HAL
open science

Structures géométriques et bords des espaces symétriques

Raphaël V Alexandre

To cite this version:

Raphaël V Alexandre. Structures géométriques et bords des espaces symétriques. Géométrie différentielle [math.DG]. Sorbonne Université, 2022. Français. NNT : 2022SORUS132 . tel-03779876v2

HAL Id: tel-03779876

https://theses.hal.science/tel-03779876v2

Submitted on 25 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de mathématiques

présentée par :

Raphaël V. Alexandre

STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES ET BORDS DES ESPACES SYMÉTRIQUES

dirigée par :

Elisha Falbel

compte tenu des rapports scientifiques de :

Charles Frances & John R. Parker

soutenue publiquement le 20 juin 2022 devant le jury composé de :

Martin Deraux	Université Grenoble Alpes	Examinateur
Sorin Dumitrescu	Université Côte d'Azur	Examinateur
Elisha Falbel	Sorbonne Université	Directeur de thèse
Charles Frances	Université de Strasbourg	Rapporteur
Julien Marché	Sorbonne Université	Examinateur
John R. Parker	Durham University	Rapporteur
Fabrice Rouillier	Inria Paris	Examinateur

Sorbonne Université
École doctorale Paris Centre — ED 386
Sorbonne Université et Université de Paris, CNRS, Inria
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche — UMR 7586

STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES ET BORDS DES ESPACES SYMÉTRIQUES

Thèse de doctorat de mathématiques

STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES & BORDS DES ESPACES SYMÉTRIQUES

Thèse de doctorat de mathématiques

présentée par :

Raphaël Victor Alexandre

dirigée par :

Elisha Falbel

compte tenu des rapports scientifiques de :

Charles Frances & John R. Parker

soutenue publiquement le 20 juin 2022 devant le jury composé de :

Martin Deraux	Université Grenoble Alpes	Examinateur
Sorin Dumitrescu	Université Côte d'Azur	Examinateur
Elisha Falbel	Sorbonne Université	Directeur de thèse
Charles Frances	Université de Strasbourg	Rapporteur
Julien Marché	Sorbonne Université	Examinateur
John R. Parker	Durham University	Rapporteur
Fabrice Rouillier	Inria Paris	Examinateur

Sorbonne Université
École doctorale Paris Centre — ED 386
Sorbonne Université et Université de Paris, CNRS, Inria
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche — UMR 7586

Paris
MM XX II

À ma famille.

Sommaire

Introduction — Géométries à rayons et ensembles limites 1
Remerciements IX

I Complétude géométrique de variétés fermées

I Convexité géodésique 1
II Géométrie nil-affine à rayons 11

II Exploration de représentations de groupe fondamentaux

III Techniques de calculs d'ensembles limites 65
IV Redondance des groupes de triangles 73

Galerie des images des expérimentations 93
Bibliographie 111
Table des matières 117

Introduction

Géométries à rayons et ensembles limites

Sur une variété lisse, la donnée d'une structure géométrique modelée sur une géométrie (G, X) — d'un groupe G agissant sur un espace X — est celle d'un atlas de cartes à valeurs dans X et à transitions dans G. Cette donnée analytique sur une variété M est équivalente à celle d'un couple géométrique (D, ρ), composé d'une développante $D\colon \widetilde{M} \to X$, qui est un difféomorphisme local depuis le revêtement universel $\widetilde{M} \to M$, et d'un morphisme d'holonomie équivariant $\rho\colon \pi_1(M) \to G$, dont l'image est appelée groupe d'holonomie. À partir d'une telle variété, deux questions géométriques se posent. *La variété est-elle complète ?* Cela signifierait que la développante serait un difféomorphisme (nous choisirons toujours X simplement connexe). *Sinon, que pouvons-nous en dire ?*

Notre recherche sur les structures géométriques des bords des espaces symétriques s'est organisée autour d'une charnière théorique. Cette charnière est propre aux bords des espaces symétriques de rang un. Ces derniers sont exactement les bords des espaces hyperboliques sur les quatre corps usuels : réel, complexe, quaternionique et octonionique. Sur le bord d'un tel espace, il existe une relation profonde entre la géométrie d'une variété et l'ensemble limite de son groupe d'holonomie. L'ensemble limite d'un sous-groupe est un compact minimal — pour l'action de ce sous-groupe — du bord de l'espace symétrique. Il constitue une donnée dynamique cruciale pour étudier la géométrie des variétés. Un phénomène connu dans le cas réel [1] [2], abordé dans le cas complexe [3] et dont nous proposons une approche générale [4], est le suivant.

Conjecture (II.71, p. 61) *Considérons une variété fermée connexe modelée sur le bord d'un espace symétrique de rang un. Si sa développante n'est pas surjective, alors c'est un revêtement sur son image.*

Nous proposerons une preuve de cette conjecture, sous la réserve de l'accomplissement d'un programme théorique que nous allons esquisser. Autour de cette preuve, nous organisons notre travail selon deux thématiques.

(1) L'étude des variétés fermées modelées sur une composante ouverte et dense d'un bord d'un espace symétrique.

(2) Une expérimentation sur la forme et la diversité des ensembles limites en géométrie hyperbolique complexe.

1. [KP85] Ravi S. Kulkarni et Ulrich Pinkall, « Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry », 1985.
2. [Mat92] Shigenori Matsumoto, « Foundations of flat conformal structure », 1992.
3. [FG94] Elisha Falbel et Nikolay Gusevskii, « Spherical CR-manifolds of dimension 3 », 1994.
4. [Ale21a] R. V. Alexandre, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.

I — Complétude des variétés fermées

Le premier axe que nous présentons est celui de la complétude — et de l'incomplétude — de variétés fermées modelées sur des géométries nil-affines. Ces géométries apparaissent à travers des composantes ouvertes et denses des géométries paraboliques — elles-mêmes vues comme composantes des bords des espaces symétriques.

Géométrie affine

La géométrie affine est décrite par le groupe affine $\mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ agissant sur l'espace $\mathbf{R}^n$. La délicatesse de l'étude des variétés affines repose sur la non-existence d'une métrique invariante par le groupe affine. Les variétés fermées affines peuvent être incomplètes, alors que ce phénomène ne se produit jamais dans le cas euclidien — ce cas étant exactement celui où une métrique est préservée. L'isotropie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ peut être soumise à la décomposition $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = KAK$ de Cartan. Le sous-groupe A est le groupe des matrices diagonales à coefficients strictement positifs — ce sont les valeurs singulières d'une transformation. Le sous-groupe K est le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$. Bien souvent, la difficulté que nous avons à décrire la géométrie d'une variété fermée dépend de la projection de la partie linéaire de son holonomie dans le sous-groupe A.

La complétude, mais aussi l'incomplétude, sont deux propriétés intéressantes à explorer en géométrie affine. La conjecture de Markus [5] prétend que *toute variété fermée affine à volume parallèle est complète*. Cette conjecture encore ouverte symbolise la difficulté de la classification des variétés affines fermées. Carrière [6] a montré la complétude de toutes les variétés fermées dont l'holonomie linéaire est à valeurs dans $\mathrm{SO}(n-1,1)$. C'est un cas important de la conjecture de Markus. Le sous-groupe $\mathrm{SO}(n-1,1)$ se décompose en KA_CK, avec $A_C \subset A$ le sous-groupe $A_C = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1, \lambda^{-1})\} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Ce sous-groupe KA_CK est ainsi celui des transformations de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ avec au plus une valeur singulière tendant vers zéro. C'est ce que Carrière appelle l'hypothèse de *discompacité un*. Nous remarquons que A_C est *de dimension un*. Par ailleurs, Fried [7] a démontré qu'une variété fermée de similitude est complète ou radiante : sa développante revêt le complémentaire d'un point. Ce théorème est donc formulé avec l'hypothèse suivante : la partie linéaire de l'holonomie a pour projection dans A un sous-groupe de $A_F = \{\lambda\,\mathrm{id}\} \subset A$ qui correspond à l'ensemble des homothéties. Ce sous-groupe A_F est *de dimension un et est centralisé par le compact maximal*.

Nous dirons qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrivant $K_RA_R \subset KAK$ est *une isotropie à rayons* si $K_R \subset K$ centralise un sous-groupe $A_R \subset A$. Nous pensons que les géométries à rayons sont une classe cruciale de géométries affines. Nous proposons de débuter l'investigation de ces géométries en explorant les variétés fermées modelées sur les géométries à rayons *où la dimension de A_R est un*. Cela imite les cas de Fried et Carrière sans pour autant supposer une dynamique de A_R équivalente à A_F ou A_C. Nous appelons *rang* la dimension de A_R. Nous formulons l'hypothèse de la *relative homogénéité* en rang un : le groupe diagonal A_R de rang un est choisi de sorte que chaque matrice a pour diagonale $(\lambda^p, \dots, \lambda^p, \lambda^{-q}, \dots, \lambda^{-q}, 1, \dots, 1)$,

5. [Mar62] Lawrence F. Markus, « Cosmological models in differential geometry, mimeographed notes », 1962.
6. [Car89] Yves Carrière, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.
7. [Fri80] David Fried, « Closed similarity manifolds », 1980.

avec $p, q > 0$ fixés. Au cours du chapitre II, nous contribuons à l'étude des variétés affines fermées en montrant le résultat suivant.

THÉORÈME (II.52, p. 47 ; II.61, p. 53 ; II.67, p. 57) *Soit* $(G_1, \mathbf{R}^n)$ *une géométrie à rayons de rang un relativement homogène. Soit* M *une* $(G_1, \mathbf{R}^n)$*-variété fermée connexe.*

(1) Si M *n'est pas complète, alors la développante* $D\colon \widetilde{M} \to \mathbf{R}^n - I$ *est un revêtement sur son image, avec* I *un sous-espace affine.*

(2) Si G_1 *a un volume invariant, alors* M *est complète.*

(3) Si le groupe des automorphismes de M *est non compact, alors* M *est complète.*

C'est ce théorème que nous déclinerons pour des géométries de bords d'espaces symétriques. En géométrie affine — qui est par ailleurs une telle composante de bord —, il apporte de nouveaux cas à la conjecture de Markus. Prenons par exemple l'isotropie linéaire décrite par les produits de matrices de $K_R A_R$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SO}(3) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} & \\ & \lambda^{-3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Alors, cette isotropie linéaire à rayons de rang un n'est ni de discompacité un (mais de discompacité trois) ni résoluble [8]. Elle est bien relativement homogène et à volume invariant. Par conséquent, les 4-variétés fermées correspondantes vérifient la conjecture de Markus.

D'UN BORD D'UN ESPACE SYMÉTRIQUE AUX GÉOMÉTRIES NIL-AFFINES

Nous décrivons à présent le passage de la géométrie affine à la question des bords des espaces symétriques. Cela se produit à travers la *géométrie nil-affine*. Celle-ci est la généralisation directe de la géométrie affine à un groupe nilpotent qui prend la place du groupe abélien des translations de $\mathbf{R}^n$. Les translations deviennent les translations à gauche d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N et son isotropie est encore un groupe linéaire $\mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$ constitué des transformations linéaires sur l'algèbre de Lie compatibles avec les translations à gauche de N.

Nous souhaitons montrer que cette généralisation est suffisamment intéressante car elle intervient dans des contextes géométriques très variés. Nous montrons notamment que toutes les géométries des bords des espaces symétriques font intervenir une géométrie nil-affine. Ces géométries portent toujours des variétés complètes et incomplètes. Les questions géométriques que nous nous posions sur les variétés affines se posent dans les mêmes termes pour les géométries nil-affines.

Avec un espace symétrique non compact G/K sans facteur euclidien, il nous faut tout d'abord discuter de ce que nous appellerons le *bord* de l'espace. Une première approche consisterait à regarder son bord de visibilité. C'est la compactification qui ajoute les points finaux des géodésiques. Malheureusement, en raison de l'existence de plats maximaux de dimension

8. [GH86] William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH, « Affine manifolds and orbits of algebraic groups », 1986.

généralement plus grande que un, ce bord n'est pas homogène par l'action du groupe [9]. Nous considérons donc des composantes de ce bord G/P, appelées *géométries paraboliques* ou *géométries de drapeaux (partiels)*, en prenant un sous-groupe parabolique P comme isotropie. Un tel sous-groupe fermé va fixer le bord d'une chambre positive de Weyl d'un plat maximal ou de l'intersection de plusieurs telles chambres [10].

La question de la géométrie des variétés fermées modelées sur une géométrie parabolique est cruciale. Elle est aussi particulièrement difficile. Notre idée consiste à réduire la géométrie parabolique $(G, G/P)$ en une géométrie d'une composante ouverte et dense $(P, P/L)$, où L est un facteur de Levi de P. Dans le cas des espaces symétriques de rang un, cette composante est exactement le complémentaire d'un seul point. En rang plus grand, cette composante $P/L \subset G/P$ est aussi connue sous le nom de *strate de Schubert ouverte* chez KAPOVICH, LEEB et PORTI [11]. La géométrie $(P, P/L)$ de cette composante, nous l'appelons *géométrie de Levi* de la géométrie parabolique $(G, G/P)$. Il est important de formuler la remarque suivante : $P/L \cong N$ *est l'espace d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.*

Ces géométries de Levi sont riches et difficiles à étudier pleinement. Par exemple, la géométrie affine est une géométrie de Levi de la géométrie projective. Nous proposons d'amorcer l'analyse des variétés fermées en étendant les résultats affines — et notamment notre contribution précédente — au cas nil-affine. Il s'avère — et c'est à notre avis le meilleur argument pour notre hypothèse — que les géométries à rayons sont des exemples particulièrement importants dans les géométries de Levi. Ainsi, sur toute géométrie parabolique où le groupe $P = B$ est un groupe de Borel, *la géométrie de Levi est exactement une géométrie à rayons* et son rang comme géométrie à rayons est égal au rang de l'espace symétrique.

Il existe de forts obstacles techniques à ce souhait de généralisation des résultats au contexte nil-affine. Nous commençons [12] par traiter la question de la convexité des espaces nilpotents. Ce sera l'objet du premier chapitre. Le chapitre II a pour objectif de démontrer le résultat suivant, tout à fait analogue au cas affine mais nécessitant une hypothèse technique supplémentaire (la relative intégrabilité est une condition sur le crochet de Lie).

THÉORÈME (II.52, p. 47 ; II.61, p. 53 ; II.67, p. 57) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un, relativement homogène, relativement intégrable et d'ordre de nilpotence au plus deux. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe.*

(1) Si M n'est pas complète, alors la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement sur son image, avec I un sous-espace nil-affine.

(2) Si G_1 a un volume invariant, alors M est complète.

(3) Si le groupe des automorphismes de M est non compact, alors M est complète.

9. Nous penserons au fait que l'intersection de deux plats maximaux doit toujours être envoyée sur l'intersection de deux plats maximaux. Par conséquent, un point au bord de cette intersection n'est jamais envoyé sur le bord d'une géodésique régulière.

10. Nous pouvons donner une image géométrique plus complète. Les bords des chambres de Weyl sont décomposés selon leur type — tout d'abord le bord de l'intérieur de la chambre, puis les bords des murs qui sont à l'intersection de deux chambres, ou trois chambres, etc. Une géométrie parabolique consiste au choix d'un seul type de bord. Ensuite, il s'agit d'écraser tous les bords d'un même type en des points. Le groupe agit transitivement sur ces points parce qu'il agit transitivement sur la collection des plats maximaux.

11. [KLP18] Michael KAPOVICH, Bernhard LEEB et Joan PORTI, « Dynamics on flag manifolds: domains of proper discontinuity and cocompactness », 2018.

12. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.

Ce résultat s'applique non seulement à une gamme de bords d'espaces symétriques, mais aussi à des constructions dont les origines sont différentes. Par exemple, une géométrie lagrangienne de contact apparaît chez FALBEL, MION-MOUTON et VELOSO [13], et correspond à une géométrie de Levi du groupe $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. Un analogue complexe que nous proposons correspond à la géométrie de Levi de dimension cinq du groupe $\mathrm{SU}(2,2)$. Ce groupe fournit un espace symétrique hermitien irréductible de rang deux. La géométrie de Levi de dimension cinq s'identifie à $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}$, muni du crochet de Heisenberg d'ordre deux de nilpotence — envoyant le sous-espace $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{R}$, qui est le centre —, et peut être munie de la géométrie à rayons dont l'isotropie linéaire sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ est :

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & \\ & e^{i\theta} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbf{C}} & & \\ & \lambda^{-1}\,\mathrm{id}_{\mathbf{C}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Cette géométrie à rayons est bien relativement homogène, relativement intégrable — car ici, le crochet du sous-espace contracté avec le sous-espace dilaté est à valeurs dans le sous-espace neutre — et est d'ordre de nilpotence au plus deux. À nouveau, elle préserve un volume sans être de discompacité un. Les variétés fermées correspondantes — qui ne sont pas exactement affines, mais plutôt nil-affines — vérifient encore la conjecture de Markus.

PROPOSITION D'UN PROGRAMME THÉORIQUE

Nous en arrivons ainsi à la description d'un programme plus général qui vise à mieux comprendre les géométries à rayons et leurs variétés fermées. Cet objectif à long terme permettrait de conclure soit positivement à certaines généralisations qui nous semblent crédibles, soit négativement à ces généralisations par de nouveaux contre-exemples qui se révéleraient également importants pour d'autres théories.

CONJECTURE (II.2, p. 15; II.61, p. 53; II.67, p. 57) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe.*

(1) Si M n'est pas complète, alors la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement sur son image, avec I un sous-espace nil-affine.

(2) Si G_1 a un volume invariant, alors M est complète.

(3) Si le groupe des automorphismes de M est non compact, alors M est complète.

Nous formulons nos résultats actuels dans ce que nous appelons le *cadre relatif* : relativement homogène (hypothèse sur les degrés des dilatations et contractions), relativement intégrable (hypothèse sur le crochet des sous-espaces stable, instable et neutre) et d'ordre de nilpotence au plus deux. Nous pensions initialement pouvoir prouver complètement la conjecture dans le *cadre étendu* : purement à dilatations ou d'ordre de nilpotence au plus deux. Même si de nombreuses propositions intermédiaires sont encore prouvées et étayent le cadre étendu, il nous semble aujourd'hui encore conjecturel, y compris sous les hypothèses

13. [FMMV21] Elisha FALBEL, Martin MION-MOUTON et Jose M. VELOSO, « Cartan connections and path structures with large automorphism groups », 2021.

de Miner [14] ou de nos premiers travaux [15]. Cela s'explique par une difficulté technique assez subtile qui n'avait pas suffisamment émergé. Cette difficulté — qui est la plus pointue parmi d'autres — est liée à un problème géométrique probablement équivalent.

Conjecture (II.1, p. 15) *Soit* $(G_1, \mathcal{N})$ *une géométrie à rayons de rang un sans rotation. Soit* M *une* $(G_1, \mathcal{N})$*-variété fermée connexe. Toute géodésique incomplète de* M *converge uniformément vers un lacet géodésique incomplet.*

À travers cette conjecture de nature topologique, nous pouvons dépeindre la principale différence entre le cas relativement homogène et le cas plus général, y compris lorsque la géométrie est purement à dilatations. Dans le cas relativement homogène, comme avec Fried, nous pouvons finir par montrer que *toute géodésique incomplète est déjà un lacet géodésique incomplet*. De plus, des exemples dans le cas non relativement homogène n'ont qu'un petit nombre de lacets géodésiques incomplets : les autres géodésiques incomplètes convergent vers des lacets attractifs.

Cette conjecture permettrait aussi un point de différenciation fort entre les géodésiques incomplètes d'une part et les rayons géodésiques complets d'autre part. Il s'avère qu'il n'est pas du tout aisé de distinguer topologiquement ces deux familles. S'il était vrai que les géodésiques incomplètes convergent vers un lacet, cela serait une contrainte forte, puisque nous savons que les rayons géodésiques ne possèdent pas cette propriété.

II — Ensembles limites en géométrie hyperbolique complexe

Curieusement, seules quelques rares expérimentations avaient été menées pour tenter de dessiner des ensembles limites de la géométrie du plan hyperbolique complexe. Le bord de ce plan est une sphère tridimensionnelle. Pourtant, un très grand nombre de représentations sont connues, notamment à travers les travaux de Falbel, Koseleff et Rouillier [16]. Ces représentations, qui sont explicitement manipulables, ne sont pas encore complètement comprises. Notre idée était assez simple [17] : *parmi ces représentations, lesquelles ont un ensemble limite fractal ?* Lorsque c'est le cas, nous savons que cela implique — au moins d'un point de vue expérimental — que la représentation doit être discrète, cette dernière propriété étant très difficile à montrer *a priori*.

Au chapitre III, nous expliquons les principes généraux de nos méthodes numériques pour procéder au calcul des ensembles limites. Ces méthodes sont nécessairement délicates, car le calcul d'un ensemble limite n'est pas évident et nous avons eu l'ambition d'en calculer un très grand nombre. En plus de ces aspects d'ordre mathématique, certains leviers d'ingénierie ont dû être pensés. Nous avons rendu libre le code source [18] de nos simulations [19]. En fin d'ouvrage, nous montrons un extrait des simulations que nous avons effectuées.

14. [Min90] Robert R. Miner, « Spherical CR manifolds with amenable holonomy », 1990.
15. [Ale21a] R. V. Alexandre, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.
16. [FKR15] Elisha Falbel, Pierre-Vincent Koseleff et Fabrice Rouillier, « Representations of fundamental groups of 3-manifolds into PGL(3, **C**) : exact computations in low complexity », 2015.
17. [Ale21b] R. V. Alexandre, « Redundancy of Triangle Groups in Spherical CR Representations », 2021.
18. [Ale20a] R. V. Alexandre, *https://github.com/R-Alexandre/CRLimitSets*, 2020.
19. [Ale20b] R. V. Alexandre, *https://rphalexandre.fr/ensembles-limites/*, 2020.

Le chapitre IV fournit une analyse de nos résultats. Lorsque nous avons accompli les simulations sur les 1 653 représentations (à bord unipotent) de [FKR15], il nous est apparu que seul un petit nombre de représentations (à peine 70) donnaient un ensemble limite fractal. Par ailleurs, ces ensembles limites ne forment pas une famille particulièrement diverse de formes. Nous nous sommes rendu compte d'un phénomène décrit par DERAUX [20] : *la plupart des représentations se factorisent par le groupe d'un triangle hyperbolique complexe.*

La recherche autour des groupes des triangles hyperboliques complexes est vive. Une conjecture phare de SCHWARTZ [21] est encore ouverte sur la discrétude et l'injectivité de la représentation de ces triangles hyperboliques complexes. Heureusement, en ce qui nous concerne, nous avons essentiellement des triangles d'un même type — à savoir $(3,3,n)$ avec $4 \leq n \leq \infty$ — et la plupart des résultats structurels sont connus. Par PARKER, WANG et XIE [22] et PARKER et WILL [23], la conjecture de Schwartz est démontrée pour ces triangles. LAWTON [24] et WILL [25] nous fournissent les outils pour démontrer qu'une factorisation surjective se produit. Aussi, GUILLOUX et WILL [26] ont donné une description effective des déformations de ces représentations pour ces types de triangles.

À partir de ces éléments, nous avons élaboré la stratégie suivante. Considérons le groupe abstrait

$$\Lambda_2(3,3,n) = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^n = e \rangle \tag{3}$$

et sa représentation $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ sur le groupe d'un triangle hyperbolique complexe spécifiquement choisi pour des raisons que nous décrivons au chapitre IV. À partir de la sélection des représentations qui ont fourni un ensemble limite fractal, nous avons établi qu'une majorité d'entre elles se factorisent par un morphisme surjectif sur un $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$. Cela permet d'étudier la question géométrique suivante : *ces représentations sont-elles des holonomies de structures géométriques ?* Par les travaux d'ACOSTA [27] nous savons identifier les représentations qui sont les holonomies *d'uniformisations*. Les autres, nécessairement, ne sont pas des holonomies d'uniformisations, c'est ce que nous appelons une *redondance*, puisque le groupe $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ apparaît à travers plusieurs variétés mais n'en uniformise qu'une seule.

THÉORÈME (IV.4, p. 79) *Dans le tableau qui suit, chaque ligne est composée de variétés — dénommées avec une convention de* `snappy` *— dont il existe une représentation surjective à bord unipotent dans le groupe $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ indiqué dans la première colonne. Les représentations pour les variétés de la deuxième colonne sont les holonomies d'uniformisations. Celles de la troisième colonne ne sont pas des holonomies d'uniformisations.*

20. [Der15] Martin DERAUX, « On spherical CR uniformization of 3-manifolds », 2015.
21. [Sch02] Richard E. SCHWARTZ, « Complex hyperbolic triangle groups », 2002.
22. [PWX16] John R. PARKER, Jieyan WANG et Baohua XIE, « Complex hyperbolic $(3,3,n)$ triangle groups », 2016.
23. [PW17a] John R. PARKER et Pierre WILL, « A complex hyperbolic Riley slice », 2017.
24. [Law07] Sean LAWTON, « Generators, relations and symmetries in pairs of 3×3 unimodular matrices », 2007.
25. [Wil16] Pierre WILL, « Two-generator groups acting on the complex hyperbolic plane », 2016.
26. [GW19] Antonin GUILLOUX et Pierre WILL, « On $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$-representations of the Whitehead link group », 2019.
27. [Aco19] Miguel ACOSTA, « Spherical CR uniformization of Dehn surgeries of the Whitehead link complement », 2019.

Groupe	Variétés uniformisées	Variétés redondantes
$\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$	m004	m022, m029, m034, m053, m081, m117
$\Delta_2(3,3,5;\theta_\infty)$	m009	m015, m035, m142, m146
$\Delta_2(3,3,6;\theta_\infty)$	m023	
$\Delta_2(3,3,7;\theta_\infty)$	m039	m032, m045
$\Delta_2(3,3,8;\theta_\infty)$	s000	m053
$\Delta_2(3,3,\infty;\theta_\infty)$	m129	m203

Ce résultat sur le phénomène de redondance est ainsi une illustration très large de la constatation de Deraux sur une majorité des représentations à ensembles limites fractals.

Remerciements

Je ne peux me soustraire à l'obligation que la générosité qui m'a été accordée implique. Par ces quelques lignes, je remercierai ces rencontres qui ont modelé mon manuscrit. Mes sentiments et ma dette ne peuvent que les dépasser. L'anonymat qui planera n'est pas celui de l'oubli et j'espère qu'il ne décevra pas ceux à qui je dois plus que ces quelques mots.

C'est empli de gratitude et de respect que je vous remercie, Elisha Falbel, de m'avoir accueilli, dès décembre 2017, avec sympathie, bienveillance et intelligence, ces qualités qui émanent tant de vous. Mon écrit reflète, je l'espère, une partie de cette grande liberté intellectuelle que vous m'avez accordée. Vous m'avez transmis de précieuses ficelles du métier et vous avez su guider avec délicatesse les diverses batailles qui étaient à mener.

Charles Frances et John Parker ont accepté de faire la critique de ma recherche par leurs rapports scientifiques. Mes méthodes parfois peu orthodoxes n'ont peut-être pas rendu cette tâche aisée. Je ne peux être que plus humble et me dois de vous remercier pour votre précieux travail. J'aimerais aussi remercier Charles Frances pour son invitation à Strasbourg, où j'ai pu exposer et où je pourrai m'épanouir grâce à son soutien et son intérêt pour mes travaux. Aux rapporteurs se sont joints les examinateurs : Martin Deraux, Sorin Dumitrescu, Julien Marché et Fabrice Rouillier. Je suis flatté de votre présence et de votre implication. Je vous en remercie sincèrement. Le jury qui a accepté de se rassembler représente une étendue mathématique que j'aime et que j'admire grandement.

J'ai eu la chance d'avoir été invité à rejoindre deux différentes équipes du laboratoire, ACG et OURAGAN, dont les intérêts scientifiques sont parallèles. Elles ont largement contribué à cette diversité qui me tient à cœur. Les membres administratifs et scientifiques du laboratoire m'ont été précieux. Je tiens à les remercier pour tous leurs efforts. Mes camarades doctorants ont été un point de repère, même si ma timidité a probablement été plus éclatante que ma présence. Merci de votre bienveillance et sympathie constantes à mon égard.

Quelles que soient les géographies, dans des ordres qui n'en sont pas et des contextes jamais hermétiques, j'aimerais remercier ces échanges intellectuels qui m'ont été accordés ces dernières années. Julie Déserti dès mes débuts. Pierre Will, Antonin Guilloux et Miguel Acosta du monde hyperbolique complexe. Gilles Courtois et Julien Marché du monde différentiel. Fabrice Rouillier et Martin Deraux du monde computationnel. Charles Frances, Martin Mion-Mouton et Alejandro Ucan-Puc du monde dynamique. Frédéric Jaëck, Ivahn Smadja et Mathias Girel du monde philosophique. Je n'aurais pu espérer tout ce que vous m'avez offert.

Première partie

Complétude géométrique de variétés fermées

Chapitre premier

Convexité géodésique

Dans l'optique du chapitre suivant, nous sommes amenés à développer des arguments de convexité pour les espaces nilpotents. Contrairement à la géométrie euclidienne, les espaces nilpotents ont une famille de courbes naturelles (du premier ordre) — que nous dirons géodésiques — qui ne sont pas les segments affines en général. Nous montrerons comment la convexité permet d'étudier certaines variétés localement homogènes.

Les interactions entre convexité et géométrie plate existent dans la tradition française du siècle dernier; notamment chez Carrière [1] qui — dans un article influencé par Fried [2] qu'il avait rencontré « au moment où il était en train d'écrire [Fri80] » — énonce des propriétés *par convexité* pour certaines variétés plates. Ces propriétés, il les retrouve chez Benzécri [3] et Koszul [4]. Citons aussi Klingler [5] qui — dans la lignée du texte de Carrière — a employé de tels arguments dans le cadre de variétés lorentziennes à courbures constantes. Enfin, Miner [6] développe lui aussi une théorie de convexité alors qu'il explore le théorème de Fried pour l'espace nilpotent de Heisenberg. L'article de Fried a été pour nous aussi un point de départ. Notre première approche et la nécessité de ce chapitre sont nées alors que nous étions en train d'établir une version du théorème de Fried valable sur une large gamme d'espace nilpotents, notamment tous les groupes de Carnot [7].

Fried invoque-t-il la convexité? C'est une question de lecture difficile. En effet, dans son article, il n'énonce pas clairement les propriétés de convexité qu'il utilise — bien qu'il fasse mention de convexité. Ces propriétés sont pourtant absolument cruciales dans son raisonnement. Peut-être que ces propriétés lui paraissaient trop communes — dans son contexte, il s'agit de la convexité très habituelle de l'espace euclidien.

Le but de ce chapitre est de décrire : ce que peut être une structure géodésique adaptée pour obtenir une notion de convexité géodésique [8]; comment une variété localement homogène peut profiter d'une telle structure; et comment la convexité permet de traduire une intégrabilité d'un système différentiel.

1. [Car89] Yves Carrière, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.
2. [Fri80] David Fried, « Closed similarity manifolds », 1980.
3. [Ben60] Jean-Paul Benzécri, « Sur les variétés localement affines et localement projectives », 1960.
4. [Kos65] Jean-Louis Koszul, « Variétés localement plates et convexité », 1965.
5. [Kli96] Bruno Klingler, « Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante », 1996.
6. [Min90] Robert R. Miner, « Spherical CR manifolds with amenable holonomy », 1990.
7. [Ale21a] R. V. Alexandre, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.
8. Le cas du groupe de Heisenberg permet d'expliciter la difficulté de ce choix. Pour la structure géodésique provenant de la structure sous-riemannienne, l'espace n'est pas localement convexe.

I — STRUCTURE GÉODÉSIQUE

La première étape est axiomatique et consiste à décrire les géodésiques d'un espace modèle. Ensuite, nous expliquerons comment une variété localement homogène récupère elle aussi une structure géodésique.

DÉFINITION I.1 *Soit X une variété lisse. Nous dirons que $(X, \exp)$ est une* structure géodésique *si $\exp\colon \mathrm{T}X \to X$ est lisse et si pour x fixé quelconque dans X, $\exp_x\colon \mathrm{T}_x X \to X$ est une application surjective ouverte et un difféomorphisme local autour de $0 \in \mathrm{T}_x X$.*

Pour un tel couple, nous appellerons segment géodésique *une courbe lisse $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ avec $x = \gamma(0)$ et $v \in \mathrm{T}_x X$. Une partie $C \subset X$ sera dite* convexe *si :*

(a) pour toute paire de points $(x, y) \in C \times C$, il existe un segment géodésique complètement contenu dans C joignant x à y;

(b) pour toute suite (γ_n) de segments géodésiques basés en un point $p \in C$ et complètement contenus dans C, si $\gamma_n(1)$ converge vers $q \in \overline{C}$ alors une sous-suite de (γ_n) converge vers un segment géodésique $\gamma\colon [0,1] \to \overline{C}$ joignant p à q et de sorte que $\gamma(t) \in C$ pour $t < 1$.

Nous supposons enfin que le couple $(X, \exp)$ vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes.

(1) Soit $x \in X$ et $u \in \mathrm{T}_x X$. Fixons $0 \le s < 1$ et $y = \exp_x(su)$. Il existe alors $v \in \mathrm{T}_y X$ tel que pour tout $0 \le t < 1 - s$, nous avons $\exp_y(tv) = \exp_x((s+t)u)$.

(2) L'espace X est localement convexe : pour tout voisinage de x, il existe une partie de ce voisinage qui est ouverte, convexe et contient x.

Bien que les courbes géodésiques soient *a priori* définies sur le segment $[0,1]$, nous abuserons parfois du terme segment géodésique pour désigner toute courbe définie sur un segment $[0, T]$ qui après le changement de variable $\tilde{t} = Tt$ est bien un segment géodésique défini sur $[0,1]$. Un segment géodésique γ est univoquement défini par $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$. Cela illustre qu'une telle structure est une structure au premier ordre. Bien sûr $\exp_x\colon \mathrm{T}_x X \to X$ n'est généralement ni injective ni un revêtement.

Exemple La classe la plus importante d'exemples sera pour nous celle des espaces nilpotents. Considérons N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Un tel groupe N est en difféomorphisme avec son algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$, par l'application exponentielle $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$. La loi de groupe de N est contrôlée dans $\mathfrak{n}$ par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$\exp(x)\exp(y) = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}([x,[x,y]] + [y,[y,x]]) + \dots\right), \tag{1}$$

avec une suite de termes polynomiaux en x et y (avec le crochet de Lie comme produit). L'algèbre étant nilpotente, la somme a un nombre fini de termes.

Si ω_N est la forme de Maurer-Cartan de N — cette forme est définie par $\omega_N(v_x) = (L_x)_*^{-1}(v_x) \in \mathfrak{n}$ pour $v_x \in \mathrm{T}_x N$ —, alors $\exp(tv) = \gamma(t)$ est la solution de l'équation différentielle $\omega_N(\gamma_*) = v \in \mathfrak{n}$ au point base $e \in N$. C'est aussi la courbe intégrale du champ de vecteurs invariant à gauche $(L_x)_* v$ — puisque ce champ vérifie $\omega_N((L_x)_* v) = v$. En un autre point base $p \in N$, le flot de ce champ donne la courbe $L_p \exp(tv)$.

Comme les notations le suggèrent, N muni de son exponentielle de Lie définit une structure géodésique. Si *a priori* $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$ est seulement définie en $\mathrm{T}_e N = \mathfrak{n}$, la translation à gauche fournit une application définie sur tout $\mathrm{T}N$:

$$\exp_p(v) = L_p \exp(\omega_N(v)). \tag{2}$$

Ainsi, $\exp_p(v)$ est le temps $t = 1$ du flot associé au problème différentiel $\omega_N(\gamma_*) = \omega_N(v)$ et la plupart des axiomes sont automatiquement vérifiés. Il ne nous reste qu'à montrer la convexité locale.

LEMME I.2 *Tout espace nilpotent muni de son exponentielle* $(N, \exp)$ *est localement convexe et fournit par conséquent une structure géodésique.*

PREUVE Par invariance à gauche, nous montrons l'existence d'ouverts convexes arbitrairement petits en l'origine de N. Pour cela, nous montrons l'énoncé à travers l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Choisissons sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ un produit scalaire et nous pouvons supposer que la norme associée vérifie $\|[x, y]\| \leq \|x\| \, \|y\|$. Nous montrons que la boule de rayon $\varepsilon > 0$ est convexe dès lors que ε est assez petit. Nous notons momentanément $x \times y$ la loi de groupe à travers la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$x \times y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) - \frac{1}{24}[y, [x, [x, y]]] + \dots \tag{3}$$

qui est une somme finie de termes polynomiaux, où le produit est le crochet de Lie.

Soit B_ε la boule de taille ε. Si elle n'est pas convexe, alors il existe une géodésique qui sort de B_ε et rentre plus tard dans B_ε. Il existe donc x de norme $\|x\| = \varepsilon$ et $x \times y$ également de norme $\|x \times y\| = \varepsilon$, de sorte que $x \times ty$ est à l'extérieur de B_ε. Pour montrer que cela est impossible, nous allons comparer la courbe $x \times ty$ à sa version linéaire. En effet, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff montre que $x \times ty$ est de plus en plus proche de $x + ty$ lorsque x, y sont de plus en plus petits.

Avec

$$w = y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) - \frac{1}{24}[y, [x, [x, y]]] + \dots \tag{4}$$

nous avons $x + w = x \times y$. Le vecteur w basé en x représente aussi le segment linéaire reliant x à $x \times y$ depuis l'intérieur de B_ε. En considérant le plan $(0, x, x \times y)$, sa norme est donnée par

$$\|w\| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) 2\varepsilon, \tag{5}$$

avec θ l'angle formé par $(x, 0, x \times y)$. D'autre part, puisque w est intérieur depuis x, le produit scalaire $\langle x, w\rangle$ est négatif et

$$-\langle x, w\rangle = \sin\theta \|w\| \varepsilon. \tag{6}$$

Par ailleurs, la courbe $x \times ty$ a comme dérivée en $t = 0$ le vecteur $(L_x)_* y$. Par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, la dérivée $(L_x)_*$ ne laisse que les termes où y n'apparaît qu'au degré un et par conséquent :

$$v = (L_x)_* y = y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \dots \tag{7}$$

Par hypothèse, $x \times ty$ sort de B_ε et donc $\langle x, v\rangle$ doit être positif. Cela implique

$$\langle x, v - w\rangle > -\langle w, x\rangle. \tag{8}$$

Or, nous montrons que cette inégalité est impossible.

Le terme de gauche est contraint par :

$$v - w = -\frac{1}{12}[y,[y,x]] + \frac{1}{24}[y,[x,[x,y]]] + \dots \tag{9}$$

qui est une somme finie de termes où y apparaît au moins en degré deux et x au moins en degré un. Notons que lorsque ε est assez petit, non seulement $\|x\| = \varepsilon$ mais $\|y\|$ est aussi majoré par $c\varepsilon$, où c est universel dès que ε est assez petit. Par exemple, dans le cas abélien, $c = 2$. Par suite

$$\langle x, v - w\rangle \leq \|x\|\,\|v - w\| \tag{10}$$

$$\leq \frac{1}{12}\varepsilon^2\|y\|^2 + o(\varepsilon^4) = O(\varepsilon^4). \tag{11}$$

Par conséquent, le terme $-\langle w, x\rangle$ est lui aussi majoré par un terme en $O(\varepsilon^4)$. Puisque ce terme est donné par

$$-\langle w, x\rangle = \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) 2\varepsilon^2, \tag{12}$$

il vient que θ doit être petit et doit être un $O(\varepsilon)$. Par conséquent,

$$-\langle w, x\rangle = \sin\theta\varepsilon\|w\| = \|w\|^2 + o(\varepsilon^4). \tag{13}$$

Il reste à montrer que le terme $\|w\|^2$ n'est pas majorable par $\varepsilon^2\|y\|^2$. En effet,

$$\|w\|^2 = \|y\|^2 + o(\|x\|^2\|y\|^2) \tag{14}$$

$$= \|y\|^2 + o(\varepsilon^4). \tag{15}$$

Cela montre donc que $-\langle x, w\rangle$ est asymptotiquement bien plus grand que $\langle x, v - w\rangle$, absurde. Il existe donc un ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la boule B_ε est convexe. ▨

I.1 VARIÉTÉ GÉODÉSIQUE

DÉFINITION I.3 *Soit* $(X, \exp)$ *une structure géodésique et soit* M *une variété lisse connexe. Nous dirons que* M *est une* $(X, \exp)$-variété géodésique *s'il existe un difféomorphisme local* $D\colon \widetilde{M} \to X$, *appelé* développante. *Un segment géodésique de* $\widetilde{M}$ *est alors une courbe lisse* $\gamma\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ *telle que sa développée* $D \circ \gamma$ *est un segment géodésique de* $(X, \exp)$.

À nouveau, un segment géodésique γ de $\widetilde{M}$ est complètement déterminé par $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$. Si $(D \circ \gamma)(t) = \exp_{D(\gamma(0))}(tu)$, alors $\gamma'(0) = \mathrm{d}D^{-1}_{\gamma(0)}(u)$.

DÉFINITION I.4 *Si* $\gamma\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ *est un segment géodésique, alors nous désignerons* $\gamma(t)$ *par* $\exp_{\gamma(0)}(tv)$ *avec* $v = \gamma'(0)$.

Lorsque cela sera nécessaire, nous ferons la distinction entre cette dernière exponentielle et celle de l'espace modèle $(X, \exp)$ en notant respectivement $\exp^{\widetilde{M}}$ et $\exp^X$.

Il est utile de remarquer que le choix d'un difféomorphisme local entre $\widetilde{M}$ et X ne fait pas intervenir la structure géodésique choisie sur X. Ainsi, même s'il est en général difficile de construire une telle application, nous pouvons reprendre les développantes fournies par des structures géométrique. Aussi, un théorème de WHITEHEAD [9] affirme que toute 3-variété ouverte possède un difféomorphisme local avec $\mathbf{R}^3$.

9. [Whi61] John H. C. WHITEHEAD, « The immersion of an open 3-manifold in euclidean 3-space », 1961.

PROPOSITION I.5 (Définition de l'ensemble visible) *Soit $p \in \widetilde{M}$. Il existe un unique sous-ensemble $V_p \subset \mathrm{T}_p\widetilde{M}$ qui est un voisinage de* 0*, étoilé, maximal et qui est le domaine de* $\exp_p \colon V_p \to \widetilde{M}$*. Cette partie est appelée* ensemble visible *de (ou depuis) p. Souvent, nous dirons aussi que les points de* $\exp_p(V_p)$ *sont* visibles *depuis p.*

PREUVE Par les hypothèses selon lesquelles X est localement convexe et D est un difféomorphisme local, nous en déduisons qu'une partie V_p maximale est bien définie et non vide. Elle est aussi naturellement étoilée et est un voisinage de l'origine (par difféomorphisme local). ▩

En suivant les différentes définitions, si $p \in \widetilde{M}$ et si $v \in V_p$, alors

$$\forall t \in [0,1],\ D\left(\exp_p^{\widetilde{M}}(tv)\right) = \exp_{D(p)}^{X}\left(\mathrm{d}D_p(tv)\right). \tag{16}$$

Cette relation d'équivariance entre la structure géodésique et la développante est axiomatique et exprime, en somme, que les géodésiques de $\widetilde{M}$ ne sont *que* des géodésiques de X tirées-en-arrière. Par conséquent, si pour $p \in \widetilde{M}$ nous prenons $v \in \partial V_p - V_p$, alors il ne peut pas exister de vecteur $u \in V_p$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $D(\exp_p(tu)) = \exp_{D(p)}(t\,\mathrm{d}D_p(v))$, puisque v n'est pas visible. Aussi, si $\eta \colon [0,1] \to X$ est un segment géodésique relevé en $\gamma \colon [0,1] \to \widetilde{M}$ (c'est-à-dire $D(\gamma) = \eta$), alors γ est bien unique dès que $\gamma(0)$ est prescrit.

DÉFINITION I.6 *Une partie $C \subset \widetilde{M}$ est* convexe *si son image par la développante $D(C)$ est elle-même convexe dans X et si la restriction de D à C est injective. Une partie $C_p \subset V_p$ pour $p \in \widetilde{M}$ est convexe si* $\exp_p(C_p) \subset \widetilde{M}$ *est convexe.*

L'hypothèse d'injectivité est forte mais s'avérera cruciale et naturelle lorsque X est simplement connexe. Ceci étant dit, remarquons que la développante peut tout à fait être injective sur une partie de la forme $\exp_p(C_p)$ sans que l'exponentielle soit elle-même injective sur X (ou sur $\widetilde{M}$).

Aussi, puisque la développante est un difféomorphisme local et puisque X est localement convexe, nous obtenons le lemme suivant.

LEMME I.7 *L'espace $\widetilde{M}$ est localement convexe : en tout point $p \in \widetilde{M}$, il existe un voisinage ouvert arbitrairement petit de x qui est convexe dans $\widetilde{M}$.*

Ce lemme justifie en quelque sorte le choix de développantes qui soient des difféomorphismes locaux.

LEMME I.8 *Soit $C \subset \widetilde{M}$ un convexe. Pour n'importe quel $p \in C$, nous avons l'inclusion $C \subset$* $\exp_p(V_p)$.

PREUVE La convexité assure que $D|_C$ réalise un difféomorphisme entre C et $D(C)$. Si $p \in C$ et si $q \in C$, alors il existe un segment géodésique entre $D(p)$ et $D(q)$ qui devient un segment géodésique entre p et q en composant avec D^{-1}. ▩

LEMME I.9 *L'ensemble visible V_p est toujours ouvert.*

PREUVE Il s'agit de montrer qu'un segment géodésique γ initié en p peut être déformé en segments géodésiques initiés en p pour des directions prises dans un ouvert autour de $\gamma'(0)$.

Recouvrons $\gamma \subset \widetilde{M}$, qui est un segment compact, par un nombre fini d'ouverts convexes U_i. Alors, $D(\gamma)$ est couvert par les $D(U_i)$. Le point final de γ est développé dans un seul ouvert U_j. Dans la développante, le segment $D(\gamma)$ peut donc effectivement être déformé continument en

des segments géodésiques toujours entièrement contenus dans les $D(U_i)$, car les U_i sont en nombre fini. Ces déformations correspondent à des déformations de γ, puisque les U_i sont convexes. Cela fournit les géodésiques désirées. ▨

La proposition suivante trouve ses origines chez KOSZUL [10] — qui étudie les variétés affines plates —, il s'agit de son troisième lemme.

PROPOSITION I.10 *Si, pour un $p \in \widetilde{M}$, V_p est convexe alors* $\exp_p(V_p) = \widetilde{M}$.

PREUVE Nous montrons que $\exp_p(V_p)$ est simultanément ouvert et fermé. Tout d'abord, l'image par la développante $D(\exp_p^{\widetilde{M}}(V_p)) = \exp^X_{D(p)}(\mathrm{d}D_p(V_p))$ est une partie ouverte de X, car $\exp^X$ est une application ouverte de $\mathrm{T}X$. Puisque D se restreint en un difféomorphisme sur l'ensemble de visibilité, $\exp_p^{\widetilde{M}}(V_p)$ est elle-même une partie ouverte. Il reste à montrer que cette partie est également fermée. Considérons $q \in \overline{\exp_p(V_p)}$ et montrons que $q \in \exp_p(V_p)$, c'est-à-dire que q est visible depuis p.

Considérons une suite $q_n \to q$ composée d'éléments $q_n \in \exp_p(V_p)$. Soit C un petit ouvert convexe contenant q. Nous pouvons supposer $q_n \in C$. Soit γ_n les géodésiques de $D(\exp_p(V_p))$ qui relient $D(p)$ aux $D(q_n)$. Remarquons que $D(q) \in \overline{D(\exp_p(V_p))}$ en regardant à travers $D(C)$.

Par convexité de $D(\exp_p(V_p))$, γ_n tend vers γ un segment géodésique basé en $D(p) = \gamma(0)$, à point final $D(q) = \gamma(1)$ et dont les temps $t < 1$ sont entièrement contenus dans $D(\exp_p(V_p))$. Il s'agit de montrer que γ est relevable et a q comme point final.

