



HAL
open science

Modélisation des systèmes urbains

Vincent Verbavatz

► **To cite this version:**

Vincent Verbavatz. Modélisation des systèmes urbains. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UPASP066 . tel-03783602

HAL Id: tel-03783602

<https://theses.hal.science/tel-03783602v1>

Submitted on 22 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation des systèmes urbains
Modelling urban systems

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 564 – École doctorale de physique d'Île-de-France
Spécialité de doctorat : Physique
Graduate School : Physique. Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée à l'Institut de physique théorique
(Université Paris-Saclay, CNRS, CEA) sous la direction de Marc Barthelemy,
directeur de recherche (CEA).

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 7 juillet 2022, par

Vincent Verbavatz

Composition du jury

Denise Pumain Professeure, Université Panthéon-Sorbonne	Présidente
Alain Barrat Directeur de recherche (CNRS), Centre de physique théorique	Rapporteur & Examineur
Pablo Jensen Directeur de recherche (CNRS), Institut rhônalpin des systèmes complexes	Rapporteur & Examineur
Henri Berestycki Professeur, École des hautes études en sciences sociales	Examineur
Jean-Philippe Bouchaud Directeur de la recherche CFM, membre de l'Académie des sciences	Examineur
Benjamin Carantino Ingénieur des ponts, des eaux et des forêts, Ministère de la Transition écologique	Examineur
Jean-Marc Luck Directeur de recherche (CEA), Institut de physique théorique	Examineur
Marc Barthelemy Directeur de recherche (CEA), Institut de physique théorique	Directeur de thèse

Titre : Modélisation des systèmes urbains.....

Mots clés : physique statistique, systèmes complexes, géographie urbaine, villes

Résumé : Les villes étonnent, surprennent et intéressent une communauté scientifique large et ancienne d'économistes, de sociologues, de géographes et d'historiens dans laquelle les physiciens et les mathématiciens trouvent aussi leur place. Les villes étonnent d'abord parce qu'elles existent, ce qui n'a rien d'évident et traduit le fait, essentiel, d'un intérêt des individus à se regrouper. Les villes surprennent ensuite parce qu'elles se ressemblent à travers le monde malgré la multiplicité des individualités qui les sous-tendent. Les villes intéressent enfin parce qu'elles se développent au point d'être devenues majoritaires sur Terre et que leur bonne compréhension est devenue un enjeu global.

La curiosité du phénomène urbain et les similitudes empiriques entre les villes du monde invitent à y rechercher des causes communes : c'est là

le fondement d'une *science des villes* dont notre thèse procède. Ce travail, quantitatif, est unique dans sa méthode, issue de la physique statistique, mais triple dans son objet. Il s'intéresse en effet à la *démographie urbaine*, variable-mère des systèmes urbains, dont il étudie autant la répartition statique que l'évolution dynamique, proposant une nouvelle loi de la croissance urbaine ; aux *dynamiques sociales* dans les villes, caractéristiques des interactions économiques entre les individus et des dynamiques de ségrégation ou de gentrification que nous cherchons à quantifier ; aux *transports urbains* enfin, matrices d'existence des villes, dont la dualité entre transports particuliers et transports en commun a des conséquences environnementales et économiques non triviales dont nous proposons de dégager la bonne compréhension.

Title : Modelling urban systems.....

Keywords : statistical physics, complex systems, urban geography, cities

Abstract : Cities surprise and interest a large and long-standing scientific community of economists, sociologists, geographers and historians, in which physicists and mathematicians also have their word. Cities are surprising because they exist, which is anything but obvious and reflects the essential fact that individuals are prone to group together. Cities are interesting because they are developing to the point where they have become the primary context of human life on Earth, and understanding them properly has become a global issue. Finally, it is critical to note that cities are similar across civilizations despite the multiplicity of individualities that underlie them.

The urban phenomenon and the empirical similarities between the cities of the world invite us

to look for common causes : this is the grounding reason for a *science of cities* in which we place ourselves. Our quantitative work is unique in its methodology, which stems from statistical physics, but threefold in its objectives. We focus on *urban demography*, the main variable of urban systems, of which we study both the static distribution and the dynamic evolution, proposing a new law of urban growth. We also study the *social dynamics* of cities, which characterize the economic interactions between individuals and the dynamics of segregation and gentrification. Finally, we aim at describing *urban transportation*, the networks on which cities rely, and quantify the non-trivial environmental and economic consequences of the interplay between private and public transport.

À ma grand-mère Lucette, mes grands-parents et parents.

Publications

Cette thèse a donné lieu à plusieurs publications dans des revues scientifiques :

- [1] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. Critical factors for mitigating car traffic in cities. *PLoS one*, 2019, vol. 14, no 7, p. e0219559 ;
- [2] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. The growth equation of cities. *Nature*, 2020, vol. 587, no 7834, p. 397-401 ;
- [3] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. Access to mass rapid transit in OECD urban areas. *Scientific Data*, 2020, vol. 7, no 1, p. 1-6 ;
- [4] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. From one-way streets to percolation on random mixed graphs. *Physical Review E*, 2021, vol. 103, no 4, p. 042313 ;
- [5] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. *Physical Review E*, 2022, vol. 105, no 5, p. 054303.
- [6] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. Modelling the spatial dynamics of income in cities, *En cours de soumission*, 2022 ;

auxquelles il convient d'ajouter un chapitre d'ouvrage :

- [7] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. Modelling car traffic in cities. In : *Handbook on Cities and Complexity*. Edward Elgar Publishing, 2021 ;

et un livre en préparation :

- [8] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. The growth of cities, *En préparation*, 2022.

Avant-propos

Si cette thèse est pluridisciplinaire, elle s'appuie en grande partie sur une démarche mathématique et donc quantitative. Or, on ne peut pas nier que la relation entre sciences sociales et quantification soit tumultueuse, sur une ligne de crête permanente entre déni des nombres et dérive scientiste.

Au moins jusqu'à Laplace rêva-t-on de l'harmonie par le calcul. Puisque la nature était déterministe, le calcul pouvait donner réponse à tout et, à terme, remplacer la politique. Voilà quel était le sens de l'arithmétique politique anglo-saxonne [9]. Pourtant, à l'idéal (ou l'enfer) d'un déterminisme absolu succéda bientôt une période plus sceptique, alors que dans les sciences dures mêmes, le déterminisme semblait échouer, confronté aux vicissitudes de la physique quantique et de la théorie du chaos. La contre-attaque vint des statistiques et de la théorie des probabilités : il était aussi possible d'expliquer *en moyenne*, en physique quantique comme en sociologie ou en géographie. Le XX^e siècle bouleversa ainsi le rôle de la quantification en sciences sociales en lui donnant un nouveau souffle méthodologique.

Pourtant, une discipline en particulier, l'économie, n'est pas totalement sortie des paradigmes antérieurs. C'est d'autant plus dangereux que les économistes ont eux-mêmes la prétention de réduire toutes les sciences sociales à l'économie et qu'ils demandent à ce que les choix politiques s'appuient sur leurs analyses. C'est ce que dénonce Alain Supiot dans la *Gouvernance par les nombres* [10]. Un peu excessif, Supiot pose une opposition quasi-frontale entre approche qualitative et quantitative. En plaidant pour la première, il oublie qu'une partie de la seconde, celle dont nous nous revendiquons dans cette thèse, est moderne et différente du paradigme antérieur qu'il critique.

Je pense qu'il n'y a sans doute pas meilleur exemple de cette excessive prétention de l'économie à expliquer des phénomènes sociaux sur la base d'analyses quantitatives un peu fallacieuses que le rôle que prit John Maynard Keynes au début des années 20 dans la dénonciation du traité de Versailles. J'aimerais revenir, dans cet avant-propos, sur cet événement.

Le traité de Versailles fut l'un des cinq traités résultant de la conférence de la paix de Paris de 1919. Il régla spécifiquement le sort de l'Allemagne et ses futures relations avec les Alliés. Le traité acta la création d'une Société des Nations, amputa l'Allemagne de ses colonies et de certains territoires et fixa le montant des réparations dues par l'Allemagne aux Alliés. Ces réparations de guerre furent justifiées par l'article 231 du traité :

Les Gouvernements alliés et associés déclarent et l'Allemagne reconnaît que l'Allemagne et ses alliés sont responsables, pour les avoir causés, de toutes les pertes et de tous les dommages subis par les

Gouvernements alliés et associés et leurs nationaux en conséquence de la guerre, qui leur a été imposée par l'agression de l'Allemagne et de ses alliés.

Article 231 du traité de Versailles (1919)

L'Allemagne étant responsable de la guerre, c'était à elle de payer les réparations dont le montant ne fut pas fixé par le traité, qui ébaucha toutefois les dommages remboursables : destructions dans les pays occupés, paiements des pensions militaires des pays alliés, etc. La commission des réparations fixa ce montant total à cent trente-deux milliards de marks-or en 1921, dont cinquante-deux milliards à rembourser impérativement.

Dans les *Conséquences économiques de la paix* [11], publiées en 1919, Keynes reprocha au traité de négliger les aspects économiques de la guerre (selon lui essentiels à la compréhension de l'Histoire du monde) au profit d'une vision revancharde et territoriale. Le travail de Keynes était quantitatif. Il estima d'une part le montant des réparations que les Alliés exigeraient sur la base du traité, le compara aux capacités financières de l'Allemagne et constata un important décalage. Il en déduisit que les exigences des Alliés grèveraient l'économie allemande au point de mettre en danger l'économie mondiale à long-terme, relanceraient le sentiment nationaliste en Allemagne et provoqueraient une catastrophe humanitaire sans précédent dans le *Reich*.

Le succès du livre de Keynes fut tel qu'il a en partie modifié le cours de l'Histoire en orientant fortement l'opinion publique, et donc les prises de position politiques, des pays engagés. Le paradoxe de l'ouvrage de Keynes fut donc d'avoir, partiellement, auto-induit certains effets qu'il avait prédits. En Allemagne, le livre connut un succès retentissant et permit aux nationalistes de convaincre la population d'une causalité entre le « *diktat* » de Versailles et l'hyperinflation du début des années 20. En Angleterre et aux États-Unis, il diffusa l'idée d'une Allemagne traitée injustement au point que le livre de Keynes joua un rôle décisif dans le refus de la ratification du traité par le Sénat américain et donc dans la non-participation des États-Unis à la Société de Nations. En France, le livre fit scandale et provoqua deux réfutations : une réfutation immédiate par Jacques Bainville dans les *Conséquences politiques de la paix* [12], critique qualitative, une seconde par Étienne Mantoux vingt-cinq ans plus tard dans *The Carthaginian Peace or the Economic Consequences of Mr. Keynes* [13], critique économique point par point des prédictions de Keynes.

Comment donc se structure la pensée de Keynes ? Après quelques formulations morales sur la notion de responsabilité allemande, Keynes essaie de démontrer, par une approche quantitative, que le traité est dangereux pour l'économie mondiale parce qu'il met en péril l'économie allemande. Sur la base du traité, Keynes estime le montant des réparations que les Alliés exigeront à environ huit milliards de livres, un nombre très proche du montant fixé par la commission des réparations en 1921 (cent trente-deux milliards de marks-or). Les prévisions comptables de

Keynes, qui s'appuient sur les statistiques de destruction et de valeur immobilière des pays touchés, sont donc tout à fait correctes, ce que Mantoux ne manque pas de souligner.

Keynes estime que ces réparations sont quatre fois trop élevées et propose de les ramener à deux milliards de livres. Il estime qu'au-delà de ce montant, l'économie allemande serait gravement atteinte, que l'Allemagne ne pourrait pas retrouver son niveau économique d'avant-guerre avant des décennies et que des millions d'Allemands mourraient de faim dans les années à venir. *A priori*, une partie des prédictions de Keynes est vérifiée. L'Allemagne connut effectivement une grave crise économique dans les années qui suivirent le traité. L'Allemagne ne « put » rembourser que vingt milliards de marks-or jusqu'à suspension définitive des versements en 1931. Le ressentiment anti-traité joua un rôle non négligeable dans la montée du nazisme. C'est le schéma classique d'un *diktat* qui aurait empêché l'Allemagne de connaître le chemin de la prospérité économique et lui aurait fait prendre celui de la guerre.

Plusieurs failles pourtant ponctionnent le raisonnement. D'abord les prédictions les plus alarmantes de Keynes sont fausses : l'Allemagne dépassa son niveau de production de 1914 dès le milieu des années 20 et aucune famine majeure provoquant le « décès de millions de personnes » n'eut lieu dans les années post-traité. Ensuite, les travaux économiques postérieurs, augurés par ceux de Mantoux, ont montré que les capacités financières de l'Allemagne étaient largement meilleures que ce que Keynes estimait et que le coût du réarmement annuel moyen (et clandestin) de l'Allemagne entre les deux guerres mondiales était supérieur au montant des réparations [13]. À l'inverse, les historiens modernes soulignent que les Allemands ont traîné des pieds dans leurs versements et que l'hyperinflation, commencée en fait dès avant 1918, n'était que peu imputable aux réparations payées, dont nous avons déjà souligné qu'elles ont été très inférieures aux réparations exigées et d'ailleurs suspendues entre 1922 et 1925, après de multiples défauts allemands. L'Allemagne était en 1919 en meilleure santé économique et moins endettée que la France, dont le coût de la reconstruction fut supérieur aux versements allemands totaux.

Le consensus est donc aujourd'hui de considérer que l'Allemagne avait les capacités financières de payer les réparations exigées et qu'elle ne le fit pas par mauvaise foi et intérêt politique [14-17]. Soit, mais qu'en conclure ? D'abord que Keynes s'est majoritairement trompé dans ses prédictions. Cela n'aurait pas été grave si, par la force attribuée à ses calculs, son ouvrage n'avait pas aussi fortement influencé l'opinion des belligérants de 14-18. Ainsi, parce qu'elle était quantitative, la démonstration de Keynes était beaucoup moins contestable que d'autres, même si *a posteriori* on en a démontré la faiblesse. Comment contester des chiffres dont on ne peut pas vérifier la portée à moins d'attendre vingt-cinq ans ? C'est là la question centrale qui limite la démarche de l'économie quantitative : la prédiction n'est pas contestable parce qu'elle est chiffrée mais n'est pas vérifiable puisque c'est une prédiction de long-terme. Or, on ne peut que regretter que le schéma

et les erreurs de Keynes se reproduisent encore bien souvent dans les travaux économiques contemporains. Il est en effet malheureusement bien rare qu'on vienne comparer dix ans plus tard les prédictions des modèles économiques à la réalité. Si on le faisait, nul doute que l'on serait fort déçu. Il n'en reste pas moins qu'on donne, à l'instant présent, force de prescience à ces modèles.

En 1920, un an après le livre de Keynes, Jacques Bainville, historien français proche de l'Action française publia en réponse les *Conséquences politiques de la paix* [12]. J'en ai découvert l'œuvre par hasard, parce qu'elle était, dans mon édition, attachée aux *Conséquences économiques de la paix*. L'analyse de Bainville ne défend pas plus que celle de Keynes le traité. Bainville en fut très critique et sa démarche est qualitative : historique et géopolitique.

Pour Bainville, le traité ne fut, en résumé, pas assez dur avec les Allemands. Bainville considère que le traité acta l'idée d'une nation allemande unique inédite depuis la proclamation de l'Empire en 1871 et que cette unification externe mettait en danger la stabilité de l'Europe. Il reproche aux Alliés d'avoir rendu collectivement responsables tous les Allemands et de ne pas avoir cherché à séparer les Prussiens des autres royaumes de l'Empire, notamment catholiques. Pour Bainville, le traité créa et reconnut par l'idée de responsabilité allemande collective un État allemand unifié et centralité, ce qui correspondit effectivement au futur développement institutionnel de la République de Weimar puis du III^e Reich. En stipulant aussi le démantèlement de l'Autriche-Hongrie (par le Traité de Saint-Germain-en-Laye), la conférence de la paix de Paris créa d'une part une Autriche atrophiée dont le seul destin ne pouvait être que l'union à l'Allemagne par l'« *Anschluss* », d'autre part une série d'états à l'est trop faibles pour assurer leur propre défense et abritant des minorités allemandes nécessairement séditeuses. En donnant à la France la garantie militaire de vérifier l'application d'un traité qui unifiait tous les Allemands, le traité fit selon Bainville « soixante millions d'Allemands débiteurs de quarante millions de Français », une erreur strictement évidente qui obligea la France à maintenir la « paix armée » par l'entretien d'une Armée de terre de masse au coût exorbitant. La France devait par ailleurs s'assurer de la formation militaire des pays d'Europe de l'Est, Pologne en tête (ce qu'elle fit effectivement), alors que les frontières mêmes de ces pays étaient mal définies.

Bainville prédit ainsi l'instabilité de l'Europe politique créée par le traité, puisque la paix n'était garantie par aucune autre force que l'Armée d'un pays moins peuplé et plus pauvre qu'un pays central, unifié, militariste et revancharde, que seule la division aurait pu maintenir au calme. L'approche de Bainville est donc strictement qualitative et ne fait aucune prédiction économique. Elle a été d'une remarquable justesse, la quasi-totalité des prédictions de Bainville se révélant correctes par la suite.

Quand on compare les méthodes, la qualité prédictive et le succès des deux

ouvrages, celui de Keynes et celui de Bainville, on ne peut qu'observer un décalage majeur. L'œuvre la plus quantitative et donc *a priori* la plus robuste a connu un retentissant succès que n'ont qu'à peine effacé des décennies de critiques empiriques. L'œuvre qualitative, malgré sa justesse de vue, est encore très ignorée et moins reconnue que celle de Keynes. Sans doute y a-t-il aussi à cela un sens politique, étant plus acceptable dans l'Europe moderne de dire que l'Allemagne aurait dû être traitée plus équitablement, posant incidemment l'idée d'une responsabilité partagée du déclenchement du conflit.

Il est amusant d'ailleurs de constater qu'on fait encore aujourd'hui grand bruit du *diktat* de Versailles sans noter que la séparation allemande post-1945 était infiniment plus dure. Les décisions des Alliés de la Seconde guerre mondiale furent d'ailleurs intermédiaires entre les projets de Keynes et Bainville : relance économique par le plan Marshall, division de l'Allemagne par une réduction de souveraineté qui a duré cinquante ans et coupé le pays en deux.

