



**HAL**  
open science

## Economie des réseaux et jeux coopératifs

Florian Navarro

► **To cite this version:**

Florian Navarro. Economie des réseaux et jeux coopératifs. Economies et finances. Université de Lille, 2018. Français. NNT : 2018LILUA030 . tel-03783206

**HAL Id: tel-03783206**

**<https://theses.hal.science/tel-03783206v1>**

Submitted on 22 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LILLE, FRANCE

École Doctorale SESAM  
THÈSE DE DOCTORAT

Mention : Sciences économiques

présentée par  
NAVARRO FLORIAN

---

**Economie des réseaux et jeux coopératifs**

---

dirigée par Gérard HAMIACHE

Soutenue le 4 juillet 2018 devant le jury composé de :

M <sup>me</sup> Encarnación ALGABA <i>Universidad de Sevilla, Espagne</i>	Examinatrice
M. Sylvain BÉAL <i>Université de Franche-Comté, France</i>	Rapporteur
M <sup>me</sup> Amandine GHINTRAN <i>Université de Lille, France</i>	Examinatrice
M. Michel GRABISCH <i>Université de Paris 1 et IUF, France</i>	Rapporteur
M. Gérard HAMIACHE <i>Université de Lille, France</i>	Directeur de thèse



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur, M. Gérard HAMIACHE pour son soutien et son implication dans mon travail ainsi que pour ses nombreux conseils. Le chercheur que je suis aujourd'hui doit énormément à la rigueur et l'indéfectible confiance que celui-ci a pu me témoigner, particulièrement quand ma confiance en moi-même me faisait défaut.

Je remercie également les membres du jury : Mme Encarnación ALGABA, M. Sylvain BÉAL, Mme Amandine GHINTRAN ainsi que M. Michel GRABISCH pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail et d'y associer leur nom.

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans le soutien financier de la région Hauts-de-France et de la municipalité de Lille qui m'a permis de me consacrer pleinement à ma recherche, sans subir la précarité qui est aujourd'hui le quotidien de trop nombreux doctorants.

Je souhaite aussi remercier tous les membres du laboratoire LEM et de l'UFR MIME de l'Université Lille 3 pour m'avoir chaleureusement accueilli et rapidement adopté en tant qu'enseignant, chercheur et collègue, quand bien même quelques mois plus tôt je ne fus encore qu'un de leurs étudiants. L'aide et les conseils qu'ont pu me prodiguer ces personnes, notamment au niveau de l'organisation et de la préparation des cours ne saurait être compensés par ces modestes remerciements.

Mes remerciements vont bien évidemment à mes proches et ami·e·s, qui n'ont pas manqué d'ignorer mes excuses afin de me faire profiter d'une terrasse ensoleillée. A l'ensemble des membres du club de Wushu de l'Ecole de l'Eveil et son président qui m'ont permis plusieurs heures par semaine de me vider l'esprit et de me dépenser.

Enfin, à Lucie, qui a su supporter mes plaintes et mes angoisses ainsi que mes doutes. Et qui, dans les dernières semaines de travail, a consenti à relire et corriger les nombreuses fautes<sup>1</sup> qui fleurissaient dans ce texte. Sa présence et son soutien m'ont permis de surmonter des épreuves qui me paraissaient par moment infranchissables.

A la Comtesse Ada Petitpaté de la Crumpette pour son fluff et son absence de chill.

---

1. Ces remerciements n'ayant pas subis sa relecture méthodique, je m'excuse par avance pour les fautes s'y cachant.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1	Théorie des jeux . . . . .	10
1.2	Jeux à utilité transférable et règles d'allocation . . . . .	11
1.2.1	Jeux coopératifs . . . . .	11
1.2.2	Règles d'allocation . . . . .	14
1.3	Jeux à structure de communication . . . . .	25
1.4	Jeux à structure de conférences . . . . .	36
1.5	Jeux à structure de coalitions . . . . .	40
1.6	Aperçu . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Approche matricielle des jeux coopératifs à communication restreinte</b>	<b>45</b>
2.1	Introduction . . . . .	46
2.2	Les structures de Myerson et l'axiome d'équité . . . . .	49
2.3	Structure de communication, valeur de Myerson et valeur de position . . . . .	60
2.4	Structure de coalitions . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Consistance Associée</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	86
3.2	Consistance associée et jeux à utilité transférable . . . . .	86
3.3	La F-value et la Mean value . . . . .	89
3.4	Approche matricielle . . . . .	95
3.5	Conclusion . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Consistance associée, règle d'allocation et graphes</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	100
4.2	Réduction de Jordan . . . . .	100
4.3	Le jeu associé et les trois axiomes . . . . .	105
4.4	La preuve . . . . .	110
4.5	La valeur d'Aumann-Drèze . . . . .	128

<b>5</b>	<b>Caractérisation du centre : une règle d'allocation pour jeux à structure de communication</b>	<b>135</b>
5.1	Introduction . . . . .	136
5.2	Centre des sous-graphes d'un graphe acyclique . . . . .	136
5.3	Résultat principal . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

## *Lexique français → anglais*

### A

**allocation égale des coûts non séparables** : equal allocation of non-separable cost (EANSC)

**anonymat**, *axiome d'* : symmetry

**anonymat des joueurs** : player anonymity

**anonymat des liens** : link anonymity

### C

**centre de gravité de l'ensemble d'imputations** : center of the imputation set (CIS)

**cœur** : core

**consistance associée** : associated consistency

**coût séparable** : separable cost

**coût non-séparable** : non-separable cost

**covariance par translation** : translation covariance

### E

**efficience** : efficiency

**équilibre de contribution des liens** : balanced link contributions

**équilibre des contributions** : balanced contributions

**équilibre des contributions restreint par bloc** : component restricted balanced contributions

**équité**, *axiome d'* : fairness

### I

**indépendance des joueurs non pertinents** : independance of irrelevant players

### J

**jeu à utilité transférable** : TU-game

**joueur A-nul** : A-null player

**joueur nul** : null player

**joueur superflu** : superfluous player

**joueurs indispensables** : necessary players

### L

**lien superflu** : superfluous link

### T

**traitement égal des égaux** : equal treatment of equals

### V

**valeur de position** : position value

**valeur de Shapley  $\alpha$ -égalitaire** :  $\alpha$ -egalitarian Shapley value

**valeur de Solidarité** : solidarity value

**valeur égalitaire** : egalitarian value

**valeur propre** : eigenvalue

**vecteur propre** : eigenvector





## Chapitre 1

# Introduction générale

## 1.1 Théorie des jeux

La théorie des jeux a pour objet les interactions stratégiques entre agents individuellement rationnels. Cette science vise à étudier et analyser des modèles formels et mathématiques de coopération ou de conflit entre des agents que l'on appelle des joueurs. Si les origines de la théorie des jeux peuvent être retracées jusqu'aux travaux d'Augustin Cournot ([12], 1838) qui préfigurent l'équilibre de Nash ainsi qu'à ceux d'Emile Borel ([6], 1938), on date la naissance de la théorie des jeux en tant que domaine de recherche avec la publication de *Theory of Games and Economic Behavior* ([37]) par von Neumann et Morgenstern en 1944.

Traditionnellement, l'approche théorique des jeux se décompose en deux grandes familles : les jeux coopératifs et les jeux non-coopératifs. On parle de jeux non-coopératifs quand les joueurs qui interagissent ne peuvent pas mettre en place d'accords irrévocables. Chaque décision prise par chaque joueur se fait, *in fine*, seul et de manière indépendante. Cette hypothèse se justifie dans de multiples situations : qu'elles soient d'ordre physique (par une impossibilité de communiquer), d'ordre légal (lois *anti-trust*) ou d'ordre technique (incertitude envers l'avenir et les contrats), les situations réelles où l'accord irrévocable est impossible sont nombreuses. Les jeux coopératifs quant à eux supposent que les accords entre joueurs sont possibles et contraignants.

Que ce soit dans des situations de coopération ou de conflit, l'objectif de la théorie des jeux est double. Mettre en modèles mathématiques les situations d'interactions et proposer une caractérisation des différentes solutions possibles à ces situations. Les modèles mathématiques incorporent les éléments essentiels définissant la situation : les joueurs concernés, les possibilités stratégiques de chaque joueur, les paiements potentiels ainsi que la hiérarchisation préférentielle, pour chaque joueur, de l'ensemble des paiements possibles. Dans le cas des jeux non-coopératifs ces modèles prennent essentiellement deux formes : la forme extensive (sous forme d'arbre) ou la forme normale (stratégique). Dans le cas des jeux coopératifs, les modèles se construisent sous la forme coalitionnelle par l'usage d'une fonction caractéristique du jeu.

L'issue d'un jeu ainsi que les paiements de chaque joueur sont déterminés par un concept de solution. Les motivations et les approches d'un jeu pouvant être très différentes, les solutions existantes sont nombreuses et variées. Au-delà de l'arbitrage entre l'existence de la solution et son unicité, les différentes considérations stratégiques (pour les jeux non-coopératifs) et éthiques (pour les jeux coopératifs) assurent l'essor d'une multitude d'options et d'outils d'analyse des situations modélisées.

Cette thèse se concentre sur les jeux coopératifs à utilité transférable sous forme coalitionnelle. Les sections 1.2 à 1.5 présentent les différentes notations des différents modèles de jeux coopératifs que nous étudions. Les

notations établies ici dans l'introduction sont communes à l'ensemble de cette monographie, cependant chaque chapitre introduit ses propres notations qui n'ont cours que dans le chapitre.

## 1.2 Jeux à utilité transférable et règles d'allocation

### 1.2.1 Jeux coopératifs

Un jeu coopératif à utilité transférable est un jeu dans lequel un ensemble de joueurs peut s'associer librement afin de produire un certain niveau d'utilité. Une valeur est associée à chaque coalition possible de joueurs. Cette approche permet de modéliser des jeux dans lesquels les joueurs s'associent pour générer un gain ou un coût. Prenons l'exemple suivant du jeu de l'aéroport. Supposons une piste d'aéroport utilisée par quatre compagnies de transport aérien utilisant chacune un type d'avion différent. Chaque type d'avion nécessite une longueur de piste différente. Le coût de construction de la piste est donc différent pour chaque type d'appareil : 8, 11, 13 et 18 respectivement pour les compagnies 1, 2, 3 et 4. Naturellement, la piste doit être construite pour accommoder le type d'appareil de la coalition nécessitant la piste la plus grande. Nous avons la liste de coalitions possibles suivante :

$$\left\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \right\}.$$

Nous pouvons donc établir le tableau suivant :

Coalitions	Coût
1	8
2	11
3	13
4	18
1 2	11
1 3	13
1 4	18
2 3	13
2 4	18
3 4	18
1 2 3	13
1 2 4	18
1 3 4	18
2 3 4	18
1 2 3 4	18

Afin de simplifier cette écriture on peut utiliser une fonction qui associera à chaque coalition la valeur que cette dernière génère. Formellement nous

avons les définitions suivantes.

Soit  $U$  un ensemble fini de joueurs, on appelle coalition un sous-ensemble de  $U$ . On note  $(N, v)$  un jeu (de coalitions) à utilité transférable dans lequel  $N \subseteq U$  est l'ensemble des joueurs et  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $v(\emptyset) = 0$ ) est la fonction caractéristique du jeu. On note  $\Gamma$  l'ensemble de ces jeux sur  $N$ . Un sous-jeu  $(S, v|_S)$  du jeu  $(N, v)$  est le jeu restreint à un ensemble de joueurs  $S \subset N$ ,  $S \neq \emptyset$  et avec  $v|_S(T) = v(T)$ ,  $\forall T \subseteq S$ .

Il est pertinent pour la suite d'ordonner les coalitions de manière constante et cohérente. Soit  $\Omega_N = \{S \mid S \subseteq N, S \neq \emptyset\}$  le vecteur lexicographiquement ordonné formé par les coalitions de  $N$ . Pour deux coalitions  $S$  et  $T$  de tailles différentes  $\epsilon_S \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon_T \in \mathbb{N}$ , on définit l'ordre lexicographique  $\prec_{lex}$  de la manière suivante :

$$S \prec_{lex} T \text{ si et seulement si } \epsilon_S < \epsilon_T.$$

Soit deux coalitions de taille égale  $\epsilon \in \mathbb{N}$ ,  $K = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\epsilon\}$  et  $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_\epsilon\}$  avec  $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_\epsilon$  et  $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\epsilon$ . L'ordre lexicographique  $\prec_{lex}$  pour l'ensemble des coalitions de taille  $\epsilon$  est défini comme :  $K \prec_{lex} L$  si et seulement si  $[\kappa_1 < \ell_1]$  ou [il existe un nombre naturel  $\gamma$ , avec  $1 < \gamma \leq \epsilon$ , satisfaisant  $\kappa_\eta = \ell_\eta$  pour tout  $1 \leq \eta < \gamma$ , et  $\kappa_\gamma < \ell_\gamma$ ].

**Exemple 1.1 :** (Jeu de l'aéroport, [32] Littlechild et Owen 1973)

Le jeu de l'aéroport décrit précédemment est donc, sous sa forme coalitionnelle, défini par le jeu  $(N, v)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  et

$$v(S) = \begin{cases} 8 & \text{si } S = \{1\}, \\ 11 & \text{si } S = \{1, 2\} \text{ ou } S = \{2\}, \\ 13 & \text{si } 3 \in S \text{ et } 4 \notin S, \\ 18 & \text{si } 4 \in S, \end{cases}$$

pour tout  $S \subseteq N$ .

□

Un jeu coopératif à utilité transférable est dit *monotone* si  $v(S) \leq v(T)$  pour tout  $S, T \in \Omega_N$  avec  $S \subseteq T$ . Un jeu est dit *suradditif* si  $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ ,  $\forall S, T \in \Omega_N$  avec  $S \cap T = \emptyset$ . Pour un jeu donné  $(N, v) \in \Gamma$ , son *jeu dual*  $(N, v^d)$  est défini par  $v^d(S) = v(N) - v(N \setminus S)$ ,  $\forall S \subseteq N$ .

**Définition 1.1** (*Jeu simple*):

Un jeu coopératif à utilité transférable monotone  $(N, v)$  est un jeu simple si et seulement si, quelle que soit  $S \in \Omega_N$ ,  $v(S) = 0$  ou  $v(S) = 1$ .

Chaque coalition d'un jeu simple peut soit générer une valeur de 1 (coalition gagnante) soit une valeur de 0 (coalition perdante). Le plus souvent la

valeur de la grande coalition  $v(N) = 1$ . Ces jeux s'appliquent bien souvent à des situations de sciences politiques puisqu'ils permettent de représenter des jeux de vote. Prenons l'exemple du conseil de sécurité de l'ONU que l'on peut représenter comme un jeu coopératif.

**Exemple 1.2 :** (Conseil de sécurité de l'ONU)

*Le conseil de sécurité de l'ONU est constitué de quinze membres dont cinq membres permanents ayant un droit de veto. Afin qu'une résolution puisse être acceptée, il faut un vote affirmatif de neuf de ses membres dans lequel sont comprises les voix de tous les membres permanents. Cela nécessite donc une coalition composée des cinq membres permanents et d'au moins quatre autres membres non permanents.*

Soit  $N$  l'ensemble des quinze membres et  $K \subseteq N$  l'ensemble des membres permanents. On peut alors définir le jeu  $(N, v)$  avec

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \subseteq S, \text{ et } |S| \geq 9, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

**Définition 1.2** (*Jeu de Dirac*):

Soit une coalition  $R \subseteq N$ ,  $R \neq \emptyset$ . On appelle jeu de Dirac un jeu  $(N, \delta_R)$  avec  $\delta_R(S) = 1$  si  $S = R$  et  $\delta_R(S) = 0$  sinon.

Un jeu de Dirac est un jeu simple dans lequel une seule coalition est gagnante.

L'ensemble des jeux de Dirac forme une base naturelle de l'ensemble des jeux à utilité transférable  $\Gamma$ . En effet, n'importe quelle fonction caractéristique  $v$  peut être représentée par une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de jeux de Dirac.

$$v = \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} v(S) \delta_S.$$

Shapley ([43], 1953) a introduit une autre base pour l'ensemble des jeux à utilité transférable : celle des jeux d'unanimité.

**Définition 1.3** (*Jeu d'unanimité*):

Soit une coalition  $R \subseteq N$ ,  $R \neq \emptyset$ . On appelle jeu d'unanimité un jeu  $(N, u_R)$  avec  $u_R(S) = 1$  si  $R \subseteq S$  et  $u_R(S) = 0$  sinon.

Un jeu d'unanimité est un jeu simple monotone dans lequel une certaine coalition de joueurs est nécessaire afin d'obtenir une coalition gagnante. Tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  peut être représenté comme une combinaison linéaire de jeux d'unanimité  $(N, u_S)$ ,  $S \subseteq N$ , avec

$$v = \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} \Delta^v(S) u_S,$$

avec  $\Delta^v(S)$  le coefficient d'Harsanyi ([25], 1959) de la coalition  $S$ ,

$$\Delta^v(S) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq S}} (-1)^{|S|-|T|} v(T), \quad \forall S \subseteq N.$$

**Définition 1.4** (*Jeu inessentiel*):

On dit qu'un jeu est inessentiel si, pour tout couple de coalitions disjointes  $S \subseteq N$  et  $T \subseteq N \setminus S$ ,  $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ .

Un jeu  $(N, v)$  est inessentiel si et seulement si, pour toute coalition  $S \subseteq N$ ,  $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ .

Les jeux inessentiels ont la particularité d'être des jeux dans lesquels la coopération ne crée aucun surplus.

### 1.2.2 Règles d'allocation

Si des joueurs s'associent et forment une coalition, ils vont générer une valeur. Chaque joueur étant une entité individuelle, la question de la répartition de cette valeur entre les membres de la coalition se pose alors. De quelle manière cette répartition peut-elle se faire? De quelle manière devrait-elle se faire? En suivant quelles règles? Ces questions sont essentielles dans l'approche des solutions d'un jeu coopératif. De manière générale on suppose que tous les joueurs s'associent pour former ce que l'on appelle la *grande coalition* : la coalition regroupant tous les joueurs. Cette hypothèse se fait sans perte de généralité puisque si une coalition plus petite se forme on peut résoudre le sous-jeu induit par cette coalition. De fait, cette approche évacue la question de l'émergence de l'association, problématique laissée à la théorie des jeux non-coopératifs.

Pour les solutions des jeux coopératifs on parlera de *règles d'allocation*. Une règle d'allocation associe simplement un paiement à chaque joueur du jeu. L'étude des règles d'allocation fait face à deux contraintes majeures. La première est celle de l'axiomatisation de la règle : une règle d'allocation doit être entièrement et uniquement définie par un ensemble d'axiomes. Cette approche par l'axiomatique permet de connaître, au moins en partie, le comportement de la règle d'allocation. Comment traite-t-elle de situations

spécifiques ? De joueurs spécifiques ? D'une certaine manière cela revient à proposer la règle d'allocation en même temps que son manuel d'utilisation. La seconde contrainte est que la règle d'allocation doit être facilement calculable. Le nombre de coalitions augmentant exponentiellement avec le nombre de joueurs, il est important que l'on puisse déterminer la solution facilement sur de larges ensembles de joueurs.

Un vecteur de paiement (ou *allocation*)  $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$  d'un jeu à utilité transférable est un vecteur de dimension  $n$  associant à chaque joueur  $i \in N$  un paiement  $x_i$ .

Soit un vecteur de paiement  $x$ , on note  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$  la somme des paiements

des joueurs appartenant à la coalition  $S$ . On appelle *excédent* d'un jeu  $(N, v)$  pour la coalition  $S$  par rapport à  $x$

$$e(S, x) = v(S) - x(S).$$

Cet excédent nous permet de mesurer la satisfaction de la coalition  $S$ . Si  $e(S, x)$  est positif cela implique que la coalition  $S$  reçoit moins que sa valeur dans le jeu. Elle sera donc insatisfaite par la règle. A l'inverse si  $e(S, x)$  est négatif, alors la coalition reçoit en paiement plus que sa valeur dans le jeu. Elle est donc incitée à participer au jeu et à la grande coalition.

Nous l'avons expliqué précédemment, la théorie des jeux coopératifs analyse les règles d'allocation sous l'angle de leurs propriétés. Deux critères semblent être communément admis comme étant essentiels. L'*efficience* et la *rationalité individuelle*. Un vecteur de paiement  $x$  est dit *efficient* si, pour tout jeu  $(N, v)$ , il répartit la valeur de la grande coalition entre tous les joueurs. Autrement dit si  $v(N) = x(N)$ . On appelle l'ensemble des allocations efficaces d'un jeu  $(N, v)$  *pré-imputation*, que l'on note

$$PI(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}.$$

On considère qu'un vecteur de paiement  $x$  est individuellement rationnel si, pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$ , ce vecteur alloue à chaque joueur un paiement supérieur à sa valeur individuelle, c'est-à-dire si  $x_i \geq v(\{i\})$ ,  $\forall i \in N$ . L'ensemble des allocations efficaces et individuellement rationnelles d'un jeu  $(N, v)$  est appelé *ensemble d'imputations*. On le note  $I(v)$ .

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N) \text{ et } x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N\}.$$

En exigeant que chaque joueur obtienne au minimum sa valeur individuelle on s'assure que chaque joueur a un intérêt à la coopération. Plus haut nous avons parlé de l'excédent, en précisant qu'un excédent négatif pour une coalition assurait de son intérêt à coopérer. On peut alors renforcer cette



exigence de rationalité individuelle et la porter à toutes les coalitions. On obtient l'ensemble des vecteurs de paiements suivant :

$$\mathcal{C}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N) \text{ et } x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

L'ensemble de ces allocations est appelé le *Cœur*, introduit par Gillies ([17], 1953). Il est possible que le Cœur soit un ensemble vide.

Prenons l'exemple suivant et déterminons-en le Cœur.

**Exemple 1.3 :**

Soit le jeu suivant  $(N, v) \in \Gamma$  avec  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $v$  tel que

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1, \\ 2 & \text{si } |S| = 2 \text{ et } 1 \in S, \\ 3 & \text{si } S = \{2, 3\}, \\ 6 & \text{si } S = N. \end{cases}$$

On a alors les conditions suivantes  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 \geq 2$ ,  $x_1 + x_3 \geq 2$ ,  $x_2 + x_3 \geq 3$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$ .

On obtient alors l'ensemble d'allocations suivant pour le Cœur

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 = 6\}.$$

Dans cet exemple on peut représenter l'ensemble  $I(v)$  des imputations par un triangle. On peut alors déterminer et représenter le Cœur, s'il existe, par une zone dans le triangle ci-après :

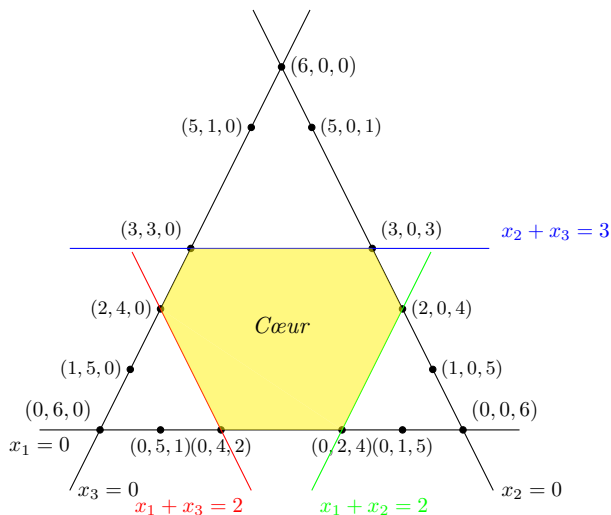


FIGURE 1.1 – Représentation du Cœur

□

En proposant une allocation se situant dans le Cœur on s'assure qu'aucune coalition n'est incitée à bloquer la coopération. Par conséquent, il est raisonnable de penser qu'une allocation dans le Cœur incitera les joueurs à former la grande coalition et à coopérer totalement. Cependant, le Cœur est un concept de solution qui présente deux problèmes majeurs pour les théoriciens des jeux : l'existence et l'unicité. En effet, rien n'assure que le Cœur soit non-vide et, le cas échéant, rien n'assure qu'il ne soit composé que d'une seule allocation. Idéalement on souhaite des solutions dont l'existence est assurée et qui soient uniques. Une solution donnant une allocation unique est ce que l'on appellera ici une *règle d'allocation*. Formellement, on appelle règle d'allocation pour jeux à utilité transférable une fonction  $\psi$  qui associe à chaque jeu  $(N, v) \in \Gamma$  un vecteur de paiement  $\psi(N, v) \in \mathbb{R}^N$ . La plus célèbre de ces règles d'allocation est sans aucun doute la valeur de Shapley.

**Définition 1.5** (*Valeur de Shapley*):

Introduite par Shapley ([43], 1953), la valeur de Shapley est définie pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  comme

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \quad \forall i \in N,$$

avec  $s$  et  $n$  respectivement les cardinaux des coalition  $S$  et  $N$ .

La valeur de Shapley du joueur  $i$  est définie comme la moyenne pondérée par le nombre de permutations possibles de la *contribution marginale* du joueur  $i$ .

**Exemple 1.4 :**

Reprenons le jeu  $(N, v) \in \Gamma$  avec  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $v$  tel que

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1, \\ 2 & \text{si } |S| = 2 \text{ et } 1 \in S, \\ 3 & \text{si } S = \{2, 3\}, \\ 6 & \text{si } S = N. \end{cases}$$

Nous pouvons décomposer le calcul de la valeur de Shapley de la manière suivante : à chaque fois qu'un joueur  $i$  rejoint la coalition  $S$  on mesure sa contribution marginale  $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ . On fait ce calcul pour chaque ordre

possible d'entrée des joueurs. A la fin, on prend la moyenne de ces mesures.

Coalition	Contribution marginale		
	Joueur 1	Joueur 2	Joueur 3
1 2 3	0	2	4
1 3 2	0	4	2
2 1 3	2	0	4
2 3 1	3	0	3
3 1 2	2	4	0
3 2 1	3	3	0
Somme	10	13	13
$Sh_i(N, v)$	$\frac{10}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{13}{6}$

On obtient donc  $Sh(N, v) = (\frac{10}{6}, \frac{13}{6}, \frac{13}{6})$ . On peut noter que cette allocation est ici dans le Cœur du jeu  $(N, v)$ .

□

**Exemple 1.5 :** (Jeu de l'aéroport)

Reprenons l'exemple du jeu de l'aéroport. Il est défini par le jeu  $(N, v)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  et

$$v(S) = \begin{cases} 8 & \text{si } S = \{1\}, \\ 11 & \text{si } S = \{1, 2\} \text{ ou } S = \{2\}, \\ 13 & \text{si } 3 \in S \text{ et } 4 \notin S, \\ 18 & \text{si } 4 \in S. \end{cases}$$

La valeur de Shapley de ce jeu est l'allocation  $(2, 3, 4, 9)$ . La compagnie 1 paiera donc 2, la compagnie 2, 3, la compagnie 3, 4 et enfin la compagnie 4 paiera 9 pour la construction d'une piste de taille maximale. Le coût total de 18 est couvert par la somme des paiements de chaque joueur.

□

La caractérisation originelle de Shapley pour la valeur de Shapley se fait en trois axiomes.

**Définition 1.6** (*Support*):

Un support dans le jeu  $(N, v)$  est une coalition  $R \subseteq N$  telle que  $v(S) = v(S \cap R)$ ,  $\forall S \subseteq N$ . Les joueurs du support sont les seuls à contribuer à la création de valeur.

**Axiome 1.1** (*Support*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome de support si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v)$  et pour tout support  $R \subseteq N$ ,

$$\sum_{\substack{i \\ i \in R}} \psi_i(N, v) = v(R).$$

Soit  $\pi$  une permutation des joueurs  $i \in N$  telle que  $\pi v(S) = v(\pi(S))$ ,  $\forall S \subseteq N$ . Le joueur  $\pi(i)$  prend donc la place dans le jeu  $(N, \pi v)$  du joueur  $i$  dans le jeu  $(N, v)$ . L'axiome d'anonymat traduit un souci d'*impartialité* de la règle. On réclame ici que la règle d'allocation soit insensible aux noms et aux places des joueurs : n'est pertinent que la participation au jeu et à la création de la valeur.

**Axiome 1.2** (*Anonymat*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome d'anonymat si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v)$  et toute permutation  $\pi : N \rightarrow N$  des joueurs, on a

$$\psi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \psi_i(N, v).$$

La linéarité est souvent présentée comme un axiome uniquement mathématique. Il est important de noter que si, effectivement, cet axiome facilite l'approche formelle dans bien des cas, il n'en reste pas moins un axiome avec une portée réelle certaine. En effet, la linéarité assure l'insensibilité de la règle d'allocation aux unités de compte ainsi qu'à un morcellement du jeu. Une règle d'allocation linéaire donnera le même résultat sur une même situation, qu'elle soit décomposée en plusieurs jeux ou réunie en un seul. Cela assure une cohérence et une viabilité de la règle d'allocation.

**Axiome 1.3** (*Linéarité*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable est linéaire si et seulement si, pour tout couple de jeux  $(N, v)$  et  $(N, w)$  ainsi que pour tout couple de nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , on a

$$\psi(N, \alpha v + \beta w) = \alpha \psi(N, v) + \beta \psi(N, w).$$

**Axiome 1.4** (*Additivité*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable est additive si et

seulement si, pour tout couple de jeux  $(N, v)$  et  $(N, w)$ , on a

$$\psi(N, v + w) = \psi(N, v) + \psi(N, w).$$

Le théorème présenté par Shapley en 1953 est le suivant :

**Theorème 1.1** (Shapley 1953, [43])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeu à utilité transférable vérifie les axiomes de support, d'anonymat et d'additivité si et seulement si  $\psi = Sh$ .*

Depuis sa caractérisation originelle par Shapley, la valeur de Shapley a fait l'objet de nombreux articles et nouvelles caractérisations ([42], [18]). Parmi ces dernières on peut citer l'axiomatique de Shubik (1962, [44]) à laquelle nous reviendrons le plus souvent. On peut également évoquer celle de Young (1985, [54]), ainsi que celle de van den Brink (2001, [8]) qui introduit un axiome d'équité inspiré de celui de Myerson pour les jeux à structure de communication. Enfin nous citerons également celle de Casajus (2011, [10]) qui fait le lien entre les axiomatiques de van den Brink et de Young. Dans le chapitre 3 nous présenterons l'axiomatique de Hamiache (2001, [20]).

Introduisons à présent l'axiomatique de Shubik. Celle-ci utilise l'additivité ainsi que trois autres axiomes.

L'axiome du traitement égal des égaux se substitue à l'axiome d'anonymat. Cet axiome repose sur une logique d'égalité de traitements entre des joueurs apportant la même contribution aux coalitions. A la logique d'impartialité de l'axiome d'anonymat on substitue ici une logique d'équité.

**Définition 1.7** (*Joueurs égaux*):

Deux joueurs  $i, j \in N$  sont égaux dans le jeu  $(N, v)$  si et seulement si

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

**Axiome 1.5** (*Traitement égal des égaux*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable satisfait l'axiome de traitement égal des égaux si et seulement si, pour tout couple de joueurs égaux  $i, j \in N$ , on a

$$\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v).$$

**Proposition 1.1** (Ghintran, [18], 2011)

*L'axiome d'anonymat implique l'axiome du traitement égal des égaux. La réciproque est fausse.*

L'axiome d'efficience assure simplement que la totalité de la valeur de la grande coalition  $v(N)$  soit répartie.

**Axiome 1.6** (*Efficience*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable est efficiente si et seulement si

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, v) = v(N), \quad \forall (N, v) \in \Gamma.$$

**Définition 1.8** (*Joueur nul*):

Un joueur  $i \in N$  est un joueur nul dans le jeu  $(N, v)$  si  $v(S) = v(S \setminus \{i\})$  pour toute coalition  $S \subseteq N$  telle que  $i \in S$ .

**Axiome 1.7** (*Joueur nul*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable satisfait l'axiome du joueur nul si et seulement si, pour tout joueur nul  $i \in N$  dans  $(N, v)$ , on a

$$\psi_i(N, v) = 0.$$

**Proposition 1.2** (Ghintran, [18], 2011)

*Les axiomes du joueur nul et d'efficience d'une part et l'axiome de support d'autre part sont équivalents.*

Le théorème de caractérisation de Shubik pour la valeur de Shapley s'énonce alors ainsi :

**Théorème 1.2** (Shubik, 1962 [44])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie les axiomes d'additivité, de traitement égal des égaux, du joueur nul et d'efficience si et seulement si  $\psi = Sh$ .*

Nowak et Radzik introduisent en 1994 ([39]) la valeur de solidarité, une règle d'allocation construite autour d'un axiome alternatif à l'axiome du

jeueur nul. Cet axiome oppose un principe de solidarité à celui d'individualité du joueur nul. Là où la valeur de Shapley se concentre sur la contribution marginale de chacun, la valeur de solidarité s'intéresse à la contribution moyenne de chaque coalition. Elle est définie de la manière suivante :

**Définition 1.9** (*Valeur de solidarité*):

Pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$ , la valeur de solidarité, notée  $So$  est telle que

$$So_i(N, v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(|N| - |S|)! (|S| - 1)!}{|N|!} \frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} [v(S) - v(S \setminus \{j\})].$$

L'article introduit un nouvel axiome, celui de joueur A-nul. Un joueur A-nul est un joueur pour lequel toutes les coalitions auxquelles il appartient ont une contribution marginale moyenne nulle. Ce type de joueur recevra alors un paiement nul.

**Définition 1.10** (*Joueur A-nul*):

Un joueur  $i \in N$  est A-nul dans le jeu  $(N, v)$  si et seulement si

$$\sum_{j \in S} [v(S) - v(S \setminus \{j\})] = 0, \quad \forall S \subseteq N, \quad i \in S.$$

**Axiome 1.8** (*Joueur A-nul*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome du joueur A-nul si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  et tout joueur  $i \in N$  un joueur A-nul dans le jeu  $(N, v)$ , la règle d'allocation vérifie

$$\psi_i(N, v) = 0.$$

En utilisant cet axiome, Nowak et Radzik offrent une caractérisation de la valeur de solidarité qui présente un parallèle évident avec celle de la valeur de Shapley. L'axiome du joueur nul est remplacé par l'axiome du joueur A-nul.

**Theorème 1.3** (Nowak et Radzik 1994, [39])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie les axiomes*

d'anonymat, d'efficience, d'additivité et du joueur  $A$ -nul si et seulement si,  $\psi = So$ .

En 1985, Moulin ([34]) introduit les deux notions de *coûts séparables* et de *coûts non-séparables*. Le coût séparable  $SC_i(N, v)$  du joueur  $i$  dans le jeu  $(N, v)$  est défini par

**Définition 1.11** (*Coût séparable*):

$$SC_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \forall i \in N.$$

Le coût séparable correspond à la contribution marginale du joueur  $i$  à la grande coalition. C'est également la valeur générée par le joueur  $i$  dans le jeu dual  $v^d$ . Le coût non-séparable du jeu  $(N, v)$  est, quant à lui, défini par  $NSC(N, v)$  avec

**Définition 1.12** (*Coût non-séparable*):

$$NSC(N, v) = v(N) - \sum_{i \in N} SC_i(N, v).$$

C'est donc la valeur qu'il reste quand on retranche à la valeur de la grande coalition la somme des contributions marginales de tous les joueurs à la coalition  $N$ . C'est une mesure du surplus généré par la coopération de tous les joueurs et qui ne peut donc être attribué à aucun joueur spécifiquement. En utilisant ces deux notions, Moulin définit l'allocation égale des coûts non-séparables, que l'on nommera  $EANSC$  de la manière suivante :

**Définition 1.13** (*Allocation égale des coûts non-séparables*):

$$EANSC_i(N, v) = SC_i(N, v) + \frac{1}{n}NSC(N, v), \forall i \in N.$$

Chaque joueur se voit attribuer son *coût séparable* et une part égalitaire du *coût non-séparable*.



En 1991 Driessen et Funaki ([14]) introduisent le *centre de gravité de l'ensemble d'imputations*, noté *CIS*.

**Définition 1.14** (*Centre de gravité de l'ensemble d'imputations*):

$$CIS_i(N, v) = v(\{i\}) + \frac{1}{n} [v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})], \forall i \in N.$$

Puisque par définition du jeu dual on a  $v^d(\{j\}) = SC_j$ , la règle d'allocation *CIS* et la règle d'allocation *EANSC* se trouvent être des allocations duales : on a  $CIS(N, v^D) = EANSC(N, v)$ .

Dans sa thèse de doctorat en 1996, Joosten ([31]) introduit une famille de règles d'allocation, définie comme une combinaison convexe de la valeur de Shapley et de la *valeur égalitaire*. La valeur égalitaire est la quintessence du principe de traitement égal : chaque joueur obtient la même part de la valeur générée par la grande coalition. On note la valeur égalitaire du joueur  $i$  dans le jeu  $(N, v)$  par

**Définition 1.15** (*Valeur égalitaire*):

$$ED_i(N, v) = \frac{v(N)}{n}, \forall i \in N.$$

Joosten introduit les *valeurs de Shapley  $\alpha$  – égalitaires*,  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Définition 1.16** (*Valeurs de Shapley  $\alpha$  – égalitaires*):

Une règle d'allocation  $\psi$  appartient à la famille des *valeurs de Shapley  $\alpha$  – égalitaires* si et seulement si

$$\psi_i(N, v) = \alpha Sh_i(N, v) + (1 - \alpha) ED_i(N, v), \forall i \in N.$$

### 1.3 Jeux à structure de communication

Le modèle de jeu coopératif que nous avons présenté jusqu'à présent suppose implicitement que la communication entre les joueurs est libre et parfaite. Chaque joueur peut s'associer avec n'importe quel autre joueur et toutes les coalitions sont susceptibles d'être créées. Il est cependant possible d'envisager des situations dans lesquelles la communication n'est pas chose acquise et pour lesquelles certaines coalitions ne peuvent se former que par l'usage de joueurs intermédiaires, voire ne pas se former du tout. Plusieurs modèles ont été développés pour prendre en compte cette restriction de communication. Nous présenterons quelques-uns de ces modèles dans les sections suivantes en commençant par le plus instinctif, celui se basant sur les graphes. Ce modèle a d'abord été présenté par Myerson en 1977 ([35]). Soit  $g_N = \{\{i, j\} \mid i \neq j, i \in N, j \in N\}$  l'ensemble de tous les liens possibles entre les joueurs dans  $N$ . On note  $g \subseteq g_N$  un sous-ensemble de ces liens. On appelle graphe un couple  $(N, g)$  dans lequel  $N$  est l'ensemble des sommets et  $g \subseteq g_N$  l'ensemble des arêtes. Deux sommets  $i, j \in N$  sont adjacents si  $\{i, j\} \in g$ . Deux joueurs ne peuvent communiquer, et donc s'associer, que s'ils sont adjacents.

Prenons l'exemple du graphe à 4 joueurs suivant :

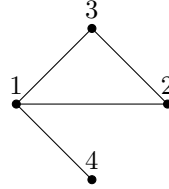


FIGURE 1.2 – Graphe à 4 joueurs

Le graphe ci-dessus est un graphe  $(N, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ . Les joueurs 1, 2 et 3 sont tous les trois reliés entre eux et peuvent donc s'associer. En revanche, le joueur 4 aura besoin de l'intermédiaire du joueur 1 pour communiquer et coopérer avec les autres joueurs.

On note  $g(S) = \{\{i, j\} \mid i \in S, j \in S, \{i, j\} \in g\}$  l'ensemble des liens du sous-graphe  $(S, g(S))$  induit par la coalition  $S \subseteq N$ . On définit par  $g_i = \{\{i, j\} \in g \mid j \in N\}$  l'ensemble des liens du joueur  $i \in N$ . On appelle chemin entre les joueurs  $i$  et  $j \in N$ , une chaîne de sommets  $i = i_1, i_2, \dots, i_k = j$  telle que  $\forall q, 1 \leq q \leq k - 1$  on a  $\{i_q, i_{q+1}\} \in g$ .

S'il existe un chemin entre deux sommets de  $N$ , on dit qu'ils sont connectés par le graphe  $(N, g)$ . On symbolise la connexité dans le graphe  $(N, g)$  de

deux joueurs  $i, j \in N$  par la notation suivante :  $i \xrightarrow{(N,g)} j$ . Pour tout graphe  $(N, g)$ , on note

$$N/g = \{\{i \mid i \xrightarrow{(N,g)} j, i \in N\} \cup \{j\} \mid j \in N\}$$

l'ensemble des composantes de  $N$ . Un graphe est connexe si  $|N/g| = 1$ . Un sous-graphe  $(S, g(S))$  est connexe si  $|S/(g(S))| = 1$ . Soit  $(N, g)$  un graphe connexe, le joueur  $i \in N$  est un point d'articulation du graphe si et seulement si  $(N \setminus \{i\})/g \neq 1$ .

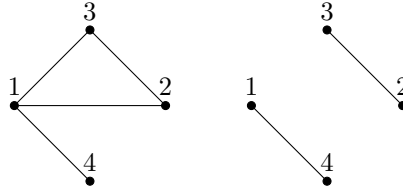


FIGURE 1.3 – Graphe connexe (gauche) et non connexe (droite)

Sur le graphe de gauche, il existe au moins un chemin reliant chacun des joueurs à n'importe quel autre joueur. Sur le graphe de droite, il n'existe aucun chemin reliant le joueur 1 aux joueurs 2 et 3 et aucun chemin reliant le joueur 4 aux joueurs 2 et 3. On a alors deux sous-graphes (connexes) totalement distincts. Dans le graphe de gauche, le joueur 1 est un point d'articulation.

Par  $S^* = \{i \in N \mid \exists j \in S \text{ tel que } \{i, j\} \in g\} \cup S$  on note l'ensemble des voisins de la coalition  $S$ , c'est-à-dire les sommets qui sont adjacents à au moins un des sommets de la coalition  $S$ .

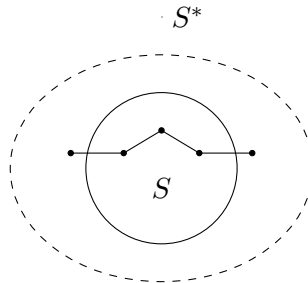


FIGURE 1.4 – Les voisins de S

Les jeux à structure de communication ont tout d'abord été introduits par Myerson ([35], 1977). En plus de décrire les résultats de la coopération des joueurs, un jeu à structure de communication décrit une certaine restriction de la communication par le biais d'un graphe. Un jeu à structure de communication est donc un triplet  $(N, v, g)$  avec  $(N, v)$  un jeu à utilité transférable et  $(N, g)$  un graphe. On appellera  $\Gamma_G$  l'ensemble des jeux à structure de communication.

Soit un jeu à structure de communication  $(N, v, g)$ , on définit le jeu à utilité transférable appelé jeu quotient  $v/g$  (Myerson, 1977, [35]) par

$$(v/g)(S) = \sum_{R \in S/g} v(R), \forall S \subseteq N.$$

La valeur d'une coalition est égale à la somme des valeurs de ses composantes.

**Exemple 1.6 :**

Considérons le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $(N, v)$  un jeu à utilité transférable et  $(N, g)$  un graphe restreignant la communication. On a  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $v$  tel que

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1, \\ |S| & \text{si } |S| \geq 2, \end{cases}$$

et  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ , ce qui nous donne le graphe suivant :

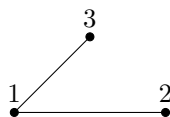


FIGURE 1.5 – Exemple jeu quotient

Dans ce jeu, la coalition  $\{2, 3\}$  est non-connexe. Par conséquent, le jeu quotient  $v/g$  va être tel que

$$v/g(S) = \begin{cases} v(S) & \text{si } S \in \Omega_N \setminus \{\{2, 3\}\}, \\ v(\{2\}) + v(\{3\}) = 0 & \text{si } S = \{2, 3\}. \end{cases}$$

□

Dans la section 1.2.1, nous avons expliqué que l'ensemble des jeux d'unanimité formait une base de l'ensemble des jeux coopératifs à utilité transférable. Les jeux quotients étant des jeux à utilité transférable, par conséquent l'ensemble des jeux d'unanimité en est également une base. En 1999,

Hamiache ([19]) a démontré qu'un sous-ensemble spécifique des jeux d'unanimité, l'ensemble  $\{(N, u_R) \in \Gamma \mid R \subseteq N, |R/g| = 1\}$  était également une base des jeux quotients. Cela lui permet d'écrire que, quel que soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  et son jeu quotient  $(N, v/g)$ , on peut écrire la fonction caractéristique  $v/g$  comme

$$v/g = \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N \\ |R/g|=1}} c_R u_R,$$

avec  $c_R = \sum_{\substack{S \\ |S/g|=1 \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} v(S)$ . Cette écriture établit donc une construction du jeu  $v/g$  comme une combinaison linéaire de jeux d'unanimité et des valeurs de la fonction caractéristique  $v$ .