Nécessairement, γ est relevable pour $t < 1$ par convexité de $\exp_p(V_p)$. Pour $t < 1$ suffisamment grand, disons $t \geq T$, γ est à valeurs dans $D(C)$. En relevant γ dans C pour $1 \geq t \geq T$, nous obtenons que γ est relevable au temps $t = 1$ et vaut q au temps final. Par conséquent q est visible depuis p. ▨

LEMME I.11 *Si $p \in \widetilde{M}$ vérifie $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$, alors $D(\widetilde{M}) = X$.*

PREUVE Il s'agit d'une conséquence de la surjectivité de l'exponentielle de X et du calcul $D\left(\exp_p^{\widetilde{M}}(\mathrm{T}_p\widetilde{M})\right) = \exp^X_{D(p)}(\mathrm{T}_{D(p)}X) = X$. ▨

THÉORÈME I.12 *Soit M une $(X, \exp)$-variété géodésique connexe de développante $D\colon \widetilde{M} \to X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) La développante réalise un difféomorphisme entre $\widetilde{M}$ et X.

(2) Pour tout $p \in \widetilde{M}$, la partie visible V_p est convexe et égale à $\mathrm{T}_p\widetilde{M}$.

(3) Il existe $p \in \widetilde{M}$ tel que V_p est convexe et égale à $\mathrm{T}_p\widetilde{M}$.

PREUVE Bien sûr, (1) implique (2), qui implique (3). Montrons donc que (3) implique (1). Par la proposition précédente, $\exp_p(V_p) = \widetilde{M}$, donc la développante est injective sur tout $\widetilde{M}$. La surjectivité découle du lemme qui précède. ▨

Convexité et complétude Il est légitime de se demander si la condition $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$ n'implique pas déjà que V_p soit convexe. Nous verrons que cela est vrai dans le cas des structures géodésiques $(X, \exp)$ dites *injectives*. Cependant, un contre-exemple est ici facile à expliciter. Prenons le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et son revêtement universel $\pi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Avec le tore comme espace

10. [Kos65] Jean-Louis KOSZUL, « Variétés localement plates et convexité », 1965.

modèle X, nous pouvons fournir une structure géodésique en considérant les projections des segments de $\mathbf{R}^2$. Maintenant, π fournit une développante pour $\mathbf{R}^2$ et nous obtenons que pour tout $p \in \mathbf{R}^2$, $V_p = \mathrm{T}_p\mathbf{R}^2$ mais ne peut pas être convexe car π n'est pas un difféomorphisme.

Si nous affaiblissons cependant la conclusion, il paraît raisonnable que l'hypothèse $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$ pour tout $p \in \widetilde{M}$ suffise, seule, à montrer que D est un revêtement. Remarquons que lorsque X est simplement connexe, nous retombons sur la conclusion selon laquelle D est un difféomorphisme, ce qui sera bien notre cadre d'application en général.

I.2 STRUCTURE INJECTIVE

Nous pouvons parfois émettre une hypothèse additionnelle très utile concernant des structures géodésiques $(X, \exp)$. C'est notamment le cas pour tous les espaces nilpotents.

DÉFINITION I.13 *Une structure géodésique* $(X, \exp)$ *est* injective *si pour toute paire de points* $(x, y) \in X \times X$*, le segment géodésique reliant* x *à* y *est unique.*

LEMME I.14 *Soit* C_1, C_2 *deux convexes de* $\widetilde{M}$ *partageant une intersection non vide. Alors, la développante* D *est injective sur la réunion* $C_1 \cup C_2$*.*

PREUVE Soit $p \in C_1 \cap C_2$. Supposons que pour $q_1 \in C_1$ et $q_2 \in C_2$ nous ayons $D(q_1) = D(q_2)$. Les segments géodésiques reliants p à q_1 et p à q_2 sont alors développés en l'unique segment géodésique reliant $D(p)$ à $D(q_1) = D(q_2)$. Par convexité de C_1 et de C_2, cela signifie que $q_1 = q_2$. ▩

LEMME I.15 *Pour tout* $p \in \widetilde{M}$*, la développante restreinte à* $\exp_p(V_p)$ *est injective.*

PREUVE Comme précédemment, si q_1 et q_2 appartiennent à $\exp_p(V_p)$ et ont même image $D(q_1) = D(q_2)$, alors les segments géodésiques reliant p à q_1 et à q_2 sont envoyés sur un même segment géodésique dans X qui doit se relever en un unique segment géodésique dans $\widetilde{M}$ (sa dérivée est prescrite), ce qui montre que $q_1 = q_2$. ▩

PROPOSITION I.16 *Supposons que pour* $p \in \widetilde{M}$ *nous ayons* $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$*. Alors,* V_p *est convexe.*

PREUVE Nous avons déjà montré que $D(\exp_p(V_p)) = X$ et que ce dernier est convexe. L'injectivité provient du lemme précédent. ▩

Bien sûr, cette proposition permet de réécrire le théorème prouvé précédemment : $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$ si, et seulement si, D est un difféomorphisme.

II — COMPATIBILITÉ AVEC L'HOLONOMIE

Pour passer d'une information géométrique sur $\widetilde{M}$ à M, il faut arriver à exprimer ce que devient l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ à travers la développante $D\colon \widetilde{M} \to X$. Le cadre le plus naturel consiste à présent à considérer que X est l'espace d'une géométrie (G, X). La développante est alors accompagnée d'une application équivariante d'holonomie $\rho\colon \pi_1(M) \to G$.

DÉFINITION I.17 *Soit G un groupe de Lie agissant transitivement et analytiquement sur une variété lisse X. Alors, (G, X) est une* géométrie. *Une (G, X)-*variété *M est une variété lisse M munie d'une paire (D, ρ), d'un difféomorphisme local $D\colon \widetilde{M} \to X$ — appelé développante — et d'un morphisme de groupes $\rho\colon \pi_1(M) \to G$ — appelé morphisme d'holonomie — de sorte que*

$$\forall x \in \widetilde{M}, \forall g \in \pi_1(M),\ D(gx) = \rho(g)D(x). \tag{17}$$

DÉFINITION I.18 *Soit $(X, \exp)$ une structure géodésique et soit (G, X) une géométrie. Alors, $(G, X, \exp)$ est une* structure géodésique à holonomie compatible *si, pour toute géodésique γ de X et pour toute transformation $g \in G$, la courbe $g\gamma$ est encore géodésique.*

Nous supposons donc à présent que $(G, X, \exp)$ est une telle structure géodésique. Si M est une (G, X)-variété, alors — sans hypothèse additionnelle — M est une $(G, X, \exp)$-variété. La développante de M comme (G, X)-variété fournit une développante pour M comme $(X, \exp)$-variété.

PROPOSITION I.19 *Supposons que M soit une $(G, X, \exp)$-variété connexe.*

(1) Si $\gamma\colon [0, 1] \to \widetilde{M}$ est un segment géodésique basé en p, alors pour tout $g \in \pi_1(M)$, $g\gamma$ est un segment géodésique basé en gp.

(2) En particulier, si dans $\widetilde{M}$, $\exp_p(tv)$ n'est défini que pour $t < 1$, alors cela est encore vrai pour $g \exp_p(tv)$, quelque soit $g \in \pi_1(M)$.

(3) Si $C \subset \widetilde{M}$ est convexe, alors gC est encore convexe pour tout $g \in \pi_1(M)$.

Cette proposition — dont la preuve est directe — explique en particulier qu'une courbe dans M qui se relèverait en une courbe géodésique dans $\widetilde{M}$ se relève *toujours* en une courbe géodésique. Cela permet de parler de géodésiques dans M. Nous pouvons également parler de convexité dans M, puisque cette propriété est aussi conservée par le changement de représentant dans $\widetilde{M}$.

En un point $x \in M$, la famille de segments géodésiques issus de x est donnée par la famille de segments géodésiques en un point quelconque de la fibre au-dessus de x. En particulier, l'ensemble visible V_p d'un tel point de la fibre permet de définir un ensemble visible pour x. Néanmoins, cet ensemble visible V_x pour x n'a de sens numérique (quantifié) que lorsqu'un représentant dans $\widetilde{M}$ est choisi : son changement par $g \in \pi_1(M)$ induit un isomorphisme sur V_x correspondant à l'action de $\rho(g)$. Dans tous les cas, si $V_p = \mathrm{T}_p\widetilde{M}$, alors $V_x = T_xM$, et cela fait sens dans l'absolu. Par conséquent, nous pouvons reformuler le théorème I.12 (p. 6).

COROLLAIRE I.20 *Soit M une $(G, X, \exp)$-variété connexe. Les deux faits suivants sont équivalents.*

(1) La développante $D\colon \widetilde{M} \to X$ est un difféomorphisme.

(2) Il existe $x \in M$ tel que V_x soit convexe et égal à T_xM.

Nous pouvons encore dériver d'autres propriétés topologiques plus anecdotiques mais simples à démontrer dans notre cadre.

PROPOSITION I.21 *Soit M une $(G, X, \exp)$-variété connexe.*

(1) Le revêtement universel $\widetilde{M} \to M$ peut être trivialisé par des ouverts convexes.

(2) Si, pour $x \in M$, V_x est convexe, alors tout chemin issu de x peut-être réalisé à homotopie relative aux extrémités près par un segment géodésique issu de x.

PREUVE Le premier résultat repose sur l'invariance de la convexité par le $\pi_1(M)$ dans $\widetilde{M}$ et le fait que $\widetilde{M}$ est localement convexe. Le deuxième est démontré par l'existence de segments géodésiques entre $p \in \widetilde{M}$ au-dessus de x et n'importe quel autre point de $\widetilde{M}$ dès que V_x est convexe — et donc V_p aussi. ▩

Un argument dont l'usage nous vient de CARRIÈRE [11] s'avérera particulièrement utile quand nous ferons de la dynamique.

PROPOSITION I.22 (Carrière) *Soit $K \subset \widetilde{M}$ un compact et $U \subset \widetilde{M}$ un relevé d'un ouvert trivialisant. Le compact K ne peut jamais intersecter un nombre infini de translatés gU pour $g \in \pi_1(M)$.*

PREUVE Autrement, nous aurions une suite $x_n \in gU \cap K$ non convergente. ▩

11. [Car89] Yves CARRIÈRE, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.

Chapitre II

Géométrie nil-affine à rayons

Les variétés affines fermées sont riches de leurs questions ouvertes. Si nous considérons une variété affine fermée, *sous quelles conditions est-elle complète et que se passe-t-il si elle est incomplète ?* Il y a soixante ans, Markus [1] a conjecturé *qu'une variété affine fermée à volume parallèle serait toujours complète*. Si certains cas sont connus (voir p. 51), cette conjecture est encore ouverte et reste l'un des défis les plus importants du domaine. Carrière [2] a montré la complétude des variétés fermées affines à volume parallèle dont l'holonomie est de *discompacité un*. Cette hypothèse signifie que pour une suite de transformations affines, au plus une valeur singulière tend vers zéro. Cette hypothèse permet un argument puissant de convexité, mais en discompacité supérieure, les outils ne s'adaptent pas suffisamment.

L'incomplétude de certaines variétés fermées est aussi un phénomène intéressant et une piste d'étude pertinente. Parmi ces variétés, certaines sont kleiniennes : elles sont des quotients d'ouverts affines. D'autres ne sont pas kleiniennes, mais ont une propriété similaire : *leurs développantes revêtent leurs images*. Dans ce dernier cas, la variété devient kleinienne dès que l'image est simplement connexe. Fried [3] a montré que les variétés de similitude fermées connexes sont complètes ou radiantes : leurs développantes revêtent le complémentaire d'un unique point.

Fried et Carrière ont des objectifs très différents. L'un veut montrer la complétude, l'autre veut exploiter l'incomplétude. Pourtant, les deux ont un point commun crucial : l'étude d'un système dynamique associé à l'incomplétude d'une géodésique. Carrière fait référence à Fried pour cette considération. Nous décidons d'appeler *dynamique de Fried* un tel système dynamique. Nous pensons que c'est le principal point d'entrée pour aborder cette double question de la complétude et de la classification des incomplétudes.

La géométrie affine est décrite par le groupe affine $\mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ agissant sur l'espace $\mathbf{R}^n$. L'isotropie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de cette géométrie peut être soumise à la décomposition de Cartan $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = KAK$. Le sous-groupe A est le groupe des matrices diagonales à coefficients strictement positifs — les valeurs singulières d'une transformation. Le sous-groupe K est

1. [Mar62] Lawrence F. Markus, « Cosmological models in differential geometry, mimeographed notes », 1962.
2. [Car89] Yves Carrière, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.
3. [Fri80] David Fried, « Closed similarity manifolds », 1980.

le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$. Généralement, la complexité d'une dynamique de Fried est intimement liée à la projection de ses transformations dans $A \subset KAK$.

Fried réduit A à l'ensemble des homothéties $A_F = \{\lambda\,\mathrm{id}\}$. Dans ce cas, $K = \mathrm{O}(n)$ centralise A_F. Carrière réduit A à $A_C = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1})\} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, le sous-groupe des transformations diagonales avec au plus une valeur singulière tendant vers zéro. Dans les deux cas, $\dim A_F = \dim A_C = 1$. Le sous-groupe A, qui était de dimension n, a donc été réduit *à un sous-groupe de dimension un*. Ces deux hypothèses ont une interprétation géométrique. Avec A_F, une suite divergente $f_n \in A_F$ tend soit vers l'application nulle $0 \cdot \mathrm{id}$, soit vers son inverse $\infty \cdot \mathrm{id}$. Nous appelons *groupe à dilatations* un sous-groupe de A vérifiant cette même propriété. Quant à Carrière, une suite divergente $f_n \in A_C$ a une valeur qui tend vers l'infini, une autre vers zéro et toutes les autres restent égales à un. Par conséquent, pour ce cas-ci, une boule ouverte tend vers un ellipsoïde dégénéré de codimension un.

Nous dirons qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, s'écrivant $K_R A_R \subset KAK$, est *une isotropie à rayons* si $K_R \subset K$ centralise un sous-groupe $A_R \subset A$. Nous pensons que les géométries à rayons sont une classe cruciale de géométries affines. Ces isotropies ne dépendent plus de l'hypothèse selon laquelle A_R est un groupe de dilatations ou de discompacité un. Nous proposons de débuter l'étude de ces géométries en étudiant les variétés fermées modelées sur les géométries à rayons *où la dimension de A_R est un*. Cela imite les cas de Fried et Carrière. En général, nous appelons *rang* la dimension de A_R. Nous supposerons de plus que A_R est fourni par des matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(\lambda^p, \ldots, \lambda^p, \lambda^{-q}, \ldots, \lambda^{-q}, 1, \ldots, 1)$ avec $p, q > 0$ fixés. C'est l'hypothèse de *relative homogénéité*. Cette hypothèse est commentée par la suite.

Nos résultats sur ces variétés fermées généralisent les points de vue dynamiques de Fried et de Carrière. Nous montrons que les variétés incomplètes ont leur développante qui est un revêtement sur le complémentaire d'un sous-espace affine [4]. Nous montrons aussi que l'existence d'un volume parallèle — ce qui est équivalent à $\det A_R = \{1\}$ — implique toujours la complétude des variétés fermées.

Si l'hypothèse du volume parallèle est évidement un élément intéressant pour tenter de montrer la complétude, une autre conjecture est à mentionner. D'AMBRA et GROMOV [5] ont « vaguement conjecturé » que si une variété a *un groupe d'automorphismes suffisamment grand, alors elle devrait pouvoir être classifiée*. Nous montrons en effet que si le groupe d'automorphismes est non compact, alors la variété est complète. Cette dernière considération est de nature très différente de la conjecture de Markus. Si celle de Markus propose que seul le volume parallèle suffit à montrer la complétude, il n'est pas vrai qu'un groupe d'automorphismes non compact implique toujours la complétude. Bien que cela soit vrai lorsque le rang de la géométrie à rayons est un, des contre-exemples sont faciles à déterminer. Nous donnerons ainsi (p. 58) l'exemple d'une variété radiante fermée dont le groupe d'automorphismes est non compact.

THÉORÈME (II.52, p. 47 ; II.61, p. 53 ; II.67, p. 57) *Soit $(G_1, \mathbf{R}^n)$ une géométrie à rayons de rang un relativement homogène. Soit M une $(G_1, \mathbf{R}^n)$-variété fermée connexe.*

4. Ce sous-espace affine est bien toujours un point lorsque A_R est un sous-groupe d'homothéties.
5. [DG91, p. 24] Giuseppina D'AMBRA et Mikhael L. GROMOV, « Lectures on transformation groups: geometry and dynamics », 1991.

(1) Si M n'est pas complète, alors la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathbf{R}^n - I$ est un revêtement sur son image, avec I un sous-espace affine.

(2) Si G_1 a un volume invariant, alors M est complète.

(3) Si le groupe des automorphismes de M est non compact, alors M est complète.

En raison de son intérêt propre, nous avons spécialement isolé ce théorème de géométrie affine. Le mystère constant de la conjecture de Markus et le peu de résultats portant sur les variétés incomplètes fournissent une motivation suffisante. Cependant, un autre contexte pertinent apparaît en passant au contexte des espaces nilpotents.

La *géométrie nil-affine* est une généralisation directe de la géométrie affine. Si N est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et si $\mathfrak{n}$ est son algèbre de Lie, alors le groupe des transformations nil-affines est $N \rtimes \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$. Ce groupe est d'apparence très proche du groupe affine de $\mathbf{R}^n$, dont $\mathfrak{n}$ est linéairement isomorphe. Les géométries nil-affines apparaissent très souvent : toutes les géométries paraboliques font apparaître une géométrie nil-affine à travers les *géométries de Levi*.

Si nous considérons G/K un espace symétrique non compact, alors son bord visuel n'est généralement pas homogène mais constitué de plusieurs variétés de drapeaux partiels. Pour chaque variété drapeau G/P, la géométrie $(G, G/P)$ est dite *parabolique* et est univoquement déterminée par le choix d'un sous-groupe parabolique $P \subset G$. Les *sous-groupes paraboliques* sont les sous-groupes fermés de G contenant un sous-groupe parabolique minimal — un sous-groupe de Borel. La plus grande géométrie parabolique — celle dont la dimension de l'espace est la plus grande — est celle pour laquelle le sous-groupe parabolique est minimal. Cette composante du bord est aussi appelée *bord de Furstenberg*.

Les espaces hyperboliques $\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$ sur les corps $\mathbf{F}$ réel, complexe, quaternionique ou octonionique fournissent les espaces symétriques non compact de rang un. Ici, le rang est la dimension du sous-groupe A dans la décomposition d'Iwasawa KAN de $G = \mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n,1)$, le groupe des isométries. Dans le cas particulier des espaces symétriques de rang un, le bord visuel est homogène et il n'existe qu'une seule géométrie parabolique. Par exemple, dans le cas de l'espace hyperbolique réel, c'est la géométrie conforme.

Une fois qu'une géométrie parabolique $(G, G/P)$ est choisie, les mêmes questions peuvent être posées sur ses variétés fermées. *Quand sont-elles complètes et que se passe-t-il lorsqu'elles sont incomplètes ?* Pour investiguer ces questions, plusieurs possibilités sont envisageables. Nous pourrions réduire l'espace G/P en un domaine Ω afin d'obtenir une métrique invariante sur Ω. En ce sens, remarquons que le disque hyperbolique est effectivement un tel domaine sur la sphère conforme. Dans cette direction, ZIMMER [6] a montré des résultats sur les variétés fermées modelées sur de tels domaines : leurs développantes sont des revêtements sur leurs images.

La direction que nous choisissons est différente. Nous réduisons l'espace G/P à un ouvert dense connu sous le nom de *strate ouverte de Schubert* chez KAPOVICH, LEEB et PORTI [7]. Cette

6. [Zim18] Andrew M. ZIMMER, « Proper quasi-homogeneous domains in flag manifolds and geometric structures », 2018.

7. [KLP18] Michael KAPOVICH, Bernhard LEEB et Joan PORTI, « Dynamics on flag manifolds: domains of proper discontinuity and cocompactness », 2018.

composante ouverte dense est identifiable à un espace simplement connexe nilpotent N. L'action du groupe G sur cette strate doit être réduite à l'action du groupe parabolique P sur N. Ainsi, nous passons de $(G, {}^{G}\!/_{P})$ à (P, N). L'isotropie de cette géométrie est exactement le facteur de Levi $L \subset P$ du sous-groupe parabolique. Par conséquent, $N = {}^{L}\!/_{P}$, et nous dirons que (P, N) est une *géométrie de Levi*.

De la même façon que nous pouvons considérer des géométries affines à rayons en réduisant $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ à $K_R A_R$, nous pouvons considérer des géométries nil-affines à rayons en prenant $K_R A_R \subset \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$ en supposant que K_R centralise A_R et que ce dernier soit un sous-groupe de matrices diagonales. Le groupe complet sera $N \rtimes K_R A_R$, avec N qui agit sur lui-même de façon nilpotente et non plus abélienne.

Lorsque l'espace symétrique est de rang un, la géométrie de Levi (P, N) sera toujours une *géométrie nil-affine à rayons de rang un*. L'étude de ces géométries, qui nous ont intéressées au début de nos travaux [8], a des conséquences très fortes sur la géométrie parabolique initiale $(G, {}^{G}\!/_{P})$. En effet, la classification des variétés fermées de (P, N) permettrait de montrer la conjecture suivante sur les variétés fermées de $(G, {}^{G}\!/_{P})$.

CONJECTURE (II.71, p. 61) *Considérons une variété fermée connexe modelée sur le bord d'un espace symétrique de rang un. Si sa développante n'est pas surjective, alors c'est un revêtement sur son image.*

Nous suggérons que les géométries de Levi constituent une étape cruciale à l'étude des variétés paraboliques fermées. Nous proposons d'amorcer leur analyse par celles à rayons. Toutes les géométries paraboliques — de rang même supérieur à un — ont plusieurs géométries nil-affines à rayons. Ces géométries sont par ailleurs souvent dignes d'intérêt pour elles-mêmes. Par exemple, une géométrie nil-affine à rayons de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ apparaît [9] [10] comme une géométrie lagrangienne de contact. Nous établirons une construction générale et de nombreux exemples permettant de tirer des géométries à rayons d'une géométrie parabolique.

Les techniques de preuves permettant de passer de $\mathbf{R}^n$ à un espace nilpotent N ne sont pas aisées. Nous imposons des hypothèses techniques que nous commenterons plus bas. Avec ces additions, nous prouvons une généralisation du théorème de géométrie affine.

THÉORÈME (II.52, p. 47 ; II.61, p. 53 ; II.67, p. 57) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie nil-affine à rayons de rang un, relativement homogène, relativement intégrable et d'ordre de nilpotence au plus deux. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe.*

(1) Si M n'est pas complète, alors la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement sur son image, avec I un sous-espace nil-affine.

(2) Si G_1 a un volume invariant, alors M est complète.

(3) Si le groupe des automorphismes de M est non compact, alors M est complète.

Ajoutons aussi qu'à l'aide d'une proposition supplémentaire II.53 (p. 47) nous pouvons réduire I à un unique point si nous sommes dans les hypothèses de Fried.

8. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.

9. [MM21] Martin MION-MOUTON, « Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangian contact structures », 2021.

10. [FMMV21] Elisha FALBEL, Martin MION-MOUTON et Jose M. VELOSO, « Cartan connections and path structures with large automorphism groups », 2021.

Commentons à présent les hypothèses techniques que nous avons formulées. Le *cadre relatif* est composé des hypothèses de relative homogénéité, de relative intégrabilité et d'ordre de nilpotence au plus deux. C'est le cadre dont nous avons besoin pour nos théorèmes. De ces trois, les deux dernières sont probablement plus superficielles que la première et elles constituent seules une part du *cadre étendu*.

L'hypothèse qui nous semble la plus contraignante mais qui est aussi la plus difficile à dépasser est celle de la relative homogénéité. Elle est due à une difficulté technique — la proposition II.48 (p. 44). Elle n'apparaissait pas dans la littérature existante et est maintenant aussi expliquée par la construction de la proposition II.17 (p. 21). Une autre façon de décrire cette hypothèse consiste à la comparer avec une conjecture que nous souhaitons formuler. Il s'avère que cette conjecture permet de résoudre la difficulté technique — voir la proposition II.55 (p. 49).

CONJECTURE II.1 *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un sans rotation. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe. Toute géodésique incomplète de M converge uniformément vers un lacet géodésique incomplet.*

Cet énoncé révèle la différence entre le cas relativement homogène et général. Chez FRIED [11] toutes les géodésiques incomplètes sont déjà des lacets. Mais nous savons par les exemples qu'en général nous ne pouvons espérer qu'une convergence vers un lacet.

Avec les trois hypothèses techniques levées, dans ce que nous appelons le *cadre général*, nous formulons un objectif à long terme sur la classification de toutes les variétés nil-affines à rayons de rang un.

CONJECTURE II.2 *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe. Si elle n'est pas complète, alors il existe un sous-espace nil-affine $I \subset \mathcal{N}$ tel que la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement.*

Les autres aspects sur la complétude dans le cas à volume constant ou groupe d'automorphismes non compact suivraient puisque nos preuves sont déjà suffisamment indépendantes des trois hypothèses si cette conjecture est accomplie par des méthodes comparables.

Plan du chapitre En section I (p. 16), nous commencerons par établir l'axiomatique des géométries nil-affines à rayons. Avec cette axiomatique, nous donnerons quelques notations et repères. En section II (p. 20), nous construirons des exemples et donnons des faits techniques importants. Nous ferons notamment la construction générale des géométries à rayons en géométrie parabolique. Nous commencerons véritablement la partie démonstrative en section III (p. 32), en étudiant la dynamique de Fried associée à l'incomplétude d'une géodésique. Avec la section IV (p. 51), nous établirons des éléments supplémentaires pour terminer les preuves du théorème principal énoncé précédemment. Enfin, en section V (p. 59), nous expliquons la conjecture II.71 (p. 61) permettant d'illustrer l'importance des géométries à rayons dans le cas des géométries paraboliques de rang un.

11. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.

I — GÉOMÉTRIE NIL-AFFINE À RAYONS

I.1 CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Considérons N un groupe de Lie simplement connexe nilpotent et $\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie. L'exponentielle de Lie $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$ réalise un difféomorphisme et nous désignons par $\ln\colon N \to \mathfrak{n}$ la réciproque. Nous avons décrit au chapitre précédent sa structure géodésique. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$\exp(x)\exp(y) = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}([x,[x,y]] + [y,[y,x]]) + \dots\right), \tag{1}$$

permet à la fois de décrire la loi de groupe de N à travers $\mathfrak{n}$ et de décrire les géodésiques de N.

Nous allons généralement noter $\mathcal{N}$ l'espace N lorsque nous voulons souligner son existence sans le choix d'un point base. En effet, en faisant agir N par translation à gauche sur lui-même, nous changeons les coordonnées fournies par $\ln\colon N \to \mathfrak{n}$, mais nous voulons penser $\mathcal{N}$ comme étant la variété lisse intrinsèque, avant le choix d'un point base.

DÉFINITION II.3 *Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et $\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie. Les* automorphismes linéaires *de N (ou de $\mathfrak{n}$) sont les applications linéaires $f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n})$ vérifiant $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ pour tous $x, y \in \mathfrak{n}$. La* géométrie nil-affine *de N est le couple :*

$$(N \rtimes \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n}), N), \tag{2}$$

agissant sur N de la façon suivante. Soit $x \in N$, $f \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$ et $c \in N$. Alors :

$$(c, f)(x) = L_c(\exp(f(\ln(x)))). \tag{3}$$

Quelques notations L'action de $N \rtimes \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$ sur N est relativement illisible en raison du passage de N à son algèbre de Lie (avec laquelle il est difféomorphe). Notons :

$$\forall x \in N, \forall f \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n}),\ f(x) = \exp(f(\ln(x))). \tag{4}$$

Notons également la translation à gauche $L_c(x)$ par l'addition : $c + x$. Il faut faire attention ici au fait qu'il ne s'agit pas d'une addition commutative, puisque N est seulement nilpotent. Alors :

$$\forall x \in N, \forall f \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n}), \forall c \in N,\ (c, f)(x) = c + f(x). \tag{5}$$

Le fait que f soit un automorphisme linéaire implique, par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, que :

$$\forall x, y \in N, \forall f \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n}),\ f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{6}$$

En effet, $\ln(x+y)$ est un polynôme avec des crochets et la compatibilité avec f donne $f(\ln(x+y)) = \ln(\exp(f(x)) + \exp(f(y)))$.

Nous pouvons maintenant expliciter précisément la structure du produit semi-direct $N \rtimes \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})}$ en calculant la composition de deux transformations.

$$((c_2, f_2) \circ (c_1, f_1))(x) = (c_2, f_2)(c_1 + f_1(x)) = c_2 + f_2(c_1) + f_2 f_1(x) = (c_2 + f_2(c_1), f_2 f_1)(x). \tag{7}$$

Le changement du point base vers β s'exprime par une translation à gauche par $-\beta$:

$$c + f(x) = c + f(\beta - \beta + x) = c + f(\beta) + f(-\beta + x). \tag{8}$$

Une dernière notation sera utile. Soit $t \in \mathbf{R}$ et $x \in N$. Alors, nous posons :

$$tx = \exp(t\ln(x)). \tag{9}$$

Il est faux que pour tous x, y, $t(x+y) = tx + ty$, puisque l'homothétie de facteur t n'a pas de raison d'être un automorphisme linéaire. Néanmoins, il est vrai que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in N, \forall f \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n}),\ f(tx) = tf(x). \tag{10}$$

Remarquons que les géodésiques de N sont données par :

$$\gamma(t) = x + tv \tag{11}$$

pour $x \in N$ le point de départ et $x + v$ le point d'arrivée. Avec les transformations nil-affines, nous préservons effectivement les géodésiques, puisque :

$$c + f(x + tv) = (c + f(x)) + tf(v). \tag{12}$$

Plus généralement, nous pouvons définir des sous-espaces nil-affines comme suit.

Définition II.4 *Un sous-espace nil-affine est l'image $L_a \exp(V) = a + V$ pour $a \in N$ et $V \subset \mathfrak{n}$ un sous-espace linéaire.*

Tout comme avec les géodésiques, les transformations nil-affines préservent les sous-espaces nil-affines : $c + f(a+V) = c + f(a) + f(V)$ et comme f est un automorphisme linéaire, $f(V)$ est encore un sous-espace linéaire. Il est tout de même important de remarquer que si dans le cas de $\mathbf{R}^n$ tous les sous-espaces nil-affines sont des sous-groupes (additifs) de $\mathbf{R}^n$, cela n'est pas le cas pour les espaces nilpotents N en général.

Nous proposons à présent une axiomatique pour les géométries à rayons.

Définition II.5 *Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et $\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie. Nous supposons qu'il existe une graduation :*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_k \tag{13}$$

telle que $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$. Une géométrie à rayons *$(N \rtimes KA, N)$ est la donnée de sous-groupes $K, A \subset \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$ qui vérifient les hypothèses suivantes.*

(1) Le sous-groupe A est abélien et simplement connexe. Le sous-groupe K est compact et centralise A.

(2) Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{n}$ de sorte que chaque e_i appartiennent à un unique $\mathfrak{n}_j$.

(3) Il existe un isomorphisme linéaire $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \colon \mathfrak{a} \to \mathbf{R}^r$, avec $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A, et des constantes $d_{i,j}$ de sorte que pour tout $\exp(a) \in A \subset \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$, nous avons dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\exp(a) = \begin{pmatrix} \exp(\alpha_1(a))^{d_{1,1}} \cdots \exp(\alpha_r(a))^{d_{r,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\alpha_1(a))^{d_{1,n}} \cdots \exp(\alpha_r(a))^{d_{r,n}} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

La dimension $\dim \mathfrak{a} = r$ définit le rang *de la géométrie à rayons.*

En notant $\beta_i(a) = \exp(\alpha_i(a))$, nous obtenons $(\dim \mathfrak{a})$ variables $\beta_i \in \mathbf{R}_+$ et une expression plus lisible des matrices de A :

$$\exp(a) = \begin{pmatrix} \beta_1(a)^{d_{1,1}} \cdots \beta_r(a)^{d_{r,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_1(a)^{d_{1,n}} \cdots \beta_r(a)^{d_{r,n}} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

DÉFINITION II.6 *Une géométrie à rayons de rang un est* relativement homogène *si pour $p, q > 0$ fixés, chaque degré d_i prend sa valeur dans $\{0, p, -q\}$.*

Il nous reste à discuter d'un résultat de décomposition. Si N est un groupe nilpotent simplement connexe, alors nous pourrions supposer que $\mathfrak{n}$ se décompose linéairement en $L_1 \oplus L_2$. À quelle condition $\exp(L_1)\exp(L_2)$ est-il difféomorphe à N ? En d'autres termes, si $\mu\colon N \times N \to N$ est la loi de groupe, quand est-ce que μ restreint à $\exp(L_1) \times \exp(L_2)$ est un difféomorphisme sur N ? Lorsque $N = \mathbf{R}^n$, c'est toujours le cas, car la loi de groupe correspond exactement à l'addition vectorielle. Nous ne connaissons pas de contre-exemple à ce phénomène. Le seul résultat général dont nous avons connaissance est celui fourni par BOURBAKI [12].

LEMME II.7 ([Bou72]) *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente. Supposons que nous ayons une suite d'idéaux $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^1 \supset \mathfrak{n}^2 \supset \ldots \mathfrak{n}^q = \{0\}$ telle que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^i] \subset \mathfrak{n}^{i+1}$. Soit $\mathfrak{n} = L_1 \oplus L_2$ une décomposition linéaire. Si pour tout idéal $\mathfrak{n}^i$ nous avons $\mathfrak{n}^i = (\mathfrak{n}^i \cap L_1) \oplus (\mathfrak{n}^i \cap L_2)$, alors $\mu\colon \exp(L_1) \times \exp(L_2) \to N$ est un difféomorphisme.*

La preuve consiste à faire une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{n}$. En prenant le quotient par le dernier idéal $\mathfrak{n}^{q-1}$ — qui est en fait le centralisateur de $\mathfrak{n}$ —, nous obtenons encore une algèbre de Lie nilpotente, de dimension strictement inférieure. Une fois la décomposition obtenue sur $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^{q-1}$, le terme $\mathfrak{n}^{q-1}$ est facile à distribuer, puisqu'il commute avec l'exponentielle (car c'est le centralisateur) et qu'il est décomposé dans $L_1 \oplus L_2$.

D'après ce lemme, n'importe quel $x \in N$ peut être décomposé (selon nos notations) en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \exp(L_1)$ et $x_2 \in \exp(L_2)$. D'après nos hypothèses sur les géométries à rayons, nous pouvons considérer comme idéaux :

$$\mathfrak{n}^i = \mathfrak{n}_i \oplus \mathfrak{n}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_k. \tag{16}$$

Puisque $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$, nous avons bien $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^i] \subset \mathfrak{n}^{i+1}$. Par conséquent, si L_1 et L_2 sont tous deux définis comme les espaces générés par une partition de $(e_1, \ldots, e_n)$, alors il est vrai que $\mathfrak{n}_i = (\mathfrak{n}_i \cap L_1) \oplus (\mathfrak{n}_i \cap L_2)$. Cela implique l'hypothèse du lemme et donc sa conclusion.

Cette construction justifie l'hypothèse de graduation dans notre définition. À moins d'un meilleur résultat technique surpassant celui de Bourbaki, il est difficile de s'en défaire. Heureusement, tous les exemples géométriques fournissent une telle graduation.

Une métrique invariante Nous définissions une métrique sur N compatible avec sa topologie de la façon suivante. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire d'espace vectoriel sur $\mathfrak{n}$ tel que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale. Pour tout $x \in N$, nous définissons la métrique riemannienne

12. [Bou72, Prop. 17, p. 237] Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*, 1972.

invariante à gauche :

$$\langle u, v\rangle|_x = \left\langle L_{x*}^{-1} u, L_{x*}^{-1} v\right\rangle. \tag{17}$$

Par ailleurs pour la géométrie à rayons choisie $N \rtimes KA$, le facteur K est un groupe d'isométries. En effet, K centralise A et donc K agit par isométries sur chaque sous-espace où A agit par homothéties.

LEMME II.8 *Si $T(x) = c + f(x)$ est une transformation de $N \rtimes KA$ et si $f = f_K f_A$ a comme éléments diagonaux de f_A des facteurs positifs tous majorés par $\lambda < 1$ — nous disons que T est une contraction —, alors T a un unique point fixe attractif.*

PREUVE Puisque la métrique riemannienne est invariante à gauche, $\langle T_* u, T_* v\rangle = \langle f_* u, f_* v\rangle$. Puisque $f = f_K f_A$ est linéaire, que f_K agit par isométries et f_A par contractions, il vient que la métrique est λ^n-contractée en tout point. ▩

I.2 RANG UN ET FEUILLETAGES EN CLASSE AU PLUS DEUX DE NILPOTENCE

Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de classe de nilpotence au plus deux. Soit $G_1 = N \rtimes KA_1$ un groupe tel que (G_1, N) est une géométrie à rayons de rang un. Avec une telle géométrie, le sous-groupe A_1 est de dimension 1 et peut s'écrire dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de la géométrie comme :

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \beta^{d_1} & & & \\ & \beta^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta^{d_n} \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbf{R}_+^* \right\} \tag{18}$$

avec $d_i \in \mathbf{R}$ des nombres réels. Les degrés d_i sont indépendant du choix de β, à opposition du signe près. En effet, en échangeant β par β^{-1} chaque d_i devient $-d_i$.

DÉFINITION II.9 *Pour le choix d'une paramétrisation, nous définissons les sous-espaces linéaires $\{L_1, L_2, L_3\}$ de $\mathfrak{n}$ par la propriété suivante : $e_i \in L_1$ si $d_i > 0$, $e_i \in L_2$ si $d_i < 0$ et $e_i \in L_3$ si $d_i = 0$.*

Ces trois sous-espaces de l'algèbre de Lie se transforment en des sous-espaces nil-affines du groupe N par translation à gauche :

$$\forall x \in N,\ L_i|_x = x + L_i. \tag{19}$$

LEMME II.10 *Les distributions générées par $\{L_1, L_2, L_3, L_1 \oplus L_3, L_2 \oplus L_3\}$ sont intégrables, les feuilletages générés par $\{(L_1, L_2 \oplus L_3), (L_2, L_1 \oplus L_3)\}$ sont transverses et deux feuilles ne s'intersectent qu'en un seul point.*

PREUVE Les automorphismes de A_1 préservent le crochet. Ainsi, A agit sur $[e_i, e_j]$ avec degré $d_i + d_j$. Cela montre que les distributions $\{L_1, L_2, L_3, L_1 \oplus L_3, L_2 \oplus L_3\}$ sont bien involutives. Prenons maintenant le feuilletage généré par $(L_1, L_2 \oplus L_3)$. Il est bien transverse en l'origine et par conséquent partout. Montrons que deux feuilles ne s'intersectent qu'en un seul point. Si $x \in N$ alors une intersection se traduit par $x + v_1 = x + v_2 + v_3$ et par translation à gauche par $-x$, la transversalité en l'origine montre que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Le même argument montre la même conséquence pour le feuilletage $(L_2, L_1 \oplus L_3)$. ▩

Commentaire dynamique La décomposition $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 = \mathfrak{n}$ s'apparente à celle liée à une dynamique *partiellement hyperbolique*. Si nous faisons tendre β vers 0 alors L_1 correspond à la distribution contractée (stable), L_2 à celle qui est dilatée (instable) et L_3 à la distribution neutre (centrale).

DÉFINITION II.11 *Deux distributions D_1 et D_2 sont dites* relativement intégrable *si elles sont intégrables et si $[D_1, D_2] \subset D_1 \cap D_2$.*

DÉFINITION II.12 *Une géométrie à rayons de rang un est dite* relativement intégrable *si les distributions $D_1 = L_1 \oplus L_3$ et $D_2 = L_2 \oplus L_3$ sont relativement intégrables.*

LEMME II.13 *Une géométrie à rayons de rang un de classe de nilpotence au plus deux est relativement intégrable si, et seulement si, $L_3 \subset \mathfrak{n}$ est un idéal et $[L_1, L_2] \subset L_3$.*

PREUVE Si la géométrie est relativement intégrable alors $[D_1, D_2] \subset D_1 \cap D_2 = L_3$. Donc $[L_1, L_2] \subset [D_1, D_2] \subset L_3$. Aussi, comme $L_3 \subset D_1, D_2$, il vient $[L_3, L_2] \subset L_3$ et $[L_1, L_3] \subset L_3$, ce qui montre que L_3 est un idéal. Réciproquement, $[L_1 \oplus L_3, L_2 \oplus L_3]$ ne dépend que des crochets $[L_1, L_2]$, $[L_1, L_3]$ et $[L_2, L_3]$. Si L_3 est un idéal alors les deux derniers sont dans L_3 et si $[L_1, L_2] \subset L_3$ alors nous avons bien $[D_1, D_2] \subset L_3 = D_1 \cap D_2$. ▨

LEMME II.14 *Une géométrie à rayons de rang un de classe de nilpotence au plus deux est relativement intégrable si, et seulement si, D_1 et D_2 sont des idéaux de $\mathfrak{n}$.*

PREUVE Si ces distributions sont relativement intégrables, alors $[\mathfrak{n}, D_1] = [L_2, D_1] + [D_1, D_1] \subset [D_2, D_1] + [D_1, D_1] \subset D_1$. Donc D_1 est un idéal et de même D_2 est un idéal. Réciproquement, si D_1 et D_2 sont des idéaux alors $[D_1, D_2]$ soit bien être inclus dans $D_1 \cap D_2$. ▨

Bien sûr, cette condition de relative intégrabilité est trivialement vérifiée si le groupe nilpotent N est abélien. Elle est aussi vérifiée si $L_1 = \mathfrak{n}$ ou si $L_2 = \mathfrak{n}$. Chez FALBEL, MION-MOUTON et VELOSO [13] qui considèrent une géométrie Anosov de contact sur l'espace de Heisenberg, la feuille de la distribution neutre L_3 est exactement le centre de l'algèbre de Lie nilpotente de l'espace de Heisenberg. La condition est ainsi bien vérifiée.

II — CONSTRUCTIONS

II.1 GÉOMÉTRIES À DILATATIONS

Les premiers exemples que nous proposons sont ceux de géométries à rayons de rang un où le groupe diagonal agit par dilatations : les degrés de ses éléments diagonaux β^{d_i} sont tous strictement positifs : $d_i > 0$. Quitte à effectuer un changement de variable, nous pouvons même supposer que $d_i \geq 1$. C'était l'axiomatique que nous avions choisie au début de nos travaux [14].

DÉFINITION II.15 *Une géométrie à rayons de rang un $(G_1, \mathcal{N})$ est* à dilatations *si le sous-groupe $A_1 \subset G_1$ agit diagonalement par des facteurs β^{d_i} avec $d_i \geq 1$.*

13. [FMMV21] Elisha FALBEL, Martin MION-MOUTON et Jose M. VELOSO, « Cartan connections and path structures with large automorphism groups », 2021.
14. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.

Exemples Même si l'hypothèse est forte, de nombreux exemples existent.

(1) Comme nous le verrons dans la partie suivante, toutes les géométries paraboliques fournissent une géométrie à rayons de rang un à dilatations. De façon directe, si $B = MAN$ est un sous-groupe de Borel d'un groupe semi-simple G, alors $N \rtimes MA$ agit sur N comme une géométrie à rayons. En général, A n'est pas de dimension un. Si c'est le cas, alors c'est une géométrie à dilatations, sinon il est toujours possible de trouver $A_1 \subset A$ de sorte que $N \rtimes MA_1$ soit une géométrie à rayons de rang un et à dilatations.

(2) Les groupes de Carnot [15] sont une grande classe d'exemples. Un tel groupe de Carnot est la donnée d'un groupe nilpotent simplement connexe N gradué sur lequel un groupe de dilatations A_1 agit par automorphismes. Les géométries $(N \rtimes A_1, N)$ sont par conséquent des géométries à rayons de rang un à dilatations.

Ce qui nous procure un avantage à travers cette définition, c'est l'existence d'une norme invariante par le groupe de dilatations. C'est un résultat de HEBISCH et SIKORA [16].

THÉORÈME II.16 ([HS90]) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un à dilatations. Désignons par δ_t les dilatations de $A_1 \subset G_1$. Puisque A_1 est unidimensionnel, nous pouvons prendre un paramètre $t > 0$ de sorte que $\delta_t \delta_s = \delta_{ts}$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur N (continue et lisse sur $N - \{0\}$) vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) pour tous $x, y \in N$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (avec la loi de groupe);

(2) pour tout $x \in N$ et $\delta_t \in A_1$, $\|\delta_t x\| = t\|x\|$;

(3) pour tout $x \in N$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(4) pour tout $x \in N$, $\|-x\| = \|x\|$;

(5) la norme $\|\cdot\|$ est continue sur N et lisse sur $N - \{0\}$;

(6) la boule unité $\|x\| < 1$ est la boule euclidienne d'un rayon $r < \varepsilon$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ pour la base de la géométrie à rayons $(e_1, \ldots, e_n)$ rendue orthonormée.

II.2 UNE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE DE L'HOMOGÉNÉITÉ

La réduction au cas des géométries relativement homogènes est liée à une contrainte technique forte qui malheureusement a été trop peu traitée dans les détails techniques des cas plus généraux.

PROPOSITION II.17 *Soit S un ouvert convexe à bord lisse d'un espace nilpotent simplement connexe N et dont le bord ∂S est tangent en l'origine de N. Soit a_n et b_n deux suites de N. Donnons-nous une norme euclidienne $\|\cdot\|$ de $\mathfrak{n}$. Supposons $\|a_n\| \to 0$ et qu'il existe une demi-droite η issue de l'origine, intersectant S en deux points. Si :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\|a_n\|} = a \in \eta \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\|a_n\|} = 0, \tag{20}$$

alors la somme, pour la loi de groupe de N, $a_n + b_n$ appartient à S dès que $n \geq 0$ est suffisamment grand.

15. [Pan89] Pierre PANSU, « Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un », 1989-01.

16. [HS90] Waldemar HEBISCH et Adam SIKORA, « A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group », 1990.

PREUVE Nous agissons par une homothétie de rapport $\|a_n\|^{-1}$. L'ouvert S convexe à bord lisse tend vers un demi-espace puisque tout segment transverse à S en l'origine tend vers la droite générée par ce segment. Le point $a_n + b_n$ appartient à S, si et seulement si, $\|a_n\|^{-1}(a_n + b_n)$ appartient à ce demi-espace. Pour cela, il suffit que $\|a_n\|^{-1}(a_n + b_n)$ appartienne à une boule euclidienne de petit rayon centrée en $a = \lim \|a_n\|^{-1} a_n$.

D'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, l'homothétie agit sur la somme par la loi de groupe $a_n + b_n$ de la façon suivante.

$$\frac{1}{\|a_n\|}\left(a_n + b_n + \frac{1}{2}[a_n, b_n] + \dots\right) = \frac{a_n}{\|a_n\|} + \frac{b_n}{\|a_n\|} + \frac{1}{2}\left[\frac{a_n}{\|a_n\|}, b_n\right] + \dots \tag{21}$$

De sorte que chaque crochet du polynôme soit en fonction de a_n, b_n et d'un seul facteur $\|a_n\|^{-1} a_n$. À présent, ce point est proche de $a = \lim \|a_n\|^{-1} a_n$ puisque la norme de la différence avec $\|a_n\|^{-1}(a_n + b_n)$ tend effectivement vers zéro par hypothèse et inégalité triangulaire.

