



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique du malaxage acoustique de fluides énergétiques chargés

Quentin Thomas

► **To cite this version:**

Quentin Thomas. Modélisation numérique du malaxage acoustique de fluides énergétiques chargés. Physique [physics]. Université de Bordeaux, 2022. Français. NNT : 2022BORD0227 . tel-03783463

**HAL Id: tel-03783463**

**<https://theses.hal.science/tel-03783463>**

Submitted on 22 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR**  
**DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES PHYSIQUES ET DE  
L'INGÉNIEUR

Par **Quentin THOMAS**

Modélisation Numérique du Malaxage Acoustique de  
Fluides Énergétiques Chargés

Sous la direction de : **Mejdi AZAIEZ**  
Co-directeur : **Eric ARQUIS**

Soutenue le 7 juillet 2022

Membres du jury :

M. Abdelkader MOJTABI	Professeur	Université Paul Sabatier	Président
M. Valéry BOTTON	Professeur	INSA Lyon	Rapporteur
M. Etienne AHUSBORDE	Chargé de Recherche	CNRS UPPA	Examinateur
M. Stéphane GLOCKNER	Ingénieur de Recherche	Bordeaux INP	Examinateur
M. Mejdi AZAIEZ	Professeur	Bordeaux INP	Directeur
M. Eric ARQUIS	Professeur	Bordeaux INP	Co-directeur
Mlle Alice WILMET	Ingénieure	ROXEL	Invitée
M. Laurent TIXIER	Ingénieur	ROXEL	Invité

# **Modélisation Numérique du Malaxage Acoustique de Fluides Énergétiques Chargés**

## **Résumé**

Le mélangeage par vibrations verticales est un sujet d'étude en plein croissance grâce au développement d'un mécanisme par résonance mécanique permettant le malaxage de fluides visqueux et de poudres, nommé RAM (ResonantAcoustic<sup>®</sup> Mixing), et faisant intervenir l'instabilité de Faraday. Cette thèse s'inscrit dans l'analyse du mélangeage vibratoire en étudiant le comportement d'un milieu diphasique, d'un fluide monophasique contenant une concentration d'espèce ou une suspension, soumis à cette instabilité. À l'aide de simulations numériques effectuées avec le code NOTUS, développé au sein du laboratoire I2M, des comparaisons sont effectuées entre ces résultats et ceux obtenus à partir de l'analyse linéaire de l'instabilité de Faraday, ainsi que des données expérimentales fournies par l'entreprise Roxel qui supporte ce projet. Un modèle permettant de calculer l'évolution de la fraction volumique pendant le mélangeage est implémenté dans le code afin de pouvoir simuler le comportement d'un fluide chargé soumis aux vibrations imposées par le mélangeur RAM.

**Mots-clés** : malaxage, simulation numérique, incompressible, instabilité de Faraday

# **Numerical Modeling of Acoustic Mixing of Energetic Charged Fluids**

## **Abstract**

Mixing by vertical vibrations is a growing subject of study thanks to the development of a mechanism by mechanical resonance allowing the mixing of viscous fluids and powders, called RAM (ResonantAcoustic<sup>®</sup> Mixing), and involving Faraday instability. This thesis is part of the analysis of vibrational mixing by studying the behavior of a two-phase medium, a single-phase fluid containing a concentration of species or a suspension, subjected to this instability. Using numerical simulations carried out with the NOTUS code, developed in the I2M laboratory, comparisons are made between these results and those obtained from the linear analysis of the Faraday instability, as well as experimental data provided by the company Roxel which supports this project. A model allowing to calculate the evolution of the volume fraction during the mixing is implemented in the code in order to be able to simulate the behavior of a loaded fluid subjected to the vibrations imposed by the RAM mixer.

**Keywords:** Mixing, CFD, incompressible, Faraday instability

## Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du département Transferts Fluides Énergétique (TREFLE) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M) de Bordeaux, en partenariat avec l'entreprise Roxel et l'Agence Innovation Développement (AID), qui financent ce projet.

Je remercie en premier lieu les membres du jury pour leur participation. Je remercie M. MOJTABI, président du jury, et M. BOTTON pour avoir accepté d'être rapporteurs sur ce sujet, ainsi que M. AHUSBORDE et M. GLOCKNER d'avoir accepté d'être examinateurs.

Je remercie Mlle WILMET et M. TIXIER pour leur suivi tout au long de cette thèse, leur participations aux nombreuses discussions pour commenter les résultats ainsi que le développement et la réalisation des expériences au sein de l'entreprise. Je remercie aussi l'équipe de Roxel située à Bourges pour la conception du réservoir, ainsi que M. GUILLAUD pour avoir réalisé les expériences avec le pot vibrant.

Je remercie l'entreprise ROXEL, l'Agence Innovation Développement pour avoir permis à ce projet d'exister et Mme SAINTE-CATHERINE pour avoir soutenu ce projet au sein de l'AID.

Je remercie mes directeurs de thèse Mejdî AZAIEZ et Eric ARQUIS, pour m'avoir proposé ce projet et m'avoir accompagné tout le long de cette thèse.

Je remercie l'ensemble de l'équipe du laboratoire, à commencer par Valérie, qui s'est occupée de toute la gestion administrative de la thèse. Je remercie tous les membres de l'équipe avec qui j'ai pu passer d'agréables moments au sein du laboratoire (Stéphane, Mathieu, Antoine, Cédric, Sylvie, Arnaud, Pierre ...). Merci à l'ensemble des doctorants, dont certains sont devenus post-doctorants au cours de ma thèse (Fabien/Extraverti, Florian/Granola, Félix/Congés et Odélin/Jésus) pour tous les bons moments passés ensemble.

Pour conclure, je remercie mes parents et ma famille en général, pour leur soutien et leurs encouragements. Merci à mes amis, dont certains ont eux aussi choisi le chemin périlleux de la recherche. Et enfin merci à Lino, parti depuis une dizaine d'années mais qui m'accompagne très souvent dans mes pensées, ainsi qu'à Virgule Pilou, qui aura été présent tout au long de mes études supérieures.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte et mélangeur par vibrations . . . . .	2
1.2	Fonctionnement du mélangeur . . . . .	2
1.3	Motivations industrielles/Intérêts de ce système . . . . .	4
1.4	Orientation de la thèse . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Phénoménologie du problème et état de l'art</b>	<b>11</b>
2.1	Instabilités hydrodynamiques . . . . .	11
2.1.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	12
2.1.2	Instabilité de Faraday . . . . .	18
2.1.3	Instabilités secondaires . . . . .	37
2.2	Rhéologie des suspensions . . . . .	39
2.2.1	Type de suspensions . . . . .	39
2.2.2	Rhéologie d'un fluide chargé . . . . .	42
2.2.3	Modèles de viscosité . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Modèle mathématique et approche numérique</b>	<b>50</b>
3.1	Modèle mathématique et ses équations . . . . .	50
3.1.1	Conservation de la masse . . . . .	50
3.1.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	52
3.1.3	Écoulement de faible épaisseur . . . . .	56
3.1.4	Équation de concentration d'espèce . . . . .	58
3.1.5	Modélisation de l'écoulement de fluide chargé . . . . .	58
3.2	Discrétisation et méthodes numériques . . . . .	62
3.2.1	Formulation des volumes finis . . . . .	62
3.2.2	Discrétisation du terme temporel . . . . .	64
3.2.3	Discrétisation du terme d'advection . . . . .	65
3.2.4	Discrétisation du terme de diffusion . . . . .	70
3.2.5	Discrétisation du terme source . . . . .	71
3.2.6	Critère de stabilité . . . . .	72

3.2.7	Couplage vitesse-pression . . . . .	73
3.2.8	Méthode de suivi d'interface . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Mélangeage diphasique</b>	<b>79</b>
4.1	Validation . . . . .	79
4.1.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	80
4.1.2	Formation de ligament par instabilité de Faraday . . . . .	85
4.1.3	Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw . . . . .	91
4.2	Mélangeage diphasique avec le RAM . . . . .	95
4.2.1	Mise en place du problème . . . . .	95
4.2.2	Simulations numériques et comparaisons expérimentales . . .	96
4.2.3	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Mélangeage monophasique</b>	<b>103</b>
5.1	Validation . . . . .	103
5.1.1	Mélangeage d'eau salée pour une faible fréquence . . . . .	106
5.2	Mélangeage par pot vibrant . . . . .	113
5.2.1	Mise en place du problème . . . . .	113
5.2.2	Simulations numériques et comparaisons expérimentales . . .	114
5.2.3	Conclusion . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Mélangeage de fluide chargé</b>	<b>121</b>
6.1	Préambule . . . . .	121
6.2	Validation . . . . .	122
6.2.1	Écoulement dans une conduite cylindrique . . . . .	122
6.3	Simulations du mélangeage d'un fluide chargé . . . . .	128
6.3.1	Simulations numériques et comparaisons expérimentales . . .	132
6.3.2	Conclusion . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Conclusion générale de la thèse</b>	<b>142</b>
<b>A</b>	<b>Diagrammes de l'instabilité de Faraday</b>	<b>145</b>
A.1	Fluides non visqueux . . . . .	145
A.2	Fluides visqueux . . . . .	149
<b>B</b>	<b>Moyennisation temporelle des oscillations</b>	<b>153</b>
B.1	Principe de la méthode de moyennisation . . . . .	153
B.1.1	Résolution . . . . .	161
B.1.2	Application . . . . .	162
B.1.3	Validations sur des simulations en l'absence de gravité . . . .	163

B.1.4 Conclusion . . . . . 163

# Liste des Illustrations

1.1	Schéma du mélangeur RAM, (source [1]) . . . . .	3
1.2	Fonctionnement du mélangeur RAM, (source [2]) . . . . .	4
1.3	Nombres d'articles publiés sur le mélangeur RAM, (source: Andrews et al. [3]) . . . . .	5
1.4	Comparaison entre des échantillons préparés par mélangeur planétaire (a) et (b), et un échantillon préparé avec le RAM (c), (source: Smith et al. [4]) . . . . .	6
1.5	Exemple d'un mélangeur mécanique à pâles . . . . .	7
2.1	Superposition de deux fluides immiscibles, formation d'un polype . .	12
2.2	Exemples de simulations montrant la formation d'un polype . . . . .	15
2.3	Formation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Expérience effectuée pour un système liquide/gaz Youngs. (Source: Youngs et al. [5]) . . .	16
2.4	mélangeage de deux couches miscibles de fluides par instabilité de Rayleigh-Taylor. La couche de fluide lourde est en haut en rouge, la couche la plus légère en bleu en bas. À gauche, à $t=0$ , l'interface est légèrement perturbée pour amorcer le mélangeage (Source: Cook et al. [6]) . . . . .	17
2.5	Inhibition de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Comparaison expérimentale entre une inhibition par électromagnétisme (a) et par rotation (b) pour deux mêmes fluides. (Source: Scase et al. [7]) . . .	18
2.6	Schéma d'une structure 1D soumise à un forçage harmonique. Formation d'une onde stationnaire. L'onde atteint son amplitude maximale au niveau des ventres. Une demi-période d'oscillation sépare l'onde en noir de celle en pointillés. . . . .	19
2.7	Motifs de Chladni sur une plaque vibrante. (Source: Colwell [8]) . . .	20
2.8	Schéma de la réponse sous-harmonique d'une couche de fluide soumise à une excitation paramétrique (Source: Douady [9]) . . . . .	21
2.9	Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu pour un fluide idéal (Source: Benjamin et Ursell [10]) . . . . .	23

2.10	Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu pour un milieu diphasique visqueux (Source: Kumar et Tuckerman [11]) . . . . .	25
2.11	(a): Motifs formés par instabilité de Faraday à la surface d'un fluide. (Source: Douady et al. [12]) . (b): Quasi-motif formé sur un domaine formant la France Métropolitaine. (Source: Edwards et al. [13]) . . .	27
2.12	(a): Motif hexagonal obtenu expérimentalement. (Source: Kityk et al. [14]). (b): Motif hexagonal, pour une même excitation paramétrique, obtenu par simulation. (Source: Périnet et al. [15]) . .	27
2.13	(a): Motif de Chladni à l'intérieur d'une pellicule de fluide contenant une suspension, pour une fréquence de 150Hz. (Source: Wright et al. [16]). (b): Détail de l'interface liquide/gaz et liquide/liquide chargé. (Source: Martino et al. [17]) . . . . .	29
2.14	(a): Projection de gouttes d'eau à deux fréquences différentes, 20Hz en haut, 60Hz en bas. (b): Mesure de l'accélération nécessaire à la rupture d'interface en fonction de la fréquence d'excitation pour différents liquides. (Source: Goodridge et al. [18]) . . . . .	30
2.15	Formation d'un jet. (Source: kalinichenko [19]) . . . . .	30
2.16	(a): Lévitiation de fluides par forçage vertical. Lévitiation de couches de fluides par instabilité de Faraday. (b): Poussée d'Archimède inversée avec les vibrations. (Source: Apfell et al. [20]) . . . . .	31
2.17	Diagramme des échanges d'énergie pour un écoulement stratifié (Source: Winters et al. [21]) . . . . .	34
2.18	Diagramme de stabilité illustrant la dissipation d'énergie pour un écoulement stratifié (Source: Briard et al. [22]) . . . . .	35
2.19	(a): Schéma de formation des rouleaux aux noeuds du mode de vibration (Source: Thorpe [23]). (b): Exemple de formations de rouleaux sur la pseudo-interface séparant deux couches miscibles (Source: Cavelier et al. [24])(c)(d): mélangeage à une fréquence de 60Hz et d'amplitude 2.75mm d'un milieu air/liquide, ce dernier étant divisé en deux couches miscibles sirop/glycerol. (Source: Zhan et al. [25]) . . . . .	36
2.20	Rupture des strates et formation de rouleaux, avec une excitation paramétrique (Source: Benielli et al. [26]) . . . . .	37
2.21	Schéma d'une contrainte surfacique appliquée sur un élément de surface et représentation schématique des contraintes dans les trois axes d'un repère 3D. . . . .	43
2.22	Schéma de l'écoulement cisailé d'un fluide newtonien entre une plaque statique et une plaque mobile. . . . .	44

2.23	Évolution du taux de cisaillement $\tau$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour des fluides newtoniens et non-newtoniens. . . . .	44
2.24	Évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et tracé des taux critiques $\dot{\gamma}_c$ et $\dot{\gamma}_m$ . (Source: Barnes [27]) . . . . .	45
2.25	Loi de viscosité proposée par Krieger (Source: Krieger [28]) . . . . .	48
3.1	Exemple d'un volume de contrôle $\Omega$ réduit à une surface 2D, avec $\Gamma$ la surface de normale sortante $\vec{n}$ sur chacune des faces . . . . .	51
3.2	Déplacement du référentiel local $\{x, y, z\}$ par rapport au référentiel terrestre $\{X, Y, Z\}$ . . . . .	53
3.3	Réservoir dans le référentiel local $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ . . . . .	53
3.4	Coupe 2D du volume de contrôle $\Omega_P$ , de centre P . . . . .	63
3.5	Schéma du stencil . . . . .	64
3.6	Discrétisation par la méthode MAC . . . . .	76
3.7	Comparaison des méthodes de reconstruction d'interface SLIC et PLIC . . . . .	78
4.1	Points de l'interface suivis pendant l'écoulement . . . . .	81
4.2	Évolution du déplacement de l'interface au milieu du polype et au bord . . . . .	83
4.3	Amorçage de l'écoulement : (a)(b) $t_{adim} = 0$ , (c)(d) $t_{adim} = 0.5$ . . . . .	83
4.4	(a)(b) $t_{adim} = 1$ , (c)(d) $t_{adim} = 1.5$ . . . . .	84
4.5	(a)(b) $t_{adim} = 2$ , (c)(d) $t_{adim} = 2.5$ . . . . .	84
4.6	Schéma du problème à l'état initial . . . . .	86
4.7	Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu. Le point bleu de coordonnées (X=0.9,Y=0.3) correspond aux paramètres de formation du ligament . . . . .	87
4.8	Comparaisons des données numériques avec la méthode CLSVOF et analytiques fournies par Li et al. [29] et les simulations obtenues avec NOTUS avec la méthode VOF-PLIC . . . . .	88
4.9	Simulation avec NOTUS de la formation du ligament. Calcul de la couleur C et reconstruction de l'interface à l'aide de la méthode VOF-PLIC (en rouge la phase liquide, en bleu la phase gazeuse) : (a) $t = 0$ , (b) $t = 0.41T$ , (c) $t = 0.8T$ , (d) $t = 1.21T$ . . . . .	89
4.10	(a) $t = 1.6T$ , (b) $t = 2T$ , (c) $t = 2.41T$ , (d) $t = 2.8T$ . . . . .	89
4.11	(a) $t = 3T$ , (b) $t = 3.2T$ , (c) $t = 3.4T$ , (d) $t = 3.6T$ . . . . .	90
4.12	(a) $t = 3.8T$ , (b) $t = 4.25T$ . . . . .	90
4.13	(a): Dispositif expérimental des auteurs (source: Li et al. [30]). (b): Schéma 2D du problème, avec les deux couches de propriétés respectives $(\rho_1, \mu_1)$ et $(\rho_2, \mu_2)$ . . . . .	92

4.14	Profil de l'interface à l'amplitude maximale . . . . .	93
4.15(a):	Évolution de l'amplitude de l'interface au niveau d'un ventre d'oscillations. (b): Spectre de l'enregistrement du mouvement de l'interface sur un ventre d'oscillations à régime d'oscillations établi. .	94
4.16	Diagramme de stabilité du milieu diphasique air/eau pour une excitation vibratoire de fréquence 60Hz . . . . .	97
4.17	Comparaison de résultats numériques des simulations 2D/2.5D (à gauche) et expérimentaux (à droite). La fonction couleur C affiche en rouge l'eau et en bleu l'air. . . . .	99
4.18	Spectre du mouvement de l'interface prise à un ventre d'instabilité. .	100
4.19	Comparaison de résultats numériques des simulations 2D (à gauche) et expérimentaux (à droite). La fonction couleur C affiche en rouge l'eau et en bleu l'air. . . . .	101
5.1	Évolution de la viscosité de l'eau salée en fonction de la masse volumique (20°C) (Source: Lide [31]) . . . . .	104
5.2	Schéma du problème à l'état initial. . . . .	106
5.3	Montage expérimental pour le mélangeage de l'eau pure/eau salée. (Source: Briard et al. [32]) . . . . .	107
5.4	Épaisseur moyenne L de la couche de mélange . . . . .	110
5.5	Condition initiale et amorçage du mélangeage 3D. Nous pouvons observer la formation des rouleaux au niveau des noeuds de vibration. Les ventres de vibrations ne sont pas encore impactés par le mélangeage engendré par les rouleaux, et conservent l'épaisseur initiale. . . . .	111
5.6	Oscillation d'amplitude maximale de la pseudo-interface, accompagnée de rouleaux de convection qui se sont propagés à partir des noeuds. Couche stratifiée stable à la fin du mélange. Des ondes de gravité oscillent latéralement sans modifier l'épaisseur de cette couche intermédiaire. Le régime de mélange convectif est dissipé et laisse place à un régime de mélange diffusif plus lent. . . .	112
5.7	Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie du système eau/eau salée, pour une fréquence d'excitation de 4Hz. . . . .	115
5.8	Épaisseur moyenne L de la couche de mélange . . . . .	116

5.9	mélangeage du système monophasique: Simulations numériques 2D à gauche et expérimentations à droite. Le motif formé avant formation des rouleaux de mélangeage sont très proches. La solution stratifiée stable montre que des ondes de gravité sont alimentées et se déplacent latéralement, autant sur nos simulations que sur les expérimentations. . . . .	117
5.10	mélangeage de la couche monophasique: Simulations numériques 3D à gauche et expérimentations à droite. Le motif formé sur la figure (a), comme en 2D, est proche du motif expérimental obtenu, avec 5 longueurs d'ondes sur la pseudo-interface. Des oscillations verticales continuent de faire grossir la strate intermédiaire. . . . .	119
6.1	Montage expérimental pour mesurer la fraction volumique de poudres dan un tube par RMN. Le tube est alimenté par un réservoir muni d'une pompe. (Source: Hampton et al. [33]) . . . . .	123
6.2	Résultats expérimentaux et numériques provenant des travaux de Hampton [33]. Les profils radiaux mesurés à l'aide de l'imagerie RMN (o) sont comparés avec le modèle SIM (- -) et le modèle SB (-). Profils de chargement à gauche, de vitesse à droite. . . . .	126
6.3	Profils radiaux de la fraction volumique $\phi^s$ et de la vitesse adimensionnée pour les trois chargements initiaux. . . . .	127
6.4	Schéma du problème de suspension . . . . .	129
6.5	Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie du système eau/eau chargé en corindon, pour une fréquence d'excitation de 60Hz. 131	
6.6	Plan de coupe du réservoir à la coordonnée axiale $x = 7.5cm$ correspondant au milieu du réservoir. Formation de rouleaux de convection dans la suspension. Les vortex permettent la migration locale des particules sans changer la structure globale du mélange. .	134
6.7	Profils verticaux moyennés de la fraction volumique $\langle \phi^s \rangle$ . . . . .	135
6.8	Profils verticaux moyennés de la fraction volumique $\langle \phi^s \rangle$ en fonction du temps pour une accélération de 80g . . . . .	136
6.9	mélangeage pour une accélération de 30g : Comparaison de la fraction volumique de poudre $\phi^s$ calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales. . . . .	137
6.10	mélangeage pour une accélération de 60g : Comparaison de la fraction volumique de poudre $\phi^s$ calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales. . . . .	138

6.11 mélangeage pour une accélération de 80g : Comparaison de la fraction volumique de poudre $\phi^s$ calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales. . . . .	139
A.1 Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu . . . . .	149
A.2 Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie . . . . .	152
B.1 Schéma du problème de convection thermovibrationnelle . . . . .	162
B.2 (a)(c) Simulation effectuée avec la méthode de moyennisation ( <i>frequence</i> = 60Hz, <i>amplitude</i> = $1.186 * 10^{-2}m$ , Prandtl = 1.0, $Ra_v = 10^3$ ), (b)(d) résultats de référence à droite. Champs de température en haut et vorticité en bas. (source : [34]) . . . . .	164
B.3 (a)(c) Simulation effectuée avec la méthode de moyennisation ( <i>frequence</i> = 60Hz, <i>amplitude</i> = $1.678 * 10^{-1}m$ , Prandtl = 1.0, $Ra_v = 2 * 10^5$ ), (b)(d) résultats de référence à droite. Champs de température en haut et vorticité en bas. (source : [34]) . . . . .	165

# Liste des Tableaux

3.1	Tableau des coefficients d'interpolation $c_{rj}$ pour WENO3. . . . .	67
4.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor : Propriétés des fluides . . . . .	81
4.2	Instabilité de Rayleigh-Taylor : Conditions aux bords . . . . .	82
4.3	Instabilité de Rayleigh-Taylor : Propriétés des fluides . . . . .	85
4.4	Formation de ligament : Conditions aux bords . . . . .	88
4.5	Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Propriétés des fluides . . . . .	91
4.6	Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Conditions aux bords . . . . .	92
4.7	Tableau des résultats . . . . .	94
4.8	Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Propriétés des fluides . . . . .	95
4.9	mélangeage diphasique avec le mélangeur RAM : Conditions aux bords	98
5.1	mélangeage d'eau salée : Conditions aux bords . . . . .	108
5.2	Tableau comparatifs des valeurs de l'épaisseur moyenne $L$ calculée avec NOTUS, avec elles obtenues par Briard et al. [32] . . . . .	109
5.3	mélangeage de deux couches de fluides miscibles par instabilité de Faraday: Propriétés des fluides . . . . .	114
5.4	mélangeage d'eau salée : Conditions aux bords . . . . .	115
6.1	Écoulement d'une suspension dans un tube : Propriétés du fluide et de la suspension . . . . .	124
6.2	Migrations de particules dans un tube : longueur de tube . . . . .	125
6.3	Écoulement d'une suspension dans un tube : Conditions aux bords	128
6.4	mélangeage d'un fluide chargé : Propriétés du fluide et de la suspension . . . . .	130
6.5	mélangeage d'un fluide chargé : Conditions aux bords . . . . .	132

# Nomenclature

## Acronymes

CFD	Computational Fluid Dynamics
CTV	Convection Thermovibrationnelle
DNS	Direct Numerical Simulation
NSSP	Non-Strong Stability Preserving
RAM	Resonant Acoustic Mixing
TVD	Total Variation Diminishing
VOF	Volume Of Fluid
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory

## Variables caractéristiques

$\beta_0$	critère d'atomisation	
$\beta_p$	préfacteur	
$\beta_r$	indicateurs d'irrégularités	
$\Delta_{x_i}$	pas d'espace au point d'indice i	[m]
$\dot{\gamma}$	cisaillement	[s <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	longueur d'onde	[m]
$\Omega$	Volume de contrôle	
$\omega$	pulsation	[rad · s <sup>-1</sup> ]
$\Omega_P$	Volume de contrôle de centre P	
$\omega_r$	coefficients bycentriques	

$\psi$	limiteur de flux	
$\sigma$	tension superficielle	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$
$\zeta$	hauteur de l'interface	$[\text{m}]$
$coef_{CFL}$	coefficient CFL	
$F_{i+\frac{1}{2}}$	flux numérique entre les points d'incés i et i+1	
$L_{sim}$	épaisseur calculée de la couche de mélange	$[\text{m}]$
$m$	mode de vibration	
A	amplitude	$[\text{m}]$
acc	accélération maximale	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
freq	fréquence d'excitation	$[\text{Hz}]$
k	nombre d'onde	$[\text{m}^{-1}]$
L	épaisseur de la couche de mélange	$[\text{m}]$
N	fréquence de Brunt-Väisälä	$[\text{Hz}]$
S	champ de fraction massique ou concentration	
t	temps	$[\text{s}]$

### Champs et opérateurs

$\bar{\sigma}$	tenseur des contraintes de déformation	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]$
$\mu$	champ scalaire de viscosité dynamique	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$
$\mu_r$	champ scalaire de viscosité réduite	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$
$\nabla \cdot$	opérateur divergence	
$\nabla$	opérateur gradient	
$\phi^s$	Champ scalaire de fraction volumique de poudres	
$\rho$	champ scalaire de masse volumique	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$\rho_f$	champ scalaire de masse volumique de fluide	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$\rho_p$	champ scalaire de masse volumique de particules	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$

$\rho_{susp}$	champ scalaire de masse volumique de suspension	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$S(\phi^s)$	terme source du modèle de Phillips	
C	champ scalaire de la couleur	
D	Champ scalaire de coefficient de diffusion massique	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$
$D(\phi^s)$	coefficient de diffusion du modèle de Phillips	
f	terme source vibratoire	
p	champ scalaire de pression	[Pa]
u	champ vectoriel de vitesse	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$

### **Nombres adimensionnels**

$A_t$	nombre d'Atwood
Ra	nombre de Rayleigh
$Ra_v$	nombre de Rayleigh vibrant
Re	nombre de Reynolds

# Chapitre 1

## Introduction

Le marché des mélangeurs industriels est un marché animé par de nombreux secteurs industriels, avec en première ligne ceux de l'agroalimentaire et pharmaceutique, mais aussi l'aéronautique et l'armement. L'objectif des différents acteurs est de fournir des appareils permettant d'obtenir, à partir d'au moins deux matériaux, un produit final le plus homogène possible, afin de satisfaire les niveaux de qualité requis par ces industriels pour un coût de fabrication compétitif. Ce point est d'autant plus important que de la qualité du mélange va dépendre la stabilité du produit. Celle-ci est indispensable lors de la mise en vente de produits médicaux dans lesquels les substances actives sont mélangées à des excipients et d'autres stabilisateurs, ou afin d'obtenir un propulseur répondant aux normes de sécurité autorisant sa manipulation tout en gardant une efficacité permettant son utilisation militaire après un stockage de plusieurs années.

Pour répondre aux besoins actuels, l'entreprise américaine Resodyn, basée dans le Montana, a développé une gamme de mélangeurs dits à résonance acoustique, visant à s'implanter sur ce marché jusqu'à présent dominé par les mélangeurs intrusifs, c'est-à-dire possédant une structure interne en mouvement, à travers plusieurs caractéristiques qui lui sont propres. Roxel, qui fait partie de ses clients, est une entreprise internationale, notamment implantée à Saint-Médard-en-Jalles, qui construit des moteurs de missiles tactiques telles que des roquettes, ce qui inclue la fabrication de matière explosive de type propergol servant à la propulsion. Actuellement Roxel souhaite développer un nouveau procédé de fabrication grâce à la technologie de Resodyn afin de répondre à certains marchés à un moindre coût.

## **1.1 Contexte et mélangeur par vibrations**

Cette thèse s'inscrit dans une volonté d'étude et de compréhension du mélangeage par vibrations à travers un type de mélangeur nommé mélangeur RAM (ResonantAcoustic<sup>®</sup> Mixing). Le mélangeage vibratoire permet de brasser des fluides ou des poudres selon différents régimes, en fonction des fréquences et des amplitudes exploitées. Le mélangeur RAM est un système mécanique spécialement conçu pour fonctionner à un régime vibratoire relativement intense dans le but de mélanger des fluides très visqueux, des poudres de masses volumiques variées ou des fluides chargés. Il s'inscrit dans un marché traditionnellement représenté par les mélangeurs à pâles, mettant en jeu des mécanismes physiques différents. Ce système est exploité par l'entreprise Roxel France dans le but de développer un protocole de fabrication alternatif aux protocoles déjà existants.

L'entreprise Roxel souhaite exploiter le mélangeur RAM pour la fabrication de propergol solide. Celui-ci est constitué de plusieurs fluides visqueux, certains jouant le rôle de liants, contenant plusieurs types de poudres de granulométries différentes. Ce système très hétérogène est difficile à mélanger et implique des durées de malaxage relativement importantes. L'objectif à terme de l'utilisation du RAM est d'obtenir des mélanges homogènes répondant aux critères de qualité de l'entreprise, tout en diminuant fortement le temps de mélangeage nécessaire pour obtenir le fluide chargé final. Afin d'optimiser le procédé, l'objectif est de pouvoir simuler un mélangeage à l'échelle industrielle, en prenant en compte l'ensemble des fluides et des poudres mises en jeu. Ce travail constitue une première étape, dans laquelle nous nous concentrons sur le mélangeage de systèmes plus simples, miscibles, avec ou sans chargement, ou immiscibles. Nous nous appuyons sur le code de simulation numérique développé au sein de l'I2M référencé par le nom NOTUS.

## **1.2 Fonctionnement du mélangeur**

Le mélangeur de type RAM, qui signifie Resonant Acoustic Mixing/Mixer, soit Mélangeage/Mélangeur par Résonance Acoustique, est développé par la société américaine Resodyn, basée dans le Montana, qui a déposé un brevet sur ce système en 2007 [35]. Il est caractérisé par l'utilisation d'une méthode non intrusive basée sur l'oscillation rapide du système. Il est composé d'un

châssis contenant des ressorts et trois masses, d'un amortisseur et d'un moteur permettant la mise en mouvement d'un plateau sur lequel se trouve un système de fixation adapté à des récipients de petits volumes, présenté sur la figure 1.1. Une interface permet de gérer l'allumage et la fréquence du mouvement oscillatoire, sachant que sa fréquence d'oscillation nominale se trouve autour de 60 Hz, fréquence pour laquelle l'ensemble mécanique entre en résonance, donc avec une amplitude et une intensité de vibrations maximales. Le graphe de la figure 1.2 explicite la plage de fonctionnement de l'appareil. [2] Plusieurs modèles existent, le plus petit, dédié à une utilisation en laboratoire (capacité  $\approx 1$  kg), est de ce fait nommé LabRAM, et le plus gros, RAM55, permet de faire des mélanges jusqu'à 420 kg. [36]

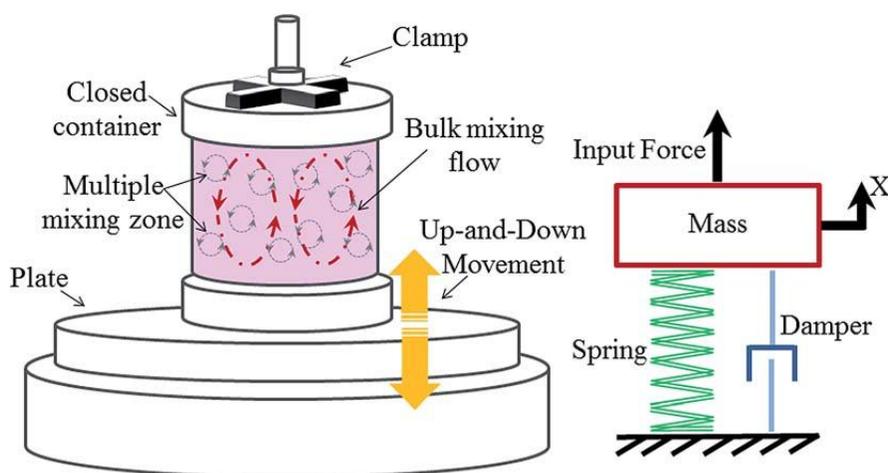


Fig 1.1: Schéma du mélangeur RAM, (source [1])

La cavité contenant les produits, sous forme liquide ou de poudre, est "secouée" lors de l'utilisation de l'appareil, ce qui entraîne un mouvement de convection macroscopique mais aussi la création de cellules tourbillonnaires ou de projection de fluide en fonction des propriétés du mélange. Plusieurs instabilités, dans le cas où des interfaces entre fluides sont présentes, mais aussi des percussions de particules solides entre elles, dans l'ensemble du récipient, contribuent à amplifier ce mélange. Il existe plusieurs mélangeurs de ce type en fonction de la quantité de matière à mélanger. Cependant, si la taille du mécanisme est raisonnable pour des volumes faibles, tel que le LabRAM, ses dimensions augmentent rapidement pour des volumes plus importants. Cela entraîne une limitation de la quantité de matière exploitable pour un même mélange. Malgré cette contrainte, ce procédé de mélangeage peut s'avérer intéressant pour de petites productions, évitant ainsi des pertes de matière.

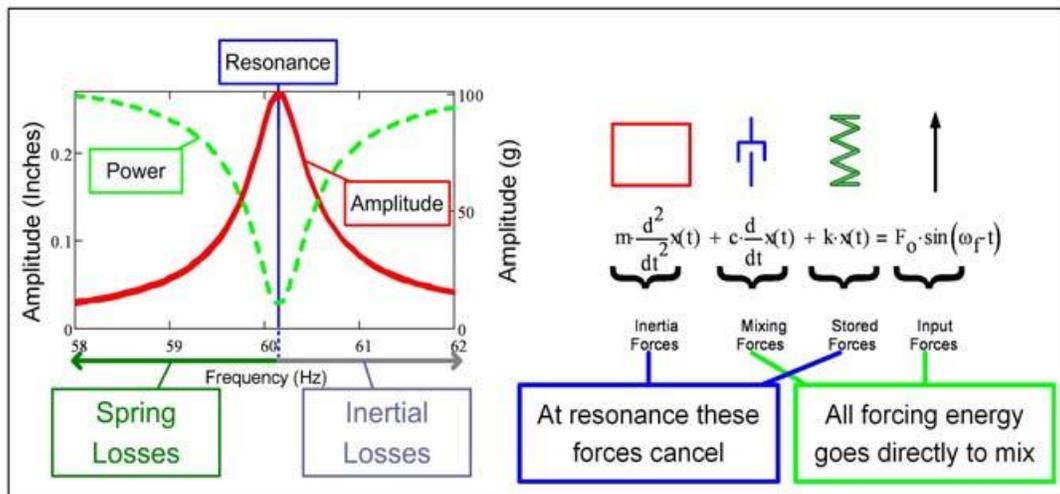


Fig 1.2: Fonctionnement du mélangeur RAM, (source [2])

### 1.3 Motivations industrielles/Intérêts de ce système

La technologie RAM étant sur le marché depuis une décennie, son intérêt pour l'industrie chimique et pyrotechnique se développe progressivement. L'étude du mélangeur vibrant, qui a été développé dans le but de traiter notamment des fluides très visqueux, le propergol en est un exemple, s'avère donc une opportunité pour étudier l'impact de cette technologie sur la qualité des mélanges produits, par rapport à des mélangeurs classiques.

Plusieurs auteurs se penchent sur l'intérêt croissant porté par la communauté scientifique sur le RAM, notamment dans le domaine de la fabrication de matière énergétique. Andrews et al. [3] ont effectué un relevé des publications, visible sur la figure 1.3, effectué en 2019, qui montre que leur nombre ne cesse d'augmenter depuis l'introduction de cette technologie sur le marché. Près de 150 publications abordant la technologie RAM ont ainsi été publiées en une décennie, avec une progression quasi-linéaire. Le relevé du nombre de publications de la dernière année est partiel étant donné la date de rédaction de l'article d'Andrews. Plusieurs questions concernant la sécurité de l'utilisation d'un tel outil pour des matériaux énergétiques. On rappelle qu'un matériau énergétique est un composé capable de libérer de l'énergie au cours d'une réaction chimique, notamment par combustion. Le propergol est un exemple de matériau énergétique, dont la réaction peut être extrêmement violente. Il permet de libérer de l'énergie sous forme de gaz permettant la propulsion d'un missile ou d'une fusée.

Le mélangeage d'un matériau énergétique est susceptible de générer plusieurs contraintes physiques susceptibles, selon leur ampleur, de déclencher une réaction explosive. Parmi ces contraintes, nous pourrions noter l'apparition éventuelles de décharges électrostatiques, étudiées expérimentales et numériquement pour un mélangeur à pâles à hautes vitesses [37]. L'utilisation d'un mélange contenant une phase liquide permet de diffuser cette charge, le déclenchement d'une réaction chimique est donc peu probable. Plusieurs études menées sur le mélangeur RAM se penchent sur les risques liés à l'impact ou à la pression à l'intérieur du réservoir [38] [39]. Le risque est de provoquer une explosion par la compression d'une bulle de gaz à l'intérieur du matériau. Étant donné que la température du gaz augmente avec la pression, le danger serait qu'au cours d'un pic d'accélération la température de cette bulle dépasse le seuil de combustion, entraînant une explosion. Andrews montre, à partir des travaux de Bowden et al. [40], que le seuil à partir duquel une bulle amorcerait une réaction explosive n'est pas atteint par le régime vibratoire imposé par le mélangeur RAM.

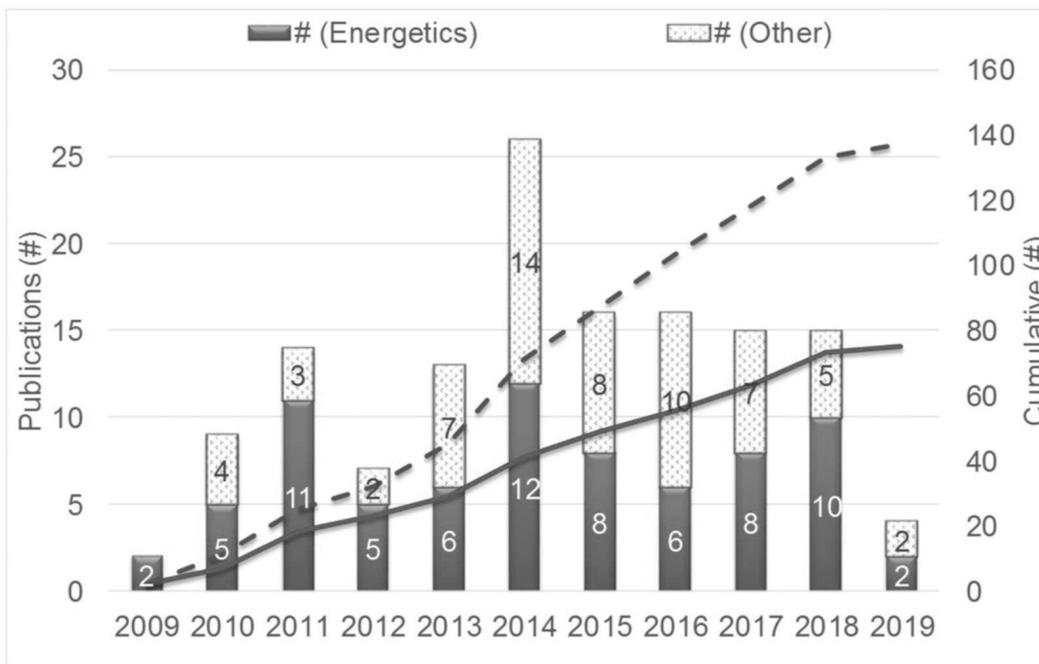
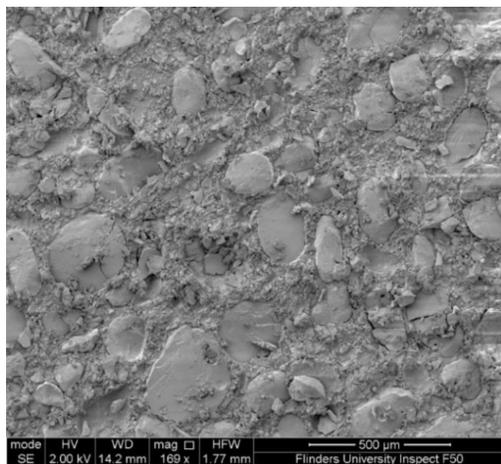


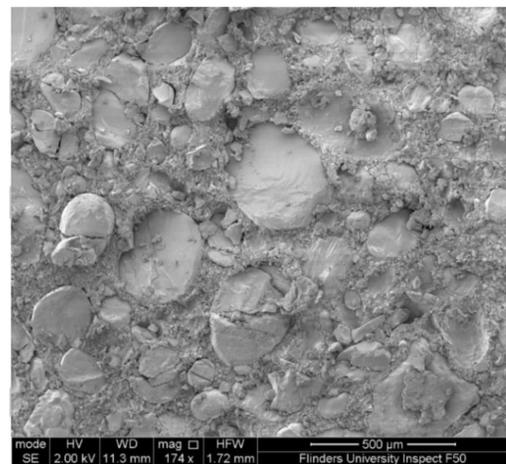
Fig 1.3: Nombres d'articles publiés sur le mélangeur RAM, (source: Andrews et al. [3])

D'autres comptes-rendus sur l'état de l'art de la recherche sur le mélangeur RAM ont depuis été publiés. Nous citerons Wright et al. [41], qui se penche en particulier sur les bénéfices et contraintes de l'utilisation du mélangeur RAM dans le cas de la fabrication de propergol pour les propulseurs solides

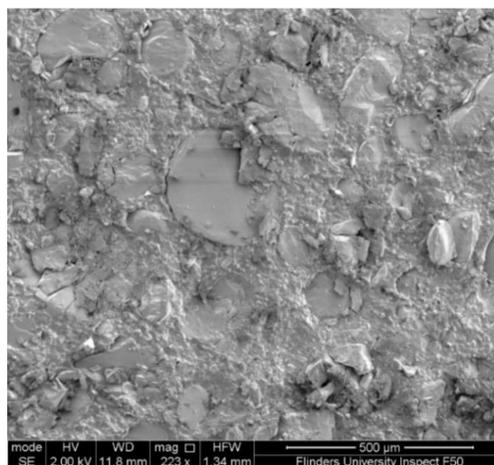
de missiles. Smith et al. [4] investigent l'efficacité du mélangeur RAM, en comparaison avec un mélangeur planétaire classique. Des échantillons de propergol sont malaxés par l'un ou l'autre de ces deux procédés, avant de comparer les vitesses de combustion. La combustion d'un propergol mixé par le mélangeur RAM est plus lente que celle d'un propergol préparé avec le mélangeur planétaire. L'hypothèse suggérée pour expliquer ces résultats est que le système RAM, sans contact, est susceptible d'éviter l'abrasion des particules. Il en résulte un produit plus performant, qui conserve un chargement en particules de meilleure qualité. Des coupes analysées par microscope électronique permettent de constater que le mélange obtenu avec le RAM comporte moins de particules de taille intermédiaire, et que les petites particules sont mieux intégrés dans le milieu, voir Fig. 1.4.



(a)



(b)



(c)

Fig 1.4: Comparaison entre des échantillons préparés par mélangeur planétaire (a) et (b), et un échantillon préparé avec le RAM (c), (source: Smith et al. [4])

Par opposition au procédés RAM, les mélangeurs classiques reprennent le principe de la turbine dans son fonctionnement inverse, en utilisant des pâles en rotation qui entraînent le fluide dans leur mouvement. Globalement la méthode reste identique malgré plusieurs variantes sur la forme des pâles, la direction de l'axe de rotation, verticale ou horizontale. Un exemple est donné dans la figure 1.5.



Fig 1.5: Exemple d'un mélangeur mécanique à pâles

La rotation des pâles entraîne le fluide qui va alors former des cellules de convection à différentes échelles, provoquant ainsi le mélange. Si ce système est récurrent et éprouvé, il souffre cependant d'un temps d'utilisation souvent très long pour obtenir un produit final homogène, car les cellules de convection se forment surtout à l'échelle locale, autour des pâles. De plus ces systèmes sont bien adaptés pour des volumes de composants importants pour des productions importantes. Pour des productions ponctuelles ou de faibles volumes, le mélange par pâles est coûteux car il nécessite un volume de matière nominal pour fonctionner et implique souvent la destruction de l'excédant de mélange obtenu. Des technologies permettent de contourner ce problème, tel le mélange par jet coaxial, mais impliquent d'autres contraintes qui empêchent son utilisation systématique.

A contrario, le mélangeur RAM, dépourvu de pâles, applique une force qui intervient sur l'ensemble de la cavité, ce qui implique d'autres phénomènes physiques à l'origine des cellules de convection. Les temps de mélange enregistrés par Resodyn sont très courts car les accélérations subies par les ingrédients sont importantes et permettent d'obtenir un produit fini très

homogène. L'extraction du fluide est facilitée par l'absence de pâles, de même que le nettoyage du réservoir et du mélangeur, qui n'est pas en contact direct avec les produits concernés, il en découle des coûts de production et d'entretien bien plus faibles que pour un mélangeur standard. Ce procédé est utile afin de mélanger différents fluides entre eux, mais aussi lorsque des particules solides interviennent, voire, pour des mélanges de poudres ou de l'enrobage de poudres sur des granules. Ces deux dernières applications sont déjà à l'origine de quelques publications sous l'impulsion de la recherche pharmaceutique [1]. Cependant les articles scientifiques exposent surtout des résultats expérimentaux à partir du matériel de Resodyn, pour des ingrédients pharmaceutiques mais aussi, plus pertinent, pour un propulseur à poudre [42]. Les simulations sont rares, les quelques articles existants traitent cette problématique [43] [44], publiées par D.V. Nance avec le laboratoire de l'US Air Force, de façon partielle. Enfin, Resodyn a publié quelques vidéos permettant d'illustrer quelques cas où sa technologie s'avère être efficace.

## **1.4 Orientation de la thèse**

Dans ce contexte, la thèse a pour objectif d'aboutir à une première contribution dans la modélisation numérique du malaxage par le biais de la technologie de malaxage RAM. Le but est d'aborder progressivement les premières étapes qui permettront de modéliser à l'avenir le mélangeage d'un fluide multiphasique chargé.

Tout d'abord, dans le chapitre 2, nous nous pencherons sur l'étude bibliographique des instabilités hydrodynamiques susceptibles d'intervenir au cours du procédé de mélangeage. De ce fait nous passerons en revue l'instabilité de Rayleigh-Taylor, dont le mécanisme de formation permet d'amener à l'étude de l'instabilité de Faraday, qui s'apparente à une instabilité de Rayleigh-Taylor formée à l'aide d'oscillations inertielles. Nous verrons sa formation dans un système diphasique, avant de chercher à comprendre comment l'instabilité se forme dans un milieu miscible, puis sur l'utilisation de l'instabilité de Faraday avec des suspensions. Nous compléterons avec une brève analyse des instabilités de Kelvin-Helmholtz et de Rayleigh-Plateau, qui interviennent en tant qu'instabilité secondaire dans certains régimes d'écoulements. Enfin nous détaillerons le comportement rhéologique d'une suspension de poudre dans un fluide, ainsi que les modèles permettant de décrire leur comportement dans un

écoulement.

Dans le chapitre 3, nous détaillerons l'ensemble des équations utilisées au sein de cette thèse, notamment les équations de Navier-Stokes, ou le modèle de Phillips dont nous nous servirons pour la modélisation d'une suspension. La discrétisation des équations dans le code NOTUS, développé au sein de l'I2M sera abordée. En particulier, nous verrons la discrétisation d'une équation de transport, la méthode de suivi d'interface employée ainsi que la méthode de résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et son couplage entre la vitesse et la pression.

Le chapitre 4 sera consacré à la modélisation et à la simulation en milieu diphasique et incompressible. Nous réaliserons une validation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, avant de faire une validation de l'instabilité de Faraday, en premier lieu en simulant la formation d'un ligament obtenu par excitation paramétrique, puis en utilisant un modèle de moyennisation de la profondeur qui nous permettra de se rapprocher d'une situation 3D en restant dans un cadre 2D, ce que l'on désignera par la nomination modèle 2.5D. Enfin nous réaliserons une comparaison entre nos simulations et les résultats expérimentaux fournis par l'entreprise Roxel, à l'aide d'un réservoir spécialement conçu pour cette thèse, dans lequel nous observerons l'agitation d'un milieu diphasique immiscible soumis aux vibrations du mélangeur RAM.

Nous nous pencherons ensuite, dans le chapitre 5 sur la modélisation et la simulation en milieu monophasique et incompressible. Tout d'abord, nous réaliserons une validation sur un cas 3D à partir d'une source disponible dans la littérature scientifique, avant de réaliser une comparaison numérique et expérimentale de nos simulations à l'aide d'un pot vibrant. Nous utiliserons une approche 2D, 2.5D et 3D pour vérifier si le code NOTUS permet d'observer la formation d'un mélangeage entre deux couches miscibles d'un même fluide contenant un gradient de masse volumique et de concentration.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudierons la modélisation et la simulation en milieu diphasique d'un fluide chargé et incompressible. Nous validerons tout d'abord le modèle de Phillips et la loi de comportement rhéologique, que nous avons implémenté dans le code NOTUS, permettant de modéliser le comportement des particules dans une suspension et de calculer la viscosité du fluide contenant cette suspension. Pour ce faire, nous effectuerons une

validation en étudiant la migration des particules lors de l'écoulement de ce fluide dans un canal. Pour finir, nous utiliserons ces modèles pour simuler le mélangeage d'un fluide chargé à moitié par une suspension. La validation de nos expérimentations numériques sera réalisée par comparaison avec les données expérimentales réalisées par Roxel.

En annexes, nous détaillerons les méthodes de calcul permettant de calculer des diagrammes de stabilité, qui sont des outils complémentaires à la simulation pour supposer du caractère déstabilisant ou non de l'instabilité de Faraday en fonction des paramètres du milieu et de l'excitation.

Dans le cadre de la thèse nous nous sommes intéressés à la question de réduction de modèles avec pour but de réduire les coûts de simulations qui sont très importants. Plusieurs pistes ont été abordées et sont toujours en cours d'étude et d'expérimentation. Nous choisissons dans une seconde annexe de développer le mécanisme de moyennisation, employé pour effectuer le mélangeage de milieux monophasiques contenant un gradient de masse volumique et soumis à des vibrations de hautes fréquences. Nous reprendrons des travaux de la littérature afin de valider le modèle avec le code NOTUS en vue d'un développement ultérieur vers des objectifs liés à l'étude du mélangeage par le RAM.

# Chapitre 2

## Phénoménologie du problème et état de l'art

### 2.1 Instabilités hydrodynamiques

Le mécanisme de mélangeage de deux fluides ou plus implique l'expression d'instabilités hydrodynamiques, qui sont susceptibles de se développer en fonction des paramètres physiques du problème et des conditions mises en place. Parmi celles-ci, les instabilités les plus connues sont celle de Rayleigh-Taylor, Faraday, Kelvin-Helmholtz, Plateau-Rayleigh ou encore Richtmyer-Meshkov pour des fluides compresssibles. La plupart d'entre elles conduisent à la formation de vortex, certaines pouvant être couplées entre elles, en fonction du régime de l'écoulement. Lorsque le mélangeage est piloté par des vibrations, deux instabilités se démarquent en particulier: l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et l'instabilité de Faraday. Pour un fluide stratifié, pour lequel un gradient de masse volumique apparaît (de même direction que la gravité), la première de ces deux instabilités favorise le mélangeage lorsque la direction des vibrations est perpendiculaire à celle du gradient de masse volumique, c'est-à-dire horizontale, la seconde instabilité lorsque ces vibrations sont dans le même axe, c'est-à-dire l'axe vertical. En conséquence, c'est l'instabilité de Faraday qui constituera l'essentiel de cette étude. L'instabilité de Rayleigh-Taylor sera développée car elle reproduit une structure analogue pour une accélération dont le vecteur conserve le même sens, en partant d'une situation d'équilibre instable. L'instabilité de Faraday pourra être interprétée comme une extension de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lorsque le vecteur accélération change de sens au cours du temps, en général selon une fonction sinusoïdale, pour une situation d'équilibre initial stable en général.

## 2.1.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

### Physique de l'instabilité

L'instabilité de Rayleigh-Taylor s'exprime lorsque deux fluides superposés, de masses volumiques différentes, sont soumis à une accélération verticale dirigée du fluide le plus lourd vers le fluide le plus léger. Décrite pour la première fois par Lord Rayleigh en 1883 [45], puis par Taylor en 1950 [46], elle est engendrée par la formation d'un gradient de pression [47] permettant la formation d'une plume (ou un polype) d'instabilité contenant le fluide le plus lourd, qui pénètre la strate contenant le fluide plus léger, tandis que celui-ci se déplace dans la strate qui contient initialement le fluide le plus lourd (figure 2.1).

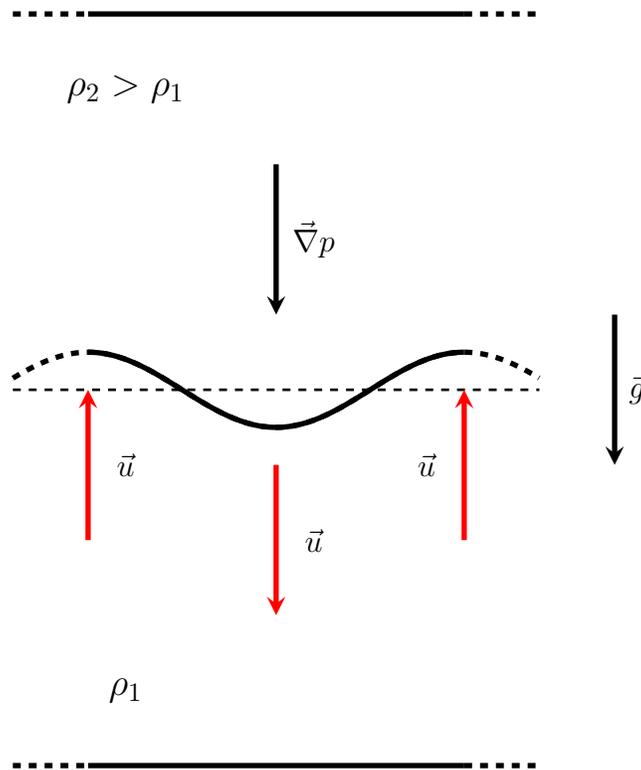


Fig 2.1: Superposition de deux fluides immiscibles, formation d'un polype

Plusieurs études de stabilité se sont concentrées sur l'influence des différents paramètres susceptibles d'influencer le développement d'un mouvement convectif, que ce soit sur le plan analytique, expérimental ou sur le plan numérique. Nous citerons en premier lieu Chandrasekhar [48], dont l'étude de stabilité linéaire fournit une solution générale pour des fluides idéaux ou visqueux, prenant en compte l'influence de la tension superficielle.

Pour un système de deux fluides de masses volumiques différentes  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , avec  $\rho_1 > \rho_2$ , disposés comme sur le schéma 2.1, il est possible de calculer l'évolution temporelle de l'amplitude de déformation. On note  $A_{RT}$  l'amplitude de la déformation de l'interface, pour une longueur d'onde  $\lambda_{RT}$ , et un taux de croissance  $\gamma_{RT}$ . On définit le nombre d'Atwood  $A_t$ , un nombre adimensionnel permettant de quantifier le rapport entre deux couche de masses différentes superposées l'une sur l'autre. Pour ce système  $A_t > 0$ .

$$A_t = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.1)$$

Nous présentons le cas où deux couches de fluides sont chacune uniforme, en l'absence de viscosité. En partant d'un état où l'interface est immobile, et soumis à une petite perturbation initiale  $a_0$  de nombre d'onde  $k$ , l'amplitude de déformation  $a$  du polype est déterminée par une équation aux dérivées partielles d'ordre 2. Le développement linéaire du polype s'exprimera donc par une exponentielle.

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \gamma_{RT}^2 a \quad (2.2)$$

$$a(t) = a_0 \exp(\gamma_{RT} t) \quad (2.3)$$

Le taux de croissance est piloté par le nombre d'Atwood, la tension superficielle et le nombre d'onde de la déformation de l'interface.

$$\gamma_{RT}^2 = g A_t k - \frac{A_t \sigma}{(\rho_1 - \rho_2)} k^3 \quad (2.4)$$

Si le taux de croissance est un réel, l'interface est instable, une plume se formera et le fluide le plus lourd chutera. À l'inverse, si le taux de croissance est un imaginaire, les deux fluides resteront superposés, des ondes de gravité se formeront et la strate atteindra sa position d'équilibre. Nous noterons par ailleurs que si  $A_t < 0$ , alors il n'y aura pas d'écoulement. Le fluide le plus lourd est alors en bas, et l'instabilité de Rayleigh-Taylor ne peut pas s'exprimer, puis que le système est à une position d'équilibre stable.

Considérons le cas où le taux de croissance est nul, pour lequel l'interface deviens instable. Le critère de déstabilisation est caractérisé par le nombre d'onde critique  $k_c$ .

$$\gamma_{RT}(kc)^2 = gA_t k_c - \frac{A_t \sigma}{(\rho_1 - \rho_2)} k_c^3 \quad (2.5)$$

$$= 0 \quad (2.6)$$

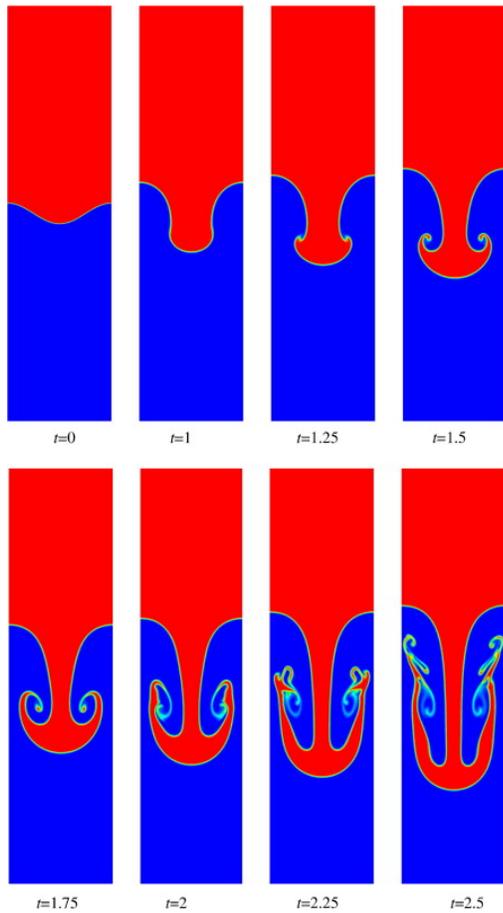
On rappelle que le nombre d'onde est l'inverse (modulo  $2\pi$ ) de la longueur d'onde critique  $\lambda_c$  de l'interface  $k_c = 2\pi/\lambda_c$ . La longueur d'onde critique de déstabilisation du système est

$$k_c = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}} \quad (2.7)$$

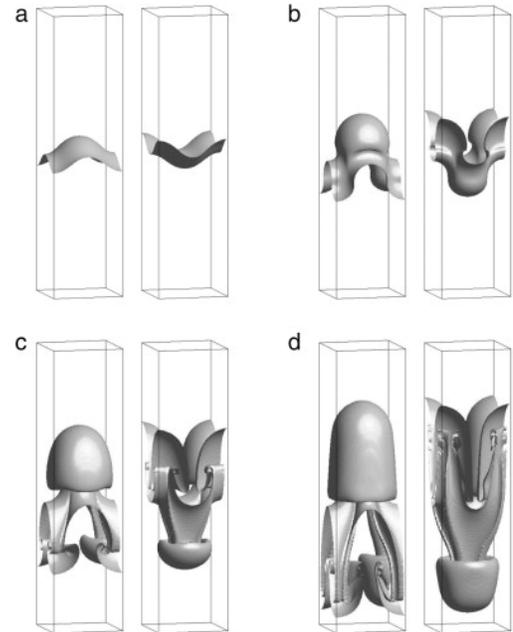
$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_1 - \rho_2)g}} \quad (2.8)$$

La formation d'un polype par la chute du fluide le plus lourd autour du fluide le plus léger est conditionné par la formation d'une déformation de l'interface de longueur d'onde  $\lambda > \lambda_c$ . On notera le rôle joué par la tension superficielle  $\sigma$ , qui vient contrer le déséquilibre formé par la pression exercée par le fluide le plus lourd. Les longueurs d'ondes les plus faibles sont amorties et ne formeront que des ondes de gravité. La viscosité, qui n'est pas prise en compte ici, n'empêche pas la chute du fluide lourd mais diminue le développement linéaire de l'instabilité et réduit la formation de vortex par cisaillement [49]. Son influence a été étudiée à plusieurs reprises [50] [51] [52] [53] [54], couplée avec la tension superficielle [55] [56]. D'autres facteurs ont été pris en compte pour étudier l'évolution de l'instabilité, comme le gradient de masse volumique [57] [58] [59], ainsi que le développement non-linéaire de l'instabilité qui suit la formation du polype [60] [61].