Le jeu quotient développé par Myerson a pour objectif de prendre en compte l'information contenue dans un jeu à structure de communication et de la modéliser dans un jeu à utilité transférable. C'est-à-dire d'incorporer l'information sur le graphe, en plus de l'information sur la valeur de la coopération, au sein même de la fonction caractéristique. En 1988, Meessen ([33]) adopte une approche similaire en définissant ce que nous appellerons ici le *jeu des liens*. Cependant, contrairement à l'approche de Myerson, le jeu des liens se construit sur un ensemble de joueurs différent de celui du jeu à structure de communication. Il introduit un nouveau jeu à utilité transférable utilisant les liens du graphe comme joueurs. La valeur d'une coalition  $L$  de liens est alors la valeur maximale que la grande coalition pourrait obtenir si la communication n'existait que par les liens de  $L$ . Ce jeu des liens n'est défini que sur les jeux à structure de coalitions  $(N, v, g)$  avec  $v$  tel que  $v(\{i\}) = 0, \forall i \in N$  (on dit que  $(N, v)$  est *normalisé en 0*). Formellement, soit un jeu à structure de communication  $(N, v, g)$ , on définit le jeu des liens  $r^v(L), L \subseteq g$  comme,

$$r^v(L) = \sum_{\substack{C \in N/L \\ |C| \geq 2}} v(C).$$

La valeur d'une coalition de liens peut également être écrite comme la valeur de la coalition de joueurs formée par les liens du graphe  $g$ . Soit  $N(L) = \{i \in N \mid \exists j \in N, \{i, j\} \in L\}$  l'ensemble de ces joueurs, on peut définir le jeu des liens comme

$$r^v(L) = \sum_{C \in N(L)/L} v(C). \quad (1.1)$$

**Exemple 1.7 :**

Examinons le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

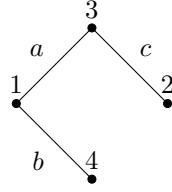


FIGURE 1.6 – Graphe exemple jeu des liens

$$g = \left\{ \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\} \right\}.$$

On pose  $a = \{1, 3\}$ ,  $b = \{1, 4\}$ ,  $c = \{2, 3\}$ . On obtient le jeu des liens suivant :

$$r^v(\{a\}) = v(\{1, 3\}), \quad r^v(\{b\}) = v(\{1, 4\}), \quad r^v(\{c\}) = v(\{2, 3\}),$$

$$r^v(\{a, b\}) = v(\{1, 3, 4\}), \quad r^v(\{a, c\}) = v(\{1, 2, 3\}),$$

$$r^v(\{b, c\}) = v(\{1, 4\}) + v(\{2, 3\}),$$

$$r^v(\{a, b, c\}) = v(\{1, 2, 3, 4\}).$$

□

A présent, penchons-nous sur les règles d'allocation pour les jeux à structure de communication. Les deux règles que nous introduirons ici font directement usage du jeu quotient et du jeu des liens. Dans le chapitre 3 sur la consistance associée, nous présenterons plusieurs autres règles d'allocation. Une règle d'allocation pour jeux à structure de communication est une fonction  $\phi$  qui associe à tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  un vecteur de paiement  $\phi(N, v, g) \in \mathbb{R}^N$ .

Myerson (1977, [35]) fut le premier à présenter une règle d'allocation pour les jeux à structure de communication. Cette règle d'allocation est communément appelée la valeur de Myerson et on la note  $MY^G$ .

**Définition 1.17** (*Valeur de Myerson*):

$$MY^G(N, v, g) = Sh(N, v/g), \quad \forall (N, v, g) \in \Gamma_G.$$

La valeur de Myerson est donc simplement la valeur de Shapley appliquée au jeu quotient.

**Exemple 1.8 :**

Reprenons l'exemple 1.6 utilisé pour le jeu quotient. On a le jeu  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  et  $v/g$  tel que

$$v/g(S) = \begin{cases} |S| & \text{si } |S| \geq 2 \text{ et } 1 \in S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors  $MY^G(N, v, g) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

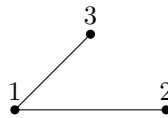


FIGURE 1.7 – Exemple Myerson

□

La caractérisation de la valeur de Myerson a originellement été proposée avec deux axiomes : l'efficacité par composante et l'équité.

Le graphe représentant la situation de communication n'étant pas nécessairement connexe, il est possible que la grande coalition ne puisse jamais se former. Par conséquent la valeur de la grande coalition ne sera jamais générée. L'axiome d'efficacité par composante assure que, dans le cas d'un graphe non connexe, la somme des valeurs générées par les composantes du graphe est répartie entre tous les joueurs de la composante.

**Axiome 1.9** (*Efficacité par composante*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication est efficace par composante si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  et pour toute composante  $R \in N/g$ , cette dernière vérifie

$$\sum_{i \in R} \phi_i(N, v, g) = v(R).$$

L'axiome d'équité suggère que la suppression d'un lien entre deux joueurs affecte les deux joueurs de la même manière. Dans le chapitre 2, cet axiome fera l'objet d'une discussion plus approfondie.

**Axiome 1.10** (*Équité*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication est équitable si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  et pour tout lien  $\{i, j\} \in g$ , cette dernière vérifie

$$\phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{i, j\}) = \phi_j(N, v, g) - \phi_j(N, v, g \setminus \{i, j\}).$$

Le théorème de caractérisation de la valeur de Myerson s'énonce ainsi :

**Theorème 1.4** (Myerson 1977, [35])

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifie les axiomes d'efficacité par composante et d'équité si et seulement si  $\phi = MY^G$ .

En 1980, Myerson ([36]) propose une nouvelle caractérisation de la valeur de Myerson utilisant un autre axiome qui remplace l'axiome d'équité. Cet axiome d'équilibre des contributions réclame que l'impact que peut avoir la destruction des liens du joueur  $i$  sur le joueur  $j$  est identique à l'impact sur le joueur  $i$  de la destruction des liens du joueur  $j$ .

**Axiome 1.11** (*Équilibre des contributions*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifie l'axiome d'équilibre des contributions si et seulement si, pour tout couple de joueurs  $i, j \in N$ , on a

$$\phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus g_j) = \phi_j(N, v, g) - \phi_j(N, v, g \setminus g_i).$$

Myerson énonce alors le théorème suivant :

**Theorème 1.5** (Myerson 1980, [36])

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifie les axiomes d'efficacité par composante et d'équilibre des contributions si et seulement si  $\phi = MY^G$ .

En 1992, Borm *et al.* ([7]) ont présenté une caractérisation de la valeur de position créée par Meessen en 1988 ([33]) sur les graphes acycliques. Cette règle d'allocation pour jeux à structure de communication se construit autour du jeu des liens. A la manière de la valeur de Myerson qui applique la valeur de Shapley au jeu quotient construit à partir du jeu à structure de



communication, la valeur de position va mesurer la valeur de chaque lien en appliquant la valeur de Shapley au jeu des liens. Une fois que les liens ont reçu leur paiement, les joueurs formant ces liens se partagent également les paiements. Pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  avec  $(N, v)$  un jeu normalisé en 0, la valeur de position est définie par

$$PV_i(N, v, g) = \sum_{l \in g_i} \frac{1}{2} Sh_l(g, r^v), \forall i \in N.$$

**Exemple 1.9 :**

Soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $v$  tel que

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1, \\ 2 & \text{si } |S| = 2, \\ 2 \times |S| & \text{si } |S| \geq 3, \end{cases}$$

et  $g = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ . On note  $a = \{1, 3\}$ ,  $b = \{1, 4\}$ ,  $c = \{2, 3\}$ .

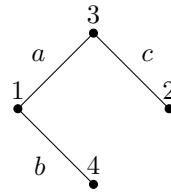


FIGURE 1.8 – Graphe exemple valeur de position

Le jeu des liens  $r^v$  est le même que pour l'exemple 1.7. La valeur de Shapley donne les paiements  $\frac{20}{6}$ ,  $\frac{14}{6}$ ,  $\frac{14}{6}$  pour respectivement les liens  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On obtient alors le paiement de chaque joueur :

$$PV_1(N, v, g) = \frac{17}{6},$$

$$PV_2(N, v, g) = \frac{7}{6},$$

$$PV_3(N, v, g) = \frac{17}{6},$$

$$PV_4(N, v, g) = \frac{7}{6}.$$

□

Il est important de noter que, contrairement à la valeur de Myerson, la valeur de position n'est pas une extension de la valeur de Shapley dans la mesure où les résultats donnés par la valeur de position sur des situations où la communication est parfaite (représentées par un graphe complet) ne correspondent pas aux paiements de la valeur de Shapley. Regardons l'exemple suivant :

**Exemple 1.10 :**

Soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $v = 12u_{\{1,2\}}$  et  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ . On a

$$Sh(N, v) = (6, 6, 0),$$

$$PV(N, v, g) = (5, 5, 2).$$

□

La valeur de position n'est donc pas au sens strict une extension de la valeur de Shapley. Cependant sa construction se base sur une utilisation de la valeur de Shapley sur un jeu modifié. En ce sens, on peut considérer que la structure de la valeur de position a vocation à étendre la valeur de Shapley. Dans le chapitre 2 nous considérerons que la méthode mise en place par la valeur de position est une méthode d'extension de la valeur de Shapley, au même titre que celle de Myerson, dans la mesure où elle présente une méthode similaire et que l'utilisation de la valeur de Shapley joue un rôle central dans le comportement de la règle.

Dans l'article de 1992, Borm *et al.* introduisent, en plus de l'axiome d'efficacité par composante, quatre nouveaux axiomes qui permettent de caractériser la valeur de position mais également d'offrir une nouvelle axiomatisation de la valeur de Myerson.

La linéarité par rapport aux jeux est l'extension naturelle aux règles pour jeux à structure de communication de l'axiome de linéarité vu dans la section 1.2.2.

**Axiome 1.12** (*Linéarité par rapport aux jeux*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication est linéaire par rapport aux jeux si, pour tout couple de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  et  $(N, w, g)$ , cette dernière vérifie

$$\phi(N, \alpha v + \beta w, g) = \alpha \phi(N, v, g) + \beta \phi(N, w, g).$$

La notion de lien superflu est identique à celle de joueur nul. Un lien est superflu s'il est nul dans le jeu des liens. L'axiome de lien superflu réclame que la suppression d'un tel lien du graphe ne change en rien le paiement des joueurs.

**Définition 1.18** (*Lien superflu*):

On dit qu'un lien  $\ell \in g$  est superflu dans le jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  si  $r^v(L) = r^v(L \cup \{\ell\})$ ,  $\forall L \subseteq g$ .

**Axiome 1.13** (*Lien superflu*):

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication satisfait l'axiome de lien superflu si et seulement si, pour tout lien  $\ell \in g$  superflu dans le jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , cette dernière vérifie

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v, g \setminus \{\ell\}).$$

L'anonymat des liens se construit sur une démarche similaire à celles qui sont à l'origine des axiomes d'anonymat et de traitement égal des égaux. Si tous les liens sont interchangeables alors le paiement de chaque joueur ne dépendra que du nombre de liens auquel il participe. Formellement, un jeu à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifie l'anonymat des liens si  $r^v(A) = r^v(B)$ ,  $\forall A, B \subseteq g$  telles que  $|A| = |B|$ .

**Axiome 1.14** (*Anonymat des liens*):

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication satisfait l'axiome d'anonymat des liens si et seulement si, pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifiant l'anonymat des liens, il existe un réel  $\alpha$  tel que

$$\phi_i(N, v, g) = \alpha |g_i|, \forall i \in N.$$

Un jeu à structure de communication vérifie l'anonymat des joueurs si la valeur d'une coalition dans le jeu quotient ne dépend que du nombre de joueurs dans cette coalition ayant au moins un lien avec les autres joueurs. Soit  $N(g) = \{i \in N \mid \exists \{i, j\} \in g, j \in N\}$  l'ensemble des joueurs ayant au moins un lien. Un jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  vérifie l'anonymat des joueurs si et seulement si  $(v/g)(S) = (v/g)(T)$ ,  $\forall S, T \subseteq N$  avec  $|S \cap N(g)| = |T \cap N(g)|$ .

**Axiome 1.15** (*Anonymat des joueurs*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeu à structure de communication vérifie l'axiome d'anonymat des joueurs si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  vérifiant l'anonymat des joueurs, il existe un réel  $\alpha$  tel que

$$\phi_i(N, v, g) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in N(g), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A l'aide de ces axiomes, Borm *et al.* énoncent le théorème suivant :

**Théorème 1.6** (Borm *et al.* 1992, [7])

1. Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie les axiomes d'efficacité par composante, de linéarité par rapport aux jeux, d'anonymat des liens et de lien superflu si et seulement si  $\phi = PV$ .
2. Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie les axiomes d'efficacité par composante, de linéarité par rapport aux jeux, d'anonymat des joueurs et de lien superflu si et seulement si  $\phi = MY^G$ .

En 2001, dans l'ouvrage *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory* ([46]) M. Slikker et A. van den Nouweland ont introduit plusieurs autres caractérisations de la valeur de Myerson parmi lesquelles une en particulier retiendra notre attention pour la suite. Cette caractérisation utilise un nouvel axiome, celui du joueur superflu.

L'axiome du joueur superflu considère que supprimer tous les liens d'un joueur nul dans le jeu quotient n'affecte pas le paiement des joueurs. Cet axiome est donc construit dans un esprit très similaire à celui de l'axiome du joueur nul.

**Définition 1.19** (*Joueur superflu*): Un joueur  $i \in N$  est superflu dans le jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  si  $(v/g)(S) = (v/g)(S \cup i)$  quelle que soit  $S \subseteq N$ . Autrement dit, si  $i$  est un joueur nul dans le jeu  $(N, v/g)$ .

**Axiome 1.16** (*Joueur superflu*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication satisfait

l'axiome du joueur superflu si et seulement si, pour tout joueur  $i \in N$  superflu dans le jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , cette dernière vérifie

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v, g \setminus g_i).$$

On énonce le théorème suivant :

**Theorème 1.7** (Slikker et van den Nouweland 2001, [46])

*Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie les axiomes d'efficacité par composante, de linéarité par rapport aux jeux, d'anonymat des joueurs et du joueur superflu si et seulement si  $\phi = MY^G$ .*

En 2005 apparaît la première caractérisation de la valeur de position qui ne se restreint pas à l'ensemble des graphes acycliques. Cette caractérisation, due à Slikker ([47]), se base sur deux axiomes : l'efficacité par composante et l'axiome d'équilibre de contribution des liens.

**Axiome 1.17** (*Equilibre de contribution des liens*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication satisfait l'axiome d'équilibre de contribution des liens si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$  et tout couple de joueurs  $i, j \in N$ ,

$$\sum_{\ell \in g_j} [\phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{\ell\})] = \sum_{\ell \in g_i} [\phi_j(N, v, g) - \phi_j(N, v, g \setminus \{\ell\})].$$

Slikker énonce alors le théorème suivant :

**Theorème 1.8** (Slikker 2005, [47])

*Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie les axiomes d'efficacité par composante et d'équilibre de contribution des liens si et seulement si  $\phi = PV$ .*

## 1.4 Jeux à structure de conférences

Myerson en 1980, [36] a développé un autre modèle de restriction de communication. Ce modèle, appelé la *structure de conférences*, est une extension naturelle du modèle de la structure de communication puisqu'il se modélise par un *hypergraphe*. Dans la structure de conférences, les joueurs sont regroupés dans des coalitions appelées *conférences*. A la manière des liens d'un

graphe qui ne peut exister que si les deux joueurs du liens sont présents dans une coalition donnée, une conférence d'une structure de conférences n'existe que si les joueurs la composant sont tous présents. La communication est possible au sein d'une conférence. Un joueur pouvant appartenir à plusieurs conférences, si des conférences ont des joueurs en commun alors la communication se fait entre tous les joueurs de ces conférences. Formellement, étant donné un ensemble de joueurs  $N$ , soit  $\mathcal{H}_N = \{S \mid S \subseteq N, |S| \geq 2\}$  l'ensemble des sous-ensemble de  $N$  n'étant pas des singletons. On appelle structure de conférences un couple  $(N, \mathcal{H})$  avec  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_N$ . On note  $\mathcal{H}(S) = \{H \in \mathcal{H} \mid H \subseteq S\}$ . Deux joueurs  $i$  et  $j$  sont connectés par  $\mathcal{H}$  s'il existe une séquence de conférences  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  telle que  $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{H}$ ,  $i \in H_1$ ,  $j \in H_k$  et  $H_q \cap H_{q+1} \neq \emptyset$  quel que soit  $q$ ,  $1 \leq q \leq k-1$ . Cette connectivité est notée par  $i \xrightarrow{\mathcal{H}} j$ . On écrit alors  $N/\mathcal{H} = \{\{i \mid i \in N, i \xrightarrow{\mathcal{H}} j\} \cup \{j\} \mid j \in N\}$ , l'ensemble des composantes de  $N$ .

**Exemple 1.11 :**

Considérons la structure de conférences  $(N, \mathcal{H})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $\mathcal{H} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$ .

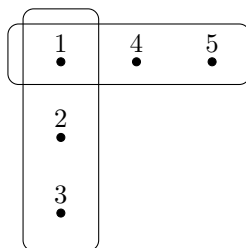


FIGURE 1.9 – Structure de conférences - Hypergraphe

Cet hypergraphe est connexe,  $N/\mathcal{H} = N$ . Si on considère la coalition  $R = \{1, 2, 3, 4\}$ , on observe qu'elle est composée de deux composantes : on a  $R/\mathcal{H} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ .

□

Un jeu à structure de conférences est un triplet  $(N, v, \mathcal{H})$ , avec  $(N, v)$  un jeu à utilité transférable et  $(N, \mathcal{H})$  une structure de conférences. On notera  $\Gamma_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des jeux à structure de conférences.

En 1980, Myerson a introduit un jeu que l'on appellera jeu restreint par l'hypergraphe  $\mathcal{H}$ . Ce jeu est construit exactement de la même manière que le jeu quotient. Pour tout jeu à structure de conférences  $(N, v, \mathcal{H})$  on appelle

jeu restreint par l'hypergraphe  $\mathcal{H}$  le jeu à utilité transférable  $(N, v/\mathcal{H})$  avec

$$(v/\mathcal{H})(S) = \sum_{T \in \mathcal{S}/\mathcal{H}} v(T), \forall S \subseteq N.$$

La valeur d'une coalition dans ce jeu est la somme des valeurs de ses composantes.

Une règle d'allocation pour jeux à structure de conférences est une fonction  $\kappa$  qui associe à tout jeu  $(N, v, \mathcal{H}) \in \Gamma_{\mathcal{H}}$  un vecteur de paiement  $\kappa(N, v, \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^N$ . Nous présenterons ici uniquement la valeur de Myerson pour jeux à structure de conférences. A notre connaissance, il n'existe encore que peu de travaux sur l'élaboration de règles d'allocation sur cet ensemble de jeux. On peut néanmoins citer van den Nouweland *et al.* (1992, [38]) qui ont caractérisé une extension de la valeur de position sur ce domaine.

En parallèle des travaux sur les jeux à structure de conférences on peut évoquer la littérature sur les systèmes stables sous union qui généralisent également les structures de communication de Myerson. Algaba *et al.* caractérisent une extension de la valeur de position (2000, [1]) ainsi que de la valeur de Myerson (2001, [2]) pour ces systèmes stables sous union. L'accointance entre ces systèmes et les structures de conférences de Myerson est mise en valeur par Algaba *et al.* (2004, [3]). Nous ne traiterons pas ces systèmes dans cette monographie mais les liens entre les structures de communication, les structures de conférences et les systèmes stables sous union sont suffisamment étroits pour que nous évoquions ces travaux.

La valeur de Myerson pour les jeux à structure de conférences fait donc usage du jeu restreint par l'hypergraphe  $\mathcal{H}$  et se construit de la même manière que la valeur de Myerson pour les jeux à structure de communication. On note  $MY^C$  la valeur de Myerson pour les jeux à structure de conférences.

**Définition 1.20** (*Valeur de Myerson*):

$$MY^C(N, v, \mathcal{H}) = Sh(N, v/\mathcal{H}), \forall (N, v, \mathcal{H}) \in \Gamma_{\mathcal{H}}.$$

**Exemple 1.12 :**

Considérons la structure de conférences  $(N, \mathcal{H})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $\mathcal{H} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$  ainsi que le jeu  $(N, v)$  avec  $v$  tel que

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| < 3, \\ |S| & \text{si } |S| \geq 3. \end{cases}$$

On obtient le jeu restreint par l'hypergraphe  $\mathcal{H}$  suivant :

$$(v/\mathcal{H})(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| < 3, \\ 3 & \text{si } \{1, 2, 3\} \subseteq S \text{ ou } \{1, 4, 5\} \subseteq S \text{ et } |S| < 5, \\ 5 & \text{si } S = N. \end{cases}$$

La valeur de Myerson est alors

$$MY^C(N, v, \mathcal{H}) = Sh(N, v/\mathcal{H}) = \left(\frac{27}{15}, \frac{12}{15}, \frac{12}{15}, \frac{12}{15}, \frac{12}{15}\right).$$

□

En 1992, van den Nouweland *et al.* ([38]) ont présenté une caractérisation de la valeur de Myerson se basant sur les mêmes axiomes que ceux de Myerson pour la valeur de Myerson de 1977, mais adaptés aux structures de conférences.

L'axiome d'équité ci-après réclame que tout joueur participant à une conférence soit impacté de la même manière par la suppression de cette conférence.

**Axiome 1.18** (*Equité*) :

Une règle d'allocation  $\kappa$  pour jeux à structure de conférences est équitable si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, \mathcal{H}) \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ , pour toute conférence  $H \in \mathcal{H}$  et pour tout couple de joueurs  $i, j \in H$ , cette règle d'allocation vérifie

$$\kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus H) = \kappa_j(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_j(N, v, \mathcal{H} \setminus H).$$

**Axiome 1.19** (*Efficiencce par composante*) :

Une règle d'allocation  $\kappa$  pour jeux à structure de conférences vérifie l'efficiencce par composante si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, \mathcal{H}) \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ , et pour toutes composantes  $R \in N/\mathcal{H}$ , on a

$$\sum_{\substack{i \\ i \in R}} \kappa_i(N, v, \mathcal{H}) = v(R).$$

Utilisant ces deux axiomes, van den Nouweland *et al.* énoncent le théorème suivant :

**Theorème 1.9** (van den Nouweland *et al.* 1992, [38])

*Une règle d'allocation  $\kappa$  pour jeux à structure de conférences vérifie les axiomes d'équité et d'efficiencce par composante si et seulement si  $\kappa = MY^C$ .*



## 1.5 Jeux à structure de coalitions

Dans cette section nous présentons les structures de coalitions. Introduite en 1974 par Aumann et Drèze ([4]), ces structures sont antérieures aux structures de communication de Myerson. Une structure de coalitions se compose de blocs formés *a priori* par les joueurs. La communication est complète au sein de ces blocs mais les blocs ne peuvent communiquer entre eux. Comme van den Nouweland et Slikker le soulignent judicieusement dans leur ouvrage de 2001 ([46]), cette structure est en fait un sous-ensemble des structures de communications utilisant un graphe. En effet, une structure de coalitions peut être représentée par un graphe non connexe n'ayant que des composantes complètes (les blocs).

Etant donné un ensemble de joueurs  $N$ , on appelle structure de coalitions  $\mathcal{B}$  sur  $N$  une partition de  $N$  telle que  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  avec  $\bigcup_{1 \leq k \leq m} B_k = N$

et  $B_k \cap B_l = \emptyset$  pour tout  $k \neq l$ . Les ensembles  $B_k$  sont appelés des blocs. On note, pour tout  $S \subseteq N$ , l'ensemble des blocs composant  $S$  par  $B_S = \{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}\} \setminus \emptyset$ . Soit une coalition  $S \subseteq N$ , on note  $\bar{S} = \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid S \cap B \neq \emptyset\}$  l'union minimal des blocs étant des sur-coalitions de  $S$ .

Un jeu à structure de coalitions est un triplet  $(N, v, \mathcal{B})$  avec  $(N, v)$  un jeu à utilité transférable et  $\mathcal{B}$  une structure de coalitions sur  $N$ . On écrit  $\Gamma_{\mathcal{B}}$  l'ensemble de ces jeux. On note  $(N, v/\mathcal{B})$  le jeu de blocs avec

$$(v/\mathcal{B})(S) = \sum_{B \in B_S} v(B), \forall S \subseteq N.$$

Une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions est une fonction  $\gamma$  qui associe à tout jeu  $(N, v, \mathcal{B}) \in \Gamma_{\mathcal{B}}$  un vecteur de paiement  $\gamma(N, v, \mathcal{B}) \in \mathbb{R}^N$ . La valeur d'Aumann-Drèze (Aumann et Drèze 1974, [4]) est une règle d'allocation pour jeux à structure de coalitions se basant sur une utilisation du jeu de blocs similaire à l'utilisation que font la valeur de Myerson et la valeur de position du jeu quotient et du jeu des liens respectivement. On note cette règle d'allocation  $AD$ .

**Définition 1.21** (*Valeur d'Aumann-Drèze*):

$$AD_i(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N, v/\mathcal{B}), \forall (N, v, \mathcal{B}) \in \Gamma_{\mathcal{B}}.$$

**Exemple 1.13 :**

Soit un jeu à structure de coalitions  $(N, v, \mathcal{B})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  et  $v(S) = |S| - 1$ . La structure de coalitions est la suivante :

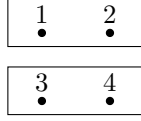


FIGURE 1.10 – Structure de coalitions

Le jeu  $v/\mathcal{B}$  est donc tel que

$$(v/\mathcal{B})(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{1, 2\} \subseteq S \text{ ou } \{3, 4\} \subseteq S, \\ 2 & \text{si } S = N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient  $AD_i(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N, v/\mathcal{B}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

□

**Théorème 1.10** (Slikker et van den Nouweland 2001, [46])

Soit un jeu à structure de coalitions  $(N, v, \mathcal{B})$ ,

$$AD(N, v, \mathcal{B}) = MY^G(N, v, g_{\mathcal{B}}),$$

avec  $g_{\mathcal{B}} = \left\{ \{i, j\}, i, j \in N \mid \exists B \in \mathcal{B}, i, j \in B \text{ et } i \neq j \right\}$ .

Comme nous l'avons évoqué plus haut, une structure de coalitions peut être représentée par un graphe spécifique. Ce théorème met en valeur la proximité entre la valeur de Myerson pour jeux à structure de communication et la valeur d'Aumann-Drèze. La valeur de Myerson peut être en réalité considérée comme une extension de la valeur d'Aumann-Drèze à tous les graphes.

Dans sa thèse de doctorat, Slikker (2000, [45]) démontre un théorème de caractérisation de la valeur d'Aumann-Drèze soulignant encore le rapprochement entre la valeur de Myerson et la valeur d'Aumann-Drèze. Il présente deux nouveaux axiomes.

L'efficacité par bloc est une adaptation de l'efficacité par composante. Chaque bloc étant effectivement une composante, on réclame que la somme de la valeur générée par ce bloc soit répartie entre les joueurs qui le composent.

**Axiome 1.20** (*Efficacité par bloc*) :

Une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions est efficace par

bloc si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, \mathcal{B}) \in \Gamma_{\mathcal{B}}$  et pour tout bloc  $B \in \mathcal{B}$ , cette dernière vérifie

$$\sum_{i \in B} \gamma_i(N, v, \mathcal{B}) = v(B).$$

L'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc est une adaptation de l'axiome d'équilibre des contributions de Myerson. Cette adaptation est plus faible, mais suffisante pour la caractérisation de la valeur d'Aumann-Drèze.

**Axiome 1.21** (*Equilibre des contributions restreint par bloc*) :

Une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeu à structure de coalitions vérifie l'axiome d'équilibre des contributions restreintes par bloc si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, \mathcal{B}) \in \Gamma_{\mathcal{B}}$ , et tout couple de joueurs  $i, j \in B_k \in \mathcal{B}$ , la règle d'allocation vérifie

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{B}) - \gamma_i(N, v, \mathcal{B} - j) = \gamma_j(N, v, \mathcal{B}) - \gamma_j(N, v, \mathcal{B} - i),$$

avec  $\mathcal{B} - i = \{B_1, B_2, \dots, B_k \setminus \{i\}, \{i\}, \dots, B_m\}$ .

**Theorème 1.11** (Slikker 2000, [45])

*Une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions vérifie les axiomes d'équilibre des contributions restreint par bloc et d'efficience par bloc si et seulement si  $\gamma = AD$ .*

## 1.6 Aperçu

Dans cette section nous donnons un aperçu de notre contribution au domaine de la théorie des jeux coopératifs, spécifiquement pour les jeux dans lesquels la communication est restreinte. Cette monographie se concentre sur deux objectifs : étudier les méthodes d'extension de la valeur de Shapley à des jeux à communication restreinte et explorer de nouvelles règles d'allocation pour jeux à structure de communication.

Dans le chapitre 2, nous passerons en revue différentes méthodes utilisées dans la littérature ayant pour but d'étendre certaines règles d'allocation pour jeux à utilité transférable sur l'ensemble des jeux à structure de communication, de conférences ou de coalitions. Nous effectuerons notre étude sous l'angle des propriétés. Notre démarche est motivée par le constat suivant : la plupart de ces méthodes d'extension utilisent, comme nous l'avons vu dans les sections 1.3 à 1.5, une transformation de la fonction caractéristique du jeu afin d'y incorporer des éléments d'information sur la restriction

de la communication. D'un certain point de vue, ces méthodes projettent l'information spécifique à la communication dans l'espace des jeux à utilité transférable plus qu'ils n'étendent la règle d'allocation sur un autre espace. De fait, la manière dont ces transformations vont rendre compte de l'information aura un impact essentiel dans le comportement de la règle étendue. Afin d'analyser ces effets nous établissons une écriture matricielle de ces méthodes d'extension en nous basant sur les travaux de Xu (2008, [51]) et de Hamiache (2012, [24]). Cette écriture nous permet de présenter également une forme unifiée de ces méthodes d'extension.

En nous penchant sur le lien entre les propriétés de la règle d'allocation originale et les propriétés de ses extensions nous sommes alors capables de mettre en valeur l'aspect restrictif et fortement normatif de ces méthodes d'extension. Quelles sont les transformations, en terme de propriété, que subit la règle originale quand on l'étend avec telle ou telle méthode? Cette question nous permet de porter un regard critique sur ces règles d'allocation et de mettre en valeur une autre façon d'aborder la problématique de l'allocation dans les cas où la communication est restreinte.

Cette autre manière de faire repose sur le principe de consistance associée que nous présenterons dans le chapitre 3. Dans ce chapitre nous évoquerons différentes utilisations de ce principe par plusieurs auteurs et autrices depuis sa présentation initiale par Hamiache en 1999 ([19]). Nous essaierons de mettre en valeur les apports de ces approches, tant sur le plan technique que sur le plan interprétatif. On compte peu d'utilisation du principe de consistance associée dans le développement de règles d'allocation pour jeux à structure de communication. Nous pensons que l'utilisation du principe de consistance associée permet justement de se départir du poids que font peser les méthodes d'extension sur l'axiomatique des règles étendues. C'est pourquoi la consistance associée joue un rôle central dans les théorèmes de caractérisation des nouvelles règles d'allocation que nous présenterons dans les chapitres 4 et 5.

Dans la littérature actuelle on peut distinguer deux approches en termes de consistance associée, toutes deux introduites par Hamiache : celle de 1999 ([19]) et celle de 2001 ([20]). La règle d'allocation présentée au chapitre 4 concerne les jeux à structure de communication sur tout type de graphe et s'inscrit dans la lignée de l'article de 2001. Nous construisons un jeu associé au jeu original qui décrit la vision que les joueurs ont eux-même de leur situation. Ce jeu associé est ensuite itéré et nous prouvons que la séquence de ces jeux associés est convergente vers un jeu inessential. En appliquant un axiome d'inessentialité nous obtenons une règle d'allocation unique. Le jeu associé que nous utilisons dans ce chapitre est une extension naturelle du jeu associé de 2001 à la structure de communication. Ainsi la caractérisation que nous obtenons est on ne peut plus proche de celle de la valeur de

Shapley proposée par Hamiache en 2001.

La règle d'allocation présentée au chapitre 5 est, quant à elle, construite en utilisant une approche semblable à celle de 1999. Cette règle d'allocation ne concerne cependant que les jeux à structure de communication sur les graphes acycliques. Le jeu associé utilisé ici fait référence à la règle d'allocation elle-même et cette règle est isolée non pas par convergence mais par la résolution d'une équation de la forme  $\phi(v) = \phi(\tilde{v}_\phi)$ . Cette règle d'allocation identifie précisément le centre du graphe ce qui nous permet, en plus de l'élaboration d'une nouvelle règle d'allocation, d'établir un lien supplémentaire entre notre problématique d'allocation et la problématique mathématique de la mesure de centralité.

## Chapitre 2

# Approche matricielle des jeux coopératifs à communication restreinte

## 2.1 Introduction

En 1974, Aumann et Drèze ([4]) ont proposé d'étendre la valeur de Shapley ([43], 1953) aux jeux à structure de coalitions. En 1977, Myerson ([35]) fit de même pour les jeux à structure de communication, suivi plus tard par la valeur de position de Meessen ([33], 1988) caractérisée par Borm *et al.* ([7]). Myerson développa également en 1980 ([36]) une autre extension sur les jeux à structure de conférences en utilisant une méthode très similaire à celle de 1977. Ces différents travaux, bien plus que simplement offrir une extension de la valeur de Shapley sur un domaine particulier, introduisent différentes manières de prendre en compte la restriction de la communication. Parallèlement, les méthodes utilisées pour étendre la valeur de Shapley à ces domaines peuvent s'appliquer à n'importe quelle règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Les règles d'allocation pour les différents domaines de jeux à communication restreinte que nous avons présentés dans le chapitre 1 utilisent toutes une approche semblable. Afin de pouvoir utiliser la valeur de Shapley sur ces domaines, l'idée est de construire un jeu à utilité transférable qui incorpore, dans sa fonction caractéristique, l'information de la structure de conférences, de coalitions ou de communication. Une fois ce jeu défini, il suffit de lui appliquer la valeur de Shapley.

Dans l'optique d'avoir une meilleure compréhension de ces méthodes d'extension, nous nous intéresserons dans ce chapitre aux liens entre les propriétés des règles d'allocation pour jeux à utilité transférables et les propriétés de leurs différentes extensions. Ce faisant, nous sommes en mesure de mieux comprendre comment ces méthodes d'extension influent sur les règles d'allocation elles-mêmes.

Afin d'effectuer cette analyse, nous mettons en place une approche matricielle des règles d'allocation pour différents types de jeux à communication restreinte. Cette approche est construite à la fois sur les travaux de Hamiache ([24], 2010) et sur ceux de Xu ([51], 2008). Nous nous appuyerons principalement sur deux matrices. La première, issue des travaux de Xu, permet d'exprimer la règle d'allocation qui vise à être étendue. La seconde, inspirée par les travaux de Hamiache, permet de construire le jeu modifié utilisé dans la méthode d'extension. En utilisant cette approche matricielle, nous proposons une écriture unifiée qui exprime les différentes méthodes d'extension sur différents domaines de jeux à communication restreinte. Il est à noter que l'utilisation de cette approche matricielle implique que nous considérons uniquement des règles d'allocation linéaires.

Dans sa thèse de doctorat ([51], 2008), Xu développe une approche matricielle des jeux à utilité transférable en utilisant les jeux de Dirac comme base pour l'ensemble de ces jeux. Il introduit pour cela ce qu'il appelle alors des *matrices de coalitions*.

**Définition 2.1 :**

On dit qu'une matrice est *de coalitions* en colonne (ligne) si ses colonnes (lignes) sont indexées par  $\Omega_N$ .

Par définition, il est connu que l'ensemble des jeux de Dirac forme une base pour l'ensemble des jeux à utilité transférable. On a alors

$$v = \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} v(S) \times \delta_S, \forall v.$$

En conséquence, pour toute règle d'allocation linéaire  $\psi$  on peut écrire

$$\psi(N, v) = \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} v(S) \psi(N, \delta_S),$$

ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Theorème 2.1** ([51] Xu, 2008)

*Soit  $\psi$  une règle d'allocation pour jeux à utilité transférable,  $\psi$  est linéaire si, et seulement si, il existe une et une seule matrice de coalition en colonne  $[M^\psi]_{i \in N, T \in \Omega_N}$  telle que  $\psi(N, v) = M^\psi \times v$  pour tout jeu  $(N, v)$ .*

Cette matrice est telle que  $[M^\psi]_{i,S} = \psi_i(N, \delta_S) \forall i \in N, S \subseteq N$ . Le vecteur de paiement donné par la règle d'allocation  $\psi$  pour le jeu  $(N, \delta_S)$  constitue la colonne  $S$ .

Dans la suite nous utiliserons également les résultats suivants :

**Proposition 2.1** ([51] Xu, 2008)

*Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable,  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul si et seulement si la matrice  $M^\psi$  vérifie*

$$[M^\psi]_{i,S} = -[M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}}, \forall i \in N, \text{ et } \forall S \subseteq N, i \in S, S \neq \{i\}.$$

**Preuve :** Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $(N, v) \in \Gamma$  un jeu dans lequel le joueur  $i \in N$  est un joueur nul.



Par le théorème 2.1 on a

$$\begin{aligned}\psi_i(N, v) &= \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} v(S) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S \\ S \neq \{i\}}} [M^\psi]_{i,S} v(S) + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} v(S) + [M^\psi]_{i,\{i\}} v(\{i\}),\end{aligned}$$

$$\psi_i(N, v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S \\ S \neq \{i\}}} [M^\psi]_{i,S} v(S) + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S \\ S \neq \{i\}}} [M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} v(S \setminus \{i\}) + [M^\psi]_{i,\{i\}} v(\{i\})$$

Puisque le joueur  $i$  est nul on a  $v(\{i\}) = 0$  et  $v(S) = v(S \setminus \{i\})$ ,  $\forall S \subseteq N$ .

$$\psi_i(N, v) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N \\ i \in S \\ S \neq \{i\}}} \left[ [M^\psi]_{i,S} + [M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} \right] v(S).$$

Si  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul alors l'équation précédente doit être égale à 0 pour tout jeu  $v$  dans lequel  $i$  est nul ce qui implique  $[M^\psi]_{i,S} = -[M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} \forall i \in N$ , et  $\forall S \subseteq N$ ,  $i \in S$ ,  $S \neq \{i\}$ .

Si  $\psi$  vérifie  $[M^\psi]_{i,S} = -[M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} \forall i \in N$ , et  $\forall S \subseteq N$ ,  $i \in S$ ,  $S \neq \{i\}$  alors l'équation précédente s'annule et  $\psi$  vérifie bien l'axiome du joueur nul.  $\square$

**Proposition 2.2** ([51] Xu, 2008)

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable,  $\psi$  vérifie l'axiome d'anonymat si et seulement si, pour tout couple de joueurs  $i, j \in N$ , et tout couple de coalitions  $S, T \subseteq N$  telles que  $|S| = |T|$ , la matrice  $M^\psi$  vérifie

$$[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,T}, \text{ pour } i \in S, j \in T \text{ ou } i \notin S, j \notin T.$$

**Preuve :** Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit un jeu  $(N, v) \in \Gamma$  et  $\pi$  une permutation sur  $N$ .

$$\psi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{\pi(i),S} (\pi v)(S) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{\pi(i),S} v(\pi^{-1}(S))$$

$$\psi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{\pi(i),\pi(T)} v(T)$$

Si  $[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,T}$ , pour  $i \in S$ ,  $j \in T$  ou  $i \notin S$ ,  $j \notin T$ , alors

$$\psi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{\pi(i), \pi(T)} v(T) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{i,T} v(T) = \psi_i(N, v),$$

et  $\psi$  vérifie donc l'axiome d'anonymat. Si  $\psi$  vérifie l'axiome d'anonymat alors on a

$$\sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{\pi(i), \pi(T)} v(T) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{i,T} v(T)$$

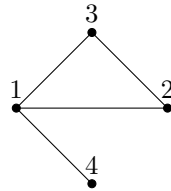
quel que soit le jeu  $(N, v)$ . On peut choisir  $v$  de telle manière à obtenir donc la condition suivante :  $[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,T}$ , pour  $i \in S$ ,  $j \in T$  ou  $i \notin S$ ,  $j \notin T$ .  $\square$

## 2.2 Les structures de Myerson et l'axiome d'équité

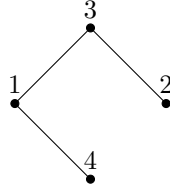
Les axiomatisations d'origine des valeurs de Myerson pour jeux à structure de communication et de conférence reposent toutes deux sur un axiome d'équité. Cet axiome réclame que lorsque la communication entre deux joueurs est rompue, ces deux joueurs soient impactés de la même manière. Est-ce que cette exigence est justifiée ? En effet, imaginons un instant que la communication se retrouve coupée entre deux joueurs laissant l'un d'entre eux isolé mais l'autre toujours "bien connecté". Cela semble difficile de justifier que ces deux joueurs ressentent ce manque de communication de manière comparable. Considérons l'exemple suivant :

### Exemple 2.1 :

Soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$  et  $v$  tel que  $v(S) = |S| - 1$ . Le graphe correspondant est le suivant :



Le paiement donné par la valeur de Myerson dans ce jeu est  $MY(N, v, g) = (\frac{28}{24}, \frac{16}{24}, \frac{16}{24}, \frac{12}{24})$ . En supprimant le lien existant entre les joueurs 1 et 2, nous obtenons le graphe  $\tilde{g}$  suivant :



La valeur de Myerson du jeu  $(N, v, \tilde{g})$  est  $MY(N, v, \tilde{g}) = (\frac{24}{24}, \frac{12}{24}, \frac{24}{24}, \frac{12}{24})$ . Les joueurs 1 et 2 subissent donc la suppression de ce lien de la même manière, tout deux perdent  $\frac{1}{6}$ . Cependant, au vu de la position respective dans le graphe des deux joueurs, il ne semble pas aller de soi que les deux joueurs valorisent de la même manière le lien qui les unit. Dans le même graphe, si c'est le lien qui unit les joueurs 1 et 4 qui est supprimé le constat est le même. Le joueur 4 se retrouve isolé mais le joueur 1 reste bien connecté, pourtant tout deux subiront la même perte de  $\frac{12}{24}$ . □

Cette section vise donc à élucider la question suivante : comment se fait-il qu'une extension de la valeur de Shapley vérifie cet axiome ?

En construisant une approche matricielle de la méthode d'extension de Myerson pour les jeux à structure de communication et de conférences nous sommes en capacité d'établir un lien direct entre l'axiome d'équité et un nouvel axiome pour les règles d'allocation pour jeux à utilité transférable. Ce nouvel axiome est fortement inspiré de l'axiome de joueurs indispensables introduit par van den Brink et Gilles (1996, [9]).

**Définition 2.2** (*Joueur indispensable*):

Un joueur  $j \in N$  est indispensable dans le jeu  $(N, v)$  si et seulement si,  $\forall S \subseteq N \setminus \{j\}$ , on a  $v(S) = 0$ .

**Axiome 2.1** (*Traitement égal des joueurs indispensables*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  et pour tout couple  $i, j \in N$  de joueurs indispensables dans  $(N, v)$ , on a

$$\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v).$$

Cet axiome énonce que si des joueurs sont absolument nécessaires pour qu'une coalition produise une valeur non nulle, alors ces joueurs doivent tous recevoir le même paiement. Cet axiome est construit sur le même concept de

joueurs indispensables que celui présenté par van den Brink et Gilles (1996, [9]). Cependant, l'axiome de ces derniers était développé dans le cadre des jeux à structure de permissions que nous ne traiterons pas dans ce monographe. De plus, leur axiome exige que, pour les jeux monotones, le paiement des joueurs nécessaires soit le paiement maximal donné par la règle. L'axiome que nous proposons ici est donc une version similaire mais plus faible de l'axiome de van den Brink et Gilles.

### Proposition 2.3

Soit  $\psi$  une règle d'allocation pour jeux à utilité transférable. Si  $\psi$  satisfait l'axiome 1.5 de traitement égal des égaux, alors  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables.

**Preuve :** Soit un jeu à utilité transférable  $(N, v) \in \Gamma$  tel que deux joueurs  $i, j \in N$  sont indispensables. Cela signifie que  $v(S) = 0$  pour tout  $S \subseteq N$ ,  $|S \cap \{i, j\}| < 2$ . Dans ce jeu, on a  $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\}) = 0$ ,  $\forall T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ , impliquant que  $i$  et  $j$  sont égaux dans le jeu. Par conséquent, l'axiome de traitement égal des égaux réclame  $\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v)$ . □

Cette proposition nous permet ici d'établir un lien entre l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables et l'axiome du traitement égal des égaux. Ce lien nous permet non seulement de justifier l'utilisation de cet axiome (étant plus faible que et essentiel à l'axiome de traitement égal des égaux) mais également d'amener un parallèle avec d'autres axiomes de la littérature.

En 2001, van den Brink ([8]) a introduit un axiome d'équité pour les règles d'allocations sur l'ensemble  $\Gamma$  différent de l'axiome d'équité de Myerson.

**Axiome 2.2** (*Équité de van den Brink (2001, [8])*) :

Soit deux jeux à utilité transférable  $(N, v)$  et  $(N, w)$  avec  $i, j \in N$  égaux dans le jeu  $(N, w)$ . Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome d'équité de van den Brink si et seulement si

$$\psi_i(N, v + w) - \psi_i(N, v) = \psi_j(N, v + w) - \psi_j(N, v), \quad \forall v.$$

Puisque des joueurs indispensables dans un jeu sont également égaux dans ce même jeu, il est aisé de conclure que si une règle d'allocation vérifie l'axiome d'équité de van den Brink alors elle vérifie l'axiome suivant :

**Axiome 2.3** (*Équité face aux joueurs indispensables*) :

Soit deux jeux à utilité transférable  $(N, v)$  et  $(N, w)$  avec  $i, j \in N$  indispensables dans le jeu  $(N, w)$ . Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome d'équité face aux joueurs indispensables si et seulement si

$$\psi_i(N, v + w) - \psi_i(N, v) = \psi_j(N, v + w) - \psi_j(N, v), \quad \forall v.$$

**Proposition 2.4**

*Soit une règle d'allocation linéaire  $\psi$  pour jeux à utilité transférable. La règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome d'équité face aux joueurs indispensables si et seulement si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables.*

**Preuve :** Soit un jeu à utilité transférable  $(N, w)$  avec  $i, j \in N$  indispensables dans le jeu  $(N, w)$  et une règle d'allocation linéaire  $\psi$  pour jeux à utilité transférable. Si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables on a,  $\forall (N, v) \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, w) &= \psi_j(N, w) \\ \Leftrightarrow \psi_i(N, w) + \psi_i(N, v) - \psi_i(N, v) &= \psi_j(N, w) + \psi_j(N, v) - \psi_j(N, v) \\ \Leftrightarrow \psi_i(N, v + w) - \psi_i(N, v) &= \psi_j(N, v + w) - \psi_j(N, v). \end{aligned}$$

Ce qui correspond à l'axiome d'équité face aux joueurs indispensables.