Quel rapport entre ces deux analyses du traité de Versailles et le reste de ma thèse ? De comprendre que lorsqu'on s'intéresse aux phénomènes sociaux comme, au hasard, les villes, l'approche quantitative ou économique a souvent l'air plus sérieuse et moins contestable. Elle aura souvent un écho plus important et lorsqu'on prolonge telle ligne de métro, on assure toujours en amont qu'elle créera tant d'emplois, permettra la construction de tant d'immeubles, etc. On fera toutefois rarement l'analyse *a posteriori* de ces prédictions. Cette confiance surestimée en l'analyse quantitative est dangereuse et le livre de Keynes eut des conséquences politiques infiniment plus néfastes que la qualité de ses travaux n'aurait dû le permettre.

Méfions-nous donc des analyses chiffrées à l'emporte-pièce. Dans cette thèse, nous essayons de quantifier au mieux mais nous apportons des arguments pour convaincre, comparables à d'autres, même moins numériques. Nous espérons que nos résultats tiendront le plus longtemps possible avant d'être réfutés. Ils ont la prétention d'expliquer des phénomènes sociaux mais on ne pourrait en tirer des politiques publiques sans un minimum d'esprit critique.

Table des matières

Introduction générale	21
I Une science des villes ?	23
Introduction	25
1 Des premières cités aux villes-mondes	27
1.1 De la cité-État au tournant urbain	27
1.1.1 La naissance des villes	27
1.1.2 La révolution industrielle	28
1.2 Mégalopoles et modernité	29
1.2.1 Un monde urbain	29
1.2.2 Quelques caractéristiques intéressantes	30
2 Un sujet d'économie ancien	33
2.1 Premières représentations	33
2.2 Le modèle monocentrique	34
2.2.1 Modèle d'Alonso-Muth-Mills	34
2.2.2 Fonction offre-loyer	36
2.2.3 Résidence optimale	36
2.2.4 Exemple simple	37
2.2.5 Interprétations et extensions	38
2.3 Centre et sous-centres	39
2.3.1 Une monocentricité illusoire	39
2.3.2 Mesurer la polycentricité	39
2.3.3 Modèle de Fujita-Ogawa	41
2.3.4 Prendre en compte la congestion automobile	42
2.3.5 Transition polycentrique	43
2.4 Des modèles explicatifs ?	44
3 Une question de méthode	45
3.1 Limites de l'économie urbaine	45
3.1.1 Un exemple	45
3.1.2 Équilibre	47
3.1.3 Rationalité	48
3.1.4 Interactions	49
3.1.5 Universalité	50

3.2	La question paramétrique	51
3.2.1	Modèles et données	51
3.2.2	Principe de parcimonie	51
4	Un système complexe	53
4.1	Théorie des systèmes complexes	53
4.1.1	Cadre théorique	53
4.1.2	Écologie urbaine	54
4.1.3	Vers la géographie quantitative	55
4.2	Le rôle de la physique statistique	56
4.2.1	De la thermodynamique à l'éconophysique	56
4.2.2	Retour sur l'universalité	57
5	Un objet à définir	59
5.1	Des définitions variables	59
5.1.1	Définitions usuelles	59
5.1.2	Approches fonctionnelles et morphologiques	60
5.2	Vers une nouvelle définition ?	61
5.2.1	Prérequis	61
5.2.2	Données téléphoniques	61
5.2.3	Limites	62
	Conclusion	63
II	Démographie urbaine	65
	Introduction	67
6	La population : un déterminant urbain	69
6.1	Une mesure fiable et ancienne	69
6.1.1	Recensements	69
6.1.2	Mesures spatiales	69
6.2	Un indicateur de premier ordre ?	70
6.2.1	Lois d'échelle	70
6.2.2	Critiques	71
7	Distribution de population	73
7.1	Autour des lois de puissance	73
7.1.1	Lois statistiques en sciences sociales	73
7.1.2	Lois de puissance	74
7.2	Loi de Zipf pour les villes	77
7.2.1	Loi d'Auerbach-Zipf	77
7.2.2	Des remises en cause récentes	77

8	Modèles de croissance urbaine	81
8.1	Modèles pré-gabaisiens	81
8.1.1	Modèle de Simon	81
8.1.2	Modèle de Gibrat	83
8.2	Modèles récents	84
8.2.1	Modèle de Gabaix	84
8.2.2	Modèle de Bouchaud-Mézard	86
9	Loi de la croissance urbaine	87
9.1	De l'importance des chocs migratoires	87
9.1.1	Une dynamique de population turbulente	87
9.1.2	Un nouveau modèle migratoire	89
9.2	Un nouveau cadre conceptuel	95
9.2.1	Pas de distribution d'équilibre	95
9.2.2	Dynamiques de rang	98
9.2.3	Interprétation	99
	Conclusion	101
III	Dynamiques sociales	103
	Introduction	105
10	Modèles de ségrégation	107
10.1	Agents hétérogènes dans le modèle d'Alonso-Muth-Mills	107
10.1.1	Modèle de premier ordre	107
10.1.2	Valeur du temps	108
10.2	Modèle de Schelling	110
10.2.1	Description	110
10.2.2	Physique statistique du modèle de Schelling	110
11	Modèle de l'électeur pour les dynamiques de revenus	113
11.1	Modèle de l'électeur	114
11.1.1	Modèle de l'électeur classique	114
11.1.2	Modèle de l'électeur bruité	114
11.2	Dynamiques sociales dans les villes	115
11.2.1	Données	115
11.2.2	Modèle	116
11.2.3	Capacité prédictive	120
	Conclusion	125

IV Transports urbains	127
12 Déplacements domicile-travail	131
12.1 Trafic automobile	131
12.1.1 Résultat de Newman-Kenworthy	131
12.1.2 Modèles de trafic	133
12.2 Modèle	133
12.2.1 Simplification du modèle Fujita-Ogawa	133
12.2.2 Accessibilité des transports en commun	134
12.2.3 Coût généralisé	135
12.3 Données	135
12.4 Résultats	136
12.4.1 Distance critique	136
12.4.2 Part modale automobile	137
12.4.3 Émissions de gaz à effets de serre	141
12.4.4 Temps de déplacement moyen	143
12.5 Interprétation	145
13 Accessibilité des transports publics	147
13.1 Vers une nouvelle métrique	147
13.2 Méthode et données	148
13.2.1 Populations urbaines	148
13.2.2 Emprises des transports en commun	148
13.2.3 Mesures de PNT	149
14 Sur les sens uniques	153
14.1 Réseaux routiers et graphes mixtes	153
14.2 Quelques mesures empiriques	154
14.2.1 Fraction de sens interdits et détour	154
14.2.2 Centralité intermédiaire	157
14.2.3 Composante fortement connexe	158
14.3 Percolation	160
14.3.1 Percolation et digraphes	160
14.3.2 Propriétés de détour	161
14.3.3 Seuil de percolation	162
14.3.4 Exposants critiques et nouvelle classe d'universalité	165
14.4 Perspectives	168
Conclusion	169

Conclusion générale	171
Annexes	175
A Théorème central limite généralisé	175
A.1 Théorème central limite	175
A.2 Généralisation	176
B Équations différentielles stochastiques	177
B.1 Mouvement brownien	177
B.1.1 Équation de Langevin	177
B.1.2 Conventions d'Itô et de Stratonovich	177
B.1.3 Équation de Fokker-Planck	178
B.2 Bruit multiplicatif	179
B.2.1 Équation de Langevin inhomogène	179
B.3 Extension aux bruits de Lévy	180
C Centralité intermédiaire	183
C.1 Définition et généralités	183
C.2 Réseaux uni- et bidimensionnels	184
C.3 Centralité intermédiaire dans les graphes spatialement denses et quasi-denses	186
C.3.1 Familles de graphe	186
C.3.2 Graphes spatialement denses	186
C.3.3 Perturbation autour de la limite dense	187
C.3.4 Limites de validité	193
Références	203

*Ces mouvements du désordre n'imitent pas
longtemps les allures de la liberté.*

Paul Nizan – *Aden Arabie* (1931)

Introduction générale

Bien qu'elle soient apparues il y a près de dix mille ans, les villes, qui concentrent au début du XXI^e siècle plus de la moitié de la population mondiale, sont l'une des formes d'organisations sociales les plus abouties et les plus complexes. Il est pourtant tout sauf naturel de penser que le ravitaillement industriel et agricole de très grandes populations concentrées sur de petits espaces soit une chose suffisamment aisée pour que des milliards de personnes puissent se permettre de vivre éloignés des moyens de production et d'alimentation dont ils dépendent pour leur survie. Les crises, les catastrophes naturelles ou les guerres montrent d'ailleurs qu'une fois que la machinerie s'enraye, les villes sont plutôt des endroits à éviter.

Pourtant, quand tout va bien, les villes brillent par les synergies sociales qu'elles entraînent : émulation, productivité accrue et économies d'échelle. Le modèle urbain semble être celui de l'efficacité voire de la sobriété. C'est ainsi qu'histoire, géographie, sociologie et économie entendent les villes depuis qu'elles sont un sujet d'étude.

Mais ces synergies sont-elles quantifiables ? Si les villes sont plus productives, plus écologiques ou plus efficaces, peut-on dire de combien ? Ces questions intéressent autant le chercheur que les pouvoirs publics dans l'orientation de leurs choix. Se les poser demande de s'arrêter un instant. Après tout, qu'est-ce qui nous autorise à parler des villes comme d'objets que l'on peut étudier comme un concept unique ? La réponse est au fond empirique. Les villes nous surprennent par leurs similitudes et leurs ressemblances, malgré l'immensité et la diversité des individualités dont elles sont le creuset. Or, lorsqu'il y a similitudes et universalités, il est naturel de chercher des causes communes : c'est là l'objet d'une *science des villes*, établie dans une longue tradition de recherche et à laquelle nous voulons contribuer. C'est donc l'objectif de cette thèse que d'établir des lois quantitatives, aussi simples que possibles, qui puissent décrire et rendre compte de ce que les villes, en tant que systèmes urbains, ont en commun. Toutes ces relations reposeront avant tout sur une analyse empirique solide, permise par la multiplication des sources de données dans les vingt dernières années. Sans elles, aucune modélisation n'est possible.

Pour ce faire, nous proposons dans une **première partie** de décrire et de justifier le sens d'une *science des villes*, en définissant notre méthode de travail, inspirée de l'économie urbaine et de la géographie quantitative, mais intégrant les techniques et approches spécifiques à la physique statistique. La valeur ajoutée de cette approche consiste à pouvoir écrire des modèles parcimonieux, économes en paramètres, capables de rendre compte des observations empiriques et de faire des prédictions.

Nous chercherons ensuite à appliquer notre méthode unique à trois sujets urbains différents. Dans une **deuxième partie**, nous nous consacrerons aux problèmes

de *démographie urbaine*. Nous verrons comment évolue statistiquement la population d'une ville dans un pays, en établissant un nouvel état de l'art de la croissance urbaine, qui met en lumière le rôle des chocs migratoires dans la dynamique des villes et contredit l'idée, longtemps répandue, d'une distribution stationnaire pour les populations urbaines.

Dans une *troisième partie*, nous nous intéresserons à un sujet intra-urbain et étudierons les *dynamiques sociales* dans les villes sous un double angle : celui de la ségrégation et du phénomène de la gentrification. Nous verrons ainsi comment, au sein des villes, se crée ou non le « vivre ensemble » et comment la population urbaine s'établit de façon hétérogène dans le tissu urbain.

Enfin, dans une *quatrième et dernière partie*, fidèle à la tradition de la physique des réseaux, nous modéliserons les *transports urbains*, matrice indispensable des échanges urbains et de ce fait, de l'existence des villes. Nous verrons que s'ils s'organisent autour d'une dualité entre transports publics et privés apparemment indépendants, il est possible de relier l'influence des premiers sur les seconds par une relation simple. Nous étudierons par ailleurs une caractéristique particulière de chacun d'entre eux, en définissant l'accessibilité des transports publics d'une part, en étudiant l'effet des rues à sens unique dans le réseau routier d'autre part. Ce dernier résultat nous permettra de faire à nouveau le lien avec la physique statistique et particulièrement la théorie de la percolation, dont nous mettrons en évidence une nouvelle classe d'universalité.

Nous sommes conscient de mélanger dans ce travail des disciplines très différentes même si, à bien des reprises, les mathématiques nous servent de langage commun. Chaque fois que nous le pourrons, nous en ferons l'interprétation et chercherons à y trouver un sens *politique*. C'est, nous le croyons, le sens que doit avoir la thèse d'un ingénieur des ponts, des eaux et des forêts.

Première partie
Une science des villes?

Introduction

Dans cette thèse, nous nous plaçons dans un champ de recherche singulier par son objet et par ses méthodes : la *science des villes*.

Singulier par son objet parce que, si chaque ville prise individuellement est une réalité sensible dont on peut facilement comprendre la notion, supposer qu'il existe suffisamment de points communs entre plusieurs villes pour fonder une science, par nature universelle, semble *a priori* plus audacieux. Le voyageur toutefois, dans ses pérégrinations urbaines, ne peut qu'être frappé par les similitudes qu'il observe entre les cités de toutes les cultures ou de tous les continents et, pourvu qu'il ait l'âme curieuse et l'esprit aiguisé, ne peut s'empêcher d'en chercher la cause originelle, qu'il pourra trouver, comme Claude Lévi-Strauss, dans le fond commun de la nature humaine :

Mais la vie urbaine offre un étrange contraste. Bien qu'elle représente la forme la plus complexe et la plus raffinée de la civilisation, par l'exceptionnelle concentration humaine qu'elle réalise sur un petit espace et par la durée de son cycle, elle précipite dans son creuset des attitudes inconscientes, chacune infinitésimale mais qui, en raison du nombre d'individus qui les manifestent au même titre et de la même manière, deviennent capables d'engendrer de grands effets. Telle la croissance des villes d'est en ouest et la polarisation du luxe et de la misère selon cette axe, incompréhensible si l'on ne reconnaît ce privilège — ou cette servitude — des villes, à la façon d'un microscope, et grâce au grossissement qui leur est propre, de faire surgir sur la lame de la conscience collective le grouillement microbien de nos ancestrales et toujours vivantes superstitions.

Claude Lévi-Strauss – *Tristes tropiques* (1955) [18]

Ainsi une science des villes se justifie d'abord par les régularités empiriquement observées entre des objets éloignés mais semblables tandis qu'elle se singularise par ses méthodes parce que les villes, peut-être du fait de leur complexité, ont attiré l'attention de disciplines aussi variées que l'économie, l'histoire, la géographie, la sociologie, la physique ou les mathématiques, apportant chacune leurs forces et leurs visions.

Avant de présenter à proprement parler nos travaux de thèse, nous proposons dans cette première partie de revenir sur tout ce qui justifie l'étude des villes comme un phénomène en soi. Cette thèse étant une thèse de physique, nous ne pourrions qu'aborder sommairement, mais nécessairement, les grandes tendances historiques et caractéristiques géographiques des villes (chapitre 1). Plus habitué au calcul, nous nous attarderons davantage sur les tentatives économiques de description des

villes (chapitre 2), qui nous permettront, un peu par symétrie, de poser et de définir notre propre méthode de travail (chapitre 3). Naturellement, nous constaterons que la science des villes est aussi celle d'un système complexe (chapitre 4), justifiant *a posteriori* la place que la physique statistique peut y prendre. Nous comprendrons notamment que les régularités observées dans les villes ne sont pas seulement le fruit de similarités individuelles mais qu'elles peuvent émerger de comportements très différents et aléatoires, à rebours des mots de Lévi-Strauss cités précédemment. Enfin, ayant cerné les limites d'une science des villes, nous pourrons, comme c'est l'usage, chercher une définition précise de son objet en nous posant la question du contour des villes (chapitre 5).

1 - Des premières cités aux villes-mondes

L'Assyrie contient plusieurs grandes villes, mais Babylone est la plus célèbre et la plus forte. C'était là que les rois du pays faisaient leur résidence depuis la destruction de Ninive. Cette ville, située dans une grande plaine, est de forme carrée; chacun de ses côtés a vingt-six stades de long, ce qui fait pour l'enceinte de la place quatre cent quatre-vingts stades. Elle est si magnifique, que nous n'en connaissons pas une qu'on puisse lui comparer.

Hérodote – *Histoires*, livre I

Le monde fortement urbanisé que nous connaissons aujourd'hui est l'aboutissement d'un processus de transition de l'habitat humain commencé il y a plusieurs milliers d'années et dont le point critique — pour reprendre une terminologie de la physique statistique — se situe au début du XXI^e siècle. Comprendre les villes nécessite donc préalablement d'en connaître, au moins sommairement, l'Histoire et les propriétés géographiques contemporaines. C'est l'objet de ce chapitre, qui ébauchera en particulier quelques premières caractéristiques quantitatives de cet objet singulier.

1.1. De la cité-État au tournant urbain

1.1.1. La naissance des villes

Si les conditions exactes dans lesquelles les premières villes apparurent ne sont pas encore parfaitement et universellement établies, il est possible d'en trouver l'origine au Néolithique, c'est-à-dire entre les premières formes de sédentarisation du IX^e millénaire avant notre ère et l'apparition de l'écriture au V^e millénaire [19].

La transition, qualifiée de *révolution néolithique* [20], d'une culture de chasseurs-cueilleurs à une société sédentaire, dont le régime alimentaire reposa d'abord sur la domestication des céréales puis sur celle des animaux favorisa vraisemblablement le regroupement des individus en petits villages, avec un rendement agricole par unité de surface accru par rapport à la période paléolithique. L'augmentation des rendements agricoles encouragea l'émergence de nouveaux métiers pour le faible pourcentage¹ d'individus que le surplus des récoltes collectives était capable de

1. Dans une société où 80% des individus sont agriculteurs, ce qui était encore le cas en France au XIX^e siècle, une personne nourrit 1,25 personnes, ce qui est en fait très peu.

nourrir. Autour de ces métiers artisanaux, militaires et parfois intellectuels, les premières communautés villageoises s'agrandirent jusqu'à prendre les caractéristiques de villes assez imposantes, la ville de Çatal Höyük en Anatolie, au tournant du VIII^e siècle, ayant pu faire vivre jusqu'à dix mille habitants [21].

