sigma^2 - vrcos(\theta))e^{-r^2/2\sigma^2})^2} d\theta dr \quad (2.4.14)$$

Malheureusement, ces calculs sont quand même exprimés sous forme de plusieurs intégrales et nécessitent une approximation numérique qui doit être adaptée à chaque triplet de paramètres (λ, μ, σ) . En pratique, pour obtenir la fonction de périmètre moyen, il est ensuite nécessaire d'effectuer une transformation de Fourier inverse, ce qui requiert une nouvelle fois une approximation numérique et une adaptation spécifique à chaque modèle. L'algorithme 2.4.1 résume la procédure pour approcher numériquement la fonction du périmètre moyen.

Algorithme 7 Calcul la fonction du périmètre moyen à partir du cadre lisse

Choisir n_1 le nombre d'éléments du vecteur ν

Choisir ν_{max} le maximum du vecteur ν

$$\nu \leftarrow -\frac{\nu_{max}}{2} + (0 : n_1 - 1) \frac{\nu_{max}}{n_1 - 1}$$

Choisir n_2 le nombre d'éléments du vecteur v

Choisir v_{max} le maximum du vecteur v

$$v \leftarrow (1 : n_2) \frac{v_{max}}{n_2}$$

Choisir r_{max} le maximum dans l'intégrale de $\varphi(\nu, v)$ et $S_0(\nu, v)$

Choisir n_3 le nombre d'éléments du vecteur u

Choisir u_{min} et u_{max} le minimum et le maximum du vecteur u

$$u \leftarrow u_{min} + (0 : n_3 - 1) \frac{u_{max} - u_{min}}{n_3 - 1}$$

for $k = 1 : n_1$ **do**

for $l = 1 : n_2$ **do**

 Approcher $\varphi(\nu(k), v(l))$ par intégration numérique de la formule (2.4.13)

 Approcher $S_0(\nu(k), v(l))$ par intégration numérique de la formule (2.4.14)

end for

end for

Approcher $\nu \rightarrow \overline{\text{LP}_X(h_\nu)}$ à partir de la formule (2.4.12)

Approcher $u \rightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))}$ par transformée de Fourier inverse

Au delà du choix des précisions n_1 , n_2 et n_3 ; c'est le choix de r_{max} , v_{max} et ν_{max} qui n'est pas facile puisqu'ils dépendent des paramètres du champ. Les valeurs de u_{min} et u_{max} peuvent être choisies par le minimum et le maximum d'une simulation d'un champ shot noise avec les mêmes paramètres. La valeur de ν_{max} peut également être choisie par observation du périmètre empirique d'une simulation. La fonction de périmètre empirique $\widehat{\text{Per}}(E_X(u))$ est calculée numériquement en suivant l'étude récente de Biermé et Desolneux [BD20]. La Figure 2.4.6 est le résultat de l'algorithme 2.4.1 avec le triplet de paramètres $(\sigma, \mu, \lambda) = (20, \frac{1}{100}, 0.001)$, identique à ceux utilisés dans la simulation en bas à droite de la Figure 2.2.2. Nous avons choisi $n_1 = n_2 = n_3 = 2^{10}$ afin de faire un compromis entre une bonne précision et un temps de calcul acceptable. Pour ce triplet de paramètres, on recommande numériquement de choisir $r_{max} = 100$ et $v_{max} = 6000$. En utilisant la commande "tic toc" de Matlab, l'algorithme a duré 4500 secondes soit plus d'une heure. Il sera intéressant de comparer ce temps de calcul avec celui des méthodes de calcul du Chapitre 4.

La variation totale du champ X sur T est une quantité importante qui, par une formule de la co-aire [BD16], est obtenue comme $\int_{\mathbb{R}} \text{Per}(E_X(u), T) du$ qui n'est rien d'autre que $\text{LP}_X(\mathbf{1}, T)$. Son importance sera mise en avant dans le Chapitre 4. Enfin, ce cadre de travail a également permis à Lachièze-Rey [Lac19] de montrer la normalité asymptotique de $\text{LP}_X(h, T)$ sous certaines hypothèses de contrôle sur g , mais sans hypothèse de

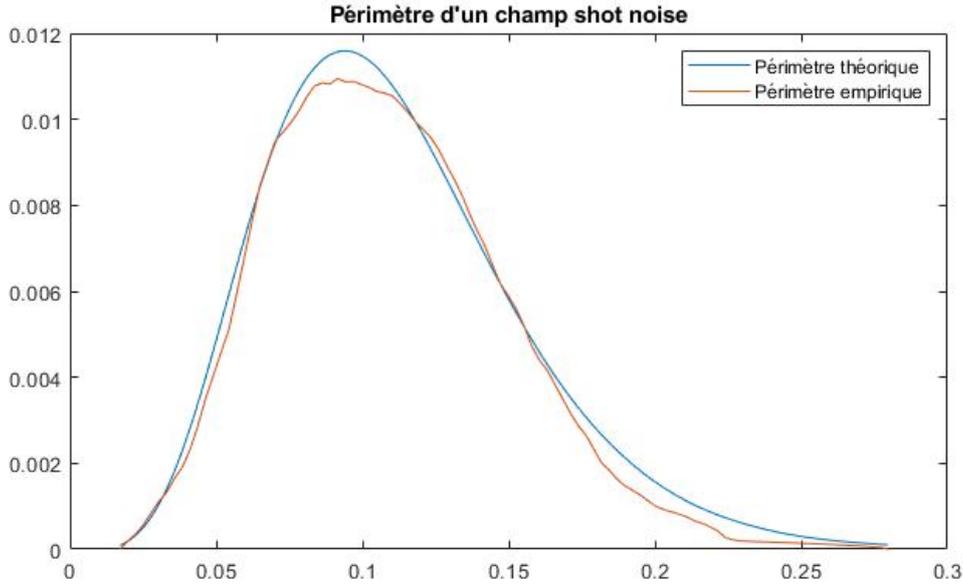


FIGURE 2.4.6 – Périamètre des niveaux d'excursion d'un champ shot noise gaussien avec une marque exponentielle de paramètres $(\lambda, \mu, \sigma) = (0.001, \frac{1}{100}, 20)$. En rouge, l'estimateur empirique du périmètre à partir d'une simulation du champ sur $T = [0, 1000]^2$. En bleu, la fonction de périmètre moyen théorique approchée par l'algorithme 2.4.1.

régularité ou de densité bornée. En particulier, la variance est proportionnelle à la taille de la fenêtre. Il a permis aussi à Bierné et Desolneux [BD20] d'étudier la courbure totale moyenne des ensembles d'excursion, qui est directement reliée à la caractéristique d'Euler par le théorème de Gauss-Bonnet (que l'on peut trouver dans [BD20], Théorème 1).

2.4.2 Asymptotique en haute intensité

Il existe un lien très fort entre les champs shot noise et les champs gaussiens. Soit X_λ un champ shot noise, où λ représente le paramètre d'intensité du processus de Poisson, tel que son noyau est de masse totale 1 (autrement dit $I_1 = 1$), alors pour $x \in \mathbb{R}^2$, on note Z_λ le champ normalisé

$$Z_\lambda(x) = \frac{X_\lambda(x) - \lambda \mathbb{E}[M]}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.4.15)$$

Il est connu que [HS85], lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, le champ Z_λ converge vers un champ gaussien B stationnaire centré et de fonction de covariance donnée par

$$\text{Cov}(B(x), B(0)) = \frac{\text{Cov}(X(x), X(0))}{\lambda} = \mathbb{E}[M^2] \int_{\mathbb{R}^2} g(-c)g(x-c)dc = \mathbb{E}[M^2]I_2(x),$$

au sens des lois finies dimensionnelles.

Pour avoir la convergence d'une marginale $X(0)$, l'idée du résultat est de montrer que,

lorsque l'on tronque le noyau sur une boule de rayon $\epsilon\sqrt{\lambda}$, les moments de $Z_\lambda(0)$ convergent vers les moments de $B(0)$, ce qui permet de conclure par le théorème de Fréchet et Sholat [Loe77]. Cela suffit puisque la variance de la différence entre le shot noise normalisé et le shot noise normalisé tronqué tend vers 0. La méthode de Cramér-Wold permet d'avoir la convergence en loi finie dimensionnelle, en appliquant la convergence d'une marginale au champ shot noise avec un noyau bien approprié construit à partir du noyau initial. Cette normalité asymptotique en haute intensité, dont les premiers travaux unidimensionnels reviennent à [Pap71], a permis des applications dans plusieurs domaines comme la gestion du risque en assurance [KM95] ou les réseaux sans fil [CH01, AY10].

Sous certaines conditions de régularité du noyau, le Théorème 8 de [HS85] étend la convergence en lois finies dimensionnelles en une convergence en loi fonctionnelle sur tout compact. Sans être optimale, si l'on suppose que $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et que les dérivées partielles décroissent assez vite, alors ce principe d'invariance est valable [LM21]. Récemment, sous ces mêmes hypothèses, Lachièze-Rey et Muirhead ont amélioré ce résultat en montrant que pour tout $R, t \geq 1$ on a l'inégalité suivante

$$\mathbb{P}\left(\|Z_\lambda - B\|_{\infty, B(0, R)} \geq \sqrt{\frac{\log(\lambda)}{\lambda} t}\right) \leq c_1 R^2 \lambda^{c_3} e^{-c_2 t},$$

où $c_1, c_2 > 0$, $c_3 \geq 2$, et des résultats similaires sont également présents pour toutes les autres dimensions $d \neq 2$ [LM21].

Ce principe d'invariance a notamment permis l'étude du niveau critique de la connexité globale des ensembles d'excursion. En effet, par croissance on sait qu'il existe un niveau critique $u_c(X_\lambda) \in [-\infty, +\infty]$ tel que la probabilité que $E_X(u, \mathbb{R}^2)$ contienne une composante connexe non bornée devienne nulle à partir de $u > u_c(X_\lambda)$. Lorsque la marque M vaut 1 presque sûrement, sous des hypothèses de régularité et d'isotropie sur g , ainsi que de densité bornée sur le vecteur $(X_\lambda(0), \nabla(X_\lambda(0)))$, [LM21] a montré que asymptotiquement

$$u_c(X_\lambda) = \mathbb{E}[X_\lambda(0)] + o(\sqrt{\lambda}).$$

Si de plus le noyau g est positif alors

$$u_c(X_\lambda) = \mathbb{E}[X_\lambda(0)] + O(\log(\lambda)^{3/2}).$$

Ce résultat a toute ses chances d'être vérifié sans hypothèse aussi restrictive sur la marque M , à condition que le vecteur $(X_\lambda(0), \nabla(X_\lambda(0)))$ soit toujours de densité bornée. C'est une nouvelle propriété partagée avec les champs gaussiens puisque, par symétrie, le niveau critique d'un champ gaussien est également son espérance [LM21].

En résumé, il est logique de s'attendre à ce que la densité de périmètre du champ shot noise normalisé converge presque partout vers la densité de périmètre du champ gaussien asymptotique B . Pourtant, ce n'est pas le cas lorsque la partie saut est présente, comme le montre le théorème suivant [BD16].

Théorème 2.4.5. *Soit Z_λ un champ shot noise normalisé défini par l'équation (2.4.15). Supposons que le noyau g est une fonction spéciale à variations bornées, de masse totale 1 et de carré intégrable telle que son gradient ∇g soit de carré intégrable, sa partie saut soit finie $\int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) \mathcal{H}^1(dy) < \infty$ et $\int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) (|g^+(y)| + |g^-(y)|) \mathcal{H}^1(dy) < \infty$. Supposons de plus que la marque a un moment d'ordre 2 fini.*

Alors il a deux comportements asymptotiques différents :

(a) *si g n'a pas de partie saut, c'est à dire si $\int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) \mathcal{H}^1(dy) = 0$, alors quand $\lambda \rightarrow \infty$, pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ et $h_\nu(u) = e^{i\nu u}$ on a :*

$$\overline{LP_{Z_\lambda}(h_\nu)} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}[M^2]}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2 \mathbb{E}[M^2] I_2(0)/2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (\cos(\theta) \partial_1 g(y) + \sin(\theta) \partial_2 g(y))^2 dy d\theta} + o(1). \quad (2.4.16)$$

(b) *si g a une partie saut, c'est à dire si $\int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) \mathcal{H}^1(dy) > 0$, alors quand $\lambda \rightarrow \infty$, pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ et $h_\nu(u) = e^{i\nu u}$ on a :*

$$\overline{LP_{Z_\lambda}(h_\nu)} = \sqrt{\lambda \mathbb{E}[M]} e^{-\nu^2 \mathbb{E}[M^2] I_2(0)/2} \left[\left\| \int_{\mathbb{R}^2} \nabla g(x) dx \right\| + \int_{J_g} (g^+(y) - g^-(y)) \mathcal{H}^1(dy) \right] + o(\sqrt{\lambda}). \quad (2.4.17)$$

Dans le cas lisse, l'équation (2.4.16) montre la convergence des transformées de Fourier de la densité de périmètre du champ normalisé vers la transformée de Fourier de la densité de périmètre du champ gaussien asymptotique (Théorèmes 6.8 et 11.3 de [AW09]). Si l'on suppose de plus que le noyau g est isotrope alors on a

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\mathbb{E}[M^2] \int_{\mathbb{R}^2} (\cos(\theta) \partial_1 g(y) + \sin(\theta) \partial_2 g(y))^2 dy d\theta} = 2\pi \sqrt{\lambda_2},$$

où λ_2 désigne le moment spectral du champ gaussien B , et ainsi l'asymptotique de l'équation (2.4.16) est exactement la transformée de Fourier de (2.4.6) puisque

$$\sigma_2^2 = \frac{\text{Var}[X(0)]}{\lambda} = \mathbb{E}[M^2] I_2(0).$$

Enfin, rappelons que puisque pour tout $u \in \mathbb{R}$, $E_{Z_\lambda}(u) = E_{X_\lambda}(\sqrt{\lambda}u + \lambda \mathbb{E}[M])$, on retrouve la transformée de Fourier de la densité de périmètre du champ X_λ par le lien

$$\overline{LP_{Z_\lambda}(h_\nu)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\nu \sqrt{\lambda} \mathbb{E}[M]} \overline{LP_{X_\lambda}(h_{\nu/\sqrt{\lambda}})}.$$

CHAPITRE

3

INFÉRENCE STATISTIQUE SUR DES CHAMPS ALÉATOIRES SHOT NOISE STATIONNAIRES

Nous présentons dans ce chapitre un article en pré-publication, qui traite de l'inférence statistique des champs aléatoire shot noise.

Résumé

Nous étudions le comportement asymptotique d'un champ aléatoire shot noise stationnaire. Nous utilisons la notion d'association pour prouver la normalité asymptotique des moments et une version multidimensionnelle pour les fonctions de corrélation. La variance des estimations des moments est diminuée par l'utilisation de la propriété d'isotropie du champ. Ces résultats seront appliqués à l'estimation des paramètres du modèle dans le cas d'un noyau gaussien. La normalité asymptotique est prouvée et une étude numérique est réalisée.

Statistical inference on stationary shot noise random fields

Antoine LERBET

Abstract

We study the asymptotic behaviour of a stationary shot noise random field. We use the notion of association to prove the asymptotic normality of the moments and a multidimensional version for the correlation functions. The variance of the moment estimates is decreased by use of the isotropy property of the field. These results will be applied to the estimation of the model parameters in the case of a Gaussian kernel. The asymptotic normality is proved and a simulation study is carried out.

3.1 Introduction and notation

A spatial random field X is a family of random variables $\{X(t), t \in T\}$ indexed by $T = \mathbb{R}^2$ or $T = \mathbb{Z}^2$. Many models exist and have for instance applications in spatial modeling and image analysis (e.g. [DBD20]). Most interesting random fields are smooth and therefore have a dependency structure and one may only address their asymptotic normality by using for instance mixing properties, as can be found in [Ros56] and [Bol82]. Unfortunately, although the usual mixing definitions are very useful for the processes, there are only few examples of a random field satisfying this mixing requirement. To obtain asymptotic results one may also use the concept of association introduced by [EPW67] for which [New80, New84], [BDD86] and more recently [BS07] proved asymptotic results. The logical connections between mixing and association have been established for some point process ([PDL19]) but it is more complicated for random fields. Several classical processes and models are associated ([LSY19]) and in particular [BS07] demonstrated the association for some shot noise random fields.

A shot noise is an elegant random field built from a point process and a kernel function; more precisely in this paper we will consider the following model

$$\forall x \in T, \quad X(x) = \sum_{(x_i, m_i) \in \phi_X} m_i g(x - x_i), \quad (3.1.1)$$

where $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a deterministic function that we will call kernel and ϕ_X is a marked Poisson point process on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ with intensity measure $\lambda dx F(dm)$ i.e. the x_i are the points of an homogeneous Poisson point process with intensity λ in \mathbb{R}^2 and the m_i are the marks with common law F , independent of the Poisson point process.

Initially introduced in 1909 by [Cam09b, Cam09a], the one dimensional shot noise process was much studied in the 20th century to model physical phenomena with a first important theoretical paper by [Ric44]. More recently, the process has also been used in network theory ([BB09]) and finance ([Sch17]). Generalization to higher dimensions is more recent with the important work of [HS85] proving asymptotic normality for high intensity and which can be seen as a link between the Gaussian setting and the discrete models of stochastic geometry such as the Boolean one ([CSKM13]). We can also mention the recent works of [BD20] and [Lac16a] studying geometric statistics of excursion sets. Shot noise random fields have also found their interest in Cox point processes (see [Møl03]) to generalize cluster point processes model such as Neyman-scott processes.

By Campbell's theorem, the random sum (3.1.1) exists if and only if

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \min(|mg(x)|, 1) \lambda dx F(dm) < \infty$$

which holds in particular if the distribution of the mark M given by F has a finite expectation and g is integrable. More precisely, in the rest of the paper we will consider the following set of assumptions **(H)**

1. the mark M is positive almost surely and has finite moments of order 4 i.e. $\mathbb{E}[M^4] < \infty$;
2. the kernel g is a non negative, continuous, bounded and Lebesgue integrable function on \mathbb{R}^2 .

The paper is organized as follows. In Section 2 we propose an asymptotic study on the empirical moments : the first moment (the mean), the second moment and the second central moment (the variance). More specifically, we are interested in the mixed moment of second order, the central mixed moment of second order (the covariance) and the correlation. Due to the stationarity property, all those moments are functions on T . Our main aim is to prove the strong consistency and the asymptotic normality of those statistics. In Section 3, we deal with the case of isotropic kernels for which the mixed moments are given by functions on \mathbb{R}_+ . By taking this property into account, we can construct a refinement of the estimates. Finally in the last part, these results are applied to estimate the parameters considering the case where the kernel g is Gaussian with variance σ^2 . A specific application of this Gaussian kernel is the fundamental solution of the heat equation with initial data a point process, yielding a parameter σ depending on the time t . Moreover, in the Gaussian kernel case most of the computations can be performed in an explicit way.

3.2 Asymptotic behaviour of moments

Although moments do not fully characterise the law of a random variable, they provide a great amount of information. When considering a random field, it is not always easy to calculate the raw moments and it is even less easy to calculate the mixed moments. Under **(H)** and thanks to Campbell theorem, since g is bounded and integrable, we can calculate all the moments up to order 4 of a shot noise random field using kernel dependent integrals. Let us start with a few notations

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} g(c)dc \quad (3.2.1)$$

$$I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^2} g(c-x)g(c)dc \quad (3.2.2)$$

$$I_3(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} g(c-x)g(c-y)g(c)dc \quad (3.2.3)$$

$$I_4(x, y, s) = \int_{\mathbb{R}^2} g(c-x)g(c-y)g(c-s)g(c)dc \quad (3.2.4)$$

It is usually assumed without loss of generality that the kernel g has a total mass 1 (i.e. $I_1 = 1$) and recall that the 4 integrals are non negative since g is non negative.

By stationarity, for $k = 1, \dots, 4$, the moments $\mathbb{E}[X(x)^k]$ do not depend on the position $x \in T$ and the mixed moments of second order $\mathbb{E}[X(x)X(y)]$ depend only on $x - y$ for all $x, y \in T$. The first moments of a shot noise random field are given in the following lemma which proof is postponed to the appendix.

Lemme 3.2.1. *Let $x \in T$ and $m_k = \mathbb{E}[M^k]$ for $k \in \{1, 2\}$ where M is a random variable with law F . Then under **(H)** and $I_1 = 1$ we have :*

- $M_1 := \mathbb{E}[X(0)] = \lambda m_1$;
- $h(x) := \mathbb{E}[X(x)X(0)] = \lambda m_2 I_2(x) + \lambda^2 m_1^2$;
- $f(x) := \text{Cov}[X(x), X(0)] = \lambda m_2 I_2(x)$.

Note in particular that $M_2 := \mathbb{E}[X(0)^2] = h(0)$ and $V := \text{Var}[X(0)] = f(0)$.

The limiting behaviour of a random field (or a sequence) of dependent random variables is of great interest. Roughly speaking, if the dependence between distant variables is small enough, then we will have our limit theorems such as the strong law of large numbers or the central limit theorem. The different notions of mixing ([Ros56] ; [Bol82]) are often used to characterise this weak dependence. However mixing properties are (in general) inaccessible for a shot noise process. The framework that will enable us to achieve results is that of the association that has been initially introduced by [EPW67] and for which a reference book is the one of [BS07]. For $n \in \mathbb{N}$, we note $\mathcal{M}(n)$ the class of bounded coordinate-wise nondecreasing Borel function $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ and $\mathcal{M} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$. We note also $X_I = \{X(x_i), x_i \in I\}$ for $I \subset T$ with finite cardinal $|I|$.

Définition 3.2.2 (Associated random field). *A random field $X = \{X(x), x \in T\}$ is associated if for all finite set $I \subset T$ and $\phi, \psi \in \mathcal{M}(|I|)$, one has*

$$\text{Cov}(\phi(X_I), \psi(X_I)) \geq 0.$$

Note in particular that the covariance of 2 variables of the random field are necessarily non negative.

The starting point of this work is the following result due to [BS07]. The proof is based on the property of independence of the underlying Poisson process.

Théorème 3.2.3. *Let X be a shot noise random field defined in (3.1.1) such that $M \geq 0$ a.s. and that g is a measurable non negative function. Assume that $X(x) < \infty$ a.s. for any $x \in \mathbb{R}^2$.*

Then X is an associated random field.

Let us point out that Theorem 3.2.3 is true under our assumptions **(H)**. The finiteness condition is fulfilled because as M and g are integrable, our random field is also integrable.

The asymptotic results for associated random fields were mainly proved by [New80, New84] but we will rely on recent book of [BS07]. The viewing window is equivalent to the sample of a traditional statistical study and asymptotic results for random field are based on the notion of growing set in the Van Hove sense (the VH-growing). For more details on this topic we refer to [BS07] but for example one may observe the random field on an image $U_n = [0, n - 1]^2 \subset \mathbb{Z}^2$ with n^2 pixels.

We actually need to ascertain a multidimensional version of the association for two main reasons. The first one is that we want to study the correlation and the second one is that we are interested in results on several moments.

Définition 3.2.4 (Associated vector valued random field). *A random field X defined on T with values in \mathbb{R}^k is associated if for all finite subset $I \subset T$ and $\phi, \psi \in \mathcal{M}(k|I|)$, one has*

$$\text{Cov}(\phi(X_I), \psi(X_I)) \geq 0.$$

The following result is given by [BS07] under the (BL, θ) -dependence assumption¹ but in the case where the random field is associated, square-integrable and check the finite susceptibility condition of [New80] then it satisfies the (BL, θ) -dependence.

Théorème 3.2.5 (Corollary 1.13. of [BS07]). *Let $X = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^2\}$ be an associated, strictly stationary, centered, square-integrable vector valued random field taking values in \mathbb{R}^k . Let us note*

$$C_{lm} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X^l(0), X^m(z)), \quad l, m = 1, \dots, k;$$

1. See [BS07] for the definition of (BL, θ) -dependence.

all the cross-covariance and suppose that all series are convergent. Then, for any sequence of regularly growing sets $U_n \subset \mathbb{Z}^2$, as $n \rightarrow \infty$ one has

$$|U_n|^{-1/2} \sum_{x \in U_n} X(x) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, C)$$

Here C is the $k \times k$ matrix with coefficients C_{lm} .

This is the conditions of convergence which are known as the finite susceptibility condition of [New80].

Note that if X is an associated random field, then for all constant $c \in \mathbb{R}$ the random field $X + c$ is still associated and therefore the centering condition is not a problem. Indeed, for all $f \in \mathcal{M}(n)$ the function $f(\cdot + c)$ is still a bounded and coordinate-wise nondecreasing function. It is now possible to state our first theorem for which we introduce the following notation and recall that all these series have positive terms.

Notation : for all $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}^2$ we write

$$S(2) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) \quad (3.2.5)$$

$$S(2, 2, w_1) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) I_2(z + w_1) \quad (3.2.6)$$

$$S(3, w_1) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(z, w_1) \quad (3.2.7)$$

$$S(4, w_1, w_2) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_4(z, z + w_1, w_2) \quad (3.2.8)$$

Théorème 3.2.6. *Let X be a shot noise random field satisfying hypotheses **(H)** and the finite susceptibility condition $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) < \infty$. Let also $(U_n)_n$ be a sequence of regularly growing sets,*

$$\widehat{M}_1 = \frac{1}{|U_n|} \sum_{x \in U_n} X(x) \quad (3.2.9)$$

be the estimators of the first moments and, for $w \in \mathbb{Z}^2$, let

$$\widehat{h}_n(w) = \frac{1}{|U_n \ominus w|} \sum_{x \in U_n \ominus w} X(x) X(x + w) \quad (3.2.10)$$

be the estimators of mixed moment of second order, with $U_n \ominus w = \{x \in U_n ; x + w \in U_n\}$. Then \widehat{M}_1 (resp. $\widehat{h}_n(w)$) are unbiased and strongly consistent estimators of M_1 (resp. $h(w)$).

Furthermore, for $k > 0$ and $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{Z}^2$, noting $w_0 = 0$, as $n \rightarrow \infty$ we have :

$$\sqrt{|U_n|} \left(\widehat{M}_1 - M_1, \widehat{h}_n(w_0) - h(w_0), \dots, \widehat{h}_n(w_k) - h(w_k) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{1, h(w_0, \dots, w_k)})$$

where for $i, j = 1, \dots, k$ the coefficients $a_{i,j}$ of the matrix $\Sigma_{1, h(w_0, \dots, w_k)}$ are given by ;

$$- a_{1,1} = \sigma_1^2 = \lambda m_2 S(2),$$

$$\begin{aligned}
- a_{1,i+2} &= \sigma_{1,h(w_i)}^2 = m_3\lambda S(3, w_i) + 2m_2m_1\lambda^2 S(2), \\
- a_{i+2,j+2} &= \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2 = m_4\lambda S(4, w_j, w_i) + 2m_3m_1\lambda^2 \left(S(3, w_j) + S(3, w_i) \right) \\
&\quad + m_2^2\lambda^2 \left(S(2, 2, w_i + w_j) + S(2, 2, w_i - w_j) \right) + 4m_2m_1^2\lambda^3 S(2).
\end{aligned}$$

Démonstration. Let us start with the the computational but important lemma whose proof is postponed to Appendix and based on a repeated use of Campbell's theorem.

Lemme 3.2.7. *Let $x, y, s, t \in T$. Under **(H)** the third and fourth mixed moments of a shot noise random field X defined by (3.1.1) are respectively given by*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X(x)X(y)X(s)] \\
&= m_3\lambda I_3(x - s, y - s) + m_2m_1\lambda^2(I_2(x - y) + I_2(x - s) + I_2(y - s)) + m_1^3\lambda^3, \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(X(x)X(y), X(s)X(t)) = m_4\lambda I_4(x - t, y - t, s - t) \\
&+ m_3m_1\lambda^2 \left(I_3(x - s, y - s) + I_3(x - t, y - t) + I_3(x - t, s - t) + I_3(y - t, s - t) \right) \\
&+ m_2^2\lambda^2 \left(I_2(x - s)I_2(y - t) + I_2(x - t)I_2(y - s) \right) \\
&+ m_2m_1^2\lambda^3 \left(I_2(x - s) + I_2(x - t) + I_2(y - s) + I_2(y - t) \right). \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

Now return to the proof of Theorem 3. By Lemma 3.2.1 the convergence of $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z)$ is equivalent to the convergence of $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X(0), X(z))$. By Theorem 3.2.1 of [Guy95] we have the consistency property of \widehat{M}_1 . Let $w \in \mathbb{Z}^2$, we will prove the other convergences with the same theorem but this time we need the convergence of the following sum $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X(0)X(w), X(z)X(z+w))$. For this purpose, by Lemma 3.2.7 we have to check the convergence of $S(4, w, w)$, $S(3, w)$, $S(2, 2, 0)$ and $S(2, 2, 2w)$. To see the convergence of $S(4, w, w)$, just write $I_4(z, z+w, w) \leq \|g\|_\infty^2 I_2(z)$ whose series is convergent. We have the same for the other series. The unbiased property is simply due to the stationarity of our random field.

To have the asymptotic normality we need to apply Theorem 3.2.5 and the following lemma :

Lemme 3.2.8. *Let $k > 0$, $w_0 = 0$ and $w_1, \dots, w_k \in T$. We denote also by Z^w the following vector valued random field*

$$Z^w(x) = (X(x), X(x)X(x+w_0), X(x)X(x+w_1), \dots, X(x)X(x+w_k))$$

Then Z^w is associated with values in \mathbb{R}_+^{k+2} .

Proof of Lemma 3.2.8. Let $I = \{x_1, \dots, x_n\} \in T$ be a finite set and $\phi, \psi \in \mathcal{M}((k+2)n)$. For $i = 1, \dots, n$ we note $X_{x_i:x_i+w_k} = (X(x_i), X(x_i+w_1), \dots, X(x_i+w_k))$ with values in \mathbb{R}_+^{k+1} . Then,

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\phi(Z_I^w), \psi(Z_I^w)) \\ &= \text{Cov}\left(\phi(Z^w(x_1), \dots, Z^w(x_n)), \psi(Z^w(x_1), \dots, Z^w(x_n))\right) \\ &= \text{Cov}\left(\phi \circ t_w(X_{x_1:x_1+w_k}, \dots, X_{x_n:x_n+w_k}), \psi \circ t_w(X_{x_1:x_1+w_k}, \dots, X_{x_n:x_n+w_k})\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{t}_w &: \mathbb{R}_+^{(k+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{(k+2)} \\ y = (y_i)_{1 \leq i \leq k+1} &\mapsto (y_1, y_1^2, y_2 y_1, \dots, y_{k+1} y_1), \end{aligned}$$

which we extend into a function on $\mathbb{R}^{(k+1)}$ with $\tilde{t}_w(y) = 0$ for all $y \notin \mathbb{R}_+^{(k+1)}$, and

$$\begin{aligned} t_w &: \mathbb{R}^{(k+1)n} \longrightarrow \mathbb{R}^{(k+2)n} \\ y = (y^{(i)})_{1 \leq i \leq n} &\mapsto (\tilde{t}_w(y^{(i)}))_{1 \leq i \leq n}. \end{aligned}$$

The last line comes from the association of the random field X since the functions $\phi \circ t_w, \psi \circ t_w \in \mathcal{M}((k+1)n)$. Indeed, as ϕ and ψ are bounded, it is clear that those functions are bounded. Moreover, since t_w is coordinate-wise nondecreasing on $\mathbb{R}_+^{(k+1)n}$, these functions are also coordinate-wise nondecreasing on $\mathbb{R}_+^{(k+1)n}$, using the fact that X is positive almost surely this concludes the proof. \square

Since X has a moments of order 4, Z^w has a moment of order 2 and Theorem 3.2.5 applies.

It remains to compute the asymptotic variances, where we mainly use Lemma 3.2.1. For the first one

$$\sigma_1^2 = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X(0), X(z)) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \lambda m_2 I_2(z) = \lambda m_2 S(2),$$

where $S(2)$ is defined by (3.2.5).

Moreover, for $i, j = 1, \dots, k$ we have :

$$\begin{aligned}
& \sigma_{h(w_i), h(w_j)}^2 \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \text{Cov}(X(0)X(w_i), X(z)X(z + w_j)) \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} m_4 \lambda I_4(z, z + w_j, w_i) \\
&+ \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} m_3 m_1 \lambda^2 \left(I_3(z - w_i, z + w_j - w_i) + I_3(z, z + w_j) + I_3(z, w_i) + I_3(z + w_j, w_i) \right) \\
&+ \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} m_2^2 \lambda^2 \left(I_2(z - w_i) I_2(z + w_j) + I_2(z) I_2(z + w_j - w_i) \right) \\
&+ \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} m_2 m_1^2 \lambda^3 \left(I_2(z - w_i) + I_2(z) + I_2(z + w_j - w_i) + I_2(z + w_j) \right) \\
&= m_4 \lambda S(4, w_j, w_i) + 2m_3 m_1 \lambda^2 \left(S(3, w_j) + S(3, w_i) \right) \\
&+ m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, w_i + w_j) + S(2, 2, w_i - w_j) \right) + 4m_2 m_1^2 \lambda^3 S(2),
\end{aligned}$$

using (3.2.5) - (3.2.8).