▩

Ce qui rend cette proposition propre au cas homogène réside en l'usage d'une norme euclidienne, qui est exactement une norme de Hebish-Sikora lorsque les dilatations sont homogènes. Nous serions tenté de généraliser cette proposition lorsque :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\|a_n\|_{\mathrm{HS}}} = 0 \tag{22}$$

avec une norme de Hebish-Sikora $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$. Malheureusement c'est *a priori* trop difficile. Pour cela, remarquons qu'à renormalisation près nous avons seulement l'inégalité $\|x\| \leq \|x\|_{\mathrm{HS}}$ lorsque $\|x\|_{\mathrm{HS}} < 1$. Si la géométrie à dilatation n'est pas homogène, il n'est pas possible d'obtenir un encadrement par $C\|x\|_{\mathrm{HS}} \leq \|x\|$. Par conséquent, ou bien nous décidons de faire une homothétie de rapport $\|a_n\|^{-1}$ et $\|a_n\|^{-1} b_n \geq \|a_n\|_{\mathrm{HS}}^{-1} b_n$ ne tend plus nécessairement vers zéro, soit nous décidons de faire une homothétie de rapport $\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^{-1}$ et cette fois c'est $\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^{-1} a_n$ qui pourrait tendre vers zéro. Nous aurions pu aussi tenter d'agir par une dilatation (du groupe choisi) de rapport bien choisi en lieu et place d'une homothétie. Mais même si nous obtenons des convergences, cette-fois c'est la limite de S par ces dilatations qui pose problème puisque la demi-droite limite η sera génériquement dans le bord de la limite de S et il n'est plus possible de conclure par la simple appartenance à une boule euclidienne centrée en $a \in \eta$.

II.3 GÉOMÉTRIES À RAYONS DANS LES GÉOMÉTRIES PARABOLIQUES

Considérons G un groupe de Lie semi-simple non compact et à centre fini. Nous pouvons aussi voir G comme le groupe des isométries d'un espace symétrique non compact. Un sous-groupe parabolique $P \subset G$ est un sous-groupe fermé qui contient au moins un sous-groupe de Borel. À conjugaison près, avec la décomposition d'Iwasawa $KAN = G$, un groupe de Borel est $B = MAN$ avec $M \subset K$ le centralisateur de A.

À conjugaison près, nous pouvons aussi faire correspondre P au choix d'un sous-ensemble $\Sigma \subset \Delta$ de racines simples et à une graduation :

$$\mathfrak{g} = g_{-k,\Sigma} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-1,\Sigma} \oplus \mathfrak{g}_{0,\Sigma} \oplus \mathfrak{g}_{1,\Sigma} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{k,\Sigma}. \tag{23}$$

Ce point de vue peut se retrouver chez ČAP et SLOVÁK [17] et sera utilisé pour ce qui suit. Remarquons ici que la présence d'une graduation permet de s'assurer que cette hypothèse

17. [cS09, p. 309] Andreas ČAP et Jan SLOVÁK, *Parabolic geometries. I*, 2009.

pour les géométries à rayons est raisonnable. Avec le choix de Σ, le *sous-groupe parabolique* P est celui qui correspond à la sous-algèbre des grades positifs :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{0,\Sigma} \oplus \mathfrak{g}_{1,\Sigma} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k,\Sigma}. \tag{24}$$

Un *sous-groupe parabolique opposé* Q est donné par la sous-algèbre des grades négatifs :

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{g}_{0,\Sigma} \oplus \mathfrak{g}_{-1,\Sigma} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k,\Sigma}. \tag{25}$$

Les grades strictement positifs et négatifs fournissent aussi deux sous-algèbres nilpotentes :

$$\mathfrak{n}_{-\Sigma} = \mathfrak{g}_{-1,\Sigma} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k,\Sigma}, \tag{26}$$

$$\mathfrak{n}_{\Sigma} = \mathfrak{g}_{1,\Sigma} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k,\Sigma}. \tag{27}$$

et la sous-algèbre :

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{0,\Sigma} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}, \tag{28}$$

est appelée *sous-algèbre de Levi*. Le sous-groupe correspondant $L = P \cap Q$ est appelé *facteur de Levi*. Nous considérons aussi les sous-groupes nilpotents $N_+ \subset P$ et $N_- \subset Q$ correspondant aux sous-algèbres $\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{n}_-$. Il existe un plongement naturel $N_+ \to {}^{G}\!/_{Q}$, défini par exemple chez GUIVARC'H, JI et TAYLOR [18], et dont l'image est connue sous le nom de *strate ouverte de Schubert* chez KAPOVICH, LEEB et PORTI [19]. Cet ouvert est dense dans ${}^{G}\!/_{Q}$.

Par conséquent, nous considérons la sous-géométrie associée à $N_+ \subset {}^{G}\!/_{Q}$. Son isotropie est le facteur de Levi L et le sous-groupe L agit par conjugaison sur N_+, puisque $Q = LN_-$, et N_+ agit sur lui-même à gauche.

DÉFINITION II.18 *Une* géométrie de Levi *est le couple* $(N_+ \rtimes L, N_+)$ *issu d'une géométrie parabolique* $(G, {}^{G}\!/_{Q})$.

L'espace N_+ de cette géométrie est dense dans la géométrie parabolique ${}^{G}\!/_{Q}$. Nous pensons par conséquent que la géométrie de Levi est une composante particulièrement importante pour l'étude de la géométrie parabolique des variétés fermées.

Généralement, une géométrie de Levi n'est pas une géométrie à rayons, à l'exception du cas où $P = B$ serait un groupe de Borel décomposé par :

$$B = M_B A_B N_+. \tag{29}$$

Dans ce cas-ci, $L = M_B A_B$ avec $M_B \subset K$ qui centralise A_B dans le compact maximal K. La géométrie à rayons aurait alors comme espace N_+ et comme rang celui de G comme groupe semi-simple, puisqu'à chaque fois c'est la dimension réelle de $A = A_B$. Cependant, nous pouvons toujours procéder à une *décomposition de Langland* de P (nous pourrons par exemple consulter [GJT98] ou KNAPP [20]) :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_{\Sigma} \oplus \mathfrak{a}_{\Sigma} \oplus \mathfrak{n}_{\Sigma} \tag{30}$$

$$P = M(\Sigma) A(\Sigma) N_+, \tag{31}$$

et le sous-groupe $M(\Sigma)A(\Sigma)$ contient toujours $M_B A_B$. Le sous-groupe $A(\Sigma)$ agit encore diagonalement, mais $M(\Sigma)$ — qui est le centralisateur de $A(\Sigma)$ dans L — n'est plus compact.

18. [GJT98, p. 20-21] Yves GUIVARC'H, Lizhen JI et J. C. TAYLOR, *Compactifications of symmetric spaces*, 1998.
19. [KLP18, p. 175] Michael KAPOVICH, Bernhard LEEB et Joan PORTI, « Dynamics on flag manifolds: domains of proper discontinuity and cocompactness », 2018.
20. [Kna02] Anthony W. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, 2002.

Notamment, $\mathfrak{m}_\Sigma \cap \mathfrak{a}_B$ est de dimension positive dès que $P \neq B$. L'algèbre $\mathfrak{a}_\Sigma$ peut être décrite par :

$$\mathfrak{a}_\Sigma = \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \forall \phi \in \Sigma,\ \phi(H) = 0\}. \tag{32}$$

Par conséquent, pour obtenir une géométrie à rayons, deux stratégies sont possibles. La première consiste à toujours choisir $M_B A_B$ comme isotropie de la géométrie. L'autre stratégie consiste à considérer $K \subset G$ compact et à prendre comme isotropie $(M(\Sigma) \cap K)A(\Sigma)$. La proposition suivante résume cette construction.

PROPOSITION II.19 *Soit (P, N_+) une géométrie de Levi. Nous avons deux sous-géométries nil-affines à rayons (distinctes si $P \neq B$) :*

$$(N_+ \rtimes M_B A_B, N_+)\,, \tag{33}$$

$$(N_+ \rtimes (K \cap M_\Sigma) A_\Sigma, N_+)\,. \tag{34}$$

Le rang de la première géométrie à rayons est le rang réel du groupe semi-simple G. Le rang de la deuxième est la soustraction du rang de la première par le cardinal de Σ.

Nous procédons maintenant à la construction explicite d'exemples. Pour cela, nous proposons d'examiner les formes réelles $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ et la forme réelle $\mathrm{SU}(2,2)$ de $\mathrm{SL}(4,\mathbf{C})$. En général, la même procédure s'applique et nous pourrions regarder toutes les formes réelles non compactes G de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ et de $\mathrm{SL}(4,\mathbf{C})$. La table II.1 résume les géométries paraboliques que nous pourrions obtenir avec ces formes réelles.

G et son rang réel	$\Sigma \subset \Delta$	$\dim(\mathfrak{n}_\Sigma)$	Classe de nilpotence
$\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$, rang 2	$\emptyset$	3	2
	$\{\phi_i\}$	2	1
$\mathrm{SU}(2,1)$, rang 1	$\emptyset$	3	2
$\mathrm{SL}(4,\mathbf{R})$, rang 3	$\emptyset$	6	3
	$\{\phi_i\}$	5	2
	$\{\phi_i, \phi_{i+1}\}$	4	2
$\mathrm{SU}(3,1)$, rang 1	$\emptyset$	5	2
$\mathrm{SU}^*(4)$, rang 1	$\emptyset$	4	1
$\mathrm{SU}(2,2)$, rang 2	$\emptyset$	6	3
	$\{\phi_2\}$	5	2
	$\{\phi_1\}$	4	1

TABLE II.1 – Les géométries paraboliques des formes réelles de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ et de $\mathrm{SL}(4,\mathbf{C})$.

II.3.1 La géométrie de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$

L'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ est celle des matrices réelles de traces nulles. Nous posons $a,b,x,y,z,u,v,w \in \mathbf{R}$ et décrivons les matrices de $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})$ par :

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} a & x & z \\ u & b & y \\ w & v & -a-b \end{pmatrix}. \tag{35}$$

En choisissant les racines simples :

$$\phi_1 = a-b,\ \phi_2 = a+2b \tag{36}$$

nous pouvons écrire la structure de l'algèbre de Lie en replaçant chaque variable par le sous-espace racine correspondant.

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{h} & \phi_1 & \phi_1+\phi_2 \\ -\phi_1 & \mathfrak{h} & \phi_2 \\ -(\phi_1+\phi_2) & -\phi_2 & \mathfrak{h} \end{pmatrix} \tag{37}$$

Le terme $\mathfrak{h}$ indique dans cette expression le sous-espace qui commute avec $\mathfrak{a}$ — c'est-à-dire le sous-espace généré par les racines, qui est ici diagonal. Maintenant, par exemple, si nous regardons ce que devient la coordonnée y, elle est remplacée par le terme ϕ_2, ce qui indique que y appartient au sous-espace propre associé à la racine ϕ_2. Cette description de la structure d'algèbre de Lie nous permet aussi d'écrire la graduation associée au choix $\Sigma = \emptyset$, elle-même associée au choix du sous-groupe parabolique de Borel :

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R}) = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ w & & \end{pmatrix}}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})_{-2}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ u & & \\ & v & \end{pmatrix}}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})_{-1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})_{0}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} & x & \\ & & y \\ & & \end{pmatrix}}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})_{1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} & & z \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})_{2}}. \tag{38}$$

Cette graduation se comprend en regardant pour chaque coordonnée la somme des entiers de l'expression de la racine en fonction des racines simples. Par exemple, w appartient à l'espace propre de $-\phi_1-\phi_2$, ce qui donne le grade $-1-1=-2$. En général, le choix d'un $\Sigma \neq \emptyset$ fournit une graduation de la même façon *en comptant les entiers devant les racines qui ne sont pas dans* Σ.

Le sous-groupe de Borel La première géométrie parabolique à considérer consiste à prendre le sous-groupe de Borel associé au choix $\Sigma = \emptyset$. Ce sous-groupe B a pour sous-algèbre $\mathfrak{b}$ les grades positifs.

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}_B} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & y \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}_B}. \tag{39}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_B$ est bien une sous-algèbre abélienne — ici, il n'existe pas de partie compacte $\mathfrak{m}_B$. L'algèbre $\mathfrak{n}_B$ est nilpotente, et la description montre qu'elle est de classe deux de nilpotence. Cette algèbre est en fait celle du groupe de Heisenberg de dimension trois.

La géométrie $(\mathrm{SL}(3,\mathbf{R}), {}^{\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})}\!/_{B})$ est aussi connue sous le nom de *géométrie de chemins* et est particulièrement intéressante pour l'étude des 3-variétés. Cette géométrie de chemins

est de contact et peut être interprétée comme le choix dans $\mathbf{RP}^2$ des drapeaux d'un point et d'une droite contenant le point. Cela décrit bien un espace de dimension trois et la forme de contact est celle exprimant le fait que le point doit appartenir à la droite.

La géométrie de Levi associée consiste à prendre B comme groupe de transformation et N_B — le groupe de Heisenberg associé à l'algèbre $\mathfrak{n}_B$ — comme espace. Cette géométrie de Levi est à rayons — c'est toujours le cas avec un sous-groupe de Borel. Choisissons (x, y, z) comme coordonnées de l'espace $\mathfrak{n}_B$. Observons que l'action adjointe de $\mathfrak{a}_B$ sur $\mathfrak{n}_B$ est décrite par :

$$\mathfrak{a}_B|_{\mathfrak{n}_B} = \begin{pmatrix} a-b & & \\ & a+2b & \\ & & 2a+b \end{pmatrix}. \tag{40}$$

L'exponentielle de cette matrice — qui décrit par conséquent l'action de A_B sur $\mathfrak{n}_B$ — est bien diagonale et donnée par :

$$\begin{pmatrix} \exp(a)\exp(b)^{-1} & & \\ & \exp(a)\exp(b)^2 & \\ & & \exp(a)^2\exp(b) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Observons que les degrés des exponentielles sont exactement les facteurs entiers devant a et b. Par conséquent, la géométrie à rayons obtenue est de rang deux, qui est bien le rang de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ comme groupe semi-simple.

Cette géométrie à rayons est aussi connue sous le nom de *géométrie de chemins enrichie* chez MION-MOUTON [21] et FALBEL, MION-MOUTON et VELOSO [22]. Il n'existe pas de classification de toutes les variétés fermées ayant une structure modelée sur cette géométrie de rang deux. En revanche, nos théorèmes permettent d'étudier une sous-géométrie de rang un par le choix d'un volume parallèle, qui se fait en prenant $b = -2a$. La géométrie obtenue est connue sous le nom de *géométrie de chemins stricte* chez [MM21; FMMV21] et ses variétés fermées sont toutes complètes.

La géométrie parabolique de dimension deux Le choix $\Sigma = \{\phi_1\}$ ou $\Sigma = \{\phi_2\}$ fournit un sous-groupe parabolique P_Σ dont l'espace associé $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})/P_\Sigma$ est de dimension deux. Les deux géométries correspondant au choix d'une racine ou de l'autre sont isomorphes et nous ne décrivons par conséquent que l'une des deux.

Regardons $\Sigma = \{\phi_1\}$. Le sous-groupe parabolique associé est déterminé en prenant les grades positifs où la graduation est cette fois réalisée en ne comptant que les facteurs entiers devant ϕ_2. Le facteur de Levi $\mathfrak{l}_{\phi_1}$ correspondra au grade nul et la partie nilpotente $\mathfrak{n}_{\phi_1}$ — qui sera en fait abélienne — correspondra au grade positif.

$$\mathfrak{p}_{\phi_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & x & \\ u & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}}_{\mathfrak{l}_{\phi_1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ & 0 & y \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}_{\phi_1}} \tag{42}$$

21. [MM21] Martin MION-MOUTON, « Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangian contact structures », 2021.

22. [FMMV21] Elisha FALBEL, Martin MION-MOUTON et Jose M. VELOSO, « Cartan connections and path structures with large automorphism groups », 2021.

La géométrie de Levi associée n'est cette fois pas à rayons. Pour s'en assurer, nous pouvons calculer l'action adjointe de $\mathfrak{l}_{\phi_1}$ sur $\mathfrak{n}_{\phi_1}$ en prenant (y, z) comme coordonnées de cette dernière. L'action adjointe est décrite par :

$$\mathfrak{l}_{\phi_1}|_{\mathfrak{n}_{\phi_1}} = \begin{pmatrix} a+2b & u \\ x & 2a+b \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Pour obtenir une géométrie à rayons, deux principaux choix sont possibles. Nous pouvons prendre $\mathfrak{a}_B \subset \mathfrak{l}_{\phi_1}$ comme isotropie. L'action est diagonale et nous l'avons décrite précédemment. Cette géométrie à rayons imite le cas du sous-groupe de Borel et est de rang deux. L'autre choix consiste à chercher dans la matrice précédente un facteur compact. Ce sera ici $\mathfrak{m}_{\phi_1} = \mathfrak{o}(2)$ et la partie abélienne $\mathfrak{a}_{\phi_1}$ est obtenue en posant $\phi_1 = 0$, c'est-à-dire $a = b$. Finalement, nous obtenons comme isotropie de cette deuxième géométrie à rayons :

$$\mathfrak{h}_{\phi_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & \\ -x & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{m}_{\phi_1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \\ 0 & a & \\ & & -2a \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}_{\phi_1}}. \tag{44}$$

La géométrie obtenue est celle des similitudes sur $\mathbf{R}^2$. Elle est de rang un et fait partie de celles étudiées par FRIED [23].

II.3.2 La géométrie SU(2, 1)

Le groupe $\mathrm{SU}(2,1)$ est celui des isométries du plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$. Pour le décrire, nous considérons la forme hermitienne de signature $(2,1)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Soit $a, b, \delta, \gamma \in \mathbf{R}$ et $x, y \in \mathbf{C}$. L'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2,1)$ est décrite par :

$$\mathfrak{su}(2,1) = \begin{pmatrix} a+\boldsymbol{i}b & -\overline{x} & \boldsymbol{i}\gamma \\ -\overline{y} & -2\boldsymbol{i}b & x \\ \boldsymbol{i}\delta & y & -a+\boldsymbol{i}b \end{pmatrix}. \tag{46}$$

La seule racine simple à considérer est $\phi = a$ et fournit comme structure :

$$\mathfrak{su}(2,1) = \begin{pmatrix} \mathfrak{h} & \phi & 2\phi \\ -\phi & \mathfrak{h} & \phi \\ -2\phi & -\phi & \mathfrak{h} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Le fait qu'il n'existe qu'une seule racine traduit le fait que $\mathrm{SU}(2,1)$ soit un groupe semi-simple de rang réel un. Par conséquent, il n'existe qu'une seule géométrie parabolique, à conjugaison près, et c'est celle d'un sous-groupe de Borel. Elle fournira une unique géométrie à rayons. L'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel B est décrite par :

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}b & & \\ & -2\boldsymbol{i}b & \\ & & \boldsymbol{i}b \end{pmatrix}}_{\mathfrak{m}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\overline{x} & \boldsymbol{i}\gamma \\ & 0 & x \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}}. \tag{48}$$

23. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.

L'algèbre nilpotente $\mathfrak{n}$ est encore celle du groupe de Heisenberg de dimension trois. L'isotropie est différente du cas de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$, puisque celle-ci agit sur $\mathfrak{n}$ avec les coordonnées $(x,\gamma) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ par :

$$\mathfrak{h}|_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} a - 3\boldsymbol{i}b & \\ & 2a \end{pmatrix}. \tag{49}$$

La géométrie à rayons décrite est par conséquent de rang un. Il s'agit de la géométrie des similitudes du groupe de Heisenberg et ses variétés fermées ont été étudiées par MINER [24].

II.3.3 La géométrie $\mathrm{SU}(2,2)$

Nous choisissons la forme hermitienne de signature $(2,2)$ déterminée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Soit $x, y, z, w \in \mathbf{C}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \delta, s, t \in \mathbf{R}$. L'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2,2) = \mathrm{SU}(J)$ est décrite par :

$$\mathfrak{su}(2,2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta & -\overline{x} & -\overline{y} & \boldsymbol{i}t \\ -\overline{z} & \alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & \boldsymbol{i}\gamma & y \\ -\overline{w} & \boldsymbol{i}\delta & -\alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & x \\ \boldsymbol{i}s & w & z & -\alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix} \tag{51}$$

En choisissant les racines :

$$\phi_1 = \alpha_1 - \alpha_2,\ \phi_2 = 2\alpha_2, \tag{52}$$

nous pouvons écrire la structure de l'algèbre de Lie en remplaçant chaque variable par le sous-espace racine correspondant.

$$\mathfrak{su}(2,2) = \begin{pmatrix} \mathfrak{h} & \phi_1 & \phi_1 + \phi_2 & 2\phi_1 + \phi_2 \\ -\phi_1 & \mathfrak{h} & \phi_2 & \phi_1 + \phi_2 \\ -(\phi_1 + \phi_2) & -\phi_2 & \mathfrak{h} & \phi_1 \\ -(2\phi_1 + \phi_2) & -(\phi_1 + \phi_2) & -\phi_1 & \mathfrak{h} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Le sous-groupe de Borel En choisissant $\Sigma = \emptyset$, nous faisons le choix d'un sous-groupe de Borel.

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}\beta & & & \\ & +\boldsymbol{i}\beta & & \\ & & +\boldsymbol{i}\beta & \\ & & & -\boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix}}_{\mathfrak{m}_B} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & -\alpha_2 & \\ & & & -\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}_B} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\overline{x} & -\overline{y} & \boldsymbol{i}t \\ & 0 & \boldsymbol{i}\gamma & y \\ & & 0 & x \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}_B} \tag{54}$$

24. [Min90] Robert R. MINER, « Spherical CR manifolds with amenable holonomy », 1990.

Dans les coordonnées (x, γ, y, t) de $\mathfrak{n}_B$ nous pouvons écrire l'expression de l'action adjointe de $\mathfrak{h}_B = \mathfrak{m}_B \oplus \mathfrak{a}_B$ sur $\mathfrak{n}_B$ par :

$$\mathfrak{h}_B|_{\mathfrak{n}_B} : \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2) + 2\boldsymbol{i}\beta & & & \\ & 2\alpha_2 & & \\ & & (\alpha_1 + \alpha_2) + 2\boldsymbol{i}\beta & \\ & & & 2\alpha_1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

et cela montre bien que la géométrie fournie est à rayons.

La géométrie parabolique de dimension cinq Nous obtenons une géométrie parabolique dont l'espace est de dimension cinq en prenant $\Sigma = \{\phi_2\}$. Cette géométrie est en réalité une géométrie CR de contact que nous pouvons construire autrement. Considérons l'espace projectif $\mathbf{CP}^3$ et l'équation :

$$\mathrm{Re}(x_1\overline{x_4}) + \mathrm{Re}(x_2\overline{x_3}) < 0. \tag{56}$$

Cette équation décrit un espace homogène — en un sens symétrique pseudo-riemannien [25] — dont le groupe de transformations est $\mathrm{SU}(2,2) = \mathrm{SU}(J)$. Le bord de ce domaine est :

$$\mathrm{Re}(x_1\overline{x_4}) + \mathrm{Re}(x_2\overline{x_3}) = 0 \tag{57}$$

et correspond donc à une sous-variété de dimension cinq dans $\mathbf{CP}^3$. Le sous-groupe parabolique que nous choisissons sera l'isotropie du point $(1:0:0:0)$ qui appartient bien à ce bord.

L'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique est donnée par :

$$\mathfrak{p}_{\phi_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta & & & \\ & \alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & \boldsymbol{i}\gamma & \\ & \boldsymbol{i}\delta & -\alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & \\ & & & -\alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix}}_{\mathfrak{l}_{\phi_2}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\overline{x} & -\overline{y} & \boldsymbol{i}t \\ & 0 & 0 & y \\ & & 0 & x \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}_{\phi_2}}. \tag{58}$$

Pour obtenir des géométries à rayons, nous avons besoin de réduire le facteur de Levi $\mathfrak{l}_{\phi_2}$. Le premier choix consiste à imiter le sous-groupe de Borel en prenant $\mathfrak{h}_B \subset \mathfrak{l}_{\phi_2}$. L'action de cette sous-algèbre est décrite précédemment.

En introduction nous avions énoncé qu'une géométrie à rayons de rang un de cette géométrie de Levi constituait un exemple d'application à nos résultats. Nous pouvons en effet retrouver cette géométrie de rang un avec la géométrie de Levi du Borel et la réduction $\alpha_1 = 0$. Cela fournit comme description de l'algèbre de l'isotropie dans les coordonnées (x, y, t) :

$$\begin{pmatrix} -\alpha_2 + 2\boldsymbol{i}\beta & & \\ & \alpha_2 + 2\boldsymbol{i}\beta & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

25. [DGK18] Jeffrey DANCIGER, François GUÉRITAUD et Fanny KASSEL, « Convex cocompactness in pseudo-Riemannian hyperbolic spaces », 2018.

Le deuxième choix de géométrie à rayons consiste à réduire $\mathfrak{a}$ en posant $\phi_2 = 2\alpha_2 = 0$ et à choisir un facteur compact dans le carré du milieu.

$$\mathfrak{h}_{\phi_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}\beta & & & \\ & \boldsymbol{i}\beta & \boldsymbol{i}\gamma & \\ & \boldsymbol{i}\gamma & \boldsymbol{i}\beta & \\ & & & -\boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix}}_{\mathfrak{m}_{\phi_2}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}_{\phi_2}} \tag{60}$$

L'action adjointe avec (x, y, t) comme base de $\mathfrak{n}_{\phi_2}$ est décrite par :

$$\mathfrak{h}_{\phi_2}|_{\mathfrak{n}_{\phi_2}} : \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\boldsymbol{i}\beta & \boldsymbol{i}\gamma & \\ \boldsymbol{i}\gamma & \alpha_1 + 2\boldsymbol{i}\beta & \\ & & 2\alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

La géométrie parabolique de dimension quatre La dernière géométrie parabolique est déterminée par $\Sigma = \{\phi_1\}$. Son espace sera de dimension quatre. L'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique est :

$$\mathfrak{p}_{\phi_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta & -\overline{x} & & \\ -\overline{z} & \alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & & \\ & & -\alpha_2 + \boldsymbol{i}\beta & x \\ & & z & -\alpha_1 - \boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix}}_{\mathfrak{l}_{\phi_1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{y} & \boldsymbol{i}t \\ & 0 & \boldsymbol{i}\gamma & y \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{n}_{\phi_1}}. \tag{62}$$

La première géométrie à rayons est à nouveau obtenue en imitant le sous-groupe de Borel et en choisissant $\mathfrak{h}_B \subset \mathfrak{l}_{\phi_1}$, dont l'action est déjà connue. La deuxième géométrie à rayons est obtenue en réduisant $\mathfrak{a}$ en prenant $\phi_1 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2$. Cela fournit l'algèbre suivante :

$$\mathfrak{h}_{\phi_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}\beta & -\overline{x} & & \\ x & \boldsymbol{i}\beta & & \\ & & \boldsymbol{i}\beta & x \\ & & -\overline{x} & -\boldsymbol{i}\beta \end{pmatrix}}_{\mathfrak{m}_{\phi_1}} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & & \\ & & -\alpha_1 & \\ & & & -\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{a}_{\phi_1}}. \tag{63}$$

L'action adjointe de $\mathfrak{h}_{\phi_1}$ est plus difficile à exprimer. Sur $\mathfrak{h}_{\phi_1} \cap \mathfrak{h}_B$, nous connaissons déjà le résultat. Il reste donc à évaluer la partie $\mathfrak{su}(2)$. Elle est déterminée par :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -\overline{x} & & \\ x & 0 & & \\ & & 0 & x \\ & & -\overline{x} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{y} & \boldsymbol{i}t \\ & 0 & \boldsymbol{i}\gamma & y \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{i}(t-\gamma)\overline{x} & 2\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(x\overline{y}) \\ & 0 & 2\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(y\overline{x}) & \boldsymbol{i}(t-\gamma)x \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

II.4 QUELQUES VARIÉTÉS INCOMPLÈTES

Nous proposons de donner ici trois exemples facilement généralisables de variétés incomplètes à rayons.

Premier exemple Les variétés radiantes (sans rotation) sont une classe très importante de variétés incomplètes. Elles sont obtenues comme quotient du complémentaire d'un point par une dilatation. Un exemple générique est le suivant, voir figure II.1. Prenons $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ et la dilatation $f(x,y) = (2x, 3y)$. Le quotient fournit une variété fermée incomplète. Les géodésiques incomplètes sont les courbes atteignant $(0,0)$. Une est indiquée en pointillés. Au niveau de la variété fermée — cela nous intéressera par la suite — nous pouvons suivre le tracé de la géodésique. Nous observons qu'elle s'accumule le long d'un lacet géodésique.

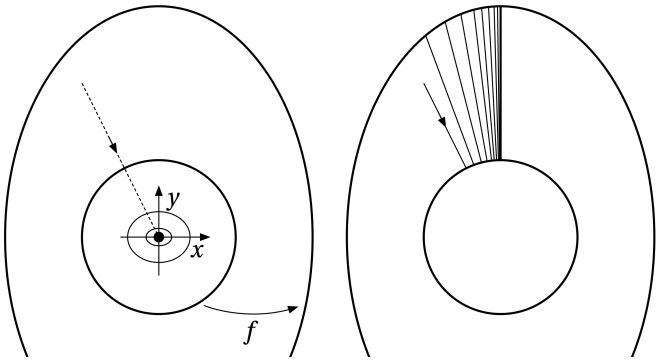

FIGURE II.1 – Une variété radiante.

Deuxième exemple Nous pouvons aussi effectuer le produit d'une variété radiante avec une variété complète, par exemple à translations, ou avec une autre variété radiante. Voir figure II.2. Prenons $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}(0,1)$ quotienté par $f(x,y) = (2x, y)$. Si nous quotientons de plus avec $g(x,y) = (x, y+1)$, cela donne le produit par une variété complète. Si nous quotientons avec $g(x,y) = (x, 2y)$ et prenons le complémentaire de $\mathbf{R}(1,0)$, cela donne le produit par une autre variété radiante. Le quotient est bien toujours une variété fermée.

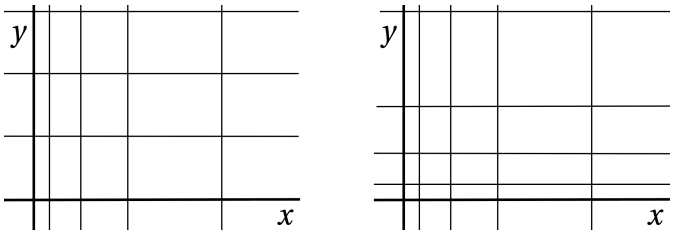

FIGURE II.2 – Le produit d'une variété radiante avec une variété complète ou radiante.

Troisième exemple Le dernier exemple que nous proposons est un peu différent, puisque le quotient n'est pas fermé : ce sera un cylindre ouvert. Voir figure II.3 (p. 32). Prenons un demi-plan de $\mathbf{R}^2$ et quotientons le par $f(x,y) = (3x, y/2)$. Cette fois aussi, les géodésiques incomplètes vont converger vers un lacet géodésique attractif.

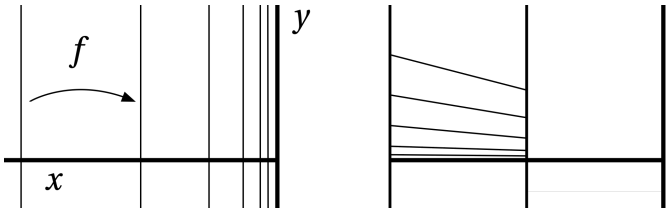

FIGURE II.3 – Une variété incomplète ouverte à dynamique hyperbolique.

III — DYNAMIQUE DE FRIED

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME (Réductibilité des variétés incomplètes II.52 (p. 47)) *Soit* $(G_1, \mathcal{N})$ *une géométrie à rayons de rang un du cadre relatif — nous supposons que la géométrie est relativement homogène, relativement intégrable et d'ordre de nilpotence au plus deux. Soit* M *une* $(G_1, \mathcal{N})$*-variété fermée connexe. Si elle n'est pas complète, alors il existe un sous-espace nil-affine* $I \subset \mathcal{N}$ *tel que la développante* $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ *est un revêtement.*

Les preuves que nous proposerons seront annotées selon le cadre axiomatique qu'elles nécessitent. Ces trois différents cadres sont décrits comme suit.

DÉFINITION II.20 *Soit* $(G_1, \mathcal{N})$ *une géométrie à rayons de rang un. Par défaut, elle est du* cadre général.

— Le cadre étendu *suppose que le groupe* N *sous-jacent à* $\mathcal{N}$ *doit être d'ordre de nilpotence au plus deux, ou alors que* G_1 *doit être purement à dilatations. De plus, la géométrie doit être relativement intégrable.*

— Le cadre relatif *suppose que la géométrie est relativement homogène, relativement intégrable et* N *doit être d'ordre de nilpotence au plus deux.*

III.1 CONSIDÉRATIONS INITIALES

Considérons M une variété nil-affine fermée incomplète. Nous choisissons n'importe quelle métrique sur M compatible avec sa topologie. Désignons par $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ son revêtement universel. Pour $x \in \widetilde{M}$, si $\gamma \subset \widetilde{M}$ est une géodésique issue de x et incomplète au temps $t = 1$, alors la projection de γ dans M est une courbe ouverte sans prolongement par continuité en $t = 1$. Puisque M est fermée, la projection $\pi(\gamma)$ a un point d'accumulation $y \in M$. Considérons $U \subset M$ un voisinage compact de y, convexe et trivialisant le revêtement universel. Pour le choix d'une suite strictement positive $\varepsilon_i \to 0$, nous pouvons définir t_i un temps tel que $\pi(\gamma(t_i))$ appartienne à U et est à distance au plus ε_i de $y \in M$. Nous demandons de plus que $\pi(\gamma)$ sorte de U entre t_i et t_{i+1}. Cela nous fournit donc une suite de temps $t_i \to 1$.

Utilisons la trivialisation de U. Elle fournit des $U_i \subset \widetilde{M}$ de sorte que $\gamma(t_i) \in U_i$. Notons par ailleurs $y_i \in \widetilde{M}$ les relevés de y, de sorte que $y_i \in U_i$. Tous les U_i sont des voisinages compacts convexes des y_i, par hypothèse sur U. À travers la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N}$, même si les U_i peuvent être fortement déformés, les images $D(U_i)$ sont encore compactes, convexes et s'accumulent le long de la courbe $\overline{D(\gamma)}\colon [0,1] \to \mathcal{N}$ — compactifiable en $t = 1$ dans $\mathcal{N}$.

Comme les intersections de γ avec les U_i sont disjointes, il est encore vrai que les $D(U_i)$ intersectent disjointement la courbe $D(\gamma)$.

DÉFINITION II.21 *Considérons $\gamma \subset \widetilde{M}$ une géodésique incomplète en $t = 1$ avec, par sa projection sur M, un point d'accumulation $y \in M$. Soit U un voisinage compact, convexe et trivialisant de y. Soit $\varepsilon_i \to 0$ une suite strictement positive et soit $t_i \to 1$ une suite de temps associés telle que pour $y_i \in U_i$ des relevés dans $\widetilde{M}$ de $y \in U$, nous ayons $\gamma(t_i) \in U_i$ et la distance entre $\pi(\gamma(t_i))$ et y soit au plus ε_i. Définissons $g_{ji} \in \pi_1(M, y)$ les transformations de $\widetilde{M}$ qui vérifient :*

$$g_{ji}(U_i) = U_j. \tag{65}$$

Ces données définissent une dynamique de Fried.

Remarquons que le choix d'une sous-suite de $\{t_i\}$ (ou de $\{\varepsilon_i\}$) correspond univoquement au choix d'une sous-suite des relevés $\{y_i \in U_i\}$. Aussi, les transformations g_{ji} vérifient naturellement une propriété de cocycle :

$$g_{ki} = g_{kj} g_{ji}. \tag{66}$$

Pour la structure nil-affine $(G, \mathcal{N})$ considérée, nous désignerons par $T_{ji} = \rho(g_{ji}) \in G$ l'holonomie de g_{ji}.

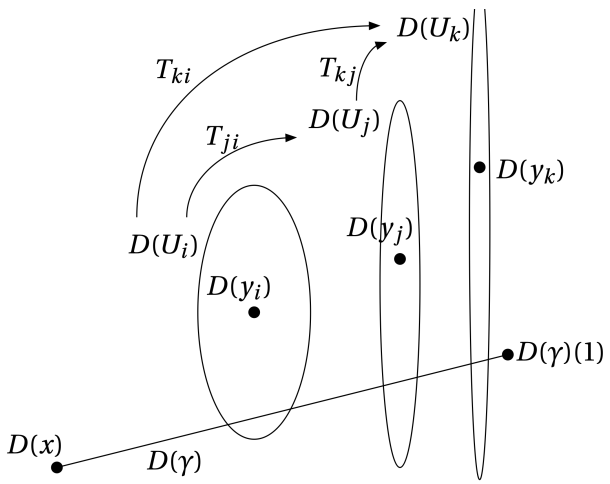

FIGURE II.4 – Une dynamique de Fried.

Aparté Nous pensons qu'à ce stade, un commentaire topologique est utile. Le sous-groupe $\langle T_{ji} \rangle$ n'est généralement pas monogène. Si tel était le cas, cela montrerait que pour une unique transformation T, $T_{ji} = T^{j-i}$ (quel que soit j, i). Remarquons que sous l'hypothèse de la conjecture II.1 (p. 15), ce serait vrai : si $\pi(\gamma)$ s'accumule uniformément le long d'un lacet géodésique, alors les $\gamma|_{[t_i, t_j]}$ seraient tous dans la classe d'homotopie de ce lacet et les g_{ji} appartiendraient donc à la copie de $\mathbf{Z}$ correspondant à ce lacet dans le groupe fondamental.

Plan de la preuve du théorème II.52 (p. 47) La démonstration repose sur une stratégie dont nous devons le principe à FRIED [26]. Tout d'abord, l'étude sera dynamique. Il va s'agir d'étudier suffisamment finement la dynamique de Fried associée à une géodésique incomplète. Plus tard, nous introduirons un convexe à bord lisse S qui contient la géodésique incomplète γ. L'un des impératifs de l'étude dynamique consiste à permettre la description de $T_{ji}^{-1}(S)$ lorsque $j \gg i \to \infty$.

Ensuite, les arguments liant dynamique et convexité nous permettrons de montrer qu'à partir de S, la limite de l'orbite négative $T_{ji}^{-1}(S)$ fournit un ensemble de visibilité suffisamment grand pour pouvoir être étendu en un demi-espace de visibilité de $\mathcal{N}$. Enfin, nous montrerons que la variation de la géodésique considérée fournira différents demi-espaces dont les intersections seront contraintes : elles devront se faire le long des points invisibles. Cela montrera que l'intersection des demi-espaces est constante et uniquement constituée des points invisibles et évités par la développante. Il ne sera alors plus très difficile de montrer que la développante est un revêtement sur le complémentaire de cette intersection.

Nous supposons à présent que $(G, \mathcal{N})$ est une géométrie à rayons. Nous avons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{n}$ sur laquelle l'isotropie linéaire $A \subset G$ agit diagonalement. Le fait que KA centralise A implique que les sous-espaces propres de A sont préservés [27]. Une fois un point base de $\mathcal{N}$ choisi, nous écrirons $T_{ji} \in G$ comme :

$$T_{ji}(x) = c_{ji} + f_{ji}(x), \tag{67}$$

avec $c_{ji} \in N$ et $f_{ji} \in KA$. Le changement du point base (en passant de $0 \in N$ à $a \in N$) se répercute sur l'expression de T_{ji} par :

$$T_{ji}(x) = T_{ji}(a - a + x) = T_{ji}(a) + f_{ji}(-a + x). \tag{68}$$

Par conséquent, la partie linéaire f_{ji} est préservée et les considérations vectorielles aussi. Décomposons chaque $f_{ji} \in KA$ en :

$$f_{ji} = f_{ji,K} f_{ji,A}, \tag{69}$$

avec $f_{ji,K} \in K$ et $f_{ji,A} \in A$. Les deux facteurs linéaires commutent. La propriété de cocycle sur T_{ji} implique aussi que chaque facteur sur K et sur A vérifient la relation de cocycle :

$$f_{ki,K} = f_{kj,K} f_{ji,K}, \; f_{ki,A} = f_{kj,A} f_{ji,A}. \tag{70}$$

LEMME II.22 *Quitte à choisir une sous-suite de $\{y_i \in U_i\}$, nous avons :*

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} f_{ji,K} = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} f_{ji,K} = \mathrm{id}. \tag{71}$$

Par ailleurs, soit e_q un élément de la base. Désignons par $\beta_{ji,q}$ le facteur de dilatation de $f_{ji,A}$ le long de la direction de e_q. Quitte à choisir une sous-suite de $\{y_i \in U_i\}$, nous avons :

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \beta_{ji,q} = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} \beta_{ji,q} = \omega_q \in \{0, 1, \infty\}. \tag{72}$$

PREUVE (Cadre général) Puisque $K \subset G$ est compact, nous pouvons supposer, à extraction près, que pour tout j, $f_{ji,K} \to L_j \in K$ lorsque $i \to \infty$. La relation de cocycle montre alors $L_k = f_{kj,K} L_j$. Par conséquent, lorsque $j \to \infty$ nous avons $L_j \to L$ et nous obtenons $L_k = L_k L$

26. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.
27. C'est cette propriété qui motive notre dénomination de géométrie *à rayons*.

ce qui implique, avec $k \to \infty$, $L = L^2$ et donc $L = \mathrm{id}$. De même, en considérant d'abord la limite de $f_{ki,K}$ en k puis en i, nous obtenons encore asymptotiquement la transformation identité.

De façon analogue, avec la compactification $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$, la même relation de cocycle montre la propriété de convergence asymptotique pour $\beta_{ji,q}$. Nous remarquons ici que les seules solutions à $\omega_q = \omega_q^2$ sont bien $\{0, 1, \infty\}$. ▩

Il est utile de remarquer que si $\beta_{kj,q} \to \omega_q$ lorsque $k \gg j \to \infty$, cela donne tout de même une indication sur la valeur $\beta_{ki,q}$ lorsque i est fixé et $k \to \infty$. En effet :

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{ki,q} = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} \beta_{ki,q} = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} \beta_{kj,q}\beta_{ji,q} = \omega_q \lim_{j\to\infty} \beta_{ji,q}. \tag{73}$$

Pour $i > 0$ fixé, si $\beta_{ki,q} \to r$ alors r doit vérifier $r = \omega_q r$. Si $\omega_q = 0$ ou $\omega_q = \infty$ alors $r = \omega_q$.

Lemme II.23 *Pour $i > 0$ fixé, si $\beta_{ki,q} \to r$ et si $\omega_q = 1$ alors r doit être un réel positif fini.*

Preuve (Cadre général) Nous montrons que si $r = 0$ ou $r = \infty$ alors $\omega_q = r$. Supposons que $r = 0$, alors puisque tous les $\beta_{mn,q}$ sont des réels positifs finis, cela implique que pour tout $j > i$ fixé assez grand, il existe $k > j$ tel que $\beta_{ki,q} < \beta_{ji,q}^2 < 1$. Par conséquent $\beta_{kj,q} = \beta_{ki,q}\beta_{ji,q}^{-1} < \beta_{ji,q} < 1$ et ne peut donc tendre que vers 0 lorsque $j \to \infty$ et $k \to \infty$. De façon similaire, supposons que $r = \infty$. Alors pour $j > i$ fixé assez grand, il existe $k > j$ tel que $\beta_{ki,q} > \beta_{ji,q}^2 > 1$ et donc $\beta_{kj,q} > \beta_{ji,q} > 1$ ne peut tendre que vers ∞. ▩

Proposition II.24 *Il existe une sous-suite de $\{y_i \in U_i\}$ telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées.*

(1) Pour $i > 0$ fixé, $f_{ji,K}$ converge.

(2) Pour $i, q > 0$ fixés, chaque suite $\{\beta_{ji,q}\}$ est monotone.

Cette proposition ne pose pas de difficulté, mais nous permet de choisir à présent définitivement une telle sous-suite. Les deux lemmes précédents s'appliquent. En particulier, $\beta_{ji,q}$ converge soit vers ω_q soit vers un réel $r > 0$ lorsque $\omega_q = 1$.

Définition II.25 *Nous définissons une décomposition linéaire :*

$$\mathfrak{n} = E \oplus P \oplus F, \tag{74}$$

en décidant qu'une direction e_q appartient à E si $\omega_q = 0$, appartient à P si $\omega_q = 1$ et appartient à F sinon ($\omega_q = \infty$).

Puisque A agit diagonalement et que K centralise A, cela implique que f_{ji} préserve toujours cette décomposition linéaire. Aussi, nous montrerons que nous avons nécessairement $\dim E > 0$ alors que les autres espaces pourraient être nuls.

Définition II.26 *Soit $A_n \subset X$ une suite d'ensembles. Nous dirons qu'un point $x \in X$ est* point limite *s'il existe $x_n \in A_n$ (pour tous les indices n) tel que $\lim x_n = x$. L'ensemble limite de la suite A_n est l'ensemble des points limites de cette suite.*

Lemme II.27 *Soit $i > 0$, alors $\lim g_{ji}^{-1}(\gamma(t_j)) = y_i$.*

Preuve (Cadre général) Dans $U \subset M$, les points $\pi(\gamma(t_j))$ sont à distance $\varepsilon_j \to 0$ du point d'accumulation $y \in M$. Fixons $i > 0$. Conséquemment par relèvement dans un seul U_i, les points $g_{ji}^{-1}(\gamma(t_j))$ doivent converger vers $y_i \in U_i$. ▩

Lemme II.28 *Le vecteur v de $D(\gamma)(t) = D(x) + tv$ n'est pas à coordonnées nulles dans E. Ce dernier est par conséquent de dimension au moins une.*

PREUVE (Cadre général) Regardons à travers la développante l'image du convexe U_i. Considérons les géodésiques η_j dont le point initial est $\gamma(t_j)$ et qui sont des reparamétrisations de γ jusqu'au temps $t = 1$:

$$D(\eta_j)(t) = D(\gamma)(t_j) + t(1 - t_j)v. \tag{75}$$

Alors les géodésiques η ne sont définies que pour $t < 1$ puisque le point final de $D(\gamma)$ est invisible. Le point initial $g_{ji}^{-1}(\eta_j(0)) = g_{ji}^{-1}(\gamma(t_j))$ converge vers y_i et le vecteur directeur de η est déterminée par $(1-t)f_{ji}^{-1}(v)$ puisque :

$$T_{ji}^{-1}(\eta_j)(t) = T_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j)) + f_{ji}^{-1}(t(1-t_j)v). \tag{76}$$

Si v était de coordonnées nulles dans E alors $(1-t_j)f_{ji}^{-1}(v)$ tendrait vers 0 quand $j \to \infty$, ce qui est impossible puisque la géodésique $g_{ji}^{-1}(\eta_j)$ deviendrait visible en $t = 1$ lorsque j est assez grand. ▨

Si nous choisissons un point base $p \in N$, nous pouvons construire des sous-espaces nil-affines correspondants par :

$$L|_p = \exp_p(L) = L_p \exp(L) = p + \exp(L), \tag{77}$$

et ce, quelque soit le sous-espace linéaire $L \subset \mathfrak{n}$.

LEMME II.29 *Soit N un espace nilpotent de classe au plus deux. Pour tous $a, b \in N$, $[a, b]$ est central et :*

$$a + b = b + a + [a, b]. \tag{78}$$

PREUVE Développons linéairement dans l'algèbre de Lie avec la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. À gauche nous avons $a+b+\frac{1}{2}[a,b]$ et à droite $b+a+\frac{1}{2}[b,a]+[a,b] = b+a-\frac{1}{2}[a,b]+[a,b] = a+b+\frac{1}{2}[a,b]$. ▨

Orbite positive Nous allons commencer par un calcul technique qui nous permettra de trouver un point fixe asymptotique de T_{ji}. En général, il est très difficile d'établir qu'une application nil-affine a un point fixe. Nous allons montrer que, avec une petite perturbation, T_{ji} préserve le sous-espace $F|_{D(\gamma)(1)}$ sur lequel il agit par expansion.

Les sous-espaces $L = E \oplus P$ et F sont définis par une partition de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{n}$. Par conséquent nous pouvons appliquer le lemme II.7 (p. 18) qui implique que pour tout $x \in N$ il existe une unique décomposition $x = x_L + x_F$ avec $x_L \in \exp(L) = \exp(E \oplus P)$ et $x_F \in \exp(F)$.