L'historiographie des premières communautés urbaines retient ainsi l'importance du rôle joué par une forme d'aristocratie — cette petite part de la population qui n'avait pas besoin de se nourrir elle-même — dans la naissance des premières villes. Cette aristocratie se serait accordée le privilège de la pratique religieuse et du pouvoir politico-militaire, qui sont retenues par Lewis Mumford comme les premiers signes de la ville : le palais et temple [19]. Autour de la pratique religieuse et du pouvoir militaire affermis auraient émergé les premiers ensembles politiques et premières civilisations, d'abord sous la forme de *cités-États*. C'est ainsi que Fustel de Coulanges envisage la création des institutions grecques et romaines dans la *Cité antique* [22], la ville étant le cadre de société « optimal » qui permet à Aristote de définir l'homme comme animal politique, littéralement animal civique, animal de la Cité.

Les villes maintinrent leur existence tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge, malgré un déclin relatif au Haut-Moyen-Âge [23]. La vraie révolution urbaine advint quelques siècles plus tard, au moment de la révolution industrielle.

1.1.2. La révolution industrielle

Comme pour beaucoup de phénomènes qui ont façonné le monde moderne, c'est en Angleterre, il faut bien le reconnaître, que les premiers signes d'une révolution urbaine se manifestèrent au XVI^e siècle. Les *enclosures*, qui restreignirent l'accès aux champs à usage collectif, poussèrent les paysans anglais à l'exode rural [24, 25]. La forte présence d'une population extrêmement pauvre et sans emploi dans les villes fut certainement l'une des raisons du développement précoce de la Révolution industrielle en Angleterre, puisqu'elle offrit aux propriétaires d'usine l'accès à une main d'œuvre bon marché et sans ressource [26].

Subséquentement, l'augmentation des rendements agricoles dans les campagnes britanniques d'une part et l'expansion de l'industrie dans les villes de l'autre, permirent à d'autres paysans de rejoindre les villes sans avoir besoin de cultiver eux-mêmes leur terre. Dès le milieu du XIX^e siècle, la population de la Grande-Bretagne était majoritairement urbaine, près de cent ans avant la France.

À notre époque, la majorité de la population mondiale vit en ville [27], une exception à l'échelle de l'Histoire. Les plus grandes villes du monde comptent plusieurs dizaines de millions d'habitants et expriment quelques caractéristiques remarquables, que nous pouvons commencer à esquisser.

1.2. Mégalopoles et modernité

1.2.1. Un monde urbain

Le taux symbolique de 50 % de la population vivant en ville a été atteint selon l'ONU en 2008. Ce taux devrait atteindre 80 % à la fin du siècle [28]. Le début du XXI^e siècle marque donc le milieu du passage, très rapide à l'échelle de l'Histoire humaine, d'une société sans ville à une société urbanisée, changement qualifié par Michael Batty de *grande transition* [29].

Cette concentration inédite de la population humaine sur une surface restreinte (les villes occupent de l'ordre de 1 % des terres émergées) est la conséquence directe d'une révolution énergétique et agricole qui permet à la majorité de la population de ne pas se nourrir elle-même. Alors que Rome était vraisemblablement la première ville de l'Histoire à avoir atteint le million d'habitants il y a deux mille ans, Londres fut la première ville à dépasser les deux millions d'habitants vers 1850. Au XX^e siècle ces records de population urbaine croissent à un rythme exponentiel [30].

Définies par les Nations Unies comme des agglomérations de plus de dix millions d'habitants, trente-quatre mégapoles totalisent aujourd'hui ainsi plus de 12 % de la population mondiale. Avec l'extension de leurs banlieues et couronnes périphériques, ces mégapoles ont elles-mêmes donné naissance aux mégalopoles [31], ensembles urbains s'étendant sur des centaines de kilomètres : la mégalopole américaine, entre Boston et Washington, compte plus de cinquante-cinq millions d'habitants et la mégalopole européenne — concept certes un peu moins robuste — plus de soixante-dix millions.

La rapidité de l'expansion urbaine, plus ou moins maîtrisée — comme on le rappelle souvent par l'exemple de Lagos — est un vaste défi pour les urbanistes et planificateurs et un terrain de recherche majeur pour les études urbaines. Elles nous enjoignent à chercher des méthodes d'analyse communes à une situation dont les conséquences écologiques, sociales et économiques sont considérables.

Dans la mesure où le monde se transforme en un vaste réseau de villes-mondes interconnectées, la géographie urbaine n'est donc plus un champ de recherche anecdotique pour la géographie et l'exception urbaine est devenue la règle. Comprendre comment dans les villes les individus interagissent entre eux et avec l'environnement qui les entoure intéresse la planète dans son ensemble.

1.2.2. Quelques caractéristiques intéressantes

Avant de nous lancer dans une démarche purement quantitative, il est important d'avoir quelques notions et ordres de grandeur des variables urbaines les plus importantes et des relations qui les lient. Nous évoquons ici cinq d'entre elles : la population, l'aire, le produit intérieur brut (PIB), les réseaux et les émissions de gaz à effet de serre.

Population

La population, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir longuement en partie II est sans aucun doute la variable urbaine la plus importante : assez fiable et facile à mesurer, y compris dans le passé — il est possible en France d'obtenir des données de très bonne qualité par tête depuis le XVII^e siècle, par foyer depuis le XIV^e siècle —, la population est aussi un indicateur de premier ordre de beaucoup de caractéristiques urbaines (voir chapitre 6).

À ce sujet, il est notable de remarquer que les villes du monde n'ont pas toutes la même taille, un fait apparemment trivial mais qui disqualifie l'idée d'une *taille optimale* des villes. Il n'existe pas de condition qui devrait mener toutes les villes du monde à converger vers un équilibre — typiquement entre rendements croissants et décroissants — traduit par une taille unique. Au contraire, le fait urbain le plus reconnu et caractérisé est l'idée d'une *inégalité des tailles* des villes, apparemment régulière et universelle et longtemps approximée par la loi de Zipf [32] (voir chapitre 7). La croissance urbaine, pour sa part, a tout aussi longtemps été associée à la loi de Gibrat [33] (voir chapitre 8), un fait également démenti dans les récentes années.

L'étude de la population urbaine a donc subi plusieurs remises en cause récentes. La partie II de ce travail reviendra longuement sur ces problèmes en présentant le nouvel état de l'art.

Aire

L'aire urbaine — la superficie — est la seconde variable la plus importante quand on caractérise les villes. C'est une notion évidemment très dépendante de la définition de la ville considérée (voir *infra* chapitre 5) et très variable selon les villes et les cultures, même à population constante.

En définissant A l'aire de la ville, on peut définir la distance caractéristique de celle-ci par $L = \sqrt{A}$, une grandeur utile à comparer aux autres échelles de distance qui peuvent être rencontrées.

La combinaison de la population P et de l'aire permettent aussi de définir la densité moyenne :

$$\rho = \frac{P}{A}. \quad (1.1)$$

La densité est extrêmement variable selon les cultures et zones géographiques [34] :

- $20\,000 < \rho < 40\,000$ hab/km² dans les villes asiatiques ;
- $4\,000 < \rho < 10\,000$ hab/km² en Europe ;

— $1\,000 < \rho < 4\,000$ hab/km² aux États-Unis.

Ces différences de densité traduisent des façons de penser la ville et de s’y déplacer très différentes, la faible densité des villes américaines étant indissociable de la place qui est y accordée aux voitures. Au sein même des villes, cette densité peut varier : le centre est généralement la zone la plus dense et la densité décroît avec la distance au centre, une réalité bien intégrée dans les modèles économiques (voir *infra* chapitre 2).

Produit intérieur brut

Le produit intérieur brut (PIB) des villes quantifie leur production économique annuelle. C’est une valeur agrégée de premier ordre. On montre que le PIB augmente super-linéairement avec la taille des villes :

$$\text{PIB} \sim P^\beta \text{ avec } \beta > 1, \quad (1.2)$$

le fait que $\beta > 1$ (voir figure 1.1) traduisant l’existence de rendements d’échelles croissants dans les villes et donc leur efficacité économique [35-37].

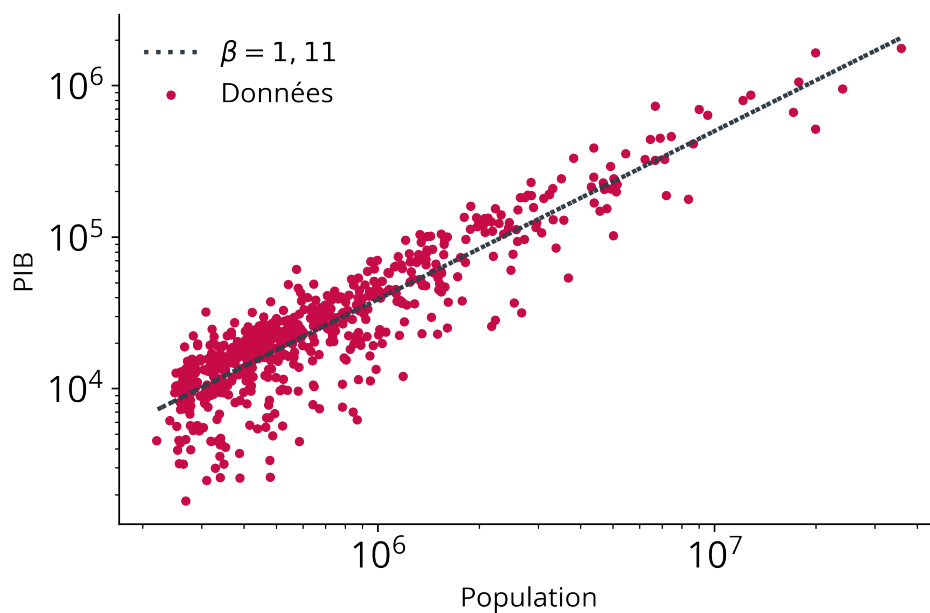


FIGURE 1.1 – Dans les villes, le produit intérieur brut (PIB) augmente super-linéairement avec la population (ici l’exposant est $\beta = 1,11$), traduisant l’existence d’économies d’échelles et de rendements croissants dans les villes (données en 2016 pour 641 *Functional Urban Areas* (FUA) définies par l’OCDE) [38].

Réseaux

Les réseaux urbains, notamment les réseaux de transports (réseau routier et réseaux de transports en commun) ont une importance considérable dans la manière dont les villes se développent, puisqu'au cœur de la théorie économique, les villes se forment par équilibrage entre gain de productivité et coûts de transport. Ils feront l'objet d'un approfondissement substantiel en partie IV.

Il y a plusieurs façons de mesurer la taille d'un réseau dans une ville, ses caractéristiques et son efficacité : sa longueur totale, son nombre de nœuds, sa fréquentation, différentes mesures de centralité ou d'accessibilité (voir par exemple l'annexe C).

On peut retenir ici un résultat en loi d'échelle pour la taille du réseau routier, qui évolue comme [39, 40] :

$$\frac{L_{\text{routier}}}{L} \sim P^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Émissions de gaz à effet de serre

Au XXI^e siècle, le défi que représente le changement climatique et l'importance croissante que prennent les villes, désormais majoritaires dans la production et la population mondiales impliquent de s'intéresser à leurs propres émissions de gaz à effet de serre, émissions liées au transport, à l'habitat et à la production industrielle. La question fondamentale qui sous-tend les émissions de gaz à effet dans les villes est de savoir si les grandes villes sont plus ou moins « vertes » [41, 42], c'est-à-dire si

$$Q_{\text{CO}_2} \sim P^\beta \quad (1.4)$$

avec $\beta > 1$ ou $\beta < 1$. La littérature livre des résultats différents, qui posent les limites d'une part de l'interprétation des données urbaines sans un cadre et des définitions claires des limites des villes (voir chapitre 5) [43], d'autre part des lois d'échelle (voir *infra* 6.2.2).

2 - Un sujet d'économie ancien

Mais en écoutant M. Chalamont, je viens de m'apercevoir que le langage des chiffres a ceci de commun avec le langage des fleurs, on lui fait dire ce que l'on veut. Les chiffres parlent, mais ne crient jamais.

Michel Audiard – *Le Président* (1961), film
d'Henri Verneuil

Quand on songe à la place centrale qu'ont toujours occupée les villes dans le commerce, la production de connaissances et la rencontre des cultures humaines, on ne peut être étonné qu'elles aient été, très tôt, un sujet d'étude pour l'économie, qui se trouve ainsi être la première science des villes.

L'économie urbaine est donc la branche de l'économie, discipline qui étudie et quantifie les échanges de biens et de services entre les Hommes, qui s'intéresse à la question de ces échanges dans les villes. L'économie urbaine peut être rattachée à l'économie spatiale, puisqu'elle n'existe pas hors sol, elle s'attache à un substrat géographique qui, à défaut d'être toujours réel, peut mathématiquement se représenter par une notion d'espace. Nous proposons dans ce chapitre d'étudier quelques-uns des modèles d'économie urbaine les plus classiques, anciens mais dont l'esprit est toujours présent dans la quantification contemporaine des villes.

2.1. Premières représentations

Le premier des biens dont l'économie chercha à comprendre les échanges et la production est le bien agricole. Au XVII^e siècle, les physiocrates fondèrent la science économique sur la production de la terre, la plus importante à leurs yeux. À l'opposé, la ville était impensée dans la physiocratie, voire rejetée [44] :

Les manufactures et le commerce entretenus par les désordres du luxe accumulent les hommes et les richesses dans les grandes villes, s'opposent à l'amélioration des biens, dévastent les campagnes, inspirent du mépris pour l'agriculture, augmentent excessivement les dépenses des particuliers, nuisent au soutien des familles, s'opposent à la propagation des hommes, et affaiblissent l'État.

Jean-Baptiste Robinet – *Dictionnaire universel des sciences morale, économique, politique et diplomatique* (1780) [45]

La ville se construit donc par opposition aux terres agricoles, comme lieu de commerce et de manufactures. Indirectement, c'est aussi le rapport aux terres agricoles qui amène les économistes classiques du XIX^e siècle à établir les premiers

modèles urbains. Sous le prisme d'un agent économique particulier — le propriétaire terrien — Johann Heinrich von Thünen essaie de comprendre la différenciation des terres autour d'une ville centrale, place de marché et d'échanges [46]. En comparant coûts de transport, coûts de production et prix de vente de différents biens agricoles, Von Thünen établit que la production agricole autour des villes se spécialise, donnant naissance à plusieurs anneaux concentriques.

Si le modèle de Von Thünen ne cherche pas à décrire la ville en elle-même mais sa périphérie, l'idée de représenter la ville par le résultat d'un équilibre entre un coût de transport et le prix d'une terre donne naissance à l'approche traditionnelle, et monocentrique, des villes. Néanmoins, les économistes urbains renversent le raisonnement. Il ne s'agit plus d'expliquer pourquoi les individus se sont éloignés des biens agricoles, ce qu'ils laissent à l'analyse historique, mais de comprendre comment, au sein des villes, la population se répartit autour d'un centre, unique, qui regroupe emplois et production. Dans l'économie urbaine, c'est donc moins les biens qui se déplacent que les agents économiques, une réflexion qui ne devint possible qu'au XX^e siècle, quand le ravitaillement des villes était suffisamment garanti et ne posait plus de question. Par construction, ce raisonnement est aussi un raisonnement d'équilibre, la dynamique de formation des villes étant passée sous silence.

2.2. Le modèle monocentrique

2.2.1. Modèle d'Alonso-Muth-Mills

Le modèle monocentrique est la plus simple représentation d'une ville en équilibre. Il suppose un espace homogène et isotrope, autour d'un centre urbain donné, dans lequel se concentrent les emplois. Les conditions sociales qui permettent de poser ce cadre — en supposant que l'approvisionnement ou le ravitaillement des villes n'est plus un problème et que la population est spécialisée dans une activité suffisamment développée pour être qualifiée d'emploi et se concentrer dans un centre réduit dans l'espace — en limitent rapidement la validité théorique au monde développé *post-XIX^e siècle*.

Le modèle le plus connu de ville monocentrique est sans aucun doute le modèle d'Alonso-Muth-Mills (AMM) [47-49]. Le modèle conjecture une ville fermée à population constante et niveau de revenu donné, organisée autour d'un centre-ville ou quartier d'affaires (CBD pour *Central business district*). Chaque travailleur se rend dans le centre-ville pour travailler. Étant donné que les déplacements domicile-travail sont coûteux et augmentent avec la distance au centre, les ménages choisissent, toutes choses égales par ailleurs, de vivre plus près du centre-ville. Mais tout le monde ne peut pas vivre à proximité du centre-ville, de sorte qu'à l'équilibre le prix des logements et la densité de population s'ajustent de façon non-uniforme. Les terrains destinés au logement deviennent plus chers à proximité du centre-ville, ce qui incite les promoteurs à y augmenter la densité de logement au détriment

de leur taille. Les ménages sont alors confrontés à un arbitrage de confort : choisir de vivre dans des logements bien situés mais plus petits et plus chers ou dans des logements plus grands et meilleur marché mais plus éloignés du centre.

Le modèle AMM se transpose aisément mathématiquement. Tous les individus se comportent de la même façon et cherchent à maximiser une fonction d'utilité $U(z, s)$ qui dépend de la surface s qu'ils occupent et de leur reste à vivre z , c'est-à-dire l'argent qu'il leur reste après avoir payé le transport et le loyer. Les contraintes sont :

$$\frac{\partial U}{\partial s} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} > 0. \quad (2.1)$$

et la contrainte budgétaire :

$$Y = z + R(x)s + T(x) \quad (2.2)$$

où Y est le revenu, $R(x)$ la rente foncière (le coût surfacique) à la position x et $T(x)$ le coût de transport de x au centre. Le problème est donc un problème d'optimisation :

$$\max_{z,s} U(z, s) \quad \text{avec} \quad Y = z + T(x) + R(x)s. \quad (2.3)$$

Enfin, la condition d'équilibre de la ville impose $dU/dx = 0$, c'est-à-dire que la fonction d'utilité est indépendante de la position x . En introduisant le multiplicateur de la Lagrange λ devant la contrainte Y , on trouve

$$\begin{cases} \partial_s U + \lambda R(x) = 0 \\ \partial_z U + \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

d'où

$$R(x) = \frac{\partial_s U}{\partial_z U}. \quad (2.5)$$

La condition $dU/dx = 0$ donne alors

$$0 = \partial_z U \left(-s \frac{dR}{dx} - R \frac{ds}{dx} - T'(x) \right) + \partial_s U \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.6)$$

d'où l'on déduit la condition d'Alonso :

$$\boxed{\frac{dR}{dx} = -\frac{T'(x)}{s(x)}}. \quad (2.7)$$

Cette relation, que nous aurons l'occasion de réutiliser, établit un lien entre la courbe spatiale des prix des loyers, le coût des transports et la surface habitable : si un habitant s'éloigne marginalement du centre, le coût de sa consommation de logement diminue d'autant que ses coûts de transport quotidien augmentent.