By first noticing that for $w_i, w_j \in \mathbb{Z}^2$ we have $I_3(z - w_i, z + w_j - w_i) = I_3(-z + w_i, w_j)$ and $I_3(z, z + w_j) = I_3(-z, w_j)$, it follows that

$$\begin{aligned}
& \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(-z + w_i, w_j) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(-z, w_j) = S(3, w_j); \\
& \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(z, w_i) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(z + w_j, w_i) = S(3, w_i); \\
& \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z - w_i) I_2(z + w_j) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) I_2(z + w_i + w_j) = S(2, 2, w_i + w_j); \\
& \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z - w_i) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z + w_j - w_i) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z + w_j) = S(2).
\end{aligned}$$

The computation for $\sigma_{1, h(w_i)}^2$ is similar. □

These estimators are important because they allow us to introduce other estimators such as $\widehat{V} = \widehat{h(0)} - \widehat{M}_1^2$, the variance estimator, and $\widehat{f_n(w)} = \widehat{h_n(w)} - \widehat{M}_1^2$, the covariance estimator. All these estimators are biased because $\mathbb{E}[\widehat{M}_1^2] \neq M_1^2$, due to the correlation between variables, but asymptotically unbiased. Their strong consistency is straightforward since they are transformations of strongly consistent estimators by a continuous function. We also have the following proposition.

Proposition 3.2.9. *Let X be a shot noise random field satisfying hypotheses **(H)** and the finite susceptibility condition $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) < \infty$. Let also $(U_n)_n$ be a sequence of regularly growing sets, $w_0 = 0$ and $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{Z}^2$ with $k > 0$. Then as $n \rightarrow \infty$ we have :*

$$\sqrt{|U_n|} \left(\widehat{M}_1 - M_1, \widehat{f_n(w_0)} - f(w_0), \dots, \widehat{f_n(w_k)} - f(w_k) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{1, f(w_0), \dots, f(w_k)})$$

where for $i, j = 1, \dots, k$ the coefficients $a_{i,j}$ of the matrix $\Sigma_{1,f(w_0),\dots,f(w_k)}$ are given by :

$$\begin{aligned} - a_{1,i+2} &= \sigma_{1,f(w_i)}^2 = m_3 \lambda S(3, w_i) \\ - a_{i+2,j+2} &= \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 = m_4 \lambda S(4, w_i, w_j) + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, w_i - w_j) + S(2, 2, w_i + w_j) \right) \end{aligned}$$

Démonstration. Let ϕ be the smooth function defined by

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^{k+2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{k+2} \\ (x, z_0, z_1, \dots, z_k) &\mapsto (x, z_0 - x^2, z_1 - x^2, \dots, z_k - x^2) \end{aligned}$$

then

$$(\widehat{M}_1, \widehat{f_n}(w_0), \widehat{f_n}(w_1), \dots, \widehat{f_n}(w_k)) = \phi(\widehat{M}_1, \widehat{h_n}(w_0), \widehat{h_n}(w_1), \dots, \widehat{h}(w_k))$$

and

$$(M_1, f(w_0), f(w_1), \dots, f(w_k)) = \phi(M_1, h(w_0), h(w_1), \dots, h(w_k)).$$

The jacobian matrix of ϕ is

$$D_\phi(x, z_0, z_1, \dots, z_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -2x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2x & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2x & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -2x & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

By the delta method (see [Was13]) and Theorem 3.2.6 we have

$$\Sigma_{1,f(w_0),\dots,f(w_k)} = D_\phi(M_1, h(w_0), \dots, h(w_k)) \Sigma_{1,h(w_0),\dots,h(w_k)} D_\phi(M_1, h(w_0), \dots, h(w_k))^t$$

which is too cumbersome to be detailed. Nevertheless, to know a sub-matrix such as $\Sigma_{f(w_i),f(w_j)}$ we only need the sub-matrix $\Sigma_{1,h(w_i),h(w_j)}$ that leads to :

$$\begin{aligned} &\Sigma_{f(w_i),f(w_j)} \\ &= \begin{pmatrix} -2M_1 & 1 & 0 \\ -2M_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,h(w_i)}^2 & \sigma_{1,h(w_j)}^2 \\ \sigma_{1,h(w_i)}^2 & \sigma_{h(w_i)}^2 & \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2 \\ \sigma_{1,h(w_j)}^2 & \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2 & \sigma_{h(w_j)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2M_1 & -2M_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2M_1 & 1 & 0 \\ -2M_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2M_1 \sigma_1^2 + \sigma_{1,h(w_i)}^2 & -2M_1 \sigma_1^2 + \sigma_{1,h(w_j)}^2 \\ -2M_1 \sigma_{1,h(w_i)}^2 + \sigma_{h(w_i)}^2 & -2M_1 \sigma_{1,h(w_i)}^2 + \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2 \\ -2M_1 \sigma_{1,h(w_j)}^2 + \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2 & -2M_1 \sigma_{1,h(w_j)}^2 + \sigma_{h(w_j)}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4M_1^2 \sigma_1^2 - 4M_1 \sigma_{1,h(w_i)}^2 + \sigma_{h(w_i)}^2 & \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 \\ \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 & 4M_1^2 \sigma_1^2 - 4M_1 \sigma_{1,h(w_j)}^2 + \sigma_{h(w_j)}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

where $\sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 = 4M_1^2\sigma_1^2 - 2M_1(\sigma_{1,h(w_i)}^2 + \sigma_{1,h(w_j)}^2) + \sigma_{h(w_i),h(w_j)}^2$. By developing the calculations we then have

$$\begin{aligned} \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 &= 4\lambda^2 m_1^2 m_2 \lambda S(2) - 2\lambda m_1 (m_3 \lambda S(3, w_i) + 2m_2 m_1 \lambda^2 S(2) + m_3 \lambda S(3, w_j) + 2m_2 m_1 \lambda^2 S(2)) \\ &\quad + m_4 \lambda S(4, w_j, w_i) + 2m_3 m_1 \lambda^2 \left(S(3, w_j) + S(3, w_i) \right) \\ &\quad + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, w_i - w_j) + S(2, 2, w_i + w_j) \right) + 4m_2 m_1^2 \lambda^3 S(2) \\ &= m_4 \lambda S(4, w_i, w_j) + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, w_i - w_j) + S(2, 2, w_i + w_j) \right). \end{aligned}$$

□

Another very important function for this model is the correlation function, *i.e.* the covariance function normalized by the variance, that we note $\rho(w) = \frac{f(w)}{f(0)}$. The important point is that this function does not depend on the Poisson process (neither on λ , nor on the mark) because $\rho(w) = \frac{I_2(w)}{I_2(0)}$ by Lemma 3.2.1. It is therefore a very useful statistic to infer about the kernel itself. This function is estimated by $\widehat{\rho}(w) = \frac{\widehat{f}(w)}{f(0)}$ which is strongly consistent since it is a transformation of strongly consistent estimators by a continuous function and we also have the following central limit theorem (CLT).

Proposition 3.2.10. *Let X be a shot noise random field satisfying hypotheses **(H)** and the finite susceptibility condition $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) < \infty$. Let also $(U_n)_n$ be a sequence of regularly growing sets and $w_0 = 0$. Then as $n \rightarrow \infty$ we have :*

$$\begin{aligned} \sqrt{|U_n|} \left(\widehat{M}_1 - M_1, \widehat{f}_n(w_0) - f(w_0), \widehat{\rho}_n(w_1) - \rho(w_1), \dots, \widehat{\rho}_n(w_k) - \rho(w_k) \right) \\ \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{1, f(w_0), \rho(w_1), \dots, \rho(w_k)}) \quad (3.2.13) \end{aligned}$$

where for $i, j = 1, \dots, k$ the coefficients $a_{i,j}$ of the matrix $\Sigma_{1, f(w_0), \rho(w_1), \dots, \rho(w_k)}$ are given by :

$$\begin{aligned} - a_{1,i+2} &= \sigma_{1, \rho(w_i)}^2 = \frac{m_3}{m_2 I_2(0)} (S(3, w_i) - S(3, 0) \frac{I_2(w_i)}{I_2(0)}) \\ - a_{2,i+2} &= \sigma_{f(w_0), \rho(w_i)}^2 = \frac{2m_2 \lambda}{I_2(0)} (S(2, 2, w_i) - S(2, 2, 0) \frac{I_2(w_i)}{I_2(0)}) \\ &\quad + \frac{m_4}{m_2 I_2(0)} (S(4, 0, w_i) - S(4, 0, 0) \frac{I_2(w_i)}{I_2(0)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- a_{i+2,j+2} &= \sigma_{\rho(w_i),\rho(w_j)}^2 \\
&= (m_4\lambda S(4,0,0) + 2m_2^2\lambda^2 S(2,2,0)) \frac{I_2(w_i)I_2(w_j)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^4} \\
&\quad - (m_4\lambda S(4,0,w_i) + 2m_2^2\lambda^2 S(2,2,w_i)) \frac{I_2(w_j)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^3} \\
&\quad - (m_4\lambda S(4,0,w_j) + 2m_2^2\lambda^2 S(2,2,w_j)) \frac{I_2(w_i)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^3} \\
&\quad + (m_4\lambda S(4,w_i,w_j) + m_2^2\lambda^2 (S(2,2,w_i-w_j) + S(2,2,w_i+w_j))) \frac{1}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^2}
\end{aligned}$$

Démonstration. We have the asymptotic normality by the same argument as for Proposition 3.2.9. To know a sub-matrix $\Sigma_{\rho(w_i),\rho(w_j)}^2$ we only need the sub-matrix

$$\Sigma_{f(0),f(w_i),f(w_j)} = \begin{pmatrix} \sigma_{f(0)}^2 & \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 & \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 \\ \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 & \sigma_{f(w_i)}^2 & \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 \\ \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 & \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 & \sigma_{f(w_j)}^2 \end{pmatrix}$$

Let ϕ be the smooth function defined by

$$\begin{aligned}
\phi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right)
\end{aligned}$$

then by the delta method we have

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\rho(w_1),\rho(w_2)} \\
&= D_\phi(f(0), f(w_i), f(w_j)) \Sigma_{f(0),f(w_i),f(w_j)} D_\phi(f(0), f(w_i), f(w_j))^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} & \frac{1}{f(0)} & 0 \\ \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} & 0 & \frac{1}{f(0)} \\ \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} & 0 & \frac{1}{f(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{f(0)}^2 & \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 & \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 \\ \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 & \sigma_{f(w_i)}^2 & \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 \\ \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 & \sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2 & \sigma_{f(w_j)}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} & \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} \\ \frac{1}{f(0)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(0)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} & \frac{1}{f(0)} & 0 \\ \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} & 0 & \frac{1}{f(0)} \\ \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} & 0 & \frac{1}{f(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} \sigma_{f(0)}^2 + \frac{\sigma_{f(0),f(w_i)}^2}{f(0)} & \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} \sigma_{f(0)}^2 + \frac{\sigma_{f(0),f(w_j)}^2}{f(0)} \\ \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 + \frac{\sigma_{f(w_i)}^2}{f(0)} & \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} \sigma_{f(0),f(w_i)}^2 + \frac{\sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2}{f(0)} \\ \frac{-f(w_i)}{f(0)^2} \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 + \frac{\sigma_{f(w_i),f(w_j)}^2}{f(0)} & \frac{-f(w_j)}{f(0)^2} \sigma_{f(0),f(w_j)}^2 + \frac{\sigma_{f(w_j)}^2}{f(0)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{\rho(w_i)}^2 & \sigma_{\rho(w_i),\rho(w_j)}^2 \\ \sigma_{\rho(w_i),\rho(w_j)}^2 & \sigma_{\rho(w_j)}^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho(w_i), \rho(w_j)}^2 &= \frac{f(w_i)f(w_j)}{f(0)^4} \sigma_{f(0)}^2 - \frac{f(w_j)}{f(0)^3} \sigma_{f(0), f(w_i)}^2 - \frac{f(w_i)}{f(0)^3} \sigma_{f(0), f(w_j)}^2 + \frac{1}{f(0)^2} \sigma_{f(w_i), f(w_j)}^2 \\
&= (m_4 \lambda S(4, 0, 0) + 2m_2^2 \lambda^2 S(2, 2, 0)) \frac{I_2(w_i) I_2(w_j)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^4} \\
&\quad - (m_4 \lambda S(4, 0, w_i) + 2m_2^2 \lambda^2 S(2, 2, w_i)) \frac{I_2(w_j)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^3} \\
&\quad - (m_4 \lambda S(4, 0, w_j) + 2m_2^2 \lambda^2 S(2, 2, w_j)) \frac{I_2(w_i)}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^3} \\
&\quad + (m_4 \lambda S(4, w_i, w_j) + m_2^2 \lambda^2 (S(2, 2, w_i - w_j) + S(2, 2, w_i + w_j))) \frac{1}{\lambda^2 m_2^2 I_2(0)^2}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Isotropic shot noise random field

In this section, we consider the case where the kernel g is isotropic. We immediately note that this implies that the random field X is isotropic : let $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in T$ and R a rotation matrix, then by Campbell's theorem (see [Kin67]) we have for all $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{iu_1 X(x_1) + \dots + iu_n X(x_n)} \right] &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} [1 - \exp(i \sum_{l=1}^n u_l m g(x_l - c))] \lambda dc dF(m) \right) \\
&= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} [1 - \exp(i \sum_{l=1}^n u_l m g(Rx_l - Rc))] \lambda dc dF(m) \right) \\
&= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} [1 - \exp(i \sum_{l=1}^n u_l m g(Rx_l - c')] \lambda dc' dF(m) \right) \\
&= \mathbb{E} \left[e^{iu_1 X(Rx_1) + \dots + iu_n X(Rx_n)} \right],
\end{aligned}$$

and therefore $X \circ R \stackrel{fdd}{=} X$.

Due to isotropy, the mixed moment function h is reduced to a function \tilde{h} defined on \mathbb{R}_+ such that for all $w \in T$ we have $h(w) = \tilde{h}(\|w\|)$, and as for the variance reduction techniques by antithetic variables, the estimators of mixed moment can be improved taking into account isotropy. Concretely, noting (e_1, e_2) the canonical basis of \mathbb{R}^2 , for all $r \in \mathbb{Z}_+$ there are 2 vectors $w_1 = re_1$ and $w_2 = re_2$ in \mathbb{Z}^2 such that $\|w_1\| = \|w_2\| = r$ so we use the isotropic estimator

$$\widehat{\tilde{h}_n(r)} = \frac{1}{2} (\widehat{h_n(re_1)} + \widehat{h_n(re_2)}). \quad (3.3.1)$$

We do not count $-re_1$ and $-re_2$ because even without isotropy $h(-re_1) = h(re_1)$ and $h(-re_2) = h(re_2)$. Anyway since we have $\widehat{h_n(re_1)} = \widehat{h_n(-re_1)}$ and $\widehat{h_n(re_2)} = \widehat{h_n(-re_2)}$,

it would not bring anything more. Note that there are other values of $r \notin \mathbb{Z}_+$ such that there are several $w \in \mathbb{Z}^2$ with norm r but for this article, estimating the second order moments on the integers is more than enough. Let us also note that for some values of r there are more than 4 elements of \mathbb{Z}^2 with norm r but for this paper we did not go in that way because simplifications are only possible when there are only two orthogonal vectors $w \in \mathbb{Z}^2$.

Proposition 3.3.1. *Let X be a shot noise random field satisfying hypotheses **(H)** and the finite susceptibility condition $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) < \infty$. Let also $(U_n)_n$ be a sequence of regularly growing sets, $r_0 = 0$ $k > 0$ and $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$. Then considering \tilde{h}_n given by 3.3.1 the vector*

$$\left(\widehat{M}_1 - M_1, \widehat{h}_n(r_0) - \tilde{h}(r_0), \widehat{h}_n(r_1) - \tilde{h}(r_1), \dots, \widehat{h}_n(r_k) - \tilde{h}(r_k) \right)$$

is asymptotically normal with asymptotic variance given by :

$$\begin{aligned} - \sigma_{1, \tilde{h}(r_i)}^2 &= \sigma_{1, h(r_i e_1)}^2 \\ - \sigma_{\tilde{h}(r_i), \tilde{h}(r_j)}^2 &= 2m_3 m_1 \lambda^2 \left(S(3, r_j e_1) + S(3, r_i e_1) \right) + 4m_2 m_1^2 \lambda^3 S(2) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 m_4 \lambda S(4, r_j e_q, r_i e_p) + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, -r_i e_p, r_j e_q) + S(2, 2, r_i e_p, r_j e_q) \right) \end{aligned}$$

and the asymptotic variance of $\widehat{h}_n(r)$ is smaller than that obtained in the case of directional estimation in Theorem 3.2.6.

Démonstration. The asymptotic normality comes from Theorem 3.2.6 and the asymptotic normality of $(\widehat{M}_1, \widehat{h}_n(0), \dots, \widehat{h}_n(w_{2k}))$, in where the $2k$ elements w_1, \dots, w_{2k} of \mathbb{Z}^2 are $r_1 e_1, r_1 e_2, \dots, r_i e_1, r_i e_2, \dots, r_k e_1, r_k e_2$. Before computing asymptotics variances, let us give the following lemma :

Lemme 3.3.2. *Let g be an isotropic kernel and $r \in \mathbb{Z}_+$. Then we have the following identities*

$$\begin{aligned} S(4, r e_1, r e_1) &= S(4, r e_2, r e_2) \\ S(4, r e_1, r e_2) &= S(4, r e_2, -r e_1) \\ S(4, 0, r e_1) &= S(4, 0, r e_2) \\ S(3, r e_1) &= S(3, r e_2) \\ S(2, 2, r e_1) &= S(2, 2, r e_2) \\ S(2, 2, r e_1 - r e_2) &= S(2, 2, r e_1 + r e_2). \end{aligned}$$

Démonstration. Let R be the rotation matrix such that $R(e_1) = e_2$. Then

$$\begin{aligned}
S(4, re_1, re_1) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(c-z)g(c-z-re_1)g(c-re_1)g(c)dc \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(Rc-Rz)g(Rc-Rz-re_2)g(Rc-re_2)g(Rc)dc \\
&= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(a-z')g(a-z'-re_2)g(a-re_2)g(a)da \\
&= S(4, re_2, re_2)
\end{aligned}$$

by isotropy of g and by changes of variables $a = Rc$, $z' = Rz$. Let us note here that for this rotation matrix R we have got $z' \in \mathbb{Z}^2$. Similar computations lead to the other equalities. \square

Now by this lemma, since the asymptotic variance $\sigma_{1, h(w)}^2$ depends only on $S(3, w)$ and $S(2)$ we can directly affirm that

$$\sigma_{1, \tilde{h}(r_i)}^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{1, h(r_i e_1)}^2 + \sigma_{1, h(r_i e_2)}^2 \right) = \sigma_{1, h(r_i e_1)}^2$$

we also have

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tilde{h}(r_i), \tilde{h}(r_j)}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sigma_{h(r_i e_p), h(r_j e_q)}^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 m_4 \lambda S(4, r_j e_q, r_i e_p) + 2m_3 m_1 \lambda^2 \left(S(3, r_j e_q) + S(3, r_i e_p) \right) \\
&\quad + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, r_i e_p - r_j e_q) + S(2, 2, r_i e_p + r_j e_q) \right) + 4m_2 m_1^2 \lambda^3 S(2) \\
&= 2m_3 m_1 \lambda^2 \left(S(3, r_j e_1) + S(3, r_i e_1) \right) + 4m_2 m_1^2 \lambda^3 S(2) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 m_4 \lambda S(4, r_j e_q, r_i e_p) + m_2^2 \lambda^2 \left(S(2, 2, r_i e_p + r_j e_q) + S(2, 2, r_i e_p - r_j e_q) \right)
\end{aligned}$$

then $\sigma_{\tilde{h}(r_i)}^2$ is then obtained as a special case. To see the benefit on the asymptotic variance directly in this formula is not simple but as $\forall r \in \mathbb{Z}_+$ we have

$$\text{Cov}(\widehat{h_n(re_1)}, \widehat{h_n(re_2)}) \leq \sqrt{\text{Var}(\widehat{h_n(re_1)})\text{Var}(\widehat{h_n(re_2)})} = \text{Var}(\widehat{h_n(re_1)})$$

we can write

$$\text{Var}(\widehat{h_n(r)}) = \frac{1}{4} (\text{Var}(\widehat{h_n(re_1)}) + \text{Var}(\widehat{h_n(re_2)}) + 2\text{Cov}(\widehat{h_n(re_1)}, \widehat{h_n(re_2)})) \leq \text{Var}(\widehat{h_n(re_1)})$$

\square

Let us observe that the gain on the variance is more and more important with increasing r , up to a factor of 2 when $r \rightarrow \infty$.

The same is true considering the covariance function \tilde{f} and correlation function $\tilde{\rho}$ which are now functions defined on \mathbb{Z}_+ . The isotropic estimator of $\tilde{f}(r)$ is given by

$$\widehat{\tilde{f}_n(r)} = \frac{1}{2}(\widehat{f_n(re_1)} + \widehat{f_n(re_2)}) \quad (3.3.2)$$

and that one for $\tilde{\rho}(r)$ is

$$\widehat{\tilde{\rho}_n(r)} = \frac{1}{2}(\widehat{\rho_n(re_1)} + \widehat{\rho_n(re_2)}) \quad (3.3.3)$$

These isotropic versions have a smaller asymptotic variance than their directional counterpart. More precisely, the asymptotic variance of $\widehat{\tilde{f}_n(r)}$ is

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{f}(r)}^2 &= \frac{m_4 \lambda}{2} \left(S(4, re_1, re_1) + S(4, re_1, re_2) \right) \\ &\quad + \frac{m_2^2 \lambda^2}{2} \left(S(2, 2, 0) + S(2, 2, 2re_1) + 2S(2, 2, re_1 - re_2) \right) \end{aligned}$$

and that of $\widehat{\tilde{\rho}_n(r)}$ is

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 &= \frac{m_4}{\lambda m_2^2 I_2(0)^2} \left(S(4, 0, 0) \frac{I_2(r)^2}{I_2(0)^2} - 2S(4, 0, re_1) \frac{I_2(r)}{I_2(0)} + \frac{1}{2} S(4, re_1, re_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} S(4, re_1, re_2) \right) + \frac{1}{I_2(0)^2} \left(2S(2, 2, 0) \frac{I_2(r)^2}{I_2(0)^2} - 2S(2, 2, re_1) \frac{I_2(r)}{I_2(0)} + \frac{1}{2} S(2, 2, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} S(2, 2, re_1) + S(2, 2, re_1 - re_2) \right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

3.4 Parameters estimation on Gaussian shot noise random field

In this section we want to apply the previous results to the estimation of the parameters of a spatial shot noise random field defined in (3.1.1) by

$$\forall x \in T, \quad X(x) = \sum_{(x_i, m_i) \in \phi_X} m_i g(x - x_i), \quad (3.4.1)$$

and we will focus exclusively on the isotropic case with a Gaussian kernel

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}} \quad (3.4.2)$$

with standard deviation σ . This is an example of a smooth random field since it is of class \mathcal{C}^∞ almost surely. The main motivation of this kernel is that by considering σ^2 as a temporal variable t , the spatio-temporal random field is a fundamental solution of the heat equation

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla X,$$

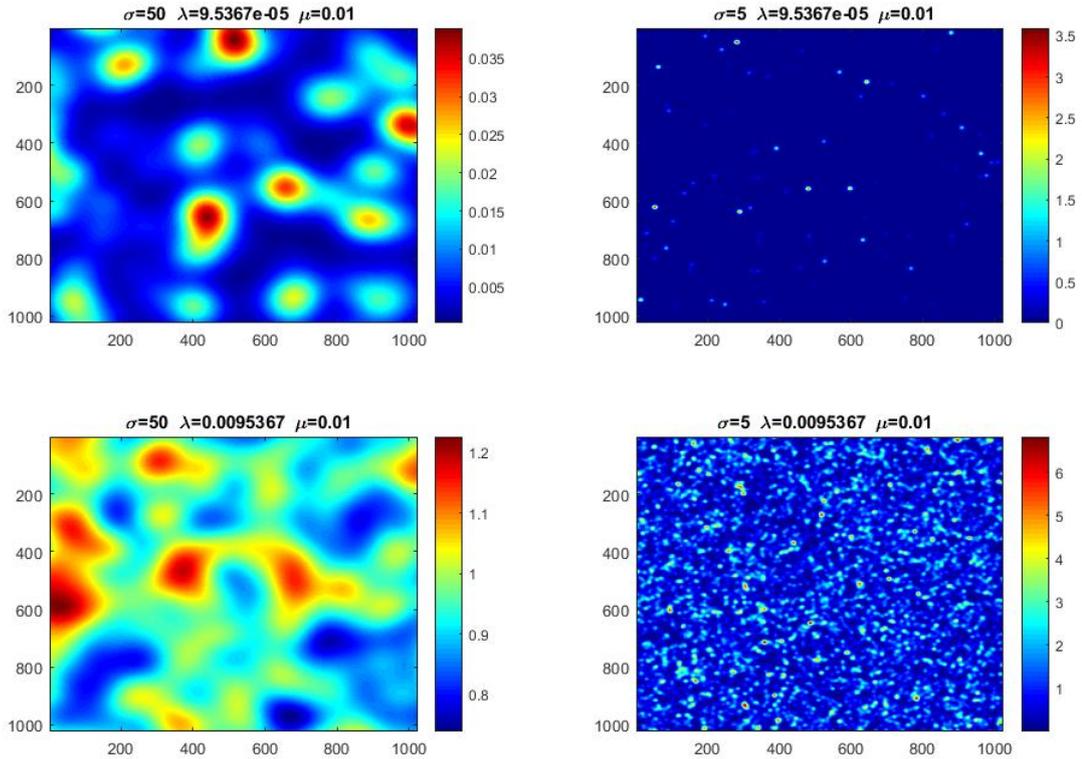


FIGURE 3.4.1 – Four images with 1024x1024 pixels. On the first line, both images have the same $\lambda = \frac{1000}{1024^2}$ which represents an average of 1000 points on the image. On the second line, we have chosen λ to have an average of 100000 points. On the left, both images have the same $\sigma = 50$ while $\sigma = 5$ on the right. Marks are exponential laws of parameter $\mu = \frac{1}{100}$ which represents a average of 100.

where $\nabla = \partial_{11}^2 + \partial_{22}^2$ is the classical 2d Laplace operator. This can be seen by comparing the images on the right where $\sigma = 5$ with the one on the left where $\sigma = 50$ in Figure 3.4.1. In this space-time model, the points of the Poisson process are only drawn once at t_0 and do not move. At first the points are isolated and then over time the Gaussians become more and more spread out and meet each other. It is the heat that spreads and the texture becomes more structured.

Thanks to Campbell's Theorem we know the marginal law of a shot noise random field in integral form, but in general we can't explicitly compute it. One exception is when considering this Gaussian kernel with an exponential mark of parameter μ , then the marginal is of Gamma law $\Gamma(2\pi\lambda\sigma^2, 2\pi\mu\sigma^2)$. This model satisfies **(H)** and we note it $X_{\lambda,\mu,\sigma}$. To illustrate this model we have simulated with Matlab four shot noise random fields with different parameters (see Figure 3.4.1).

With a simple application of Campbell's theorem, we also have an interesting scale

invariance property. More precisely, for $k > 0$, let $X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}}$ be a Gaussian shot noise random field with exponential mark of parameter $(\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k})$ and $X_{\lambda, \mu, \sigma}$ be a Gaussian shot noise random field with exponential mark of parameter (λ, μ, σ) . Then we have

$$\{X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}}(x) \mid x \in \mathbb{R}^2\} \stackrel{fdd}{=} \{X_{\lambda, \mu, \sigma}(kx) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$$

This property can be seen as a zoom on a part of an image where the k plays the role of the discretization step.

We have that $I_2(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{4\pi\sigma^2}\|x\|^2}$ (proof in Appendix of Lemma 3.4.2) and consequently the finite susceptibility condition is checked. Let us recall that the moments of an exponential law are $m_k = \frac{k!}{\mu^k}$, thus the moments of the random field are given for $x \in \mathbb{R}^2$ by :

- $M_1 = \frac{\lambda}{\mu}$;
- $h(x) = \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|x\|^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}$;
- $f(x) = \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|x\|^2}$;
- $\rho(x) = e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|x\|^2}$.

The main aim of this section is to estimate the triplet of parameters (λ, μ, σ) of this model. Let's start by assuming we know σ , then a simple inversion of

$$\begin{cases} M_1 &= \frac{\lambda}{\mu} \\ f(0) &= \frac{\lambda}{2\pi\mu^2\sigma^2} \end{cases}$$

allow us to estimate (λ, μ) by

$$\begin{cases} \hat{\lambda} &= \frac{\widehat{M_1}^2}{2\pi\sigma^2 \widehat{f(0)}} \\ \hat{\mu} &= \frac{\widehat{M_1}}{2\pi\sigma^2 \widehat{f(0)}} \end{cases}$$

Estimating higher-order raw moments does not allow us to have 3 independent equations. To capture σ , it is necessary to take into account the mixed moment of second order, and more particularly the correlation that allows to isolate σ . As $\tilde{\rho}(r) = e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}}$ we can get an estimate of σ for different values of $r \in \mathbb{Z}_+^*$ by considering

$$\hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{-r^2}{4 \log(\widehat{\tilde{\rho}_n}(r)})}$$

Note that we can consider this estimator only if $\widehat{\tilde{\rho}_n}(r)$ is strictly between 0 and 1. Once σ

is estimated, we keep the same estimators $\widehat{\lambda}$ and $\widehat{\mu}$ as if σ was known. We then propose :

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_r = \frac{-\widehat{M}_1^2 2 \log(\widehat{\rho}_n(r))}{\pi r^2 (\widehat{M}_2 - \widehat{M}_1^2)} \\ \widehat{\mu}_r = \frac{-\widehat{M}_1 2 \log(\widehat{\rho}_n(r))}{\pi r^2 (\widehat{M}_2 - \widehat{M}_1^2)} \\ \widehat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{-r^2}{4 \log(\widehat{\rho}_n(r))}} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Théorème 3.4.1. *Let $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ be a shot noise random field with exponential mark and Gaussian kernel. Then $\forall r \in \mathbb{Z}_+^*$, the estimators $(\widehat{\lambda}_r, \widehat{\mu}_r, \widehat{\sigma}_r)$ given by (3.4.3) are consistent estimators of (λ, μ, σ) .*

Moreover, for $(U_n)_n$ a sequence of regularly growing sets, as $n \rightarrow \infty$ one has

$$\sqrt{|U_n|} \begin{pmatrix} \widehat{\lambda}_r - \lambda \\ \widehat{\mu}_r - \mu \\ \widehat{\sigma}_r - \sigma \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_{\lambda_r, \mu_r, \sigma_r})$$

with

$$\Sigma_{\mu, \lambda, \sigma(r)} = D_\phi(M_1, V, \tilde{\rho}(r)) \Sigma_{1, V, \tilde{\rho}(r)} D_\phi(M_1, V, \tilde{\rho}(r))^t$$

$$\text{where } D_\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-4x \log(z)}{\pi r^2 y} & \frac{2x^2 \log(z)}{\pi r^2 y^2} & \frac{-2x^2}{\pi r^2 y z} \\ \frac{-2 \log(z)}{\pi r^2 y} & \frac{2x \log(z)}{\pi r^2 y^2} & \frac{-2x}{\pi r^2 y z} \\ 0 & 0 & \frac{r \sqrt{-\log(z)}}{4z \log(z)^2} \end{pmatrix}.$$

The asymptotic variance of $\widehat{\sigma}_r$ is given by

$$\sigma_{\sigma_r}^2 = \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 \frac{4\sigma^6}{r^4} e^{2\sigma^2}. \quad (3.4.4)$$

Démonstration. The random field $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ check **(H)** and the finite susceptibility condition $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z) < \infty$ so we can apply Proposition 3.2.10 and its isotropic version. Now we use a

delta method with $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times (0, 1)$, $(x, y, z) \mapsto (\frac{-2x^2 \log(z)}{\pi r^2 y}, \frac{-2x \log(z)}{\pi r^2 y}, \sqrt{\frac{-r^2}{4 \log(z)}})$.