□

Ce résultat renforce encore la justification de l'utilisation de cet axiome du traitement égal des joueurs indispensables. En effet, non seulement ce dernier est impliqué par le traitement égal des égaux mais il est aussi, dans le cadre d'une règle d'allocation linéaire, équivalent à un axiome impliqué par l'équité de van den Brink. En 2011, Casajus ([10]) a introduit un axiome de *differential marginality* inspiré de Young (1985, [54]) et a démontré l'équivalence entre son axiome et l'axiome d'équité de van den Brink. Ces éléments renforcent encore la parenté de notre axiome avec ceux existant dans la littérature.

Maintenant que nous avons présenté cet axiome du traitement égal des joueurs indispensables, penchons-nous sur l'approche matricielle de la valeur de Myerson.

La valeur de Myerson pour jeux à structure de communication, notée ici  $MY^G$ , est définie,  $\forall i \in N$  comme

$$MY_i^G(N, v, g) = Sh_i(N, v/g) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v/g(S) - v/g(S \setminus \{i\})].$$

Pour toute règle d'allocation linéaire  $\psi$  sur l'ensemble des jeux à utilité transférable, on peut définir une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication, qui serait une extension de la règle  $\psi$ , en utilisant la méthode de Myerson. Cette extension s'écrirait donc

$$\phi(N, v, g) = \psi(N, v/g),$$

pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ .

En utilisant les travaux de Xu présentés plus haut, on peut écrire la règle d'allocation  $\psi(N, v/g)$  comme un produit matriciel :

$$\psi(N, v/g) = M^\psi \times (v/g).$$

De là, nous développons l'approche matricielle de la méthode de Myerson. Définissons tout d'abord, à la manière de Hamiache (2012, [24]), une matrice  $P_g$  des composantes telle que

$$[P_g]_{S \in \Omega_N, T \in \Omega_N} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in S/(g(S)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chacune des lignes  $S$  de cette matrice est un vecteur composé de 1 et de 0 qui identifie les composantes de la coalition  $S$ . En utilisant cette matrice, on obtient

$$(v/g)(S) = \sum_{\substack{R \\ R \in S/(g(S))}} v(R) = \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} [P_g]_{S,R} v(R),$$

ou plus simplement,

$$v/g = P_g \times v.$$

En conséquence, une règle d'allocation  $\phi$  telle que  $\phi(N, v, g) = \psi(N, v/g)$  peut s'écrire

$$\phi(N, v, g) = M^\psi \times P_g \times v,$$

ou

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi P_g]_{i,T} v(T), \forall i \in N.$$

En utilisant cette nouvelle écriture nous prouvons les deux résultats suivants :

**Proposition 2.5**

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. La règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables pour tout jeu  $(N, v)$  si et seulement si  $[M^\psi]_{i,T} = [M^\psi]_{j,T}$  pour tout  $T$ ,  $\{i, j\} \subseteq T \subseteq N$ . C'est à dire, si et seulement si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables sur les jeux de Dirac.

**Preuve :** Il est évident de conclure que si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$ , alors  $\psi$  vérifie cet axiome sur le sous-ensemble des jeux de Dirac. Par conséquent, nous démontrerons seulement que si une règle d'allocation linéaire  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables sur les jeux de Dirac,  $\psi$  vérifie cet axiome sur tous les jeux. La règle d'allocation  $\psi$  étant linéaire on peut écrire

$$\psi_i(N, v) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi]_{i,T} v(T).$$

En séparant la somme on obtient

$$\psi_i(N, v) = \sum_{\substack{T \\ \{i,j\} \subseteq T \subseteq N}} [M^\psi]_{i,T} v(T) + \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N \\ |T \cap \{i,j\}| < 2}} [M^\psi]_{i,T} v(T).$$

L'axiome du traitement égal des joueurs indispensables affirme que deux joueurs indispensables doivent obtenir le même paiement. Supposons que deux joueurs  $i$  et  $j$  sont indispensables dans le jeu  $(N, v)$ . Cela signifie que  $v(T) = 0$  quand  $|T \cap \{i, j\}| < 2$ , et donc

$$\psi_i(N, v) = \sum_{\substack{T \\ \{i,j\} \subseteq T \subseteq N}} [M^\psi]_{i,T} v(T).$$

Les joueurs  $i$  et  $j$  sont indispensables dans un jeu de Dirac  $\delta_T$  si  $i, j \in T$ . Si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables sur les jeux de Dirac, alors  $[M^\psi]_{i,T} = [M^\psi]_{j,T}$ ,  $\forall T$ ,  $\{i, j\} \subseteq T \subseteq N$ , ce qui implique que  $\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v)$  quand les joueurs  $i$  et  $j$  sont indispensables dans le jeu  $(N, v)$ . □

**Proposition 2.6**

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire sur l'ensemble des jeux à utilité transférable  $\Gamma$ . Soit  $\phi$  une règle d'allocation sur l'ensemble des jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = M^\psi \times P_g \times v$ . La règle d'allocation

$\phi$  vérifie l'axiome d'équité de Myerson si et seulement si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables.

**Preuve :** Si  $\phi(N, v, g) = \psi(N, v/g)$ , alors

$$\begin{aligned}
& \phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{i, j\}) \\
&= \sum_{T \subseteq N} [M^\psi P_g]_{i,T} v(T) - \sum_{T \subseteq N} [M^\psi P_{g \setminus \{i,j\}}]_{i,T} v(T) \\
&= \sum_{T \subseteq N} \left[ \sum_{S \subseteq N} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} - \sum_{S \subseteq N} [M^\psi]_{i,S} [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right] v(T) \\
&= \sum_{T \subseteq N} \left[ \sum_{S \subseteq N} [M^\psi]_{i,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right] \right] v(T).
\end{aligned}$$

Faisons la distinction entre les 3 cas suivants :  $|\{i, j\} \cap S| = 0$ ,  $|\{i, j\} \cap S| = 1$  et  $|\{i, j\} \cap S| = 2$ .

**Cas 1 :**

Si  $|\{i, j\} \cap S| = 0$ , alors  $\{i, j\} \notin g(S)$ , ce qui implique  $[P_g]_{S,T} = [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T}$  puisque  $S/(g(S)) = S/((g \setminus \{i, j\})(S))$ . La décomposition de  $S$  en composantes est la même dans le graphe  $g(S)$  et dans le graphe  $g \setminus \{i, j\}(S)$ . L'équation s'annule alors  $\forall T \subseteq N$ .

**Cas 2 :**

Si  $|\{i, j\} \cap S| = 1$ , on obtient le même résultat que dans le cas précédent puisque le lien  $\{i, j\}$  n'est pas contenu dans  $g(S)$ . Sa suppression n'affecte donc pas les composantes de  $S$ .

**Cas 3 :**

Si  $|\{i, j\} \cap S| = 2$ .

$$\begin{aligned}
& \phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{i, j\}) \\
&= \sum_{T \subseteq N} \left[ \sum_{\{i,j\} \subseteq S \subseteq N} [M^\psi]_{i,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right] \right] v(T).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Si  $\psi$  vérifie  $[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}$  pour toute coalition  $S$  telle que  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$ , alors la condition  $\phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{i, j\}) = \phi_j(N, v, g) - \phi_j(N, v, g \setminus \{i, j\})$



$\{i, j\}$ ) est vérifiée. Par conséquent, en utilisant la proposition (2.5), on peut conclure que si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables alors  $\phi$  est équitable.

Considérons à présent la réciproque. Considérons que  $\phi$  vérifie

$$\phi_i(N, v, g) - \phi_i(N, v, g \setminus \{i, j\}) = \phi_j(N, v, g) - \phi_j(N, v, g \setminus \{i, j\}),$$

$\forall i, j \in N, \{i, j\} \in g$ . En utilisant l'équation (2.1),

$$\begin{aligned} \sum_{T \subseteq N} \left[ \sum_{\substack{S \\ \{i, j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i, j\}}]_{S,T} \right] \right] v(T) \\ = \sum_{T \subseteq N} \left[ \sum_{\substack{S \\ \{i, j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i, j\}}]_{S,T} \right] \right] v(T). \end{aligned}$$

Comme cette condition doit être vérifiée pour toute fonction caractéristique  $v$ , particulièrement pour les jeux de Dirac sur  $T$ , on obtient, pour toute coalition  $T \subseteq N$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{S \\ \{i, j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i, j\}}]_{S,T} \right] \\ = \sum_{\substack{S \\ \{i, j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i, j\}}]_{S,T} \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Cela doit être vrai pour tous les graphes, particulièrement pour les graphes en étoile  $(N, g)$  avec  $g = \{\{1, i\}, \{2, i\}, \dots, \{i-1, i\}, \{i+1, i\}, \dots, \{n, i\}\}$ . Notons que, dans ce cas, tout graphe  $(S, g(S))$  avec  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$  est connexe.

Cela doit être vrai pour toute coalition  $T \subseteq N$ ; considérons les coalitions  $T$  telles que  $\{i, j\} \subseteq T$ . On a alors  $[P_{g \setminus \{i, j\}}]_{S,T} = 0, \forall S \subseteq N$  puisque la coalition  $T$  n'est plus connexe ( $j$  est à présent isolé) et ne peut donc plus être une composante connexe de  $S$ . On a également

$$[P_g]_{S,T} = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{si } S \neq T, \end{cases}$$

puisque  $S$  est toujours connexe. L'équation (2.2) se réduit alors à

$$[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}, \quad (2.3)$$

On peut donc conclure que si  $\phi$  vérifie l'axiome d'équité, cela implique que la règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'équation (2.3) pour toute coalition  $S$  telle que  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$ . Comme  $\psi$  est linéaire, en se référant à la proposition (2.5),

la réciproque est donc vérifiée.

□

Cette proposition établit ici un lien direct entre l'axiome d'équité de Myerson et l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables. Cependant, il est d'autant plus intéressant que cet axiome soit impliqué par l'axiome de traitement égal des égaux. Cela nous permet de voir la méthode de Myerson et l'utilisation du jeu quotient sous un jour différent, puisque toute règle d'allocation vérifiant le traitement égal des égaux donnera une règle d'allocation vérifiant l'équité si on lui applique cette méthode d'extension. En revanche, l'axiome d'équité ne jouit pas du même consensus que l'axiome du traitement égal des égaux. En conclusion, si l'on étend une règle d'allocation vérifiant le traitement égal des égaux, il faut soit accepter l'axiome d'équité, soit utiliser une autre approche que celle de Myerson.

La valeur de Myerson pour jeux à structure de conférences introduite par Myerson en 1980 ([36]), notée ici  $MY^C$ , est définie,  $\forall i \in N$ , comme :

$$MY_i^C(N, v, \mathcal{H}) = Sh_i(N, v/\mathcal{H}).$$

Nous en déduisons une forme générale pour toute règle d'allocation linéaire  $\psi$  pour jeux à utilité transférable :

$$\kappa_i(N, v, \mathcal{H}) = \psi_i(N, v/\mathcal{H}).$$

Introduisons la matrice suivante,

$$[K]_{S \subseteq N, T \subseteq N} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in S/(\mathcal{H}(S)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors écrire la règle d'allocation  $\kappa(N, v, \mathcal{H}) = \psi(N, v/\mathcal{H})$  comme

$$\kappa_i(N, v, \mathcal{H}) = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi K]_{i,T} v(T), \quad \forall i \in N.$$

En utilisant cette écriture, on prouve la proposition suivante :

**Proposition 2.7**

*Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire sur l'ensemble des jeux à utilité transférable  $\Gamma$ . Soit  $\kappa$  une règle d'allocation sur l'ensemble des jeux à structure de conférences telle que  $\kappa(N, v, g) = M^\psi \times K \times v$ . La règle d'allocation  $\kappa$  vérifie l'axiome d'équité si et seulement si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables.*

**Preuve :** Si  $\kappa(N, v, \mathcal{H}) = \psi(N, v/\mathcal{H})$ , on a

$$\begin{aligned} \kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\}) &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi K_{\mathcal{H}}]_{i,T} v(T) \\ &\quad - \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{i,T} v(T) \end{aligned}$$

avec  $K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}$  la matrice des composantes dans la structure de conférences  $\mathcal{H} \setminus \{H\}$  et  $i, j \in H$ . En détaillant,

$$\begin{aligned} \kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\}) &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right] v(T). \end{aligned}$$

On a  $[K_{\mathcal{H}}]_{S,T} = [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T}$  pour tout  $T \subseteq N$  et tout  $S \subseteq N$  avec  $H \not\subseteq S$  puisque une conférence n'est faisable que si tous les membres sont présents. On obtient

$$\begin{aligned} \kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\}) &= \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{S \\ H \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right] v(T). \quad (2.4) \end{aligned}$$

En conséquence, si  $\psi$  vérifie  $[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}$  pour toute coalition  $S$  telle que  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$ , alors la condition  $\kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\}) = \kappa_j(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_j(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\})$  est vérifiée. En utilisant la proposition (2.5), on conclut que si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables alors  $\phi$  vérifie l'axiome d'équité.

Considérons à présent la réciproque : supposons que  $\kappa$  vérifie  $\kappa_i(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_i(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\}) = \kappa_j(N, v, \mathcal{H}) - \kappa_j(N, v, \mathcal{H} \setminus \{H\})$ . Ce que l'on peut écrire, d'après l'équation (2.4), comme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{S \\ H \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right] v(T) &= \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{S \\ H \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right] v(T). \end{aligned}$$

Ceci doit être vérifié quelle que soit la fonction caractéristique  $v$ , en parti-

culier pour les jeux de Dirac  $\delta_T$ . Par conséquent, la condition s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{S \\ H \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} & \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right] \\ & = \sum_{\substack{S \\ H \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [K_{\mathcal{H}}]_{S,T} - [K_{\mathcal{H} \setminus \{H\}}]_{S,T} \right], \quad \forall T \subseteq N. \end{aligned}$$

Ceci doit être vrai quelle que soit la structure de conférences. Puisque les graphes sont des structures de conférences avec uniquement des conférences de deux joueurs, la dernière équation doit également être vérifiée pour les graphes en étoile, comme utilisés dans la preuve de la proposition précédente. En conséquence, cette dernière équation doit être vraie pour

$$\mathcal{H} = g = \{ \{1, i\}, \{2, i\}, \dots, \{i-1, i\}, \{i+1, i\}, \dots, \{n, i\} \}$$

et  $H = \{i, j\}$ . Dans ce cas l'équation précédente devient donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{S \\ \{i,j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} & \left[ [K_g]_{S,T} - [K_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right] \\ & = \sum_{\substack{S \\ \{i,j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [K_g]_{S,T} - [K_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Ce qui, par définition de  $K_{\mathcal{H}}$  et de  $P_g$ , devient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{S \\ \{i,j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} & \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right] \\ & = \sum_{\substack{S \\ \{i,j\} \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [P_g]_{S,T} - [P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Cela doit être vrai pour toute coalition  $T \subseteq N$ . Considérons les coalitions  $T$  telle que  $\{i, j\} \subseteq T$ . On a alors  $[P_{g \setminus \{i,j\}}]_{S,T} = 0$ ,  $\forall S \subseteq N$  puisque la coalition  $T$  n'est plus connexe ( $j$  est à présent isolé) et ne peut donc plus être une composante connexe de  $S$ . On a également

$$[P_g]_{S,T} = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{si } S \neq T, \end{cases}$$

puisque  $S$  est toujours connexe. L'équation (2.6) se réduit alors à

$$[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}.$$

On peut donc conclure que si  $\kappa$  vérifie l'axiome d'équité, cela implique que la règle d'allocation  $\psi$  vérifie

$$[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}, \quad (2.7)$$

pour toute coalition  $S$  telle que  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$ . Comme  $\psi$  est linéaire, en se référant à la proposition 2.5, la réciproque est donc vérifiée.

□

### 2.3 Structure de communication, valeur de Myerson et valeur de position

En 1992, Borm *et al.* ([7]) ont caractérisé une autre règle d'allocation pour jeux à structure de communication, la valeur de position. Cette caractérisation concerne les structures de communication reposant sur des graphes acycliques. Il faut attendre les travaux de Slikker en 2005 ([47]) pour voir apparaître une caractérisation générale sur l'ensemble des graphes. Bien que n'étant pas *stricto sensu* une extension de la valeur de Shapley<sup>1</sup>, cette règle est construite autour, c'est pourquoi nous la considérons parmi les autres extensions de la valeur de Shapley. Le principe de cette règle d'allocation est de déterminer tout d'abord un paiement pour chaque lien, et de diviser ce paiement entre les joueurs qui partagent ce lien. Les liens de communication peuvent alors être interprétés comme une ressource partagée par deux joueurs. Dans son article de 2007 (Casajus, [11]), Casajus démontre que la valeur de position peut être exprimée comme la valeur de Myerson d'un jeu modifié du jeu d'origine, mettant à jour ainsi les similitudes entre les deux règles d'allocation. Dans cette section nous montrerons que les effets de ces deux méthodes d'extension sur les propriétés de la valeur de Shapley nous permettent d'apporter des arguments dans le sens de cette similitude. Nous établirons également une construction matricielle générale permettant d'unifier ces deux règles d'allocation.

En utilisant la définition du jeu des liens (1.1) on peut écrire la valeur de position

$$PV_i(N, v, g) = \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} Sh_{\ell}(g, r^v), \forall i \in N.$$

Pour toute règle d'allocation linéaire  $\psi$  pour jeux à utilité transférable, on peut définir une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication en utilisant la même méthode que celle à l'origine de la valeur de position. On obtient la forme suivante :

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \psi_{\ell}(g, r^v).$$

---

1. voir chapitre 1

On a  $r^v(L) = \sum_{C \in N(L)/L} v(C)$ ,  $\forall L \subseteq g$ . On peut donc définir une matrice  $\mathcal{L}_g$

telle que

$$[\mathcal{L}_g]_{L \subseteq g, S \in \Omega_N} = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in N(L)/L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent on peut écrire  $r^v = \mathcal{L}_g \times v$ .

On écrit  $[M_g^\psi]$  la matrice telle que

$$[M_g^\psi]_{\ell \in g, L \subseteq g} = \psi_\ell(g, \delta_L).$$

A l'aide de ces deux matrices, nous pouvons écrire la méthode d'extension de la valeur de position de la manière suivante :

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, T} v(T), \forall i \in N,$$

ou encore

$$\phi(N, v, g) = A_g \times M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v,$$

avec la matrice  $A_g$  définie comme :

$$[A_g]_{i \in N, a \in g} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i \in a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Regardons plus en détail les matrices que l'on a ici. La matrice  $A_g$  permet la conversion entre les joueurs et leurs liens,  $M_g^\psi$  est la matrice de la règle d'allocation sur les liens de  $g$ , la matrice  $\mathcal{L}_g$  détermine les coalitions possibles et enfin,  $v$  est la fonction caractéristique du jeu. Cela nous permet de concevoir une forme matricielle générale pour un certain type d'extension. Soit une règle d'allocation linéaire  $\psi$  pour jeux à utilité transférable, on peut définir une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication telle que

$$\phi(N, v, g) = \underset{n \times x}{A} \times \underset{x \times 2^x - 1}{M_X^\psi} \times \underset{2^x - 1 \times 2^n - 1}{Q_g} \times \underset{2^n - 1 \times 1}{v}.$$

$A$  est la matrice qui établit la relation entre les joueurs dans  $N$  et les éléments d'un ensemble  $X$  ; à la manière de la matrice  $A_g$  qui établit que chaque joueur a part égale dans les liens qu'il possède. La matrice  $M_X^\psi$  exprime le paiement donné par  $\psi$  pour chaque élément de  $X$ . La matrice  $Q$  associe les composantes de  $g$  avec des coalitions de joueurs dans  $X$ . Enfin, le vecteur  $v$  est la forme vectorielle de la fonction caractéristique du jeu.

Pour la valeur de Myerson, la première matrice est la matrice identité puisqu'elle considère directement les joueurs dans  $N$ .

Les similarités existantes entre la valeur de Myerson et la valeur de position

apparaissent ici clairement au travers de cette écriture matricielle qui nous permet de construire une structure unifiée commune aux deux règles d'allocation.

**Proposition 2.8**

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\phi$  une règle d'allocation pour jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = M^\psi \times P_g \times v$ . La règle d'allocation  $\phi$  est efficiente par composante si et seulement si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul.

**Preuve :** Prouvons tout d'abord que si une règle d'allocation  $\phi = M^\psi \times P_g \times v$  vérifie l'efficacité par composante alors la règle d'allocation  $\psi$  vérifie les axiomes d'efficacité et du joueur nul. Soit  $R$  une composante  $R \in N/g$ ,

$$\sum_{i \in R} \phi_i(N, v, g) = v(R)$$

En détaillant cette expression on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i \in R} \phi_i(N, v, g) &= \sum_{i \in R} \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi P_g]_{i,T} v(T) \\ &= \sum_{i \in R} \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N \\ T \neq R}} [M^\psi P_g]_{i,T} v(T) + \sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,R} v(R) = v(R). \end{aligned}$$

Ceci est vérifié quelle que soit  $v$ . Si  $v = \delta_R$  on obtient

$$\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,R} = 1, \tag{2.8}$$

et si  $v = \delta_T$ ,  $T \neq R$  on obtient

$$\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,T} = 0 \quad \forall T \neq R. \tag{2.9}$$

Sur la base de l'équation (2.8), on a

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,R} = \sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,R} \\ &= \sum_{i \in R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,R} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,R} \right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour obtenir  $[P_g]_{S,R} = 1$ , il faut  $R \in S/g(S)$ , ce qui implique  $R \subseteq S$ . Cependant il n'existe aucune coalition  $S$  telle que  $i \notin S, R \subseteq S$  puisque  $i \in R$ . On obtient alors

$$\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,R} = \sum_{i \in R} \sum_{\substack{R \subseteq S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,R}.$$

Puisque  $R \subseteq S$  et  $R \in N/g$ ,  $R^* = R$  et la coalition  $S$  est toujours telle que  $S = R \cup T$  avec  $\emptyset \subseteq T \subseteq N \setminus R$ . Cela implique que  $R$  est toujours une composante connexe de  $S$ . On peut alors écrire

$$\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,R} = \sum_{i \in R} \sum_{\substack{R \subseteq S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S}.$$

La condition (2.8) devient

$$\sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \\ R \subseteq S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} = 1,$$

ou encore

$$\sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \\ R \subseteq S \subseteq N}} \psi_i(N, \delta_S) = 1.$$

Puisque  $\psi$  est linéaire, sachant  $u_R = \sum_{\substack{S \\ R \subseteq S \subseteq N}} \delta_S$ , on obtient

$$\sum_{i \in R} \psi_i(N, u_R) = 1. \quad (2.11)$$

Cette condition est vraie quelle que soit la coalition  $R \in N/g$  et quel que soit le graphe  $g$ . En choisissant d'une manière arbitraire la coalition  $R$  on peut toujours trouver un graphe pour lequel cette coalition est une composante du graphe. Ainsi l'équation (2.11) est vraie pour toute coalition  $R \subset N$ . Il nous reste à obtenir cette condition pour  $R = N$  afin d'obtenir  $\sum_{i \in N} \psi_i(N, u_R)$  qui correspond à l'efficacité sur un jeu d'unanimité.

Sur la base à présent de la condition (2.9), on peut écrire, pour tout  $T \neq R$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,T} = \sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} \\ &= \sum_{i \in R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} \right] \end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas :  $T \not\subseteq R$  et  $T \subset R$ .



**Cas 1 :**  $T \not\subseteq R$ .

La condition

$$0 = \sum_{i \in R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \subseteq R \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} \right],$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i \in R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \subseteq R \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\subseteq R \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \subseteq R \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\subseteq R \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $T \not\subseteq R$ , si  $S \subseteq R$  alors  $T \not\subseteq S$  et donc  $T \notin S/g(S)$ . En conséquence, si  $S \subseteq R$ ,  $[Pg]_{S,T} = 0$  et les termes correspondants s'annulent.

$$0 = \sum_{i \in R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\subseteq R \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\subseteq R \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [Pg]_{S,T} \right].$$

Comme  $T \not\subseteq R$  on peut distinguer deux sous cas :

**Cas 1.1 :**  $T \cap R \neq \emptyset$  et  $T \cap (N \setminus R) \neq \emptyset$

$T$  est l'union d'un sous-ensemble de  $N \setminus R$  et d'un sous-ensemble de  $R$  auquel cas  $T$  est non connexe et ne peut être une composante connexe. Dans ce cas  $[Pg]_{S,T} = 0$  quel que soit  $S \subseteq N$ ,  $S \not\subseteq R$  et la condition est vérifiée.

**Cas 1.2 :**  $T \subseteq (N \setminus R)$

Dans ce cas, comme  $i \in R$  et  $S \not\subseteq R$  on a

$$T \in S/g(S) \Leftrightarrow T \in (S \setminus \{i\})/g(S \setminus \{i\})$$

ainsi que

$$T \notin S/g(S) \Leftrightarrow T \notin (S \setminus \{i\})/g(S \setminus \{i\})$$

puisque la présence ou non de  $i$  dans  $S$  ne change pas le fait que  $T$  soit ou non une composante de  $S$ . On obtient alors

$$\sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\subseteq R \\ i \in S}} \left[ [M^\psi]_{i,S} + [M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} \right] [Pg]_{S,T} = 0, \quad \forall T \subseteq N \setminus R \quad (2.12)$$

ceci quel que soit le graphe  $g$ . Supposons le graphe  $g$  tel que

$$N/g = \{\{N \setminus \{k\}\}, \{k\}\},$$

pour un joueur  $k \in N$  quelconque. Soit  $R = \{k\}$  et  $T = N \setminus \{k\}$  la seule coalition  $S \not\subseteq R$ ,  $k \in S$  telle que  $[P_g]_{S,T} = 1$  est  $S = N$ . On obtient alors

$$[M^\psi]_{k,N} = -[M^\psi]_{k,N \setminus \{k\}}, \quad \forall k \in N.$$

Supposons à présent le graphe  $g$  tel que

$$N/g = \{\{N \setminus \{k_1, k_2\}\}, \{k_1\}, \{k_2\}\},$$

pour deux joueurs  $k_1$  et  $k_2$  quelconques. Soit  $R = \{k_1\}$  et  $T = N \setminus \{k_1, k_2\}$ , les seules coalitions  $S \not\subseteq R$ ,  $k_1 \in S$  telles que  $[P_g]_{S,T} = 1$  sont  $S = N \setminus \{k_2\}$  et  $S = N$ . En utilisant notre conclusion de l'exemple précédent on obtient

$$[M^\psi]_{k_1, N \setminus \{k_2\}} = -[M^\psi]_{k_1, N \setminus \{k_1, k_2\}}, \quad \forall k_1, k_2 \in N.$$

En procédant ainsi par récurrence on obtient

$$[M^\psi]_{i,S} = -[M^\psi]_{i, S \setminus \{i\}} \quad \forall S, \quad \forall i \in N.$$

En utilisant la proposition 2.1, on peut conclure que si  $\phi$  vérifie l'axiome d'efficacité par composante alors  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul.

Ceci étant dit, en se reportant à la première partie de cette preuve nous avons la condition suivante

$$\sum_{\substack{i \\ i \in R}} \psi_i(N, u_R) = 1.$$

Nous venons de prouver que si  $\phi$  vérifie l'efficacité par composante alors  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul. Cette équation peut donc s'écrire

$$\sum_{\substack{i \\ i \in N}} \psi_i(N, u_R) = 1,$$

ce qui correspond à l'axiome d'efficacité sur un jeu d'unanimité. Puisque  $\psi$  est linéaire, on peut conclure que si  $\phi$  vérifie l'axiome d'efficacité par composante alors  $\psi$  vérifie l'axiome d'efficacité et du joueur nul. Ce résultat est général puisque la matrice  $M^\psi$  ne dépend pas du graphe. Par conséquent dans la suite nous pourrons utiliser le fait que  $\psi$  est efficace et vérifie l'axiome du joueur nul.

**Cas 2 :  $T \subset R$**

On a

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,T} &= \sum_{i \in R} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} [M^\psi]_{i,S} \\
&= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} \sum_{i \in R} [M^\psi]_{i,S} \\
&= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} \sum_{i \in N} [M^\psi]_{i,S} - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} \sum_{i \in N \setminus R} [M^\psi]_{i,S}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul sachant que  $[M^\psi]_{i,S} = \psi_i(N, \delta_S)$  et que  $\psi$  est efficiente ( $\delta_S(N) = 0$  par définition). On a donc  $\sum_{i \in N} [M^\psi]_{i,S} = 0, \forall S$ .

Conséquemment, la condition  $\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,T} = 0$  est équivalente à

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} \sum_{i \in N \setminus R} [M^\psi]_{i,S} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} \sum_{i \in N \setminus R} [M^\psi]_{i,S} &= \sum_{i \in N \setminus R} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \in S/(g(S))}} [M^\psi]_{i,S} \\
&= \sum_{i \in N \setminus R} \sum_{S \subseteq N} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} \\
&= \sum_{i \in N \setminus R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} \right] \\
&= \sum_{i \in N \setminus R} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} [P_g]_{S \setminus \{i\}, T} \right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Puisque la règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul, on a  $[M^\psi]_{i,S} =$

$-[M^\psi]_{i,S\setminus\{i\}}$ . On peut alors écrire

$$= \sum_{i \in N \setminus R} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} - [P_g]_{S\setminus\{i\},T}$$

Comme  $T \subset R$  et  $i \in N \setminus R$ , la suppression du joueur  $i$  de la coalition  $S$  ne change pas le fait que  $T$  soit ou non une composante connexe de  $S$  et de  $S \setminus i$ . En conséquence  $[P_g]_{S,T} = [P_g]_{S\setminus i,T} \forall S$  ce qui implique

$$\sum_{i \in N \setminus R} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [P_g]_{S,T} - [P_g]_{S\setminus i,T} = 0$$

et donc  $\sum_{i \in R} [M^\psi P_g]_{i,T} = 0$  pour  $T \subset R$ .

On peut alors conclure que si  $\phi$  est efficiente par composante alors  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul.

Prouvons à présent que si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul, alors  $\phi$  est efficiente par composante. L'équation (2.11) s'obtient en détaillant et précisant l'écriture de la condition (2.8). En utilisant l'efficience à l'équation (2.11), la condition (2.8) est vérifiée. En utilisant l'axiome du joueur nul à l'équation (2.12), la condition (2.9) est également vérifiée dans le cas  $T \not\subset R$ . Dans le cas  $T \subset R$ , on a vu que si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul alors la condition (2.9) est vérifiée. On peut donc conclure que si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul alors  $\phi$  est efficiente par composante ce qui conclut notre preuve.  $\square$

### Proposition 2.9

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\phi$  une règle d'allocation pour jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = A_g \times M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v$ . La règle d'allocation  $\phi$  est efficiente par composante si et seulement si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul.

**Preuve :** Commençons par prouver que si  $\phi$  est efficiente par composante alors  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul. La condition de l'efficience par composante s'écrit

$$\sum_{i \in R} \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \sum_{T \subseteq N} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell,T} v(T) = v(R), \forall R \in N/g,$$

ou encore

$$\sum_{i \in R} \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \left[ \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \neq R}} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, T} v(T) + [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, R} v(R) \right] = v(R).$$

Puisque  $R$  est une composante de  $N$ , chaque lien de chaque joueur de  $R$  est dans  $g(R)$ . On peut donc écrire

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \neq R}} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, T} v(T) + [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, R} v(R) \right] = v(R).$$

Cela doit être vrai pour toute fonction caractéristique  $v$ , par conséquent on peut décomposer la condition de l'efficacité par composante en deux conditions distinctes. La première est obtenue quand  $v = \delta_R$  et la seconde quand  $v = \delta_{T \neq R}$  :

$$\sum_{\ell \in g(R)} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, R} = 1 \tag{2.14}$$

$$\sum_{\ell \in g(R)} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, T} = 0 \quad \forall T \neq R. \tag{2.15}$$

Sur la base de l'équation (2.14) on a

$$\sum_{\ell \in g(R)} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, R} = 1 \Leftrightarrow \sum_{\ell \in g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g}} [M_g^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, R} = 1.$$

Introduisons une nouvelle notation : soit  $S$  une coalition connexe, on appelle  $h(S)$  l'ensemble des coalitions de liens qui sont des couvertures minimales connexes de  $S$ . Formellement, on note

$$h(S) = \left\{ L \subseteq g \mid \{S\} = N(L)/L \text{ et } \nexists M \subset L \text{ telle que } S \in N(M)/M \right\}.$$

$R$  étant une composante de  $N$ , pour chaque coalition  $L \subseteq g$  qui inclut un élément de  $h(R)$ , on a  $[\mathcal{L}_g]_{L, R} = 1$ . On peut donc écrire l'équation précédente comme

$$\sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{H \in h(R)} \sum_{\substack{L \\ H \subseteq L \subseteq g}} [M_g^\psi]_{\ell, L} - (|h(R)| - 1) \sum_{\substack{L \\ g(R) \subseteq L \subseteq g}} [M_g^\psi]_{\ell, L} \right] = 1.$$

Le second terme permet d'éliminer les coalitions prises en compte plusieurs

fois par le premier terme. En utilisant la linéarité de  $\psi$  on a

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{H \in h(R)} \psi_{\ell}(g, u_H) - (|h(R)| - 1) \psi_{\ell}(g, u_{g(R)}) \right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_{H \in h(R)} \left[ \sum_{\ell \in g(R)} \psi_{\ell}(g, u_H) \right] - (|h(R)| - 1) \sum_{\ell \in g(R)} \psi_{\ell}(g, u_{g(R)}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_{H \in h(R)} \left[ \sum_{\ell \in H} \psi_{\ell}(g, u_H) + \sum_{\ell \in g(R) \setminus H} \psi_{\ell}(g, u_H) \right] \\
&\quad - (|h(R)| - 1) \sum_{\ell \in g(R)} \psi_{\ell}(g, u_{g(R)}) = 1. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir continuer notre démonstration, il nous faudrait idéalement travailler d'abord sur la base de l'équation (2.15) qui nous permettra de prouver que si  $\phi$  vérifie l'efficacité par composante alors  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul, revenir sur l'équation (2.16) puis enfin retourner continuer le développement de la condition (2.15). Afin de simplifier ces circonvolutions, nous supposons ici que  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul afin de terminer cette partie de la preuve et ensuite prouverons cette hypothèse en développant la condition (2.15). Sachant donc que  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul on obtient

$$\sum_{H \in h(R)} \left[ \sum_{\ell \in H} \psi_{\ell}(g, u_H) \right] - (|h(R)| - 1) \sum_{\ell \in g(R)} \psi_{\ell}(g, u_{g(R)}) = 1. \tag{2.17}$$

Puisque l'on peut construire un graphe pour lequel il n'y a qu'une seule couverture minimale connexe de  $R$  (que l'on notera  $H$ ), cette condition peut être réduite à

$$\sum_{\ell \in H} \psi_{\ell}(g, u_H) = 1.$$

Sachant que  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul, cela implique que  $\psi$  est efficace pour les jeux d'unanimité. La règle  $\psi$  étant linéaire, on peut conclure qu'elle est donc efficace sur l'ensemble des jeux. Sachant maintenant si  $\phi$  est efficace par composante alors  $\psi$  est efficace, on s'intéresse au cas où l'on a plusieurs couvertures minimales connexes de  $R$ . On obtient

$$|h(R)| \left[ \sum_{\ell \in H} \psi_{\ell}(g, u_H) \right] - (|h(R)| - 1) \sum_{\ell \in g(R)} \psi_{\ell}(g, u_{g(R)}) = 1.$$

Cette équation se réduit à  $1 = 1$  en utilisant l'efficacité de  $\psi$  déjà prouvée.

Reprenons à présent sur la base de l'équation (2.15). Comme  $T \neq R$  on peut distinguer deux cas :  $T \not\subseteq R$  ou  $T \subset R$ .

**Cas 1 :  $T \not\subseteq R$**

On peut écrire

$$0 = \sum_{\ell \in g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} = \sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \in L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \notin L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} \right].$$

Si  $L \subseteq g(R)$  et  $T \not\subseteq R$  alors  $T \not\subseteq N(L)$  et donc  $T \not\subseteq N(L)/L$ . On obtient

$$0 = \sum_{\ell \in g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} = \sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ L \not\subseteq g(R) \\ \ell \in L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ L \not\subseteq g(R) \\ \ell \notin L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} [\mathcal{L}_g]_{L,T} \right].$$

Puisque  $T \not\subseteq R$ , soit  $T$  est l'union d'un sous-ensemble de  $N \setminus R$  et d'un sous-ensemble de  $R$ , auquel cas  $T$  n'est pas connexe et ne peut donc être une composante connexe; soit  $T \subseteq N \setminus R$  et dans ce cas l'appartenance ou non de  $\ell \in g(R)$  à la coalition  $L$  n'affectera pas le fait que  $T$  appartienne ou non à  $N(L)/L$ . On a donc la condition suivante

$$\sum_{\ell \in g(R)} \left[ \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ L \not\subseteq g(R) \\ T \in N(L)/L \\ \ell \in L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} + \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ L \not\subseteq g(R) \\ T \in N(L)/L \\ \ell \notin L}} [M_g^\psi]_{\ell,L} \right] = 0, \\ \sum_{\ell \in g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ L \not\subseteq g(R) \\ T \in N(L)/L \\ \ell \in L}} \left[ [M_g^\psi]_{\ell,L} + [M_g^\psi]_{\ell,L \setminus \{\ell\}} \right] = 0, \quad \forall T \subseteq N \setminus R. \quad (2.18)$$

Ceci doit être vrai pour tout graphe  $(N, g)$ . Soit un graphe  $g$  tel que

$$N(g)/g = \{\{g \setminus \{k\}, \{k\}\}.$$

Soit  $R = N(\{k\})$ ,  $T = N \setminus N(\{k\})$ , la seule coalition  $L$  telle que  $L \subseteq g$ ,  $L \not\subseteq g(R)$ ,  $k \in L$  est  $L = g$ . On peut donc écrire

$$[M_g^\psi]_{k,g} = -[M_g^\psi]_{k,g \setminus \{k\}}, \quad \forall k \in g.$$

Soit un graphe  $g$  tel que

$$N(g)/g = \{\{g \setminus \{k_1, k_2\}, \{k_1\}, \{k_2\}\}.$$

Soit  $R = N(\{k_1\})$ ,  $T = N \setminus N(\{k_1, k_2\})$ , les seules coalitions  $L$  telles que  $L \subseteq g$ ,  $L \not\subseteq g(R)$ ,  $k_1 \in L$  sont  $L = g \setminus \{k_2\}$  et  $L = g$ . En utilisant l'équation précédente on obtient

$$[M_g^\psi]_{k_1, g \setminus \{k_2\}} = -[M_g^\psi]_{k_1, g \setminus \{k_1, k_2\}}, \quad \forall k_1, k_2 \in g.$$

En procédant ainsi par récurrence on obtient

$$[M_g^\psi]_{\ell, L} = -[M_g^\psi]_{\ell, L \setminus \{\ell\}}, \quad \forall \ell \in g, \quad \forall L \subseteq g.$$

Ceci est la définition d'une règle d'allocation vérifiant l'axiome du joueur nul. On a donc prouvé que si  $\phi$  est efficiente par composante alors elle vérifie l'axiome du joueur nul. Le développement que nous avons donc effectué à partir de l'équation (2.16) est donc valide et on peut donc conclure que si  $\phi$  est efficiente par composante alors  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul.

## Cas 2 : $T \subset R$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\ell \in g(R)} [M_g^\psi \mathcal{L}_g]_{\ell, T} = \sum_{\ell \in g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} [M^\psi]_{\ell, L} \\ &= \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} \sum_{\ell \in g(R)} [M^\psi]_{\ell, L} \\ &= \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} \sum_{\ell \in g} [M^\psi]_{\ell, L} - \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} [M^\psi]_{\ell, L}. \end{aligned}$$

Par efficience on obtient  $\sum_{\ell \in g} [M_g^\psi]_{\ell, L} = 0$  conséquemment,

$$\begin{aligned} & - \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} [M^\psi]_{\ell, L} = - \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ T \in N(L)/L}} [M^\psi]_{\ell, L} \\ &= - \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g}} [M^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, T} \\ &= - \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} \left[ \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \in L}} [M^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, T} + \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \notin L}} [M^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, T} \right] \\ &= - \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} \left[ \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \in L}} [M^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, T} + \sum_{\substack{L \\ L \subseteq g \\ \ell \in L}} [M^\psi]_{\ell, L \setminus \{\ell\}} [\mathcal{L}_g]_{L \setminus \{\ell\}, T} \right] \quad (2.19) \end{aligned}$$



ce qui, avec l'aide de l'axiome du joueur nul, peut être écrit comme

$$= - \sum_{\ell \in g \setminus g(R)} \sum_{\substack{L \subseteq g \\ \ell \in L}} [M^\psi]_{\ell, L} [\mathcal{L}_g]_{L, T} - [\mathcal{L}_g]_{L \setminus \{\ell\}, T}.$$

Puisque  $T \subset R$  et  $\ell \in g \setminus g(R)$ , la suppression de  $\ell$  de la coalition  $L$  ne changera pas l'état de  $T$  en tant que composante de  $L$ . Par conséquent  $[\mathcal{L}_g]_{L, T} = [\mathcal{L}_g]_{L \setminus \{\ell\}, T}$ ,  $\forall L \subseteq g$ , ce qui annule l'équation.

Prouvons à présent que si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul alors  $\phi$  est efficiente par composante. En utilisant le joueur nul à l'équation (2.16) et ensuite l'efficacité à l'équation (2.17), la condition (2.14) est vérifiée. En utilisant l'axiome du joueur nul à l'équation (2.18), la condition (2.15) est vérifiée dans le cas  $T \not\subseteq R$ . Pour le cas  $T \subset R$ , nous avons vu que si  $\psi$  vérifie est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul alors la condition (2.15) est vérifiée. On obtient donc que si  $\psi$  est efficiente et vérifie l'axiome du joueur nul alors  $\phi$  est efficiente par composante, ce qui conclut notre preuve. □

Ces deux propositions nous permettent de souligner encore ici la similitude entre la méthode d'extension de Myerson et celle de la valeur de position. L'efficacité par composante est liée dans les deux méthodes à la présence des axiomes d'efficacité et du joueur nul.

### Proposition 2.10

*Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\phi$  une règle d'allocation pour jeux à structure de communication. Si  $\phi$  est telle que  $\phi(N, v, g) = M^\psi \times P_g \times v$  alors  $\phi$  vérifie l'axiome du joueur superflu.*

Cette proposition souligne l'importance que peut avoir la méthode d'extension sur le comportement de la règle d'allocation. Quelle que soit la règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable qui pourrait être étendue en utilisant la méthode de Myerson, on peut conclure que son extension vérifie l'axiome du joueur superflu. Cet axiome est construit dans le même esprit que l'axiome du joueur nul. Il est donc intéressant d'observer qu'une extension de la valeur de solidarité ([39] Nowak et Radzik, 1994) vérifierait l'axiome du joueur superflu, cette règle étant principalement définie par son alternative à l'axiome du joueur nul.

**Preuve :** Supposons un joueur  $i \in N$  et un jeu  $(N, v, g)$  tels que  $v/g(S) = v/g(S \setminus \{i\})$ , si  $i \in S$ . Dans ce cas on a

$$(v/g \setminus g_i)(S) = \begin{cases} (v/g)(S \setminus \{i\}) + v(\{i\}) & \text{si } i \in S, \\ (v/g)(S) & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Puisque  $v/g(S) = v/g(S \setminus \{i\})$  on a  $v/g(\{i\}) = v/g(\emptyset) = 0$ .

$$(v/g \setminus g_i)(S) = \begin{cases} (v/g)(S \setminus \{i\}) & \text{si } i \in S, \\ (v/g)(S) & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Et donc  $v/(g \setminus g_i) = v/g$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \phi(N, v, g) &= \psi(N, v/g), \\ \phi(N, v, g \setminus g_i) &= \psi(N, v/g \setminus g_i), \\ \phi(N, v, g \setminus g_i) &= \psi(N, v/g) = \phi(N, v, g). \end{aligned}$$

□

### Proposition 2.11

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\phi$  une règle d'allocation pour jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = A_g \times M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v$ . Si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des égaux alors  $\phi$  vérifie l'axiome d'anonymat des liens.

**Preuve :** On a  $\phi = A_g M_g^\psi \mathcal{L}_g v$ . Par définition  $[A_g]_{i \in N, a \in g} = \frac{1}{2}$  si  $i \in a$ . Par conséquent une règle d'allocation  $\phi$  vérifie l'axiome d'anonymat des liens si, pour tout jeu à structure de communication vérifiant l'anonymat des liens, on a

$$\left[ M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v \right]_\ell = \alpha, \quad \forall \ell \in g,$$

ou simplement  $\psi_\ell(g, r^v) = \alpha, \quad \forall \ell \in g$ . Pour vérifier l'axiome d'anonymat des liens il faut donc que le paiement de chaque joueur dépende uniquement du nombre de ses liens. Chaque lien doit donc recevoir même le paiement par la règle  $\psi$  dans le jeu  $(g, r^v)$ . Un jeu à structure de communication vérifie l'anonymat des liens si  $r^v(A) = r^v(B), \quad \forall A, B \subseteq g$  avec  $|A| = |B|$ . En particulier, en supposant  $A \subseteq g$  et  $\ell, k \in g \setminus A$ , on a

$$r^v(A \cup \ell) = r^v(A \cup \{k\}),$$

puisque  $|A \cup \ell| = |A \cup \{k\}|$ . Dans un jeu à structure de communication vérifiant l'anonymat des liens tous les liens sont donc égaux. En conséquence si  $\psi$  vérifie le traitement égal des égaux alors  $\phi$  vérifie l'axiome d'anonymat des liens.