2.2.2. Fonction offre-loyer

Pour résoudre ce genre de modèle, on introduit la fonction offre-loyer [34] définie par

$$\Psi(x, u) = \left\{ \max_{z,s} \frac{Y - z - T(x)}{s} \mid U(z, s) = u \right\}. \quad (2.8)$$

Cette fonction représente, à la position x , l'offre maximale que le ménage peut proposer pour un logement pour satisfaire son utilité u fixée.

On définit alors la courbe d'indifférence $z = z(u, s)$ au niveau d'utilité u par inversion de la relation $U(z, s) = u$. Cette courbe traduit l'indifférence pour l'agent entre son reste à vivre z et sa surface occupée s à utilité fixée. Les courbes d'indifférence sont supposées convexes.

La maximisation impliquée par la fonction offre-loyer

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{Y - z - T(x)}{s} = 0 \quad (2.9)$$

devient alors

$$-\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{Y - z(u, s) - T(x)}{s} = \Psi(u, x). \quad (2.10)$$

La fonction offre-loyer est donc la tangente de la courbe d'indifférence à utilité donnée. Introduisons maintenant l'utilité indirecte

$$V(R, I) = \max_{z,s} \{U(z, s) \mid I = z + Rs\} \quad (2.11)$$

à revenu déterminé I et rente foncière $R(x)$. Si l'on évalue la fonction V en $R = \Psi(u, x)$ et $I = Y - T(x)$, on doit résoudre le problème d'optimisation :

$$\max_{z,s} U(z, s) \quad \text{avec} \quad z = Y - T(x) - \Psi(u, x)s \quad (2.12)$$

La droite budgétaire $z = Y - T(x) - \Psi(u, x)s$ intersecte plusieurs courbes d'indifférence à utilité fixée u_1, u_2, \dots . Elle est également tangente à la courbe d'utilité u d'après l'équation 2.10. La convexité des courbes d'indifférence et les conditions 2.1 permettent de montrer que pour toute courbe d'indifférence utilité u_1 intersectée par la contrainte budgétaire, $u_1 \leq u$ et donc que

$$V(\Psi(u, v), Y - T(x)) = u. \quad (2.13)$$

Ainsi, l'utilité maximale atteignable au loyer $\Psi(u, x)$ est u au point (\hat{s}, \hat{z}) .

2.2.3. Résidence optimale

Le théorème de l'enveloppe donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial R} &= \frac{\partial U}{\partial R} \Big|_{(s,z)=(\hat{s},\hat{z})} \\ &= \frac{\partial U}{\partial z} \left(-R \frac{\partial s}{\partial R} - s \right) + \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial R} \\ &= -\hat{s} \frac{\partial U}{\partial z} < 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

d'après l'équation 2.5. L'utilité indirecte est donc une fonction décroissante de R . Soit x^* un lieu de résidence optimal d'utilité maximale u^* , alors par définition :

$$\begin{cases} u^* = V(R(x^*), Y - T(x^*)) \\ u^* \geq V(R(x), Y - T(x)) \quad \forall x \end{cases} \quad (2.15)$$

d'où l'on déduit

$$R(x^*) = \Psi(x^*, u^*). \quad (2.16)$$

Comme V est une fonction décroissante de R , on a aussi :

$$R(x) \geq \Psi(x, u^*) \quad \forall x. \quad (2.17)$$

Les équations 2.16 et 2.17 définissent l'équilibre dans la ville : pour le ménage représentatif, la fonction offre-loyer est égale au loyer à la résidence optimale et le loyer est supérieur ou égal à la fonction offre-loyer en-dehors.

Lorsque la ville est en équilibre cependant, tous les ménages étant équivalents, ils maximisent tous une utilité u^* quelle que soit leur position. L'égalité entre loyer et fonction offre-loyer est donc vraie en tout point :

$$\boxed{R(x) = \Psi(x, u^*) \quad \text{à l'intérieur de la ville.}} \quad (2.18)$$

En tout point, le loyer à l'équilibre est égal à l'offre maximal que les ménages peuvent proposer pour conserver leur utilité.

2.2.4. Exemple simple

Les résultats précédents sont indépendants de la forme concrète prise par la fonction d'utilité. Pour obtenir un profil des loyers et de la densité dans la ville, il est néanmoins nécessaire d'introduire une forme explicite pour la fonction d'utilité. Supposons une ville monocentrique bidimensionnelle isotrope et une utilité de la forme :

$$U(z, s) = \alpha \log(z) + \beta \log(s) \quad (2.19)$$

quitte à renormaliser par $\alpha + \beta = 1$. Supposons également que le coût des transports est linéaire en la distance parcourue : $T(r) = tr$.

La courbe d'indifférence à utilité u est donnée par :

$$z(u, s) = e^{u/\alpha} e^{-\beta/\alpha}. \quad (2.20)$$

Pour calculer la fonction offre-loyer, on maximise :

$$\frac{Y - z(u, s) - T(r)}{s} \quad (2.21)$$

à l'utilité maximale u^* , ce qui implique une surface consommée de la forme :

$$s(r) = \alpha^{-\alpha/\beta} e^{u^*/\beta} (Y - tr)^{-\alpha/\beta}. \quad (2.22)$$

On en déduit :

$$R(r) = \Psi(r, u^*) = \beta \alpha^{-\alpha/\beta} e^{-u^*/\beta} (Y - tr)^{1/\beta}. \quad (2.23)$$

La ville est de taille finie r_f et population constante P . En-dehors de la ville, on suppose que le prix de la terre est le prix de la terre agricole $R(x) = R_A \simeq 0$. Ces conditions imposent :

$$\int_0^{r_f} \frac{1}{s(r)} 2\pi r dr = P \quad (2.24)$$

et

$$R(r_f) = R_A, \quad (2.25)$$

ce qui permet d'éliminer l'inconnue u^* . Il en résulte une courbe de loyers

$$R(r) = \frac{N\beta\alpha^2}{2\pi Y^{2+\alpha/\beta} B(1, \alpha/\beta)} (Y - tr)^{1/\beta} \quad (2.26)$$

où B est la fonction bêta. La densité est

$$\rho(r) = (Y - tr)^{\alpha/\beta}. \quad (2.27)$$

Dans ce cas, le prix du loyer décroît avec la distance au centre, de même que la densité (ce que compense naturellement une augmentation de la surface consommée). Une autre choix de fonction d'utilité aurait néanmoins conduit à des formes différentes, un problème d'autant plus important que les choix de fonctions d'utilité ne se fondent généralement pas sur des données réelles (voir *infra* 3.1).

2.2.5. Interprétations et extensions

Le modèle monocentrique permet de faire quelques prédictions quantitatives. La plus directe, et la plus simple, est donnée par la condition 2.7 qui prédit que la décroissance des prix de l'immobilier est exactement compensée par le rapport entre le coût marginal du transport $T'(x)$ et la surface consommée $s(x)$, c'est-à-dire que le surcoût de transport équilibre exactement la baisse de loyer à mesure que l'on s'éloigne du centre-ville. C'est une prédiction essentiellement locale. Au prix de quelques efforts supplémentaires [49], il est également possible de faire quelques prédictions d'agrégats. Gardons pour le moment un peu d'optimisme et ne confrontons pas tout de suite ces prédictions à la réalité.

Il existe de multiples variations autour du modèle d'Alonso-Muth-Mills et de la description monocentrique. Ces modèles alternatifs peuvent par exemple supposer plusieurs modes de transport différents (voir par exemple chapitre 12) ou l'existence d'agents hétérogènes (voir chapitre 10).

2.3. Centre et sous-centres

2.3.1. Une monocentricité illusoire

S'il correspond à la représentation la plus intuitive et la plus naïve d'une ville, le modèle monocentrique n'est pas, ou n'est plus, illustratif des réalités urbaines. L'exode rural, l'expansion démographique et l'étalement urbain, commencés en Occident avant de se mondialiser, ont provoqué au cours du temps le rapprochement voire la fusion d'anciens centres historiques dans des conurbations de taille supérieure, voire dans de gigantesques mégalopoles. Sans rentrer tout de suite dans le détail que pose la légitime question de la délimitation urbaine (voir chapitre 5), il est clair qu'on ne peut plus parler de monocentricité quand une partie des habitants de l'aire urbaine ne se déplace au centre géographique et historique de l'agglomération qu'à de faibles occasions, en tout cas pas quotidiennement.

2.3.2. Mesurer la polycentricité

La polycentricité d'une ville équivaut à l'existence de sous-centres, géographiquement éloignés, du moins disjoints, du centre principal et qui sont localement des lieux d'activité plus denses : commerces, emplois, services publics.

La recherche de ces sous-centres est un problème classique de l'économie urbaine [50-52]. Il s'agit d'identifier à partir de données réelles les lieux qui sont des maxima locaux d'activité, les *points chauds*. Au premier ordre, une façon de trouver de tels lieux relativement simple, quoiqu'arbitraire, consiste à définir un seuil minimal d'activité au-delà duquel, à la résolution considérée, qui dépend de la source de données, l'activité sera considérée comme suffisante pour définir un point chaud. Si la ville est découpée selon une grille de points i de densité $\rho(i)$, un seuil minimal naturel pour une telle définition est alors la valeur moyenne de la densité de la ville $m = \overline{\rho(i)}$.

Une méthode plus raffinée, et non-paramétrique, point sur lequel nous reviendrons en section 3.2, a été proposée par Louail *et al.* [53]. La ville est toujours découpée selon un maillage défini par les données disponibles, idéalement l'échelle de densité la plus fine possible. En chaque point i de la grille, la densité $\rho(i)$ est donc connue. La quantité $m = \overline{\rho(i)}$ sert de limite inférieure à la définition des points chauds : en-deçà, la définition n'aurait pas de sens puisqu'on considérerait comme centraux des quartiers moins actifs que la moyenne. En classant tous les points i par densité croissante $\rho(1) < \rho(2) < \dots < \rho(n)$, il est possible de construire la courbe de Lorenz qui associe à la valeur $F = i/n$ sur l'axe des abscisses l'ordonnée

$$L(i) = \frac{\sum_{j=1}^i \rho(j)}{\sum_{j=1}^n \rho(j)}. \quad (2.28)$$

La courbe de Lorenz est très utile pour mesurer les inégalités de répartition et sert de base à l'indice de Gini définie comme deux fois l'aire entre la courbe de Lorenz et la première bissectrice. Le cas de l'égalité stricte ($\rho(i) = \rho(j) \forall i, j$) cor-

respond à une valeur de Gini de 0 tandis que l'inégalité absolue ($\rho(n) = \sum_{j=1}^n \rho(j)$) donne un indice de Gini de 1.

Louail *et al.* proposent de définir le point F_{LOUBAR} comme le point d'intersection entre l'axe horizontal et la tangente au point $F = 1$ (voir figure 2.1). Plus l'inégalité de répartition entre les points est forte, plus F_{LOUBAR} est proche de 1. Par ailleurs,

$$F_{\text{LOUBAR}} = 1 - \frac{m}{\rho(n)}. \quad (2.29)$$

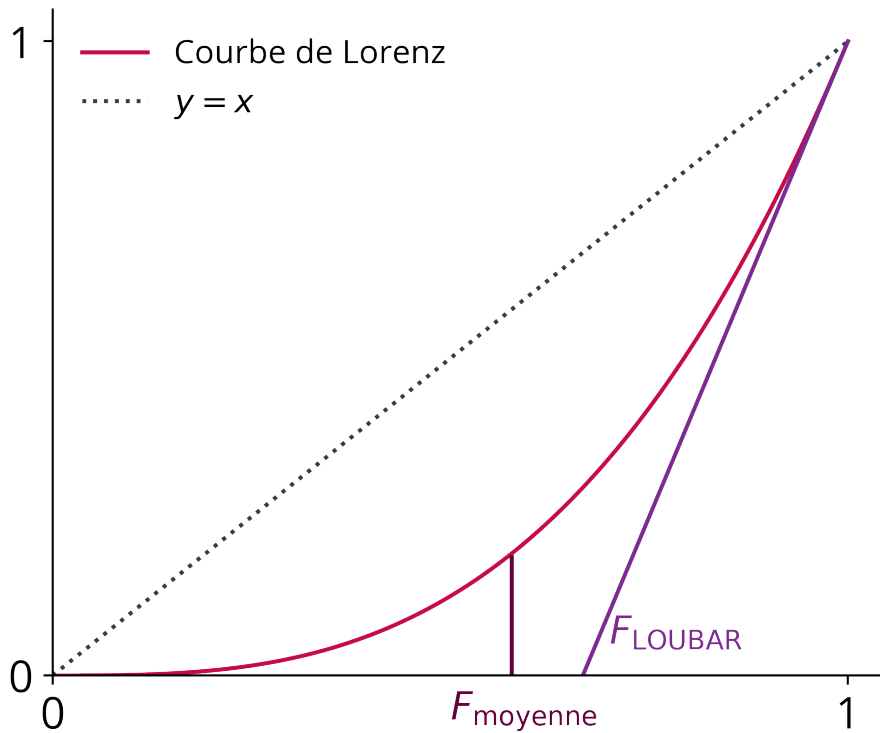


FIGURE 2.1 – Courbe de Lorenz et définition du point F_{LOUBAR} comme le point d'intersection entre l'axe horizontal et la tangente au point $F = 1$. Un seuil convenable de définition des centres d'activité doit se trouver entre la moyenne définie par le point F_{moyenne} et F_{LOUBAR} .

Le critère *LOUBAR* permet ainsi de prendre en compte la moyenne des densités et leur dispersion. Les auteurs montrent que le seuil *LOUBAR* est une borne supérieure raisonnable des points chauds et qu'un seuil de définition convenable doit se trouver entre la moyenne et le point *LOUBAR*. Avec les deux méthodes, en étudiant une trentaine de villes espagnoles, les auteurs montrent que le nombre de points chauds h évolue sous-linéairement avec la population selon la loi d'échelle

$$h \sim P^\beta \quad (2.30)$$

avec $\beta < 1$: le nombre de sous-centres augmente sous-linéairement avec la population. Ce résultat empirique mérite de revenir sur la stabilité du modèle monocentrique. C'est l'objectif du modèle de Fujita-Ogawa.

2.3.3. Modèle de Fujita-Ogawa

Le modèle de Fujita-Ogawa [54] discute la stabilité de l'équilibre monocentrique et les choix d'installation des individus et des entreprises. Il permet de décrire théoriquement l'émergence de sous-centres urbains.

Les individus cherchent à maximiser leur utilité $U(Z, S)$ qui croît avec la surface habitable S et leur revenu disponible

$$Z = W(y) - R(x) - T(x, y) \quad (2.31)$$

où $W(y)$ est le revenu offert par l'entreprise installée en y , $R(x)$ est le loyer de résidence en x et $T(x, y)$ le coût de transport de x à y . Fujita et Ogawa font l'hypothèse de coûts de déplacement variant linéairement avec la distance c'est-à-dire

$$T(x, y) = td(x, y) \quad (2.32)$$

où $d(x, y)$ est la distance euclidienne de x à y . De même, les entreprises cherchent à maximiser leur profit

$$Pi(y) = F(y) - R(y) - L(y)W(y) \quad (2.33)$$

où $R(y)$ est le loyer en y , $L(y)$ l'effectif salarié de l'entreprise et $F(y)$ est une fonction traduisant le bénéfice généré à la position y :

$$F(y) = \int K(y - y')b(y')dy' \quad (2.34)$$

avec $b(y')$ la densité de firmes en y' et $K(y)$ un noyau traduisant le bénéfice à être installé dans une zone à forte densité commerciale et donc d'émulation. Le choix standard pour le noyau est $K(y) = ke^{-\alpha|y|}$.

À l'équilibre, particuliers et entreprises adaptent donc leur lieu de résidence ou d'installation de sorte à maximiser leur utilité ou leur profit. En ajoutant plusieurs contraintes de normalisation de densité et d'homogénéité, on se rend compte que le modèle n'est pas solvable. Il n'est donc pas possible de prévoir la répartition des emplois et des résidences dans ce modèle simple unidimensionnel. En revanche, Fujita et Ogawa ont pu discuter de la *stabilité* autour d'un équilibre monocentrique.

En partant d'une situation initiale monocentrique avec un centre d'affaires entouré par des zones résidentielles, on peut montrer qu'il existe une condition de stabilité un peu technique mais qui se traduit en ordre de grandeur par

$$\boxed{\frac{t}{k} < \alpha.} \quad (2.35)$$

Ainsi, l'équilibre monocentrique est stable si le coût de transport est plus petit que la distance d'interaction typique entre les entreprises. Des coûts de transports élevés brisent cet équilibre par la volonté des individus de travailler près de chez eux. La ville devient polycentrique.

2.3.4. Prendre en compte la congestion automobile

Le modèle de Fujita-Ogawa fait une hypothèse de mobilité très simple, celle de coûts de déplacement variant linéairement avec la distance. Dans le cas de déplacements purement automobiles, cela revient à négliger le trafic automobile dans les déplacements, c'est-à-dire la rétroaction du nombre de déplacements sur le temps de déplacement. Or, en heures de pointe, le temps de déplacement peut jusqu'à doubler du fait de la congestion automobile [55]. C'est pourquoi il paraît intéressant d'étudier les effets des embouteillages sur les comportements individuels et donc sur l'organisation spatiale globale des agglomérations, le coût de déplacement de chaque agent devenant directement dépendant du comportement des autres individus. Conformément aux prédictions de stabilité du modèle de Fujita-Ogawa, l'augmentation du temps (et donc du coût) de déplacement de chacun doit favoriser une brisure de l'équilibre monocentrique au profit de nouveaux centres. C'est ce qu'ont essayé de comprendre Louf et Barthélémy [56, 57].