L'étude numérique et expérimentale de l'instabilité de Rayleigh-Taylor s'est d'abord concentré sur le développement linéaire du polype, ainsi que la formation de vortex, ou de bulles en vue d'étudier le brassage qu'ils provoquent. Nous citerons notamment Baker et al. [64] puis Tryggvason [65], qui ont étudié la robustesse de méthodes de type lagrangiennes-eulériennes pour simuler la formation de polypes 2D, à partir d'une petite déformation sinusoïdale, en fonction du nombre d'Atwood. Les résultats obtenus ont été utilisés à de multiples reprises comme cas de référence pour éprouver diverses méthodes. Nous citerons entre autres le développement d'une méthode de projection en éléments finis par Guermond et al.[66] ou pour le calcul d'interface diffusive avec



(a) Simulation 2D de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. (source: Ding et al. [62])



(b) Simulation 3D de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (source: Lee et al. [63])

Fig 2.2: Exemples de simulations montrant la formation d'un polype

des méthodes de type phase-field (figures 2.2). Ces méthodes sont exploitées pour des gradients de masse volumique importants [62], ou pour simuler l'instabilité de Rayleigh-Taylor jusqu'à l'équilibre stable entre les deux couches de fluides[67] [63].

Le développement de l'instabilité en fonction de conditions initiales plus complexes a notamment été étudié par Youngs [5], en imposant des perturbations composées de plusieurs longueurs d'ondes de très faibles amplitudes, à l'aide d'un code 2D en différences finies. Des expérimentations viennent compléter son étude, en utilisant un système diphasique liquide/liquide et liquide/gaz (figure 2.3).

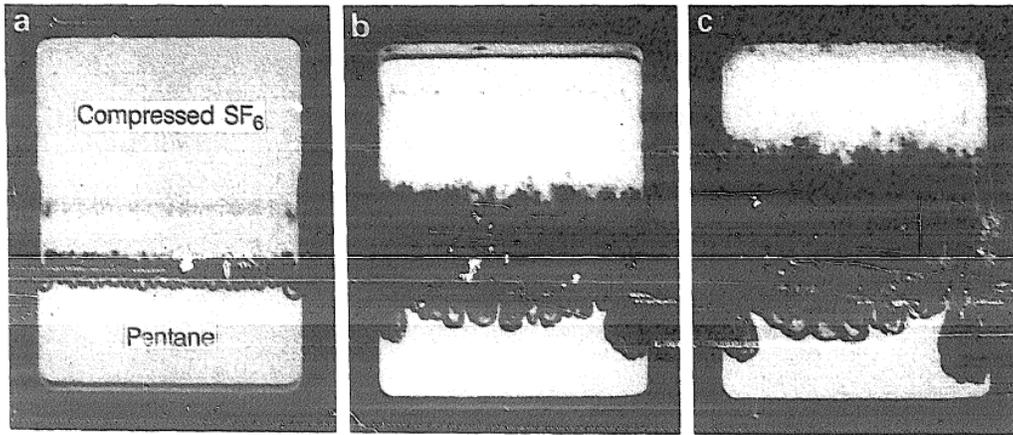


Fig 2.3: Formation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Expérience effectuée pour un système liquide/gaz Youngs. (Source: Youngs et al. [5])

### **Instabilité de Rayleigh-Taylor entre des fluides miscibles**

L'instabilité de Rayleigh-Taylor, bien qu'initialement étudiée pour deux fluides immiscibles, s'applique aussi lorsque deux couches miscibles d'un fluide se mélangent. La gravité permet de former des polypes qui vont engendrer un mélangeage entre les deux couches. La variation de masse volumique est alors induite par une différence de concentration d'une espèce [6] (figure 6.11c) ou de température [68] de ces couches. Le régime d'écoulement, laminaire ou turbulent, modifie la structure du mélange. Le mélangeage turbulent de scalaires passifs est notamment à l'étude pour différentes applications, notamment pour des jets [69]. Le développement de méthodes numériques permettant de calculer avec précision la variation de la masse volumique dans le mélange permet de mesurer son influence dans le comportement du mélangeage, dans le cas de fluides compressibles [70].

### **Inhibition de l'instabilité**

L'inhibition de l'instabilité est obtenue en conservant les strates de fluides stables. Si l'interface entre les deux strates est parfaitement plane, on peut observer une position d'équilibre instable, comme un pendule dans une position verticale avec sa masse au-dessus de la tige de support. En pratique, la tension de surface des fluides employée étant souvent trop faible, les couches se déstabilisent à la suite de divers facteurs expérimentaux. Il est nécessaire d'ajouter une force supplémentaire pour forcer les couches de fluides à se

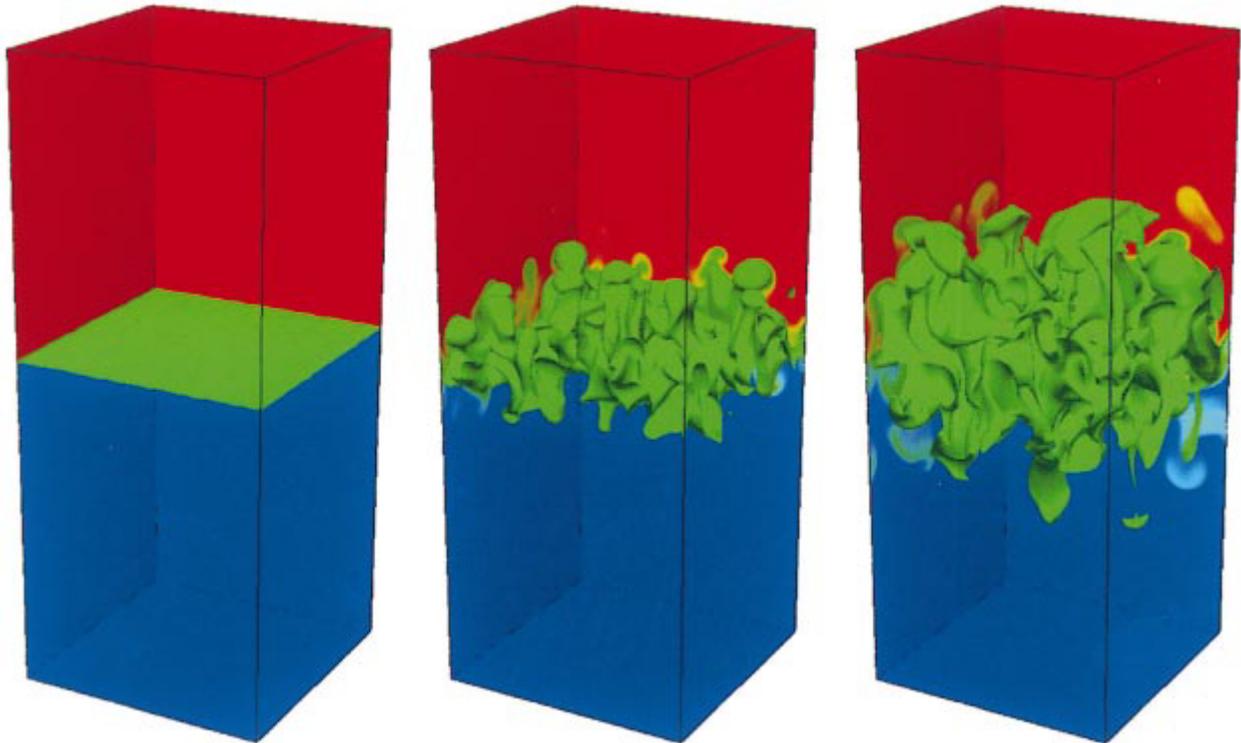


Fig 2.4: mélangeage de deux couches miscibles de fluides par instabilité de Rayleigh-Taylor. La couche de fluide lourde est en haut en rouge, la couche la plus légère en bleu en bas. À gauche, à  $t=0$ , l'interface est légèrement perturbée pour amorcer le mélangeage (Source: Cook et al. [6])

stabiliser. La tension superficielle participe à retenir le fluide le plus lourd au dessus du fluide le plus léger mais elle est généralement trop faible pour conserver cette position sur une échelle macroscopique. Imposer une rotation du système permet dans certaines conditions de limiter la chute du fluide le plus lourd. Parmi les différentes études disponibles, nous citerons [71] [72] [73] [74] [75] [76] ou encore [7] (figure 2.5), qui compare l'effet de la rotation avec celle d'un champ électromagnétique. Un couplage entre ces deux méthodes est aussi exploité [77], ainsi que l'utilisation d'un champ vibratoire, tel que celui que nous retrouverons ensuite avec l'instabilité de Faraday [78], notamment pour l'étude des plasmas [79].

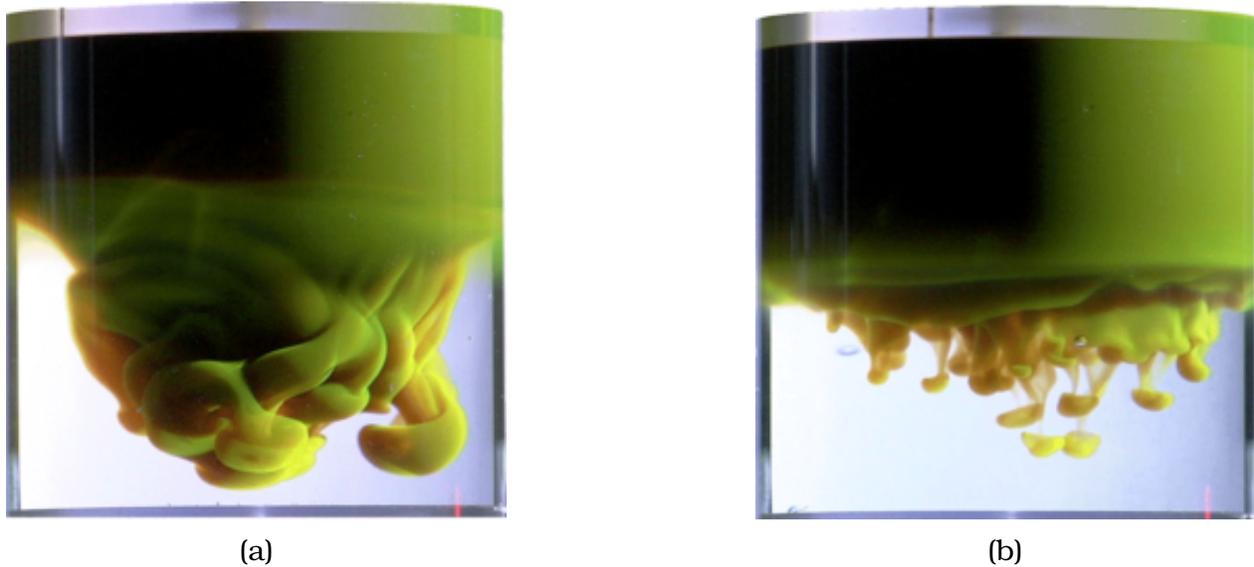


Fig 2.5: Inhibition de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Comparaison expérimentale entre une inhibition par électromagnétisme (a) et par rotation (b) pour deux mêmes fluides. (Source: Scase et al. [7])

## 2.1.2 Instabilité de Faraday

### Découverte et premières études

Avant que l'instabilité de Faraday ne soit officiellement découverte au XIX<sup>ème</sup> siècle, un phénomène analogue avait déjà été décrit dans la littérature, pour un milieu granulaire. En effet, en 1787, Chladni [80] publie un article décrivant la formation de motifs par des poudres sur un support métallique soumis à des vibrations verticales. Ce phénomène est produit par les vibrations harmoniques du support. Lorsqu'on applique une fréquence de résonance, la plaque va se déformer de façon à former des ventres et des noeuds de vibration. La figure 2.6 schématise la forme de ces déformations pour une situation 1D. Les ventres se trouvent sur les points de la plaque pour lesquels l'amplitude de déformation est maximale. Les noeuds se trouvent sur les points où l'amplitude de déformation de la plaque est nul. Lorsque le support vibre à une fréquence de résonance, ces ventres et ces noeuds conservent leurs positions, et forment une onde stationnaire. C'est ce qu'on appelle un mode propre de vibration, ou un mode normal (dérivé de l'expression anglaise normal mode). Un motif de déformation spatiale qui se reproduit périodiquement est la caractérisation de ces modes propres. Les fréquences pour lesquelles ces modes se forment sont des harmoniques, c'est-à-dire des multiples d'une fréquence fondamentale propre au support. Chaque harmonique engendre des ondes stationnaires

différentes. Le support, lorsqu'il est mis en vibrations, provoque le déplacement des poudres. Si ce support est en résonance, alors les poudres vont se déplacer des zones où la plaque se déplace verticalement, avec à son apogée les ventres, vers les zones les plus stables de la plaque, c'est-à-dire ses noeuds de vibration. Les motifs formés par les particules sont donc le tracé des noeuds de vibrations du support.

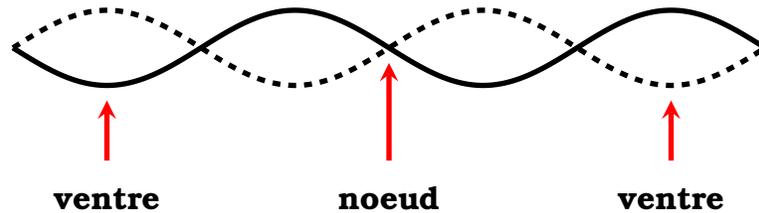


Fig 2.6: Schéma d'une structure 1D soumise à un forçage harmonique. Formation d'une onde stationnaire. L'onde atteint son amplitude maximale au niveau des ventres. Une demi-période d'oscillation sépare l'onde en noir de celle en pointillés.

Les expériences de Chlandi ont depuis été reproduites pour différents supports et poudres, notamment par Colwell [8], qui visualise les modes propres d'une plaque métallique à l'aide de sable (figure 2.7). Ces expériences constituent un premier pas vers l'étude de l'instabilité de Faraday. Jusque-là l'étude se portait sur la vibration d'une surface métallique, l'utilisation de poudres ne servant qu'à visualiser les déformations de cette plaque. Faraday, va décrire un phénomène relativement proche, mais cette fois-ci la surface sera une interface entre deux fluides.

Lorsque deux fluides immiscibles sont soumis à des vibrations verticales, des oscillations se forment à l'interface. Différents motifs se forment en fonction des paramètres du forçage. C'est le constat fait par Faraday [81] en 1831 lors de sa description de l'instabilité qui portera son nom. Il constatera par ailleurs que l'interface oscille à une fréquence égale à la moitié de la fréquence imposée. Mathiessen, en 1868 [82], après avoir réalisé des expériences identiques, remarque que les oscillations de la surface ont la même fréquence que celle imposée. Enfin Rayleigh, en 1883 [83], recommence ces expériences et parvient aux mêmes conclusions que celles proposées par Faraday. Le comportement sous harmonique d'une couche de fluide soumise à une excitation paramétrique est présenté sur la figure 2.8.

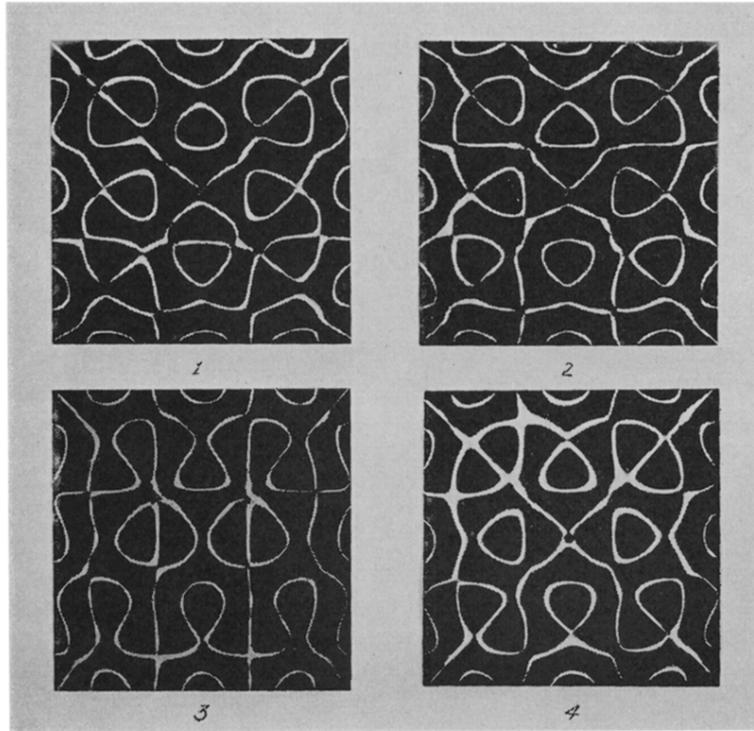


Fig 2.7: Motifs de Chladni sur une plaque vibrante. (Source: Colwell [8])

### Analyse théorique de l'instabilité

L'instabilité de Faraday a été l'objet de plusieurs travaux théoriques sur la déformation de l'interface par excitation paramétriques, afin de mieux comprendre les critères de déstabilisation ainsi que la formation de motifs. En 1954, Benjamin et Ursell [10] fournissent une première étude pour obtenir les critères du forçage permettant d'obtenir les modes propres de la surface libre d'un fluide parfait de profondeur initiale égale à  $h$ , de masse volumique  $\rho$ . À l'aide d'une analyse linéaire du mouvement de l'interface, ils démontrent que la hauteur  $\zeta$  de l'interface est la somme des déformations d'amplitude  $\alpha$  pour chaque mode propre des oscillations S.

$$\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m S_m \quad (2.9)$$

L'amplitude de déformation est approchée par une équation différentielle du second ordre, dépendante de la pulsation propre  $\omega_m$ :

$$\partial_t^2 \alpha_m + \omega_m^2 \alpha_m = 0 \quad (2.10)$$

Cette pulsation propre correspond à l'expression de la relation de dispersion

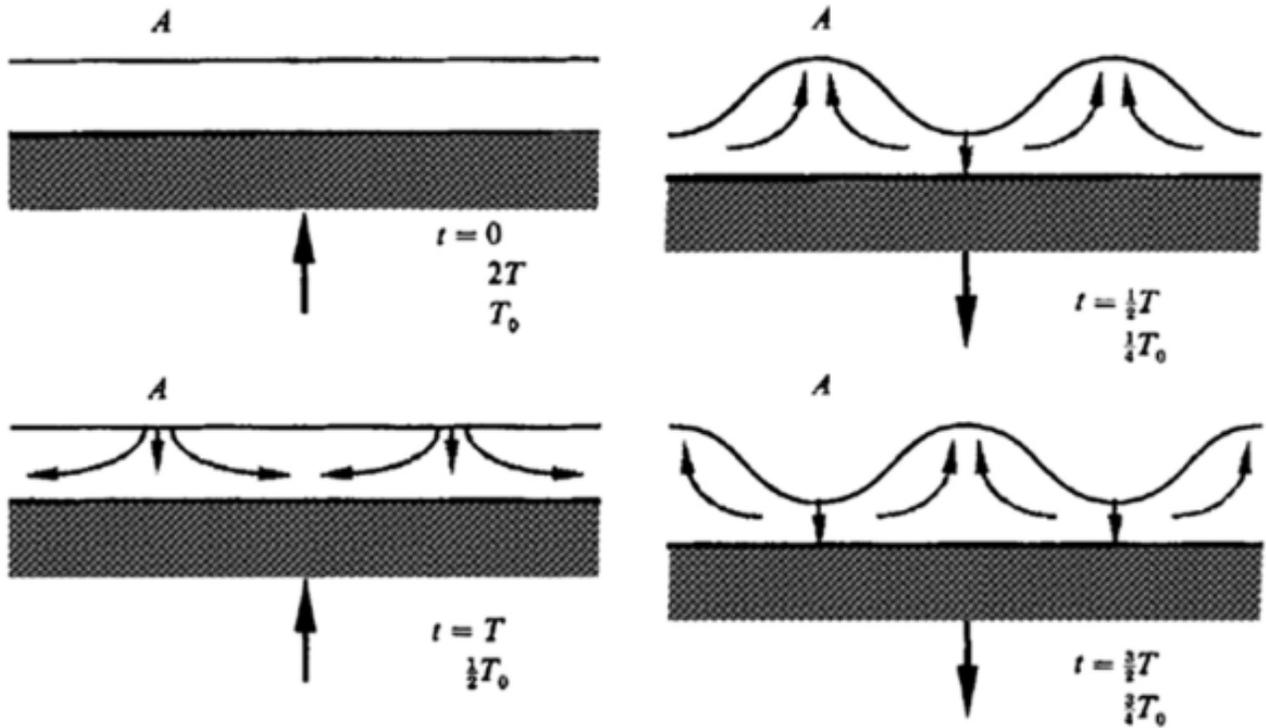


Fig 2.8: Schéma de la réponse sous-harmonique d'une couche de fluide soumise à une excitation paramétrique (Source: Douady [9])

des ondes qui se propage le long de l'interface, pour chaque nombre d'onde  $k$  associé à un mode propre  $m$ . Elle est fonction de la profondeur  $h$  de la couche de fluide, de sa masse volumique et de la tension de surface  $\sigma$  de l'interface:

$$\omega_m^2 = \tanh(kh) \left[ \frac{\sigma k^3}{\rho} + gk \right] \quad (2.11)$$

Pour une profondeur suffisamment importante,  $h \rightarrow \infty$  donc  $\tanh(kh) \rightarrow 1$ , et la relation de dispersion devient:

$$\omega_m^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho} + gk \quad (2.12)$$

Les ondes de gravité ne sont dépendantes que de l'accélération gravitationnelle  $g$ , et linéairement dépendante du nombre d'onde, contrairement aux ondes de capillarité qui sont proportionnelles au ratio de la tension de surface par rapport à la masse volumique du fluide, et évoluent en fonction du cube de la longueur d'onde. En conséquence, l'influence des ondes de capillarité est négligeable devant celles des ondes de gravité pour de petits nombre d'ondes, donc pour des longueurs d'ondes de grande échelle, de telle sorte que  $k \ll \sqrt{g\rho/\sigma}$ , [84].

L'équation qui pilote la déformation  $\alpha_m$  de l'amplitude s'écrit alors:

$$\partial_t^2 \alpha_m + \tanh(kh) \left[ \frac{\sigma k^3}{\rho} + gk \right] \alpha_m = 0 \quad (2.13)$$

L'accélération imposée au système n'est pas constante mais contient, en plus de l'accélération gravitationnelle, un terme sinusoïdal, dont la forme générique est de la forme  $A\omega^2 \cos(\omega t)$  avec  $\omega$  la pulsation vibratoire imposée. On obtient alors l'évolution temporelle de l'amplitude de déformation sous la forme d'une équation de Hill:

$$\partial_t^2 \alpha_m + \tanh(kh) \left[ \frac{\sigma k^3}{\rho} + g \left( 1 - \frac{A\omega^2}{g} \cos(\omega t) \right) k \right] \alpha_m = 0 \quad (2.14)$$

Sous une forme simplifiée, l'équation précédente devient:

$$\partial_t^2 \alpha_m + \omega_0^2 (1 - \epsilon \cos(\omega t)) \alpha_m = 0 \quad (2.15)$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\tanh(k_m h) \left( g + \frac{k_m^2 \gamma}{\rho} \right)} \quad (2.16)$$

$$\epsilon = \frac{A\omega^2}{g + \frac{\sigma k^2}{\rho}} \quad (2.17)$$

Nous pouvons alors obtenir une équation de Mathieu, qui est une forme particulière de l'équation de Hill, en fonction des paramètres p et q, dépendant de chaque mode, en fonction d'un temps adimensionné  $T = \frac{1}{2}\omega t$ :

$$\partial_T^2 \alpha_m + (p_m - 2q_m \cos(2T)) \alpha_m = 0 \quad (2.18)$$

Avec p et q tels que pour chaque mode  $m$  de vibration:

$$p_m = \frac{4k_m \tanh(k_m h)}{\omega^2} \left( g + \frac{k_m^2 \sigma}{\rho} \right) = \left( \frac{2\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$q_m = 2k_m A \tanh(k_m h) = \epsilon p \quad (2.20)$$

Si la solution de l'équation est bornée, l'instabilité de Faraday s'exprimera sous la forme d'une onde de gravité/capillarité pour chaque mode de vibration. Dans le cas contraire, si la solution n'est pas bornée, l'onde de déformation sera instable. Nous pouvons déterminer, à l'aide de méthode perturbatives, le point de bifurcation pour lequel la solution passe d'une solution bornée à une solution

non bornée, permettant d'obtenir des diagrammes de stabilité, tel que sur la figure 2.9

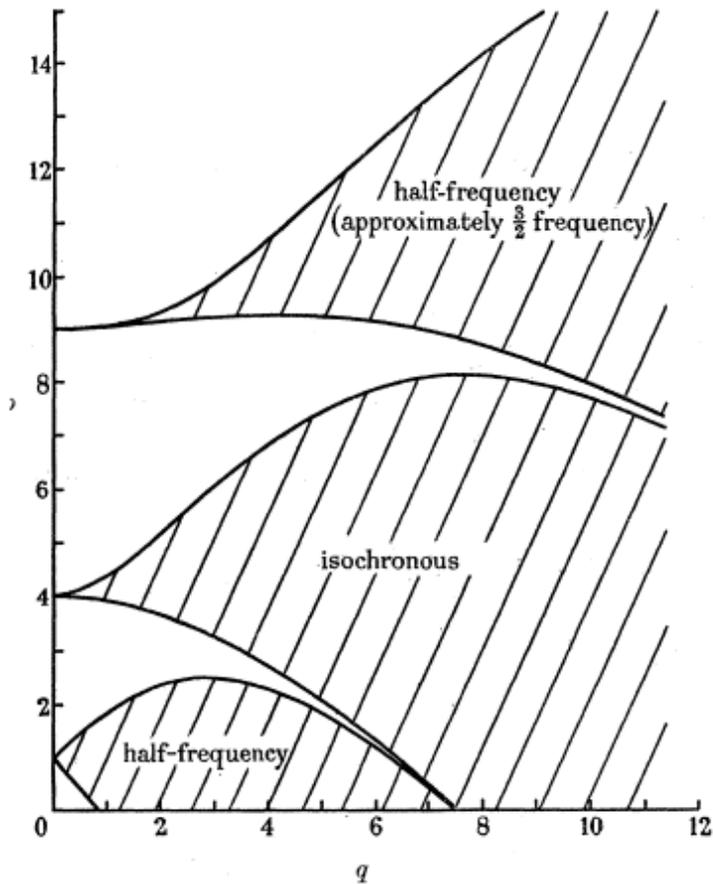


Fig 2.9: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu pour un fluide idéal (Source: Benjamin et Ursell [10])

Le diagramme de stabilité montre des zones pour lesquelles l'oscillation de la solution de l'équation de Mathieu sera non bornée. Ces zones forment des langues correspondant à des valeurs de la fréquence temporelle d'oscillation harmoniques ou sous-harmoniques. Nous reviendrons en détail sur ces diagrammes dans le chapitre A.

L'analyse théorique de Peskin et al. [85], propose une solution similaire pour l'atomisation d'un film liquide par un champ ultrasonique. Le mouvement du transducteur situé sous le fluide revient à imposer un champ de force inertiel égal à une fonction sinusoïdale au niveau de l'interface. Lang [86] montre que la longueur d'onde capillaire de l'interface d'une surface libre, dont la fréquence d'oscillation est égale à la moitié de la fréquence d'excitation (donc la première

sous-harmonique) est:

$$\lambda = \left( \frac{8\pi\sigma^{1/3}}{\rho f^2} \right) \quad (2.21)$$

L'étude de stabilité linéaire d'un système hydrodynamique complet, pour un milieu diphasique composé de deux fluides visqueux immiscibles, fut publié trente ans plus tard par Kumar et Tuckerman [11]. En se basant sur le théorème de Floquet [87], qui décrit une solution périodique à des équations différentielle linéaires de premier ordre dont le coefficient est une fonction périodique, ils proposent une solution générique du mouvement de l'interface (présenté pour une solution 2D, dont les modes s'expriment sur l'axe horizontal):

$$\zeta(t) = e^{ik \cdot n} e^{(\mu+i\alpha)t} \bar{\zeta}(t \bmod 2\pi/\omega) \quad (2.22)$$

Avec pour fonction t-périodique, pour chaque mode  $m$ :

$$\bar{\zeta}(t \bmod 2\pi/\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_m e^{im\omega t} \quad (2.23)$$

Comme le précise Kumar et Tuckerman, il est commode de réécrire implicitement  $\zeta$  par  $\sin(k \cdot x)\zeta$ , partie imaginaire de la notation complexe  $\zeta^{-ik \cdot n}$ .

L'équation de Mathieu de  $\zeta$  permet de décrire le mouvement de l'interface, comme pour des fluides idéaux. Nous considérerons, pour simplifier, que la dissipation visqueuse des fluides agit comme un amortisseur, qui vient s'intégrer dans l'équation, de coefficient  $\gamma$ , et dépend du nombre d'onde de la déformation de cette interface:

$$\partial_t^2 \zeta + 2\gamma \partial_t \zeta + \omega_0^2 (1 - \hat{a} \cos(\omega t)) \zeta = 0 \quad (2.24)$$

Les coefficients des termes de l'équation de Mathieu amortie sont les mêmes que pour un fluide idéal sous une surface libre, sauf que cette fois-ci les deux fluides visqueux de part et d'autre de l'interface rentrent en jeu, et la profondeur est supposée suffisamment importante pour que son influence soit négligeable:

$$\omega_0^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gk + \sigma k^3}{(\rho_1 + \rho_2)} \quad (2.25)$$

$$\hat{a} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)Ak}{(\rho_1 + \rho_2)\omega_0^2} \quad (2.26)$$

$$\gamma = 2k^2 \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \quad (2.27)$$



la relation de dispersion est dominée par la moitié de la pulsation sollicitatrice  $\omega$ , c'est-à-dire la pulsation de la réponse sous-harmonique à l'excitation, contrairement à un fluide idéal non soumis à la dissipation visqueuse. L'étude de la relation de dispersion de l'onde formée à l'interface pour des fluides faiblement visqueux a notamment été approfondi par Kumar [88], sur la relation de dispersion pour une profondeur arbitraire, et la dominance des réponses vibrationnelles sousharmoniques ou harmoniques. Il montrera que dans certaines conditions une réponse harmonique au lieu d'une réponse sous-harmonique est possible. Les travaux de Cerda et Tirapegui [89] [90] analysent le mécanisme de l'instabilité pour des fluides fortement visqueux en fonction de l'équation de Mathieu, notamment pour des couches minces. Besson et al. [91], a étendu la méthode de Kumar et Tuckerman [11] pour une excitation paramétrique composée de deux fréquences superposées. Beyer et al. [92], ont pour leur part présenté une étude linéaire de l'instabilité sous une formulation intégrale des équations, pour une excitation mono et multi-fréquentielle. Bechhoefer et al. [93] ont pour leur part, proposé un modèle simplifié pour une excitation paramétrique pulsée. Enfin nous citerons Müller et al. [94], dont l'analyse de l'instabilité pour des écoulement de couches minces montrent une dominance de la réponse harmonique.

### **Approche expérimentale et numérique**

L'étude de l'instabilité de Faraday s'est majoritairement concentrée sur l'approche expérimentale jusque dans les années 2000, dans un objectif de validation des travaux théoriques précédemment cités, et principalement sur ceux de Benjamin et Ursell puis de Kumar et Tuckerman. Bechoefer et al. [95] ont comparé leurs résultats expérimentaux avec l'analyse linéaire pour des fluides visqueux, ainsi que l'influence des bords du domaine dans l'expression de l'instabilité. Nous citerons ensuite Douady [9] [12], dont les travaux ont permis de développer des méthodes de visualisation des motifs de déformations, comparer leurs évolutions avec les prédictions théoriques, et mettre en avant l'influence des bords du domaine dans la qualité des résultats.

L'une des thématiques majeures de l'instabilité consiste au contrôle de forme des motifs en fonction de l'excitation paramétrique, que ce soit la formation de motifs triangulaires [96] ou hexagonaux. Des plus complexes provenant de la combinaison de plusieurs excitations sinusoïdales [13] permettent la formation de quasi-motifs, c'est-à-dire de motifs dont les formes géométriques

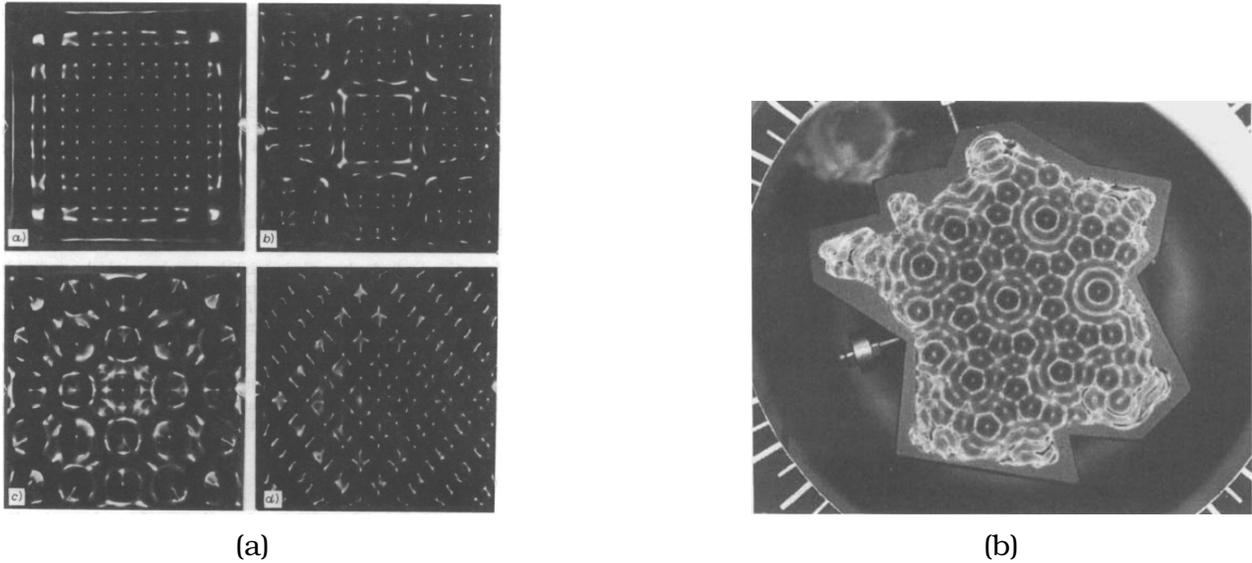


Fig 2.11: (a): Motifs formés par instabilité de Faraday à la surface d'un fluide. (Source: Douady et al. [12]) . (b): Quasi-motif formé sur un domaine formant la France Métropolitaine. (Source: Edwards et al. [13])

alternent et se répètent périodiquement, ou encore de "supermotifs", issus de la superposition de motifs de géométrie et d'échelle différentes, [97]. Un exemple de quasi-motif est visible sur la figure 2.11b. Plusieurs approches analytiques sur la formation de ces motifs ont été effectuées, notamment par Porter et al. [98], Rucklidge et al. [99].

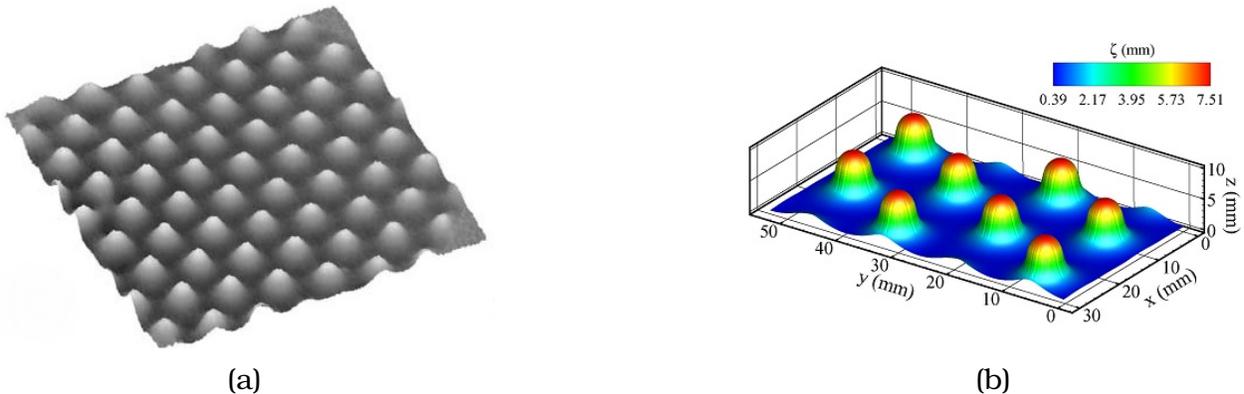


Fig 2.12: (a): Motif hexagonal obtenu expérimentalement. (Source: Kityk et al. [14]). (b): Motif hexagonal, pour une même excitation paramétrique, obtenu par simulation. (Source: Périnet et al. [15])

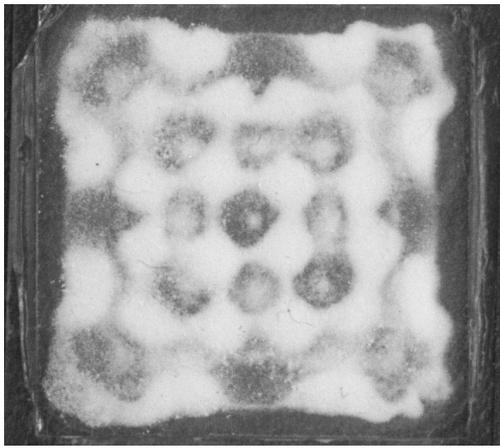
L'usage de la simulation numérique permet d'étudier le développement non linéaire de l'instabilité, en appui des différentes expérimentations. Nous citerons notamment Chen et al. [100] [101], qui étudient la formation de structures non

linéaires en fonction du nombre d'onde de l'interface. La plupart des études numériques disponibles dans la littérature sont 2D, comme celles de Murakami et al. [102], Valha et al. [103], Xu et al. [104] qui ont simulé l'écoulement d'un fluide soumis à la technologie RAM à l'échelle mésoscopique à l'aide d'une méthode de type Lattice-Boltzmann. Ils émettent l'hypothèse de l'influence d'un champ acoustique dans la formation de vortex à cette échelle. On retrouve une approche similaire à l'échelle macroscopique, en 3D, avec les travaux de Nance [43] [44], qui étudie les premiers instants du mélangeage de fluides visqueux dans les conditions du RAM avec des simulations dans le contexte de fluides compressibles.

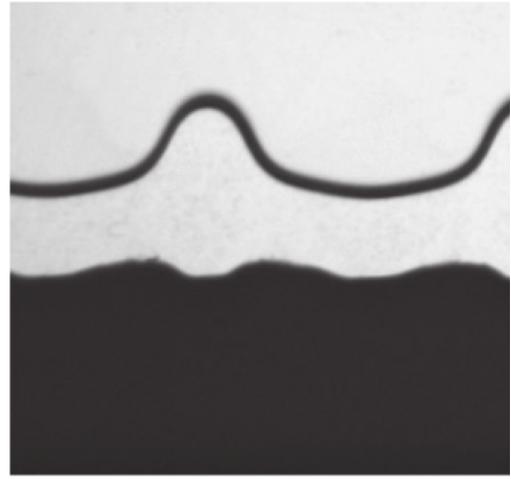
Périnet et al. [15] ont réalisé des simulations numériques 3D qui reproduisent les motifs géométriques de Kytik et al. [14]. Nous citerons aussi les travaux de la même équipe [105] et [106], qui se penchent sur d'autres types de motifs.

Le confinement de l'instabilité de Faraday dans des réservoirs de faibles épaisseurs permet de filtrer les modes de vibrations qui s'expriment dans cet axe, pour ne conserver que les modes de vibrations sur l'axe longitudinal, et s'approcher d'une situation bidimensionnelle. Ces réservoirs sont appelés des cellules de Hele-Shaw, dont l'analyse théorique de l'écoulement permet de modéliser un écoulement tridimensionnel en conservant un domaine bidimensionnel. Nous reviendrons sur la modélisation de l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw dans le chapitre 3. Nous citerons notamment les travaux de Diwakar, Jajoo et al. [107] [108], qui étudièrent l'influence des ondes de capillarité et de gravité, notamment dans des conditions de microgravité. Li et al. [30] se sont penchés sur l'étude théorique, expérimentale et numérique de l'instabilité de Faraday dans une cellule, et son influence dans la relation de dispersion qui s'exprime au niveau de l'interface. Nous citerons aussi [109] [110] [111] [112] [113] qui détaillent l'évolution de l'onde gravito-capillaire en fonction de la profondeur. Pour finir, nous citerons Liu et al. [114], qui étudient numériquement et expérimentalement un milieu triphasique immiscible, et l'influence des modes de vibrations dans le brassage de chaque phase.

L'usage de suspension pour étudier l'instabilité de Faraday a d'ores et déjà été étudié pour l'étude de motifs de Chladni. Une fine pellicule de fluide chargé en suspension va former un motif avec la vibration du support immergé [16] (figure 2.13b. Plus récemment, nous citerons Martino et al. [17], qui étudient expérimentalement l'évolution d'une couche de suspension dans un liquide soumis à l'instabilité de Faraday avec une surface libre. Ils montrent que le seuil



(a)



(b)

Fig 2.13: (a): Motif de Chladni à l'intérieur d'une pellicule de fluide contenant une suspension, pour une fréquence de 150Hz. (Source: Wright et al. [16]). (b): Détail de l'interface liquide/gaz et liquide/liquide chargé. (Source: Martino et al. [17])

de la couche de fluide chargé se comporte comme une interface. Ses oscillations sont influencées par celles de l'interface entre le liquide et la couche supérieure gazeuse. Cependant, le seuil d'accélération n'est pas atteint pour engendrer un mélange de la suspension dans l'ensemble du fluide et le considère seulement comme une couche de fluide chargée homogène. Le sujet reste très ouvert, tant sur le pan expérimental que numérique, concernant le mélangeage d'une suspension, pour lequel cette thèse propose une première approche.

### Ruptures d'interfaces

Comme nous l'avons vu précédemment à partir de la relation de dispersion de l'interface, les forces inertielles dominent l'ensemble des forces appliquées à l'interface jusqu'à un nombre d'onde critique  $k_c = \sqrt{g\rho/\sigma}$ . La pulsation critique  $\omega_c = g^{3/4}(\rho/\sigma)^{1/4}$  est la pulsation au-delà de laquelle la force de capillarité devient majeure.

Selon le régime vibratoire imposé, les motifs de l'interface oscillent à des amplitudes plus ou moins importantes. Au-delà d'une certaine amplitude, des ruptures d'interfaces sont susceptibles de se former par pulvérisation, notamment avec la formation de ligaments. Ces colonnes qui émergent du fluide le plus lourd ont notamment été étudiées à plusieurs reprises par Li et al. en 2D [29], 3D [115] ou encore pour l'étude analytique de la formation de ces ligaments

[116]. Un critère d'émergence  $\beta_0$  ressort de cette dernière étude.

$$\beta_0 = \frac{\rho A^3 \omega^2}{\sigma} \quad (2.31)$$

Ce nombre adimensionnel caractérise la capacité du système diphasique à former une pulvérisation selon une valeur critique  $\beta_c = 0.763$ . Si  $\beta_0 < \beta_c$  l'interface du système diphasique oscillera sans rupture, si  $\beta_0 > \beta_c$  des projections de fluide se formeront.

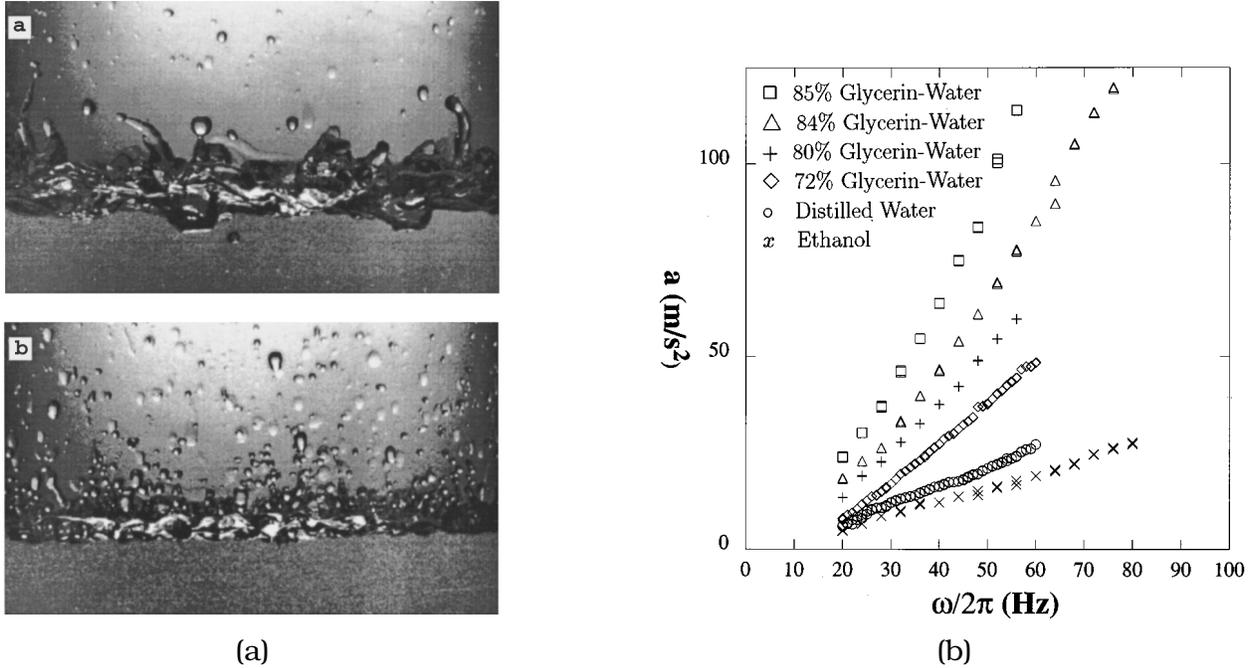


Fig 2.14: (a): Projection de gouttes d'eau à deux fréquences différentes, 20Hz en haut, 60Hz en bas. (b): Mesure de l'accélération nécessaire à la rupture d'interface en fonction de la fréquence d'excitation pour différents liquides. (Source: Goodridge et al. [18])

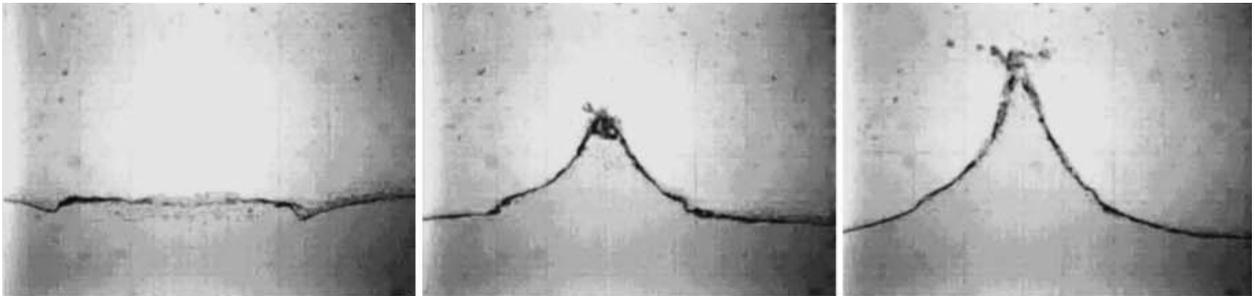


Fig 2.15: Formation d'un jet. (Source: kalinichenko [19])

La recherche d'un seuil de projection de fluide par l'usage de vibrations a

notamment été étudié par Goodridge et al. [18] [117]. La figure 2.14a montre l'influence de la fréquence de forçage dans la fracture de l'interface. Yang et al. [118] reprennent les résultats de Goodridge et les comparent avec leurs propres résultats numériques et expérimentaux. La figure 2.14b met en lumière le comportement linéaire du seuil de rupture de l'interface entre différents fluides et de l'air en fonction de la fréquence d'excitation et de l'accélération imposée. On note la stabilisation qui se produit avec l'augmentation de la fréquence. Plus celle-ci sera élevée, plus l'accélération, et donc l'amplitude, devra être grande pour provoquer une fracture de l'interface. Ibrahim [119] fait un état des lieux de la bibliographie disponible sur les réservoirs oscillants en rapport avec l'instabilité de Faraday, et notamment sur la formation de jets par rupture des modes d'oscillations. Les oscillations formées par les réservoirs oscillants (sloshing tanks) constituent un problème industriel largement étudié, du fait des contraintes potentiellement exercées par les mouvements d'un liquide dans le réservoir d'un appareil. Nous citerons notamment les jets formés par les modes de vibrations d'une enceinte de grande taille, par Kalinichenko [19] (figure ??).

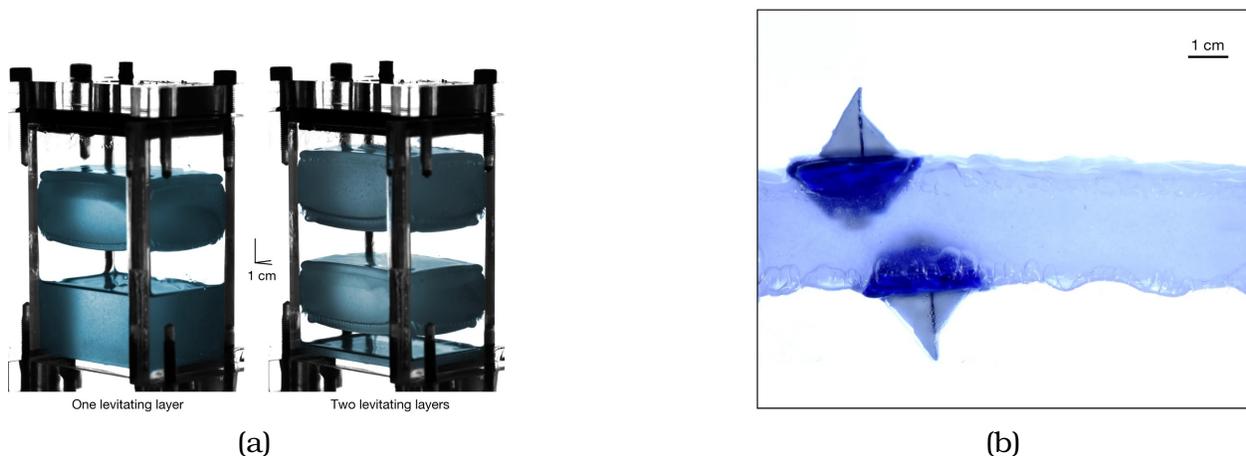


Fig 2.16: (a): Lévitiation de fluides par forçage vertical. Lévitiation de couches de fluides par instabilité de Faraday. (b): Poussée d'Archimède inversée avec les vibrations. (Source: Apffel et al. [20])

Si le contrôle de l'excitation paramétrique permet de stabiliser un système en dessous d'un certain seuil, il permet aussi d'engendrer une lévitation d'une ou plusieurs couches de fluides. Nous avons déjà énoncé plusieurs méthodes permettant d'amortir l'instabilité de Rayleigh-Taylor, et notamment l'imposition d'une vibration verticale. La combinaison des deux instabilités a été notamment abordé par Wolf [120] et Lapuerta et al. [121]. L'expérience de Apffel et al. [20] consiste à exploiter les oscillations engendrées par l'instabilité de Faraday pour

qu'une couche d'air puisse supporter une couche de fluide de masse volumique nettement supérieure, à des échelles pour laquelle la tension de surface n'a pas d'influence sur la stabilité. Il est possible de diviser cette couche en lévitation en plusieurs couches en modifiant temporairement l'intensité vibratoire. Un exemple est visible sur la figure 2.16a. L'instabilité de Faraday influe sur la poussée d'Archimède, qui s'inverse sur la face inférieure de la couche en lévitation. Un objet censé flotter sur cette couche de fluide en l'absence de vibration pourra naviguer sur les deux interfaces de la couche en lévitation. Un exemple est visible sur la figure 2.16b.

### **mélangeage de fluides miscibles**

Le mélangeage d'un fluide stratifié, contenant un gradient de masse volumique, par des vibrations verticales, et l'influence de la turbulence formée par distorsion, c'est-à-dire par changement rapide du terme inertiel, dans la dynamique du mouvement des couches et la formation d'ondes de gravité a été abordé par Hunt et al. [122], Hanazaki et al. [123], Batchelor et al. [124] et Benielli et al. [26]. Cependant, le mélangeage de deux couches de fluides miscibles initialement non stratifiées par l'instabilité de Faraday est un sujet assez récent pour lequel le nombre de publications est assez limité. Un état des lieux des travaux effectués jusqu'en 2017 sur des milieux miscibles est proposé par Truzzolillo et al. [125], qui souligne la difficulté à établir une étude de stabilité linéaire générale pour un système prenant en compte la diffusion, ce qui implique de la considérer comme agissant à des échelles de temps largement supérieures à la période de l'excitation paramétrique. C'est notamment l'approche proposée par Diwakar et al. [126], qui prédit une réponse sous-harmonique égale à la moitié de la fréquence d'excitation pour un système eau/brine, la brine étant de l'eau salée saturée. Ils décrivent aussi l'influence de l'épaisseur initiale de la couche intermédiaire, dont la diffusion diminue le gradient de concentration, ce qui entraîne une diminution de l'efficacité de l'excitation paramétrique. Ces résultats théoriques corroborent les constatations expérimentales et numériques de Zoueshtiagh et al. [127] et Amiroudine et al. [128].

Une avancée majeure fut effectuée par une série de travaux provenant d'une même équipe menée par Gréa et al. [129], qui a déterminé analytiquement une approximation de la taille de la couche de mélange moyenne, pour des couches avec un faible gradient de concentration, ainsi que les premières simulations prenant en compte le comportement turbulent du mélangeage à

l'aide d'un modèle précédemment utilisé pour des simulations de l'instabilité de Rayleigh-Taylor [130] [131]. Une approche pour étudier la dynamique du mélange est d'aborder la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  [132], du nom de deux météorologistes, qui est la fréquence propre d'oscillation d'un élément de fluide d'un milieu stratifié après déstabilisation autour de sa position d'équilibre.

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (2.32)$$

Avec  $\rho_0$  la masse volumique moyenne de référence et  $\frac{\partial \rho}{\partial z}$  le gradient de masse volumique de la stratification. La dissipation visqueuse n'est pas prise en compte pour établir la valeur de  $N$ .

Gréa [130] redéfinit la fréquence propre  $N$  pour un milieu miscible contenant deux couches homogènes, en fonction du nombre d'Atwood  $A_t$ .

$$N = \sqrt{\frac{2A_t g}{L}} \quad (2.33)$$

L'épaisseur de saturation  $L_{sat}$  n'est pas dépendante des conditions initiales, de la dissipation visqueuse ou de la diffusion de la concentration considérée.

$$L_{sat} = \frac{2A_t g}{\omega^2} (2F + 4) \quad (2.34)$$

Avec  $F = A\omega^2/g$  le ratio entre l'accélération vibratoire et celle de la gravité [129].

Le mélange se forme grâce à la transformation de l'énergie potentiel de la stratification en énergie cinétique, présentée par Winters et al. [21], qui montre que l'énergie potentielle totale d'un milieu est décomposée en une énergie potentielle disponible  $E_a$  qui va alimenter le mélangeage, et une énergie potentielle résiduelle  $E_b$  qui sera conservée une fois le mélange atteint et stable. La figure 2.17 représente le diagramme d'échange entre les énergie potentielles et l'énergie cinétique  $E_k$ , l'énergie interne, et enfin l'énergie externe. Gréa remarque, à l'aide de simulations DNS, qu'il subsiste une partie de l'énergie potentielle disponible  $E_a$  lors de la saturation de l'instabilité, qui se dissipe alors sous forme d'énergie cinétique ou résiduelle. Il en résulte que la couche de mélange finale est légèrement supérieure à la couche de mélange théorique  $L > L_{sat}$ .

Briard et al. [22] ont complété les premières simulations en soulignant la transition d'un régime de mélange harmonique à un régime sous-harmonique.

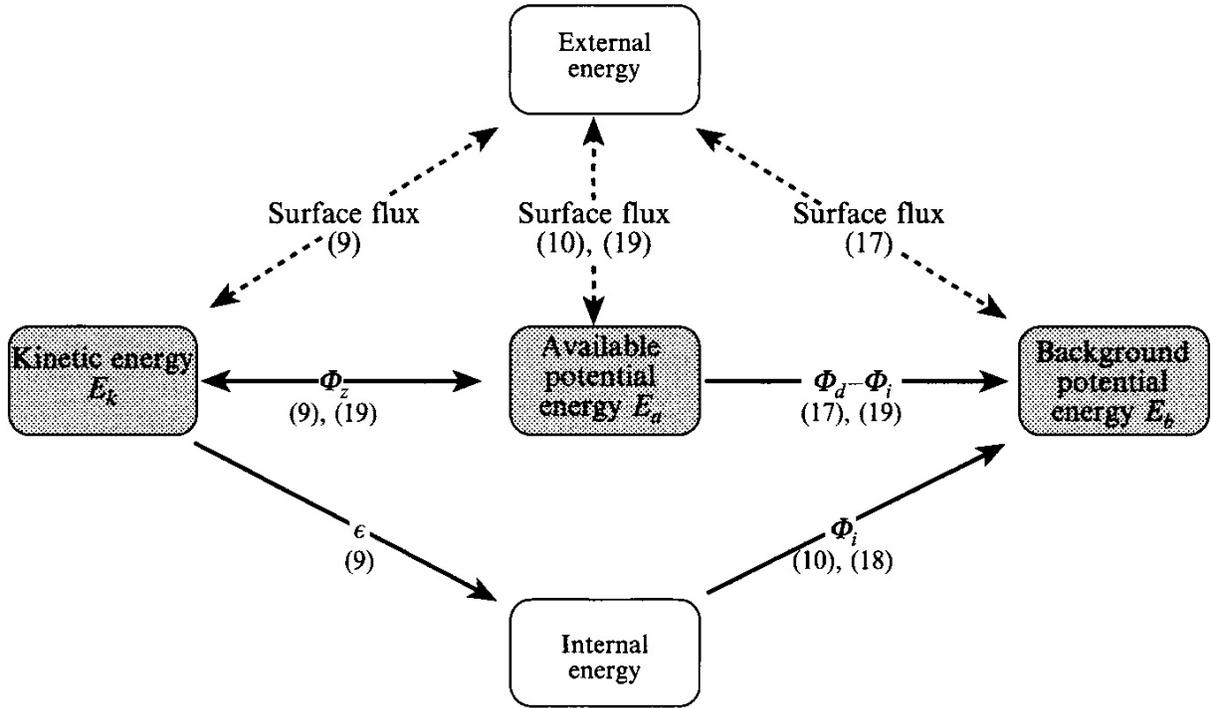


Fig 2.17: Diagramme des échanges d'énergie pour un écoulement stratifié (Source: Winters et al. [21])

Pour chaque mode de vibration d'angle  $\theta$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de l'axe vertical  $\mathbf{z}$ , tel que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} = \theta$ , une équation de Mathieu-Hill de la composante spectrale de la variance de la concentration  $C$  décrit le comportement des oscillations de la stratification.

$$\langle c^2 \rangle = \int_0^\pi C^2(t, \theta) \sin(\theta) \Gamma \theta \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + N^2 \sin^2 \theta [1 + F \cos(\omega t)] C = 0 \quad (2.36)$$

On note que l'équation de Mathieu-Hill dépend du forçage adimensionné  $F$  et du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ , qui est fonction de l'épaisseur  $L$  de la couche de mélange.