□

Pour la proposition suivante il nous faut d'abord introduire un nouvel axiome pour les règles d'allocation pour les jeux à utilité transférable.

**Axiome 2.4** (*Sensibilité des paiements à l'exclusion*) :

Une règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome de sensibilité des paiements à l'exclusion si et seulement si elle vérifie

$$\psi_i(N, \delta_S) = \psi_i(N \setminus \{k\}, \delta_S) - \psi_i(N, \delta_{S \cup \{k\}}), \quad \forall i, k \in N, i \neq k, \forall S \subseteq N, k \notin S.$$

Soit  $k$  un joueur indispensable dans le jeu de Dirac  $\delta_{S \cup \{k\}}$ , le paiement du joueur  $i$  dans le jeu de Dirac  $\delta_S$  est égal au gain que le joueur  $i$  aurait à éliminer le joueur  $k$  du jeu  $(N, \delta_{S \cup \{k\}})$ , et ceci que  $i$  appartienne ou non à  $S$ .

**Proposition 2.12**

*La valeur de Shapley vérifie l'axiome de sensibilité des paiements à l'exclusion.*

**Preuve :** On doit démontrer que

$$Sh_i(N \setminus \{k\}, \delta_S) = Sh_i(N, \delta_S) + Sh_i(N, \delta_{S \cup \{k\}}),$$

$\forall i, k \in N, i \neq k, \forall S \subseteq N \setminus \{k\}$ . On sait que

$$Sh_i(N, \delta_S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

$\forall S \subseteq N$  avec  $i \in S$  et que

$$Sh_i(N, \delta_S) = -\frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

$\forall S \subseteq N$  avec  $i \notin S$ . Nous prouverons en deux étapes que la valeur de Shapley vérifie cet axiome. Tout d'abord considérons le cas où  $i \in S$ . Il faut prouver que

$$\frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} + \frac{(s+1-1)!(n-s-1)!}{n!}.$$

On a

$$\Leftrightarrow \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{n!} [n-s+s]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!}$$

Considérons maintenant que  $i \notin S$ . Il faut prouver

$$-\frac{s!(n-1-s-1)!}{(n-1)!} = -\frac{s!(n-s-1)!}{n!} - \frac{(s+1)!(n-s-2)!}{n!}.$$

On a

$$\Leftrightarrow -\frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-1)!} = -\frac{s!(n-s-2)!}{n!} [(n-s-1) + (s+1)]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-1)!} = -\frac{(s-1)!(n-s-2)!}{(n-1)!}$$

On en conclut donc que la valeur de Shapley vérifie cet axiome. □

### Proposition 2.13

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\phi$  une règle d'allocation pour jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = A_g \times M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v$ . Si  $\psi$  vérifie les axiomes du joueur nul et de sensibilité des paiements à l'exclusion alors la règle d'allocation  $\phi$  vérifie l'axiome du lien superflu.

**Preuve :** Une règle d'allocation vérifie l'axiome de lien superflu si

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v, g \setminus \{k\}), \text{ pour } k \text{ un lien superflu de } g.$$

Supposons un jeu  $(N, v, g)$  tel que le lien  $k \in g$  est superflu. Soit une règle d'allocation pour jeux à structure de communication telle que  $\phi(N, v, g) = A_g \times M_g^\psi \times \mathcal{L}_g \times v$ , on a

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \psi_\ell(g, r^v), \quad \forall i \in N.$$

Supposons que  $k \in g_i$ ,

$$\sum_{\ell \in g_i} \frac{1}{2} \psi_\ell(g, r^v) = \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \psi_\ell(g, r^v) + \frac{1}{2} \psi_k(g, r^v).$$

En utilisant l'écriture matricielle,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g} [M_g^\psi]_{\ell, L} r^v(L) \right] + \frac{1}{2} \psi_k(g, r^v) \\
&= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} [M_g^\psi]_{\ell, L} r^v(L) + \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} [M_g^\psi]_{\ell, L \cup \{k\}} r^v(L \cup \{k\}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \psi_k(g, r^v).
\end{aligned}$$

Puisque  $k$  est un lien superflu on sait que  $r^v(L) = r^v(L \cup \{k\})$ ,  $\forall L \subseteq g$ ,

$$= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} \left( [M_g^\psi]_{\ell, L} + [M_g^\psi]_{\ell, L \cup \{k\}} \right) r^v(L) \right] + \frac{1}{2} \psi_k(g, r^v).$$

Détaillons à présent  $\phi(N, v, g \setminus \{k\})$ ,

$$\begin{aligned}
\phi(N, v, g \setminus \{k\}) &= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \psi_\ell(g \setminus \{k\}, (r^v)|_{g \setminus \{k\}}) \\
&= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} [M_{g \setminus \{k\}}^\psi]_{\ell, L} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \subseteq g \setminus \{k\}}} [\mathcal{L}_{g \setminus \{k\}}]_{L, T} v(T) \right].
\end{aligned}$$

Par définition de  $\mathcal{L}_g$  on sait que  $[\mathcal{L}_g]_{L, T} = [\mathcal{L}_{g \setminus \{k\}}]_{L, T}$ ,  $\forall L \subseteq g \setminus \{k\}$ ,  $\forall T \subseteq N$ . L'équation précédente devient donc

$$\phi(N, v, g \setminus \{k\}) = \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} [M_{g \setminus \{k\}}^\psi]_{\ell, L} r^v(L) \right].$$

La condition de l'axiome de lien superflu peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} \left( [M_g^\psi]_{\ell, L} + [M_g^\psi]_{\ell, L \cup \{k\}} \right) r^v(L) \right] + \frac{1}{2} \psi_k(g, r^v) \\
&= \sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \frac{1}{2} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} [M_{g \setminus \{k\}}^\psi]_{\ell, L} r^v(L) \right].
\end{aligned}$$

En regroupant,

$$\sum_{\ell \in g_i \setminus \{k\}} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} \left( [M_g^\psi]_{\ell, L} + [M_g^\psi]_{\ell, L \cup \{k\}} - [M_{g \setminus \{k\}}^\psi]_{\ell, L} \right) r^v(L) \right] + \psi_k(g, r^v) = 0.$$

Il est à présent aisé de voir que si la règle d'allocation  $\psi$  vérifie les axiomes du joueur nul et de sensibilité des paiements à l'exclusion alors  $\phi$  vérifie l'axiome du lien superflu. Supposons à présent que  $i \notin k$ , l'équation précédente devient donc

$$\sum_{\ell \in g_i} \left[ \sum_{L \subseteq g \setminus \{k\}} \left( [M_g^\psi]_{\ell, L} + [M_g^\psi]_{\ell, L \cup \{k\}} - [M_{g \setminus \{k\}}^\psi]_{\ell, L} \right) r^v(L) \right] = 0,$$

et on conclut que si  $\psi$  vérifie l'axiome de sensibilité des paiements à l'exclusion alors  $\phi$  vérifie l'axiome du lien superflu.  $\square$

## 2.4 Structure de coalitions

A présent intéressons-nous à une troisième méthode d'extension, semblable dans son approche aux deux précédentes. En 1974, R.J. Aumann et J.H. Drèze ([4]) ont introduit l'ensemble des jeux à structures de coalitions et proposé une extension de la valeur de Shapley pour cet ensemble de jeux. Leur cadre formalise des situations dans lesquelles les joueurs font partie de coalitions formées a priori. Les membres d'une coalition ne peuvent communiquer avec des joueurs qui ne font pas partie du même bloc. Conséquemment, on peut considérer les structures de coalitions comme un sous-ensemble des structures de communications dans lequel les graphes sont uniquement des graphes non-connexes composés de sous-graphes complets correspondant à chaque bloc. En utilisant la définition du jeu de bloc, on définit la valeur d'Aumann-Drèze (que l'on notera  $AD$ ) comme,  $\forall i \in N$  :

$$AD_i(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N, v/\mathcal{B}).$$

De la même manière que pour les deux précédentes méthodes d'extension, on peut écrire cette règle d'allocation sous la forme d'un produit matriciel. On utilise la matrice suivante :

$$[Q_{\mathcal{B}}]_{S \in \Omega_N, T \in \Omega_N} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in B_S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice joue le même rôle que la matrice  $P_g$  joue dans la méthode de Myerson. On peut alors écrire la méthode d'extension d'Aumann-Drèze de la manière suivante

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{B}) = M^\psi \times Q_{\mathcal{B}} \times v,$$

avec  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable.

**Proposition 2.14**

*Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeux à utilité transférable. Soit  $\gamma$  une règle d'allocation pour jeux à structure de coalitions telle que  $\gamma(N, v, \mathcal{B}) = M^\psi \times Q_{\mathcal{B}} \times v$ . La règle d'allocation  $\gamma$  vérifie l'axiome d'efficacité par bloc si et seulement si  $\psi$  vérifie les axiomes d'efficacité et de joueur nul.*

**Preuve :** Comme M. Slikker et A. van den Nouweland l'ont souligné dans Social and Economic networks in Cooperative Game Theory ([46] 2001), on peut exprimer n'importe quelle structure de coalitions  $\mathcal{B}$  sous la forme d'un graphe non-connexe dans lequel les coalitions sont les composantes complètes du graphe. Soit  $g_{\mathcal{B}} = \{\{i, j\} \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ telle que } i, j \in B \text{ et } i \neq j\}$  le graphe déterminé par une structure de coalitions donnée. Cela implique que dans le graphe  $g_{\mathcal{B}}$  deux joueurs sont reliés si et seulement si ils font partie de la même coalition dans  $\mathcal{B}$ . Il apparaît donc que, par définition, on a  $\forall S \subseteq N, S/(g_{\mathcal{B}}(S)) = B_S$ . Conséquemment on a  $(v/\mathcal{B})(S) = (v/g)(S), \forall S \subseteq N$ . Donc, toute règle d'allocation pour jeux à structure de coalitions qui est une extension par la méthode d'Aumann-Drèze peut être exprimée comme une règle d'allocation pour jeux à structure de communication utilisant la méthode de Myerson. Formellement,

$$\gamma(N, v, \mathcal{B}) := \psi(N, v/\mathcal{B}) = \psi(N, v/g_{\mathcal{B}}) := \phi(N, v, g_{\mathcal{B}}).$$

La proposition 2.8 énonce que si  $\phi(N, v, g_{\mathcal{B}})$  vérifie l'efficacité par composante alors  $\psi(N, v/g_{\mathcal{B}})$  est efficace et vérifie l'axiome du joueur nul. Nous venons de démontrer que  $\gamma(N, v, \mathcal{B}) = \phi(N, v, g_{\mathcal{B}})$  et donc si  $\gamma$  est efficace par composante alors  $\phi$  l'est également. Par conséquent, par la proposition (2.8),  $\psi$  est efficace et vérifie l'axiome du joueur nul. □

La manière dont Aumann et Drèze ont pris en compte la structure de coalitions par l'utilisation du jeu des blocs étant semblable en tout point à celle utilisée par Myerson pour les structures de communication, c'est sans surprise que l'on retrouve ici le même résultat concernant l'efficacité par bloc.

**Proposition 2.15**

Soit  $\psi$  une règle d'allocation linéaire pour jeu à utilité transférable. Soit  $\gamma$  une règle d'allocation pour jeux à structure de coalitions telle que  $\gamma(N, v, g) = M^\psi \times Q_{\mathcal{B}} \times v$ . La règle d'allocation  $\gamma$  vérifie l'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc si et seulement si  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables ainsi que l'axiome du joueur nul.

**Preuve :** Commençons par prouver que si  $\gamma$  vérifie l'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc alors  $\psi$  vérifie l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables ainsi que l'axiome du joueur nul. On peut écrire la condition de l'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc de la manière suivante

$$[M^\psi Q_{\mathcal{B}} v]_i - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-j} v]_i = [M^\psi Q_{\mathcal{B}} v]_j - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-i} v]_j,$$

où  $Q_{\mathcal{B}}^{-i}$  est la matrice correspondant à la structure de coalitions  $\mathcal{B} - i$ . En détaillant le produit matriciel on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{i,T} v(T) - \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{i,T} v(T) \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{j,T} v(T) - \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{j,T} v(T) \\ \Leftrightarrow & \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \left[ [M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{i,T} - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{i,T} \right] v(T) \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \left[ [M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{j,T} - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{j,T} \right] v(T). \end{aligned}$$

Ceci doit être vérifié pour toute fonction  $v$ , on a alors la condition suivante

$$[M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{i,T} - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{i,T} = [M^\psi Q_{\mathcal{B}}]_{j,T} - [M^\psi Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{j,T},$$

$\forall T \subseteq N$ . En détaillant,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} \\ &= \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}, \\ \Leftrightarrow & \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} \right] \\ &= \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T} \right]. \end{aligned}$$



Si  $j \notin S$ , alors  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T}$ ,  $\forall S \subseteq N$  par définition de  $B_S$ . On obtient la même chose pour  $i$  par symétrie. Notre condition devient alors

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ j \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}, \quad (2.20)$$

et ceci  $\forall T \subseteq N$ . Notons  $B^{i,j}$  le bloc contenant les joueurs  $i$  et  $j$ .

**Cas 1 :**  $B^{i,j} \subset T$

Si  $T$  est l'union de ce bloc et d'éléments contenus dans  $N \setminus B^{i,j}$  alors  $T$  n'est pas un bloc lui-même et donc  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T} = 0$  quelle que soit  $S$ . L'équation s'annule alors des deux côtés.

**Cas 2 :**  $T \subseteq N \setminus B^{i,j}$

Si  $T$  est un bloc contenu dans  $N \setminus B^{i,j}$ , les changements dans  $B^{i,j}$  n'impacteront pas la composition de  $T$  et donc  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}$  annulant l'équation.

**Cas 3 :**  $T \subseteq B^{i,j}$

Il reste donc le cas où  $T$  est un sous-ensemble de  $B^{i,j}$ . On distinguera alors trois sous cas :  $j \in T$  (et donc par symétrie  $i \in T$ ),  $i, j \notin T$  ou  $i, j \in T$ .

**Cas 3.1 :**  $j \in T, i \notin T$

On a

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ j \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ i \in S}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}.$$

Si  $j \in T$  alors  $[Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = 0$  pour tout  $S$  qui contient  $j$  puisque  $T$  n'est plus un bloc unique sous  $Q_{\mathcal{B}}^{-j}$ . De plus, quelle que soit  $S$  telle que  $i \in S$ ,  $T$  n'est jamais un bloc de  $S$  puisque  $T \cup i$  forme un bloc (rappelons que  $T \subseteq B^{i,j}$ ). Cependant  $T$  peut-être un bloc de  $S$  sous  $Q_{\mathcal{B}}^{-i}$ . L'expression précédente peut s'exprimer sous la forme

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ j \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ i \in S}} [M^\psi]_{j,S} [-[Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}].$$

Si  $i \in S$  on sait que  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = 0$ . On sait également que  $j \in S$  puisque  $j \in T$  et  $T \subseteq S$ . On a

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ j \in S \\ i \notin S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \subseteq S \\ i \in S \\ j \in S}} [M^\psi]_{j,S} [-[Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T}].$$

En opérant un changement de variable on obtient

$$\sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ j \in S \\ i \notin S}} \left[ [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S,T} + [M^\psi]_{j,S \cup i} [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S \cup i, T} \right] = 0.$$

On voit que  $[Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S \cup i, T} = [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T}$  puisque sous  $Q_{\mathcal{B}}^{-i}$ ,  $i$  est lui-même un bloc. La condition devient

$$\sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ j \in S \\ i \notin S}} \left[ [M^\psi]_{i,S} + [M^\psi]_{j,S \cup i} \right] [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 0. \quad (2.21)$$

Ceci doit être vérifié quelle que soit la structure de coalitions. Par conséquent cela doit être vrai pour la structure de coalitions  $(N, \mathcal{B} = N)$ . Dans ce cas, pour tout  $T \ni j$ , on a  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 1$  seulement quand  $S = T$  puisque si  $T \subset S$ ,  $S$  est un bloc. La condition est réduite à  $[M^\psi]_{i,S} = -[M^\psi]_{j,S \cup i}$ ,  $\forall S \subseteq N$  avec  $i \notin S$ ,  $j \in S$ .

**Cas 3.2 :**  $i, j \in T$

On a  $[Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S, T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S, T} = 0$  quelle que soit  $S$ , avec  $T \subseteq S$  puisque que soit sous  $Q_{\mathcal{B}}^{-j}$  ou sous  $Q_{\mathcal{B}}^{-i}$ ,  $T$  ne sera plus un bloc unifié. On peut donc simplifier l'équation (2.20) et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ j \in S \\ i \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} &= \sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ i \in S \\ j \in S}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T}, \\ \sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N}} \left[ [M^\psi]_{i,S} - [M^\psi]_{j,S} \right] [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si on considère la structure de coalitions  $(N, \mathcal{B} = N)$ , pour tout  $T \subseteq N$  telle que  $\{i, j\} \subseteq T$ , on a que  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 1$  seulement si  $S = T$ . Sachant cela, la condition devient  $[M^\psi]_{i,S} = [M^\psi]_{j,S}$  pour tout  $S$  telle que  $\{i, j\} \subseteq S \subseteq N$ .

**Cas 3.3 :**  $i, j \notin T$

Dans ce cas,  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 1$  quand  $S$  est l'union de  $T$  et d'un sous-ensemble de  $N \setminus B^{i,j}$  auquel cas  $[Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S, T} = [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S, T} = 1$  ce qui annule l'équation (2.20). Cependant, quand  $S$  est telle que  $T \cup i \subseteq S$  ou  $T \cup j \subseteq S$  tous les cas où  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 0$  et, respectivement,  $[Q_{\mathcal{B}}^{-i}] = 1$  ou  $[Q_{\mathcal{B}}^{-j}] = 1$  sont des possibilités. On écrit alors l'équation suivante

$$\sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ j \in S}} [M^\psi]_{i,S} \left[ [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S, T} \right] = \sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{j,S} \left[ [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} - [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S, T} \right],$$

comme

$$- \sum_{\substack{T \subseteq \bar{S} \subseteq N \\ j \in S}} [M^\psi]_{i,S} [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S,T} = - \sum_{\substack{T \subseteq \bar{S} \subseteq N \\ i \in S}} [M^\psi]_{j,S} [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S,T},$$

ou encore

$$\sum_{\substack{T \subseteq \bar{S} \subseteq N \\ j \notin S}} [M^\psi]_{i,S \cup j} [Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S \cup j, T} = \sum_{\substack{T \subseteq \bar{S} \subseteq N \\ i \notin S}} [M^\psi]_{j,S \cup i} [Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S \cup i, T}.$$

Cependant on a vu dans le cas 3.1 que  $[Q_{\mathcal{B}}^{-j}]_{S \cup j, T} = [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T}$  (et symétriquement que  $[Q_{\mathcal{B}}^{-i}]_{S \cup i, T} = [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T}$ ). On sait que si  $S$  contient  $i$  ou  $j$  alors  $T$  ne sera pas une composante de  $S$  puisque  $T \cup i$  ou  $T \cup j$  en sera une. On peut donc écrire la condition

$$\sum_{\substack{T \subseteq \bar{S} \subseteq N \\ i, j \notin S}} \left[ [M^\psi]_{i, S \cup j} - [M^\psi]_{j, S \cup i} \right] [Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 0. \quad (2.23)$$

Considérons la structure de coalitions  $(N, \mathcal{B} = N)$ . Quelle que soit  $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ , on a  $[Q_{\mathcal{B}}]_{S, T} = 1$  seulement quand  $S = T$ . En conséquence, si l'on souhaite que la condition soit vérifiée, il faut  $[M^\psi]_{i, S \cup j} = [M^\psi]_{j, S \cup i}$ ,  $\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ .

En conclusion, si une règle d'allocation  $\gamma(N, v, \mathcal{B}) = \psi(N, v/\mathcal{B})$  vérifie l'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc, alors la règle d'allocation  $\psi$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (1) & [M^\psi]_{i, S \cup \{j\}} = -[M^\psi]_{j, S \cup \{i, j\}}, \\ (2) & [M^\psi]_{i, S \cup \{i, j\}} = [M^\psi]_{j, S \cup \{i, j\}}, \\ (3) & [M^\psi]_{i, S \cup \{j\}} = [M^\psi]_{j, S \cup \{i\}}, \end{cases}$$

$\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}, \forall i, j \in N$ . La condition (2) est équivalente à l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables. En utilisant les conditions (1) et (3) on obtient  $-[M^\psi]_{j, S \setminus \{j\}} = [M^\psi]_{j, S}$  avec  $S \subseteq N, j \in S, S \neq \{j\}$  ce qui est équivalent à l'axiome du joueur nul.

Prouvons à présent que la réciproque est vraie. En utilisant les conditions (1), (2) et (3) respectivement dans les équations (2.21), (2.22) et (2.23), la condition de l'axiome d'équilibre des contributions restreint par bloc est vérifiée. Il nous reste donc à prouver qu'une règle vérifie les conditions (1), (2) et (3) si et seulement si elle vérifie les axiomes du joueur nul et du traitement égal des joueurs indispensables. Les trois conditions impliquent ces deux axiomes. Prouvons à présent que les axiomes du joueur nul et du traitement égal des joueurs indispensables impliquent ces trois conditions.

Si  $\psi$  vérifie l'axiome du joueur nul on a,

$$-[M^\psi]_{j, S \setminus \{j\}} = [M^\psi]_{j, S}, \quad \forall S \subseteq N, j \in S, S \neq \{j\},$$

et

$$-[M^\psi]_{i,S \setminus \{i\}} = [M^\psi]_{i,S}, \quad \forall S \subseteq N, i \in S, S \neq \{i\}.$$

Soit  $S = T \cup \{i, j\}, \forall T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ . En utilisant l'axiome du traitement égal des joueurs indispensables on obtient

$$[M^\psi]_{j,T \cup \{i\}} = -[M^\psi]_{j,T \cup \{i,j\}} = -[M^\psi]_{i,T \cup \{i,j\}} = [M^\psi]_{i,T \cup \{j\}}.$$

Ce qui conclut donc notre preuve. □

Le tableau suivant résume les résultats des sections 2.3 et 2.4<sup>2</sup> :

	Méthodes d'extension		
Axiomes	Myerson $M^\psi P_g v$	valeur de position $A_g M_g^\psi \mathcal{L}_g v$	Aumann-Drèze $M^\psi Q_{\mathcal{B}} v$
Equivalence $\Leftrightarrow$			
Joueur nul + Efficience	Efficience par composantes	Efficience par composantes	Efficience par bloc
Joueur nul + Traitement égal des joueurs indispensables			Equilibre des contributions restreint par bloc
Implication $\Rightarrow$			
Joueur nul + Sensibilité des paiements à l'exclusion		Lien superflu	
Traitement égal des égaux		Anonymat des liens	
$\emptyset$	Joueur superflu		

---

2. Le symbole  $\emptyset$  signifie que quels que soient les axiomes de la règle d'origine, son extension vérifiera l'axiome indiqué.



## Chapitre 3

# Consistance Associée

### 3.1 Introduction

Dans la littérature on distingue deux types d'approches autour du concept de *consistance* : la consistance sur le jeu réduit et la consistance associée. La première a été introduite par Davis et Maschler (1965, [13]) afin de présenter et caractériser le kernel d'un jeu coopératif. Le principe se base sur l'usage d'un jeu réduit. Ce jeu réduit est obtenu après que certains joueurs aient quitté le jeu et reçu un paiement en accord avec la règle d'allocation. La consistance sur le jeu réduit requiert que les joueurs restant dans ce jeu réduit reçoivent le même paiement que dans le jeu d'origine. Le principe de la consistance sur le jeu réduit a été utilisé extensivement pour caractériser divers concepts de solutions. Aumann et Drèze (1974, [4]) ont prouvé que le Core (ainsi que d'autres concepts de solutions) vérifiait cette condition pour un certain jeu réduit. Sobolev (1975, [48]) a utilisé ce principe dans une caractérisation du pré-nucléole. Hart et Mas-Colell (1989, [26]) utilisent un axiome de consistance sur un jeu réduit modifié afin de caractériser la valeur de Shapley. Thomson (2006, [49]) et Driessen (1991, [15]) offrent tout deux une vue d'ensemble de l'utilisation du principe de consistance sur le jeu réduit.

En 1999, Hamiache ([19]) a introduit le second type d'utilisation du principe de consistance, la *consistance associée*. Ce concept, bien qu'inspiré de celui de la consistance sur le jeu réduit, met en place une approche différente. En introduisant une perturbation dans le jeu d'origine on obtient un jeu modifié (appelé *jeu associé*). La consistance associée requiert alors que la règle d'allocation offre la même répartition sur le jeu d'origine et son jeu associé. L'approche de Hamiache se distingue par le fait que la construction de ce jeu associé se construit en faisant une hypothèse sur la manière dont les joueurs eux-même peuvent percevoir le jeu. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur le principe de consistance associée et son utilisation sur différents modèles.

### 3.2 Consistance associée et jeux à utilité transférable

Dans l'article de 2001, Hamiache ([20]) introduit un axiome de consistance associée pour caractériser la valeur de Shapley. Il présente alors la modification suivante du jeu. Pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  on définit le jeu associé  $(N, Ha_\tau^v)$  avec

$$Ha_\tau^v(S) = v(S) + \tau \sum_{j \in N \setminus S} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})], \quad \forall S \subseteq N$$

et  $0 \leq \tau \leq 1$ . Hamiache offre une interprétation du jeu associé. La coalition  $S$  considère les joueurs appartenant à  $N \setminus S$  comme des joueurs isolés et

ne faisant pas partie d'une coalition (ce que Hamiache appelle "une vision myope de l'environnement" de la coalition). En se basant sur un principe de diviser pour mieux régner, la coalition  $S$  envisage de pouvoir obtenir au moins une part  $\tau$  du surplus  $v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})$  obtenu en coopérant avec chacun des joueurs  $j \in N \setminus S$ . Par conséquent le jeu tel qu'il est perçu par chacune des coalitions est donc le jeu associé  $Ha_\tau^v$ .

Hamiache caractérise alors la valeur de Shapley en utilisant les axiomes suivants :

**Axiome 3.1** (*Consistance associée (par rapport au jeu  $v^*$ )*) :

Pour tout jeu à utilité transférable  $(N, v) \in \Gamma$ , une règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome de consistance associée (par rapport au jeu  $v^*$ ) si et seulement si

$$\psi(N, v) = \psi(N, v^*).$$

L'axiome du jeu inessentiel requiert simplement que dans un jeu où la coopération ne génère aucun surplus, chaque joueur obtient en paiement ce qu'il génère seul.

**Axiome 3.2** (*Jeu inessentiel*) :

Pour tout jeu à utilité transférable inessentiel  $(N, v)$ , une règle d'allocation  $\psi$  vérifie l'axiome de jeu inessentiel si et seulement si

$$\psi_i(N, v) = v(\{i\}), \forall i \in N.$$

Le jeu associé est une modification d'un jeu à utilité transférable. On peut donc prendre le jeu associé du jeu associé, le jeu associé du jeu associé du jeu associé etc. Il est possible que cette séquence infinie de jeux associés converge vers un jeu spécifique. L'axiome de continuité requiert que la limite de la règle d'allocation sur ses jeux associés soit obtenue en appliquant la règle d'allocation au jeu limite.

**Axiome 3.3** (*Continuité*) :

Pour toute séquence convergente  $\{(N, v_k)\}_{k=1}^\infty$  dont la limite est  $(N, \tilde{v})$ , une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome de continuité si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(N, v_k) = \psi(N, \tilde{v}).$$



Hamiache énonce alors le théorème suivant :

**Theorème 3.1** (Hamiache 2001, [20])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie les axiomes de consistance associée par rapport au jeu  $Ha_\tau^v$  (pour  $0 < \tau < \frac{2}{n}$ ), de continuité et de jeu inessentiel si et seulement si  $\psi = Sh$ .*

La preuve de ce théorème s'articule autour de deux points. Prouver que la séquence des jeux associés est convergente vers un jeu inessentiel, puis prouver que les valeurs générées par les singletons dans ce jeu inessentiel correspondent au paiement de la valeur de Shapley.

Cette axiomatique de la valeur de Shapley proposée par Hamiache avec l'usage d'un jeu associé a ouvert la voie à d'autres travaux similaires. Hwang ([29]) caractérise en 2006 la solution d'Allocation Egale des Coûts Non-séparables en utilisant un jeu associé. En plus des axiomes d'efficacité, d'anonymat et de continuité, il utilise l'axiome suivant :

**Axiome 3.4** (*Covariance par translation*) :

Pour tout jeu  $(N, v) \in \Gamma$  et tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^N$ , une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie l'axiome de covariance par translation si et seulement si

$$\psi(N, v) + x = \psi(N, v + x),$$

avec  $(v + x)(S) = v(S) + \sum_{i \in S} x_i, \forall S \subseteq N$ .

Le jeu associé  $(N, Hw_\tau^v)$  utilisé par Hwang est tel que

$$Hw_\tau^v(S) = \begin{cases} v(S) + \tau \sum_{j \in N \setminus S} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - SC_j(N, v)] & \text{si } S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } S = \emptyset. \end{cases}$$

Où  $SC_j(N, v)$  est le coût séparable du joueur  $j$  dans le jeu  $(N, v)$  défini par la définition 1.11. L'interprétation de ce jeu est très similaire à celle du jeu de 2001. La coalition  $S$  pense pouvoir accaparer une part  $\tau$  du surplus qui est ici défini comme la différence entre la valeur générée par  $S \cup \{j\}$  et la somme de la valeur générée par la coalition seule et du coût séparable de  $j$ .

Hwang énonce alors le théorème suivant :

**Theorème 3.2** (Hwang 2006, [29])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie les axiomes d'efficacité, d'anonymat, de continuité, de covariance par translation et de consistance associée par rapport au jeu  $Hw_\tau^v$  (pour  $0 < \tau < \frac{2}{n}$ ) si et seulement si  $\psi = EANSC$ .*

Remarquons que le théorème de Hwang diffère de celui de Hamiache par l'absence d'un axiome de jeu inessentiel. En effet le jeu limite n'est pas inessentiel et Hwang caractérise donc la règle d'allocation *EANSC* par l'utilisation des axiomes d'anonymat, d'efficience et de covariance par translation sur le jeu limite.

En 2015, Xu *et al.* ([53]) offrent une nouvelle caractérisation de l'*EANSC* et du *CIS* en utilisant des jeux associés. Leur axiomatisation est en tout point équivalente à celle de Hamiache (2001, [20]), seul le jeu associé est modifié. Puisque la dualité existante entre le *CIS* et l'*EANSC* rend les deux jeux très similaires, nous ne présenterons ici que le jeu associé aidant à la caractérisation du *CIS*. On note le jeu associé utilisé par Xu *et al.* par  $XuC_\tau^v$ .

$$XuC_\tau^v(S) = v(S) + \tau \left[ \frac{s}{n} (v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})) - (v(S) - \sum_{j \in S} v(\{j\})) \right], \forall S \subseteq N.$$

La valeur dual de  $v(\{j\})$  est  $v^d(\{j\}) = SC_j(N, v)$ . Le jeu associé de Xu *et al.* permettant la caractérisation de la règle *EANSC* correspond au jeu précédent dans lequel on remplace  $v(\{j\})$  par sa valeur duale  $SC_j(N, v)$ .

Le théorème de caractérisation du *CIS* s'énonce alors ainsi :

**Theorème 3.3** (Xu *et al.* 2015, [53])

*Une règle d'allocation  $\psi$  pour jeux à utilité transférable vérifie les axiomes de continuité, de jeu inessentiel et de consistance associée par rapport au jeu  $XuC_\tau^v$  (pour  $0 < \tau < \frac{2}{n}$ ) si et seulement si  $\psi = CIS$ .*

Sur le domaine des jeux à utilité transférable, on peut encore citer le travail de Driessen (2010, [16]) qui étend le théorème de Hamiache (2001, [20]) aux règles d'allocation vérifiant les trois axiomes d'efficience, d'anonymat et de linéarité, ainsi que l'article de Wang *et al.* (2017, [50]) qui caractérise les valeurs de Shapley  $\alpha$  – égalitaires par la même approche.

### 3.3 La F-value et la Mean value

Sur les différents domaines où la communication est restreinte, peu d'articles utilisent le principe de consistance associée. A notre connaissance, Hamiache est le seul à avoir proposé différentes règles d'allocation dont les caractérisations reposent sur un jeu associé pour des domaines comme les jeux à structure de communication ou de coalitions. L'article séminal introduisant le principe de consistance associée (Hamiache 1999, [19]) est d'ailleurs un article traitant des règles d'allocation pour jeux à structure de communication. L'approche développée dans cet article est quelque peu différente

de celle qui apparaîtra dans l'article de 2001. Penchons-nous tout d'abord sur le jeu associé introduit dans cet article. Soit un jeu à structure de communication  $(N, v, g)$ , et une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication, Hamiache définit le jeu associé  $(N, HF_\phi^v, g)$  avec

$$HF_\phi^v(S) = \begin{cases} v(S) + \sum_{j \in S^* \setminus S} [\phi_j(S \cup \{j\}, v_{|_{S \cup \{j\}}}, g(S \cup \{j\})) - v(\{j\})] & \text{si } |S/g| = 1, \\ (HF_\phi^v/g)(S) & \text{si } |S/g| \neq 1. \end{cases}$$

On peut noter que ce jeu associé diffère des autres présentés jusqu'à présent. Ce dernier a pour paramètre la règle d'allocation  $\phi$  elle-même. Dans les approches précédentes, l'axiome de consistance associée se construit sous la forme  $\psi(N, v) = \psi(N, v^*)$  où  $v^*$  est le jeu associé. Ici il se présente sous la forme  $\phi(N, v, g) = \phi(N, v_\phi^*, g)$ . Hamiache établit ici une relation beaucoup plus complexe entre le jeu associé et la règle d'allocation puisque chacun définit l'autre. On peut cependant noter que le jeu associé se construit toujours sur la base d'un comportement répondant à l'expression *diviser pour mieux régner*. Le monde tel qu'il est perçu par la coalition  $S$  se limite à  $S^*$ . Le surplus  $\phi_j(S \cup \{j\}, v_{|_{S \cup \{j\}}}, g(S \cup \{j\})) - v(\{j\})$  correspond au surplus du joueur  $j$  quand il est invité à former la coalition  $S \cup \{j\}$ . La coalition  $S$ , ignorant tout des liens qui peuvent exister entre les joueurs qui appartiennent à  $N \setminus S$ , a des vues sur ce surplus.

En plus des axiomes d'efficience par composante et de linéarité par rapport aux jeux, Hamiache utilise les axiomes suivants :

**Axiome 3.5** (*Indépendance par rapport aux joueurs non pertinents*) :

Soit un graphe  $(N, g)$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication satisfait l'axiome d'indépendance par rapport aux joueurs non pertinents si et seulement si, pour toute coalition connexe  $R$ , la règle vérifie

$$\phi_i(N, u_R, g) = \begin{cases} \phi_i(R, u_R, g(R)) & \text{si } i \in R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Axiome 3.6** (*Positivité*) :

Soit un graphe  $(N, g)$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome de positivité si et seulement si, pour toute coalition connexe  $T$  et tout joueur  $i \in T$ , la règle vérifie

$$\phi_i(T, u_T, g(T)) > 0.$$

**Axiome 3.7** (*Consistance associée (par rapport au jeu  $v^*$ )*) :

Pour tout jeu à utilité transférable  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , une règle d'allocation  $\phi$  vérifie l'axiome de consistance associée si et seulement si

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v^*, g).$$

On peut relever une autre différence fondamentale avec l'approche qui sera établie en 2001, il n'est pas question ici de continuité ni d'inessentialité. On ne s'intéresse pas à la convergence de la série des jeux associés. L'application de l'axiome de consistance associée suffit à obtenir une caractérisation, du fait de la résolution du système induit par le jeu associé. Le théorème de caractérisation s'énonce alors :

**Theorème 3.4** (Hamiache 1999, [19])

*Il existe une et une seule règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication qui vérifie les axiomes d'efficacité par composante, de linéarité par rapport aux jeux, d'indépendance par rapport aux joueurs non pertinents, de positivité et de consistance associée par rapport au jeu  $HF_\phi^v$ .*

*De plus cette règle d'allocation correspond au vecteur propre normalisé associé à la valeur propre la plus grande de la matrice  $F$  définie par*

$$[F]_{i,j} = \begin{cases} \phi_i(N \setminus \{j\}, u_{N \setminus \{j\}}, g(N \setminus \{j\})) & \text{si } |(N \setminus \{j\})/g| = 1 \\ & \text{et } i \in N \setminus \{j\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Cette règle d'allocation est appelée la F-value (notée  $FV$ ).*

**Exemple 3.1 :**

La F-value est une règle qui se définit par récurrence. Afin de calculer la règle d'allocation d'un jeu à structure de communication sur un graphe donné, il est nécessaire d'avoir le paiement des joueurs dans tous les sous-graphes connexes. Soit un jeu  $(N, u_N, g) \in \Gamma_G$  avec  $(N = \{1, 2\}, g = \{\{1, 2\}\})$ , on a  $FV_1 = FV_2 = \frac{1}{2}$ .

Considérons à présent le jeu  $(N, u_N, g) \in \Gamma_G$  avec  $(N = \{1, 2, 3\}, g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})$ , on a alors le graphe suivant :

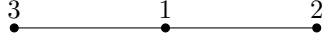


FIGURE 3.1 – Chemin à 3 joueurs

La matrice  $F$  est donc telle que

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient alors les paiements suivants :  $FV(N, v, g) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . □

Dans son article de 2003, Hamiache ([22]) propose une autre règle d'allocation pour jeux à structure de communication et la caractérise également par l'utilisation d'un jeu associé. La construction de ce jeu associé est similaire dans son approche à celle de l'article de 1999, cependant elle présente un raffinement supplémentaire. Là où les joueurs  $j \in N \setminus S$  sont passifs vis à vis des ambitions de la coalition  $S$  dans le jeu associé  $HF_\phi^v$  de 1999, Hamiache conceptualise ici une potentielle réaction de ces joueurs qui se fait en mobilisant des *contre coalitions*. Il présente l'expérience de pensée suivante : soit une coalition connexe  $T$ , une sous coalition non connexe  $K \subsetneq T$  et un joueur  $j \in T^* \setminus T$  tel que  $K \cup \{j\}$  est connexe. La coalition  $K$  peut communiquer grâce aux joueurs qui appartiennent à  $T \setminus K$  mais il s'avère que le joueur  $j$  est capable de permettre à la coalition  $K$  une alternative en terme de communication. De fait, cette situation représente une menace pour l'intégrité de la coalition  $T$  qui serait alors prête à allouer certaines ressources afin de la contrer.

Soit une coalition  $S$  et un joueur  $j \in S^* \setminus S$ . Une coalition  $T$  est une contre coalition de  $j$  face à  $S$  si  $j \in T$  et  $T \setminus \{j\}$  est une sous-coalition non connexe de  $S$ . On note  $\mathbf{C}(S, j)$  l'ensemble de ces contre coalitions.

$$\mathbf{C}(S, j) = \left\{ T \mid j \in T, |T/g| = 1, T \setminus \{j\} \subsetneq S, |(T \setminus \{j\})/g| \neq 1 \right\}.$$

Hamiache introduit également la notion suivante : soit  $T$  une coalition connexe et  $j$  un point d'articulation du graphe. Le surplus de second ordre

du joueur  $j$  par rapport à  $T$  est défini par

$$\begin{aligned} E_{(N,v,g)}(T,j) &= [v(T) - v(\{j\})] - \sum_{\substack{K \\ K \in (T \setminus \{j\})/g}} [v(K \cup \{j\}) - v(\{j\})] \\ &= [v(T) - (v/g)(T \setminus \{j\}) - v(\{j\})] \\ &\quad - \sum_{\substack{K \\ K \in (T \setminus \{j\})/g}} [v(K \cup \{j\}) - v(K) - v(\{j\})]. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond au surplus généré par  $j$  quand il permet d'établir la communication et le second terme le surplus de  $j$  quand il n'est pas relais de communication. En utilisant cette notation Hamiache définit le jeu associé suivant, que l'on note  $HM^v$ ,

$$HM^v(S) = \begin{cases} v(S) + \sum_{\substack{j \\ j \in S^* \setminus S}} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})] \\ \quad - \sum_{\substack{T \\ T \in \mathbf{C}(S,j)}} \Theta(T, S, j) E_{(N,v,g)}(T, j) & \text{si } |S/g| = 1, \\ (HM^v/g)(S) & \text{si } |S/g| \neq 1. \end{cases}$$

Où les coefficients  $\Theta(T, S, j)$ , pour  $T \in \mathbf{C}(S, j)$ , sont solutions du système d'équations linéaires

$$\sum_{\substack{T \\ T \in \mathbf{C}(S,j) \\ K \subseteq T}} \Theta(T, S, j) = 1, \quad \forall K \in \mathbf{C}(S, j).$$

Dans le jeu associé  $HM^v$  on considère que la coalition  $S$  peut se débarrasser des menaces représentées par les contre coalitions que ses voisins  $j$  peuvent former par un paiement au moins égal à leur surplus de second ordre. Les coefficients  $\Theta$  assurent que pour une coalition  $S$  et un joueur  $j \in S^* \setminus S$ , les coalitions  $\mathbf{C}(S, j)$  ne sont comptées qu'une seule fois.

L'un des avantages de cette approche, en comparaison avec l'approche de 1999, réside dans le fait que les paiements de la règle d'allocation pour les sous-jeux du jeu initial ne sont pas nécessaires afin de déterminer le jeu associé et ne sont donc pas nécessaires pour l'évaluation que les coalitions peuvent avoir de leur propre capacité à générer de la valeur.

Hamiache introduit deux nouveaux axiomes.

**Axiome 3.8** (*Conditions initiales*) :

Pour tout joueur  $i$  et  $j \in N$  et tout jeu  $(N, cu_{\{j\}}, g) \in \Gamma_G$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie les conditions initiales si et seulement si

$$\phi_i(N, cu_{\{j\}}, g) = c \delta_{ij},$$

avec  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

**Axiome 3.9** (*Additivité par rapport aux jeux*) :

Pour tout jeu  $(N, v, g)$  et  $(N, w, g) \in \Gamma_G$  une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome d'additivité par rapport aux jeux si et seulement si

$$\phi(N, v + w, g) = \phi(N, v, g) + \phi(N, w, g).$$

Hamiache énonce alors le théorème suivant :

**Theorème 3.5** (Hamiache 2003, [22])

*Il existe une et une seule règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication qui vérifie les axiomes d'additivité par rapport aux jeux, des conditions initiales et de consistance associée par rapport au jeu  $HM^v$ . De plus, cette règle d'allocation, appelée Mean value (notée MV), vérifie l'équation itérative*

$$MV(N, c u_k, g) = \frac{1}{r(K, g)} \sum_{\substack{j \in K \\ |(K \setminus \{j\})/g|=1}} MV(N, c u_{K \setminus \{j\}}, g),$$

avec  $r(K, g)$  le nombre d'éléments de  $K$  qui **ne sont pas** des points d'articulation du graphe  $(K, g(K))$ .

**Exemple 3.2 :**

La Mean value est une règle qui se définit par récurrence tout comme la F-value. Afin de calculer la règle d'allocation d'un jeu à structure de communication sur un graphe donné, il est nécessaire d'avoir le paiement des joueurs dans tous les sous-graphes connexes. Soit un jeu  $(N, u_N, g) \in \Gamma_G$  avec  $(N = \{1, 2\}, g = \{\{1, 2\}\})$ , on a  $FV_1 = FV_2 = \frac{1}{2}$ .

Considérons à présent le jeu  $(N, u_N, g) \in \Gamma_G$  avec  $(N = \{1, 2, 3\}, g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})$ . On a alors le graphe suivant :

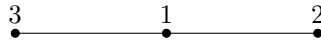


FIGURE 3.2 – Chemin à 3 joueurs

Il y a dans ce graphe deux joueurs qui ne sont pas des points d'articulation,

les joueurs 2 et 3. Regardons les paiements de la règle pour les jeux dans lesquels on supprime l'un de ces joueurs.

i	$MV(N, u_{N \setminus \{i\}}, g(N \setminus \{i\}))$
2	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
Somme	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Le paiement est donc le même que celui donné par la règle *FV* c'est-à-dire  $MV(N, u_N, g) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

□

En 2012, Hamiache ([24]) propose des extensions efficaces de la valeur de Myerson et de la valeur d'Aumann-Drèze et les caractérise en utilisant à nouveau des jeux associés. De la même manière, Hamiache (2001, [21]) caractérise la valeur d'Owen pour les jeux à structure de coalitions (1977, [40]) en faisant usage d'un jeu associé. Comme les deux nouvelles règles d'allocation que nous proposerons dans les chapitres 4 et 5 sont définies pour les jeux à structure de communication, nous nous contenterons ici d'évoquer les travaux de Hamiache sur la consistance associée dans le cadre des jeux à structure de coalitions, sans entrer dans les détails.