Pour étudier l'émergence de nouveaux centres d'activité économique, on fait l'hypothèse d'une ville comportant N centres potentiels fixes répartis aléatoirement dans l'aire urbaine constante d'une agglomération à population constante. Chaque centre j offre un salaire $w(j) = s\eta_j$ où η_j est une variable aléatoire, qui traduit l'attrait de ce centre économique¹. η suit une loi uniforme dans $[0, 1]$ et s traduit la valeur typique du salaire dans la ville. Le coût de transport d'un individu habitant à une position i et travaillant en j s'écrit sous la forme d'un coût généralisé

$$T(i, j) = v \frac{d(i, j)}{v} \left(1 + \left(\frac{T(j)}{c} \right)^\mu \right) \quad (2.36)$$

où v est la vitesse de déplacement, V la *valeur du temps*² et où l'on a introduit une correction $\left(\frac{T(j)}{c} \right)^\mu$ par rapport à l'analyse à trafic nul. $T(j)$ représente le trafic entrant (le nombre d'employés) au centre j , c'est-à-dire que l'on considère qu'un nouvel employé du centre j interagit avec tous les employés du centre j et personne d'autre; c traduit la capacité du réseau d'infrastructures routières et μ est un exposant qui décrit la sensibilité du réseau à la congestion [58]. Comme empiriquement, le retard dû au trafic automobile dans les grandes agglomérations est inférieure à 100 %, $T/c < 1$ et la sensibilité diminue quand μ augmente, le trafic devenant négligeable à μ infini.

1. L'idée de remplacer la complexité des critères d'attrait des bassins d'emploi par une variable aléatoire est une idée centrale de la physique statistique.

2. Il est naturel de penser que le temps a une valeur économique convertible en coût financier, même si l'expression de cette relation est très subjective et fera l'objet d'une analyse plus approfondie *infra* en 10.1.2.

Sous ces hypothèses, chaque individu habitant en i choisit le centre d'emploi j qui maximise la quantité

$$Z_{ij} = s \eta_j - v \frac{d(i,j)}{v} \left(1 + \left(\frac{T(j)}{c} \right)^\mu \right). \quad (2.37)$$

Il existe plusieurs méthodes pour trouver l'équilibre de la ville. Ici, il est fait le choix de ne pas réactualiser systématiquement la décision de tous les individus en fonction de celles des autres. Les individus choisissent leur lieu de travail dans un ordre aléatoire et ne changent ensuite plus d'emploi, les suivants devant s'adapter aux choix des premiers.

2.3.5. Transition polycentrique

En partant d'une petite ville, le trafic est faible et le monocentrisme stable. Tous les individus vont travailler vers le centre 1 qui offre le salaire le plus élevé et si l'on note P la population de la ville, $T(1) = P$ et $T(i > 1) = 0$. Un nouveau centre apparaît dès lors que :

$$\exists j, \left(s \eta_j - v \frac{d(i,j)}{v} \right) > \left(s \eta_1 - v \frac{d(i,1)}{v} \left(1 + \left(\frac{P}{c} \right)^\mu \right) \right), \quad (2.38)$$

c'est-à-dire dès lors qu'il est plus avantageux pour un individu de travailler pour un salaire plus faible mais à un endroit qui lui évite des temps de déplacement allongés par la congestion.

Si l'on suppose $d(1,j) \sim d(i,j) \sim L$, en remarquant qu'en moyenne pour une loi uniforme $\overline{\eta_1 - \eta_2} = 1/N$, on déduit qu'il existe une population critique à partir de laquelle émerge un second centre :

$$P^* = c \left(\frac{sv}{LN} \right)^{1/\mu}. \quad (2.39)$$

En continuant ce raisonnement appliqué à plusieurs centres, on peut montrer que le nombre de centres actifs s'échelonne comme :

$$h \sim \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} \quad (2.40)$$

soit de manière sous-linéaire par rapport à la population.

Ainsi, le trafic automobile, par le rallongement des temps de déplacement individuels, déstabilise l'équilibre monocentrique des villes au profit d'une transition polycentrique. Ce résultat conceptuellement très important montre comment l'organisation spatiale et économique des villes peut se structurer autour des dynamiques de déplacements individuels, un point qui met en lumière l'importance des systèmes de transport dans les dynamiques urbaines.

2.4. Des modèles explicatifs ?

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques modèles historiques et incontournables de l'économie urbaine. Ces modèles s'inscrivent dans une tradition néoclassique, héritière des travaux d'Alfred Marshall [59]. Ils fournissent une approche élégante, très quantitative, capables de prédictions précises pour un nombre somme toute assez restreint de paramètres. Bien qu'anciens, ces modèles restent donc incontournables dans la littérature économique et ont de nombreux mérites.

Le premier d'entre eux est sans doute d'exister et par là d'offrir une représentation intellectuellement cohérente, satisfaisante et rationnelle des dynamiques urbaines. De façon générale, les modèles d'économie urbaine permettent d'identifier des mécanismes d'action-réaction, de dépendance entre des entités, qui fournissent un cadre théorique confortable pour la recherche. Ils identifient des paramètres : le revenu, le prix immobilier, les temps de déplacement, qui sont essentiels dans n'importe quelle appréhension des villes et qui n'apparaissent aujourd'hui comme des évidences des sciences urbaines que parce qu'ils ont été longtemps pris en compte par les économistes.

En tant que base commune à la très vaste communauté économique, ils sont aussi un point fixe de la recherche autour duquel de nouveaux modèles peuvent se développer avec plus de légitimité. Les modèles classiques d'économie urbaine forment un langage qu'il est nécessaire de comprendre et de connaître pour étudier les villes dans une communauté scientifique déjà existante.

À plusieurs reprises, lorsque viendra le temps de présenter nos travaux, nous ferons d'ailleurs appel à des résultats ou des méthodes venant de l'économie, même si nous les exprimerons d'une façon peut-être différente, plus accessible aux scientifiques moins familiers des codes de la littérature économique.

Pourtant, nous avons la prétention de penser qu'ils ne sont pas suffisants pour établir les fondements d'une science des villes. Nous avons déjà évoqué quelques limites — et notamment la stabilité ou la validité empirique — d'un modèle comme le modèle d'Alonso-Muth-Mills. De façon générale, les modèles économiques reposent sur des hypothèses si fortes qu'elles en deviennent axiomatiques et manquent cruellement de confirmation empirique [60].

Alors que nous nous apprêtons à en faire une critique plus détaillée, ou du moins ou plus épistémologique, reconnaissons qu'il est nécessaire de connaître les approches d'économie urbaine et d'en comprendre les hypothèses pour faire développer et croître une science des villes.

3 - Une question de méthode

*Seigneur, tant de prudence entraîne trop de soin :
Je ne sais point prévoir les malheurs de si loin.*

Racine – *Andromaque* (1667)

Si nous nous permettons, en tant que physicien, de pénétrer un domaine — celui de l'économie urbaine — qui n'est pas le nôtre, et dans lequel d'ailleurs les économistes sont loin d'être les seuls, c'est aussi parce que nous y identifions des manques méthodologiques qui sautent peut-être plus à nos yeux qu'à ceux d'un autre. Face à ces manques, nous voulons proposer une approche nouvelle, dont les résultats sont, nous le pensons, convaincants et peuvent mériter l'attention. Pour comprendre l'intérêt effectif de l'apport du physicien, il est donc nécessaire de revenir, de la façon la plus exhaustive possible, sur les limites de l'économie urbaine dans la compréhension des villes. Ce travail critique nous permettra, et c'est l'objet de ce chapitre, d'esquisser quelques méthodes de travail et principes que nous nous efforcerons ensuite de respecter dans nos propres travaux.

3.1. Limites de l'économie urbaine

3.1.1. Un exemple

Nous proposons de questionner l'approche de l'économie urbaine néoclassique à travers un exemple précis : un modèle de la structure interne de la ville de Berlin qui rend compte qualitativement et quantitativement des effets de la séparation de la ville due à la construction du mur de Berlin en 1961 ainsi que des effets de la réunification entamée en 1989 [61].

Le travail est empirique : à partir de données de transport, de prix, de densité de population et d'emploi en 1936 (avant séparation), en 1986 (pendant la séparation) et en 2006 (après réunification), les auteurs construisent un modèle contrefactuel de la ville qui en reproduit les évolutions. En se concentrant sur Berlin-Ouest (la description de Berlin-Est n'étant pas soumise aux lois du marché par hypothèse), les auteurs montrent comment la monocentricité de Berlin, établie en 1936 dans le quartier de *Mitte*, qui fut plus tard rattaché à Berlin-Est, s'est déplacée vers l'Ouest avec la construction du mur, les quartiers proches du mur perdant de leur valeur immobilière.

L'approche est à la fois originale et représentative de la théorie économique urbaine : en supposant la ville de Berlin en un point d'équilibre en 1936 caractérisé par la maximisation d'utilité de ménages représentatifs et la maximisation de profits d'entreprises, les auteurs, à partir de données extrêmement précises et

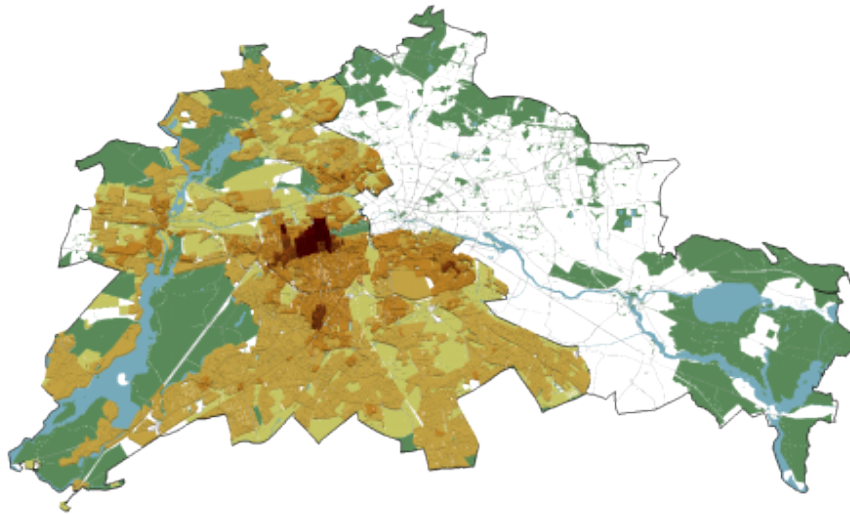


FIGURE 3.1 – Représentation des prix de l’immobilier à Berlin-Ouest en 1986 [61].

localisées, établissent pour chaque micro-quartier berlinois¹ une valeur de qualité de résidence et de production. Autrement dit, les auteurs rétro-calculent en 1936 une représentation numérique de la valeur intrinsèque de chaque quartier (accès à l’eau, qualité du lieu, etc.) qui, en l’équilibre du modèle, reproduit les données observées d’emploi et de population.

Les auteurs modélisent ensuite la séparation de Berlin pendant la guerre froide par un choc exogène qui rend les coûts d’échange entre les deux parties de la ville infinis. En gardant constantes les aménités locales précédemment calculées (à leur niveau de 1936), ils construisent un contrefactuel par simulation du nouvel équilibre atteint à Berlin-Ouest lorsque les coûts Ouest-Est deviennent infinis. Ils montrent d’abord que leur modèle reproduit des flux de déplacement gravitationnels, observés empiriquement, puis qualitativement et quantitativement que leur contrefactuel reproduit la tendance observée d’un déplacement du centre de Berlin vers l’Ouest, les quartiers les plus proches de l’ancien centre *Mitte* subissant les pertes de valeur immobilière les plus importantes. Leur principal résultat empirique est une bonne capacité prédictive de l’évolution des prix de l’immobilier dans la zone de Berlin-Ouest située entre 750 m et 1 250 m de l’ancien centre. Ils prédisent une baisse des prix entre 1936 et 1986 de 57 % dans la zone contre 55 % en réalité.

De même, pour simuler le processus de réunification, les auteurs relâchent la contrainte de coût infini entre 1986 et 2006 et calculent le nouvel équilibre atteint. Dans la zone de Berlin-Ouest située entre 750 m et 1 250 m de l’ancien centre, ils prédisent une hausse des prix entre 1986 et 2006 de 44 % contre 48 % en réalité.

1. 15 000 blocs de cinq hectares.

Cet article a donc le grand mérite de fournir simultanément un modèle robuste, qui combine tous les éléments de l'économie urbaine, une analyse de données de bonne qualité et un résultat prédictif non négligeable. Il n'en reste pas moins qu'en synthétisant et illustrant magistralement le succès de l'économie urbaine, il en sublime également les limites. Nous en retiendrons ici quatre, toutes présentes dans l'article : les notions d'équilibre, d'interactions, de rationalité et d'universalité.

3.1.2. Équilibre

Qu'est-ce que l'équilibre ? À cette question complexe, Richard Feynman fait une réponse simple : l'équilibre a lieu « *when all the fast things have happened but the slow things have not* » [62]. La phrase du physicien est à mettre en regard du fameux mot de John Keynes : « *In the long run, we are all dead.* » [63]

Pour être à l'équilibre il faut donc attendre, mais pas trop. En particulier, l'équilibre dépend du problème considéré et de son échelle de temps caractéristique. Lorsqu'on étudie la fonte d'un glaçon dans un verre d'eau, ce n'est pas le temps de relaxation du verre, qui nous intéresse mais celui de la fonte de la glace. Il sera donc facile de définir, pour l'expérience considérée, l'équilibre comme le moment où la glace a fondu.

Dans les systèmes sociaux ou économiques, les villes en particulier, de multiples échelles de temps coexistent et s'imbriquent — de la mobilité quotidienne aux dynamiques d'infrastructure — et il est moins aisé de définir une échelle de temps caractéristique de l'équilibre puisqu'il n'y a pas de moment à partir duquel plus rien ne se passe. Que faire ?

Deux approches sont possibles, qui sont deux lectures de la phrase de Keynes antagonistes. Reprenons-la dans son contexte :

The long run is a misleading guide to current affairs. In the long run we are all dead. Economists set themselves too easy, too useless a task if in tempestuous seasons they can only tell us that when the storm is past the ocean is flat again.

John Maynard Keynes – *A Tract on Monetary Reform* (1923) [63]

Si l'on interprète Keynes comme une forme d'incitation à l'impatience, à l'idée que l'économiste n'a pas le temps d'attendre, on peut tomber dans l'approche choisie par l'économie néoclassique : l'équilibre n'est pas repoussé à un temps très long, il est instantané, permanent. À chaque temps, les agents sont en situation d'équilibre et le temps est évacué des problèmes économiques : en fait, bien souvent, le temps et la dynamique n'existent pas.

Dans l'analyse de l'évolution des prix immobiliers berlinois, les auteurs bâtissent un modèle contrefactuel en trois étapes. En 1936, il y a équilibre. Entre 1936 et 1986, un choc, la construction du mur de Berlin, change les valeurs hyperparamétriques du modèle et le font évoluer de son équilibre de 1936 vers un nouvel équilibre. Comme leur système dynamique admet plusieurs équilibres possibles, ils

choisissent le plus proche de l'ancien. Ils ne posent d'ailleurs pas la question de la stabilité, comme ils devraient le faire. Ainsi, en 1986, Berlin est dans un nouvel équilibre. Avec la chute du mur, les valeurs des hyperparamètres changent à nouveau et le système évolue vers un nouvel équilibre, celui de 2006. Il y a trois états d'équilibre : 1936, 1986 et 2006 avec leurs niveaux de prix correspondants.

Mais le temps n'a pas d'importance : ce n'est pas la durée entre deux équilibres qui compte mais le choc exogène de la construction du mur. Si les auteurs avaient choisi l'année 1966 pour représenter l'état *Berlin séparé*, ils auraient trouvé les mêmes valeurs d'équilibre. Dans leur cas, l'hypothèse n'est pas déraisonnable : comme ils le montrent empiriquement, le double choc de la guerre et de la construction du mur a été tellement important que l'essentiel de la variation des prix est absorbé entre 1936 et 1966, avec une variation beaucoup plus faible entre 1966 et 1986. Le bouleversement de la guerre et de la division de la ville furent tellement forts qu'ils introduisent une échelle de temps très brève au-delà de laquelle la notion d'équilibre est pertinente. C'est sans doute ce qui fait le grand succès et la qualité de cet article, puisque, pour une fois, l'hypothèse d'équilibre y est raisonnable. Mais en même temps, les conditions très particulières du cas étudié le rendent peu généralisable et affaiblissent l'idée que le raisonnement soit transposable à d'autres lieux ou d'autres époques.

À l'inverse, le physicien qui lit Keynes aurait tendance à le prendre au jeu : oui, l'équilibre n'a jamais lieu. En physique des systèmes désordonnés, on peut montrer que dans le pire des cas, le temps de relaxation évolue comme l'exponentielle du nombre d'agents considérés [64] :

$$\tau_{rel} \sim e^N, \quad (3.1)$$

ce qui rend l'équilibre inatteignable dans certaines conditions. Nous aurons l'occasion de montrer plus tard quantitativement, dans l'étude des dynamiques de population, comment l'équilibre migratoire n'est jamais atteint aux échelles de temps humaines. Bref, qu'en règle générale et sauf à quelques situations exceptionnelles comme les chocs subis par Berlin au XX^e siècle, les villes doivent être considérées comme des systèmes hors-équilibre.

3.1.3. Rationalité

L'un des axiomes fondamentaux de l'économie classique est de considérer les agents comme rationnels, c'est-à-dire que les individus comme les entreprises font leurs choix et agissent en maximisant une fonction d'utilité ou de profit. Cette maximisation suppose dans certains cas une omniscience : la capacité à estimer optimalement le choix des autres agents et une connaissance de l'avenir proche de la prescience.