Then we have $(\widehat{\lambda}_r, \widehat{\mu}_r, \widehat{\sigma}_r) = \phi(\widehat{M}_1, \widehat{V}, \widehat{\rho}_n(r))$ and $(\lambda, \mu, \sigma) = \phi(M_1, V, \tilde{\rho}(r))$.

The jacobian of ϕ is $D_\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-4x \log(z)}{\pi r^2 y} & \frac{2x^2 \log(z)}{\pi r^2 y^2} & \frac{-2x^2}{\pi r^2 y z} \\ \frac{-2 \log(z)}{\pi r^2 y} & \frac{2x \log(z)}{\pi r^2 y^2} & \frac{-2x}{\pi r^2 y z} \\ 0 & 0 & \frac{r \sqrt{-\log(z)}}{4z \log(z)^2} \end{pmatrix}$ so we have

$$\Sigma_{\mu_r, \lambda_r, \sigma_r} = D_\phi(M_1, V, \tilde{\rho}(r)) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,V}^2 & \sigma_{1,\tilde{\rho}(r)}^2 \\ \sigma_{1,V}^2 & \sigma_V^2 & \sigma_{V,\tilde{\rho}(r)}^2 \\ \sigma_{1,\tilde{\rho}(r)}^2 & \sigma_{V,\tilde{\rho}(r)}^2 & \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 \end{pmatrix} D_\phi(M_1, V, \tilde{\rho}(r))^t.$$

In the same spirit as above, we note $\Sigma_{\lambda_r, \mu_r, \sigma_r} = \begin{pmatrix} \sigma_{\lambda_r}^2 & \sigma_{\lambda_r, \mu_r}^2 & \sigma_{\lambda_r, \sigma_r}^2 \\ \sigma_{\lambda_r, \mu_r}^2 & \sigma_{\mu_r}^2 & \sigma_{\mu_r, \sigma_r}^2 \\ \sigma_{\lambda_r, \sigma_r}^2 & \sigma_{\mu_r, \sigma_r}^2 & \sigma_{\sigma_r}^2 \end{pmatrix}$

To specify the asymptotic variance we just use a delta method with $\psi : (0, 1) \mapsto \mathbb{R}$,

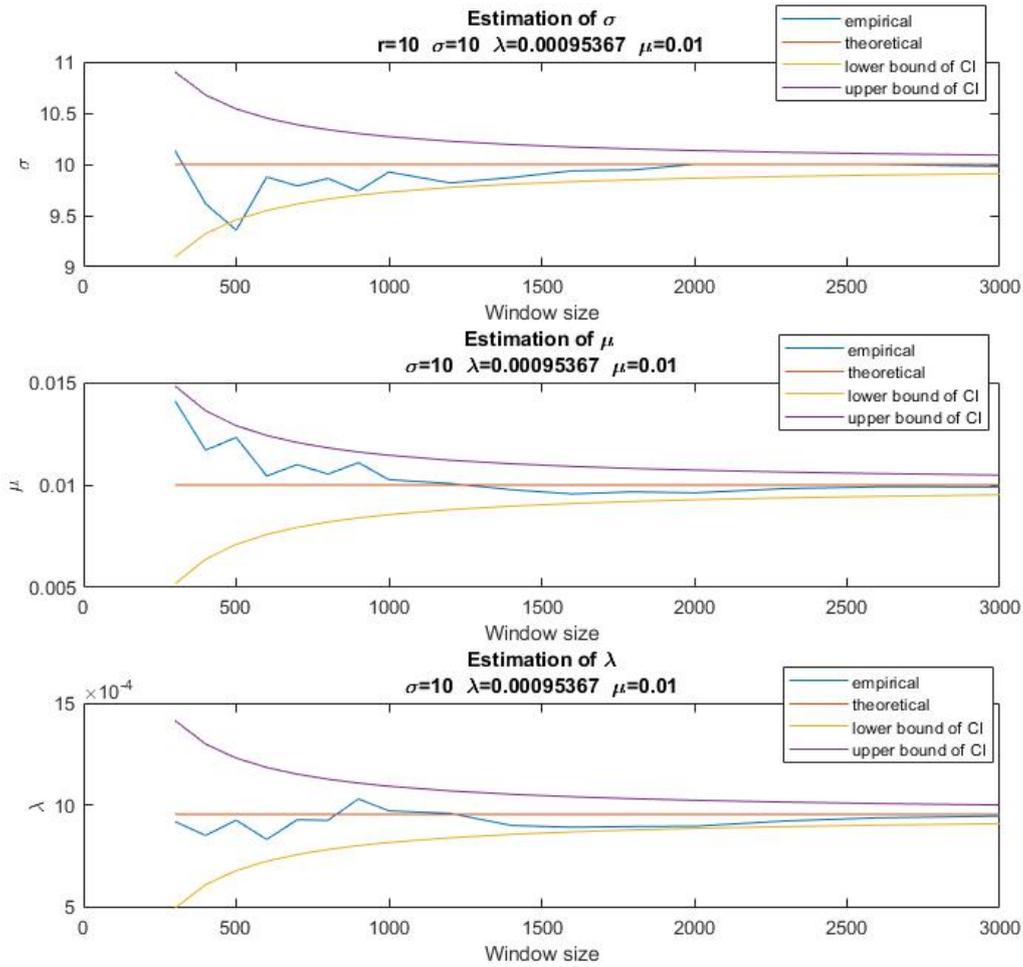


FIGURE 3.4.2 – Parameters estimations of a shot noise random field with Gaussian kernel and exponential marks. Parameters were estimated from $\rho(5)$. On the x -axis, the observation windows size that are increasing. Lower and upper bound of the 95% confidence interval are also displayed.

$x \mapsto \sqrt{\frac{-r^2}{4 \ln(x)}}$. We have $\psi'(x) = \frac{r \sqrt{-\ln(x)}}{4x \ln(x)^2}$ and hence $\psi'(\tilde{\rho}(r)) = \frac{2\sigma^3 e^{\frac{r^2}{4\sigma^2}}}{r^2}$. Thus $\sigma_{\sigma_r}^2 = \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 \psi'(\tilde{\rho}(r))^2 = \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 \frac{4\sigma^6}{r^4} e^{\frac{r^2}{2\sigma^2}}$. \square

parameter	theoretical value	relative bias	relative MSE
σ	10	$1,5e^{-2}$	$2,2e^{-3}$
μ	0.01	$-5,5e^{-2}$	$3,1e^{-5}$
λ	$9.5e^{-4}$	$-3,1e^{-2}$	$9,5e^{-8}$

TABLE 3.4.1 – Bias and MSE for the parameters estimators of the example. Here the observation windows is $[0, 3000]^2$.

To illustrate Theorem 3.4.1, see Figure 3.4.2 where the size of the window increases. We also note that the asymptotic variances of the parameter estimators with isotropy are smaller than without isotropy. For the parameters of this example we have with isotropy :

$$\sigma_{\lambda_{10}}^2 = 0.005; \quad \sigma_{\mu_{10}}^2 = 0,5454; \quad \sigma_{\sigma_{10}}^2 = 19049$$

whereas if we estimate ρ in only one direction $w = (10, 0)$:

$$\sigma_{\lambda_w}^2 = 0.0113; \quad \sigma_{\mu_w}^2 = 1,2381; \quad \sigma_{\sigma_w}^2 = 192230$$

The bias and mean square error are excellent as shown in Table 3.4.1.

Moreover, by the interesting convolution properties of the Gaussian kernel, we have the following lemma whose proof is postponed to appendix.

Lemme 3.4.2. *All the integrals appearing in the asymptotic variances are explicit :*

- $I_1 = 1$
- $I_2(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|x\|^2}$
- $I_3(x, y) = \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{6\sigma^2}(\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)}$
- $I_4(x, y, s) = \frac{1}{32\pi^3\sigma^6} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\|x-y\|^2 + \|x-s\|^2 + \|y-s\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|s\|^2)}$

and the series can be simplified as

$$S(2) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|z\|^2} \quad (3.4.5)$$

$$S(2, 2, w_1 - w_2) = \frac{1}{16\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}\|w_1 - w_2\|^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|z + \frac{w_1 + w_2}{2}\|^2} \quad (3.4.6)$$

$$S(3, w_1) = \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|w_1\|^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{3\sigma^2}\|z - \frac{w_1}{2}\|^2} \quad (3.4.7)$$

$$S(4, w_1, w_2) = \frac{1}{32\pi^3\sigma^6} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|z + \frac{w_1 - w_2}{2}\|^2} \quad (3.4.8)$$

When σ is not too small, let's say greater than 1, we can approach (3.4.5) - (3.4.8) by a series/integral comparison leading to :

- $S(2) \approx 1$
- $S(2, 2, w_1 - w_2) \approx \frac{1}{8\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}\|w_1 - w_2\|^2}$
- $S(3, w_1) \approx \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\|w_1\|^2}$
- $S(4, w_1, w_2) \approx \frac{1}{16\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)}$.

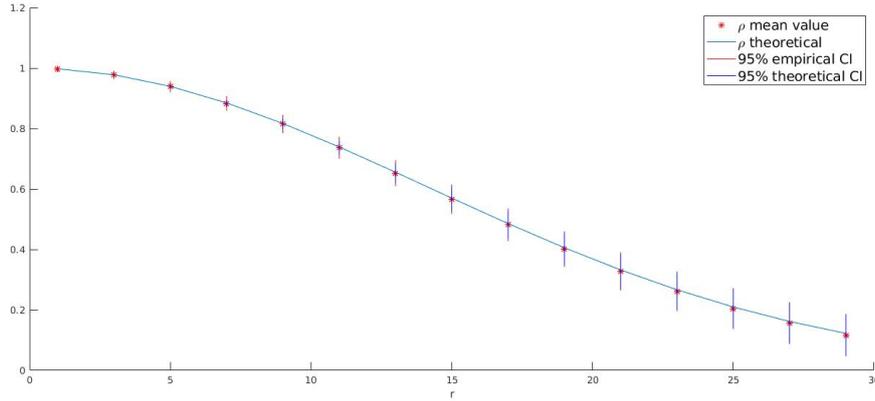


FIGURE 3.4.3 – Theoretical curve and estimation of the correlation function. The mean value and empirical variance are compute with a sample of $D = 300$ random field simulated on the windows $[0, 500]^2$. The parameter of the model are $\sigma = 10$, $\lambda \approx 10^{-3}$ and $\mu = \frac{1}{100}$.

Thus the asymptotic variance of $\widehat{\tilde{\rho}_n(r)}$ given by (3.3.4) is

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 &= \frac{m_4 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2 \lambda m_2^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} - 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1}{2}\|^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1 - re_2}{2}\|^2} \right) \\ &+ \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} - 4e^{-\frac{3r^2}{8\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1}{2}\|^2} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{-r^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} + e^{-\frac{-r^2}{4\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1 + re_2}{2}\|^2} \right) \\ &\approx \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} - 4e^{-\frac{3r^2}{8\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1}{2}\|^2} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{-r^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z\|^2} + e^{-\frac{-r^2}{4\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{re_1 + re_2}{2}\|^2} \right), \end{aligned}$$

where the approximation is a very small approximation coming from the fact that $\frac{re_1}{2}$ and $\frac{re_1 - re_2}{2}$ are not always in \mathbb{Z}^2 . We put aside this small approximation. The asymptotic variance of $\tilde{\rho}$ does not depend on λ and μ . If we make the series/integral approximation we have the simple formula

$$\sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2 \approx \pi\sigma^2 \left(1 + 2e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}} - 8e^{-\frac{3r^2}{8\sigma^2}} + 5e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right)$$

We observe that for all $\sigma \geq 0$, the function $r \mapsto \sigma_{\tilde{\rho}(r)}^2$ starts at 0 then grows to its limit $\pi\sigma^2$. To minimize variance, it would be useful to estimate this function for small r but for practical observation windows, inconsistencies are often observed with an estimate greater than 1 for small r . We observe also (see the Table 3.4.2) that for all $\sigma \geq 0$, the function $r \mapsto \sigma_{\sigma_r}^2$ starts at $\frac{\pi\sigma^4}{2}$ then grows slowly (almost constant) then rapidly to

infinity. As for $\widehat{\tilde{\rho}(r)}$, to minimize variance, it would be useful to estimate this function for small r .

$\sigma \backslash r$	1	2	3	4	5	10	15	20	30
1	1,90	3,64	13,86	149,03	5e+3	6e+18	1e+45	5e+82	4,19e+190
2	26,34	30,47	39,40	58,25	102,05	8e+4	1,04e+11	1,04e+20	2,86e+46
3	129,92	138,43	154,29	180,63	223,53	2e+3	4e+5	2e+9	5,27e+20
4	406,87	421,56	447,59	487,64	546,15	1e+3	1e+4	1e+6	1e+12
5	989,14	1e+3	1e+3	1e+3	1e+3	2e+3	8e+3	9e+4	4e+8
10	1e+4	1e+4	1e+4	1e+4	1e+4	2e+4	2e+4	3e+4	10e+4
15	7e+4	8e+4	8e+4	8e+4	8e+4	8e+4	9e+4	11e+4	18e+4
20	2e+5	2e+5	2e+5	2e+5	2e+5	2e+5	2e+5	3e+5	4e+5

TABLE 3.4.2 – Theoretical asymptotic variance of $\widehat{\sigma}_r$ given by 3.4.4

Thus, to estimate σ , it seems more interesting to take into account the correlation function on small r . But looking at Table 3.4.3, although a small r gives a small variance, the function ρ is so close to 1 (especially by increasing σ) that the estimate is rough. The exponential form of the correlation function (it starts from 1, decreases slowly then strongly then slowly to 0) does not allow to distinguish the first values since it is slightly decreasing. This table reinforces us in the idea of not using the large r values. A first idea would be to make an average of several estimated σ_r for some specifically chosen r 's, when the scope of the ρ function is maximal and therefore allows us to distinguish these values. For example, for $\sigma = 1$ we recommend using $r = 1$ to 3, for $\sigma = 5$ we recommend using $r = 3$ to 7, for $\sigma = 10$ we recommend using $r = 7$ to 13.

$\sigma \backslash r$	1	2	3	4	5	10	15	20	30
2	1,95	1,98	1,98	1,98	1,99	2,26	NA	NA	NA
3	3,19	3,05	3,02	3,00	2,99	2,89	2,65	5,23	NA
4	3,36	3,70	3,80	3,83	3,86	3,90	3,86	NA	NA
5	6,24	5,28	5,13	5,07	5,04	4,98	4,91	4,65	NA
10	NA	11,78	10,53	10,19	10,05	9,89	9,87	9,87	9,84
15	NA	19,42	16,99	16,20	15,81	15,16	14,95	14,82	14,58
20	9,96	14,29	16,38	17,54	18,27	19,76	20,24	20,47	20,65

TABLE 3.4.3 – Value of $\widehat{\sigma}_r$ with different σ and r estimating on one Gaussian shot noise random field simulated on the windows $[0, 500]^2$. The two other parameters are $\lambda = 1000/1024^2$ and $\mu = 1/100$. The NA values are complex number.

Actually, these estimators are often identical and averaging them does not yield a significant gain. Thus, for the sake of simplicity, we will consider only one well-chosen value σ_r to estimate σ . In practice, when you have no idea of the value of σ it is also necessary to estimate a good r . A good way to choose it is

$$r^* = \operatorname{argmin}_{r \in \mathbb{N}^*} |\widehat{\tilde{\rho}_n}(r) - \exp(-\frac{1}{2})| \quad (3.4.9)$$

because as $\tilde{\rho}''(r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}}}{2\sigma^2} (\frac{r^2}{2\sigma^2} - 1)$ the function is the most decreasing at $r = \sqrt{2}\sigma$. Observe the correct estimation of r^* in Table 3.4.4. Remark that the estimation is worse for large σ but if the size of the image increases then the estimation is improved. The σ estimator we consider is then

$$\widehat{\sigma}_{r^*} = \sqrt{\frac{-r^{*2}}{4 \log(\widehat{\tilde{\rho}_n}(r^*))}} \quad (3.4.10)$$

$\sqrt{2}\sigma$	r	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2.83	2	300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.07	5	0	0	0	0	300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11.31	8	0	0	0	0	0	0	0	1	214	85	0	0	0	0	0	0	0	0
15.55	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	134	146	0	0	0	0
19.80	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	55	237	0

TABLE 3.4.4 – Number of \widehat{r}^* for different σ . The sample size is $D = 300$ on the windows $F = 500$. The two others parameters are $\lambda = \frac{1000}{500^2}$ and $\mu = \frac{1}{100}$.

Given a random field realization X , it is now sufficient to implement the following steps :

1. estimate the correlation function ρ with (3.3.3)
2. calculate r^* with (3.4.9)
3. estimate the mean and variance with (3.2.9) and (3.2.10)
4. estimate (λ, μ, σ) with (3.4.3)

Let us finish with some illustration. In order not to study a single parameter triplet, the parameters in the two following figures evolve in such a way that the parameter range is not too restrictive. Figure 3.4.4 represents bias and variance of the 3 parameter estimators for several σ values on a sample of size $D = 300$. In comparison with the table 3.4.1, let us look at our estimation on a small image size like $F = 500$. There is a very good estimate with a small bias and an acceptable variance for this window size. Again, the estimators become a bit worse for large σ values. Figures 3.4.5 represents bias and variance of the 3 parameter estimators for several λ values on a sample of size $D = 300$.

There again, the statistical properties are suitable for this window size. This time, there is no consequence on the estimation of the three parameters when we consider larger λ values (to see it for λ , just consider the relative bias and relative variance).

3.5 Conclusion and perspective

Thank to Theorem 3.2.6 we have a solid foundation of moment estimates for a large class of shot noise random field. The study of the case of the Gaussian kernel and the exponential mark in the last part is an application to parameter estimation that could be extended to other marks very easily. Other kernels whose possible computations of (3.2.1)-(3.2.4) can also be used. The estimation of the parameters of this model can allow applications in model validation and the calculation of other statistics such as the geometry of the excursion levels (see [BD16]). Finally, a shot noise can be used for physical modeling such as heat propagation phenomena or also in biology, so applications to practical cases can be considered.

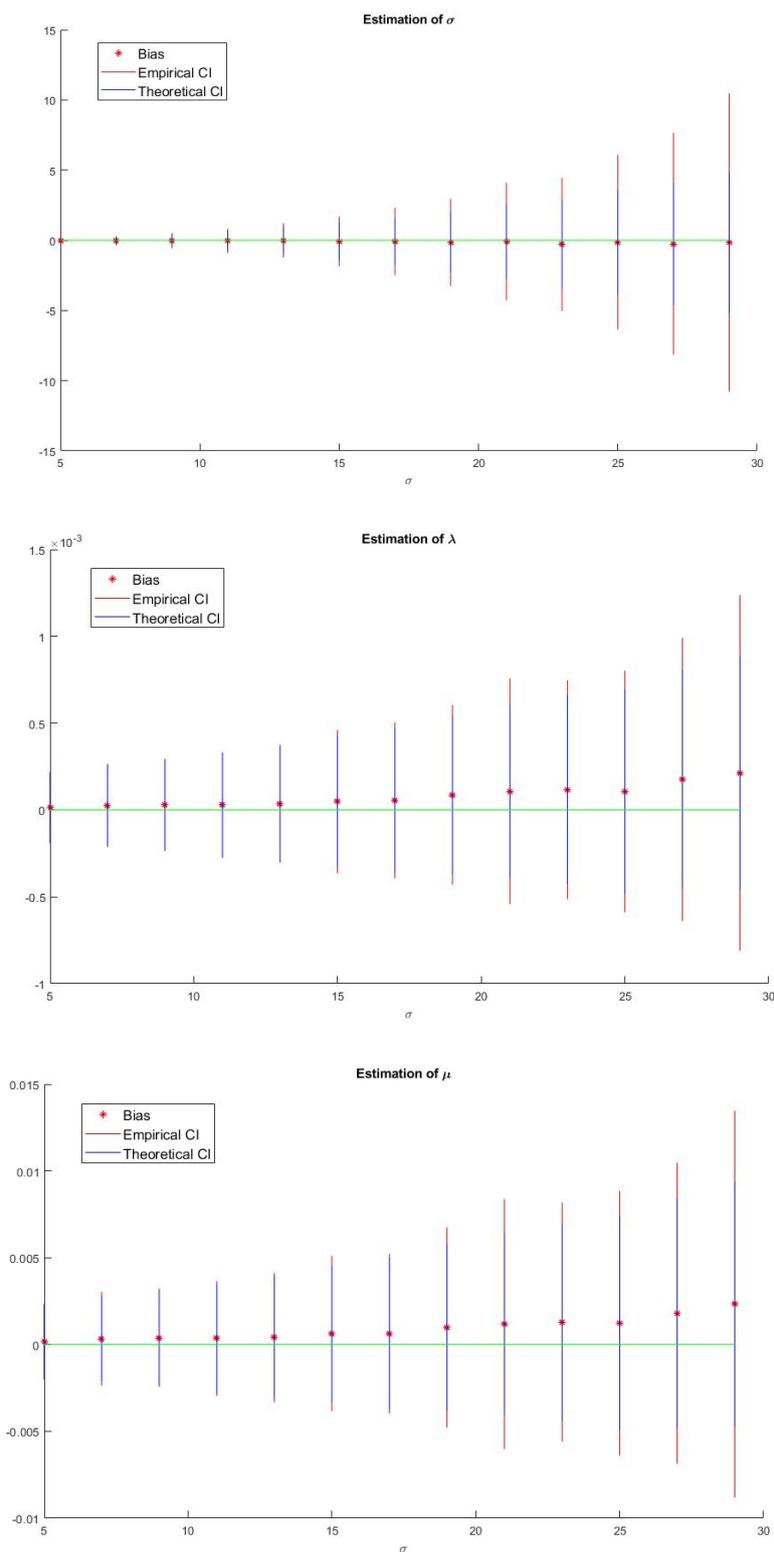


FIGURE 3.4.4 – Bias and 95% CI of the three parameters for several σ values. Each are calculated on a sample of $D = 300$ random field simulated on the windows $[0, 500]^2$. The two others parameters are $\lambda \approx 10^{-3}$ and $\mu = \frac{1}{100}$.

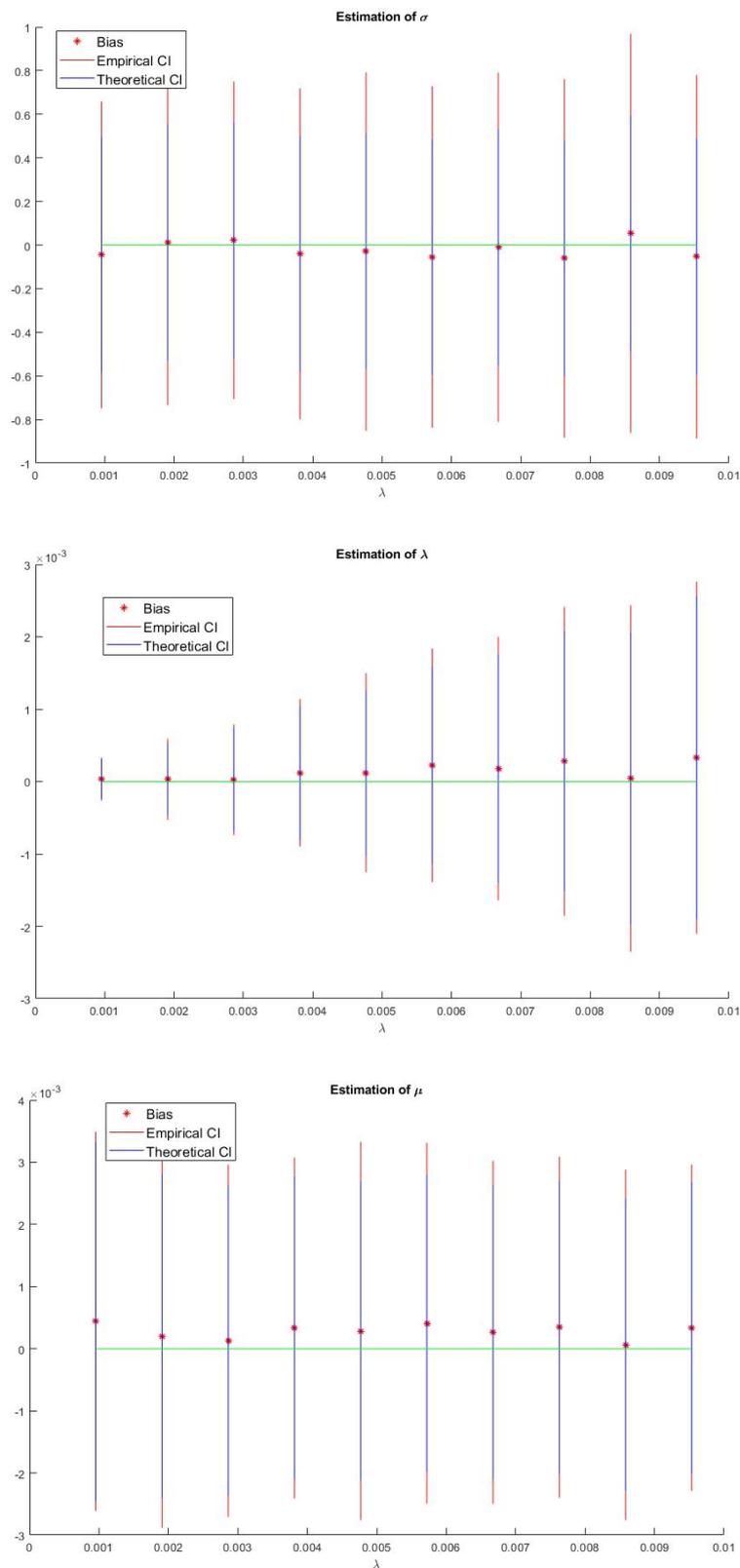


FIGURE 3.4.5 – Bias and 95% CI of the three parameters for several λ values. Each are calculated on a sample of $D = 300$ random field simulated on the windows $[0, 500]^2$. The two others parameters are $\sigma = 10$ and $\mu = \frac{1}{100}$.

3.6 Proof of results

Proof of Lemma 3.2.1 and 3.2.7. Let X a Poisson point process on \mathbb{R}^n with intensity measure Λ and f a non-negative bounded measurable function defined on \mathbb{R}^d , then we have :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X}^{\neq} f(x_1, \dots, x_n)\right] = \int_{\mathbb{R}^{kn}} f(x_1, \dots, x_n) \Lambda(dx_1) \dots \Lambda(dx_n) \quad (3.6.1)$$

Previously called Campbell's Theorem due to Campbell's work on shot noise processes ([Cam09b]), the kind of equation such as 3.6.1 is now a common way to directly define the k th order moment measure. We can now calculate the moments of a shot noise random field. Let $S = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, the first one is simply given by

$$\mathbb{E}[X(0)] = \mathbb{E}\left[\sum_{(x_i, m_i) \in \Phi_X} m_i g(x_i)\right] = \int_S m g(c) \lambda dc F(dm) = \lambda m_1$$

To compute the others moments, we need to split the sum such that the points are different then simply use the Campbell formula several times. Let $x \in T$ then :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X(x)X(0)] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{(x_i, m_i) \in \Phi_X} m_i g(x_i - x)\right) \left(\sum_{(x_j, m_j) \in \Phi_X} m_j g(x_j)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{(x_i, m_i) \in \Phi_X} m_i g(x_i - x)\right) \left(\sum_{\substack{i \neq j \\ (x_j, m_j) \in \Phi_X}} m_j g(x_j)\right) + \sum_{(x_i, m_i) \in \Phi_X} m_i^2 g(x_i - x) g(x_i)\right] \\ &= \int_{S^2} m g(c - x) n g(a) \lambda^2 dc F(dm) da F(dn) + \int_S m^2 g(c - x) g(c) \lambda dc F(dm) \\ &= \lambda^2 m_1^2 + \lambda m_2 I_2(x) \end{aligned}$$

Let $x, y, s \in T$, to calculate

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)X(s)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i \in \Phi_X} m_i g(i - x)\right) \left(\sum_{j \in \Phi_X} m_j g(j - y)\right) \left(\sum_{k \in \Phi_X} m_k g(k - s)\right)\right] \quad (3.6.2)$$

it is required to divide the sum into 5 as shown in Figure 3.6.6.

In order, the 5 terms are :

$$\begin{aligned} & - \mathbb{E}\left[\sum_{i \in \Phi_X} m_i^3 g(i - x) g(i - y) g(i - s)\right] \\ &= \int_S m^3 g(x - c) g(y - c) g(s - c) \lambda dc F(dm) \\ &= m_3 \lambda I_3(x - s, y - s) \end{aligned}$$

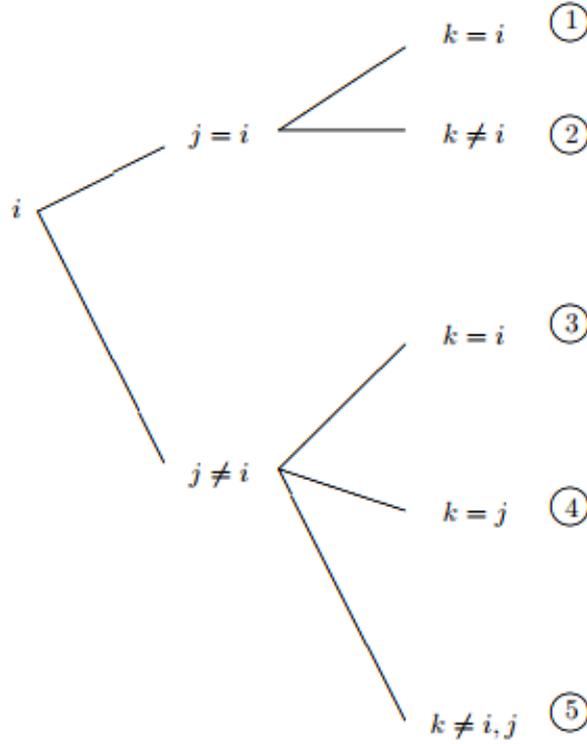


FIGURE 3.6.6 – Decomposition of the triple summation

$$\begin{aligned}
 & - \mathbb{E} \left[\sum_{i,k \in \Phi_X}^{\neq} m_i^2 m_k g(i-x)g(i-y)g(k-s) \right] \\
 & = \int_{S^2} m^2 n g(x-c)g(y-c)g(s-a)\lambda^2 dc F(dm) da F(dn) \\
 & = m_2 m_1 \lambda^2 I_2(x-y) \\
 & - \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \in \Phi_X}^{\neq} m_i^2 m_j g(i-x)g(j-y)g(i-s) \right] \\
 & = \int_{S^2} m^2 n g(x-c)g(y-a)g(s-c)\lambda^2 dc F(dm) da F(dn) \\
 & = m_2 m_1 \lambda^2 I_2(x-s) \\
 & - \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \in \Phi_X}^{\neq} m_i m_j^2 g(i-x)g(j-y)g(j-s) \right] \\
 & = \int_{S^2} m n^2 g(x-c)g(y-a)g(s-a)\lambda^2 dc F(dm) da F(dn) \\
 & = m_2 m_1 \lambda^2 I_2(y-s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \mathbb{E} \left[\sum_{i,j,k \in \Phi_X}^{\neq} m_i m_j m_k g(i-x)g(j-y)g(k-s) \right] \\
 & = \int_{S^3} mnp g(x-c)g(y-a)g(s-b)\lambda^3 dcF(dm)daF(dn)dbF(dp) \\
 & = m_1^3 \lambda^3
 \end{aligned}$$

Hence

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)X(s)] = m_3 \lambda I_3(x-s, y-s) + m_2 m_1 \lambda^2 (I_2(x-y) + I_2(x-s) + I_2(y-s)) + m_1^3 \lambda^3.$$

To calculate $\mathbb{E}[X(x)X(y)X(s)X(t)]$, the sum must be divided into 15 terms as shown in Figure 3.6.7.