### 3.4 Approche matricielle

Dans sa présentation en 2004 au second congrès mondial de la Société de Théorie des Jeux à Marseille, Hamiache présenta pour la première fois une approche matricielle de la consistance associée. Cette présentation déboucha sur deux articles traitant de cette approche matricielle, l'un par Hamiache qui sera publié en 2010 ([23]) et l'autre par Xu *et al.* en 2008 ([52]). Le jeu associé de Hamiache (2001) étant une transformation linéaire du jeu d'origine, l'approche matricielle offre une écriture plus simple et plus efficace. Cette approche permet alors d'utiliser les nombreux outils de l'analyse matricielle, notamment en terme de convergence, pour la démonstration des théorèmes de caractérisation.



Rappelons la formule du jeu associé  $Ha_\tau^v$  de 2001 permettant de caractériser la valeur de Shapley :

$$Ha_\tau^v(S) = v(S) + \tau \sum_{j \in \overset{j}{N \setminus S}} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})], \quad \forall S \subseteq N.$$

En effectuant certains regroupements, on peut écrire ce jeu de la manière suivante :

$$Ha_\tau^v(S) = [1 - |(N \setminus S)|\tau]v(S) - \tau \sum_{j \in \overset{j}{N \setminus S}} v(\{j\}) + \tau \sum_{j \in \overset{j}{N \setminus S}} v(S \cup \{j\}), \quad \forall S \subseteq N.$$

En utilisant le vecteur  $\Omega_N$  lexicographiquement ordonné défini dans la section 1.2, on peut construire une matrice du jeu associé, indexé en ligne et en colonne par  $\Omega_N$ . Hamiache note cette matrice  $M_c$ , dont les éléments sont définis par

$$M_c[S, T] = \begin{cases} 1 - |(N \setminus S)|\tau & \text{si } S = T, \\ \tau & \text{si } |S| + 1 = |T| \text{ et } S \subseteq T, \\ -\tau & \text{si } |T| = 1 \text{ et } T \not\subseteq S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est évident que cette matrice vérifie l'équation  $Ha_\tau^v = M_c \times v$ . Notons que la fonction caractéristique  $v$  est considérée sous sa forme vectorielle exhaustive. La caractérisation de la valeur de Shapley par Hamiache (2001) repose sur la convergence de la séquence des jeux associés. Soit  $Ha_\tau^v = M_c \times v$  le jeu associé, le jeu associé du jeu associé est  $(Ha_\tau^v)^2 = M_c \times Ha_\tau^v = (M_c)^2 \times v$ . Le jeu associé de second ordre est obtenu en élevant la matrice  $M_c$  à l'ordre 2 et en la multipliant par le vecteur de la fonction caractéristique. Il en va de même pour tout ordre  $k$  du jeu associé.

La preuve du théorème 3.1 se résume alors à deux points essentiels. Prouver que la séquence des puissances de la matrice  $M_c$  est convergente et qu'elle converge vers une matrice donnant un jeu inessentiel.

### Proposition 3.1

Les valeurs propres de la matrice  $M_c$  sont : 1 avec multiplicité géométrique de  $n$ ,  $1 - t\tau$  avec multiplicité géométrique  $\binom{n}{t}$ , pour  $t = 2, 3, \dots, n$ . Conséquemment, les multiplicités algébriques et géométriques des  $n$  valeurs propres coïncident et  $M_c$  est diagonalisable.

### Théorème 3.6 (Hamiache 2010, [23])

Soit  $0 < \tau < \frac{2}{n}$ , la séquence des puissances de la matrice  $\{(M_c)^k\}_{k=0}^\infty$  est convergente et  $\lim_{k \rightarrow \infty} (M_c)^k \times v = \tilde{v}$  avec  $(N, \tilde{v})$  un jeu inessentiel.

En utilisant ces résultats, le théorème 3.1 est à nouveau prouvé. Par la suite, l’approche matricielle s’est imposée comme la méthode de prédilection de Hamiache pour les théorèmes de caractérisation par consistance associée. Les extensions efficaces de la valeur de Myerson et de la valeur d’Aumann-Drèze (2012, [24]) utilisent extensivement cette approche matricielle. L’approche matricielle donne accès à un nombre d’outils mathématiques important aidant aux preuves des théorèmes de convergences. De plus, comme l’ont montré récemment Béal *et al.* (2016, [5]), l’utilisation de la forme réduite de Jordan ouvre la voie à une technique de preuve directe dont les étapes sont connues et balisées pour les théorèmes de convergence. Cette technique de preuve a déjà pu montrer sa flexibilité et son utilité dans l’article de Wang *et al.* (2017, [50]). Cette technique repose essentiellement sur le choix d’une base pour l’espace des jeux à utilité transférable permettant d’obtenir une forme triangulaire supérieure de la matrice de transformation du jeu associé, ce qui permet d’obtenir aisément les valeurs propres de la matrice de transformation. Nous avons nous-même fait appel dans le chapitre 4 aux matrices de Jordan mais de manière périphérique, nos techniques de preuves restant plus en phase avec l’approche de Hamiache (2001).

### 3.5 Conclusion

Il apparaît que le concept de consistance associée tel qu’il a été développé par Hamiache dans les articles de 1999 et de 2001 est un outil puissant, tant sur le plan technique de l’axiomatique que sur le plan de l’interprétation des axiomes et du comportement des règles d’allocation. En effet dans les axiomatiques de Hamiache (1999, 2001, 2003), celles de Xu *et al.* (2015) ou encore celles que nous avons évoqués de Driessen (2010) et de Wang *et al.* (2017), l’ensemble de l’axiomatique tient à l’utilisation d’un jeu associé. Dans les constructions de Hamiache (2001) et celles s’en inspirant, il suffit bien souvent d’un axiome de jeu inessentiel et de continuité en plus de l’axiome de consistance associée. C’est bien sur ce dernier que repose toute la force restrictive de l’axiomatisation, les deux autres n’en étant que son support. Dans les approches de 1999 et de 2003, Hamiache utilise, en plus de la consistance associée uniquement des axiomes permettant de mettre en route un raisonnement par récurrence.

La construction du jeu associé se fait principalement autour de l’idée d’un comportement qui consiste à diviser pour mieux régner. Les différences entre les jeux associés que nous avons présentés et évoqués émanent de la manière de considérer l’environnement des coalitions. Essentiellement, ce que le jeu associé décrit n’est autre que la vision que chaque coalition  $S$  a du monde qui l’entoure ainsi que des autres joueurs n’appartenant pas à  $S$ . Ce faisant, le jeu associé décrit également la nature de l’interaction avec les autres joueurs. Est-ce que les joueurs sont effectivement passifs, isolés

et se laissent prendre au piège (Hamiache 2001)? Ont-ils une capacité de négociation construite autour d'un mécanisme précis qui pousse la coalition  $S$  à envisager une contrepartie (Hamiache 1999, 2003)? Ces éléments de la construction mathématique du jeu associé renvoient directement à des conceptions concrètes en termes d'applicabilité et d'interprétation des interactions du jeu. D'une certaine manière, certains des jeux que nous avons présentés ici (notamment Hamiache 2003) offrent une interprétation qui dépasse le cadre classique de la théorie des jeux coopératifs, puisqu'ils donnent une vue sur des négociations précédant à la formation de coalitions.

L'utilisation du concept de consistance associée a également favorisé l'émergence d'une approche matricielle de la théorie des jeux coopératifs du fait de l'aide procurée par une écriture matricielle du jeu associé. Cette méthode matricielle semble s'imposer comme permettant l'utilisation de techniques de preuves plus directes et plus efficaces en ce qui concerne les approches par consistance associée semblables à celles de Hamiache (2001), qui reposent donc sur un théorème de convergence. Dans le chapitre 4 nous mettons en place des techniques de preuves semblables. En revanche, les approches par consistance associée construites dans la lignée de Hamiache (1999) ne bénéficient pas des mêmes avantages à l'écriture matricielle puisqu'elles ne nécessitent pas de prouver une convergence de la séquence des jeux associés. La caractérisation d'une nouvelle règle que nous développons dans le chapitre 5, se situe dans cette lignée.

## Chapitre 4

# Consistance associée, règle d'allocation et graphes

## 4.1 Introduction

Ce chapitre présente et caractérise une nouvelle règle d'allocation pour jeux à structure de communication. Trois axiomes sont utilisés pour obtenir cette caractérisation : consistance associée, continuité et jeu inessentiel. Le lecteur remarquera que cette axiomatique est semblable à celle de Hamiache dans l'article de 2001 ([20]). L'approche présentée dans ce chapitre est en fait une extension intuitive et directe de l'approche utilisée par Hamiache pour caractériser la valeur de Shapley. Les axiomes sont semblables mais adaptés au domaine des jeux à structure de communication, le jeu associé est une extension naturelle du jeu associé de 2001 et la règle d'allocation obtenue correspond à la valeur de Shapley quand la communication est complète. D'un point de vue technique, le jeu associé  $v^*$  développé dans ce chapitre peut être représenté par un produit matriciel,  $v^* = P_g M_c P_g v$  avec  $P_g$  la matrice représentant la structure de communication définie au chapitre 2, et  $M_c$  la matrice du jeu associé de Hamiache (2001) définie au chapitre 3. En suivant l'approche de la caractérisation de la valeur de Shapley par Hamiache, nous établissons une séquence de jeux associés : le jeu associé du jeu original, le jeu associé du jeu associé etc. Nous prouvons que cette séquence est convergente vers un jeu inessentiel et, en utilisant un axiome d'inessentialité, nous caractérisons une règle d'allocation unique pour jeux à structure de communication. La preuve repose en partie sur des outils matriciels et en partie sur des calculs combinatoires.

La dernière section de ce chapitre est dédiée aux travaux en cours concernant les structures de coalitions. En appliquant la même démarche aux jeux à structure de coalitions nous sommes en mesure de construire un jeu associé semblable également à celui de 2001. Ce jeu associé  $v^*$  peut être représenté par un produit matriciel,  $v^* = Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}} v$  avec  $Q_{\mathcal{B}}$  la matrice de la structure de coalition définie au chapitre 2. Ce travail est encore incomplet, cependant les calculs semblent montrer que le comportement de la matrice  $Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}}$  est similaire à celui de la matrice  $P_g M_c P_g$ . On observera également que les résultats que nous obtenons ne sont pas nouveaux mais correspondent aux paiements de la valeur d'Aumann-Drèze.

## 4.2 Réduction de Jordan

Dans ce chapitre nous ferons usage de la réduction de Jordan dans notre théorème de convergence de la matrice du jeu associé. Cependant, notre usage de cette forme matricielle reste ici très marginal en comparaison avec la technique de preuve mise en place par Béal *et al.* en 2016 ([5]). Remarquons d'ailleurs que le recours à cet outil matriciel apparaît de manière indépendante mais temporellement conjointe. A notre connaissance, avant nos propres travaux et ceux publiés par Béal *et al.*, cette forme matricielle était totalement absente de la littérature des jeux coopératifs, y compris

dans celle traitant des approches matricielles appliquées à la consistance associée. Il semble naturel que l'évolution de l'utilisation des formes matricielle en théorie des jeux coopératifs, motivée notamment par l'utilisation du concept de consistance associée, pousse les auteurs à se poser des problèmes similaires et utiliser donc des outils similaires pour les résoudre. Compte tenu de l'utilité de la forme réduite de Jordan (dont l'article de Béal *et al.* en est un si brillant exemple) il nous semble utile de présenter au lecteur quelques éléments introductifs de ce concept, même si nous n'en ferons qu'une brève utilisation par la suite.

Une matrice de Jordan, est une matrice carrée bloc-diagonale. Chaque bloc de cette matrice est ce que l'on appelle un bloc de Jordan.

**Définition 4.1** (*Matrice de Jordan*):

Un bloc de Jordan  $J_{m_i}(\lambda)$  est une matrice diagonale supérieure  $m_i \times m_i$  de la forme

$$J_{m_i}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_1(\lambda) = [\lambda], \quad J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Le scalaire  $\lambda$  apparaît  $m_i$  fois sur la diagonale. Si  $m_i > 1$ , il existe  $m_i - 1$  éléments égaux à 1 sur la superdiagonale. Tous les autres éléments sont nuls. Une matrice de Jordan  $J$  de taille  $m \times m$  est une somme directe de blocs de Jordan

$$J = J_{m_1}(\lambda_1) \oplus J_{m_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{m_q}(\lambda_q), \quad m_1 + m_2 + \dots + m_q = m.$$

Les blocs peuvent être de taille égale et les paramètres  $\lambda_i$  peuvent être égaux.

Le théorème de la réduction de Jordan s'énonce ainsi :

**Theorème 4.1** (Horn et Johnson 1990, [28] p.167)

*Soit une matrice complexe  $A$  de taille  $m \times m$ . Il existe une matrice complexe  $S$  non-singulière, des entiers positifs  $q$  et  $m_1, \dots, m_q$  (avec  $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$ ) ainsi que des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$  tels que*

$$A = S \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & J_{m_q}(\lambda_q) \end{bmatrix} S^{-1},$$

avec  $\lambda_i$  les valeurs propres de la matrice  $A$ . La matrice de Jordan  $J_A = J_{m_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{m_q}(\lambda_q)$  est *uniquement déterminée par  $A$* . Si  $A$  est réelle et ne possède que des valeurs propres réelles alors  $S$  peut être choisie pour être réelle.

**Propriété 4.1 :** Soit une matrice complexe  $A$  de taille  $m \times m$ . Soit  $J_A = S^{-1} A S$  la matrice de la réduction de Jordan de la matrice  $A$ . Les blocs de Jordan ont alors les propriétés suivantes :

- La multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda$  est égale à la somme des tailles des blocs  $J_{m_i}(\lambda)$ .
- La multiplicité géométrique de la valeur propre  $\lambda$  est égale au nombre de blocs  $J_{m_i}(\lambda)$ .

**Theorème 4.2** (Horn et Johnson 1990, [28] p. 171)

Soit une matrice complexe  $A$  de taille  $m \times m$  et un nombre complexe non-nul  $\epsilon$ . Il existe alors une matrice non-singulière complexe  $S(\epsilon)$  de taille  $m \times m$  telle que

$$A = S(\epsilon) \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1, \epsilon) & & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2, \epsilon) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{m_q}(\lambda_q, \epsilon) \end{bmatrix} S(\epsilon)^{-1},$$

avec  $m_1 + m_2 + \cdots + m_q = m$  et

$$J_{m_i}(\lambda, \epsilon) = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & & & \\ & \lambda & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \epsilon \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Si  $A$  est réelle et possède *uniquement des valeurs propres réelles* et si  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , alors  $S(\epsilon)$  peut être choisie parmi l'ensemble des matrices réelles.

La forme réduite de Jordan de la matrice  $A$  peut être utilisée pour étudier la convergence de la matrice  $A$ . En effet  $A^k = S J_A^k S^{-1}$ . Considérons la proposition suivante :

**Proposition 4.1**

Soit  $A$  une matrice carrée complexe de taille  $m$ . On note  $A = S J_A S^{-1}$  la réduction de Jordan de la matrice  $A$ . On a  $A^k = S J_A^k S^{-1}$ . Les propositions suivantes sont vraies<sup>1</sup> :

- Tous les blocs de Jordan  $J_{m_i}(\lambda)^k$  tels que  $|\lambda| < 1$  convergent vers des blocs nuls quand  $k \rightarrow \infty$ .
- Si  $|\lambda| = 1$ ,  $J_{m_i}(\lambda)^k \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$  si et seulement si  $m_i \geq 2$ .
- Si  $|\lambda| = 1$ ,  $J_{m_i}(\lambda)^k < \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$  si et seulement si  $m_i = 1$ .

Ces propositions permettent d'établir le théorème suivant :

**Théorème 4.3** (Horn et Johnson 1990, [28] p. 181)

Soit  $A$  une matrice carrée complexe de taille  $m$ . La matrice  $A$  est convergente (vers une matrice nulle) si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes strictement inférieures à 1 en module. La matrice  $A$  est bornée si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes inférieures ou égales à 1 en module et chaque bloc de Jordan associé à une valeur propre de module égal à 1 est un bloc de taille  $1 \times 1$  ; c'est à dire si chaque valeur propre de module égal à 1 est semi-simple.

Ce théorème est central dans la technique de preuve de convergence des matrices de jeu associée développée par Béal *et al.*

De notre côté nous utiliserons la réduction de Jordan pour prouver le théorème suivant, que nous utiliserons par la suite dans notre théorème de caractérisation.

**Théorème 4.4**

Soit  $A$  une matrice carrée complexe de taille  $m$ . Il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|$  telle que  $\|A\| = \rho(A)$  est le rayon spectral de la matrice  $A$  si et seulement si chaque valeur propre de  $A$  de module maximum est semi-simple, c'est à dire si et seulement si chaque fois que  $J_{m_i}(\lambda)$  est un bloc de Jordan de  $A$  avec  $|\lambda| = \rho(A)$ , alors  $m_i = 1$ .

Ce théorème peut être trouvé dans le livre *Matrix Analysis* par Horn et Johnson (1990, [28]) où il est donné comme exercice d'en apporter la démonstration. C'est avec plaisir que nous nous sommes pliés à cet exercice.

**Preuve :** Soit  $A$  une matrice carrée complexe de taille  $m$ . Supposons tout d'abord qu'il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|_{\Delta}$  telle que  $\|A\|_{\Delta} = \rho(A)$ .

---

1. La preuve de ces propositions peut être trouvée dans l'ouvrage *Matrix Analysis* par Horn et Johnson ([28], 1990, p.181).



Nous allons montrer que toutes les valeurs propres de  $A$  de module maximum sont semi-simples.

Notons  $B = \frac{A}{\|A\|_\Delta}$ . De notre hypothèse nous obtenons  $B = \frac{A}{\rho(A)}$ , ainsi que  $\|B\|_\Delta = \left\| \frac{A}{\|A\|_\Delta} \right\|_\Delta = 1 = \rho(B)$ .

En utilisant les propriétés des normes matricielles on obtient  $\|B^k\|_\Delta \leq \|B\|_\Delta^k = 1$ , pour tout paramètre  $k > 1$ . Par conséquent, quand  $k \rightarrow \infty$ ,  $\|B^k\|_\Delta$  est bornée.

Considérons la réduction de Jordan de la matrice  $B$ ,  $B = S J S^{-1}$ . On a  $B^k = S J^k S^{-1}$ . Nous savons par conséquent que  $\|S J^k S^{-1}\|_\Delta$  est bornée. On note  $J_{m_i}(\lambda)$  le bloc de Jordan de  $B$  de taille  $m_i$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Grâce à la proposition 4.1 on sait que tous les blocs de la réduction de Jordan de la matrice  $B$  convergent vers des blocs nuls exceptés ceux associés à la valeur propre de module le plus grand. Puisque  $B^k$  est bornée quand  $k \rightarrow \infty$ , la proposition 4.1, nous assure que, pour toutes les valeurs propres  $\lambda$  de module maximum, la taille  $m_i$  des blocs de Jordan  $J_{m_i}(\lambda)$  ne peut excéder 1. C'est à dire, toutes les valeurs propres  $\lambda$  telles que  $|\lambda| = \rho(B)$  sont semi-simples. Ce qui implique toutes les valeurs propres de  $A$  de module maximum sont semi-simples.

À présent supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  de module maximum sont semi-simples et prouvons que dans ce cas  $\|A\| = \rho(A)$  est une norme possible. De notre hypothèse nous pouvons conclure que la réduction de Jordan de la matrice  $A$  est telle que

$$J = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

avec

$$D_{p \times p} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & & \lambda_p \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = \rho(A) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p,$$

et  $T = J_{m_{p+1}}(\lambda_{p+1}) \oplus \dots \oplus J_{m_q}(\lambda_q)$ , où  $|\lambda_i| < \rho(A)$  quel que soit  $i$  tel que  $p+1 \leq i \leq q$  et  $p + m_{p+1} + \dots + m_q = 2^n - 1$ .

La réduction de Jordan de la matrice  $A$  est telle que  $J = S^{-1} A S$ . Définissons la matrice  $D_\epsilon$  comme  $D_\epsilon = D_{\epsilon,1} \oplus \dots \oplus D_{\epsilon,q}$  où pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , on a  $D_{\epsilon,i} = \text{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{m_i-1})$ ,  $\epsilon > 0$  avec  $m_i$  la taille du bloc de Jordan

associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . On note  $S(\epsilon) = S \times D_\epsilon$ .

En utilisant la norme matricielle infinie<sup>2</sup>  $\|\cdot\|_\infty$ , on définit  $\|\cdot\|_\Delta$  telle que  $\|A\|_\Delta = \|S(\epsilon)^{-1}AS(\epsilon)\|_\infty$ . Il est notoire que  $\|A\|_\Delta$  est également une norme matricielle (Horn et Johnson 1990, [28] p. 296). Conséquemment on a,  $\|A\|_\Delta = \|D_\epsilon^{-1}S^{-1}ASD_\epsilon\|_\infty = \|D_\epsilon^{-1}JD_\epsilon\|_\infty$ . Par le calcul direct on obtient

$$D_{\epsilon,j}^{-1}J_{m_j}D_{\epsilon,j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \epsilon & & \\ 0 & 0 & \lambda_j & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j & \epsilon \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

et donc  $\|A\|_\Delta = \min\{\rho(A), \{|\lambda_j| + \epsilon \mid p+1 \leq j \leq q\}\}$ . En choisissant un  $\epsilon$  suffisamment petit, i.e.  $0 < \epsilon < \min\{\rho(A) - |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \text{ et } |\lambda| < \rho(A)\}$  on obtient la norme matricielle  $\|A\|_\Delta = \|S(\epsilon)^{-1}AS(\epsilon)\|_\infty = \rho(A)$ , ce qui conclut la preuve du théorème 4.4. □

Cette parenthèse matricielle étant terminée, nous pouvons nous pencher à présent sur la construction du jeu associé ainsi que sur la nouvelle règle d'allocation qui est l'objet de ce chapitre.

### 4.3 Le jeu associé et les trois axiomes

Soit un jeu  $(N, v, g)$  et un paramètre réel positif  $\tau$ , le jeu associé  $(N, v_\tau^*, g)$  est défini par

$$v_\tau^*(S) = \begin{cases} v(S) + \tau \sum_{j \in S^* \setminus S} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})], & \text{si } |S/g| = 1, \\ \sum_{R \in S/g} v_\tau^*(R), & \text{si } |S/g| \neq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

Le jeu associé  $(N, v_\tau^*, g)$  est bien un jeu puisque  $v_\tau^*(\emptyset) = 0$ . De plus on a  $v_\tau^*(N) = v(N)$  pour  $N$  connexe. Notons que ce jeu associé coïncide avec le jeu associé de Hamiache (2001, [20]) quand la communication est complète entre tous les joueurs. En effet, si  $g = g_N$ ,  $S^* \setminus S = N \setminus S$ ,  $\forall S \subseteq N$  et  $|S/g| = 1 \forall S \subseteq N$ .

---

2. La norme matricielle infinie d'une matrice  $X_{n \times m}$  est égale au maximum de la valeur absolue de la somme des lignes d'une matrice.  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |x_{ij}|$

Pour un jeu donné, le jeu associé traduit formellement la vision que les joueurs peuvent avoir de leur situation d'origine. L'interprétation de ce jeu est en phase avec celle du jeu de Hamiache de 2001 puisque ce dernier en est une généralisation naturelle. La différence ici tient au fait que la coalition  $S$  ne voit que ses voisins dans le graphe. Une coalition donnée peut avoir des vues sur au moins une part du surplus générée par la coalition avec les joueurs gravitant autour d'elle pris séparément. En d'autres termes, la coalition  $S$  peut s'imaginer que les surplus  $[v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})]$  générés par sa coopération avec chacun de ces voisins immédiats sont à sa portée. Nous appliquons ici la même logique de comportement visant à diviser pour mieux régner mais restreinte à l'ensemble des joueurs étant des voisins directs de la coalition  $S$ . Cette approche peut être interprétée comme une auto-évaluation de chaque coalition et légitimer des revendications de la part de chacun.

Dans la suite nous utiliserons des matrices carrées de taille  $2^n - 1 \times 2^n - 1$ . Nous commencerons par établir une formule matricielle pour le jeu  $v_\tau^*$ . Afin de s'assurer de l'homogénéité de nos notations, les lignes et les colonnes des différentes matrices seront indexés par l'ensemble  $\Omega_N$  tel qu'il est défini dans le chapitre 1. Pour rappel, les coalitions appartenant à l'ensemble  $\Omega_N$  sont ordonnées de la manière suivante  $(\{1\}, \dots, \{n\}, \{1, 2\}, \dots, \{n - 1, n\}, \{1, 2, 3\}, \dots, N)$ . Les  $n$  premiers éléments sont les singletons. Les  $\binom{n}{2}$  sont les couples, etc.

Considérons à présent la matrice  $M_c$  définie par Hamiache (2010, [23]) déjà présentée dans le chapitre 3. La matrice  $M_c$  est de taille  $2^n - 1 \times 2^n - 1$  et ses lignes et colonnes sont indexées par  $\Omega_N$ . Les éléments de  $M_c$  sont définis, pour  $\emptyset \neq S \subseteq N$  et  $\emptyset \neq T \subseteq N$ ,

$$M_c[S, T] = \begin{cases} 1 - |(N \setminus S)|\tau & \text{si } S = T, \\ \tau & \text{si } |S| + 1 = |T| \text{ et } S \subseteq T, \\ -\tau & \text{si } |T| = 1 \text{ et } T \not\subseteq S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3)$$

On sait que la matrice  $M_c$  est diagonalisable (proposition 3.1) et que 1 est une valeur propre de  $M_c$  ayant une multiplicité algébrique égale à  $n$ . On sait également que  $1 - s\tau$  sont des valeurs propres de  $M_c$  avec une multiplicité de  $\binom{n}{s}$  pour tout  $s$  vérifiant  $2 \leq s \leq n$ .

Soit un graphe  $(N, g)$ , on définit la matrice  $P_g$ <sup>3</sup>, une matrice carrée d'ordre  $2^n - 1$ , telle que, pour toute coalition non vide  $S$  et  $T \subseteq N$ , on ait

$$P_g[S, T] = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in S/g, \\ 0 & \text{si } T \notin S/g. \end{cases} \quad (4.4)$$

---

3. La matrice  $P_g$  définie ici est la même que la matrice  $P_g$  définie dans le chapitre 2.

Avant d'aller plus loin, observons quelques propriétés des matrices  $P_g$ .

**Propriété 4.2 :**  $P_g v = (v/g)$ .

**Propriété 4.3 :** La matrice  $P_g$  est idempotente, c'est à dire  $P_g P_g = P_g$ .

**Preuve :** Pour toute fonction caractéristique  $v$  on a  $P_g P_g v = P_g (v/g) = (v/g) = P_g v$ . □

Définissons la matrice  $D_g$  de la manière suivante :

$$D_g[S, T] = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T \text{ et } |S/g| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est évident que  $D_g D_g = D_g$ . Nous avons également  $D_g P_g = D_g$  et  $P_g D_g = P_g$ .

**Propriété 4.4 :** La matrice  $P_g$  est diagonalisable.

**Preuve :** Soit  $I$  la matrice identité de taille  $2^n - 1 \times 2^n - 1$ . Soit la matrice  $R = P_g + I - D_g$  et son inverse  $R^{-1} = -P_g + I + D_g$ , un calcul direct montre que  $P_g = (P_g + I - D_g) D_g (-P_g + I + D_g)$ . □

**Propriété 4.5 :** Considérons les  $n$  vecteurs  $x_{\{i\}}$  pour  $i \in N$ , définis par,

$$x_{\{i\}}[T] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les paires  $\langle 1, x_{\{i\}} \rangle$  sont des couples valeur propre/vecteur propre de la matrice  $P_g$ .

**Preuve :** Calculons  $(P_g \cdot x_{\{i\}})[T]$  pour toute coalition  $T \subseteq N$ ,

$$(P_g \cdot x_{\{i\}})[T] = \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N}} P_g[T, K] \cdot x_{\{i\}}[K] = \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ K \in T/g}} x_{\{i\}}[K] = \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ i \in K \in T/g}} 1.$$

Si  $i \in T$  il n'existe qu'une seule coalition  $K$  telle que  $i \in K \in T/g$  et  $(P_g \cdot x_{\{i\}})[T] = 1 = x_{\{i\}}[T]$ . Si  $i \notin T$  il n'y a aucune coalition  $K$  telle que  $i \in K \in T/g$  et  $(P_g \cdot x_{\{i\}})[T] = 0$ . Nous avons donc prouvé que  $P_g \cdot x_{\{i\}} = x_{\{i\}}$ ,

ce qui conclut la preuve de la propriété 4.5. □

**Propriété 4.6 :** Si  $\langle \lambda, v \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $M_g = P_g M_c P_g$  avec  $\lambda \neq 0$ , alors  $\langle 1, v \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $P_g$ .

**Preuve :** Supposons que  $P_g M_c P_g v = \lambda v$ . En multipliant les deux côtés de l'équation par  $P_g$  et en utilisant la propriété d'idempotence de  $P_g$  on obtient  $P_g M_c P_g v = \lambda P_g v = \lambda v$ . Conséquemment, quand  $\lambda \neq 0$ ,  $\langle 1, v \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $P_g$ . □

**Propriété 4.7 :** Pour tout  $i \in N$ , soit  $x_{\{i\}}$  défini par l'équation 4.5, les couples  $\langle 1, x_{\{i\}} \rangle$  sont des eigenpairs de la matrice  $M_g = P_g M_c P_g$ .

**Preuve :** On sait que 1 est une valeur propre de la matrice  $M_c$  ayant une multiplicité de  $n$  et que les  $n$  vecteurs  $x_{\{i\}}$  pour  $i \in N$  en sont les vecteurs propres associés.

$$P_g M_c P_g x_{\{i\}} = P_g M_c x_{\{i\}} = P_g x_{\{i\}} = x_{\{i\}}.$$

La première et la dernière égalité découlent de la propriété 4.5. La deuxième égalité est vraie puisque  $\langle 1, x_{\{i\}} \rangle$  est une valeur propre de la matrice  $M_c$ . □

**Lemme 4.1**

Pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , la forme matricielle du jeu associé  $(N, v_\tau^*, g)$  est donnée par,

$$v_\tau^* = P_g M_c P_g v. \tag{4.6}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} (P_g M_c P_g v)[S] &= (P_g M_c (v/g))[S] = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} (P_g M_c)[S, T] (v/g)(T) \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (P_g)[S, R] (M_c)[R, T] (v/g)(T) \\ &= \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (P_g)[S, R] \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} (M_c)[R, T] (v/g)(T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sachant que } (M_c w)[R] = w(R) + \tau \sum_{j \in N \setminus R} [w(R \cup \{j\}) - w(R) - w(\{j\})], \\
& = \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (P_g)[S, R] \left[ (v/g)(R) + \tau \sum_{j \in N \setminus R} [(v/g)(R \cup \{j\}) - (v/g)(R) - (v/g)(\{j\})] \right] \\
& = \sum_{\substack{R \\ R \in S/g}} \left[ (v/g)(R) + \tau \sum_{j \in N \setminus R} [(v/g)(R \cup \{j\}) - (v/g)(R) - (v/g)(\{j\})] \right].
\end{aligned}$$

Pour toute coalition connexe  $R$  et tout joueur  $j \notin R^*$ , on a  $[(v/g)(R \cup \{j\}) - (v/g)(R) - (v/g)(\{j\})] = 0$ ,

$$\sum_{\substack{R \\ R \in S/g}} \left[ v(R) + \tau \sum_{j \in R^* \setminus R} [v(R \cup \{j\}) - v(R) - v(\{j\})] \right] = \sum_{\substack{R \\ R \in S/g}} v_\tau^*(R),$$

Ce qui conclut la preuve du lemme 4.1. □

Du lemme 4.1 nous pouvons conclure que la succession des jeux associés peut être exprimée comme  $v_\tau^{**} = (P_g M_c P_g) v_\tau^* = (P_g M_c P_g)^2 v, \dots, v_\tau^{(k^*)} = (P_g M_c P_g)^k v$ . Dans la suite nous montrerons que la séquence des puissances de la matrice  $(P_g M_c P_g)^k$  est convergente quand  $k$  tend vers l'infini.

Dans l'article de Hamiache (2010, [23]) les transformations rencontrées de la matrice  $M_c$  sont de la forme  $Z M_c Z^{-1}$  avec  $Z$  une matrice non singulière. La transformation que nous mettons en place génère une matrice qui n'est pas semblable à la matrice  $M_c$ . De plus, la matrice  $P_g$  étant généralement singulière, la complexité du problème de la convergence de la séquence des puissances de  $M_g$  s'en trouve significativement accrue.

L'ensemble d'axiomes que nous utilisons ici pour caractériser notre règle d'allocation est en tout point similaire à celui utilisé par Hamiache en 2001 pour caractériser la valeur de Shapley<sup>4</sup>. L'unique différence tient au fait que les axiomes présentés ci-dessous sont adaptés aux jeux à structure de communication.

**Axiome 4.1** (*Jeu inessentiel*) :

Pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $(N, v)$  un jeu inessentiel, une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome de jeu inessentiel si et seulement si

$$\phi_i(N, v, g) = v(\{i\}), \quad \forall i \in N.$$

---

4. Voir le théorème 3.1.

**Axiome 4.2** (*Continuité*) :

Pour toute séquence convergente  $\{(N, v_k, g)\}_{k=1}^\infty$  dont la limite est  $(N, \tilde{v}, g)$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome de continuité si et seulement si,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(N, v_k, g) = \phi(N, \tilde{v}, g).$$

**Axiome 4.3** (*Consistance associée*) :

Pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome de consistance associée si et seulement si

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v_\tau^*, g).$$

Nous pouvons donc à présent énoncer le théorème central de ce chapitre :

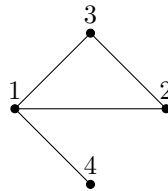
**Théorème 4.5**

*Il existe une et une seule règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifiant les axiomes de jeu inessentiel, de continuité et de consistance associée, à condition que  $\tau$  soit suffisamment petit.*

La section suivante est entièrement dédiée à la preuve de ce théorème.

#### 4.4 La preuve

Afin de mieux appréhender les nombreuses étapes de cette preuve, introduisons un exemple. Soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $v = u_N$ , et  $g = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ . Le graphe est le suivant :



La matrice  $P_g$  est donc

$$P_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut alors calculer manuellement les différentes puissances de la matrice  $P_g M_c P_g$ . Intéressons nous uniquement aux termes  $(P_g M_c P_g)^m[1, 2]$  pour  $m$  allant de 1 à 7. On a

$$\begin{aligned} (P_g M_c P_g)[1, 2] &= -\tau, \\ (P_g M_c P_g)^2[1, 2] &= 4\tau^2 - 2\tau, \\ (P_g M_c P_g)^3[1, 2] &= -14\tau^3 + 12\tau^2 - 3\tau, \\ (P_g M_c P_g)^4[1, 2] &= 46\tau^4 - 56\tau^3 + 24\tau^2 - 4\tau, \\ (P_g M_c P_g)^5[1, 2] &= -146\tau^5 + 230\tau^4 - 140\tau^3 + 40\tau^2 - 5\tau, \\ (P_g M_c P_g)^6[1, 2] &= 456\tau^6 - 876\tau^5 + 690\tau^4 - 280\tau^3 + 60\tau^2 - 6\tau, \\ (P_g M_c P_g)^7[1, 2] &= -1394\tau^7 + 3178\tau^6 - 3066\tau^5 + 1610\tau^4 - 490\tau^3 + 84\tau^2 - 7\tau. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir apparaître ici le triangle de Pascal (en bleu) multiplié par une constante (en rouge) :

$$\begin{aligned} &-1\tau, \\ &4 \times 1\tau^2 - 2\tau, \\ &-14 \times 1\tau^3 + 4 \times 3\tau^2 - 3\tau, \\ &46 \times 1\tau^4 - 14 \times 4\tau^3 + 4 \times 6\tau^2 - 4\tau, \\ &-146 \times 1\tau^5 + 46 \times 5\tau^4 - 14 \times 10\tau^3 + 4 \times 10\tau^2 - 5\tau, \\ &456 \times 1\tau^6 - 146 \times 6\tau^5 + 46 \times 15\tau^4 - 14 \times 20\tau^3 + 4 \times 15\tau^2 - 6\tau, \\ &-1394 \times 1\tau^7 + 456 \times 7\tau^6 - 146 \times 21\tau^5 + 46 \times 35\tau^4 - 14 \times 35\tau^3 + 4 \times 21\tau^2 - 7\tau. \end{aligned}$$



On a donc une séquence de constantes que l'on notera  $A_m[1, 2]$  :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1[1, 2] & A_2[1, 2] & A_3[1, 2] & A_4[1, 2] & A_5[1, 2] & A_6[1, 2] & A_7[1, 2] \\ -1 & 4 & -14 & 46 & -146 & 456 & -1394. \end{array}$$

Prouvons que ce schéma est général.

**Lemme 4.2**

Il existe une séquence de matrices  $\{A_\theta\}_{\theta=1}^\infty$  avec  $A_\theta = (A_1)^\theta$  telles que, pour toutes coalitions  $S$  et  $T \subseteq N$ ,

$$(P_g M_c P_g)^m[S, T] = \begin{cases} \sum_{L \in S/g} \sum_{\theta=1}^m A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta + P_g[S, T] & \text{si } |T/g| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.7)$$

**Preuve :** Il est évident que ce lemme est vrai pour  $m = 1$ . Sachant que pour toute coalition non-connexe  $T$  on a  $(P_g M_c P_g)^m[S, T] = 0, \forall m$ , on se concentrera sur les cas où  $T$  est connexe. Supposons que le lemme 4.2 soit vrai pour toutes les puissances de  $(P_g M_c P_g)$  plus petites ou égales à  $m$ . Nous allons prouver que dans ce cas le lemme 4.2 est également vrai pour  $(P_g M_c P_g)^{m+1}$ .

$$\begin{aligned} (P_g M_c P_g)^{m+1}[S, T] &= \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N}} (P_g M_c P_g)^m[S, K] \cdot (P_g M_c P_g)[K, T] \\ &= \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} \left( \sum_{L \in S/g} \sum_{\theta=1}^m A_\theta[L, K] \binom{m}{\theta} \tau^\theta + P_g[S, K] \right) \cdot \left( \sum_{R \in K/g} A_1[R, T] \tau + P_g[K, T] \right). \end{aligned}$$

Puisque  $K$  est connexe on a  $R = K$ . Développons l'équation précédente.

$$= \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} \sum_{L \in S/g} \sum_{\theta=1}^m A_\theta[L, K] A_1[K, T] \binom{m}{\theta} \tau^{\theta+1} \quad (4.8)$$

$$+ \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} \sum_{L \in S/g} \sum_{\theta=1}^m A_\theta[L, K] \binom{m}{\theta} \tau^\theta P_g[K, T] \quad (4.9)$$

$$+ \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} P_g[S, K] A_1[K, T] \tau + \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} P_g[S, K] \cdot P_g[K, T]. \quad (4.10)$$

Inversons l'ordre des sommes dans (4.8) et (4.9). De plus, comme la coalition  $K$  est connexe, les termes  $P_g[K, T]$  dans les expressions (4.9) et (4.10) s'annulent sauf quand  $K = T$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\theta=1}^m \sum_{L \in S/g} \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} A_\theta[L, K] A_1[K, T] \binom{m}{\theta} \tau^{\theta+1} \\
&\quad + \sum_{\theta=1}^m \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta \\
&\quad + \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ |K/g|=1}} A_1[K, T] \tau P_g[S, K] + P_g[S, T] \\
&= \sum_{\theta=1}^m \sum_{L \in S/g} A_{\theta+1}[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^{\theta+1} + \sum_{\theta=1}^m \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta \quad (4.11) \\
&\quad + \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ K \in S/g}} A_1[K, T] \tau + P_g[S, T].
\end{aligned}$$

En changeant l'index  $\theta$  dans le premier terme de l'expression (4.11) on obtient

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\theta=2}^{m+1} \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta-1} \tau^\theta + \sum_{\theta=1}^m \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta \quad (4.12) \\
&\quad + \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ K \in S/g}} A_1[K, T] \tau + P_g[S, T].
\end{aligned}$$

Séparons les termes de l'expression (4.12),

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\theta=2}^m \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta-1} \tau^\theta + \sum_{L \in S/g} A_{m+1}[L, T] \binom{m}{m} \tau^{m+1} \\
&\quad + \sum_{\theta=2}^m \sum_{L \in S/g} A_\theta[L, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta + \sum_{L \in S/g} A_1[L, T] \binom{m}{1} \tau \\
&\quad + \sum_{\substack{K \\ \emptyset \neq K \subseteq N \\ K \in S/g}} A_1[K, T] \tau + P_g[S, T].
\end{aligned}$$

Regroupons les termes semblables

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\theta=2}^m \sum_{\substack{L \\ L \in S/g}} A_{\theta}[L, T] \binom{m+1}{\theta} \tau^{\theta} + \sum_{\substack{L \\ L \in S/g}} A_{m+1}[L, T] \binom{m+1}{m+1} \tau^{m+1} \\
&\quad + \sum_{\substack{L \\ L \in S/g}} A_1[L, T] \binom{m+1}{1} \tau + P_g[S, T],
\end{aligned}$$

et enfin

$$(P_g M_c P_g)^{m+1}[S, T] = \sum_{\substack{L \\ L \in S/g}} \sum_{\theta=1}^{m+1} A_{\theta}[L, T] \binom{m+1}{\theta} \tau^{\theta} + \delta_{S, T}^g,$$

ce qui conclut la preuve du lemme 4.2. □

Les éléments des puissances de la matrice  $P_g M_c P_g$  dépendent donc uniquement de ces paramètres  $A_{\theta}[S, T]$ ,  $\forall S, T \subseteq N$ . Concentrons nous à présent sur ces paramètres qui sont les coefficients de degré  $\theta$  dans les polynômes  $(P_g M_c P_g)^{\theta}[S, T]$ . Par exemple, la matrice  $A_1$  est obtenue quand on supprime les paramètres libres de la matrice  $(P_g M_c P_g)$  et divise le résultat par  $\tau$ . Formellement,  $A_1 = (P_g M_c P_g - P_g)/\tau$ . Considérons à présent la matrice  $(P_g M_c P_g)^2$ . Le calcul des coefficients des termes de degré 2 ne nécessite que les coefficients des termes de degré 1 de la matrice  $(P_g M_c P_g)$ , et formellement,  $A_2 = (A_1)^2$ . De manière générale, dans les calculs des coefficients des termes de degré  $\theta+1$  de la matrice  $(P_g M_c P_g)^{\theta+1}$  n'apparaissent que les coefficients des termes de degré  $\theta$  de la matrice  $(P_g M_c P_g)^{\theta}$  et les coefficients des termes de degré 1 de la matrice  $(P_g M_c P_g)$ . Formellement,  $A_{\theta+1} = A_{\theta} \cdot A_1$ , ce qui nous amène à  $A_{\theta} = (A_1)^{\theta}$  pour tout  $\theta \geq 1$ .

### Lemme 4.3

*Les éléments de la séquence de matrices  $\{A_{\theta}\}_{\theta=1}^{\infty}$  suivent une formule de récurrence linéaire.*

**Preuve :** Considérons le polynôme caractéristique de la matrice  $A_1$ . Notons par  $q$  son degré ( $q = 2^n - 1$ ).

$$\text{charpoly}(A_1) = b_q + b_{q-1} \cdot x + b_{q-2} \cdot x^2 + \dots + b_1 \cdot x^{q-1} + x^q. \quad (4.13)$$

Notons que les éléments de la dernière ligne de la matrice  $A_1$  sont tous nuls. Par conséquent, 0 est une valeur propre de  $A_1$  et  $x$  est une racine du polynôme caractéristique. On en conclut,  $b_q = 0$ . Puisque la matrice  $A_1$  annule le polynôme caractéristique on a

$$b_{q-1} \cdot (A_1)^1 + b_{q-2} \cdot (A_1)^2 + \dots + b_1 \cdot (A_1)^{q-1} + (A_1)^q = 0.$$

En utilisant le fait que  $A_\theta = (A_1)^\theta$ , on obtient la formule de récurrence linéaire requise

$$A_q = -b_{q-1} \cdot A_1 - b_{q-2} \cdot A_2 - b_{q-3} \cdot A_3 - \dots - b_1 \cdot A_{q-1},$$

ce qui conclut la preuve du lemme 4.3. □

Pour la suite, définissons les paramètres  $a_i$  pour  $1 \leq i \leq q - 1$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_1[S, T] &= a_1 \\ A_2[S, T] + b_1 A_1[S, T] &= a_2 \\ A_3[S, T] + b_1 A_2[S, T] + b_2 A_1[S, T] &= a_3 \\ &\vdots \\ A_{q-1}[S, T] + b_1 A_{q-2}[S, T] + \dots + b_{q-2} A_1[S, T] &= a_{q-1} \\ A_q[S, T] + b_1 A_{q-1}[S, T] + b_2 A_{q-2}[S, T] + \dots + b_{q-1} A_1[S, T] &= 0 \\ A_{q+1}[S, T] + b_1 A_q[S, T] + b_2 A_{q-1}[S, T] + \dots + b_{q-1} A_2[S, T] &= 0. \\ &\vdots \end{aligned}$$

En notant  $b_0 = 1$ , on peut écrire les équations précédentes :

$$\sum_{i=1}^{\ell} b_{\ell-i} A_i = a_\ell, \quad \text{pour tout } \ell \text{ tel que } 1 \leq \ell \leq q - 1. \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^q b_{q-i} A_{\alpha+i} = 0, \quad \text{pour tout } \alpha \text{ tel que } \alpha \geq 0. \quad (4.15)$$

**Remarque 4.1 :**

*Dans les calculs précédents le polynôme caractéristique peut être remplacé par le polynôme minimal. Cette étape réduirait le nombre de paramètres  $a$  et  $b$  définis par les équations (4.13) et (4.14). Dans notre exemple, on obtient*

$$\text{minpoly}(A_1) = 36.x + 60.x^2 + 37.x^3 + 10.x^4 + x^5,$$

*ce qui nous donne  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 37$ ,  $b_3 = 60$ ,  $b_4 = 36$  ainsi que  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -6$ ,  $a_3 = -11$   $a_4 = -6$ .*

Considérons une fonction réelle  $f(x)$ . La série de Taylor  $f$  (ou plus précisément dans notre cas la série de MacLaurin) est donnée par,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

Soit une séquence de nombre réels, peut-on trouver une fonction telle que les coefficients successifs de la série de MacLaurin de cette fonction coïncident avec les éléments de cette séquence ? Par exemple, de le cas de la séquence infinie  $\{1, 1, 1, \dots\}$  il existe une fonction  $f$  telle que  $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . On dit que  $(1-x)^{-1}$  est la fonction génératrice de la séquence  $\{1, 1, 1, \dots\}$ . L'évident avantage de ce concept est qu'il permet de décrire ces séquences infinies de manière plus économe. Le lemme suivant établit la forme générale des fonctions génératrices des séquences  $\{A_\theta[\cdot, \cdot]\}_{\theta=1}^\infty$ .