Évidemment, cette théorie a des limites, bien connues des économistes eux-mêmes. On ne peut pas attendre des agents qu'ils résolvent spontanément des équations de Bellman ou, dans le cas précis de la dynamique berlinoise qu'ils utilisent les fonctions max-stables :

Each worker chooses the bilateral commute that offers her the maximum utility, where the maximum of Fréchet distributed random variables is itself Fréchet distributed [61].

L'hypothèse de rationalité est d'ailleurs aussi déroutante dans l'idée d'agents maximisateurs que dans le choix de la forme des fonctions d'utilité, choisies plutôt par commodité mathématique. Le choix classique d'une fonction de consommation ou de production sous la forme d'une fonction de Cobb-Douglas $Y = AL^\beta K^\alpha$ est d'ailleurs de plus en plus critiqué, pour ne pas dire incorrect [65].

Certes, l'abstraction des modèles comme celui d'Alonso-Muth-Mills permettent d'établir des résultats généraux indépendants de la forme exacte de la fonction d'utilité (la condition de l'équation 2.7 est vraie dans les seules conditions 2.1). Néanmoins, la résolution exacte du modèle et l'établissement des profils de densité dépend des choix exacts de la forme fonctionnelle, ce qui en relativise la portée prédictive.

Depuis Herbert Simon [66], l'économie s'intéresse aux effets concrets de la rationalité limitée, ce qu'on appelle l'économie comportementale. Ces discussions sont vivantes au sein de l'économie moderne et nous n'avons pas la prétention d'en être spécialiste. Retenons que dans les modèles d'économie urbaine, l'approche reste classique et fidèle à la théorie du choix rationnel. Nous verrons plus tard comment la physique statistique permet de façon détournée d'éviter le débat, en systématisant le recours aux variables aléatoires.

3.1.4. Interactions

L'économie fait généralement l'hypothèse d'un agent unique représentatif de tous les agents ou, lorsqu'on souhaite étudier des effets de différenciation (voir *infra* en 10.1), d'agents hétérogènes mais en nombre très petit devant le nombre total d'agents.

Le modèle de l'agent représentatif, établi dès la fin du XIX^e siècle, consiste à agréger en un tout unique des agents différents. C'est une forme de linéarisation extrême des problèmes économiques, qui néglige toute forme d'interactions entre agents et toute corrélation entre eux. À l'encontre des méthodes des systèmes complexes, synthétisée par Philip Warren Anderson dans le titre de son article *More is different* [67], les économistes commettent par l'agent représentatif un sophisme de composition, c'est-à-dire qu'ils appliquent à un tout la propriété de ses parties, écueil pourtant évité par les sociologues urbains dès les années 70 [68].

Loin d'être anecdotique, cette faute méthodologique est indissociable de la représentation de la main d'invisible d'Adam Smith :

[Every individual] intends only his own gain, and he is in this, as in many other cases, led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. Nor is it always the worse for the society that it was not part of it. By pursuing his own interest he frequently promotes that of the society more effectually than when he really

intends to promote it.

Adam Smith – *The Wealth of Nations : An inquiry into the nature and causes of the Wealth of Nations* (1776) [69]

L'agent représentatif transpose donc l'idée qu'une optimisation locale et individuelle des intérêts conduit à un optimum global par sommation : la somme des mieux est un mieux. L'idée, trivialement fausse comme le démontre n'importe quel système non linéaire ou l'exemple connu de la *tragédie des communs* [70], ne cesse pourtant d'abreuver l'économie moderne, dans laquelle se retrouve pleinement l'économie urbaine.

3.1.5. Universalité

L'universalité est la capacité d'un modèle à expliquer des phénomènes en différents lieux et différents endroits. L'universalité est intrinsèquement liée à la capacité prédictive d'un modèle, à la façon dont il peut anticiper des résultats ou généraliser une situation à une autre.

Un bon modèle repose donc sur un cadre théorique suffisamment simple et étayé par des données pour expliquer ou anticiper d'autres données en un autre point, un autre temps. Dans l'étude des villes, ce que l'on attend d'un modèle est d'être transposable d'une ville à une autre, c'est-à-dire sa capacité à sortir de la *monographie*.

Pendant le premier siècle de leur existence, les modèles théoriques d'économie urbaine pouvaient prétendre ne pas disposer de sources de donnée suffisantes pour être falsifiés (au sens de Popper). De façon surprenante, la disponibilité croissante de données réelles n'a que peu modifié les modèles théoriques de l'économie urbaine, même lorsque ceux-ci entraient en contradiction flagrante avec la réalité.

Le cas berlinois nous montre lui comment, lorsqu'elle a une capacité prédictive, l'économie urbaine a du mal à s'abstraire d'une situation extrêmement particulière : le cas d'une ville étudiée en détail ayant subi des chocs inédits à l'échelle mondiale. Même dans ce cas précis, la capacité prédictive se borne à quelques estimations locales, fondées sur un ajustement très fin et très conjoncturel de nombreux paramètres, dont on peut douter qu'ils soient généralisables à d'autres lieux et à d'autres époques. En l'occurrence, lorsque les modèles classiques d'économie urbaine ont une prétention prédictive, ils retombent facilement dans l'écueil des modèles *Land Use and Transport Integrated* (LUTI) sur lequel nous reviendrons plus tard (voir *infra* en 3.2.2).

À ce stade, nous voyons donc pourquoi l'économie urbaine ne peut pas pleinement nous satisfaire dans la construction d'une science des villes. Mais, pour faire mieux, il nous faut aussi nous étendre davantage sur une question centrale de la modélisation des systèmes sociaux et des villes en particulier : quel est le nombre optimal de paramètres nécessaires pour construire un modèle urbain ?

3.2. La question paramétrique

3.2.1. Modèles et données

La bonne compréhension d'un phénomène naturel ou social, sa modélisation, repose sur la conjonction d'observations et d'un modèle. C'est le sens de la méthode hypothético-déductive. Un modèle est une abstraction, une simplification de la réalité dont le double objectif est :

- de rendre compte des observations passées ;
- de faire des prédictions.

Sans observations, sans données, un modèle est hors-sol et n'a que peu de valeur scientifique. On tombe dans l'écueil d'une démarche déductive extrême, reproche que l'on peut faire à l'économie classique. L'intuition y pose un monde de lois jugées indiscutables et que l'on ne cherche pas à vérifier.

Sans modèle, les observations sont inutiles, elles ne permettent pas de *généraliser* une situation à d'autres. C'est le reproche fait par David Hume à une méthode strictement inductive. Des données ne prennent donc sens qu'à condition d'être liées à un modèle, fût-il statistique, dont elles aident à calibrer les éventuels *paramètres*.

On notera d'ailleurs qu'en dernière limite, les théorèmes d'approximation universelle [71], bases de l'apprentissage profond, doublés de l'extension récente des capacités de calcul, fournissent un cadre théorique extrêmement large à la possibilité de créer des modèles à capacité prédictive. On peut de nos jours proposer des modèles statistiques robustes pour une vaste catégorie de problèmes.

Dans le cadre de l'analyse quantitative, que l'on considère ici, un modèle peut prendre la forme d'un système d'équations mathématiques qui sont déterministes ou stochastiques. Elles permettent de décrire et de prédire l'évolution ou l'état d'un système dans des conditions définies, similaires à celles des observations passées. Ce modèle repose sur des paramètres, que les données permettent de calibrer. Reste à savoir *combien* de paramètres choisir.

3.2.2. Principe de parcimonie

Les paramètres d'un modèle nécessitent d'être calibrés, soit à partir de la littérature existante soit à partir d'un jeu de données nouveaux.

Une règle évidente est que le nombre de paramètres doit être (bien) inférieur au nombre d'échantillons. Si le nombre de paramètres est proche du nombre d'échantillons, le risque de sur-ajustement est très fort : il sera toujours possible de trouver des valeurs de paramètres qui expliquent au plus près les données considérées — quitte à développer un modèle très non-linéaire — mais leur capacité de généralisation sera faible et leur force explicative encore moindre.

Ce reproche peut être fait aux modèles *Land Use and Transport Integrated* (LUTI), qui s'appuyaient historiquement sur des interactions théoriques à grande échelle (modèle de gravité de Lowry [72]) avant de se désagréger et qui sont aujourd'hui en majorité multi-agents et calibrés par économétrie [73]. Ces modèles

intègrent de multiples briques d'interactions dans la ville : coût de la terre, transports, emplois, etc. Par leur apparence de validité (ils reproduisent fidèlement les données existantes), leurs résultats sont les plus utilisés dans l'aménagement du territoire mais ils ne permettent pas de comprendre les mécanismes fondamentaux qui sous-tendent l'organisation spatiale des villes et il est très difficile d'en évaluer la capacité prédictive.

La nécessité d'un nombre relativement restreint de paramètres est une formulation moderne du rasoir d'Ockham : « *pluralitas non est ponenda sine necessitate* ». Un nombre élevé de paramètres peut en effet être le signe d'une redondance, et donc la preuve qu'un niveau d'unification a été manqué. Dans la construction d'un modèle scientifique des villes, c'est donc la *parcimonie* qui doit prévaloir.

C'est là que se comprend l'apport que le physicien peut apporter à la compréhension des villes. Cet apport est à la fois le fruit d'une tradition de recherche et d'une réflexion théorique. Tradition de recherche parce que les physiciens ont adopté la recherche hypothético-déductive dans sa forme la plus complète. À partir d'observations, le physicien tente de proposer un modèle minimal simple et à peu de paramètres qui rende compte de phénomènes généraux. Il en compare les prédictions aux résultats empiriques. Par rétroaction, il adapte ensuite son modèle pour le corriger ou le redéfinir entièrement si nécessaire. La démarche est celle de la parcimonie.

En sus, la physique statistique offre de vrais fondements théoriques à la simplification des problèmes et à leur réduction paramétrique. Nous reviendrons plus en détail sur ce point en abordant à nouveau la notion d'universalité (voir *infra* 4.2.2).

Retenons à ce stade que nous avons esquissé la méthode de recherche que nous suivrons dans l'étude quantitative des systèmes urbains : celle du physicien, économe en paramètres et en hypothèses, tourné vers la généralisation et attentif aux remises en cause empiriques, loin de la démarche économique.

Néanmoins, la compréhension des villes, y compris sous un angle quantitatif, n'est pas l'apanage des économistes. Historiens, géographes et sociologues s'y intéressent depuis aussi longtemps, qui ont réussi à construire une théorie de la ville comme système complexe. C'est en réalité dans cette lignée intellectuelle et dans ses réussites que nous nous plaçons, mi-physicien, mi-géographe.

4 - Un système complexe

Hier, wie in der Naturwissenschaft, bewährt sich die Richtigkeit [...] dass bloss quantitative Veränderungen auf einem gewissen Punkt in qualitative Unterschiede umschlagen.

Karl Marx – *Das Kapital* (1867)

La science des villes peut s'inscrire dans un ensemble de recherche ancien et fructueux, celui des systèmes complexes. À son image, la science des villes est pluridisciplinaire et mélange sciences sociales et sciences dures. Nous verrons dans ce chapitre, peut-être le plus épistémologique, les réflexions qui entourent la notion de système complexe, la pertinence de ce cadre pour les systèmes urbains, avant de développer le rôle scientifique que peut y jouer la physique statistique. Cette dernière discussion nous permettra de justifier une fois pour toutes notre approche, déjà campée au chapitre précédent : une compréhension quantitative et universelle des villes fondée sur un nombre restreint de paramètres.

4.1. Théorie des systèmes complexes

4.1.1. Cadre théorique

Les sciences sociales sont historiquement partagées entre deux grands domaines d'appréhension des phénomènes macroscopiques. Approche la plus intuitive, l'individualisme méthodologique [74] est une forme de réductionnisme, qui renvoie l'étude des objets de grande échelle à leurs unités individuelles : en dernier ressort, tout est issu des composants élémentaires. À l'opposé, l'holisme se décrit comme la tendance dans la nature à constituer des ensembles qui sont supérieurs à la somme de leurs parties [75] : le système global, dans son ensemble, est un sujet d'étude en soi, avec ses lois propres. D'une certaine façon, ces deux approches sont héritières de la querelle du Moyen-Âge entre nominalisme, ancêtre intellectuel du réductionnisme, et réalisme, qui suppose que les *choses* ont une réalité en soi.

À première vue, la quête d'universalité, que nous avons ébauchée au travers de la réduction paramétrique proposée par Guillaume d'Ockham, grand nominaliste, devrait nous orienter vers une approche réductionniste : trouver des bases communes, des *lois fondamentales* à toutes les choses. La logique en provient du simple phénomène de causalité : en dernier ressort, les réalisations sociales ne sont que des conséquences de comportements psychologiques, eux-mêmes biologiques, eux-mêmes physiques : par *constructivisme*, il serait donc possible de recréer les structures sociales, qui ne sont que des vues de l'esprit, comme on en jugera par la difficulté à définir proprement un objet comme la ville.

Pourtant, indéniablement, les systèmes sociaux rentrent dans la catégorie des systèmes complexes : des grands ensembles d'entités en interaction qui empêchent l'observateur de prévoir leur comportement. Même s'ils peuvent être réduits à des interactions élémentaires connues, il n'est pas toujours possible de prédire leur évolution de manière analytique, voire numérique, quand les systèmes sont trop chaotiques. Un système complexe, c'est donc un système dont le comportement n'est pas directement prédictible même en connaissant les règles d'évolution élémentaires du système. Au contraire, la multiplicité des interactions provoque des changements et des ruptures à l'échelle macroscopique des systèmes qui peuvent être tout aussi bien égaux (*système linéaire*), supérieurs (*système super-linéaire*) ou inférieurs (*système sous-linéaire*) à la somme de leurs parties. Ainsi, si l'approche réductionniste est séduisante, elle est en partie inutile puisque pour les systèmes complexes la reconstruction par le bas échoue, non seulement en pratique mais aussi en théorie. De fait, chaque échelle de la connaissance, de la physique des particules à la sociologie, doit donc définir ses propres entités et ses propres lois, à son échelle, et pour reprendre encore les mots d'Anderson : « *psychology is not applied biology* ». Une démarche holiste, presque structuraliste, est donc réhabilitée à chaque échelon de la connaissance, non seulement par nécessité pratique mais aussi parce que les changements quantitatifs deviennent qualitatifs : c'est l'*émergence*. C'est aussi le sens de la physique des transitions de phase et des changements d'échelle et Anderson conclut son célèbre article par cet échange rapporté entre Hemingway et Fitzgerald à Paris dans les années 20 :

Fitzgerald : The rich are different from us.

Hemingway : Yes, they have more money.

Ainsi, les systèmes complexes se placent à mi-chemin entre un réductionnisme auquel on aspire et dont on peut connaître les lois et un réalisme holistique avec lequel on travaille et on peut comparer des éléments de même taille. En acceptant que les unités sociales ne sont par causalité pas des objets en soi mais en autorisant leur étude en tant que *concepts* propres, les systèmes complexes s'inscrivent davantage dans la continuité du *conceptualisme* d'Abélard, lui-même issu de la pensée d'Aristote.

Nous allons voir tout de suite comment, en pratique, ces questions s'adaptent à la problématique urbaine.

4.1.2. Écologie urbaine

L'École de Chicago fut l'un des premiers courants de sociologie aux États-Unis, apparu à la fin du XIX^e siècle à Chicago. Jusqu'aux années 40, la première École de Chicago s'intéressa essentiellement aux villes, l'exemple de Chicago et son urbanisation extrême servant de cadre à plusieurs questionnements sur la culture, l'immigration ou la criminalité urbaine.

« Ville-laboratoire », Chicago permet de jeter les fondements d'une appréhension *écologique* des villes : la ville est un écosystème dans lequel le citoyen est en

interaction avec son environnement géographique et social.

D'un côté, cette approche empêche de penser la ville comme une entité autonome et indépendante. De l'autre, Robert Ezra Park, le principal représentant de l'école de Chicago, refuse de voir la ville comme strictement atomisable et rejette l'hypothèse de l'*homo oeconomicus* :

The city [...] is something more than a congeries of individual men and of social conveniences, [...] institutions and administrative devices. The city is, rather, a state of mind, a body of customs and traditions.

Robert Ezra Park – *The city* (1915) [76]

L'École de Chicago se place donc elle-même à mi-chemin entre une approche strictement structuraliste et une vision réductionniste. Elle envisage la ville en tant que système, qu'elle traite sous l'angle qualitatif.

4.1.3. Vers la géographie quantitative

La géographie urbaine est une branche de la géographie humaine, indissociable de l'économie spatiale et de la sociologie. D'une certaine façon, la géographie urbaine a la responsabilité de la synthèse des études urbaines.

De façon intéressante, la géographie urbaine se distingue des approches urbanistes et sociologiques, centrées sur l'intérieur de la ville, par une réflexion plus fournie sur les *systèmes de villes* [77, 78]. La géographie s'intéresse donc à la répartition des villes sur le territoire, à leur émergence, à leur hiérarchie et à leurs interactions. La ville n'est pas seulement un système complexe, c'est un système complexe dans un système complexe : un *réseau urbain*.

Cette réflexion sur les systèmes de villes commença par des descriptions qualitatives, la plus célèbre étant le modèle de Walter Christaller (voir figure 4.1) [79]. Ce modèle de centralité, démenti par la recherche empirique, conduit à une répartition hiérarchique des villes sur un réseau régulier. Plus tard, l'analyse des interactions entre villes a également permis de donner naissance à des concepts macro-urbains comme les régions urbaines, les conurbations ou les mégalo-poles.

La révolution quantitative en géographie, initiée dans les années 50, a considérablement influencé les méthodes de la géographie urbaine. Plus ouverte sur l'économie, mais aussi sur les sciences physiques et la simulation numérique, la géographie urbaine quantitative développe des modèles mathématiques et numériques, comme des modèles multi-agents. On peut citer en particulier le modèle SimPOP [80-82], un modèle de simulation au temps long de répartition de population dans un système de villes.

D'une certaine façon, c'est de la géographie quantitative que nous nous revendiquons dans la suite de cette thèse, puisque nous étudions des objets géographiques, les villes, avec des méthodes quantitatives.

Fig. 2. Die Ergänzungsgebiete im System der zentralen Orte.