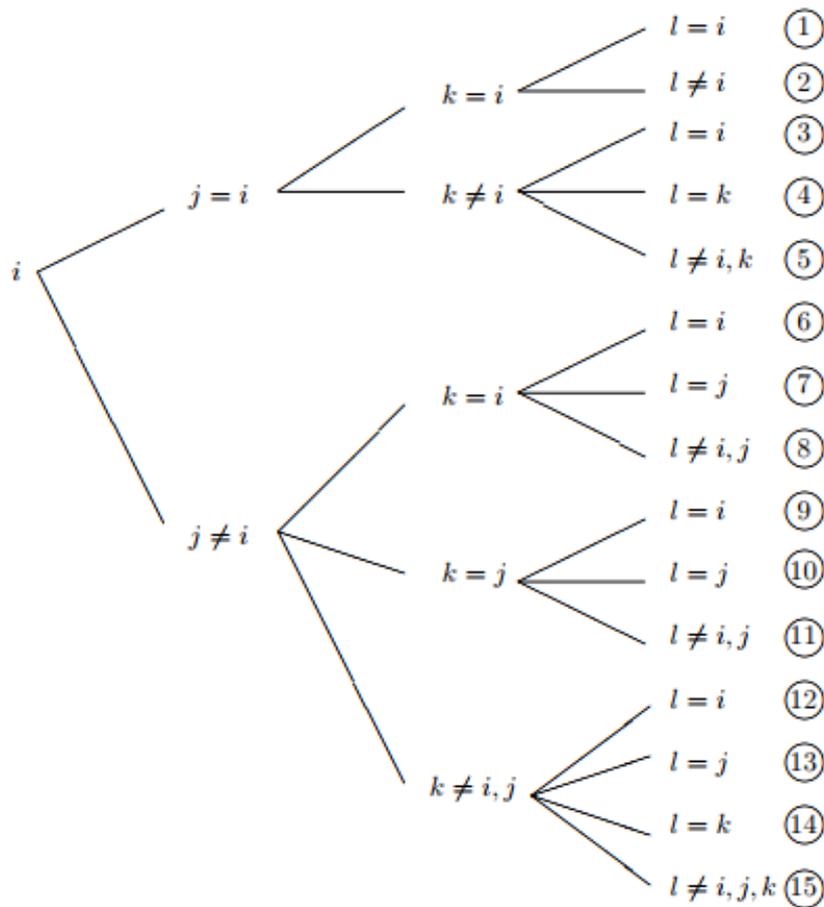


FIGURE 3.6.7 – Decomposition of the quadruple summation

The calculations are similar to the ones performed for $\mathbb{E}[X(x)X(y)X(s)]$. □

Proof of lemma 3.4.2. Let $x, y, s \in T$.

$$\begin{aligned}
I_3(x, y) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\|c-x\|^2 + \|c-y\|^2 + \|c\|^2)} dc \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}{6\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\sqrt{3}c - \frac{x+y}{\sqrt{3}}\|^2} dc \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}{6\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|a\|^2} \frac{1}{3} da \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}{6\sigma^2}} \frac{2\pi\sigma^2}{3} \\
&= \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{6\sigma^2}(\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)}
\end{aligned}$$

The calculation of the other integrals are very similar, for exemple for $I_4(x, y, s)$ just write

$$\begin{aligned}
&\|c-x\|^2 + \|c-y\|^2 + \|c-s\|^2 + \|c\|^2 \\
&= \left\| 2c - \frac{x+y+s}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4} (\|x-y\|^2 + \|x-s\|^2 + \|y-s\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|s\|^2)
\end{aligned}$$

□

Proof of 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7 and 3.4.8. By Lemma 3.4.2 we have $S(2) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} \|z\|^2}$.

For the others series, we can reduce as follows :

$$\begin{aligned}
S(2, 2, w_1, w_2) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_2(z+w_1) I_2(z+w_2) \\
&= \frac{1}{16\pi^2\sigma^4} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\|z+w_1\|^2 + \|z+w_2\|^2)} \\
&= \frac{1}{16\pi^2\sigma^4} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} \|\sqrt{2}z + \frac{w_1+w_2}{\sqrt{2}}\|^2} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} \|\frac{w_1-w_2}{\sqrt{2}}\|^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2\sigma^4} e^{-\frac{1}{8\sigma^2} \|w_1-w_2\|^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|z + \frac{w_1+w_2}{2}\|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(3, w_1) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_3(z, w_1) \\
&= e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \|w_1\|^2} \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{6\sigma^2} (\|z-w_1\|^2 + \|z\|^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \|w_1\|^2} \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \|\sqrt{2}z - \frac{w_1}{\sqrt{2}}\|^2} e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \|\frac{w_1}{\sqrt{2}}\|^2} \\
&= e^{-\frac{1}{4\sigma^2} \|w_1\|^2} \frac{1}{12\pi^2\sigma^4} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{3\sigma^2} \|z - \frac{w_1}{2}\|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(4, w_1, w_2) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} I_4(z, z + w_1, w_2) \\
&= e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)} \frac{1}{32\pi^3\sigma^6} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\|z-w_2\|^2 + \|z+w_1-w_2\|^2 + \|z+w_1\|^2 + \|z\|^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)} \frac{1}{32\pi^3\sigma^6} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}\|2z+w_1-w_2\|^2} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)} \frac{1}{32\pi^3\sigma^6} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|z + \frac{w_1-w_2}{2}\|^2}
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE

4

ÉTUDE DU PÉRIMÈTRE DES CHAMPS ALÉATOIRES SHOT NOISE PAR UNE APPROCHE ÉLÉMENTAIRE

Nous présentons dans ce chapitre un article en pré-publication, qui étudie le périmètre des niveaux d'excursion de champ shot noise.

Résumé

L'étude de la géométrie des ensembles d'excursion des champs aléatoires bidimensionnel, en particulier le périmètre, suscite un intérêt croissant tant du point de vue des développements théoriques que des applications statistiques. Dans cet article, nous nous intéressons à la relation entre le périmètre des ensembles d'excursion d'un champ aléatoire shot noise par rapport au cadre gaussien bien connu. Notre approche est fonctionnelle en considérant la fonction périmètre dans sa globalité, tout en étant dans le cadre des fonctions spéciales à variation bornée. Dans ce cadre unifié, nous présentons deux régimes différents par rapport à l'intensité du champ aléatoire shot noise. Le premier est le régime gaussien classique en haute intensité, tandis que le second, nouveau, en basse intensité, est lié à une approximation élémentaire. Dans le cas explicite des fonctions de corrélation gaussiennes, nous montrons la pertinence d'une telle approximation pour l'évaluation statistique. Au moins, cela nous permet de proposer une procédure de classification pour discriminer les champs gaussiens et shot noise.

Study of the perimeter of a shot noise random field by an elementary approach

Hermine BIERMÉ & Antoine LERBET

Abstract

The study of the geometry of excursion sets of 2D random fields, especially the perimeter or length of level lines, has a growing interest from both the theoretical developments and the statistical applications. In this paper we are interested in the relationship between the perimeter of the excursion sets of a shot noise random field compared to the well known Gaussian framework. Our approach follows the weak framework of special bounded variation functions in which we consider the functions that map the level of the excursion set to the perimeter of the excursion set. In this unified framework we exhibit two different regimes with respect to the intensity of the shot noise random field. The first one is the classical Gaussian regime in high intensity, while the second new one, in low intensity, is related to an elementary approximation. In the explicit case of Gaussian correlation functions, we show the pertinence of such approximation for statistical evaluation. At least, this enables us to propose a classification procedure to discriminate Gaussian or shot noise fields.

4.1 Introduction and notation

Random fields are a popular branch of probabilities that allow to model a lot of domains, including texture synthesis [VW91, GGM10], image analysis with applications in the medical field [CW99, DBD20] and extensive spatial modelling. The most popular random field models are certainly the Gaussian fields, but in this paper we will consider shot noise models defined on \mathbb{R}^2 by

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad X(x) = \sum_i m_i g(x - x_i), \quad (4.1.1)$$

where $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is the kernel, the x_i are the points of a homogeneous Poisson point process of intensity λ in \mathbb{R}^2 and the m_i are “marks”, independent of the Poisson point process such that $\{(x_i, m_i)\}_{i \in I}$ is a Poisson point process on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ of intensity $\lambda \mathcal{L} \otimes F$ with F a probability measure on \mathbb{R} , defined on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a complete probability space.

This model can be seen as an extension of the Germ-Grain models [CSKM13], and thus of the Boolean model, where the x_i are the germs while the kernel plays the role of the grains, but with the difference that we are interested in the random fields formed by the sum of the grains and not just the random set formed by their unions. These fields were first introduced by Daley [Dal71], although they are based on the one-dimensional process [Cam09b, Cam09a, Ric44], and have been used in many fields [BB09, KM95, Sch17, GGM10].

On one side, there is a strong relation between the shot noise framework and the Gaussian framework. The main result is due to Heinrich and Schmidt [HS85], showing asymptotic normality in high intensity, in the sense of finite dimensional distribution, and even in the topology of uniform convergence on compact sets. Since then, this strong result has aroused a lot of interest in application [KM95, CH01, AY10] and in research [BD16, LM21]. On the other side, one purpose of this paper is to show that the low intensity behaviour is really distinct from the Gaussian framework but through its visual definition, based on simple random tools, it allows a certain malleability in the calculations [BD20, Lac16a, Lac19, Ler21] that is rarely found outside the Gaussian case.

All random field information is contained in the excursion sets, defined for any $u \in \mathbb{R}$ and open subset (the viewing window) $T \subset \mathbb{R}^2$ by

$$E_X(u, T) := \{x \in T \mid X(x) \geq u\}$$

Statistically, it is interesting to study geometric characteristics of these random sets, mainly their area, perimeter and Euler characteristic. It is very rare to know the law of these random functions of the level but it happens that we can calculate their mean values. As it is often the case, under certain assumptions of stationnarity and regularity, the Gaussian framework allows the explicit computation of these 3 geometric quantities [AT07, AW09]. With this exception there are only a few results on the geometry of excursion sets [AST13, Lac15b], and they usually require assumptions of regularity and bounded density existence.

Especially for shot noise random fields, by adopting a functional point of view, several results for the computation of mean geometry were obtained in [BD20]. More precisely, without bounded density assumption, they obtained results in two distinct frameworks : the one where the kernel is smooth and the one where the kernel is elementary, that may be unified in the framework of special bounded variation function [AFP00]. The quantity of interest for studying the regularity of excursion sets is the perimeter $u \mapsto \text{Per}(E_X(u, T))$ view as a $L^1(\mathbb{R})$ function when X is a.s. a locally special bounded variation function. We emphasize that under stronger assumptions, $\text{Per}(E_X(u, T))$ corresponds to the length of the level set $\{x \in T; X(x) = u\}$ [AW09], also related to the Lipschitz-Killing curvature of order 1 of the excursion set [BDBDE19]. Since we consider stationary random sets, by ergodicity, one should have $\frac{\text{Per}(E_X(u, T))}{\mathcal{L}(T)} \rightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))}$ a.s. as T tends to \mathbb{R}^2 . Note that asymptotic normality have also been investigated in a Gaussian framework in

[Ber21] for a fixed level under regularity assumptions and for shot noise random fields in a weak framework in [Lac19]. Hence our function of interest is the mean density perimeter function

$$u \rightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))} := \frac{\mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u, T))]}{\mathcal{L}(T)}.$$

However, even for a simple smooth kernel as a Gaussian, the formulas of [BD20] are not fully explicit and in order to find the mean density perimeter, a Fourier inversion is needed. Through a kernel discretization approach, another aim of this paper will be to obtain formulas that are more easily usable in practice. Finally, we will use the area and perimeter of the excursion sets as a classifier to distinguish a Gaussian and shot noise field with the same first and second order statistics, especially for visually indistinguishable pattern.

The paper is organized as follows. After reviewing the well-known formulas for smooth Gaussian and shot noise fields, we give in Section 2 the two distinct behaviors of the mean densities of the level perimeter integral for shot noise smooth random fields : the high regime for large λ values and the low regime for small λ values. Section 3 is devoted to the case where the kernel is a Gaussian function and its own properties, with in particular its scale invariances. We will study in Section 4 the discretization of this model and the limit of the mean perimeter when the discretization step tends to 0. We will make the link between the identified limit and the low regime. Under normalisation by its total variation, this will lead to more explicit formulas for perimeter than those already known. Finally, using these formulas, in Section 5 we will give a classification method to distinguish a shot noise field from a Gaussian field with the same moments of order 1 and 2.

4.2 Previous results

4.2.1 General formula

For T an open bounded subset of \mathbb{R}^2 and X a "nice" stationary random field on \mathbb{R}^2 . By stationarity we easily get that the mean density area of excursion sets is given by the tail function of the common distribution. More precisely, for all $u \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\text{Area}(E_X(u))} = \frac{\mathbb{E}(\mathcal{L}(E_X(u, T)))}{\mathcal{L}(T)} = \mathbb{P}(X(0) \geq u).$$

The computation of the perimeter is more involved and we use the weak functional approach developed in [BD16]. Following the notation of [BD20] we define, when it exists, the level perimeter integral by the linear form

$$\begin{aligned} \text{LP}_X(\cdot, T) : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(u) \text{Per}(E_X(u), T) du \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

The knowledge of $\mathbb{E}[\text{LP}_X(h, T)]$ for all $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ allows us to get information about the perimeter $\mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u), T)]$ for almost every level $u \in \mathbb{R}$. In particular computing (4.2.1) for $\nu \in \mathbb{R}$ and h_ν given by

$$h_\nu(u) = e^{i\nu u}, \tag{4.2.2}$$

$\mathbb{E}[\text{LP}_X(h_\nu, T)]$ corresponds to the Fourier transform of $u \mapsto \mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u), T)]$ at frequency ν . Moreover, the total variation of X may be computed using $h = 1$ or $\nu = 0$ and its expectation is given by

$$\mathbb{E}[\text{TV}(X, T)] = \mathbb{E}[\text{LP}_X(1, T)].$$

By stationarity, the quantities of interest are related to the mean densities

$$\overline{\text{LP}_X}(h) = \frac{\mathbb{E}[\text{LP}_X(h, T)]}{\mathcal{L}(T)} = \int_{\mathbb{R}} h(u) \overline{\text{Per}(E_X(u))} du \text{ and } \overline{\text{TV}(X)} = \overline{\text{LP}_X}(1).$$

Note that we might expect that for nice ergodic random fields and nice growing sequences of T

$$\frac{\text{LP}_X(h, T)}{\mathcal{L}(T)} \longrightarrow \overline{\text{LP}_X}(h) \text{ and } \frac{\text{Per}(E_X(u), T)}{\mathcal{L}(T)} \longrightarrow \overline{\text{Per}(E_X(u))} \text{ a.s.}$$

Assuming that X is a C^1 random field with $X(0)$ and $\partial_j X(0)$ having finite expectations for all $j = 1, 2$, by Theorem 2 of [BD20] for a.e. $u \in \mathbb{R}$, the random variables $\text{Per}(E_X(u), T)$ have finite expectation such that for all h bounded continuous function on \mathbb{R} , one has

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{LP}_X(h, T)) &= \int_{\mathbb{R}} h(u) \mathbb{E}(\text{Per}(E_X(u), T)) dt \\ &= \mathbb{E}(h(X(0)) \|\nabla X(0)\|) \mathcal{L}(T). \end{aligned}$$

In particular,

$$\overline{\text{LP}_X}(h) = \mathbb{E}(h(X(0)) \|\nabla X(0)\|) \text{ and } \overline{\text{TV}(X)} = \mathbb{E}[\|\nabla X(0)\|].$$

It follows that $h \mapsto \overline{\text{LP}_X}(h)$ is a continuous linear form on $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ with subordinated norm given by $\overline{\text{TV}(X)}$. Moreover, when X is also isotropic, the computation may be simplified as

$$\overline{\text{LP}_X}(h) = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}(h(X(0)) |\partial_1 X(0)|) \text{ and } \overline{\text{TV}(X)} = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}[|\partial_1 X(0)|]. \tag{4.2.3}$$

Following the case of shot noise fields developed in [BD16] that are infinitely divisible random fields for which the use of characteristic functions is more tractable, we state the following result.

Proposition 4.2.1. *Let X be a stationary isotropic C^1 random field on \mathbb{R}^2 , such that $\mathbb{E}(|X(0)|) < +\infty$ and $\mathbb{E}(|X_1(0)|^{1+\varepsilon}) < +\infty$ for some $\varepsilon > 0$, and let us denote for $(\nu, v) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\varphi(\nu, v) = \mathbb{E}[e^{i\nu X(0) + iv \partial_1 X(0)}]. \tag{4.2.4}$$

Then

$$\overline{\text{LP}_X}(h_\nu) = - \int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\nu, v) dv, \text{ and } \overline{\text{TV}(X)} = - \int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) dv, \tag{4.2.5}$$

where h_ν is given by (4.2.2) and the improper integrals are defined as $\lim_{V \rightarrow +\infty} \int_0^V$.

Démonstration. Let $\nu \in \mathbb{R}$. Since X be a stationary isotropic C^2 random field on \mathbb{R}^2 , by (4.2.3) we have

$$\overline{\text{LP}}_X(h_\nu) = \frac{\pi}{2} \mathbb{E} (h_\nu(X(0))|\partial_1 X(0)|).$$

According to Proposition 2 of [BD20], since $|h_\nu(X(0))| \leq 1$ and $\mathbb{E}(|X_1(0)|^{1+\varepsilon}) < +\infty$ for some $\varepsilon > 0$ we get

$$\mathbb{E} (h_\nu(X(0))|\partial_1 X(0)|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \mathbb{E} (h_\nu(X(0))\partial_1 X(0) \sin(v\partial_1 X(0))) dv.$$

But $\varphi(\nu, v) = \varphi(\nu, -v)$ so that $\varphi(\nu, v) = \mathbb{E} (h_\nu(X(0)) \cos(v\partial_1 X(0)))$ and therefore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\nu, v) = -\mathbb{E} (h_\nu(X(0))\partial_1 X(0) \sin(v\partial_1 X(0))),$$

from which we deduce the result. □

4.2.2 Isotropic smooth Gaussian random fields

When the random field X is an isotropic smooth (at least C^1) Gaussian random field, we write φ_X , respectively $\varphi_{\partial_1 X}$, the characteristic function of $X(0)$, respectively of $\partial_1 X(0)$. Since $X(0)$ and $\partial_1 X(0)$ are non correlated by stationarity and thus independent by Gaussian distribution, the characteristic function in (4.2.4) is $\varphi(\nu, v) = \varphi_X(\nu)\varphi_{\partial_1 X}(v)$. Hence

$$-\int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\nu, v) dv = \varphi_X(\nu) \left(-\int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_{\partial_1 X}(v)}{\partial v} dv \right),$$

with $\varphi_{\partial_1 X}(v) = \exp(-\text{Var}[\partial_1 X(0)]v^2/2)$. It follows that for all $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\text{LP}}_X(h_\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{Var}[\partial_1 X(0)]} \varphi_X(\nu). \tag{4.2.6}$$

Corollary 4.2.2. *Let X be a stationary isotropic C^1 Gaussian random field then for almost all $u \in \mathbb{R}$*

$$\overline{\text{Per}}(E_X(u)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{Var}[\partial_1 X(0)]} \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}[X(0)]}} \exp\left(-\frac{(u - \mathbb{E}(X(0)))^2}{2 \text{Var}[X(0)]}\right), \text{ and}$$

$$\overline{\text{TV}}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{Var}[\partial_1 X(0)]}.$$

Note that under the stronger assumption that X is a.s. C^2 the previous stated equality will hold for any level $u \in \mathbb{R}$. We refer to Theorem 6.8 of [AW09] for instance.

4.2.3 Isotropic smooth shot noise fields

Considering now a shot noise field X given by (4.1.1), with a radial kernel $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, we can also go ahead in computations. We recall the notation $g_m = mg$ and introduce a random variable M of distribution F . For $p > 0$, we denote

$$\mu_p(g_M) := \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} |g_m(x)|^p F(dm) dx = \mathbb{E}(|M|^p) \int_{\mathbb{R}^2} |g(x)|^p dx. \tag{4.2.7}$$

For $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ and $i = 1, 2$ we note the partial derivative $\partial_i g := \frac{\partial g}{\partial x_i}$ and for $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$, $|\mathbf{j}| \leq 2$, we note also $D^{\mathbf{j}}g := \frac{\partial^{|\mathbf{j}|} g}{\partial^{j_1} x_1 \partial^{j_2} x_2}$ such that $D^{(1,0)}g = \partial_1 g$.

Actually, under the assumption that $\mu_1(D^{\mathbf{j}}g_M) < +\infty$ for all $|\mathbf{j}| \leq 2$, the shot noise field X is a.s a stationary isotropic C^1 random field and the characteristic function of $(X(0), \partial_1 X(0))$ is explicitly given for $(\nu, v) \in \mathbb{R}^2$ by

$$\varphi(\nu, v) = \exp \left(\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} [e^{i\nu m g(x) + i v m \partial_1 g(x)} - 1] F(dm) dx \right). \quad (4.2.8)$$

Hence we get $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\nu, v) = -S_0(\nu, v)\varphi(\nu, v)$, with

$$\begin{aligned} S_0(\nu, v) &= -i\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x) + i v m \partial_1 g(x)} F(dm) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \sin(v m \partial_1 g(x)) F(dm) dx, \end{aligned}$$

and, assuming moreover that $\mu_2(D^{\mathbf{j}}g_M) < +\infty$ for all $|\mathbf{j}| \leq 2$, , by Proposition 4.2.1 with $\varepsilon = 1$ (see also Theorem 3 of [BD20]), we obtain

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \overline{\text{LP}}_X(h_\nu) = \int_0^\infty \frac{1}{v} \varphi(\nu, v) S_0(\nu, v) dv. \quad (4.2.9)$$

Lemme 4.2.3. *Under the assumption that g is a C^1 radial kernel and that $\mu_1(\partial_1 g_M) < +\infty$ and $\mu_2(\partial_1 g_M) < +\infty$, we get*

$$\int_0^\infty \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv = \lambda \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} |m \partial_1 g(x)| e^{i\nu m g(x)} F(dm) dx.$$

Démonstration. We follow the proof of Proposition 2 in [BD20]. Let $V > 0$ and recall that for $y \in \mathbb{R}$ we have

$$\int_0^\infty \frac{\sin(vy)}{v} dv := \lim_{V \rightarrow +\infty} \int_0^V \frac{\sin(vy)}{v} dv = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(y),$$

and $C := \sup_{V > 0} \left| \int_0^V \frac{\sin(v)}{v} dv \right| < +\infty$. Hence we obtain that for a.e $x \in \mathbb{R}^2$ and F a.e. $m \in \mathbb{R}$,

$$m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \int_0^V \frac{\sin(v m \partial_1 g(x))}{v} dv \xrightarrow{V \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} |m \partial_1 g(x)| e^{i\nu m g(x)}.$$

But for all $V > 0$

$$\left| m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \int_0^V \frac{\sin(v m \partial_1 g(x))}{v} dv \right| \leq C |m \partial_1 g(x)|,$$

with

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} |m \partial_1 g(x)| F(dm) dx < +\infty.$$

By Lebesgue's theorem we can conclude that

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \int_0^V \frac{\sin(v m \partial_1 g(x))}{v} dv F(dm) dx \\ = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} |m \partial_1 g(x)| e^{i\nu m g(x)} F(dm) dx. \end{aligned}$$

Now it remains to justify that for all $V > 0$,

$$\int_0^V \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \int_0^V \frac{\sin(vm \partial_1 g(x))}{v} dv F(dm) dx.$$

But it simply follows from Fubini's theorem once remarked that

$$\left| m \partial_1 g(x) e^{i\nu m g(x)} \frac{\sin(vm \partial_1 g(x))}{v} \right| \leq |m \partial_1 g(x)|^2.$$

□

4.2.4 Asymptotics for high and small λ

In this section we investigate asymptotics of the level perimeter function of shot noise random fields with respect to λ . In the sequel we denote X_λ the shot noise field X given by (4.1.1) for an homogeneous Poisson point process of intensity $\lambda > 0$. We assume that g is a C^2 radial kernel such that $\mu_1(D^j g_M) < +\infty$ and $\mu_2(D^j g_M) < +\infty$ for all $|j| \leq 2$.

Since $\mu_2(g_M) < +\infty$, we let B_λ be a stationary Gaussian field with the same second order statistics than X_λ meaning that for all $y, y' \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{E}(B_\lambda(y)) = \mathbb{E}(X_\lambda(y)) = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} g_m(-x) dx F(dm) = \lambda \mathbb{E}(M) \int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx,$$

and

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_\lambda(y), B_\lambda(y')) &= \text{Cov}(X_\lambda(y), X_\lambda(y')) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} g_m(y-x) g_m(y'-x) F(dm) dx \\ &= \lambda \mathbb{E}(M^2) \int_{\mathbb{R}^2} g(x) g(x - (y - y')) dx, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

using Campbell's Theorem [Kin67] or [CSKM13].

Under our assumptions, up to choose a modification, we can assume that both B_λ and X_λ are a.s. C^1 . It follows that $\partial_1 B_\lambda$ and $\partial_1 X_\lambda$ are centered, stationary and

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\partial_1 B_\lambda(y), \partial_1 B_\lambda(y')) &= \text{Cov}(\partial_1 X_\lambda(y), \partial_1 X_\lambda(y')) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 g_m(y-x) \partial_1 g_m(y'-x) F(dm) dx \\ &= \lambda \mathbb{E}(M^2) \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 g(x) \partial_1 g(x - (y - y')) dx, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Moreover, writing $B(y) = \frac{B_\lambda(y) - \mathbb{E}(B_\lambda(y))}{\sqrt{\lambda}}$, and $Z_\lambda(y) = \frac{X_\lambda(y) - \mathbb{E}(X_\lambda(y))}{\sqrt{\lambda}}$, as $\lambda \rightarrow +\infty$, we obtain as in [HS85],

$$(Z_\lambda(y), \partial_1 Z_\lambda(y)) \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{d} (B(y), \partial_1 B(y)).$$

Note that this asymptotic normality for high intensity can be strenghen with an invariance principle and even a coupling between Z_λ and B for a strong invariance principle as

in [LM21]. Hence it is not surprising to observe a Gaussian behavior for geometry of excursion sets in high intensity. This is the object of our first result, which proof is postponed to Appendix 4.6.1.

Théorème 4.2.4 (High regime). *Let us assume that g is a C^2 radial kernel and that $\mu_p(D^{\mathbf{j}}g_M) < +\infty$ for all $|\mathbf{j}| \leq 2$ and $1 \leq p \leq 4$. Then, there exists C_0^+ , C_1^+ and C_2^+ positive constants such that for $|\nu| \leq C_0^+$*

$$\begin{aligned} |\overline{LP_{X_\lambda}}(h_\nu) - \overline{LP_{B_\lambda}}(h_\nu)| &= \left| \overline{LP_{X_\lambda}}(h_\nu) - \sqrt{\lambda} \varphi_{B_\lambda}(\nu) \sqrt{\frac{\pi}{2} \mu_2(\partial_1 g_M)} \right| \\ &\leq C_1^+ + (1 - \delta_0(\nu)) C_2^+, \end{aligned}$$

where

$$\varphi_{B_\lambda}(\nu) = \exp \left[i\nu \lambda \mathbb{E}(M) \int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx - \frac{\lambda \mu_2(g_M) \nu^2}{2} \right],$$

$\delta_0(\nu) = 1$ if $\nu = 0$ and $\delta_0(\nu) = 0$ otherwise and

$$\begin{aligned} C_0^+ &\leq \frac{1}{6} \min \left(\left(\frac{\mu_4(g_M)}{\mu_2(g_M)} \right)^{1/2}, \frac{5\mu_2(\partial_1 g_M)}{\mu_4(g_M)^{1/2} \mu_4(\partial_1 g_M)^{1/2}} \right) \\ C_1^+ &\leq 10 \left(\frac{\mu_4(\partial_1 g_M)}{\mu_2(\partial_1 g_M)} \right)^{1/2} \\ C_2^+ &\leq \sqrt{\pi} \left(\frac{3\mu_4(g_M)^{1/2} \mu_2(\partial_1 g_M)^{1/2}}{\mu_2(g_M)} + \left(\frac{\mu_4(\partial_1 g_M)}{\mu_2(\partial_1 g_M)} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Observe the interest of the result since $\forall \nu \in \mathbb{R}$ the two quantities $\overline{LP_{X_\lambda}}(h_\nu)$ and $\overline{LP_{B_\lambda}}(h_\nu)$ tend to infinity when $\lambda \rightarrow \infty$. Note also that, using

$$\overline{LP_{Z_\lambda}}(h_\nu) = \frac{e^{-i\nu \mathbb{E}(X_\lambda(x))/\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} \overline{LP_{X_\lambda}}(h_{\nu/\sqrt{\lambda}}) \text{ and } \overline{LP_B}(h_\nu) = \frac{e^{-i\nu \mathbb{E}(X_\lambda(x))/\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} \overline{LP_{B_\lambda}}(h_{\nu/\sqrt{\lambda}}),$$

our result extends Theorem 4 of [BD16] for the normalized shot noise field : for any $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\overline{LP_{Z_\lambda}}(h_\nu) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \overline{LP_B}(h_\nu).$$

This implies the following weak convergence for $u \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\text{Per}(E_{X_\lambda}(\mathbb{E}(X_\lambda(x)) + u\sqrt{\lambda}))} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \overline{\text{Per}(E_B(u))},$$

as well as (taking $\nu = 0$)

$$\frac{\overline{\text{TV}(X_\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \overline{\text{TV}(B)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \mu_2(\partial_1 g_M)}.$$

But Theorem 4.2.4 actually gives a rate for convergence, following ideas in [BD12a], since

$$\left| \frac{\overline{\text{TV}(X_\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\frac{\pi}{2} \mu_2(\partial_1 g_M)} \right| = \left| \frac{\overline{\text{TV}(X_\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\overline{\text{TV}(B_\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{C_1^+}{\sqrt{\lambda}}.$$

More surprisingly we observe an other behavior for small values of λ . This is the object of the following theorem which proof is also postponed to Appendix Section 4.6.2.

Théorème 4.2.5 (Low regime). *Let us assume that g is a C^2 radial kernel and that $\mu_p(D^{\mathbf{j}}g_M) < +\infty$ for all $|\mathbf{j}| \leq 2$ and $1 \leq p \leq 2$. Assume moreover that there exists $\beta \in (0, 1)$ such that $\mu_\beta(\partial_1 g_M) < +\infty$, then, for $C_0^- > 0$ and $\lambda \leq C_0^-$, there exists $C_1^- > 0$ such that*

$$\left| \overline{LP_{X_\lambda}(h_\nu)} - \lambda \varphi_{X_\lambda}(\nu) \int_{\mathbb{R}} LP_{g_m}(h_\nu, \mathbb{R}^2) F(dm) \right| \leq C_1^- \lambda^{\frac{2}{1+\beta}},$$

with

$$\varphi_{X_\lambda}(\nu) = \exp \left(\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} [e^{i\nu g_m(x)} - 1] F(dm) dx \right),$$

$$LP_{g_m}(h_\nu, \mathbb{R}^2) := \int_{\mathbb{R}} h_\nu(u) \text{Per}(E_{g_m}(u), \mathbb{R}^2) du = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 g_m(x)| e^{i\nu g_m(x)} dx,$$

and

$$C_1^- \leq \beta^{-1} C_\beta^- \mu_1(\partial_1 g_M) \exp(C_\beta^- C_0^{-\frac{1-\beta}{1+\beta}}) + 2 + 2C_\beta^- C_0^{-\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \text{ for } C_\beta^- = 2^{1-\beta} \mu_\beta(\partial_1 g_M).$$

A particular consequence of this result is that, in view of Lemma 4.2.3, taking $\nu = 0$ we get

$$\left| \frac{\overline{\text{TV}(X_\lambda)}}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \mu_1(\partial_1 g_M) \right| \leq C_1^- \lambda^{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

and therefore

$$\frac{\overline{\text{TV}(X_\lambda)}}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \mu_1(\partial_1 g_M).$$

The next section is devoted to a special kernel g for which we will be able to identify this limit.