**Lemme 4.4**

Pour toute coalition  $S$  et  $T \subseteq N$ , la fonction génératrice de la séquence  $\{A_\theta[S, T]\}_{\theta=1}^\infty$  est de la forme :

$$F(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{q-1} x^{q-1}}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_{q-1} x^{q-1}}, \quad (4.16)$$

où les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont ceux définis par les équations (4.14) et (4.15).

**Preuve :** Considérons la relation de récurrence suivante,

$$A_q = -b_1 A_{q-1} - b_2 A_{q-2} - \dots - b_{q-1} A_1.$$

Soit la fonction génératrice  $F(x) = \sum_{i=1}^\infty A_i x^i$ . On peut écrire

$$F(x) = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i + \sum_{i=q}^\infty A_i x^i = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - \sum_{i=q}^\infty \left( \sum_{j=1}^{q-1} b_j A_{i-j} \right) x^i.$$

Inversons l'ordre des sommes du dernier terme,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - \sum_{j=1}^{q-1} b_j \sum_{i=q}^\infty A_{i-j} x^i = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - \sum_{j=1}^{q-1} b_j \sum_{i=q-j}^\infty A_i x^{i+j} \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - b_{q-1} \sum_{i=1}^\infty A_i x^{i+q-1} - \sum_{j=1}^{q-2} b_j x^j \left( \sum_{i=1}^\infty A_i x^i - \sum_{i=1}^{q-1-j} A_i x^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - b_{q-1} x^{q-1} \sum_{i=1}^\infty A_i x^i - \sum_{j=1}^{q-2} b_j x^j \sum_{i=1}^\infty A_i x^i + \sum_{j=1}^{q-2} b_j x^j \sum_{i=1}^{q-1-j} A_i x^i, \end{aligned}$$

Regroupons le deuxième terme et le troisième terme et utilisons l'égalité

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^\infty A_i x^i, \\ F(x) &= \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - F(x) \sum_{j=1}^{q-1} b_j x^j + \sum_{j=1}^{q-2} \sum_{i=1}^{q-1-j} b_j A_i x^{i+j}. \end{aligned}$$

Afin de calculer le troisième terme, il est plus pratique d'utiliser un nouvel indice dans la somme. Soit  $\ell = i + j$ , les valeurs prises par  $\ell$  sont telles que :  $2 \leq \ell \leq q - 1$ .

$$F(x) = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i - F(x) \sum_{j=1}^{q-1} b_j x^j + \sum_{\ell=2}^{q-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} b_{\ell-i} A_i x^\ell,$$

$$F(x) \left( 1 + \sum_{i=1}^{q-1} b_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i + \sum_{\ell=2}^{q-1} \left( \sum_{i=1}^{\ell-1} b_{\ell-i} A_i \right) x^\ell.$$

D'après l'équation (4.14) on a  $\sum_{i=1}^{\ell-1} b_{\ell-i} A_i = a_\ell - A_\ell$  et donc

$$F(x) \left( 1 + \sum_{i=1}^{q-1} b_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{q-1} A_i x^i + \sum_{\ell=2}^{q-1} (a_\ell - A_\ell) x^\ell = A_1 x + \sum_{\ell=2}^{q-1} a_\ell x^\ell,$$

sachant  $A_1 = a_1$ ,

$$F(x) \left( 1 + \sum_{i=1}^{q-1} b_i x^i \right) = \sum_{\ell=1}^{q-1} a_\ell x^\ell,$$

ce qui conclut la preuve du lemme 4.4. □

Dans notre exemple, la fonction génératrice de la séquence  $\{A_\theta[1, 2]\}_{\theta=1}^\infty$  est de la forme

$$F(x) = \frac{-1x - 6x^2 - 11x^3 - 6x^4}{1 + 10x + 37x^2 + 60x^3 + 36x^4}.$$

La série de MacLaurin d'ordre 8 de cette fonction nous donne :

$$F(x) = -x + 4x^2 - 14x^3 + 46x^4 - 146x^5 + 454x^6 - 1394x^7 + O(x^8).$$

Les coefficients correspondent donc bien aux constantes que nous avons obtenues plus haut.

#### Lemme 4.5

Les vecteurs propres de la matrice  $P_g M_c P_g$  sont indépendants du paramètre  $\tau$ . Les valeurs propres de la matrice  $P_g M_c P_g$  sont de la forme  $\lambda = 1 - \sigma\tau$  avec  $\sigma$  réel ou complexe indépendant de  $\tau$ .

**Preuve :** Décomposons la matrice  $M_c$  en  $M_c = Id - \tau \widetilde{M}_c$ . Considérons une eigenpair  $\langle \lambda, w \rangle$  de la matrice  $P_g M_c P_g$ .

$$P_g M_c P_g w = P_g (Id - \tau \widetilde{M}_c) P_g w = P_g w - \tau P_g \widetilde{M}_c P_g w = \lambda w.$$

Puisque que l'on sait que  $\langle 1, w \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $P_g$  on a,

$$P_g w - \tau P_g \widetilde{M}_c P_g w = w - \tau P_g \widetilde{M}_c P_g w = \lambda w.$$

En ordonnant différemment l'équation précédente on obtient,

$$P_g \widetilde{M}_c P_g w = -\frac{\lambda - 1}{\tau} w,$$

ce qui conclut la preuve du lemme 4.5. □

**Lemme 4.6**

Le rayon spectral de la matrice  $P_g M_c P_g$  est égal à 1.

**Preuve :** Premièrement nous pouvons observer facilement que  $\langle 0, y_T \rangle$  sont des eigenpairs de la matrice  $M_g$  pour des coalitions  $T$  non-connexes quand  $y_T[S] = 1$  si  $S = T$  et  $y_T[S] = 0$  si  $S \neq T$ . Dans la suite nous supposons que  $\lambda \neq 0$ .

Nous savons déjà que, pour  $i \in N$ , les  $n$  vecteurs  $x_{\{i\}}$  définis par l'équation (4.5) sont des vecteurs propres indépendants de la matrice  $M_c$  associés à la valeur propre 1 et nous savons également qu'ils sont des vecteurs propres de  $M_g$ . Notons les autres eigenpairs de  $M_c$ ,  $\langle \lambda_S, x_S \rangle$  pour  $S \subseteq N$  et  $|S| \geq 2$ . Soit  $\langle \lambda, w \rangle$  une eigenpair de la matrice  $M_g = P_g M_c P_g$ . Le vecteur  $w$  peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice  $M_c$ ,  $w = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S x_S$ . Prouvons à présent que les valeurs propres de la matrice  $M_g$  ont une norme plus petite ou égale à 1.

$$\begin{aligned} P_g M_c P_g \left[ \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] &= P_g M_c \left[ \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \\ &= P_g \left[ \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right] = \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + P_g \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \\ &= \lambda \left[ \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right]. \end{aligned}$$

La première égalité provient du fait que  $\langle 1, w \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $P_g$  et la seconde, du fait que  $\langle \lambda_S, x_S \rangle$  est une eigenpair de  $M_c$ .

Prenons la norme des deux derniers termes,

$$\begin{aligned} \|P_g \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right]\| &= \|\lambda \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right]\| \\ &= |\lambda| \cdot \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \right\|. \end{aligned}$$

La matrice  $P_g$  est diagonalisable (propriété 4.4), par conséquent ses valeurs propres sont semi-simples. Le théorème 4.4 nous assure qu'il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|$  vérifiant  $\|P_g\| = \rho(P_g)$  avec  $\rho(P_g)$  le rayon spectral de  $P_g$  qui est égal à 1. De plus, il existe une norme vectorielle  $\|\cdot\|$  compatible avec la norme matricielle considérée<sup>5</sup> ce qui nous amène à

$$\begin{aligned} \|P_g \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right]\| &\leq \|P_g\| \cdot \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right] \right\| \\ &= \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right] \right\|. \end{aligned}$$

On obtient alors,

$$|\lambda| \cdot \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \right\| \leq \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} \lambda_S c_S x_S \right] \right\|,$$

Pour  $|S| = s \geq 2$  les valeurs propres de  $M_c$  sont  $\lambda_s = 1 - s\tau$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \right\| &\leq \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} (1 - s\tau) c_S x_S \right] \right\| \\ &\leq \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \right\| + \tau \left\| \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S \right\|, \\ (|\lambda| - 1) \cdot \left\| \left[ \sum_{i \in N}^i c_{\{i\}} x_{\{i\}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} c_S x_S \right] \right\| &\leq \tau \cdot \left\| \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S \right\|. \end{aligned}$$

---

5. Voir Horn et Johnson 1990, [28] p. 324.



Le paramètre  $\tau$  est positif et arbitrairement petit. Par conséquent si  $(|\lambda| - 1)$  est positif, le terme de gauche dans l'inégalité est positif et on peut choisir un paramètre  $\tau$  suffisamment petit pour contredire l'inégalité. On en conclut donc que  $(|\lambda| - 1)$  ne peut être strictement positif, ce qui nous amène à  $|\lambda| \leq 1$ . □

**Lemme 4.7**

*Le module des valeurs propres complexes de la matrice  $P_g M_c P_g$  est strictement inférieur à 1.*

**Preuve :** Soit  $\langle \lambda, w \rangle$  une eigenpair de la matrice  $M_g$  avec  $w = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S x_S$ ,

$$P_g M_c P_g \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S = \lambda \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S.$$

On sait que  $\langle 1, w \rangle$  est une eigenpair de la matrice  $P_g$ ,

$$P_g M_c \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S = \lambda P_g \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S.$$

Séparons à présent les singletons,

$$P_g M_c \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S = P_g M_c \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + P_g M_c \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} c_S x_S = P_g \lambda \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S.$$

Puisque  $\langle 1, x_{\{i\}} \rangle$ , pour tout  $i \in N$ , et  $\langle 1 - s\tau, x_S \rangle$ , pour toute coalition  $S$  telle que  $|S| = s \geq 2$ , sont des eigenpairs de  $M_c$ ,

$$\begin{aligned} & P_g \sum_{i \in N} c_{\{i\}} x_{\{i\}} + P_g \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} (1 - s\tau) c_S x_S \\ = & P_g \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S - P_g \tau \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S \\ = & P_g \lambda \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S. \end{aligned}$$

Pour toute coalition connexe  $T$  on obtient, après avoir regroupé certains termes,

$$\tau \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T] = (1 - \lambda) \sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S[T].$$

Puisque  $w = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S x_S$  est un vecteur propre, il existe au moins une coalition connexe  $T$  telle que  $w[T] = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S x_S[T] \neq 0$ . En isolant  $\lambda$ ,

$$\lambda = 1 - \tau \frac{\sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T]}{\sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} c_S x_S[T]}.$$

Puisque la matrice  $P_g M_c P_g$  est réelle,  $\bar{\lambda}$ , le conjugué de  $\lambda$ , est également une de ses valeurs propres, et donc on obtient

$$\bar{\lambda} = 1 - \tau \frac{\sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s \bar{c}_S x_S[T]}{\sum_{\substack{S \\ \emptyset \neq S \subseteq N}} \bar{c}_S x_S[T]}.$$

$$\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = \frac{1}{|w[T]|^2} \left[ w[T] - \tau \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T] \right] \left[ \bar{w}[T] - \tau \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s \bar{c}_S x_S[T] \right].$$

Développons les deux derniers termes,

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{|w[T]|^2} \left[ |w[T]|^2 - 2\tau \operatorname{Re} \left( w[T] \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s \bar{c}_S x_S[T] \right) + \tau^2 \left| \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T] \right|^2 \right].$$

On peut choisir un vecteur propre  $w$  tel que  $|w[T]| = 1$ ,

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\tau \operatorname{Re} \left( w[T] \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s \bar{c}_S x_S[T] \right) + \tau^2 \left| \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T] \right|^2.$$

Puisque  $|\lambda|^2 \leq 1$  on obtient,

$$2\tau \operatorname{Re} \left( w[T] \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s \bar{c}_S x_S[T] \right) - \tau^2 \left| \sum_{\substack{S \\ |S| \geq 2}} s c_S x_S[T] \right|^2 \geq 0.$$

$$0 < \tau \leq \frac{2 \operatorname{Re} \left( w[T] \sum_{S: |S| \geq 2} s \bar{c}_S x_S[T] \right)}{\left| \sum_{S: |S| \geq 2} s c_S x_S[T] \right|^2}.$$

Choisir un paramètre  $\tau$  suffisamment petit nous assure alors que  $|\lambda|^2 < 1$ .  $\square$

Grâce au lemme 4.5 on obtient une information de la plus haute importance quant à la forme générale des valeurs propres de  $M_g$ . Puisque

$-(\lambda - 1)/\tau = \sigma$  avec  $\sigma$  un paramètre complexe ou réel, on a  $\lambda = 1 - \sigma \tau$ . En combinant cette information avec les lemmes 4.6 et 4.7, nous sommes en mesure de déterminer que la valeur propre 1 est la seule valeur propre de  $M_g$  présente sur le cercle unité. Nous pouvons à présent nous attaquer à notre théorème de convergence.

**Theorème 4.6**

La matrice  $P_g M_c P_g$  est convergente et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (P_g M_c P_g)^m [S, T] = \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} + P_g [S, T], \quad (4.17)$$

avec  $a_{q-1}$  et  $b_{q-1}$  les coefficients des termes  $x^{q-1}$  dans  $R(x)$  et  $Q(x)$  respectivement.

**Preuve :** Si  $T$  est non-connexe, tous les termes de la séquence sont égaux à 0 et le théorème 4.6 est vrai. Considérons à présent  $T$  connexe.

$$(P_g M_c P_g)^m [S, T] = \sum_{\theta=1}^m A_\theta [S, T] \binom{m}{\theta} \tau^\theta + P_g [S, T],$$

avec  $A_\theta [S, T]$  les coefficients successifs des puissances de  $x$  dans le développement de MacLaurin de la fonction génératrice  $F(x)$ . Ces coefficients sont égaux aux dérivées correspondantes de  $F(x)$  au point  $x = 0$ .

$$A_\theta [S, T] = \frac{1}{\theta!} \frac{d^\theta F(0)}{dx^\theta}.$$

En procédant à la division euclidienne de l'équation (4.16), on peut écrire la fonction génératrice obtenue au lemme 4.4 comme

$$F(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_{q-2} x^{q-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{q-1} x^{q-1}} + \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}},$$

avec  $\alpha_i = a_i - \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} b_i$  pour  $1 \leq i \leq q - 2$  et  $\alpha_0 = -\frac{a_{q-1}}{b_{q-1}}$ .

En utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle nous pouvons écrire la fonction rationnelle qui constitue le premier terme de notre équation comme une combinaison linéaire finie de terme ayant la forme  $E(x) = (x - z)^{-w}$ , avec  $z$  une des racines du dénominateur et  $w$  un entier égal au plus à la multiplicité algébrique de  $z$ . Notons que  $z$  peut être un nombre complexe.

$$F(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{1}{(x - z_i)^j} + \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}},$$

avec  $z_1, \dots, z_p$  les racines de  $Q(x)$ ,  $w_1, \dots, w_p$  leur multiplicité algébrique respective et  $\beta_{i,j}$  les coefficients de la combinaison linéaire. Les dérivées d'ordre  $\theta$  sont données par,

$$\frac{d^\theta F(x)}{dx^\theta} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{(-j)(-j-1)\dots(-j-\theta+1)}{(x-z_i)^{j+\theta}},$$

et les coefficients  $A_\theta[S, T]$  par,

$$A_\theta[S, T] = \frac{1}{\theta!} \frac{d^\theta F(0)}{dx^\theta} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{(-1)^\theta}{(-z_i)^{j+\theta}} \binom{j+\theta-1}{\theta}.$$

$$(P_g M_c P_g)^m[S, T] = \sum_{\theta=1}^m \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{(-1)^\theta}{(-z_i)^{j+\theta}} \binom{j+\theta-1}{\theta} \binom{m}{\theta} \tau^\theta + P_g[S, T].$$

En inversant l'ordre des sommes,

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{1}{(-z_i)^j} \sum_{\theta=1}^m \binom{j+\theta-1}{\theta} \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta + P_g[S, T]. \quad (4.18)$$

Concentrons nous un moment sur le terme

$$\sum_{\theta=0}^m \binom{\theta+j-1}{\theta} \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\theta=0}^m \binom{\theta+j-1}{\theta} \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta &= \sum_{\theta=0}^m \frac{(\theta+j-1)\dots(\theta+1)}{(j-1)!} \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \sum_{\theta=0}^m \frac{d^{j-1}}{d\left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1}} \left[ \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{\theta+j-1} \right] \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{d\left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1}} \left[ \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1} \sum_{\theta=0}^m \binom{m}{\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta \right] \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{d\left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1}} \left[ \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^m \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En appliquant la règle générale de Leibniz pour le produit,

$$\frac{d^t}{dx^t}(u \cdot v) = \sum_{\theta=0}^t \binom{t}{\theta} \frac{d^\theta}{dx^\theta}(u) \frac{d^{t-\theta}}{dx^{t-\theta}}(v)$$

à l'équation (4.19), avec ici  $u = (\tau/z_i)^{j-1}$ ,  $v = (1 + \tau/z_i)^m$  et  $t = j - 1$ , on obtient,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(j-1)!} \sum_{\theta=0}^{j-1} \binom{j-1}{\theta} \frac{d^\theta}{d\left(\frac{\tau}{z_i}\right)^\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1} \frac{d^{j-1-\theta}}{d\left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1-\theta}} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^m \\
&= \frac{1}{(j-1)!} \sum_{\theta=0}^{j-1} \binom{j-1}{\theta} \frac{(j-1)!}{(j-\theta-1)!} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{(j-1-\theta)} \frac{(m)!}{(m-j+\theta+1)!} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^{(m-j+1+\theta)} \\
&= \sum_{\theta=0}^{j-1} \binom{j-1}{j-\theta-1} \binom{m}{j-\theta-1} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{(j-1-\theta)} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^{(m-j+1+\theta)}. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.20) dans l'équation (4.18) on obtient alors

$$\begin{aligned}
(P_g M_c P_g)^m [S, T] &= - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{1}{(-z_i)^j} + P_g [S, T] \\
&+ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{1}{(-z_i)^j} \sum_{\theta=0}^{j-1} \binom{j-1}{j-1-\theta} \binom{m}{j-1-\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1-\theta} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^{m-j+1+\theta}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$F(0) = \frac{R(0)}{Q(0)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \left(\frac{1}{-z_i}\right)^j + \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} = 0,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
(P_g M_c P_g)^m [S, T] &= \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} + P_g [S, T] \\
&+ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{w_i} \beta_{i,j} \frac{1}{(-z_i)^j} \left[ \sum_{\theta=0}^{j-1} \binom{j-1}{j-1-\theta} \binom{m}{j-1-\theta} \left(\frac{\tau}{z_i}\right)^{j-1-\theta} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^{m-j+1+\theta} \right].
\end{aligned}$$

Considérons le polynôme caractéristique de l'équation (4.13) ainsi que le polynôme  $Q(x)$  défini par l'équation (4.16). Si  $z_i$  est une racine de  $Q(x)$ , alors  $\frac{1}{z_i}$  est une racine de l'équation (4.13) et donc par conséquent une valeur propre de  $A_1$  (notons que  $z_i \neq 0$ ). On peut donc maintenant prouver que  $1 + \frac{\tau}{z_i}$  est une valeur propre de  $M_g$ .

Puisque les colonnes de la matrice  $(P_g M_c P_g)$  qui correspondent à des coalitions non-connexes sont nulles, les valeurs propres non nulles sont préservées en supprimant de la matrice  $(P_g M_c P_g)$  les lignes et les colonnes correspondantes à des coalitions non-connexes. Notons par  $M_g^s$  la matrice "simplifiée". La sous-matrice de  $A_1$  correspondante est donc  $(A_1^s) = (M_g^s - Id)/\tau$ , ce qui donne  $Id + \tau A_1^s = M_g^s$ . Conséquemment, les valeurs propres de  $M_g^s$  sont

données par  $1 + \frac{\tau}{z_i}$ , et sont aussi des valeurs propres non nulles de la matrice  $M_g$ . Puisque le rayon spectral de  $M_g$  est égal à 1, et puisque  $z_i \neq 0$ , le module de  $1 + \frac{\tau}{z_i}$  est strictement plus petit que 1.

Concentrons nous à présent sur le terme  $\binom{m}{j-1-\theta} \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^m$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ . Si  $\theta = j - 1$ , le terme est réduit à  $\left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)^m$  et converge donc vers 0. Supposons que  $\theta = 0, 1, \dots, j - 2$ .

$$\begin{aligned} \binom{m}{j-1-\theta} \left| \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right) \right|^m &= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-j+2+\theta)}{(j-1-\theta)!} \left| \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right) \right|^m \\ &\leq \frac{m^{j-1-\theta}}{(j-1-\theta)!} \left| \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right) \right|^m. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Le logarithme de cette dernière expression converge si et seulement si  $(j - 1 - \theta) \log(m) + m \log \left| \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right) \right|$  converge quand  $m \rightarrow \infty$ . Comme le module de  $\left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right)$  est strictement inférieur à 1, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \theta) \log(m) + m \log \left| \left(1 + \frac{\tau}{z_i}\right) \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \log(m) - m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\log(m) - m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{\log(m)}}{e^m}. \end{aligned}$$

Le terme de l'expression (4.21) converge donc vers 0 quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , ce qui conclut la preuve du théorème 4.6. □

Le théorème 4.5 stipule que le paramètre  $\tau$  doit être suffisamment petit. Grâce à la preuve du théorème 4.6 nous savons maintenant que  $\tau$  doit vérifier  $\left| 1 + \frac{\tau}{z_i} \right| < 1$  pour toutes les racines  $z_i$  du polynôme  $Q(x)$ , avec  $1 \leq i \leq p$ . Considérons une structure de communication complète. Les valeurs propres de la matrice  $A_1$  correspondante peuvent être exprimée par  $(M_c - Id)/\tau$  et sont donc  $0, -2, -3, \dots, -n$ . Il est aisé de voir que les racines de  $Q(x)$  sont alors  $z_i = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}$ . La condition  $\left| 1 + \frac{\tau}{z_i} \right| < 1$  est alors ramenée à  $0 < \tau < \frac{2}{n}$ , ce qui est cohérent avec le résultat de Hamiache (2001, [20]).

Nous avons donc (enfin) prouvé que la séquence des jeux associés était convergente vers un jeu limite. A présent il ne nous reste plus qu'à prouver que ce jeu limite est bien inessentiel.

#### Theorème 4.7

Pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , le jeu limite  $(N, \tilde{v}, g)$  défini par

$$\tilde{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_g M_c P_g)^k v, \quad (4.22)$$

est un jeu inessentiel.

**Preuve :** Ecrivons  $(P_g M_c P_g)^n = (P_g M_c) (P_g M_c P_g)^{n-1}$ . Soit  $W$  la limite de la séquence  $\{(P_g M_c P_g)^k\}_{k=1}^{\infty}$ . On sait que  $(P_g M_c) W = W$ . Par conséquent les colonnes de la matrice  $W$  sont donc des vecteurs propres de la matrice  $(P_g M_c)$  associés à la valeur propre 1. Il nous reste donc à prouver que tous les vecteurs de la matrice  $(P_g M_c)$  associés à la valeur propre 1 sont des vecteurs “inessentiels”.

$$(P_g M_c)[S, T] = \begin{cases} M_c[S, T] & \text{si } |(S/g)| = 1, \\ \sum_{K \in S/g} M_c[K, T] & \text{si } |(S/g)| > 1. \end{cases}$$

Soit  $w = (w_S)_{\emptyset \neq S \subseteq N}$  un vecteur propre associé à  $\lambda = 1$ . Résolvons le système d'équations linéaires suivant :  $(P_g \cdot M_c) w = w$ .

Puisque, pour toute coalition non-connectée  $S$ ,  $w_S = \sum_{K \in S/g} w_K$ , nous nous concentrerons uniquement sur les coalitions connectées. En utilisant l'équation (4.2), on obtient,

$$w_S = w_S + \tau \sum_{\substack{j \\ j \in S^* \setminus S}} (w_{S \cup \{j\}} - w_S - w_{\{j\}}).$$

Après simplifications,

$$0 = \sum_{\substack{j \\ j \in S^* \setminus S}} w_{S \cup \{j\}} - (s^* - s) w_S - \sum_{\substack{j \\ j \in S^* \setminus S}} w_{\{j\}}. \quad (4.23)$$

Montrons à présent que pour toute coalition connectée  $S$  telle que  $1 \leq |S| \leq n - 1$  on obtient,

$$w_S = w_N - \sum_{\substack{i \\ i \notin S}} w_{\{i\}}. \quad (4.24)$$

— Démarrons avec  $S = N$ . L'équation correspondante est  $w_N = w_N$ , ce qui laisse  $w_N$  indéterminé.

— Si  $S = N \setminus \{i\}$  et  $S$  connecté,  $w_N - w_{N \setminus \{i\}} - w_{\{i\}} = 0$ , ce qui nous amène à  $w_{N \setminus \{i\}} = w_N - w_{\{i\}}$ . Cela prouve (4.24) pour les coalitions connectées  $S$  telles que  $|S| = |N| - 1$ .

Supposons à présent que l'équation (4.24) est vérifiée pour toute coalition  $S$  de taille  $s$  et plus. Nous devons prouver que l'équation (4.24) est également vraie pour les coalitions connectées  $T$  telles que  $|T| = s - 1$ . En partant de (4.23) on obtient,

$$- \sum_{\substack{j \\ j \in T^* \setminus T}} w_{\{j\}} - (|T^*| - |T|) w_T + \sum_{\substack{j \\ j \in T^* \setminus T}} w_{T \cup \{j\}} = 0.$$

En utilisant notre hypothèse de départ,

$$- \sum_{j \in T^* \setminus T} w_{\{j\}} - (|T^*| - |T|) w_T + \sum_{j \in T^* \setminus T} \left[ w_N - \sum_{m \in N \setminus (T \cup \{j\})} w_{\{m\}} \right] = 0.$$

En considérant que  $N \setminus (T \cup \{j\}) = (N \setminus T) \setminus \{j\}$ ,

$$\begin{aligned} - \sum_{j \in T^* \setminus T} w_{\{j\}} - (|T^*| - |T|) w_T + (|T^*| - |T|) w_N \\ + \sum_{m \in T^* \setminus T} w_{\{m\}} - (|T^*| - |T|) \sum_{m \in N \setminus (T)} w_{\{m\}} = 0. \end{aligned}$$

En éliminant ce qui peut l'être,

$$w_T = w_N - \sum_{m \in N \setminus T} w_{\{m\}},$$

ce qui prouve que l'équation (4.24) est vérifiée pour toute coalition connexe non vide. En conséquence,

$$\begin{aligned} w_{\{j\}} &= w_N - \sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_{\{i\}}, \\ w_N &= \sum_{i \in N} w_{\{i\}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

En combinant les équations (4.24) et (4.25), on obtient

$$w_S = w_N - \sum_{i \in N \setminus S} w_{\{i\}} = \sum_{i \in N} w_{\{i\}} - \sum_{i \in N \setminus S} w_{\{i\}} = \sum_{i \in S} w_{\{i\}}. \tag{4.26}$$

Puisque  $w_S = \sum_{K \in S/g} w_K$  pour les coalitions  $S$  non-connexes, l'équation (4.24) est vérifiée pour toutes les coalitions. Les vecteurs propres de la matrice  $P_g M_c$  associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs "inessentiels". Nous avons donc prouvé que la ligne de la matrice  $W = (P_g M_c P_g)^\infty$  correspondant à la coalition  $S$  est égale à la somme des lignes de  $W$  correspondant aux joueurs individuels qui sont membres de la coalition  $S$ ,  $(P_g M_c P_g)^\infty[S, T] = \sum_{i \in S} (P_g M_c P_g)^\infty[\{i\}, T]$ . Ceci nous assure que le jeu limite  $\tilde{v}$  est inessentiel.

□

Par l'axiome de consistance associé, l'axiome de continuité et l'axiome de jeu inessentiel on obtient que, pour un paramètre  $\tau$  suffisamment petit,

$$\phi_i(N, v, g) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_i(N, v_\tau^{(m*)}, g) = \phi_i(N, \tilde{v}, g) = \tilde{v}(\{i\}),$$

Ce qui conclut la preuve de notre théorème 4.5.

□



#### 4.5 La valeur d'Aumann-Drèze

Soit un jeu  $(N, v, \mathcal{B})$  et un paramètre positif  $\tau$ , le jeu associé  $(N, v_\tau^*, \mathcal{B})$  est défini par

$$v_\tau^*(S) = \begin{cases} v(S) + \tau \sum_{\substack{j \\ j \in \bar{S} \setminus S}} [v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\})], & \text{si } |B_S| = 1, \\ \sum_{\substack{R \\ R \in \mathcal{B}_S}} v_\tau^*(R), & \text{si } |B_S| \neq 1. \end{cases} \quad (4.27)$$

Le jeu associé  $(N, v_\tau^*, g)$  est bien un jeu puisque  $v_\tau^*(\emptyset) = 0$ . Notons que ce jeu associé coïncide avec le jeu associé de Hamiache (2001, [20]) quand tous les joueurs sont réunis dans un seul bloc. En effet, si  $\mathcal{B} = N$ ,  $\bar{S} \setminus S = N \setminus S$ ,  $\forall S \subseteq N$  et  $|B_S| = 1 \forall S \subseteq N$ .

Soit une structure de coalitions  $(N, \mathcal{B})$ , on définit la matrice  $Q_{\mathcal{B}}$ <sup>6</sup>, une matrice carré d'ordre  $2^n - 1$ , telle que, pour toute coalition non vide  $S$  et  $T \subseteq N$ , on ait

$$Q_{\mathcal{B}}[S, T] = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in B_S, \\ 0 & \text{si } T \notin B_S. \end{cases} \quad (4.28)$$

#### Lemme 4.8

Pour tout jeu  $(N, v, \mathcal{B}) \in \Gamma_{\mathcal{B}}$ , la forme matricielle du jeu associé  $(N, v_\tau^*, \mathcal{B})$  est donnée par,

$$v_\tau^* = Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}} v, \quad (4.29)$$

avec  $M_c$  la matrice définie par l'équation (4.3).

#### Preuve :

$$\begin{aligned} (Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}} v)[S] &= (Q_{\mathcal{B}} M_c (v/\mathcal{B}))[S] = \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} (Q_{\mathcal{B}} M_c)[S, T] (v/\mathcal{B})(T) \\ &= \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (Q_{\mathcal{B}})[S, R] (M_c)[R, T] (v/\mathcal{B})(T) \\ &= \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (Q_{\mathcal{B}})[S, R] \sum_{\substack{T \\ T \subseteq N}} (M_c)[R, T] (v/\mathcal{B})(T). \end{aligned}$$

---

6. La matrice  $Q_{\mathcal{B}}$  définie ici est la même que la matrice  $Q_{\mathcal{B}}$  définie dans le chapitre 2.

$$\begin{aligned}
\text{Sachant que } (M_c w)[R] &= w(R) + \tau \sum_{j \in N \setminus R} [w(R \cup \{j\}) - w(R) - w(\{j\})], \\
&= \sum_{\substack{R \\ R \subseteq N}} (Q_{\mathcal{B}})[S, R] \left[ (v/\mathcal{B})(R) + \tau \sum_{\substack{j \\ j \in N \setminus R}} [(v/\mathcal{B})(R \cup \{j\}) \right. \\
&\quad \left. - (v/\mathcal{B})(R) - (v/\mathcal{B})(\{j\})] \right] \\
&= \sum_{\substack{R \\ R \in B_S}} \left[ (v/\mathcal{B})(R) + \tau \sum_{\substack{j \\ j \in N \setminus R}} [(v/\mathcal{B})(R \cup \{j\}) - (v/\mathcal{B})(R) - (v/\mathcal{B})(\{j\})] \right].
\end{aligned}$$

Pour toute coalition connexe  $R$  telle que  $R \in B_S$  il faut que  $R$  soit un sous-ensemble d'un bloc. Par conséquent pour tout joueur  $j \notin \bar{R}$ , on a  $[v/\mathcal{B}(R \cup \{j\}) - v/\mathcal{B}(R) - v/\mathcal{B}(\{j\})] = 0$ ,

$$\sum_{\substack{R \\ R \in B_S}} [v(R) + \tau \sum_{\substack{j \\ j \in \bar{R} \setminus R}} v(R \cup \{j\}) - v(R) - v(\{j\})] = \sum_{\substack{R \\ R \in B_S}} v_{\tau}^*(R),$$

Ce qui conclut la preuve du lemme 4.8. □

Ces travaux étant encore inachevés, la suite de cette section détaillera les calculs sur un exemple précis afin de montrer que le comportement de la matrice  $Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}}$  est similaire au comportement de la matrice  $P_gM_cP_g$ . Prenons l'exemple 1.13. On a la structure de coalition  $(N, v, \mathcal{B})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  et  $v(S) = |S| - 1$ . La structure de coalitions est la suivante :

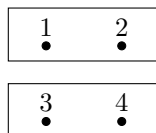


FIGURE 4.1 – Structure de coalitions

La matrice  $Q_B$  est donc

$$Q_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient alors la matrice  $Q_B M_c Q_B$  suivante :

$$Q_B M_c Q_B = \begin{bmatrix} 1-\tau & -\tau & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 1-\tau & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\tau & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & 1-\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\tau & -\tau & 1-\tau & -\tau & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\tau & -\tau & -\tau & 1-\tau & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 1-\tau & 1-\tau & -\tau & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 1-\tau & -\tau & 1-\tau & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\tau & -\tau & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & 1-\tau & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\tau & -\tau & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 1-\tau & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme nous l'avons fait pour le cas de la matrice  $P_g M_c P_g$  nous allons ici regarder la valeur des éléments  $(Q_B M_c Q_B)^m[1, 2]$  pour  $m$  allant de 1 à 7.

$$(Q_B M_c Q_B)[1, 2] = -\tau,$$

$$(Q_B M_c Q_B)^2[1, 2] = 2\tau^2 - 2\tau,$$

$$(Q_B M_c Q_B)^3[1, 2] = -4\tau^3 + 6\tau^2 - 3\tau,$$

$$(Q_B M_c Q_B)^4[1, 2] = 8\tau^4 - 16\tau^3 + 12\tau^2 - 4\tau,$$

$$(Q_B M_c Q_B)^5[1, 2] = -16\tau^5 + 40\tau^4 - 40\tau^3 + 20\tau^2 - 5\tau,$$

$$(Q_B M_c Q_B)^6[1, 2] = 32\tau^6 - 96\tau^5 + 120\tau^4 - 80\tau^3 + 30\tau^2 - 6\tau,$$

$$(Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}})^7[1, 2] = -64\tau^7 + 224\tau^6 - 336\tau^5 + 280\tau^4 - 140\tau^3 + 42\tau^2 - 7\tau.$$

Nous pouvons voir apparaître ici le triangle de Pascal (en bleu) multiplié par une constante (en rouge) :

$$\begin{aligned} & -1\tau, \\ & \quad 2 \times 1\tau^2 - 2\tau, \\ & \quad -4 \times 1\tau^3 + 2 \times 3\tau^2 - 3\tau, \\ & \quad \quad 8 \times 1\tau^4 - 4 \times 4\tau^3 + 2 \times 6\tau^2 - 4\tau, \\ & \quad \quad -16 \times 1\tau^5 + 8 \times 5\tau^4 - 4 \times 10\tau^3 + 2 \times 10\tau^2 - 5\tau, \\ & \quad \quad \quad 32 \times 1\tau^6 - 16 \times 6\tau^5 + 8 \times 15\tau^4 - 4 \times 20\tau^3 + 2 \times 15\tau^2 - 6\tau, \\ & \quad \quad \quad -64 \times 1\tau^7 + 32 \times 7\tau^6 - 16 \times 21\tau^5 + 8 \times 35\tau^4 - 4 \times 35\tau^3 + 2 \times 21\tau^2 - 7\tau. \end{aligned}$$

On a donc une séquence de constantes que l'on notera  $A_m[1, 2]$  :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1[1, 2] & A_2[1, 2] & A_3[1, 2] & A_4[1, 2] & A_5[1, 2] & A_6[1, 2] & A_7[1, 2] \\ -1 & 2 & -4 & 8 & -16 & 32 & -64. \end{array}$$

La matrice  $A_1$  est donc

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme minimal de cette matrice est  $\text{minpoly}(A_1) = 2x + x^2$ . En appliquant la même logique que dans la section précédente, on obtient le coefficient  $b_1 = 2$ . Les coefficients d'autre degré sont nuls. En calculant les puissances de la matrice  $A_1$  on obtient  $a_1 = -1$ , et  $a_q = 0, \forall q > 1$ .

On obtient alors une fonction génératrice  $F$  telle que

$$F(x) = \frac{-x}{1 + 2x}.$$

La série de MacLaurin d'ordre 8 de cette fonction est

$$F(x) = -x + 2x^2 - 4x^3 + 8x^4 - 16x^5 + 32x^6 - 64x^7 + O(x^8).$$

On peut observer que les coefficients correspondent bien aux éléments à la ligne 1 et colonne 2 des puissances de la matrice  $A_1$ .

Prenons une valeur de  $\tau$  arbitrairement petite (ici  $\tau = \frac{1}{10}$ ) et itérons les puissances de la matrice  $Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}}$  (ici  $m=10000$ ) :

$$Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}}^m = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut observer plusieurs choses. Premièrement, la matrice est convergente. Deuxièmement, l'élément ligne 1 colonne 2 correspond bien au rapport de nos deux coefficients  $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{1}{2}$ . Enfin, la matrice limite est une matrice inessentielle. En effet, le jeu associé correspondant est

$$Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}}^{10000} \times v = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2).$$

Ce jeu associé est bien inessentiel et les valeurs des singletons correspondent aux paiement de la valeur d'Aumann-Drèze pour ce jeu (voir l'exemple 1.13).

Considérons les trois axiomes suivants, qui sont les axiomes de la section précédente adaptés aux structures de coalitions.

**Axiome 4.4** (*Jeu inessentiel*) :

Pour tout jeu à structure de coalitions  $(N, v, \mathcal{B})$  avec  $(N, v)$  un jeu inessentiel, une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions vérifie l'axiome de jeu inessentiel si et seulement si

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{B}) = v(\{i\}), \quad \forall i \in N.$$

**Axiome 4.5** (*Continuité*) :

Pour toute séquence convergente  $\{(N, v_k, \mathcal{B})\}_{k=1}^{\infty}$  dont la limite est  $(N, \tilde{v}, \mathcal{B})$ , une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions vérifie l'axiome de continuité si et seulement si,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(N, v_k, \mathcal{B}) = \gamma(N, \tilde{v}, \mathcal{B}).$$

**Axiome 4.6** (*Consistance associée*) :

Pour tout jeu à structure de coalitions  $(N, v, \mathcal{B})$ , une règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions vérifie l'axiome de consistance associée si et seulement si

$$\gamma(N, v, \mathcal{B}) = \gamma(N, v_\tau^*, \mathcal{B}).$$

On énonce le théorème suivant :

**Theorème 4.8**

*Il existe une et une seule règle d'allocation  $\gamma$  pour jeux à structure de coalitions vérifiant les axiomes de jeu inessentiel, de continuité et de consistance associée, à condition que  $\tau$  soit suffisamment petit. Cette règle d'allocation  $\gamma$  est telle que*

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{B}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_i(N, v_\tau^{(m*)}, \mathcal{B}) = \gamma_i(N, \tilde{v}, \mathcal{B}) = \tilde{v}(\{i\}) = AD_i(N, v, \mathcal{B}).$$

**Preuve :** Nous présenterons ici une ébauche de preuve, certains éléments étant encore à développer.

Comme nous l'avons déjà rappelé dans les chapitres 1 et 2, on peut exprimer n'importe quelle structure de coalitions  $\mathcal{B}$  sous la forme d'un graphe non-connexe dans lequel les coalitions sont les composantes complètes du graphe. Soit  $g_{\mathcal{B}} = \{\{i, j\} \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ telle que } i, j \in B \text{ et } i \neq j\}$  le graphe déterminé par une structure de coalitions donnée, on a alors  $P_{g_{\mathcal{B}}} = Q_{\mathcal{B}}$  et donc

$$Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}} = P_{g_{\mathcal{B}}} M_c P_{g_{\mathcal{B}}}.$$

Par conséquent, les résultats de la section précédente s'appliquant aux matrices  $P_g M_c P_g$  s'appliquent aux matrices  $Q_{\mathcal{B}} M_c Q_{\mathcal{B}}$ , si la non connexité de  $N$  n'invalide pas ces résultats. Il reste donc à prouver que la valeur que l'on obtient correspond bien à la valeur d'Aumann-Drèze.

En utilisant la matrice de la valeur de Shapley définie au chapitre 2 on peut écrire la valeur d'Aumann-Drèze de la manière suivante,  $\forall i \in N$ , :

$$\begin{aligned} AD_i(N, v) &= Sh_i(N, v/\mathcal{B}) = Sh_i(N, v/g_{\mathcal{B}}) \\ &= [M^{Sh} \times v/g_{\mathcal{B}}]_i = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N}} [M^{Sh}]_{i,S} \sum_{\substack{T \\ T \in S/g_{\mathcal{B}}}} v(T). \end{aligned}$$

Par définition de  $g_{\mathcal{B}}$  on obtient

$$\begin{aligned} AD_i(N, v) &= \sum_{\substack{B \\ B \in \mathcal{B}}} \sum_{\substack{S \\ S \subseteq B}} [M^{Sh}]_{i,S} v(S) \\ &= \sum_{\substack{B \\ B \in \mathcal{B}}} Sh_i(N, v|_B), \end{aligned}$$

ce qui correspond à appliquer la valeur de Shapley sur chaque bloc.

Afin de prouver que le paiement donné par la convergence de la matrice  $Q_{\mathcal{B}}M_cQ_{\mathcal{B}}$  correspond à la valeur d'Aumann-Drèze, il nous reste donc à prouver que si  $N$  est non-connexe le résultat obtenu grâce à la matrice  $P_gM_cP_g$  est décomposable par composante. Dans le cas d'une structure de coalition le graphe  $g_{\mathcal{B}}$  induit par la structure de coalition  $\mathcal{B}$  est composé de composante complète. Comme la règle d'allocation obtenue à la section précédente coïncide avec la valeur de Shapley quand le graphe est complet, s'assurer de la décomposabilité par composante de notre règle d'allocation suffira à montrer qu'elle coïncide avec la valeur d'Aumann-Drèze.

□

## Chapitre 5

# Caractérisation du centre : une règle d'allocation pour jeux à structure de communication



## 5.1 Introduction

L'allocation des ressources d'un jeu à structure de communication est une problématique qui est toujours intimement liée à celle de la mesure de la centralité des graphes. En effet, si l'on considère un jeu d'unanimité sur la grande coalition, la seule asymétrie qui subsiste alors dans le jeu est celle induite par le graphe puisque tous les joueurs sont donc égaux par rapport à la fonction caractéristique. Répartir la valeur générée par les joueurs se résume alors à mesurer l'importance de chaque joueur dans le graphe. Cette problématique de la mesure de centralité devient encore plus prééminente si l'on traite uniquement de règles d'allocation linéaires. En effet, construire une solution sur les jeux d'unanimité amène alors à une solution pour tous les jeux (Hamiache, 1999 [19]).

L'une des approches les plus intuitives de la mesure de la centralité est d'identifier le centre du graphe. Dans ce chapitre nous développerons une règle d'allocation pour des jeux sur des graphes acycliques qui, quand elle est appliquée à des jeux d'unanimité, alloue le même paiement à tous les joueurs appartenant au centre du graphe et ne laisse rien aux autres joueurs. Nous caractériserons cette règle d'allocation en utilisant un ensemble d'axiomes en tout point similaire à celui utilisé par Hamiache (1999, [19]) mais reposant sur jeu associé différent. Nous sommes alors en mesure de proposer une définition du centre d'un graphe acyclique construite sur une approche spécifique de la théorie des jeux coopératifs se reposant principalement sur la linéarité et la consistance associée.

## 5.2 Centre des sous-graphes d'un graphe acyclique

On définit l'excentricité d'un sommet  $i \in N$  comme  $\xi_i^g = \max\{d(i, j) \mid j \in N\}$ , avec  $d(i, j)$  le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour relier  $i$  et  $j$ . Le rayon du graphe  $(N, g)$  est noté  $r(g) = \min_{i \in N} \xi_i^g$ . On note  $C(g) = \{i \in N \mid \xi_i^g = r(g)\}$ , l'ensemble des sommets composant le centre du graphe, c'est à dire les sommets d'excentricité minimale. On dit qu'un graphe  $g$  est acyclique si deux sommets distincts sont connectés par un unique chemin. Un sommet  $i \in N$  est une extrémité d'un graphe acyclique  $g$  si  $|g_i| = 1$ . On note  $X(g) = \{i \in N \mid |g_i| = 1\}$  l'ensemble des extrémités d'un graphe acyclique  $g$ . On écrira simplement  $X$  quand le contexte ne laisse aucune ambiguïté. On note  $x = |X|$  le cardinal de  $X$ .