Le diagramme de stabilité de l'équation, sur la figure 2.18, montre les langues d'instabilités formées par le ration d'inertie  $F$  selon le terme  $N^2 \sin^2 \theta / \omega^2$ , qui fait office de valeur propre dans la résolution de l'équation. Lorsque le forçage  $F$  permet de traverser une ou plusieurs langues d'instabilités, les modes de vibrations d'angles  $\theta$  s'expriment si le point de coordonnées  $(N^2 \sin^2 \theta / \omega^2, F)$  se

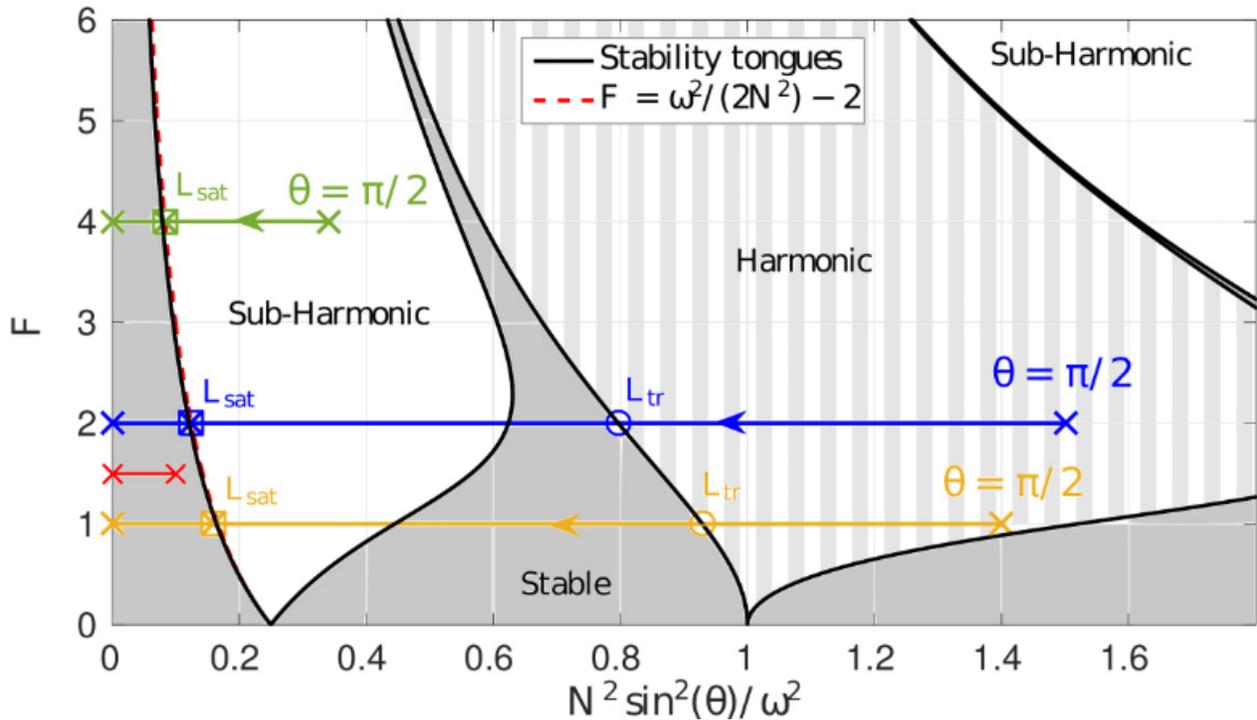


Fig 2.18: Diagramme de stabilité illustrant la dissipation d'énergie pour un écoulement stratifié (Source: Briard et al. [22])

trouve dans une de ces langues. Entre deux langues les modes de vibrations correspondant ne sont pas excités et ne participent pas au mélangeage. On voit ainsi dans la figure 2.18 que le mélange est d'abord formé par une réponse harmonique à l'excitation paramétrique, puis sous-harmonique. Le mode  $\theta$  minimal, qui croise la normale passant par la valeur de  $F$  et le bord extérieur de la dernière langue d'instabilité sous-harmonique, correspond à la valeur de saturation  $L_{sat}$  de la couche de mélange.

L'étude suivante de la même équipe propose une comparaison de leurs résultats numériques et expérimentaux [32], en estimant une valeur expérimentale de la valeur de  $L$ . Enfin leur analyse s'est orientée vers le comportement de la pseudo-interface initiale qui sépare les couches miscibles Cavalier et al. [24]. Ils montrent que le mélangeage se forme à partir de rouleaux formé aux noeuds des modes de vibrations, qui se développent latéralement. Ce constat a déjà été fait par Thorpe [23], dont le schéma est disponible sur la figure 2.19a.

Pour conclure, le mélangeage d'une concentration d'espèce dans une des deux couches d'un milieu diphasique constitue l'étape suivante dans l'étude du

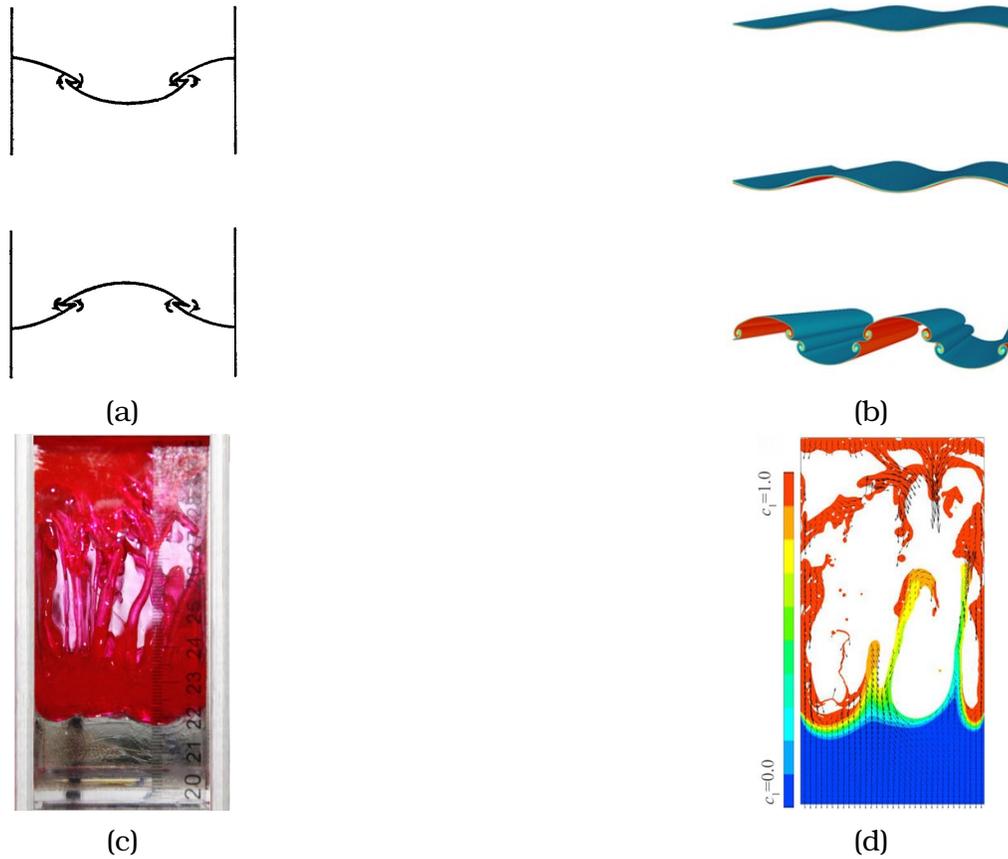


Fig 2.19: (a): Schéma de formation des rouleaux aux noeuds du mode de vibration (Source: Thorpe [23]). (b): Exemple de formations de rouleaux sur la pseudo-interface séparant deux couches miscibles (Source: Cavalier et al. [24])(c)(d): mélangeage à une fréquence de 60Hz et d'amplitude 2.75mm d'un milieu air/liquide, ce dernier étant divisé en deux couches miscibles sirop/glycerol. (Source: Zhan et al. [25])

mélangeage d'une concentration par vibrations verticales. Le sujet est encore très ouvert et manque de publications. Nous citerons Zhan et al. [25], qui proposent une étude expérimentale et numérique de cette configuration, dans un petit réservoir, pour de multiples fréquences y compris celle du RAM, dont on peut voir une comparaison sur les figures 2.19c et 2.19d.

### 2.1.3 Instabilités secondaires

Si l'excitation paramétrique d'un mélangeur inertiel comme le RAM engendre l'expression de l'instabilité de Faraday, celle-ci est susceptible de faire naître à leur tour d'autres instabilités, que l'on pourra qualifier de secondaires. Dans la limite des fluides incompressibles, nous citerons deux d'entre elles en particulier, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et l'instabilité de Plateau-Rayleigh.

#### Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz, décrite au XIXème siècle [133] [134], se forme lorsque deux couches de fluides séparées par une interface s'écoulent à des vitesses différentes. Un cisaillement se forme alors de part et d'autre de l'interface, qui engendre des oscillations de cette zone, jusqu'à la formation de rouleaux. Elle intervient aussi pour l'écoulement cisailé de couches stratifiées miscibles, pour lesquelles les rouleaux se forment sur la pseudo-interface qui sépare ces couches. Nous citeront à ce sujet Peltier et al [135]. L'instabilité en tant que phénomène primaire a été largement étudié théoriquement, numériquement et expérimentalement. Nous citerons Chandrasekhar [48], Drazin [136], Krasny [137], Patnaik [138], Rangel et al. [139], Lee et al. [140] et Staquet et al. [141].

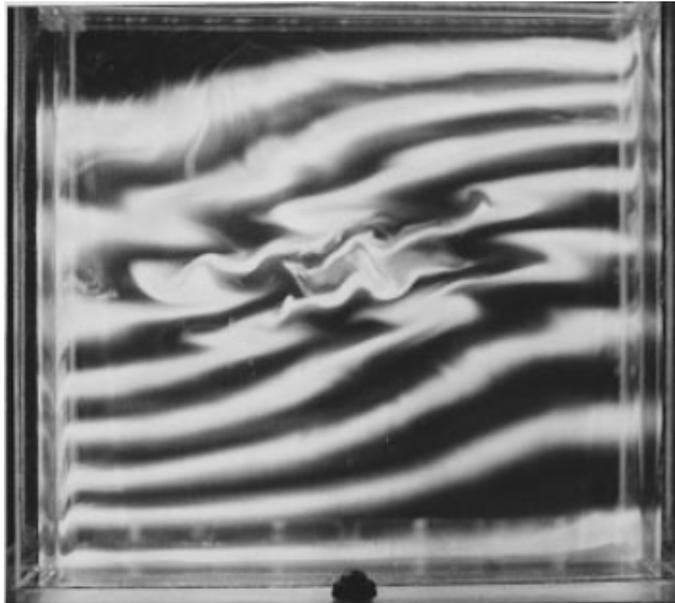


Fig 2.20: Rupture des strates et formation de rouleaux, avec une excitation paramétrique (Source: Benielli et al. [26])

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est aussi une instabilité secondaire qui apparaît pour des régimes non-linéaires de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, lorsque la plume d'instabilité forme des vortex latéraux. Elle s'exprime aussi pour des régimes non-linéaires de l'instabilité de Faraday en formant les rouleaux décrit par Thorpe [23]. Ce cas de figure est particulièrement important pour le mélange de fluides miscibles puisque ces rouleaux vont amorcer le mélangeage à partir des noeuds du mode de vibration d'amplitude maximale. Pour des stratifications complexes, les interactions entre les rouleaux sont étudiées expérimentalement par Benielli et al. [26], à l'aide de vibrations verticales (figure 2.20). Boegman [142] décrit le mélangeage provoqué par des oscillations de l'interface de l'eau de mer dans les strates inférieures.

### **Instabilité de Rayleigh-Plateau**

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un milieu, lui-même fluide, il est susceptible, dans certaines conditions, de former un écoulement sous la forme de filaments. L'instabilité de Rayleigh-Plateau, décrite au XIX<sup>ème</sup> siècle [143] [144] [145], est une instabilité capillaire qui se forme sur ces filaments, lorsque l'équilibre entre les pression de part et d'autres de l'interface et la tension superficielle de celle-ci entraîne la rupture de ces ligaments en plusieurs gouttes. Cette instabilité apparaît dans de nombreux problèmes liés à la formation de jet et leur atomisation, comme présenté par Eggers et al. [146] et Villermaux et al. [147]. Les colonnes de fluides projetés se fractures en gouttes, dont les impacts lors de leur retombée dans le fluide complexifient l'écoulement. Ces gouttes sont aussi susceptibles, par leur nombre de se percuter, engendrant des fusions ou des divisions en plusieurs gouttelettes plus petites. Le comportement des gouttes à l'impact est notamment traité par Ashgriz et al [148].

## 2.2 Rhéologie des suspensions

La rhéologie est une discipline née au début du XX<sup>ème</sup> siècle sous l'impulsion de Bingham [149] qui traite l'analyse de l'écoulement des matériaux, et plus particulièrement de leurs déformations en fonction des contraintes appliquées. Le comportement de fluides complexes tels que les suspensions, les mousses, les polymères ou les solides mous est ainsi analysé afin d'en déduire des lois de comportements. La rhéophysique, quant à elle, cherche à comprendre le comportement physique à l'échelle microscopique ou mésoscopique qui engendre le comportement spécifique de ces fluides. Nous citerons à ce sujet deux ouvrages de Coussot [150] [151] qui traitent de cette discipline.

Nous définirons en premier lieu le type de suspension que nous utiliserons et qui conditionnera la modélisation du mélangeage de fluide chargé. Ensuite nous présenterons la rhéologie d'un fluide dans sa généralité, avant de se pencher sur la physique des suspensions ainsi que les modèles rhéologiques susceptibles de modéliser le comportement d'un fluide chargé.

### 2.2.1 Type de suspensions

Une suspension de particules dans un fluide est un ensemble de particules solides formant un nuage de poudre contenu dans un fluide porteur, ou interstitiel. Ces particules sont des poudres non miscibles, elles ne se diluent pas au sein du fluide. Le milieu est alors constitué d'une phase liquide et d'une phase solide, contrairement au transport d'espèce pour lequel on étudie l'écoulement d'une concentration au sein d'un fluide, l'ensemble ne formant qu'une seule phase.

Les poudres se caractérisent en fonction de différents critères, qui vont influencer sur les interactions les unes envers les autres et sur leur implication dans le comportement du fluide:

- diamètre : les particules sont répertoriées en plusieurs groupes en fonction de leur diamètre. Si une particule a une taille inférieure au micromètre ( $< 10^{-6}\text{m}$ ), les poudres sont appelées des suspensions colloïdales. Des interactions inter-particulaires interviennent, telle que la force de Van der Waals. Pour des poudres de taille supérieure au micromètre ( $> 10^{-6}\text{m}$ ), on

parle alors de suspension non colloïdale, ou plus simplement de suspension. Les forces inter-particulaires sont négligées, les poudres peuvent être modélisées plus simplement comme des solides qui s'entrechoquent entre eux. Nous nous intéresserons par la suite uniquement au comportement de suspensions non colloïdales, et nous négligerons donc les forces qui agissent entre particules aux échelles microscopiques.

- masse volumique : la masse volumique des poudres représente la masse totale de poudres dans un volume donné. Cette masse volumique de poudre ne doit pas être confondue avec celle du matériau constituant ces poudres, qui est défini comme la masse de ce matériau réparti de façon homogène dans un volume donné, et constitue donc un milieu continu. La masse volumique du matériau est donc supérieure à la masse volumique de poudres provenant de ce même matériau, qui est définie à vide/dans l'air. Afin de quantifier cette différence, on définit la fraction volumique  $\phi$  de poudre :

$$\phi^s = \frac{\text{volume des particules}}{\text{volume de référence}} \quad (2.37)$$

La masse volumique totale d'un milieu contenant une suspension, notée  $\rho_{susp}$ , prenant en compte la masse volumique du matériau de base des particules  $\rho_p$  et la masse volumique du fluide porteur  $\rho_f$ , est égale à :

$$\rho_{susp} = (1 - \phi^s) * \rho_f + \phi^s * \rho_p \quad (2.38)$$

- forme : la forme des particules intervient dans le comportement local et global de la suspension étudiée. En effet, les collisions successives entre ces particules modifient leur trajectoires et le volume occupé dans le fluide. La compaction totale de la suspension, c'est-à-dire la fraction volumique maximale que l'on peut obtenir d'une suspension est dépendante de la géométrie des poudres constituant cette suspension. Les particules peuvent avoir des formes variées, par exemple tubulaires, elliptiques ou encore sphériques.

Au sein de cette thèse, nous ne considérerons que le cas des particules parfaitement sphériques. La compaction maximale théorique d'une suspension est alors de  $\phi^s = 0.74$ , provenant de la conjecture de Kepler émise au XVIIème siècle et démontrée depuis par Halès et al. [152] [153].

Dans ce cas extrême, les poudres sont réparties de telle sorte que chaque sphère soit idéalement répartie, l'ensemble forme un réseau cristallin. Dans un cas réel, la fraction volumique maximale de poudres est inférieure, et un arrangement compact aléatoire donne une fraction volumique de l'ordre de  $\phi_m^s \approx 0.637$  [154].

L'arrangement aléatoire des sphères augmente le volume inter-particulaire, on parle alors d'empilement lâche, et la valeur critique de la fraction volumique est de l'ordre de  $\phi_c^s \approx 0.56$  [155]. En fonction de l'écoulement, et notamment de vibrations, l'arrangement lâche des poudres est modifié et peut aller au-delà de la valeur critique et se rapprocher de la compaction maximale  $\phi_c^s < \phi^s < \phi_m^s$ . Pour terminer sur ce point, nous pouvons noter qu'une suspension pourra être considérée comme semi-diluée pour une fraction volumique de chargement  $\phi^s < 0.3$  [156] [150], au delà de laquelle nous la considérerons comme concentrée. Une suspension diluée est une suspension pour laquelle  $\phi^s < 0.1$ , pour lesquelles les interactions interparticulaires sont quasi-nulles et l'influence dans le comportement hydrodynamique du fluide sera négligeable.

- dureté: les collisions entre particules jouent un rôle majeur dans le comportement d'une suspension. En effet, à chaque impact, celles-ci échangent une partie de leur énergie cinétique au moment d'un impact et la conservation de l'énergie implique que cette énergie soit restituée ou transformée. Si l'énergie cinétique est entièrement restituée sous cette forme, les collisions seront des collisions élastiques, et les particules sont considérées indéformables et à température constante. Lorsque la particule est déformable, une partie de l'énergie cinétique est transformée en déformation et modifie l'énergie interne, donc la température des particules. Pour ce travail de thèse, nous ne considérerons que des particules indéformables. Lorsque ces particules sont déformables, une partie de l'énergie cinétique est absorbée au moment de chaque impact. Un coefficient d'amortissement de chaque particule doit alors être pris en compte pour modéliser le comportement de la suspension.

Une suspension composée uniquement de particules de même propriétés forme une suspension monodisperse. Lorsque la suspension contient différents types de poudres, on parle de suspension multidisperse. Dans le cadre de cette thèse, nous nous restreindrons au cadre de la modélisation d'une suspension monodisperse non colloïdale composée de particules sphériques.

## 2.2.2 Rhéologie d'un fluide chargé

### Rhéologie d'un fluide simple

Le comportement rhéologique des fluides permet de les distinguer en différentes catégories selon leur comportement engendré par l'imposition d'une contrainte.

Considérons une surface élémentaire  $dS$  d'un volume de fluide, de normale sortante  $\mathbf{n}$  sur laquelle s'exerce une force élémentaire  $d\mathbf{F} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}dS$ . On note  $\bar{\bar{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de déformation subie par un volume de fluide, correspondant à une force exercée sur une surface dans un repère orthonormé. Le tenseur se décompose en un déviateur  $\bar{\bar{s}}$  et un tenseur sphérique  $\bar{\bar{d}}$ .

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{s}} - \bar{\bar{d}} \quad (2.39)$$

Le tenseur sphérique est le produit de la pression avec la matrice identité  $\bar{\bar{d}} = -p\bar{\bar{I}}$ , et le tenseur déviateur est composé par les contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  avec  $i$  le vecteur directeur de la contrainte visqueuse et  $j$  le vecteur normal de la surface où s'applique cette contrainte. Les contraintes axiales, pour lesquelles  $i = j$  sont donc de la forme  $\tau_{ii}$ , les autres étant des contraintes tangentielles ou de cisaillement.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Les composantes de  $\bar{\bar{\sigma}}$  sont définis sur le schéma 2.21.

La contrainte exercée sur le volume de fluide va engendrer une déformation, et donc un écoulement. On note  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement de l'écoulement, égal à la dérivée transverse par rapport à l'écoulement. Prenons l'exemple d'un écoulement qui se propage uniquement selon l'axe horizontal de vecteur normal  $\mathbf{x}$ , tel que visible sur la figure 2.22, alors  $\dot{\gamma} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$ , avec  $u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ .

Nous observons ici un cisaillement simple pour un fluide newtonien c'est-à-dire un fluide dont la viscosité dynamique  $\mu$  ne dépend pas du cisaillement, et reste constant pendant l'écoulement. La vitesse de l'écoulement, selon la définition du taux de cisaillement, sera simplement de la forme  $\|u\| = u_x = \dot{\gamma}y$ . La contrainte de cisaillement exercée sur ce fluide sera égale au produit du taux de cisaillement et de la viscosité:

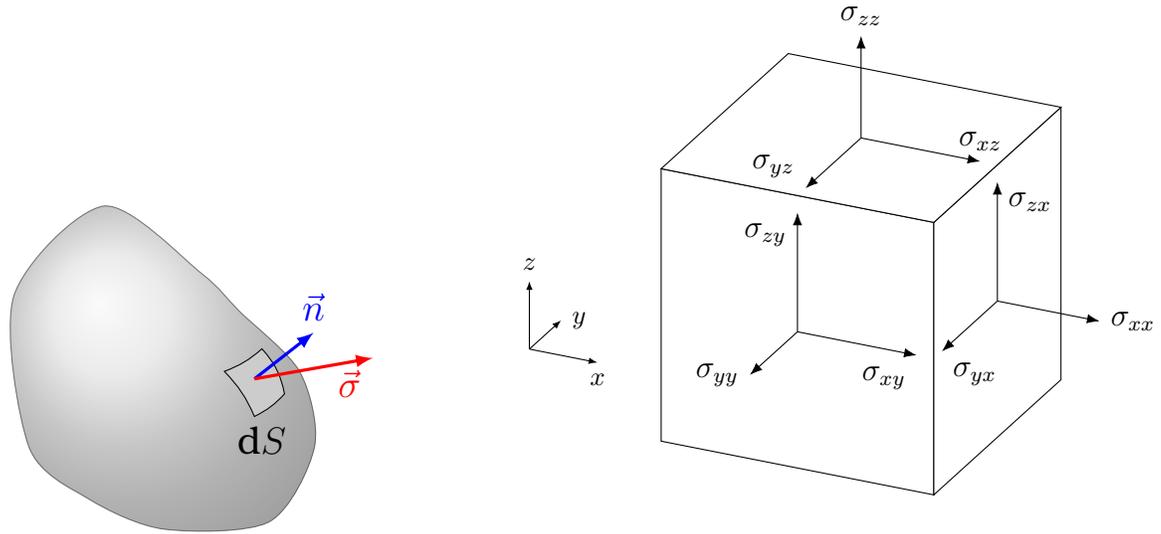


Fig 2.21: Schéma d'une contrainte surfacique appliquée sur un élément de surface et représentation schématique des contraintes dans les trois axes d'un repère 3D.

$$\sigma = \sigma_{xy} = \mu \dot{\gamma} \quad (2.41)$$

À noter que nous avons évoqué que la contrainte de cisaillement, qui a un lien direct avec la vitesse de l'écoulement, est la seule à ne pas être nulle dans le tenseur déviatorique. Pour obtenir le tenseur des contraintes totales, il faut tenir compte du tenseur sphérique:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & \mu \dot{\gamma} & 0 \\ \mu \dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Pour la suite de notre étude, nous considérerons une suspension de poudre dans un fluide interstitiel initialement newtonien. Les propriétés et le comportement rhéologique du fluide chargé seront modifiés par les propriétés et la concentration de ce chargement uniquement.

### Rhéologie d'une suspension

Comme nous venons de le voir, un fluide newtonien est défini par la relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la viscosité dynamique du fluide. Beaucoup de fluides n'adoptent pas un comportement rhéologique aussi simple, et sont donc nommés des fluides non-newtoniens. La figure 2.23 résume

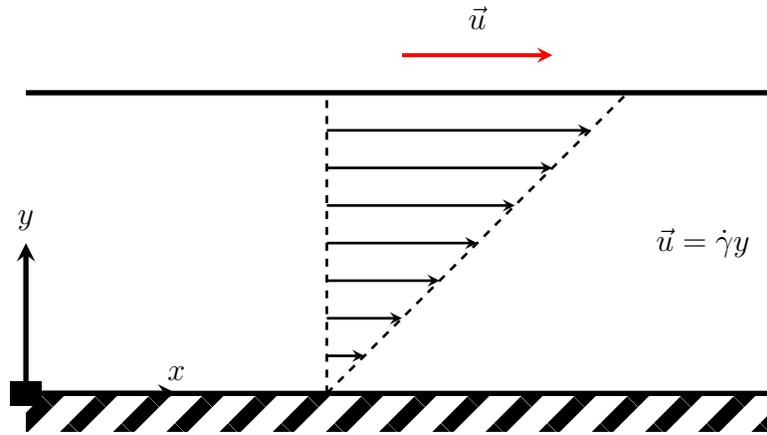


Fig 2.22: Schéma de l'écoulement cisailé d'un fluide newtonien entre une plaque statique et une plaque mobile.

schématiquement le comportement de trois grandes familles de fluides en fonction de l'évolution de leur contrainte de cisaillement par rapport au taux de cisaillement. Outre les fluides newtoniens, nous pouvons trouver des fluides rhéoépaississants, rhéofluidifiants ou à seuil.

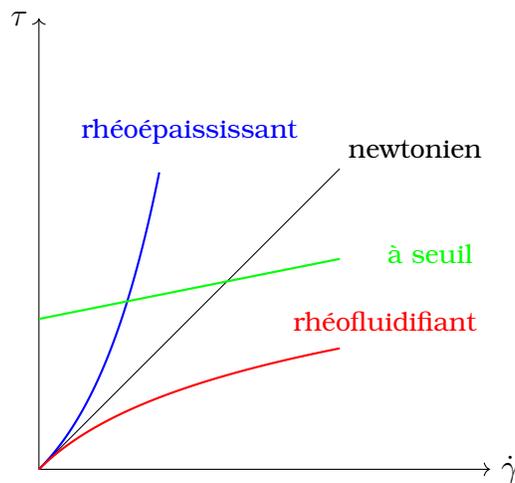


Fig 2.23: Évolution du taux de cisaillement  $\tau$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour des fluides newtoniens et non-newtoniens.

Un fluide à seuil est un fluide qui se comporte comme un solide tant qu'une contrainte de cisaillement suffisamment importante n'est pas appliquée. Au delà de ce seuil, il se comporte comme un fluide newtonien ou non-newtonien. Sur la figure 2.23 le fluide à seuil se comporte comme un fluide newtonien au-delà du seuil de contrainte. C'est ce que l'on appelle un fluide de Bingham.

Un fluide rhéofluidifiant voit sa viscosité diminuer avec l'augmentation du

taux de cisaillement. Ce type de fluide est assez courant parmi les fluides complexes tels que de nombreux polymères ou suspensions. En effet le cisaillement détruit les structures microscopiques qui se forment au sein de ces fluides, et provenant des interactions entre les molécules ou les particules en suspension.

Un fluide rhéoépaississant voit sa viscosité augmenter avec l'augmentation du taux de cisaillement. Des suspensions très concentrées sont susceptibles d'adopter ce type de comportement.

De façon générale, un fluide chargé est susceptible d'adopter le comportement de diverses familles de fluides en fonction de la concentration de poudre. Barnes [27] montre qu'une suspension, pour plusieurs fractions volumiques, peut passer d'un comportement rhéofluidifiant à rhéoplastique au delà d'un premier seuil critique du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_c$ , puis de revenir à un fluide rhéofluidifiant au-delà d'un second seuil critique  $\dot{\gamma}_m$ . L'intervalle pour lequel  $\dot{\gamma}_c < \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_m$  est visible sur le schéma 2.24.

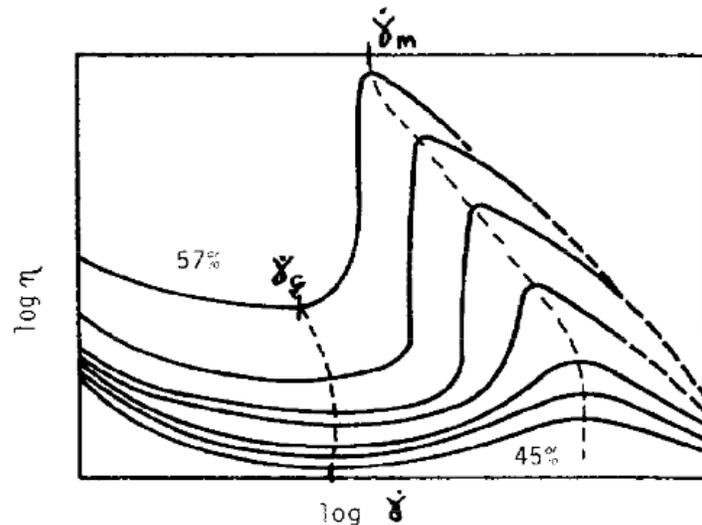


Fig 2.24: Évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et tracé des taux critiques  $\dot{\gamma}_c$  et  $\dot{\gamma}_m$ . (Source: Barnes [27])

Le tenseur de contraintes d'un fluide contenant une suspension doit prendre en compte l'influence du mouvement et des chocs des particules pour pouvoir obtenir une loi de comportement. Batchelor [157] montre que, pour un cisaillement simple, le tenseur est composé du tenseur sphérique et du déviateur, auxquels il faut rajouter une fluctuation  $\sigma'$  provenant des suspensions. Ce terme décrit le caractère non-newtonien de la suspension.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\dot{\gamma} + \sigma'_{ij} \quad (2.43)$$

Le caractère rhéofluidifiant d'une suspension est notamment une conséquence de la migration effectuée par les particules au cours d'un écoulement cisailé. En effet, le cisaillement d'une suspension engendre le déplacement de ces poudres vers des zones moins cisillées. Ce phénomène a été constaté par Gadala-Maria et al. [158] à travers une diminution de la viscosité du fluide chargé dans ces zones. Le mécanisme de déplacement par chocs successifs entre les particules, dans un gradient du champ de vitesse, a été détaillé par Leighton et al. théoriquement et vérifié expérimentalement [159] [160].

Plusieurs modèles ont pour but de retranscrire le plus fidèlement possible la migration particulaire lors d'un cisaillement. Ils se décomposent en plusieurs catégories en fonction de l'approche théorique utilisée. Ceux que nous utiliserons se basent sur une formulation eulérienne des équations du mouvement, et modélisent le comportement des particules dans le fluide interstitiel à l'aide de la fraction volumique  $\phi^s$  de suspension.

Nous citerons tout d'abord le modèle SIM (Shear Induced Model) de Phillips [161], qui reprends les travaux de Leighton et al. pour modéliser le comportement des suspensions en fonctions du cisaillement et des chocs entre particules. Ce modèle est très utilisé dans le cadre de l'étude numérique de suspensions, notamment pour la simulation d'écoulements de Couettes ou de sédimentations. Ce modèle est simple à implémenter puisqu'il se résume à une équation d'advection-diffusion. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur la modélisation de cette migration particulaire avec le modèle de Phillips [161], et son implémentation dans le code NOTUS. Le modèle SIM a été repris, notamment par [162] pour un système 2-fluides pour l'étude de la microfiltration. Nous citerons aussi Rao et al.[163] qui ont utilisé le modèle de Phillips pour la sédimentation d'une suspension, ou encore Fradette et al; [164] qui utilisent ce modèle pour le mélangeage de suspension à l'aide d'une hélice.

Parmi les autres modèles, nous citerons notamment les modèles de types SBM (Suspension Balance Model) tels que ceux proposés par Jenkins et al. [165], Morris et al; [166] ou encore Nott et al. [167], qui se basent sur la conservation de la quantité de mouvement du fluide chargé. Ils sont utilisés pour des écoulement à très bas régimes, pour un nombre de Reynolds petit.

D'autres méthodes sont susceptibles de modéliser le comportement d'un fluide contenant des particules, notamment lorsque le fluide est un gaz, par exemple un aérosol diffusant des particules dans un domaine. Une formulation lagrangienne des particules est généralement utilisée. Elle permet de calculer la trajectoire individuelle de chaque particule dans le domaine de calcul. Cependant ce sujet ne sera pas traité car trop éloigné de la modélisation d'une suspension dans un fluide visqueux.

### 2.2.3 Modèles de viscosité

La viscosité des fluides contenant une suspension est un vaste sujet d'étude étant donné les différences de comportement rhéologiques en fonction du type de particules employé ou de leur concentration. Comme nous l'avons vu précédemment, ce sont des fluides non-newtonien dont la viscosité varie localement au cours du temps en fonction de l'écoulement. Un certain nombre de lois de comportement ont été développées afin de modéliser la viscosité dynamique  $\mu$  d'un fluide. Ces lois permettent de calculer la viscosité à l'échelle macroscopique sans avoir à modéliser l'interaction microscopique entre le fluide interstitiel et les particules, ainsi que celle des particules entre elles. Elles complètent les modèles qui décrivent le mouvement des particules dans le fluides, tel que le modèle de Phillips, qui fournissent une valeur de  $\phi^s$ , en permettant de calculer la viscosité en fonction de  $\phi^s$ . Nous pouvons citer notamment Mueller et al. [168] et Guazzelli et al. [169] pour l'étude des déplacements des particules en fonction de la viscosité.

Afin d'obtenir le couplage entre les loi de comportement et les modèles de migration particulaire, la viscosité est ramenée à une fonction  $h$  de la fraction volumique de poudres, de telle sorte que:

$$\mu = \mu_f h(\phi) \tag{2.44}$$

La viscosité dynamique du fluide porteur newtonien est  $\mu_f$ . La viscosité relative est définie par  $\mu_r = \mu/\mu_f$ .

La première loi de comportement que nous pourrions citer est celle d'Einstein, publiée en 1906 [170]. Cette loi est une référence historique mais très peu utile car réservée à des suspensions de fraction volumique très faible, de l'ordre de

$$\phi^s \leq 0.03.$$

$$\mu_r = 1 + 2.5\phi^s \quad (2.45)$$

Batchelor et al. [171] ont proposé une extension du modèle d'Einstein à un polynôme d'ordre 2 pour un écoulement de faible chargement ne dépassant pas  $\phi^s \leq 0.1$ .

$$\mu_r = 1 + 2.5\phi^s + k\phi^{s^2} \quad (2.46)$$

Avec  $5.2 < k < 7.6$ , qui dépend de la déformation. Le coefficient du terme d'ordre 2 est discuté par Batchelor pour un écoulement tenant compte de l'influence du mouvement Brownien [172]. Le modèle de Batchelor reste très restrictif, il faut donc se tourner vers d'autres modèles, non polynomiaux, qui traduisent le comportement visqueux des suspensions pour des fractions volumiques plus élevées, permettant de simuler des suspensions concentrées.

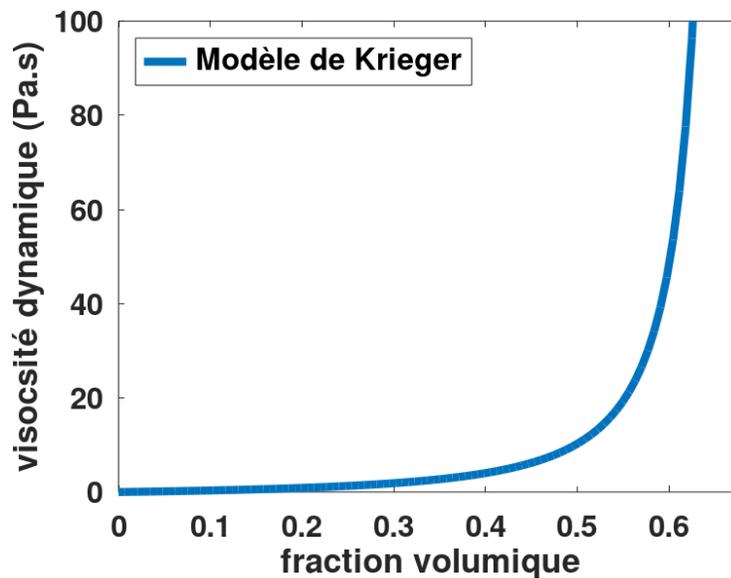


Fig 2.25: Loi de viscosité proposée par Krieger (Source: Krieger [28])

Parmi l'ensemble des modèles disponibles, nous citerons le modèle de Mooney [173], de Brady [174], et de Krieger [28]. C'est ce dernier modèle que nous utiliserons en couplage avec le modèle de Phillips. Il permet de modéliser des suspensions concentrées, voire très compactes, jusqu'à une fraction volumique maximale asymptotique telle que  $0 < \phi^s < 0.68$ .

Le modèle de Krieger est défini à l'aide d'un coefficient sans dimension  $\eta = 1.82$ , et de la fraction volumique maximale  $\phi_m^s = 0.68$ .

$$\mu_r = \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-\eta} \quad (2.47)$$

À partir d'une fraction volumique maximale, le modèle de Krieger diverge. Le modèle est donc très permissif quant à la plage des valeurs de viscosité qu'il peut calculer. Comme on peut le constater sur la figure 2.25, la viscosité augmente de façon non-linéaire avec la fraction volumique. La migration des particules dans les zones cisillées entraînera une diminution de la viscosité.

Pour conclure, l'ensemble de ce chapitre avait pour but de faire le point sur l'ensemble des mécanismes physiques mis en jeu dans le mélangeage de fluides. Nous avons pu développer les différentes instabilités hydrodynamiques susceptibles d'intervenir, ainsi que le comportement rhéologique d'une suspension et les modèles permettant de retranscrire ce comportement. Dans le chapitre suivant, nous développerons en détail les équations mises en jeu, dont le modèle de Phillips, que nous implémenterons dans le code NOTUS couplé avec le modèle de Krieger.

# Chapitre 3

## Modèle mathématique et approche numérique

Après avoir décrit les potentiels phénomènes et les milieux en présence, nous allons exposer le modèle mathématique utilisé à travers une série d'équations aux dérivées partielles que nous justifierons autant que possible par des considérations physiques. Le chapitre contiendra aussi la description de la version numérique du modèle. Celle-ci sera obtenue par l'application de méthodes et schémas que nous rappellerons.

### 3.1 Modèle mathématique et ses équations

La première des lois de conservation que nous considérons dans cette section est celle de la masse que nous rappelons ici.

#### 3.1.1 Conservation de la masse

On considère un domaine tridimensionnel  $\Omega$  constituant un système fermé, représentant un réservoir contenant un ou plusieurs fluides. Le système est défini dans un référentiel Galiléen.

Les fluides mis en jeu sont considérés comme étant des milieux continus. En conséquence, la quantité de matière rentrant à l'intérieur d'un système doit être égale à la quantité de matière sortante de ce même système. Cette condition est d'autant plus importante que, dans le cadre de cette thèse, mis à part quelques cas de validation, nous considérerons le réservoir contenant les fluides comme étanche, donc sans flux de matière entrant ou sortant. La quantité de matière contenue à l'intérieur de ce réservoir est donc strictement constante au cours

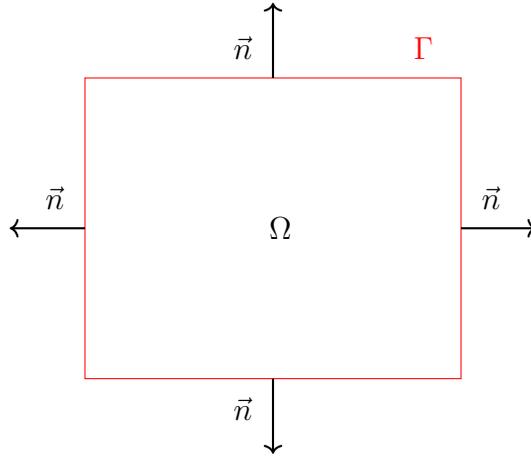


Fig 3.1: Exemple d'un volume de contrôle  $\Omega$  réduit à une surface 2D, avec  $\Gamma$  la surface de normale sortante  $\vec{n}$  sur chacune des faces

du mélange. Pour résumer, la variation temporelle de la masse dans le système fermé est nulle, et s'exprime en fonction des flux de la masse volumique dans le volume de contrôle  $\Omega$ :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = 0 \quad (3.1)$$

En développant cette équation grâce au théorème de transport, nous pouvons décomposer la variation temporelle de la masse en deux termes. Le premier sera un flux volumique, celui de la dérivée temporelle de la masse sur l'ensemble du volume de contrôle. Le second sera un flux surfacique, celui de la quantité de matière  $\rho u$  par rapport à chacune des surfaces du volume de contrôle, dont on notera l'ensemble  $\Gamma$  (voir figure 3.1):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} dV + \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.2)$$

Le théorème de la divergence permet de transformer ce flux surfacique en flux volumique:

$$\int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV \quad (3.3)$$

L'équation obtenue, sous sa forme intégrale est l'équation de conservation de la masse. Étant donné qu'elle est écrite pour un même volume de contrôle  $\Omega$ , il est possible de la transformer sous sa forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.4)$$

Dans le cadre des écoulements incompressibles, l'équation de conservation de la masse peut être réduite à l'expression d'un champ solénoïdal, c'est-à-dire à

une divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

Cette simplification sera notamment utile pour l'expression du mouvement vibratoire du réservoir sous forme volumique, ainsi que pour la correction de la vitesse lorsque nous aborderons la résolution numérique de l'équation de quantité de mouvement.

### 3.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit quant à elle la variation de la quantité de mouvement par rapport à l'ensemble des forces exercées sur le fluide, que ce soit la pression, la gravité, les contraintes visqueuses, et la tension de surface lorsque deux fluides immiscibles sont mis en jeu. Pour un milieu incompressible l'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (3.6)$$

Pour que le problème soit bien posé, il faut prendre en compte les conditions permettant de traduire le mouvement oscillatoire du conteneur dans l'équation de Navier-Stokes. Zhan et al. [25] ont effectué des simulations d'un réservoir vibrant discrétisé avec un maillage mobile, à l'aide d'un code commercial. Le mouvement du réservoir est directement traduit à l'aide de conditions aux bords mobiles permettant de fermer le système. L'observateur se place dans le référentiel terrestre.

La seconde approche consiste à modéliser le mouvement vibratoire en se plaçant dans le référentiel du réservoir. Cette solution est la plus simple numériquement. Elle consiste à imposer un terme source dans l'équation de Navier-Stokes traduisant l'accélération du conteneur, discrétisé avec un domaine statique complété de conditions aux bords statiques.

Lorsque que le système  $\Omega$  est en déplacement, Konoszy [175] montre que si la vitesse de déplacement est constante, la translation entre le référentiel galiléen et le référentiel du système est un invariant galiléen. En d'autres termes, l'équation de Navier-Stokes est identique dans les deux référentiels pour les deux vitesses  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{u}$  définies dans leurs référentiels respectifs. Nous reprenons la démonstration détaillée dans [175], en prenant en considération le mouvement oscillatoire de  $\Omega$ .

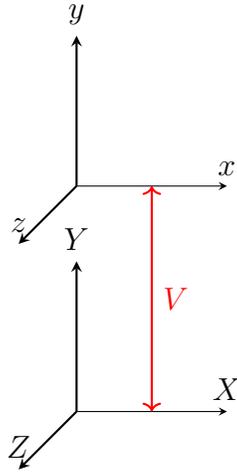


Fig 3.2: Déplacement du référentiel local  $\{x, y, z\}$  par rapport au référentiel terrestre  $\{X, Y, Z\}$

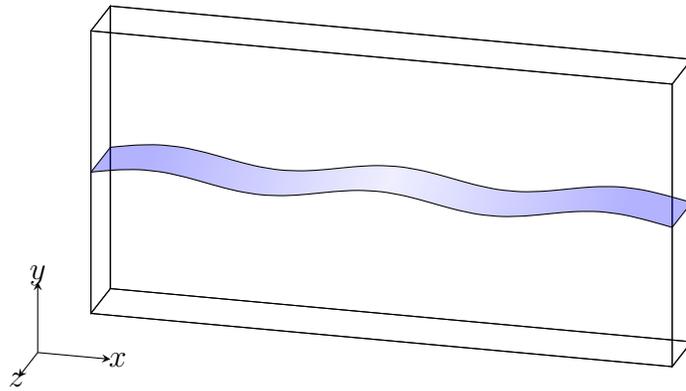


Fig 3.3: Réservoir dans le référentiel local  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$

On définit dans le référentiel terrestre galiléen  $\{X, Y, Z\}$  la position du réservoir  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$  sa vitesse,  $T$  le temps et  $V = V(T) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{y}$  la vitesse vibratoire du réservoir, fonction dépendante uniquement du temps. Dans le référentiel  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  du réservoir, on définit  $\mathbf{u}$  la vitesse relative,  $x$  la position du réservoir et  $t$  le temps relatif. Le référentiel est translaté selon la vitesse  $V$  :

$$X = x - VT = A \sin(\omega T) \quad (3.7)$$

$$T = t \quad (3.8)$$

$$V = A \omega \cos(\omega t) \quad (3.9)$$

On peut alors exprimer la vitesse  $\mathbf{U}$  selon la vitesse relative, de même que les

autres quantités mises en jeu:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{V} \quad (3.10)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \mathbf{U} = \nabla \mathbf{u} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (3.13)$$

Avant d'étudier l'équation de quantité de mouvement selon un référentiel mobile, regardons l'expression de l'équation de continuité selon un référentiel en translation. La conservation de la masse est vérifiée pour un système en translation. On peut réduire le domaine de résolution au réservoir, puisqu'il constitue un système fermé, indépendamment du mouvement effectué par ce réservoir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{u} - \mathbf{V})) \quad (3.14)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (3.15)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{V}}_{=0} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho \quad (3.16)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (3.17)$$

$$= 0 \quad (3.18)$$

Nous proposons de réécrire les termes d'advection de l'équation de Navier-Stokes en fonction des variables exprimées dans le référentiel en mouvement, en tenant compte des relations (3.7)-(3.9):

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial T} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = \rho \left[ \frac{\partial (\mathbf{u} - \mathbf{V})}{\partial T} + ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \right] \quad (3.19)$$

$$= \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial T} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial T} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + \rho \underbrace{((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{V}}_{=0} \quad (3.20)$$

$$= \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}}_{=0} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (3.21)$$

$$= \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (3.22)$$

La pression  $p$  est invariable quelle que soit la transformation des coordonnées du repère, c'est donc un invariant galiléen. De ce fait le gradient de la pression est identique dans les deux repères de référence:

$$\nabla^* p = \nabla p \quad (3.23)$$

De même le terme visqueux de l'équation de la quantité de mouvement dans le référentiel galiléen est identique dans le référentiel du réservoir :

$$\nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] = \nabla \cdot [\mu (\nabla (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{V})^T)] \quad (3.24)$$

$$= \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (3.25)$$

L'équation de Navier-Stokes réécrite dans le référentiel mobile permet d'observer que la transformation de référentiel dépend uniquement de la dérivée temporelle de la vitesse de translation  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ . Konoszy [175] prouve ainsi que la translation à vitesse constante du référentiel est un invariant galiléen, c'est-à-dire que l'équation de Navier-Stokes est identique, qu'on l'exprime selon le référentiel  $\{X, Y, Z\}$  ou  $\{x, y, z\}$ .

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial T} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (3.26)$$

Dans le cas d'un déplacement vibratoire, pour laquelle la vitesse  $\mathbf{V}$  est sinusoïdale, il est aisé de prouver qu'il est possible d'exprimer ce mouvement vibratoire par le biais de l'application d'un terme source  $\mathbf{f}$ , en prenant en compte la dérivée totale de l'accélération du système.

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial T} + \underbrace{(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}}_{=0} \quad (3.27)$$

$$= -A\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \mathbf{y} \quad (3.28)$$

$$= -\mathbf{f} \quad (3.29)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement, en prenant compte de l'ensemble des termes, s'écrit donc:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \rho(\mathbf{g} + \mathbf{f}) \quad (3.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.31)$$

Pour un milieu diphasique, il faut rajouter la tension de surface  $\mathbf{f}_s$  qui traduit la dynamique capillaire de l'interface.

$$\mathbf{f}_s = \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n}_s \quad (3.32)$$

Avec  $\kappa$  la courbure de l'interface,  $\mathbf{n}_s$  la normale à l'interface et  $\delta_s$  la masse de Dirac. Le modèle CSF (Continuum Surface Force) proposé par Brackbill et al. [176] permet de formuler la force capillaire sous la forme d'un gradient d'une fonction  $\chi$ :  $\nabla \chi = \delta_s \mathbf{n}_s$ .

NOTUS utilise un modèle 1-fluide pour décrire un milieu diphasique, c'est-à-dire que cette fonction C, que l'on nommera fonction couleur, décrit le milieu diphasique avec une seule équation de conservation de mouvement couplée à une équation d'advection que nous détaillerons dans le chapitre 3.2.8. La masse volumique et la viscosité décrivent l'ensemble du milieu selon la couleur C.

Le calcul de la courbure  $\kappa$  se base sur une fonction hauteur H, et nécessite l'utilisation d'une épaisseur de quelques mailles pour pouvoir être correctement établie. Plus de détails sur le calcul de la courbure sont disponibles avec Popinet [177] et Desmons [178].

$$\rho(C) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)C \quad (3.33)$$

$$\mu(C) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)C \quad (3.34)$$

Par ailleurs, une partie de notre validation numérique concerne des cellules tridimensionnelles avec une des trois directions de dimension faibles comparée à celle des deux autres. Il s'agit d'amorcer des comparaisons numériques et expérimentales dans une configuration "presque" bidimensionnelles et donc bien moins coûteuse en temps de calculs. Dans la suite de cette section nous allons justifier cette approche à travers l'utilisation d'un modèle de moyennisation de la profondeur.

### 3.1.3 Écoulement de faible épaisseur

Lorsqu'un fluide s'écoule à vitesse modérée dans un système de faible épaisseur, il adopte un profil de vitesse parabolique selon l'axe de cette épaisseur, l'écoulement est donc associable à un écoulement de Poiseuille. Des réservoirs

de ce type sont nommés des cellules de Hele-Shaw, de formes correspondantes à celle de la figure 3.3. Il est alors possible de réduire un écoulement tridimensionnel à un écoulement bidimensionnel en moyennant cette troisième dimension. L'intérêt est de pouvoir gagner considérablement en temps de calcul en réduisant la taille des matrices nécessaires à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Le modèle s'inspire de l'étude des écoulements de fluides dans des milieux poreux, pour lesquels il est possible de modéliser le comportement en ajoutant un terme correcteur à l'équation de Navier-Stokes, le terme de Brinkman [179], de la forme  $\frac{\mu}{K}u$ . Nous retrouverons ce terme dans l'écoulement moyenné dans une cellule de Hele-Shaw.

Pour des fluides visqueux, dans une cellule de Hele-Shaw d'épaisseur  $e$ , l'équation de Darcy [180] décrit l'écoulement bidimensionnel d'un fluide de vitesse  $u = \{u_x, u_y\}$  pour un écoulement visqueux, donc un nombre de Reynolds faible. Cette équation est une forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes, pour lesquelles les termes d'inertie sont négligés.

$$\mathbf{u} = -\frac{e^2}{12\mu}\nabla p \quad (3.35)$$

Le modèle moyennisé global comprend l'approche proposée par Darcy, tout en prenant en compte les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Nous allons définir les vitesses  $\bar{u} = \{\bar{u}_x, \bar{u}_y\}$  de l'écoulement moyennisé. Les composantes des vitesses selon l'axe horizontal et l'axe vertical vont prendre en compte le profil parabolique de l'écoulement transverse.

$$u_x(x, y, z) = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \bar{u}_x(x, y) \quad (3.36)$$

$$u_y(x, y, z) = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \bar{u}_y(x, y) \quad (3.37)$$

L'équation de Navier-Stokes obtenue, pour une vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  est donc:

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \beta_p (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)] - \frac{12\mu}{e^2} \bar{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_s \quad (3.38)$$

L'équation de Navier-Stokes correspondante peut être utilisée dans un référentiel oscillant pour modéliser la vibration du système en ajoutant le terme source  $\rho f$  au terme de gravité. Le préfacteur  $\beta_p$  est sujet à discussion et sa valeur varie selon les types d'écoulements considérés. Gondret et al. ([181]) proposent de ne pas modifier le terme d'inertie en laissant  $\beta_p = 1$ , pour des écoulements

à faible nombre de Reynolds. À l'inverse, Ruyer-Quil [182] propose d'utiliser un coefficient  $\beta_p = \frac{54}{35}$ . Nous conserverons le coefficient standard  $\beta_p = \frac{6}{5}$  de la formulation proposée en annexe de l'article de Gondret et al., employé par Li et al. [30] pour la simulation de l'instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw.

### 3.1.4 Équation de concentration d'espèce

L'équation de concentration d'espèce est une équation de type advection-diffusion permettant de calculer l'évolution d'un champ scalaire  $S$  représentant une concentration d'une espèce miscible ou une fraction massique. Le terme de diffusion est piloté par un coefficient de diffusion massique  $D$  constant ou dépendant de  $S$ . Sous sa forme conservative, l'équation s'écrit:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}S) = \nabla \cdot (D\nabla S) \quad (3.39)$$

Étant donné que nous nous positionnons dans le cadre des fluides incompressibles, tels que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , il est alors plus simple d'écrire l'équation sous forme non-conservative:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (D\nabla S) \quad (3.40)$$

Cette équation sera employée pour la simulation numérique du mélangeage de fluides miscibles, détaillée dans le chapitre 5.

Pour finir avec la description des différents modèles présents dans notre étude, nous allons aborder notre stratégie pour tenir compte de l'écoulement d'un fluide chargé.

### 3.1.5 Modélisation de l'écoulement de fluide chargé

La simulation de l'écoulement d'un fluide chargé, donc contenant une suspension de particules, implique de calculer à la fois l'écoulement du fluide porteur, mais aussi de calculer le mouvement des particules au sein de ce fluide, ainsi que la viscosité locale du fluide chargé. Le fluide employé est généralement un fluide Newtonien, mais les différentes études rhéologiques que

nous détaillerons ensuite montrent que le comportement du fluide, lorsqu'il transporte des particules, devient fortement non-Newtonien. Adopter une description Lagrangienne du comportement du chargement signifie simuler la trajectoire de l'ensemble des particules et les chocs interparticulaires, ce qui implique un coût en temps de calcul très important dès lors que leur nombre devient important. C'est notamment le cas de cette thèse pour laquelle nous considérerons des fluides fortement chargés. Une façon de contourner cette difficulté revient à adopter un formalisme Eulérien, comme pour l'équation de Navier-Stokes, pour modéliser l'ensemble des poudres non pas comme des solides individuels mais comme une fraction volumique. Cette fraction volumique de poudre permet de décrire le chargement comme un champ scalaire qui sera traité à travers une équation de transport-diffusion dans l'ensemble du domaine. Le principal avantage est que le coût en temps de calcul n'est plus dépendant du nombre de particules, le champ de fraction volumique sera discrétisé sur le même maillage que les autres variables (vitesse, pression, viscosité). Les collisions entre particules ne sont plus calculées mais sont modélisées. Le point de vue adopté par un tel modèle n'est donc plus microscopique mais macroscopique. Cette approche a été développée à partir des années 80 par Leighton et Acrivos [159] [160], puis par Phillips et al. [161]. Nous utiliserons leur modèle pour la description d'une suspension dans un fluide newtonien. Le paragraphe suivant est dédié à la description du modèle en question.

### **Modèle de Phillips**

L'équation proposée par Phillips peut être synthétisée sous la forme d'une équation de transport-diffusion:

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (3.41)$$

Le terme diffusif  $\mathbf{j}$  représente la sommation de deux flux  $N_c$  et  $N_\mu$ . Il résume le comportement des particules modélisé en fonction des collisions entre elles et de la viscosité induite par la fraction volumique de ces poudres dans le fluide:

- $N_c$  : flux diffusif causé par la variation spatiale des fréquences de collision entre les charges :

le modèle de Phillips est un modèle de comportement de particules basé sur le cisaillement du fluide chargé. Au cours d'un écoulement, le cisaillement local, de magnitude  $\dot{\gamma}$ , d'un fluide engendre la collision de particules à

proximité les unes des autres. Une particule qui va subir ces collisions va se déplacer de sa position initiale vers une position pour laquelle elle subit moins de collisions, c'est-à-dire moins cisailée, modifiant ainsi la fraction volumique de poudre. Phillips a étudié ce phénomène pour un système de deux particules, avant de le généraliser pour une suspension. Il indique qu'une particule comptabilise un nombre de chocs interparticulaires de l'ordre de  $\dot{\gamma}\phi^s$ . La variation de la fréquence de collisions sera alors de l'ordre de  $a\nabla\dot{\gamma}\phi^s$ . Le coefficient correcteur  $D_c$ , déterminé empiriquement, est ajouté, permettant d'obtenir le flux  $N_c$  :

$$N_c = -D_c a^2 \left( \phi^{s^2} \nabla \dot{\gamma} + \phi^s \dot{\gamma} \nabla \phi^s \right) \quad (3.42)$$

- $N_\mu$  : flux diffusif causé par la variation spatiale de la viscosité :  
une particule en translation dans un fluide à viscosité variable, sa trajectoire sera modifiée en fonction du gradient de viscosité de la portion de fluide traversée. Cette particule se déplacera de la zone à la viscosité la plus élevée, donc développant le plus de résistance au mouvement, vers une zone à viscosité inférieure, qui engendrera une résistance moins élevée au mouvement. L'expression du flux proposée par Phillips provient des travaux précédemment cités [159] [160].

$$N_\mu = -D_\mu \dot{\gamma} \phi^{s^2} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \nabla \mu \quad (3.43)$$

Comme nous le verrons par la suite, la viscosité est une fonction de  $\phi^s$ , le terme  $\nabla \mu$  est donc réécrit pour s'exprimer en fonction de  $\nabla \phi^s$ , qui permettra de construire le terme de diffusion dans l'équation finale:

$$N_\mu = -D_\mu \dot{\gamma} \phi^{s^2} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \quad (3.44)$$

Il est à noter que le flux  $j$  tient compte aussi d'un flux supplémentaire  $N_b$ , flux diffusif causé par les mouvements brownien des particules. Il se présente comme un terme de diffusion, dont le coefficient  $D_b$  pilote le mouvement aléatoire moyen des particules.

$$N_b = -D_b \nabla \phi^s \quad (3.45)$$

Dans notre étude on ne tiendra pas compte de celui-ci, car négligeable pour un chargement dense.