PROPOSITION II.30 *Choisissons $D(\gamma)(1)$ comme point base de $\mathcal{N}$ et fixons $i > 0$. Écrivons $T_{ji}(x) = c_{ji} + f_{ji}(x)$. Soit $c_{ji} = c_{ji}^L + c_{ji}^F$ la décomposition fournie par le lemme II.7 (p. 18). Définissons $Q_{ji}(x) = c_{ji}^F + f_{ji}(x)$, alors $T_{ji}(x) - Q_{ji}(x) = c_{ji}^L$ uniformément en x. Décomposons $L = E \oplus P$ de sorte que $c_{ji}^L = c_{ji}^E + c_{ji}^P$. Alors c_{ji}^L converge quand $j \to \infty$. Nous avons de plus :*

$$\lim_{j\to\infty} c_{ji}^E = 0 \tag{79}$$

$$\lim_{j\to\infty} -c_{ji}^P = \lim_{j\to\infty} f_{ji}\left(D(y_i)^P\right) + f_{ji}\left([-D(y_i)^F, D(y_i)^E]^P\right) \tag{80}$$

$$\lim_{j\to\infty} -f_{ji}^{-1}(c_{ji}^F) = D(y_i)^F + \left[-D(y_i)^F, D(y_i)^L\right]^F. \tag{81}$$

PREUVE (Cadre étendu à dilatations) Dans ce cas-ci, nous obtenons par hypothèse $P = F = \{0\}$. Rappelons que $T_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j)) \to D(y_i)$. Par conséquent, puisque f_{ji} est une contraction :

$$0 = \lim f_{ji}(D(y_i)) = \lim f_{ji}(T_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))) \tag{82}$$

$$= \lim -c_{ji} + D(\gamma)(t_j) = \lim -c_{ji} \tag{83}$$

ce qui montre bien le lemme. ▩

PREUVE (Cadre étendu de classe de nilpotence au plus deux) Par classe deux de nilpotence, l'algèbre de Lie vérifie $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}$. Remarquons aussi que n'importe quel crochet $[X, Y]$ ne dépend que de la classe de X et Y dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$.

Dans chaque coordonnée L et F nous écrivons $T_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j)) \to D(y_i)$. Par simplicité, écrivons $y = D(y_i)$, $\gamma = D(\gamma)(t_j)$ et omettons d'écrire les indices en j et i.

$$T^{-1}(\gamma) = -f^{-1}(c^F) - f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(\gamma^F) \tag{84}$$

$$= \left(-f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L)\right) + \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right] + \left(-f^{-1}(c^F) + f^{-1}(\gamma^F)\right) \tag{85}$$

$$T^{-1}(\gamma)^L = -f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L) + \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right]^L \tag{86}$$

$$T^{-1}(\gamma)^F = \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right]^F - f^{-1}(c^F) + f^{-1}(\gamma^F) \tag{87}$$

Notons que puisque $D(\gamma)(t_j) \to D(\gamma)(1) = 0$ et que f^{-1} contracte F, il s'ensuit $f^{-1}(\gamma^F) \to 0$. Dans $F/\mathfrak{z}$:

$$y^F + \mathfrak{z} = \lim T^{-1}(\gamma)^F + \mathfrak{z} = \lim -f^{-1}(c^F) + f^{-1}(\gamma^F) + \mathfrak{z} \tag{88}$$

$$= \lim -f^{-1}(c^F) + \mathfrak{z}. \tag{89}$$

Ainsi, $f^{-1}(c_{ji}^F)$ converge bien dans $F/\mathfrak{z}$. Regardons à présent la partie $L/\mathfrak{z}$:

$$y^L + \mathfrak{z} = \lim -f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L) + \mathfrak{z} \tag{90}$$

et par conséquent le crochet qui ne dépend que des valeurs dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$:

$$\lim \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right] = \lim \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L) + \mathfrak{z}, -f^{-1}(c^F) + \mathfrak{z}\right] \tag{91}$$

$$= \left[-y^L + \mathfrak{z}, y^F + \mathfrak{z}\right] = [-y^L, y^F]. \tag{92}$$

Dans F il vient :

$$y^F = \lim T^{-1}(\gamma)^F = \lim \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right]^F - f^{-1}(c^F) + f^{-1}(\gamma^F) \tag{93}$$

$$= \lim [-y^L, y^F]^F - f^{-1}(c^F) \tag{94}$$

et donc $-f_{ji}^{-1}(c_{ji}^F)$ converge et sa limite est exactement $D(y_i)^F + [-D(y_i)^F, D(y_i)^L]^F$.

Maintenant, dans la coordonnée L nous obtenons :

$$y^L = \lim T^{-1}(\gamma)^L = \lim -f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L) + \left[-f^{-1}(\gamma^L) + f^{-1}(c^L), -f^{-1}(c^F)\right]^L \tag{95}$$

$$= \lim -f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L) + [-y^L, y^F]^L \tag{96}$$

$$\iff y^L + [-y^F, y^L]^L = \lim -f^{-1}(c^L) + f^{-1}(\gamma^L). \tag{97}$$

Ainsi le terme de droite doit converger. Comme f_{ji} est lipschitzienne sur L, la composition par f doit encore converger et

$$\lim f(y^L) + f([-y^F, y^L]^L) = \lim -c^L + \gamma^L \tag{98}$$

$$= \lim -c^L \tag{99}$$

puisque $D(\gamma)(t_j) \to D(\gamma)(1) = 0$. Par conséquent c^L_{ji} converge. Sa composante $E \subset L$ converge nécessairement vers 0 puisque f_{ji} contracte arbitrairement fort. ▨

L'étude asymptotique des termes f_{ji}, c^L_{ji} et $f^{-1}_{ji}(c^F_{ji})$ nous donne un aperçu quasi complet de la dynamique des T_{ji}. La dernière quantité qu'il faudrait arriver à encadrer est $f^{-1}_{ji}(c^L_{ji})$. En effet, remarquons qu'en orbite négative :

$$T^{-1}_{ji}(x) = -f^{-1}_{ji}(c_{ji}) + f^{-1}_{ji}(x). \tag{100}$$

Le terme $f^{-1}_{ji}(c^L_{ji})$ ne converge pas *a priori* — et cette convergence ne dépend d'ailleurs que de celle de $f^{-1}_{ji}(c^E_{ji})$. Il s'avère que ce sera un argument géométrique global qui nous permettra de montrer la convergence de cette quantité.

LEMME II.31 *Si, pour tout $i > 0$ fixé, $f^{-1}_{ji}(c^E_{ji})$ ne tend pas vers l'infini lorsque $j \to \infty$, alors :*

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} f^{-1}_{kj}(c^L_{kj}) = 0. \tag{101}$$

PREUVE (Cadre étendu) Écrivons la partie de translation du cocycle $T^{-1}_{kj} = T_{ji}T^{-1}_{ki}$. Nous pensons $i > 0$ fixé, $k \to \infty$ et $j > i$ qui est ensuite pris tendant vers l'infini.

$$-f^{-1}_{kj}(c_{kj}) = c_{ji} + f_{ji}(-f^{-1}_{ki}(c_{ki})) \tag{102}$$

$$-f^{-1}_{kj}(c^L_{kj}) = c^L_{ji} - f_{ji}(f^{-1}_{ki}(c^L_{ki})) + \left[c^F_{ji} - f^{-1}_{kj}(c^F_{ki}), f_{ji}(-f^{-1}_{ki}(c^E_{ki}))\right]^L \tag{103}$$

Regardons les premiers deux termes du membre de droite. Dans $E \subset L$, c^E_{ji} tend vers zéro et $f_{ji}(f^{-1}_{ki}(c^E_{ki}))$ aussi puisque f_{ji} contracte un terme borné. Dans $P \subset L$, c^P_{ji} et $f^{-1}_{kj}(c^P_{ki})$ ont même limite car f^{-1}_{kj} n'agit asymptotiquement pas sur P. Donc les deux premiers termes ont une différence qui tend vers zéro. Il reste à montrer que le crochet tend aussi vers zéro.

$$\left[c^F_{ji} - f^{-1}_{kj}(c^F_{ki}), f_{ji}(-f^{-1}_{ki}(c^E_{ki}))\right]^L = f_{ji}\left(\left[f^{-1}_{ji}(c^F_{ji}) - f^{-1}_{ki}(c^F_{ki}), -f^{-1}_{ki}(c^E_{ki})\right]^L\right) \tag{104}$$

Le terme à gauche dans le crochet converge vers zéro car $f^{-1}_{ji}(c^F_{ji})$ et $f^{-1}_{ki}(c^F_{ki})$ ont même limite. Le terme de droite est borné et par conséquent le crochet tend vers zéro. ▨

Rappelons que :

$$Q_{ji}(x) = c^F_{ji} + f_{ji}(x) \tag{105}$$

et par conséquent Q_{ji} a toujours un point fixe dans $F|_{D(\gamma)(1)}$, puisqu'elle préserve ce sous-espace nil-affine en le dilatant. En effet, son inverse est une contraction (stricte) de $F|_{D(\gamma)(1)}$ (qui est un sous-groupe de Lie nilpotent), avec par conséquent un unique point fixe. Désignons par $q_{ji} \in F|_{D(\gamma)(1)}$ le point fixe de Q_{ji}.

LEMME II.32 *Pour $i > 0$, q_{ji} converge lorsque $j \to \infty$ et nous définissons $q_i = \lim q_{ji}$. De plus, $D(y_i) \in (E \oplus P)|_{q_i}$.*

PREUVE (Cadre étendu) Il s'agit de remarquer qu'en se basant en $D(\gamma)(1)$:

$$Q_{ji}(x) = c^F_{ji} + f_{ji}(x) = q_{ji} - f_{ji}(q_{ji}) + f_{ji}(x) \tag{106}$$

et par conséquent la contraction :

$$Q^{-1}_{ji}(x) = -f^{-1}_{ji}(c^F_{ji}) + f^{-1}_{ji}(x) = q_{ji} - f^{-1}_{ji}(q_{ji}) + f^{-1}_{ji}(x) \tag{107}$$

montre que $q_{ji} - f^{-1}_{ji}(q_{ji}) = -f^{-1}_{ji}(c^F_{ji})$ converge puisque nous avons montré que $f^{-1}_{ji}(c^F_{ji})$ converge. Il s'ensuit que le point fixe q_{ji} converge.

Montrons que le point $D(y_i)$ doit appartenir à $(E \oplus P)|_{q_i}$. Reprenons la décomposition selon $L \oplus F$ avec $L = E \oplus P$. Nous avons déjà montré que :

$$\lim_{j\to\infty} -f_{ji}^{-1}(c_{ji}^F) = \lim_{j\to\infty} q_{ji} - f_{ji}^{-1}(q_{ji}) = q_i \tag{108}$$

$$= D(y_i)^F + \left[-D(y_i)^F, D(y_i)^L\right]^F. \tag{109}$$

Nous avons par conséquent :

$$D(y_i) = D(y_i)^L + D(y_i)^F \tag{110}$$

$$= D(y_i)^F + \left[-D(y_i)^F, D(y_i)^L\right] + D(y_i)^L \tag{111}$$

$$= D(y_i)^F + \left[-D(y_i)^F, D(y_i)^L\right]^F + \left[-D(y_i)^F, D(y_i)^L\right]^L + D(y_i)^L \tag{112}$$

$$\in q_i + L \tag{113}$$

puisque les crochets commutent en classe deux de nilpotence. ▩

Revenons à M et au choix du voisinage compact U du point d'accumulation. Réduisons le voisinage U en un voisinage (quelconque) V de y. Puisque nous avons choisi des distances $\varepsilon_i \to 0$, pour $i \geq i_0$ assez grand, tous les $\pi(\gamma(t_i))$ vont appartenir non seulement à U mais également à $V \subset U$. En relevant V en les $V_i \subset U_i$, nous obtenons $\gamma(t_i) \in V_i$ lorsque i est assez grand. Ce choix quelconque de $V \subset U$ permet de mieux décrire la dynamique des T_{ji} sur $D(U_i)$.

Définition II.33 *Dans M, notons $U_1 = U$. Choisissons une suite strictement positive $\{1 > r > 0\}$ qui tend vers 0. Nous choisissons $\{U_r\}$ une suite de voisinages convexes et compacts de $y \in M$. Nous supposons que la suite $\{U_r\}$ est décroissante pour l'inclusion et qu'elle tend vers le singleton $\{y\}$ lorsque $r \to 0$. Notons $U_{1,i}$ les relevés U_i de $U = U_1$ et désignons par $U_{r,i}$ les relevés de U_r de sorte que $U_{r,i} \subset U_{1,i}$. Alors, ce sont encore des voisinages convexes et compacts des $y_i \in \widetilde{M}$. Dans $D(\widetilde{M})$ définissons :*

$$C_{r,i} = D(U_{r,i}), \tag{114}$$

qui sont aussi des voisinages convexes et compacts des $D(y_i)$.

Lemme II.34 *Pour tout $r > 0$ et tous $j > i > 0$, $g_{ji}U_{r,i} = U_{r,j}$ et, par conséquent, $T_{ji}C_{r,i} = C_{r,j}$.* ▩

Puisque les U_r sont des voisinages de y, $D(\gamma)(1)$ est point limite de chacune des séquences $\{C_{r,i}\}$ pour $r > 0$ fixé.

Proposition II.35 *Soit $r > 0$. Tout point d'accumulation de $\{C_{r,i}\}$ est un point limite.*

Preuve (Cadre général) Choisissons un point base de N. Nous savons que $D(\gamma)(1)$ est point limite. Soit $y_j \in C_{r,j}$ une suite tendant vers $D(\gamma)(1)$. Chaque $y_j \in C_{r,j}$ peut être écrit :

$$y_j = c_{ji} + f_{ji}(x_{i,j}) \tag{115}$$

pour des $x_{i,j} \in C_{r,i}$. Nous pouvons ainsi écrire n'importe quel $z \in C_{r,i}$ comme $x_{i,j} - x_{i,j} + z$ de sorte qu'avec $L_{r,i} = -x_{i,j} + C_{r,i}$, nous avons :

$$C_{r,j} = T_{ji}(C_{r,i}) = c_{ji} + f_{ji}(C_{r,i}) \tag{116}$$

$$= (c_{ji} + f_{ji}(x_{i,j})) + f_{ji}(-x_{i,j} + C_{r,i}) \tag{117}$$

$$= y_j + f_{ji}(L_{r,i}). \tag{118}$$

Par conséquent, puisque y_j converge, un point d'accumulation d'une suite $z_{\sigma(j)} \to z$ à valeurs dans $\{C_{r,\sigma(j)}\}$ doit correspondre à un point d'accumulation $w_{\sigma(j)} \to w$ d'une suite à valeurs dans $\{f_{\sigma(j)i}(L_{r,i})\}$. Ainsi, il s'agit de montrer que que tous les points d'accumulations de $\{f_{ji}(L_{r,i})\}$ sont des points limites.

Remarquons que $0 \in L_{r,i}$ et que $L_{r,i}$ est convexe et compact. Soit $i > 0$ et considérons $j \geq j_0$. Alors, f_{ji} a son facteur de rotation qui converge. Par conséquent, $f_{ji,K}(L_{r,i})$ a une limite L_K. Le facteur diagonal a ses coefficients qui sont positifs et monotones. Par conséquent, $f_{ji,A}(L_K)$ a aussi une limite L_∞ et tous les points d'accumulations sont nécessairement des points limites. ▩

DÉFINITION II.36 *Pour $r > 0$ fixé, nous définissons $C_{r,\infty}$ comme étant l'ensemble limite de $\{C_{r,i}\}$.*

Remarquons que même si $\{D(y_i)\}$ n'a pas nécessairement de limite — cette suite pourrait partir à l'infini —, les $C_{r,\infty}$ sont décroissants pour l'inclusion.

DÉFINITION II.37 *Nous définissons :*

$$C_{0,\infty} = \bigcap_{r>0} C_{r,\infty}. \tag{119}$$

LEMME II.38 *Les ensembles $C_{r,\infty}$ et $C_{0,\infty}$ sont convexes. L'ensemble $C_{0,\infty}$ est non vide — il contient $D(\gamma)(1)$ — et est un sous-espace nil-affine.*

PREUVE (Cadre général) Chacun des $C_{r,i}$ est convexe, donc les $C_{r,\infty}$ et $C_{0,\infty}$ le sont aussi. D'après la discussion précédente, tous les $C_{r,\infty}$ contiennent $D(\gamma)(1)$, car U_r est un voisinage du point d'accumulation $y \in M$. Il reste à montrer que $C_{0,\infty}$ est un sous-espace nil-affine. Pour cela, nous montrons que toute géodésique maximale (non nulle) de $C_{0,\infty}$ est nécessairement une demi-droite de $\mathcal{N}$.

Considérons une telle géodésique maximale γ. Soit $x^1 \in C_{0,\infty}$ son point initial et $x^2 \in C_{0,\infty}$ son point final. Pour tout $r > 0$, il existe une suite $x^1_{r,n} \in C_{r,n}$ telle que $x^1_{r,n} \to x^1$. De même il existe $x^2_{r,n} \in C_{r,n}$ tendant vers x^2. Écrivons par convexité $x^2_{r,n} = x^1_{r,n} + v_{r,n}$. Puisque x^2 est borné, il s'ensuit que $v_{r,n}$ a une limite puisque $-x^1_{r,n} + x^2_{r,n} = v_{r,n} \to -x^1 + x^2$. Cette limite v doit ainsi être non nulle et indépendante de r. Nous pouvons ainsi supposer $v_{r,n}$ uniformément bornée en r et n lorsque $r \to 0$. Remarquons pour cela que si $x^i_{r-\varepsilon,n}$ tend vers x^i dans $C_{r-\varepsilon,n}$ alors c'est encore vrai dans $C_{r,n}$. Mais si $v_{r,n}$ est bornée, alors elle ne peut tendre que vers 0 puisque r est arbitrairement petit, absurde. ▩

LEMME II.39 *Choisissons $D(\gamma)(1)$ comme origine de $\mathcal{N}$. Alors :*

$$\forall r > 0,\ C_{r,\infty} \subset (P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}, \tag{120}$$

$$C_{0,\infty} = F|_{D(\gamma)(1)}. \tag{121}$$

PREUVE (Cadre étendu) La décomposition $E \oplus P \oplus F$ peut être basée en $D(\gamma)(1)$. En appliquant T_{ji} à $C_{r,i}$ et avec $j \to \infty$, les directions de E sont complètement contractées et donc seules les géodésiques dans les directions de $P \oplus F$ sont présentes dans $C_{r,\infty}$. Dans $C_{0,\infty}$, les directions de P disparaissent aussi, car $C_{0,\infty}$ est nil-affine et les demi-droites provenant de tous les $C_{r,\infty}$ ne peuvent être issues que des dilatations avec $\beta_q \to \infty$, c'est-à-dire de demi-droites dans les directions de F. Elles sont toutes présentes par étude de $-f_{ji}^{-1}(c^F_{ji})$. ▩

III.2 VARIÉTÉS À RAYONS DE RANG UN

Nous examinons à présent exclusivement les variétés à rayons de rang un. Pour ces variétés, l'holonomie prend ses valeurs dans $G_1 = N \rtimes KA_1$, où A_1 est de dimension un.

LEMME II.40 *Si $(G_1, \mathcal{N})$ est une géométrie à rayons de rang un, alors il existe une décomposition linéaire $\mathfrak{n} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ telle que, pour toute dynamique de Fried, $P = L_3$ et $\{E, F\} = \{L_1, L_2\}$.*

Une conséquence de cette observation est que P est un sous-espace indépendant de la dynamique choisie. En effet, en regardant la distribution des degrés d_i des coefficients $\beta_i^{d_i}$ des transformations de A_1, P est donné par les coordonnées où $d_i = 0$. Aussi, d'une dynamique de Fried à une autre, les sous-espaces E et F sont préservés ou échangés.

COROLLAIRE II.41 *Soit $x \in \widetilde{M}$, alors $P|_{D(x)}$ est un convexe complètement visible depuis x.*

PREUVE (Cadre général) Comme montré précédemment, une géodésique incomplète ne peut pas avoir son vecteur directeur de coordonnée nulle dans E. Donc les directions P sont toujours visibles depuis x. Le sous-espace $P|_{D(x)}$ est convexe car $P \subset \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente. ▩

LEMME II.42 *Dans le cadre relatif, la sous-algèbre de Lie P contient $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Pour tout $x \in N$, $x + P = P + x$.*

PREUVE La relative homogénéité montre que $[E, E] = [F, F] = 0$ puisque sinon l'action par automorphismes permettrait de doubler le degré. La relative intégrabilité montre pour sa part que $[E \oplus P, F \oplus P] \subset P$. Prenons $x \in N$ et $p \in P$, alors $x + p = [x, p] + p + x$ et $[x, p] \in P$ implique $[x, p] + p \in P$. ▩

LEMME II.43 *Si A et B sont deux convexes et si $A + P = A$ ou $B + P = B$, alors $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est convexe avec pour addition la loi de groupe.*

PREUVE (Cadre relatif) Prenons $a + tv \in A$ et $b + tw \in B$. Alors nous cherchons à relier $a + b$ à $(a + v) + (b + w)$. La somme

$$(a + tv) + \left(\frac{t}{2}[v, w] - \frac{t^2}{2}[v, w]\right) + (b + tw) \tag{122}$$

relie ces points en prenant $t \in [0, 1]$ et appartient à toujours à $A + B$ en attribuant la parenthèse du milieu contenue dans P à A ou B selon l'hypothèse. Il reste à montrer que c'est bien un segment géodésique. C'est le cas :

$$a + tv + \frac{t}{2}[v, w] - \frac{t^2}{2}[v, w] + b + tw = a + tv + b + tw + \frac{t}{2}[v, w] - \frac{t^2}{2}[v, w] \tag{123}$$

$$= a + b + t[v, b] + tv + tw + \frac{t}{2}[v, w] - \frac{t^2}{2}[v, w], \tag{124}$$

et dans l'algèbre de Lie nous avons bien :

$$\ln\left(\exp(t[v, b])\exp(tv)\exp(tw)\exp\left(\frac{t}{2}[v, w]\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[v, w]\right)\right) \tag{125}$$

$$= t[v, b] + tv + tw + \frac{t^2}{2}[v, w] + \frac{t}{2}[v, w] - \frac{t^2}{2}[v, w] = t\left(v + w + [v, b] + \frac{1}{2}[v, w]\right) \tag{126}$$

et par conséquent l'expression est bien celle d'un segment affine. ▩

À travers le lemme II.44 et la proposition II.47 (p. 43) qui suivent, nous trouvons le moyen d'étendre un premier convexe contenant la géodésique invisible initiale en un convexe beaucoup plus grand. Nous employons ici plusieurs idées clefs de CARRIÈRE [28], notamment pour le lemme, mais apportons aussi une technique supplémentaire pour résoudre la proposition en utilisant pleinement les feuilletages induits par la décomposition $E \oplus P \oplus F$.

LEMME II.44 *Si $C \subset \widetilde{M}$ est un convexe contenant $x \in \widetilde{M}$ et une géodésique incomplète γ, alors, pour la dynamique de Fried associée, $(P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}$ ne peut pas intersecter $D(C)$. Si $D(C)$ est un ouvert à bord lisse, cela implique que $(P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}$ doit être tangent à $D(C)$ en $D(\gamma)(1)$ et que les points de $\overline{D(C)} \cap (P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}$ sont invisibles depuis C.*

PREUVE (Cadre relatif) Nous monterons l'énoncé pour $F|_{D(\gamma)(1)} = C_{0,\infty}$. Cela impliquera l'énoncé pour $(P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}$. En effet, $D(C) + P$ est encore un convexe complètement visible depuis C et l'énoncé s'applique pour l'antécédent de $D(C)+P$ et $C_{0,\infty}$. Nous avons $P+F = P \oplus F$ par décomposition de l'algèbre nilpotente $P \oplus F$ par le lemme II.7 (p. 18). Si pour $p+f \in P+F$, $D(\gamma)(1) + p + f$ appartient à $D(C) + P$, alors il existe $p' \in P$ tel que $D(\gamma)(1) + p + f + p' = D(\gamma)(1) + f \in C_{0,\infty}$ appartiendrait encore à $D(C) + P$, impossible.

Prenons z à l'intersection de $F|_{D(\gamma)(1)}$ et $D(C)$. Formons le triangle [29] Δ de sommets $D(\gamma)(0)$, $D(\gamma)(1)$ et z. Par convexité il est complètement contenu dans $\overline{D(C)}$. Par convexité aussi, l'intérieur de ce triangle est contenu dans $D(C)$ et est complètement visible. Les antécédents de $C_{1,i}$ et Δ s'intersectent en $\gamma(t_i)$.

Puisque $C_{1,i}$ est voisinage de $D(\gamma)(t_i)$ [30], les intersections $C_{1,i} \cap \Delta$ sont des voisinages relatifs non réduits à un point. Ces intersections ont même pour limite le bord du triangle reliant z à $D(\gamma)(1)$ puisque la direction F, qui est celle du segment reliant z à $D(\gamma)(1)$, est dilatée. Si K est un voisinage compact arbitrairement petit de l'antécédent de z dans C, il intersecte une infinité d'antécédents de $C_{1,i} \cap \Delta$, impossible par l'argument de Carrière I.22 (p. 9). ▨

DÉFINITION II.45 *Dans le cadre relatif, nous considérons la famille $\mathscr{S}$ des boules ouvertes $x+B$ avec $x \in N$ et $B \subset \mathfrak{n}$ une boule euclidienne pour la norme où la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. Si $x \in \widetilde{M}$, alors la* boule maximale de visibilité *S est la boule centrée en $D(x)$ maximale parmi celles qui sont contenues dans l'image par la développante de l'espace de visibilité depuis x.*

Remarque Par construction, les boules de $\mathscr{S}$ sont des convexes de N et cette famille permet de choisir assez naturellement un convexe ouvert maximal $D^{-1}(S)$ pour tout $x \in \widetilde{M}$ en prenant S la boule maximale de visibilité. Nous autorisons *a priori* un rayon infini dans le cas où tout l'espace serait visible. Mais dans l'optique du théorème, l'hypothèse d'incomplétude nous permet — par le théorème I.12 (p. 6) — de toujours supposer que le rayon est fini.

LEMME II.46 *Soit S la boule maximale de visibilité de $x \in \widetilde{M}$ et $\gamma \subset D^{-1}(S)$ une géodésique incomplète issue de x. Alors $D(\gamma)$ est complètement contenue dans $E|_{D(\gamma)(1)}$.*

PREUVE (Cadre relatif) Centrons l'espace en $D(\gamma)(1)$. La limite $C_{1,\infty} \subset P \oplus F$ ne peut pas être transverse à S en $D(\gamma)(1)$. Par conséquent, puisque $C_{1,\infty} \cap P$ est un voisinage relatif de

28. [Car89] Yves CARRIÈRE, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.
29. C'est ici une idée que nous pouvons comparer à celle de Carrière [Car89].
30. Dans M, le voisinage U de y intersecte la projection de $\gamma(t_i)$ à distance arbitrairement petite de y. Donc la projection de $\gamma(t_i)$ appartient à l'intérieur de U pour t_i assez grand.

l'origine de P, $(P \oplus F)|_{D(\gamma)(1)}$ est tangent à S en $D(\gamma)(1)$. Écrivons $S = D(x) + B$. Pour tout $v \in P \oplus F$, il vient que $L_{-D(x)*}(v)$ doit être tangent à la boule euclidienne B en $-D(x)$. C'est une relation d'orthogonalité dans l'algèbre de Lie. Puisque $L_{-D(x)*}(v) = v - \frac{1}{2}[D(x), v]$, il s'ensuit que pour tout $v \in P \oplus F$, $\langle v - \frac{1}{2}[D(x), v], -D(x)\rangle = 0$. Dans le cadre relatif les crochets sont dans P, par le changement de variable $v' = v + \frac{1}{2}[D(x), v]$ il vient que pour tout $v' \in P \oplus F$, $\langle v', -D(x)\rangle = 0$. Mais alors il s'ensuit par orthogonalité que $D(x) \in E|_{D(\gamma)(1)}$ et par conséquent $D(\gamma) \subset E|_{D(\gamma)(1)}$. ▩

PROPOSITION II.47 *Soit S la boule maximale de visibilité de $x \in \widetilde{M}$ et $\gamma \subset D^{-1}(S)$ une géodésique incomplète issue de x. Le convexe $S + P + F$ est complètement visible depuis l'antécédent de S.*

PREUVE (Cadre relatif) La somme $S + P$ est convexe et complètement visible puisque P est toujours pleinement visible. Nous montrons que $(S + P) + W$ avec $W \subset F$ convexe — somme qui est bien convexe — est complètement visible pour $W \subset F$ arbitrairement grand et par conséquent $S + P + F$ sera complètement visible.

Par le lemme précédent, $D(\gamma)$ est contenu dans $S \cap E|_{D(\gamma)(1)}$. Prenons une exhaustion par des compacts K_j de $S \cap E|_{D(\gamma)(1)}$. Pour chaque K_j, il existe $W_j \subset F$ ouvert convexe (par exemple de la forme $B \cap F$ pour des boules euclidiennes B) tel que $K_j + W_j$ est complètement contenu dans S et par conséquent $K_j + W_j + P = K_j + P + W_j$ est convexe et complètement visible. Nous faisons grandir W_j (la somme $K_j + W_j$ n'est plus nécessairement dans S) de sorte que $K_j + P + W_j$ est encore d'intérieur complètement visible et convexe mais un point du bord $k + p + w$ avec $w \in \partial W$ et $k + p \in K_j + P$ n'est plus visible. Puisque P est toujours visible et $W + P = P + W$, nous pouvons supposer $p = 0$.

Quitte à renommer les compacts d'exhaustion, supposons que $D(\gamma)(t_j) \in K_j$. Considérons la géodésique $D(\gamma)(t_j) + tv$ qui relie $D(\gamma)(t_j)$ à $k \in K_j \subset E|_{D(\gamma)(1)} \cap S$. Cette géodésique est par conséquent dirigée par $v \in E$ et est complètement contenue dans K_j. Dans le convexe $K_j + P + W_j$, regardons l'ensemble des points décrits par la géodésique

$$\eta(t) = D(\gamma)(t_j) + tv + w. \tag{127}$$

Supposons que $\eta(0) = D(\gamma)(t_j) + w$ soit visible, ce n'est pas nécessairement le cas mais nous faisons cette hypothèse. Alors, par ouverture de l'espace de visibilité, il existe un T maximal tel que pour $t < T$, $\eta(t) = D(\gamma)(t_j) + tv + w$ est visible mais pas en $t = T$. Supposons par simplicité $T = 1$ quitte à changer le $k \in K_j$ initial.

La géodésique $k + tw = D(\gamma)(t_j) + v + tw$ dans $K_j + P + W$ n'est visible que pour $t < 1$. Sa direction w étant dans F, son ensemble limite $C_{1,\infty}$ est dans $(E \oplus P)|_{k+w}$ (dans cette nouvelle dynamique E et F ont échangé leur rôle). Mais pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $-\varepsilon(v - [v, w]) \in E \oplus P$ donne

$$k + w - \varepsilon(v - [v, w]) = D(\gamma)(t_j) + (1 - \varepsilon)v + w = \eta(1 - \varepsilon) \tag{128}$$

qui doit être simultanément visible par hypothèse sur η et invisible dans $K_j + P + W_j$ par le lemme II.44 (p. 42), ce qui est impossible.

Il s'ensuit que dès que $D(\gamma)(t_j) + w$ est visible depuis $D(\gamma)(t_j)$, c'est le cas sur tout $K_j + P$. Quand $j \to \infty$, les convexes $C_{r,j}$ contenant $D(\gamma)(t_j)$ sont arbitrairement grands dans F, et par conséquent W_j est croissant et arbitrairement grand lorsque $j \to \infty$. ▩

Commentaire Cette preuve est probablement la meilleure explication du choix des géométries à rayons de rang un. La persistance des feuilletages générés par $E \oplus P \oplus F$ d'une dynamique de Fried à l'autre est un argument très puissant. Cette preuve est peut-être aussi comparable à l'argumentation principale de CARRIÈRE [31] qui ne démontre pas exactement que $S+P+F$ est visible, mais plutôt que le $C_{1,\infty} \subset P \oplus F$ est localement préservé — ce qui va plus dans le sens du lemme II.44 (p. 42). C'est en longeant S parallèlement à $C_{1,\infty}$ à la suite de son argument que nous en déduisons la visibilité de $S+P+F$. Cependant, la façon dont son argument principal fonctionne — $C_{1,\infty}$ est de codimension un et tout triangle d'intérieur visible a un segment du bord complètement contenu dans $C_{1,\infty}$ dès qu'un point lui appartient — repose sur une propriété d'intersection — la codimension un affine implique qu'un segment tangent est inclus — qui s'est vu échangé ici en la propriété de transversalité des feuilletages.

Maintenant il s'agit de montrer que nous pourrons faire grandir le convexe $S+P+F$ en $\lim T_{ji}^{-1}(S)+P+F$. Pour cela, il faut montrer quand les antécédents dans $\widetilde{M}$ s'intersectent puisque l'intersection de deux convexes de $\widetilde{M}$ sont injectivement transformés par la développante. Cette propriété parait géométriquement crédible, mais il s'avère qu'elle en réalité techniquement difficile à réaliser. Nous emploierons la proposition II.17 (p. 21) spécifique au cas homogène que nous traitons et dont une version plus générale ne nous est pas connue.

PROPOSITION II.48 *Soit S la boule maximale de visibilité de $x \in \widetilde{M}$ et $\gamma \subset D^{-1}(S)$ une géodésique incomplète issue de x. Pour tout $i > 0$ suffisamment grand, la suite $-f_{ji}^{-1}(c_{ji})$ est bornée et y_i appartient à l'antécédent de $S+P+F$ dans $\widetilde{M}$ contenant x.*

PREUVE (Cadre relatif) Il nous suffit de montrer que $-f^{-1}(c_{ji}^E)$ est borné et que $y_i^E \in S$ puisque tout $S+P+F$ est visible. Rappelons que $D(\gamma)$ est contenu dans $E|_{D(\gamma)(1)}$. Écrivons c_{ji}^E comme une somme $D(\gamma)(t_j)+w_j$, alors par relative intégrabilité :

$$D(y_i)^E = \lim_{j\to\infty} -f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) + f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j)) \tag{129}$$

$$= \lim_{j\to\infty} -f_{ji}^{-1}(w_j). \tag{130}$$

Si $-f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E)$ n'est pas borné, alors $f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))$ diverge aussi par cette limite. En utilisant la métrique euclidienne sur E homogène pour la géométrie à rayons :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|w_j\|}{\|D(\gamma)(t_j)\|} = \lim_{j\to\infty} \frac{\left\|-f_{ji}^{-1}(w_j)\right\|}{\left\|-f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))\right\|} = 0. \tag{131}$$

Puisque $D(\gamma)(1-t)$ est un segment issu de l'origine $D(\gamma)(1)$, le dilaté $\|D(\gamma)(t_j)\|^{-1}D(\gamma)(t_j)$ est constant dans $D(\gamma) \subset S$ et ainsi, par la proposition II.17 (p. 21), nous en concluons que $c_{ji}^E \in S$ et donc $c_{ji} \in S+P+F$ pour $j \geq i$ suffisamment grand. De la même façon, nous montrons que

31. [Car89] Yves CARRIÈRE, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.

$T_{ji}(D(\gamma)(t_i))$ appartient aussi à $S+P+F$ dès que $j \geq i$ est suffisamment grand.

$$T_{ji}(D(\gamma)(t_i)) = c_{ji} + f_{ji}(D(\gamma)(t_i)) \tag{132}$$

$$= D(\gamma)(t_j) + w_j + f_{ji}(D(\gamma)(t_i)), \tag{133}$$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\| w_j + f_{ji}(D(\gamma)(t_i))\|}{\|D(\gamma)(t_j)\|} = \lim_{j\to\infty} \frac{\left\|-D(\gamma)(t_i) - f_{ji}^{-1}(w_j)\right\|}{\left\|-f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))\right\|} = 0 \tag{134}$$

Par conséquent, $g_{ji}(\gamma(t_i))$ est lui-même dans l'antécédent de $S+P+F$ dans $\widetilde{M}$ contenant $\gamma(t_j)$. En effet, $g_{ji}(\gamma(t_i))$ appartient au convexe $g_{ji}(U_i) = U_j$ auquel appartient aussi $\gamma(t_j)$. Ils sont donc relativement visibles. Dans la développante, la géodésique reliant ces deux points est contenue dans $C_{1,j}$ mais aussi $S+P+F$, ce qui était donc vrai dans l'antécédent de $S+P+F$. Mais alors $T_{ji}(D(\gamma))$ fournit une géodésique entre $T_{ji}(D(\gamma)(t_i))$ et $c_{ji} = T_{ji}(0)$ complètement contenue dans l'antécédent de $S+P+F$ contenant $\gamma(t_j)$. Cette géodésique est visible car dans l'intérieur de l'antécédent du convexe $S+P+F$ mais ne peut pas être visible car image par g_{ji} de la géodésique invisible γ, absurde. Donc $f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))$ converge et par conséquent $f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E)$ est borné.

Passons maintenant à $D(y_i)^E$. Nous montrons par simplicité d'écriture des indices que $D(y_j) \in S$ pour $j > 0$ suffisamment grand. Ce point est donné par :

$$D(y_j)^E = \lim_{k\to\infty} -f_{kj}^{-1}(c_{kj}^E) + f_{kj}^{-1}(D(\gamma)(t_k)) \tag{135}$$

et ce qui précède montre que $f_{kj}^{-1}(D(\gamma)(t_k))$ tend vers un point δ_j de $D(\gamma) \subset S$ (à rotation arbitrairement petite près pour $j > 0$ suffisamment grand). Nous écrivons alors $D(y_j)^E$ comme la somme de $\lim f_{kj}^{-1}(D(\gamma)(t_k)) = \delta_j$ avec $\lim -f_{kj}^{-1}(c_{kj}^E) = \varepsilon_j$, qui est arbitrairement petit par le lemme II.31 (p. 38). Par la relation du cocycle $T_{kj}^{-1} = T_{ji}T_{ki}^{-1}$ et la relative intégrabilité de $E \oplus P$ et $F \oplus P$:

$$-f_{kj}^{-1}(c_{kj}^E) = f_{ji}\left(f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) - f_{ki}^{-1}(c_{ki}^E)\right). \tag{136}$$

Par homogénéité nous obtenons :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|\varepsilon_j\|}{\|\delta_j\|} \leq \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty} \frac{1+o_1(k)}{1-o_1(k)} \frac{\left\|-f_{kj}^{-1}(c_{kj}^E)\right\|}{\left\|f_{kj}^{-1}(D(\gamma)(t_k))\right\|} \tag{137}$$

$$\leq \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty} \frac{1+o_1(k)}{1-o_1(k)} \frac{\left\|f_{ji}\left(f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) - f_{ki}^{-1}(c_{ki}^E)\right)\right\|}{\left\|f_{ji}\left(f_{ki}^{-1}(D(\gamma)(t_k))\right)\right\|} \tag{138}$$

$$\leq \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty} \frac{1+o_1(k)}{1-o_1(k)} \frac{\left\|f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) - f_{ki}^{-1}(c_{ki}^E)\right\|}{\left\|f_{ki}^{-1}(D(\gamma)(t_k))\right\|} \tag{139}$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \frac{\left\|f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) - \varepsilon_i\right\|}{\|\delta_i\|} = 0. \tag{140}$$

Par la proposition II.17 (p. 21), nous avons bien montré $D(y_j)^E \in S^E$ et par conséquent $D(y_j) \in S+P+F$. ▨

Corollaire II.49 *La développante est injective sur la réunion des antécédents de $S+P+F$ et de $T_{ji}^{-1}(S+P+F)$ contenant tous deux $y_i \in \widetilde{M}$ dès lors que $i > 0$ est suffisamment grand et $j \geq i$.*

Cette propriété d'intersection dans l'antécédent nous permet de considérer la limite quand $j \to \infty$ de $T_{ji}^{-1}(S+P+F)$ qui est toujours un demi-espace dont le bord est une translation en la limite de $-f_{ji}^{-1}(c_{ji})$, qui est arbitrairement petite, du tangent de $S+P+F$ en l'origine qui subit aussi une rotation arbitrairement petite. En effet, remarquons $T_{ji}^{-1}(S+P+F) = T_{ji}^{-1}(S^E)+P+F$ et considérons $\sigma \subset E|_{D(\gamma)(1)}$ un segment issu de l'origine et transverse à S^E, alors $T_{ji}^{-1}(\sigma) = -f_{ji}^{-1}(c_{ji}) + f_{ji}^{-1}(\sigma)$. Par action homogène, $f_{ji}^{-1}(\sigma)$ tend vers une demi-droite de direction σ, à rotation près, qui peut être considérée arbitrairement petite par le choix de $i > 0$ suffisamment grand.

LEMME II.50 *Il existe un demi-espace convexe H_x contenant $S+P+F$ et complètement visible depuis $x \in \widetilde{M}$.*

PREUVE (Cadre relatif) Chaque antécédent $T_{ji}^{-1}(S+P+F)$ intersecte l'antécédent de $S+P+F$ en contenant y_i. Par conséquent, $T_{ji}^{-1}(S+P+F)$ tend vers un demi-espace H_i complètement visible depuis y_i. Lorsque $i \to \infty$, H_i converge vers un convexe H_x. Par rotation arbitrairement petite, $D(x) \in H_i$ dès que $i > 0$ est suffisamment grand. Par conséquent, H_i est complètement visible depuis x pour $i > 0$ suffisamment grand. À la limite $i \to \infty$, H_x est complètement visible depuis x. ▩

La dernière étape avant de démontrer le théorème de réductibilité est la suivante.

LEMME II.51 *Soit $I \subset \partial H_x$ l'ensemble invisible depuis l'intérieur de H_x. Alors I ne dépend pas de x et est un sous-espace nil-affine.*

Remarquons que I contient nécessairement $(F \oplus P)|_{D(\gamma)(1)}$ par l'argument de Carrière — voir le lemme II.44 (p. 42). Le bel argument que nous allons proposer est déjà présent chez FRIED [32].

PREUVE (Cadre relatif) Par convexité de H_x, les points invisibles $I \subset \partial H_x$ depuis x le sont encore depuis tout point de l'intérieur de H_x. Prenons alors $D(q) \in \partial H_x$ et supposons que ce point soit visible depuis x pour un antécédent $q \in \widetilde{M}$ appartenant au bord de l'antécédent de H_x. Nous considérons H_q le demi-espace correspondant à $D(q)$ et contenant $D(q)$. Les antécédents de ces deux demi-espaces sont convexes et s'intersectent par visibilité de q depuis x. Par conséquent, la développante est injective sur la réunion de leurs antécédents. L'ensemble invisible depuis H_x doit l'être depuis H_q et réciproquement.

Appliquons une transformation T_{ji} pour $j \gg i \gg 1$ — voir figure II.5 (p. 47) —, qui laisse H_x asymptotiquement stable pour le choix d'une dynamique de Fried associée à n'importe quel point de I. Alors à moins que I ne soit complètement contenu dans ∂H_q, il existerait une dynamique telle que $T_{ji}(H_q)$ contiendrait dans son intérieur des points invisibles de H_q. Les deux antécédents s'intersectent dans $\widetilde{M}$ le long de leur intersection avec l'antécédent de H_x. La visibilité de ces points invisibles est impossible et par conséquent I est contenu dans l'intersection $\partial H_x \cap \partial H_q$. Une deuxième conséquence intervient : ce sous-espace est nil-affine, puisque l'intersection des deux bords l'est et qu'un nombre fini d'intersections suffit à décrire I en prenant de nouveaux points q. ▩

32. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.

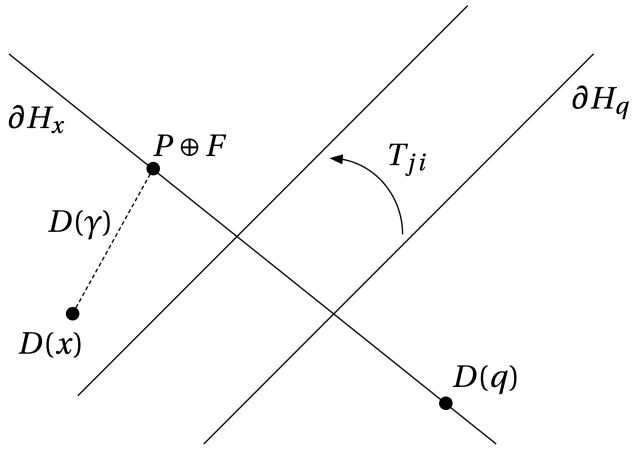

FIGURE II.5 – Le sous-espace invisible I.

THÉORÈME II.52 (Réductibilité des variétés incomplètes) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un du cadre relatif — nous supposons que la géométrie est relativement homogène, relativement intégrable et d'ordre de nilpotence au plus deux. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe. Si elle n'est pas complète, alors il existe un sous-espace nil-affine $I \subset \mathcal{N}$ tel que la développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement.*

PREUVE Le sous-espace nil-affine I est constant par connexité de M. Il contient par conséquent tous les bouts $D(\gamma)(1)$ des géodésiques incomplètes dès que γ est une géodésique contenue dans une boule S maximale. Nous montrons que cela implique que la développante est un revêtement.

Si $\delta\colon [0,1] \to \mathcal{N} - I$ est un chemin et si $x \in \widetilde{M}$ est un point initial avec $D(x) = \delta(0)$, alors nous prouvons que δ peut être complètement relevé dans $\widetilde{M}$. Pour cela, par difféomorphisme local, nous pouvons supposer que c'est le cas pour $t < 1$ et nous montrons qu'en $t = 1$, cela est encore possible. Par hypothèse nous avons $\delta(1) \notin I$. Par conséquent, pour un $s < 1$ suffisamment proche de 1, la boule maximale centrée en $\delta(s)$ contient complètement δ pour $s < t \leq 1$. Alors par convexité, dans l'antécédent de cette boule, le point $\delta(1)$ est bien relevable. ▩

Si cela conclut la preuve du théorème, nous pouvons affiner un peu plus notre résultat pour inclure le théorème de FRIED [33] et ses généralisations [34] [35]. Fried montre que dans le cas des dilatations (par homothéties) l'ensemble I est toujours un unique point. Ce fait est vrai pour tous les groupes de dilatations mais est aussi adaptable un peu plus généralement. Remarquons que le cas des dilatations est équivalent à $F = P = \{0\}$.

PROPOSITION II.53 *Supposons que pour toute dynamique de Fried $F = \{0\}$. Alors, $I = P|_w$, avec w le point final de n'importe quelle géodésique incomplète.*

33. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.
34. [Min90] Robert R. MINER, « Spherical CR manifolds with amenable holonomy », 1990.
35. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.

Nous n'allons pas suivre l'argument de Fried pour cette propriété, mais plutôt une idée de MATSUMOTO [36] introduite dans sa reproduction de la preuve du théorème de Fried. L'intérêt crucial de l'hypothèse $F = \{0\}$ est le suivant. Si T_{ji} est n'importe quelle dynamique de Fried alors le point fixe asymptotique de T_{ji} est exactement $D(\gamma)(1)$ puisque $F|_{D(\gamma)(1)} = \{D(\gamma)(1)\}$.

LEMME II.54 *Considérons le sous-ensemble $\Delta \subset \Gamma$ constitué par les transformations T_{ji} pour toutes les dynamiques de Fried, et de sorte que T_{ji} soit quasiment sans rotation. Alors le sous-groupe engendré par Δ est discret dans G_1.*

PREUVE (Cadre étendu) Cela serait évidemment le cas si $\mathcal{N} - I$ était simplement connexe. En effet, la développante serait alors un difféomorphisme et, par conséquent, tout le groupe d'holonomie Γ serait discret. Puisque $\langle\Delta\rangle \subset \Gamma$, nous aurions la conclusion. Il s'agit donc de traiter le cas où I est de codimension deux.

Supposons par simplicité que $e \in I$. Considérons G_1' le stabilisateur de I. Par stabilité de I pour n'importe quelle dynamique de Fried, il vient que G_1' contient $A_1 \subset G_1$. Il contient aussi $K \subset G_1$ puisque K centralise A_1. Puisque la développante évite I, toute l'holonomie Γ est incluse dans G_1'. Nous pouvons considérer Q un demi-hyperplan nil-affine tel que $\partial Q = I$ et Q est stable par $KA_1 \subset G_1'$. Alors nous avons un revêtement $Q \times \mathbf{R} \to \mathcal{N} - I$ par rotation (topologique) de Q autour de I. Remarquons que $P|_e \subset I$ et donc que nous avons $Q \subset E|_e$.