Soit un graphe acyclique  $(N, g)$ , on sait que  $1 \leq |C(g)| \leq 2$  (Jordan, 1869 [30]). Dans cette section nous nous intéresserons aux centres de certains sous-graphes spécifiques de  $(N, g)$ .

### Lemme 5.1

*Soit un graphe acyclique  $(N, g)$ , quel que soit le joueur  $i \in N$ , si un sommet*

$k \in N$  est tel que  $k \in \operatorname{argmax}\{d(i, j) \mid j \in N\}$  alors  $k \in X(g)$ .

**Preuve :** Prouvons ce lemme par un raisonnement *ab absurdo*. Soit un sommet  $i \in N$ , supposons qu'il existe un sommet  $k_0 \in N \setminus X$  tel que  $k_0 \in \operatorname{argmax}\{d(i, j) \mid j \in N\}$ . Comme  $k_0 \in N \setminus X$  cela veut dire que  $k_0$  est relié à au moins deux sommets. L'un fait nécessairement partie du chemin reliant  $i$  à  $k$ . Par conséquent les autres sommets (nommons les  $k_j$ ) sont obligatoirement tels que  $d(i, k_0) < d(i, k_j)$ ,  $\forall j \in g_{k_0}$ . Ce qui contredit notre hypothèse. On peut donc conclure que si un sommet  $k$  est le sommet le plus éloigné d'un sommet donné  $i$ , alors  $k \in X$ . □

**Proposition 5.1**

Soit un graphe acyclique  $(N, g)$ . Le centre du sous-graphe obtenu en supprimant toutes les extrémités du graphe est égal au centre du graphe d'origine et le rayon de ce sous-graphe est égal au rayon du graphe d'origine moins 1. Formellement,  $C(g(N \setminus X(g))) = C(g)$  et  $r(g(N \setminus X)) = r(g) - 1$ .

**Preuve :** L'excentricité d'un joueur  $i$  est définie par

$$\xi_i^g = \max\{d(i, j) \mid j \in N\}.$$

Grâce au lemme 5.1 on sait que,  $\forall i \in N$ , les sommets  $k \in N$  tels que

$$k \in \operatorname{argmax}\{d(i, j) \mid j \in N\}$$

sont tous des extrémités. Conséquemment, dans le cas d'un graphe acyclique, l'excentricité d'un joueur  $i$  peut donc être définie par

$$\xi_i^g = \max\{d(i, x_0) \mid x_0 \in X(g)\}.$$

On peut donc conclure qu'en supprimant les extrémités  $X(g)$  du graphe, l'excentricité de chaque joueur  $i \in N \setminus X(g)$  dans le graphe  $g(N \setminus X(g))$  sera

$$\xi_i^g = \max\{d(i, x_0) \mid x_0 \in X(g(N \setminus X(g)))\}.$$

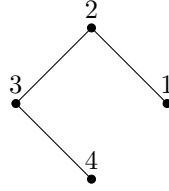
L'excentricité de chaque joueur va donc être réduite de 1. Par conséquent  $C(g) = C(g(N \setminus X(g)))$  et  $r(g(N \setminus X(g))) = r(g) - 1$ . □

**Proposition 5.2**

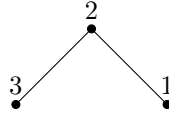
Soit un graphe acyclique  $(N, g)$ . Il existe des coalitions  $R$  telle que  $N \setminus X \subseteq R \subseteq N$  pour lesquelles  $C(g(R)) \neq C(g)$  et

- si  $|C(g)| = 1$  et  $|C(g(R))| = 1$  alors  $C(g) = C(g(R))$ ,
- si  $|C(g)| = 1$  et  $|C(g(R))| = 2$  alors  $C(g) \subsetneq C(g(R))$ ,
- si  $|C(g)| = 2$  et  $|C(g(R))| = 1$  alors  $|C(g) \cap C(g(R))| = 1$ ,
- si  $|C(g)| = 2$  et  $|C(g(R))| = 2$  alors  $C(g) = C(g(R))$ .

**Preuve :** Soit le graphe  $(N, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $g = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ . On a le graphe suivant :



Le centre du graphe est ici  $C(g) = \{2, 3\}$ . On a  $X(g) = \{1, 4\}$ . Notons  $R = \{1, 2, 3\}$ , on a bien  $N \setminus X \subseteq R \subseteq N$ . Le graphe  $(R, g(R))$  est donc :



Le centre de ce sous-graphe est donc  $C(g(R)) = \{2\}$ . Il existe donc bien des coalitions  $R$  telles que  $N \setminus X \subseteq R \subseteq N$  pour lesquelles  $C(g(R)) \neq C(g)$ . Pour le reste de la preuve, considérons un graphe quelconque  $(N, g)$ . Soit un joueur  $c \in C(g)$  et une coalition  $R$  telle que  $N \setminus X \subseteq R \subseteq N$ , prouvons qu'il ne peut exister de joueur  $c' \in R$  tel que  $\xi_{c'}^{g(R)} < \xi_c^{g(R)}$ . Procédons par un raisonnement *ab absurdo* et imaginons qu'il existe un tel joueur. Par la proposition 5.1 on sait que  $\xi_c^{g(N \setminus X)} = r(g) - 1$  et  $c \in C(g(N \setminus X))$ , on obtiendrait alors

$$r(g) - 1 = \xi_c^{g(N \setminus X)} < \xi_{c'}^g - 1 = \xi_{c'}^{g(N \setminus X)} \leq \xi_{c'}^{g(R)} < \xi_c^{g(R)} \leq \xi_c^g = r(g),$$

on pourrait donc conclure

$$r(g) - 1 < \xi_{c'}^{g(R)} < r(g).$$

Sachant que le rayon d'un graphe et l'excentricité d'un joueur sont des nombres entiers et qu'il n'existe aucun nombre entier entre  $r(g) - 1$  et  $r(g)$ ,

cette relation est impossible. Par conséquent il n'existe aucun joueur  $c' \in R$  tel que  $\xi_{c'}^{g(R)} < \xi_c^g$  pour  $R, N \setminus X \subseteq R \subseteq N$ . Cela veut dire que si  $c \in C(g)$  alors  $\xi_c^{g(R)} \leq \xi_i^{g(R)}$ ,  $\forall i \in R, \forall R, N \setminus X \subseteq R \subseteq N$  et donc que  $c \in C(g(R))$ . On peut alors faire les conclusions suivantes :

- si  $|C(g)| = 1$  et  $|C(g(R))| = 1$  alors  $C(g) = C(g(R))$ ,
  - si  $|C(g)| = 1$  et  $|C(g(R))| = 2$  alors  $C(g) \subsetneq C(g(R))$ ,
  - si  $|C(g)| = 2$  et  $|C(g(R))| = 1$  alors  $|C(g) \cap C(g(R))| = 1$ ,
  - si  $|C(g)| = 2$  et  $|C(g(R))| = 2$  alors  $C(g) = C(g(R))$ ,
- ce qui conclut la preuve de la proposition 5.2. □

### 5.3 Résultat principal

Soit une règle d'allocation  $\phi$ , quel que soit le jeu à structure de communication  $(N, v, g)$  on définit le jeu qui lui est associé par  $(N, v_\phi^*, g)$  de telle manière que, pour tout  $S \subseteq N$ , on a

$$v_\phi^*(S) = \begin{cases} v(S^*) - \sum_{j \in S^* \setminus S} \phi_j(S^* \cap \{j\}^*, v_{|S^* \cap \{j\}^*}, g(S^* \cap \{j\}^*)) & \text{si } |S/g| = 1, \\ (v_\phi^*/g)(S) & \text{si } |S/g| > 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Quand le contexte ne laisse aucune ambiguïté on notera  $v_\phi^*$  simplement par  $v^*$ .

Le jeu associé peut s'interpréter de la manière suivante : soit  $S$  une coalition connexe, le monde tel qu'il est perçu par la coalition  $S$  se limite à  $S^*$ . Cette coalition a des vues sur la valeur  $v(S^*)$  mais a besoin pour l'obtenir d'interagir avec tous les joueurs  $j \in S^* \setminus S$ . Le monde de  $j$  se limite à  $\{j\}^*$ . Quand ces deux entités interagissent, le joueur  $j$  et la coalition  $S$  font attention à ne pas partager d'information qui n'est pas déjà en la possession de l'autre. Ils s'accordent alors sur une vision du monde commune représentée par  $S^* \cap \{j\}^*$ , ce qui leur permet de conclure à un partage d'une part plus petite que ce qui est vraiment en jeu. Par exemple si  $S$  est une coalition importante avec un seul joueur relié à un certain joueur  $j \notin S$ , la coalition  $S$  lui proposera le paiement qu'il obtiendrait dans un jeu à deux joueurs en échange de sa coopération puisque c'est le seul sous-graphe sur lequel ils peuvent se mettre d'accord. Cela permet à des coalitions ou des joueurs

suffisamment connectées de cacher une partie de l'information dont ils disposent sur le graphe afin d'éviter d'avoir à partager un gâteau plus grand que nécessaire.

Nous pouvons exprimer à présent les nouveaux axiomes que nous utiliserons.

**Axiome 5.1** (*Efficiency*) :

Une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication est efficiente si et seulement si, pour tout jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , cette dernière vérifie

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v, g) = v(N).$$

**Axiome 5.2** (*Conditions initiales*) :

Soit un graphe complet  $(N, g)$  avec  $|N| = 2$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome des conditions initiales si et seulement si

$$\phi_1(N, u_N, g) = \phi_2(N, u_N, g).$$

**Axiome 5.3** (*Indépendance par rapport aux joueurs non pertinents*) :

Soit  $(N, g)$ , une règle d'allocation  $\phi$  pour jeux à structure de communication vérifie l'axiome d'indépendance par rapport aux joueurs non pertinents si et seulement si, pour toute coalition connexe  $R \subseteq N$ ,

$$\phi_i(N, u_R, g) = \begin{cases} \phi_i(R, u_R, g(R)) & \text{si } i \in R, \\ 0 & \text{si } i \notin R. \end{cases}$$

**Axiome 5.4** (*Consistance associée*) :

Pour tout jeu à structure de communication  $(N, v, g)$ , une règle d'allocation  $\phi$  vérifie l'axiome de consistance associée si et seulement si

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v_\phi^*, g).$$

On définit l'ensemble  $\Gamma_G/g = \{(N, v/g, g) \mid (N, v, g) \in \Gamma_G\}$ . En supposant que  $N$  est connexe, on sait que l'ensemble des jeux d'unanimité à support connexe est une base de l'ensemble  $\Gamma_G/g$  (Hamiache 1999, [19]).

En utilisant les axiomes de linéarité et d'indépendance par rapport aux

joueurs non pertinents on sait également, toujours grâce à Hamiache (1999, [19]), que l'on a

$$\phi_i(N, v/g, g) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) (v/g)(S) \quad (5.2)$$

quel que soit le jeu  $(N, v/g, g) \in \Gamma_G/g$ . Par définition de  $v^*$  on a  $(v/g)^* = v^*$  quel que soit  $v$ . En utilisant l'axiome 5.4, on obtient

$$\phi(N, v, g) = \phi(N, v^*, g) = \phi(N, (v/g)^*, g) = \phi(N, v/g, g).$$

Par conséquent, quel que soit le jeu  $(N, v, g) \in \Gamma_G$ , on a

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\substack{S \\ S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) v(S). \quad (5.3)$$

### Lemme 5.2

Soit deux coalitions  $R, K \subseteq N$  avec  $\emptyset \neq K \subseteq R$ ,

$$\sum_{\substack{S \\ K \subseteq S \subseteq R}} (-1)^{|R|-|S|} = \begin{cases} 0 & \text{si } K \neq R, \\ 1 & \text{si } K = R. \end{cases}$$

**Preuve :**

$$\sum_{\substack{S \\ K \subseteq S \subseteq R}} (-1)^{|R|-|S|} = \sum_{t=0}^{r-k} \binom{r-k}{t} (-1)^{r-k-t}.$$

Appliquons la formule du binôme de Newton. Si  $K \neq R$ , on a alors

$$\sum_{t=0}^{r-k} \binom{r-k}{t} (-1)^{r-k-t} = (-1 + 1)^{r-k} = 0.$$

Si  $K = R$ , on a alors

$$\sum_{t=0}^0 \binom{0}{t} (-1)^{0-t} = (-1)^0 = 1.$$

□

### Theorème 5.1

Une règle d'allocation  $\phi$  pour les jeux à structure de communication vérifie les axiomes des conditions initiales, d'efficacité, de linéarité, d'indépendance

par rapport aux joueurs non pertinents et de consistance associée si et seulement si

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{S \subseteq R \subseteq S^*} (-1)^{|R|-|S|} \mathbb{I}_{[i \in C(g(R))]} \frac{1}{|C(g(R))|} v(S),$$

avec  $\mathbb{I}_{[i \in C(g(R))]} = 1$  si  $i \in C(g(R))$  et 0 sinon.

**Preuve :** Nous allons démontrer ce théorème par récurrence. Par l'axiome d'efficacité, le théorème est vérifié pour les jeux à un seul joueur. Pour deux joueurs, en utilisant l'équation (5.3) on a

$$\begin{aligned} \phi_1(N, v, g) &= v(1) + \phi_1(N, u_N, g) [v(12) - v(2) - v(1)], \\ \phi_2(N, v, g) &= v(2) + \phi_2(N, u_N, g) [v(12) - v(1) - v(2)]. \end{aligned}$$

Le jeu associé est le suivant :

$$\begin{aligned} v^*(1) &= v(12) - \phi_2(N, v, g), \\ v^*(2) &= v(12) - \phi_1(N, v, g), \\ v^*(12) &= v(12). \end{aligned}$$

En utilisant l'axiome des conditions initiales, on sait

$$\phi_1(N, u_N, g) = \phi_2(N, u_N, g) = a.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \phi_1(N, v^*, g) &= v^*(1) + a [v^*(12) - v^*(2) - v^*(1)], \\ \phi_1(N, v^*, g) &= v(12) - v(2) - a [v(12) - v(2) - v(1)] \\ &\quad + a [-v(12) + v(1) + 2a(v(12) - v(2) - v(1)) + v(2)]. \end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \phi_1(N, v^*, g) - \phi_1(N, v, g) &= [2a^2 - 3a + 1] v(12) + [-2a^2 + 3a - 1] v(2) \\ &\quad + [-2a^2 + 3a - 1] v(1) = 0. \end{aligned}$$

Comme cette équation doit être vraie pour toute fonction caractéristique  $v$ , il faut trouver  $a$  tel que

$$1 - 3a + 2a^2 = 0.$$

Il existe deux solutions :  $a = 1$  et  $a = \frac{1}{2}$ . Puisque  $a = 1$  transgresse l'axiome d'efficacité, la seule solution est  $a = \frac{1}{2}$ . Par conséquent  $\phi_1(N, u_N, g) = \phi_2(N, u_N, g) = \frac{1}{2}$ .

Pour deux joueurs, le théorème est donc vérifié.

Pour  $n = 3$  joueurs, le seul graphe acyclique est un chemin reliant les trois joueurs. On considère donc le graphe  $(N, g)$  avec  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $g = \{(1, 2), (2, 3)\}$ . En utilisant l'équation (5.3) ainsi que les paiements obtenus pour deux joueurs on a

$$\begin{aligned}\phi_1(N, v, g) &= v(1) + \left(\frac{1}{2} - \phi_1(N, u_N, g)\right) [v(12) - v(1) - v(2)] \\ &\quad + \phi_1(N, u_N, g) [v(123) - v(1) - v(23)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(N, v, g) &= v(2) + \left(\frac{1}{2} - \phi_2(N, u_N, g)\right) [v(12) - v(1) - v(2)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \phi_2(N, u_N, g)\right) [v(23) - v(2) - v(3)] \\ &\quad + \phi_2(N, u_N, g) [v(123) - v(1) - v(2) - v(3)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3(N, v, g) &= v(3) + \left(\frac{1}{2} - \phi_3(N, u_N, g)\right) [v(23) - v(2) - v(3)] \\ &\quad + \phi_3(N, u_N, g) [v(123) - v(12) - v(3)].\end{aligned}$$

Le jeu associé est le suivant :

$$v^*(1) = v(12) - \left[ v(2) - \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)) \right],$$

$$\begin{aligned}v^*(2) &= v(123) - \left[ v(1) - \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)) \right] \\ &\quad - \left[ v(3) - \frac{1}{2}(v(23) - v(2) - v(3)) \right],\end{aligned}$$

$$v^*(3) = v(23) - \left[ v(2) - \frac{1}{2}(v(23) - v(2) - v(3)) \right],$$

$$v^*(12) = v(123) - \left[ v(3) - \frac{1}{2}(v(23) - v(2) - v(3)) \right],$$

$$v^*(13) = v^*(1) + v^*(3),$$

$$v^*(23) = v(123) - \left[ v(1) - \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)) \right],$$

$$v^*(123) = v(123).$$



On obtient donc

$$\begin{aligned}\phi_1(N, v^*, g) &= v^*(1) + \left(\frac{1}{2} - \phi_1(N, u_N, g)\right) [v^*(12) - v^*(1) - v^*(2)] \\ &\quad + \phi_1(N, u_N, g) [v^*(123) - v^*(1) - v^*(23)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(N, v^*, g) &= v^*(2) + \left(\frac{1}{2} - \phi_2(N, u_N, g)\right) [v^*(12) - v^*(1) - v^*(2)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \phi_2(N, u_N, g)\right) [v^*(23) - v^*(2) - v^*(3)] \\ &\quad + \phi_2(N, u_N, g) [v^*(123) - v^*(1) - v^*(2) - v^*(3)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3(N, v^*, g) &= v^*(3) + \left(\frac{1}{2} - \phi_3(N, u_N, g)\right) [v^*(23) - v^*(2) - v^*(3)] \\ &\quad + \phi_3(N, u_N, g) [v^*(123) - v^*(12) - v^*(3)].\end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} \phi_1(N, v^*, g) - \phi_1(N, v, g) = 0, \\ \phi_2(N, v^*, g) - \phi_2(N, v, g) = 0, \\ \phi_3(N, v^*, g) - \phi_3(N, v, g) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(N, u_N, g)v(12) - \phi_1(N, u_N, g)v(2) \\ -\phi_1(N, u_N, g)v(123) + \phi_1(N, u_N, g)v(23) = 0, \\ (1 - \phi_2(N, u_N, g))v(123) + (\phi_2(N, u_N, g) - 1)v(23) \\ + (\phi_2(N, u_N, g) - 1)v(12) + (1 - \phi_2(N, u_N, g))v(2) = 0, \\ \phi_3(N, u_N, g)v(23) - \phi_3(N, u_N, g)v(2) \\ -\phi_3(N, u_N, g)v(123) + \phi_3(N, u_N, g)v(12) = 0. \end{cases}$$

Ceci devant être vérifié pour toute fonction caractéristique  $v$ , on conclut

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(N, u_N, g) = 0, \\ \phi_2(N, u_N, g) = 1, \\ \phi_3(N, u_N, g) = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc prouvé le théorème pour  $n \leq 3$ . Supposons à présent que le théorème soit vrai pour les jeux jusque  $n - 1$  joueurs, nous allons prouver qu'il est vrai pour  $n$  joueurs. Faisons les hypothèses de récurrences suivantes :

### Hypothèses de récurrences

- $\phi_i(R, u_R, g(R)) = 1$  si  $i \in C(g(R))$ ,  $|C(g(R))| = 1$  et  $R \subsetneq N$ ,
- $\phi_i(R, u_R, g(R)) = \frac{1}{2}$  si  $i \in C(g(R))$ ,  $|C(g(R))| = 2$  et  $R \subsetneq N$ ,
- $\phi_i(R, u_R, g(R)) = 0$  si  $i \notin C(g(R))$ ,  $R \subsetneq N$ .

Par l'axiome de consistance associée on a  $\phi(N, v, g) = \phi(N, v^*, g)$  et donc  $\phi(R, u_R, g(R)) = \phi(R, (u_R)^*, g(R))$  pour toute coalition connexe  $R \subseteq N$ . En utilisant l'axiome d'indépendance par rapport aux joueurs non pertinents on obtient

$$\begin{aligned} \phi_i(N, v^*, g) &= \phi_i(N, v, g) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, (u_R)^*, g(R)) v(S). \end{aligned}$$

Puisque  $\phi(N, v, g) = \phi(N, v^*, g)$  quel que soit le jeu, les coefficients de  $v(S)$  doivent être égaux dans les deux expressions  $\forall S \subseteq N$ . En utilisant notre hypothèse de récurrence, les valeurs de  $\phi(R, (u_R)^*, g(R)) = \phi(R, u_R, g(R))$  sont déjà connues. Pour satisfaire l'axiome de consistance associée il nous faut donc uniquement trouver les valeurs telles que  $\phi(N, (u_N)^*, g) = \phi(N, u_N, g)$ . Pour toute coalition connexe  $S$ , par définition on a

$$(u_N)^*(S) = u_N(S^*) - \sum_{j \in S^* \setminus S} \phi_j(S^* \cap \{j\}^*, (u_N)_{|S^* \cap \{j\}^*}, g(S^* \cap \{j\}^*)).$$

Par définition  $(u_N)_{|S^* \cap \{j\}^*}$  est un jeu nul sauf quand  $S^* \cap \{j\}^* = N$ . Ceci n'est possible que si  $\{j\}^* = N$  et  $S^* = N$ . Puisque  $g$  est acyclique, le seul cas possible où  $\{j\}^* = N$  est le cas où  $g$  est un graphe en étoile dont  $j$  est le centre. Cependant dans ce cas  $|S/g| \neq 1$ , quelle que soit  $S \subseteq N \setminus \{j\}$ . On obtient

$$(u_N)^*(S) = u_N(S^*).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\phi_i(N, (u_N)^*, g) &= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) u_N(S^*) \\
&= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^* \\ S^*=N}} \sum_{S \subseteq R \subseteq N} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) = \phi_i(N, u_N, g) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

On sait que dans un graphe acyclique connexe  $1 \leq |C(g)| \leq 2$  (Jordan, 1869 [30]), le reste de la preuve est donc séparé en trois cas.

**Cas 1 :**

Considérons le cas  $|C(g)| = 1$  et  $i \in C(g)$ .

Les coalitions  $S$  telles que  $S \subseteq N$ ,  $|S/g| = 1$ ,  $i \in S^*$  et  $S^* = N$  peuvent être écrites comme  $N \setminus X \subseteq S \subseteq N$ . La coalition  $S$  est donc toujours connexe et  $i$  appartient toujours à  $S$ . En isolant les cas où  $R = N$ , on peut alors écrire l'équation (5.4) comme

$$\begin{aligned}
\phi_i(N, u_N, g) &= \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) \\
&\quad + \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \phi_i(N, u_N, g) (-1)^{|N|-|S|} \\
&= \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) \\
&\quad + \sum_{s=n-x}^n \binom{x}{s-(n-x)} (-1)^{|N|-|S|} \phi_i(N, u_N, g).
\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable, le deuxième terme devient

$$\sum_{t=0}^x \binom{x}{t} (-1)^{x-t} \phi_i(N, u_N, g).$$

En utilisant la formule du binôme de Newton on sait que ce terme est égal à 0, par conséquent

$$\phi_i(N, u_N, g) = \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)).$$

On sait que selon les éléments de  $R$ , le centre  $C(g(R))$  peut être différent du centre de  $C(g)$ . En séparant les sommes en accord avec la proposition 5.2 et

en utilisant nos hypothèses, on obtient

$$\phi_i(N, u_N, g) = \sum_{N \setminus X \subseteq S \subsetneq N} \left[ \sum_{\substack{S \subseteq R \subsetneq N \\ \{i\} = C(g(R))}} (-1)^{|R|-|S|} + \sum_{\substack{S \subseteq R \subsetneq N \\ |C(g(R))|=2}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} \right].$$

Comme  $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \phi_i(N, u_N, g) &= \sum_{N \setminus X \subseteq S \subsetneq N} \left[ \sum_{S \subseteq R \subsetneq N} (-1)^{|R|-|S|} - \sum_{\substack{S \subseteq R \subsetneq N \\ |C(g(R))|=2}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} \right], \\ \phi_i(N, u_N, g) &= \sum_{N \setminus X \subseteq S \subsetneq N} \sum_{S \subseteq R \subsetneq N} (-1)^{|R|-|S|} - \sum_{N \setminus X \subseteq S \subsetneq N} \sum_{\substack{S \subseteq R \subsetneq N \\ |C(g(R))|=2}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Intéressons-nous au premier terme. En inversant les sommes on obtient

$$\sum_{N \setminus X \subseteq R \subsetneq N} \sum_{S \subseteq R} (-1)^{|R|-|S|}.$$

En utilisant le lemme 5.2, on sait que  $\sum_{N \setminus X \subseteq S \subseteq R} (-1)^{|R|-|S|}$  est nul sauf quand

$R = N \setminus X$ . On obtient alors que

$$\sum_{N \setminus X \subseteq R \subsetneq N} \sum_{S \subseteq R} (-1)^{|R|-|S|} = 1.$$

Maintenant prouvons que le second terme de l'équation (5.5) est nul. A nouveau, inversons les sommes. Le terme

$$\sum_{N \setminus X \subseteq S \subsetneq N} \sum_{\substack{S \subseteq R \subsetneq N \\ |C(g(R))|=2}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}$$

devient alors

$$\sum_{\substack{N \setminus X \subseteq R \subsetneq N \\ |C(g(R))|=2}} \sum_{S \subseteq R} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}.$$

Par le lemme 5.2 on sait que le terme  $\sum_{N \setminus X \subseteq S \subseteq R} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}$  ne s'annule pas

uniquement si  $R = N \setminus X$ . Cependant on sait que  $C(g) = C(g(N \setminus X))$  et donc  $|C(g)| = |C(g(N \setminus X))| = 1$ . Il n'existe alors aucune coalition  $R$

telle que  $R = N \setminus X$  et  $|C(g(R))| = 2$ . Conséquentement le second terme de l'équation (5.5) est nul et on obtient

$$\phi_i(N, u_N, g) = 1.$$

Ce qui conclut la preuve pour notre premier cas.

**Cas 2 :**

Supposons  $|C(g)| = 2$  et  $i \in C(g)$ . Les coalitions  $S \subseteq N$ ,  $|S/g| = 1$  telles que  $i \in S^*$  et  $S^* = N$  peuvent être écrites comme  $N \setminus X \subseteq S \subseteq N$ . La coalition  $S$  est donc toujours connexe et  $i$  appartient toujours à  $S$ . En utilisant l'équation (5.4) on obtient

$$\begin{aligned} \phi_i(N, u_N, g) = & \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) \\ & + \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \phi_i(N, u_N, g) (-1)^{|N|-|S|}. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes que dans le cas précédent, on sait que

$$\phi_i(N, u_N, g) = \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)).$$

Grâce à la proposition 5.2 on sait qu'il existe des sous-graphes  $g(R)$  dans lesquels  $C(g(R)) = C(g)$ , d'autres dans lesquels  $\{i\} = C(g(R))$  et enfin d'autres pour lesquels  $i \notin C(g(R))$ .

En utilisant les hypothèses de départ

$$\phi_i(N, u_N, g) = \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \left[ \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N \\ |C(g(R))|=2 \\ i \in C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} + \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N \\ \{i\}=C(g(R))}} (-1)^{|R|-|S|} \right].$$

Puisque  $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  et  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  on obtient

$$\begin{aligned} \phi_i(N, u_N, g) = & \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \left[ \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} + \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N \\ \{i\}=C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N \\ i \notin C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} \right]. \end{aligned}$$

A partir des calculs du cas précédent, on sait déjà que

$$\sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq N}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} = \frac{1}{2}.$$

Il reste donc à traiter les coalitions  $R$  pour lesquelles  $C(g(R))$  n'est composé que d'un joueur. Traitons d'abord le second terme :

$$\sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N \\ \{i\} = C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}.$$

En inversant les sommes on obtient

$$\sum_{\substack{R \\ N \setminus X \subseteq R \subsetneq N \\ \{i\} = C(g(R))}} \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq R}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}.$$

En utilisant le lemme 5.2 on sait que le terme  $\sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq R}} (-1)^{|R|-|S|}$  est non nul uniquement si  $R = N \setminus X$ . Cependant, si  $R = N \setminus X$  alors  $|C(g(R))| = 2 \neq 1$ . On conclut donc que

$$\sum_{\substack{R \\ N \setminus X \subseteq R \subsetneq N \\ \{i\} = C(g(R))}} \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq R}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} = 0.$$

Le même raisonnement peut être appliqué à nouveau pour obtenir

$$- \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N \\ i \notin C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|} = 0.$$

On a donc  $\phi_i(N, u_N, g) = \frac{1}{2}$  ce qui conclut notre deuxième cas.

### Cas 3 :

Supposons à présent que  $i \notin C(g)$ . Les coalitions  $S \subseteq N$ ,  $|S/g| = 1$  telles que  $i \in S^*$  et  $S^* = N$  peuvent être écrites comme  $N \setminus X \subseteq S \subseteq N$ . La coalition  $S$  est donc toujours connexe et  $i$  appartient toujours à  $S$ . En utilisant l'équation (5.4) on obtient

$$\begin{aligned} \phi_i(N, u_N, g) &= \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)) \\ &\quad + \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq N}} \phi_i(N, u_N, g) (-1)^{|N|-|S|}. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes que dans les cas précédents, on sait que

$$\phi_i(N, u_N, g) = \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N}} (-1)^{|R|-|S|} \phi_i(R, u_R, g(R)).$$

Si  $i$  est tel qu'il n'existe aucune coalition  $R$  telle que  $i \in C(g(R))$  alors, par nos hypothèses,  $\phi_i(N, u_N, g) = 0$ . En utilisant la proposition 5.2 on sait qu'il existe des joueurs  $i$  et des coalitions  $R$ ,  $N \setminus X \subseteq R \subsetneq N$  pour lesquelles  $i \in C(g(R))$ . Ceci ne peut advenir que si  $|C(g)| = 1$ . Dans ces cas précis  $\phi_i(R, u_R, g(R)) = \frac{1}{2}$  et  $|C(g(R))| = 2$ . On obtient alors

$$\sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subsetneq N}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subsetneq N \\ i \in C(g(R))}} \frac{1}{2} (-1)^{|R|-|S|}.$$

Inversons les sommes, on obtient

$$\sum_{\substack{R \\ N \setminus X \subseteq R \subsetneq N \\ i \in C(g(R))}} \sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq R}} (-1)^{|R|-|S|} \frac{1}{2}.$$

En utilisant le lemme 5.2 on sait que le seul cas où  $\sum_{\substack{S \\ N \setminus X \subseteq S \subseteq R}} (-1)^{|R|-|S|}$  est non nul est le cas où  $R = N \setminus X$ . Cependant, si  $R = N \setminus X$  alors  $C(g(R)) = C(g)$  et donc  $i \notin C(g(R))$ . L'équation s'annule alors. Consé-  
quemment, quand  $i \notin C(g)$ ,

$$\phi_i(N, u_N, g) = 0.$$

Ce qui conclut notre troisième cas et notre preuve. Nous avons donc obtenu une règle d'allocation  $\phi$  telle que

$$\phi_i(N, u_N, g) = \begin{cases} \frac{1}{|C(g)|} & \text{si } i \in C(g), \\ 0 & \text{si } i \notin C(g). \end{cases}$$

De manière générale on a

$$\phi_i(N, v, g) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S/g|=1 \\ i \in S^*}} \sum_{\substack{R \\ S \subseteq R \subseteq S^*}} (-1)^{|R|-|S|} \mathbb{I}_{[i \in C(g(R))]} \frac{1}{|C(g(R))|} v(S),$$

avec  $\mathbb{I}_{[i \in C(g(R))]} = 1$  si  $i \in C(g(R))$  et 0 sinon. □

**Chapitre 6**

**Conclusion**



Dans ce monographe nous avons traité de théorie des jeux coopératifs dans les cas où la communication est restreinte. Nous avons évoqué les modèles de Myerson utilisant graphes et hypergraphes ainsi que celui de Aumann-Drèze utilisant des structures de coalitions pré-déterminées. Afin d'aborder ces modèles à communication restreinte, de nombreux auteurs et autrices ont travaillé à étendre les règles d'allocation pour jeux à utilité transférables sur ces modèles.

La première partie de ce monographe a présenté (chapitre 1) et étudié (chapitre 2) ces différents modèles et différentes méthodes d'extension. Dans le chapitre 2, nous avons analysé les méthodes d'extension de Myerson pour les jeux à structure de conférence (1980, [36]) et de communication (1977, [35]), celle de Meessen avec la valeur de position pour jeux à structure de communication (1988, [33]) ainsi que celle d'Aumann-Drèze pour jeux à structure de coalition (1974, [4]). Ces différentes méthodes se basent toutes sur une modification de la fonction caractéristique du jeu afin d'intégrer la restriction de communication dans un jeu à utilité transférable. Notre analyse s'est portée sur la transformation subie par les propriétés de la règle d'allocation que l'on étend. Par l'intermédiaire de plusieurs résultats, nous avons démontré la forte restriction qu'imposent ces méthodes d'extension. En particulier, nous avons vu comment les deux méthodes d'extension de Myerson établissent un lien entre le traitement égal des joueurs indispensables et l'axiome d'équité pourtant extrêmement restrictif. L'axiome du traitement égal des joueurs indispensables est impliqué par celui de traitement égal des égaux qui bénéficie d'un certain consensus. L'axiome d'équité en revanche semble critiquable par son indifférence à la connectivité des joueurs. Nous avons également prouvé que la méthode de Myerson impose un axiome de joueur superflu quelle que soit la règle qui subit l'extension.

Dans ce même chapitre nous avons également développé, en nous basant sur les travaux de Hamiache (2012, [24]) et de Xu (2008, [51]), une écriture matricielle générale pour ces différentes méthodes. Cette écriture nous permet de disséquer les méthodes d'extension en séparant les transformations linéaires en plusieurs matrices. Ceci nous a permis de mieux comprendre comment s'articulaient les différentes modifications subies par la règle d'allocation étendue. A l'issue de cette première partie, il est apparu que l'utilisation de méthodes d'extension similaires ne peut se faire sans sacrifier une partie de l'information sur la communication et que les transformations subies par les règles d'allocation étendues sont, parfois, inattendues. C'est pourquoi il nous a semblé judicieux d'orienter notre recherche sur les règles d'allocation pour jeux coopératifs à communication restreinte sur une voie qui s'affranchit de ces méthodes.

En seconde partie nous nous sommes penchés sur le concept de consistance associée tel qu'il a été présenté par Hamiache en 1999 ([19]) et 2001 ([20]). Dans le chapitre 3 nous avons établi brièvement un état de l'utilisation de ce concept dans la littérature de la théorie des jeux coopératifs.

Ce concept a notamment été utilisé par Hamiache lui-même pour caractériser des règles d'allocation pour jeux à structure de communication et de coalitions. L'utilisation de ce concept permet une autre approche de la problématique de la communication restreinte, les informations de la communication étant traitées directement. De plus, la consistance associée est un axiome puissant à la fois en terme de caractérisation mais également en terme d'interprétation et de lecture de la situation d'interaction.

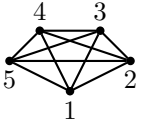
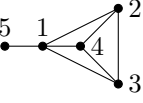
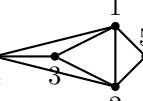
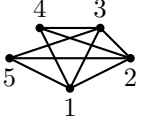
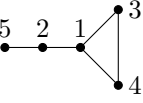
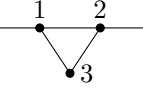
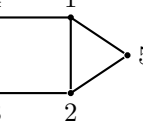
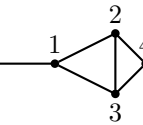
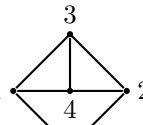
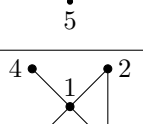
Dans les chapitres 4 et 5 nous avons présenté deux nouvelles règles d'allocation pour jeux à structure de communication construites autour de ce même concept de consistance associée. La règle que nous avons présenté dans le chapitre 4 se base sur un jeu associé qui est une extension directe de celui utilisé par Hamiache pour caractériser la valeur de Shapley (2001, [20]). En utilisant la matrice de transformation de Myerson  $P_g$  et la matrice  $M_c$  du jeu associé de Hamiache de 2001, nous avons construit la matrice du jeu associé de notre règle d'allocation sous la forme  $P_g M_c P_g$ . Nous avons prouvé que les puissances de cette matrice convergent vers une matrice inessentielle. Cette structure de jeu associé peut être transposée aux structures de coalitions. En effet, si l'on considère la matrice  $Q$  de transformation utilisée dans la méthode d'extension d'Aumann-Drèze au chapitre 2, il est possible de construire un jeu associé ayant pour origine la transformation matricielle  $Q M_c Q$ . Les calculs semblent montrer que cette matrice serait convergente vers une matrice inessentielle et les résultats obtenus jusqu'à présent correspondent à ceux de la valeur d'Aumann-Drèze.

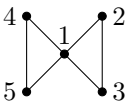
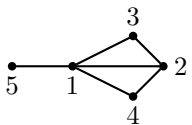
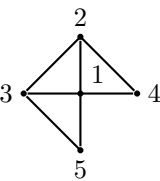
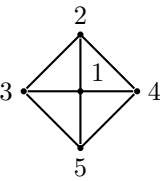
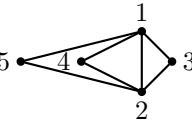
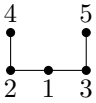
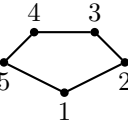
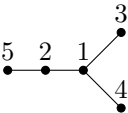
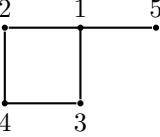
La règle d'allocation que nous avons présenté dans le chapitre 5 est construite sur le modèle de celle de l'article de Hamiache de 1999 ([19]). Le jeu associé que nous avons défini dépend de la règle d'allocation elle-même. En utilisant un axiome de consistance associé nous avons donc obtenu un système d'équation qui nous a permis d'obtenir une solution unique. Cette solution identifie exactement le centre d'un graphe. Cependant, notre résultat ne porte que sur les graphes acycliques. Durant nos travaux, nous avons pu constater que le jeu associé que nous avons construit permet d'identifier cette règle d'allocation sur certains graphes comportant des cycles mais seule une caractérisation sur les graphes acycliques a pu être construite. Le jeu associé nous semble incomplet dans sa construction. Une piste évidente de recherche pour l'avenir serait de travailler à la construction d'un jeu sur la base de celui du chapitre 5 afin d'étendre notre caractérisation à l'ensemble des jeux coopératifs à structure de communication.

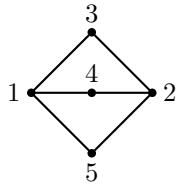
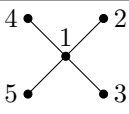
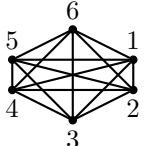
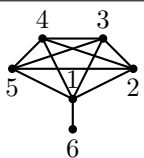
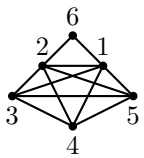
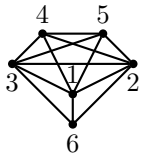
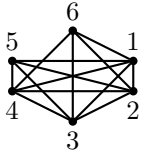
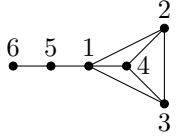
## Appendice

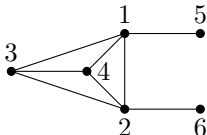
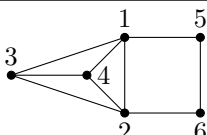
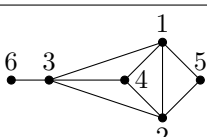
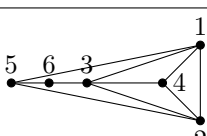
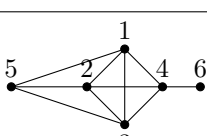
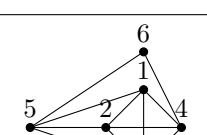
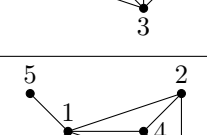
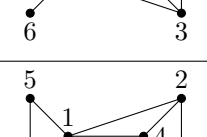
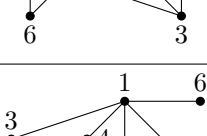
Dans cette appendice nous présentons la liste des graphes uniques (non isomorphiques) de  $n = 2$  à  $n = 6$  joueurs ainsi que les paiements sur le jeu à structure de communication  $(N, u_N, g)$  donnés par les règles d'allocation présentées au chapitre 4 (colonne New Value) et au chapitre 5 (colonne Center Value) ainsi que ceux donnés par la Mean Value pour comparaison.