4.3 Gaussian shot noise random field and previous results

From now on, we consider for $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$, the Gaussian shot noise random field with exponential marks defined by

$$X_{\lambda, \mu, \sigma}(x) = \sum_i g_{m_i, \sigma}(x - x_i), \quad (4.3.1)$$

with $(x_i)_i$ an homogeneous Poisson point process of intensity λ in \mathbb{R}^2 , the $(m_i)_i$ are independent marks of exponential law of parameter μ and $g_{m, \sigma} = m g_\sigma$ with the Gaussian density g_σ

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.3.2)$$

Let us emphasize that, g_σ is of course a radial C^∞ kernel and moreover, if M denotes a random variable with exponential law of parameter μ whose distribution is denoted by F , then for any $p > 0$

$$\mu_p(g_{M, \sigma}) = \mathbb{E}(M^p) \frac{1}{p(2\pi\sigma^2)^{p-1}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\mu^p} \frac{1}{p(2\pi\sigma^2)^{p-1}} = \frac{\Gamma(p+1)}{p(2\pi)^{p-1}} \frac{\sigma^{2-2p}}{\mu^p},$$

while

$$\begin{aligned}
\mu_p(\partial_1 g_{M,\sigma}) &= \mathbb{E}(M^p) \frac{1}{(2\pi\sigma^4)^p} \left(\int_{\mathbb{R}} |x_1|^p e^{-\frac{px_1^2}{2\sigma^2}} dx_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{px_2^2}{2\sigma^2}} dx_2 \right) \\
&= \mathbb{E}(M^p) \frac{1}{(2\pi\sigma^4)^p} \times \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \left(\frac{2\sigma^2}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}} \times \sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{p}} \\
&= \frac{2^{1-p/2} \Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \sigma^{2-3p}}{p^{1+p/2} \pi^{p-1/2} \mu^p}.
\end{aligned}$$

Hence, the model satisfies all the assumptions of the previous section. Moreover, in [BD20], the characteristic function of $(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x), \partial_1 X_{\lambda,\mu,\sigma}(x))$ is explicitly given for $(\nu, v) \in \mathbb{R}^2$ by

$$\begin{aligned}
\varphi(\nu, v) &= \mathbb{E}[e^{i\nu X_{\lambda,\mu,\sigma}(x) + iv \partial_1 X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)}] \\
&= \exp\left(\lambda \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{ir(\nu\sigma^2 - vr \cos(\theta)) e^{-r^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^4\mu - i(\nu\sigma^2 - vr \cos(\theta)) e^{-r^2/2\sigma^2}} d\theta dr\right) \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

and in particular, taking $v = 0$, this shows that $X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)$ follows a Gamma law of parameters $2\pi\mu\sigma^2$ and $2\pi\lambda\sigma^2$. As a consequence we simply have $\mathbb{E}(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)) = \frac{\lambda}{\mu}$ and $\text{Var}(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)) = \lambda\mu_2(g_{M,\sigma})$ with $\mu_2(g_{M,\sigma}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\mu^2}$. We can also simply compute the covariance function in (4.2.10), that remains a Gaussian function, namely

$$\text{Cov}(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x), X_{\lambda,\mu,\sigma}(y)) = \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2\mu^2} \exp\left(\frac{-\|x-y\|^2}{4\sigma^2}\right).$$

Finally, in view of Equation (4.2.9), we have also

$$S_0(\nu, v) = i\lambda \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\sigma^4\mu r^2 \cos(\theta) e^{-r^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^4\mu - i(\nu\sigma^2 - vr \cos(\theta)) e^{-r^2/2\sigma^2})^2} d\theta dr \quad (4.3.4)$$

So we can numerically approach $\nu \rightarrow \overline{\text{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu)$ and a Fourier inversion allows us to obtain the desired function $u \rightarrow \overline{\text{Per}}(E_X(u))$. We refer to Appendix Section 4.6.3 for algorithm and illustration.

The model satisfies several invariances as stated in the next proposition.

Proposition 4.3.1. *Let $\kappa > 0$ and $k > 0$. Then we have*

$$\{(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x), \partial_1 X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)) \mid x \in \mathbb{R}^2\} \stackrel{fdd}{=} \left\{ \left(X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}}\left(\frac{x}{k}\right), \frac{1}{k} \partial_1 X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}}\left(\frac{x}{k}\right) \right) \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

and

$$\{(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x), \partial_1 X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)) \mid x \in \mathbb{R}^2\} \stackrel{fdd}{=} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(X_{\lambda, \frac{\mu}{\kappa}, \sigma}(x), \partial_1 X_{\lambda, \frac{\mu}{\kappa}, \sigma}(x) \right) \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Démonstration. Let $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ and $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{n,1}, u_{n,2} \in \mathbb{R}$. For $x \in \mathbb{R}^2$ we note $x^{(1)}$ and $x^{(2)}$ its spatial coordinates. By Campbell's Theorem [Kin67] we have that

$$\begin{aligned}
& -\log \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{l=1}^n u_{l,1} X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}} \left(\frac{x_l}{k} \right) + \frac{u_{l,2}}{k} \partial_1 X_{\lambda k^2, \mu k^2, \frac{\sigma}{k}} \left(\frac{x_l}{k} \right) \right) \right] \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} \left[1 - \exp \left(i \sum_{l=1}^n \frac{u_{l,1} m k^2}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{k^2 \|\frac{x_l}{k} - c\|^2}{2\sigma^2}} + \frac{u_{l,2} m k^4 x_l^{(1)}}{2\pi k^2 \sigma^4} e^{-\frac{k^2 \|\frac{x_l}{k} - c\|^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \lambda k^2 \mu k^2 e^{-\mu k^2 m} dm dc \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} \left[1 - \exp \left(i \sum_{l=1}^n \frac{u_{l,1} m'}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|x_l - c'\|^2}{2\sigma^2}} + \frac{u_{l,2} m' x_l^{(1)}}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|x_l - c'\|^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \lambda \mu e^{-\mu m'} dm' dc' \\
&= -\log \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{l=1}^n u_{l,1} X_{\lambda, \mu, \sigma}(x_l) + u_{l,2} \partial_1 X_{\lambda, \mu, \sigma}(x_l) \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

using the change of variables $c' = kc$ et $m' = k^2m$, which proves the first equality. The same arguments allow us to check the second equality, observing that

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} \left[1 - \exp \left(i \sum_{l=1}^n \frac{u_{l,1} m}{2\pi\kappa\sigma^2} e^{-\frac{\|x_l - c\|^2}{2\sigma^2}} + \frac{u_{l,2} m x_l^{(1)}}{2\pi\kappa\sigma^4} e^{-\frac{\|x_l - c\|^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \lambda \frac{\mu}{\kappa} e^{-\frac{\mu m}{\kappa}} dm dc \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}_+} \left[1 - \exp \left(i \sum_{l=1}^n \frac{u_{l,1} m'}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|x_l - c\|^2}{2\sigma^2}} + \frac{u_{l,2} m' x_l^{(1)}}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{\|x_l - c\|^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \lambda \mu e^{-\mu m'} dm' dc
\end{aligned}$$

using $m' = \frac{m}{\kappa}$. \square

Note that introducing the Gaussian random field $B_{\lambda, \mu, \sigma}$ sharing the same second order statistics than $X_{\lambda, \mu, \sigma}$, it will also verify the previous invariances. Moreover, since $\mu_1(g_{M, \sigma}) = \frac{1}{\mu}$, $\mu_2(g_{M, \sigma}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\mu^2}$ and $\mu_2(\partial_1 g_{M, \sigma}) = \frac{1}{4\pi\sigma^4\mu^2}$, we can compute by (4.2.6)

$$\overline{\text{LP}}_{B_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu) = \frac{1}{2\sigma^2\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{\lambda}{\mu}\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2} \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2\mu^2}\right).$$

and we can restate Theorem 4.2.4 in terms of resolution σ .

Proposition 4.3.2. *There exist $c_0(\mu), c_1(\mu) > 0$ such that for $|\nu| \leq \sigma c_0(\mu)$, one has*

$$\left| \overline{\text{LP}}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu) - \overline{\text{LP}}_{B_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu) \right| \leq \frac{c_1(\mu)}{\sigma^3}.$$

Démonstration. Using Proposition 4.3.1 and (4.2.3), it follows that

$$\overline{\text{LP}}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu) = \frac{1}{\sigma} \overline{\text{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2, \mu\sigma^2, 1}}(h_\nu) = \frac{1}{\sigma^3} \overline{\text{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2, \mu, 1}}(h_{\nu/\sigma}),$$

and similarly for the Gaussian field. We can take $c_0(\mu) = C_0^+$ and $c_1(\mu) = C_1^+ + C_2^+$ for $M \sim \mathcal{E}(\mu)$ and $\sigma = 1$, according to Theorem 4.2.4, to get for $|\nu/\sigma| \leq c_0(\mu)$

$$\left| \overline{\text{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2, \mu, 1}}(h_{\nu/\sigma}) - \overline{\text{LP}}_{B_{\lambda\sigma^2, \mu, 1}}(h_{\nu/\sigma}) \right| \leq c_1(\mu),$$

that gives the result. \square

Theorem 4.2.4 tells us that for $\mu > 0$ and $\sigma > 0$ fixed, we have that $\overline{\text{LP}}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu)$ is close to $\overline{\text{LP}}_{B_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu)$ and grows in high intensity. The previous proposition allows us to interpret this result in high resolution. For $\lambda > 0$ and $\mu > 0$ fixed, we have that $\overline{\text{LP}}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu)$ is close to $\overline{\text{LP}}_{B_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu)$, decreases in high resolution ($\sigma \rightarrow \infty$) and the difference between it tends to 0 faster (in $1/\sigma^3$) than their decreases (in $1/\sigma^2$).

4.4 Elementary approximation

4.4.1 The elementary Gaussian function

The idea of this paper is to discretize the Gaussian kernel to use the other framework of elementary functions in the sense of [BD20]. To take into account that the range of g_σ depends of σ , we write $k_\sigma(x) = e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}$. The range of k_σ is now $(0, 1]$, independently from parameters.

For $n \geq 1$ we denote the elementary Gaussian function by

$$k_\sigma^{(n-1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{B(0, r_i^{(n)})}(x),$$

for $r_i^{(n)} = \sigma \sqrt{-2 \log(i/n)}$ in such a way that $(r_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n-1}$ is strictly decreasing with $r_n^{(n)} = 0$ and that when $x \in B(0, r_i^{(n)}) \setminus B(0, r_{i+1}^{(n)})$ one has $\frac{i}{n} \leq k_\sigma(x) < \frac{i+1}{n}$ and $k_\sigma^{(n)}(x) = i/n$ such that

$$\|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_\infty = 1/n.$$

The function $k_\sigma^{(n)}$ is an elementary function with discontinuity points given by its regular points

$$\mathcal{R}_{k_\sigma^{(n)}} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \partial B(0, r_i^{(n)}),$$

meaning that it is piecewise constant with a regular discontinuity set (see Definition 5 in [BD20]). It also implies that $k_\sigma^{(n)}$ is a special bounded variation function [AFP00]. An illustration is given in Figure 4.4.1.

As a discretization of the Gaussian kernel we have the following asymptotics in the Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^2)$ spaces for $p > 0$.

Lemme 4.4.1. *Let $\sigma > 0$. Then for all $p > 0$, we have*

$$\|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

where $\|\cdot\|_p$ is the classical norm ($p > 1$) or quasi-norm ($0 < p < 1$) in $L^p(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. Let $\sigma > 0$ and $n \in \mathbb{N}$. Since $k_\sigma \geq k_\sigma^{(n)}$ we have

$$\begin{aligned} \|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^2} (k_\sigma(x) - k_\sigma^{(n)}(x))^p dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{B(0, r_i^{(n)}) \setminus B(0, r_{i+1}^{(n)})} (k_\sigma(x) - k_\sigma^{(n)}(x))^p dx + \int_{B(0, r_1^{(n)})^c} k_\sigma(x)^p dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^p} \mathcal{L} \left(B(0, r_i^{(n)}) \setminus B(0, r_{i+1}^{(n)}) \right) + \int_{B(0, r_1^{(n)})^c} k_\sigma(x)^p dx. \end{aligned}$$

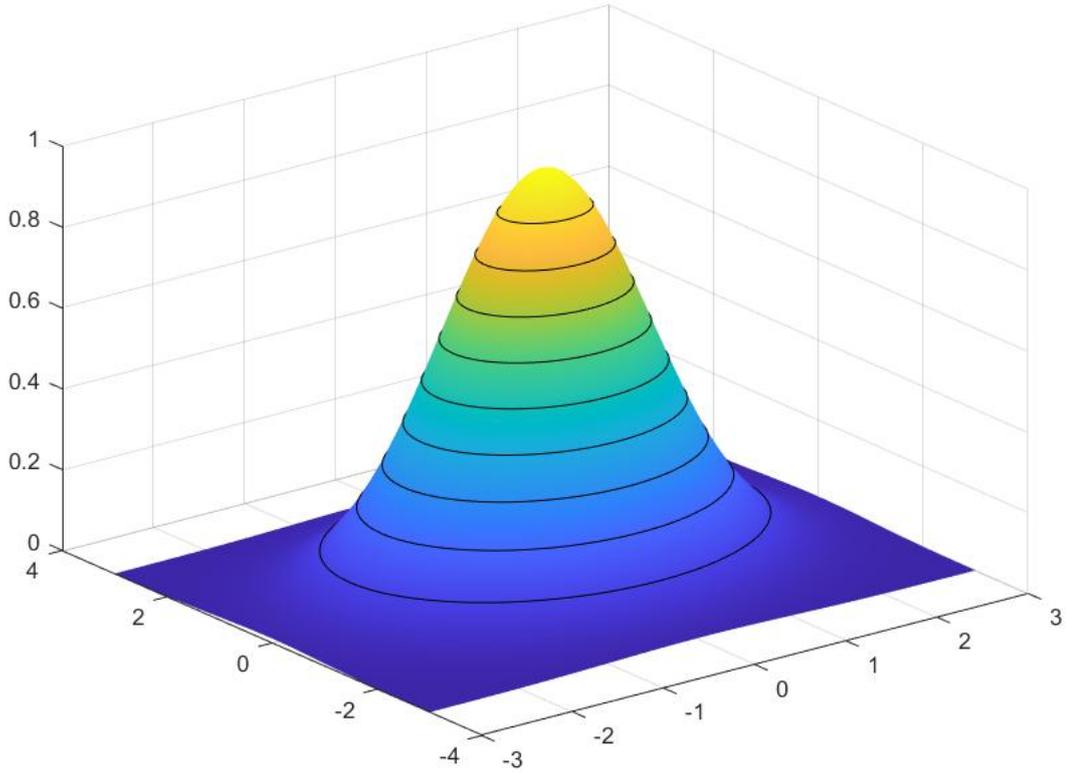


FIGURE 4.4.1 – Elementary approximation of a Gaussian function

But for all $1 \leq i \leq n - 1$ we have

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left(B(0, r_i^{(n)}) \setminus B(0, r_{i+1}^{(n)})\right) &= \left(\pi(r_i^{(n)})^2 - \pi(r_{i+1}^{(n)})^2\right) \\
 &= \pi\sigma^2 \left(-2 \ln\left(\frac{i}{n}\right) + 2 \ln\left(\frac{i+1}{n}\right)\right) \\
 &= 2\pi\sigma^2 (\ln(i+1) - \ln(i)).
 \end{aligned}$$

Therefore

$$\|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_p^p \leq \frac{2\pi\sigma^2}{n^p} \ln(n) + \int_{B(0, r_1^{(n)})^c} k_\sigma(x)^p dx.$$

Since $p > 0$ and $r_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ we get $\|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Now let us remark that both k_σ and $k_\sigma^{(n)}$ are functions of $\text{SBV}(\mathbb{R}^2)$, the space of special functions of bounded variation as defined in [AFP00] with total variation given by

$$\text{TV}(k_\sigma, \mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla k_\sigma(x)\| dx$$

and

$$\mathrm{TV}(k_\sigma^{(n)}, \mathbb{R}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \mathcal{H}^1(B(0, r_i^{(n)})) = \frac{2\pi\sigma}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{-2 \ln \left(\frac{i}{n} \right)}.$$

Then we can introduce the level perimeter integrals $\mathrm{LP}_{k_\sigma}(\cdot, \mathbb{R}^2)$ and $\mathrm{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(\cdot, \mathbb{R}^2)$ that define continuous linear form on $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 4.4.2. *Let $\sigma > 0$. Then $\mathrm{TV}(k_\sigma, \mathbb{R}^2) = \pi\sqrt{2\pi}\sigma$ and for all $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{TV}(k_\sigma^{(n)}, \mathbb{R}^2) \leq \mathrm{TV}(k_\sigma, \mathbb{R}^2).$$

Moreover, for any $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, one has

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathrm{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2),$$

where

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) = \int_0^1 h(s) 2\pi\sigma \sqrt{-2 \log(s)} ds.$$

Démonstration. We use the general co-area formula obtained in Theorem 1 of [BD16]. Let $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. It follows that on the one hand,

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) := \int_{\mathbb{R}} h(u) \mathrm{Per}(E_{k_\sigma}(u), \mathbb{R}^2) du = \int_{\mathbb{R}^2} h(k_\sigma(x)) \|\nabla k_\sigma(x)\| dx,$$

from which we can compute by a change of variables in polar coordinates that

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) = 2\pi \int_0^{+\infty} h\left(e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right) \frac{r^2}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr. \quad (4.4.1)$$

Therefore, with the change of variables $s = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ we get

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) = \int_0^1 h(s) 2\pi\sigma \sqrt{-2 \log(s)} ds.$$

Note that we could also just remark that $E_{k_\sigma}(u) = B(0, \sigma\sqrt{-2 \ln(u)})$ and $\mathrm{Per}(E_{k_\sigma}(u), \mathbb{R}^2) = 2\pi\sigma\sqrt{-2 \ln(u)}$, for any $u \in (0, 1]$. From (4.4.1) we obtain for $h = 1$ that $\mathrm{TV}(k_\sigma, \mathbb{R}^2) = \pi\sqrt{2\pi}\sigma$.

On the other hand for any $n \geq 1$,

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) := \int_{\mathbb{R}} h(u) \mathrm{Per}(E_{k_\sigma^{(n)}}(u), \mathbb{R}^2) du = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\partial B(0, r_i^{(n)})} \int_{(i-1)/n}^{i/n} h(s) ds \mathcal{H}^1(dx).$$

Therefore,

$$\mathrm{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi r_i^{(n)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} h(s) ds.$$

Let us note $f(s) = \sqrt{-2 \log(s)}$. This function is well defined on $]0, 1]$, non-negative and strictly decreasing. Moreover we have for all $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{1/n} f(s) ds = \frac{\sqrt{2 \log(n)}}{n} + \int_{\sqrt{2 \log(n)}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \leq \frac{\sqrt{2 \log(n)}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{2 \log(n)}},$$

using the inequalities on the tail distribution of the Gaussian (see p175 of [Fel57]). So we have

$$\begin{aligned} & \left| \text{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) - \text{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) \right| \\ &= \left| \int_0^1 h(s) 2\pi\sigma \sqrt{-2\log(s)} ds - \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi\sigma \sqrt{-2\log(i/n)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} h(s) ds \right| \\ &\leq 2\pi\sigma \|h\|_\infty (A_n + B_n + C_n) \end{aligned}$$

with

$$A_n = \int_0^{1/n} \left| \sqrt{-2\log(s)} - \sqrt{-2\log(1/n)} \right| ds \leq \int_0^{1/n} \sqrt{-2\log(s)} ds \leq 2 \frac{\sqrt{2\log(n)}}{n},$$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{i=2}^{n-1} \int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} \left| \sqrt{-2\log(s)} - \sqrt{-2\log(i/n)} \right| ds \\ &\leq \sum_{i=2}^{n-1} \int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} \left| \sqrt{-2\log\left(\frac{i-1}{n}\right)} - \sqrt{-2\log(i/n)} \right| ds \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} \left| \sqrt{-2\log\left(\frac{i-1}{n}\right)} - \sqrt{-2\log(i/n)} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left(\sqrt{-2\log(1/n)} - \sqrt{-2\log\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right), \end{aligned}$$

and

$$C_n = \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left| \sqrt{-2\log(s)} \right| ds \leq \frac{1}{n} \sqrt{-2\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}.$$

Hence,

$$\left| \text{LP}_{k_\sigma}(h, \mathbb{R}^2) - \text{LP}_{k_\sigma^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) \right| \leq 2\pi\sigma \|h\|_\infty \left(\frac{3\sqrt{2\log(n)}}{n} + \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Finally, the uniform upper bound for $\text{TV}(k_\sigma^{(n)}, \mathbb{R}^2)$ can be deduced by taking $h = 1$ or by remarking that, for all $u \in \mathbb{R}$,

$$\text{Per}(E_{k_\sigma^{(n)}}(u), \mathbb{R}^2) \leq \text{Per}(E_{k_\sigma}(u), \mathbb{R}^2).$$

□

Let us conclude this part by remarking that for $k_{m,\sigma} = mk_\sigma$ we have for any level $u \in \mathbb{R}$,

$$\text{Per}(E_{k_{m,\sigma}}(u), \mathbb{R}^2) = \text{Per}\left(E_{k_\sigma}\left(\frac{u}{m}\right), \mathbb{R}^2\right).$$

Defining similarly for $n \in \mathbb{N}$ and $m > 0$,

$$k_{m,\sigma}^{(n)} = mk_\sigma^{(n)}, \tag{4.4.2}$$

we can state the following corollary.

Corollary 4.4.3. *Let $\sigma > 0$ and $m > 0$. Then $TV(k_{m,\sigma}, \mathbb{R}^2) = m TV(k_\sigma, \mathbb{R}^2) = m\pi\sqrt{2\pi}\sigma$ and for all $n \geq 1$,*

$$TV(k_{m,\sigma}^{(n)}, \mathbb{R}^2) \leq TV(k_{m,\sigma}, \mathbb{R}^2).$$

Moreover, for any $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, one has

$$LP_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} LP_{k_{m,\sigma}}(h, \mathbb{R}^2),$$

where

$$LP_{k_{m,\sigma}}(h, \mathbb{R}^2) = \int_0^1 mh(ms)2\pi\sigma\sqrt{-2\log(s)}ds.$$

Démonstration. It simply follows from the fact that for $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} LP_{k_{m,\sigma}}(h, \mathbb{R}^2) &= \int_{\mathbb{R}} h(u)\text{Per}(E_{k_{m,\sigma}}(u), \mathbb{R}^2)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)\text{Per}(E_{k_\sigma}(u/m), \mathbb{R}^2)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} mh(mv)\text{Per}(E_{k_\sigma}(v), \mathbb{R}^2)dv, \end{aligned}$$

by the change of variable $v = u/m$. Hence, denoting $[h]_m := mh(m\cdot)$ we get $LP_{k_{m,\sigma}}(h, \mathbb{R}^2) = LP_{k_\sigma}([h]_m, \mathbb{R}^2)$ and similarly $LP_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(h, \mathbb{R}^2) = LP_{k_\sigma^{(n)}}([h]_m, \mathbb{R}^2)$. \square

4.4.2 The elementary Gaussian shot noise random field

Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$ and $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ be a Gaussian shot noise random field defined by (4.3.1) and note that

$$X_{\lambda,\mu,\sigma}(x) = \sum_i \frac{m_i}{2\pi\sigma^2} k_\sigma(x - x_i),$$

with marks $\{\frac{m_i}{2\pi\sigma^2}\}$ with distribution $\mathcal{E}(2\pi\sigma^2\mu)$ denoted as F_σ .

Proposition 4.4.4. *Let $n \geq 1$ and $\sigma > 0$. For $\lambda, \mu > 0$ and $\{x_i\}_{i \in I}$ an homogeneous Poisson point process of intensity λ on \mathbb{R}^2 independently marked with $\{m_i\}_{i \in I}$ of exponential distribution F_σ of parameter $2\pi\sigma^2\mu$, the random field*

$$X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(x) := \sum_i m_i k_\sigma^{(n)}(x - x_i), \quad (4.4.3)$$

is an elementary field on any open bounded $T \subset \mathbb{R}^2$, in the sense of [BD20]. Moreover for all $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ one has

$$\overline{LP_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}}}(h) = \lambda \int_{\mathbb{R}} LP_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}}(0), \mathbb{R}^2)F_\sigma(dm),$$

where $\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}}(0)(s) = \mathbb{E}[h(X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0) + s)]$ for $s \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Let us check assumptions of Theorem 5 of [BD20]. Note that $k_{m,\sigma}^{(n)} = mk_\sigma^{(n)}$ is an elementary function with compact support in $B(0, r_1^{(n)})$ satisfying

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |k_{m,\sigma}^{(n)}(x)| dx F_\sigma(dm) < +\infty,$$

since $\int_{\mathbb{R}} |m| F_\sigma(dm) < +\infty$. Moreover, by Corollary 4.4.3

$$\int_{\mathbb{R}} \text{TV}(k_{m,\sigma}^{(n)}) F_\sigma(dm) \leq \int_{\mathbb{R}} \text{TV}(k_{m,\sigma}) F_\sigma(dm) = \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla k_\sigma(x)\| dx \times \int_{\mathbb{R}} |m| F_\sigma(dm) < +\infty,$$

and, using (16) in Proposition 4,

$$\int_{\mathbb{R}} \text{LTaC}(k_{m,\sigma}^{(n)}) F_\sigma(dm) \leq 2\pi \times \int_{\mathbb{R}} |m| F_\sigma(dm) < +\infty,$$

that finishes to prove (21). Equation (22) simply follows from the fact that the supports do not depend on m and again that $\int_{\mathbb{R}} |m| F_\sigma(dm)$. Now, let us note that all discontinuity points are regular points, ensuring (24) while (25) comes from the fact that

$$\mathcal{H}^0 \left(\mathcal{R}_{k_{m',\sigma}^{(n)}} \cap \tau_x \mathcal{R}_{k_{m,\sigma}^{(n)}} \right) \leq 2(n-1)^2 \mathbf{1}_{\|x\| \leq 2r_1^{(n)}}. \quad (4.4.4)$$

The last point (26) is obtained remarking that for almost all $x \in \mathbb{R}^2$ the regular sets can not intersect in a tangency position. This allows to obtain the fact that $X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}$ is an elementary field in T according to Theorem 4 of [BD20]. To conclude it only remains to check (31) of Theorem 5, that follows from (4.4.4). \square

We couple this elementary field with our smooth shot noise field by setting

$$X_{\lambda,\mu,\sigma}(x) := \sum_i m_i k_\sigma(x - x_i), \quad (4.4.5)$$

with the same marked Poisson point process with marks of distribution $\mathcal{E}(2\pi\sigma^2\mu)$.

Proposition 4.4.5. *Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}$ given by (4.4.3) and $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ defined by (4.4.5). Then, $X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(x)$ converges towards $X_{\lambda,\mu,\sigma}(x)$ in $L^2(\Omega)$ (and therefore also in $L^1(\Omega)$), for all $x \in \mathbb{R}^2$.*

Démonstration. By stationarity we can consider $x = 0$. It follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{\lambda,\mu,\sigma}(0) - X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)|^2] &= \text{Var} \left(X_{\lambda,\mu,\sigma}(0) - X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0) \right) + \mathbb{E} \left(X_{\lambda,\mu,\sigma}(0) - X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0) \right)^2 \\ &= \lambda \mathbb{E}[M_\sigma^2] \|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_2^2 + \lambda^2 \mathbb{E}[M_\sigma^2] \|k_\sigma - k_\sigma^{(n)}\|_1^2, \end{aligned}$$

which tends to 0, according to Lemma 4.4.1. Here we introduce M_σ a random variable of distribution $\mathcal{E}(2\pi\sigma^2\mu)$. \square

Théorème 4.4.6. *Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}$ given by (4.4.3) and $X_{\lambda, \mu, \sigma}$ defined by (4.4.5). For $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ and Lipschitz on \mathbb{R} , we have*

$$\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}}}(h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}}}(h) := \lambda \int_{\mathbb{R}} LP_{k_m, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) F_{\sigma}(dm) \quad (4.4.6)$$

where $\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}(s) = \mathbb{E}[h(X_{\lambda, \mu, \sigma}(0) + s)]$ for $s \in \mathbb{R}$ and F_{σ} is the exponential distribution of parameter $2\pi\sigma^2\mu$.

Démonstration. According to Proposition 4.4.4, we know that

$$\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}}}(h) = \lambda \int_{\mathbb{R}} LP_{k_m^{(n)}, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}, \mathbb{R}^2) F_{\sigma}(dm) \quad (4.4.7)$$

where $\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}(s) = \mathbb{E}[h(X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0) + s)]$ for $s \in \mathbb{R}$.

Lemme 4.4.7. *Let $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ and Lipschitz with Lipschitz constant $\text{Lip}(h)$. Then, for all $n \geq 1$, we also have $\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ and Lipschitz with $\|\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty}$ and $\text{Lip}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}) \leq \text{Lip}(h)$.*

Démonstration. Let $n \geq 1$. It is clear that for $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, the function $\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}$ remains bounded and moreover, for all $s \in \mathbb{R}$,

$$|\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}(s)| \leq \mathbb{E} \left[|h(X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0) + s)| \right] \leq \|h\|_{\infty}.$$

Moreover, for $s, t \in \mathbb{R}$ we have

$$\begin{aligned} \left| \bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}(s) - \bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}(t) \right| &\leq \mathbb{E} \left[|h(X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0) + s) - h(X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0) + t)| \right] \\ &\leq \mathbb{E} [\text{Lip}(h)|s - t|] \\ &= \text{Lip}(h)|s - t|, \end{aligned}$$

that concludes the proof. □

Now we write for $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ and Lipschitz,

$$\begin{aligned} &\left| LP_{k_m^{(n)}, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)}, \mathbb{R}^2) - LP_{k_m, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| \\ &\leq \left| LP_{k_m^{(n)}, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| + \left| LP_{k_m^{(n)}, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) - LP_{k_m, \sigma}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Let $\epsilon > 0$. By Proposition 4.4.5, there exists $N_{\epsilon} \in \mathbb{N}$ such that $\forall n \geq N_{\epsilon}$ we have

$$\mathbb{E} \left[|X_{\lambda, \mu, \sigma}(0) - X_{\lambda, \mu, \sigma}^{(n)}(0)| \right] \leq \frac{\epsilon}{1 + \text{Lip}(h)}.$$

Let $n \geq N_\epsilon$, then for all $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)}(u) - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}(u)| &\leq \mathbb{E} \left[\left| h(X_{\lambda,\mu,\sigma}(0) + u) - h(X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0) + u) \right| \right] \\ &\leq \text{Lip}(h) \mathbb{E} \left[\left| X_{\lambda,\mu,\sigma}(0) - X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0) \right| \right] \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

It follows that $\|\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Thus we have

$$\begin{aligned} \left| \text{LP}_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| &\leq \text{TV}(k_{m,\sigma}^{(n)}, \mathbb{R}^2) \|\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}\|_\infty \\ &\leq \text{TV}(k_{m,\sigma}, \mathbb{R}^2) \|\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}\|_\infty \end{aligned}$$

by Corollary 4.4.3. It follows that

$$\left| \text{LP}_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)} - \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

For the second term, we simply use again Corollary 4.4.3 with $h := \bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ and combining both we can conclude that

$$\text{LP}_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{LP}_{k_{m,\sigma}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)}, \mathbb{R}^2).$$

Since we also have

$$\left| \text{LP}_{k_{m,\sigma}^{(n)}}(\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}, \mathbb{R}^2) \right| \leq \|h\|_\infty \text{TV}(k_{m,\sigma}^{(n)}, \mathbb{R}^2) \leq |m| \|h\|_\infty \text{TV}(k_\sigma, \mathbb{R}^2),$$

and $\int_{\mathbb{R}} |m| F_\sigma(dm) = \mathbb{E}(|M_\sigma|) < +\infty$, we can use Lebesgue's theorem to obtain the result. \square

At that point it is natural to ask if $\overline{\overline{\text{LP}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h)}} = \overline{\text{LP}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h)}$. Let us look at this with this next corollary.

Corollary 4.4.8. *Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}$ given by (4.4.3) and $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ defined by (4.4.5). Then we have*

$$\overline{\text{TV}(X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\overline{\text{TV}(X_{\lambda,\mu,\sigma})}} := \overline{\overline{\text{LP}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(1)}} = \frac{\lambda}{\sigma\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.4.9)$$

Démonstration. By taking h constant equal to 1 we also have $\bar{h}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)}(0)}$ constant equal to 1. Then by Theorem 4.4.6 we have

$$\begin{aligned} \overline{\text{TV}(X_{\lambda,\mu,\sigma}^{(n)})} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathbb{R}} \text{LP}_{k_{m,\sigma}}(1, \mathbb{R}^2) F_\sigma(dm) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 m 2\pi\sigma \sqrt{-2\log(s)} ds F_\sigma(dm) \\ &= \frac{2\pi\sigma\lambda}{2\pi\sigma^2\mu} \int_0^1 \sqrt{-2\ln(s)} ds \\ &= \frac{\lambda}{\sigma\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

□

The simplicity of this result has the defect of representing only the low "regime" with small λ of Theorem 4.2.5 since we can now identify the limit.