L'équation de transport-diffusion de la fraction volumique de poudre s'obtient à partir de (3.41) et en tenant compte de

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (N_c + N_\mu) \quad (3.46)$$

ce qui permet en effet d'écrire:

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = \nabla \cdot (D(\phi^s) \nabla \phi^s) + S(\phi^s) \quad (3.47)$$

$$N_\mu = -D_\mu \phi^{s^2} \dot{\gamma} \frac{a^2}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \quad (3.48)$$

$\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement, a la taille des particules

On redistribue les termes dans le coefficient de diffusion D et le terme source S :

$$D(\phi^s) = D_c a^2 \phi^s \dot{\gamma} + D_\mu \phi^{s^2} \dot{\gamma} \frac{a^2}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi^s} \quad (3.49)$$

$$S(\phi^s) = \nabla \cdot (D_c a^2 \phi^{s^2} \nabla \dot{\gamma}) \quad (3.50)$$

Afin de correctement poser le système, il est nécessaire de bien calculer les conditions aux bords. Pour chacun des bords du système, la somme des flux diffusifs par rapport à la normale sortante  $\mathbf{n}$  de la surface considérée est nulle :

$$\mathbf{n} \cdot (-(N_c + N_\mu)) = 0 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left( D_c a^2 (\phi^{s^2} \nabla \dot{\gamma} + \phi^s \dot{\gamma} \nabla \phi^s) + D_\mu \phi^{s^2} \dot{\gamma} \frac{a^2}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \right) = 0 \quad (3.52)$$

En développant chacun de ces termes afin de les exprimer en fonction de la fraction volumique  $\phi^s$ , nous obtenons une condition hybride, de type Robin, associant une condition de type Dirichlet et une condition de type Neumann. Cette condition de type Robin est réécrite pour exprimer le gradient de la fraction volumique. En effet, en regroupant les conditions selon leurs types, nous obtenons l'égalité :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi^s \left( D_c a^2 \phi^{s^2} \dot{\gamma} + D_\mu \phi^{s^2} \dot{\gamma} \frac{a^2}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi^s} \right) = -D_c a^2 \phi^s \mathbf{n} \cdot \nabla \dot{\gamma} \quad (3.53)$$

La condition de type Robin peut être ainsi réduite à une forme plus simple à implémenter :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi^s = \frac{-D_c \phi^s \mathbf{n} \cdot \nabla \dot{\gamma}}{\dot{\gamma} \left( D_c + D_\mu \frac{\phi^s}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi^s} \right)} \quad (3.54)$$

## 3.2 Discrétisation et méthodes numériques

Les simulations ont été effectuées à l'aide du code NOTUS, développé au sein du laboratoire de l'I2M. C'est un code de simulation en mécanique des fluides incompressibles, massivement parallèle et open source. Les équations sont discrétisées au sein de ce code par une formulation de type volumes finis que nous détaillerons brièvement ci-dessous. Le code NOTUS intègre, en plus de l'équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles, une équation de concentration d'espèce, l'équation de la température, ainsi que plusieurs méthodes de suivi d'interface. Le modèle de Phillips a été intégré au sein du code au cours de cette thèse. Une routine générique permettant de calculer une équation de transport quelconque, déjà employée pour l'utilisation de l'équation de concentration, a été utilisée pour implémenter le modèle de Phillips. Le coefficients de diffusion, le terme source, le calcul de la viscosité en fonction du chargement volumique ainsi que les conditions aux bords ont ensuite été codés pour fournir à cette routine générique l'expression complète du modèle de suspensions.

Dans la description qui va suivre, nous nous attarderons sur la discrétisation d'une équation de transport générale, ainsi que sur la méthode de résolution du couplage vitesse-pression de l'équation de Navier-Stokes.

### 3.2.1 Formulation des volumes finis

Le code NOTUS est basé sur une formulation de type volumes finis des équations de Navier-Stokes. La méthode des volumes finis consiste à calculer une équation sur un maillage cartésien composé de cellules rectangulaires. Pour plus de simplicité, nous nous concentrerons sur l'exploitation d'une cellule d'un maillage. La méthode de volume finis utilisée est de type "cell centered", c'est-à-dire que la discrétisation d'un champ scalaire se fera au centre de cette cellule, que l'on ramènera à un volume de contrôle  $\Omega_P$  de centre P (figure 3.4). Pour illustrer celle-ci, on considère une équation générique de transport sous forme conservative d'un champ scalaire  $\phi$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (D\nabla\phi) + S(\phi) \quad (3.55)$$

On intègre cette équation sur le volume de contrôle  $\Omega_P$ :

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{\Omega_P} \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) dv = \int_{\Omega_P} \nabla \cdot (D\nabla\phi) dv + \int_{\Omega_P} S(\phi) dv \quad (3.56)$$

La figure 3.4 montre une coupe 2D de la cellule de contrôle de centre P, de coordonnées (i,j), de surfaces sortantes  $S_n$ ,  $S_s$ ,  $S_w$  et  $S_e$ , de normales  $\vec{n}_n$ ,  $\vec{n}_s$ ,  $\vec{n}_w$  et  $\vec{n}_e$  des quatre faces de la cellule. On note  $S_{tot} = \bigcup_{i=n,s,w,e} S_i$  la surface totale de  $\Omega_P$ .

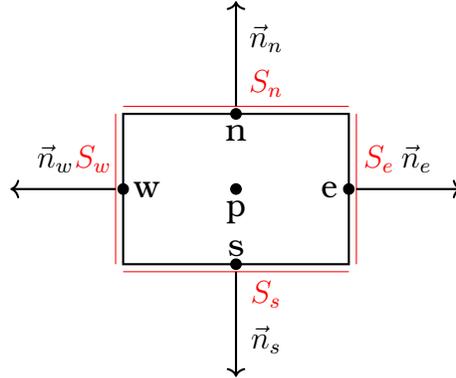


Fig 3.4: Coupe 2D du volume de contrôle  $\Omega_P$ , de centre P

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de convertir les flux volumiques du terme convectif en flux surfaciques sur les termes contenant un gradient. À partir de l'équation 3.56, nous obtenons:

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{S_{tot}} (\mathbf{u}\phi) \cdot \vec{n} ds = \int_{S_{tot}} (D\nabla\phi) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega_P} S(\phi) dv \quad (3.57)$$

La méthode des volumes finis permet de calculer les différents termes de l'équation pour une valeur moyenne  $\bar{\phi}$  centrée sur le point milieu P du volume de contrôle, en fonction de la somme des flux sortants de la cellule considérée:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Omega_P} \int_{\Omega_P} \phi dv \approx \phi_p \quad (3.58)$$

De ce fait on calculera la plupart des termes à partir des valeurs moyennes mises en jeu, tel que le terme temporel ou le terme source, ou en interpolant les valeurs moyennes permettant le calcul des flux du terme diffusif, à partir d'un stencil, c'est-à-dire l'ensemble formé par le volume de contrôle sur lequel on calcule nos termes de l'équation, ainsi que les volumes voisins dont nous utiliserons les points centrés, ainsi que les points sur les bords des cellules. Un exemple de stencil à 5 points est visible sur la figure 3.5.

Nous allons brièvement détailler la discrétisation des différents termes constituant l'équation 3.55 implémentée dans le code NOTUS. Par simplicité,

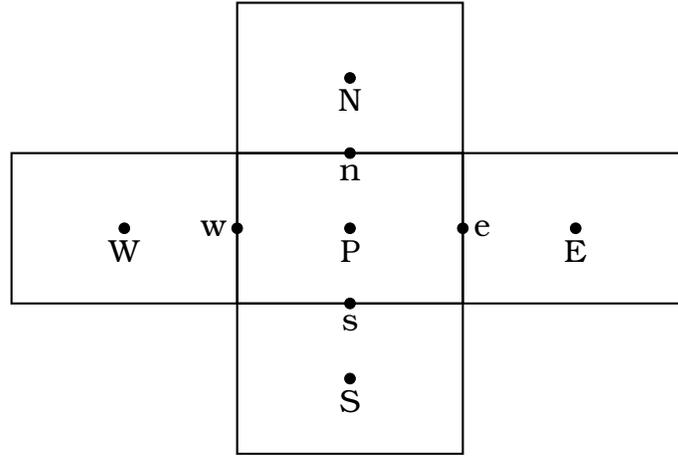


Fig 3.5: Schéma du stencil

nous nous concentrerons sur une discrétisation 1D dans l'axe horizontal. On notera  $\Delta x$  le pas spatial tel que  $\Delta x = x(P) - x(W) = x(E) - x(P) = x_{i+1} - x_i$  du maillage, et  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  le pas temporel entre les deux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  sur lesquels est intégrée l'équation 3.55. Pour plus de commodité nous écrirons les valeurs moyennées  $\bar{\phi} = \phi$ .

### 3.2.2 Discrétisation du terme temporel

Nous commençons par expliciter la discrétisation temporelle de l'équation d'advection, et plus particulièrement de son premier terme.

Le terme temporel de l'équation est discrétisé par la méthode d'Euler explicite, qui se résume à un développement de Taylor d'ordre 1 de la dérivée de  $\phi$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad (3.59)$$

L'avancement de l'équation de transport se fera en fonction du pas de temps  $\Delta t$ . Nous préciserons dans le sous-chapitre 3.2.6 le critère de stabilité numérique qui nécessitera d'utiliser un pas de temps adaptatif.

Pour finir, nous utiliserons la méthode d'Euler explicite pour le terme de gravité ou de tension de surface pour l'équation de Navier-Stokes, ou pour la composante explicite du terme source du modèle de Phillips dont nous détaillerons la discrétisation dans le sous-chapitre 3.2.5.

### 3.2.3 Discrétisation du terme d'advection

La discrétisation spatiale du terme d'advection implique souvent d'utiliser des schémas d'ordre élevé pour bien capter l'advection d'un champ. Lorsque celui-ci contient des discontinuités, deux phénomènes sont susceptibles de dégrader le calcul de la solution: la diffusion d'un champ (scalaire ou vectoriel) et la résonance qui se développe au niveau des discontinuités, équivalent à un phénomène de Gibbs. Afin de limiter leurs actions, plusieurs familles de schémas ont été développées. Ces problèmes sont basés sur des équations hyperboliques (équation d'Euler, de Burger ou de Saint-Venant). Ils permettent entre autres de simuler la propagation d'ondes de choc (problème du tube à choc avec l'équation d'Euler), ou de l'avancée d'un front d'onde (rupture de barrage avec l'équation de Saint-Venant). Les schémas mis en place sont particulièrement utiles pour la discrétisation du terme d'advection de Navier-Stokes, et ont été documentés en particulier pour le transport d'une interface entre deux fluides immiscibles. Parmi eux, nous retrouvons la famille des schémas ENO (Essentially Non-Oscillatory) accompagnés de leur forme pondérée, les schémas WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), ainsi que les schémas TVD (Total Variation Diminishing). Nous détaillerons ici le fonctionnement des schémas WENO que nous utiliserons pour la discrétisation spatiale du terme d'advection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et du schéma TVD de type Lax-Wendroff Superbee, que nous utiliserons pour le terme d'advection des équations de concentration et de Phillips.

Reprenons l'équation 3.55 et mettons de côté le terme diffusif et le terme source. Le terme d'advection est ramené à une fonction générique  $Q = u\phi$  tel que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.60)$$

L'intégration temporelle et spatiale de l'équation par la méthode des volumes finis s'écrit alors:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt = (\phi^{n+1} - \phi^n) \Delta x + \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \Delta t \quad (3.61)$$

Avec  $F$  les flux numériques tels que  $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) / \Delta x$ . À noter l'expression des flux selon  $n$  uniquement car nous utiliserons une discrétisation explicite du terme d'advection, permettant de monter en ordre par rapport à des

schémas implicites utilisant un terme d'indice  $n+1$ , moins précis et trop diffusifs.

Les schémas d'advection consistent à choisir de quelle façon nous allons discrétiser ces flux numériques. Le schéma WENO sera utilisé pour l'équation d'advection de la fonction couleur que nous détaillons dans le chapitre 3.2.8, ainsi que pour le terme d'advection de l'équation de conservation de quantité de mouvement pour laquelle  $\phi$  est remplacé par le vecteur vitesse. Le schéma Lax-Wendroff sera employé pour l'équation de concentration d'espèce et l'équation du modèle de Phillips.

### Schéma WENO

Les schémas WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory) sont développés à partir des schémas ENO (Essentially Non Oscillatory), basés sur l'interpolation polynomiale des points de grilles (stencils) aux abords du point  $i$  de la cellule pour laquelle nous souhaitons calculer les flux numériques. L'intérêt de ces schémas est de pouvoir amortir les discontinuités à l'aide de coefficients de pondérations. Pour voir l'ensemble de la construction des schémas ENO et WENO, se reporter vers Shu [183], Liu [184] ou encore Jiu et al [185].

On considère une grille de  $N$  cellules et  $N+1$  points, centrée autour du point  $i$  (et de sa cellule  $I_i$ ) :

$$I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.62)$$

La valeur moyenne de chaque cellule, conformément à la formulation de la méthode des volumes finis est:

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q(x) dx \quad (3.63)$$

On définit une grille  $S_r(i) = \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\}$  contenant  $r$  cellules à gauche de la cellule  $I_i$  et  $s$  cellules à droite. Le flux numérique  $F_{i+\frac{1}{2}}$  se base sur la pondération du terme  $Q$  qui sera reconstruit par interpolations sur le stencil  $S_r$ .

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \sum_0^{r=K-1} \omega_r Q_{i+\frac{1}{2}}^r \quad (3.64)$$

Avec  $K$  un coefficient tel que l'ordre du schéma WENO soit égal à  $2K - 1$ , et  $\omega_r$  les

coefficients de pondérations tels que :

$$\sum_{r=0}^{K-1} \omega_r = 1 \text{ et } \omega_r \geq 0 \quad (3.65)$$

Le terme reconstruit  $Q^r$  est interpolé sur le stencil  $S_r$ :

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^r = \sum_{j=0}^{K-1} c_{rj} \bar{Q}_{i-r+j} \quad r = 0, \dots, K-1 \quad (3.66)$$

Les coefficients d'interpolation  $c_{rj}$  dépendent du nombre de cellules  $r$  à gauche et  $s$  à droite, ainsi que de l'ordre  $K$  de l'approximation polynomiale de  $f$ . Pour un schéma Weno d'ordre 3, aussi noté Weno3, les coefficients  $c_{rj}$  sont compilées dans le tableau 3.1.

Coefficients d'interpolation $c_{rj}$		
$K-1$	$j=0$	$j=1$
0	1/2	1/2
1	-1/2	3/6

Tableau 3.1: Tableau des coefficients d'interpolation  $c_{rj}$  pour WENO3.

Les coefficients barycentriques  $\omega_r$  permettent de reconstruire un flux en limitant les erreurs numériques sur les discontinuités. On définit les coefficients par:

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{j=0}^{K-1} \alpha_n} \quad (3.67)$$

Les termes  $\alpha_r$  s'écrivent au moyen d'indicateurs de régularités  $\beta_r$  et de poids  $d_r$  tels que:

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2} \quad (3.68)$$

Pour un schéma Weno d'ordre 3, les coefficients s'écrivent:

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2/3 \\
d_2 &= 1/3 \\
\beta_1 &= (\bar{Q}_{i+1} - \bar{Q}_i)^2 \\
\beta_2 &= (\bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1})^2
\end{aligned}$$

De la même façon on calcule le flux numérique  $F_{i-\frac{1}{2}}$ . Jiu et al [185] suggèrent de décomposer les flux en fonction du signe de la vitesse, afin d'utiliser une approche upwind:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i-\frac{1}{2}}^+ + F_{i-\frac{1}{2}}^- \quad (3.69)$$

Avec:

$$\frac{\partial Q^+}{\partial u} \leq 0 \text{ et } \frac{\partial Q^-}{\partial u} \geq 0 \quad (3.70)$$

La discrétisation temporelle du schéma WENO est de type NSSP (NonStrong Stability Preserving Explicit) Runge-Kutta. Pour le schéma WENO3, nous utiliserons une méthode d'ordre 2. Nous ne détaillerons pas ici la discrétisation temporelle, plus de détails sont disponibles dans la publication de Wang et al. [186].

### **Schéma Lax-Wendroff**

Nous utiliserons un schéma de type Lax-Wendroff (Sweby [187]) pour discrétiser le terme d'advection de la concentration d'espèce et du modèle de Phillips. Contrairement au schéma WENO, c'est un schéma d'ordre 2 en espace et en temps.

Repartons d'une forme simplifiée de l'équation 3.55, sous la forme d'une équation d'advection sous sa forme non conservative :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.71)$$

Nous avons vu, à l'aide de la discrétisation temporelle, dans le sous-chapitre

3.2.2, qu'il est aisé d'écrire l'équation sous la forme discrétisée:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (3.72)$$

Pour ce schéma, nous utiliserons une combinaison de flux numériques d'ordre élevés  $F_h$  et d'ordre moins élevés  $F_l$ , accompagnés d'un limiteur de flux  $\Psi$ . Celui-ci va permettre de limiter la pente du flux en limitant l'erreur qui peut survenir au moment de la reconstruction du flux. Le flux numérique  $F_{i+\frac{1}{2}}$  prend ainsi la forme:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_h + (F_h - F_l) \psi \quad (3.73)$$

Le limiteur de flux sera de type Superbee. On définit le rapport des gradients successifs  $\Upsilon$  de  $\phi$  par:

$$\Upsilon(i) = \frac{\phi(i) - \phi(i-1)}{\phi(i+1) - \phi(i)} \quad (3.74)$$

Le limiteur de flux Superbee est alors défini par :

$$\Psi(i) = \max(0, \min(1, 2\Upsilon(i)), \min(\Upsilon(i), 2)) \quad (3.75)$$

Pour le flux d'ordre élevé  $F_h$ , nous utiliserons un schéma Lax-Wendroff d'ordre 2, et pour le flux  $F_l$  nous utiliserons un schéma upwind d'ordre 1. Le flux  $F_{i+\frac{1}{2}}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}} &= u(i + \frac{1}{2})\phi(i) + \frac{1}{2}u(i + \frac{1}{2})(1 - \zeta)(\phi(i+1) - \phi(i))\Psi(i) \text{ pour } u(i + \frac{1}{2}) > 0 \\ F_{i+\frac{1}{2}} &= u(i + \frac{1}{2})\phi(i+1) + \frac{1}{2}u(i + \frac{1}{2})(1 - \zeta)(\phi(i+1) - \phi(i))\Psi(i) \text{ pour } u(i + \frac{1}{2}) < 0 \end{aligned}$$

Le terme  $\zeta$  est un terme adimensionnel, que l'on appelle nombre de Courant, où coefficient CFL. Il intervient dans la stabilité de la résolution numérique des schémas explicites. Nous reviendrons plus en détail dessus dans le sous-paragraphe 3.2.6.

$$coef f_{CFL} = \frac{u(i + \frac{1}{2})\Delta t}{\Delta x} \quad (3.76)$$

On obtient ainsi un schéma TVD (Total Variation Diminishing), c'est-à-dire un schéma pour lequel la variation totale d'une variable  $\phi$ , notée  $VT(\phi^n)$ , vérifie pour chaque incrément de temps  $t^n$ :

$$VT(\phi^{n+1}) \leq VT(\phi^n) \quad (3.77)$$

Avec pour définition de la variation totale:

$$VT(\phi^n) = \sum_i |\phi_i^n - \phi_{i-1}^n| \quad (3.78)$$

Un schéma TVD permet de préserver la monotonie, c'est-à-dire éviter la formation d'erreurs numériques qui viendraient modifier les extrema de la solution. Le schéma Lax-Wendroff TVD Superbee est de ce fait employé car il amortit correctement les oscillations numériques qui sont susceptibles de survenir lors de la formation d'un rouleau, pour un coût en temps de calcul inférieur à celui d'un schéma WENO.

### 3.2.4 Discrétisation du terme de diffusion

Comme nous l'avons vu dans la formulation des volumes finis, le terme de diffusion se ramène à une diffusion moyenne sur le centre de la cellule, égale à la somme des flux sortant de la cellule de contrôle :

$$\nabla \cdot D \nabla \bar{\phi} = \frac{1}{\Delta x} \int_{S_e \cup S_w} (D \nabla \phi) \cdot \vec{n} ds \quad (3.79)$$

Le coefficient de diffusion  $D$  est interpolé à l'aide d'une interpolation harmonique et le gradient  $\nabla \phi$  est discrétisé à l'aide d'un schéma centré d'ordre 2 tel qu'au point  $P$  de coordonnées  $(i,j)$ . Nous écrirons  $FD$  les flux de diffusion du coefficient  $D$  situé sur les points des faces de la cellule (par exemple  $e$  ou  $w$  sur la figure 3.5), sur un maillage régulier de pas spatial  $\Delta x$ :

$$\nabla \cdot D \nabla \bar{\phi}(i, j) = \frac{1}{\Delta x} FD_{\frac{1}{2}} \phi(i + \frac{1}{2}, j) - \frac{1}{\Delta x} (FD_{\frac{1}{2}} + FD_{-\frac{1}{2}}) \phi(i, j) + \frac{1}{\Delta x} FD_{-\frac{1}{2}} \phi(i - \frac{1}{2}, j) \quad (3.80)$$

Le terme de dissipation visqueuse de l'équation de conservation de mouvement se traite d'une façon similaire, nous ne le détaillerons donc pas ici. La discrétisation temporelle du terme de diffusion sera implicite d'ordre 1, à l'aide de la méthode d'Euler. En conséquence on discrétisera le gradient au temps d'indice supérieur  $t^{n+1}$ .

### 3.2.5 Discrétisation du terme source

Nous allons nous pencher sur la discrétisation du terme source  $S$ , et plus particulièrement sur celui du modèle de Phillips. Au lieu d'un champ scalaire  $\phi$  quelconque, nous utiliserons ici  $\phi^s$ .

Le terme source de l'équation du modèle de Phillips  $S$  peut fortement influencer sur la valeur de la fraction volumique, en la diminuant ou l'augmentant en fonction de sa valeur. Or le terme source est une fonction de la fraction volumique  $\phi^s$ , l'inconnue calculée par l'équation de ségrégation particulaire.

$$S(\phi^s) = \nabla \cdot \left( D_c a^2 \phi^{s^2} \nabla \dot{\gamma} \right) \quad (3.81)$$

Cela peut engendrer une instabilité numérique si le calcul du terme source n'est pas de suffisamment bonne qualité, d'autant plus que le modèle de transport des poudres est borné par le modèle de viscosité de Krieger. En conséquence, il est important de prêter attention à la discrétisation de ce terme source.

Le terme source  $S(\phi^s)$  peut être discrétisé de deux façons différentes:

- **Forme explicite:** L'écriture du terme source sous forme explicite consiste à utiliser la valeur de la fraction volumique calculée à l'itération précédente  $n$ , notée  $\phi^{s^n}$ . On injecte donc dans l'équation de Phillips le terme:

$$S(\phi^s) = \nabla \cdot \left( D_c a^2 \phi^{n s^2} \nabla \dot{\gamma} \right) \quad (3.82)$$

Cette forme s'avère très simple à implémenter, mais elle est susceptible de ne pas être robuste. Le mélangeage d'un fluide chargé engendre un cisaillement important, l'influence du terme source sera donc importante dans la résolution du modèle de Phillips. Afin d'éviter de faire diverger le calcul, il est préférable d'éviter cette approche.

- **Linéarisation du terme source:** La linéarisation du terme source consiste à réécrire ce terme sous la forme d'une fonction linéaire de  $S(\phi^s)$  en faisant un développement en série de Taylor du terme source à partir de sa valeur à l'itération précédente  $S(\phi^s)^n$ :

$$S(\phi^s) = S(\phi^s)^n + \left( \frac{dS(\phi^s)}{d\phi^s} \right)^n \left( \phi^{s^{n+1}} - \phi^{s^n} \right) \quad (3.83)$$

Les termes purement explicites seront contenus dans la variable  $S_c$ :

$$S_c = S(\phi^s)^n - \left( \frac{dS(\phi^s)}{d\phi^s} \right)^n \phi^{s^n} \quad (3.84)$$

Pour simplifier l'écriture du terme source, nous définissons un coefficient  $S_p = \left( \frac{dS(\phi^s)}{d\phi^s} \right)^n$ . On obtient alors une expression contenant un terme explicite et un terme linéaire implicite:

$$S(\phi^s) = S_p \phi^{s^{n+1}} + S_c \quad (3.85)$$

$S_p$  est la pente du terme source. Si celle-ci est positive, l'expression explicite du terme source, tel que  $S(\phi^s) = S_c$  et  $S_p = 0$  est nécessaire pour stabiliser le calcul. Patankar [188] et Amiroudine et al. [189] détaillent la condition du critère de stabilité.

Nous utiliserons une discrétisation spatiale linéarisée du terme source, que nous avons implémenté dans le code NOTUS. La discrétisation temporelle du terme source est d'ordre 1 et utilise la méthode d'Euler.

### 3.2.6 Critère de stabilité

Dans l'ensemble de nos simulations, nous utiliserons un maillage régulier, de telle sorte que le pas d'espace soit constant dans un même axe. Ainsi pour une discrétisation 1D, le pas d'espace  $\Delta x$  est le même entre tous les points des centres des cellules du maillage.

Le pas de temps est calculé en fonction d'un coefficient CFL (Courant-Friedrich-Levy) [190], noté  $coef_{CFL}$ , qui conditionne la stabilité numérique d'un schéma numérique discrétisé explicitement. Ce sera le cas du terme d'advection des différentes équations que nous utiliserons telles que celles de Navier-Stokes, de concentration, du modèle de Phillips ou d'advection. En 1D, la condition CFL d'une équation d'advection se résume à:

$$\frac{\max|\mathbf{u}|\Delta t}{\Delta x} \leq coef_{CFL} \quad (3.86)$$

Le coefficient CFL admissible dépend du schéma que nous utilisons. Nous utiliserons un coefficient CFL de 0.3 pour les schémas WENO ou de Lax-Wendroff. Un coefficient plus petit pourra être employé, notamment avec le

modèle de Phillips pour lequel le couplage avec une loi de comportement peu entraîner une divergence du calcul pour des écoulements très chargés.

Le code NOTUS contient un algorithme permettant de respecter le critère de stabilité en utilisant un pas de temps adaptatif. Nous utiliserons cet algorithme afin de garantir la stabilité numérique du schéma d'advection.

### 3.2.7 Couplage vitesse-pression

Il est bien connu que mis à part le traitement du terme non linéaire, la principale difficulté pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes réside dans l'étape de Stokes généralisée, plus exactement dans la détermination d'un champ de pression assurant une vitesse à divergence nulle. Comment découpler la vitesse et la pression sans dégrader les propriétés de stabilité et de précision du schéma choisi au départ pour discrétiser les équations de Navier-Stokes? Historiquement, la première idée a été proposée par Uzawa [191] et plus tard adaptée pour une approximation par méthodes spectrales. A la fin des années 60, et dans un esprit complètement différent, A. J. Chorin [192] a eu l'idée de découpler la vitesse de la pression par décomposition des opérateurs en jeu. Cette procédure aboutit, pour un écoulement confiné, au traitement d'une étape de diffusion qui permet de prédire un champ de vitesse, sur lequel une correction est effectuée aussitôt par le biais d'une projection orthogonale sur l'espace des vitesses à divergence et composante normale au bord identiquement nulles, et donnant en même temps le champ de pression. C'est l'étape de pression-continuité dont la résolution est plus simple et comparable à celle d'un problème de Poisson. Ce genre de technique a reçu depuis le nom de méthode de projection. Poursuivant dans la même optique K. Goda [193] a suggéré une modification qui améliore la précision du schéma et lui confère une plus grande stabilité. Cependant la précision sur la pression fournit par cet algorithme reste insuffisante.

Ici nous allons préciser l'une des méthodes utilisées au sein du code NOTUS et qui a été initiée par Timmermans et al. [194].

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \rho(\mathbf{g} + \mathbf{f}) \quad (3.87)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.88)$$

L'équation de Navier-Stokes permet de calculer la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ , pour une valeur connue de la viscosité (on utilisera un terme explicite) et du terme source. L'équation discrétisée, pour chaque pas de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  devient:

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \left[ \mu^n \left( \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \mathbf{u}^{n+1T} \right) \right] + \rho^n (\mathbf{g} + A\omega^2 \sin(\omega t^{n+1}) \mathbf{y}) \quad (3.89)$$

L'équation étant à deux inconnues, il est nécessaire d'utiliser la valeur connue de la pression  $p$  à l'itération précédente  $t^n$ , dont le gradient est  $\nabla p^n$ . On définit une vitesse prédicte  $\mathbf{u}^{*n+1}$ , calculée pour une forme explicite de la pression  $\nabla p^n$ , la valeur  $\nabla p^{n+1}$  étant inconnue.

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{*n+1}}{\Delta t} + \rho^n \frac{\mathbf{u}^{*n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = -\nabla p^{n+1} + \nabla p^n - \nabla p^n + \nabla \cdot \left[ \mu^n \left( \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \mathbf{u}^{n+1T} \right) \right] + \rho^n (\mathbf{g} + A\omega^2 \sin(\omega t^{n+1}) \mathbf{y}) \quad (3.90)$$

L'équation de Navier-Stokes permet alors de calculer la vitesse prédicte  $\mathbf{u}^{*n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ .

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{*n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = -\nabla p^n + \nabla \cdot \left[ \mu^n \left( \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^T \mathbf{u}^{n+1} \right) \right] + \rho^n (\mathbf{g} + A\omega^2 \sin(\omega t^{n+1}) \mathbf{y}) \quad (3.91)$$

Calculer la vitesse prédicte  $\mathbf{u}^{*n+1}$  ne suffit pas à résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement. En effet, celle-ci ne respectant donc pas la condition d'incompressibilité du fluide visqueux réduit à l'équation (3.88).

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{*n+1} \neq 0 \quad (3.92)$$

Pour corriger celle-ci nous allons rajouter une étape dite de projection-correction. Pour cela on définit un incrément de pression  $\Phi = p^{n+1} - p^n$  et on résout :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{*n+1}}{\Delta t} = -(\nabla p^{n+1} - \nabla p^n) = -\nabla \Phi \quad (3.93)$$

Naturellement la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  calculée à l'instant  $t^{n+1}$  vérifie (3.88).

L'objectif est maintenant de calculer  $\Phi$ . Nous pouvons transformer l'équation (3.93) en une équation de Poisson, en appliquant la divergence à l'ensemble de ses termes.

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\rho^n} \nabla \Phi \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{u}^{*n+1} = -\nabla \cdot \mathbf{u}^{*n+1} \quad (3.94)$$

Afin de pouvoir résoudre l'équation de Poisson, il est nécessaire de fermer le

système en imposant des conditions aux bords  $\Gamma$ , de normale sortante  $n_\Gamma$ , de type Neumann homogène:

$$\nabla\Phi \cdot n_\Gamma = 0 \quad (3.95)$$

Une fois que le champ scalaire  $\Phi$  est connu, il est aisé de calculer le gradient de pression  $\nabla p^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ . Le code NOTUS permet de choisir entre l'implémentation proposée par Goda [193], ou celle de Timmermans [194], pour laquelle la pression est corrigée en rajoutant un terme dépendant de la divergence de la vitesse prédite et de la viscosité  $-\mu\nabla \cdot u^{*n+1}$ . On peut synthétiser la correction de la pression en introduisant un coefficient  $\alpha$ , tel que:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{Timmermans} \\ 0 & \text{Goda} \end{cases} \quad (3.96)$$

$$p^{n+1} = p^n + \Phi - \alpha\mu\nabla \cdot u^{*n+1} \quad (3.97)$$

$$p^{n+1} = p^n + \Phi \quad (3.98)$$

La méthode de Timmermans est employée pour un fluide à viscosité homogène. Étant donné que nous ne considérerons que des fluides dont la viscosité est variable dans cette thèse, seule l'implémentation de Goda sera employée. Il convient alors de calculer la vitesse corrigée  $u^{n+1}$  à partir de l'équation (3.93) :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{*n+1} - \frac{\Delta t}{\rho^n} \nabla\Phi \quad (3.99)$$

La masse volumique et la viscosité peuvent alors être actualisées à l'instant  $t^{n+1}$ :  $\rho^{n+1}, \mu^{n+1}$ .

Concernant l'approximation spatiale, il convient de rappeler que les équations de Navier-Stokes couplent les vitesses et la pression en considérant cette dernière comme multiplicateur de Lagrange assurant la contrainte d'incompressibilité. Il est bien connu que ce couplage, s'il n'est pas correctement pris en compte dans sa discrétisation spatiale, conduit à l'introduction de modes parasites sous forme de hautes fréquences polluant la pression. Dans la cas du code NOTUS, pour assurer la compatibilité entre les inconnues de la pression de celles de la vitesse et donc éviter les modes parasites sur la pression, on utilise la méthode Marker And Cell (MAC), développée par Harlow et al. [195] en 1965. La méthode MAC traite différemment les champs scalaires tel que le champ de pression, des champs vectoriels comme la vitesse du fluide. Les variables scalaires seront traitées au centre de la cellule, tandis que les variables vectorielles seront

traitées séparément selon leurs différentes composantes, horizontales, verticales et transverses. Voir Fig. (3.6).

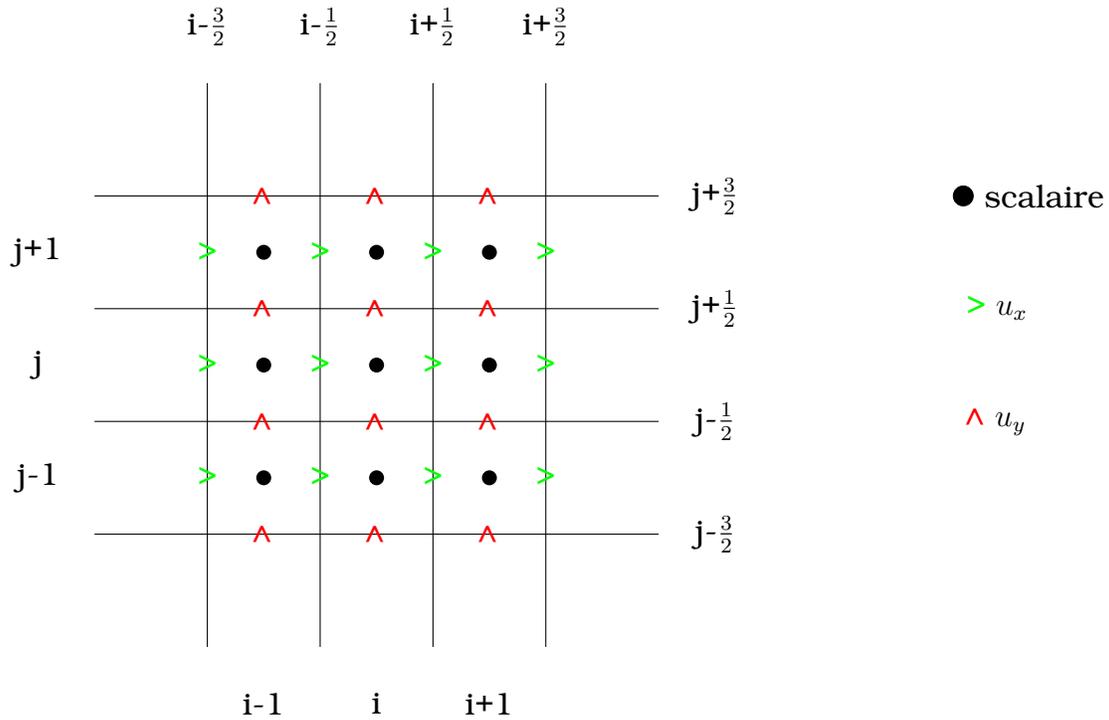


Fig 3.6: Discrétisation par la méthode MAC

Pour finir ce chapitre nous allons présenter la méthode de suivi d'interface utilisée dans nos calculs.

### 3.2.8 Méthode de suivi d'interface

Pour simuler le mouvement d'une interface entre deux fluides immiscibles, il est nécessaire d'employer une méthode de suivi d'interface afin de reconstruire cette interface à chaque itération temporelle. Plusieurs méthodes existent et chacune d'entre elles comportent des avantages et des inconvénients qui vont conditionner leur utilisation en fonction des besoins attendus. Les méthodes les plus courantes sont la méthode Level-Set, la méthode VOF (Volume Of Fluid), et dans une moindre mesure la méthode MOF (Moment Of Fluid).

#### Méthode VOF

La méthode VOF (Volume Of Fluid) est une méthode de suivi d'interface pour les fluides diphasiques, initialement développée par Hirt et Nichols [196]. Elle

consiste à calculer le transport d'un champ scalaire, généralement nommé la fonction couleur  $C$ , pour laquelle une méthode de reconstruction permet de tracer l'interface à chaque itération temporelle pour chaque cellule du maillage de calcul.

La fonction couleur  $C$  est une fonction définie arbitrairement égale à 0 ou 1 pour chacun des deux fluides, et bornée par ces deux valeurs ( $C = [0, 1]$ ). Prenons par exemple le cas où la couleur  $C$  est égale à  $C_A = 1$  pour un fluide A, et  $C_B = 0$  pour un fluide B.

$$C = \begin{cases} 1 & \text{fluide A} \\ 0 & \text{fluide B} \\ ]0, 1[ & \text{fluide A+ fluide B +interface} \end{cases} \quad (3.100)$$

La fonction couleur représente alors la fraction volumique de fluide A dans chaque cellule du maillage considéré. La fraction volumique du fluide B est donc égale à  $1 - C$ . En conséquence, si  $C$  est compris dans l'intervalle  $]0, 1[$  au sein d'une cellule, alors la fraction volumique de chacun des deux fluides est non nulle, ce qui signifie qu'une interface sera construite au sein de cette même cellule. La fonction couleur  $C$  est calculée grâce à une équation de transport, couplée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le calcul de la vitesse  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (3.101)$$

Le calcul de la fonction couleur ne donnant que la fraction volumique pour information, il est nécessaire d'utiliser une méthode de reconstruction pour pouvoir tracer l'interface entre les deux fluides. La figure 3.7 schématise la reconstruction d'une interface en fonction de plusieurs méthodes. La méthode la plus simple et la plus ancienne est la méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation). Elle reconstruit l'interface dans chaque cellule dans la direction normale de la face opposée, dégradant ainsi la solution reconstruite. La méthode PLIC (Piecewise Line Interface Calculation), utilisée au sein du code NOTUS, reconstruit l'interface à partir d'une fonction affine permettant d'approcher la tangente à la courbe de l'interface.

La méthode VOF est d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Le traitement géométrique de l'interface conditionne l'ordre de précision, contrairement à d'autres méthodes comme la méthode Level-Set. Ces méthodes de suivi d'interface et de reconstruction ne sont pas conservatives, ce qui peut engendrer

une perte de masse significative au cours du temps, pour des écoulements intenses comme avec l'instabilité de Faraday. Le choix de paramètres numériques rigoureux permet de limiter les erreurs numériques et ainsi proposer une quasi-conservation de la masse pendant la simulation. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, la méthode VOF-PLIC est suffisamment robuste pour permettre l'obtention de résultats significatifs. Elle sera donc la seule méthode employée dans cette étude.

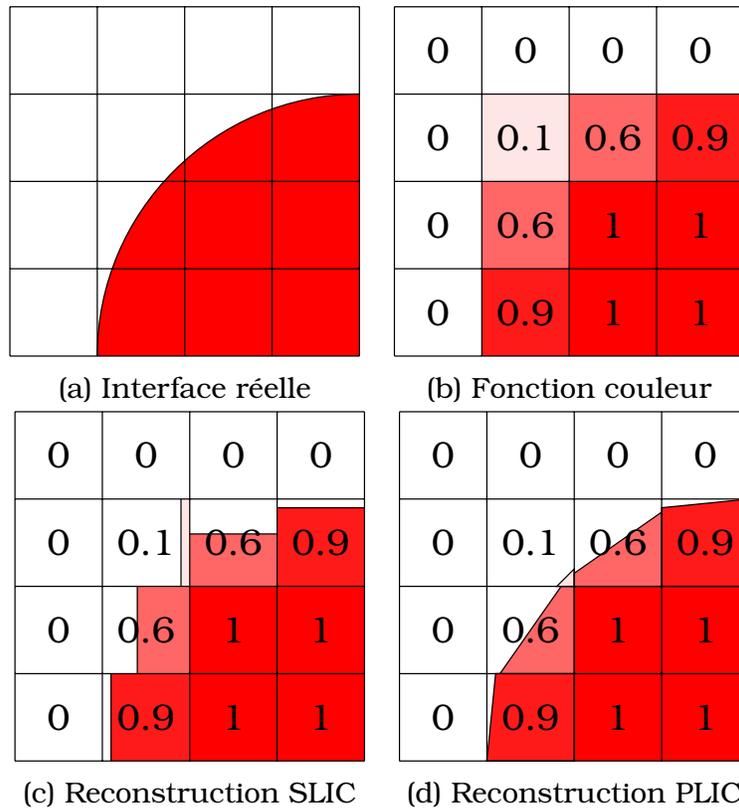


Fig 3.7: Comparaison des méthodes de reconstruction d'interface SLIC et PLIC

Pour finir avec la présentation des modèles et des outils numériques utilisés tout au long de cette thèse, nous présentons dans l'annexe A les méthodes de calcul de diagramme de stabilité permettant de calibrer le choix des paramètres de mélange qui dans le cas de notre étude sont la fréquence et l'amplitude.

# Chapitre 4

## Mélangeage diphasique

Le brassage d'un système diphasique implique de suivre l'évolution de l'interface en fonction du régime vibratoire imposé. En fonction de ce régime, le comportement de l'interface se caractérise par la formation d'ondes ou la fracturation de l'interface. Des gouttes/bulles ainsi que la formation de colonnes de fluides sont susceptibles de se former. Le choix d'une méthode numérique robuste est donc nécessaire pour pouvoir retranscrire fidèlement le mouvement local de l'interface. Parmi les méthodes disponibles dans le code NOTUS, nous utiliserons exclusivement la méthode VOF. Elle a d'ores et déjà été exploitée pour la simulation du déferlement de vagues, et correspond à nos critères de stabilité et de conservation. Grâce aux différentes validations nous verrons que cette méthode remplit les critères de fidélité nécessaires à son utilisation pour simuler un brassage de fluides dans le mélangeur RAM. Des comparaisons numériques/expérimentales avec celui-ci seront ensuite développées.

### 4.1 Validation

La validation de la méthode VOF est décomposée en trois étapes, correspondant à trois critères successifs. L'objectif est de vérifier que le code NOTUS permet de retranscrire correctement le comportement du système diphasique avant de passer à une situation réelle avec le mélangeur RAM.

- **Validation sans vibrations** : le premier test sera basé sur le suivi d'interface pour une configuration permettant de faire apparaître l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

- **Validation avec vibrations** : nous comparerons les résultats produits avec NOTUS avec ceux disponibles dans la littérature pour un cas test permettant de former une colonne de fluide jusqu'à rupture de l'interface.
- **Validation avec vibrations dans une cellule de Hele-Shaw** : nous comparerons les résultats produits avec NOTUS avec ceux disponibles dans la littérature pour un cas test pour lequel l'onde formée par l'interface soumise aux vibrations est contenue dans une cellule de faible profondeur. Nous utiliserons le modèle décrit dans le chapitre 3.1.3 pour valider cette étape.

### 4.1.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'instabilité de Rayleigh-Taylor permet d'approcher celle de Faraday, en négligeant les vibrations. La simulation numérique de cette instabilité constitue un cas intéressant pour vérifier l'efficacité de la méthode de suivi d'interface. Simple à mettre en oeuvre et peu coûteuse en temps, elle est déjà exploitée dans les années 80 par Tryggvason [65], puis par [66] ou encore [62]. Les différents travaux cités se concentrent sur le développement de la plume d'instabilité et ne prennent pas en compte le reste de l'écoulement. Des travaux plus récents, tels que celui de Lee et al. [67], développent l'étude du retournement des deux phases jusqu'à l'équilibre final, atteint lorsque la phase de masse volumique la plus élevée est au repos en-dessous de la phase la plus légère. Ces travaux, effectués à l'aide d'une méthode phase-field, étudie le comportement des phases dispersées au cours du brassage des deux phases. Nous nous concentrerons sur la chute initiale du polype, qui correspond à nos besoins, c'est-à-dire la formation d'une plume qui interpénètre les deux phases superposées, et que nous retrouverons par la suite lors de l'imposition des vibrations.

Nous considérons deux fluides immiscibles, le plus lourd étant situé au-dessus du fluide léger. Ces deux phases, dont les propriétés sont résumées dans le tableau 4.1, sont superposées de tel sorte que la chute du fluide le plus lourd, pilotée par la gravité, forme un polype dont la forme de l'interface à l'état initial est  $n(x)$ , dans un domaine fermé  $\Omega = [0, 1] \times [0, 4]$ , schématisé sur la figure 4.1. La ligne en pointillée représente la moyenne de l'interface, positionnée sur l'axe horizontale médian du domaine. De ce fait le volume de chaque phase est égal et

correspond à la moitié du domaine.

$$n(x) = 2 + 0.1\cos(2\pi x) \quad (4.1)$$

Propriétés des fluides (adimensionnées)			
Fluide	$\rho$	$\mu$	$\sigma$
fluide 1	1	0.003132	0
fluide 2	3	0.003132	

Tableau 4.1: Instabilité de Rayleigh-Taylor : Propriétés des fluides

Le ratio de masse volumique est de  $1/3$ , de telle sorte que le nombre d'Atwood  $A_t$ , défini au chapitre 2.1.1 soit égal à 0.5. La viscosité des deux fluides est identique. On la sélectionne en fonction du nombre de Reynolds, défini par  $Re = (\rho_{min} d^{3/2} g^{1/2} / \mu)$ . Le nombre de Reynolds est défini égal à 1000. Nous suivons deux points positionnés respectivement sur le sommet du polype et celui en contact avec le bord gauche du domaine. Le choix de ce bord est arbitraire, l'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe médian du domaine au cours de la durée étudiée de la chute. Ces points sont schématisés par deux marqueurs rouges sur la figure 4.1.

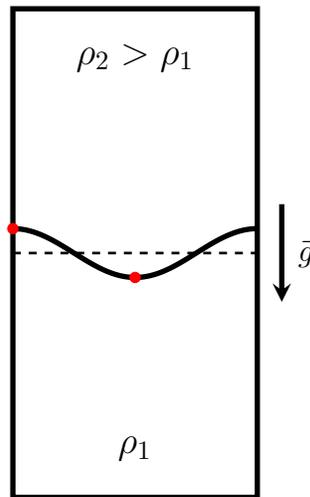


Fig 4.1: Points de l'interface suivis pendant l'écoulement

Le domaine  $\Omega$  est décomposé selon deux maillages distincts, le premier de dimensions  $64 \times 256$ , et un second plus raffiné de dimensions  $128 \times 512$ . Un pas de temps adaptatif adimensionné est utilisé, de telle sorte que le pas de temps maximal soit  $\Delta t_{max} = 1.0^{-3}$  et le coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.45$ . Le même schéma

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Advection
gauche	glissement	glissement
droite	glissement	glissement
haut	mur	mur
bas	mur	mur

Tableau 4.2: Instabilité de Rayleigh-Taylor : Conditions aux bords

WENO3 est utilisé pour le calcul de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et pour l'équation d'advection des phases. Les conditions aux bords sont résumées dans la table 4.2.

À partir des données provenant des articles nommés en introduction de cette étape, nous allons tracer l'évolution de la position de ces marqueurs sur l'interface en fonction du temps. Le temps est adimensionné afin de prendre l'échelle choisie par Tryggvason, soit  $t_{adim} = tU/(L\sqrt{A_t})$  avec  $L$  la plus petite dimension du domaine, soit  $L = 1$ , et  $U = \sqrt{gL}$ . Le profil de l'évolution temporelle du déplacement des marqueurs est calculé par rapport à la position moyenne de l'interface initiale. Le graphe 4.2 présente les résultats obtenus pour les deux maillages. On note que les données obtenues avec le code NOTUS offrent des résultats concordant avec les valeurs de référence de la littérature et sont consistantes, puisqu'elles convergent vers la même solution pour les deux maillages aux niveau des deux marqueurs. Nous présentons dans les figures 4.3 4.4 et 4.5 les résultats obtenus à intervalle régulier dans l'échelle de temps de Tryggvason. La structure complexe des vortex latéraux est sensible à la qualité du maillage. Leur formation est identique pour les deux maillages mais leurs développement n'est pas consistant, il est fortement dépendant de la qualité du maillage, pour un temps adimensionnel supérieur ou égal à 2. Guermond [66] donne les mêmes constatations avec ses simulations en éléments finis pour  $Re = 1000$ .

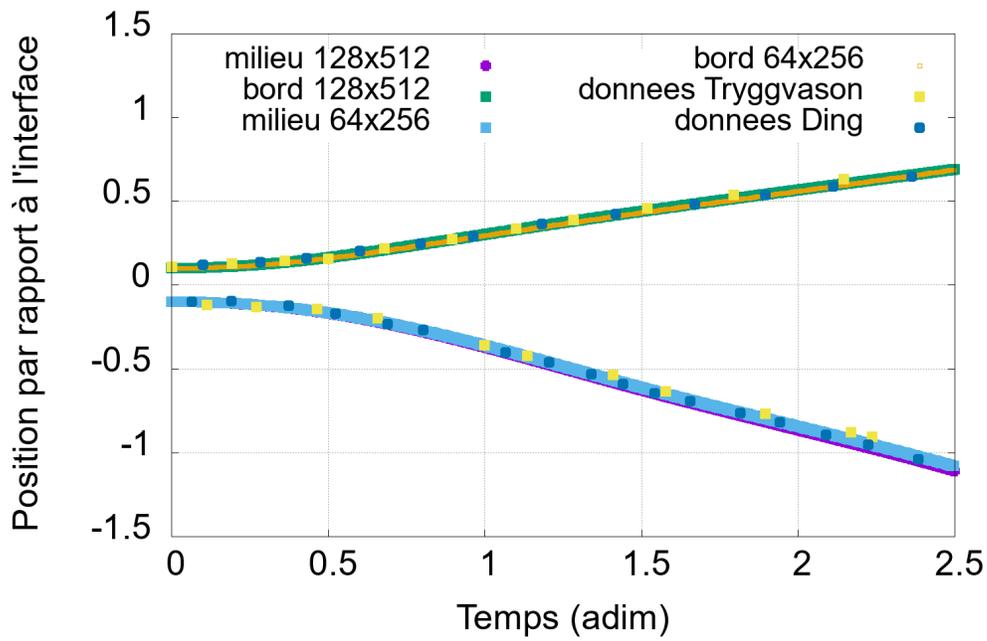


Fig 4.2: Évolution du déplacement de l'interface au milieu du polype et au bord

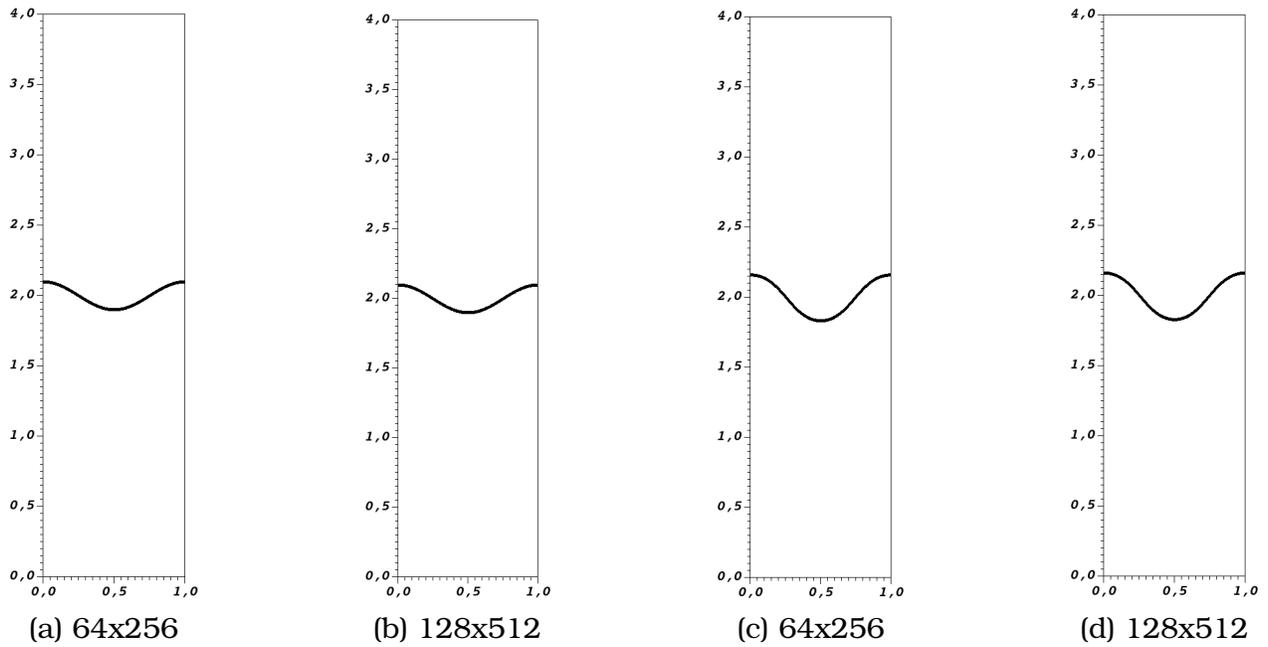
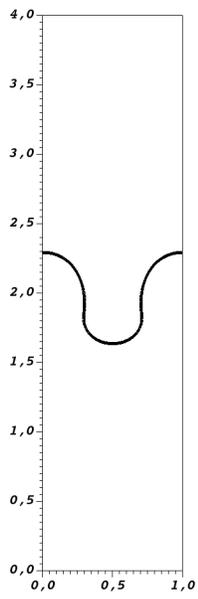
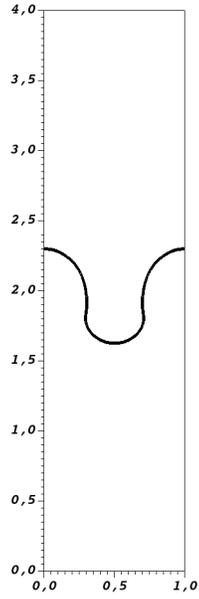


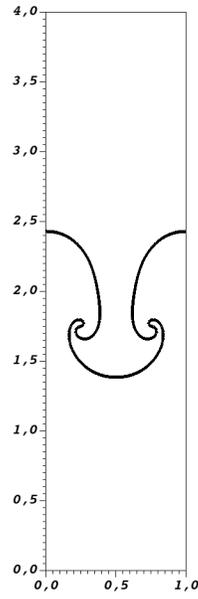
Fig 4.3: Amorçage de l'écoulement : (a)(b)  $t_{adim} = 0$ , (c)(d)  $t_{adim} = 0.5$



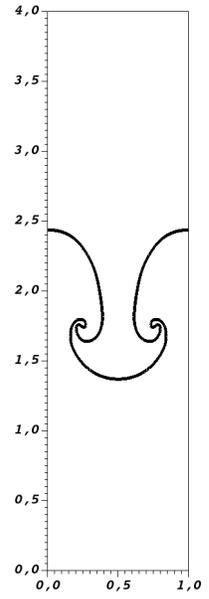
(a) 64x256



(b) 128x512

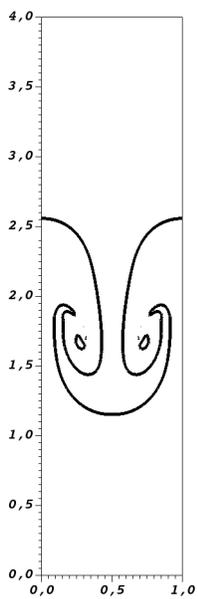


(c) 64x256

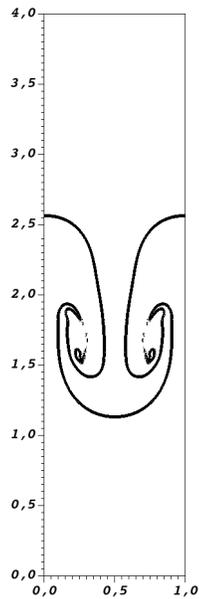


(d) 128x512

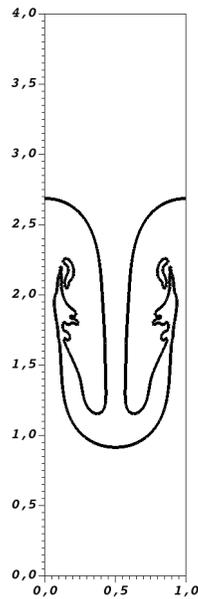
Fig 4.4: (a)(b)  $t_{adim} = 1$ , (c)(d)  $t_{adim} = 1.5$



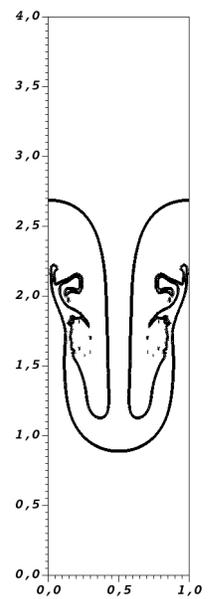
(a) 64x256



(b) 128x512



(c) 64x256



(d) 128x512

Fig 4.5: (a)(b)  $t_{adim} = 2$ , (c)(d)  $t_{adim} = 2.5$

## 4.1.2 Formation de ligament par instabilité de Faraday

Nous reprenons les études effectuées sur la formation de ligaments, par l'intermédiaire de l'instabilité de Faraday [197], [116] et en particulier [29] pour lequel nous allons reprendre un cas test. La formation de ligament en 2D provenant d'une couche de fluide constitue un mécanisme d'atomisation pour lequel une colonne de liquide, similaire à un jet, projette des gouttes formées à la pointe de ce jet. Ces gouttes sont alors propulsées dans la phase supérieure. Nous allons comparer nos solutions numériques avec l'étude numérique de Li et al. [29], ainsi que leurs résultats de l'analyse linéaire de la formation de ces ligaments.

Le système mis en jeu est un système diphasique immiscible liquide/gaz, les deux étant des fluides parfaits dont le ratio de masse volumique est  $\rho_{\text{liquide}}/\rho_{\text{gaz}} = 50$ . Leurs propriétés sont résumées dans le tableau 4.3. On définit un domaine  $\Omega = [0, d] \times [0, 4d]$ , avec  $d$  la hauteur de l'interface  $d = 7.2 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

Propriétés des fluides			
Fluide	$\rho \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$	$\mu \text{ (Pa} \cdot \text{s)}$	$\sigma \text{ (N} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$
liquide	1000	0	0.072
gaz	20	0	

Tableau 4.3: Instabilité de Rayleigh-Taylor : Propriétés des fluides

La phase liquide est positionné en bas, de tel sorte que le système diphasique se trouve dans sa position d'équilibre stable. L'interface initiale prend la forme d'une sinusoïdale de faible amplitude, dont la longueur d'onde est égale à  $d$ , afin d'amorcer le mouvement d'oscillation. Le système diphasique à l'état initial est schématisé sur la figure 4.6.

Les fluides mis en jeu ont une viscosité nulle, les équations de Navier-Stokes pour des fluides parfaits se réduisent aux équations d'Euler incompressibles. Le terme source vibrationnel  $f = A\omega^2 \sin(\omega t)$  pilotera l'accélération liée aux vibrations imposées. L'amplitude des vibrations est  $A = 1.04 \mu\text{m}$ , la pulsation  $\omega = 1.27 \times 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une fréquence  $freq \approx 2 \text{ MHz}$ .