La géométrie $(G_1', \mathcal{N} - I)$ se relève en une géométrie $(G_Q, Q \times \mathbf{R})$. La développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ se relève en une développante $D'\colon \widetilde{M} \to Q \times \mathbf{R}$ et devient un difféomorphisme puisque $Q \times \mathbf{R}$ est simplement connexe. Le relèvement du groupe d'holonomie Γ en Γ_Q est par conséquent discret. Relevé dans Γ_Q, $\langle\Delta\rangle$ est discret. Un $T_{ji} \in \Delta$ est quasiment sans rotation, par conséquent son relèvement à la géométrie de $Q \times \mathbf{R}$ est en fait quasiment identique à T_{ji} lui-même, pris comme agissant sur Q exclusivement.

En effet, T_{ji} préserve I mais préserve aussi Q asymptotiquement puisque T_{ji} est asymptotiquement sans rotation. Plus précisément, en supposant que $w \in I$ soit le point final de la géodésique associée à T_{ji} :

$$T_{ji}(x) = c_{ji}^E + w - f_{ji}(w) + f_{ji}(x) \tag{141}$$

avec $c_{ji}^E \to 0$ et $f_{ji,K} \to \mathrm{id}$. Puisque nécessairement $T_{ji}(I) = I$ nous avons, en écrivant un point $q \in Q$ comme $x_I + v$ avec $x_I \in I$ et $v \in E$, $T_{ji}(q) = T_{ji}(x_I) + f_{ji}(v)$. Mais $T_{ji}(x_I) \in I$ et $f_{ji}(v) \in E$. Par l'approximation $f_{ji} \simeq f_{ji,A}$ il advient que $T_{ji}(x_I) + f_{ji,A}(v)$ est encore dans Q. Dans G_Q, les T_{ji} s'écrivent donc comme $T_{ji} \times \{0\} \in G_1' \times \mathbf{R} \subset G_Q$. Puisque $\langle\Delta\rangle$ est discret dans G_Q, $\langle\Delta\rangle \times \{0\}$ est discret et par conséquent $\langle\Delta\rangle$ est discret. ▨

PREUVE (Proposition II.53 (p. 47), cadre étendu) Choisissons une géodésique incomplète γ. Il s'agit de montrer que $I = P|_{D(\gamma)(1)}$. Nous savons déjà que pour T_{ji} la dynamique de Fried associée, son point fixe asymptotique est exactement $D(\gamma)(1)$ puisque $F = \{0\}$.

Par l'absurde, supposons que $I \cap E|_{D(\gamma)(1)}$ n'est pas trivial. Soit $R = T_{mn}$ une transformation d'une dynamique de Fried associée à un point de cette intersection autre que $D(\gamma)(1)$. Alors R ne fixe pas $D(\gamma)(1)$. Considérons maintenant la suite de transformations :

$$G_j = T_{ji} R T_{ji}^{-1} \tag{142}$$

pour un $i > 0$ fixé et suffisamment grand. Nous allons montrer que G_j converge sans être constante, ce qui entre en contradiction avec le lemme précédent.

36. [Mat92] Shigenori MATSUMOTO, « Foundations of flat conformal structure », 1992.

La partie linéaire de G_j est donnée par la conjugaison de celle de R par celle de T_{ji}. Elle est constante dans A_1 et converge dans K. Donc la partie linéaire converge. La partie de translation peut être évaluée en prenant l'image de $D(\gamma)(1)$. Elle est nécessairement non constante puisque R ne fixe pas $D(\gamma)(1)$ et que T_{ji} fixe asymptotiquement et de façon attractive $D(\gamma)(1)$. La partie de translation converge donc sans être constante. Cela montre que G_j converge sans être constante, ce qui mène à une contradiction. ▩

III.3 DISCUSSION SUR LE CADRE ÉTENDU ET LA CONJECTURE DU LACET

Nous proposons deux points de discussion pour aborder le cadre étendu. Le premier concerne la difficulté technique principale empêchant de généraliser immédiatement la proposition II.48 (p. 44). Le second est au sujet de la limite de $T_{ji}^{-1}(S+P+F)$ qui n'est pas toujours un demi-espace.

Convergence vers un lacet La conjecture II.1 (p. 15) énonçant que toute géodésique incomplète converge uniformément vers un lacet géodésique incomplet permettrait de lever la difficulté de la proposition II.48 (p. 44).

PROPOSITION II.55 *Soit S l'image d'un convexe ouvert à bord lisse complètement visible depuis $x \in \widetilde{M}$. Soit $\gamma \subset S$ une géodésique invisible issue de x. Nous supposons que :*

(1) À travers la projection du revêtement universel, $\pi\colon \widetilde{M} \to M$, la géodésique $\pi(\gamma)$ converge uniformément en image vers η un lacet géodésique incomplet issu de $y \in M$ un point d'accumulation.

(2) Dans la développante, Δ_f, la demi-droite issue de $D(\gamma)(1)$ dont la direction est la projection non nulle de $D(\gamma)$ dans le sous-espace propre de E de degré le plus grand, est transverse à $D(S)$.

Alors $-f_{ji}^{-1}(c_{ji}^E) = 0$ et $D(y_i) \in S+P+F$ dès que $i > 0$ est suffisamment grand.

PREUVE Le sous-groupe du $\pi(M,y)$ généré par le lacet η contient les transformations g_{ji} par convergence uniforme, dès que $j \geq i$ et $i > 0$ est suffisamment grand. Par conséquent, les transformations d'holonomie T_{ji} commutent et puisque $c_{ji}^E \to 0$ cela implique $c_{ji}^E = 0$. Il s'ensuit que $D(y_i^E) = \lim T_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))^E = \lim f_{ji}^{-1}(D(\gamma)(t_j))$ appartient à Δ_f et donc à S dès que $i > 0$ est assez grand par transversalité. ▩

Orbite négative Pour étudier $T_{ji}^{-1}(S+P+F) = f_{ji}^{-1}(S)+P+F$, considérons $\mathbf{R}_+ v$ une demi-droite issue de l'origine. Nous regardons l'action de f_{ji}^{-1} sur $\mathbf{R}_+ v$ lorsque $j \to \infty$. La transformation linéaire f_{ji}^{-1} peut être décrite par une rotation $k_j \in K$ qui tend vers $k \in K$ et une transformation diagonale $f_j^{-1} \in A$ qui diverge lorsque $j \to \infty$. Oublions l'action de la rotation par $k_j \to k$ puisqu'elle commute avec f_j^{-1} et transforme donc l'action de f_{ji}^{-1} sur $\mathbf{R}_+ v$ en une action de f_j^{-1} sur $\mathbf{R}_+ k(v)$.

Pour déterminer la limite $f_{ji}^{-1}(\mathbf{R}_+ v) = \mathbf{R}_+ f_{ji}^{-1}(v)$, nous inspectons l'action de f_j^{-1} sur chaque terme de la décomposition linéaire $E \oplus P \oplus F$. Disons que f_j^{-1} agit par une action diagonale de facteur $\lambda_j^{d_i}$ sur chaque coordonnée avec des degrés d_i qui sont nuls sur P, positifs sur E et

négatifs sur F, et avec $\lambda_j \to \infty$. Décomposons $v = (v_1, \dots, v_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Disons que d_m est le plus grand degré pour lequel une coordonnée v_m n'est pas nulle. Alors :

$$\mathbf{R}_+ f_j^{-1}(v) = \mathbf{R}_+ \left(\lambda_j^{d_i} v_i\right) = \mathbf{R}_+ \left(\lambda_j^{d_i - d_m} v_i\right) \tag{143}$$

et chaque terme $\lambda_j^{d_i - d_m} v_i$ tend soit vers zéro soit vers v_i selon que $d_i = d_m$ ou $d_i < d_m$. Ainsi, en désignant par $v_{\max}$ le vecteur v dont nous ne gardons comme coordonnées non nulles que celles pour lesquelles le degré positif d_m est le plus grand, nous obtenons :

$$\lim_{j \to \infty} f_j^{-1}(\mathbf{R}_+ v) = \mathbf{R}_+ v_{\max}. \tag{144}$$

Remarquons par ailleurs que l'action d'une rotation est compatible avec l'opération $v \mapsto v_{\max}$ puisque les rotations préservent les sous-espaces propres. Il n'est pas non plus inutile de remarquer que $v_{\max}$ est nul sur $P \oplus F$ si v n'est pas de coordonnées nulles dans E et est alors exactement égal à la projection de v sur le sous-espace propre de E qui a le plus grand degré avec v de projection non nulle.

Une deuxième famille d'orbites peut être décrite. Toujours en écrivant f_j^{-1} comme la transformation diagonale par $\lambda_j^{d_i}$ dans les coordonnées $(e_1, \dots, e_n)$ définissons une famille de courbes de la façon suivante. Soit $z \in \mathfrak{n}$ alors :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \mathscr{C}(z, t) = \left(z_1 t^{d_1}, \dots, z_i t^{d_i}, \dots, z_n t^{d_n}\right). \tag{145}$$

Chaque courbe $\mathscr{C}(z, \mathbf{R}_+)$ est lisse. Toutes ces courbes sont d'images invariantes par f_j^{-1} :

$$f_j^{-1}(\mathscr{C}(z, t)) = \left(z_1 \lambda_j^{d_1} t^{d_1}, \dots, z_i \lambda_j^{d_i} t^{d_i}, \dots, z_n \lambda_j^{d_n} t^{d_n}\right) = \mathscr{C}(z, \lambda t). \tag{146}$$

Par l'action de f_{ji}^{-1}, si la limite de la partie rotationnelle est $k \in K$ alors $\lim f_{ji}^{-1} \mathscr{C}(z, \mathbf{R}_+) = \mathscr{C}(k(z), \mathbf{R}_+)$.

Ainsi, nous obtenons une famille de dimension $\dim \mathfrak{n}$:

$$\mathscr{C} = \{\mathscr{C}(z, \mathbf{R}_+) \mid z \in \mathfrak{n}\} \tag{147}$$

de courbes invariantes par f_j^{-1} [37]. Par le choix judicieux de $z \in \mathfrak{n}$, nous pouvons obtenir des courbes de directions intéressantes. Par exemple, avec $z = v_{\max}$ nous récupérons la limite précédente. Mais c'est avec le choix de la paramétrisation $t \in \mathbf{R}_+$ que nous pouvons finement déterminer des positionnements géométriques. En général, comme précédemment expliqué, nous ne serons pas intéressés par les coordonnées $P \oplus F$ et prendrons $z \in E$. Il reste donc à étudier les positions relatives selon les sous-espaces propres de E. Par simplicité disons que nous avons deux coordonnées et deux degrés $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$. Alors si $s = t^2$:

$$\mathscr{C}(z, t) = \left(z_1 t, z_2 t^2\right) = \left(z_1 \sqrt{s}, z_2 s\right) \tag{148}$$

permet de constater que $\mathscr{C}(z, t)$ peut être pensée comme une parabole tangente à l'axe des abscisses en l'origine ou comme la courbe de $\sqrt{x}$ qui est tangente à l'axe des ordonnées en l'origine. Fixons, à équivalence près, $z_1 = 1$. Alors, lorsque $z_2 \to \infty$, l'image de la courbe $(t, z_2 t^2)$ tend vers l'axe des ordonnées. De même si $z_2 = 1$ et $z_1 \to \infty$ alors $(z_1 \sqrt{s}, s)$ tend vers l'axe des abscisses. Finalement, nous constatons que les courbes $\mathscr{C}(z, t)$ peuvent être prises tangentes

37. Nous avons rencontré l'exemple d'une telle courbe par un article de Goldman [Gol81]. L'auteur y construit un exemple de variété affine dont le bord de la développante n'est pas affine par morceaux. L'holonomie n'y est pas à rayons — mais de peu — et l'auteur montre que lorsque l'holonomie tend vers celle d'une variété à rayons de rang un, alors nous obtenons bien un bord affine par morceaux.

à un sous-espace propre de degré inférieur et arbitrairement proches — dans un voisinage compact de l'origine — d'un sous-espace propre de degré supérieur.

Le convexe limite obtenu, $\lim T_{ji}^{-1}(S+P+F) = S_\infty + P + F$, n'est ainsi généralement pas un demi-espace. C'est une difficulté supplémentaire qui n'avait pas émergé dans la littérature [38] ni dans nos premiers travaux [39]. Cependant, nous pouvons esquisser une méthode pour étendre le convexe obtenu en un demi-espace. Pour cela, considérons $z \in \partial S_\infty$ et supposons z invisible depuis x. Alors la géodésique σ reliant z à $D(\gamma)(1)$ est contenue dans S_∞ mais a ses deux extrémités invisibles. Considérons la dynamique de Fried associée à z, son action sur σ fixe z mais contracte $D(\gamma)(1)$ dans l'intérieur de S_∞, ce qui est impossible par invisibilité.

IV — Complétude et réductibilité

Par le théorème II.52, nous obtenons une indication forte sur le comportement des variétés incomplètes. Leur développante évite un sous-espace nil-affine, et par conséquent, l'holonomie doit préserver ce sous-espace. *Il n'est pas évident de déterminer pour quelles géométries à rayons l'existence d'une telle variété incomplète est seulement possible.*

Nous pensons notamment à la conjecture de Markus [40]. En géométrie affine, cette conjecture propose que *tout variété affine fermée à volume parallèle est complète.* L'hypothèse du volume parallèle est équivalente à celle d'une holonomie dont la partie linéaire serait à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Jusqu'à présent, les seuls résultats connus sur la conjecture de Markus reposent sur des hypothèses fortes sur l'holonomie : abélienne [41], nilpotente [42], résoluble [43] (de rang $< n$ en dimension n) ou distale [44]. Carrière [45] traite un cas important à travers l'hypothèse de discompacité un du groupe d'holonomie. D'autres résultats partiels demandent de plus une hypothèse géométrique, par exemple Jo et Kim [46] et Tholozan [47].

Nous montrons le résultat suivant pour les géométries à rayons de rang un et à volume parallèle. Ces géométries ont un volume parallèle dès que la partie diagonale linéaire A_1 n'est constituée que de transformations de déterminant un.

Théorème (Complétude avec volume parallèle II.61 (p. 53)) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un du cadre relatif à volume invariant. Toute $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe M est complète.*

38. [Min90] Robert R. Miner, « Spherical CR manifolds with amenable holonomy », 1990.
39. [Ale21a] R. V. Alexandre, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.
40. [Mar62] Lawrence F. Markus, « Cosmological models in differential geometry, mimeographed notes », 1962.
41. [Smi77] John D. Smillie, « Affinely Flat Manifolds », 1977.
42. [FGH81] David Fried, William M. Goldman et Morris W. Hirsch, « Affine manifolds with nilpotent holonomy », 1981.
43. [GH86] William M. Goldman et Morris W. Hirsch, « Affine manifolds and orbits of algebraic groups », 1986.
44. [Fri86] David Fried, « Distality, completeness, and affine structures », 1986.
45. [Car89] Yves Carrière, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », 1989.
46. [JK04] Kyeonghee Jo et Inkang Kim, « Convex affine domains and Markus conjecture », 2004.
47. [Tho15] Nicolas Tholozan, « Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques », 2015.

Dans le cas abélien $\mathcal{N} = \mathbf{R}^n$, une tactique répandue consiste à utiliser un théorème de GOLDMAN et HIRSCH [48] montrant que *l'holonomie d'une variété fermée affine à volume parallèle est irréductible*. Puisque de telles variétés à rayons de rang un sont réductibles lorsqu'elles sont incomplètes, cela démontre le théorème II.61 (p. 53) dans le cas abélien. Cependant, lorsque $\mathcal{N}$ est seulement nilpotent, c'est plus difficile. La construction de Goldman et Hirsch repose sur une cohomologie à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et donc notamment sur la commutativité de cet espace. Nous pensons qu'il devrait être possible de généraliser ce résultat au contexte nilpotent mais notre stratégie sera différente.

La conjecture de Markus n'est pas la seule motivation pour chercher à montrer la complétude de variétés fermées. Une « vague conjecture » de D'AMBRA et GROMOV [49] propose *qu'une variété avec un groupe d'automorphismes suffisamment grand doit être classifiable.*

Un phénomène particulièrement important pour les géométries paraboliques de rang un consiste en le fait qu'un groupe d'automorphismes qui agit non proprement classifie la variété (il n'existe que deux cas, selon la compacité ou non de la variété). Le cas conforme a été donné par FERRAND [50]-OBATA [51] et le cas CR sphérique par SCHOEN [52]-WEBSTER [53]. Nous proposons ici l'énoncé général de FRANCES [54].

THÉORÈME II.56 ([Fra07]) *Soit X une géométrie de Cartan modelée sur le bord d'un espace symétrique de rang un — ce bord est une sphère S^n. Supposons M connexe et à connexion de Cartan régulière. Si son groupe d'automorphismes n'agit pas proprement, alors X est — selon si elle est compacte ou non — géométriquement isomorphe à S^n ou à $S^n - \{p\}$.*

Appliqué à notre situation, à travers la géométrie de Levi de ces géométries paraboliques de rang un, ce résultat implique que si $X = \widetilde{M}$ a un groupe d'automorphismes non compact, alors M est complète. En rang supérieur, il existe des contre-exemples évidents à ce résultat, nous en discuterons. Nous montrons le résultat suivant.

THÉORÈME (Complétude avec groupe d'automorphismes non compact II.67 (p. 57)) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une structure à rayons de rang un du cadre relatif. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe. Si* $\mathrm{Aut}(M)$ *n'est pas compact, alors M est complète.*

Ce théorème ne dépend pas de l'origine parabolique de la géométrie considérée, mais seulement de l'hypothèse $\dim A_1 = 1$. L'existence d'un lien plus profond entre ce résultat et celui précédemment cité n'est pas clairement établi, mais nous pensons qu'il s'agit d'un indice important.

Réductibilité Le point de départ pour ces deux raffinements est donné par les éléments techniques suivants, qui pourront être généralisés dans le cadre général le moment venu.

48. [GH84] William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH, « The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds », 1984.
49. [DG91] Giuseppina D'AMBRA et Mikhael L. GROMOV, « Lectures on transformation groups: geometry and dynamics », 1991.
50. [Fer96] Jacqueline FERRAND, « The action of conformal transformations on a Riemannian manifold », 1996.
51. [Oba71] Morio OBATA, « The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds », 1971/72.
52. [Sch95] Richard M. SCHOEN, « On the conformal and CR automorphism groups », 1995.
53. [Web77] Sidney M. WEBSTER, « On the transformation group of a real hypersurface », 1977.
54. [Fra07] Charles FRANCES, « Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1. » 2007.

LEMME II.57 *Le sous-espace linéaire évité I est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{n}$.*

PREUVE Le sous-espace contient $P \oplus F$ qui est un idéal donc $[I, P \oplus F] \subset P \oplus F$. Quant à $E \cap I$, il donne $[E \cap I, E \cap I] = 0$ par relative homogénéité. ▩

LEMME II.58 *Si $T \in \Gamma$ est une transformation de l'holonomie avec $T(x) = c + f(x)$, alors $f(I) = I$.*

PREUVE Puisque I correspond à un sous-groupe et que T doit préserver I, il vient $c + f(I) = I$. Comme l'origine appartient à I, $c \in I$ et donc $f(I) = -c + I = I$. ▩

PROPOSITION II.59 *Il existe une décomposition linéaire $\mathfrak{n} = I \oplus V$ telle que I et V sont tous deux invariant sous l'action de la partie linéaire de l'holonomie. Le lemme II.7 (p. 18) s'applique et nous avons une décomposition $N = \exp(I) + \exp(V)$ par un difféomorphisme.*

PREUVE Le sous-espace V est défini en considérant l'orthogonal dans E de $E \cap I$. Il est bien invariant par l'holonomie puisque I l'est. ▩

IV.1 VOLUME PARALLÈLE

Nous montrons maintenant la complétude des variétés fermées à volume parallèle.

DÉFINITION II.60 *Une géométrie à rayons $(G, \mathcal{N})$ a un* volume invariant *si G préserve la forme de volume invariante à gauche donnée en l'origine par $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les fonctions coordonnées duales de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ donnée par la géométrie.*

Cette propriété est équivalente au fait que la partie linéaire de G soit dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{GL}_{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{n})$. Remarquons ici que les géométries à rayons de rang un qui sont à dilatations n'ont jamais de volume préservé. Nous énonçons donc le résultat suivant.

THÉORÈME II.61 (Complétude avec volume parallèle) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un du cadre relatif à volume invariant. Toute $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe M est complète.*

PREUVE Supposons que M soit incomplète et par conséquent que sa développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ revête le complémentaire d'un sous-espace nil-affine. Désignons par $H \subset G_1$ le stabilisateur de I. Alors M a son holonomie dans H et chaque point de I fournit une dynamique de Fried.

Par l'étude précédente, nous avons la décomposition $x = x_I + x_V$ pour tout $x \in N$. Sur $\mathcal{N} - I \cong N - I$ nous définissons le champ de vecteurs [55] :

$$X(x) = (L_x)_* \ln(x_V). \tag{149}$$

Alors le champ X est invariant par l'action de H. En effet, si $T \in H$ alors $T(x) = c_I + f(x)$ et $c_I + f(I) = I$. Par conséquent :

$$X(T(x)) = X(c_I + f(x_I) + f(x_V)) = (L_{T(x)})_* f(\ln(x_V)) = T_* X(x) \tag{150}$$

puisque $c_I + f(x_I)$ doit appartenir à $\exp(I)$ et que V est stable par la partie linéaire de l'holonomie.

55. Ce champ est (au signe près) le même que celui que considère Fried [Fri80] pour montrer que I est réduit à un point dans le cas des dilatations. La suite de la preuve est aussi liée à ses idées.

Nous avons le volume invariant de N :

$$\mathrm{vol}_N = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n, \tag{151}$$

avec x_i les fonctions coordonnées duales des e_i. Ainsi, le champ X relevé en $\widetilde{X} = D^* X$ sur $\widetilde{M}$ se projette en un champ Y de M puisque X est invariant par le sous-groupe H qui contient toute l'holonomie. De même, le volume vol_N fournit un volume invariant vol_M sur M. Le flot Φ_t de Y préserve le volume de M car M est fermée. Ce flot est la projection du flot de $\widetilde{X}$ et est donc la projection du tiré-en-arrière du flot R_t de X dans N. Choisissons un recouvrement de cartes locales $U_j \subset M$ qui se développent en $V_i \subset N$ par la $(G_1, \mathcal{N})$-structure. Considérons ρ_j une partition de l'unité qui corresponde aux U_j. La préservation du volume signifie que pour n'importe quel $t \in \mathbf{R}$:

$$\int_M \Phi_t^* \mathrm{vol}_M = \int_M \mathrm{vol}_M \tag{152}$$

$$\iff \sum_j \int_{U_j} \rho_j \Phi_t^* \mathrm{vol}_M = \sum_j \int_{U_j} \rho_j \mathrm{vol}_M \tag{153}$$

$$\iff \sum_j \int_{V_j} \rho_j R_t^* \mathrm{vol}_N = \sum_j \int_{V_j} \rho_j \mathrm{vol}_N \tag{154}$$

$$\iff \sum_j \int_{V_j} \rho_j \left(R_t^* \mathrm{vol}_N - \mathrm{vol}_N\right) = 0. \tag{155}$$

Nous montrons une absurdité en montrant que la fonction volume $(R_t^* \mathrm{vol}_N - \mathrm{vol}_N)$ est strictement positive et par conséquent que la somme des intégrales ne peut être égale à 0. Pour cela, remarquons que :

$$R_t(x_I + x_V) = x_I + e^t x_V. \tag{156}$$

En effet, pour x fixé, $R_t(x)$ doit être solution au problème différentiel $R_t(x)^* \omega_N = \omega_N(X(R_t(x)))$ et $R_0(x) = x$ avec ω_N la forme de Maurer-Cartan de N. Par invariance à gauche et en suivant les notations :

$$R_t(x)^* \omega_N = \exp(e^t \ln(x_V))^* \omega_N. \tag{157}$$

Remarquons que l'exponentielle $f(t) = \exp(tv)$ est exactement la solution de $f^* \omega_N = v$ avec $f(0) = e$. Soit $t \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exp(e^{t+\varepsilon} \ln(x_V)) = \exp(e^t (1 + \varepsilon + o(\varepsilon)) \ln(x_V)) \tag{158}$$

$$= \exp(e^t \ln(x_V)) \exp((\varepsilon + o(\varepsilon)) e^t \ln(x_V)) \tag{159}$$

et par invariance à gauche nous obtenons :

$$\exp(e^t \ln(x_V))^* \omega_N = e^t \ln(x_V) = \omega_N(X(R_t(x))). \tag{160}$$

Cela montre que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$R_t^* \mathrm{vol}_N = e^{t \dim V} \mathrm{vol}_N \tag{161}$$

et par conséquent pour un $t \in \mathbf{R}$ nous avons bien $R_t^* \mathrm{vol}_N - \mathrm{vol}_N = (e^{t \dim V} - 1) \mathrm{vol}_N$ strictement positif, absurde. ▨

IV.2 GROUPE D'AUTOMORPHISMES

Nous montrons enfin un résultat sur le groupe d'automorphismes d'une variété fermée avec une structure à rayons de rang un. Nous suspectons que pour une structure géométrique

raisonnable, un groupe d'automorphismes suffisamment grand (par exemple non compact) permette de classifier la variété. C'est le sens d'une conjecture de D'AMBRA et GROMOV [56].

DÉFINITION II.62 *Soit M une variété avec une (G, X)-structure. Son* groupe d'automorphismes, $\mathrm{Aut}(M)$ *est l'ensemble des difféomorphismes $f\colon M \to M$ pour qui, si $\widetilde{f}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ est un relèvement alors il existe une unique transformation $\chi(\widetilde{f}) \in G$, telle que :*

$$\forall x \in \widetilde{M},\ D(\widetilde{f}(x)) = \chi(\widetilde{f})(D(x)). \tag{162}$$

Le diagramme commutatif suivant est utile. Si $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ est bien un revêtement, il est assez rare que $D\colon \widetilde{M} \to D(\widetilde{M})$ en soit un aussi, mais ce sera le cas pour nous.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"] & \widetilde{M} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\widetilde{f}"] & D(\widetilde{M}) \arrow[d, "\chi(\widetilde{f})"] \\ M & \widetilde{M} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "D"] & D(\widetilde{M}) \end{tikzcd} \tag{163}$$

Cette définition implique que si $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 = g\widetilde{f}_1$ sont deux relèvements de f, avec $g \in \pi_1(M)$, alors par unicité $\chi(\widetilde{f}_2) = \rho(g)\chi(\widetilde{f}_1)$. Remarquons par ailleurs que puisque $\widetilde{f}$ est un difféomorphisme qui relève un difféomorphisme de M, il doit préserver les fibres du revêtement universel $\widetilde{M} \to M$. Par conséquent, en traduisant cette propriété à travers la développante, $\chi(\widetilde{f})$ appartient à $N_G(\Gamma)$, le normalisateur de l'holonomie dans G.

LEMME II.63 *Un difféomorphisme $\alpha\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ est un automorphisme de M si, et seulement si, il existe $\omega \in G$ tel que pour tout $x \in \widetilde{M}$, $D(\alpha(x)) = \omega(D(x))$ et α préserve les fibres du revêtement universel $\widetilde{M} \to M$.* ▩

DÉFINITION II.64 *En topologie compacte-ouverte, un ensemble de difféomorphismes $\{f_i\}_{i\in I}$ agit proprement sur une variété A si, pour tout compact $K \subset A$, la partie des transformations qui vérifient $f_i(K) \cap K \neq \emptyset$ est relativement compacte dans l'ensemble des difféomorphismes de A.*

Il est utile de remarquer que si l'action n'est pas propre alors il existe une suite $x_n \in K$ convergente vers $x \in K$ telle que pour une suite f_n divergente, la suite $f_n(x_n)$ appartient à K et peut donc être supposée convergente vers $y \in K$.

PROPOSITION II.65 *Soit $\widetilde{M} \to M$ le revêtement universel d'une variété lisse M quelconque* [57]. *Soit f_n une suite de difféomorphisme de M et considérons des relevés $\widetilde{f}_n$ difféomorphismes de $\widetilde{M}$. Si $\widetilde{f}_n$ diverge et agit non proprement alors f_n diverge. Si $\widetilde{f}_n$ converge, alors f_n converge.*

La proposition ne peut pas être améliorée en une équivalence directe entre la divergence de $\widetilde{f}_n$ et celle de f_n puisque nous pourrions par exemple relever l'identité de M par une suite $g_n \in \pi_1(M)$ qui diverge.

PREUVE Nous montrons par contraposition que si f_n ou $\widetilde{f}_n$ converge, alors c'est le cas aussi de l'autre suite. Par simplicité, nous supposerons que les limites hypothétiques sont en l'identité : $f_n \to \mathrm{id}$ ou $\widetilde{f}_n \to \mathrm{id}$.

56. [DG91] Giuseppina D'AMBRA et Mikhael L. GROMOV, « Lectures on transformation groups: geometry and dynamics », 1991.

57. Nous appliquerons cette proposition à $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ mais aussi à $D\colon \widetilde{M} \to D(\widetilde{M})$ lorsque nous considérerons une variété M fermée avec la géométrie à rayons requise.

Il nous faut tout d'abord établir le difféomorphisme candidat pour l'autre convergence (qui sera à nouveau l'identité). Supposons que $\widetilde{f}_n$ agisse non proprement : nous pouvons supposer que $\widetilde{f}_n(x_n) \to y$ avec $x_n \to x$. Si $f_n \to f = \mathrm{id}$, alors $f = \mathrm{id}$ peut être relevé en un unique difféomorphisme $\widetilde{f}$ de M vérifiant $\widetilde{f}(x) = y$. Cela définit donc correctement $\widetilde{f}$ qui doit appartenir au groupe fondamental $\pi_1(M)$. Nous pouvons supposer $\widetilde{f} = \mathrm{id}$ puisque sinon $\widetilde{f}^{-1}\widetilde{f}_n$ est encore une suite de relevés de f_n agissant non proprement : $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}_n(x_n)) \to x$ et $\widetilde{f}^{-1}\widetilde{f}_n$ doit diverger. Dans l'autre cas, si $\widetilde{f}_n \to \widetilde{f} = \mathrm{id}$, alors observons que pour tout $g \in \pi_1(M)$, il existe une suite $g'_n \in \pi_1(M)$ telle que

$$\forall x \in \widetilde{M},\ \widetilde{f}(g \cdot x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(g \cdot x) = \lim_{n\to\infty} g'_n \cdot \widetilde{f}_n(x) \tag{164}$$

et puisque la limite existe, pour le choix quelconque de $x \in \widetilde{M}$, $g'_n = g$ pour n assez grand car $\widetilde{f}_n(x) \to \widetilde{f}(x) = x$. Il s'ensuit que $\widetilde{f}g = g\widetilde{f}$ et donc que ce difféomorphisme passe bien au quotient en le difféomorphisme $f = \mathrm{id}$ de M.

Nous aurons besoin de la convergence simple de $\widetilde{f}_n$ dans le cadre où nous supposons $f_n \to f = \mathrm{id}$. Nous avons comme hypothèse $\widetilde{f}_n(x_n) \to x$ avec $x_n \to x$. Commençons par la convergence de $\widetilde{f}_n(x)$. Considérons les chemins δ_n reliant x_n à x qui sont des compacts convergeant vers le singleton $\{x\}$. Nous pouvons supposer que ces chemins appartiennent à un compact K inclus dans l'ouvert U qui restreint le revêtement en un difféomorphisme entre U et $\pi(U)$. Nous avons $\pi(\widetilde{f}_n(\delta_n)) = f_n(\pi(\delta_n)) \to \{\pi(x)\}$ par convergence $f_n \to \mathrm{id}$. Par convergence uniforme sur K et $x_n \to x$ nous pouvons aussi supposer que $f_n(\pi(\delta_n)) \subset \pi(U)$ pour n assez grand. Ainsi, le relèvement des chemins $\pi(\widetilde{f}_n(\delta_n))$ en les chemins $\widetilde{f}_n(\delta_n)$ sont complètement contenus dans U et relient $\widetilde{f}_n(x_n)$ à $\widetilde{f}_n(x)$. Ils convergent vers le singleton $\{x\}$ et donc $\widetilde{f}_n(x) \to x$. Prenons maintenant $z \in \widetilde{M}$ et un chemin δ reliant x à z. Alors de la même façon, par recouvrement de δ par un nombre fini d'ouverts suffisamment petits, nous pouvons supposer à nouveau $z \in U$ (quitte à changer par la suite le point x). À travers le revêtement, $\pi(\widetilde{f}_n(\delta))$ converge vers $\pi(\delta)$ et se relève en les chemins $\widetilde{f}_n(\delta)$ dont l'extrémité $\widetilde{f}_n(z)$ ne peut converger que vers z puisque c'est le cas dans la projection.

Il nous reste à montrer la convergence uniforme. En topologie compacte ouverte $F_n \to F = \mathrm{id}$ si pour tout compact K et tout ouvert U contenant $F(K) = K$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour $n \geq n_0$, $F_n(K) \subset U$. Cette propriété — essentiellement locale —, nous allons la faire passer à travers les trivialisations locales. Cette propriété est bien locale : décidons d'une métrique sur la variété et supposons que la convergence soit vraie sur tout compact de diamètre au plus ε. Si K est un compact quelconque, recouvrons-le de boules B_i de rayon $\varepsilon/2$. Ce recouvrement permet une décomposition $K = \bigcup K_i$ par des compacts de diamètres toujours inférieurs à ε de sorte que $K_i \subset B_i$. Ce recouvrement décompose aussi U, quitte à le réduire, en prenant les ouverts $U \cap B_i$. Les convergences uniformes avec chaque $K_i \subset U \cap B_i$ fournissent bien une convergence uniforme sur K car les boules B_i sont en nombre fini.

Nous supposons donc que le compact choisi $K \subset V$ appartient à un ouvert trivialisant ou restreignant le revêtement en un difféomorphisme— selon qu'il soit respectivement dans M ou dans $\widetilde{M}$. Nous supposons aussi K et V connexes et quitte à réduire V, nous supposons $U = V$. Alors, la propriété $F_n(K) \subset V \cap U = V$ passe à travers le revêtement et implique la même propriété. En effet, si nous choisissons la convergence de $\widetilde{f}_n \to \mathrm{id}$ alors celle de f_n est décrite par l'équation :

$$f_n(K) = f_n(\pi(\widetilde{K})) = \pi(\widetilde{f}_n(\widetilde{K})) \subset \pi(\widetilde{f}(\widetilde{V})) = \pi(\widetilde{V}) = V, \tag{165}$$

en choisissant $\widetilde{K} \subset \widetilde{V}$ au-dessus de $K \subset V$. Si nous choisissons la convergence de $f_n \to \mathrm{id}$, alors cela implique :

$$\pi(\widetilde{f}_n(K)) = f_n(\pi(K)) \subset f(\pi(V)) = \pi(V). \tag{166}$$

En restreignant le revêtement π en un difféomorphisme identifiant $K \subset V$ à $\pi(K) \subset \pi(V)$, à partir d'un certain rang l'équation implique que le relèvement de $f_n(\pi(K))$ en $\widetilde{f}_n(K)$ réside dans un unique antécédent de $\pi(V)$ qui ne peut être que V par convergence simple et par conséquent $\widetilde{f}_n(K) \subset V$ implique la convergence de $\widetilde{f}_n$. ▩

COROLLAIRE II.66 *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une géométrie à rayons de rang un du cadre relatif. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe incomplète. Son groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(M)$ *est fermé dans le groupe des difféomorphismes de M.*

PREUVE L'incomplétude nous permet d'appliquer le théorème II.52 (p. 47). La développante $D\colon \widetilde{M} \to \mathcal{N} - I$ est un revêtement. Le sous-groupe de G_1 préservant le sous-espace nil-affine incomplet I est fermé : c'est $I \rtimes K_I A_1$ avec K_I le sous-groupe fermé de K préservant I. Soit $f_n \to f$ une suite convergente d'automorphismes dans les difféomorphismes de M. Choisissons $x \in M$ et relevons x et $f(x)$ en $\widetilde{x}$ et $\widetilde{f(x)}$ dans $\widetilde{M}$. Nous pouvons relever $f_n \to f$ en $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ en imposant $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f(x)}$ et $\widetilde{f_n}(x) \to \widetilde{f(x)}$. Prenons par hypothèse la suite $\chi(\widetilde{f_n})$ qui fait correspondre les f_n à des éléments du groupe. Par la proposition précédente, pour le revêtement $\widetilde{M} \to D(\widetilde{M})$, puisque $\widetilde{f_n}$ converge, c'est le cas aussi de $\chi(\widetilde{f_n})$ et qui doit converger vers un élément $g \in I \rtimes K_I A_1$ du groupe qui est fermé. Par unicité, g se relève en $\widetilde{f}$ ce qui montre que f est bien un automorphisme. ▩

Nous montrons le résultat suivant sur la complétude d'une variété avec un groupe d'automorphisme non compact.

THÉORÈME II.67 (Complétude avec groupe d'automorphismes non compact) *Soit $(G_1, \mathcal{N})$ une structure à rayons de rang un du cadre relatif. Soit M une $(G_1, \mathcal{N})$-variété fermée connexe. Si* $\mathrm{Aut}(M)$ *n'est pas compact, alors M est complète.*

PREUVE Supposons par l'absurde M incomplète. Nous pouvons ainsi appliquer le théorème II.52 (p. 47) et la proposition II.59 (p. 53). Choisissons un point base $p \in I$ de N. Le but de la preuve consiste à utiliser la proposition précédente puisque la développante est aussi un revêtement sur son image.

Si $\mathrm{Aut}(M)$ n'est pas compact, alors par compacité de M ce groupe n'agit pas proprement. Considérons $x \in M$ et $f_n \in \mathrm{Aut}(M)$ qui diverge tels que $f_n(x) \to y \in M$. Relevons de façon quelconque x en $\widetilde{x}$ et y en $\widetilde{y}$. Alors l'équation $f_n(x) \to y$ se traduit en :

$$\pi_1(M) \cdot \widetilde{f_n}(\widetilde{x}) \to \pi_1(M) \cdot \widetilde{y}. \tag{167}$$

Écrivons $\chi(\widetilde{f_n})(z)$ dans $I \rtimes KA_1$ comme $c_n + h_n(z)$. Pour une dynamique de Fried associée à l'origine, prenons pour chaque $n \geq 0$ une transformation $T_{ji} \in \Gamma$ décomposée en $T_{ji}(z) = c_{ji} + f_{ji}(z)$ de sorte que $T_{ji}\chi(\widetilde{f_n})(z) = c_{ji} + f_{ji}(c_n) + f_{ji}(f_n(z))$ ait son terme linéaire $f_{ji} f_n$ borné dans KA_1. Ainsi, en changeant $\widetilde{f_n}$ en $g_{ji}\widetilde{f_n}$ pour chaque $n \geq 0$, nous pouvons supposer que $\chi(\widetilde{f_n})$ a son facteur linéaire borné. La convergence des fibres montre qu'il existe $g_n \in \pi_1(M)$ tel que

$$g_n \widetilde{f_n}(\widetilde{x}) \to \widetilde{y} \tag{168}$$

et ainsi la suite des $g_n\widetilde{f_n}$ qui relèvent les f_n n'agit pas proprement sur $\widetilde{M}$. Cette suite doit diverger par la proposition précédente.

Par l'absurde, montrons — à extraction près — que $\chi(g_n\widetilde{f_n}) = \rho(g_n)\chi(\widetilde{f_n})$ converge uniformément sur tout compact vers une transformation $\omega \in G_1$ préservant $D(\widetilde{M})$. Par la proposition précédente, cela contredira le fait que $g_n\widetilde{f_n}$ diverge.

Rappelons que nous avons une décomposition $I \oplus V$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ qui est invariante par l'holonomie linéaire. Écrivons dans $I \rtimes KA_1$:

$$\rho(g_n)(z) = b_n^I + h_n(z), \tag{169}$$

$$\chi(\widetilde{f_n})(z) = c_n^I + q_n(z), \tag{170}$$

$$\rho(g_n)(\chi(\widetilde{f_n})(z)) = b_n^I + h_n(c_n^I) + h_n(q_n(z)). \tag{171}$$

Le terme $h_n(c_n^I)$ appartient à I car l'holonomie linéaire préserve la décomposition $I \oplus V$. Remarquons au passage que q_n aussi préserve la décomposition $I \oplus V$. En effet, q_n préserve I et par conséquent son orthogonal $V \subset E$. Décomposons ensuite :

$$D(\widetilde{x}) = x^I + x^V, \tag{172}$$

$$D(\widetilde{y}) = y^I + y^V, \tag{173}$$

$$\rho(g_n)(\chi(\widetilde{f_n})(D(\widetilde{x}))) = b_n^I + h_n(c_n^I) + h_n q_n(x^I) + h_n q_n(x^V) \tag{174}$$

et seul le dernier terme n'appartient pas à I mais appartient à V. Comme la quantité totale doit converger vers $y^I + y^V$ et que $y^V \neq 0$, il vient que $h_n q_n(x^V)$ ne peut pas diverger vers zéro ou l'infini. Or $q_n(x^V)$ ne diverge pas non plus car q_n est borné dans KA_1 et par conséquent h_n ne peut pas diverger dans KA_1 puisque sinon $V \subset E$ serait complètement contracté ou dilaté.

À extraction près, nous pouvons donc supposer que $h_n \to h$ et $q_n \to q$ dans KA_1. Donc le terme $h_n q_n(x^I) + h_n q_n(x^V)$ converge et par conséquent $b_n^I + h_n(c_n^I)$ doit lui aussi converger. Ainsi, nous obtenons bien que $\rho(g_n)\chi(\widetilde{f_n})$ converge vers une transformation $\omega \in I \rtimes KA_1$ et cette convergence est uniforme sur tout compact. Cette transformation préserve bien $D(\widetilde{M})$. En effet, c'est le cas de sa partie de translation qui appartient à I. Quant à la partie linéaire, le terme $h_n q_n$ préserve la décomposition $I \oplus V$ et se décompose donc en le produit d'une transformation sur I et d'une transformation sur V, ce qui est encore vrai à la limite $h_n q_n \to hq$. Le sous-espace I est par conséquent préservé et donc son complémentaire $D(\widetilde{M})$ aussi. ▩

Contre-exemple en rang supérieur Afin de montrer que ce théorème souligne un phénomène de rang un, nous allons donner un exemple relativement simple et facilement généralisable d'une variété *incomplète* avec une structure de rang deux et où le groupe d'automorphisme agit non proprement. Voir figure II.6 (p. 59). Considérons $\mathbf{R}^2$ et les transformations diagonales $\alpha(x, y) = (\beta_1 x, \beta_2 y)$. Nous prenons le quotient de la région $\Omega = \mathbf{R}^2 - (0, 0)$ par le sous-groupe Γ engendré par $f(x, y) = (2x, 2y)$. Ainsi, $M = \Omega/\Gamma$ est une variété (radiante) avec une structure affine à rayons. Mais constatons que nous avons un automorphisme :

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, y\right) \tag{175}$$

dont les puissances agissent non proprement sur Ω. En effet, $g^n(x, 1)$ converge vers $(0, 1)$ dans Ω. Cela empêche $\mathrm{Aut}(M)$ d'être compact et l'empêche également d'agir proprement.

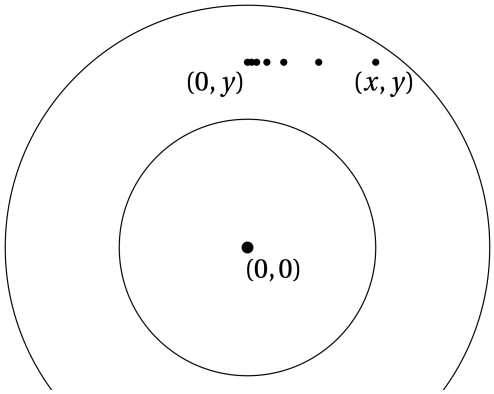

FIGURE II.6 – Exemple d'une variété incomplète à groupe d'automorphismes non compact.

V — APPLICATION EN GÉOMÉTRIE PARABOLIQUE DE RANG UN

Les géométries paraboliques de rang un fournissent des géométries de Levi qui sont exactement des géométries à rayons de rang un et à dilatations. Cela rend compte de la motivation initiale [58] que nous avions pour l'étude générale de la convexité et des géométries à rayons.

Nous proposons une construction qui porte sur la géométrie parabolique. Cela nous permet d'illustrer un lien particulièrement fort entre géométrie parabolique, géométrie de Levi et géométrie à rayons. En géométrie parabolique de rang un, les espaces symétriques sont les espaces hyperboliques sur l'un des quatre corps : réel, complexe, quaternionique ou octonionique. Dans les quatre cas, nous désignons par $\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$ l'espace hyperbolique de dimension n (dans le corps correspondant), le groupe des isométries étant alors $\mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n, 1)$. Nous pourrons nous référer à CHEN et GREENBERG [59] pour une introduction générale.

Rappelons que dans le cas d'une géométrie parabolique de rang un, l'espace au bord $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$ est une sphère. La décomposition KAN du groupe d'isométries $\mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n, 1)$ permet de décrire l'unique géométrie de Levi. En effet, puisque le rang est un, le seul choix de sous-groupe parabolique possible (à conjugaison près) est le sous-groupe de Borel $B = MAN \subset KAN$, où M est le centralisateur de A dans K. L'espace de la géométrie de Levi est le complémentaire d'un point de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$, puisque B est exactement le stabilisateur d'un point au bord. Le stabilisateur de la géométrie de Levi est celui du point final d'une géodésique quelconque issu du point évité. C'est donc à conjugaison près MA. Le sous-groupe N est nilpotent, et l'action de $N \rtimes MA$ sur N fournit une géométrie à rayons. Elle est de rang un puisque c'est la dimension de A et que c'est aussi le rang de la géométrie parabolique. La géométrie est même à dilatations puisque A agit par dilatations sur N — cela correspond au fait que N peut être vu comme l'espace des racines positives.

Nous abordons la conjecture suivante, qui dépend de la résolution du programme dans le cadre étendu (sans être relativement homogène).

58. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.
59. [CG74] Shyan S. CHEN et Leon GREENBERG, « Hyperbolic spaces », 1974.

CONJECTURE (II.71) *Soit M une* $(\mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n,1), \mathbf{H}^n_{\mathbf{F}})$*-variété fermée connexe. Si sa développante n'est pas surjective, alors c'est un revêtement sur son image.*

Nous pouvons en réalité proposer un raffinement supplémentaire : *la développante est un revêtement sur son image si, et seulement si, son image est une composante connexe du complémentaire de l'ensemble limite de l'holonomie* [60]. Mais il nous semble que l'énoncé précédent est suffisamment fort pour illustrer notre application.

La conjecture II.71 (p. 61) est prouvée dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ par KULKARNI et PINKALL [61] et aussi chez MATSUMOTO [62]. Elle est stipulée dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ tridimensionnel chez FALBEL et GUSEVSKII [63]. Il nous semble que les cas quaternionique et octonionique sont originaux, notamment en raison du fait que le théorème de FRIED [64] n'était pas formulé dans ces cas-ci.

Sous couvert d'une classification des variétés fermées suivant la conjecture II.2 (p. 15), le point de départ pour une preuve de la conjecture II.71 (p. 61) consiste à invoquer l'ensemble limite de l'holonomie. La particularité des géométries paraboliques de rang un réside dans l'existence d'un ensemble limite aux propriétés particulièrement fortes. En rang parabolique supérieur, nous pouvons encore définir des ensembles limites, mais ils ne sont plus aussi faciles à manipuler.

DÉFINITION II.68 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n,1)$ *un sous-groupe.* L'ensemble limite $L(\Gamma) \subset \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$ *de ce sous-groupe est :*

$$L(\Gamma) = \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}} \cap \overline{\Gamma \cdot p} \tag{176}$$

pour le choix quelconque de $p \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$.

Les premières propriétés de cet ensemble limite sont données par le lemme suivant, que nous pourrons retrouver chez CHEN et GREENBERG [65]. Le dernier fait peut être démontré par des outils de géométrie CAT(0) [66].