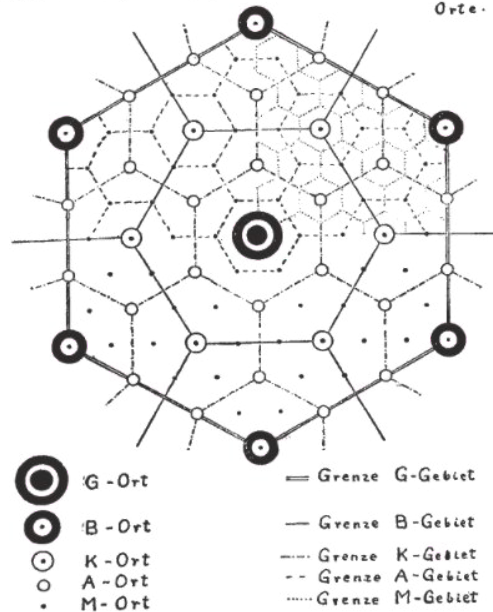


FIGURE 4.1 – Système de répartition des villes dans le modèle de Christaller [79]. Bien que déroutant à certains égards, ce modèle a l'intérêt d'insister sur la notion de *système de villes* et de mettre les villes en interaction.

4.2. Le rôle de la physique statistique

4.2.1. De la thermodynamique à l'éconophysique

La physique statistique naquit à la fin du XIX^e siècle de la théorie cinétique du gaz et fit la thermodynamique, dont elle permit de justifier les principes tout en redéfinissant des grandeurs extensives fondamentales comme l'énergie et l'entropie. La physique statistique vise à caractériser et expliquer le comportement d'ensembles *macroscopiques* comportant un grand nombre de particules *microscopiques* en mouvement et en interaction. Au XX^e siècle, elle permit de généraliser le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique en définissant les transitions de phase. De nos jours, la physique statistique à l'équilibre est bien construite quand la physique statistique hors équilibre est un domaine de recherche actif.

Le développement de la physique statistique a eu l'utilité d'apporter les différents niveaux d'échelles de la physique, en justifiant les propriétés des échelles plus grandes en tant qu'émergences des propriétés inférieures. De cette façon, dans l'exacte lignée d'Anderson, la physique statistique justifie que chaque niveau d'échelle ait besoin de la gamme d'outils et de concepts qui lui correspondent, puisqu'en dernier ressort, on peut prouver que les niveaux sont en cohérence les uns avec les autres. En reliant les échelles, la physique statistique unit à la fois les théories physiques et justifie qu'on puisse utiliser des approches différentes selon le

problème considéré.

Ces succès théoriques ont poussé les physiciens à se rapprocher d'autres disciplines, comme les sciences sociales, dans lesquelles le phénomène d'émergence avait déjà été identifié. C'est le cas de l'économie dans laquelle Thomas Schelling a joué un rôle moteur dans son ouvrage *Micromotives and macrobehaviors* [68]. Ces similitudes ont donné naissance à un champ entier de recherche, l'éconophysique [83], qui cherche à comprendre les similarités entre physique statistique et économie, notamment financière.

Ces rapprochements se justifient par des ressemblances théoriques, observées dès le début du XX^e siècle. Le mouvement brownien est identifié quasiment simultanément par Albert Einstein dans un contexte physique et par Louis Bachelier dans sa thèse de doctorat dans un contexte économique [84]. Les observations empiriques de régularités dans les données financières et économiques (lois de puissance, lois d'échelle, lois stables) ont justifié la création d'une discipline commune.

4.2.2. Retour sur l'universalité

Le rôle que la physique statistique peut jouer dans l'étude de larges systèmes sociaux comme les villes se justifie théoriquement. L'idée que les villes se ressemblent malgré la multitude de leurs différences appelle à rechercher leurs caractéristiques communes, qui doivent être en petit nombre. Derrière se cache l'idée que ce ne sont pas les détails qui font la physique de grande échelle : l'agrégation de détails multiples moyenne les effets individuels vers des comportements plus universels.

L'exemple le plus simple d'un tel phénomène est donné par le théorème central-limite (voir l'annexe A). Soient X_i des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de variance finie et d'espérance nulle (à une translation près), alors leur somme renormalisée par $N^{-1/2}$:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i^N X_i \quad (4.1)$$

converge en loi vers une distribution universelle, la loi gaussienne, qui ne dépend que des deux premiers moments. Les détails, caractérisés par les moments d'ordre supérieurs, sont éliminés à grand N .

En physique, la théorie de Landau puis plus tard et plus robustement la théorie du groupe de renormalisation [85] ont justifié les fondements théoriques de l'universalité en montrant qu'en dernier ordre, des systèmes extrêmement différents convergeaient vers la même classe d'universalité pourvu qu'ils respectassent les mêmes symétries (à dimensionnalité donnée).

De même, dans les systèmes urbains, la physique statistique nous explique que des objets apparemment très différents, comme les villes de culture et d'Histoire différentes, peuvent obéir aux mêmes lois, parce que ce ne sont pas les détails qui comptent. Les villes peuvent donc exprimer, à leurs échelles, des comportements universels qui dépendent d'un petit nombre de paramètres.

Ainsi nous avons campé une méthode de compréhension des villes axée sur la réduction paramétrique. Notre raisonnement est le suivant :

1. La physique statistique justifie que les villes puissent exprimer des similitudes, parce qu'elles sont le résultat macroscopique d'interactions microscopiques dont les détails peuvent disparaître en changeant d'échelle.
2. Ces similitudes doivent pouvoir s'étudier à l'échelle des villes, sans rentrer dans leur détail. Il est donc possible d'écrire des modèles urbains universels, et donc économes en paramètres et en hypothèses.
3. Ces modèles doivent être empiriquement robustes et vérifiés dans le temps et dans l'espace.

5 - Un objet à définir

« *O fortunati, quorum iam moenia surgunt!* »

Aeneas ait, et fastigia suspicit urbis.

Virgile – *Énéide*, livre I (I^{er} siècle av. J.-C.)

Si nous avons déjà justifié du besoin d'une science des villes — dont nous avons présenté la méthode — pour expliquer les régularités observées dans les systèmes urbains, nous n'avons pas encore abordé la question de *ce qu'est la ville*. Or à toute science il est nécessaire de définir son objet.

C'est l'objectif du présent chapitre, dont nous devons déjà faire comprendre au lecteur, au risque de le décevoir, qu'il n'offrira pas de réponse satisfaisante.

5.1. Des définitions variables

5.1.1. Définitions usuelles

Intuitivement, une ville est une zone d'habitation dense sur une surface géographique restreinte : c'est la ville du point de vue du citoyen. Mais on peut aussi voir la ville à travers sa capacité d'attraction lorsqu'on *va à la ville* ou qu'on *sort en ville*.

Ces deux approches donnent naissance à deux branches de définitions des villes : les définitions *morphologiques* définissent la ville par sa forme ; les définitions *fonctionnelles* par sa capacité d'attraction.

Ainsi, en France, l'INSEE distingue l'*unité urbaine* (définition morphologique), qui est « une commune ou un ensemble de communes qui comporte sur son territoire une zone bâtie d'au moins 2 000 habitants où aucune habitation n'est séparée de la plus proche de plus de 200 mètres, [dans laquelle] chaque commune concernée possède plus de la moitié de sa population dans cette zone bâtie » de l'*aire urbaine* (définition fonctionnelle) définie comme « un ensemble de communes, d'un seul tenant et sans enclave, constitué par un pôle urbain (unité urbaine) de plus de 10 000 emplois, et par des communes rurales ou unités urbaines (couronne périurbaine) dont au moins 40 % de la population résidente ayant un emploi travaille dans le pôle ou dans des communes attirées par celui-ci ».

Dans le cas français, chacune de ces définitions s'appuie sur une unité élémentaire : la commune, qui est une base administrative. Les définitions des villes utilisées par les instituts statistiques nationaux reposent généralement sur ces frontières administratives qui, si elles peuvent être très éloignées des réalités géographiques ou sociologiques modernes, restent en partie inévitables puisqu'un grand nombre

de données politiques, démographiques ou socio-économiques sont définies à ce niveau.

Pourtant, les définitions habituelles des zones métropolitaines utilisées par les instituts nationaux soulèvent de nombreuses questions. Tout d'abord, elles sont arbitraires dans le sens où elles utilisent des seuils paramétriques [86]. Il en résulte des différences importantes entre les instituts nationaux. Par exemple, les *Functional Urban Areas* (FUA) produites par l'OCDE pour les États-Unis et les *Metropolitan Statistical Area* (MSA) ne se superposent pas, avec parfois de fortes différences. Cela rend la comparaison entre les villes, sinon impossible, du moins très difficile [87, 88]. Deuxièmement, la définition des aires métropolitaines à partir des déplacements domicile-travail nécessite des données de recensement très précises sur la mobilité individuelle, dont la qualité et l'accessibilité peuvent varier fortement d'un pays à l'autre [89].

5.1.2. Approches fonctionnelles et morphologiques

Approches morphologiques

Les approches morphologiques définissent les villes comme des groupes continus de population, de surface bâtie [90, 91] ou de densité élevés. Elles dépendent d'un seuil type à partir duquel on considère que l'amas est une ville. Le choix le plus naïf est de définir une ville comme un regroupement de plus de X habitants. Le choix de X est toutefois arbitraire, car la perception des villes change beaucoup au fil du temps ou d'un pays à l'autre. Ces définitions ont également tendance à négliger les interactions interurbaines, une caractéristique essentielle des villes.

Avec l'accroissement du nombre de sources de données, on observe également le développement de nouvelles formes morphologiques, notamment lorsque les sources administratives de recensement ne sont pas fiables. Dans ces cas, les villes peuvent être définies par télédétection, notamment les images satellites des zones bâties, l'éclairage nocturne [92], la densité des routes [93], etc.

Approches fonctionnelles

Traditionnellement, l'approche fonctionnelle est la plus utilisée dans les études géographiques. Dans une perspective d'attraction par le travail, cette dépendance est généralement représentée par les déplacements quotidiens entre la ville et sa périphérie [86], une perspective qui est également choisie par les instituts nationaux lorsqu'ils définissent les zones métropolitaines MSAs aux États-Unis ou les FUAs l'OCDE [94, 95].

Ainsi, les définitions fonctionnelles s'appuient sur les flux [86]. Toutes les zones qui échangent quotidiennement un certain pourcentage de personnes font partie de la même ville.

Les approches mixtes combinent les deux catégories : les définitions FUA et MSA définissent généralement un noyau urbain de manière morphologique et une zone d'attraction de manière fonctionnelle [95, 96].

Pourtant, la plupart de ces définitions ne s'est pas avérée satisfaisante jusqu'à

présent, soit parce qu'elles nécessitent des données très spécifiques et élaborées, soit parce qu'elles sont dépendantes de paramètres arbitraires, soit parce qu'elles ne rendent pas assez bien compte *a posteriori* des réalités « intuitives » des villes.

5.2. Vers une nouvelle définition ?

5.2.1. Prérequis

Afin de trouver une définition acceptable des villes, nous devons dresser une liste de critères à remplir par cette définition. En suivant les travaux de Gilles Duranton [86, 89], nous proposons les suivants :

1. Pour être universelle et transnationale, une définition doit être non-paramétrique, c'est-à-dire que tous les paramètres de la définition doivent être endogènes, résulter d'une criticalité (au sens de la théorie de la percolation) ou d'une optimisation globale.
2. Les données sur lesquelles reposent les résultats doivent être universelles, faciles d'accès et auto-explicatives.
3. Une bonne définition doit mélanger les caractéristiques morphologiques et fonctionnelles et être compatible avec les limites administratives qui englobent les aspects historiques et politiques des villes.
4. Les délimitations doivent être validées par une procédure type. De préférence, il devrait y avoir un critère quantitatif pour évaluer la qualité d'une définition. La loi de Zipf a été particulièrement utilisée par les travaux précédents comme preuve d'une bonne délimitation. Cependant, comme nous le verrons, la loi de Zipf est souvent incorrecte pour décrire les systèmes urbains. Par conséquent, en l'état actuel des connaissances, on ne peut s'attendre à ce que des évaluations qualitatives des villes suffisent à valider une définition.

5.2.2. Données téléphoniques

Un recours aux données téléphoniques pourrait être intéressant à bien des égards dans la construction d'une définition plus globale des villes. Bien qu'elles ne soient pas toujours faciles à collecter et rassembler, ces données existent de façon à peu près universelle.

En particulier, les données relatives aux téléphones portables combinent des caractéristiques morphologiques (nombre d'appels ou de réceptions en un point donné) et des caractéristiques fonctionnelles (nombre d'appels entre deux points). Elles sont à cet égard plus pertinentes que les approches classiques du marché du travail, puisque les données relatives aux téléphones portables tiennent compte autant des interactions professionnelles que des échanges sociaux ou personnels. Ceci est d'autant plus intéressant que les déplacements domicile-travail représentent moins d'un quart des déplacements américains [97] et que les définitions fondées

sur les déplacements domicile-travail ont tendance à sous-estimer les aspects non professionnels des villes.

5.2.3. Limites

Trouver une nouvelle définition imposerait d'y joindre un critère de validation, qui n'a en fait pas trop de sens. Il n'existe pas de phénomène statistique universel suffisamment identifié pour servir de validation quantitative à une définition des villes. Si certains ont pu longtemps penser à loi de Zipf, l'une des principales contributions de cette thèse est d'en montrer l'invalidité.

La définition d'une ville est intimement liée au problème considéré et à ce que l'on veut étudier. Elle dépend en particulier du niveau de résolution de l'étude. Les études macroscopiques axées sur les flux migratoires ou les échanges internationaux privilégient les approches de flux. À l'inverse, la compréhension de l'étalement urbain ou l'artificialisation des sols reposent plutôt sur une notion de bâti.

Finalement une définition utile doit être suffisamment souple pour pouvoir interpoler une approche morphologique une approche fonctionnelle facilement, ce qui est possible en faisant varier la valeur des seuils considérés [98]. Surtout, le plus important est que chacun utilise la même définition et, dans cet objectif, il est sans doute plutôt préférable de se concentrer sur les définitions existantes, en les harmonisant et en les étendant à de nouveaux pays, que d'en chercher une nouvelle, qui serait hypothétiquement meilleure. En particulier, nous privilégions dans cette thèse les FUAs de l'OCDE ou les MSAs américaines, c'est-à-dire des définitions fonctionnelles déjà éprouvées.

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons essayé de comprendre comment et pourquoi pouvait se justifier une *science des villes*. Après avoir au chapitre 1 rappelé brièvement l'Histoire des villes et quelques unes de leurs propriétés géographiques contemporaines, nous avons rappelé au chapitre 2 qu'elles sont un sujet d'étude pour l'économie depuis longtemps. Nous avons présenté plusieurs des modèles et approches de l'économie urbaine avant d'expliquer au chapitre 3 pourquoi ils nous semblaient insuffisants.

Face au nombre importants d'hypothèses ou de paramètres des modèles classiques, nous avons proposé de faire preuve de parcimonie dans les tentatives de quantification des villes, tout en soulignant l'importance d'une démarche compatible avec les observations empiriques. Une fois posées ces bases, nous avons vu au chapitre 4 que la ville était du ressort de la sciences des systèmes complexes et que la physique statistique pouvait y être très enrichissante. Nous avons alors conclu au sens général de notre démarche : établir des modèles quantitatifs économes en paramètres, compatibles avec les expériences, qui puissent rendre compte à l'échelle macroscopique de lois universelles des villes.

Ces règles étant posées, nous n'avions plus qu'à définir au chapitre 5 ce qu'est la ville et quelles en sont les limites, un problème qui reste ouvert même si la plupart des définitions existantes sont très satisfaisantes pour travailler.

Deuxième partie

Démographie urbaine

Introduction

Les villes sont sans doute les plus naturels des systèmes sociaux. Systèmes sociaux elles demeurent malgré tout puisqu'elles reposent sur l'agglomération d'individus dont le nombre est indéniablement la première force et la première grandeur quantifiable. Le premier réflexe d'une science des villes est donc d'essayer de comprendre quelles sont les dynamiques de ce nombre d'habitants, de cette population qui les fait vivre.

Cette deuxième partie nous donne l'occasion de présenter les travaux de notre thèse relatifs aux dynamiques démographiques dans les villes, dans une démarche reposant sur la méthode exposée dans la partie précédente. Nous exposerons d'abord les raisons qui font de la population la variable urbaine la plus importante, en en montrant d'abord les méthodes de mesures puis la capacité à expliquer d'autres phénomènes (chapitre 6), justifiant de ne plus avoir à nous intéresser à d'autre variable dans cette partie. Ensuite, nous verrons quels modèles mathématiques ont pu être utilisés historiquement pour expliquer d'une part l'inégale répartition de la population entre les différentes villes d'un territoire — rejetant ainsi l'idée d'une taille optimale des villes — (chapitre 7), d'autre part la façon dont, par une approche que la complexité de ces objets contraint à être statistique, l'évolution de cette population peut être décrite au cours du temps (chapitre 8). Ces modèles, à la fois statiques et dynamiques ne sont pas eux-mêmes indépendants d'une certaine philosophie statistique, que nous détaillerons. Nous verrons enfin, en présentant ce qui est sans doute le résultat le plus important de notre thèse, comment distribution statique et évolution dynamique des populations urbaines peuvent être expliquées par une équation stochastique générale, qui identifie les migrations interurbaines, et notamment l'importance de leurs fluctuations, comme la clef de lecture la plus importante de l'histoire démographique des villes (chapitre 9). Loin d'être seulement quantitative, le changement mathématique que nous proposons est aussi qualitatif puisqu'il renverse le paradigme existant des dynamiques démographiques urbaines. Nous montrerons en effet que les villes ne croissent pas par l'accumulation d'habitants sur de longues périodes de temps mais par à-coups, aussi brefs que déstabilisateurs et qui modifient le destin des villes, dans le sens de leur expansion ou de leur disparition, en quelques années. À l'inverse, en-dehors de ces brèves périodes actives, les populations urbaines sont, en moyenne, relativement stables.

6 - La population : un déterminant urbain

S'intéresser à la population des villes, c'est s'intéresser à plus que cela ; c'est comprendre comment les effets d'agglomération agissent et différencient les villes d'un groupe d'individus indépendants. L'objectif de ce chapitre est donc de détailler l'importance de la population en tant que variable de la quantification urbaine, d'abord en expliquant la mesure, ensuite l'utilité.