		New Value	Center Value	Mean Value
2 joueurs				
1		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
3 joueurs				
1		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
2		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
4 joueurs				
1		$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$	$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
2		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$(1, 0, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
3		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
4		$(\frac{4}{9}, \frac{7}{36}, \frac{7}{36}, \frac{1}{6})$		$(\frac{4}{9}, \frac{7}{36}, \frac{7}{36}, \frac{1}{6})$
5		$(\frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$		$(\frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24})$
6		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

		New Value	Center Value	Mean Value
5 joueurs				
1		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$
2		$(\frac{19}{48}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{1}{8})$		$(\frac{19}{48}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{1}{8})$
3		$(\frac{17}{72}, \frac{17}{72}, \frac{13}{72}, \frac{13}{72}, \frac{1}{6})$		$(\frac{23}{90}, \frac{23}{90}, \frac{61}{360}, \frac{61}{360}, \frac{3}{20})$
4		$(\frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16})$		$(\frac{13}{60}, \frac{13}{60}, \frac{13}{60}, \frac{7}{40}, \frac{7}{40})$
5		$(\frac{43}{108}, \frac{11}{36}, \frac{23}{216}, \frac{23}{216}, \frac{1}{12})$		$(\frac{43}{108}, \frac{11}{36}, \frac{23}{216}, \frac{23}{216}, \frac{1}{12})$
6		$(\frac{73}{216}, \frac{73}{216}, \frac{7}{54}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72})$		$(\frac{73}{216}, \frac{73}{216}, \frac{7}{54}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72})$
7		$(\frac{13}{54}, \frac{13}{54}, \frac{5}{27}, \frac{5}{27}, \frac{4}{27})$		$(\frac{91}{360}, \frac{91}{360}, \frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{23}{180})$
8		$(\frac{7}{36}, \frac{7}{36}, \frac{10}{27}, \frac{7}{54}, \frac{1}{9})$		$(\frac{31}{144}, \frac{31}{144}, \frac{101}{288}, \frac{11}{96}, \frac{5}{48})$
9		$(\frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{43}{234}, \frac{43}{234}, \frac{20}{117})$		$(\frac{83}{360}, \frac{83}{360}, \frac{67}{360}, \frac{67}{360}, \frac{1}{6})$
10		$(\frac{17}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$		$(\frac{17}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

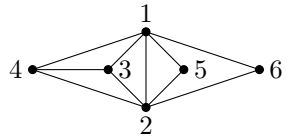
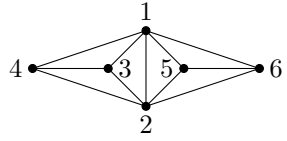
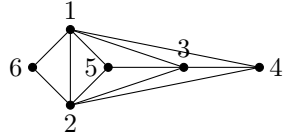
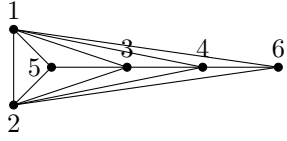
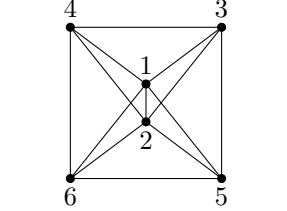
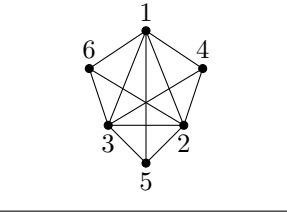
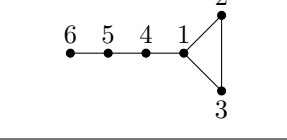
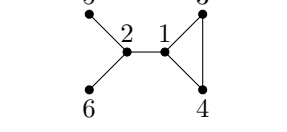
		New Value	Center Value	Mean Value
5 joueurs				
11		$(\frac{4}{9}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36})$		$(\frac{4}{9}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36})$
12		$(\frac{11}{27}, \frac{37}{216}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27}, \frac{1}{8})$		$(\frac{121}{288}, \frac{49}{288}, \frac{41}{288}, \frac{41}{288}, \frac{1}{8})$
13		$(\frac{29}{108}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{17}{108}, \frac{17}{108})$		$(\frac{53}{180}, \frac{77}{360}, \frac{77}{360}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36})$
14		$(\frac{3}{14}, \frac{11}{56}, \frac{11}{56}, \frac{11}{56}, \frac{11}{56})$		$(\frac{7}{30}, \frac{23}{120}, \frac{23}{120}, \frac{23}{120}, \frac{23}{120})$
15		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{11}{40}, \frac{11}{40}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20})$
16		$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	$(1,0,0,0,0)$	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$
17		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$
18		$(\frac{5}{12}, \frac{11}{36}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72}, \frac{1}{12})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$	$(\frac{5}{12}, \frac{11}{36}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72}, \frac{1}{12})$
19		$(\frac{10}{27}, \frac{7}{36}, \frac{7}{36}, \frac{7}{54}, \frac{1}{9})$		$(\frac{3}{8}, \frac{19}{96}, \frac{19}{96}, \frac{1}{8}, \frac{5}{48})$

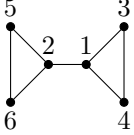
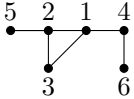
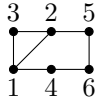
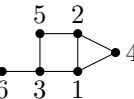
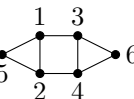
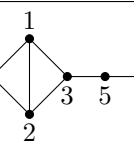
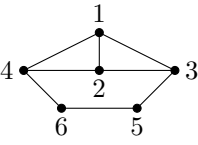
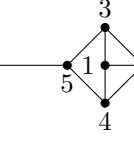
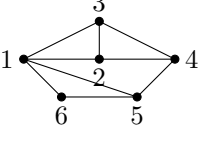
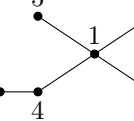
		New Value	Center Value	Mean Value
5 joueurs				
20		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
21		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$(1,0,0,0,0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
6 joueurs				
1		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
2		$(\frac{107}{300}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{1}{10})$		$(\frac{107}{300}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{163}{1200}, \frac{1}{10})$
3		$(\frac{41}{200}, \frac{41}{200}, \frac{137}{900}, \frac{137}{900}, \frac{137}{900}, \frac{2}{15})$		$(\frac{109}{480}, \frac{109}{480}, \frac{103}{720}, \frac{103}{720}, \frac{103}{720}, \frac{7}{60})$
4		$(\frac{107}{600}, \frac{107}{600}, \frac{107}{600}, \frac{63}{400}, \frac{63}{400}, \frac{3}{20})$		$(\frac{103}{540}, \frac{103}{540}, \frac{103}{540}, \frac{53}{360}, \frac{53}{360}, \frac{2}{15})$
5		$(\frac{17}{100}, \frac{17}{100}, \frac{17}{100}, \frac{17}{100}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25})$		$(\frac{7}{40}, \frac{7}{40}, \frac{7}{40}, \frac{7}{40}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20})$
6		$(\frac{229}{576}, \frac{161}{1728}, \frac{161}{1728}, \frac{161}{1728}, \frac{25}{96}, \frac{1}{16})$		$(\frac{229}{576}, \frac{161}{1728}, \frac{161}{1728}, \frac{161}{1728}, \frac{25}{96}, \frac{1}{16})$

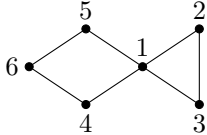
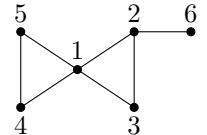
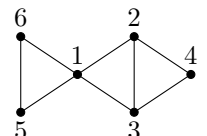
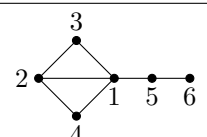
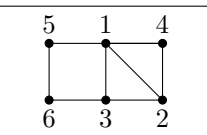
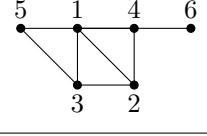
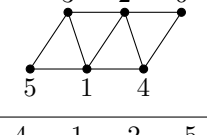
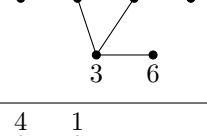
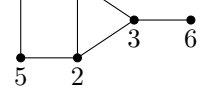
		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
7		$(\frac{133}{432}, \frac{133}{432}, \frac{97}{864}, \frac{97}{864}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288})$		$(\frac{133}{432}, \frac{133}{432}, \frac{97}{864}, \frac{97}{864}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288})$
8		$(\frac{97}{432}, \frac{97}{432}, \frac{55}{432}, \frac{55}{432}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27})$		$(\frac{197}{810}, \frac{197}{810}, \frac{713}{6480}, \frac{713}{6480}, \frac{317}{2160}, \frac{317}{2160})$
9		$(\frac{37}{216}, \frac{37}{216}, \frac{145}{432}, \frac{1}{8}, \frac{23}{216}, \frac{13}{144})$		$(\frac{523}{2700}, \frac{523}{2700}, \frac{6877}{21600}, \frac{1271}{1080}, \frac{661}{7200}, \frac{61}{720})$
10		$(\frac{3719}{22464}, \frac{3719}{22464}, \frac{9439}{44928}, \frac{79}{576}, \frac{313}{1664}, \frac{125}{936})$		$(\frac{77}{432}, \frac{77}{432}, \frac{937}{4320}, \frac{1007}{8640}, \frac{527}{2880}, \frac{61}{480})$
11		$(\frac{85}{576}, \frac{85}{576}, \frac{85}{576}, \frac{11}{32}, \frac{23}{192}, \frac{3}{32})$		$(\frac{581}{3600}, \frac{581}{3600}, \frac{581}{3600}, \frac{779}{2400}, \frac{83}{800}, \frac{7}{80})$
12		$(\frac{251}{1656}, \frac{251}{1656}, \frac{251}{1656}, \frac{19}{92}, \frac{19}{92}, \frac{73}{552})$		$(\frac{109}{720}, \frac{109}{720}, \frac{109}{720}, \frac{101}{480}, \frac{101}{480}, \frac{1}{8})$
13		$(\frac{53}{120}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$		$(\frac{53}{120}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
14		$(\frac{17}{40}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120})$		$(\frac{17}{40}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{43}{360}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120})$
15		$(\frac{3227}{8640}, \frac{1319}{8640}, \frac{1097}{8640}, \frac{1097}{8640}, \frac{259}{2160}, \frac{1}{10})$		$(\frac{707}{1800}, \frac{34}{225}, \frac{293}{2400}, \frac{293}{2400}, \frac{403}{3600}, \frac{1}{10})$

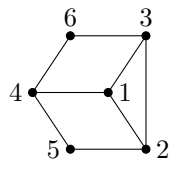
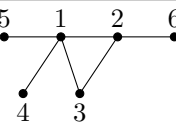
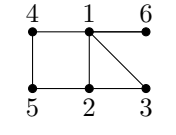
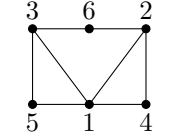
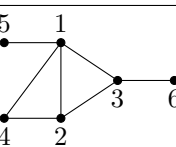
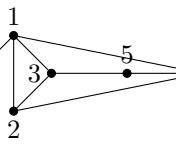
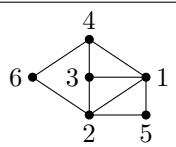
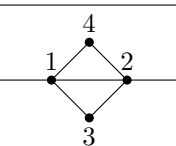
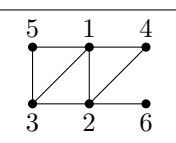
		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
16		$(\frac{1079}{4320}, \frac{827}{4320}, \frac{581}{4320}, \frac{581}{4320}, \frac{181}{1080}, \frac{11}{90})$		$(\frac{1213}{4320}, \frac{2681}{12960}, \frac{1541}{12960}, \frac{1541}{12960}, \frac{23}{135}, \frac{5}{48})$
17		$(\frac{779}{2160}, \frac{151}{1080}, \frac{151}{1080}, \frac{187}{1440}, \frac{187}{1440}, \frac{1}{10})$		$(\frac{1331}{3600}, \frac{113}{800}, \frac{113}{800}, \frac{223}{1800}, \frac{223}{1800}, \frac{1}{10})$
18		$(\frac{1867}{8640}, \frac{1393}{8640}, \frac{1393}{8640}, \frac{553}{2880}, \frac{101}{720}, \frac{31}{240})$		$(\frac{1049}{4320}, \frac{13}{80}, \frac{13}{80}, \frac{1741}{8640}, \frac{349}{2880}, \frac{473}{4320})$
19		$(\frac{161}{864}, \frac{161}{864}, \frac{97}{864}, \frac{97}{864}, \frac{23}{72}, \frac{1}{12})$		$(\frac{1171}{5400}, \frac{1171}{5400}, \frac{2147}{21600}, \frac{2147}{21600}, \frac{117}{400}, \frac{3}{40})$
20		$(\frac{41}{216}, \frac{41}{216}, \frac{41}{216}, \frac{41}{216}, \frac{13}{108}, \frac{13}{108})$		$(\frac{193}{960}, \frac{193}{960}, \frac{193}{960}, \frac{193}{960}, \frac{47}{480}, \frac{47}{480})$
21		$(\frac{35}{208}, \frac{35}{208}, \frac{35}{208}, \frac{35}{208}, \frac{17}{104}, \frac{17}{104})$		$(\frac{37}{216}, \frac{37}{216}, \frac{37}{216}, \frac{37}{216}, \frac{17}{108}, \frac{17}{108})$
22		$(\frac{517}{2160}, \frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{101}{720}, \frac{137}{1080}, \frac{137}{1080})$		$(\frac{79}{288}, \frac{991}{5184}, \frac{991}{5184}, \frac{1627}{12960}, \frac{941}{8640}, \frac{941}{8640})$
23		$(\frac{653}{3360}, \frac{2357}{13440}, \frac{2357}{13440}, \frac{23}{160}, \frac{697}{4480}, \frac{697}{4480})$		$(\frac{2}{9}, \frac{13}{72}, \frac{13}{72}, \frac{67}{540}, \frac{79}{540}, \frac{79}{540})$
24		$(\frac{349}{1940}, \frac{1243}{7760}, \frac{1243}{7760}, \frac{84}{485}, \frac{84}{485}, \frac{119}{776})$		$(\frac{43}{216}, \frac{7}{45}, \frac{7}{45}, \frac{47}{270}, \frac{47}{270}, \frac{17}{120})$

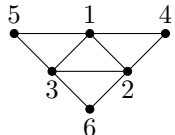
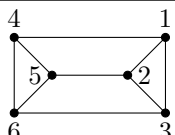
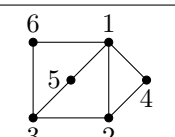
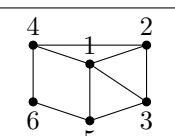
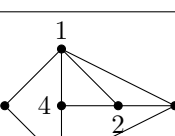
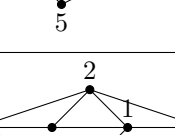
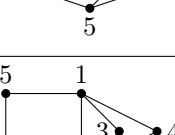
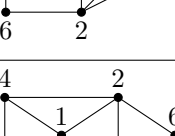
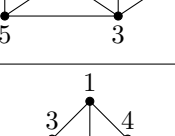


		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
25		$(\frac{23}{90}, \frac{23}{90}, \frac{23}{180}, \frac{23}{180}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60})$		$(\frac{9}{40}, \frac{9}{40}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$
26		$(\frac{13}{60}, \frac{13}{60}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120})$		$(\frac{11}{45}, \frac{11}{45}, \frac{23}{180}, \frac{23}{180}, \frac{23}{180}, \frac{23}{180})$
27		$(\frac{151}{720}, \frac{151}{720}, \frac{113}{720}, \frac{209}{1440}, \frac{209}{1440}, \frac{2}{15})$		$(\frac{683}{2880}, \frac{683}{2880}, \frac{43}{288}, \frac{187}{1440}, \frac{187}{1440}, \frac{7}{60})$
28		$(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{53}{320}, \frac{53}{320}, \frac{47}{320}, \frac{47}{320})$		$(\frac{223}{1080}, \frac{223}{1080}, \frac{89}{540}, \frac{89}{540}, \frac{139}{1080}, \frac{139}{1080})$
29		$(\frac{19}{110}, \frac{19}{110}, \frac{9}{55}, \frac{9}{55}, \frac{9}{55}, \frac{9}{55})$		$(\frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{19}{120}, \frac{19}{120}, \frac{19}{120}, \frac{19}{120})$
30		$(\frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20})$		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$
31		$(\frac{97}{324}, \frac{73}{1296}, \frac{73}{1296}, \frac{19}{54}, \frac{7}{36}, \frac{1}{24})$		$(\frac{97}{324}, \frac{73}{1296}, \frac{73}{1296}, \frac{19}{54}, \frac{7}{36}, \frac{1}{24})$
32		$(\frac{19}{54}, \frac{13}{36}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72})$		$(\frac{19}{54}, \frac{13}{36}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72})$

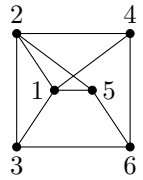
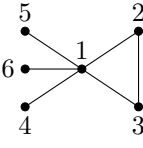
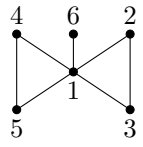
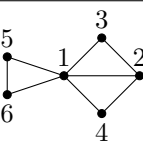
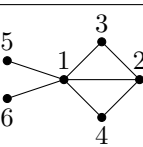
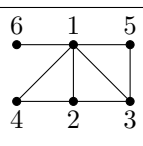
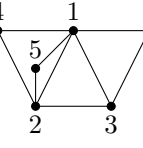
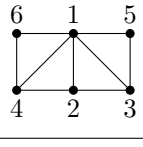
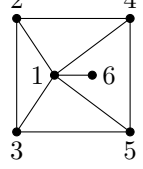
		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
33		$(\frac{19}{54}, \frac{19}{54}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27})$		$(\frac{19}{54}, \frac{19}{54}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27})$
34		$(\frac{10}{27}, \frac{25}{108}, \frac{17}{216}, \frac{47}{216}, \frac{23}{432}, \frac{7}{144})$		$(\frac{10}{27}, \frac{25}{108}, \frac{17}{216}, \frac{47}{216}, \frac{23}{432}, \frac{7}{144})$
35		$(\frac{3191}{15390}, \frac{3191}{15390}, \frac{8}{81}, \frac{446}{2565}, \frac{446}{2565}, \frac{446}{2565})$		$(\frac{349}{1620}, \frac{349}{1620}, \frac{101}{1296}, \frac{749}{4320}, \frac{749}{4320}, \frac{13}{90})$
36		$(\frac{281}{1296}, \frac{59}{432}, \frac{133}{432}, \frac{5}{54}, \frac{217}{1296}, \frac{17}{216})$		$(\frac{4987}{21600}, \frac{793}{5400}, \frac{551}{1800}, \frac{821}{10800}, \frac{1229}{7200}, \frac{5}{72})$
37		$(\frac{16}{81}, \frac{16}{81}, \frac{16}{81}, \frac{16}{81}, \frac{17}{162}, \frac{17}{162})$		$(\frac{673}{3240}, \frac{673}{3240}, \frac{673}{3240}, \frac{673}{3240}, \frac{137}{1620}, \frac{137}{1620})$
38		$(\frac{79}{648}, \frac{79}{648}, \frac{7}{18}, \frac{23}{324}, \frac{13}{54}, \frac{1}{18})$		$(\frac{247}{1728}, \frac{247}{1728}, \frac{1295}{3456}, \frac{23}{384}, \frac{131}{576}, \frac{5}{96})$
39		$(\frac{1151}{8586}, \frac{1151}{8586}, \frac{308}{1431}, \frac{308}{1431}, \frac{647}{4293}, \frac{647}{4293})$		$(\frac{911}{6480}, \frac{911}{6480}, \frac{2729}{12960}, \frac{2729}{12960}, \frac{643}{4320}, \frac{643}{4320})$
40		$(\frac{149}{1404}, \frac{149}{1404}, \frac{23}{117}, \frac{23}{117}, \frac{437}{1404}, \frac{1}{12})$		$(\frac{283}{2700}, \frac{283}{2700}, \frac{2213}{10800}, \frac{2213}{10800}, \frac{11}{36}, \frac{3}{40})$
41		$(\frac{407}{1664}, \frac{1549}{11232}, \frac{1549}{11232}, \frac{935}{4992}, \frac{1957}{11232}, \frac{17}{144})$		$(\frac{49}{192}, \frac{1793}{12960}, \frac{1793}{12960}, \frac{959}{5184}, \frac{67}{360}, \frac{419}{4320})$
42		$(\frac{23}{54}, \frac{37}{432}, \frac{37}{432}, \frac{25}{96}, \frac{23}{288}, \frac{1}{16})$		$(\frac{23}{54}, \frac{37}{432}, \frac{37}{432}, \frac{25}{96}, \frac{23}{288}, \frac{1}{16})$

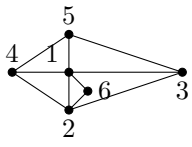
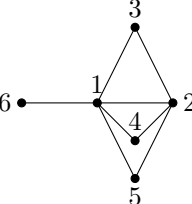
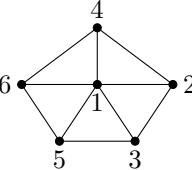
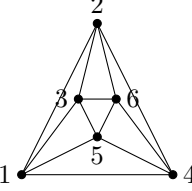
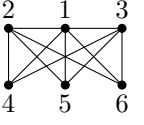
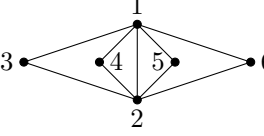
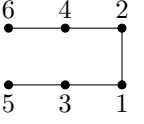
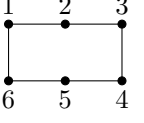
		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
43		$(\frac{173}{432}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{37}{432})$		$(\frac{109}{270}, \frac{197}{2160}, \frac{197}{2160}, \frac{119}{720}, \frac{119}{720}, \frac{1}{12})$
44		$(\frac{41}{108}, \frac{121}{432}, \frac{43}{432}, \frac{37}{432}, \frac{37}{432}, \frac{5}{72})$		$(\frac{41}{108}, \frac{121}{432}, \frac{43}{432}, \frac{37}{432}, \frac{37}{432}, \frac{5}{72})$
45		$(\frac{11}{27}, \frac{11}{72}, \frac{11}{72}, \frac{5}{54}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72})$		$(\frac{839}{2160}, \frac{7}{40}, \frac{7}{40}, \frac{19}{240}, \frac{197}{2160}, \frac{197}{2160})$
46		$(\frac{521}{1296}, \frac{253}{2592}, \frac{115}{1296}, \frac{115}{1296}, \frac{25}{96}, \frac{1}{16})$		$(\frac{1411}{3456}, \frac{331}{3456}, \frac{299}{3456}, \frac{299}{3456}, \frac{25}{96}, \frac{1}{16})$
47		$(\frac{1}{4}, \frac{65}{432}, \frac{271}{1296}, \frac{71}{648}, \frac{49}{324}, \frac{7}{54})$		$(\frac{7177}{25920}, \frac{3757}{25920}, \frac{211}{960}, \frac{229}{2592}, \frac{1259}{8640}, \frac{179}{1440})$
48		$(\frac{281}{1296}, \frac{143}{864}, \frac{349}{2592}, \frac{133}{432}, \frac{125}{1296}, \frac{17}{216})$		$(\frac{299}{1200}, \frac{2017}{10800}, \frac{2959}{21600}, \frac{239}{864}, \frac{35}{432}, \frac{5}{72})$
49		$(\frac{97}{432}, \frac{97}{432}, \frac{211}{1296}, \frac{211}{1296}, \frac{73}{648}, \frac{73}{648})$		$(\frac{6361}{25920}, \frac{6361}{25920}, \frac{2117}{12960}, \frac{2117}{12960}, \frac{473}{5184}, \frac{473}{5184})$
50		$(\frac{29}{108}, \frac{29}{108}, \frac{29}{108}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108})$		$(\frac{29}{108}, \frac{29}{108}, \frac{29}{108}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108})$
51		$(\frac{127}{648}, \frac{127}{648}, \frac{8}{27}, \frac{77}{648}, \frac{77}{648}, \frac{2}{27})$		$(\frac{1183}{5400}, \frac{1183}{5400}, \frac{176}{675}, \frac{427}{3600}, \frac{427}{3600}, \frac{23}{360})$

		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
52		$(\frac{2429}{15660}, \frac{547}{3045}, \frac{547}{3045}, \frac{7967}{36540}, \frac{7333}{54810}, \frac{7333}{54810})$		$(\frac{2227}{12960}, \frac{1127}{6480}, \frac{1127}{6480}, \frac{79}{360}, \frac{1127}{8640}, \frac{1127}{8640})$
53		$(\frac{169}{432}, \frac{121}{432}, \frac{43}{432}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{5}{72})$		$(\frac{169}{432}, \frac{121}{432}, \frac{43}{432}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{5}{72})$
54		$(\frac{115}{324}, \frac{79}{432}, \frac{71}{648}, \frac{101}{648}, \frac{23}{216}, \frac{13}{144})$		$(\frac{2003}{5400}, \frac{4007}{21600}, \frac{533}{5400}, \frac{1169}{7200}, \frac{22}{225}, \frac{61}{720})$
55		$(\frac{331}{1296}, \frac{59}{324}, \frac{59}{324}, \frac{73}{648}, \frac{73}{648}, \frac{67}{432})$		$(\frac{439}{1620}, \frac{157}{810}, \frac{157}{810}, \frac{1201}{12960}, \frac{1201}{12960}, \frac{337}{2160})$
56		$(\frac{211}{648}, \frac{337}{2592}, \frac{127}{432}, \frac{125}{1296}, \frac{23}{288}, \frac{2}{27})$		$(\frac{1201}{3456}, \frac{445}{3456}, \frac{491}{1728}, \frac{17}{192}, \frac{23}{288}, \frac{41}{576})$
57		$(\frac{935}{2808}, \frac{229}{1872}, \frac{329}{1872}, \frac{329}{1872}, \frac{289}{2808}, \frac{13}{144})$		$(\frac{7159}{21600}, \frac{2659}{21600}, \frac{1963}{10800}, \frac{1963}{10800}, \frac{7}{72}, \frac{61}{720})$
58		$(\frac{119}{624}, \frac{10381}{44928}, \frac{545}{3744}, \frac{293}{1664}, \frac{53}{432}, \frac{47}{351})$		$(\frac{5363}{25920}, \frac{2149}{8640}, \frac{1879}{12960}, \frac{1097}{6480}, \frac{293}{2880}, \frac{1109}{8640})$
59		$(\frac{271}{864}, \frac{271}{864}, \frac{23}{216}, \frac{23}{216}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288})$		$(\frac{547}{1728}, \frac{547}{1728}, \frac{179}{1728}, \frac{179}{1728}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288})$
60		$(\frac{121}{648}, \frac{905}{2592}, \frac{409}{2592}, \frac{49}{432}, \frac{133}{1296}, \frac{13}{144})$		$(\frac{4397}{21600}, \frac{3757}{10800}, \frac{421}{2400}, \frac{439}{4320}, \frac{25}{288}, \frac{61}{720})$

		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
61		$(\frac{23}{108}, \frac{23}{108}, \frac{23}{108}, \frac{13}{108}, \frac{13}{108}, \frac{13}{108})$		$(\frac{151}{648}, \frac{151}{648}, \frac{151}{648}, \frac{65}{648}, \frac{65}{648}, \frac{65}{648})$
62		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
63		$(\frac{293}{1152}, \frac{223}{1296}, \frac{227}{1152}, \frac{17}{144}, \frac{335}{2592}, \frac{335}{2592})$		$(\frac{577}{2160}, \frac{67}{360}, \frac{139}{720}, \frac{419}{4320}, \frac{1109}{8640}, \frac{1109}{8640})$
64		$(\frac{17}{96}, \frac{29}{192}, \frac{29}{192}, \frac{37}{192}, \frac{37}{192}, \frac{13}{96})$		$(\frac{443}{2160}, \frac{251}{1728}, \frac{251}{1728}, \frac{1621}{8640}, \frac{1621}{8640}, \frac{31}{240})$
65		$(\frac{4731}{22144}, \frac{389}{2768}, \frac{7985}{49824}, \frac{7985}{49824}, \frac{4269}{22144}, \frac{3301}{24912})$		$(\frac{1961}{8640}, \frac{1061}{8640}, \frac{713}{4320}, \frac{713}{4320}, \frac{139}{720}, \frac{61}{480})$
66		$(\frac{399}{2176}, \frac{399}{2176}, \frac{41}{272}, \frac{41}{272}, \frac{361}{2176}, \frac{361}{2176})$		$(\frac{53}{270}, \frac{53}{270}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120}, \frac{35}{216}, \frac{35}{216})$
67		$(\frac{25}{108}, \frac{25}{108}, \frac{13}{108}, \frac{13}{108}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27})$		$(\frac{121}{480}, \frac{121}{480}, \frac{437}{4320}, \frac{437}{4320}, \frac{317}{2160}, \frac{317}{2160})$
68		$(\frac{169}{1008}, \frac{1643}{8064}, \frac{1643}{8064}, \frac{403}{2688}, \frac{403}{2688}, \frac{1}{8})$		$(\frac{131}{720}, \frac{1877}{8640}, \frac{1877}{8640}, \frac{9}{64}, \frac{9}{64}, \frac{221}{2160})$
69		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{29}{108}, \frac{29}{108}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108})$		$(\frac{29}{144}, \frac{29}{144}, \frac{139}{576}, \frac{139}{576}, \frac{11}{192}, \frac{11}{192})$

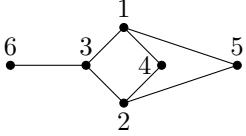
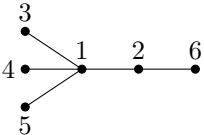
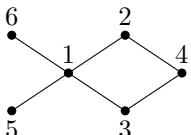
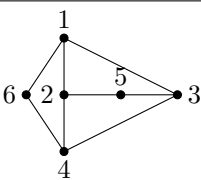
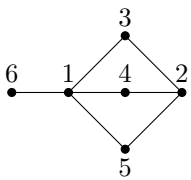
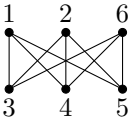
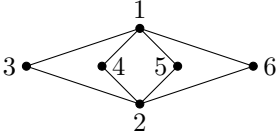
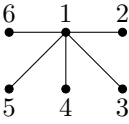
		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
70		$(\frac{91}{216}, \frac{11}{72}, \frac{11}{72}, \frac{5}{54}, \frac{13}{144}, \frac{13}{144})$		$(\frac{289}{720}, \frac{7}{40}, \frac{7}{40}, \frac{19}{240}, \frac{61}{720}, \frac{61}{720})$
71		$(\frac{595}{1664}, \frac{1565}{11232}, \frac{1565}{11232}, \frac{667}{4992}, \frac{383}{2808}, \frac{3}{32})$		$(\frac{2597}{7200}, \frac{1063}{7200}, \frac{1063}{7200}, \frac{857}{7200}, \frac{11}{80}, \frac{7}{80})$
72		$(\frac{43}{288}, \frac{133}{384}, \frac{83}{576}, \frac{83}{576}, \frac{47}{384}, \frac{3}{32})$		$(\frac{1201}{7200}, \frac{2431}{7200}, \frac{269}{1800}, \frac{269}{1800}, \frac{131}{1200}, \frac{7}{80})$
73		$(\frac{83}{432}, \frac{83}{432}, \frac{23}{72}, \frac{23}{216}, \frac{23}{216}, \frac{1}{12})$		$(\frac{101}{450}, \frac{101}{450}, \frac{117}{400}, \frac{661}{7200}, \frac{661}{7200}, \frac{3}{40})$
74		$(\frac{527}{2808}, \frac{527}{2808}, \frac{181}{936}, \frac{181}{936}, \frac{13}{108}, \frac{55}{468})$		$(\frac{19}{90}, \frac{19}{90}, \frac{541}{2880}, \frac{541}{2880}, \frac{47}{480}, \frac{5}{48})$
75		$(\frac{4}{17}, \frac{4}{17}, \frac{7}{51}, \frac{7}{51}, \frac{13}{102}, \frac{13}{102})$		$(\frac{43}{180}, \frac{43}{180}, \frac{49}{360}, \frac{49}{360}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
76		$(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36})$		$(\frac{41}{180}, \frac{41}{180}, \frac{49}{360}, \frac{49}{360}, \frac{49}{360}, \frac{49}{360})$
77		$(\frac{101}{648}, \frac{23}{108}, \frac{23}{108}, \frac{31}{216}, \frac{31}{216}, \frac{85}{648})$		$(\frac{227}{1440}, \frac{127}{576}, \frac{127}{576}, \frac{199}{1440}, \frac{199}{1440}, \frac{1}{8})$
78		$(\frac{203}{1216}, \frac{203}{1216}, \frac{7}{38}, \frac{7}{38}, \frac{181}{1216}, \frac{181}{1216})$		$(\frac{187}{1080}, \frac{187}{1080}, \frac{41}{216}, \frac{41}{216}, \frac{37}{270}, \frac{37}{270})$

		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
79		$(\frac{47}{272}, \frac{47}{272}, \frac{11}{68}, \frac{11}{68}, \frac{11}{68}, \frac{23}{136})$		$(\frac{13}{72}, \frac{13}{72}, \frac{17}{108}, \frac{17}{108}, \frac{17}{108}, \frac{1}{6})$
80		$(\frac{29}{60}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$		$(\frac{29}{60}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
81		$(\frac{7}{15}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{1}{10})$		$(\frac{7}{15}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120}, \frac{1}{10})$
82		$(\frac{233}{540}, \frac{17}{135}, \frac{61}{540}, \frac{61}{540}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120})$		$(\frac{317}{720}, \frac{89}{720}, \frac{79}{720}, \frac{79}{720}, \frac{13}{120}, \frac{13}{120})$
83		$(\frac{121}{270}, \frac{17}{135}, \frac{61}{540}, \frac{61}{540}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$		$(\frac{329}{720}, \frac{89}{720}, \frac{79}{720}, \frac{79}{720}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
84		$(\frac{629}{1620}, \frac{151}{1080}, \frac{151}{1080}, \frac{47}{405}, \frac{47}{405}, \frac{1}{10})$		$(\frac{499}{1200}, \frac{479}{3600}, \frac{479}{3600}, \frac{157}{1440}, \frac{157}{1440}, \frac{1}{10})$
85		$(\frac{139}{540}, \frac{43}{216}, \frac{181}{1080}, \frac{137}{1080}, \frac{137}{1080}, \frac{11}{90})$		$(\frac{281}{960}, \frac{619}{2880}, \frac{23}{135}, \frac{941}{8640}, \frac{941}{8640}, \frac{5}{48})$
86		$(\frac{113}{405}, \frac{31}{180}, \frac{503}{3240}, \frac{503}{3240}, \frac{193}{1620}, \frac{193}{1620})$		$(\frac{1349}{4320}, \frac{29}{160}, \frac{1313}{8640}, \frac{1313}{8640}, \frac{175}{1728}, \frac{175}{1728})$
87		$(\frac{229}{630}, \frac{169}{1260}, \frac{169}{1260}, \frac{169}{1260}, \frac{169}{1260}, \frac{1}{10})$		$(\frac{689}{1800}, \frac{931}{7200}, \frac{931}{7200}, \frac{931}{7200}, \frac{931}{7200}, \frac{1}{10})$

		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
88		$(\frac{1103}{5040}, \frac{7909}{40320}, \frac{3139}{20160}, \frac{3139}{20160}, \frac{647}{4480}, \frac{31}{240})$		$(\frac{437}{1728}, \frac{457}{2160}, \frac{43}{288}, \frac{43}{288}, \frac{367}{2880}, \frac{473}{4320})$
89		$(\frac{137}{360}, \frac{23}{144}, \frac{259}{2160}, \frac{259}{2160}, \frac{259}{2160}, \frac{1}{10})$		$(\frac{977}{2400}, \frac{377}{2400}, \frac{403}{3600}, \frac{403}{3600}, \frac{403}{3600}, \frac{1}{10})$
90		$(\frac{19}{92}, \frac{73}{460}, \frac{73}{460}, \frac{73}{460}, \frac{73}{460}, \frac{73}{460})$		$(\frac{53}{216}, \frac{163}{1080}, \frac{163}{1080}, \frac{163}{1080}, \frac{163}{1080}, \frac{163}{1080})$
91		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
92		$(\frac{7}{38}, \frac{17}{95}, \frac{17}{95}, \frac{29}{190}, \frac{29}{190}, \frac{29}{190})$		$(\frac{5}{24}, \frac{11}{60}, \frac{11}{60}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120}, \frac{17}{120})$
93		$(\frac{7}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$		$(\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60})$
94		$(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32})$
95		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$



		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
96		$(\frac{11}{36}, \frac{19}{54}, \frac{7}{36}, \frac{23}{432}, \frac{23}{432}, \frac{1}{24})$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{11}{36}, \frac{19}{54}, \frac{7}{36}, \frac{23}{432}, \frac{23}{432}, \frac{1}{24})$
97		$(\frac{1529}{5130}, \frac{1993}{10260}, \frac{1993}{10260}, \frac{307}{2565}, \frac{307}{2565}, \frac{2}{27})$		$(\frac{23}{75}, \frac{44}{225}, \frac{44}{225}, \frac{143}{1200}, \frac{143}{1200}, \frac{23}{360})$
98		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{27}, \frac{5}{27}, \frac{7}{108}, \frac{7}{108})$		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{37}{192}, \frac{37}{192}, \frac{11}{192}, \frac{11}{192})$
99		$(\frac{29}{72}, \frac{47}{216}, \frac{47}{216}, \frac{7}{108}, \frac{7}{144}, \frac{7}{144})$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{29}{72}, \frac{47}{216}, \frac{47}{216}, \frac{7}{108}, \frac{7}{144}, \frac{7}{144})$
100		$(\frac{247}{648}, \frac{7}{54}, \frac{7}{54}, \frac{41}{648}, \frac{13}{54}, \frac{1}{18})$		$(\frac{37}{96}, \frac{157}{1152}, \frac{157}{1152}, \frac{1}{16}, \frac{131}{576}, \frac{5}{96})$
101		$(\frac{19}{81}, \frac{19}{81}, \frac{43}{324}, \frac{43}{324}, \frac{43}{324}, \frac{43}{324})$		$(\frac{73}{288}, \frac{73}{288}, \frac{71}{576}, \frac{71}{576}, \frac{71}{576}, \frac{71}{576})$
102		$(\frac{143}{642}, \frac{143}{642}, \frac{245}{1926}, \frac{245}{1926}, \frac{289}{1926}, \frac{289}{1926})$		$(\frac{79}{360}, \frac{79}{360}, \frac{569}{4320}, \frac{569}{4320}, \frac{643}{4320}, \frac{643}{4320})$
103		$(\frac{13}{36}, \frac{13}{36}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{13}{36}, \frac{13}{36}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72})$
104		$(\frac{101}{324}, \frac{101}{324}, \frac{37}{324}, \frac{37}{324}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27})$		$(\frac{373}{1152}, \frac{373}{1152}, \frac{121}{1152}, \frac{121}{1152}, \frac{41}{576}, \frac{41}{576})$

		New Value	Center Value	Mean Value
6 joueurs				
105		$(\frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{25}{81}, \frac{31}{324}, \frac{31}{324}, \frac{1}{12})$		$(\frac{17}{80}, \frac{17}{80}, \frac{11}{36}, \frac{7}{72}, \frac{7}{72}, \frac{3}{40})$
106		$(\frac{7}{16}, \frac{25}{96}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{1}{16})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{7}{16}, \frac{25}{96}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{23}{288}, \frac{1}{16})$
107		$(\frac{179}{432}, \frac{23}{144}, \frac{23}{144}, \frac{37}{432}, \frac{13}{144}, \frac{13}{144})$		$(\frac{5}{12}, \frac{119}{720}, \frac{119}{720}, \frac{1}{12}, \frac{61}{720}, \frac{61}{720})$
108		$(\frac{55}{288}, \frac{55}{288}, \frac{55}{288}, \frac{55}{288}, \frac{17}{144}, \frac{17}{144})$		$(\frac{19}{96}, \frac{19}{96}, \frac{19}{96}, \frac{19}{96}, \frac{5}{48}, \frac{5}{48})$
109		$(\frac{139}{384}, \frac{53}{384}, \frac{13}{96}, \frac{13}{96}, \frac{13}{96}, \frac{3}{32})$		$(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{80}, \frac{11}{80}, \frac{11}{80}, \frac{7}{80})$
110		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
111		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
112		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$



# Bibliographie

- [1] E. Algaba, J. M. Bilbao, P. Borm, J. J. López. The position value for union stable systems. *Mathematical Methods of Operations Research*, **52**, pp. 221–236, 2000.
- [2] E. Algaba, J. M. Bilbao, P. Borm, J. J. López. The Myerson value for union stable structures. *Mathematical Methods of Operations Research*, **54**, pp. 359–371, 2001.
- [3] E. Algaba, J. M. Bilbao, J. J. López. The position value in communication structures. *Mathematical Methods of Operations Research*, **59**, pp. 465–477, 2004.
- [4] R. J. Aumann, J. H. Drèze. Cooperative Games with Coalition Structures. *International Journal of Game Theory*, **3**, pp. 217–237, 1974.
- [5] S. Béal, E. Rémila, P. Solal. Characterizations of three linear values for TU games by associated consistency : simple proofs using the Jordan normal form. *International Game Theory Review*, **18**, pp. 1–18, 2016.
- [6] E. Borel. *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard*. 1938
- [7] P. Borm, G. Owen, S. Tijs. On the position value for communication situation. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5**, pp. 305–320, 1992.
- [8] R. van den Brink. An axiomatization of the Shapley Value using a fairness property. *International Journal of Game Theory*, **30**, pp. 309–319, 2001.
- [9] R. van den Brink and R.P. Gilles. Axiomatizations of the conjunctive permission value for games with permission structures. *Games and Economic Behaviour*, **12**, pp. 113–126, 1996.
- [10] A. Casajus. Differential marginality, van den Brink fairness, and the Shapley value. *Theory of Decision*, **71**, pp. 163–174, 2011.
- [11] A. Casajus. The position value is the Myerson value, in a sense. *International Journal of Game Theory*, **36**, pp. 47–55, 2007
- [12] A. A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838.

- [13] M. Davis and M. Maschler. The Kernel of Cooperative Games. *Naval Research Logistics Quarterly*, **12**, pp. 223–259, 1965.
- [14] T. S. H. Driessen and Y. Funaki. Concidence of and collinearity between game theoretic solutions. *OR Spektrum* **13**, pp. 15–30, 1991.
- [15] T. S. H. Driessen. A survey of consistency properties in cooperative game theory. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **33**, pp. 43–59, 1991.
- [16] T. S. H. Driessen. Associated consistency and values for TU-games. *International Journal of Game Theory*, **39**, pp. 467–482, 2010.
- [17] D. B. Gillies. *Some Theorems on n-Person Games*. PhD Thesis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
- [18] A. Ghintran. Marginalisme et valeur de Shapley. *Revue d'Economie Politique*, **121**, pp. 155–177, 2011.
- [19] G. Hamiache. A value with Incomplete Communication. *Games and Economic Behavior*, **26**, pp. 59–78, 1999.
- [20] G. Hamiache. Associated Consistency and Shapley Value. *International Journal of Game Theory*, **30**, pp. 279–289, 2001.
- [21] G. Hamiache. The Owen value values friendship. *International Journal of Game Theory*, **29**, pp. 517–532, 2001.
- [22] G. Hamiache. A mean value for games with communication structures. *International Journal of Game Theory*, **32**, pp. 533–544, 2004.
- [23] G. Hamiache. A Matrix Approach to the Associated Consistency with an Application to the Shapley Value. *International Game Theory Review*, **12**, pp. 175. 2010.
- [24] G. Hamiache. A Matrix Approach to TU Games with Coalition and Communication Structures. *Social Choice Welfare*, **38**, pp. 85–100, 2012.
- [25] J.C. Harsanyi. A bargaining model for the cooperative n-person game. *Contributions to the theory of games*, **4**, Princeton University Press, Princeton, pp. 325–355, 1959.
- [26] S. Hart and A. Mas-Colell. Potention, Value and Consistency. *Econometrica*, **57**, pp. 589–614, 1989.
- [27] P.J.J. Herings, G. van der Laan and A.J.J. Talman. The average tree solution for cycle-free graph games. *Games and Economic Behaviour*, **62**, pp. 77–92. 2008.
- [28] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [29] Y. Hwang. Associated consistency and equal allocation of nonseparable costs. *Economic Theory*, **28**, pp. 709–719, 2006.
- [30] C. Jordan. Sur les assemblages de lignes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **70**, pp. 185–190, 1869.

- [31] R. Joosten. Dynamics, Equilibria, and Values. PhD Thesis, Maastricht University, 1996.
- [32] S. C. Littlechild and G. Owen. A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case. *Management Science*, **20**, pp. 370–372, 1973.
- [33] R. Meessen. Communication games. Master’s thesis, Dept. of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands. 1988
- [34] H. Moulin. The separability axiom and equal sharing method. *Journal of Economic Theory*, **36**, pp. 120–148, 1985.
- [35] R. B. Myerson. Graph and cooperation in games. *Math. Oper. Res.*, **2**, pp. 225–229, 1977.
- [36] R. B. Myerson. Conference Structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory*, **9**, pp. 169–182, 1980.
- [37] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [38] A. van den Nouweland, P. Borm and S. Tijs. Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations. *International Journal of Game Theory*, **20**, pp. 255–268, 1992.
- [39] A. S. Nowak and T. Radzik. A Solidarity value for  $n$ -person transferable utility games. *International Journal of Game Theory*, **23**, pp. 43–48, 1994.
- [40] G. Owen. Values of games with a priori unions. *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, Springer Verlag New-York, pp. 76–88, 1977.
- [41] B. Peleg. On the Reduced Game Property and its Converse. *International Journal of Game Theory*, **3**, pp. 187–200, 1980.
- [42] A. E. Roth. *The Shapley Value : Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press, 1988.
- [43] L.S. Shapley. A value for  $n$ -person games. *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton pp. 307–317, 1953.
- [44] M. Shubik. Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management Science*, **8**, pp. 325–343, 1962.
- [45] M. Slikker. Decision Making and Cooperation Restrictions. Katholieke Universiteit Brabant. PhD Thesis, 2000.
- [46] M. Slikker, A. van den Nouweland. *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [47] M. Slikker. A characterization of the position value. *International Journal of Game Theory*, **33**, pp. 505–514, 2005.

- [48] A.I. Sobolev. Characterization of the Principle of Optimality for Games through Functional Equations (in russian). *Mathematic Methods in the Social Sciences*, **6**, pp. 94–151, 1975.
- [49] W. Thomson. Consistent Allocation Rules, 2006. RCER Working Papers 418, University of Rochester - Center for Economic Research (RCER).
- [50] W. Wang, H. Sun, G. Xu, D. Hou. Procedural interpretation and associated consistency for the egalitarian Shapley values. *Operations Research Letters*, **45**, pp. 164–169, 2017.
- [51] G. Xu. Matrix approach to cooperative game theory. PhD Thesis, 2008.
- [52] G. Xu, T. S. H. Driessen, H. Sun. Matrix analysis for associated consistency in cooperative game theory. *Linear Algebra and its Applications*, **428**, pp. 1571–1586, 2008.
- [53] G. Xu, R. van den Brink, G. van der Laan, H. Sun. Associated consistency characterization of two linear values for TU games by matrix approach. *Linear Algebra and its Applications*, **471**, pp. 224–240, 2015.
- [54] Young, H. P. Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, **14**, pp. 65–72, 1985.

# Index

- additivité, 19
  - par rapport aux jeux, 94
- allocation, 15
- allocation égale des coûts
  - non-séparables, 23, 88
- anonymat, 19, 48
  - des joueurs, 34
    - axiome, 35
  - des liens, 34
    - axiome, 34
- bloc de Jordan, 101
- Cœur, 16
- centre de gravité, 24, 89
- coûts non-séparables, 23
- coûts séparables, 23
- coefficient d'Harsanyi, 14
- composantes, 26
  - d'un graphe, 26
  - matrice, 53, 61
- conditions initiales, 140
- connexité, 26
- consistance, 86
  - associée, 86, 87, 91, 110, 133, 140
  - sur le jeu réduit, 86
- continuité, 87, 110, 132
- contre coalition, 92
- contribution marginale, 17
- couverture minimale connexe, 68
- covariance par translation, 88
- efficience, 15, 21, 140
  - par bloc, 41
  - par composante, 30, 39
- ensemble d'imputations, 15
- équilibre des contributions, 31
  - des liens, 36
    - restreint par bloc, 42
- équité, 31, 39, 49
  - face aux joueurs indispensables, 52
  - van den Brink, 51
- excédent, 15
- F-value, 91
- fonction caractéristique, 12
- graphe, 25
  - acyclique, 136
  - extrémité, 136
  - centre, 136
  - excentricité, 136
  - rayon, 136
- indépendance par rapport
  - aux joueurs non pertinents, 90
- jeu, 11
  - à structure de coalitions, 40, 77
  - à structure de communication, 27
  - à structure de conférences, 37
  - à utilité transférable, 12
  - associé, 86, 89, 90, 93, 96, 139
  - coopératif, 11
  - d'unanimité, 13
  - de blocs, 40
  - de Dirac, 13, 47
  - des liens, 28
  - dual, 12
  - inessentiel, 14
    - axiome, 87, 109, 132
  - monotone, 12



- quotient, 27
- restreint par l'hypergraphe, 38
- simple, 12
- suradditif, 12
- joueur A-nul, 22
  - axiome, 22
- joueur indispensable, 50
- joueur nul, 21
  - axiome, 21, 47
- joueur superflu, 35
  - axiome, 36
- joueurs égaux, 20
  
- lien superflu, 34
  - axiome, 34
- linéarité, 19, 47
  - par rapport aux jeux, 33
  
- méthode de Myerson, 53
- matrice de coalitions, 46
- matrice de Jordan, 101
- Mean value, 94
  
- point d'articulation, 26
- positivité, 90
- pré-imputation, 15
  
- rationalité individuelle, 15
- réduction de Jordan, 100
- règle d'allocation, 14
  - jeux à structure de coalitions, 40
  - jeux à structure de communication, 29
  - jeux à utilité transférable, 14, 17
  
- sous-jeu, 12
- structure de coalitions, 40
- structure de conférences, 36
- support, 18
  - axiome, 19
  
- traitement égal, 20
  - des égaux, 20
  - des joueurs indispensables, 50
  
- valeur égalitaire, 24
- valeur d'Aumann-Drèze, 40, 77
- valeur de Myerson, 29, 38, 53, 57
- valeur de position, 31, 60
- valeur de Shapley, 17, 88
  - $\alpha$ -égalitaires, 24
- valeur de Solidarité, 22