Proposition 4.4.9. *Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$ and $\nu \in \mathbb{R}$. Then*

$$\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) = \lambda \varphi_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(\nu) \int_{\mathbb{R}} LP_{g_{m,\sigma}}(h_\nu, \mathbb{R}^2) F(dm).$$

Démonstration. Actually, by definition of $\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}$ in (4.4.6) we have that

$$\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) = \lambda \varphi_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(\nu) \int_{\mathbb{R}} LP_{k_{m,\sigma}}(h_\nu, \mathbb{R}^2) F_\sigma(dm).$$

Now, by the general co-area formula obtained in Theoreme 1 of [BD16] we have

$$\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) = \lambda \varphi_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(\nu) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} h_\nu(k_{m,\sigma}(x)) \|\nabla k_{m,\sigma}(x)\| dx F_\sigma(dm),$$

and a change of variable in m allows us to get

$$\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) = \lambda \varphi_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(\nu) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} h_\nu(g_{m,\sigma}(x)) \|\nabla g_{m,\sigma}(x)\| dx F(dm),$$

where we recognize

$$LP_{g_{m,\sigma}}(h_\nu, \mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} h_\nu(g_{m,\sigma}(x)) \|\nabla g_{m,\sigma}(x)\| dx.$$

□

Then similarly to what we have done for high regime, we can restate Theorem 4.2.5 in terms of resolution σ .

Proposition 4.4.10. *Assuming $\lambda\sigma^2 \leq c_0$, for all $\beta \in (0, 1)$, there exists $c_\beta(\mu) > 0$ such that for all $\nu \in \mathbb{R}$*

$$\left| \overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) - \overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) \right| \leq c_\beta(\mu) \lambda^{\frac{2}{1+\beta}} \sigma^{\frac{1-3\beta}{1+\beta}}.$$

Démonstration. Using change of variables we can also check that it follows that

$$\overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(h_\nu) = \frac{1}{\sigma} \overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2,\mu\sigma^2,1}}(h_\nu) = \frac{1}{\sigma^3} \overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2,\mu,1}}(h_\nu/\sigma).$$

For $\beta \in (0, 1)$, we can take $c_\beta(\mu) = C_1^-$ for $M \sim \mathcal{E}(\mu)$ and $\sigma = 1$, according to Theorem 4.2.5, to get for all $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\left| \overline{\overline{LP}}_{X_{\lambda\sigma^2,\mu,1}}(h_\nu/\sigma) - \overline{\overline{LP}}_{B_{\lambda\sigma^2,\mu,1}}(h_\nu/\sigma) \right| \leq c_\beta(\mu) [\lambda\sigma^2]^{\frac{2}{1+\beta}},$$

that gives the result. □

Hence we introduce the following quantities that will be used for numerical computations.

Proposition 4.4.11. *Let $\lambda, \mu, \sigma \in (0, +\infty)$, and let $f_{\lambda, \mu, \sigma}$ be the density of a gamma law of parameters $2\pi\mu\sigma^2$ and $2\pi\lambda\sigma^2$, then we define the mean elementary perimeter function as*

$$\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(u))}} := \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 f_{\lambda, \mu, \sigma}(u - ms) m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} ds F_{\sigma}(dm), \quad (4.4.10)$$

where F_{σ} denotes the exponential distribution of parameter $2\pi\sigma^2\mu$. Then, for all $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, one has

$$\overline{\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h)}} = \int_{\mathbb{R}} h(u) \overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(u))}} du.$$

Moreover, its Fourier transform is given for all $\nu \in \mathbb{R}$ by

$$\overline{\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_{\nu})}} = \lambda \left(\frac{2\pi\mu\sigma^2}{2\pi\mu\sigma^2 - i\nu} \right)^{2\pi\lambda\sigma^2} 2\pi\sigma \int_0^1 \frac{2\pi\sigma^2\mu}{(i\nu s - 2\pi\sigma^2\mu)^2} \sqrt{-2\ln(s)} ds \quad (4.4.11)$$

Démonstration. Let $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. By Theorem 4.4.6 and Corollary 4.4.3 it follows that

$$\begin{aligned} \overline{\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h)}} &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \text{LP}_{k_{m, \sigma}}(\bar{h}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(0), \mathbb{R}^2) F_{\sigma}(dm) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{E}[h(X_{\lambda, \mu, \sigma}(0) + ms)] m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} ds F_{\sigma}(dm) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(t + ms) f_{\lambda, \mu, \sigma}(t) m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} dt ds F_{\sigma}(dm) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(u) f_{\lambda, \mu, \sigma}(u - ms) m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} du ds F_{\sigma}(dm) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u) \left(\lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 f_{\lambda, \mu, \sigma}(u - ms) m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} ds F_{\sigma}(dm) \right) du, \end{aligned}$$

where we recognize $\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(u))}}$ under integral.

Let $h_{\nu}(s) = e^{i\nu s}$ for $s, \nu \in \mathbb{R}$. By Corollary 4.4.3 we have that

$$\begin{aligned} \overline{\overline{LP_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_{\nu})}} &= \lambda \varphi_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(\nu) \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 e^{i\nu ms} m 2\pi\sigma \sqrt{-2\ln(s)} ds F(dm) \\ &= \lambda \left(\frac{2\pi\mu\sigma^2}{2\pi\mu\sigma^2 - i\nu} \right)^{2\pi\lambda\sigma^2} 2\pi\sigma \int_0^1 \sqrt{-2\ln(s)} \int_{\mathbb{R}} m e^{i\nu ms} F(dm) ds \\ &= \lambda \left(\frac{2\pi\mu\sigma^2}{2\pi\mu\sigma^2 - i\nu} \right)^{2\pi\lambda\sigma^2} 2\pi\sigma \int_0^1 \frac{2\pi\sigma^2\mu}{(i\nu s - 2\pi\sigma^2\mu)^2} \sqrt{-2\ln(s)} ds \end{aligned}$$

□

Let us remark that the integral giving $u \mapsto \overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(u))}}$ is not easy to compute but can be efficiently numerically approximated as well as its Fourier transform (see Appendix).

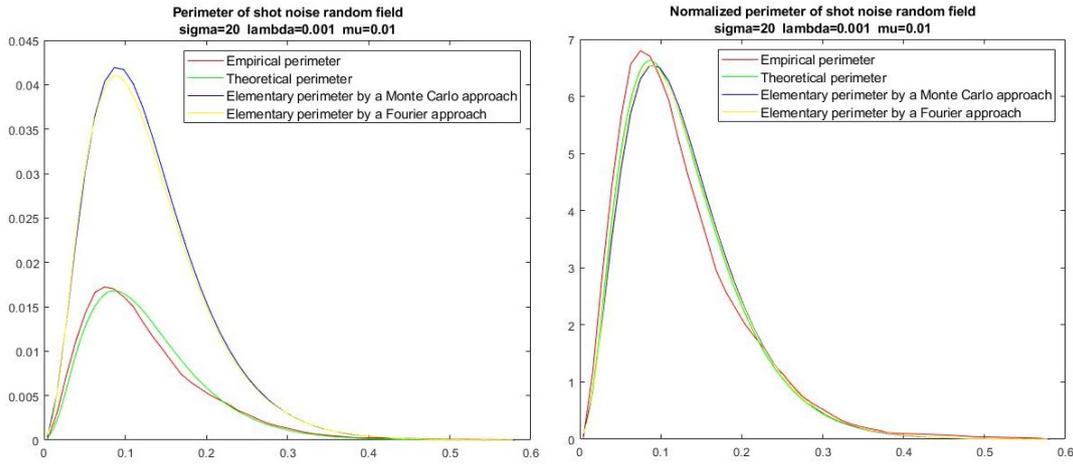


FIGURE 4.4.2 – Perimeter and normalized perimeter of a Gaussian shot noise random field with exponential marks. The parameters are in the title. In red, the empirical perimeter from a simulation on $F = [0, 1000]^2$ and in green its theoretical formula $u \mapsto \overline{\text{Per}(E_X(u))}$ approximated by Algorithm 4.6.3. In blue and yellow, the elementary asymptotic perimeter $u \mapsto \overline{\overline{\text{Per}(E_X(u))}}$ approximated by Algorithm 4.6.3 and 4.6.3.

We strongly believe that the difference between the theoretical perimeter and the elementary perimeter comes from the total variation. That is why, for X a random field and $u \in \mathbb{R}$, let us define the normalized perimeter function by

$$\text{Per}^*(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u)) := \frac{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u))}}{\overline{\text{TV}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u))}},$$

and make the following conjecture, motivated by Figure 4.4.2.

Conjecture : for almost all $u \in \mathbb{R}$ we have $\text{Per}^*(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u)) = \frac{\overline{\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u))}}}}{\overline{\overline{\overline{\text{TV}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u))}}}}$.

4.5 Classification between Gaussian and shot noise fields

We have already seen that there is a closed correspondence between Gaussian and shot noise random fields. In practice, this can be used in insurance risk management [KM95] or in wireless networks [CH01, AY10]. This section has a specific aim : the classification between these two random fields.

For $(\lambda, \mu, \sigma) \in]0, +\infty[^3$, considering a shot noise field $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ (*i.e.* a shot noise with a Gaussian kernel and exponential mark), by Campbell's Theorem [Kin93], the mean is $\mathbb{E}[X_{\lambda,\mu,\sigma}(0)] = \frac{\lambda}{\mu}$ and the isotropic covariance function is itself Gaussian, since we have for all $r > 0$

$$C_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2\mu^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2}\right),$$

where $C_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(r) = \text{Cov}(X_{\lambda,\mu,\sigma}(x), X_{\lambda,\mu,\sigma}(y))$ for all $x, y \in \mathbb{R}^2$ with $\|x - y\| = r$. That is why, the Gaussian random field of interest $B_{\lambda,\mu,\sigma}$ has the same mean $M_{B_{\lambda,\mu,\sigma}} = \frac{\lambda}{\mu}$ and the

same covariance function $C_{B_{\lambda,\mu,\sigma}}(r) = C_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(r)$. When there is no ambiguity, we write $X = X_{\lambda,\mu,\sigma}$ and $B = B_{\lambda,\mu,\sigma}$.

Conversely, let B a Gaussian random field with Gaussian covariance function, then there exist $(\lambda, \mu, \sigma) \in]0, +\infty[^3$ and a shot noise random field $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ with the same mean, the same variance and the same covariance function than B . Indeed, if we note $C_B(r) = \text{Var}[B(0)]e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}}$ the covariance function and $M_B = \mathbb{E}[B(0)]$ the mean of the Gaussian random field, the parameters of the corresponding shot noise $X_{\lambda,\mu,\sigma}$ are

$$\begin{cases} \lambda = \frac{M_B^2}{2\pi\sigma^2\text{Var}[B(0)]} \\ \mu = \frac{M_B}{2\pi\sigma^2\text{Var}[B(0)]} \\ \sigma = \sigma. \end{cases}$$

Some simulations are presented in Figure 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5 to compare a Gaussian field with a shot noise field. Each random field is simulated on a window $T = [0, 1000]^2$ with the same mean, same variance and same correlation. We have chosen, arbitrarily, the same intensity of the Poisson process $\lambda = 0.001$ and the same mark $\mu = 0.01$ for all simulations. Although the intensity parameter λ may seem small, it represents on average 1000 points on T . Also, let us not forget that the parameter of an exponential law is the inverse of its mean, hence a mean of 100 for the mark. The difference between Figures 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5 is in the σ parameter and note that, similarly to the high intensity convergence [HS85], we can less and less distinguish the fields with the increase of σ .

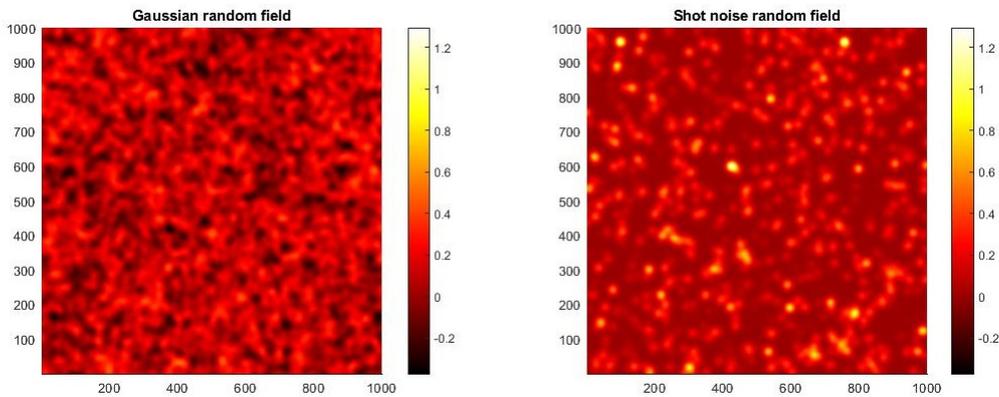


FIGURE 4.5.3 – Gaussian and shot noise random fields simulated on $F = [0, 1000]^2$ with $\lambda = 0.001$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\sigma = 10$.

We will start by introducing the classification based on the geometries of Gaussian fields. By Corollary 4.2.2, since the second spectral moment of B is $\lambda_2 = \text{Var}[\partial B(0)] = \partial_1^2 \text{Cov}_B(0) = \frac{\lambda}{4\pi\mu^2\sigma^4}$, for $u \in \mathbb{R}$ we have that

$$\overline{\text{Per}(E_B(u))} = \frac{1}{\sqrt{8\sigma}} \exp\left(-\pi\mu^2\sigma^2 \frac{(u - \frac{\lambda}{\mu})^2}{\lambda}\right) \quad (4.5.1)$$

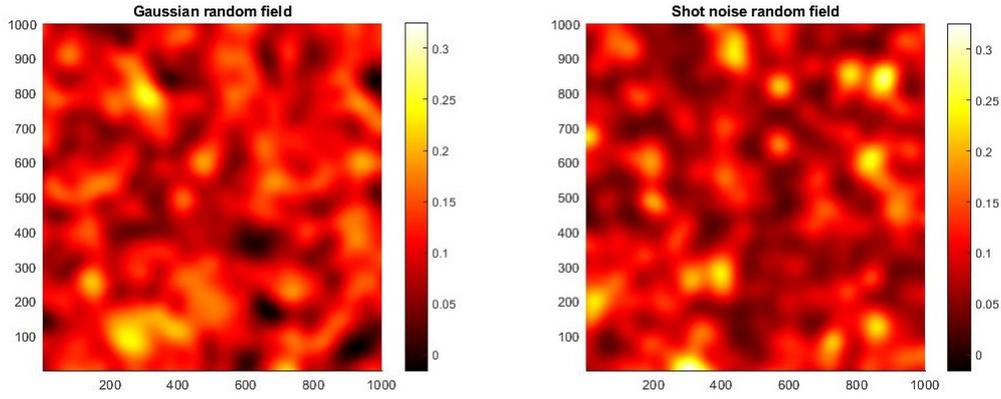


FIGURE 4.5.4 – Gaussian and shot noise random fields simulated on $F = [0, 1000]^2$ with $\lambda = 0.001$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\sigma = 30$.

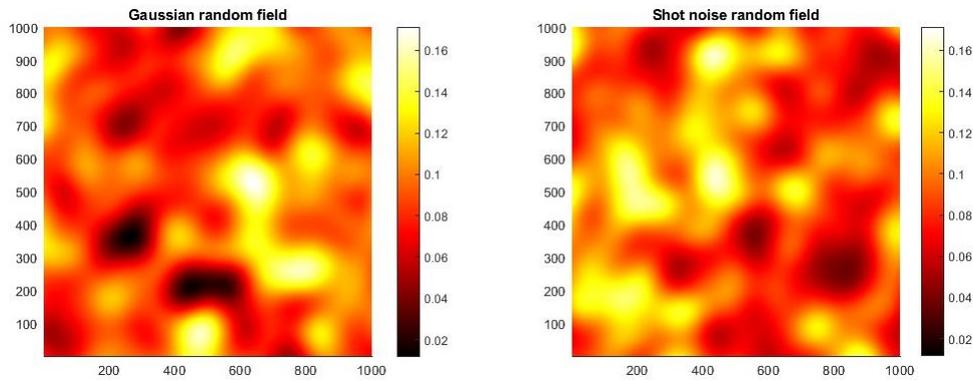


FIGURE 4.5.5 – Gaussian and shot noise random fields simulated on $F = [0, 1000]^2$ with $\lambda = 0.001$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\sigma = 50$.

and we have also

$$\overline{\text{Area}(E_B(u))} = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{Var}[B(0)]}} \exp\left(-\frac{(x - \lambda/\mu)^2}{2\text{Var}[B(0)]}\right) dx \quad (4.5.2)$$

To compute (4.5.1) and (4.5.2), it is necessary to estimate the parameters. To do this, we use the method of moments, similar to what we did for the shot noise random fields in [Ler21]. More precisely, suppose that we observe our field on a rectangle $T \subset \mathbb{Z}^2$ and let us introduce the following moment estimators :

$$\widehat{M}_1 = \frac{1}{|T|} \sum_{x \in T} X(x) \quad (4.5.3)$$

$$\widehat{M}_2 = \frac{1}{|T|} \sum_{x \in T} X(x)^2 \quad (4.5.4)$$

$$\widehat{h}(w) = \frac{1}{|T \ominus w|} \sum_{x \in T \ominus w} X(x)X(x+w), \quad (4.5.5)$$

where $w \in \mathbb{Z}^2$ and $T \ominus w = \{x \in T ; x+w \in T\}$.

Since the field is assumed to be isotropic, the estimators of mixed moment of second order

$\widehat{h(w)}$ can be grouped according to the norm of w which allows to improve the estimator. That is why we consider, for $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$\widehat{\tilde{h}(r)} = \frac{1}{2}(\widehat{h(re_1)} + \widehat{h(re_2)})$$

where (e_1, e_2) denotes the canonical basis of \mathbb{R}^2 .

From these estimators, let us introduce the estimators of variance $\widehat{V} = \widehat{M}_2 - \widehat{M}_1^2$ and of the isotropic correlation function $\widehat{\tilde{\rho}(r)} = \frac{\widehat{\tilde{h}(r)} - \widehat{M}_1^2}{\widehat{V}}$. Then, to estimate (λ, μ, σ) , we can use for any $r \in \mathbb{Z}^2$ the estimators :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\lambda}_r = \frac{-2\widehat{M}_1^2 \log(\widehat{\tilde{\rho}(r)})}{\pi r^2 (\widehat{M}_2 - \widehat{M}_1^2)} \\ \widehat{\mu}_r = \frac{-2\widehat{M}_1 \log(\widehat{\tilde{\rho}(r)})}{\pi r^2 (\widehat{M}_2 - \widehat{M}_1^2)} \\ \widehat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{-r^2}{4 \log(\widehat{\tilde{\rho}(r)})}} \end{array} \right. \quad (4.5.6)$$

By property of association of a Gaussian field with Gaussian covariance function, they are consistent estimators and asymptotically normal, similar to what we did for the shot noise fields [Ler21]. Following this work, we can optimize the choice of r by taking $r^* = \operatorname{argmin}_{r \in \mathbb{N}^*} |\widehat{\tilde{\rho}(r)} - \exp(-\frac{1}{2})|$, the distance where the covariance function decreases fastest.

These good estimates of the parameters allow us to compute the theoretical formulas (4.5.2, 4.5.1) with $(\widehat{\lambda}_{r^*}, \widehat{\mu}_{r^*}, \widehat{\sigma}_{r^*})$ instead of (λ, μ, σ) . To stay in the spirit of the article, we are interested in the normalized perimeter function

$$\operatorname{Per}^*(E_F(u)) = \frac{\overline{\operatorname{Per}(E_F(u))}}{\overline{\operatorname{TV}(E_F(u))}}$$

We can also estimate these geometries. For f a random field data observed on a rectangle $T \subset \mathbb{Z}^2$, let us introduce u_{min} the minimum of f and u_{max} its maximum. Let val a regular discretization of $[u_{min}, u_{max}]$ of size $lval \geq 2$ and note $sval = \frac{u_{max} - u_{min}}{lval - 1}$ the distance between two successive points of val . For all $u \in val$, the area function estimator is

$$\widehat{\operatorname{Area}}(E_f(u)) = \frac{1}{|T|} \sum_{x \in T} \mathbf{1}_{f(x) \geq u}$$

To estimate the perimeter function we simply use the estimator $\widehat{\operatorname{Per}}(E_f(u), T)$ of [ABDB21], also defined as $\widehat{P}_f^{(1)}$ in [CDBO22], multiplied by $\pi/4$ to correct the bias according to Proposition 4.4 in [BD21] in view of isotropy of fields under study. Then we normalized according to the level to set $\widehat{\operatorname{Per}}^*(E_f(u))$.

The geometric statistic that will be used as classifier is $d^B(f) = (d_{area}^B(f), d_{per}^B(f)) \in \mathbb{R}^2$ with

$$d_{area}^B(f) = \left(sval \sum_{u \in val} (\overline{\text{Area}(E_B(u))} - \widehat{\text{Area}(E_f(u))})^2 \right)^{1/2} \quad (4.5.7)$$

the discretized \mathcal{L}^2 distance between the emperical area and the theoretical Gaussian area, and

$$d_{per}^B(f) = \left(sval \sum_{u \in val} (\text{Per}^*(E_B(u)) - \widehat{\text{Per}^*(E_f(u))})^2 \right)^{1/2} \quad (4.5.8)$$

the discretized \mathcal{L}^2 distance between the empirical perimeter and the theoretical normalized Gaussian perimeter.

Our classification approach is that of the supervised learning. To do this, we will use the quadratic discriminant analysis [GC19]. To use the classical notation of classification theory, let us note \mathcal{C}_1 the class of Gaussian random field with Gaussian covariance and \mathcal{C}_2 the class of shot noise random field with Gaussian covariance. We use several simulations of Gaussian fields and shot noise fields to understand the behavior of the two distances (4.5.7)-(4.5.8) under the two different classes. More precisely, we simulate $N \in \mathbb{N}^*$ independent Gaussian random fields B_1, \dots, B_N in \mathcal{C}_1 of same distribution than B to compute

$$\left(d^B(B_1), \dots, d^B(B_N) \right),$$

the distances under the Gaussian assumption. In the same way, we simulate N independent shot noise random fields X_1, \dots, X_N in \mathcal{C}_2 with same second order statistics than B to compute the distances under the shot noise assumption

$$\left(d^B(X_1), \dots, d^B(X_N) \right).$$

In the classification lexicon, these two samples are called training set. It remains to determine to which sample the observed distance pairs $d^B(f) = (d_{area}^B(f), d_{per}^B(f))$ best belong. To do this, we will use the quadratic discriminant analysis [GC19]. For f a random field data and $k = 1, 2$, we assume that, conditional on $f \in \mathcal{C}_k$, $d^B(f)$ corresponds to the realisation of a two-dimensional random variable with Gaussian distribution $\mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)$. Since it is accepted that $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$, the boundary of the classification decision rule is quadratic [GC19]. Noting p_k^B the density of a Gaussian variable $\mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)$, the classification rule is given by

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}_1 & \text{if } p_1^B(d^B(f)) > p_2^B(d^B(f)) \\ f \in \mathcal{C}_2 & \text{if } p_1^B(d^B(f)) < p_2^B(d^B(f)) \end{cases}$$

When making a classification decision, there is always the possibility of making a mistake. For $d \in \mathbb{R}^2$ and $k = 1, 2$, we introduce the score function $d \rightarrow S_k^B(d)$ that represents the probability of choosing class k given that $f \in \mathcal{C}_k$. In the quadratic discriminant analysis, conditionally to the fact that $f \in \mathcal{C}_k$, the score function

$S_k^B(d^B(f)) = \frac{p_k^B(d^B(f))}{p_1^B(d^B(f)) + p_2^B(d^B(f))}$. Finally, the error of the classification if $f \in \mathcal{C}_k$ is defined by 1 minus the score $S_k^B(d^B(f))$.

For $k = 1, 2$, to compute the density p_k^B , it only remains to estimate the mean by

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(d_{area}^B(f_i), d_{per}^B(f_i) \right), \quad (4.5.9)$$

and the covariance matrix by

$$\widehat{\Sigma}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} (d_{area}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(1))^2 & (d_{area}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(1))(d_{per}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(2)) \\ (d_{area}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(1))(d_{per}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(2)) & (d_{per}^B(f_i) - \widehat{\mu}_k(2))^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5.10)$$

where f_1, \dots, f_N are iid samples in \mathcal{C}_k .

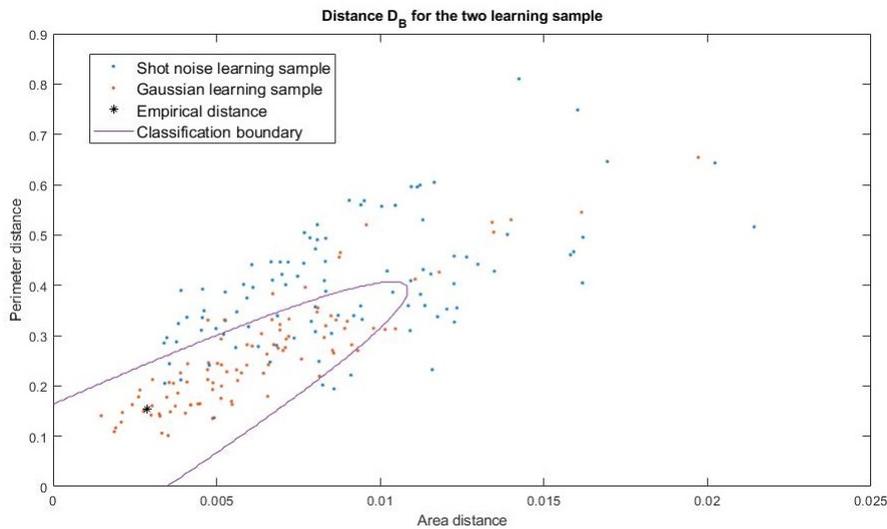


FIGURE 4.5.6 – Example of a classification, with the two learning samples of size $N = 50$ and the classification boundary. The initial Gaussian field B was simulated using $\lambda = 0.001$, $\mu = 0.01$ and $\sigma = 50$.

Figure 4.5.6 is an example of a classification where the initial field is Gaussian, and it can be seen that it is well classified in the class of Gaussian fields. We refer to this classification as the Gaussian classification, because it is based on the geometrical formulas of the Gaussian fields, and performed it on a sample of $N = 50$ Gaussian fields (the class \mathcal{C}_1) and $N = 50$ shot noise fields (the class \mathcal{C}_2). Figure 4.5.7 represents a histogram of the scores of the classification $S_k^B(d^B(f_{k,j}))$ with $1 \leq j \leq M$ and $k = 1, 2$, where $(d^B(f_{1,j}))_j$ are the distances obtained for $M = 50$ Gaussian random fields data $(f_{1,j})_j$ and $(d^B(f_{2,j}))_j$ are the distances obtained for $M = 50$ shot noise random fields $(f_{2,j})_j$. We would like to draw your attention in order not to confuse the role of M and N . For each of the M random fields, we simulate N Gaussian fields and N shot noise fields, which constitute the training set, using the parameters (λ, μ, σ) estimated from the initial field. We observe

that the classification of Gaussian fields is very successful with 50/50 good results and a very high score with an average of about 0.95 and a standard deviation of about 0.07. The classifications of shot noise fields is not as successful since only 25/50 gave the results and with a bad score with an average of about 0.49 and a standard deviation of about 0.24.

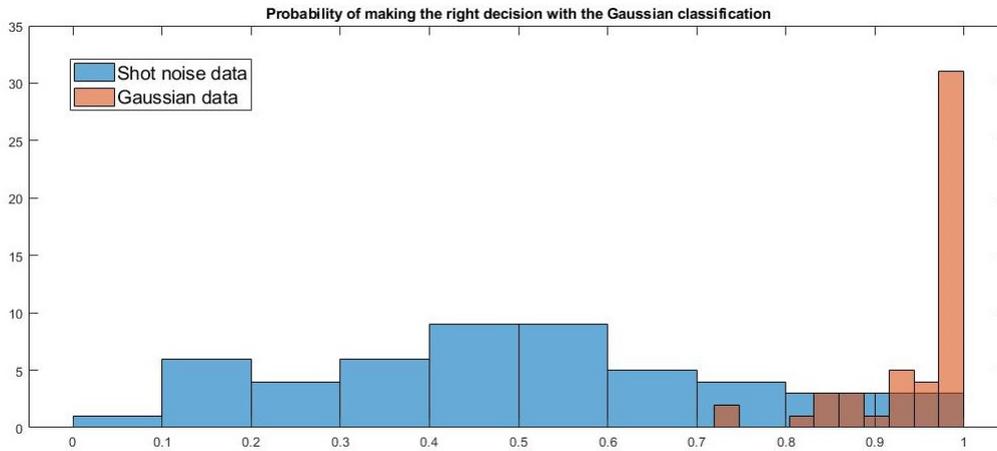


FIGURE 4.5.7 – Results for the Gaussian classification. In red, a histogram of the classifications score $(S_1^B(d^B(f_{1,j})))_j$ obtained from a sample of $M = 50$ Gaussian fields. In blue, the score $(S_2^B(d^B(f_{2,j})))_j$ for $M = 50$ shot noise fields.

Now, thanks to the study of the perimeter of Gaussian shot noise random fields, we can make exactly the same classification method, but this time based on shot noise geometries. Once the model parameters (λ, μ, σ) have been estimated by the method of moments presented in [Ler21], we can compute the theoretical volume easily by

$$\overline{\text{Area}(E_X(u))} = \int_u^\infty \frac{x^{2\pi\lambda\sigma^2-1} e^{-x2\pi\mu\sigma^2} (2\pi\mu\sigma^2)^{2\pi\lambda\sigma^2}}{\Gamma(2\pi\lambda\sigma^2)} dx,$$

given that $X(0)$ is gamma distributed.

For the theoretical perimeter function, we approximate it by Algorithm 4.6.3 or 4.6.3. Figure 4.5.8 is the theoretical perimeter of a Gaussian and shot noise field, by increasing the values of σ and with the same values of λ and μ . Let us remember that, in view of Proposition 4.3.2, that it is consistent to observe a convergence of the curves with the increase of σ .

So, for f a random field data, the geometric statistic that will be used as classifier is $d^X(f) = (D_{\text{area}}^X(f), D_{\text{per}}^X(f))$ defined by (4.5.7, 4.5.8) replacing B by X . With the same N Gaussian and N shot noise random field simulations than before, we have the two new training sets $(d^X(B_1), \dots, d^X(B_N))$ and $(d^X(X_1), \dots, d^X(X_N))$.

As before, we suppose that for f a random field data and $k = 1, 2$, conditional on the event $f \in \mathcal{C}_k$, $d^X(f)$ corresponds to the realisation of a two-dimensional random variable

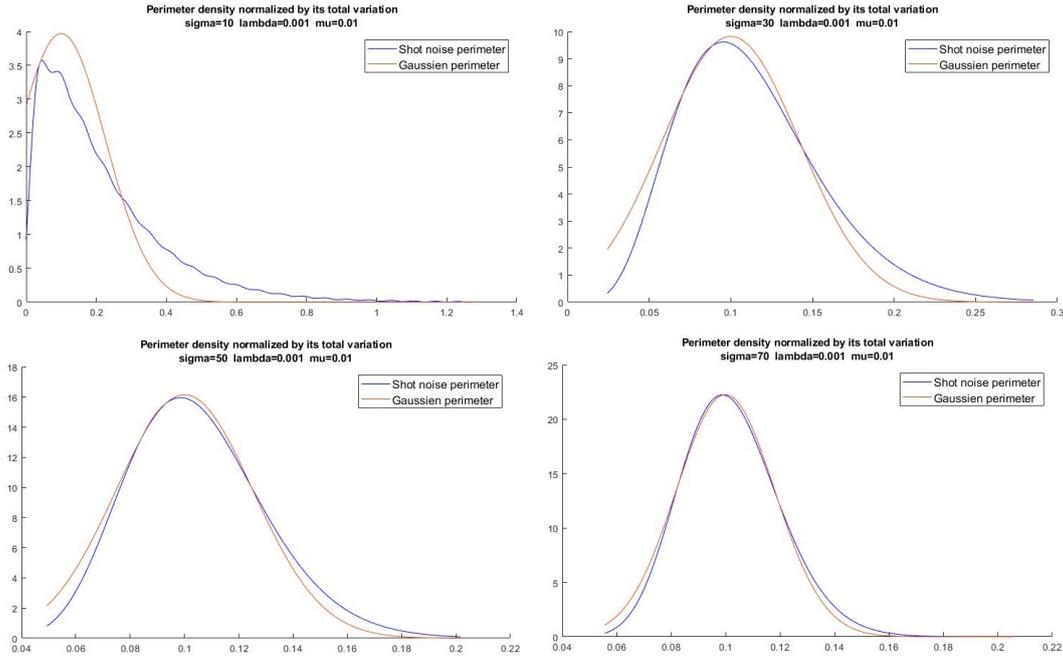


FIGURE 4.5.8 – Gaussian and shot noise perimeter computed with (4.5.1) and Algorithm 4.6.3. The parameters are $\lambda = 0.001$, $\mu = \frac{1}{100}$ and from top left to bottom right $\sigma = 10, 30, 50, 70$.

with Gaussian distribution and we note p_k^X its density. That is why the classification rule is

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}_1 & \text{if } p_1^X(d^X(f)) > p_2^X(d^X(f)) \\ f \in \mathcal{C}_2 & \text{if } p_1^X(d^X(f)) < p_2^X(d^X(f)) \end{cases}$$

where for $i = 1, 2$ the density p_i^X is computed with the analogue of (4.5.9) and (4.5.10) replacing B by X .