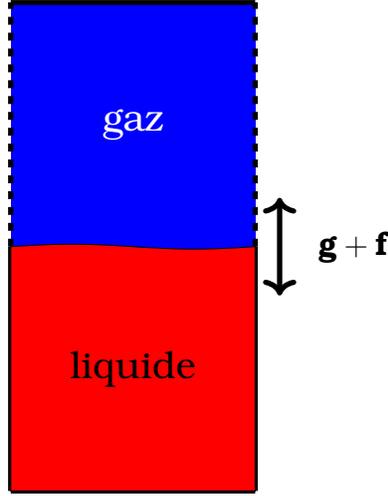


Fig 4.6: Schéma du problème à l'état initial

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho(\mathbf{g} + \mathbf{f}) + \mathbf{f}_s \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les travaux de Benjamin et Ursell [10] permettent de décrire par l'analyse linéaire le comportement de la couche liquide de fluide, dont l'évolution temporelle de l'amplitude  $a(t)$  de l'interface est décrite à l'aide de l'équation de Mathieu. Li et al. utilisent l'équation de Mathieu dans une échelle temporelle dimensionnée par rapport à la pulsation vibratoire  $\hat{t} = \Omega t$ .

$$\frac{d^2 a}{d\hat{t}^2} = (X \sin(\hat{t}) - Y) \cdot a \quad (4.4)$$

Les deux paramètres  $X$  et  $Y$  pilotent l'évolution de la stabilité linéaire de l'amplitude de déformation. Le cas que nous présentons est défini par le couple de paramètres  $(X, Y) = (0.9, 0.3)$ , correspondant aux paramètres du forçage vibrationnel imposé.

$$X = kA \tanh(ky_0) \quad \text{et} \quad Y = \frac{\sigma k^3 \tanh(ky_0)}{\rho_1 \Omega} \quad (4.5)$$

Le diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu est présenté sur la figure 4.7. Un point montre la position des coordonnées utilisées pour la formation du ligament. On note que ce point est positionné sur la première langue d'instabilité correspondant à la première sous-harmonique, ce qui conforte le choix de ce couple de paramètres pour engendrer une rupture d'interface.

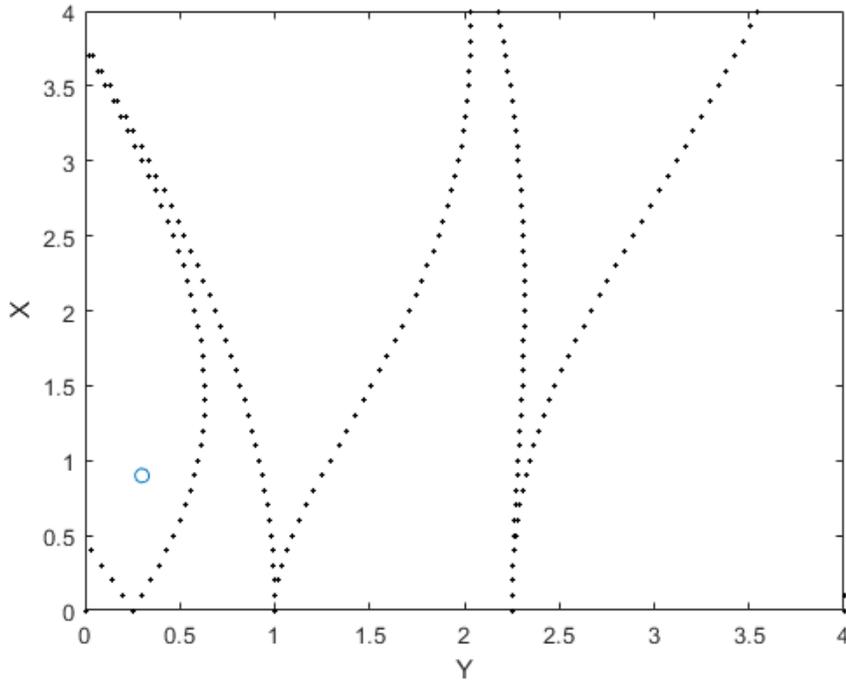


Fig 4.7: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu. Le point bleu de coordonnées  $(X=0.9, Y=0.3)$  correspond aux paramètres de formation du ligament

On étudie la consistance des simulations en exploitant deux maillages de dimensions  $256 \times 1030$  et  $128 \times 515$ . Le domaine de calcul est considéré comme ouvert à son sommet, le bord supérieur est donc défini comme une condition de type neumann homogène dans chacune des équations mises en jeu. La largeur du domaine correspondant à une longueur d'onde initiale de déformation de l'interface. Les bords latéraux sont imposés comme étant des conditions périodiques afin d'éviter l'influence de bords fermés sur le mouvement. Les conditions aux bords du domaine sont résumées dans le tableau 4.4. On utilise un schéma WENO3 pour le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes, et l'équation d'advection des phases. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi / (800\omega)$  s et un coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.3$ .

Les résultats obtenus avec NOTUS montrent une bonne concordance avec le résultat numérique des travaux de Li. Nous compilons ces données sur la figure 4.8. On remarque que la solution analytique de l'instabilité convergent avec les solutions numériques pour un temps  $t < 2.25 T$ , avec  $T = 1/freq$  la période de l'oscillation d'excitation. Au-delà, la solution analytique montre seulement

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Advection
gauche	symétrie	symétrie
droite	symétrie	symétrie
haut	neumann	neumann
bas	mur	mur

Tableau 4.4: Formation de ligament : Conditions aux bords

un comportement similaire correspondant à l'élévation de la colonne de fluide mais sans former une rupture. Entre les différents résultats numériques, la rupture de la colonne de liquide a lieu un peu plus tardivement avec nos simulations. On notera d'ailleurs que la hauteur de la rupture est légèrement plus petite pour le maillage le plus grossier. En effet le résultat des simulations est fortement dépendant de la finesse de la structure calculée au niveau de la séparation entre la goutte et la colonne. Nous proposons nos résultats pour les mêmes temps adimensionnels que Li et al. sur les figures 4.9, 4.10 et 4.11. Une fois la rupture entre la colonne et la goutte formée à son sommet, celle-ci continue son déplacement vers le haut du domaine, comme visible sur la figure 4.12. Le comportement de la colonne se ramène à une instabilité de type Rayleigh-Plateau, en se rétractant son contour se cisaille pour former différentes gouttes, encore liées entre elles, sur l'image (b).

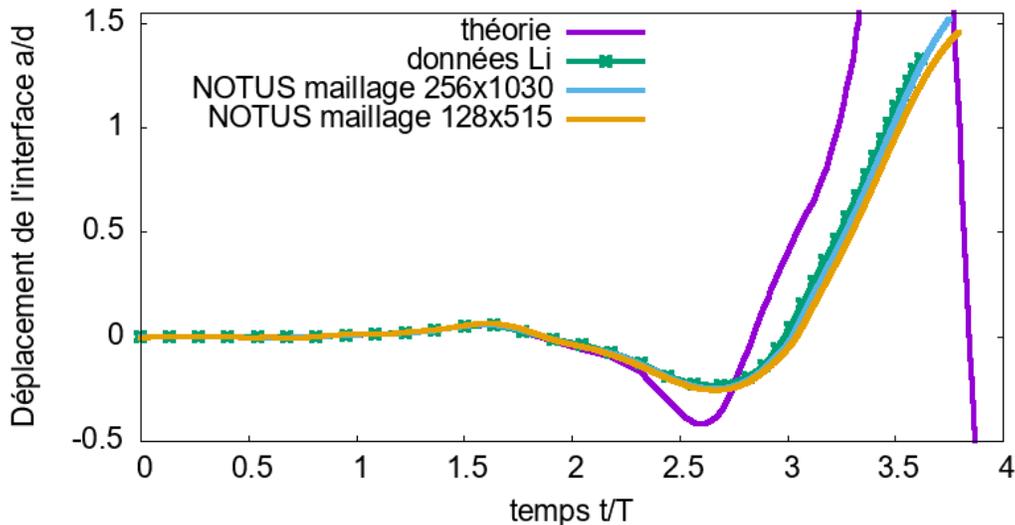


Fig 4.8: Comparaisons des données numériques avec la méthode CLSVOF et analytiques fournies par Li et al. [29] et les simulations obtenues avec NOTUS avec la méthode VOF-PLIC

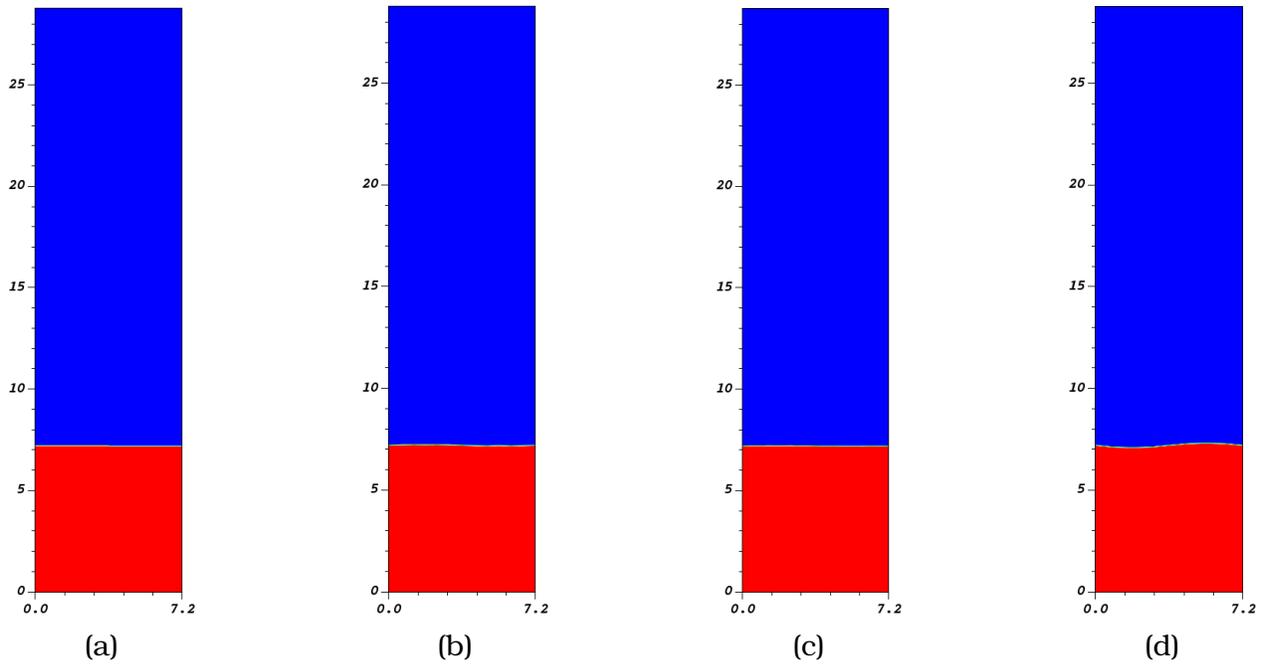


Fig 4.9: Simulation avec NOTUS de la formation du ligament. Calcul de la couleur  $C$  et reconstruction de l'interface à l'aide de la méthode VOF-PLIC (en rouge la phase liquide, en bleu la phase gazeuse) : (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 0.41T$ , (c)  $t = 0.8T$ , (d)  $t = 1.21T$

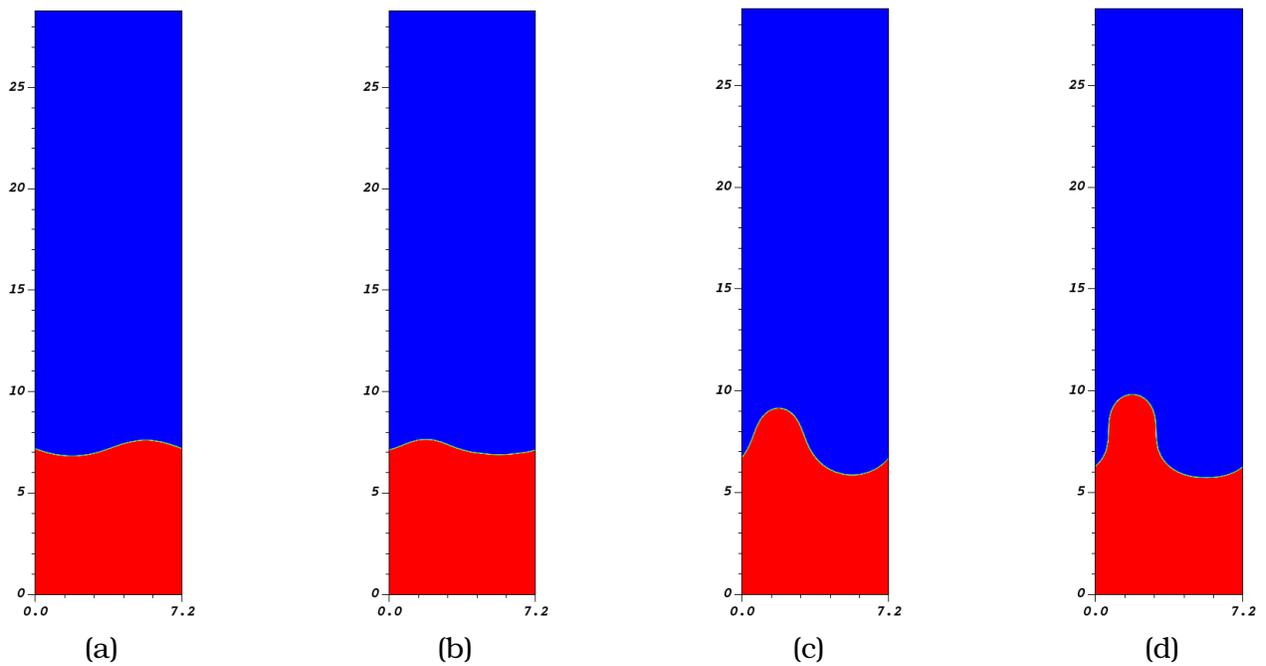


Fig 4.10: (a)  $t = 1.6T$ , (b)  $t = 2T$ , (c)  $t = 2.41T$ , (d)  $t = 2.8T$

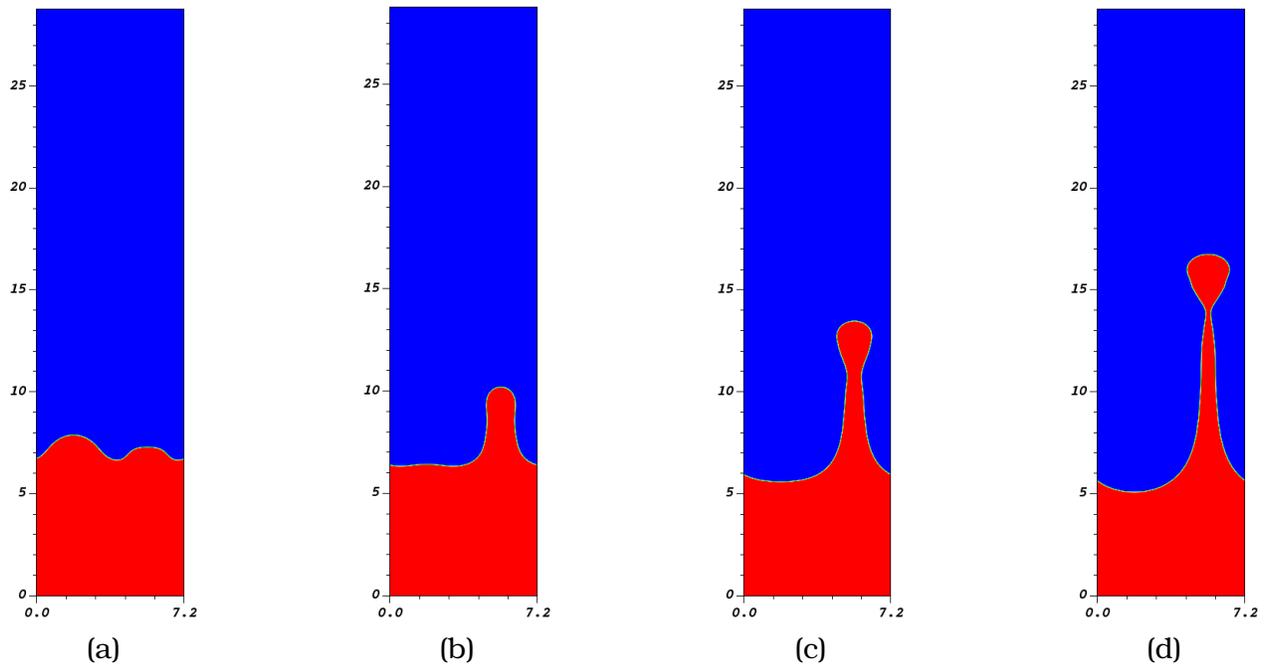


Fig 4.11: (a)  $t = 3T$ , (b)  $t = 3.2T$ , (c)  $t = 3.4T$ , (d)  $t = 3.6T$

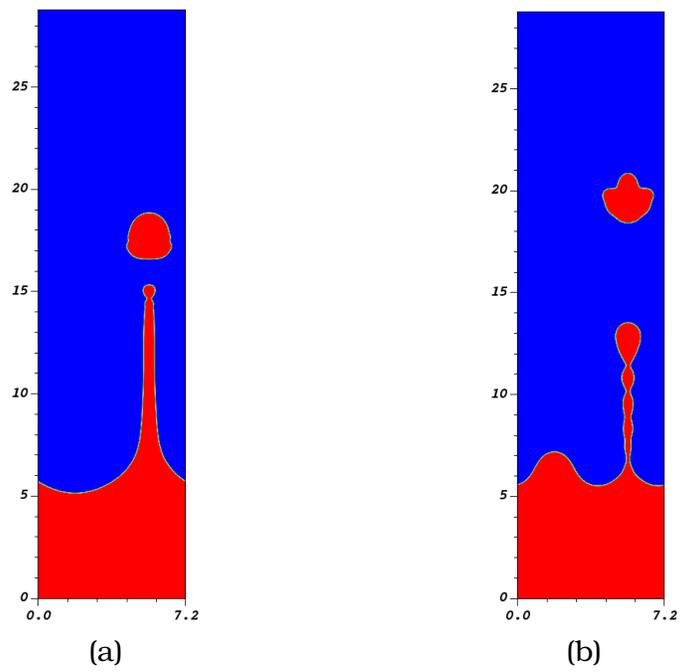


Fig 4.12: (a)  $t = 3.8T$ , (b)  $t = 4.25T$

### 4.1.3 Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw

Le réservoir construit par Roxel a été développé avec une profondeur faible ( $\approx 1\text{cm}$ ) de telle sorte que le mouvement des fluides mis en jeu soit restreint à un écoulement quasi bidimensionnel. Le réservoir est proche de la configuration de type Hele-Shaw que nous avons développé dans le chapitre 3.1.3. En effet, dans un réservoir de ce type pour un régime d'écoulement linéaire d'un fluide visqueux, il est possible de réduire l'équation de conservation de la quantité de mouvement 3D en un système 2D. L'intérêt de ce type de configuration est de pouvoir faire des calculs numériques sans avoir besoin de produire des simulations tridimensionnelles très coûteuses en temps.

Les travaux de Li et al. [30] fournissent un modèle permettant de moyenner l'épaisseur du réservoir, pour un régime dans lequel les forces inertielles sont non négligeables, et pilotées par un terme source représentant l'accélération causée par la vibration du réservoir. Les travaux de Li sont autant analytiques que numériques et expérimentaux, et ont pour but de valider le modèle développé ainsi que de comparer les profils obtenus avec un modèle de relation de dispersion. À partir des données expérimentales et numériques fournies, nous prenons un cas pour lequel nous comparons leurs résultats avec ceux obtenus avec NOTUS.

Le réservoir contient deux fluides, une phase liquide, de l'éthanol, surplombé par une phase gazeuse, de l'air, dont les propriétés sont résumées dans le tableau 4.5. La tension de surface n'est pas fourni dans l'article, nous proposons une valeur approchée de celles fournies par Adamson et al. [198] pour plusieurs températures proches de la température ambiante.

Propriétés des fluides			
Fluide	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa \cdot s$ )	$\sigma$ ( $N \cdot m^{-1}$ )
éthanol	791	$1.096 \times 10^{-3}$	0.022
air	1.225	$1.789 \times 10^{-5}$	

Tableau 4.5: Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Propriétés des fluides

Le réservoir a une longueur de 300 mm, une hauteur de 60 mm et une épaisseur de 1.7 mm. Le dispositif expérimental est complété par un support oscillant, sur lequel est positionné le réservoir. Une caméra rapide capture le

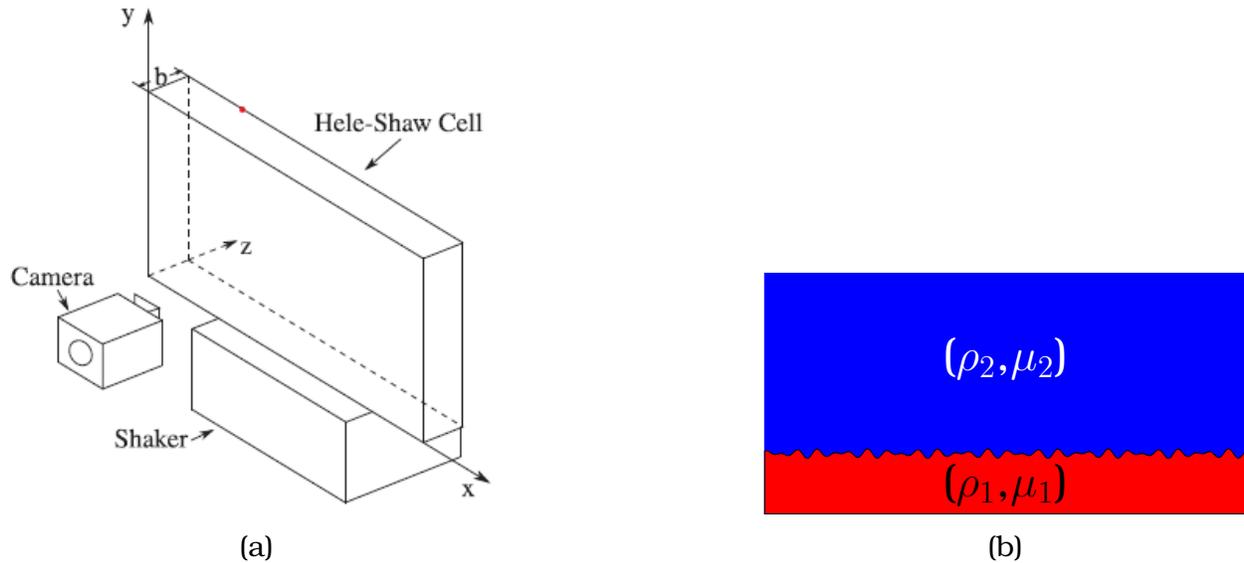


Fig 4.13: (a): Dispositif expérimental des auteurs (source: Li et al. [30]). (b): Schéma 2D du problème , avec les deux couches de propriétés respectives  $(\rho_1, \mu_1)$  et  $(\rho_2, \mu_2)$ .

mouvement de l'interface au cours du temps. L'ensemble de ce dispositif est illustré sur le schéma 4.13a. La figure 4.13b schématise le profil 2D de la face avant du milieu.

Le motif de l'interface obtenu expérimentalement est périodique, il n'est donc pas nécessaire de calculer le mouvement dans l'ensemble du domaine, à partir du moment où l'interaction des fluides avec les bords du réservoir sont négligés. Nous suivons donc le raisonnement des auteurs qui décomposent leurs domaines de calcul en deux boîtes identiques de conditions latérales périodiques, en ne conservant qu'un domaine de calcul  $\Omega$ , réduit à la moitié de la largeur du réservoir (en mm)  $\Omega = [0, 150] \times [0, 60] \times [0, 1.7]$ . L'ensemble des conditions aux bords est résumé dans le tableau 4.6.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Advection
gauche	symétrie	symétrie
droite	symétrie	symétrie
haut	mur	mur
bas	mur	mur

Tableau 4.6: Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Conditions aux bords

Deux maillages de dimensions 256x102 et 512x205 sont utilisés pour vérifier la consistance des résultats. On utilise un schéma WENO3 pour le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes, et l'équation d'advection des phases. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi/(100\omega)$  s et un coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.3$ .

Lorsque l'écoulement est contraint au niveau de l'axe transversal, on peut observer la déformation des oscillations formées par l'interface, pour lesquelles les ventres prennent une forme proche de celle d'une pointe (figure 4.14). On retrouve ce type de forme avec la digitation visqueuse (voir Fu et al. [199], Setu et al. [200] ou Kampitsis et al. [201]) typiques d'un écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, sauf que cette fois-ci les oscillations de l'interface ne permettent pas à celle-ci de progresser suffisamment pour que la propagation de ces "doigts" soit importante. Les longueurs d'ondes de l'interface obtenues avec NOTUS sont cohérentes avec celles provenant de Li et al. [30] pour nos deux maillages. Les résultats sont compilés dans le tableau 4.7.

Le comportement de l'interface est caractéristique d'un mode de résonance de l'instabilité de Faraday. Le déplacement de l'interface, enregistré sur l'axe vertical de progression d'un ventre d'oscillation (figure 4.15a), permet de calculer le spectre des fréquences de la réponse à l'excitation paramétrique, une fois atteint le régime permanent. Sur la figure 4.15b, nous pouvons voir que l'onde porteuse est de fréquence sous-harmonique, égale à la moitié de la fréquence d'excitation. Les ondes de modulation du signal représentent tous les modes de vibrations harmoniques ou sous-harmoniques dont seuls les premiers sont réellement significatifs.

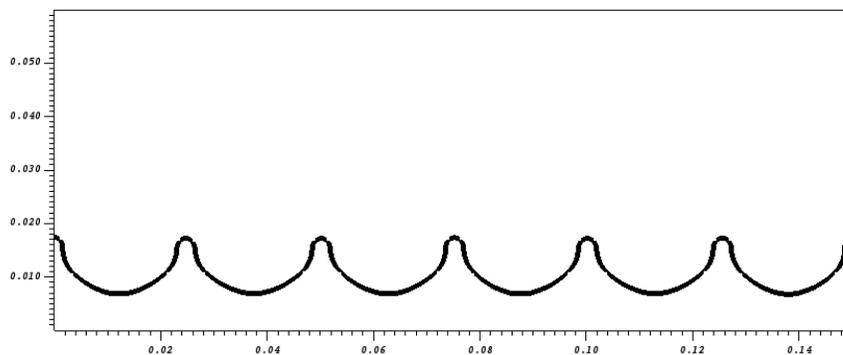
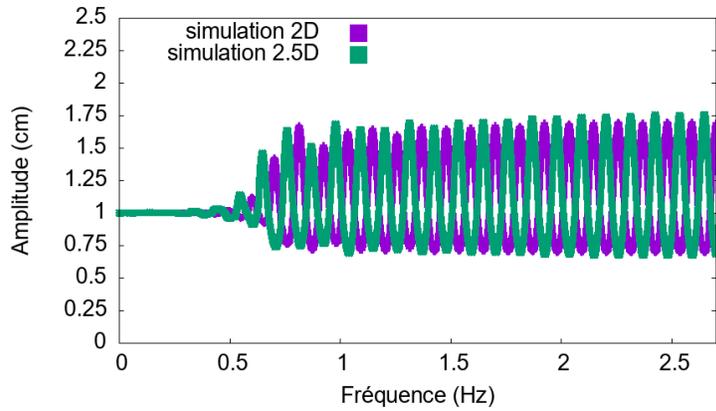
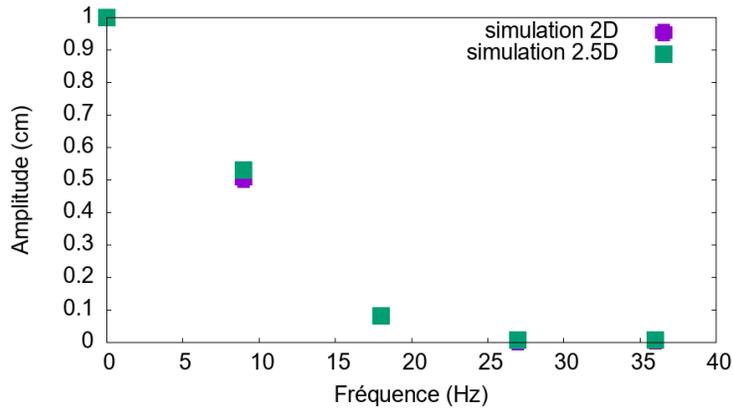


Fig 4.14: Profil de l'interface à l'amplitude maximale



(a)



(b)

Fig 4.15: (a): Évolution de l'amplitude de l'interface au niveau d'un ventre d'oscillations. (b): Spectre de l'enregistrement du mouvement de l'interface sur un ventre d'oscillations à régime d'oscillations établi.

Données expériences (Li et al.)		
	Longueur d'onde (mm)	Amplitude (mm)
expérience a	24.9	8.92
expérience b	24.63	9.15
expérience c	24.2	9.22
expérience d	24.66	9.02
expérience e	24.35	8.73
Données simulations Notus		
Dimensions maillage	Longueur d'onde (mm)	Amplitude (mm)
256x102	24.9	10
512x205	25.0	10.4

Tableau 4.7: Tableau des résultats

## 4.2 Mélangeage diphasique avec le RAM

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'étude de l'instabilité de Faraday, pour des fluides immiscibles, s'est majoritairement concentré sur la déformation de l'interface à résonance sans rupture de l'interface. Les travaux sur la rupture et la formation de colonnes de fluides sont récents et se limitent souvent à la formation d'une seule colonne, comme nous avons pu le voir pour la validation. L'application la plus évidente mise en avant est l'atomisation de fluide en petites gouttes, très utile pour le développement de chambres de combustion. Le brassage de fluides dans un environnement multiphasique reste donc un sujet très ouvert, dont nous aborderont ici que le préambule, à savoir le brassage d'un liquide et d'un gaz.

### 4.2.1 Mise en place du problème

Le système diphasique le plus simple à mettre en oeuvre est le duo air/eau dont les propriétés des fluides sont résumées dans le tableau 4.8. Le procédé expérimental consiste à remplir le réservoir développé par Roxel à moitié par de l'eau, l'autre moitié par de l'air, à pression atmosphérique et température ambiante.

Propriétés des fluides			
Fluide	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa \cdot s$ )	$\sigma$ ( $N \cdot m^{-1}$ )
eau	1000	$1.0 \times 10^{-3}$	0.072
air	1.0	$1.0 \times 10^{-5}$	

Tableau 4.8: Instabilité de Faraday dans une cellule de Hele-Shaw : Propriétés des fluides

L'objectif est de comparer les résultats d'un brassage du système diphasique avec le RAM par rapport aux simulations avec NOTUS. Nous avons décidé de sélectionner deux situations distinctes permettant d'apprécier une partie de l'éventail des comportements que l'on peut obtenir avec l'instabilité de Faraday, et qui synthétise les différents cas de figure déjà évalués avec les différentes validations. La première situation sera la mise en oscillation de l'interface sans rupture, la seconde mènera à la rupture. Nous rappelons que le mélangeur RAM est pilotable grâce à une accélération imposée manuellement. La fréquence est adaptée par un algorithme interne à la machine afin d'atteindre la résonance du mécanisme vibrant. En pratique la variation de la fréquence est négligeable

dans ces expérimentations et nous conserverons la valeur nominale de 60Hz. En conséquence, seule l'amplitude permet de modifier l'accélération imposée pour le mélangeage.

Nous rappelons que le critère d'atomisation  $\beta_0 = \frac{\rho_{\text{liquide}} A^3 \omega^2}{\sigma} > 0.763$  déjà évoqué dans le chapitre 2 permet de déterminer si les conditions d'excitations permettent l'atomisation du liquide.

Parmi le panel d'expériences effectuées par Roxel, nous avons sélectionné deux accélérations permettant d'étudier le mouvement de l'interface air/eau :

- $acc = 3g$  soit une amplitude  $A = 2.07 \times 10^{-4}$  m. L'interface air/eau oscille sans rupture et forme un motif sinusoïdal classique de l'instabilité de Faraday. Nous obtenons un coefficient  $\beta_0 \approx 0.0175 < 0.763$ .
- $acc = 15g$  soit une amplitude  $A = 1.035 \times 10^{-3}$  m. L'interface air/eau oscille jusqu'à la rupture. Nous obtenons un coefficient  $\beta_0 \approx 2.189 > 0.763$ .

Nous présentons le diagramme d'instabilité traçant les langues d'instabilités correspondant à une sollicitation de fréquence 60Hz, sur la figure 4.16. La première langue, représentative d'une réponse vibratoire sous-harmonique, ici la moitié de la fréquence d'excitation, descend jusqu'à l'axe des abscisses.

## 4.2.2 Simulations numériques et comparaisons expérimentales

Les simulations effectuées avec le code NOTUS sont exclusivement en 2D, pour des raisons de coût en temps de calcul. Comme nous avons pu le voir dans les validations, pour un réservoir de faible profondeur, il est possible d'envisager l'utilisation d'un modèle 2.5D qui moyenne le profil de vitesse dans la direction de la profondeur, pour une déformation d'interface sans rupture. Nous évoquerons cette éventualité pour le premier cas de figure, avec une accélération de 3g. Le régime vibratoire pour une accélération de 15g ne permet pas d'utiliser ce modèle, du fait de la formation de structures complexes, visualisées expérimentalement entre les deux parois frontales, et qui serait amorties par le modèle 2.5D. Pour cette raison le second cas de figure ne sera

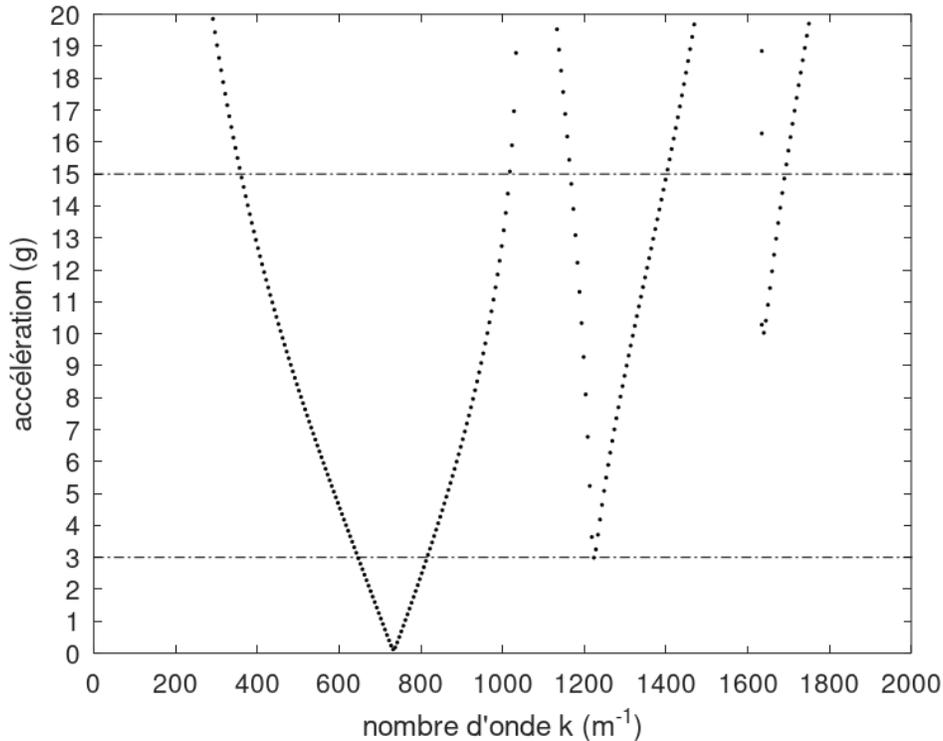


Fig 4.16: Diagramme de stabilité du milieu diphasique air/eau pour une excitation vibratoire de fréquence 60Hz

étudié numériquement que sous le prisme de simulations 2D.

Le domaine de calcul (en cm)  $\Omega = [0, 15] \times [0, 7.5]$  est discrétisé par un maillage de dimensions  $512 \times 256$ . Le réservoir est un système fermé, les conditions aux bords sont toutes de type 'mur', et sont résumées dans le tableau 4.9. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi/(100\omega)$  s et un coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.3$ . Les simulations ont été effectuées sur 128 processeurs, et ont duré respectivement 3 jours et 10 jours environ.

La condition initiale consiste à imposer une interface initiale légèrement déformée pour amorcer le mouvement. Elle prend la forme d'une fonction sinusoïde  $f$  de faible amplitude et de longueur d'onde égale à la largeur du réservoir.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Advection
gauche	mur	mur
droite	mur	mur
haut	mur	mur
bas	mur	mur

Tableau 4.9: mélangeage diphasique avec le mélangeur RAM : Conditions aux bords

### Accélération 3g

Lorsque le mélangeur RAM soumet le réservoir à une accélération de 3g, l'interface air/eau forme un motif sinusoïdal constitué de noeuds et de ventres de vibrations caractéristiques de la mise en résonance. À partir de la figure 4.16, nous pouvons voir que le premier mode de vibration est sollicité, avec une réponse de fréquence sous-harmonique. Comme nous allons le voir avec les résultats, une accélération de 3g ne permet pas de mener à la rupture d'interface, et montre qu'il faut considérer une marge d'erreur entre l'analyse linéaire et le seuil réel de rupture d'interface.

Nous pouvons observer sur nos résultats numériques (figure 4.17) la formation d'un motif régulier de 18 longueurs d'ondes le long du réservoir, chacune d'entre elle étant régulière. La longueur d'onde moyenne est donc  $\lambda \approx \frac{0.15}{18} \approx 8.33 \times 10^{-3}\text{m}$ , pour une valeur théorique  $\lambda_{th} \approx 7.95 \times 10^{-3}\text{m}$  soit  $k \approx 790\text{m}^{-1}$ . C'est approximativement la valeur suggérée par le seuil de la première langue sous-harmonique du diagramme d'instabilité.

La relation de dispersion permet de calculer la fréquence temporelle d'oscillation de l'interface en fonction du nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  des déformation. On obtient alors  $freq = \omega/(2\pi) = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)^{0,5}/(2\pi) \approx 31.1\text{Hz}$ . La fréquence d'excitation étant d'environ 60Hz, nous retrouvons bien le comportement sous-harmonique décrit par Faraday [81].

La simulation obtenue avec le modèle de Darcy est très similaire à celle obtenue avec les équations bidimensionnelles simples puisqu'on obtient le même nombre de longueurs d'ondes. L'épaisseur du réservoir est supérieure d'un ordre de grandeur par rapport au cas de validation, donc la déformation représentative de la digitation visqueuse n'est pas visible ici.

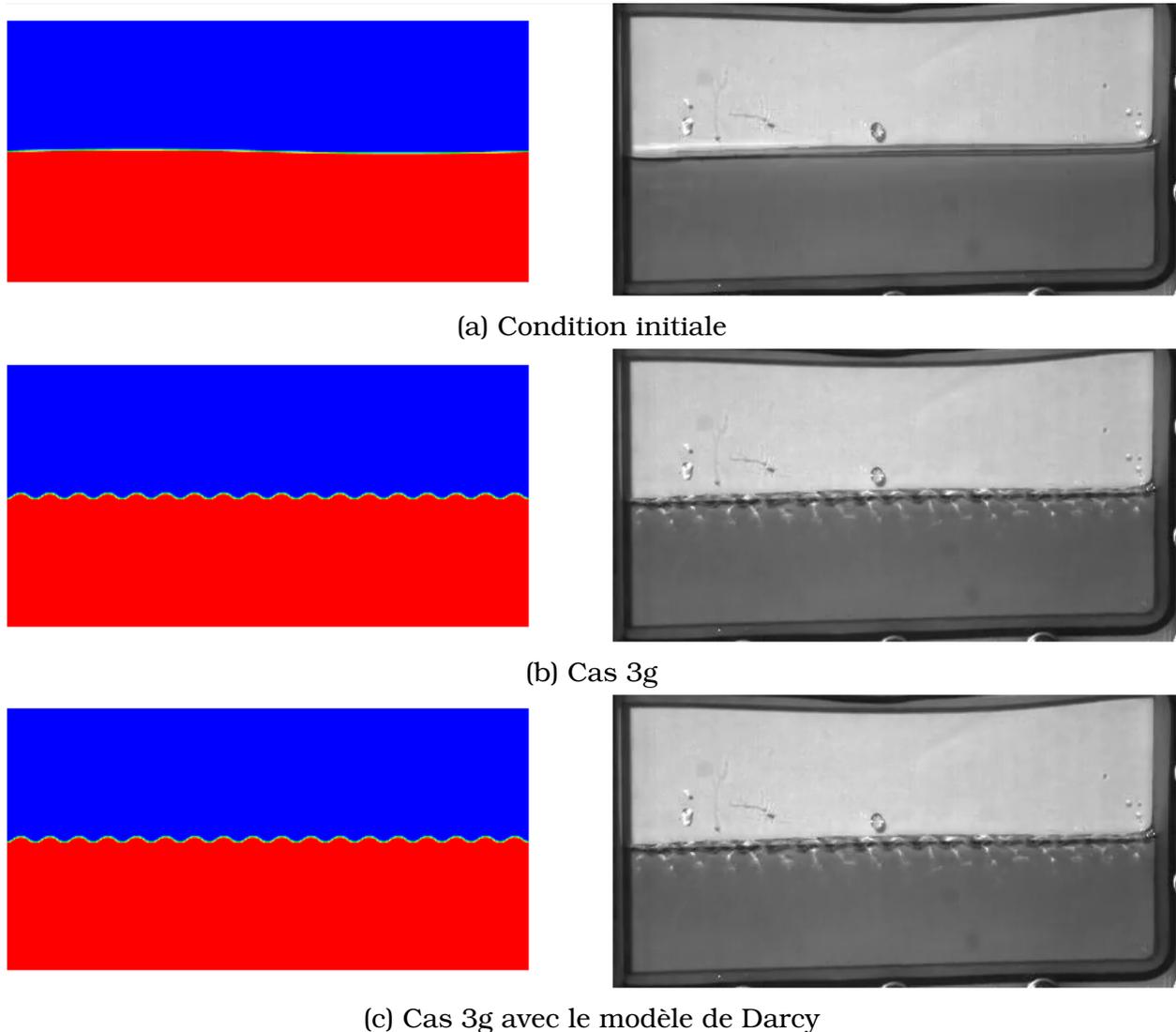


Fig 4.17: Comparaison de résultats numériques des simulations 2D/2.5D (à gauche) et expérimentaux (à droite). La fonction couleur C affiche en rouge l'eau et en bleu l'air.

Le mouvement de l'interface est enregistré au niveau d'un noeud de vibrations, pour la simulation 2D et la simulation 2.5D. Le spectre des fréquences est tracé sur la figure 4.18. On observe la superposition des modes de vibrations sous-harmoniques et harmoniques. La fréquence fondamentale est la première sous-harmonique, et égale à la moitié de la fréquence d'excitation. Son amplitude est nettement supérieure à celles des autres harmoniques et sous-harmoniques, ce qui confirme le résultat précédemment obtenu à l'aide de la relation de dispersion et qui mettait en avant le caractère sous-harmonique des vibrations de l'interface. Pour finir nous noterons que le troisième mode de vibration

harmonique possède une amplitude plus élevée dans la simulation 2D qu'avec le modèle de Darcy. La solution 2D peut faire l'objet d'une surexcitation. L'instabilité de Faraday est mécaniquement tridimensionnelle et les motifs généralement formés sont susceptibles de développer une structure complexe qui se développe dans les trois dimensions, les deux dimensions horizontales permettant la formation de la structure du motif, et la dimension verticale de le développer grâce à la modulation de l'amplitude. Ici nous contraignons numériquement l'instabilité à s'exprimer sur deux dimensions uniquement. Nous pouvons émettre l'hypothèse que cette contrainte favorise la surexcitation d'un mode. L'absence de surexcitation avec le modèle de Darcy peut provenir de l'amortissement visqueux provoqué par le terme de Brinkman.

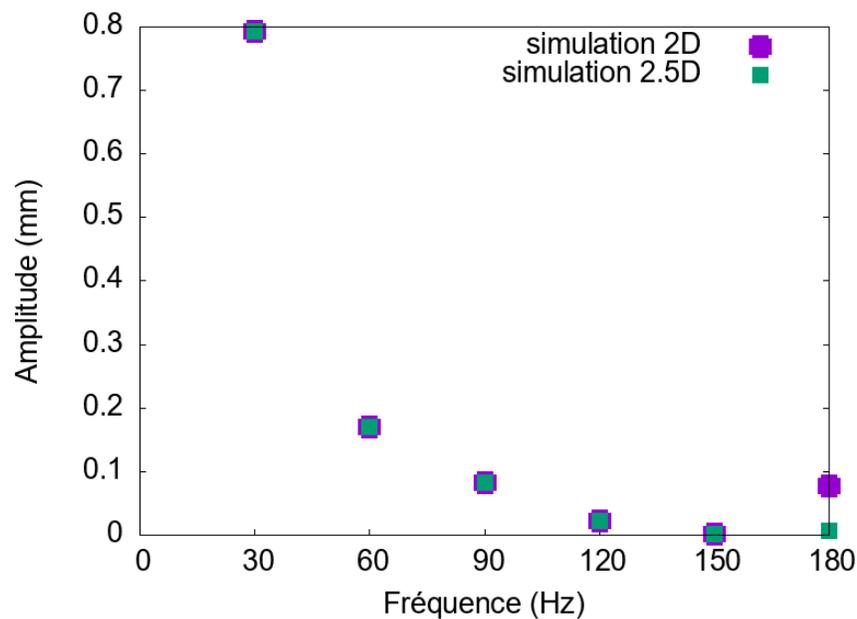


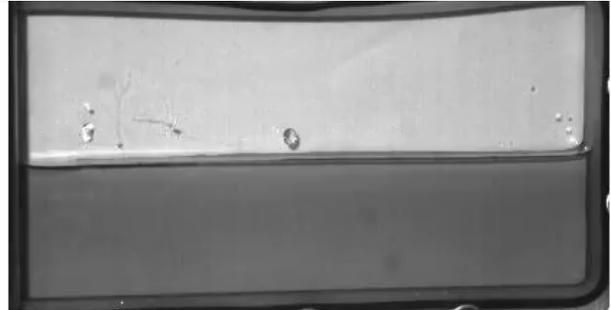
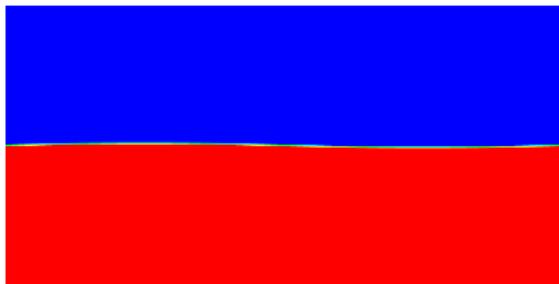
Fig 4.18: Spectre du mouvement de l'interface prise à un ventre d'instabilité.

### Accélération 15g

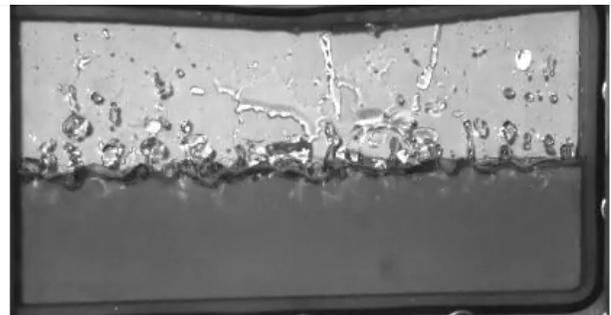
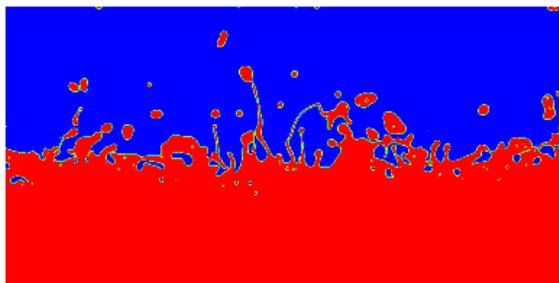
Lorsque le mélangeur RAM soumet le réservoir à une accélération de 15g, la force d'inertie imposée par le RAM domine les forces de tension de surfaces et de gravité. La figure 4.19 présentent différentes étapes du brassage de phases que l'on retrouve numériquement et expérimentalement.

Des projections multiples ont lieu, sous la forme de colonnes de fluides. L'instabilité de Rayleigh-Plateau engendre la formation de gouttes par

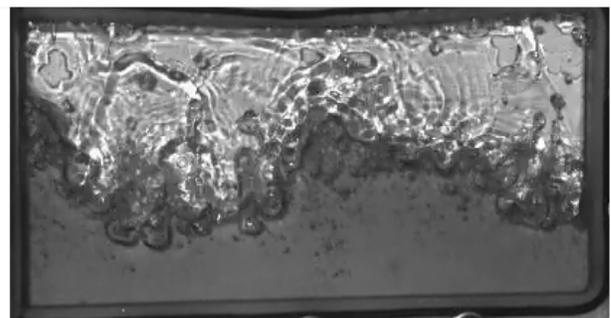
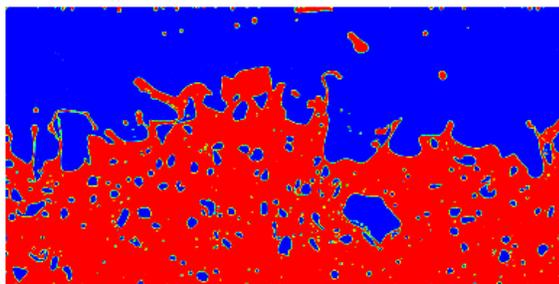
atomisation du ligament dont nous avons brièvement parlé dans le chapitre 4.1.2. Ces gouttes d'eau se déplacent dans l'air et percutent les bords du réservoir. De plus, ces gouttes se percutent aussi entre elles, provoquant leur ruptures ou leurs fusions. Une partie du brassage s'effectue donc aussi dans la zone supérieure du réservoir.



(a) Condition initiale



(b) Cas 15g. Début du brassage de phases. Apparition de ligaments de fluide.



(c) Cas 15g. Brassage établi. Formation de bulles d'air, de gouttes d'eau. Brassage turbulent.

Fig 4.19: Comparaison de résultats numériques des simulations 2D (à gauche) et expérimentaux (à droite). La fonction couleur  $C$  affiche en rouge l'eau et en bleu l'air.

Nous pouvons noter aussi que ces gouttes se déplacent massivement dans la phase gazeuse, tandis que les bulles d'air pénètrent peu la phase liquide. C'est d'ailleurs l'une des différences majeures que l'on retrouve entre les résultats expérimentaux de Roxel et les résultats obtenus avec NOTUS,

qui montre une concentration de bulles d'air plus importantes. Le domaine étant seulement en deux dimensions, les effets des parois latérales ne sont pas considérés, ce qui peut avoir une influence dans la qualité des résultats produits.

### **4.2.3 Conclusion**

Le mélangeage d'un milieu diphasique grâce à des vibrations verticales fait intervenir un panel d'instabilités exposées dans le chapitre 2. Nous avons effectué la validation, à l'aide du code NOTUS, de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, puis son extension en milieu oscillant, à savoir l'instabilité de Faraday, en 2D. La méthode VOF-PLIC permet d'obtenir des résultats consistants et fidèles aux données numériques et expérimentales de référence. Le modèle de Darcy permettant de modéliser la profondeur reproduit les effets liés à la faible profondeur d'un réservoir en 2.5D. Nos résultats du mélangeage entre deux phases immiscibles, en l'occurrence de l'air et de l'eau, reproduits expérimentales à l'aide du RAM par Roxel, permettent de faire plusieurs constats.

Le premier est, que pour une accélération faible permettant d'engendrer l'oscillation de l'interface, les simulations en 2D et 2.5D fournissent une oscillation de l'interface en accord avec celle visible expérimentalement. De plus la longueur d'onde mesurée est cohérente avec celle prévue par la relation de dispersion du milieu diphasique. Le spectre de fréquence de l'oscillation confirme l'hypothèse théorique d'un comportement sous-harmonique.

Le second constat est que, pour une accélération paramétrique répondant au critère de rupture d'interface, nous pouvons observer sur nos simulations le développement de colonnes d'eau projetées dans la zone supérieure contenant initialement l'air. Le cisaillement de ces ligaments, par instabilité de Rayleigh-Plateau, permet de former des gouttes d'eau qui se propagent dans le milieu gazeux. Une fois le régime de la réponse vibratoire établi, l'interface se déplace verticalement et forme des superpositions d'ondes complexes entretenues par l'excitation paramétrique. Enfin nous noterons que nos simulations bidimensionnelles montrent une quantité de bulles plus importantes que dans l'expérimentation tridimensionnelle. Le comportement turbulent et multi-échelle de l'interface est complexe à capturer et nécessitera une étude approfondie afin de simuler plus fidèlement la dynamique du brassage des deux phases immiscibles.

# Chapitre 5

## Mélangeage monophasique

L'instabilité de Faraday a jusque là été exploitée uniquement en diphasique. C'est d'ailleurs, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, à travers un système diphasique que l'instabilité de Faraday a été découverte et majoritairement étudiée. Le mélangeage d'un scalaire passif par ce mécanisme constitue un sujet d'étude très récent. Une succession d'articles récents permet de comprendre le mécanisme de mélangeage turbulent d'une concentration, le passage de régimes harmoniques à sous-harmoniques, pour de faibles fréquences de vibrations ( $\approx 1Hz$ ), et de grandes amplitudes (plusieurs dizaines de cm) [129] [22] [24].

Notre premier objectif est de valider le code NOTUS à partir d'un cas provenant de la littérature. Nous nous baserons sur les travaux numériques et expérimentaux de Briard et al. [32] basés sur le mélangeage d'une concentration d'eau salée avec de l'eau pure. Ensuite nous présenterons nos résultats avec ceux produits par Roxel à l'aide d'un pot vibrant.

### 5.1 Validation

L'eau salée est de l'eau dans laquelle les cristaux de sel sont entièrement dilués dans la phase liquide. Au-delà d'un seuil de saturation, une partie du sel reste sous forme de cristaux et forme de la saumure. Nous resterons dans le cadre situé entre l'eau pure et l'eau salée au seuil de saturation.

Pour une concentration importante de sel dilué dans l'eau, l'influence sur la masse volumique du fluide, sa diffusivité et sa viscosité n'est pas négligeable. En particulier, la viscosité de l'eau salée saturée est deux fois supérieure à celle

de l'eau pure. La figure 5.1 montre l'évolution de la viscosité en fonction de la masse volumique de l'eau salée. Les données utilisées proviennent de [31]. Une interpolation linéaire par morceaux de ces valeurs permet de calculer la viscosité dans le code NOTUS en fonction de la masse volumique.

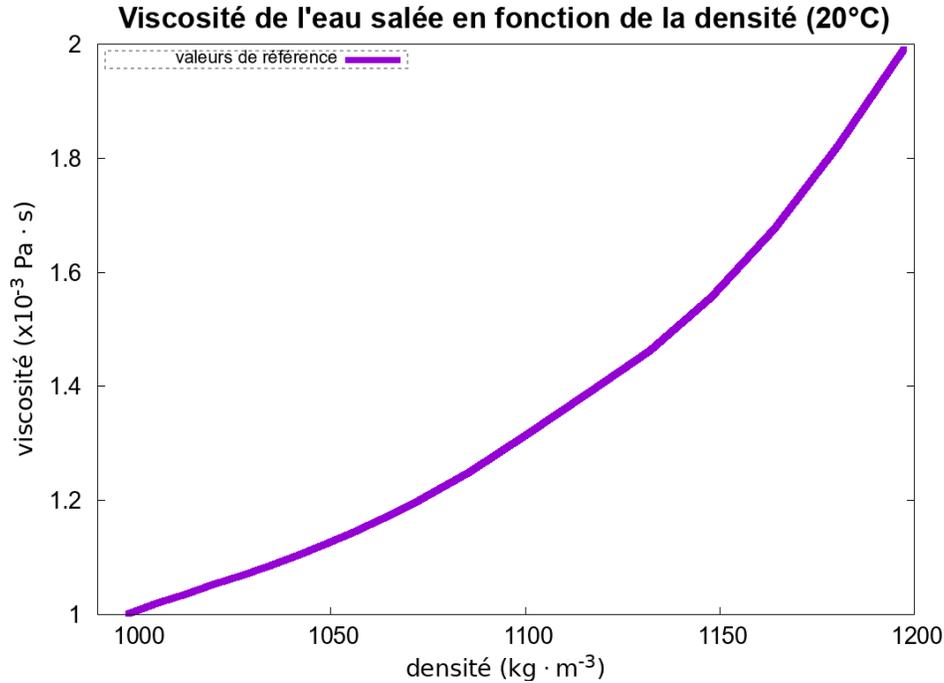


Fig 5.1: Évolution de la viscosité de l'eau salée en fonction de la masse volumique (20°C) (Source: Lide [31])

Afin de traduire l'évolution de ces paramètres, revenons sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de concentration.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho_g (\mathbf{g} + \mathbf{f}(\mathbf{t})) + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (D \nabla S) \quad (5.2)$$

Dans la suite de notre étude, le domaine sera décomposé en deux couches homogènes, l'une d'eau pure, l'autre d'eau salée. La masse volumique  $\rho$  est définie comme une masse volumique moyenne de l'ensemble du domaine. Ce domaine étant fermé,  $\rho$  est constant et égal à la moyenne des masses volumiques des deux couches précédemment citées.

$$\rho = \frac{(\rho_{eau\ salée} + \rho_{eau\ pure})}{2} \quad (5.3)$$

On réécrit le nombre d'Atwood, déjà défini pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor, dans le cas de deux couches miscibles d'un fluide. Par simplicité, on notera par la suite  $\rho_{eau\ pure} = \rho_p$  et  $\rho_{eau\ salée} = \rho_s$ .

$$A_t = \frac{\rho_s - \rho_p}{\rho_s + \rho_p} \quad (5.4)$$

La masse volumique de l'eau salée est dépendante de la fraction massique  $S$  en sel et des masses volumiques initiales des deux couches d'eau.

$$\rho_g = \rho_p + (\rho_s - \rho_p)C \quad (5.5)$$

On réécrit la masse volumique inertielle en fonction de la masse volumique moyenne  $\rho$  du terme d'advection et d'un terme de fluctuation  $\rho'$  tel que  $\rho_g = \rho + \rho' = \rho(1 + \rho'/\rho)$ . On obtient alors  $\rho'/\rho = 2A_t(S - \frac{1}{2})$ .

$$\rho_g = \rho_p + (\rho_s - \rho_p)S \quad (5.6)$$

$$= \frac{\rho_p + \rho_s}{2} - \frac{\rho_s - \rho_p}{2} + (\rho_s - \rho_p)S \quad (5.7)$$

$$= \rho + (\rho_s - \rho_p) \left( S - \frac{1}{2} \right) \quad (5.8)$$

$$= \rho + (\rho_s + \rho_p)A_t \left( S - \frac{1}{2} \right) \quad (5.9)$$

$$= \rho \left[ 1 + 2A_t \left( S - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.10)$$

Quelque soit la concentration en sel dans la couche initiale de fluide, cette couche sera représentée par une valeur de concentration adimensionnée  $S = 1$ , permettant de borner le champ scalaire dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Le champ ne sera défini que par la masse volumique moyenne  $\rho$  et le nombre d'Atwood  $A_t$ .

Afin de calculer la diffusivité de l'eau salée, en fonction de la concentration  $C$ , nous repartons de la définition du nombre de Schmidt  $Sc$ , correspondant au rapport de la viscosité cinématique du fluide par rapport à la diffusivité du scalaire de concentration,  $Sc = \mu/(k\rho_g)$ . Nous prendrons la valeur  $Sc = 700$  correspondant à celle utilisée par Briard [32].

### 5.1.1 Mélangeage d'eau salée pour une faible fréquence

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les travaux de Gréa et al. [129] proposent une formule pour approcher l'épaisseur de la couche de mélange entre les deux couches. Une fois le mélangeage totalement effectué, cette couche de mélange reste stable malgré l'excitation vibratoire. Les travaux de Briard et al. [32] se portent sur la comparaison théorique, numérique et expérimentale du mélangeage d'un système miscible eau pure/eau salée, de faible concentration.

Leur montage expérimental consiste à l'exploitation d'un réservoir de grande capacité de dimensions (en cm)  $\Omega = [0, 94.6] \times [0, 67] \times [0, 11]$ . monté sur un système de vérins permettant d'entraîner le réservoir dans un mouvement d'oscillation sinusoïdal de grande amplitude. Les deux couches sont initialement superposées, au repos, de tel sorte que la couche de mélange initiale, obtenue par diffusion, soit petite. La figure 5.2 présente un schéma 2d de la configuration décrite.