LEMME II.69 *Nous avons les propriétés suivantes.*

(1) La définition de $L(\Gamma)$ *ne dépend pas du choix de* $p \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$.

(2) La partie $L(\Gamma)$ *est compacte et invariante par l'action de* Γ.

(3) Si $A \subset \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$ *est compact, est* Γ*-invariant et contient au moins deux points, alors* $L(\Gamma) \subset A$.

(4) Si $L(\Gamma)$ *a au moins trois points alors il est infini* [67].

(5) Si $L(\Gamma) = \emptyset$ *alors tous les éléments de* Γ *fixent un même point dans l'intérieur de* $\mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$.

Remarquons que si Γ fixe un point dans l'intérieur alors ce sous-groupe doit être le sous-groupe d'un compact maximal $\Gamma \subset K$. Par conséquent, si Γ est l'holonomie d'une structure,

60. [Ale21a] R. V. ALEXANDRE, « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds », 2021.
61. [KP85] Ravi S. KULKARNI et Ulrich PINKALL, « Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry », 1985.
62. [Mat92] Shigenori MATSUMOTO, « Foundations of flat conformal structure », 1992.
63. [FG94] Elisha FALBEL et Nikolay GUSEVSKII, « Spherical CR-manifolds of dimension 3 », 1994.
64. [Fri80] David FRIED, « Closed similarity manifolds », 1980.
65. [CG74] Shyan S. CHEN et Leon GREENBERG, « Hyperbolic spaces », 1974.
66. [BH99] Martin R. BRIDSON et André HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, 1999.
67. Dans le cas contraire — au plus deux points — nous disons que l'ensemble limite est *élémentaire*.

alors il existe une métrique riemannienne invariante et cela montre que la développante est un difféomorphisme sur $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{F}}$.

Cela traitera donc le cas où l'ensemble limite est vide. Maintenant, si l'ensemble limite a au moins deux points alors nous appliquerons le lemme suivant, connu chez KULKARNI et PINKALL [68] lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ et aisément généralisable pour tous les corps.

LEMME II.70 ([KP85]) *Si M est une variété fermée, si sa développante évite l'ensemble limite de son holonomie et si cet ensemble limite a au moins deux points, alors la développante est un revêtement sur son image.*

La preuve de ce lemme repose sur le fait que le complémentaire de l'ensemble limite est un domaine où l'action de Γ est normale. Le cas vraiment difficile pour montrer la conjecture II.71 est $L(\Gamma) = \{\omega\}$, où le théorème de Fried (et ses généralisations) se révèle crucial — c'est aussi le chemin emprunté par [KP85] dans le cas conforme.

CONJECTURE II.71 *Soit M une $(\mathrm{PU}_{\mathbf{F}}(n,1), \mathbf{H}^n_{\mathbf{F}})$-variété fermée connexe. Si sa développante n'est pas surjective, alors c'est un revêtement sur son image.*

Nous proposons une preuve de cette conjecture s'il s'avère que la conjecture II.2 (p. 15) est vraie dans le cadre étendu.

PREUVE Désignons par Ω l'ensemble évité par la développante. Si $\Omega = \{\omega\}$ est un singleton, alors M est une variété de Levi. La géométrie de Levi d'une géométrie parabolique de rang un est une géométrie à rayons de rang un à dilatations. Par conséquent, par classification des variétés incomplètes, la développante est un revêtement sur son image. Si Ω a au moins deux points, alors $L(\Gamma) \subset \Omega$. Par le lemme précédent, la développante est un revêtement sur son image. ▨

68. [KP85, Théorème 4.2] Ravi S. KULKARNI et Ulrich PINKALL, « Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry », 1985.

Deuxième partie

Exploration de représentations de groupe fondamentaux

Chapitre III

Techniques de calculs d'ensembles limites

Pour ce court chapitre, nous nous confrontons à la question du calcul effectif des ensembles limites de sous-groupes de $\mathrm{PU}(2,1)$. Ce calcul est difficile pour des raisons aisées à décrire. Tout d'abord, la définition de l'ensemble limite ne permet pas de décider en temps raisonnable si un point du bord appartient ou non à l'ensemble limite. Contrairement aux fameux ensembles de Julia, les ensembles limites sont des attracteurs de la dynamique et il n'est donc pas facile de déterminer si un point est attiré depuis l'intérieur de l'ensemble limite ou depuis son complémentaire. Aussi, les sous-groupes de $\mathrm{PU}(2,1)$ ont le problème de l'équivalence des mots : il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer en temps raisonnable si deux mots d'un sous-groupe, même finiment présenté, sont équivalents. Par conséquent, tous les calculs sont potentiellement entachés d'un manque d'efficacité. Enfin, puisque cet objet vit dans un espace tridimensionnel, il existe un très grand nombre de points-pixels à manipuler. Si l'ordre de grandeur pour une image bidimensionnelle est le million, dans le cas tridimensionnel, il s'agit du milliard. Nous proposons deux tactiques. La première est générale et sera celle que nous utiliserons pour le prochain chapitre. La deuxième est spécifique à un sous-groupe de $\mathrm{PU}(2,1)$ mais a des qualités remarquables : sa haute efficacité est directement liée à des aspects arithmétiques.

I — BRÈVE DESCRIPTION DU PLAN HYPERBOLIQUE COMPLEXE

Le plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$ est la version complexe du plan hyperbolique réel. Dans $\mathbf{CP}^2$, considérons le domaine :

$$|x|^2 + |y|^2 - |z|^2 < 0. \tag{1}$$

Il est complètement contenu dans la carte affine $z = 1$ et correspond au disque unité dans cette carte. Le groupe agissant transitivement est $\mathrm{PU}(2,1)$ et c'est le groupe d'isométries de ce domaine. Nous renvoyons à la section V (p. 59) et au livre très complet de GOLDMAN [1].

Deux projections sont utiles pour le bord de ce domaine, $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, qui dans la carte $z = 1$, est donné par :

$$|x|^2 + |y|^2 = 1. \tag{2}$$

Ce bord est une 3-sphère vivant dans la carte affine $\mathbf{C}^2$. C'est par conséquent une sphère CR de contact. Une projection stéréographique depuis $(1,0)$ dans $\mathbf{R}^3$ est donnée par :

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{\mathrm{Im}(x)}{1-\mathrm{Re}(x)}, \frac{\mathrm{Re}(y)}{1-\mathrm{Re}(x)}, \frac{\mathrm{Im}(y)}{1-\mathrm{Re}(x)}\right) \tag{3}$$

et une projection sur un plan réel $\mathbf{R}^2$, projection dite *de Siegel*, en lien avec la structure de contact de cette sphère est donnée par :

$$(x,y) \mapsto \left(\mathrm{Re}\left(\frac{y}{1-x}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{y}{1-x}\right)\right). \tag{4}$$

Généralement, nous utiliserons la première projection même si la seconde apparaîtra aussi.

II — MÉTHODE GÉNÉRALE

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PU}(2,1)$ un sous-groupe. Rappelons du chapitre précédent que son ensemble limite $L(\Gamma)$ est défini par l'adhérence :

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot p} \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}, \tag{5}$$

pour le choix quelconque de $p \in \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$. Cette définition et les premières propriétés de cet ensemble limite ont été données à la section V (p. 59). Rappelons que $L(\Gamma)$ est dit *élémentaire* s'il a au plus deux points.

Une premier complément à donner consiste à préciser ce que nous entendrons par *ensemble limite fractal*. Une propriété clef est donnée par CHEN et GREENBERG [2]

PROPOSITION III.1 ([CG74]) *Si Γ n'est pas un sous-groupe discret, alors $L(\Gamma)$ est ou bien élémentaire, ou bien un cercle lisse $S^1 \subset \partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$ ou bien égal à toute la 3-sphère $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$.*

Par conséquent, nous dirons que $L(\Gamma)$ est *fractal* si nous ne sommes pas dans l'un des cas précédent. Cela implique par conséquent que *si $L(\Gamma)$ est fractal alors Γ est discret*. C'est un argument puissant car la discrétude n'est généralement pas démontrable. Le mot *fractal* laisse penser un aspect auto-similaire dans le sens où une donnée locale suffit à caractériser une donnée globale. Cela est justifié par le lemme suivant.

1. [Gol99] William M. GOLDMAN, *Complex hyperbolic geometry*, 1999.
2. [CG74] Shyan S. CHEN et Leon GREENBERG, « Hyperbolic spaces », 1974.

LEMME III.2 *Soit Γ un sous-groupe discret et supposons que $L(\Gamma)$ n'est pas élémentaire. Soit $a \in L(\Gamma)$ un point quelconque et V un voisinage ouvert quelconque de a. Alors il existe un nombre fini de transformations $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ telles que*

$$L(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot (V \cap L(\Gamma)) . \tag{6}$$

PREUVE Posons $W = \partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}} - \bigcup \Gamma \cdot V$. Alors c'est un compact Γ-invariant de $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$. Par conséquent, il ne peut pas avoir deux points distincts par minimalité de $L(\Gamma)$. Si $W = \{b\}$, alors Γ doit fixer b par toutes ses transformations mais cela implique alors que $L(\Gamma)$ est élémentaire car Γ est discret. Par conséquent $W = \emptyset$ et il s'ensuit $L(\Gamma) \subset \bigcup \Gamma \cdot V$. Par compacité de $L(\Gamma)$, seul un nombre fini de transformations $\gamma_i \in \Gamma$ sont nécessaires. ▩

Notre méthode générale repose sur une stratégie dont le lemme suivant est le point de départ. Rappelons qu'une transformation $A \in \mathrm{PU}(2,1)$ appartient à l'un des trois types dynamiques suivants :

— *elliptique* si A fixe un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$;
— *parabolique* si A fixe un unique point de $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$ et aucun point de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$;
— *loxodromique* sinon et A fixe deux points distincts de $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, dont l'un est fortement attractif et l'autre fortement répulsif.

Pour déterminer le type d'une transformation, il suffit d'évaluer sa trace. En effet, GOLDMAN [3] a montré que si τ est la trace d'une transformation A et

$$f(\tau) = |\tau|^4 - 8\,\mathrm{Re}(\tau^3) + 18|\tau|^2 - 27 \tag{7}$$

alors A est elliptique si $f(\tau) < 0$ ou est loxodromique si $f(\tau) > 0$. Si $f(\tau) = 0$ alors A peut être elliptique ou parabolique. Une transformation parabolique est *unipotente* si sa trace est exactement égale à trois.

Les transformations loxodromiques ont un intérêt fort : il est beaucoup plus rapide d'approcher leurs points limites par itérations. En effet, si A est loxodromique, alors la plus grande valeur propre de A grandit exponentiellement avec A^n. La plus grande valeur propre fournit le point attractif et celle de la plus petite (ou la plus grande de A^{-n}) fournit le point répulsif.

LEMME III.3 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PU}(2,1)$ un sous-groupe. Soit Γ_L le sous-ensemble de ses transformations loxodromiques. Supposons que $\Gamma_L \neq \emptyset$. Alors l'adhérence des points attractifs loxodromiques :*

$$\overline{\{x \mid \exists g \in \Gamma_L, \lim g^n x_0 = x\}} \text{ pour n'importe quel } x_0 \in \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}, \tag{8}$$

est égale à l'ensemble limite total $L(\Gamma)$.

PREUVE Remarquons que si g est loxodromique, alors c'est encore le cas de n'importe quelle conjugaison $\gamma g \gamma^{-1}$. L'ensemble A défini par l'énoncé est compact et a au moins deux points puisque $g \in \Gamma_L \neq \emptyset$ et g^{-1} fournissent deux points attractifs. Par définition, il est clair que $A \subset L(\Gamma)$. Il suffit donc de montrer que A est Γ-invariant puisque par minimalité cela impliquera $L(\Gamma) \subset A$.

Montrons l'invariance par Γ. Soit $\gamma \in \Gamma$ et soit $x = \lim g^n x_0$. Alors $\gamma x = \gamma \lim g^n x_0 = \lim \gamma g^n x_0$. Or, $\lim \gamma g^n x_0$ est égal à $\lim \gamma g^n \gamma^{-1} x_0$ car $\gamma g^n \gamma^{-1}$ est loxodromique, donc la

3. [Gol99] William M. GOLDMAN, *Complex hyperbolic geometry*, 1999.

deuxième limite est le point fixe attractif de $\gamma g \gamma^{-1}$ et ne dépend donc pas du choix de x_0 qui peut être changé en $\gamma(x_0)$. ▨

Algorithme Nous pouvons à présent décrire la méthode générale qui nous a permis de calculer le grand nombre d'ensembles limites du chapitre prochain. Nous exploitons le lemme précédent et l'invariance de l'ensemble limite par le sous-groupe choisi.

(1) Nous générons des mots d'une longueur maximale et prenons les points fixes attractifs des mots qui correspondent à des transformations loxodromiques. Ces points fixes sont obtenus par convergence de la suite des itérées appliquée à un point.
(2) Nous appliquons successivement des transformations — choisies ou non — sur les points déjà obtenus.

Aspects pratiques Quelques remarques s'imposent.

— La première étape est à la fois la plus coûteuse mais aussi la plus neutre. Si le sous-groupe a deux générateurs, cela fournit 3^n mots de longueur n. Avec le problème de l'équivalence des mots dans un groupe, il est difficile d'obtenir beaucoup de points limites.
— Pour calculer les 3^n mots, il est plus efficace de calculer les mots de longueur moitié et de les évaluer au dernier moment.
— La deuxième étape est en revanche beaucoup plus rentable puisque chaque itération rapporte assez probablement un nouveau point. Nous appliquons donc cette étape à plusieurs reprises.
— À chaque fois, il est nécessaire de faire un tri des points obtenus et de supprimer les points redondants. Il n'est en général pas possible de s'en passer en raison du problème de l'équivalence des mots dans un groupe.

À la figure III.1 (p. 69) nous représentons la simulation de deux ensembles limites : l'un est fractal l'autre égal à tout $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$. Nous illustrons l'état de la simulation après chaque étape. La première étape étant celle de l'obtention des points limites de transformations loxodromiques, les trois suivantes étant par itération de mots du groupe sur des points déjà obtenus.

III — MÉTHODE ARITHMÉTIQUE

Nous regardons le groupe abstrait

$$\Lambda_2(3,3,\infty) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \tag{9}$$

et ses représentations dans $\mathrm{PU}(2,1)$. L'une de ses représentations est *fuschsienne* : elle provient d'une représentation hyperbolique réelle $\mathrm{PO}(2,1) \subset \mathrm{PU}(2,1)$. Il s'avère que les autres représentations qui nous intéressent dans $\mathrm{PU}(2,1)$ se déforment depuis celle-ci [4].

4. [GW19] Antonin GUILLOUX et Pierre WILL, « On SL(3, **C**)-representations of the Whitehead link group », 2019.

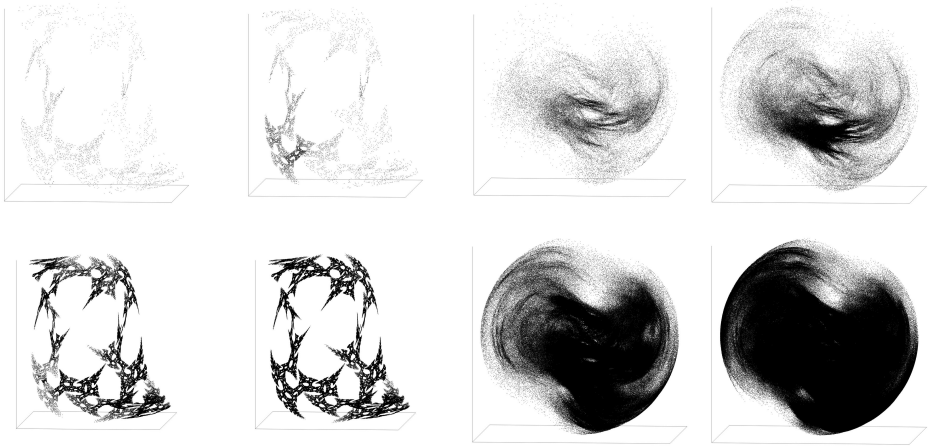

FIGURE III.1 – Deux ensembles limites avec les étapes intermédiaires.

Stratégie Calculer les ensembles limites des représentations $\Lambda_2(3,3,\infty) \to \mathrm{PU}(2,1)$ comme déformations de sa représentation fuchsienne $\Lambda_2(3,3,\infty) \to \mathrm{PO}(2,1)$.

(1) Nous allons montrer que l'ensemble limite de la représentation fuchsienne est un cercle.
(2) Nous donnerons un algorithme permettant de calculer les points rationnels de ce cercle, vu comme droite réelle dans le modèle du demi-plan supérieur.
(3) Cet algorithme est utilisé pour calculer les déformations de l'ensemble limite.

Le point de départ pour cette stratégie consiste à observer qu'en géométrie hyperbolique réelle, et son demi-plan supérieur, nous avons comme groupe d'isométries $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ et un réseau des points entiers :

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \tag{10}$$

qui ressemble déjà significativement à $\Lambda_2(3,3,\infty)$. Ce réseau est le groupe modulaire. Un couple générateur de$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$ est donné par :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

La matrice S est bien d'ordre deux et

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

est d'ordre trois dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$.

Avec le demi-plan supérieur $\mathbf{R} \times \boldsymbol{i}\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{C}$ comme modèle hyperbolique, la droite réelle achevée $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est le cercle à l'infini. Commençons par montrer comment nous pouvons calculer $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ comme orbite du point $(0,0)$ par $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$. Pour cela, regardons l'action de

S et T sur le point homogène $(p:q)$ représentant le rationnel $\frac{p}{q}$.

$$S(p:q) = (q:p) \tag{14}$$

$$T(p:q) = (p+q:q) \tag{15}$$

Par conséquent l'algorithme suivant est possible.

Algorithme Pour calculer $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ comme orbite de 0, considérons $\frac{p}{q}$ un point cible. Il est équivalent au point homogène $(p:q)$ sur lequel $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$ agit. Nous commençons par le mot vide. Ce mot devra à la fin de l'algorithme permettre d'envoyer 0 sur $\frac{p}{q}$.

(1) Si $p = 0$ alors nous stoppons l'algorithme et le mot à appliquer sur $(0,0)$ pour obtenir le rationnel cible est l'inverse du mot constitué. Si q est négatif alors nous multiplions p et q par -1.

(2) Si $|p| < q$, alors nous appliquons S. Le mot gagne la lettre S et revenons à l'étape (1).

(3) Sinon, alors si $|p+q| < |p|$ alors nous appliquons T, et si $|p-q| < |p|$ alors nous appliquons T^{-1}. Le mot gagne la lettre T ou T^{-1} respectivement et nous revenons ensuite à l'étape (1).

L'algorithme termine en temps fini car à chaque paire d'itérations la quantité $|p|+|q|$ diminue strictement.

Calcul de l'ensemble limite Il reste à justifier que 0 est un point de l'ensemble limite pour obtenir un calcul de l'ensemble limite le long des points rationnels. Effectivement, puisque T^n envoie un point quelconque vers l'infini, le point ∞ est un point limite et nous avons $S(\infty) = 0$.

Revenons maintenant à $\Lambda_2(3,3,\infty) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Il s'avère que c'est un sous-groupe d'indice deux dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$. En effet,

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

sont deux éléments d'ordre trois et leur produit est unipotent :

$$TSST \equiv T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

L'algorithme que nous proposons va donc ressembler à celui de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$. Puisque c'est un sous-groupe d'indice deux, nous aurons plus de cas à considérer. Remarquons que $TS = A$ et $ST = B$ agissent de la façon suivante :

$$A(p:q) = (p-q:p) \tag{19}$$

$$A^{-1}(p:q) = (-q:p-q) \tag{20}$$

$$B(p:q) = (-q:p+q) \tag{21}$$

$$B^{-1}(p:q) = (-p-q:p). \tag{22}$$

Algorithme Pour calculer $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ comme orbite de 0, considérons $\frac{p}{q}$ un point cible. Il est équivalent au point homogène $(p : q)$ sur lequel $\Lambda_2(3,3,\infty)$ agit. Nous commençons par le mot vide. Ce mot devra à la fin de l'algorithme permettre d'envoyer 0 sur $\frac{p}{q}$.

(1) Si $p = 0$ alors nous stoppons l'algorithme et le mot à appliquer sur $(0,0)$ pour obtenir le rationnel cible est l'inverse du mot constitué. Si q est négatif alors nous multiplions p et q par -1.

(2) Si $p > 0$, alors :

  (a) Si $|p| < q$ alors nous appliquons A, le mot gagne la lettre A et nous revenons à l'étape (1).

  (b) Sinon nous appliquons A^{-1}, le mot gagne la lettre A^{-1} et nous revenons à l'étape (1).

(3) Sinon $p < 0$ et :

  (a) Si $|p| < q$ alors nous appliquons B^{-1} ; le mot gagne la lettre B^{-1} et nous revenons à l'étape (1).

  (b) Sinon nous appliquons B, le mot gagne la lettre B et nous revenons à l'étape (1).

À nouveau l'algorithme termine car la quantité $|p| + |q|$ diminue à chaque itération.

Calcul de l'ensemble limite Comme précédemment, puisque T^2 est dans $\Lambda_2(3,3,\infty)$, le point ∞ est point limite. Cette fois, $ST(\infty) = 0$ et donc 0 est encore point limite. En appliquant l'algorithme précédent nous obtenons le calcul les points rationnels $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ de l'ensemble limite.

Aspects pratiques Certaines optimisations sont souhaitables, même si l'algorithme présenté est essentiellement celui qui est implémenté.

— Il vaut mieux pré-calculer des mots de longueur fixe et découper le mot résultat en des parties de longueurs maximales.

— Il est plus efficace de manipuler des représentations binaires des mots (avec le choix d'un encodage efficace) plutôt que de faire des chaînes de caractères. Nous avons choisi de représenter A par 0, A^{-1} par 00 (remarquons que $A^3 = \mathrm{id}$ et par conséquent $A^2 = A^{-1}$), B par 1 et B^{-1} par 11. Avec un bit d'en-tête, cela permet de coder efficacement sur un entier 64 bits des mots bien plus longs que sur une chaîne de caractères de taille équivalente. Ces représentations binaires permettent aussi de structurer un pré-calcul des mots à travers un tableau statique. L'emploi d'un dictionnaire serait bien plus coûteux.

— Puisque TS et ST sont paraboliques, ils sont possiblement utilisés un très grand nombre de fois. Il vaut donc mieux tester la possibilité de l'usage de ces mots, et de calculer directement le nombre d'itérations à appliquer, plutôt que d'itérer un très grand nombre de fois l'algorithme.

— Pour le calcul des points de l'ensemble limite, il vaut mieux commencer par un rationnel, se fixer une distance maximale entre un point et son suivant, et chercher par dichotomie

un prochain rationnel qui permettra de remplir cette condition. Sinon — les déformations n'étant pas douces sur l'ensemble limite — des trous apparaîtraient.

Dans la galerie, les figures G.5 (p. 94) et G.6 (p. 95) montrent une déformation du groupe $\Lambda_2(3,3,\infty)$.

Chapitre IV

Redondance des groupes de triangles

Nous proposons l'exploration d'un grand nombre de représentations de groupes fondamentaux dans $\mathrm{PU}(2,1)$ [1]. Falbel, Koseleff et Rouillier [2] ont calculé explicitement toutes les représentations dans $\mathrm{PU}(2,1)$ à bords unipotents de complémentaires de nœuds et d'entrelacs dont la description par une triangulation se fait avec au plus quatre tétraèdres [3]. Une représentation *à bord unipotent* d'une 3-variété hyperbolique à pointes M est une représentation du $\pi_1(M)$ telle que pour le $\mathbf{Z}^2$ correspondant à chaque pointe, l'image de ce $\mathbf{Z}^2$ est un sous-groupe engendré par une ou deux transformations paraboliques unipotentes de $\mathrm{PU}(2,1)$. Ces représentations sont au nombre de 1 653.

À partir d'une représentation du groupe fondamental d'une variété, une première question géométrique se pose : *s'agit-il de l'holonomie d'une structure géométrique ?* Il est souvent très difficile de décider si c'est le cas ou non. Si c'est une holonomie, la question suivante est : *est-ce l'holonomie d'une uniformisation ?* Dans ce cas-ci, la variété est difféomorphe à un quotient U/Γ d'un ouvert par l'image de l'holonomie. Évidemment c'est une propriété très rare.

Ces questions suivent ce que nous connaissons déjà à travers la littérature. Parmi les 3-variétés dont certaines représentations sont bien connues, la plus étudiée est probablement le complémentaire du nœud de huit. Falbel [4] a trouvé ses représentations à bords unipotents — elles sont au nombre de trois. Deraux et Falbel [5] ont montré que parmi ces trois représentations, une a son ensemble limite dense et les deux autres ont leurs images qui sont des conjugués du groupe d'un certain triangle. Deraux et Falbel ont même montré que les représentations sur le groupe d'un triangle sont les holonomies d'une uniformisation du complémentaire du nœud de huit. Par ailleurs, la variété des caractères du complémentaire du nœud de huit a aussi été établie [6].

1. [Ale21b] R. V. Alexandre, « Redundancy of Triangle Groups in Spherical CR Representations », 2021.
2. [FKR15] Elisha Falbel, Pierre-Vincent Koseleff et Fabrice Rouillier, « Representations of fundamental groups of 3-manifolds into $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$: exact computations in low complexity », 2015.
3. Ces représentations sont rendues accessibles à travers [Gör] et avec la collaboration de [GGZ15a; GGZ15b].
4. [Fal08] Elisha Falbel, « A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy », 2008.
5. [DF15] Martin Deraux et Elisha Falbel, « Complex hyperbolic geometry of the figure-eight knot », 2015.
6. [Fal+16] Elisha Falbel et al., « Character varieties for $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$: the figure eight knot », 2016.

Notre stratégie a été de calculer les ensembles limites de toutes les représentations que nous avions à notre disposition. Sur les 1 653 représentations, seulement 70 ont un ensemble limite fractal [7]. Ces 35 paires de représentations — en paires par la conjugaison complexe — concernent 20 variétés. Nous nous sommes rendu compte que les ensembles limites de ces représentations — voir dans la galerie les figures G.7 (p. 96) et G.8 (p. 97) — se ressemblaient souvent. Il s'avère que nous avons rencontré un phénomène mis en évidence par DERAUX [8] : la plupart de ces représentations ont pour image le groupe d'un triangle et sont conjuguées entre elles. Nous appelons *redondance* le phénomène d'avoir plusieurs variétés ayant une représentation à image dans le groupe d'un même triangle.

Définissons le *groupe (abstrait) des réflexions d'un triangle de type* (p,q,r) par :

$$\Lambda(p,q,r) = \left\langle a,b,c \;\middle|\; \begin{array}{c} a^2=b^2=c^2=e, \\ (ab)^p=(bc)^q=(ca)^r=e \end{array} \right\rangle, \; 2 \le p \le q \le r \le \infty \tag{1}$$

et le *groupe (abstrait) d'un triangle de type* (p,q,r) le sous-groupe d'indice deux :

$$\Lambda_2(p,q,r) = \langle x,y \mid x^p = y^q = (xy)^r = e \rangle. \tag{2}$$

Lorsque $\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}+\frac{\pi}{r}<\pi$ — ce qui représente donc un triangle du plan hyperbolique réel —, les représentations de ces groupes dans $\mathrm{PU}(2,1)$ fournissent des *groupes de triangles hyperboliques complexes*. Pour le choix d'un type (p,q,r) hyperbolique, il existe une famille à 1-paramètre $\Delta(p,q,r;\theta)$ de représentations de $\Lambda(p,q,r)$ dans $\mathrm{PU}(2,1)$ [9]. Le paramètre θ est appelé *invariant angulaire* ou *invariant de Cartan*. Avec une représentation $\Delta(p,q,r;\theta)$ nous avons une représentation du sous-groupe d'indice deux $\Lambda_2(p,q,r) \subset \Lambda(p,q,r)$ et nous désignons par $\Delta_2(p,q,r;\theta)$ cette représentation dont l'image est encore d'indice deux.

Pour les groupes des triangles $\Delta_2(3,3,n;\theta)$, une valeur spéciale de l'invariant angulaire $\theta=\theta_\infty$ correspond à envoyer xy^{-1} sur une transformation unipotente de $\mathrm{PU}(2,1)$. Cette valeur spéciale donne un candidat évident pour obtenir un bord unipotent, en tentant d'envoyer les courbes périphériques qui engendrent le groupe fondamental d'une pointe sur un sous-groupe monogène engendré par l'image de xy^{-1}. Par exemple les images des représentations des uniformisations du complémentaire du nœud de huit sont des conjugués de l'image de $\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$. Nous avons calculé l'ensemble limite de ce groupe, voir dans la galerie les figures G.11 (p. 100), G.13 (p. 102) et G.15 (p. 104).

Le résultat mathématique — indépendant des calculs numériques — que nous démontrons est le suivant et illustre que le phénomène de redondance est prédominant dans le census de Falbel, Koseleff et Rouillier.

THÉORÈME (IV.4, p. 79) *Dans le tableau qui suit, chaque ligne est composée de variétés — dénommées avec une convention de* `snappy` *— dont il existe une représentation surjective à bord unipotent dans le groupe* $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ *indiqué dans la première colonne. Les représentations pour les variétés de la deuxième colonne sont les holonomies d'uniformisations. Celles de la troisième colonne ne sont pas des holonomies d'uniformisations.*

7. D'ailleurs celles-ci vérifient la propriété suivante : chaque copie de $\mathbf{Z}^2$ dans le groupe fondamental qui correspond à une pointe est envoyé sur un sous-groupe *monogène*.

8. [Der15] Martin DERAUX, « On spherical CR uniformization of 3-manifolds », 2015.

9. Si l'une des valeurs de (p,q,r) est infinie, la relation en question est omise et nous représentons l'élément associé par une transformation unipotente de $\mathrm{PU}(2,1)$.

Groupe	Variétés uniformisées	Variétés redondantes
$\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$	m004	m022, m029, m034, m053, m081, m117
$\Delta_2(3,3,5;\theta_\infty)$	m009	m015, m035, m142, m146
$\Delta_2(3,3,6;\theta_\infty)$	m023	
$\Delta_2(3,3,7;\theta_\infty)$	m039	m032, m045
$\Delta_2(3,3,8;\theta_\infty)$	s000	m053
$\Delta_2(3,3,\infty;\theta_\infty)$	m129	m203

Une illustration de ce théorème consiste à regarder les ensembles limites des groupes $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ et à chercher des *indices visuels* pour reconnaître ceux des représentations des variétés du théorème. Nous proposons de tels indices pour permettre au lecteur cette recherche.

Nous montrons par ailleurs avec la proposition IV.11 (p. 88) le cas d'une représentation à valeurs dans le groupe d'un triangle qui est *lagrangien* et non hyperbolique complexe. Nous trouvons aussi trois représentations dont les ensembles limites ressemblent à ceux des triangles $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ mais qui ne sont pas surjectives dans un $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ — nous ne savons pas s'il existe une inclusion simple.

I — GROUPES DE TRIANGLES

Nous décrivons ici quelques éléments autour des groupes de triangles et plus particulièrement des groupes de triangles hyperboliques complexes :

$$\Delta = \left\langle I_1, I_2, I_3 \;\middle|\; \begin{array}{c} I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = e, \\ (I_1 I_2)^p = (I_2 I_3)^q = (I_3 I_1)^r = e \end{array} \right\rangle \subset \mathrm{PU}(2,1), \tag{3}$$

avec I_1, I_2 et I_3 toutes trois des réflexions complexes. Les nombres p, q et r sont des entiers possiblement infinis. Si c'est le cas, alors la relation correspondante est omise et nous conviendrons toujours que la transformation correspondante doit être unipotente — c'est ce qu'il se passe si le point fixe d'un élément elliptique est envoyé à l'infini. Nous donnerons une description de Δ qui permette d'évaluer θ. Ce paramètre sera déterminé par la trace du mot $I_3 I_2 I_1 I_2$. En particulier, pour un triplet $(p,q,r) = (3,3,n)$, nous obtiendrons un unique groupe avec $\theta = \theta_\infty$ de sorte que ce dernier mot soit unipotent.

Rappelons que nous pouvons voir le groupe d'un triangle hyperbolique complexe comme la représentation dans $\mathrm{PU}(2,1)$ par des réflexions complexes d'un groupe abstrait

$$\Lambda(p,q,r) = \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = e, \\ (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = e \end{array} \right\rangle. \tag{4}$$

Lorsque les groupes de triangles hyperboliques complexes ont été exposés par SCHWARTZ [10], il a posé la question fondamentale suivante : *quand est-ce que le groupe d'un triangle hyperbolique complexe est une représentation discrète et injective du groupe abstrait correspondant ?* Comme réponse il a proposé la conjecture suivante.

10. [Sch02] Richard E. SCHWARTZ, « Complex hyperbolic triangle groups », 2002.

CONJECTURE IV.1 (Schwartz) *Le groupe d'un triangle hyperbolique complexe* $\Delta(p,q,r;\theta)$ *est une représentation discrète et injective de* $\Lambda(p,q,r)$ *dans* $\mathrm{PU}(2,1)$ *si, et seulement si, les mots* $I_3I_2I_1I_2$ *et* $I_1I_2I_3$ *sont tous deux non elliptiques.*

Dans certains cas rares, la représentation de $\Delta(p,q,r;\theta)$ peut rester discrète (mais non injective) avec $I_3I_2I_1I_2$ et $I_1I_2I_3$ elliptiques d'ordres finis. Par exemple, THOMPSON [11] a trouvé une représentation $\Delta(3,3,4;\theta_7)$ où $I_3I_2I_1I_2$ est d'ordre 7 et une représentation $\Delta(3,3,5;\theta_5)$ avec $I_3I_2I_1I_2$ d'ordre 5. Les deux sont des réseaux de $\mathrm{PU}(2,1)$.

SCHWARTZ [12] a démontré sa conjecture lorsque $\min(p,q,r)$ est suffisamment grand. Un premier pas vers le cas général est dû à un résultat de GROSSI [13]. Dans le cas $(p,q,r)=(3,3,n)$, il montre que si $I_3I_2I_1I_2$ n'est pas elliptique, alors $I_1I_2I_3$ ne l'est pas non plus. Une preuve de la conjecture de Schwartz dans le cas $(3,3,n)$ avec $n<\infty$ a été donnée par PARKER, WANG et XIE [14] et dans le cas $(3,3,\infty)$ par PARKER et WILL [15].

THÉORÈME IV.2 ([PWX16],[PW17a]) *Soit* $4\le n\le\infty$. *Soit* $\Delta(3,3,n;\theta)$ *le groupe d'un triangle hyperbolique complexe. Alors* $\Delta(3,3,n;\theta)$ *est une représentation discrète et fidèle de* $\Lambda_2(3,3,n)$ *si, et seulement si,* $I_3I_2I_1I_2$ *n'est pas elliptique.*

Pour déterminer une paramétrisation des groupes $\Delta(p,q,r;\theta)$, commençons par donner un résultat structurel de PRATOUSSEVITCH [16] nous assurant qu'un seul paramètre suffit à tous les décrire, à conjugaison près.

PROPOSITION IV.3 ([Pra05]) *Soit* $3\le p\le q\le r<\infty$ *vérifiant* $\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}+\frac{\pi}{r}<\pi$. *Le groupe d'un triangle hyperbolique complexe*

$$\Delta(p,q,r;\theta)=\left\langle I_1,I_2,I_3 \;\middle|\; \begin{array}{c} I_1^2=I_2^2=I_3^2=e,\\ (I_1I_2)^p=(I_2I_3)^q=(I_3I_1)^r=e\end{array}\right\rangle \tag{5}$$

est univoquement déterminé par un paramètre angulaire θ, *à conjugaison près par un élément de* $\mathrm{PU}(2,1)$. *Le paramètre* θ *ne dépend que de* $\mathrm{tr}(I_iI_jI_kI_j)$ *avec* $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. *De plus,* θ *vérifie*

$$\cos(\theta)<\frac{-1+\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)^2+\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)^2+\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)^2}{2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}} \tag{6}$$

et réciproquement cette condition suffit à déterminer une représentation ayant θ *comme paramètre.*

11. [Tho10] James M. THOMPSON, « Complex hyperbolic triangle groups », 2010.
12. [Sch07] Richard E. SCHWARTZ, *Spherical CR geometry and Dehn surgery*, 2007.
13. [Gro07] Carlos H. GROSSI, « On the type of triangle groups », 2007.
14. [PWX16] John R. PARKER, Jieyan WANG et Baohua XIE, « Complex hyperbolic $(3,3,n)$ triangle groups », 2016.
15. [PW17a] John R. PARKER et Pierre WILL, « A complex hyperbolic Riley slice », 2017.
16. [Pra05] Anna PRATOUSSEVITCH, « Traces in complex hyperbolic triangle groups », 2005.

Maintenant, nous pouvons donner des matrices pour I_1, I_2 et I_3 et vérifier qu'elles vérifient bien toutes les conditions. Nous pourrions aussi considérer un triangle dans le plan hyperbolique complexe et construire à la main les réflexions correspondantes [17]. Définissons :

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2c_{21} & 2c_{31} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2c_{12} & 1 & 2c_{32} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2c_{13} & 2c_{23} & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

avec comme paramètres c_{ij} les coefficients de la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & \cos\frac{\pi}{r}e^{i\theta} \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} \\ \cos\frac{\pi}{r}e^{-i\theta} & \cos\frac{\pi}{q} & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Il s'avère que H est une forme hermitienne préservée par I_1, I_2 et I_3. Comme I_1, I_2 et I_3 doivent être des réflexions de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, H doit être de signature $(2,1)$. C'est le cas dès que son déterminant est négatif puisque sa trace est égale à trois. Ce déterminant est donné par :

$$1 + 2\cos(\theta)\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)^2. \tag{11}$$

Il est négatif si, et seulement si,

$$\cos(\theta) < \frac{-1 + \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)^2}{2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}}, \tag{12}$$

ce qui correspond bien à la condition de Pratoussevitch.

Enfin, calculons les traces des $\mathrm{tr}(I_i I_j I_k I_j)$ avec $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

$$\mathrm{tr}(I_i I_j I_k I_j) = 16|c_{ij}c_{kj}|^2 - 16\,\mathrm{Re}(c_{12}c_{23}c_{31}) + 4|c_{ik}|^2 - 1 \tag{13}$$

Cela illustre bien que la trace est déterminée par θ si (p,q,r) est donné. Dans le cas $(p,q,r) = (3,3,n)$, il s'avère que le choix de (i,j,k) n'importe pas et

$$\mathrm{tr}(I_i I_j I_k I_j) = 4\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - 4\cos\frac{\pi}{n}\cos\theta. \tag{14}$$

Aussi, avec $(p,q,r) = (3,3,n)$ nous avons

$$\cos\theta < \frac{-\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{-1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\cos\frac{\pi}{n}}. \tag{15}$$

17. C'est ce que nous avions fait pour [Ale21b].

Si nous regardons la valeur maximale de la trace de $I_iI_jI_kI_j$ pour $\cos\theta$ minimal et sa valeur minimale pour la valeur maximale de $\cos\theta$, nous obtenons :

$$\operatorname{tr}(I_iI_jI_kI_j) \leq 4\cos\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+1\right), \tag{16}$$

$$\operatorname{tr}(I_iI_jI_kI_j) > 4\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - 4\cos\frac{\pi}{n}\left(\frac{-1+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) = 4\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right) > 0. \tag{17}$$

Ce calcul montre que l'intervalle des valeurs de $\operatorname{tr}(I_iI_jI_kI_j)$ est inclus dans $\mathbf{R}_+$. Par conséquent, le sous-intervalle pour lequel $\Delta(3,3,r;\theta)$ est discret est de la forme $[3,m]$ pour m le maximum. La valeur 3 correspond au cas $\theta=\theta_\infty$ où $I_iI_jI_kI_j$ est unipotent. Cela se produit lorsque :

$$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{n} - \frac{3}{4\cos\frac{\pi}{n}}. \tag{18}$$

Maintenant que nous avons une paramétrisation des groupes des triangles $\Delta(3,3,n;\theta_\infty)$ nous pouvons calculer leurs ensembles limites. Nous proposons des indices visuels pour les discerner. Le lecteur devrait regarder la figure IV.1 (p. 79) qui décrit ces indices et tenter de les repérer dans le census avec les figures G.7 (p. 96) et G.8 (p. 97) de la galerie. Le principe de ces indices consiste à inspecter une partie médiane entre deux pointes. Plus n est grand, plus nous trouvons des pseudo-cercles au milieu : aucun quand $n=4$, un quand $n=5$, deux quand $n=6$ et trois quand $n=7$.

II — PHÉNOMÈNE DE REDONDANCE

Avec les représentations du census de FALBEL, KOSELEFF et ROUILLIER [18], nous avons numériquement calculé leurs ensembles limites. Après inspection visuelle, nous avons gardé les représentations pour lesquelles l'ensemble limite est fractal. Les fractales sont regroupées dans les figures G.7 (p. 96) et G.8 (p. 97) de la galerie. Ces représentations viennent par paires puisque la conjugaison complexe dédouble ces représentations. Parmi les 35 paires de représentations que nous obtenons, 19 sont classifiées par le théorème IV.4 (p. 79) que nous démontrons dans cette section. Quatre paires supplémentaires seront étudiées dans la section suivante.

Remarques Les représentations m004-1 et m004-3 (et leurs conjuguées complexes) du complément du nœud de huit diffèrent d'une symétrie du nœud, comme démontré par DERAUX et FALBEL [19]. Nous n'avons donc qu'à classifier l'une des deux, même s'il est déjà connu que leurs images sont des conjuguées du groupe du triangle hyperbolique complexe $\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$.

Une représentation de m038 a les caractéristique du groupe d'un triangle hyperbolique complexe de type $(3,4,4)$. En effet, m038 possède une telle représentation d'après MA et XIE [20]. Aussi, une représentation de m137 présente les caractéristique du groupe d'un triangle hyperbolique complexe de type $(3,4,5)$.

18. [FKR15] Elisha FALBEL, Pierre-Vincent KOSELEFF et Fabrice ROUILLIER, « Representations of fundamental groups of 3-manifolds into PGL(3, **C**) : exact computations in low complexity », 2015.
19. [DF15] Martin DERAUX et Elisha FALBEL, « Complex hyperbolic geometry of the figure-eight knot », 2015.
20. [MX20] Jiming MA et Baohua XIE, « Three-manifolds at infinity of complex hyperbolic orbifolds », 2020.

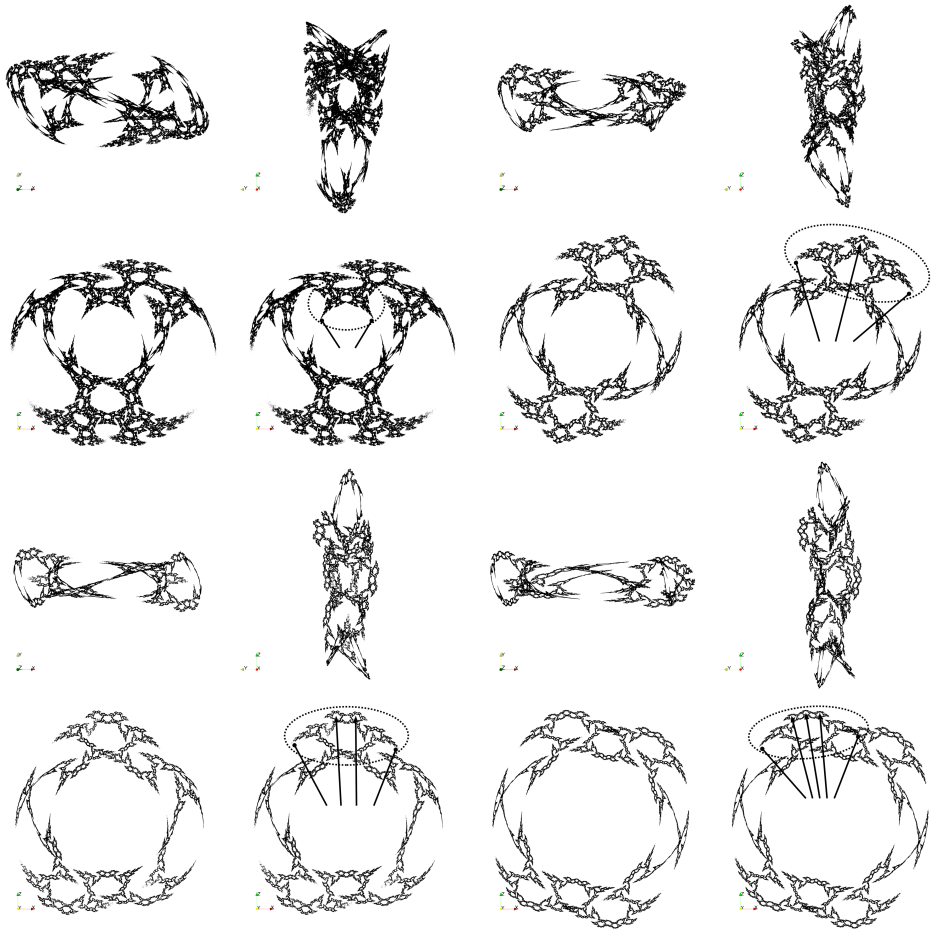

FIGURE IV.1 – Indices visuels des ensembles limites de $\Delta(3,3,n;\theta_\infty)$ pour $n \in \{4,5,6,7\}$.

Notre résultat mathématique est donné par le théorème qui suit. Sa véracité est complètement indépendante des approximations numériques puisque nous donnerons une méthode de preuve qui n'en dépendra pas.

THÉORÈME IV.4 *Dans le tableau qui suit, chaque ligne est composée de variétés — dénommées avec une convention de* `snappy` *— dont il existe une représentation surjective à bord unipotent dans le groupe $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ indiqué dans la première colonne. Les représentations pour les variétés de la deuxième colonne sont les holonomies d'uniformisations. Celles de la troisième colonne ne sont pas des holonomies d'uniformisations.*

Groupe	Variétés uniformisées	Variétés redondantes
$\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$	m004	m022, m029, m034, m053, m081, m117
$\Delta_2(3,3,5;\theta_\infty)$	m009	m015, m035, m142, m146
$\Delta_2(3,3,6;\theta_\infty)$	m023	
$\Delta_2(3,3,7;\theta_\infty)$	m039	m032, m045
$\Delta_2(3,3,8;\theta_\infty)$	s000	m053
$\Delta_2(3,3,\infty;\theta_\infty)$	m129	m203

Remarques Les variétés m039 et s000 n'apparaissent pas dans le census. En effet, elles sont décrites par des triangulations ayant respectivement cinq et six tétraèdres. Néanmoins, le résultat s'applique tout de même et nous construirons leurs représentations à bords unipotents à partir de leurs groupes fondamentaux.

La variété m053 sera traitée différemment des autres membres du census. La description initiale offerte par `snappy` des deux représentations m053-1 et m053-7 sont difficiles à utiliser. Nous avons procédé à un calcul d'une autre description (avec l'aide de la méthode textttrandomize()).

Enfin, remarquons que pour chaque ligne, au plus une seule représentation peut être celle d'une uniformisation. DERAUX [21] a rencontré ce même phénomène avec les variétés m009 et m015 qui apparaissent ici aussi. Nous identifions les uniformisations par un théorème d'ACOSTA [22].

THÉORÈME IV.5 ([Aco19]) *Soit* $4 \leq n \leq \infty$. *La variété à l'infini de* $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}/\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ *est le remplissage de Dehn avec paramètre* $(1, n-3)$ *d'une pointe — l'une ou l'autre — du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.*

Il est possible avec `snappy` de calculer les remplissages de Dehn. Dans notre tableau, c'est m129 la variété du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Pour déterminer les bons remplissages — qui dépendent de la paramétrisation des pointes — il faut choisir la variété 5^2_1 (qui est une autre description de m129), indiquer $(n-3)$ pour le méridien et 1 pour la longitude. Cette procédure donne la sélection des variétés qui sont uniformisées. En effet, les uniformisations CR sphériques données par Acosta — qui sont bien des structures géométriques de la variété à l'infini — fournissent exactement une représentation à valeurs dans le groupe du triangle hyperbolique complexe.