This time, we refer to this classification as the shot noise classification, because it is based on the geometrical formulas of the shot noise fields, and performed it on the same sample of $M = 50$ Gaussian fields (the class \mathcal{C}_1) and $M = 50$ shot noise fields (the class \mathcal{C}_2) than in the Gaussian classification. Figure 4.5.9 represents a histogram of the classifications score $S_k^X(d^X(f_{k,j}))$ with $1 \leq j \leq M$ and $k = 1, 2$, where $(d^X(f_{1,j}))_j$ are the distances obtained by the shot noise classification for the same $M = 50$ Gaussian random fields $(f_{1,j})_j$ than in the Gaussian classification, and $(d^X(f_{2,j}))_j$ are the distances obtained for the same $M = 50$ shot noise random fields $(f_{2,j})_j$ than in the Gaussian classification. We observe that the classification of Gaussian fields is bad with 26/50 good results and a bad score with an average of about 0.55 and a standard deviation of about 0.24. The classifications of shot noise fields is, this time, very successful with 50/50 good results and with a high score with an average of about 0.95 and a standard deviation of about 0.06.

This highlights the usefulness of the shot noise classification. These two classifications

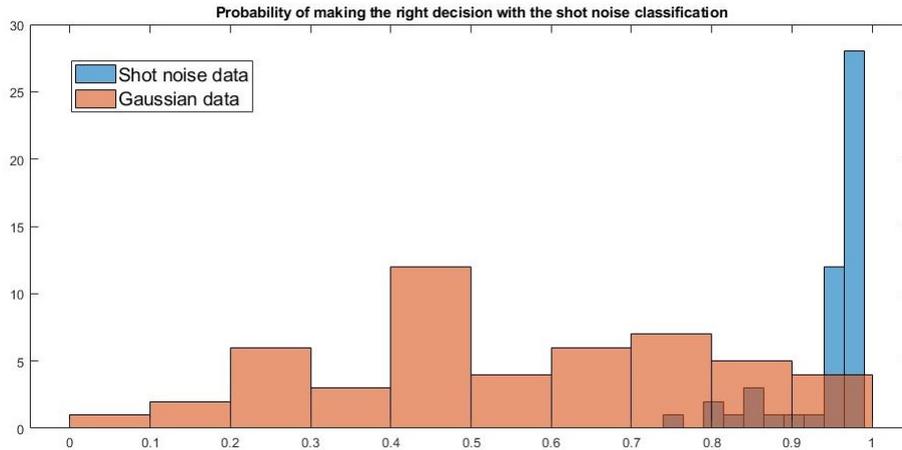


FIGURE 4.5.9 – Results for the shot noise classification. In red, a histogram of the classifications score $(S_1^X(d^X(f_{1,j})))_j$ obtained from a sample of $M = 50$ Gaussian fields. In blue, the score $(S_2^X(d^X(f_{2,j})))_j$ for a sample of $M = 50$ shot noise fields. The samples are the same as in Figure 4.5.7.

should be used together and when they do not have the same conclusion, the classification with the largest difference between the probability densities is preferred reducing the error as much as possible. In Figure 4.5.10 we compare the classification score for the sample of Gaussian fields. For better visibility, we have sorted the scores, so that they are ascending for the shot noise classification. A score below $1/2$ means that this is not the choice retained by the classification procedure. We do the same for the 50 shot noise fields in Figure 4.5.11, where we have this time sorted the scores to be increasing for the Gaussian classification.

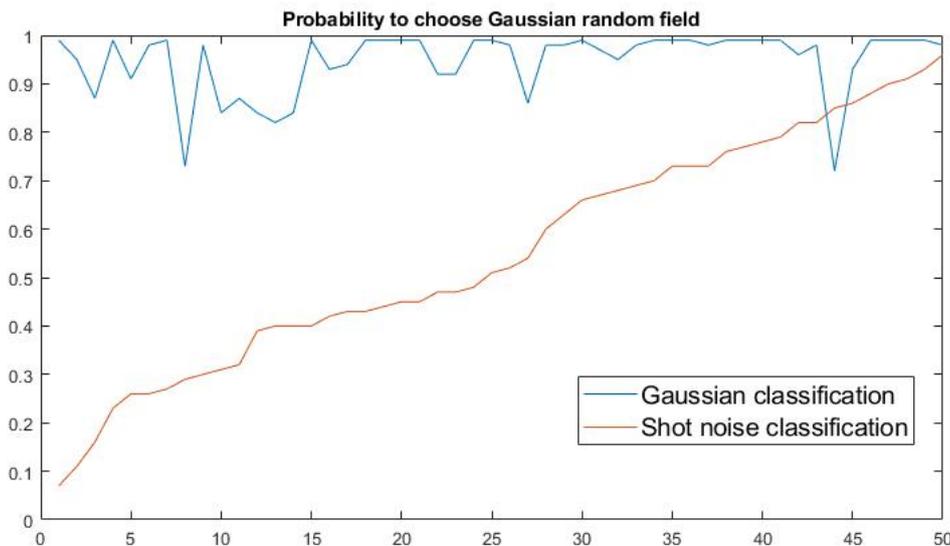


FIGURE 4.5.10 – The two scores $S_1^B(d^B(f_{1,j}))_j$ and $S_1^X(d^X(f_{1,j}))_j$ for the Gaussian sample.

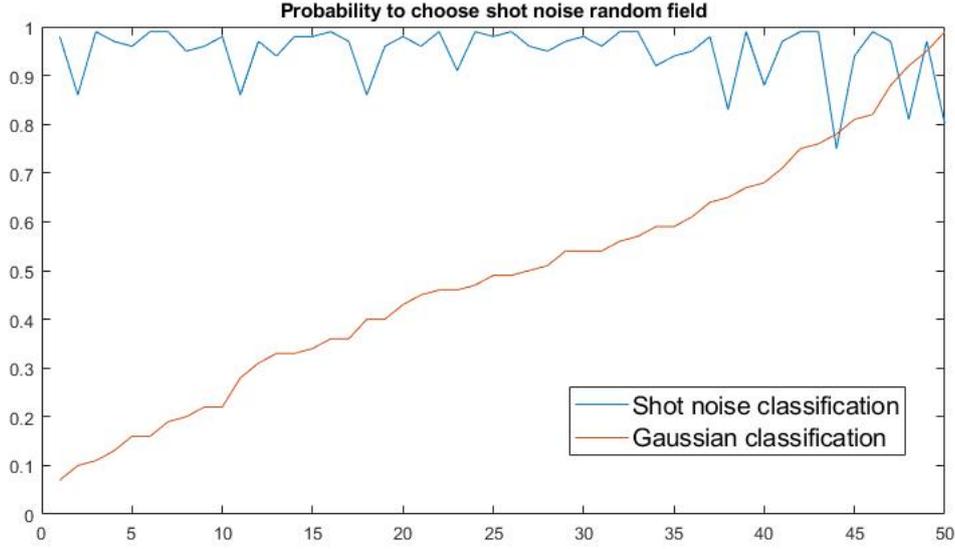


FIGURE 4.5.11 – The two scores $S_2^B(d^B(f_{2,j}))_j$ and $S_2^X(d^X(f_{2,j}))_j$ for the Gaussian sample.

4.6 Appendix

4.6.1 Proof of Theorem 4.2.4

Recall that φ denotes the characteristic function of $(X_\lambda(0), \partial_1 X_\lambda(0))$. According to (4.2.9) we have for $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\text{LP}}_{X_\lambda}(h_\nu) = \int_0^\infty \frac{1}{v} \varphi(\nu, v) S_0(\nu, v) dv,$$

where the improper integral \int_0^∞ is obtained as $\lim_{V' \rightarrow +\infty} \int_0^{V'}$. Actually, for $V' > V > 0$, integrating by parts,

$$\int_V^{V'} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\nu, v) dv = \frac{\varphi(\nu, V')}{V'} - \frac{\varphi(\nu, V)}{V} + \int_V^{V'} \frac{\varphi(\nu, v)}{v^2} dv.$$

Since φ is a characteristic function it is bounded by 1 and we can let V' tends to ∞ and obtain

$$\left| \int_V^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right| \leq \frac{2}{V}. \quad (4.6.1)$$

We introduce

$$\psi(\nu, v) := \exp(i\nu \mathbb{E}(X_\lambda(0))) \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(g_M)}{2} \nu^2\right) \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(\partial_1 g_M)}{2} v^2\right),$$

the characteristic function of the Gaussian vector $(B_\lambda(0), \partial_1 B_\lambda(0))$ and note that we have

$$\overline{\text{LP}}_{B_\lambda}(h_\nu) = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v}(\nu, v) dv,$$

with similarly as (4.6.1)

$$\left| \int_V^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v}(\nu, v) dv \right| \leq \frac{2}{V}.$$

Moreover introducing $S_1(v) = \lambda \mu_2(\partial_1 g_M) v$ we can write $\frac{\partial \psi}{\partial v}(\nu, v) = -S_1(v) \psi(\nu, v)$. It follows that

$$\begin{aligned} |\overline{\text{LP}}_{X_\lambda}(h_\nu) - \overline{\text{LP}}_{B_\lambda}(h_\nu)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) \varphi(\nu, v) dv - \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} S_1(v) \psi(\nu, v) dv \right| \\ &\leq \int_0^V \frac{1}{v} |S_0(\nu, v) \varphi(\nu, v) - S_1(v) \psi(\nu, v)| + \frac{4}{V}. \end{aligned}$$

Then we write

$$|S_0(\nu, v) \varphi(\nu, v) - S_1(v) \psi(\nu, v)| \leq |S_0(\nu, v)| |\varphi(\nu, v) - \psi(\nu, v)| + |S_0(\nu, v) - S_1(v)| |\psi(\nu, v)|.$$

For the first term, we can write

$$\varphi(\nu, v) - \psi(\nu, v) = \psi(\nu, v) [\exp(z(\nu, v)) - 1],$$

where

$$z(\nu, v) := \lambda \int e^{i[\nu g_m + v \partial_1 g_m]} - 1 - i[\nu g_m + v \partial_1 g_m] - \frac{[\nu g_m + v \partial_1 g_m]^2}{2} F(dm) dx,$$

using the fact that, since $\partial_1 g_m$ is an odd function $\int \partial_1 g_m = 0$ and $\int g_m \partial_1 g_m = 0$. Hence, using finite increments inequality,

$$|\varphi(\nu, v) - \psi(\nu, v)| \leq |\psi(\nu, v)| |z(\nu, v)| \exp(\Re(z(\nu, v))),$$

where

$$\Re(z(\nu, v)) := \lambda \int \cos[\nu g_m + v \partial_1 g_m] - 1 - \frac{[\nu g_m + v \partial_1 g_m]^2}{2} F(dm) dx.$$

Since $0 \leq \cos(s) - 1 + \frac{s^2}{2} \leq \frac{1}{4!} s^4$ for all $s \in \mathbb{R}$, we have $0 \leq \Re(z(\nu, v)) \leq \frac{\lambda}{4!} \int [\nu g_m + v \partial_1 g_m]^4 F(dm) dx$. Now let us choose $V = \left(\frac{\mu_2(\partial_1 g_m)}{\mu_4(\partial_1 g_m)} \right)^{1/2}$ and ν with $|\nu| \leq C_0^+$. Then it follows that

- $\nu^2 \int g_m^4 \leq 6 \int g_m^2$;
- $\nu^2 \int g_m^2 \partial_1 g_m^2 \leq \frac{5}{6} \int (\partial_1 g_m)^2$;
- $V^2 \int (\partial_1 g_m)^4 \leq \int (\partial_1 g_m)^2$,

where we used Cauchy-Schwarz inequality for the second inequality. It follows that for $v \leq V$ we get

$$\begin{aligned} \int [\nu g_m + v \partial_1 g_m]^4 &= \nu^4 \int g_m^4 + 6\nu^2 v^2 \int g_m^2 \partial_1 g_m^2 + v^4 \int \partial_1 g_m^4 \\ &\leq 6\nu^2 \int g_m^2 + 5v^2 \int \partial_1 g_m^2 + v^2 \int \partial_1 g_m^2 \\ &\leq 6 \int [\nu g_m + v \partial_1 g_m]^2, \end{aligned}$$

and therefore

$$0 \leq \Re(z(\nu, v)) \leq \frac{\lambda}{4} \int [\nu g_m + v \partial_1 g_m]^2 F(dm) dx.$$

Hence we have

$$|\psi(\nu, v)| \exp(\Re(z(\nu, v))) \leq \exp\left(-\frac{\lambda}{4} \mu_2(g_m) \nu^2\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4} \mu_2(\partial_1 g_m) v^2\right).$$

Moreover we can simply bound

$$\begin{aligned} |z(\nu, v)| &\leq \frac{\lambda}{3!} \int |\nu g_m + v \partial_1 g_m|^3 \\ &\leq \frac{2\lambda}{3} [|\nu|^3 \int |g_m|^3 + |v|^3 \int |\partial_1 g_m|^3] \end{aligned}$$

and, since

$$S_0(\nu, v) = \lambda \int e^{i\nu g_m} \partial_1 g_m \sin(v \partial_1 g_m) F(dm) dx, \quad (4.6.2)$$

we simply bound

$$\frac{|S_0(\nu, v)|}{v} \leq \lambda \int (\partial_1 g_m)^2.$$

It follows that

$$\begin{aligned} &\int_0^V \frac{|S_0(\nu, v)|}{v} |\varphi(\nu, v) - \psi(\nu, v)| dv \\ &\leq \frac{2}{3} \lambda^2 \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(g_M)}{4} \nu^2\right) \mu_2(\partial_1 g_M) \int_0^V [|\nu|^3 \mu_3(g_M) + v^3 \mu_3(\partial_1 g_M)] \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(\partial_1 g_M)}{4} v^2\right) dv \\ &\leq \mu_2(\partial_1 g_M) \left[c_3 \lambda^{1/2} \frac{\mu_3(g_M)}{\mu_2(g_M)^{3/2}} \int_0^V \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(\partial_1 g_M)}{4} v^2\right) dv \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \lambda^2 \mu_3(\partial_1 g_M) \int_0^V v^3 \exp\left(-\frac{\lambda \mu_2(\partial_1 g_M)}{4} v^2\right) dv \right], \\ &\leq \mu_2(\partial_1 g_M) \left[c_3 \frac{\mu_3(g_M)}{\mu_2(g_M)^{3/2} \mu_2(\partial_1 g_M)^{1/2}} \sqrt{\pi} + \frac{2^4}{3} \frac{\mu_3(\partial_1 g_M)}{\mu_2(\partial_1 g_M)^2} \right] \\ &\leq \left[c_3 \frac{\mu_3(g_M) \mu_2(\partial_1 g_M)^{1/2}}{\mu_2(g_M)^{3/2}} \sqrt{\pi} + \frac{2^4}{3} \frac{\mu_3(\partial_1 g_M)}{\mu_2(\partial_1 g_M)} \right]. \end{aligned}$$

where $c_3 = \frac{2}{3} \times 2^3 \times \sup_{s \in \mathbb{R}} |s|^3 e^{-s^2} = 4\sqrt{6}e^{-3/2}$ if $\nu \neq 0$ and $c_3 = 0$ else.

Now let us focus on the second term and recall that $S_0(\nu, v) = \lambda \int \partial_1 g_m e^{i\nu g_m} \sin(v \partial_1 g_m) F(dm) dx$ and $S_1(v) = \lambda v \int (\partial_1 g_m)^2 F(dm) dx$ so that we write

$$\begin{aligned} |S_0(\nu, v) - S_1(v)| &\leq |S_0(\nu, v) - S_0(0, v)| + |S_0(0, v) - S_1(v)| \\ &\leq \lambda |v| \left[|\nu| \int (\partial_1 g_m)^2 |g_m| + \frac{v^2}{3!} \mu_4(\partial_1 g_M) \right]. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} &\int_0^V \frac{|S_0(\nu, v) - S_1(v)|}{v} |\psi(\nu, v)| dv \\ &\leq \left[c_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\int (\partial_1 g_m)^2 |g_m|}{\mu_2(g_M)^{1/2} \mu_2(\partial_1 g_M)^{1/2}} + \frac{\mu_4(\partial_1 g_M)^{1/2}}{3! \mu_2(\partial_1 g_M)^{1/2}} \min\left(\lambda^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_4(\partial_1 g_M)^{1/2}}{\mu_2(\partial_1 g_M)}, 1\right) \right], \end{aligned}$$

using the fact that $|\nu| \exp(-\frac{1}{2}\lambda\mu_2(g_M)\nu^2) \leq c_1\lambda^{-1/2}\mu_2(g_M)^{-1/2}$ with $c_1 = \sup_{s \in \mathbb{R}} |s|e^{-\frac{1}{2}s^2} = e^{-1/2}$ if $\nu \neq 0$ and $c_1 = 0$ else, $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} e^{-s^2/2} ds = \int_0^{+\infty} s^2 e^{-s^2/2} ds$ and $v \leq V$ with $\int_0^{+\infty} se^{-s^2/2} ds = 1$.

We get the result of upper bounds for C_1^+ and C_2^+ , combining previous inequalities with Cauchy-Schwarz inequalities.

4.6.2 Proof of Theorem 4.2.5

Let $\nu \in \mathbb{R}$ and write again

$$\overline{\text{LP}}_{X_\lambda}(h_\nu) = \int_0^\infty \frac{1}{v} \varphi(\nu, v) S_0(\nu, v) dv.$$

Let $V > 0$ and remark that after using Fubini's theorem, since $\mu_2(\partial_1 g_m) < +\infty$, we can also integrate by parts to obtain for $V' > V$

$$\begin{aligned} \int_V^{V'} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv &= \lambda \int e^{i\nu g_m} \left(\frac{1 - \cos(V' \partial_1 g_m)}{V'} - \frac{1 - \cos(V \partial_1 g_m)}{V} \right. \\ &\quad \left. + \int_V^{V'} \frac{1 - \cos(v \partial_1 g_m)}{v^2} dv \right) F(dm) dx. \end{aligned}$$

It follows choosing $\beta \in (0, 1)$ we can use that $1 - \cos(s) = 2 \sin^2(s/2) \leq 2^{1-\beta} |s|^\beta$ for $s \in \mathbb{R}$ to bound

$$\left| \int_V^{V'} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv \right| \leq \lambda 2^{1-\beta} \mu_\beta(\partial_1 g_m) (V'^{-(1-\beta)} + 2V^{-(1-\beta)}),$$

letting V' tends to infinity we obtain

$$\left| \int_V^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv \right| \leq 2\lambda C_\beta^- V^{-(1-\beta)},$$

with $C_\beta^- = 2^{1-\beta} \mu_\beta(\partial_1 g_m)$. Then we write

$$\begin{aligned} \overline{\text{LP}}_{X_\lambda}(h_\nu) - \varphi(\nu, 0) \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv &= \int_0^V \frac{1}{v} S_0(\nu, v) (\varphi(\nu, v) - \varphi(\nu, 0)) dv \\ &\quad + \int_V^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) \varphi(\nu, v) dv - \varphi(\nu, 0) \int_V^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv. \end{aligned}$$

Now we write

$$\varphi(\nu, v) - \varphi(\nu, 0) = \varphi(\nu, 0) [\exp(\tilde{z}(\nu, v)) - 1],$$

where

$$\tilde{z}(\nu, v) := \lambda \int e^{i\nu g_m} (e^{i\nu \partial_1 g_m} - 1) F(dm) dx = -\lambda \int e^{i\nu g_m} 2 \sin^2(v \partial_1 g_m / 2) F(dm) dx.$$

Hence for $\beta \in (0, 2]$

$$|\tilde{z}(\nu, v)| \leq \lambda C_\beta^- v^\beta,$$

and for $v \in [0, V]$,

$$\begin{aligned} |\varphi(\nu, v) - \varphi(\nu, 0)| &\leq |\tilde{z}(\nu, v)| \exp(|\tilde{z}(\nu, v)|) \\ &\leq \lambda C_\beta^- v^\beta \exp(C_\beta^- \lambda V^\beta) \end{aligned}$$

Recall (4.6.2) but use that $|S_0(\nu, v)| \leq \lambda \mu_1(\partial_1 g_M)$ to get

$$\left| \int_0^V \frac{1}{v} S_0(\nu, v) (\varphi(\nu, v) - \varphi(\nu, 0)) dv \right| \leq \lambda^2 \mu_1(\partial_1 g_M) C_\beta^- \exp(C_\beta^- \lambda V^\beta) \frac{V^\beta}{\beta}.$$

We choose $V = \lambda^{-\frac{2}{1+\beta}}$ such that $\lambda V^\beta = \lambda^{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ and $\lambda^2 V^\beta = V^{-1} = \lambda^{\frac{2}{1+\beta}}$ to obtain finally

$$\begin{aligned} \left| \overline{\text{LP}}_{X_\lambda}(h_\nu) - \varphi(\nu, 0) \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} S_0(\nu, v) dv \right| &\leq \lambda^{\frac{2}{1+\beta}} \left(\frac{C_\beta^- \mu_1(\partial_1 g_M) \exp(C_\beta^- \lambda^{\frac{1-\beta}{1+\beta}})}{\beta} + 2 \right. \\ &\quad \left. + 2 C_\beta^- \lambda^{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right). \end{aligned}$$

4.6.3 Algorithms

Algorithm 8 Calculate the mean perimeter function from smooth framework

Choose n_1 the number of item of the vector ν ;

Choose ν_{max} maximum of the vector ν ;

$$\nu = -\frac{\nu_{max}}{2} + (0 : n_1 - 1) \frac{\nu_{max}}{n_1 - 1} ;$$

Choose n_2 the number of item of the vector v ;

Choose v_{max} the maximum of the vector v ;

$$v = (1 : n_2) \frac{v_{max}}{n_2} ;$$

Choose r_{max} the maximum in the integral of $\varphi(\nu, v)$ and $S_0(\nu, v)$;

Choose n_3 the number of item of the vector u ;

Choose u_{min} and u_{max} the minimum and maximum of the vector u ;

$$u = u_{min} + (0 : n_3 - 1) \frac{u_{max} - u_{min}}{n_3} ;$$

1: **for** $k = 1 : n_1$ **do**

2: **for** $l = 1 : n_2$ **do**

3: Approximate $\varphi(\nu(k), v(l))$ by numerically integration of formula (4.3.3)

4: Approximate $S_0(\nu(k), v(l))$ by numerically integration of formula (4.3.4)

5: **end for**

6: **end for**

7: Approximate $\nu \rightarrow \mathbb{E}[\text{LP}_X(h_\nu, T)]$ from the formula (4.2.9)

8: Approximate $u \rightarrow \mathbb{E}[\text{Per}(E_X(u), T)]$ by inverse fourier transform

Beyond the choice of precisions n_1 , n_2 and n_3 ; it is the choice of r_{max} , v_{max} and ν_{max} that is not easy since they depend on the parameters of the field. The choices of u_{min} and u_{max} can be chosen with the minimum and maximum field.

Let $\sigma = 20$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\lambda = 9.5e^{-4}$ which corresponds to an average of 1000 points over an observation window $[0, 1024]^2$. We choose a good precision $n_1 = n_2 = n_3 = 2^{10}$, and we recommend to choose $r_{max} = 200$ and $v_{max} = 6000$. Using the tic toc command from Matlab, the algorithm lasts 1000 seconds or almost 3 hours. It is annoying for applications such as parameter applications or classification. The green curve in Figure 4.4.2 comes from this algorithm.

Recall the formula (4.4.10) obtained in Proposition 4.4.11 :

$$\overline{\overline{\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u))}} = \lambda 2\pi\sigma \mathbb{E} \left(f_{\lambda,\mu,\sigma}(u - M_\sigma V) M_\sigma \sqrt{-2\ln(V)} \right),$$

with V , a random variable uniform on $(0, 1]$ and independent from M_σ with distribution $F(dm)$, that is exponential distribution of parameter $2\pi\sigma^2\mu$. Using Monte-Carlo approximation we can approximate the function $u \mapsto \lambda 2\pi\sigma \mathbb{E} \left(f_{\lambda,\mu,\sigma}(u - M_\sigma V) M_\sigma \sqrt{-2\ln(V)} \right)$ by

$$\frac{\lambda 2\pi\sigma}{N} \sum_j^N f_{\lambda,\mu,\sigma}(u - M_{\sigma,j} V_j) \sqrt{-2\ln(V_j)} M_{\sigma,j},$$

choosing $(V_j, M_{\sigma,j})_{1 \leq j \leq N}$ iid of same law than (V, M_σ) and N sufficiently large.

Algorithm 9 Calculate the mean perimeter function from elementary framework with Monte Carlo

Choose n_3 the number of item of the vector u ;

Choose u_{min} and u_{max} the minimum and maximum of the vector u ;

$$u = u_{min} + (0 : n_3 - 1) \frac{u_{max} - u_{min}}{n_3};$$

Choose N the number of repeats in the Monte Carlo method;

1: Draw $(V_j)_{1 \leq j \leq N}$ iid with uniform law on $[0, 1]$

2: Draw $(M_{\sigma,j})_{1 \leq j \leq N}$ iid with exponential law of parameter $2\pi\sigma^2\mu$

3: Approximate $u \rightarrow \mathbb{E}[\text{Per}(E_{X_{\lambda,\mu,\sigma}}(u), T)]$ by $\frac{\lambda 2\pi\sigma}{N} \sum_{j=1}^N f_{\lambda,\mu,\sigma}(u - M_{\sigma,j} V_j) \sqrt{-2\ln(V_j)} M_{\sigma,j}$

Here there is no choice except for the precision n_3 and the sample size N of the Monte Carlo method, since u_{min} and u_{max} can be chosen experimentally. Let the same example with $\sigma = 20$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\lambda = 9.5e^{-4}$. We choose a good precision $n_3 = 2^{10}$ and $N = 2000$. Using the tic toc command from Matlab, the algorithm lasts 12 seconds. It is an excellent performance for applications.

It is also possible to use the Fourier framework with the equation (4.4.11).

Algorithm 10 Calculate the mean perimeter function from elementary framework with Fourier transform

Choose n_1 the number of item of the vector ν ;

Choose ν_{max} the maximum of the vector ν ;

$$\nu = -\frac{\nu_{max}}{2} + (0 : n_1 - 1) \frac{\nu_{max}}{n_1};$$

Choose n_3 the number of item of the vector u ;

Choose u_{min} and u_{max} the minimum and maximum of the vector u ;

$$u = u_{min} + (0 : n_3 - 1) \frac{u_{max} - u_{min}}{n_3};$$

- 1: Approximate $\nu \rightarrow \mathbb{E}[\text{LP}_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(h_\nu, T)]$ from the formula (4.4.11)
 - 2: Approximate $u \rightarrow \mathbb{E}[\text{Per}(E_{X_{\lambda, \mu, \sigma}}(u), T)]$ by inverse Fourier transform
-

Here there is no choice except for the precision n_1 and n_3 , since ν_{max} , u_{min} and u_{max} can be chosen experimentally.

Let the same example with $\sigma = 20$, $\mu = \frac{1}{100}$ and $\lambda = 9.5e^{-4}$. We choose a good precision $n_1 = n_3 = 2^{10}$. Using the tic toc command from Matlab, the algorithm lasts 1 seconds. It is a perfect performance for applications.

PERSPECTIVES

Les différents liens mis en lumière dans cette thèse entre champs aléatoires shot noise et processus ponctuels d'une part, et entre les modèles shot noise et gaussiens d'autre part, laissent place à de nombreuses perspectives. À ce titre, les résultats obtenus sur les champs shot noise pourraient être utiles dans l'étude des processus de Cox shot noise, notamment les résultats sur le périmètre et la classification. On pourrait les utiliser, par exemple, pour proposer des méthodes de validation de modèles.

La méthode employée dans le chapitre 3 pour l'estimation des paramètres, ainsi que celle employée dans le chapitre 4 pour l'approximation du périmètre par discrétisation du noyau, semblent être applicables à d'autres fonctions que le noyau gaussien. La conjecture énoncée dans le chapitre 4, sur le facteur de variation totale lors de l'approximation discrète, est un axe de recherche d'envergure qui pourrait valider théoriquement l'approche de la méthode de classification. Il est clair que cette discrétisation du noyau ne permet pas d'approcher parfaitement le périmètre, mais on pourrait effectuer la même démarche pour la caractéristique d'Euler.

Enfin, l'extension spatio-temporelle du modèle shot noise, notamment avec le noyau gaussien et l'équation de la chaleur qu'il vérifie, peut être intéressante dans l'optique de modéliser des données de ce format là. À titre d'exemple, des films de feux de forêts semblent être des données appropriées pour ce type de modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- [AAD⁺19] Diego Armentano, Jean-Marc Azaïs, Federico Dalmao, Jose R. León, and Ernesto Mordecki, *On the finiteness of the moments of the measure of level sets of random fields*, arXiv preprint arXiv :1909.10243 (2019).
- [Aal92] Odd O. Aalen, *Modelling Heterogeneity in Survival Analysis by the Compound Poisson Distribution*, *The Annals of Applied Probability* **2** (1992), no. 4, 951–972.
- [AB12] Zack W. Almquist and Carter T. Butts, *Point process models for household distributions within small areal units*, *Demographic Research* **26** (2012), 593–632.
- [ABDB21] Mariem Abaach, Hermine Biermé, and Elena Di Bernardino, *Testing marginal symmetry of digital noise images through the perimeter of excursion sets*, *Electronic Journal of Statistics* **15** (2021), no. 2.
- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. MR 1857292
- [And84] Donald WK Andrews, *Non-strong mixing autoregressive processes*, *Journal of Applied Probability* **21** (1984), no. 4, 930–934.
- [AST13] Robert J. Adler, Gennady Samorodnitsky, and Jonathan E. Taylor, *High Level Excursion Set Geometry for Non-Gaussian Infinitely Divisible Random Fields*, *The Annals of Probability* **41** (2013), no. 1, 134–169.
- [AT07] Robert J. Adler and Jonathan E. Taylor, *Random fields and geometry*, vol. 80, Springer, 2007.

- [Aur91] Franz Aurenhammer, *Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure*, ACM Computing Surveys (CSUR) **23** (1991), no. 3, 345–405.
- [AW09] Jean-Marc Azaïs and Mario Wschebor, *Level sets and extrema of random processes and fields*, John Wiley & Sons, 2009.
- [AY10] Muhammad Aljuaid and Halim Yanikomeroglu, *Investigating the Gaussian convergence of the distribution of the aggregate interference power in large wireless networks*, IEEE Transactions on Vehicular Technology **59** (2010), no. 9, 4418–4424.
- [Bad07] Adrian Baddeley, *Validation of Statistical Models for Spatial Point Patterns*, Statistical Challenges in Modern Astronomy IV, vol. 371, 2007, p. 22.
- [BB88] B. Bassan and E. Bona, *Shot Noise Random Fields*, Biomathematics and Related Computational Problems, Springer, 1988, pp. 423–427.
- [BB09] F. Baccelli and B. Blaszczyzyn, *Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume I—Theory, volume 3, No 3–4 of*, Foundations and trends in Networking **3** (2009), no. 3-4, 249–449.
- [BBS07] Adrian Baddeley, Imre Bárány, and Rolf Schneider, *Spatial Point Processes and Their Applications*, Stochastic Geometry : Lectures given at the CIME Summer School held in Martina Franca, Italy, September 13–18, 2004 (2007), 1–75.
- [BC02] A. Brix and J. Chadoeuf, *Spatio-Temporal Modelling of Weeds by Shot-Noise G Cox Processes*, Biometrical Journal **44** (2002), no. 1, 83–99.
- [BD01] Anders Brix and Peter J. Diggle, *Spatiotemporal Prediction for Log-Gaussian Cox Processes*, Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology) **63** (2001), no. 4, 823–841.
- [BD11] Hermine Biermé and Agnès Desolneux, *Regularity and Crossings of Shot Noise Processes*.
- [BD12a] ———, *Crossings of Smooth Shot Noise Processes*, The Annals of Applied Probability **22** (2012), no. 6, 2240–2281.
- [BD12b] ———, *A Fourier Approach for the Level Crossings of Shot Noise Processes with Jumps*, Journal of Applied Probability **49** (2012), no. 1, 100–113.
- [BD16] ———, *On the Perimeter of Excursion Sets of Shot Noise Random Fields*, The Annals of Probability **44** (2016), no. 1, 521–543.
- [BD18] ———, *Mean Geometry for 2D Random Fields : Level Perimeter and Level Total Curvature Integrals*.
- [BD20] ———, *Mean Geometry for 2D random fields : Level perimeter and level total curvature integrals*, The Annals of Applied Probability **30** (2020), no. 2, 561–607.