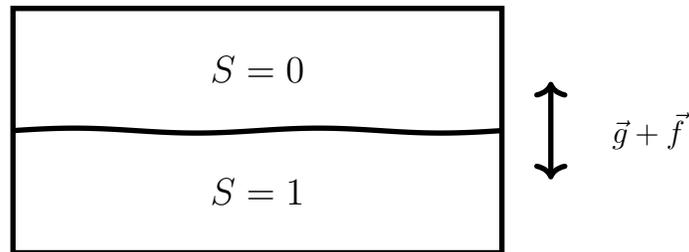


Fig 5.2: Schéma du problème à l'état initial.

La couche d'eau pure, plus légère, contient un colorant qui ne modifie pas les propriétés de l'eau. Un algorithme permet aux auteurs de l'expérience de mesurer la concentration d'eau salée dans le réservoir à partir des images provenant d'une caméra rapide, ou à l'aide d'une sonde dans le réservoir qui mesure la conductivité du fluide. Le réservoir est présenté sur la figure 5.3.

Afin de comparer leurs résultats numériques et expérimentaux, les auteurs se basent sur une estimation de la concentration moyenne proposée par Andrews et al. [202]. La concentration surfacique moyenne  $\langle S \rangle(z, t)$  permet d'obtenir une valeur moyenne de la concentration en eau salée par rapport à la position  $z$  sur l'axe vertical.

$$\langle S \rangle(z, t) = \frac{1}{\text{surface}} \int \int S(x, y, z, t) dx dy \quad (5.11)$$

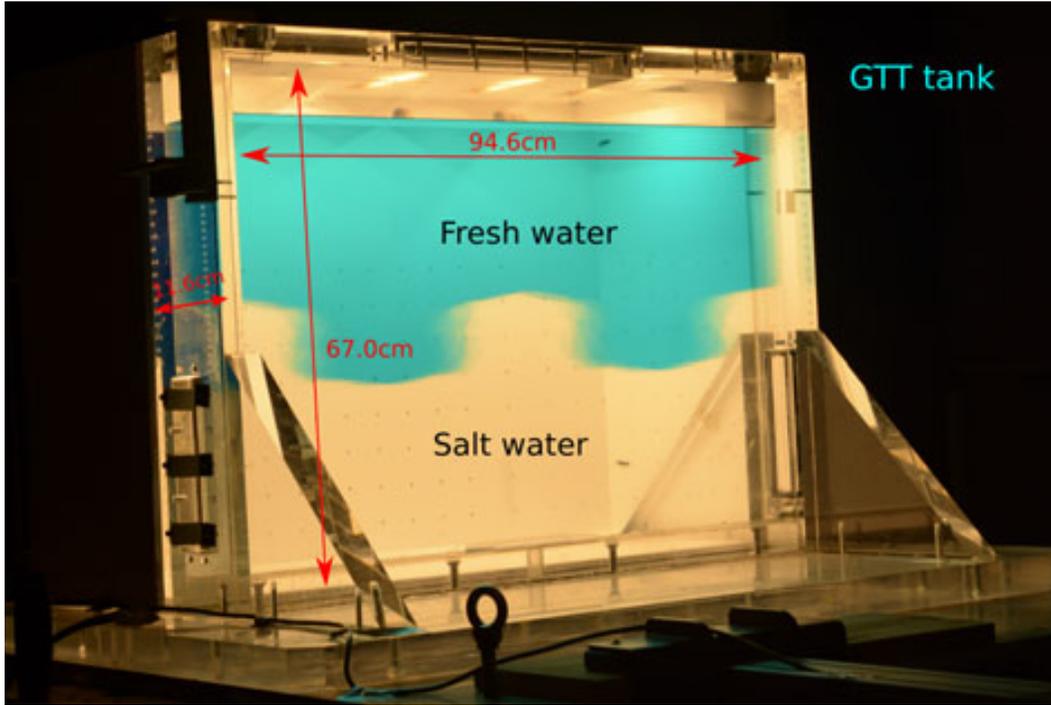


Fig 5.3: Montage expérimental pour le mélangeage de l'eau pure/eau salée. (Source: Briard et al. [32])

Afin de calculer l'épaisseur moyenne  $L$  de la couche de mélange, le milieu doit rester borné par les deux extrema des couches initiales, donc dans l'intervalle  $[0, 1]$ . De plus les auteurs font l'hypothèse que la couche de mélange a un profil linéaire. Le produit  $\langle S \rangle(z)(1 - \langle S \rangle(z))$  est intégré sur la hauteur du réservoir. Un coefficient scalaire déterminé empiriquement pondère l'intégrale afin de respecter l'hypothèse du profil linéaire [202].

$$L = 6 \int \langle S \rangle(z)(1 - \langle S \rangle(z)) dz \quad (5.12)$$

Nous sélectionnons trois cas de figures parmi l'ensemble des test effectués, pour lesquelles le nombre d'Atwood  $A_t$  prend pour valeurs 0.015, 0.03 et 0.045, pour une même pulsation  $\omega = 4.29 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , et un ratio des forces d'inertie  $F = 0.69$ . Les acronymes des trois cas de figure regroupent ces paramètres: A15F7w43, A30F7w43 et A45F7w43. L'amplitude des oscillations appliquées au réservoir est de 0.37m.

Notre domaine de calcul est de dimension égale à celle du réservoir, pour deux maillages de dimensions  $361 \times 256 \times 42$  et  $722 \times 512 \times 84$ . Les conditions aux bords sont toutes de type mur, le système étant étanche. Le tableau 5.4 compile l'ensemble des conditions aux bords du domaine. On utilise un schéma

WENO3 pour le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes, et un schéma TVD Superbee pour l'équation de concentration. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi/(200\omega)$  s et un coefficient CFL  $coeff_{CFL} = 0.3$ . Nous imposons une condition initiale sous la forme d'une déformation sinusoïdale dans le plan horizontal, et sous la forme d'une tangente hyperbolique dans le plan vertical, afin de lisser la transition entre les deux couches et amortir d'éventuelles discontinuités. Nous obtenons alors une faible couche initiale dont l'épaisseur est négligeable par rapport à l'épaisseur que nous obtiendrons une fois le mélangeage effectué.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Concentration
gauche	mur	mur
droite	mur	mur
haut	mur	mur
bas	mur	mur
devant	mur	mur
derrière	mur	mur

Tableau 5.1: mélangeage d'eau salée : Conditions aux bords

La figure 5.4 trace l'évolution de l'épaisseur moyenne  $L$  de la couche de mélange au cours du temps. Tout d'abord, nous pouvons noter la convergence spatiale des résultats vers une même solution, avec un temps de déclenchement du mélangeage très proche. Nous pouvons alors constater que même si le maillage le plus grossier perd en information puisqu'il ne permettra pas de capter des vortex de dimensions aussi petites qu'avec le maillage le plus fin, nous conservons le même comportement.

Le mélangeage semble donc être piloté majoritairement par des mouvements convectifs de dimensions macroscopiques, pour les trois couches de mélanges formées. Les valeurs finales de l'épaisseur moyenne  $L$  sont atteintes dès que l'intensité maximale du mélangeage est atteinte. La consistance de nos résultats est donc vérifiée. La valeur de  $L$  n'augmente ensuite que très légèrement, du fait de la dissipation de l'énergie cinétique, qui engendre encore quelques mouvements susceptibles de participer au mélangeage, avant de se stabiliser. Nous avons détaillé ce mécanisme, qui montre pourquoi  $L$  est supérieure à sa valeur théorique dans le chapitre 2. Une fois que l'énergie potentielle de mélangeage est entièrement dissipée, l'évolution de l'épaisseur moyenne  $L$  n'est

Données de références Briard et al.			
Expériences	Valeur théorique (cm)	sonde (cm)	image (cm)
A15F7w43a	8.6	⊗	8.15
A15F7w43b	8.6	9.7	9.6
A30F7w43a	17.2	⊗	16.1
A30F7w43b	17.2	17.8	15.9
A30F7w43c	17.2	17.7	15.4
A30F7w43d	17.2	18.25	⊗
A45F7w43a	25.8	⊗	24.0
A45F7w43b	25.8	27.6	25.1
Données simulations			
cas test	Valeur théorique (cm)	361 × 256 × 42	722 × 512 × 84
A15F7w43	8.6	8.45	8.72
A30F7w43	17.2	17.59	18.03
A45F7w43	25.8	27.16	27.28

Tableau 5.2: Tableau comparatifs des valeurs de l'épaisseur moyenne  $L$  calculée avec NOTUS, avec elles obtenues par Briard et al. [32]

alors plus pilotée que par la diffusion du scalaire passif, sur des échelles de temps beaucoup plus importantes et indépendantes des vibrations imposées, qui ne sont pas intéressantes en terme d'efficacité de mélangeage.

Les valeurs finales de  $L$  obtenues avec NOTUS sont cohérentes avec celles de Briard, et sont compilées dans le tableau 5.2. Les simulations produites avec NOTUS donnent des valeurs situées dans la fourchette haute des valeurs expérimentales. Les données obtenues par sonde sont plus proches des valeurs attendues que celles obtenues par analyse d'images. Les écarts entre les mesures provenant des deux méthodes doivent être pris en compte. Nous privilégierons les données obtenues par sondes, qui mesurent la concentration à l'intérieur du réservoir et semblent plus fidèles.

Pour un nombre d'Atwood  $A_t = 0.03$ , on observe bien à l'amorçage du mélangeage, la déformation d'une pseudo-interface qui sépare les deux couches initiales, et qui forme la couche intermédiaire, d'épaisseur quasi-nulle. Lorsque l'amplitude de la déformation est maximale, nous pouvons voir trois longueurs d'ondes, avec au niveau des noeuds de vibration l'émergence de vortex. Cavalier

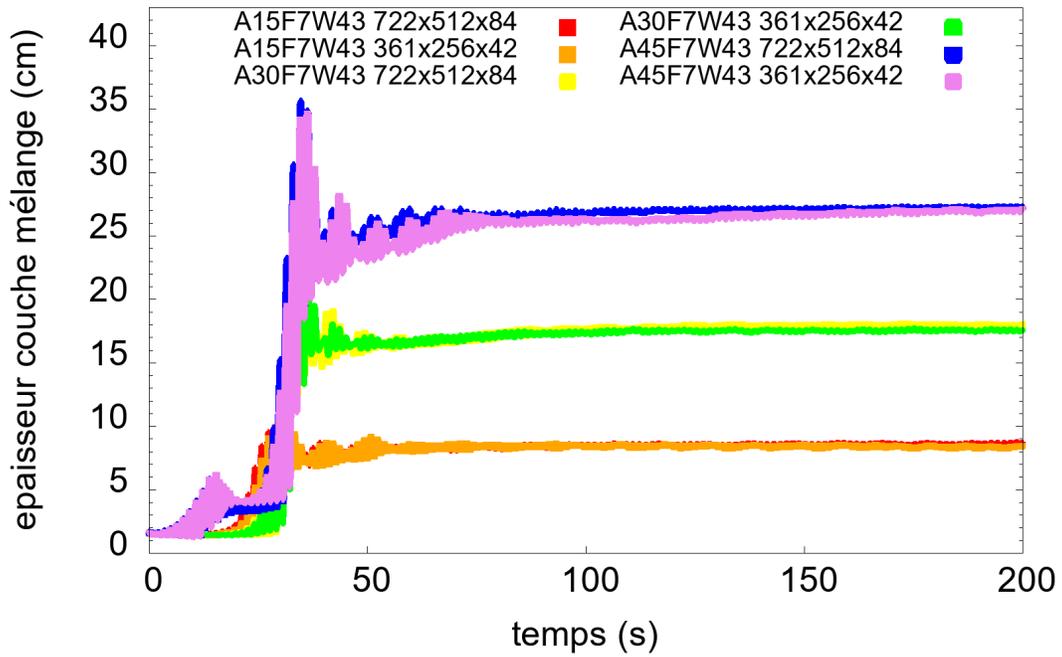


Fig 5.4: Épaisseur moyenne  $L$  de la couche de mélange

[24] parle de "roll-up", c'est-à-dire la formation de rouleaux, au niveau de ces noeuds, tels que visible sur la figure 5.5. Les mouvements que nous observons dans nos simulations coïncident aussi avec la description de Thorpe [23], qui décrit le déplacement de ces rouleaux de part et d'autres de ces points. Ceux-ci vont ensuite de propager sur l'ensemble de cette pseudo-interface et épaissir la couche intermédiaire. L'énergie cinétique va alors être convertie en mélangeage turbulent, jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, comme visible sur la figure 5.6.

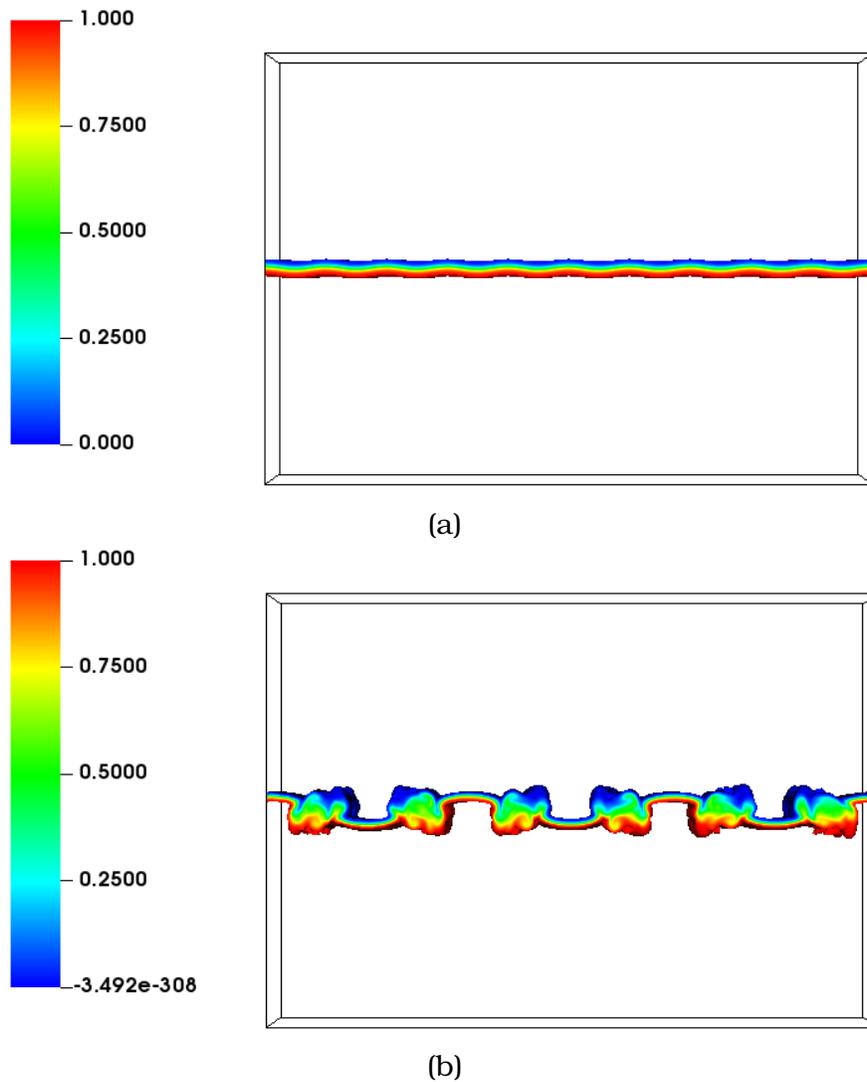


Fig 5.5: Condition initiale et amorçage du mélangeage 3D. Nous pouvons observer la formation des rouleaux au niveau des noeuds de vibration. Les ventres de vibrations ne sont pas encore impactés par le mélangeage engendré par les rouleaux, et conservent l'épaisseur initiale.

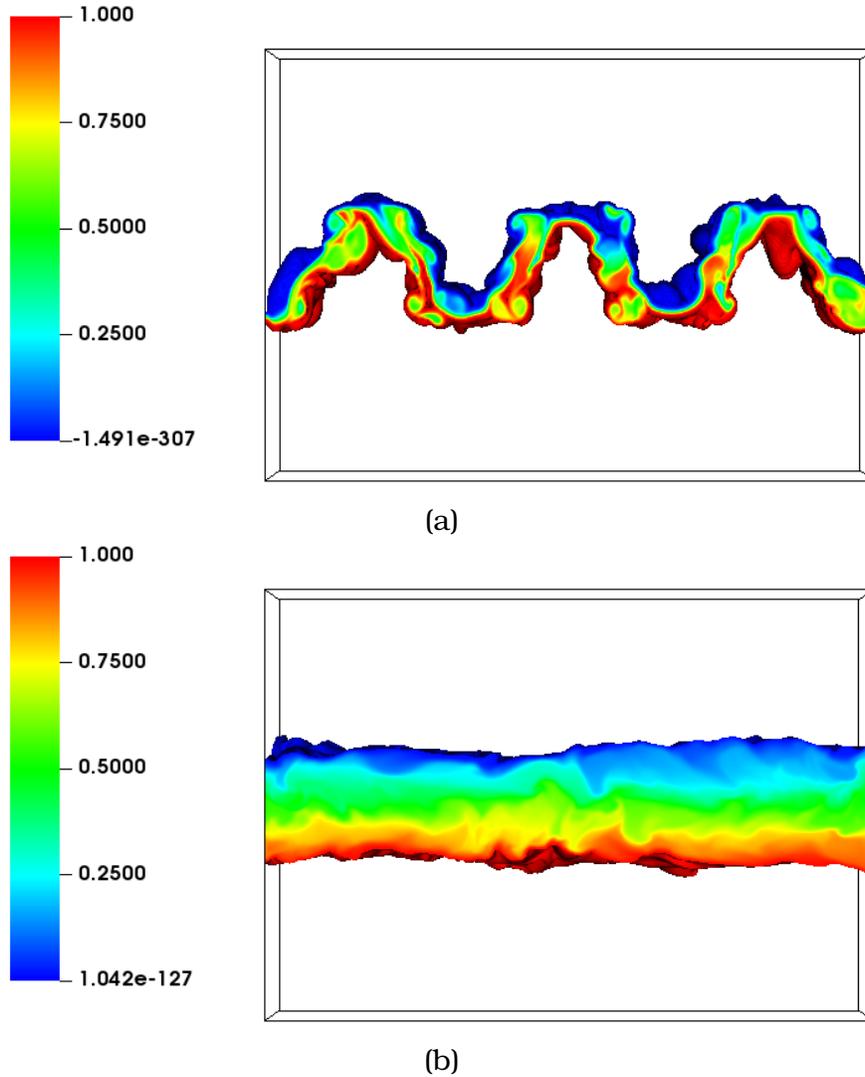


Fig 5.6: Oscillation d'amplitude maximale de la pseudo-interface, accompagnée de rouleaux de convection qui se sont propagés à partir des noeuds. Couche stratifiée stable à la fin du mélange. Des ondes de gravité oscillent latéralement sans modifier l'épaisseur de cette couche intermédiaire. Le régime de mélange convectif est dissipé et laisse place à un régime de mélange diffusif plus lent.

## 5.2 Mélangeage par pot vibrant

Nous allons, dans ce chapitre, utiliser le réservoir de Roxel afin de comparer nos résultats numériques avec des résultats expérimentaux sur une fréquence plus élevée, pour une amplitude plus petite. Les premiers tests effectués par Roxel ne montrèrent aucune couche de mélange suffisamment épaisse pour être observable. Cette couche intermédiaire est de dimension trop petite pour pouvoir apprécier l'influence des forces convectives et de la diffusion de la concentration sur la couche initialement formée avant d'imposer les vibrations. Les résultats numériques concordaient avec cette constatation, ne permettant pas de conclure quant à la qualité du mélangeage monophasique. La fréquence élevée du RAM stabilise le système et vient amortir les éventuels mouvements de convections susceptibles de provoquer le mélange. L'amplitude maximale du RAM n'est pas suffisante pour contrecarrer cet amortissement et engendrer une couche intermédiaire macroscopique. Pour cette raison, nous nous sommes reportés sur un pot vibrant détenu par Roxel. Ce pot possède un mécanisme de mise en mouvement différent du RAM, mais permet lui aussi d'imposer des vibrations sinusoïdales au réservoir. Sa fréquence d'utilisation est pilotable, contrairement à son amplitude, contrairement au RAM, mais sa plage d'utilisation a permis de choisir une fréquence et une amplitude permettant d'engendrer une couche de mélange suffisamment importante pour permettre de l'observer.

### 5.2.1 Mise en place du problème

Le système monophasique est composé de deux couches de fluides miscibles, initialement au repos, similaires au cas de validation précédent, dont le schéma est présenté sur la figure 5.2. Nous utilisons, comme pour la validation, de l'eau et de l'eau salée. Cependant nous utiliserons de l'eau salée dont la concentration est amenée quasiment à saturation, formant ainsi une couche de masse volumique maximale. Au-delà, une partie du sel ne serait pas dilué, formant une saumure constituée d'eau salée saturée et de cristaux de sel. Le fluide serait transformé d'un état monophasique en un état multiphasique, en dehors du contexte de l'étude. Les propriétés des deux couches de fluides sont résumées dans le tableau 5.3.

Comme nous l'avons vu précédemment, l'instabilité de Faraday forme une couche de mélange intermédiaire entre les deux couches initiales. L'objectif

Propriétés des fluides			
Fluide	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa \cdot s$ )	$\sigma$ ( $N \cdot m^{-1}$ )
eau	1000	$1.0 \times 10^{-3}$	0
eau salée	1197	$2.0 \times 10^{-3}$	

Tableau 5.3: mélangeage de deux couches de fluides miscibles par instabilité de Faraday: Propriétés des fluides

est de comparer l'épaisseur de couche que nous obtenons avec celle que Roxel obtiendra avec le pot vibrant. Après plusieurs discussions et simulations préliminaires à propos des paramètres les plus pertinents pour obtenir une couche de mélange suffisamment importante pour être visible, le choix s'est fixé sur une fréquence de 4Hz pour une amplitude de 1.7cm, qui est l'amplitude maximale que le pot vibrant peut imposer à notre système.

## 5.2.2 Simulations numériques et comparaisons expérimentales

Les simulations effectuées avec le code NOTUS ont été effectuées en 2D et en 3D, le coût en temps de calcul étant suffisamment raisonnable dans le cadre monophasique pour envisager son utilisation. Nous avons aussi utilisé le modèle de Darcy afin d'observer l'influence d'une modélisation 2.5D.

Notre domaine de calcul, de dimensions égales à celles du réservoir de Roxel, est discrétisé par un maillage de dimensions  $512 \times 256$  pour les simulations 2D et  $512 \times 256 \times 34$  pour les simulations 3D. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi / (100\omega)$  s et un coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.3$ . Les conditions aux bords sont toutes de type mur, le système étant étanche. Le tableau 5.4 compile l'ensemble des conditions aux bords du domaine. Nous imposons une condition initiale sous la forme d'une déformation sinusoïdale dans le plan horizontal, et sous la forme d'une tangente hyperbolique dans le plan vertical, afin de lisser la transition entre les deux couches et amortir d'éventuelles discontinuités. Nous obtenons alors une faible couche initiale dont l'épaisseur est négligeable par rapport à l'épaisseur que nous obtiendrons une fois le mélangeage effectué. Les simulations ont été effectuées sur 16 processeurs en 2D pour une durée d'environ 4 heures et 128 en 3D pour une durée de 3 jours maximum.

La fréquence d'excitation du pot vibrant est de 4Hz, pour une amplitude de

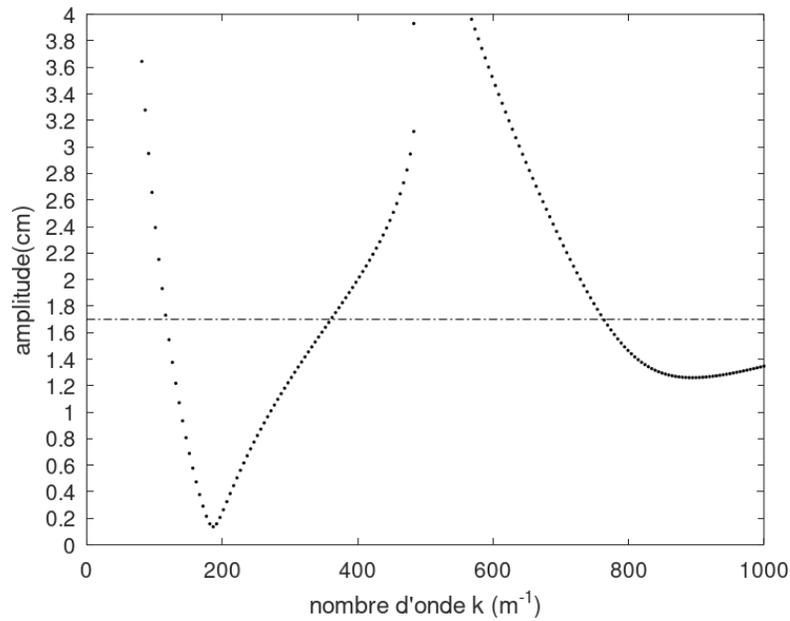


Fig 5.7: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie du système eau/eau salée, pour une fréquence d'excitation de 4Hz.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	Concentration
gauche	mur	mur
droite	mur	mur
haut	mur	mur
bas	mur	mur
devant	mur	mur
derrière	mur	mur

Tableau 5.4: mélangeage d'eau salée : Conditions aux bords

1.7cm. Le diagramme de stabilité sur la figure 5.7 montre plusieurs langues d'instabilité. La première langue, associée à la première sous-harmonique, soit la moitié de la fréquence d'excitation, est traversée par l'axe traçant l'amplitude du pot vibrant. L'analyse linéaire montre une réponse vibratoire suffisamment importante pour être susceptible d'engendrer une couche de mélange.

De la même façon que pour le test de validation, la couche initiale se comporte comme une interface qui oscille avant de se déformer à son amplitude maximale. Plusieurs vortex se forment et une partie de l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique pour mélanger l'eau et l'eau salée. Nous avons développé ce point dans le chapitre 5. Les simulations 2D, 2.5D et 3D permettent d'obtenir des stratifications similaires. Nous pouvons observer dans les figures 5.9 et

5.10 les motifs formés à l'amplitude maximale de la pseudo-interface avant l'apparition de rouleaux. Les stratifications, après leur formation, ne sont pas statiques. Des ondes de gravité continuent de se propager latéralement, numériquement et expérimentalement. L'épaisseur moyenne  $L$  obtenue est d'environ  $L \approx 1.2\text{cm}$  que l'on utilise les simulations 2D, 2.5D ou 3D, comme on peut le constater sur la figure 5.8. Cette consistance des résultats entre les simulations 2D et 3D provient du fait que le mélangeage des deux couches reste assez faible comparé au cas de validation que nous avons traité, pour lesquels les structures turbulentes sont beaucoup plus importantes, ce qui impose l'utilisation d'un calcul dans un domaine tridimensionnel. Le modèle de Darcy fournit lui aussi un résultat similaire. Le mélangeage convectif étant de faible dimension, les rouleaux qui pourraient se développer dans l'axe transverse restent négligeables et n'affectent pas significativement à cette échelle la formation du mélange. Cependant l'épaisseur est suffisamment importante pour ne pas observer l'influence du modèle 2.5D par rapport à une simulation 2D simple.

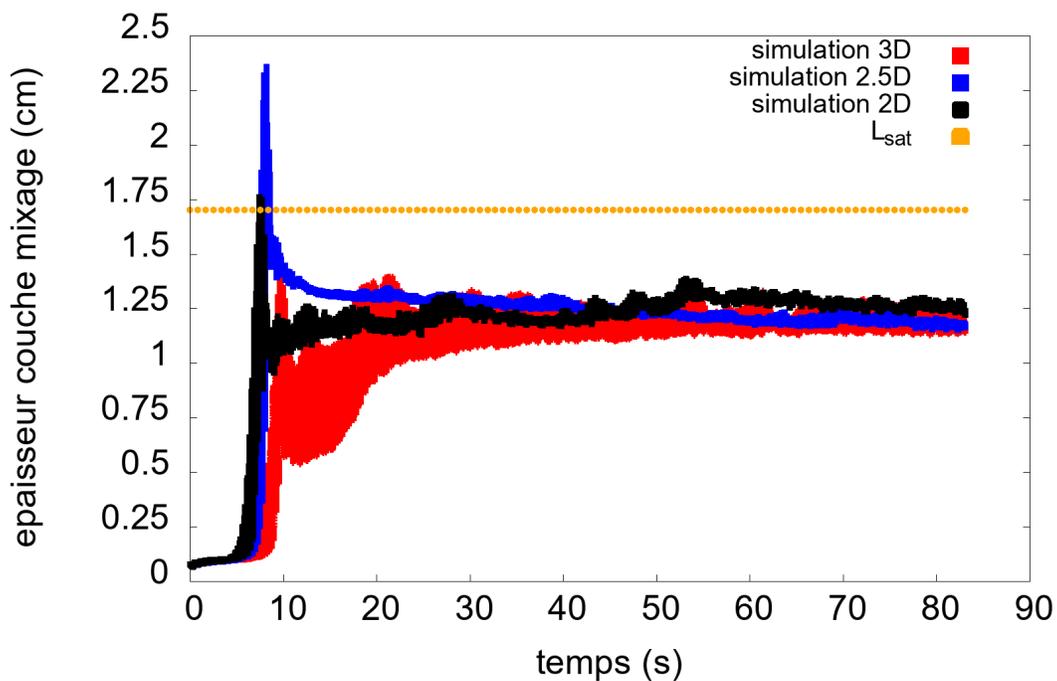
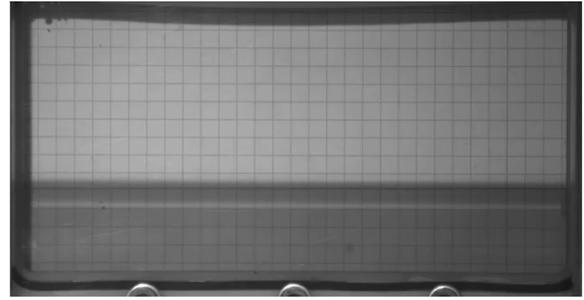
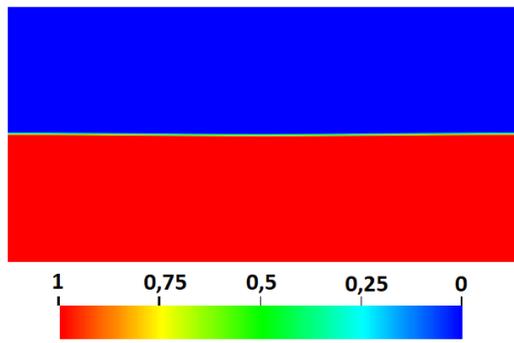
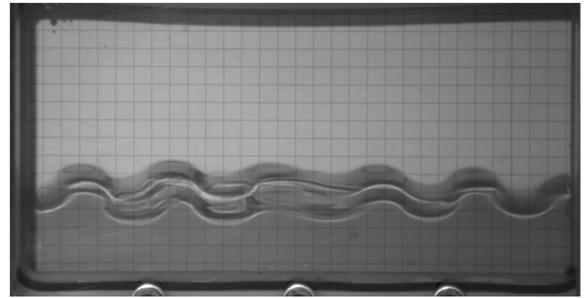
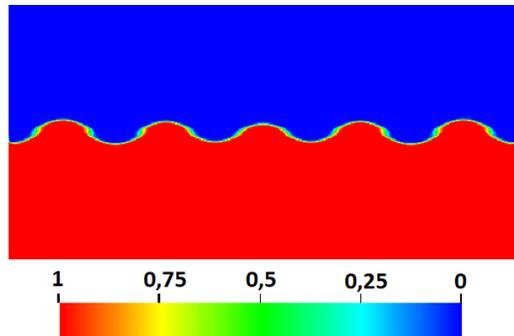


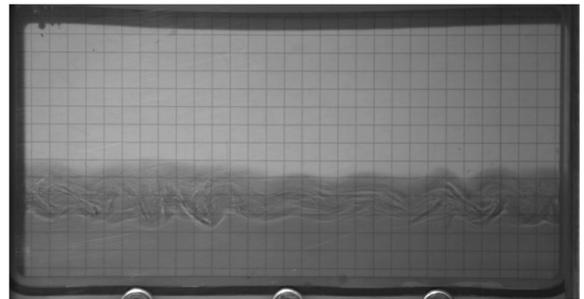
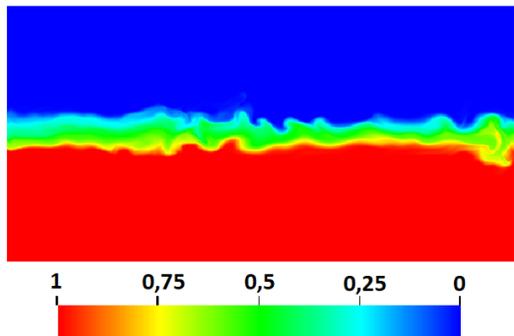
Fig 5.8: Épaisseur moyenne  $L$  de la couche de mélange



(a) Condition initiale



(b) Formation d'un motif. Dernière étape avant la formation de rouleaux. Ici la simulation affiche un temps  $t \approx 7s$  et l'expérimentation un temps  $t \approx 8.2s$



(c) Régime de mélange dissipée, et stabilisation de la stratification. Des ondes de gravité continuent de se déplacer au bout d'un temps  $t = 80s$

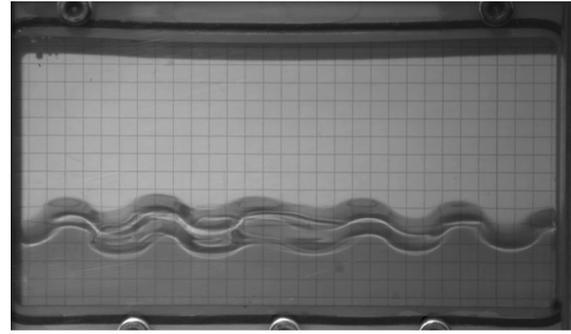
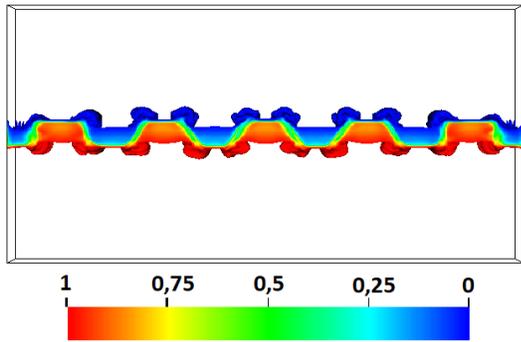
Fig 5.9: mélangeage du système monophasique: Simulations numériques 2D à gauche et expérimentations à droite. Le motif formé avant formation des rouleaux de mélangeage sont très proches. La solution stratifiée stable montre que des ondes de gravité sont alimentées et se déplacent latéralement, autant sur nos simulations que sur les expérimentations.

Nous pouvons noter que si les simulations 2D, 2.5D et 3D forment le même motif que l'expérimentation à l'amorçage du mélangeage, les simulations 2D/2.5D amorcent le mélangeage un peu plus rapidement que l'expérimentation. À l'inverse les simulations 3D démarrent le mélangeage un peu plus tardivement. La fourchette d'erreur est de l'ordre de la seconde. Les conditions expérimentales

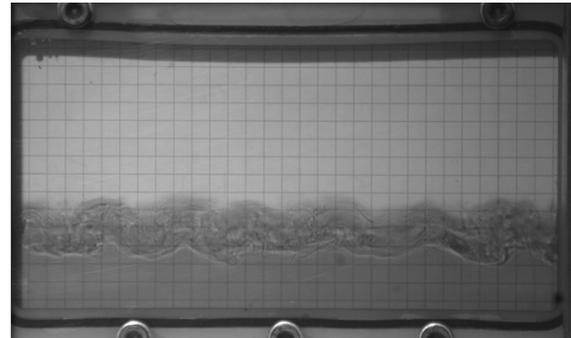
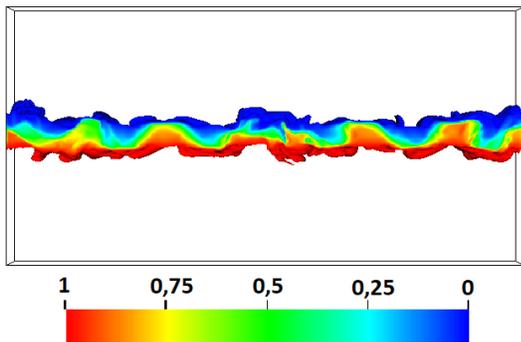
n'étant pas parfaitement reproductibles, il est cohérent d'observer un faible décalage entre les résultats numériques et expérimentaux. Nous pouvons voir l'écart de temps à l'amorçage du mélange sur la figure 5.8. Entre les simulations 2D et 3D, nous pouvons émettre l'hypothèse que la contrainte exercée sur l'écoulement numérique en empêchant un écoulement dans le sens de la profondeur peut engendrer une surexcitation et l'inversion de la cascade de la turbulence, ce qui peut engendrer un surmélangeage. C'est d'ailleurs pour cette raison que la validation ne s'est effectuée qu'en 3D.

L'épaisseur finale est assez petite, bien plus que notre cas de validation, pour plusieurs raisons. Nous avons utilisé un pot excité à une fréquence près de 6 fois plus importante. Une fréquence plus élevée stabilise le système hydrodynamique et réduit ainsi la taille finale de la couche. On observe d'ailleurs dans la formule théorique de l'épaisseur moyenne  $L$  de la couche que celle-ci tend vers une valeur minimale pour une pulsation qui tend vers l'infini. Elle ne dépend plus que du nombre d'Atwood et de l'amplitude, de telle sorte que  $L = 4A_t A$ . Le second motif qui explique la faible épaisseur engendrée est que l'amplitude des oscillations est trente fois plus petite que celle que nous avons pour le cas de validation. En d'autres termes, pour chaque accélération dans un sens ou dans un autre, la durée de celle-ci ne permet pas d'entraîner suffisamment le fluide pour engendrer un mouvement de plus grande échelle, donc des vortex possédant une énergie cinétique plus importante.

L'épaisseur théorique, pour un nombre d'Atwood  $A_t = 0.091$  correspondant à notre problème, est  $L = 0.017m$ . Nos résultats numériques convergent vers une même solution pour les trois simulations 2D, 2.5D et 3D, qui est  $L_{sim} \approx 0.012m$ . Des études complémentaires sont nécessaires pour connaître la limite d'application de la formulation théorique de l'épaisseur moyenne de mélangeage.



(a) Formation d'un motif. Dernière étape avant la formation de rouleaux. Ici la simulation et affiche un temps  $t \approx 9.6s$  et l'expérimentation un temps  $t \approx 8.2s$



(b) Régime de mélange presque dissipé. L'instabilité de Faraday s'exprime encore et forme des oscillations régulières sur la couche de mélange Capture pour un temps  $t \approx 18s$

Fig 5.10: mélangeage de la couche monophasique: Simulations numériques 3D à gauche et expérimentations à droite. Le motif formé sur la figure (a), comme en 2D, est proche du motif expérimental obtenu, avec 5 longueurs d'ondes sur la pseudo-interface. Des oscillations verticales continuent de faire grossir la strate intermédiaire.

### 5.2.3 Conclusion

Le mélangeage d'un système monophasique soumis à des vibrations verticales est un sujet assez récent, pour lequel il est important de s'attarder afin de bien comprendre la dynamique du mélange qui se forme entre deux couches miscibles. La pseudo-interface temporaire qui sépare deux couches homogènes est déformée par l'instabilité de Faraday, comme un système diphasique, et forme des rouleaux convectifs qui, en se propageant le long de l'interface, engendre la formation d'une couche de mélange stratifiée. Cette stratification est dépendante des propriétés physiques des couches de fluide mises en jeu, ainsi que des paramètres de l'excitation paramétrique. Une fois la couche intermédiaire du mélange formée et stable, celle-ci se retrouve au milieu des

deux couches homogènes dont l'épaisseur aura diminué lors du mélange. Le système est alors stable dans le temps et seul le régime diffusif, beaucoup plus lent, continue à développer l'épaisseur de la stratification. Nos résultats numériques sont concordants avec les résultats disponibles dans la littérature, pour un volume conséquent nécessitant un calcul 3D. Nous avons pu voir avec les comparaisons entre nos simulations et les données expérimentales fournies par Roxel que pour un système de faible profondeur, avec une petite couche de mélange, nous obtenions une solution consistante avec des simulations 3D, 2D ou 2.5D avec le modèle de Darcy.

Nous allons maintenant nous diriger vers le mélangeage d'un fluide chargé à l'aide du mélangeur RAM. Ce chapitre est une continuité du chapitre précédant puisque nous reprendrons le même principe, à savoir deux couches de mélange d'un même fluide qui vont interagir entre elles, sauf que cette fois-ci la concentration d'espèce que nous utilisons sera remplacée par une fraction volumique de poudres représentant une suspension.

# Chapitre 6

## Mélangeage de fluide chargé

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le modèle de Phillips, comme l'ensemble des modèles eulériens de comportement des fluides chargés, est majoritairement utilisé pour étudier l'évolution de la distribution du chargement dans des écoulements tubulaires, équivalent à un écoulement de Poiseuille pour un fluide newtonien, ou la simulation du cisaillement de fluides entre deux plateaux en rotation, comparé aux procédés d'étude du cisaillement visqueux traditionnellement utilisé dans l'étude rhéologique des fluides. Nous procéderons à la validation du modèle de Phillips avec un cas expérimental provenant de la littérature scientifique, que nous comparerons avec nos résultats.

Le mélangeage d'un fluide contenant un scalaire passif est un thème récent dans la littérature, et pour le moment le mélangeage d'un fluide chargé n'a pas encore abouti à une publication significative, tant sur le plan expérimental que numérique. Les articles les plus proches étudient le mélangeage de particules dans un milieu sec, grâce à des méthodes de calcul lagrangiennes. Nous étudierons le mélangeage d'un fluide contenant une couche de particules pour plusieurs accélérations avec le mélangeur RAM, dont les résultats numériques seront comparés avec les données expérimentales fournies par Roxel.

### 6.1 Préambule

De la même façon que pour le problème monophasique, la masse volumique du fluide est traitée de telle sorte que la condition d'incompressibilité du fluide soit préservée.

De ce fait, la masse volumique  $\rho$  utilisée pour le terme d'advection et le terme temporel sera égale à la masse volumique moyenne du milieu. Le système étant fermé, la masse volumique  $\rho$  sera constante. La masse volumique locale sera exprimée dans le terme inertiel, en fonction de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ , de la masse volumique du fluide interstitiel  $\rho_{fluide}$  et de la masse volumique du matériau constituant la suspension  $\rho_{solide}$ , de telle sorte que:

$$\rho_g(\phi^s) = (1 - \phi^s) * \rho_{fluide} + \phi^s * \rho_{solide} \quad (6.1)$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho_g(\phi^s)(\mathbf{g} + \mathbf{f}(\mathbf{t})) + \nabla \cdot [\mu(\phi^s) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (6.2)$$

Et la condition d'incompressibilité est respectée:  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Le système est couplé avec le modèle de Phillips et la loi de comportement de Krieger, présentés dans les chapitres 2 et 3.

## 6.2 Validation

Cette première étape de validation consiste à comparer les données fournies par Hampton et al. [33], avec le modèle implémenté dans le code NOTUS. Hampton compare ses propres résultats expérimentaux avec différents modèles, dont le modèle de Phillips. Il a déjà été étudié au sein du laboratoire I2M par Breil [203] et Dugois [204], respectivement avec les codes Aquilon et Thetis, qui furent les codes précurseurs au code NOTUS. Le code NOTUS est orienté sur le développement eulérien des équations de comportement, le choix s'est donc naturellement porté sur ce modèle, associé au modèle rhéologique de Krieger pour le calcul de la viscosité, déjà utilisé par les auteurs précédemment cités.

### 6.2.1 Écoulement dans une conduite cylindrique

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite cylindrique. Le cisaillement visqueux du fluide permet de former un profil de vitesse caractéristique au sein du tube. L'expérience de Hampton et al.[33] consiste à reproduire un écoulement de Poiseuille en ajoutant une suspension de poudre dans un fluide.

Le cisaillement du fluide lors de son parcours dans le tube va engendrer le déplacement des particules de cette poudre. La ségrégation particulaire forme alors un profil de vitesse et de chargement. L'objectif de leurs travaux est alors de mesurer cette migration des particules et ensuite de les comparer avec différents modèles numériques. Pour ce faire, ils utilisent un système de mesure basé sur l'imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire RMN, positionné autour d'un tube raccordé à un réservoir et alimenté par une pompe, comme présenté sur la figure 6.1. La longueur totale du système est de 70m, mais la longueur effective de la conduite dans laquelle est étudiée le comportement de la suspension varie en fonction de la dimension du tube, dont on précise les valeurs dans la table 6.2.

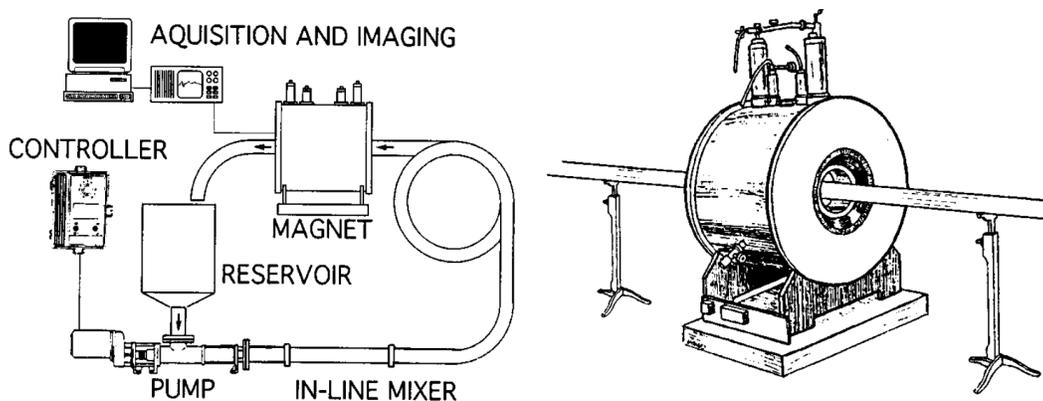


Fig 6.1: Montage expérimental pour mesurer la fraction volumique de poudres dans un tube par RMN. Le tube est alimenté par un réservoir muni d'une pompe. (Source: Hampton et al. [33])

La suspension choisie est de la poudre de polyméthylmétacrylate, souvent abrégé en PMMA. Le fluide utilisé est conçu pour avoir la même masse volumique que le PMMA à température ambiante. Les propriétés du système sont précisées dans le tableau 6.1.

Deux dispositifs expérimentaux sont mis au point sur le système précédemment énoncé, en fonction du rayon moyen des particules, noté  $a$ , et le rayon du tube  $R$ . Le premier dispositif est défini par un rapport  $a/R = 0.0256$ , pour un rayon de tube  $R = 0.0127m$ . Le second est défini par un rapport  $a/R = 0.0625$ , pour un rayon  $R = 0.0508m$ . Le premier dispositif est plus proche de l'hypothèse de continuité du milieu nécessaire à la validé du modèle de Phillips. La dimension des poudres exploitées est du même ordre de grandeur que celle

que nous utiliserons ensuite pour le mélangeage avec le mélangeur RAM. Nous nous concentrerons donc sur l'étude de cette configuration.

Propriétés du fluide et de la suspension		
Fluide	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa \cdot s$ )
fluide	1180.7	2.1
Suspension	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	taille particule ( $\mu m$ )
PMMA	1180.7	650

Tableau 6.1: Écoulement d'une suspension dans un tube : Propriétés du fluide et de la suspension

Les profils de vitesse obtenus par Hampton sont normalisés sous la forme d'une vitesse moyenne  $\bar{v}$ , fonction du débit  $Q$  de l'écoulement en fonction de la surface transverse  $A$  du tube.

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{Q}{A} \quad (6.3)$$

On notera  $\hat{v} = v/\bar{v}$  la vitesse adimensionnée du tube et présentée dans les profils radiaux qui suivront. Le profil radial  $r$  est lui-même adimensionné par rapport au rayon  $R$  du tube.

Trois chargements différents contenus dans le fluide sont envoyés dans le tube, initialement homogènes:

- Chargement initial 1 :  $\phi^{s^0} = 20$  %
- Chargement initial 2 :  $\phi^{s^0} = 30$  %
- Chargement initial 3 :  $\phi^{s^0} = 45$  %

On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 1.0 * 10^{-2}$  s et un coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.1$  pour le schéma Weno et le schéma Lax-Wendroff. Nous utiliserons deux maillages de dimensions 16x512 et 32x1024, dans une formulation axisymétrique, pour représenter un plan de symétrie du tube, dont on compile les conditions aux bords dans le tableau 6.3.

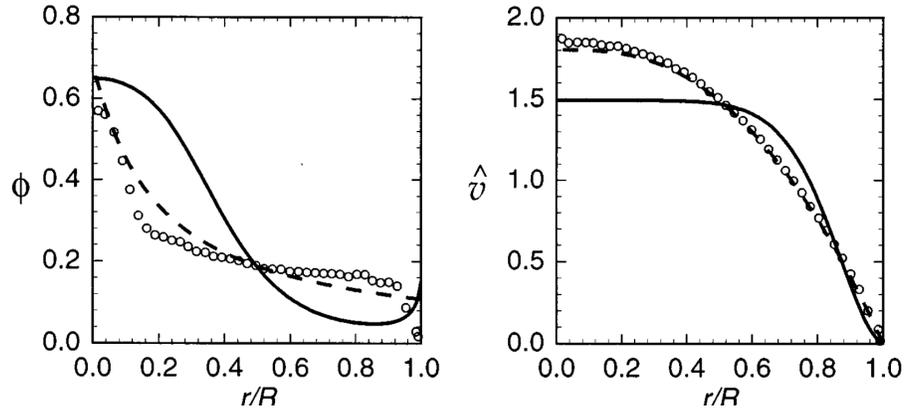
En plus de l'acquisition des profils expérimentaux, Hampton a comparé ses résultats avec deux modèles de modélisation des suspensions. Le premier, le

Longueur du tube		
Chargement $\phi^s$	L (exp) (m)	L (sim) (m)
20	28.6	30
30	12.75	15
45	4.55	5

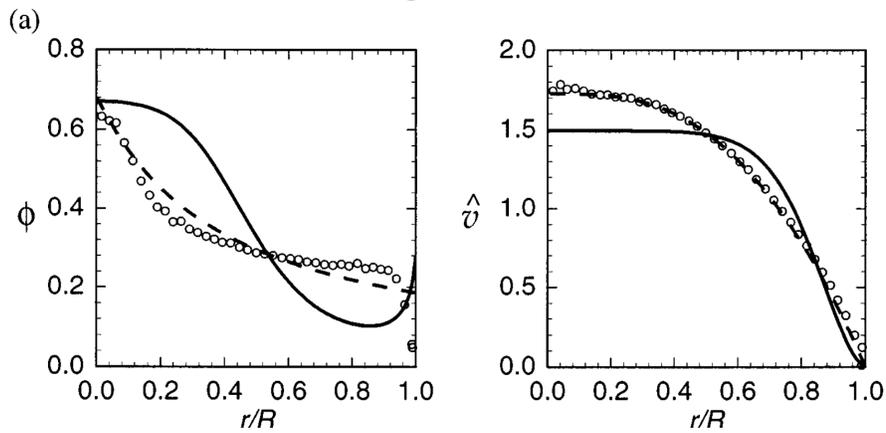
Tableau 6.2: Migrations de particules dans un tube : longueur de tube

modèle de Phillips est un modèle de type SIM (Shear Induced Model), le second, le modèle de Jenckins et McTigue [165], est de type SB (Suspension Balance). Nous nous pencherons en particulier sur le modèle SIM, qui constitue le coeur de notre étude. L'ensemble de ces données est présenté sur la figure 6.2.

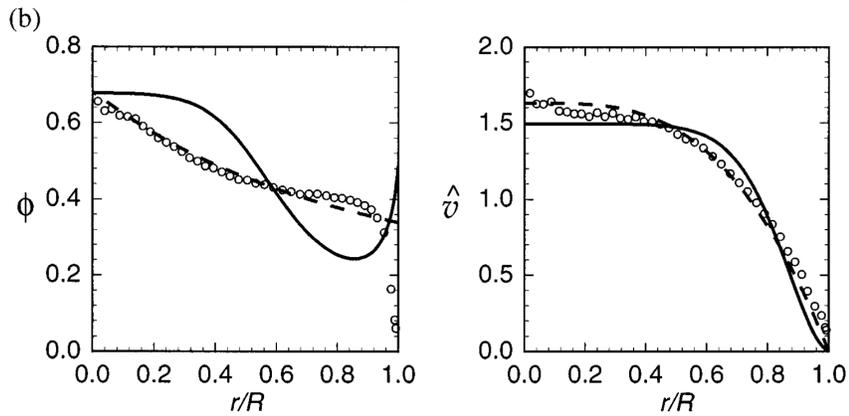
Les résultats numériques ainsi que les valeurs de Hampton sont compilés dans les images de la figure 6.3. Les trois chargements, une fois atteint le profil d'équilibre dans le tube, conservent une valeur proche du chargement initial à proximité du centre du profil, (pour  $r/R \approx 0.5$ ), et adoptent une courbe linéaire en dehors des extrémités du profil. À proximité du bord du tube ( $r/R = 1$ ), la fraction volumique de poudre chute brutalement, pour atteindre une valeur quasi-nulle. Le cisaillement atteint une valeur maximale dans cette zone, ce qui explique la migration des particules du bord du conduit vers le centre, pour lequel le cisaillement est moins important. La vitesse est analogue à celle obtenue avec un écoulement de Poiseuille sans chargement. À proximité du centre du tube, on observe expérimentalement un pic de concentration de charge, avec un léger plateau autour de  $r/R = 0$ . Le comportement du modèle de Phillips donne une solution plus linéaire, mais avec une pente différente de la portion de courbe au centre du profil. La compaction observée numériquement à  $r/R = 0$  est proche de celle obtenue expérimentalement. La différence la plus importante est visible autour de  $r/R = 0.2$  pour lequel la courbe expérimentale de fraction volumique de poudre décrit un changement de pente important, notamment pour un chargement initial de 20% ou 30%.



(a) Chargement  $\phi^{s^0} = 0.20$

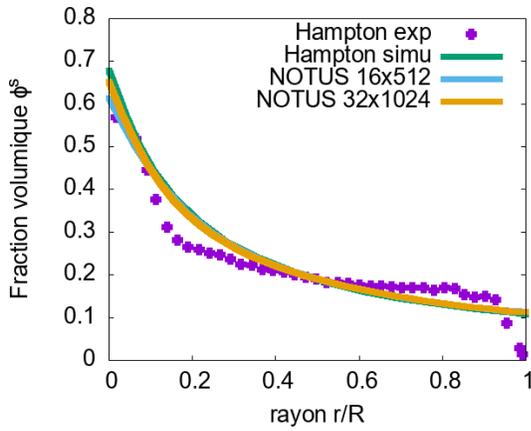


(b) Chargement  $\phi^{s^0} = 0.30$

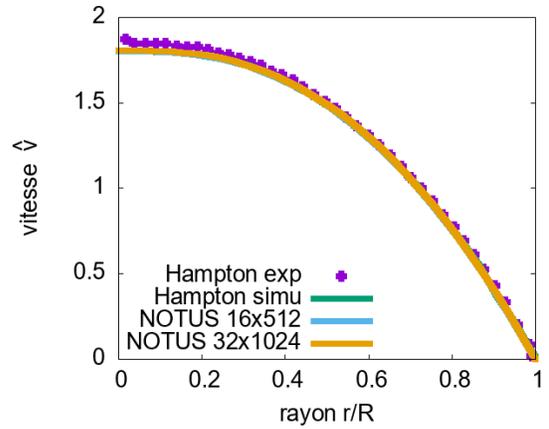


(c) Chargement  $\phi^{s^0} = 0.45$

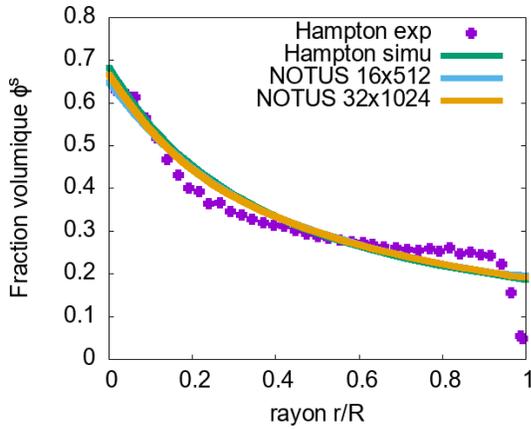
Fig 6.2: Résultats expérimentaux et numériques provenant des travaux de Hampton [33]. Les profils radiaux mesurés à l'aide de l'imagerie RMN (o) sont comparés avec le modèle SIM (- -) et le modèle SB (-). Profils de chargement à gauche, de vitesse à droite.



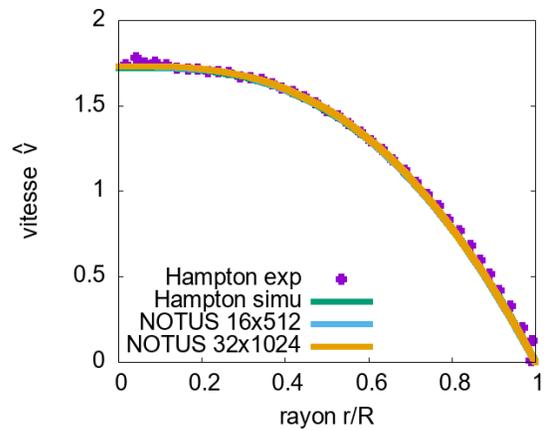
(a) Profil de fraction volumique pour  $\phi^{s^0} = 0.20$



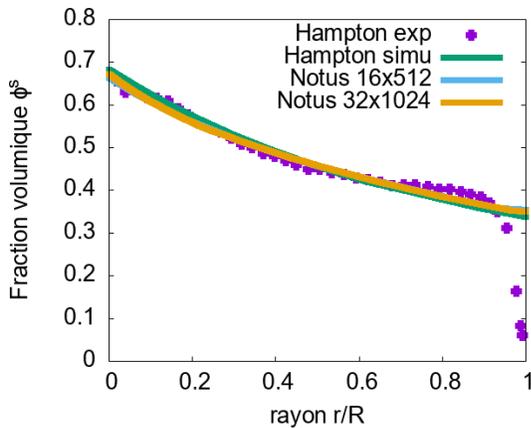
(b) Profil de vitesse pour  $\phi^{s^0} = 0.20$



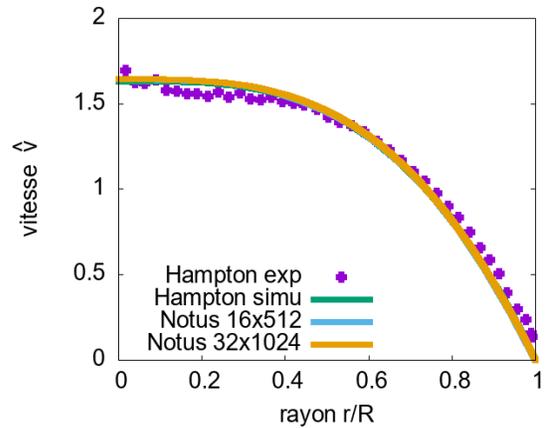
(c) Profil de fraction volumique pour  $\phi^{s^0} = 0.30$



(d) Profil de vitesse pour  $\phi^{s^0} = 0.30$



(e) Profil de fraction volumique pour  $\phi^{s^0} = 0.45$



(f) Profil de vitesse pour  $\phi^{s^0} = 0.45$

Fig 6.3: Profils radiaux de la fraction volumique  $\phi^s$  et de la vitesse adimensionnée pour les trois chargements initiaux.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	SIM (Phillips)
gauche	axisymétrique	axisymétrique
droite	mur	neumann non homogène
haut	neumann	neumann
bas	dirichlet	dirichlet

Tableau 6.3: Écoulement d'une suspension dans un tube : Conditions aux bords

### 6.3 Simulations du mélangeage d'un fluide chargé

L'étude numérique du comportement de fluides chargés dans la littérature s'est jusqu'à présent majoritairement limitée à des écoulements laminaires, de type sédimentation, des écoulements dans des tubes assimilables à des écoulements de Poiseuille, ou encore à des études rhéologiques basées sur le comportement en cisaillement, à partir d'écoulements de Couette. Quelques travaux se sont portés sur l'étude du mélangeage par pâles rotatives de fluides faiblement chargés, notamment à l'aide du modèle de Phillips, cependant les simulations jusque là disponibles basées sur le mélangeage vibrationnel se sont concentrées sur des poudres sèches, à l'aide de méthodes lagrangiennes, limitant ainsi la quantité de poudre mise en jeu. Le mélangeage vibrationnel d'un fluide contenant une suspension constitue donc une nouveauté, et peut être mis en lien avec le mélangeage vibrationnel de fluides miscibles, pour lequel les différents travaux sont tous récents et novateurs.