La première uniformisation de m129 a été montrée par SCHWARTZ [23], mais l'uniformisation que nous avons ici — pour laquelle les deux pointes ont une holonomie unipotente — a été déterminée par PARKER et WILL [24].

Nous expliquons maintenant le principe de la preuve du théorème IV.4 (p. 79). Commençons par le résultat suivant, absolument fondamental, sur les sous-groupes à deux générateurs de

21. [Der15] Martin DERAUX, « On spherical CR uniformization of 3-manifolds », 2015.
22. [Aco19] Miguel ACOSTA, « Spherical CR uniformization of Dehn surgeries of the Whitehead link complement », 2019.
23. [Sch01] Richard E. SCHWARTZ, « Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups », 2001.
24. [PW17a] John R. PARKER et Pierre WILL, « A complex hyperbolic Riley slice », 2017.

$\mathrm{PU}(2,1)$. C'est le cas restreint d'un résultat similaire pour $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$. Il a été établi par LAWTON [25] et WILL [26].

PROPOSITION IV.6 ([Law07; Wil09]) *Si Γ est un sous-groupe engendré par deux éléments a et b, alors toute représentation irréductible*

$$\xi\colon \Gamma \to \mathrm{PU}(2,1) \tag{19}$$

est complètement déterminée, à conjugaison près par un élément de $\mathrm{PU}(2,1)$*, par les nombres complexes*

$$(\mathrm{tr}\circ\xi)\left(\left\{a, b, ab, ab^{-1}, [a,b]\right\}\right) \tag{20}$$

et la quantité $\mathrm{tr}(\xi([a,b]))$ *est solution d'une équation quadratique dont les coefficients sont réels et dont le déterminant est négatif ou nul.*

Avec le groupe abstrait

$$\Lambda_2(3,3,n) = \left\langle x, y \;\middle|\; x^3 = y^3 = (xy)^n = e \right\rangle, \tag{21}$$

rappelons que nous avons un isomorphisme $\Lambda_2(3,3,n) \to \Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ donné par $(x,y) \mapsto (I_1 I_2, I_2 I_3)$. Les traces des images de x, y et xy sont prescrites par les ordres elliptiques $(3,3,n)$ et xy^{-1} est choisi unipotent [27]. Par conséquent ces quatre traces sont réelles et déterminées. Ainsi, une conjugaison complexe ne va faire qu'intervertir $[x,y]$ avec la racine conjuguée du polynôme sous-jacent.

COROLLAIRE IV.7 *Soit $\pi_1(M)$ un groupe fondamental engendré par deux éléments a et b. Soit*

$$\xi\colon \pi_1(M) \to \mathrm{PU}(2,1) \tag{22}$$

une représentation,

$$\rho\colon \pi_1(M) \to \Lambda_2(3,3,n) \tag{23}$$

un morphisme surjectif et

$$\gamma\colon \pi_1(M) \to \Delta_2(3,3,n;\theta_\infty) \tag{24}$$

la composition de ce morphisme avec $\Lambda_2(3,3,n) \to \Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$.

Soit $w_x, w_y, w_{xy}, w_{xy^{-1}} \in \pi_1(M)$ qui vérifient $\rho(w_x) = x, \rho(w_y) = y$, $w_{xy} = w_x w_y$ et $w_{xy^{-1}} = w_x w_y^{-1}$. Faisons les hypothèses suivantes.

(1) Les traces $(\mathrm{tr}\circ\xi)$ *et* $(\mathrm{tr}\circ\gamma)$ *sont identiques sur les mots $\{w_x, w_y, w_{xy}, w_{xy^{-1}}\}$.*

(2) Il existe w_a et w_b dans le sous-groupe $\langle w_x, w_y\rangle \subset \pi_1(M)$ tels que $\xi(w_a) = \xi(a)$, $\xi(w_b) = \xi(b)$, $\gamma(w_a) = \gamma(a)$ et $\gamma(w_b) = \gamma(b)$.

Alors γ et ξ sont égales à conjugaison par un élément de $\mathrm{PU}(2,1)$ *et à conjugaison complexe près.*

PREUVE Avec les notations, la première hypothèse montre que ξ et γ sont égales — aux conjugaisons près — sur le sous-groupe $\langle w_x, w_y\rangle \subset \pi_1(M)$. Alors, si égalité, la deuxième hypothèse montre que $\xi(a) = \xi(w_a) = \gamma(w_a) = \gamma(a)$ et $\xi(b) = \xi(w_b) = \gamma(w_b) = \gamma(b)$. Par conséquent ξ et γ sont égales sur tout le groupe $\pi_1(M)$. ▨

25. [Law07] Sean LAWTON, « Generators, relations and symmetries in pairs of 3×3 unimodular matrices », 2007.
26. [Wil09] Pierre WILL, « Traces, cross-ratios and 2-generator subgroups of $\mathrm{SU}(2,1)$ », 2009.
27. Si une transformation est elliptique et d'ordre k alors sa trace est égale à $4\cos(\frac{\pi}{k})^2 - 1$.

La méthode C'est à l'aide de ce corollaire que nous allons identifier les représentations que nous suspectons être à valeurs dans le groupe d'un triangle.

(1) Nous commençons par décrire les relations du $\pi_1(M)$ comme conséquences de plusieurs relations plus simples et de type triangulaire. Ces relations devront être vérifiées par la représentation du census ciblée. Par exemple, la relation $a^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba$ est conséquence de a^4, b^3 et $(a^{-1}b)^3$. Cette étape est la plus difficile car elle n'est pas calculable mécaniquement. Dans le premier tableau, nous inscrivons ces décompositions en indiquant l'identifiant de la représentation ciblée afin de pouvoir vérifier — avec le code en annexe — qu'elle les respecte bien.

(2) Nous construisons un morphisme surjectif ρ et déterminons les valeurs des traces des mots $\{w_x, w_y, w_{xy}, w_{xy^{-1}}\}$ pour montrer que le morphisme en est bien un. Cette étape est décrite dans le deuxième tableau. Elle est indépendante des calculs numériques puisqu'elle ne demande qu'une vérification manuelle sur le groupe fondamental.

(3) Nous déterminons des mots w_a et w_b et vérifions qu'ils vérifient les égalités requises pour ξ et γ. Ces mots sont aussi décrits dans le deuxième tableau.

(4) Nous vérifions que les traces des quatre mots coïncident avec la première étape par des calculs exacts. Par exemple, en vérifiant la trace du mot $w_{xy^{-1}}$ avec le code en annexe.

Ces quatre étapes démontrent l'identification requise. Néanmoins, nous ajoutons un tableau pour décrire l'holonomie du bord. La raison est que nous pourrions nous contenter de la deuxième étape et de ce dernier tableau pour montrer — sans calculs numériques — que le morphisme construit est bien à bord unipotent.

PREUVE (Théorème IV.4 (p. 79)) Soit M une variété du tableau et soit $\Delta_2(3,3,n;\theta)$ le groupe de sa ligne. Par la deuxième étape, nous construisons un morphisme surjectif $\rho\colon \pi_1(M) \to \Lambda_2(3,3,n)$. Ce morphisme fournit une représentation ξ par la composition $\pi_1(M) \to \Lambda_2(3,3,n) \to \Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$. Enfin, le dernier tableau montre que ξ est à bord unipotent. ▨

Notations Nous gardons les notations du corollaire et notons (A,B,X,Y) plutôt que $(a^{-1},b^{-1},x^{-1},y^{-1})$.

Les variétés m039, s000 et m053 Pour ces variétés, nous construisons uniquement les morphismes sans les identifier avec des représentations du census. Pour m039 et s000 cela vient du fait qu'elles ne sont pas présentes dans le census. Pour m053 la description donnée par le census est trop compliquée pour être utilisée directement. Néanmoins, avec une autre description nous construisons les représentations et les indices visuels établis permettent de se convaincre que nous avons effectivement identifiés les représentations m053-1 et m053-7.

Exemple complet Prenons m004-1 et appliquons la méthode pour l'illustrer. La représentation m004-1 a comme identifiant $[0,0]$, ce qui sert pour les vérifications formelles. Le π_1 de m004 — le complément du nœud de huit — a deux générateurs a, b et une relation : a^2bAB^2Aba. Cette relation, d'après le premier tableau, est une conséquence des trois relations plus simples a^4, b^3 et $(Ab)^3$. Cela se vérifie effectivement. Le deuxième tableau permet de construire le morphisme. Nous envoyons a sur xy et b sur y. Des mots antécédents sont

	id	Relation du π_1	Relations triangulaires
m004-1	[0,0]	a^2bAB^2Aba	a^4, b^3, $(Ab)^3$
m022-1	[0,0]	ab^5abA^2b	a^3, b^4, $(ab)^3$
m029-1	[0,0]	$aBab^3A^2b^3$	a^3, b^4, $(aB)^3$
m034-1	[0,0]	$a^3b^2ABAb^2$	a^4, b^3, $(AB)^3$
m081-1	[0,0]	ab^3aBa^4B	a^3, b^4, $(aB)^3$
m117-1	[0,0]	$a^2b^2a^2b^2ABAb^2$	a^3, b^3 $(AB)^4$

	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$	w_a	w_b
m004	xy	y	aB	b	a	ab	w_{xy}	w_y
m022	y	$(xy)^{-1}$	BA	a	B	BA^2	w_y	w_{xy}^{-1}
m029	y	xy	bA	a	b	ba	w_y	w_{xy}
m034	$(xy)^{-1}$	x	b	BA	A	bab	w_{xy}^{-1}	w_x
m081	x^{-1}	$(xy)^{-1}$	A	aB	B	Ba^2	w_x^{-1}	w_{xy}^{-1}
m117	x^{-1}	y^{-1}	A	B	AB	Ab	w_x^{-1}	w_y^{-1}

	Holonomie	du bord
m004	ab	$aBAbABab \equiv (ab)^3$
m022	Ba	$A^2babA \equiv Ba$
m029	ab^2	$bA^3b^3 \equiv e$
m034	$b^2a^2 \equiv BA^2$	$A^3B^3A \equiv e$
m081	$b^2a \equiv B^2a$	$Ba^3Ba \equiv B^2a$
m117	bA	$BA^3BA \equiv bA$

TABLE IV.1 – Le groupe $\Lambda_2(3,3,4)$ avec m004, m022, m029, m034, m081 et m117.

donnés par $w_x = aB$, $w_y = b$, $w_{xy} = a$ et $w_{xy^{-1}} = ab$. Ils engendrent bien tout le groupe puisque $w_a = w_{xy}$ et $w_b = w_y$ permettent de récupérer a et b. Nous avons donc maintenant construit un morphisme. En effet, les relations a^4, b^3 et $(Ab)^3$ sont vérifiées : le mot w_x est d'ordre 3, le mot w_y est d'ordre 3 et le mot w_{xy} est d'ordre 4. Ce morphisme se factorise donc à travers $\Lambda_2(3,3,4)$. Il reste à vérifier que le bord est unipotent. Pour cela, nous trouvons que l'holonomie du bord est donnée par les courbes ab et $aBAbABab$. Ce dernier mot, par les relations triangulaires du début, est équivalent à $(ab)^3$. Donc l'holonomie du bord est monogène et du type de ab qui est du type de $w_{xy^{-1}}$ choisi effectivement unipotent dans $\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$.

	id	Relation du π_1	Relations triangulaires
m009-1	[0,1]	a^2bABa^2BAb	a^5 , $(a^2B)^3$, $(a^2b)^3$
m015-2	[0,1]	$ab^2A^2b^2aB^3$	a^3, b^5, $(abb)^3$
m035-5	[0,3]	$ab^3A^2b^3aB^2$	a^3, b^5, $(aBB)^3$
m142-1	[0,0]	$ab^2aBab^2aBa^4B$	a^3, b^3, $(aB)^5$
m146-3	[0,3]	$a^2b^2a^3b^2a^2BAB$	a^3, b^5, $(AB)^3$

	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$	w_a	w_b
m009	xy	$(YX)^2Y$	a^3b	BA^2	a	a^3ba^2b	w_{xy}	$w_{xy}^{-2}w_y^{-1}$
m015	Y	$(YX)^2$	b^2a	A	b^2	b^2A	w_y^{-1}	w_{xy}^{-2}
m035	y	$(YX)^2$	b^2A	a	b^2	b^2a	w_y	w_{xy}^{-2}
m142	YXy	y	bAB	b	bA	bAB^2	$w_{xy}^{-1}w_y$	w_y
m146	y	YX	BA	a	B	BA^2	w_y	w_{xy}^{-1}

	Holonomie	du bord
m009	ab	$ABa^3BAb \equiv (ab)^2$
m015	bA	$ab^2A^3b^2 \equiv (bA)^{-1}$
m035	ab	$ab^3A^3b^3 \equiv ab$
m142	BA	$bA^3bA \equiv BA$
m146	$ba^2 \equiv bA$	$BABAB^2 \equiv aB$

TABLE IV.2 – Le groupe $\Lambda_2(3,3,5)$ avec m009, m015, m035, m142 et m146.

	id	Relation du π_1	Relations triangulaires
m023-1	[0,0]	$aBAb^2ABab^3$	b^6, $(Abb)^3$, $(aB^3)^3$

	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$	w_a	w_b
m023	$(YX)^2Y^2X$	xy	b^3ab	BAB^2	b	b^3ab^3ab	$w_{xy}^{-3}w_xw_{xy}^{-1}$	w_{xy}

	Holonomie	du bord
m023	bab	$b^2aBABab^2 \equiv (BAB)^2$

TABLE IV.3 – Le groupe $\Lambda_2(3,3,6)$ avec m023.

	id	Relation du π_1	Relations triangulaires
m032-7	[0,2]	$a^2B^2Ab^5AB^2$	a^3, b^7, $(AB^2)^3$
m045-8	[0,4]	$a^3b^2a^3BA^4B$	a^7, b^3, $(a^3B)^3$

	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$	w_a	w_b
m032	x	$(xy)^3$	a	AB^2	B^2	ab^2a	w_x	w_{xy}^3
m045	$(xy)^2$	X	B	bA^3	A^3	Ba^3B	w_{xy}^2	w_x^{-1}

	Holonomie	du bord
m032	B^3a	$b^2A^3b^2a \equiv B^3a$
m045	AB	$bA^3B^3A^3 \equiv ba$

TABLE IV.4 – Le groupe $\Lambda_2(3,3,7)$ avec m032 et m045.

	id	Relation du π_1	Relations triangulaires
m129-1	[0,0]	$a^3B^2abA^3b^2AB$	a^3, b^3
m203-1	[0,0]	$a^3b^2a^2BA^3B^2A^2b$	a^3, b^3

	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$	w_a	w_b
m129	xyx^{-1}	x	b	Bab	ab	Ab	$w_{xy}w_x^{-1}$	w_x
m203	xyx^{-1}	x	b	Bab	ab	Ab	$w_{xy}w_x^{-1}$	w_x

	Holonomie	du bord
m129	$A^2b \equiv ab$	$A^3b^2A \equiv BA$
	Ab	$bA^3ba \equiv Ba$
m203	$a^2b \equiv Ab$	$B^2A^3B \equiv e$
	ab	$BA^3B^2A^3 \equiv e$

TABLE IV.5 – Le groupe $\Lambda_2(3,3,\infty)$ avec m129 et m203.

	Relation du π_1	Relations triangulaires
m039	a^6BAb^2AB	a^7, b^3, $(AB)^3$
m053	$a^3b^2a^3BA^5B$	a^4, b^3, $(AB)^3$
		a^8, b^3, $(a^3B)^3$
s000	a^7BAb^2AB	a^8, b^3, $(AB)^3$

	Triangle	a	b	w_x	w_y	w_{xy}	$w_{xy^{-1}}$
m039	$\Lambda_2(3,3,7)$	YX	y	AB	b	A	bA
m053	$\Lambda_2(3,3,4)$	xy	X	B	ba	a	BAB
m053	$\Lambda_2(3,3,8)$	$(xy)^3$	x	b	Ba^3	a^3	bA^3b
s000	$\Lambda_2(3,3,8)$	YX	y	AB	b	A	Ab

	Holonomie	du bord
m039	$A^5b \equiv a^2b$	$aB^3ab \equiv a^2b$
m053	BA^3	$B^2A^3bA^3B$
pour $\Lambda_2(3,3,4)$	$\equiv Ba$	$\equiv Ab$
pour $\Lambda_2(3,3,8)$	$\equiv BA^3$	$\equiv a^3b$
s000	bA	$BabaB^2 \equiv bA$

TABLE IV.6 – Les variétés m039, s000 et m053

III — QUELQUES EXEMPLES PLUS DIVERS

Pour étudier quelques représentations supplémentaires, observons le fait suivant. Disons que M est une variété hyperbolique avec une seule pointe. Si une représentation $\pi_1(M) \to \mathrm{PU}(2,1)$ a comme bord — l'image du groupe fondamental $\mathbf{Z}^2$ de la pointe — un sous-groupe parabolique monogène alors il doit exister une relation entre les deux générateurs de son bord. Cette relation peut être utilisée pour effectuer un remplissage de Dehn. Une variété sur laquelle un remplissage de Dehn a été effectué aura une présentation différente de son groupe fondamental. Souvent, cela peut permettre de voir plus rapidement si le groupe d'un triangle peut être suggéré afin de rentrer dans le cadre du théorème IV.4 (p. 79).

III.1 UNE CONTRAINTE HOMOLOGIQUE

L'existence d'un morphisme surjectif — comme avec le théorème IV.4 (p. 79) — est soumise à une contrainte évidente.

LEMME IV.8 *S'il existe un morphisme surjectif*

$$\rho\colon \pi_1(M) \to \Lambda_2(p,q,r) \tag{25}$$

alors il existe un morphisme surjectif entre les abélianisés

$$\widetilde{\rho}\colon H_1(M;\mathbf{Z}) \to \Lambda_2(p,q,r)^{\mathrm{ab}}. \tag{26}$$

Maintenant, parmi les représentations qui ne sont pas dans le théorème IV.4 (p. 79), trois ont pourtant leurs ensembles limites qui ressemblent à celui d'un $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$. Voir les figures IV.2 et IV.3 (p. 87). Les représentations m035-1 et m130-1 ont leurs ensembles limites qui ressemblent à celui de $\Delta_2(3,3,\infty;\theta_\infty)$. La représentation m045-1 a son ensemble limite qui ressemble à celui de $\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$. Il est possible de vérifier cette ressemblance avec l'indice visuel (figure IV.1 (p. 79)) et aussi avec le dessin des ensembles limites des groupes de triangles (figures G.9 (p. 98) et G.10 (p. 99)).

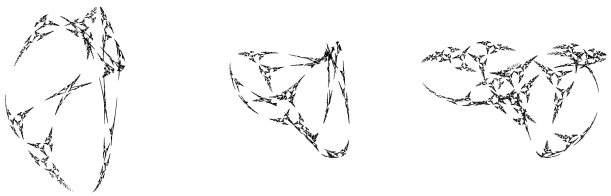

FIGURE IV.2 – L'ensemble limite de m035-1.

PROPOSITION IV.9 *Les représentations à bords unipotents m045-1, m035-1 et m130-1 ne vérifient pas le théorème IV.4 (p. 79). C'est-à-dire que ces représentations ne sont pas des morphismes surjectifs de la forme* $\rho\colon \pi_1(M) \to \Lambda_2(3,3,n)$.

FIGURE IV.3 – L'ensemble limite de m045-1.

PREUVE Nous utilisons le lemme précédent. L'abélianisé de $\Lambda_2(3,3,4)$ est $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et celui de $\Lambda_2(3,3,\infty) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

La représentation m045-1 (`id` $[0,0]$) est bien à bord unipotent monogène, la variété m045 n'ayant qu'une seule pointe. Dans les termes de `snappy`, la relation entre les deux générateurs du groupe de la pointe correspond au remplissage de Dehn m045$(5,1)$. Cela peut être vérifié avec le code en annexe. Par ailleurs, avec ce remplissage, `snappy` montre que $H_1(\mathrm{m045}(5,1)) = \mathbf{Z}/14\mathbf{Z}$. Il advient qu'il ne peut exister aucun morphisme surjectif entre $\mathbf{Z}/14\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Par conséquent, il n'existe pas de morphisme surjectif $\rho\colon \mathrm{m045}(5,1) \to \Lambda_2(3,3,4)$. Puisque le remplissage correspond à la relation donnée par m045-1, cela montre l'énoncé pour cette représentation.

Par la même procédure, nous pouvons déterminer que m035-1 (`id` $[0,0]$) et m130-1 (`id` $[0,1]$) se factorisent par les remplissages de Dehn respectifs m035$(3,-1)$ et m130$(2,-1)$. Les homologies sont alors $H_1(\mathrm{m035}(3,-1)) = \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ et $H_1(\mathrm{m130}(2,-1)) = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ ce qui contredit la possibilité d'un morphisme surjectif à valeurs dans $\Lambda_2(3,3,\infty)$. ▩

III.2 GROUPE D'UN TRIANGLE LAGRANGIEN

La proposition IV.11 (p. 88) montrera qu'il existe au moins une représentation à bord unipotent

$$\xi\colon \pi_1(M) \to \Lambda_2(p,q,r) \to \mathrm{PU}(2,1), \tag{27}$$

surjectif sur $\Lambda_2(p,q,r)$ mais qui n'est factorisé par aucun des groupes de triangles hyperboliques complexes

$$\pi_1(M) \to \Lambda_2(p,q,r) \to \Delta_2(p,q,r;\theta) \subset \mathrm{PU}(2,1). \tag{28}$$

LEMME IV.10 *Pour tout $4 \le n < \infty$, soit $\eta\colon \Lambda_2(3,3,n) \to \mathrm{PU}(2,1)$ une représentation telle que $\eta([x,y])$ est unipotent. Alors $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1}))$ n'est jamais un nombre réel. Par conséquent, $\Lambda_2(3,3,n) \to \mathrm{PU}(2,1)$ ne se factorise par aucun des groupes de triangles hyperboliques complexes $\Delta_2(3,3,n;\theta)$.*

PREUVE La preuve repose sur la paramétrisation donnée par GUILLOUX et WILL [28]. Les calculs formels en question sont composés de trop de termes pour pouvoir être réécris ici, mais ils sont accessibles à travers leur article.

28. [GW19] Antonin GUILLOUX et Pierre WILL, « On SL(3, **C**)-representations of the Whitehead link group », 2019.

Par la proposition IV.6 (p. 81), le discriminant Δ de l'équation quadratique où $\mathrm{tr}(\eta([x,y]))$ est solution est toujours négatif. Puisque nous cherchons $\mathrm{tr}(\eta([x,y])) = 3$, nous avons nécessairement $\Delta = 0$. L'équation $\Delta = 0$ peut être résolue par des calculs exacts et ne dépend que de la valeur de $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1}))$ puisque $\mathrm{tr}(\eta(x)), \mathrm{tr}(\eta(y))$ et $\mathrm{tr}(\eta(xy))$ sont déterminés par leur ordre elliptique.

La résolution de $\Delta = 0$ avec variable libre $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1}))$ permet de calculer $\mathrm{tr}(\eta([x,y]))$ explicitement et de résoudre l'équation $\mathrm{tr}(\eta([x,y])) = 3$ en fonction de $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1}))$. C'est encore une équation quadratique. Les deux solutions sont conjuguées et nous ne prenons que celle dont la partie imaginaire est positive. Les approximations numériques montrent que si $n < \infty$, alors la partie imaginaire de $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1}))$ est toujours non-nulle. Par exemple, lorsque $n = 4$, nous avons $\mathrm{tr}(\eta(xy^{-1})) \simeq 2.820 + \boldsymbol{i} \cdot 0.222$. ▨

La représentation m023-7 (`id` $[0,4]$) du census a un ensemble limite très différent des groupes de triangles hyperboliques complexes de type $(3,3,n)$. Voir figure IV.4. L'holonomie du bord est monogène et par conséquent, m023-7 se factorise par un remplissage de Dehn, à savoir $\mathrm{m023}(2,-1)$.

FIGURE IV.4 – L'ensemble limite de m023-7.

PROPOSITION IV.11 *Il existe un morphisme surjectif*

$$\rho\colon \pi_1(\mathrm{m023}) \to \Lambda_2(3,3,4), \tag{29}$$

et une composition $\pi_1(\mathrm{m023}) \to \Lambda_2(3,3,4) \to \mathrm{PU}(2,1)$ *à bord unipotent mais qui n'est induite par aucune représentation* $\Lambda_2(3,3,4) \to \Delta_2(3,3,4;\theta)$.

PREUVE L'une des présentations du groupe $\pi_1(\mathrm{m023}(2,-1))$ donnée par `snappy` (en utilisant aussi la méthode `randomize()`) est

$$\pi_1(\mathrm{m023}(2,-1)) = \{a,b \mid a^4b^3 = aBab^2ab^2 = e\} \tag{30}$$

avec comme courbes périphériques $aBAb$ et $aBAbaBAb$. Définissons maintenant

$$\rho(a) = xy,\ \rho(b) = x \tag{31}$$

alors nous pouvons vérifier que les relations du groupe fondamental sont vérifiées et que $(aBAb)^2 = aBAbaBAb$. L'holonomie du bord de cette représentation est ainsi prescrite par l'image de $aBAb$. Ce mot a pour image $xyXYXx = xyXY = [x,y]$. Nous concluons donc par le lemme précédent. ▨

Avec les figures de la galerie G.12 (p. 101), G.14 (p. 103) et G.16 (p. 105) nous pouvons effectivement reconnaître l'ensemble limite de m023-7.

Désignons par

$$\rho\colon \pi_1(\mathrm{m023}) \to \Lambda_2(3,3,4) \tag{32}$$

le morphisme surjectif de la proposition. Désignons par

$$\xi\colon \pi_1(\mathrm{m023}) \to \mathrm{PU}(2,1) \tag{33}$$

sa composition avec $\eta\colon \Lambda_2(3,3,4) \to \mathrm{PU}(2,1)$ qui envoie $[x,y]$ sur une transformation unipotente. Une conséquence de $\mathrm{tr}(\eta([x,y])) = 3$ est que $\xi(\pi_1(\mathrm{m023})) = \langle \eta(x), \eta(y)\rangle$ est $\mathbf{R}$-*décomposable* : ce groupe est engendré par trois réflexions *anti-holomorphes*. Cela provient du résultat suivant de PAUPERT et WILL [29].

THÉORÈME IV.12 ([PW17b]) *Soient $A, B \in \mathrm{PU}(2,1)$ deux isométries qui ne fixent pas un même dans $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}}$. Alors la paire A, B est $\mathbf{R}$-décomposable si, et seulement si, le commutateur $[A,B]$ a un point fixe dans $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}}$ dont la valeur propre associée est réelle et positive.*

Puisque η est engendré par trois réflexions anti-holomorphes, nous sommes en présence du groupe d'un triangle *lagrangien* en suivant la dénomination de FALBEL et KOSELEFF [30] et de WILL [31]. Les trois réflexions préservent un plan réel dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, aussi appelé *plan lagrangien* en géométrie hyperbolique complexe.

Nous proposons dans la galerie une déformation de $\Lambda_2(3,3,4) \to \mathrm{PU}(2,1)$ depuis sa représentation par le groupe du triangle hyperbolique complexe $\Delta_2(3,3,4;\theta_\infty)$ jusqu'à ce groupe du triangle lagrangien. Voir figures G.17 (p. 106) et G.18 (p. 107).

IV — ANNEXE

```
import snappy
import numpy

s = 'm009'
i,j = 0,1 # "id" in the table

M = snappy.Manifold(s)
G = M.fundamental_group()
P = M.ptolemy_variety(3,'all').retrieve_solutions(prefer_rur=True)
S = [[component
      for component in per_obstruction
      if component.dimension == 0]
     for per_obstruction in P]
K = S[i][j]

def f(x): # evaluates words
    mat_x = K.evaluate_word(x,G)
    return [[z.lift() for z in y] for y in mat_x]

print(f('aaabaab'))
```

29. [PW17b] Julien PAUPERT et Pierre WILL, « Real reflections, commutators, and cross-ratios in complex hyperbolic space », 2017.

30. [FK00] Elisha FALBEL et Pierre-Vincent KOSELEFF, « Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry », 2000.

31. [Wil07] Pierre WILL, « The punctured torus and Lagrangian triangle groups in PU(2, 1) », 2007.

FIN

Galerie des images des expérimentations

Nous proposons ici des images de nos expérimentations. Le lecteur intéressé pourra explorer notre site [32] et le code libre [33].

32. [Ale20b] R. V. Alexandre, *https://rphalexandre.fr/ensembles-limites/*, 2020.
33. [Ale20a] R. V. Alexandre, *https://github.com/R-Alexandre/CRLimitSets*, 2020.

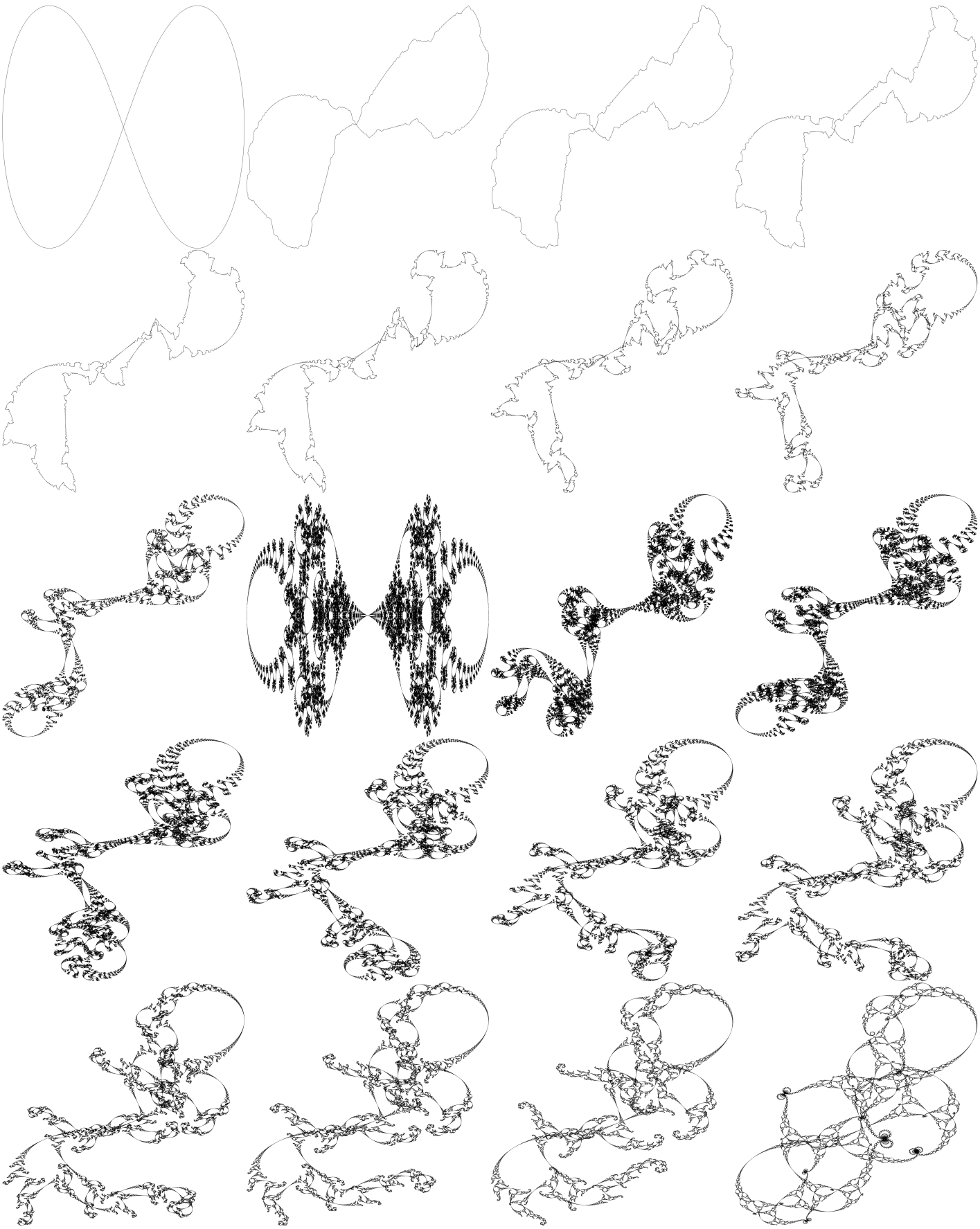

FIGURE G.5 – Une déformation du triangle $\Lambda_2(3,3,\infty)$ dans le plan de la projection de Siegel.

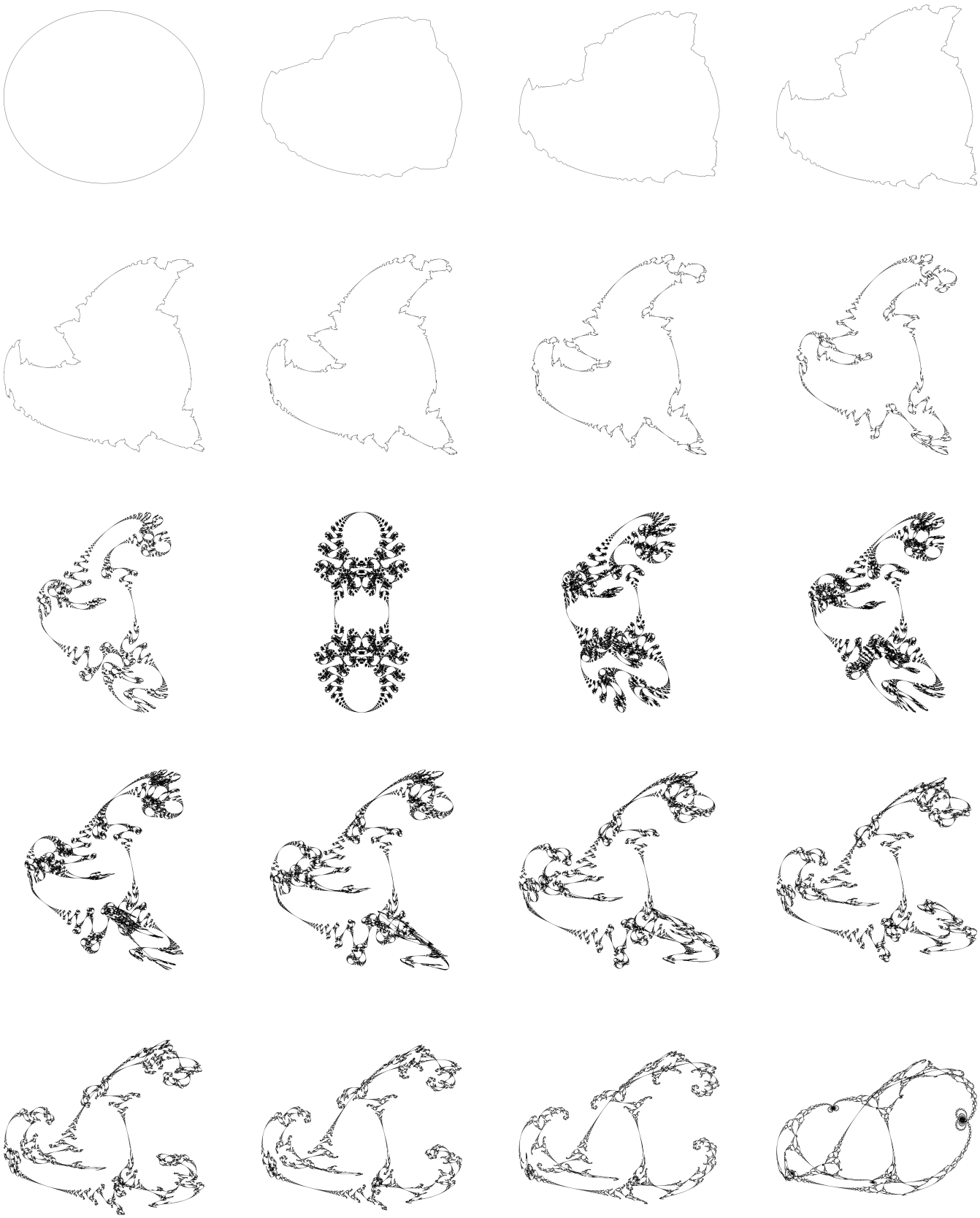

FIGURE G.6 – Une déformation du triangle $\Lambda_2(3,3,\infty)$ dans le plan (xy).

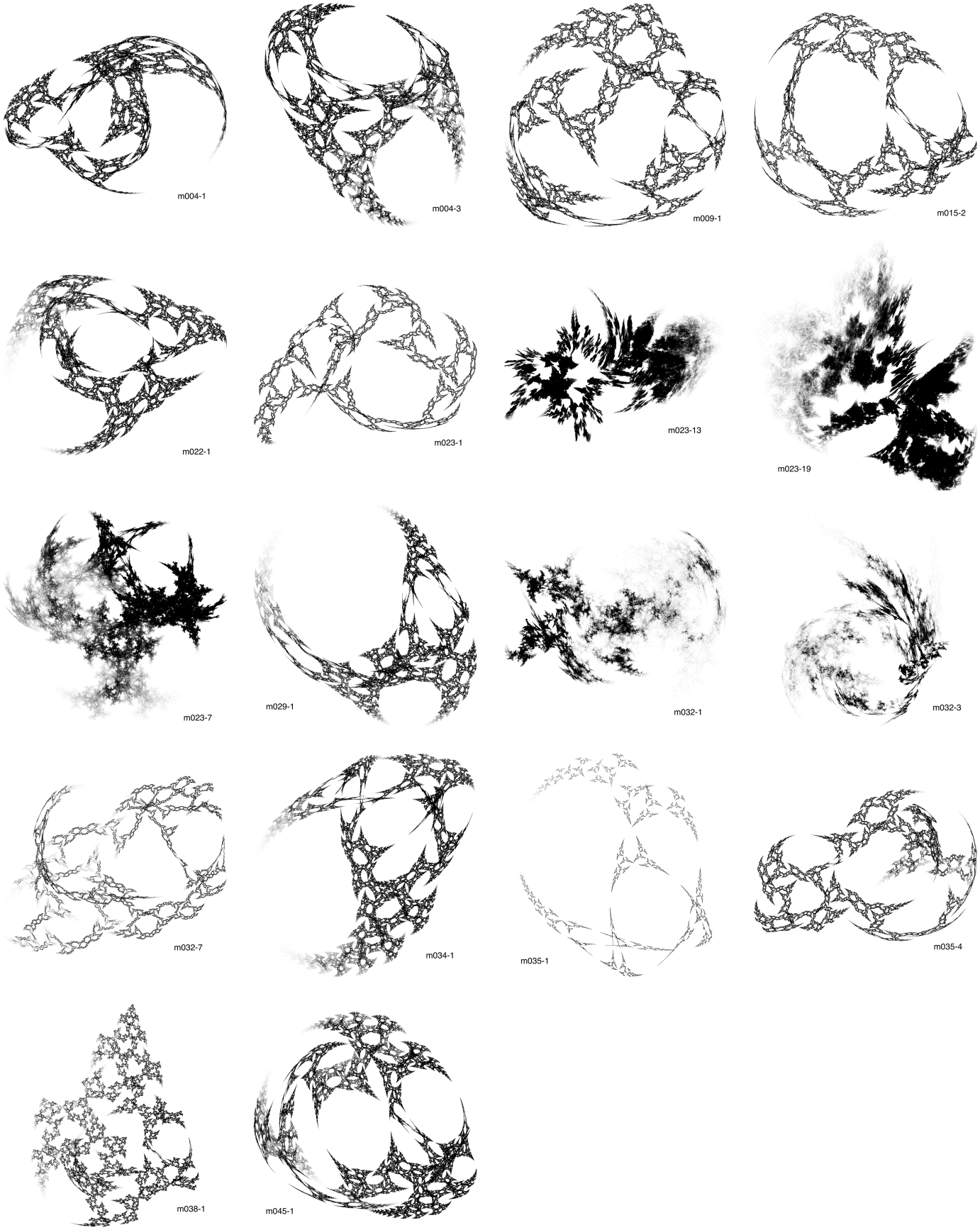

FIGURE G.7 – Les fractales du census unipotent.

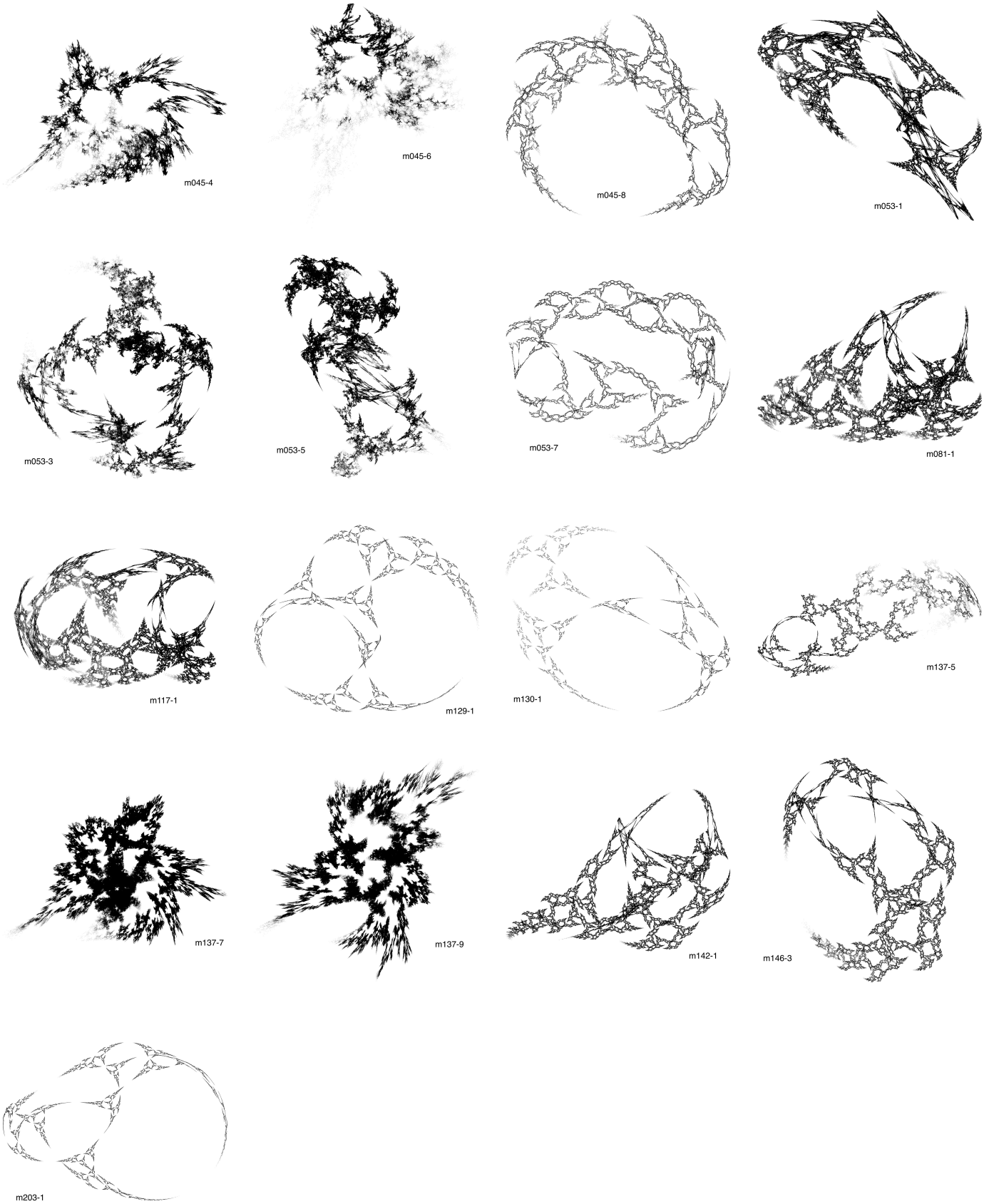

FIGURE G.8 – Les fractales du census unipotent.

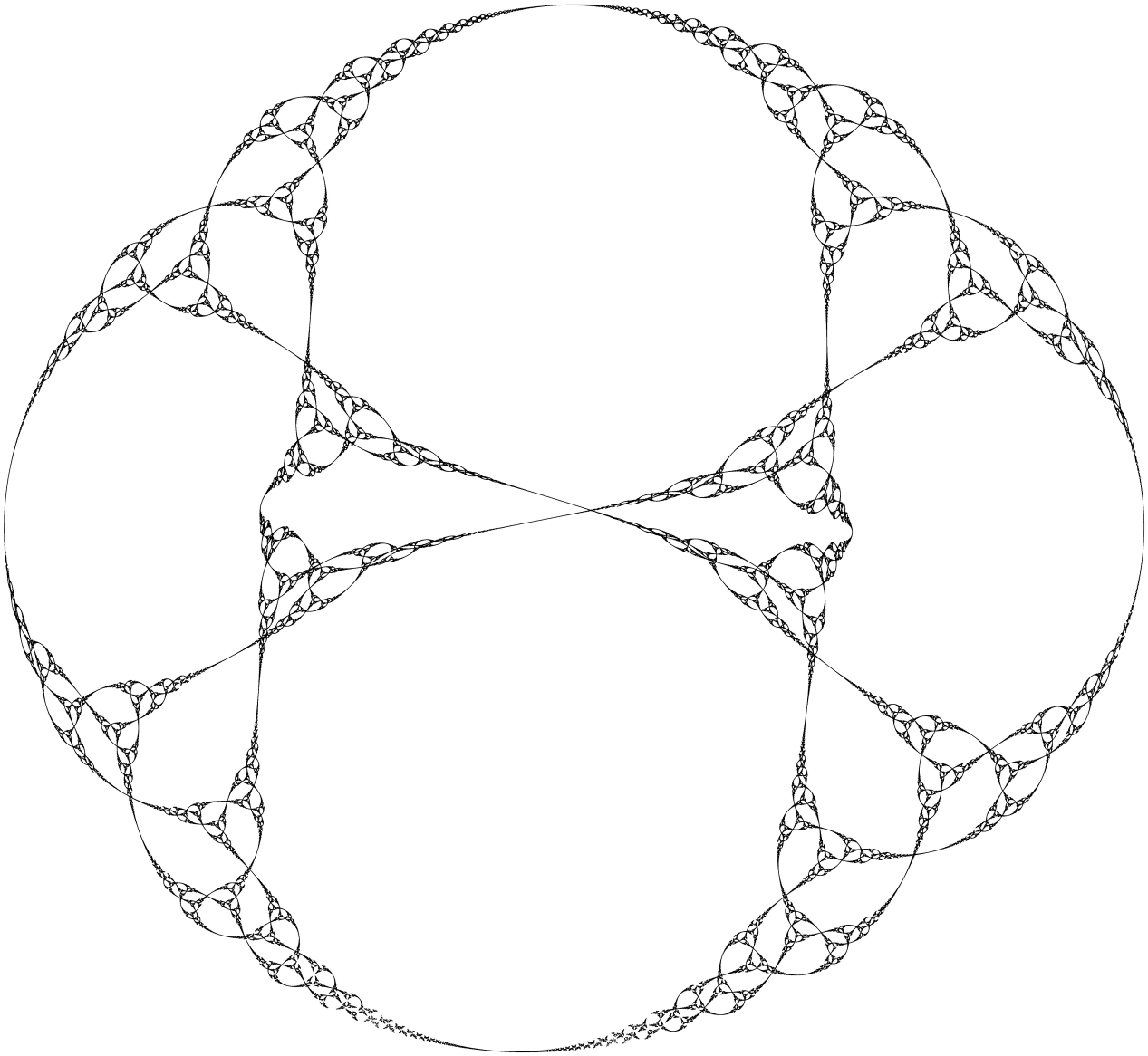

FIGURE G.9 – Triangles hyperboliques unipotents $(3,3,\infty)$ dans le plan (xy).