- [BD21] ———, *The effect of discretization on the mean geometry of a 2D random field*, *Annales Henri Lebesgue* **4** (2021), 1295–1345.
- [BDBDE19] Hermine Biermé, Elena Di Bernardino, Céline Duval, and Anne Estrade, *Lipschitz-Killing Curvatures of Excursion Sets for Two-Dimensional Random Fields*, *Electronic Journal of Statistics* **13** (2019), no. 1, 536–581.
- [BDD86] Robert M. Burton, André Robert Dabrowski, and Herold Dehling, *An invariance principle for weakly associated random vectors*, *Stochastic Processes and their applications* **23** (1986), no. 2, 301–306.
- [Ber21] Corinne Berzin, *Estimation of local anisotropy based on level sets*, *Electronic Journal of Probability* **26** (2021), 1–72.
- [BG97] Adrian Baddeley and Richard D. Gill, *Kaplan-Meier estimators of distance distributions for spatial point processes*, *The Annals of Statistics* (1997), 263–292.
- [BGM⁺06] Adrian Baddeley, Pablo Gregori, Jorge Mateu, Radu Stoica, and Dietrich Stoyan, *Case Studies in Spatial Point Process Modeling*, vol. 185, Springer, 2006.
- [Bie17] Hermine Biermé, *Introduction to Random Fields and Scale Invariance*.
- [Bie19] ———, *Introduction to random fields and scale invariance*, *Stochastic Geometry*, Springer, 2019, pp. 129–180.
- [Bil95] Patrick Billingsley, *Probability and measure*, third ed., *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995. MR 1324786
- [Bir88] Thomas Birkel, *A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables*, *Statistics & probability letters* **7** (1988), no. 1, 17–20.
- [BJN14] Adrian Baddeley, Aruna Jammalamadaka, and Gopalan Nair, *Multitype Point Process Analysis of Spines on the Dendrite Network of a Neuron*, *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)* **63** (2014), no. 5, 673–694.
- [BK02] Anders Brix and Wilfrid S. Kendall, *Simulation of Cluster Point Processes without Edge Effects*, *Advances in Applied Probability* **34** (2002), no. 2, 267–280.
- [BKSS00] Adrian J. Baddeley, Martin Kerscher, Katja Schladitz, and Bryan T. Scott, *Estimating the J Function without Edge Correction*, *Statistica Neerlandica* **54** (2000), no. 3, 315–328.
- [BLMV17] Rémi Bardenet, Frédéric Lavancier, Xavier Mary, and Aurélien Vasseur, *On a few statistical applications of determinantal point processes*, *ESAIM : Proceedings and Surveys* **60** (2017), 180–202.

- [BM01] Anders Brix and Jesper Møller, *Space-Time Multi Type Log Gaussian Cox Processes with a View to Modelling Weeds*, Scandinavian Journal of Statistics **28** (2001), no. 3, 471–488.
- [BMW00] Adrian J. Baddeley, Jesper Møller, and Rasmus Waagepetersen, *Non-and Semi-Parametric Estimation of Interaction in Inhomogeneous Point Patterns*, Statistica Neerlandica **54** (2000), no. 3, 329–350.
- [Bol82] Erwin Bolthausen, *On the Central Limit Theorem for Stationary Mixing Random Fields*, The Annals of Probability (1982), 1047–1050.
- [Bri99] Anders Brix, *Generalized Gamma Measures and Shot-Noise Cox Processes*, Advances in Applied Probability **31** (1999), no. 4, 929–953. MR 1747450
- [BRT15] Adrian Baddeley, Ege Rubak, and Rolf Turner, *Spatial Point Patterns : Methodology and Applications with R*, Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [BS84] A. J. Baddeley and Bernard Walter Silverman, *A cautionary example on the use of second-order methods for analyzing point patterns*, Biometrics (1984), 1089–1093.
- [BS01] Alexander Bulinski and Charles Suquet, *Normal approximation for quasi-associated random fields*, Statistics & probability letters **54** (2001), no. 2, 215–226.
- [BS07] Alexander Bulinski and Alexey Shashkin, *Limit theorems for associated random fields and related systems*, vol. 10, World Scientific, 2007.
- [BST12] Alexander Bulinski, Evgeny Spodarev, and Florian Timmermann, *Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields*, Bernoulli **18** (2012), no. 1, 100–118.
- [BT00] Adrian Baddeley and Rolf Turner, *Practical Maximum Pseudolikelihood for Spatial Point Patterns : (With Discussion)*, Australian & New Zealand Journal of Statistics **42** (2000), no. 3, 283–322.
- [BT05] ———, *Spatstat : An R Package for Analyzing Spatial Point Patterns*, Journal of statistical software **12** (2005), no. 6, 1–42.
- [BTMH05] Adrian Baddeley, Rolf Turner, Jesper Møller, and Martin Hazelton, *Residual analysis for spatial point processes (with discussion)*, Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology) **67** (2005), no. 5, 617–666.
- [Bul07] Aleksandr Vadimovich Bulinskii, *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems*, vol. 10, World Scientific, 2007.
- [BV97] Tim Bedford and J. Van den Berg, *A remark on the Van Lieshout and Baddeley J-function for point processes*, Advances in Applied Probability **29** (1997), no. 1, 19–25.

- [Cam09a] Norman Campbell, *Discontinuities in light emission*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 15, 1909, pp. 310–328.
- [Cam09b] ———, *The study of discontinuous phenomena*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 15, 1909, pp. 117–136.
- [CDBO22] Ryan Cotsakis, Elena Di Bernardino, and Thomas Opitz, *Statistical properties of a perimeter estimator for spatial excursions observed over regular grids*, working paper or pre-print (2022).
- [CG84] J. Theodore Cox and Geoffrey Grimmett, *Central Limit Theorems for Associated Random Variables and the Percolation Model*, The annals of probability **12** (1984), no. 2, 514–528.
- [CH01] Chun Chung Chan and Stephen V. Hanly, *Calculating the outage probability in a CDMA network with spatial Poisson traffic*, IEEE Transactions on Vehicular Technology **50** (2001), no. 1, 183–204.
- [Che13] Julien Chevallier, *Détection de Motifs de Dépendance Entre Neurones*, Tech. report, 2013.
- [Che16] ———, *Modélisation de Grands Réseaux de Neurones Par Processus de Hawkes*, Ph.D. thesis, Côte d’Azur, 2016.
- [CL19] Jean-François Coeurjolly and Frédéric Lavancier, *Understanding Spatial Point Patterns Through Intensity and Conditional Intensities*, Stochastic Geometry (David Coupier, ed.), vol. 2237, Springer International Publishing, Cham, 2019, pp. 45–85.
- [CM01] Rodolfo Console and Maura Murru, *A simple and testable model for earthquake clustering*, Journal of Geophysical Research : Solid Earth **106** (2001), no. B5, 8699–8711.
- [CM14] Jean-François Coeurjolly and Jesper Møller, *Variational Approach for Spatial Point Process Intensity Estimation*, Bernoulli **20** (2014), no. 3, 1097–1125.
- [CMW17] Jean-François Coeurjolly, Jesper Møller, and Rasmus Waagepetersen, *A Tutorial on Palm Distributions for Spatial Point Processes*, International Statistical Review **85** (2017), no. 3, 404–420.
- [CMW18] ———, *Palm Distributions for Log Gaussian Cox Processes*, Scandinavian Journal of Statistics **44** (2018), no. 1, 192–203.
- [CSKM13] Sung Nok Chiu, Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall, and Joseph Mecke, *Stochastic Geometry and Its Applications*, third ed., Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2013. MR 3236788
- [Cv16] O. Cronie and M. N. M. van Lieshout, *Bandwidth Selection for Kernel Estimators of the Spatial Intensity Function*, arXiv preprint arXiv :1611.10221 (2016).

- [CVL15] Ottmar Cronie and Maria Nicolette Margaretha Van Lieshout, *AJ-Function for Inhomogeneous Spatio-Temporal Point Processes*, Scandinavian journal of statistics **42** (2015), no. 2, 562–579.
- [CVL18] ———, *A Non-Model-Based Approach to Bandwidth Selection for Kernel Estimators of Spatial Intensity Functions*, Biometrika **105** (2018), no. 2, 455–462.
- [CW99] Jin Cao and Keith Worsley, *The geometry of correlation fields with an application to functional connectivity of the brain*, The Annals of Applied Probability **9** (1999), no. 4, 1021–1057.
- [Dal71] D. J. Daley, *The definition of a multi-dimensional generalization of shot noise*, Journal of Applied Probability **8** (1971), no. 1, 128–135.
- [Dam15] Rabih Damaj, *Inférence Statistique Sur Le Processus de Mino*, Ph.D. thesis, Université de Bretagne Sud, 2015.
- [DBD20] Elena Di Bernardino and Céline Duval, *Statistics for Gaussian random fields with unknown location and scale using Lipschitz-Killing curvatures*, Scandinavian Journal of Statistics (2020).
- [Ded07] Jérôme Dedecker, *Weak Dependence : With Examples and Applications*, Lecture Notes in Statistics, no. v.190, Springer, New York, 2007.
- [Dig85] Peter Diggle, *A kernel method for smoothing point process data*, Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics) **34** (1985), no. 2, 138–147.
- [Dig86] Peter J. Diggle, *Displaced amacrine cells in the retina of a rabbit : Analysis of a bivariate spatial point pattern*, Journal of neuroscience methods **18** (1986), no. 1-2, 115–125.
- [Dig90] ———, *A point process modelling approach to raised incidence of a rare phenomenon in the vicinity of a prespecified point*, Journal of the Royal Statistical Society : Series A (Statistics in Society) **153** (1990), no. 3, 349–362.
- [Dig06] ———, *Spatio-Temporal Point Processes : Methods and Applications*, Monographs on Statistics and Applied Probability **107** (2006), 1.
- [Dig13] ———, *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*, Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [DJZ15] Angelos Dassios, Jiwook Jang, and Hongbiao Zhao, *A Risk Model with Renewal Shot-Noise Cox Process*, Insurance : Mathematics and Economics **65** (2015), 55–65.
- [DL99] Paul Doukhan and Sana Louhichi, *A New Weak Dependence Condition and Applications to Moment Inequalities*, Stochastic Processes and their Applications **84** (1999), no. 2, 313–342.

- [DL02] Paul Doukhan and Gabriel Lang, *Rates in the empirical central limit theorem for stationary weakly dependent random fields*, *Statistical inference for stochastic processes* **5** (2002), no. 2, 199–228.
- [DMT09] Paul Doukhan, Nathanaël Mayo, and Lionel Truquet, *Weak Dependence, Models and Some Applications*, *Metrika* **69** (2009), no. 2-3, 199–225.
- [DN97] Claude R. Dietrich and Garry N. Newsam, *Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix*, *SIAM Journal on Scientific Computing* **18** (1997), no. 4, 1088–1107.
- [Dou94] Paul Doukhan, *Mixing : Properties and Examples*, *Lecture Notes in Statistics*, no. 85, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [DP12] Jiří Dvořák and Michaela Prokešová, *Moment Estimation Methods for Stationary Spatial Cox Processes-A Comparison*, *Kybernetika* **48** (2012), no. 5, 1007–1026.
- [DP16] ———, *Parameter Estimation for Inhomogeneous Space-Time Shot-Noise Cox Point Processes*, *Scandinavian Journal of Statistics* **43** (2016), no. 4, 939–961.
- [DPP⁺04] Michael J. Drinkwater, Quentin A. Parker, Dominique Proust, Eric Slezak, and Hernán Quintana, *The large scale distribution of galaxies in the shapley supercluster*, *Publications of the Astronomical Society of Australia* **21** (2004), no. 1, 89–96.
- [DV90] Pierre Duhamel and Martin Vetterli, *Fast Fourier transforms : A tutorial review and a state of the art*, *Signal processing* **19** (1990), no. 4, 259–299.
- [DV03] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes. Vol. I*, second ed., *Probability and Its Applications* (New York), Springer-Verlag, New York, 2003. MR 1950431
- [DV08] ———, *An Introduction to the Theory of Point Processes. Vol. II*, second ed., *Probability and Its Applications* (New York), Springer, New York, 2008. MR 2371524
- [Dvo11] J. Dvořák, *On Moment Estimation Methods for Spatial Cox Processes*.
- [Dvo14] Jiří Dvořák, *Statistical Inference for Spatial and Space-Time Cox Point Processes*, Ph.D. thesis, 2014.
- [EHKM18] Bruno Ebner, Norbert Henze, Michael A. Klatt, and Klaus Mecke, *Goodness-of-Fit Tests for Complete Spatial Randomness Based on Minkowski Functionals of Binary Images*, *Electronic Journal of Statistics* **12** (2018), no. 2, 2873–2904.
- [EPW67] James D. Esary, Frank Proschan, and David W. Walkup, *Association of Random Variables, with Applications*, *The Annals of Mathematical Statistics* (1967), 1466–1474.

- [FB02] Rob Foxall and Adrian Baddeley, *Nonparametric measures of association between a spatial point process and a random set, with geological applications*, Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics) **51** (2002), no. 2, 165–182.
- [Fel57] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York ; Chapman & Hall, Ltd., London, 1957. MR 0088081
- [Gab12] Edith Gabriel, *Représentation, Analyse et Simulation de Processus Ponctuels Spatio-Temporels*, 2012.
- [GC19] Benyamin Ghogh and Mark Crowley, *Linear and quadratic discriminant analysis : Tutorial*, arXiv preprint arXiv :1906.02590 (2019).
- [GD09] Edith Gabriel and Peter J. Diggle, *Second-Order Analysis of Inhomogeneous Spatio-Temporal Point Process Data*, Statistica Neerlandica **63** (2009), no. 1, 43–51.
- [GGM10] Bruno Galerne, Yann Gousseau, and Jean-Michel Morel, *Random phase textures : Theory and synthesis*, IEEE Transactions on image processing **20** (2010), no. 1, 257–267.
- [Gua06] Yongtao Guan, *A Composite Likelihood Approach in Fitting Spatial Point Process Models*, Journal of the American Statistical Association **101** (2006), no. 476, 1502–1512.
- [Gua08] ———, *On consistent nonparametric intensity estimation for inhomogeneous spatial point processes*, Journal of the American Statistical Association **103** (2008), no. 483, 1238–1247.
- [Guy95] Xavier Guyon, *Random fields on a network : Modeling, statistics, and applications*, Springer Science & Business Media, 1995.
- [Hei92] Lothar Heinrich, *Minimum contrast estimates for parameters of spatial ergodic point processes*.
- [HI83] R. D. Harkness and Valerie Isham, *A bivariate spatial point pattern of ants' nests*, Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics) **32** (1983), no. 3, 293–303.
- [HKP09] John Ben Hough, Manjunath Krishnapur, and Yuval Peres, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, vol. 51, American Mathematical Soc., 2009.
- [HLW97] Philip Hougaard, Mei-Ling Ting Lee, and G. A. Whitmore, *Analysis of Overdispersed Count Data by Mixtures of Poisson Variables and Poisson Processes*, Biometrics (1997), 1225–1238.
- [Hou86] Philip Hougaard, *Survival Models for Heterogeneous Populations Derived from Stable Distributions*, Biometrika **73** (1986), no. 2, 387–396.

- [HP10] Lothar Heinrich and Michaela Prokešová, *On estimating the asymptotic variance of stationary point processes*, Methodology and Computing in Applied Probability **12** (2010), no. 3, 451–471.
- [HPJ08] Gunnar Hellmund, Michaela Prokešová, and Eva B. Vedel Jensen, *Lévy-Based Cox Point Processes*, Advances in Applied Probability **40** (2008), no. 3, 603–629.
- [HS85] Lothar Heinrich and Volker Schmidt, *Normal Convergence of Multidimensional Shot Noise and Rates of This Convergence*, Advances in Applied Probability **17** (1985), no. 4, 709–730.
- [IPSS08] Janine Illian, Antti Penttinen, Helga Stoyan, and Dietrich Stoyan, *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*, vol. 70, John Wiley & Sons, 2008.
- [Jal16] Abdollah Jalilian, *On the Higher Order Product Density Functions of a Neyman–Scott Cluster Point Process*, Statistics & Probability Letters **117** (2016), 144–150.
- [JGW13] Abdollah Jalilian, Yongtao Guan, and Rasmus Waagepetersen, *Decomposition of variance for spatial Cox processes*, Scandinavian Journal of Statistics **40** (2013), no. 1, 119–137.
- [JMS12] Pablo Juan, Jorge Mateu, and M. Saez, *Pinpointing spatio-temporal interactions in wildfire patterns*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment **26** (2012), no. 8, 1131–1150.
- [JV11] Abdollah H. Jalilian and Mohammad Q. Vahidi-Asl, *Residual Analysis for Inhomogeneous Neyman–Scott Processes*, Scandinavian Journal of Statistics **38** (2011), no. 4, 617–630.
- [Kin67] John Kingman, *Completely Random Measures*, Pacific Journal of Mathematics **21** (1967), no. 1, 59–78.
- [Kin93] John Frank Charles Kingman, *Poisson processes*, no. Book, Whole, Clarendon Press, New York ;Oxford :, 1993.
- [KL01] Marie F. Kratz and José R. León, *Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields*, Journal of Theoretical Probability **14** (2001), no. 3, 639–672.
- [KM95] Claudia Klüppelberg and Thomas Mikosch, *Explosive Poisson shot noise processes with applications to risk reserves*, Bernoulli (1995), 125–147.
- [Lac15a] Raphaël Lachièze-Rey, *Bicovariograms and Euler Characteristic I. Regular Sets*, arXiv :1510.00501 [math] (2015).
- [Lac15b] ———, *Bicovariograms and Euler Characteristic of Random Fields Excursions*, arXiv :1510.00502 [math] (2015).

- [Lac16a] Raphaël Lachieze-Rey, *An analogue of Kac-Rice formula for Euler characteristic*, hal-01346935 (2016).
- [Lac16b] Raphaël Lachieze-Rey, *Two-Dimensional Kac-Rice Formula. Application to Shot Noise Processes Excursions*, arXiv :1607.05467 [math] (2016).
- [Lac19] ———, *Normal convergence of nonlocalised geometric functionals and shot-noise excursions*, *The Annals of Applied Probability* **29** (2019), no. 5, 2613–2653.
- [Law18] Thomas Joseph Lawrence, *Point Pattern Analysis on the Sphere*, Ph.D. thesis, 2018.
- [LE17] Raphaël Lachieze-Rey and Raphaël Lachì Eze-Rey, *Normal Convergence of Non-Localised Geometric Functionals and Shot Noise Excursions*, arXiv :1712.01558 [math] (2017).
- [Ler21] Antoine Lerbet, *Statistical inference on stationary shot noise random fields*, hal preprint hal-03388573f (2021).
- [LG13] Jean-Francois Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, *Mathématiques et Applications*, vol. 71, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [LM21] Raphael Lachieze-Rey and Stephen Muirhead, *Asymptotics for the critical level and a strong invariance principle for high intensity shot noise fields*, arXiv preprint arXiv :2111.09180 (2021).
- [LMR15] Frédéric Lavancier, Jesper Møller, and Ege Rubak, *Determinantal point process models and statistical inference*, *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* **77** (2015), no. 4, 853–877.
- [Loe77] Michel Loeve, *Elementary probability theory*, *Probability Theory i*, Springer, 1977, pp. 1–52.
- [LP14] Patrick Laub and Supervised Phil Pollett, *Hawkes Processes : Simulation, Estimation, and Validation*, Ph.D. thesis, 2014.
- [LP17] Günter Last and Mathew Penrose, *Lectures on the Poisson Process*, vol. 7, Cambridge University Press, 2017.
- [LR16] Frédéric Lavancier and P. Rochet, *A Tutorial on Estimator Averaging in Spatial Point Process Models*, arXiv :1607.00864 [math, stat] (2016).
- [LSY19] Guenter Last, Ryszard Szekli, and Dhandapani Yogeshwaran, *Some remarks on associated random fields, random measures and point processes*, arXiv preprint arXiv :1903.06004 (2019).
- [LTP15] Patrick J. Laub, Thomas Taimre, and Philip K. Pollett, *Hawkes Processes*, arXiv :1507.02822 [math, q-fin, stat] (2015).
- [MC18] Jesper Møller and Francisco Cuevas-Pacheco, *Log Gaussian Cox Processes on the Sphere*, arXiv :1803.03051 [math, stat] (2018).

- [MCR⁺19] M. Mehdi Moradi, Ottmar Cronie, Ege Rubak, Raphael Lachièze-Rey, Jorge Mateu, and Adrian Baddeley, *Resample-smoothing of Voronoi intensity estimators*, *Statistics and computing* **29** (2019), no. 5, 995–1010.
- [MD10] Jesper Møller and Carlos Dias-Avalos, *Structured Spatio-Temporal Shot-Noise Cox Point Process Models, with a View to Modelling Forest Fires*, *Scandinavian Journal of Statistics* **37** (2010), no. 1, 2–25.
- [MG12] Jesper Møller and Mohammad Ghorbani, *Aspects of Second-Order Analysis of Structured Inhomogeneous Spatio-Temporal Point Processes*, *Statistica Neerlandica* **66** (2012), no. 4, 472–491.
- [MMK14] T. Mrkvička, Milan Muška, and J. Kubečka, *Two Step Estimation for Neyman-Scott Point Process with Inhomogeneous Cluster Centers*, *Statistics and Computing* **24** (2014), no. 1, 91–100.
- [Møl03] Jesper Møller, *Shot Noise Cox Processes*, *Advances in Applied Probability* **35** (2003), no. 3, 614–640. MR 1990607
- [Møl06] ———, *Properties of Spatial Cox Process Models*.
- [MR05] Jesper Møller and Jakob G. Rasmussen, *Perfect Simulation of Hawkes Processes*, *Advances in applied probability* **37** (2005), no. 3, 629–646.
- [MR06] ———, *Approximate Simulation of Hawkes Processes*, *Methodology and Computing in Applied Probability* **8** (2006), no. 1, 53–64.
- [MS13] Daniel Meschenmoser and A. Shashkin, *Functional central limit theorem for the measures of level surfaces of the Gaussian random field*, *Theory of Probability & Its Applications* **57** (2013), no. 1, 162–172.
- [MSW98] Jesper Møller, Anne Randi Syversveen, and Rasmus Plenge Waagepetersen, *Log Gaussian Cox Processes*, *Scandinavian Journal of Statistics. Theory and Applications* **25** (1998), no. 3, 451–482. MR 1650019
- [MT05] Jesper Møller and Giovanni Luca Torrisi, *Generalised Shot Noise Cox Processes*, *Advances in Applied Probability* **37** (2005), no. 1, 48–74.
- [MT07] ———, *The Pair Correlation Function of Spatial Hawkes Processes*, *Statistics & probability letters* **77** (2007), no. 10, 995–1003.
- [MW04] Jesper Møller and Rasmus Plenge Waagepetersen, *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, vol. 100, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. MR 2004226
- [MW07] Jesper Møller and Rasmus P. Waagepetersen, *Modern Statistics for Spatial Point Processes*, *Scandinavian Journal of Statistics* **34** (2007), no. 4, 643–684.
- [New80] Charles M. Newman, *Normal fluctuations and the FKG inequalities*, *Communications in Mathematical Physics* **74** (1980), no. 2, 119–128.

- [New84] ———, *Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables*, Lecture Notes-Monograph Series (1984), 127–140.
- [OB82] Enzo Orsingher and Francesco Battaglia, *Probability Distributions and Level Crossings of Shot Noise Models*, *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* **8** (1982), no. 1, 45–61.
- [Oga88] Yosihiko Ogata, *Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes*, *Journal of the American Statistical association* **83** (1988), no. 401, 9–27.
- [Pap71] At Papoulis, *High density shot noise and Gaussianity*, *Journal of Applied Probability* **8** (1971), no. 1, 118–127.
- [PD14] Michaela Prokešová and Jiří Dvořák, *Statistics for Inhomogeneous Space-Time Shot-Noise Cox Processes*, *Methodology and Computing in Applied Probability* **16** (2014), no. 2, 433–449.
- [PDJ17] Michaela Prokešová, Jiří Dvořák, and Eva B. Vedel Jensen, *Two-Step Estimation Procedures for Inhomogeneous Shot-Noise Cox Processes*, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **69** (2017), no. 3, 513–542.
- [PDL19] Arnaud Poinas, Bernard Delyon, and Frédéric Lavancier, *Mixing properties and central limit theorem for associated point processes*, *Bernoulli* **25** (2019), no. 3, 1724–1754.
- [Pit82] Loren D. Pitt, *Positively correlated normal variables are associated*, *The Annals of Probability* (1982), 496–499.
- [Pow14] Catherine E. Powell, *Generating Realisations of Stationary Gaussian Random Fields by Circulant Embedding.*, 2014.
- [PSv⁺13] Joshua Parker, Eilon Sherman, Matthias van de Raa, Devaraj van der Meer, Lawrence E. Samelson, and Wolfgang Losert, *Automatic Sorting of Point Pattern Sets Using Minkowski Functionals*, *Physical Review E* **88** (2013), no. 2, 022720.
- [PT11] Giovanni Peccati and Murad S. Taqqu, *Wiener Chaos : Moments, Cumulants and Diagrams*, Bocconi & Springer Series, vol. 1, Springer Milan, Milano, 2011.
- [Rei18] Alex Reinhart, *A Review of Self-Exciting Spatio-Temporal Point Processes and Their Applications*, *Statistical Science* **33** (2018), no. 3, 299–318.
- [Rey15] Patricia Reynaud-Bouret, *Hawkes Processes and Application in Neuroscience and Genomic*, 2015.
- [Ric44] Stephen O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, *The Bell System Technical Journal* **23** (1944), no. 3, 282–332.

- [Ric77] John Rice, *On generalized shot noise*, *Advances in Applied Probability* **9** (1977), no. 3, 553–565.
- [Rip77] Brian D. Ripley, *Modelling spatial patterns*, *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* **39** (1977), no. 2, 172–192.
- [Rip05] ———, *Spatial statistics*, vol. 575, John Wiley & Sons, 2005.
- [RJ19] Anders Rønn-Nielsen and Eva B. Vedel Jensen, *Central Limit Theorem for Mean and Variogram Estimators in Lévy-Based Models*, *Journal of Applied Probability* **56** (2019), no. 1, 209–222.
- [RLMX17] Marian-Andrei Rizoiu, Young Lee, Swapnil Mishra, and Lexing Xie, *A Tutorial on Hawkes Processes for Events in Social Media*, arXiv preprint arXiv :1708.06401 (2017).
- [Ros56] Murray Rosenblatt, *A Central Limit Theorem and a Strong Mixing Condition*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **42** (1956), no. 1, 43.
- [RR89] Balram S. Rajput and Jan Rosinski, *Spectral Representations of Infinitely Divisible Processes*, *Probability Theory and Related Fields* **82** (1989), no. 3, 451–487.
- [RŽ97] Jan Rosiński and Tomasz Żak, *The Equivalence of Ergodicity and Weak Mixing for Infinitely Divisible Processes*, *Journal of Theoretical Probability* **10** (1997), no. 1, 73–86.
- [SB00] Katja Schladitz and Adrian J. Baddeley, *A Third Order Point Process Characteristic*, *Scandinavian journal of statistics* **27** (2000), no. 4, 657–671.
- [Sch17] Thorsten Schmidt, *Shot-noise processes in finance*, *From Statistics to Mathematical Finance*, Springer, 2017, pp. 367–385.
- [Spo13] Evgeny Spodarev, *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields : Asymptotic Methods*, vol. 2068, Springer, 2013.
- [Tok11] Ioane Muni Toke, *An Introduction to Hawkes Processes with Applications to Finance*, 2011.
- [TOS08] Ushio Tanaka, Yoshihiko Ogata, and Dietrich Stoyan, *Parameter Estimation and Model Selection for Neyman-Scott Point Processes*, *Biometrical Journal* **50** (2008), no. 1, 43–57.
- [Val12] Larissa Valmy, *Modèles Hiérarchiques et Processus Ponctuels Spatio-Temporels-Applications En épidémiologie et En Sismologie*, Ph.D. thesis, Université des Antilles-Guyane, 2012.
- [van12] Marie-Colette NM van Lieshout, *On Estimation of the Intensity Function of a Point Process*, *Methodology and Computing in Applied Probability* **14** (2012), no. 3, 567–578.

- [VL00] M. N. M. Van Lieshout, *Markov point processes and their applications*, World Scientific, 2000.
- [VLB96] M. N. M. Van Lieshout and A. J. Baddeley, *A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns*, *Statistica Neerlandica* **50** (1996), no. 3, 344–361.
- [VW91] Jarke J. Van Wijk, *Spot noise texture synthesis for data visualization*, Proceedings of the 18th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1991, pp. 309–318.
- [Waa07] Rasmus Plenge Waagepetersen, *An Estimating Function Approach to Inference for Inhomogeneous Neyman–Scott Processes*, *Biometrics* **63** (2007), no. 1, 252–258.
- [Was13] Larry Wasserman, *All of statistics : A concise course in statistical inference*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [WG09] Rasmus Waagepetersen and Yongtao Guan, *Two-Step Estimation for Inhomogeneous Spatial Point Processes*, *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* **71** (2009), no. 3, 685–702.
- [Wor95] Keith J. Worsley, *Boundary corrections for the expected Euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics*, *Advances in Applied Probability* **27** (1995), no. 4, 943–959.
- [Zhe11] Cengbo Zheng, *Multi-dimensional " Malliavin-Stein " method on the Poisson space and its applications to limit theorems*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2011.

Études statistiques et géométriques de champs aléatoires shot noise. Similarités et différences avec les modèles gaussiens.

Résumé

Cette thèse a pour but l'étude de nombreux aspects des champs aléatoires shot noise. La structure de faible dépendance entre les variables éloignées, mise en lumière par la notion d'association, permet de montrer la normalité asymptotique vectorielle des estimateurs des moments d'ordre 1 et 2 ainsi que d'explicitier leurs variances et covariances asymptotiques. D'autres informations, spécifiques aux champs aléatoires, proviennent des caractéristiques géométriques des niveaux d'excursion. La densité de périmètre est l'une d'elles, et les précédents travaux se séparent en deux catégories : le cas des champs lisses et le cas des champs élémentaires. Concernant les champs lisses, le comportement gaussien à haute intensité est également observé sur la densité de périmètre. À petite intensité, on observe un tout autre comportement qui se rapproche du cadre élémentaire.

Une attention particulière est portée au modèle avec un noyau gaussien et une marque exponentielle qui possède des propriétés remarquables. Ce modèle est paramétré par un triplet (λ, μ, σ) qu'on estime à partir des estimateurs consistants et asymptotiquement normaux des moments, propriétés qui sont ainsi transmises aux estimateurs des paramètres. L'approximation de ce champ lisse par une discrétisation du noyau gaussien permet d'obtenir une expression de la densité de périmètre plus malléable, en utilisant le cadre élémentaire et en faisant tendre le pas de discrétisation vers 0. Les formules sont quasi-explicites et permettent, couplées avec la densité d'aire, de procéder à une classification entre les modèles shot noise et gaussien, et ce malgré leur forte ressemblance à haute intensité.

Mots-clés : champs aléatoire, shot noise, ensembles d'excursion, périmètre, inférence statistique

Abstract

This thesis is devoted to the study of many aspects of shot noise random fields. The structure of weak dependence between the distant variables, highlighted by the notion of association, makes it possible to show the vectorial asymptotic normality of the estimators of the first and second order moments as well as to explain their asymptotic variances and covariances. Other informations, specific to random fields, come from the geometric characteristics of the excursion levels. The perimeter density is one of them and previous work took two different approaches : the case of smooth fields and the case of elementary fields. Concerning smooth fields, the Gaussian behaviour at high intensity is also observed on the perimeter density. At low intensity, a completely different behaviour is observed, which is close to the elementary framework.

Special attention is devoted to the model with a Gaussian kernel and an exponential mark which has remarkable properties. This model is parameterized by a triplet (λ, μ, σ) which is estimated from the consistent and asymptotically normal estimators of the moments, properties which are thus transmitted to the estimators of the parameters. Approximating this smooth field by a Gaussian kernel discretization allows to obtain a more malleable perimeter density expression, using the elementary framework and making the discretization step towards 0. The formulas are quasi-explicit and allow, coupled with the area density, to proceed to a classification between the shot noise and Gaussian models, despite their strong similarity at high intensity.

Keywords: random fields, shot noise, excursion sets, perimeter, statistical inference