Le caractère innovant de cette étude implique l'absence de données dans la littérature permettant de fournir une validation sur un cas impliquant l'instabilité de Faraday, à des régimes vibratoires différents du RAM, comme nous avons pu le faire dans les chapitres précédents. Il est donc important de pouvoir se baser sur des conditions expérimentales à même de fournir une solution rigoureuse à notre problème, pour le comparer à nos résultats numériques. La sélection de ces conditions d'expérimentation se focalisent sur le choix du système fluide/chargement, permettant de satisfaire les critères du modèle de ségrégation particulaire.

Nous présenterons notre approche pour développer un cas de validation dont les résultats expérimentaux, produits par Roxel, seront comparés aux résultats numériques obtenus avec le modèle de Phillips. Nous nous pencherons sur

la dynamique des suspensions lorsqu'elles sont soumises à une accélération vibratoire.

### Mise en place du protocole

Afin de pouvoir apprécier le comportement du fluide chargé soumis à l'instabilité de Faraday, nous allons reprendre la configuration déjà énoncée au chapitre précédent, puisque la présence de poudres dans le fluide sera ramené à un scalaire représentant la fraction volumique de la suspension: une couche de fluide contenant un scalaire, plus lourd, dans la moitié basse du réservoir, tandis que la moitié haute sera remplie avec le fluide pur. Le schéma 6.4 synthétise la disposition de la suspension. Le réservoir a été modifié afin de garantir son étanchéité, le domaine défini, en cm, est  $\Omega = [0, 15] \times [0, 7.5] \times [0, 1.125]$ .

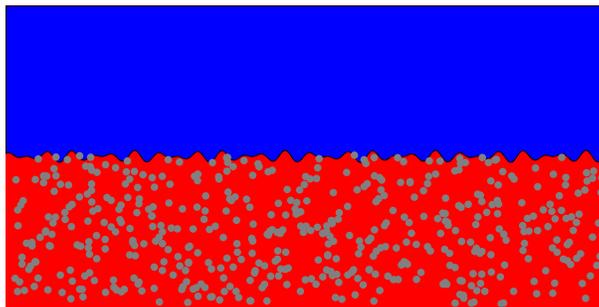


Fig 6.4: Schéma du problème de suspension

Le choix d'un système fluide/suspension constitue une donnée importante car elle doit respecter plusieurs critères. Certains sont liés à son exploitation, afin de pouvoir mener facilement une campagne expérimentale, d'autres numériques, liés aux contraintes du modèle de modélisation des suspensions.

- Contraintes expérimentales
  - Disponibilité du fluide/de la poudre
  - Système inerte, pour éliminer tout risque de réaction exothermique
  - Rapport masse volumique fluide chargé/fluide suffisamment important pour permettre le déclenchement d'un mélange.
  - Système suffisamment léger pour permettre au mélangeur RAM de monter en accélération

- Contrainte de résistance
- Contraintes numériques
  - Fluide newtonien
  - Suspension monodisperse
  - grain sphérique dur

Le choix final se compose du système eau/corindon. La poudre de corindon fournie est de granulométrie moyenne de  $135\mu m$ , et sera donc considérée comme monodisperse. Le tableau 6.4 résume les propriétés du fluide chargé. La couche de fluide chargée possède un chargement initial de fraction volumique d'environ  $\phi^s = 50\%$ . La suspension est donc considérée comme très concentrée, donc de masse volumique et de viscosité bien plus élevées que le fluide sans chargement. Nous considérerons que la couche de fluide non chargée, contient malgré tout un chargement initial de  $\phi^s = 1\%$ , donc très dilué et négligeable, pour compenser d'éventuelles erreurs numériques pouvant mener à des valeurs négatives de  $\phi^s$ .

La fréquence du mélangeur RAM étant  $f \approx 60Hz$ , nous sélectionnons trois accélérations permettant d'observer différentes couches de mélange, et ainsi d'apprécier la progression de l'efficacité du mélangeur en fonction de l'intensité vibratoire imposée. Nous avons sélectionné les valeurs  $acc = 30g$ ,  $acc = 60g$  et  $acc = 80g$ . Nous n'irons pas jusqu'à l'accélération maximale  $acc \approx 100g$  pour éviter des fuites du réservoir.

Propriétés du fluide et de la suspension			
Fluide	$\rho (kg \cdot m^{-3})$	$\mu (Pa \cdot s)$	Fraction volumique $\phi^s$
eau	1000	0.001	1%
Suspension	$\rho (kg \cdot m^{-3})$	taille particule ( $\mu m$ )	Fraction volumique $\phi^s$
corindon	4000	135	50%

Tableau 6.4: mélangeage d'un fluide chargé : Propriétés du fluide et de la suspension

On trace le diagramme d'instabilité pour le système, visible sur la figure 6.5. Les trois accélérations traversent des langues d'instabilités, on s'attend donc à

observer une déstabilisation engendrant un mélangeage.

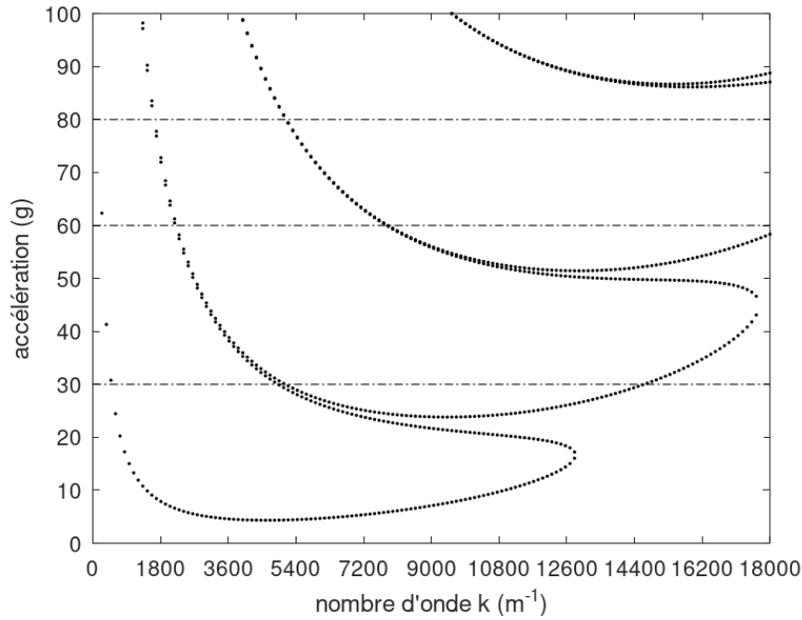


Fig 6.5: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie du système eau/eau chargé en corindon, pour une fréquence d'excitation de 60Hz.

Le maillage du domaine  $\Omega$  est de dimensions  $512 \times 256 \times 38$ . On utilise un schéma WENO3 pour le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes, et un schéma Lax-Wendroff pour l'équation du modèle de Phillips. On utilise un pas de temps adaptatif, avec un pas de temps maximal  $\Delta t_{max} = 2\pi/(200\omega)$  s. Le coefficient CFL  $coef_{CFL} = 0.1$  est plus petit que le coefficient maximal nécessaire à la condition de stabilité des deux schémas, afin de diminuer le risque de divergence du calcul. En effet, dans le cas d'un mélangeage, le brassage important de la fraction volumique peut entraîner un sursaut de la valeur de  $\phi^s$  au-delà de la limite  $\phi^s = 0.68$  autorisée par le modèle de Krieger 2. Les conditions aux bords du domaines sont détaillées dans le tableau 6.5. Nous imposons une condition initiale sous la forme d'une déformation sinusoïdale dans le plan horizontal, et sous la forme d'une tangente hyperbolique dans le plan vertical, afin de lisser la transition entre les deux couches et amortir d'éventuelles discontinuités. Nous obtenons alors une faible couche initiale dont l'épaisseur est négligeable par rapport à l'épaisseur que nous obtiendrons une fois le mélangeage effectué. Les simulations ont été effectuées sur 128 processeurs sur une durée de 6 jours environ.

Conditions aux bords		
	Navier-Stokes	SIM (Phillips)
gauche	mur	neumann non homogène
droite	mur	neumann non homogène
haut	mur	neumann non homogène
bas	mur	neumann non homogène
devant	mur	neumann non homogène
bas	mur	neumann non homogène

Tableau 6.5: mélangeage d'un fluide chargé : Conditions aux bords

### 6.3.1 Simulations numériques et comparaisons expérimentales

Dès que l'excitation paramétrique est imposée au système, des structures se forment sur la couche initiale chargée. Nous pouvons décomposer le milieu en trois couches distinctes:

- Une couche de fluide non chargée, qui constitue la couche supérieure. Dans les simulations, cette couche contient une fraction volumique de poudre très faible, qui reste proche de la valeur  $\phi^s = 1\%$ . En conséquence le cisaillement visqueux affecte peu  $\phi^s$  et le milieu reste homogène.

Sur les données expérimentales, cette couche supérieure contient du fluide pur, dont on pourra cependant noter l'apparition de quelques zones contenant une suspension de faible concentration. Ceci est particulièrement visible pour les accélérations de 60g et 80g que l'on ne retrouve pas sur les simulations. L'hypothèse possible pour expliquer cette inhomogénéité est que l'ensemble des particules formant la suspension n'ont pas le même diamètre. Les particules les plus légères possèdent une dynamique différentes des plus lourdes.

- Une couche intermédiaire se forme grâce au mélangeage de la couche initialement chargée. Avec les vibrations, l'interface séparant la suspension du fluide pur, à  $t = 0$  s, se diffuse et forme rapidement un profil linéaire proche de celui que l'on retrouve pour le mélangeage d'une concentration. Les données expérimentales montrent la formation d'une couche

intermédiaire. Celle-ci se distingue bien de la couche inférieure.

- Une couche de fluide fortement chargée, constituant la couche inférieure. Si la couche initiale est imposée comme homogène dans nos simulations, le cisaillement provenant de l'écoulement engendrant la couche intermédiaire amorce des déplacements locaux de la suspension. Par le biais de rouleaux convectifs au sein de cette couche, ces inhomogénéités locales se déplacent au sein de cette zone, sans pour autant modifier significativement l'épaisseur de couche. Nous noterons la formation d'un léger dépôt au fond du réservoir. La sédimentation de la suspension ne peut pas être constatée expérimentalement et devra donc nécessiter des recherches ultérieures pour vérifier si elle s'applique bien expérimentalement, et si c'est le cas, observer son évolution dans un temps plus long.

Afin de visualiser la limite entre les couches de suspension et la couche de fluide supérieure, nous devons fixer une valeur pour laquelle nous considérerons la fraction volumique de suspension comme non négligeable. En effet, en dessous de quelques pourcents, la suspension, très diluée, peut être considérée comme négligeable, leurs interactions entre elles et leur influence sur la dynamique du fluide porteur étant faibles. Dans les expérimentations de Roxel, le sommet de la stratification montre une concentration de poudre ténue. Cette pellicule est peu chargée et marque la limite entre la suspension visible, et les éventuelles particules qui pourraient se déplacer librement dans le fluide pur, notamment à cause d'une granulométrie différente. La fraction volumique  $\phi^s = 5\%$  a été arbitrairement choisie pour délimiter la suspension.

Tous nos commentaires sont illustrés par les figures 6.9, 6.10 et 6.11.

Les rouleaux formés au sein de la suspension engendrent un cisaillement, qui à son tour, modifie localement la fraction volumique de poudre. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le comportement rhéologique d'une suspension induit la migration de particules des zones les plus cisailées vers les zones les moins cisailées. On rappelle que le modèle de Phillips se base sur ce comportement pour modéliser l'évolution d'une fraction volumique de poudre dans l'écoulement. Nous pouvons observer sur la figure 6.6 un plan de coupe du réservoir à la coordonnée horizontale  $x = 7.5cm$ . Nous pouvons observer dans les trois cas de figure la fine pellicule de suspension déposée au fond. Contrairement à la sédimentation gravitaire, ici la gravité rentre en compétition avec l'inertie de l'excitation paramétrique. De plus les variations de la fraction volumique sont susceptibles d'influer sur la formation de ce dépôt, l'inertie des

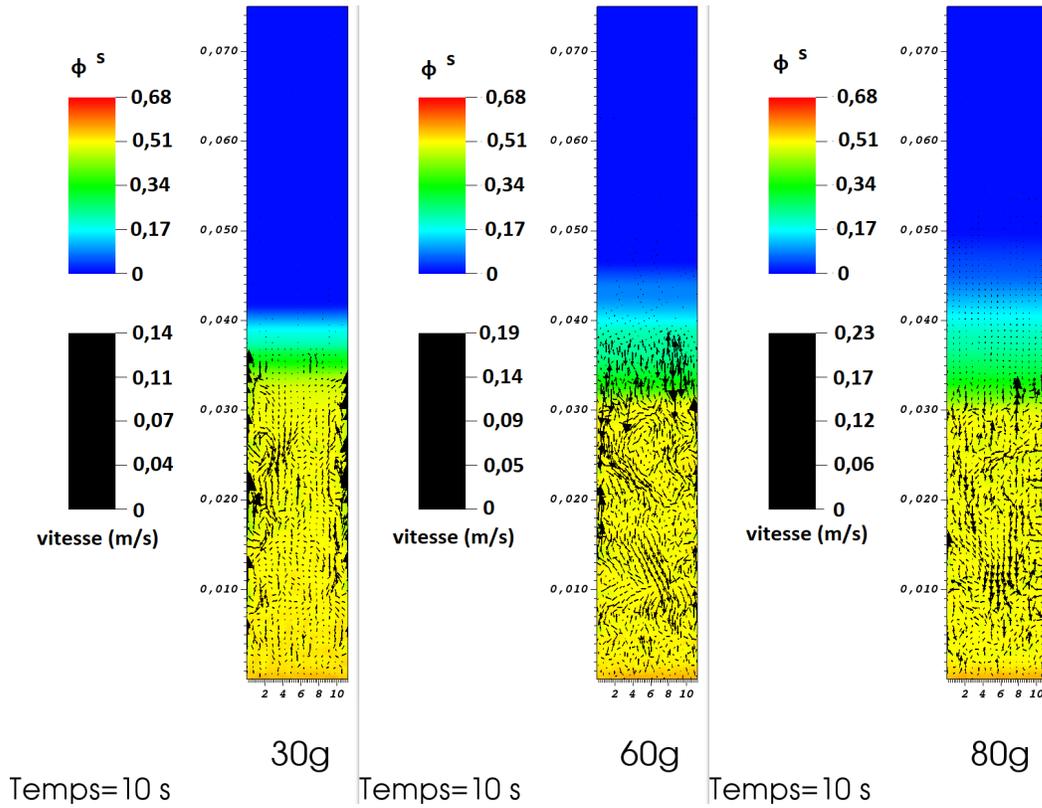


Fig 6.6: Plan de coupe du réservoir à la coordonnée axiale  $x = 7.5cm$  correspondant au milieu du réservoir. Formation de rouleaux de convection dans la suspension. Les vortex permettent la migration locale des particules sans changer la structure globale du mélange.

zones du fluide moins chargé étant plus petite que celle du fluide plus chargé. De façon générale, les premières constatations expérimentales et numériques, effectuées sur une échelle de temps de l'ordre de 10 secondes, suggèrent que la majorité de la suspension située entre la couche de mélange stratifiée et le dépôt conserve une concentration moyenne de particules stable. Une étude complémentaire sur un temps beaucoup plus long serait nécessaire pour voir l'évolution du comportement de la couche inférieure ainsi que de la stratification.

Contrairement au mélangeage de deux fluides miscibles, le mélangeage d'une suspension ne permet pas de conserver deux couches de valeur homogènes aux extrémités du réservoir, le calcul de l'épaisseur moyenne  $L$  n'est donc pas indiqué. Le calcul des profils verticaux moyens  $\langle \phi^s \rangle$  permet d'observer le profil global de la suspension, pour le régime établi.

$$\langle \phi^s \rangle(z, t) = \frac{1}{\text{surface}} \int \int \phi^s(x, y, z, t) dx dy \quad (6.4)$$

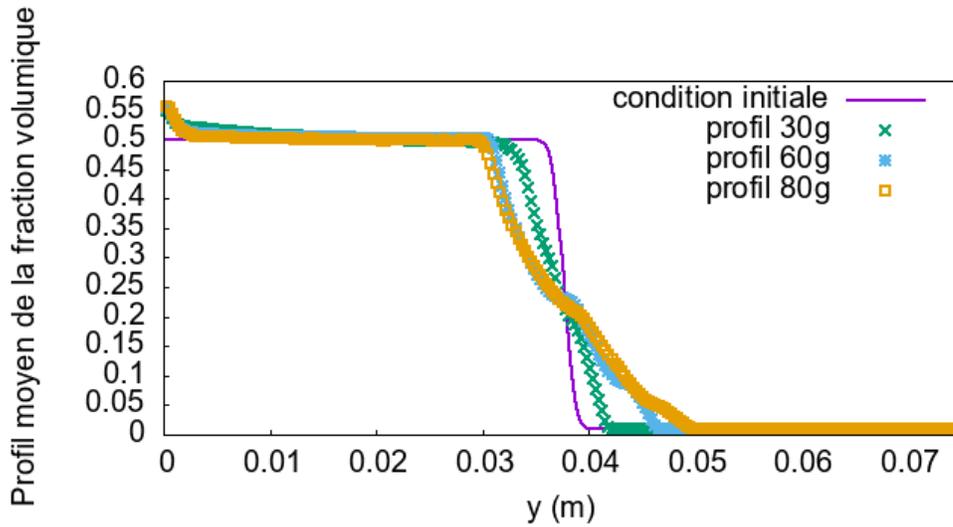


Fig 6.7: Profils verticaux moyennés de la fraction volumique  $\langle \phi^s \rangle$

On compile sur la figure 6.7 les profils moyens de la suspension pour les trois accélérations que nous avons sélectionnés, au bout d'une durée de 10 secondes. La condition initiale est proche d'une fonction Heaviside, le lissage effectué sur le profil permettant d'éviter d'éventuelles oscillations numériques. Par rapport à ce profil initial, nous pouvons voir la diffusion de la fraction volumique moyenne  $\langle \phi^s \rangle$  avec l'excitation paramétrique. Nous observons une évolution significative entre le profil obtenu pour 30g et les deux profils formés pour 60g et 80g, dont la couche stratifiée est beaucoup plus épaisse. En effet nous pouvons constater une fraction volumique moyenne quasi-identique entre les deux le long de l'axe vertical. Le comportement de la stratification diffère uniquement pour une couche de suspension diluée  $\langle \phi^s \rangle \leq 0.1$ , pour laquelle la stratification adopte une pente décroissante différente. L'accélération de 80g étire la stratification au-delà de celle obtenue à 60g selon une pente différente. Les données expérimentales de Roxel montrent que la strate la plus élevée de la suspension, très ténue, est plus élevée pour 80g que pour 60g. Cependant le comportement global de la couche reste quasiment identique et les données expérimentales ne permettent pas de voir une réelle différence du profil intérieur entre ces deux situations.

Les profils moyens confirment la formation d'un dépôt de fraction volumique maximale  $\phi^s = 0.55$ . Comme nous l'avons déjà suggéré à partir de la visualisation du champ de fraction volumique de la suspension, ce dépôt forme une fine pellicule qui ne dépasse pas 2.5mm. Le reste de la couche initiale, qui n'a pas été mélangée, confirme la conservation de la fraction volumique initiale à cet endroit, soit  $\phi^s = 0.5$ , quelles que soient les migrations locales provoquées par les

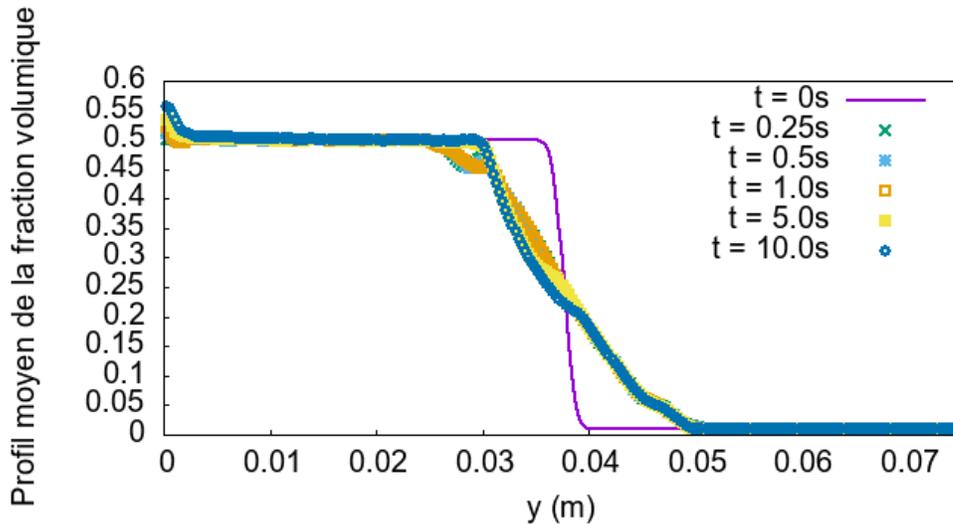


Fig 6.8: Profils verticaux moyennés de la fraction volumique  $\langle \phi^s \rangle$  en fonction du temps pour une accélération de 80g

cisaillement provenant des rouleaux convectifs que l'on observe sur la figure 6.6.

Pour terminer, concentrons-nous sur le mélangeage de la suspension pour une accélération de 80g, pour laquelle nous avons la couche stratifiée la plus épaisse. Dès les premiers instants, ici  $t = 0.25s$ , nous obtenons un profil proche de la solution stable, comme nous pouvons le voir sur la figure 6.8. L'utilisation du mélangeur RAM implique de prendre en compte l'inertie du réservoir qui amortit le mouvement du mélangeur. Nous ne pouvons donc pas obtenir un démarrage aussi brutal que ce que permet la simulation, donc la comparaison de l'évolution temporelle des prémices du mélangeage entre les données obtenues numériquement et expérimentalement est difficile. L'influence de la turbulence, de la flottabilité des particules et de la traînée autour de ces particules, qui ne sont pas pris en compte dans le modèle de Phillips, sont aussi susceptibles d'amortir le mouvement des particules et retarder la formation de la couche finale. L'amorçage du mélangeage par le modèle de Phillips et l'expression de l'instabilité de Faraday dans cette couche stratifiée constituent une piste d'étude ouverte.

Globalement nous pouvons retrouver un comportement similaire à celui d'un système monophasique composé de deux couches miscibles soumises à une instabilité paramétrique. Le déplacement de la suspension avec le cisaillement et la forte variation de viscosité avec la concentration constituent des différences majeures qui engendrent un comportement différent. Cependant, dans les

deux cas, une couche de mélange stratifiée se forme une fois que le régime de transition est dissipé. Ce régime est d'autant plus court que la fréquence d'excitation est élevée.

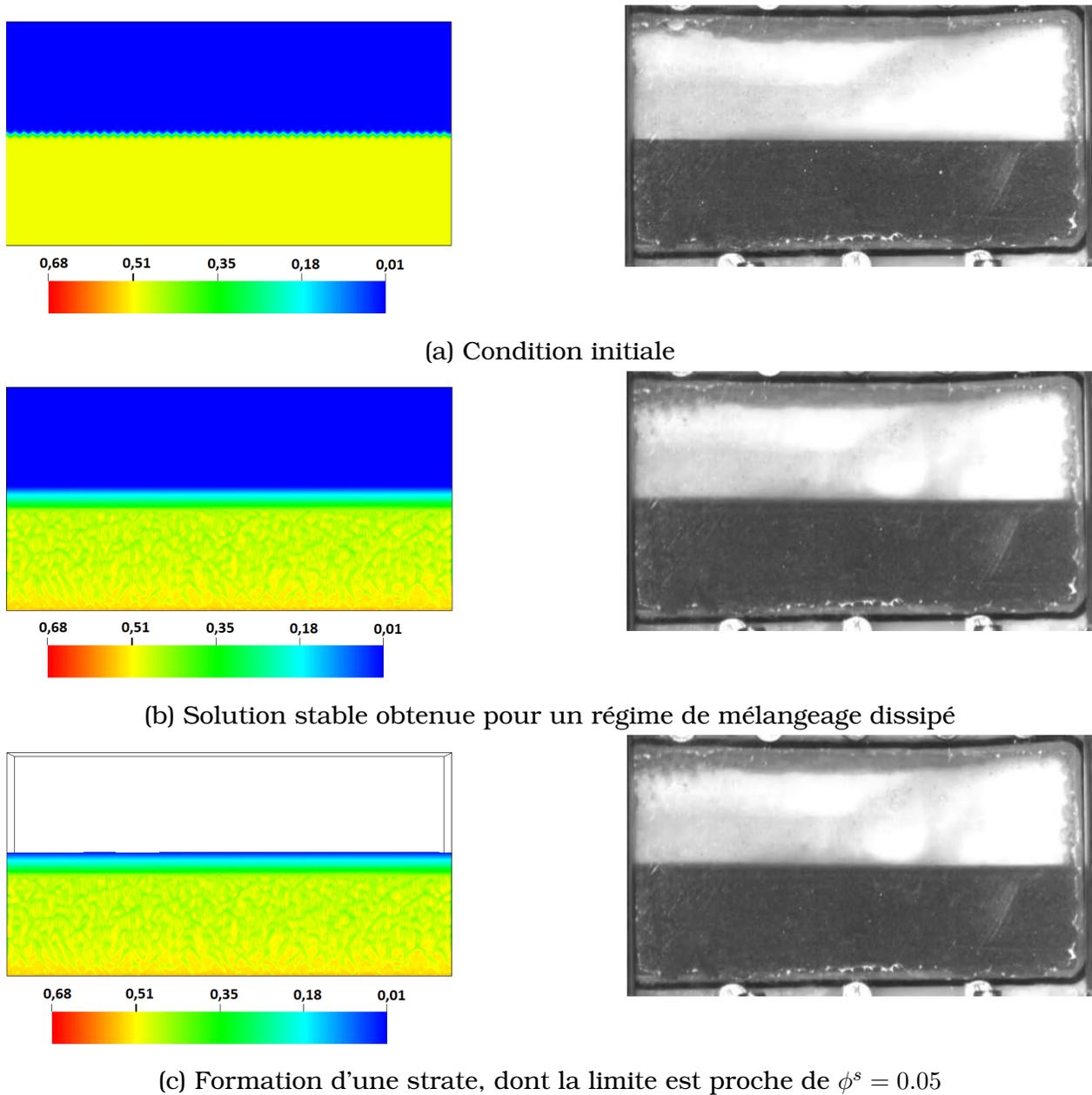
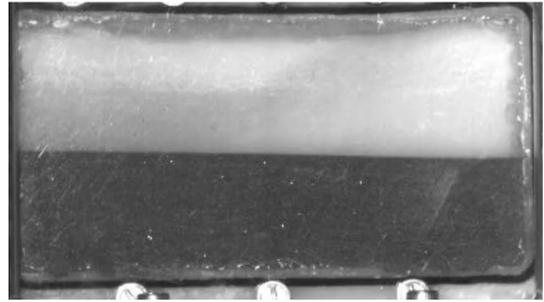
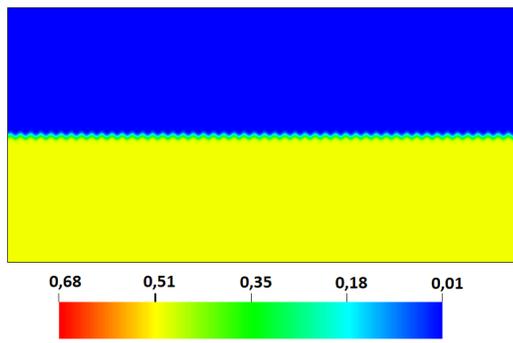
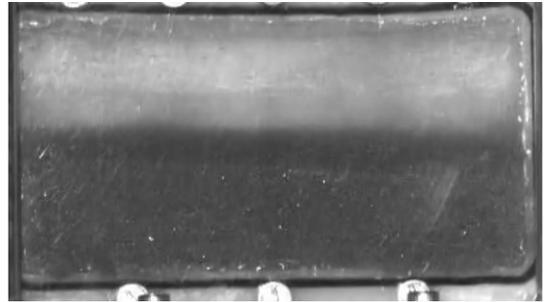
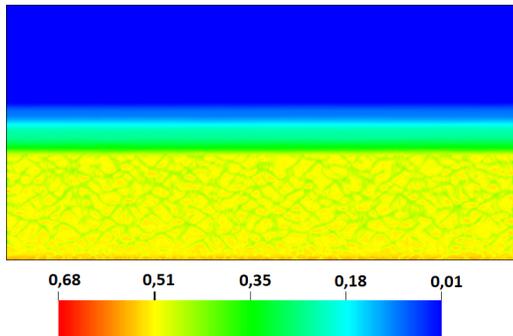


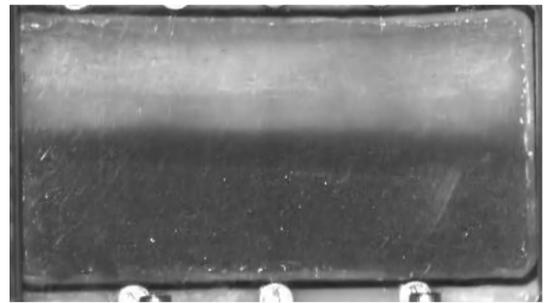
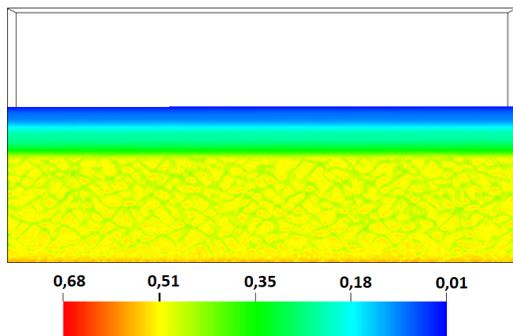
Fig 6.9: mélangeage pour une accélération de 30g : Comparaison de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales.



(a) Condition initiale

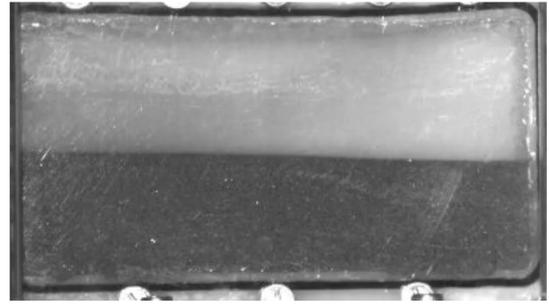
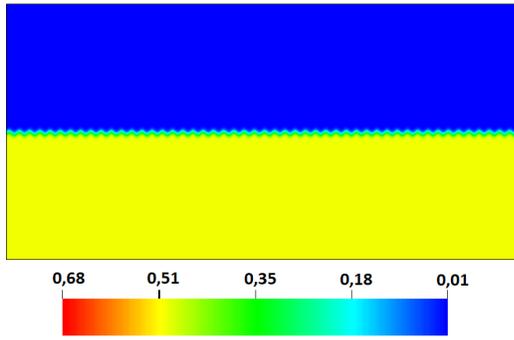


(b) Solution stable obtenue pour un régime de mélangeage dissipé

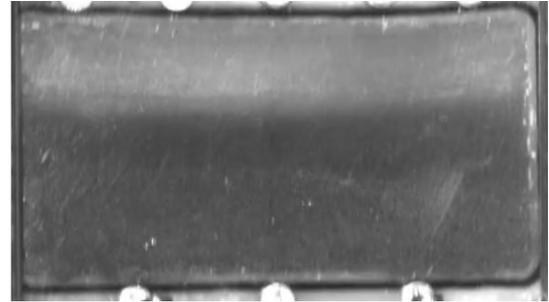
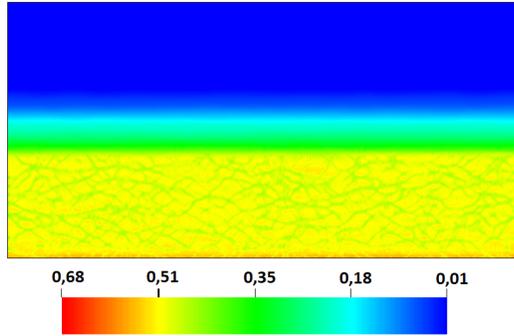


(c) Formation d'une strate, dont la limite est proche de  $\phi^s = 0.05$

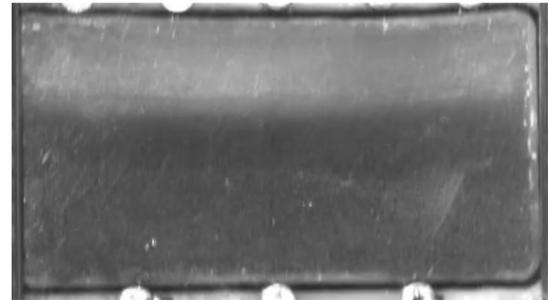
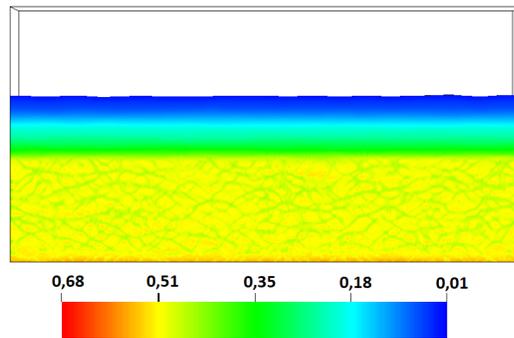
Fig 6.10: mélangeage pour une accélération de 60g : Comparaison de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales.



(a) Condition initiale



(b) Solution stable obtenue pour un régime de mélangeage dissipé



(c) Formation d'une strate, dont la limite est proche de  $\phi^s = 0.05$ . Nous noterons que la couche supérieure de la strate est encore instable. Comme pour le mélangeage monophasique, il est envisageable que l'excitation paramétrique ralentisse l'amortissement visqueux et la mise au repos de la couche de mélange.

Fig 6.11: mélangeage pour une accélération de 80g : Comparaison de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  calculée à l'aide du code Notus avec les données expérimentales.

### 6.3.2 Conclusion

Le mélangeage par imposition de vibrations verticales, tel que proposé par le mélangeur RAM, montre qu'il est possible de mélanger, à l'aide de la force inertielle oscillante qu'il impose, un système contenant une suspension. Nous avons sélectionné avec Roxel un type de chargement ainsi que plusieurs accélérations au cours de nos échanges afin de pouvoir comparer nos résultats numériques à l'aide du modèle de Phillips des données expérimentales fournies par l'entreprise.

Le comportement d'une suspension soumise aux vibrations verticales est très proche de ce que nous obtenons pour un système de deux couches miscibles. En effet, une couche intermédiaire se développe sous la forme d'une stratification, dont l'épaisseur est fonction de l'accélération imposée pour une même fréquence, en l'occurrence celle du mélangeur. Les simulations effectuées avec le code NOTUS montrent la formation d'une stratification dont l'épaisseur est proche de celle que l'on obtient expérimentalement. Cette stratification, obtenue très rapidement par la convection de la fraction volumique sous l'effet de l'instabilité de Faraday, devient rapidement stable une fois toute l'énergie potentielle de mélangeage dissipée. Les résultats expérimentaux de l'entreprise Roxel confirment la formation de la couche de mélange ainsi que la stabilité de celle-ci sur une dizaine de secondes après que le mélangeage ait été réalisé. L'équilibre de la stratification, malgré le fait que les vibrations continuent à être imposées, soulignent les limites de ce type de mélangeur. En effet, pour une même fréquence, l'augmentation de l'accélération implique que le mécanisme du mélangeur tolère une grande amplitude de mouvement, ce qui constitue une contrainte industrielle importante.

Plusieurs points sont à noter concernant l'influence du comportement rhéologique de la suspension dans le brassage réalisé avec la poudre de corindon. Le premier est que contrairement à une concentration d'espèce, pour laquelle seule la couche intermédiaire contient un gradient de concentration, la fraction volumique de poudre reproduit le comportement de migration des particules dans un courant cisailé. La conséquence est que les rouleaux formés dans le fluide chargé vont modifier localement la concentration en particules du fluide. Nos simulations montrent que la couche inférieure de fluide conserve globalement la même fraction volumique de charge, excepté au fond du réservoir, ce qui constitue notre second point. Ce dépôt est quasiment identique pour les trois accélérations considérées. Il soulève un questionnement quand au comportement du fluide chargé lorsqu'il est soumis à des vibrations

sur du long terme. Nos résultats numériques et les résultats expérimentaux n'étudient le processus que sur une dizaine de secondes. La couche de mélange se forme dès les premiers instants et conserve sa forme sur toute la durée de notre étude. Il serait donc pertinent d'approfondir l'étude de cette sédimentation pour voir si ce dépôt se développe jusqu'à ce que l'instabilité de Faraday engendre une nouvelle déstabilisation, ou s'il est pérenne dans le temps.

# Chapitre 7

## Conclusion générale de la thèse

Cette thèse constitue une première approche de l'étude numérique du mélangeage par un mélangeur de type RAM. En effet, ce type de mélangeur à haute intensité vibratoire, sur le marché depuis seulement une dizaine d'années, est à l'origine d'une expansion de la recherche sur le mélangeage de fluides complexes à l'aide de vibrations d'intensités modérées à élevées. Ce travail fournit une des premières études numériques dédiées à ce dispositif, à l'aide du code NOTUS développé au sein de l'I2M. Il s'inscrit dans un projet de plus grande ampleur en partenariat avec l'entreprise Roxel dans le but de modéliser des fluides complexes multiphasiques mettant en jeu des suspensions, des fluides visqueux ainsi que l'action d'interfaces. Nous présentons ainsi les premières bases qui seront employées par la suite pour des milieux plus hétérogènes.

L'instabilité de Faraday constitue la pierre angulaire de ce travail de thèse. Tout au long de notre étude, nous avons pu constater la complexité de l'instabilité hydrodynamique et son couplage avec d'autres instabilités secondaires, engendrant un mélangeage dans un milieu stratifié. Nous avons en particulier validé avec le code NOTUS l'expression de l'instabilité de Faraday pour un milieu diphasique, que ce soit dans la formation de ligaments où pour engendrer un brassage entre deux phases immiscibles. Nous avons ainsi développé des cas de comparaison en partenariat avec l'entreprise Roxel afin de vérifier, à l'aide d'un réservoir fabriqué sur mesure, le comportement hydrodynamique de l'interface d'un milieu air/eau pour lequel nous avons pu simuler la formation d'oscillations, mais aussi de ruptures d'interfaces pour des accélérations menant à la déstabilisation du système, dans un cadre 2D et 2.5D à l'aide d'un modèle de moyennisation de la profondeur.

Nous avons aussi exploité ce réservoir dans le but de comparer nos résultats pour le mélangeage d'un fluide monophasique contenant une couche de concentration de sel diluée dans de l'eau. L'instabilité de Faraday engendre le mélangeage, au niveau de la pseudo-interface séparant initialement les deux couches, à travers la formation de rouleaux aux niveaux des noeuds de vibrations de cette pseudo-interface déformée par l'excitation paramétrique. Nous avons pu vérifier la consistance des résultats 2D, 2.5D et 3D pour un mélange de petite échelle.

L'élément principal de la thèse a été la mise en place dans le code NOTUS du modèle de Phillips, couplé à la loi de comportement de Krieger, pour lesquelles nous avons effectué une validation sur un écoulement dans un tube, avant d'exploiter le modèle pour analyser le mélangeage d'un milieu liquide contenant pour moitié une couche de suspension à l'aide de simulations 3D. Le mélangeage d'une couche de suspension à l'aide de vibrations verticales et l'utilisation d'un modèle de suspension pour le simuler semblent constituer une première. C'est une extension de l'étude du mélangeage monophasique appliquée à un nuage de poudres dans un fluide interstitiel. Nous avons pu comparer avec succès nos résultats avec ceux de Roxel, ce qui constituera un article publié dans la littérature à titre de référence. Nous avons constaté que, contrairement au mélangeage monophasique, le nuage de suspension forme un dépôt, qui pourrait être entretenu par les rouleaux de convection qui entraînent la migration locale de la fraction volumique de poudres par le cisaillement engendré par ces rouleaux. Nous avons, numériquement et expérimentalement, observé que la stratification de la suspension mixée est stable pour une durée d'une dizaine de secondes, le mélangeage se faisant sur une échelle de temps très petite.

En perspective, nous pouvons noter que l'étude du mélangeage de fluides miscibles est un sujet ouvert pour lequel il reste des pistes d'approfondissement, notamment pour des intensités vibratoires élevées, afin de vérifier la validité de la théorie utilisée jusque là. De plus le mélangeage de suspensions par le biais de l'instabilité de Faraday constitue un sujet nouveau pour lequel nous n'avons jusqu'à présent que des résultats expérimentaux pour des systèmes très visqueux, sous forme de pâtes majoritairement. L'étude hydrodynamique du mélangeage d'un fluide newtonien contenant une suspension dense nécessitera donc des études complémentaires afin de voir si la solution stable que nous obtenions est susceptible de se déstabiliser au bout d'une certaine période de temps. Enfin, l'intégration d'un modèle de moyennisation temporelle constitue

une première étape de recherche d'optimisation du calcul du mélangeage vibratoire, en modélisant le comportement du fluide mixé au lieu de le simuler, ce qui nécessite un coût en temps de calcul nettement plus important. Des possibilités d'extension du modèle déjà existant pour des fluides multiphasiques constituent un axe de recherche important dans la perspective de performance dans la production de simulations associées au mélangeur RAM.

# Annexe A

## Diagrammes de l'instabilité de Faraday

Dans cette annexe, nous allons reprendre quelques travaux basés sur les diagrammes de stabilité de l'équation de Mathieu, que nous avons mentionné dans le chapitre 2, afin d'explicitier la méthode de calcul permettant d'obtenir ces diagrammes.

### A.1 Fluides non visqueux

Une étude de stabilité entre deux fluides soumis à des oscillations verticales permet de déterminer les conditions pour lesquels l'instabilité de Faraday se forme à l'interface entre les fluides. L'étude de stabilité à l'interface entre deux fluides soumis à des oscillations verticales périodiques a été traitée en premier par Benjamin et Ursell [10] en 1954, dans le cadre de deux fluides parfaits immiscibles. Un fluide parfait est caractérisé par une viscosité nulle, l'équation de Navier-Stokes correspondante néglige donc le terme visqueux  $\nabla\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u})$ .

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Benjamin et Ursell démontrent que pour l'équation de Navier-Stokes d'un fluide parfait, dans un réservoir fermé, donc sans modification du volume initial de chaque fluide, l'évolution temporelle de l'interface se réduit à une équation de type équation de Mathieu [205]. Les coefficients p et q dépendent respectivement

des paramètres physiques des fluides mis en jeu ( masse volumique, tension superficielle), de l'amplitude et de la pulsation des vibrations imposées.

Pour chaque nombre d'onde  $k_m$ , avec  $T = 0.5 * \omega t$  la position  $a_m$  est fonction de l'équation :

$$\frac{d^2 a_m}{dT^2} + (p_m - 2q_m \cos(2T))a_m = 0 \quad (\text{A.3})$$

Les coefficients p et q s'écrivent avec  $k_m$  le nombre d'onde,  $\gamma$  la tension de surface,  $\rho$  la masse volumique, A l'amplitude de l'excitation et h la profondeur d'une surface libre:

$$p_m = \frac{4k_m \tanh(k_m h)}{\omega^2} \left( g + \frac{k_m^2 \gamma}{\rho} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$q_m = 2k_m A \tanh(k_m h) \quad (\text{A.5})$$

Cette équation est aussi une forme spéciale de l'équation de Hill [206] [207], une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, T-périodique, dont la forme générique est :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(t)x = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$f(t + T) = f(t) \quad (\text{A.7})$$

Le diagramme d'instabilité de l'équation de Mathieu peut être obtenu par plusieurs méthodes [208] qui varient en fonction de leur degré de précision. La méthode de la balance harmonique permet de tracer le diagramme d'instabilité pour un ordre de précision variable en décomposant la solution de l'équation en série de Fourier. Le diagramme se décompose en plusieurs langues d'instabilités. Ces langues traduisent le comportement harmonique et sous-harmonique des oscillations. Si le point (p,q) est positionné sur la première langue en partant de l'axe des ordonnées, la fréquence de vibration de l'interface sera la fréquence fondamentale des sous-harmoniques, c'est-à-dire égale à la moitié de la fréquence d'excitation. La langue suivante correspond à la première harmonique, donc la fréquence des oscillations sera égale à celle de l'excitation. Les langues suivantes alternent entre les sous-harmoniques et les harmoniques. La n-ième langue représentera une sous-harmonique si n est impair, ou une harmonique si n est pair, de fréquence  $(n/2) \frac{\omega}{2\pi}$ .

La position verticale de l'interface est donc susceptible de correspondre à trois

type de comportements en fonction de la position du point correspondant aux paramètres  $p$  et  $q$ . Si ce point est positionné en dessous d'une langue d'instabilité, la position verticale oscillera autour d'une position d'équilibre, sans atteindre une solution stationnaire. Si le point est positionné dans une langue d'instabilité, l'équation de Mathieu donne une solution oscillante instable qui tend vers l'infini. La traduction physique est que l'interface oscillera jusqu'à une rupture de l'interface. Des travaux théoriques et numériques ont été effectués sur la formation d'une colonne de fluide jusqu'à la rupture de l'interface et la formation d'une goutte. [[197] [29] [115]] Enfin si le point  $(p,q)$  se trouve sur la bordure d'une langue d'instabilité, la solution est stable et comparable à une onde stationnaire, par exemple dans le cas d'une corde vibrante où d'une membrane vibrant à une fréquence de résonance. L'interface entre les deux fluides atteindra donc sa position maximale avant rupture.

Il existe plusieurs méthodes pour tracer les diagrammes de stabilité de l'équation de Mathieu, notamment la méthode d'expansion à deux variables, pour une valeur petite de  $q$  [209]. Cette méthode permet de calculer analytiquement la forme approchée linéairement de la première langue de stabilité à partir d'un développement en série de Taylor de l'équation de Mathieu tronqué à l'ordre 2  $O(q^2)$ . Calculer la forme approchée des langues supplémentaires impliquent de monter l'ordre de troncation. Une méthode plus performante proposée par Rand [207] et Kovacic [208] est la méthode de balance harmonique. La théorie de Floquet montre que la solution générale de l'équation sera périodique de période  $T$  et  $2T$  sur le bord d'une langue d'instabilité. On se propose donc de réécrire la solution  $a_m$  de l'équation de Mathieu sous la forme d'une série de Fourier:

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{nt}{2} + b_n \sin \frac{nt}{2} \quad (\text{A.8})$$

La méthode de la balance harmonique consiste alors à insérer l'équation A.8 dans l'équation de Mathieu, et à trier les coefficients selon les coefficients pairs et impairs de  $n$ . En s'appuyant sur les autres méthodes de perturbations, Kovacic et al. montrent que la courbe de transition des langues d'instabilité peut s'approcher sous la forme d'une série de la forme:

$$p = n^2 + p_1 q + p_2 q^2 \dots \quad (\text{A.9})$$

Pour  $q = 0$ , la valeur de  $p$  se réduit à  $p = n^2$ . On obtient alors les "pointes" des langues du diagramme de stabilité. Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent alors

être écrits en fonction de  $p$ , pour former des déterminant appelés déterminants de Hill (A.10, A.11, A.12 et A.13). En résolvant ces quatre problèmes aux valeurs propres, on obtient les valeurs des courbes des langues d'instabilités.

$$a_{pair} : \begin{vmatrix} \delta & \epsilon & 0 & 0 \\ 2\epsilon & \delta & \epsilon & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon & \delta & \epsilon \\ \dots & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$a_{impair} : \begin{vmatrix} \delta + \epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & \delta & \epsilon/2 & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon & \delta & \epsilon \\ \dots & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$b_{pair} : \begin{vmatrix} \delta & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & \delta & \epsilon & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon & \delta & \epsilon \\ \dots & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$b_{impair} : \begin{vmatrix} \delta - \epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & \delta & \epsilon & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon & \delta & \epsilon \\ \dots & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Le diagramme de stabilité ainsi obtenu présente les différentes langues d'instabilité, visibles sur la figure A.1. Les trois premières langues d'instabilité sont visibles, à savoir les deux premières sous-harmoniques, séparée par une langue harmonique.

Pour une équation de Mathieu non-amortie, les langues de stabilité s'étendent jusqu'à l'axe des abscisses. La prochaine étape consistera à tracer le diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie, qui prend en compte l'amortissement visqueux d'un système diphasique.

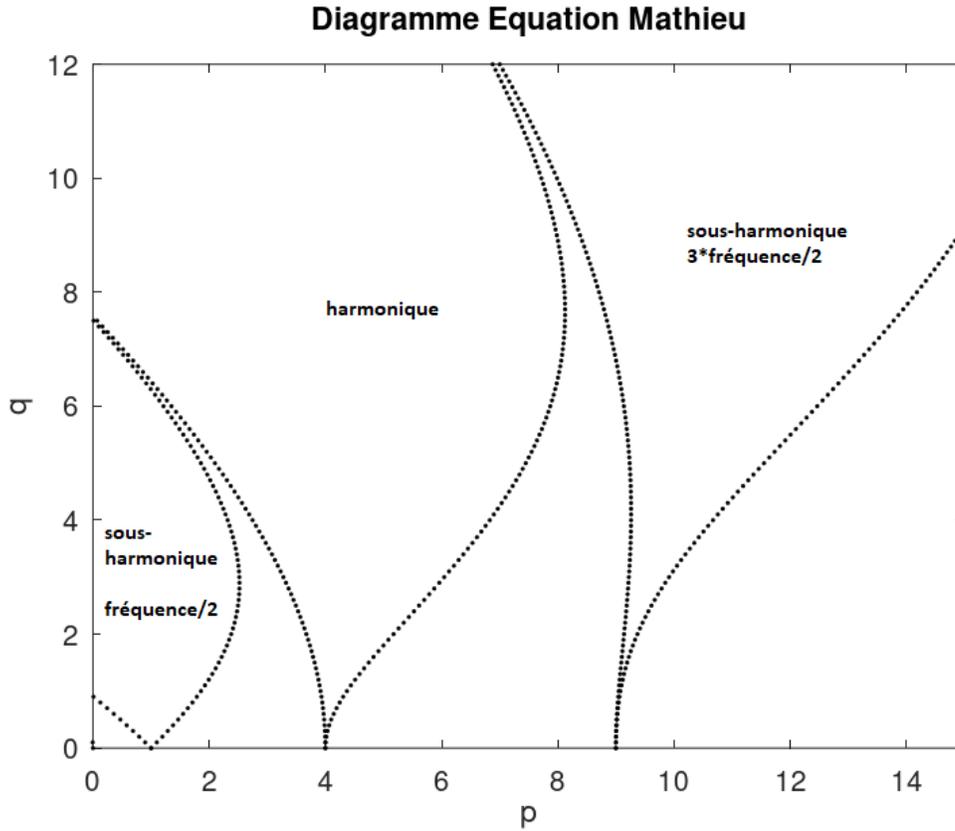


Fig A.1: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu

## A.2 Fluides visqueux

L'étude de stabilité linéaire d'interface entre deux fluides visqueux soumis à des vibrations verticales permet, comme dans le cas des fluides non visqueux, de tracer un diagramme de stabilité en fonction des paramètres du problème. Kumar et Tuckerman [11] ont proposé en 1994 la première étude paramétrique pour deux fluides visqueux soumis à l'instabilité de Faraday, afin de prendre en compte la dissipation visqueuse des fluides mis en jeu, et dont nous allons exposer quelques étapes explicitant le cheminement jusqu'au diagramme de stabilité.

Nous repartons dans la configuration où deux fluides immiscibles sont superposés l'un sur l'autre, le fluide le plus léger au-dessus du plus lourd. L'équation de la quantité de mouvement est exprimée pour chacune des deux couches  $j$  du système:

$$\rho_j [\partial_t + (u_j \cdot \nabla)] u_j = -\nabla p_j + \mu_j \nabla^2 u_j - \rho_j g(t) e_z \quad (\text{A.14})$$

Avec pour terme inertiel:

$$g(t) = g - A \sin(\omega t) \quad (\text{A.15})$$

Et, pour des fluides incompressibles:

$$\nabla \cdot u_j = 0 \quad (\text{A.16})$$

Le problème est réduit à une équation de la vitesse verticale  $w_j$  de viscosité cinématique  $\nu_j$ :

$$(\partial_t - \nu_j \nabla^2) \nabla^2 w_j = 0 \quad (\text{A.17})$$

On définit  $\zeta$  la fonction de déformation de la hauteur de l'interface de telle sorte que l'on obtient la condition cinématique:

$$[\partial_t + (u \cdot \nabla)] \zeta = w(z = \zeta) \quad (\text{A.18})$$

Cette condition est linéarisée afin d'obtenir  $\partial_t \zeta = w(\zeta)$ . Kumar et Tuckerman détaillent les conditions de saut entre les deux phases nécessaires à la description des efforts exercés sur l'interface par la tension superficielle et le gradient de pression.

Le problème linéarisé obtenu par les auteurs, pour chaque nombre d'onde  $k$  de l'interface est :

$$[\partial_t - \nu_j (\partial_{zz} - k^2)] (\partial_{zz} - k^2) w_j = 0 \quad (\text{A.19})$$

Parmi les conditions à l'interface, nous citerons en particulier la condition de saut de pression, qui contient le terme inertiel  $g(t)$ :

$$\Delta[\rho \partial_t - \mu (\partial_{zz} - k^2) + 2\mu k^2] \partial_z w = -[\Delta \rho g(t) - \sigma k^2] k^2 \zeta \quad (\text{A.20})$$

Kumar et Tuckerman utilisent le théorème de Floquet [87], afin d'obtenir une forme générale de la solution de  $\zeta$ , étant donné que le système se trouve dans un référentiel oscillant du fait du terme  $g(t)$ . La solution périodique de période  $2\pi/\omega$  s'écrit:

$$\zeta(t) = e^{(\mu + i\alpha)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n e^{in\omega t} \quad (\text{A.21})$$

La vitesse  $w$  est explicitée de la même façon:

$$w_j(t) = e^{(\mu+i\alpha)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{jn} e^{in\omega t} \quad (\text{A.22})$$

Le problème linéarisé, en injectant la solution de la vitesse  $w$ , devient:

$$[\mu + i(\alpha + n\omega) - \nu_j(\partial_{zz} - k^2)] (\partial_{zz} - k^2)w_{jn} = 0 \quad (\text{A.23})$$

La solution de l'équation d'ordre 4 est:

$$w_{jn} = a_{jn}e^{kz} + b_{jn}e^{-kz} + c_{jn}e^{q_{jn}z} + d_{jn}e^{-q_{jn}z} \quad (\text{A.24})$$

Avec le coefficient  $q$ :

$$q_j^2 = k^2 + \frac{\mu + i(\alpha + n\omega)}{\nu_j} \quad (\text{A.25})$$

Pour finir l'équation finale permettant de décrire chaque mode de vibration est:

$$\Delta [\rho(\mu + i(\alpha + n\omega)) + 3\mu k^2] \partial_z w_n - \Delta \mu \partial_{zzz} w_n + (\Delta \rho g - \sigma k^2) k^2 \zeta_n = \Delta \rho k^2 \left[ \frac{1}{2} a (\zeta_{n-1} + \zeta_{n+1}) \right] \quad (\text{A.26})$$

Chacun des termes de part et d'autre de l'égalité est introduit dans deux matrices  $A$  et  $B$ , et nous obtenons le problème aux valeurs propres permettant de tracer le diagramme de stabilité visible sur la figure A.2.

$$A\zeta = aB\zeta \quad (\text{A.27})$$

L'équation de Mathieu amortie du problème se résume à:

$$\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + \omega_0^2(1 - \hat{a}\cos(\omega t))\zeta = 0 \quad (\text{A.28})$$

Avec pour coefficient d'amortissement:

$$\gamma = 2k^2 \frac{\nu_1 + \nu_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (\text{A.29})$$

Et pour amplitude du terme sinusoïdal, avec  $\omega_d$  la pulsation amortie:

$$= \frac{(\rho_1 - \rho_2)ak}{(\rho_1 + \rho_2)\omega_d} \quad (\text{A.30})$$

Une description détaillée de l'algorithme et de son utilisation pour l'étude de mode de vibrations d'un milieu diphasique est disponible dans la thèse de Jajoo

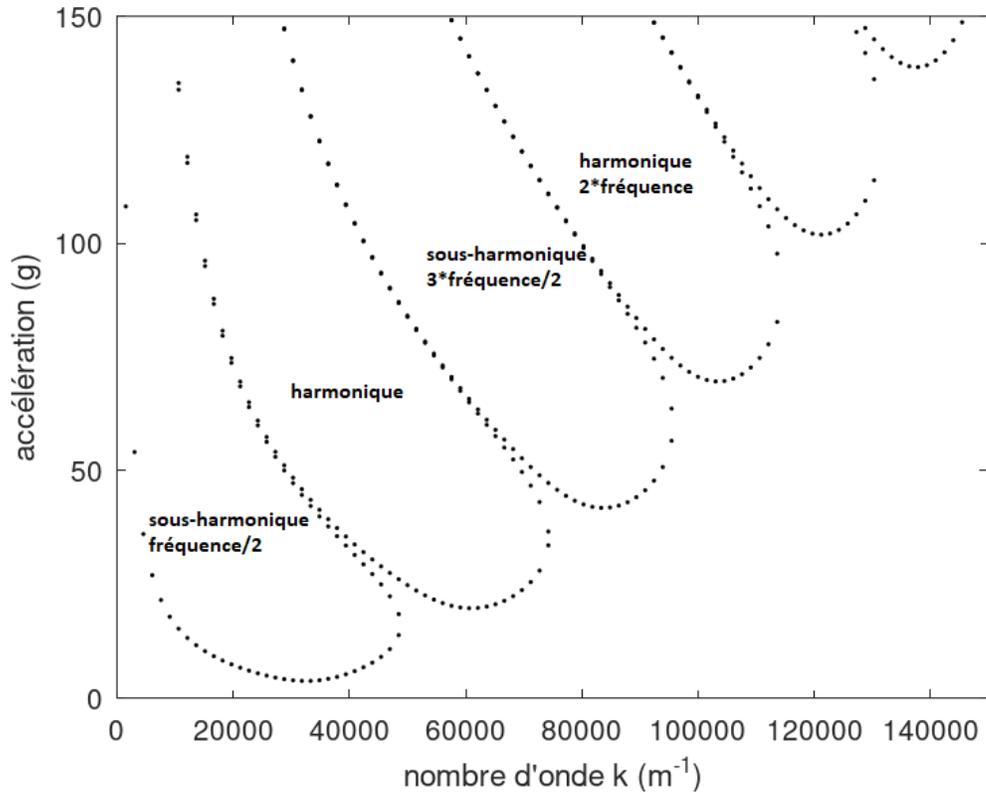


Fig A.2: Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu amortie

[108]. Cet algorithme a été utilisé pour calculer les diagrammes de stabilité utilisés pour les différents systèmes présentés dans cette thèse.