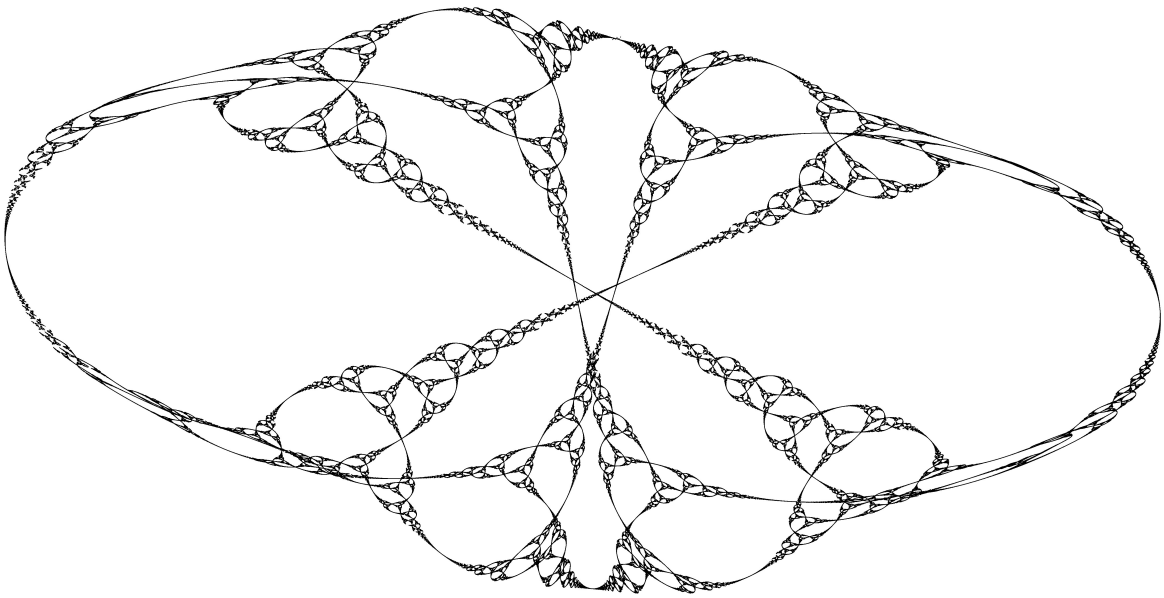

FIGURE G.10 – Triangles hyperboliques unipotents $(3,3,\infty)$ dans le plan (yz).

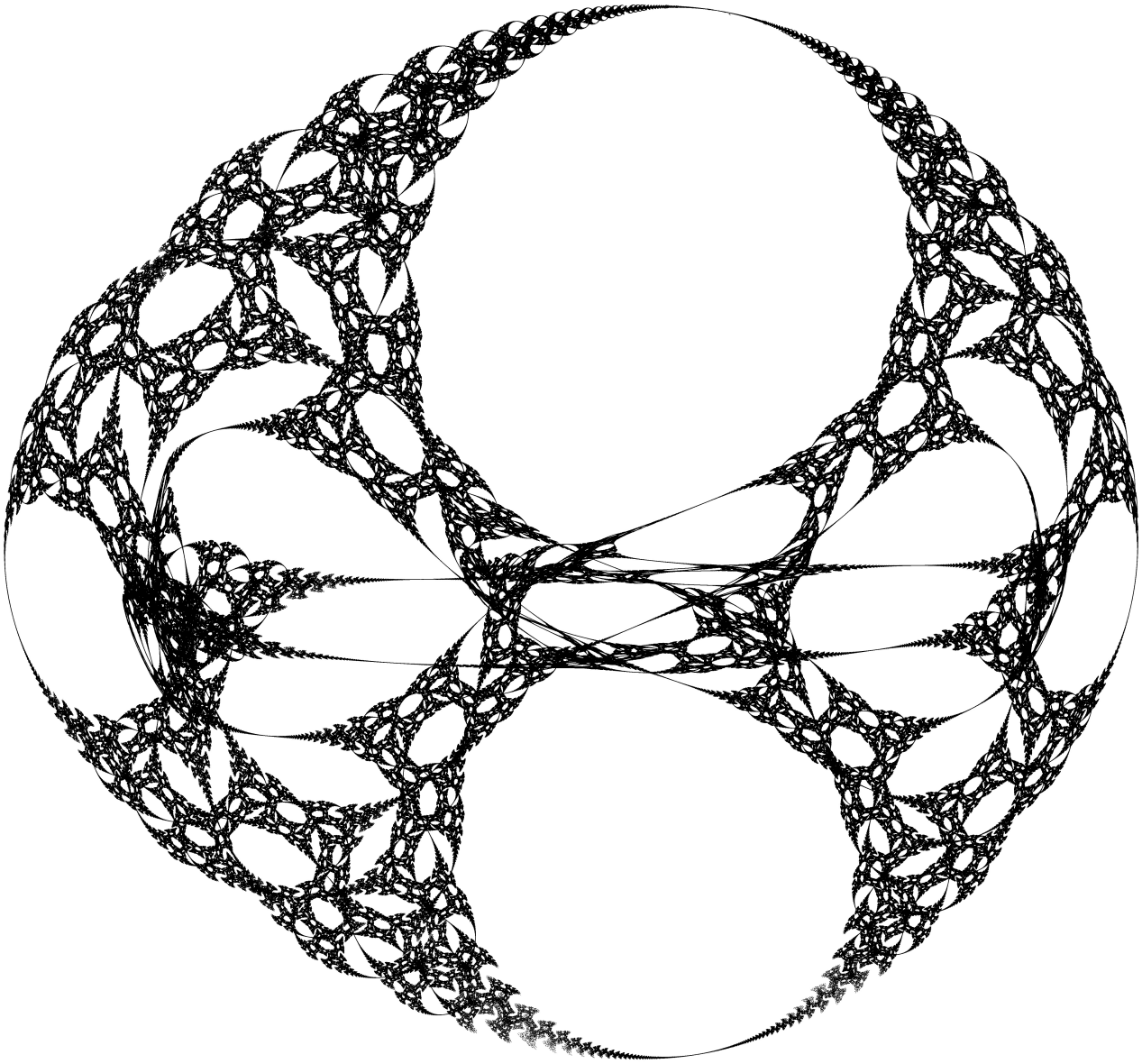

FIGURE G.11 – Triangle hyperbolique unipotent $(3,3,4)$ dans le plan (xy).

FIGURE G.12 – Triangle lagrangien parabolique $(3,3,4)$ dans le plan (xy).

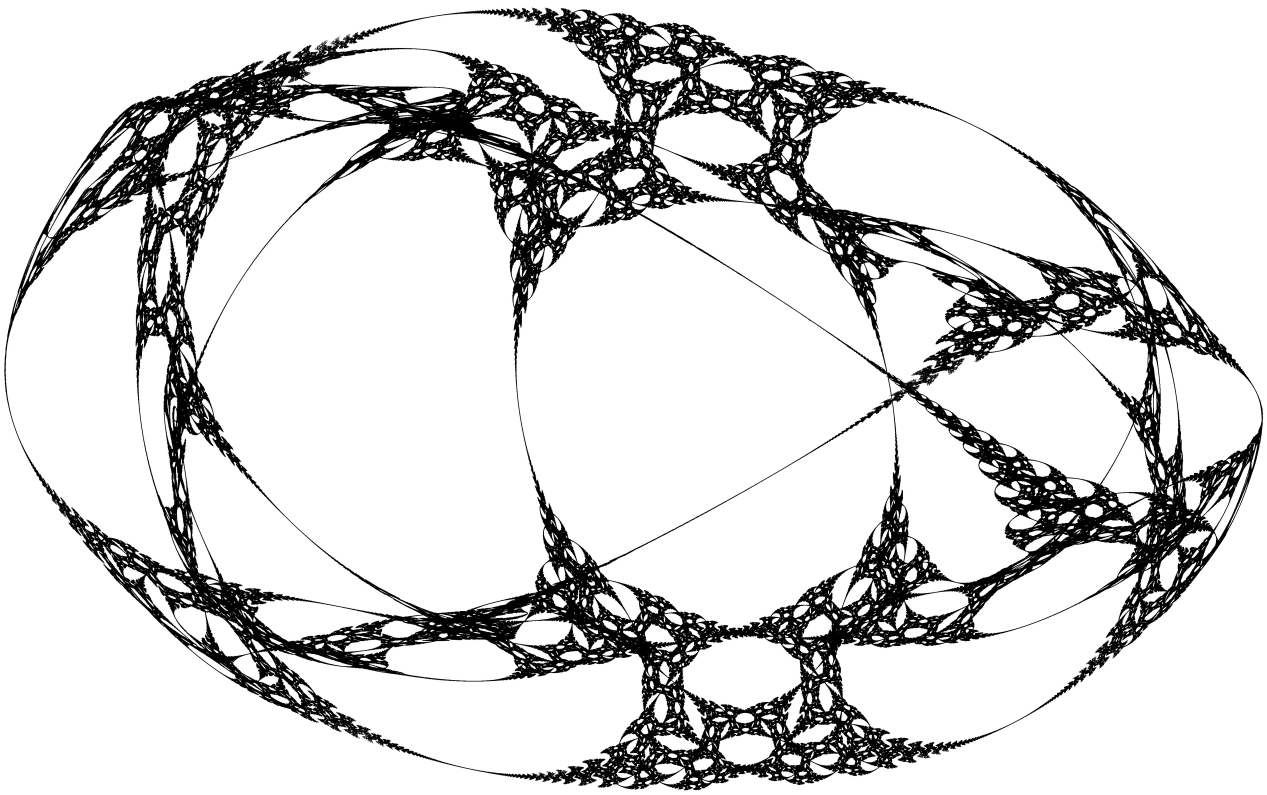

FIGURE G.13 – Triangle hyperbolique unipotent $(3,3,4)$ dans le plan (xz).

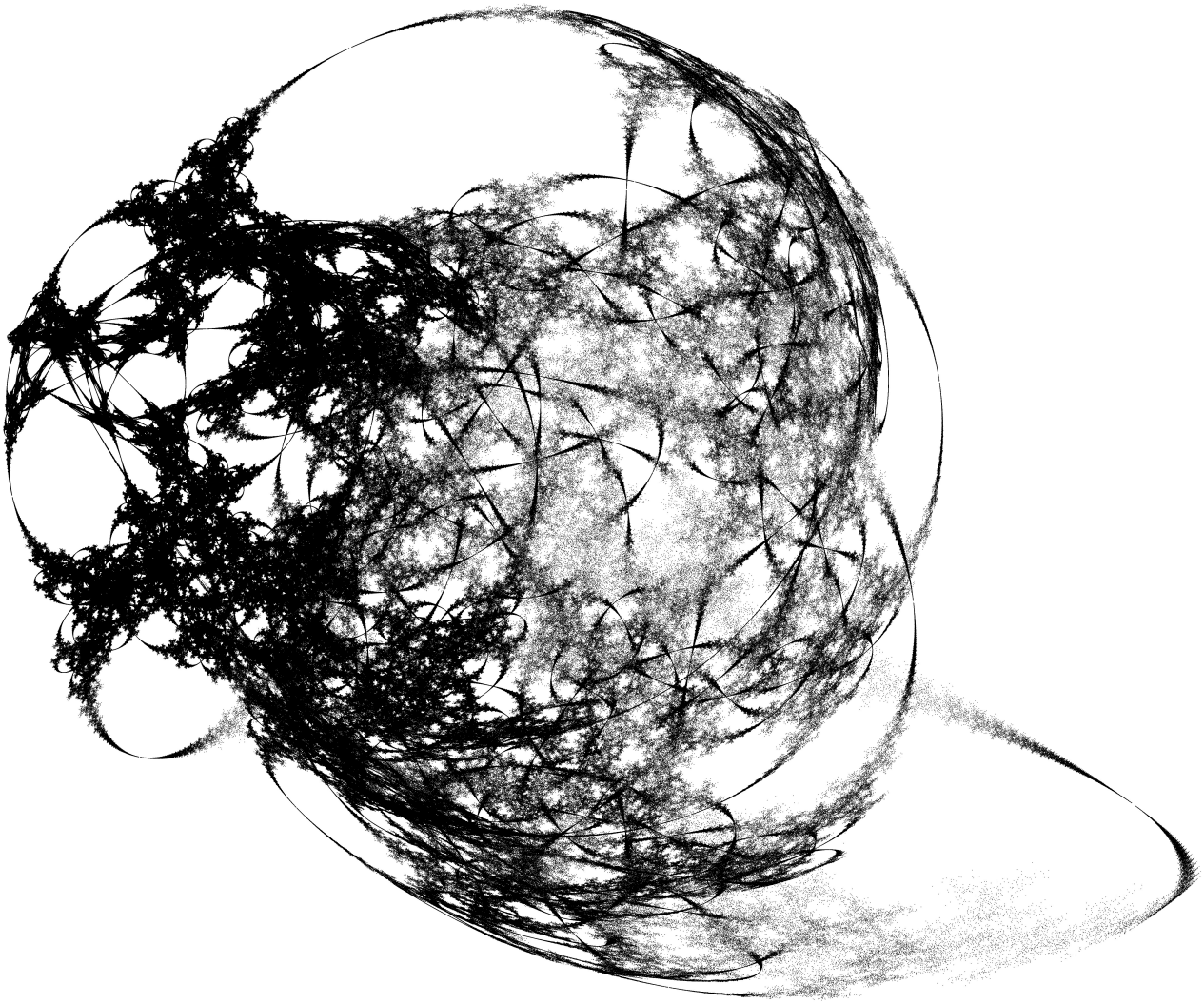

FIGURE G.14 – Triangle lagrangien parabolique $(3,3,4)$ dans le plan (xz).

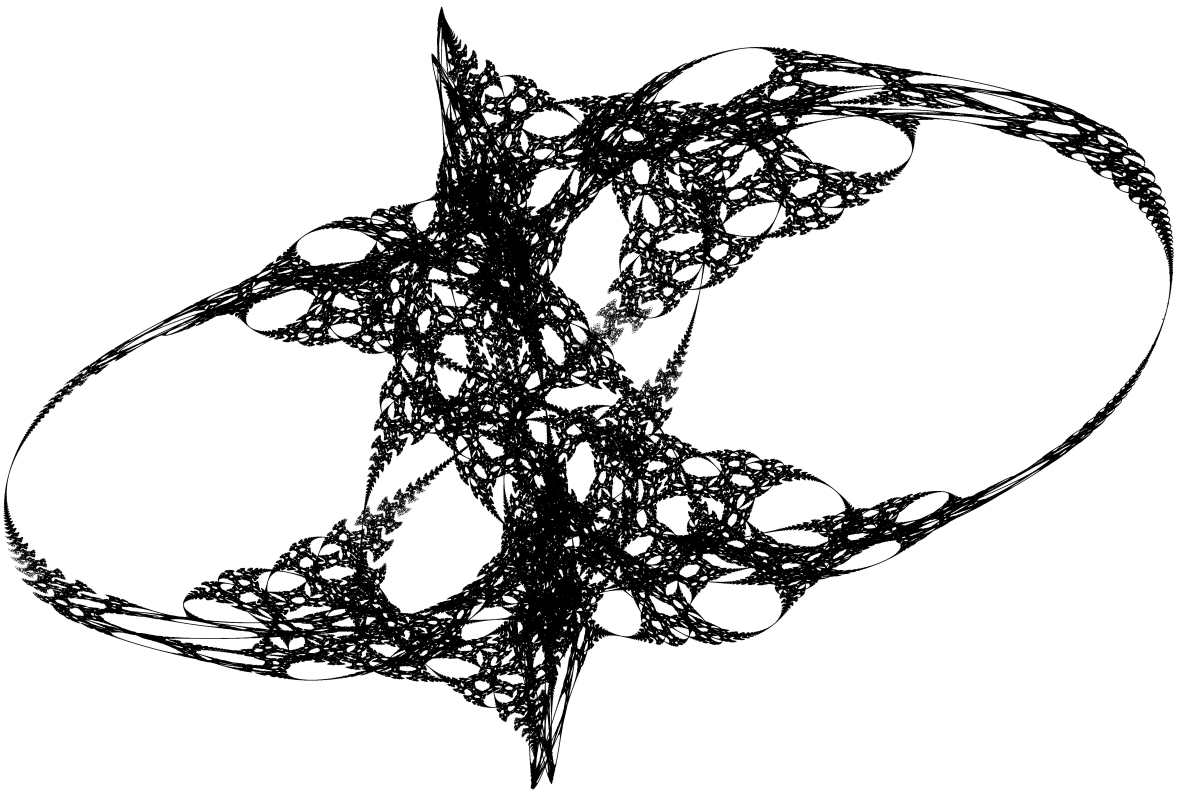

FIGURE G.15 – Triangle hyperbolique unipotent $(3,3,4)$ dans le plan (yz).

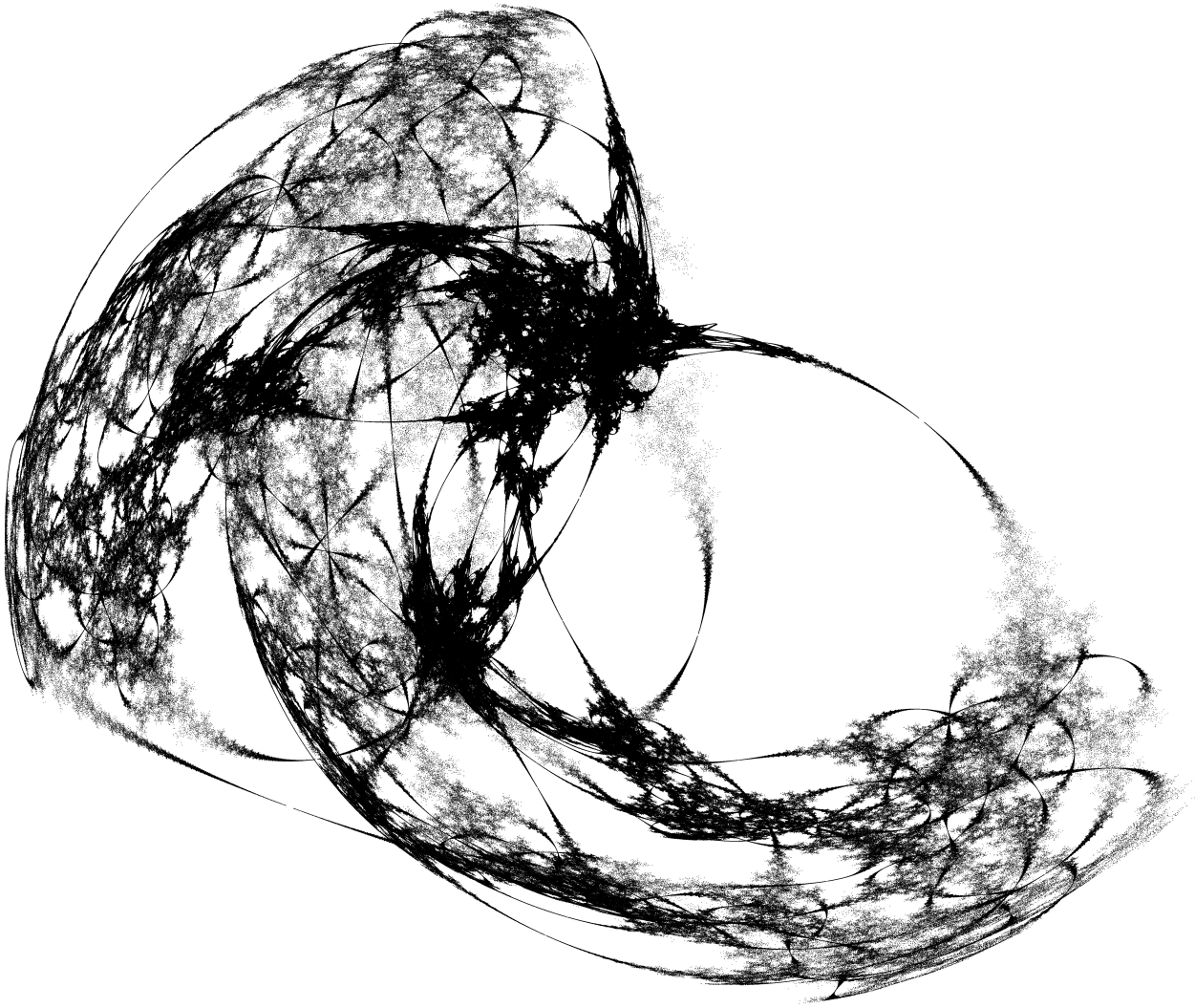

FIGURE G.16 – Triangle lagrangien parabolique $(3,3,4)$ dans le plan (yz).

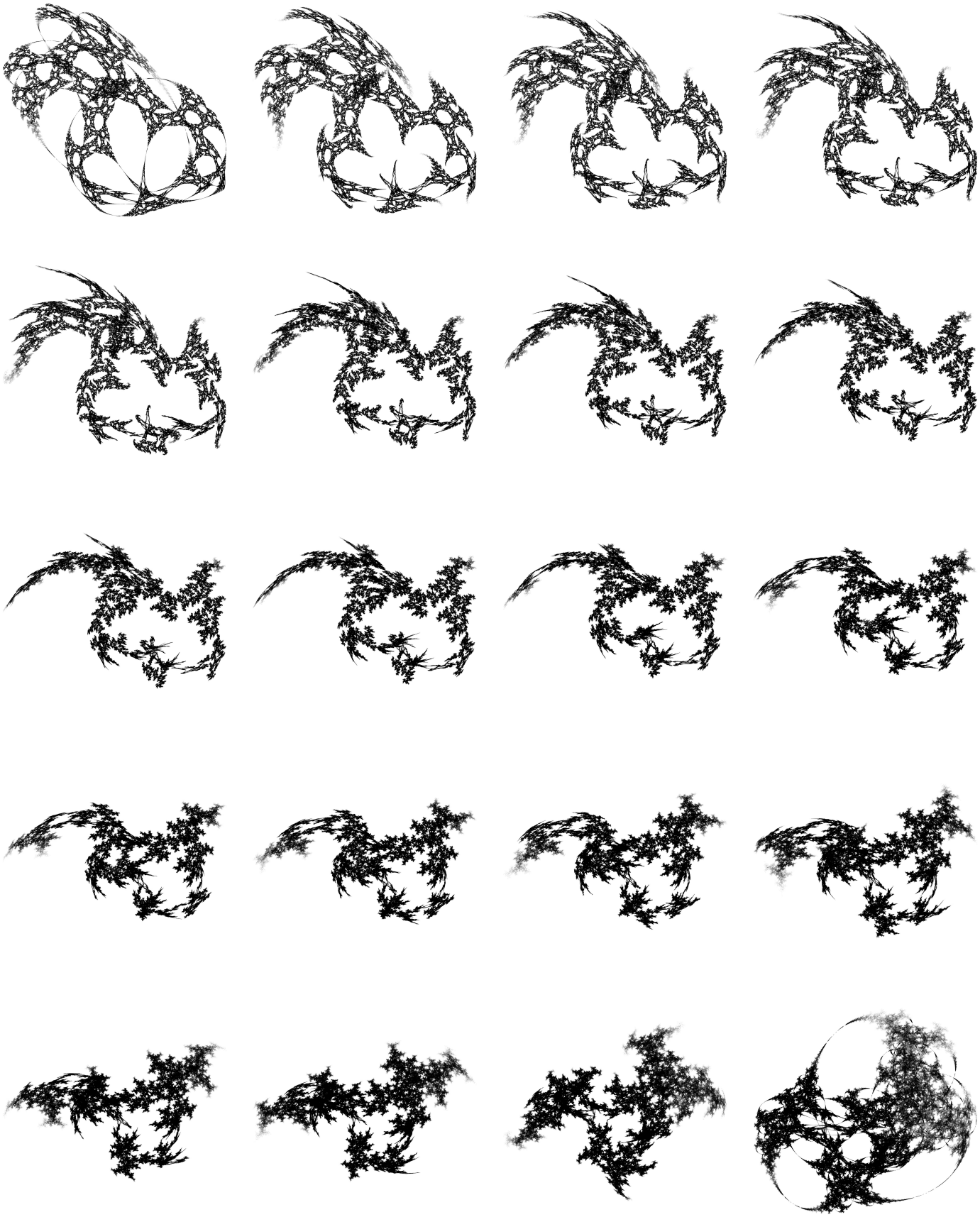

FIGURE G.17 – Déformation du groupe hyperbolique au lagrangien.

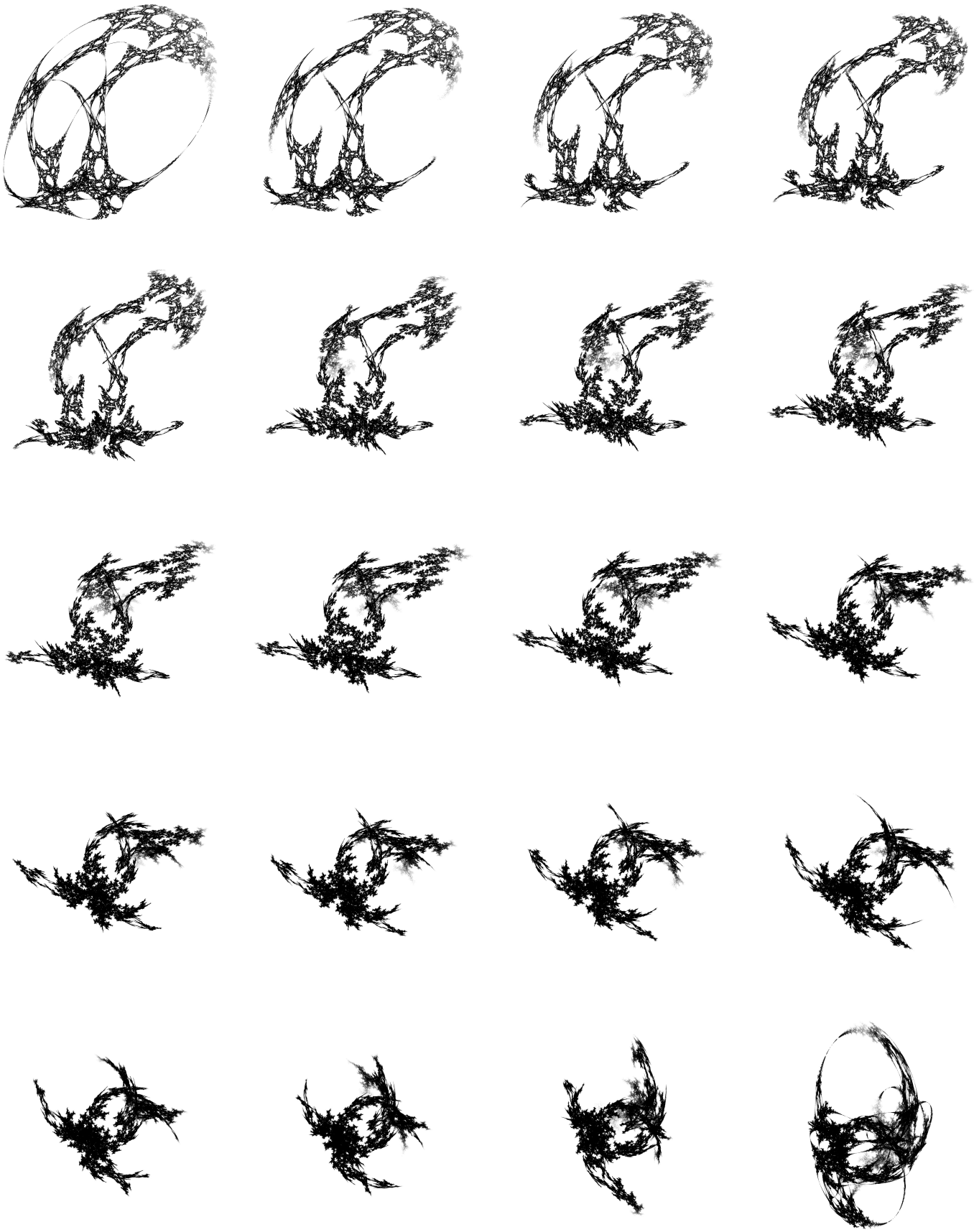

FIGURE G.18 – Déformation du groupe hyperbolique au lagrangien.

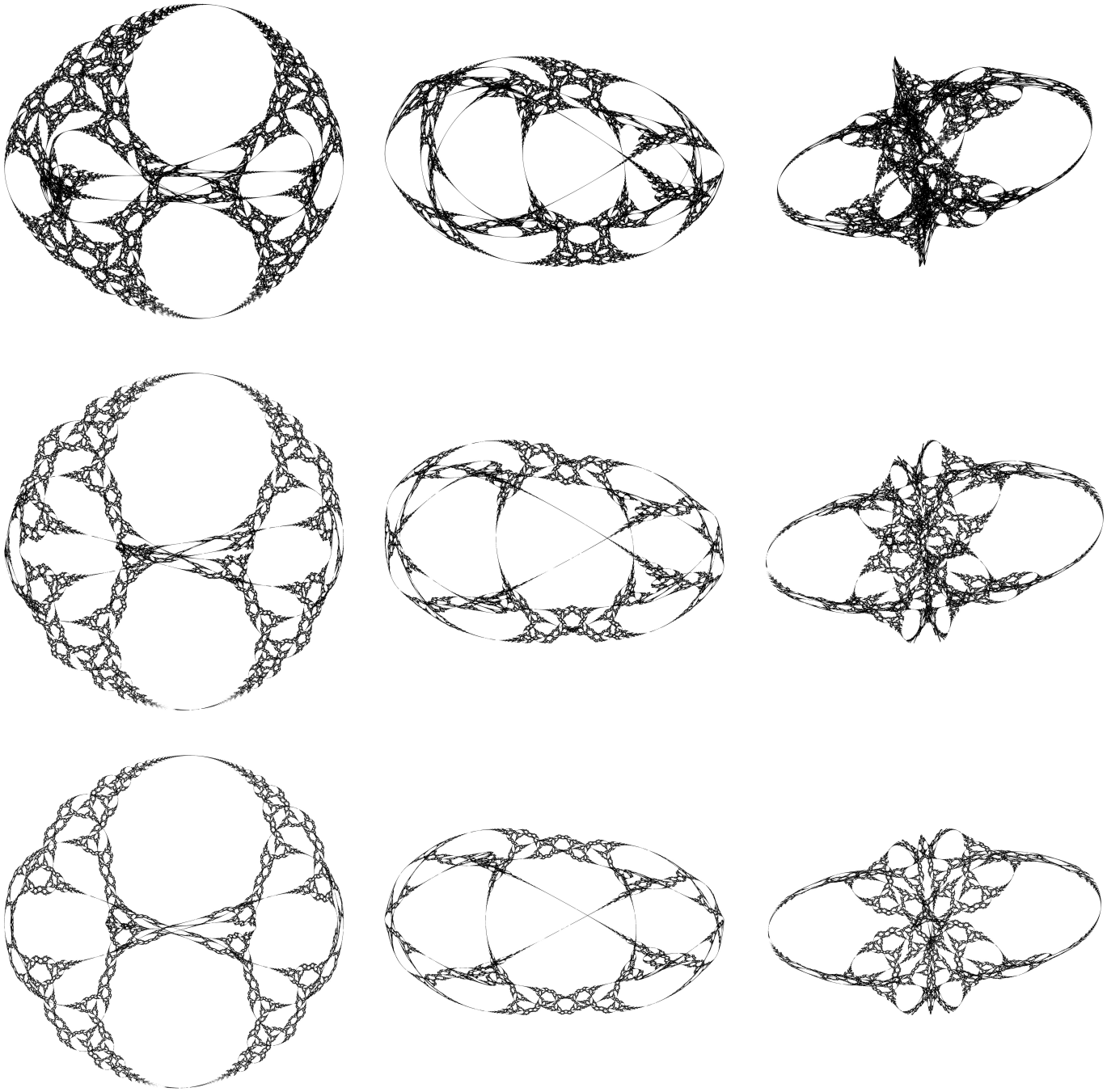

FIGURE G.19 – Triangles $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ pour $n = 4,5,6$ (de haut en bas) dans les plans (xy), (xz) et (yz) (de gauche à droite).

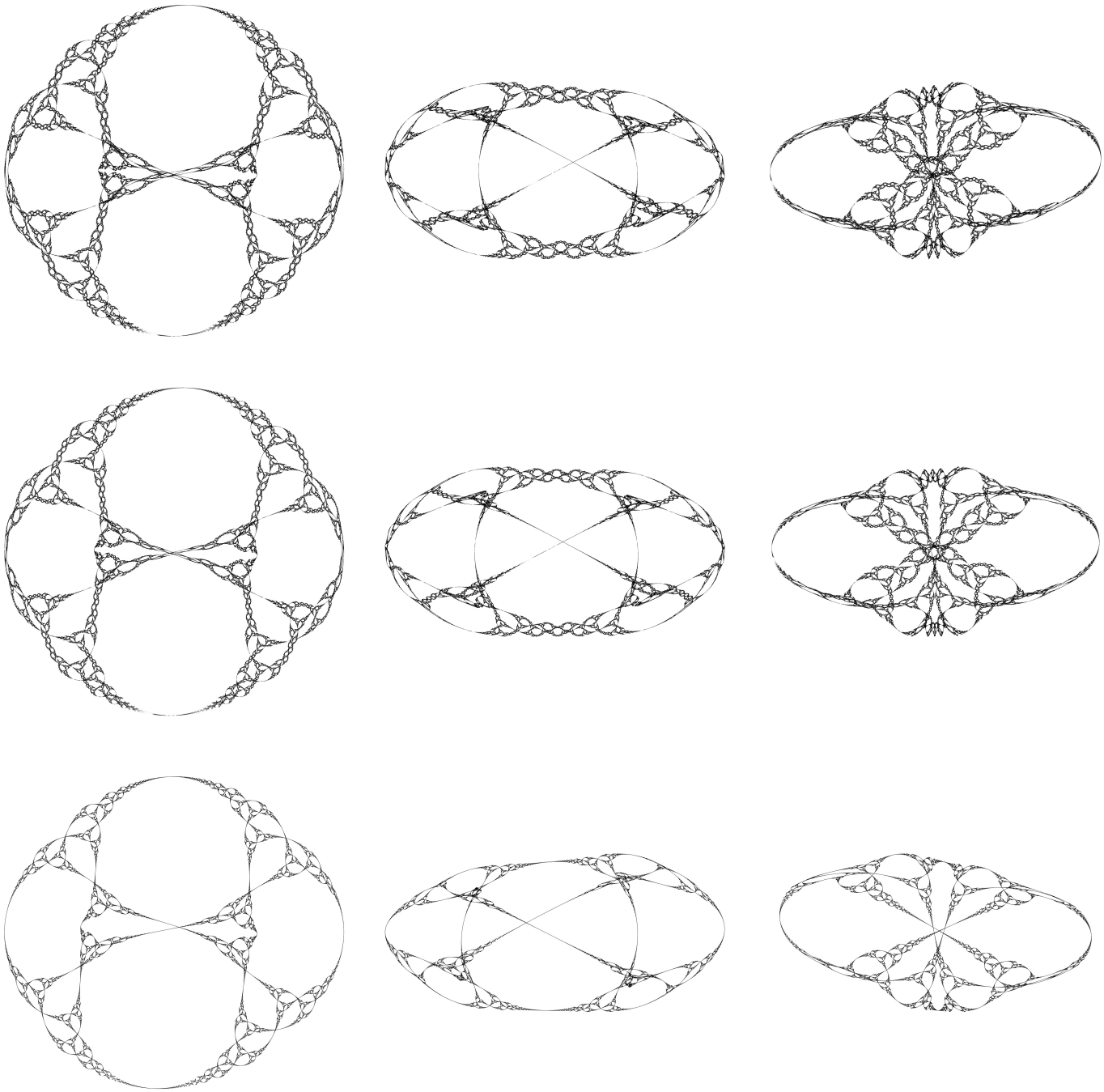

FIGURE G.20 – Triangles $\Delta_2(3,3,n;\theta_\infty)$ pour $n = 7,8,\infty$ (de haut en bas) dans les plans (xy), (xz) et (yz) (de gauche à droite).

Bibliographie

[Aco19] Miguel Acosta. « Spherical CR uniformization of Dehn surgeries of the Whitehead link complement ». Dans : *Geom. Topol.* 23.5 (2019), p. 2593-2664.

[Ale20a] R. V. Alexandre. *https://github.com/R-Alexandre/CRLimitSets*. 2020.

[Ale20b] R. V. Alexandre. *https://rphalexandre.fr/ensembles-limites/*. 2020.

[Ale21a] R. V. Alexandre. « Geodesic convexity and closed nilpotent similarity manifolds ». Accepted in the *Annales de l'Institut Fourier*. 2021.

[Ale21b] R. V. Alexandre. « Redundancy of Triangle Groups in Spherical CR Representations ». Dans : *Experimental Mathematics* 0.0 (2021), p. 1-21.

[Ben60] Jean-Paul Benzécri. « Sur les variétés localement affines et localement projectives ». Dans : *Bull. Soc. Math. France* 88 (1960), p. 229-332.

[Bou72] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349. Hermann, Paris, 1972, p. 320.

[BH99] Martin R. Bridson et André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. T. 319. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Car89] Yves Carrière. « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines ». Dans : *Invent. Math.* 95.3 (1989), p. 615-628.

[cS09] Andreas Čap et Jan Slovák. *Parabolic geometries. I*. T. 154. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[CG74] Shyan S. Chen et Leon Greenberg. « Hyperbolic spaces ». Dans : *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)* (1974), p. 49-87.

[DG91] Giuseppina D'Ambra et Mikhael L. Gromov. « Lectures on transformation groups: geometry and dynamics ». Dans : *Surveys in differential geometry. Vol. I : Proceedings of the conference on geometry and topology, held at Harvard University, Cambridge, MA, USA, April 27-29, 1990*. Providence, RI : American Mathematical Society; Bethlehem, PA : Lehigh University, 1991, p. 19-111.

[DGK18] Jeffrey Danciger, François Guéritaud et Fanny Kassel. « Convex cocompactness in pseudo-Riemannian hyperbolic spaces ». Dans : *Geom. Dedicata* 192 (2018), p. 87-126.

[Der15] Martin Deraux. « On spherical CR uniformization of 3-manifolds ». Dans : *Exp. Math.* 24.3 (2015), p. 355-370.

[DF15] Martin Deraux et Elisha Falbel. « Complex hyperbolic geometry of the figure-eight knot ». Dans : *Geom. Topol.* 19.1 (2015), p. 237-293.

[Fal08] Elisha Falbel. « A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy ». Dans : *J. Differential Geom.* 79.1 (2008), p. 69-110.

[Fal+16] Elisha Falbel, Antonin Guilloux, Pierre-Vincent Koseleff, Fabrice Rouillier et Morwen B. Thistlethwaite. « Character varieties for $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$: the figure eight knot ». Dans : *Exp. Math.* 25.2 (2016), p. 219-235.

[FG94] Elisha Falbel et Nikolay Gusevskii. « Spherical CR-manifolds of dimension 3 ». Dans : *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. Nova Série* 25.1 (1994), p. 31-56.

[FK00] Elisha Falbel et Pierre-Vincent Koseleff. « Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry ». Dans : *Topology* 39.6 (2000), p. 1209-1223.

[FKR15] Elisha Falbel, Pierre-Vincent Koseleff et Fabrice Rouillier. « Representations of fundamental groups of 3-manifolds into $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$: exact computations in low complexity ». Dans : *Geom. Dedicata* 177 (2015), p. 229-255.

[FMMV21] Elisha Falbel, Martin Mion-Mouton et Jose M. Veloso. « Cartan connections and path structures with large automorphism groups ». Dans : *International Journal of Mathematics* (2021), p. 2140016.

[Fer96] Jacqueline Ferrand. « The action of conformal transformations on a Riemannian manifold ». Dans : *Math. Ann.* 304.2 (1996), p. 277-291.

[Fra07] Charles Frances. « Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1. » Dans : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 40.5 (2007), p. 741-764.

[Fri80] David Fried. « Closed similarity manifolds ». Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 55.4 (1980), p. 576-582.

[Fri86] David Fried. « Distality, completeness, and affine structures ». Dans : *J. Differential Geom.* 24.3 (1986), p. 265-273.

[FGH81] David Fried, William M. Goldman et Morris W. Hirsch. « Affine manifolds with nilpotent holonomy ». Dans : *Comment. Math. Helv.* 56.4 (1981), p. 487-523.

[GGZ15a] Stavros Garoufalidis, Matthias Goerner et Christian K. Zickert. « Gluing equations for $\mathrm{PGL}(n,\mathbf{C})$-representations of 3-manifolds ». Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 15.1 (2015), p. 565-622.

[GGZ15b] Stavros Garoufalidis, Matthias Goerner et Christian K. Zickert. « The Ptolemy field of 3-manifold representations ». Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 15.1 (2015), p. 371-397.

[Gol81] William M. Goldman. « Two examples of affine manifolds ». Dans : *Pacific J. Math.* 94.2 (1981), p. 327-330.

[Gol99] William M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[GH84] William M. Goldman et Morris W. Hirsch. « The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds ». Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 286.2 (1984), p. 629-649.

[GH86] William M. Goldman et Morris W. Hirsch. « Affine manifolds and orbits of algebraic groups ». Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 295.1 (1986), p. 175-198.

[Gör] Mathias Görner. *http://ptolemy.unhyperbolic.org*.

[Gro07] Carlos H. Grossi. « On the type of triangle groups ». Dans : *Geom. Dedicata* 130 (2007), p. 137-148.

[GW19] Antonin Guilloux et Pierre Will. « On $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$-representations of the Whitehead link group ». Dans : *Geom. Dedicata* 202 (2019), p. 81-101.

[GJT98] Yves Guivarc'h, Lizhen Ji et J. C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*. T. 156. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[HS90] Waldemar Hebisch et Adam Sikora. « A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group ». Dans : *Studia Math.* 96.3 (1990), p. 231-236.

[JK04] Kyeonghee Jo et Inkang Kim. « Convex affine domains and Markus conjecture ». Dans : *Math. Z.* 248.1 (2004), p. 173-182.

[KLP18] Michael Kapovich, Bernhard Leeb et Joan Porti. « Dynamics on flag manifolds: domains of proper discontinuity and cocompactness ». Dans : *Geom. Topol.* 22.1 (2018), p. 157-234.

[Kli96] Bruno Klingler. « Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante ». Dans : *Math. Ann.* 306.2 (1996), p. 353-370.

[Kna02] Anthony W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Second. T. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[Kos65] Jean-Louis Koszul. « Variétés localement plates et convexité ». Dans : *Osaka Math. J.* 2 (1965), p. 285-290.

[KP85] Ravi S. Kulkarni et Ulrich Pinkall. « Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry ». Dans : *Differential geometry, Peñíscola 1985*. T. 1209. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1985, p. 190-209.

[Law07] Sean Lawton. « Generators, relations and symmetries in pairs of 3×3 unimodular matrices ». Dans : *J. Algebra* 313.2 (2007), p. 782-801.

[MX20] Jiming Ma et Baohua Xie. « Three-manifolds at infinity of complex hyperbolic orbifolds ». Preprint. 2020.

[Mar62] Lawrence F. Markus. « Cosmological models in differential geometry, mimeographed notes ». University of Minnesota. 1962.

[Mat92] Shigenori Matsumoto. « Foundations of flat conformal structure ». Dans : *Aspects of low-dimensional manifolds*. T. 20. Adv. Stud. Pure Math. Kinokuniya, Tokyo, 1992, p. 167-261.

[Min90] Robert R. Miner. « Spherical CR manifolds with amenable holonomy ». Dans : *Internat. J. Math.* 1.4 (1990), p. 479-501.

[MM21] Martin Mion-Mouton. « Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangian contact structures ». Dans : *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2021), p. 1-47.

[Oba71] Morio Obata. « The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds ». Dans : *J. Differential Geometry* 6 (1971/72), p. 247-258.

[Pan89] Pierre Pansu. « Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un ». Dans : *Ann. of Math. (2)* 129.1 (1989-01), p. 1-60.

[PWX16] John R. Parker, Jieyan Wang et Baohua Xie. « Complex hyperbolic $(3,3,n)$ triangle groups ». Dans : *Pacific J. Math.* 280.2 (2016), p. 433-453.

[PW17a] John R. Parker et Pierre Will. « A complex hyperbolic Riley slice ». Dans : *Geom. Topol.* 21.6 (2017), p. 3391-3451.

[PW17b] Julien Paupert et Pierre Will. « Real reflections, commutators, and cross-ratios in complex hyperbolic space ». Dans : *Groups Geom. Dyn.* 11.1 (2017), p. 311-352.

[Pra05] Anna Pratoussevitch. « Traces in complex hyperbolic triangle groups ». Dans : *Geom. Dedicata* 111 (2005), p. 159-185.

[Sch95] Richard M. Schoen. « On the conformal and CR automorphism groups ». Dans : *Geom. Funct. Anal.* 5.2 (1995), p. 464-481.

[Sch01] Richard E. Schwartz. « Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups ». Dans : *Acta Math.* 186.1 (2001), p. 105-154.

[Sch02] Richard E. Schwartz. « Complex hyperbolic triangle groups ». Dans : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*. Higher Ed. Press, Beijing, 2002, p. 339-349.

[Sch07] Richard E. Schwartz. *Spherical CR geometry and Dehn surgery*. T. 165. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

[Smi77] John D. Smillie. « Affinely Flat Manifolds ». Thesis (Ph.D.)–The University of Chicago. 1977.

[Tho15] Nicolas Tholozan. « Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques ». Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 65.5 (2015), p. 1921-1952.

[Tho10] James M. Thompson. « Complex hyperbolic triangle groups ». Thèse de doct. Durham University, 2010.

[Web77] Sidney M. Webster. « On the transformation group of a real hypersurface ». Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 231.1 (1977), p. 179-190.

[Whi61] John H. C. Whitehead. « The immersion of an open 3-manifold in euclidean 3-space ». Dans : *Proc. London Math. Soc. (3)* 11 (1961), p. 81-90.

[Wil07] Pierre Will. « The punctured torus and Lagrangian triangle groups in $\mathrm{PU}(2,1)$ ». Dans : *J. Reine Angew. Math.* 602 (2007), p. 95-121.

[Wil09] Pierre Will. « Traces, cross-ratios and 2-generator subgroups of $\mathrm{SU}(2,1)$ ». Dans : *Canad. J. Math.* 61.6 (2009), p. 1407-1436.

[Wil16] Pierre Will. « Two-generator groups acting on the complex hyperbolic plane ». Dans : *Handbook of Teichmüller theory. Vol. VI.* T. 27. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. Eur. Math. Soc., Zürich, 2016, p. 275-334.

[Zim18] Andrew M. Zimmer. « Proper quasi-homogeneous domains in flag manifolds and geometric structures ». Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 68.6 (2018), p. 2635-2662.

Table des matières

	Introduction — Géométries à rayons et ensembles limites	**I**
I	Complétude des variétés fermées	II
II	Ensembles limites en géométrie hyperbolique complexe	VI
	Remerciements	**IX**

I Complétude géométrique de variétés fermées

I	**Convexité géodésique**	**1**
I	Structure géodésique	2
I.1	Variété géodésique	4
I.2	Structure injective	7
II	Compatibilité avec l'holonomie	7
II	**Géométrie nil-affine à rayons**	**11**
I	Géométrie nil-affine à rayons	16
I.1	Considérations générales	16
I.2	Rang un et feuilletages en classe au plus deux de nilpotence	19
II	Constructions	20
II.1	Géométries à dilatations	20
II.2	Une propriété géométrique de l'homogénéité	21
II.3	Géométries à rayons dans les géométries paraboliques	22
II.3.1	La géométrie de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$	25
II.3.2	La géométrie $\mathrm{SU}(2,1)$	27
II.3.3	La géométrie $\mathrm{SU}(2,2)$	28
II.4	Quelques variétés incomplètes	30

III Dynamique de Fried 32
III.1 Considérations initiales 32
III.2 Variétés à rayons de rang un 41
III.3 Discussion sur le cadre étendu et la conjecture du lacet 49
IV Complétude et réductibilité 51
IV.1 Volume parallèle 53
IV.2 Groupe d'automorphismes 54
V Application en géométrie parabolique de rang un 59

II Exploration de représentations de groupe fondamentaux

III Techniques de calculs d'ensembles limites 65
I Brève description du plan hyperbolique complexe 66
II Méthode générale 66
III Méthode arithmétique 68

IV Redondance des groupes de triangles 73
I Groupes de triangles 75
II Phénomène de redondance 78
III Quelques exemples plus divers 86
III.1 Une contrainte homologique 86
III.2 Groupe d'un triangle lagrangien 87
IV Annexe 89

Galerie des images des expérimentations 93

Bibliographie 111

Table des matières 117