# Annexe B

## Moyennisation temporelle des oscillations

La moyennisation temporelle des oscillations appliquées à un fluide contenant un gradient de masse volumique a été développée dans les années 60. Souvent employée pour étudier la convection thermovibrationnelle, elle est aussi exploitable pour toute concentration scalaire dont l'écoulement est décrit par une équation d'advection-diffusion classique. Nous citerons notamment Zen'koskaya et al. [210] qui ont publié l'un des premiers articles, mais aussi plus récemment [211]. La méthode de moyennisation est souvent employée en l'absence de gravité, notamment par Gaponenko et al; [212], [213]. La convection thermovibrationnelle a été étudiée numériquement et expérimentalement entre autres par Shevtsova et al. [214]. Mazzoni et al. [215] présentent les résultats de l'étude de la convection thermovibrationnelle avec une expérimentation effectuée dans la Station Spatiale Internationale. Enfin nous citerons Khallouf [34] [216], dont nous nous inspirerons pour la validation de l'implémentation du modèle dans le code NOTUS.

### B.1 Principe de la méthode de moyennisation

L'approximation de Boussinesq est utilisée pour de faibles variations de température, pour lesquelles on remplace la masse volumique associée au terme de force par une masse volumique dépendante de la température  $\rho'$ , avec  $\Delta T = T - T_0$  la différence de température,  $T_0$  une température de référence, et  $\rho = \rho_0$  la masse volumique de référence:

$$\rho' = \rho(1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{B.1})$$

$$= \rho_0 + \delta\rho \quad (\text{B.2})$$

En décomposant la pression en une pression *dynamique* et une pression *hydrostatique*, cette dernière vaut  $\vec{\nabla} P_{hydro} = \rho_0(\vec{g} + \vec{f})$ , nous pouvons réécrire l'équation de quantité de mouvement, en conservant comme pression  $p$  la pression dynamique :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + (\rho' - \rho)(\vec{g} + \vec{f}) + \vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}^T \vec{u} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

L'approximation de Boussinesq permet alors d'écrire :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p - \rho\beta(T - T_0)(\vec{g} + \vec{f}) + \vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}^T \vec{u} \right) \right] \quad (\text{B.4})$$

Pour un fluide incompressible à viscosité constante, nous pouvons simplifier le terme de dissipation visqueuse de l'équation de conservation du mouvement, et diviser l'équation par sa masse volumique (avec  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\nu = \mu/\rho$ ) :

$$\left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \beta(T - T_0)(\vec{g} + \vec{f}) + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (\text{B.5})$$

L'équation de conservation de la chaleur :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \lambda \vec{\nabla} T \right) \quad (\text{B.6})$$

Pour une conductivité constante, en écrivant  $\chi$  la diffusivité thermique, tel que  $\chi = \lambda/(\rho C_p)$ , nous obtenons :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \chi \vec{\nabla}^2 T \quad (\text{B.7})$$

La méthode de moyennisation est une méthode qui consiste à séparer les mouvements lents des mouvements rapides dans le but de contourner le coût de simulations concernant des phénomènes nécessitant des pas de temps très petits pour être correctement retranscrit. C'est le cas notamment lorsque l'on souhaite modéliser des cavités qui subissent des contraintes vibratoires à des fréquences élevées, de plusieurs centaines de Hertz. Simuler des systèmes vibrant à des fréquences importantes implique d'utiliser un pas de temps bien

plus petit afin de respecter deux critères essentiels. Le premier critère est clairement défini, nommé critère de Shannon, il est indispensable pour ceux qui travaillent sur le traitement des signaux. Concrètement, ce critère informe qu'il est nécessaire que la fréquence d'échantillonnage (fréquence à laquelle on enregistre le signal source) soit supérieure ou égale à deux fois la fréquence du signal étudié, sans quoi un phénomène de recouvrement viendrait déformer le signal d'origine, et le signal reconstruit à partir des points enregistrés aurait donc une fréquence supérieure à la fréquence d'origine. Ramené à notre problème, il implique que le terme source oscillant soit discrétisé à une fréquence au moins deux fois supérieure à la fréquence de ce terme, ce qui constitue déjà une contrainte importante dès lors que l'on impose une fréquence élevée sur le terme source. Le second critère, relève de la capacité du code à retranscrire correctement l'application du terme source au système. Si on se contente de choisir un pas de temps égal à la moitié de la fréquence de vibration, on risque de dégrader la qualité de la solution. Il est donc nécessaire de prendre un pas de temps suffisamment petit pour que chaque période soit correctement simulée, par exemple prendre un centième du pas de temps. Il est alors évident que le coût de chaque simulation devient une contrainte non négligeable si l'on doit prendre en compte plusieurs équations pour modéliser le fluide. Simuler avec précision sur NOTUS un couplage entre l'équation de conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie implique un coût en temps de calcul important dès que l'on souhaite raffiner le maillage, il est donc indispensable dans ces conditions de mettre en place une méthode de calcul permettant de contourner ces problématiques. La méthode de moyennisation a pour avantage de se passer de ces critères pour fournir une solution. Ainsi on ne simule que les mouvements lents du fluide, les mouvements rapides seront modélisés, et le terme source oscillant est remplacé par un terme qui ne dépend pas du temps, mais de la forme du champ scalaire que l'on souhaite étudier, permettant donc d'imposer des pas de temps plus grands, donc permettre d'obtenir des résultats bien plus rapidement. Divers travaux ont déjà été effectués sur la convection thermique, ainsi que sur le couplage température-concentration, tels que ceux effectués par H. Khallouf [34].

À titre de comparaison, le raisonnement est assez proche de celui utilisé pour simuler un fluide turbulent. Des modèles de turbulences permettent de modéliser des vortex à diverses échelles sans pour autant avoir besoin de les simuler, ce qui impliquerait d'utiliser des maillages très raffinés, jusqu'à l'échelle de Kolmogorov si l'on souhaite faire de la DNS (Direct Numerical Simulation). Ces modèles, selon leur spécificité, permettent, pour un maillage plus grossier,

de limiter la dégradation de la solution en modélisant le comportement turbulent aux échelles qui ne peuvent pas être correctement simulées.

Pour illustrer cette méthode, nous allons exploiter une configuration thermovibrationnelle.

La convection thermovibrationnelle, abrégée CTV par la suite, va servir de contexte au développement de la méthode de moyennisation. Nous repartons des équations de Navier-Stokes, avec l'hypothèse de Boussinesq, pour laquelle nous allons émettre plusieurs hypothèses afin que le développement qui suivra soit valide.

- La période des oscillations  $\tau$  doit être petite par rapport aux échelles de temps caractéristiques de la diffusion thermique  $a$  et de la diffusion visqueuse  $\chi$  :  $\tau \ll a^2/\nu$ ,  $\tau \ll a^2/\chi$
- l'amplitude des vibrations doit être petite en comparaison du rapport de la longueur caractéristique du domaine par une différence de température (inférieure ou égale à celles des températures aux bords) et du coefficient de dilatation du fluide.

Une fois ces hypothèses vérifiées, les variables du système (vitesse, température et pression) peuvent être décomposées en termes "lents", qui sont fonction du temps  $t$ , et en terme "rapides", fonction d'un temps rapide  $\eta = \omega t$ . Les variables peuvent être réécrites sous la forme :

$$u = U(t) + u'(\omega t) \quad (\text{B.8})$$

$$\theta = T(t) + \theta'(\omega t) \quad (\text{B.9})$$

$$p = P(t) + p'(\omega t) \quad (\text{B.10})$$

En conséquence, la moyenne de chaque variable du système  $(u, \theta, p)$  sur une période est égale à la variable moyennée correspondante  $(U, T, P)$ , les variables dites "rapides" étant  $\tau$ -*periodiques*, donc à moyenne nulle sur une période  $\tau$  des oscillations. Par exemple :  $U = \bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} u(s) ds$  et  $\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} u'(s) ds = 0$ . Nous repartons des équations de Navier-Stokes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho(1 - \beta(\theta - \theta_0))(\vec{g} + A\omega^2 \sin(\omega t) \vec{z}) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (\text{B.12})$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\theta\right) = \chi\vec{\nabla}^2\theta \quad (\text{B.13})$$

Chaque variable doit ensuite être réécrite dans les équations de Navier-Stokes

:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}' + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} \right) = \\ -\vec{\nabla}p' - \vec{\nabla}P + \mu\vec{\nabla}^2\vec{u}' + \mu\vec{\nabla}^2\vec{U} + \rho(1 - \beta(T + \theta' - \theta_0))(\vec{g} + A\omega^2 \sin(\omega t)\vec{z}) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}\theta' + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}T + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\theta' + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}T = \chi\vec{\nabla}^2\theta' + \chi\vec{\nabla}^2T \quad (\text{B.16})$$

La moyenne temporelle des équations sur chaque période permet de décomposer les équations selon qu'elles soient composées de variables rapides ou lentes.

Les équations du mouvement lent deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{u}'} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} \right) = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\nabla}^2\vec{U} + \rho(1 - \beta(T - \theta_0))\vec{g} - \overline{\beta\theta' A\omega^2 \sin(\omega t)\vec{z}} \quad (\text{B.18})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \overline{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}\theta'} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}T \right) = \chi\vec{\nabla}^2T \quad (\text{B.19})$$

Et les équations du mouvement rapide s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{u}' - \overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{u}'} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}' \right) = \\ -\vec{\nabla}p' + \mu\vec{\nabla}^2\vec{u}' + \rho(1 - \beta(T + \theta' - \theta_0))A\omega^2 \sin(\omega t)\vec{z} + \overline{\beta\theta' A\omega^2 \sin(\omega t)\vec{z}} - \beta\theta' g\vec{z} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\left( \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \theta' - \overline{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \theta'} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla} T + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \theta' \right) = \chi \vec{\nabla}^2 \theta' \quad (\text{B.22})$$

Les équations du mouvement rapide sont encore couplées, nous allons les découpler en linéarisant ces équations.

Pour l'équation de la température, nous négligerons les termes  $\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \theta' - \overline{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \theta'}$ ,  $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \theta'$  et  $\chi \vec{\nabla}^2 \theta'$  devant  $\frac{\partial \theta'}{\partial t}$ .

Les hypothèses émises ci-dessus permettent d'exprimer l'équation du mouvement oscillant, correspondant à une équation d'Euler :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\Delta p'}{\rho} + (1 - \beta(T - \theta_0)) A \omega^2 \sin(\omega t) \vec{z} - \beta \theta' g \vec{z} \quad (\text{B.23})$$

L'équation de l'énergie oscillante peut aussi être exprimée, en négligeant les termes  $u' \cdot \nabla \theta' - \overline{u' \cdot \nabla \theta'}$ ,  $U \cdot \nabla \theta$  et  $\chi \cdot \nabla^2 \theta'$  :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \cdot \nabla T = 0 \quad (\text{B.24})$$

Nous allons devoir ensuite "créer" un vecteur contenant la température afin de pouvoir effectuer une décomposition de Helmholtz-Hodge sur ce vecteur, afin de découpler la vitesse et la pression. La décomposition du vecteur température consiste à l'exprimer sous la forme d'une somme d'un vecteur solénoïdal  $W$  et d'un gradient d'un potentiel  $\phi$  :

$$T \vec{z} = \vec{W} + \nabla(\phi) \quad (\text{B.25})$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (\text{B.26})$$

La vitesse et la pression à évolution rapide s'écrivent donc :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = A \omega^2 \beta W \sin(\omega t) \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\nabla p'}{\rho} = [(1 + \beta \theta_0) \vec{z} - \beta \nabla \phi] A \omega^2 \sin(\omega t) - \beta \theta' g \vec{z} \quad (\text{B.28})$$

$W$  est une variable lente, donc indépendante de  $\eta$ , à divergence nulle, équivalente à une vitesse. En intégrant l'équation sur la vitesse, et en l'injectant dans celle de la température oscillante, nous pouvons retrouver les variables  $(u', \theta')$ , avec une constante d'intégration nulle puisque  $(\overline{u'}, \overline{\theta'}) = (0, 0)$ , nous

obtenons :

$$u' = W\beta A\omega \cos(\omega t) \quad (\text{B.29})$$

$$\theta' = -W\beta A \cdot \nabla T \sin(\omega t) \quad (\text{B.30})$$

Nous rappelons la formulation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement moyennée :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{U} + \rho(1 - \beta(T - \theta_0)) \vec{g} - \overline{\beta \theta' A \omega^2 \sin(\omega t)} \vec{z} \quad (\text{B.31})$$

Le terme  $\overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'}$  est réécrit à partir d'expression d'une fonction  $\tau$ -periodiques, dont nous rappelons l'expression :

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} u(s) ds \quad (\text{B.32})$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} (A\beta\omega \cos(\omega t) W \cdot \nabla) A\beta\omega \cos(\omega t) W dt \\ &= \frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} (W \cdot \nabla) W \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} (W \cdot \nabla) W \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} (W \cdot \nabla) W \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \\ &= \frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} (W \cdot \nabla) W \frac{\tau}{2} \\ &= \frac{A^2\beta^2\omega^2}{2} (W \cdot \nabla) W \end{aligned}$$

En posant  $\epsilon = \frac{1}{2} A^2 \beta^2 \omega^2$  nous obtenons finalement :

$$\overline{(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'} = \epsilon (W \cdot \nabla) W \quad (\text{B.33})$$

Le terme  $\overline{\beta \theta' A \omega^2 \sin(\omega t)}$  est lui aussi réécrit :

$$\begin{aligned}
\overline{\beta\theta' A\omega^2 \sin(\omega t)} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \beta\theta' A\omega^2 \sin(\omega t) dt \\
&= \frac{A\beta\omega^2}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \theta' \sin(\omega t) dt \\
&= \frac{A\beta\omega^2}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} -b\beta W \cdot \nabla T \sin^2(\omega t) dt \\
&= -\frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} W \cdot \nabla T \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \sin^2(\omega t) dt \\
&= -\frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} W \cdot \nabla T \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\
&= -\frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} W \cdot \nabla T \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \\
&= -\frac{A^2\beta^2\omega^2}{\tau} W \cdot \nabla T \frac{\tau}{2} \\
&= -\frac{1}{2} A^2\beta^2\omega^2 W \cdot \nabla T
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\overline{\beta\theta' A\omega^2 \sin(\omega t)} = -\epsilon W \cdot \nabla T = -\epsilon(W \cdot \nabla)T\vec{z} \quad (\text{B.34})$$

Enfin le dernier terme à exprimer est  $\overline{u' \cdot \nabla\theta'}$ .

$$\begin{aligned}
\overline{u' \cdot \nabla\theta'} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} u' \cdot \nabla\theta' dt \\
&= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} W\beta A\omega \cos(\omega t) \cdot \nabla(-A\beta W \cdot \nabla T \sin(\omega t)) dt \\
&= \frac{A^2\beta^2\omega}{\tau} W \cdot \nabla(W \cdot \nabla T) \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\
&= \frac{A^2\beta^2\omega}{\tau} W \cdot \nabla(W \cdot \nabla T) \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le système d'équation final, régi uniquement par les variables à variations lentes, s'écrit :

$$\frac{U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nabla^2 U + (1 - \beta(T - \theta_0))g\vec{z} + \epsilon(W \cdot \nabla)(T\vec{z} - W) \quad (\text{B.35})$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{T}{\partial t} + U \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T \quad (\text{B.37})$$

$$W + \nabla\phi = T\vec{z} \quad (\text{B.38})$$

$$\nabla \cdot W = 0 \quad (\text{B.39})$$

$\epsilon$  est un coefficient, qui regroupe les paramètres vibratoires imposés à la cavité, à savoir, la fréquence d'oscillations et l'amplitude. Ici la méthode est appliquée à la température, donc elle prend en compte aussi le coefficient d'expansion thermique :  $\epsilon = \frac{1}{2}(A\beta\omega)^2$ .

### B.1.1 Résolution

La méthode de moyennisation implique de calculer à chaque pas de temps un terme source qui dépend du vecteur solénoïdal  $W$  et de la température  $T$ . À partir de la décomposition d'Helmholtz-Hodge du vecteur température :

- Calculer le potentiel scalaire  $\phi$ , en exprimant la divergence sur l'égalité provenant de la décomposition :

$$\nabla \cdot (W + \nabla\phi) = \nabla \cdot (T\vec{z}) \quad (\text{B.40})$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla \cdot T\vec{z} \quad (\text{B.41})$$

puisque  $\nabla \cdot W = 0$ . La résolution du potentiel  $\phi$  est donc ramenée à une équation de Poisson sur le domaine  $\Omega$  de la cavité, de la forme :

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot T\vec{z} \quad (\text{B.42})$$

Avec pour conditions aux bords, en prenant  $\vec{n}$  le vecteur normal aux parois :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = T\vec{z} \cdot \vec{n} \quad (\text{B.43})$$

La résolution de l'équation de Poisson permet d'obtenir le terme solénoïdal  $W = T\vec{z} - \nabla\phi$  pour enfin exprimer le terme source de moyennisation  $\epsilon(W \cdot \nabla)(T\vec{z} - W)$ . Nous pouvons noter que ce terme n'est pas fonction du temps, ce qui souligne l'intérêt principal de cette méthode, à savoir pour simuler le mélange dans une cavité sans que le pas de temps choisi dépende d'une fréquence imposée dans un terme sinusoïdal dans lequel le temps s'exprime. Il est donc possible d'utiliser un pas de temps bien plus grand que la période des oscillations, les écoulements liés au mouvement vibratoire ne sont alors non plus simulés, mais modélisés par le terme source et intégrés dans les équations de Navier-Stokes.

## B.1.2 Application

La méthode de moyennisation est couramment employée pour des problèmes de type cavité différentiellement chauffée (parois latérales avec températures imposées, parois verticales adiabatiques) notamment dans des contextes spécifiques difficiles à simuler mais aussi à mettre en place expérimentalement, les phénomènes vibratoires de très faibles amplitudes et à très fortes fréquences en l'absence de gravité. L'exploitation de l'une de ces configurations va permettre de vérifier si la méthode implémentée permet d'obtenir des cellules de convections réparties dans l'ensemble de la cavité. Afin de valider la méthode de moyennisation, on part d'un problème de CTV (voir figure B.1) qui consiste à considérer une cavité différentiellement chauffée, à laquelle sera appliquée une contrainte oscillante, mais appliquée à l'aide de la méthode de moyennisation, donc sans terme sinusoïdal.

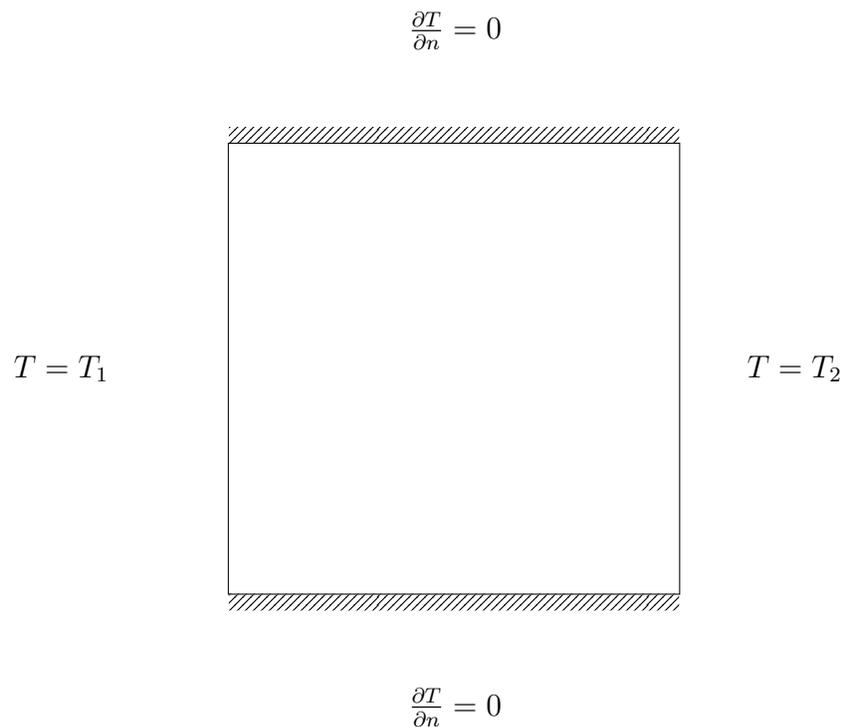


Fig B.1: Schéma du problème de convection thermovibrationnelle

En général, les cas sont décrits dans les publications par des nombres adimensionnels. Nous rappelons tout d'abord les définitions du nombre de Prandtl et de Rayleigh :

- Nombre de Prandtl : Ratio entre la diffusivité de la quantité de mouvement

et celle de la chaleur. Plus le nombre de Prandtl est important, plus le champ de vitesse influe sur l'évolution du champ de température.

- nombre de Rayleigh : Ratio entre les forces de convection et les forces visqueuses. Au delà d'un nombre de Rayleigh critique, les forces convectives prennent l'ascendant sur les forces visqueuses.

Enfin le nombre de Rayleigh vibrant, que nous abrégons par  $Ra_v$ , est défini par :

$$Ra_v = (A\omega\beta\theta a)^2 / (2\nu\chi) \quad (\text{B.44})$$

Le nombre de Rayleigh vibrant exprime le rapport entre les forces visqueuses et les forces d'inertie provenant des oscillations de la cavité, il est l'équivalence du nombre de Rayleigh mais adapté au phénomène vibratoire.

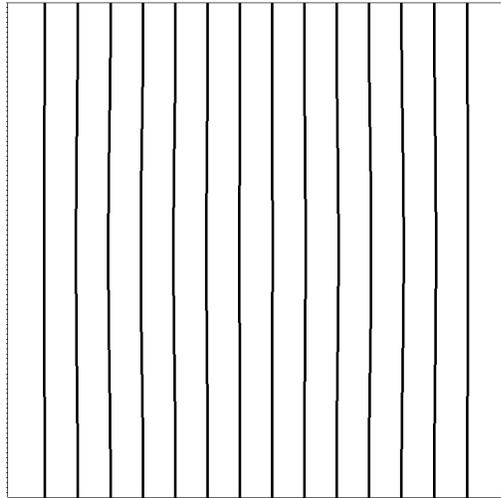
En pratique, ces nombres sont convertis dans NOTUS, de ce fait nous mettrons les paramètres qui nous intéressent sous forme dimensionnelles, à savoir l'amplitude et la fréquence des oscillations.

### **B.1.3 Validations sur des simulations en l'absence de gravité**

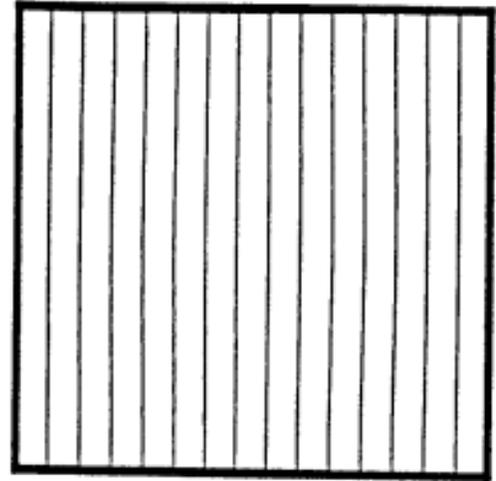
La méthode de moyennisation est particulièrement adaptée pour des problèmes non-pesant (sans effet de gravité). Pour ce type de mouvements, les mouvements convectifs provoqués par le champ oscillant, assez faibles, peuvent apparaître sans être amortis par l'inertie du champ convectif obtenu en appliquant la gravité. En effet, le phénomène de convection dans un contexte monophasique est très faible, mais la méthode de moyennisation peut ensuite être appliquée pour des champs scalaires avec un mouvement oscillant entretenu (par l'instabilité de Faraday par exemple), ce qui justifie l'utilité de modéliser correctement la méthode dans une situation où les cellules de convections apparaissent grâce aux oscillations appliquées à la cavité. Les résultats sont donnés sur les figures B.2 et B.3 dans lesquelles sont présentés les champs de vitesse et de température. Comme nous pouvons le constater, les résultats obtenus sont satisfaisants, la méthode de moyennisation est cohérente avec celle disponible dans la littérature de référence.

### **B.1.4 Conclusion**

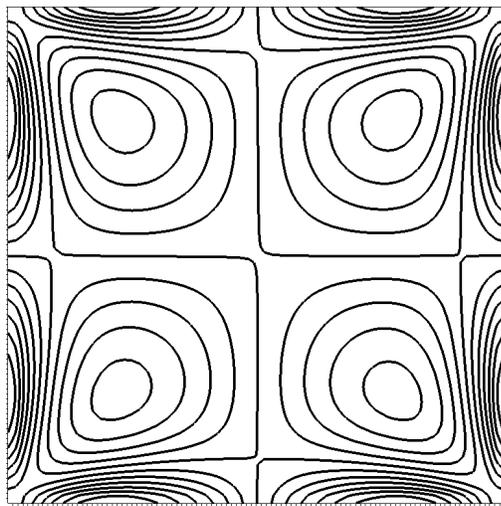
La méthode de moyennisation temporelle des équations de Navier-Stokes est une méthode qui permet de modéliser le comportement vibratoire d'un



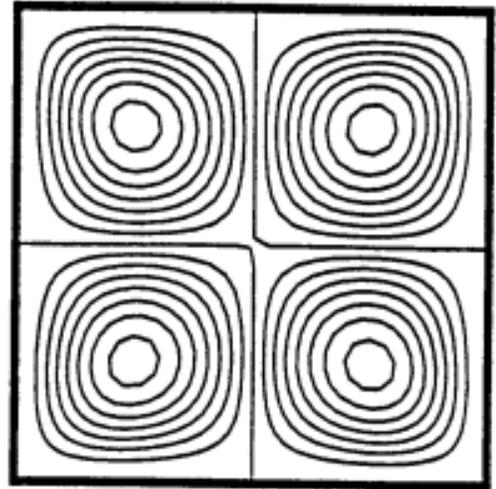
(a)



(b)

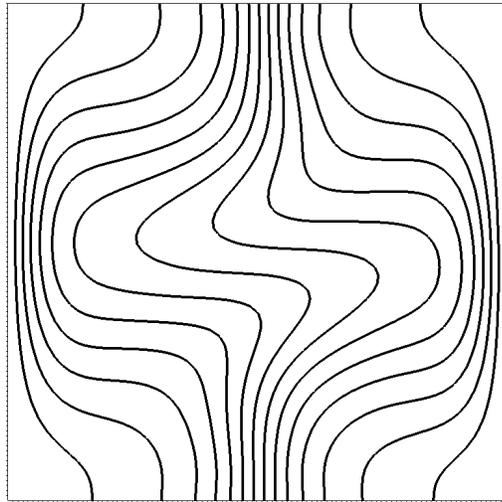


(c)

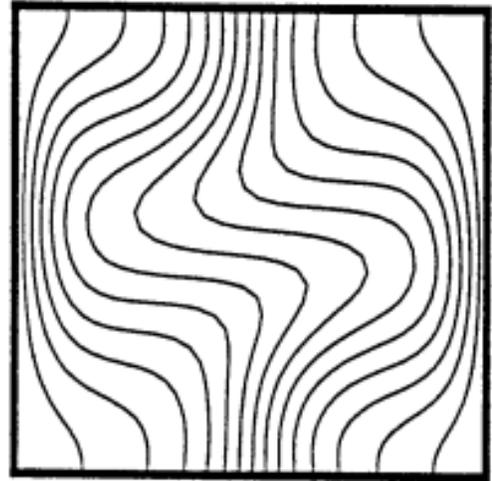


(d)

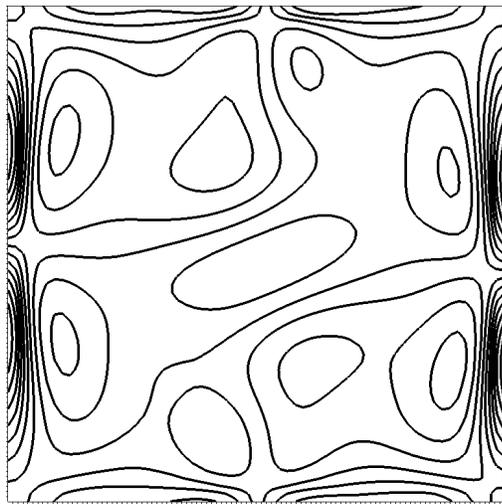
Fig B.2: (a)(c) Simulation effectuée avec la méthode de moyennisation ( $frequency = 60Hz$ ,  $amplitude = 1.186 * 10^{-2}m$ ,  $Prandtl = 1.0$ ,  $Ra_v = 10^3$ ), (b)(d) résultats de référence à droite. Champs de température en haut et vorticité en bas. (source : [34])



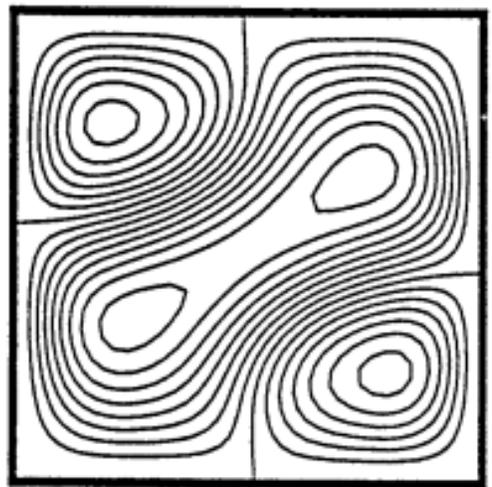
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig B.3: (a)(c) Simulation effectuée avec la méthode de moyennisation ( $frequency = 60Hz$ ,  $amplitude = 1.678 * 10^{-1}m$ ,  $Prandtl = 1.0$ ,  $Ra_v = 2 * 10^5$ ), (b)(d) résultats de référence à droite. Champs de température en haut et vorticité en bas. (source : [34])

fluide contenant un gradient de masse volumique et soumis à une fréquence importante, sans avoir à simuler le mouvement du fluide pour chaque oscillation, ce qui impliquerait des pas de temps très petits en contraignants. Nous avons validé l'implémentation du modèle avec le code NOTUS pour des cas tests effectués en l'absence de gravité. Ce type de modèle constitue une piste d'étude intéressante pour développer des modèles de moyennisation adaptés au mélangeage de suspension ou en diphasique, ce qui permettrait de gagner en performance dans la production de simulations avec le mélangeur RAM.

# Bibliographie

- [1] R. Tanak, N. Takahashi, Y. Nakamura, Y. Hattori, Ashizawa K., and M. Otsuka. Verification of the mixing processes of the active pharmaceutical ingredient, excipient and lubricant in a pharmaceutical formulation using a resonant acoustic mixing technology. *RSC Advances*, 2016.
- [2] Resonant acoustic mixing, 2016. <https://resodynmixers.com/wp-content/uploads/2016/01/ram-technical-white-paper1.pdf>.
- [3] M. R. Andrews, C. Collet, A. Wolff, and C. Hollands. Resonant acoustic® mixing: Processing and safety. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2020.
- [4] P. C. Smith, J. P. Huf, and C. A. Williams. Rocket propellant comparison: Conventional planetary mixing and resonant acoustic mixing. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2022.
- [5] D. L. Youngs. Modelling turbulent mixing by rayleigh-taylor instability. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1989.
- [6] A. W. Cook and P. E. Dimotakis. Transition stages of rayleigh-taylor instability between miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001.
- [7] M. M. Scase, K. A. Baldwin, and R. J. A. Hill. Rotating rayleigh-taylor instability. *Physical Review Fluids* 2, 2017.
- [8] R. C. Colwell. Chladni figures on square plates. *Journal of the Franklin Institute*, 1936.
- [9] S. Douady. Experimental study of the faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990.
- [10] T. B. Benjamin and F. Ursell. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceeding of the Royal Society of London*, 1954.

- [11] K. Kumar and L. S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *Journal of Fluids Mechanics*, 1994.
- [12] S. Douady and S. Fauve. Pattern selection in faraday instability. *Journal of Rheology*, 1988.
- [13] W. S. Edwards and S. Fauve. Patterns and quasi-patterns in the faraday experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994.
- [14] A. V. Kityk, J. Embs, V. V. Mekhonoshin, and C. Wagner. Spatiotemporal characterization of interfacial faraday waves by means of a light absorption technique. *Physical Review E*, 2005.
- [15] N. Perinet, D. Juric, and L. S. Tuckerman. Numerical simulation of faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009.
- [16] P. H. Wright and J. R. Saylor. Patterning of particulate films using faraday waves. *Review of Scientific Instruments*, 2003.
- [17] R. Martino, A. Boschan, D. B. Maggi, G. Bongiovanni, J-C. Géminard, and M. Piva. Sediment motion induced by faraday waves in a hele-shaw cell. *Physical Review E*, 2020.
- [18] C. L. Goodridge, W. Tao Shi, H. G. E. Hentschel, and D. P. Lathrop. Viscous effects in droplet-ejecting capillary waves. *Physical Review E*, 1997.
- [19] V. A. kalinichenko. Breaking of faradaywaves and jet launch formation. *Fluid Dynamics*, 2008.
- [20] B. Apffel, F. Novkoski, A. Eddi, and Fort E. Floating under a levitating liquid. *Nature*, 2020.
- [21] K. B. Winters, P. N. Lombard, J. J. Riley, and E. A. D'Asaro. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995.
- [22] A. Briard, B-J. Gréa, and L. Gostiaux. Harmonic to subharmonic transition of the faraday instability in miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019.
- [23] S. A. Thorpe. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968.

- [24] M. Cavelier, B-J. Gréa, A. Briard, and L. Gostiaux. The subcritical transition to turbulence of faraday waves in miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022.
- [25] X. Zhan, Y. He, Z. Sun, S. Baojun, and L. Xiwen. Mixing characteristics of high-viscosity fluids under forced vertical vibration. *Chemical Engineering and Technology*, 2019.
- [26] D. Benielli and J. Sommeria. Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998.
- [27] H. A. Barnes. Shear-thickening (“dilatancy”) in suspensions of nonaggregating solid particles dispersed in newtonian liquids. *Journal of Rheology*, 1989.
- [28] I. M. Kriger. Rheology of monodisperse latices. *Advances in Colloid and Interface Science*, 1972.
- [29] Y. Li and A. Umemura. Two-dimensional numerical investigation on the dynamics of ligament formation by faraday instability. *International Journal of Multiphase Flow*, 2013.
- [30] J. Li, X. Li, K. Chen, B. Xie, and S. Liao. Faraday waves in a hele-shaw cell. *Physics of Fluids*, 2018.
- [31] D. R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics 84th Edition*. CRC Press, 2004.
- [32] A. Briard, L. Gostiaux, and B-J. Gréa. The turbulent faraday instability in miscible fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019.
- [33] R. E. Hampton, A. A. Mammoli, A. L. Graham, and N. Tetlow. Migration of particles undergoing pressure-driven flow in a circular conduit. *Journal of Rheology*, 1997.
- [34] H. Khallouf. *Simulation numérique de la convection thermo-vibrationnelle par une méthode spectrale*. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse III, 1995.
- [35] H. W. Howe, J. J. Warriner, A. M. Cook, S. L. Coguill, and L. C. Farrar. Apparatus and method for resonant-vibratory mixing, March 13 2007. <https://www.google.com/patents/US7188993USPatents7,188,993>.

- [36] Resodyn Acoustic Mixers. <http://resodynmixers.com/>.
- [37] I. D. Pavey. Hazard assessment of high speed slurry blending using computer modelling of electric fields and potentials. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015.
- [38] M. Daniel. Dry polymer coating of energetic materials: Feasible or futile? *5th Resodyn Technical Interchange*, 2015.
- [39] M. S. Gruhne, T. M. Klapötke, M. Lommel, M. H. H. Wurzenberger, N. Szimhardt, and J. Stierstorfer. Impact sensitivities of explosives explored by the ozm ball drop tester (bit-132). *New Trends Res. Energ. Mater., Proc. Semin., 22nd*, 2019.
- [40] F. P. Bowden, A. D. Yoffe, M. Lommel, M. H. H. Wurzenberger, N. Szimhardt, and J. Stierstorfer. *Chapter III: Initiation by Impact of Explosion in Liquids, in: Initiation and Growth of Explosion in Liquids and Solids*. Cambridge University Press, 1952.
- [41] C. J. Wright, P. J. Wilkinson, S. E. Gaulter, D. Fossey, Burn A. O., and P. P. Gill. Is resonant acoustic mixing® (ram) a game changer for manufacturing solid composite rocket propellants? *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2022.
- [42] T. L. Pourpoint, T. D. Wood, M. A. Pfeil, J. Tsohas, and S. F. Son. Feasibility study and demonstration of an aluminum and ice solid propellant. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2012.
- [43] D. V. Nance. Simulating the resonant acoustic mixer. *Interim report, Air Force Research Laboratory*, August 2013.
- [44] D. V. Nance. An examination of the resonant acoustic's mixer flow field. *Interim report, Air Force Research Laboratory*, December 2013.
- [45] Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1883.
- [46] G.I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1950.

- [47] G. R. Baker, R. L. McCrory, C. P. Verdon, and S. A. Orszag. Rayleigh-taylor instability of fluid layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986.
- [48] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New York, 1961.
- [49] D. H. Sharp. An overview of rayleigh-taylor instability. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1984.
- [50] R. Menikoff, R. C. Mjolsness, D. H. Sharp, and C. Zemach. Unstable normal mode for rayleigh-taylor instability in viscous fluids. *The Physics of Fluids*, 1977.
- [51] R. Menikoff, R. C. Mjolsness, D. H. Sharp, C. Zemach, and B. J. Doyle. Initial value problem for rayleigh-taylor instability of viscous fluids. *The Physics of Fluids*, 1978.
- [52] K. O. Mikaelian. Effect of viscosity on rayleigh-taylor and richtmyer-meshkov instabilities. *Physical Review E*, 1993.
- [53] K. O. Mikaelian. Rayleigh-taylor instability in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension. *Physical Review E*, 1996.
- [54] M. S. Plesset and C. G. Whipple. Viscous effects in rayleigh-taylor instability. *The Physics of Fluids*, 1974.
- [55] R. Bellman and R. H. Pennington. Effects of surface tension and viscosity on taylor instability. *Quart. Appl. Math.*, 1954.
- [56] A. Elgowainy and N. Ashgriz. The rayleigh-taylor instability of viscous fluid layers. *Physics of Fluids*, 1997.
- [57] R. LeLevier, G. J. Lasher, and F. Bjorklund. Effect of a density gradient on taylor instability, 1955. Lawrence Livermore Laboratory report UCRL-4459.
- [58] N. R. Rajappa. On the instability of fluid surfaces when accelerated perpendicular to their planes. *Acta Mechanica*, 1970.
- [59] D. H. Munro. Analytic solutions for rayleigh-taylor growth rates in smooth density gradients. *Physical Review A*, 1988.
- [60] H. J. Kull. Nonlinear free-surface rayleigh-taylor instability. *Physical Review A*, 1986.

- [61] S. W. Haan. Onset of nonlinear saturation for rayleigh-taylor growth in the presence of a full spectrum of modes. *Physical Review A*, 1989.
- [62] H. Ding, P. D. M. Spelt, and C. Shu. Diffuse interface model for incompressible two-phase flows with large density ratios. *Journal of Computational Physics*, 2007.
- [63] H. G. Lee and J. Kim. Numerical simulation of the three-dimensional rayleigh–taylor instability. *Computers and Mathematics with Applications*, 2013.
- [64] R. G. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag. Vortex simulations of the rayleigh-taylor instability. *Physics of Fluids*, 1980.
- [65] G. Tryggvason. Numerical simulations of the rayleigh-taylor instability. *Journal of Computational Physics*, 1988.
- [66] J-L. Guermond and L. Quartapelle. A projection fem for variable density incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 2000.
- [67] H. G. Lee, K. D. M. Kim, and J. Kim. On the long time simulation of the rayleigh–taylor instability. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 2010.
- [68] Y-N. Young, H. Tufo, A. Dubey, and R. Rosner. On the miscible rayleigh–taylor instability: two and three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001.
- [69] P. E. Dimotakis. Turbulent mixing. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005.
- [70] D. Livescu, T. Wei, and P. T. Brady. Rayleigh–taylor instability with gravity reversal. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021.
- [71] B. B. Chakraborty and M. Bandyopadhyay. Effect of rotation on dynamic stabilization of a stratified fluid. *The Physics of Fluids*, 1975.
- [72] M. H. Obied Allah. Rayleigh-taylor stability in the presence of rotation. *Astrophysics ans Space Science*, 1991.
- [73] K. A. Baldwin, M. M. Scase, and R. J. Hill. The inhibition of the rayleigh-taylor instability by rotation. *Scientific Report*, 2015.
- [74] J. Huneault, D. Plant, and A. Higgins. Rotational stabilisation of the rayleigh-taylor instability at the inner surface of an imploding liquid shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019.

- [75] N. F. El-Ansary, G. A. Hoshoudy, A. S. Abd-Elrady, and A. H. Ayyad. Effects of surface tension and rotation on the rayleigh–taylor instability. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2002.
- [76] J. J. Tao, X. T. He, W. H. Ye, and F. H. Busse. Nonlinear rayleigh-taylor instability of rotating inviscid fluids. *Physical Review E*, 2013.
- [77] L. A. Dávalos-Orozco. Rayleigh-taylor instability of two superposed fluids under imposed horizontal and parallel rotation and magnetic fields. *Fluid Dynamics Research*, 1993.
- [78] B. K. Shivamoggi. Dynamic stabilisation of rayleigh-taylor instability. *Astrophysics and Space Science*, 1982.
- [79] J. Wesson. Dynamic stabilization and the rayleigh-taylor instability. *The Physics of Fluids*, 1970.
- [80] E. F. F. Chladni. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Leipzig, 1787.
- [81] M. Faraday. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lon.*, 1831.
- [82] A. Mathiessen. *Annalen der Physik und Chemie*. Leipzig, 1868.
- [83] Lord Rayleigh. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Phil. Mag.*, 1883.
- [84] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [85] R. L. Peskin and R. J. Raco. Ultrasonic atomization of liquids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1963.
- [86] R. J. Lang. Ultrasonic atomization of liquids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962.
- [87] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1883.
- [88] K. Kumar. Linear theory of faraday instability. *Proceeding of the Royal Society of London*, 1996.
- [89] E. Cerda and E. Tirapegui. Faraday's instability for viscous fluids. *Physical Review Letters*, 1997.

- [90] E. A. Cerda and E. L. Tirapegui. Faraday's instability for viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998.
- [91] T. Besson, W. S. Edwards, and S. T. Tuckerman. Two-frequency parametric excitation of surface waves. *Physical Review Letters E*, 1996.
- [92] J. Beyer and R. Friedrich. Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids. *Physical Review E*, 1995.
- [93] J. Bechhoefer and B. Johnson. A simple model for faraday waves. *American Journal of Physics*, 1996.
- [94] H. W. Müller, H. Wittmer, C. Wagner, J. Albers, and K. Knorr. Analytic stability theory for faraday waves and the observation of the harmonic surface response. *Physical Review Letters*, 1997.
- [95] J. Bechhoefer, V. Ego, S. Manneville, and B. Johnson. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995.
- [96] H. W. Müller. Periodic triangular patterns in the faraday experiment. *Physical Review Letters*, 1993.
- [97] A. Kudrolli, B. Pier, and J. P. Gollub. Superlattice patterns in surface waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1998.
- [98] J. Porter, C. M. Topaz, and M. Silber. Pattern control via multifrequency parametric forcing. *Physical Review Letter*, 2004.
- [99] A. M. Rucklidge and M. Silber. Design of parametrically forced patterns and quasipatterns. *Physical Review Letter*, 2004.
- [100] P. Chen and K. Wu. Subcritical bifurcations and nonlinear balloons in faraday waves. *Physical Review Letters*, 2000.
- [101] P. Chen. Nonlinear wave dynamics in faraday instabilities. *Physical Review Letters E*, 2002.
- [102] Y. Murakami and C. Masatsugu. Two-dimensional direct numerical simulation of parametrically excited surface waves in viscous fluid. *Physics of Fluid*, 2000.
- [103] J. Valha, J. S. Lewis, and J. Kubie. A numerical study of the behaviour of a gas-liquid interfacesubjected to periodic vertical motion. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, 2002.

- [104] X. Xu, X. Wang, S. Chen, S. Zhu, and L. Pang. Lattice boltzmann simulations of meso-vortex in resonance mixing technology. *Modern Physics Letters B*, 2020.
- [105] N. Perinet, P. Gutiérrez, H. Urra, and N. Mujica. Streaming patterns in faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017.
- [106] L. Kahouadji, N. Périnet, L. S. Tuckerman, S. Shin, J. Chergui, and D. Juric. Numerical simulation of supersquare patterns in faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015.
- [107] V. Diwakar, S. V. Jajoo, S. Amiroudine, S. Amiroudine, S. Matsumoto, R. Narayanan, and F. Zoushtiagh. The faraday instability in miscible fluid systems. *Physical Review Fluids*, 2018.
- [108] S. V. Jajoo. *Faraday instability in binary fluids*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2017.
- [109] X. Li, J. Li, X. Li, S. Liao, and C. Chen. Effect of width on the properties of faraday waves in hele-shaw cells. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2019.
- [110] J. Li, X. Li, and Liao. Stability and hysteresis of faraday waves in hele-shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019.
- [111] X. Li and Y. Zhengyue. Observation of two-dimensional faraday waves in extremely shallow depth. *Physical Review E*, 2015.
- [112] X. Li, J. Li, S. Liao, and C. Chen. Effect of depth on the properties of two coupled faraday waves in a hele-shaw cell. *Physics of Fluids*, 2018.
- [113] X. Li, X. Li, and S. Liao. Observation of two coupled faraday waves in a vertically vibrating hele-shaw cell with one of them oscillating horizontally. *Physics of Fluids*, 2018.
- [114] D. Liu and P. Lin. Interface instabilities in faraday waves of two-layer liquids with free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022.
- [115] Y. Li, M. Zhang, and K. Wu. Three-dimensional simulation of ligament formation and breakup caused by external vibration. *Physics of Fluids*, 2020.
- [116] Y. Li and A. Umemura. Threshold condition for spray formation by faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 2014.

- [117] C. L. Goodridge, H. G. E. Hentschel, and D. P. Lathrop. Breaking faraday waves: Critical slowing of droplet ejection rates. *Physical Review Letters*, 1999.
- [118] H. Q. Yang and J. Peugeot. Surface instability of liquid propellant under vertical oscillatory forcing. 46th AIAA/ASME/ASE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2011.
- [119] R. A. Ibrahim. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems. *Journal of Fluid Engineering*, 2015.
- [120] G. H. Wolf. Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid-gas interface. *Physical Review Letters*, 1970.
- [121] V. Lapuerta, F. J. Mancebo, and J. M. Vega. Control of rayleigh-taylor instability by vertical vibration in large aspect ratio containers. *Physical Review E*, 2001.
- [122] J. C. Hunt and D. J. Carruthers. Rapid distortion theory and the ‘problems’ of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001.
- [123] H. Hanazaki and J. C. Hunt. Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996.
- [124] G. K. Batchelor and J. M. Nitshe. Instability of stationary unbounded stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991.
- [125] D. Truzzolillo and L. Cipelletti. Hydrodynamic instabilities in miscible fluids. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2017.
- [126] S. V. Diwakar, F. Zoueshtiagh, S. Amiroudine, and R. Narayanan. The faraday instability in miscible fluid systems. *Physics of Fluids*, 2015.
- [127] F. Zoueshtiagh, S. Amiroudine, and R. Narayanan. Experimental and numerical study of miscible faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009.
- [128] S. Amiroudine, F. Zoueshtiagh, and R. Narayanan. Mixing generated by faraday instability between miscible liquids. *Physical Review E*, 2012.
- [129] B-J. Gréa and A. Ebo Adou. What is the final size of turbulent mixing zones driven by the faraday instability? *Journal of Fluid Mechanics*, 2017.

- [130] B-J. Gréa. The rapid acceleration model and the growth rate of a turbulent mixing zone induced by rayleigh-taylor instability. *Physics of Fluids*, 2013.
- [131] O. Soulard, J. Griffond, and B-J. Gréa. Large-scale analysis of unconfined self-similar rayleigh–taylor turbulence. *Physics of Fluids*, 2015.
- [132] M. Carpineti, F. Croccolo, and A. Vailati. Levitation, oscillations, and wave propagation in a stratified fluid. *European Journal of Physics*, 2021.
- [133] K. Helmholtz. Über diskontinuierliche flüssigkeits-bewegungen. *Monatsberichte der Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1868.
- [134] L. Kelvin. Hydrokinetic solutions and observations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1871.
- [135] W. R. Peltier and C. P. Caulfield. Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003.
- [136] P. G. Drazin. Kelvin-helmholtz instability of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970.
- [137] R. Krasny. Vortex sheet computations: Roll-up, wakes, separation. *Lectures in Applied Mathematics*, 1991.
- [138] P. C. Patnaik, F. S. Sherman, and G. M. Corcos. A numerical simulation of kelvin-helmholtz waves of finite amplitude. *Lectures in Applied Mathematics*, 1976.
- [139] R. H. Rangel and W. A. Sirignano. Nonlinear growth of kelvin–helmholtz instability: Effect of surface tension and density ratio. *The Physics of Fluids*, 1992.
- [140] H. G. Lee and J. Kim. Two-dimensional kelvin–helmholtz instabilities of multi-component fluids. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2017.
- [141] C. Staquet and J. Sommeria. Internal gravity waves: From instabilities to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2002.
- [142] L. Boegman. Currents in stratified water bodies 2: Internal waves. *Encyclopedia of Inland Waters*, 2009.
- [143] L. Rayleigh. On the instability of jets. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1878.

- [144] L. Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1892.
- [145] J. A. F. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier Villard Paris, 1873.
- [146] J. Eggers and E. Villermaux. Physics of liquid jets. *Reports on Progress in Physics*, 2008.
- [147] E. Villermaux, Ph. Marmottant, and J. Duplat. Ligament-mediated spray formation. *Physical Review Letters*, 2004.
- [148] N. Ashgriz and J. Y. Poo. Coalescence and separation in binary collisions of liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006.
- [149] E. C. Bingham. Some fundamental definitions of rheology. *Journal of Rheology*, 1930.
- [150] P. Coussot and C. Ancey. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999.
- [151] P. Coussot. *Rhéophysique, la matière dans tous ses états*. EDP Sciences, 2012.
- [152] T. Hales. A proof of the kepler conjecture. *Physical Review Letter*, 2005.
- [153] T. HALES, M. ADAMS, G. BAUER, T. D. DANG, J. HARRISON, L. T. HOANG, C. Kaliszyk, V. Magron, S. McLaughlin, Q. T. Nguyen, T. T. Nguyen, T. Nipkow, S. Obua, J. Pleso, J. Rute, A. Solovyev, T. H. A. Ta, N. T. Tran, T. D. Trieu, U. J., V. K., and R. Zumkeller. A formal proof of the kepler conjecture. *Forum of Mathematics, Pi*, 2017.
- [154] G. D. Scott and D. M. Kilgour. The density of random close packing of spheres. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1969.
- [155] G. Y. Onoda and E. G. Liniger. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Physical Review Letter*, 1990.
- [156] C. Ancey, P Vollmöller, and S. Cochard. Rhéophysique des suspensions concentrées: cadre théorique et similitude. *17ème Congrès Français de Mécanique*, 2005.
- [157] G. K. Batchelor. The stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970.

- [158] F. Gadala-Maria and A. Acrivos. Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *Journal of Rheology*, 1980.
- [159] D. Leighton and A. Acrivos. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987.
- [160] D. Leighton and A. Acrivos. Measurement of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987.
- [161] J. R. Phillips, C. R. Armstrong, R. A. Brown, A. L. Graham, and J. R. Abbott. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991.
- [162] H. M. Vollebregt, R. G. M. van der Sman, and R. M. Boom. Suspension flow modelling in particle migration and microfiltration. *Soft Matter*, 2010.
- [163] R. Rao, L. Mondy, A. Sun, and S. Altobelli. A numerical and experimental study of batch sedimentation and viscous resuspension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002.
- [164] L. Fradette, P. A. Tanguy, F. Bertrand, F. Thibault, J-B. Ritz, and E. Giraud. Cfd phenomenological model of solid-liquid mixing in stirred vessels. *Computers and Chemical Engineering*, 2006.
- [165] J. T. Jenkins and D. F. McTigue. Transport processes in concentrated suspensions: The role of particle fluctuations. In Joseph D. D. and D. G. Schaeffer, editors, *Two Phase Flows and Waves*, pages 70–79. Springer, 1990.
- [166] J. Morris and F. Boulay. Curvilinear flows of noncolloidal suspensions: the role of normal stresses. *Journal of Rheology*, 1999.
- [167] P. R. Nott and J. F. Brady. Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994.
- [168] S. Mueller, E. W. Llewellyn, and H. M. Mader. The rheology of suspensions of solid particles. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2009.
- [169] E. Guazzelli and O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018.

- [170] A. Einstein. A new determination of molecular dimensions. *Annalen der Physik*, 1906.
- [171] G. K. Batchelor and J. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 1972.
- [172] G. K. Batchelor. Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 1976.
- [173] M. Mooney. The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles. *Journal of Colloid Science*, 1950.
- [174] J. F. Brady. The rheological behavior of concentrated colloidal dispersions. *The Journal of Chemical Physics*, 1993.
- [175] L. Konoszy. *Theoretical Principles and Galilean Invariance*. Springer, 2019.
- [176] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach. A continuum model for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 1992.
- [177] S. Popinet. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 2009.
- [178] F Desmons. *Étude numérique du déferlement de vagues capillo-gravitaires*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2021.
- [179] H. C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1949.
- [180] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. 1856.
- [181] P. Gondret and M. Rabaud. Shear instability of two-fluid parallel flow in a hele–shaw cell. *Physics of Fluids*, 1997.
- [182] C. Ruyer-Queil. Inertial corrections to the darcy law in a hele–shaw cell. *C. R. Acad. Sci. Paris IIb*, 2001.
- [183] C. W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, 1998.
- [184] C-W. Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 1994.

- [185] G. Jiu and C. W. Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996.
- [186] R. Wang and R. J. Spiteri. Linear instability of the fifth-order weno method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2007.
- [187] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984.
- [188] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfert and Fluid Flow*. CRC Press, 1980.
- [189] P. Traoré and Amiroudine S. *Simulation numérique en mécanique des fluides*. Cépaduès Éditions, 2020.
- [190] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 1967.
- [191] H. Uzawa K. Arrow, L. Hurwicz. *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford University Press, Stanford, 1958.
- [192] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 1967.
- [193] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 1979.
- [194] L. J. P. Timmermans, P. D. Mineev, and F. N. Van De Voss. An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1996.
- [195] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculuation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 1965.
- [196] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 1981.
- [197] J. Wright, S. Yon, and C. Pozrikidis. Numerical studies of two-dimensional faraday oscillations of inviscid fluids. *Journal of Fluids Mechanics*, 2000.
- [198] A. W. Adamson and A. P. Gast. *Physical chemistry of surfaces*. Wiley, 1997.
- [199] X. Fu, L. Cueto-Felhueroso, and R. James. Viscous fingering with partially miscible fluids. *Physical Review Fluids* 2, 2017.

- [200] S. A. Setu, I. Zacharoudiou, G. J. Davies, D. Bartolo, S. Moulinet, A. A. Louis, J. M. Yeomans, and D. G. A. L. Aarts. Viscous fingering at ultralow interfacial tension. *Soft Matter*, 2013.
- [201] A. E. Kampitsis, A. Adam, P. Salinas, C. C. Pain, A. H. Muggeridge, and M. D. Jackson. Dynamic adaptive mesh optimisation for immiscible viscous fingering. *Computational Geosciences*, 2020.
- [202] M. J. Andrews and D. B. Spalding. A simple experiment to investigate two-dimensional mixing by rayleigh–taylor instability. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1990.
- [203] J. Brel. *Modélisation du remplissage en propergol de moteur à propulsion solide*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2001.
- [204] K. Dugois. *Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide chargé en particules*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2017.
- [205] E. Mathieu. Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1868.
- [206] G. W. Hill. On the art of the motion of lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon. *Acta Math*, 1886.
- [207] R. H. Rand. Lecture notes on nonlinear vibrations, 2012. Cornell University, Ithaca, NY, accédé le 21/10/2021, <https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/28989>.
- [208] I. Kovacic, R. Rand, and S. M. Sah. Mathieu's equation and its generalizations: Overview of stability charts and their features. *Applied Mechanics Reviews*, 2018.
- [209] J. Kervokian and J. D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer, 1981.
- [210] S. M. Zen'kovskaya and I. B. Simonenko. Effect of high frequency vibration on convection initiation. *Fluid Dynamics*, 1966.
- [211] S. M. Zen'kovskaya and T. N. Rogovenko. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 1999.

- [212] Y. Gaponenko and V. Shevtsova. Mixing under vibrations in reduced gravity. *Microgravity Science and Technology*, 2008.
- [213] Y. Gaponenko and V. Shevtsova. Effects of vibrations on dynamics of miscible liquids. *Acta Astronautica*, 2010.
- [214] V. Shevtsova, Y. Gaponenko, V. Sechenyh, D. E. Melnikov, T. Lyubimova, and A. Mialdun. Dynamics of a binary mixture subjected to a temperature gradient and oscillatory forcing. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015.
- [215] S. Mazzoni, V. Shevtsova, D. Mialdun, A. Melnikov, Y. Gaponenko, T. Lyubimova, and M. Z. Saghir. Vibrating liquids in space. *Europhysics news*, 2010.
- [216] H. Khallouf, G. Z. Gershuni, D. Mojtabi, A. Melnikov, Y. Gaponenko, T. Lyubimova, and M. Z. Saghir. Numerical study of two-dimensional thermovibrational convection in rectangular cavities. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 1995.

## **Modélisation Numérique du Malaxage Acoustique de Fluides Énergétiques Chargés**

**Résumé :** Le mélangeage par vibrations verticales est un sujet d'étude en plein croissance grâce au développement d'un mécanisme par résonance mécanique permettant le malaxage de fluides visqueux et de poudres, nommé RAM (ResonantAcoustic<sup>®</sup> Mixing), et faisant intervenir l'instabilité de Faraday. Cette thèse s'inscrit dans l'analyse du mélangeage vibratoire en étudiant le comportement d'un milieu diphasique, d'un fluide monophasique contenant une concentration d'espèce ou une suspension, soumis à cette instabilité. À l'aide de simulations numériques effectuées avec le code NOTUS, développé au sein du laboratoire I2M, des comparaisons sont effectuées entre ces résultats et ceux obtenus à partir de l'analyse linéaire de l'instabilité de Faraday, ainsi que des données expérimentales fournies par l'entreprise Roxel qui supporte ce projet. Un modèle permettant de calculer l'évolution de la fraction volumique pendant le mélangeage est implémenté dans le code afin de pouvoir simuler le comportement d'un fluide chargé soumis aux vibrations imposées par le mélangeur RAM.

**Mots-clés :** malaxage, simulation numérique, incompressible, instabilité de Faraday

---

### **Numerical Modeling of Acoustic Mixing of Energetic Charged Fluids**

**Abstract:** Mixing by vertical vibrations is a growing subject of study thanks to the development of a mechanism by mechanical resonance allowing the mixing of viscous fluids and powders, called RAM (ResonantAcoustic<sup>®</sup> Mixing), and involving Faraday instability. This thesis is part of the analysis of vibrational mixing by studying the behavior of a two-phase medium, a single-phase fluid containing a concentration of species or a suspension, subjected to this instability. Using numerical simulations carried out with the NOTUS code, developed in the I2M laboratory, comparisons are made between these results and those obtained from the linear analysis of the Faraday instability, as well as experimental data provided by the company Roxel which supports this project. A model allowing to calculate the evolution of the volume fraction during the mixing is implemented in the code in order to be able to simulate the behavior of a loaded fluid subjected to the vibrations imposed by the RAM mixer.

**Keywords:** Mixing, CFD, incompressible, Faraday instability

---

#### **Unité de recherche**

UMR 5295 Université de Bordeaux, 33000 Bordeaux, France.