6.1. Une mesure fiable et ancienne

6.1.1. Recensements

Il est possible en France d'obtenir des données de recensement de très bonne qualité depuis le XVII^e siècle par tête¹ [99], depuis le XIV^e siècle par foyer [100]. Il n'est par ailleurs pas rare, y compris dans les sources antiques, d'avoir des estimations de populations des villes qui, en faisant abstraction du problème de la définition exacte de celles-ci, soient très précises et robustes.

Dans la plupart des pays contemporains, les recensements permettent d'avoir une vision claire et fiable de la population à différentes échelles, dont l'échelle urbaine. Ces recensement sont décennaux aux États-Unis ou au Royaume-Uni, quinquennaux au Canada.

En France, les recensement étaient quinquennaux, à quelques exceptions près, de la Révolution à 1999. Jugés trop coûteux, ils se font désormais par roulement, chaque commune étant recensée au moins tous les cinq ans [101].

L'échelle communale, ou infra-communale, permet donc de connaître la population des villes dans leurs frontières administratives et telles qu'établies par l'administration. Elle reste toutefois, en général, distincte de l'échelle géographique pertinente. Il est donc généralement nécessaire de retraiter ces données lorsqu'on étudie les propriétés des villes.

6.1.2. Mesures spatiales

À partir des données des recensements administratifs des différents pays, le projet *Gridded Population of the World (GPW)* maintient une grille de population qui fournit des données démographiques harmonisées à différentes résolutions, la plus fine étant constituée de cases de 250 m [102].

L'utilisation de cette source est avantageuse pour l'étude de phénomènes qui se recoupent mal avec les différents découpages administratifs ou qui sont obtenus par télédétection. Nous y avons par exemple recours au chapitre 13.

Ces différentes méthodes d'obtention font de la population une donnée universelle et extrêmement fiable, bien plus facile d'accès que d'autres grandeurs plus

1. Le premier recensement nominatif des temps modernes est organisé en Nouvelle-France en 1666.

élaborées comme les données sociales ou économiques. La population est donc un incontournable dans l'étude des villes, dont nous allons montrer qu'il sert de base à la compréhension d'autres paramètres.

6.2. Un indicateur de premier ordre ?

6.2.1. Lois d'échelle

Une approche naturelle lorsque l'on étudie un système est d'en exprimer le comportement sous la forme d'une fonction de transfert f , qui relie l'« entrée », contrôlable ou ajustable, à la « sortie » :

$$Y = f(X) \tag{6.1}$$

où Y et X sont respectivement la sortie et l'entrée considérées — des macroparamètres qui décrivent l'état du système.

La variable d'entrée la plus classique est la *taille* S du système, qui permet d'en étudier la scalabilité : si on double le système, comment se comporte son produit ?

Les systèmes les plus simples sont linéaires : un système deux fois plus grand « produit » deux fois plus :

$$f(\lambda X) = \lambda f(X). \tag{6.2}$$

Si la taille d'une ville peut se comprendre de plusieurs façons — aire urbaine, population, PIB, importance politique, etc.— sa définition la plus simple est sans doute la population : une ville sans habitant, ou une ville abandonnée, n'a pas de sens même si elle occupe de l'espace [40]. Naypyidaw par exemple, la capitale-nouvelle de la Birmanie créée artificiellement en quelques années, est totalement surdimensionnée par rapport à sa population et n'est pas grand-chose d'autre qu'une *ville-fantôme* [103].

Il est donc très pertinent de comparer les caractéristiques macroscopiques urbaines — économiques, sociales ou environnementales — à la population. D'ailleurs lorsque l'on compare plusieurs villes selon une caractéristique particulière Y , il est fréquent d'exprimer la comparaison *par habitant*, la variable de comparaison n'étant pas Y mais Y/S , un raisonnement faisant implicitement l'hypothèse d'une relation linéaire entre population et variable d'intérêt.

En effet, si l'on peut comparer des villes de tailles différentes en exprimant un rapport par habitant, c'est que ce rapport lui-même ne dépend pas de la population. Cela contrevient à l'idée générale exprimée dans le chapitre 4, lorsque nous qualifions les villes de systèmes complexes, dont la relation entrée-sortie est généralement non-linéaire, parce que la non-linéarité est la traduction mathématique des phénomènes d'émergence, d'économies d'échelles ou de concurrence.

En s'inspirant des relations allométriques en biologie [104], il est donc usuel d'exprimer les relations entrée-sortie non sous la forme d'une relation linéaire mais

de *lois d'échelle*. Ces lois d'échelle comparent à la population des caractéristiques économiques ou sociales [78, 105], dont le comportement est :

- sous-linéaire en la population ($Y \sim P^\beta$ avec $\beta < 1$), cas des rendements décroissants ;
- linéaire en la population ($Y \sim P^\beta$ avec $\beta = 1$), cas des rendements constants ;
- super-linéaire en la population ($Y \sim P^\beta$ avec $\beta > 1$), cas des rendements croissants.

Ces relations permettent de définir l'élasticité, très utilisée en économie, comme :

$$\beta = \frac{d \log Y}{d \log P}, \quad (6.3)$$

qui apparaît donc comme une mesure pertinente des effets d'économie d'échelle dans les villes [40].

6.2.2. Critiques

Il a pu être très commun de réduire l'étude des villes à la mesure empirique, et quasi-frénétique, de lois d'échelle : population contre PIB, brevets, émissions de CO₂ ou criminalité [35-37, 106].

Ces mesures, qu'elles soient jointes à un modèle explicatif ou, le plus souvent, strictement illustratives, avaient pour prétention d'apporter des conclusions qualitatives simples à la compréhension des villes, supposément éclairantes pour les politiques publiques. Ces conclusions tenaient le plus souvent en une phrase — les grandes villes sont *plus* ou *moins* performantes selon telle dimension —, le sens positif ou négatif étant tranché par la valeur de β .

Nous avons esquissé en 1.2.2 quelques-uns de ces comportements en lois d'échelle, qui permettent d'établir des relations simples entre des caractéristiques urbaines différentes. La table 6.1 fournit d'autres exemples, extraits de [36].

Variable Y	β	Intervalle de confiance	Source
Nouveaux brevets	1,27	[1,27 ; 1,29]	É-U 2001
PIB	1,26	[1,09 ; 1,46]	UE 199-2003
Crimes	1,27	[1,27 ; 1,29]	É-U 2001
Nouveaux brevets	1,16	[1,11 ; 1,18]	É-U 2003
Surface des chaussées	0,83	[0,74 ; 0,92]	Allemagne 2002

TABLE 6.1 – Mesure de l'exposant de la loi de puissance reliant la population des villes à différentes grandeurs [36].

Les lois d'échelle ont donc été très populaires dans l'étude des villes et nous en utilisons nous-mêmes quelques-unes dans cette thèse. Toutefois, il convient de

souligner le risque d'une surinterprétation de ces lois [57, 98, 107, 108], notamment pour des valeurs d'exposants proches de 1 pour lesquelles il est difficile de conclure à la nature sous-linéaire ou super-linéaire du mécanisme sous-jacent alors même que ces valeurs peuvent changer en fonction de la méthodologie, du jeu de données employé, etc. Arcaute *et al.* [98] remarquent que la plupart des indicateurs urbains sont linéaires en la population et que les lois d'échelle sont moins informatives qu'il n'y paraît :

All this indicates that a theory of cities cannot rest simply on a relationship like equation $[X \sim P^\beta]$, because relevant patterns pertaining to social behaviour, such as the well-known Pareto distribution of wealth, cannot be grasped if only aggregated values are considered. A theory of cities needs therefore to reproduce the main relevant emergent behaviours that are encoded in the diversity and heterogeneities of cities. It is only through this perspective that city planning and policy making can be effective.

L'état de l'art prône donc la tempérance dans l'utilisation des lois d'échelle et davantage encore dans les conclusions qui peuvent en être tirées. On imagine ainsi difficilement recommander de favoriser le développement des grandes villes au détriment des petites sous le prétexte qu'elles seraient plus vertes par habitant alors que le résultat n'est pas certain, voire opposé [34, 40]. Puisque les conséquences d'une surinterprétation de telles lois peuvent être néfastes et pousser des politiques publiques dans la mauvaise direction, on ne peut que proposer d'utiliser les lois d'échelle avec parcimonie.

7 - Distribution de population

We submit that our theory, like all other theories in natural science, does not claim either that no other theory can be found that will also rationalize our data, or that no other data will ever be found that do not controvert our theory. On the contrary, the reader is invited not only to weigh our own theory, but to find a more cogent theory and more instructive data.

George Kingsley Zipf – *Human behavior and the principle of least effort* (1949) [32].

Nous avons noté en 1.2.2 qu'il n'existait pas empiriquement de *taille optimale* des villes, ce qui n'a rien d'évident si l'on considère que l'existence des villes est la conséquence d'un équilibre entre coûts et gains de regroupement. Comprendre la population urbaine implique donc de comprendre comment et pourquoi les villes peuvent avoir des populations différentes, d'abord en mesurant ces différences, ensuite en les expliquant. L'objectif de ce chapitre est ainsi, après quelques rappels théoriques sur les lois de puissance, de voir comment les populations urbaines ont pu sembler se répartir selon une loi de puissance particulière, la *loi de Zipf*, avant de revenir sur cette hypothèse.

7.1. Autour des lois de puissance

7.1.1. Lois statistiques en sciences sociales

La loi normale, précédemment identifiée comme l'une des marques d'universalité les plus frappantes en mathématiques, servit de cadre conceptuel principal à la pensée statistique du XIX^e siècle, qui voyait la loi normale partout [9]. Dans cet esprit, la loi normale apparaissait comme la loi naturelle de l'*égalité* : elle définissait un idéal-type, comme l'homme-moyen de Quetelet, autour duquel s'exprimaient des variations ou des erreurs, nécessairement faibles [109].

À la fin du XIX^e siècle, la pensée statistique évolua et s'intéressa davantage aux queues des distributions dans une vision partiellement eugéniste et issue du darwinisme : ce n'était plus l'homme-moyen qui comptait mais le meilleur homme, le plus grand ou le plus fort, capable de survivre à la loi de l'évolution, dans la société comme dans la nature. C'est ainsi que Francis Galton, cousin de Charles Darwin, introduisit le concept de régression : en comparant la taille des enfants à celles de leurs parents, il constata qu'il existait en moyenne une relation linéaire entre la taille des enfants et de celle de leurs parents mais que le coefficient directeur de cette droite était inférieur à 1 et tendait donc à ramener la taille des enfants

les plus grands vers la moyenne : c'était donc une *régression*, prise dans le sens de dégénérescence [110].

Les statisticiens du début du XX^e siècle étaient donc majoritairement fascinés par les queues de distribution dans les phénomènes sociaux, à la recherche des individus les meilleurs et les plus performants. Progressivement, la distribution statistique type des phénomènes sociaux passa ainsi de la loi normale égalitaire aux lois *inégalitaires*, qui insistaient sur la différence entre les individus : les *lois de puissance*.

Vilfredo Pareto fut le premier à observer une loi de puissance dans un phénomène social : la distribution des revenus dans la population [111]. À ce propos, Benoît Mandelbrot commenta :

The data did not remotely fit a bell curve, as one would expect if wealth were distributed randomly. "It is a social law", [Pareto] wrote : something "in the nature of man".

Benoît Mandelbrot – *The Misbehavior of Markets : A Fractal View of Financial Turbulence* (2006) [112]

L'interprétation de Pareto était de dire que la démocratie est illusoire, puisqu'une *élite*, supérieure, finit toujours et nécessairement par émerger. Il est intéressant de voir qu'encore aujourd'hui la prééminence, parfois réelle, souvent supposée, des lois de puissance en économie sert de justification à des interprétations politiques inégalitaires ou darwinistes, au nom du *laissez-faire*.

7.1.2. Lois de puissance

Définition

Une loi de puissance est une relation entre deux quantités de la forme :

$$y = bx^\alpha \quad (7.1)$$

où b est une constante de proportionnalité et $\alpha < 0$.

La caractéristique principale des lois de puissance est leur *invariance d'échelle*. Quelle que soit l'échelle de la variable x , le système est qualitativement identique. Si l'on multiplie x par une constante c :

$$f(cx) = b(cx)^\alpha = c^\alpha f(x) \propto f(x). \quad (7.2)$$

En particulier, le rapport $f(x)/f(y)$ ne dépend que du rapport x/y :

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \Phi\left(\frac{x}{y}\right). \quad (7.3)$$

Loi de Pareto

La loi de Pareto est un type particulier de loi de puissance, sous la forme d'une distribution de probabilité. Soit X une variable aléatoire, X suit une loi de Pareto si

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha \text{ pour } x \geq x_0 \quad (7.4)$$

où α est l'exposant de Pareto. La distribution de X est

$$f(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ pour } x \geq x_0 \quad (7.5)$$

et ses moments d'ordre n sont finis pour $\alpha > n$.

La loi de Pareto définit les distributions en loi de puissance dans leur forme la plus restrictive. Suivant [113], nous retenons une définition plus lâche : une distribution en loi de puissance est une distribution qui, à partir d'un certain point, se comporte en loi de puissance :

$$p(x) \underset{x \gg 1}{\sim} x^{-1-\alpha}. \quad (7.6)$$

Ces distributions exhibent plusieurs propriétés intéressantes, exhaustivement développées dans [113]. La principale de leurs propriétés est une version généralisée du théorème central limite (voir annexe A) [114] : si les X_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une distribution en loi de puissance d'exposant α alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} (bn)^{1/\alpha} \zeta_\alpha & \text{si } \alpha < 1 \\ n\mu + (bn)^{1/\alpha} \zeta_\alpha & \text{si } 1 < \alpha \leq 2. \\ n\mu + (bn)^{1/2} \eta & \text{si } 2 < \alpha \end{cases} \quad (7.7)$$

Loi de Zipf

La loi de Zipf est une version discrète de la loi de Pareto, identifiée empiriquement à peu près simultanément par Jean-Baptiste Estoup [115] et George Kingsley Zipf [32] dans le domaine linguistique (voir figure 7.1), Félix Auerbach [116] dans la répartition des populations des villes.

Dans le domaine linguistique, la loi de Zipf affirme qu'il existe une relation entre la fréquence d'apparition d'un mot dans un texte et son *rang*, le mot apparaissant le plus souvent étant de rang 1. Cette relation est de la forme :

$$f_n \sim \frac{1}{n^s} \quad (7.8)$$

où f_n est la fréquence d'apparition du n -ième mot le plus fréquent et s un exposant proche de 1¹.

1. Selon les sources, la loi de Zipf est associée à la valeur $s = 1$ strictement, à une valeur proche de 1 ou à n'importe quelle valeur. Nous retenons ici une définition large de la loi de Zipf dans laquelle s peut prendre n'importe quelle valeur et qui nous permet de définir la *loi de Zipf de paramètre s* .

Cette relation permet de relier la loi de Zipf à la loi de Pareto discrète :

$$f_n \sim \frac{1}{n^s} \iff \mathbb{P}(X > f_n) \sim n \quad (7.9)$$

$$\iff \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{n^s}\right) \sim n \quad (7.10)$$

$$\iff \mathbb{P}(X > x) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad (7.11)$$

la loi de Zipf de paramètre s étant donc reliée à la loi de Pareto de paramètre $1/s$.

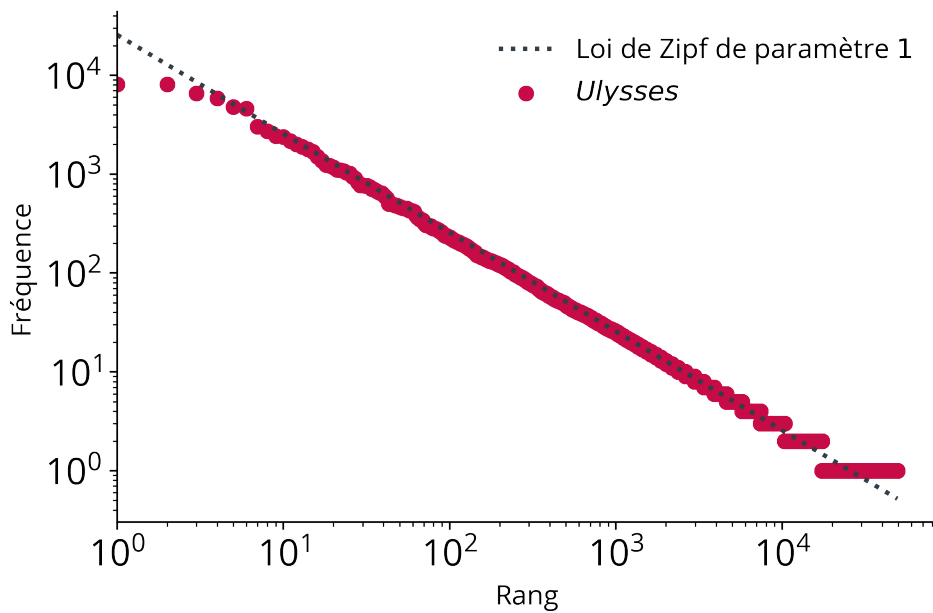


FIGURE 7.1 – Fréquence d'apparition des mots dans la version anglaise (*Ulysses*) de *Ulysse* de James Joyces (1920). La fréquence d'apparition des mots du roman suit une loi de Zipf, telle qu'elle fut identifiée dans cet ouvrage par Zipf lui-même.

Différents modèles mathématiques ont été proposés pour expliquer l'émergence de la loi dans des phénomènes sociaux [117, 118], notamment des modèles de croissance multiplicative ou à attachement préférentiel comme le modèle de Simon (voir 8.1.1) ou le modèle de Barabási-Albert, qui conduit par exemple à une distribution de degré en loi de puissance [119].

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement à la loi de Zipf pour les villes. Pour une description plus approfondie de l'apparition des lois de puissance dans les phénomènes sociaux ou économiques, nous ne pouvons encore une fois que recommander la lecture de [113].

7.2. Loi de Zipf pour les villes

7.2.1. Loi d'Auerbach-Zipf

La loi de Zipf dans le domaine urbain s'origine avant Zipf, dans un article du physicien allemand Felix Auerbach publié en 1913 [116]. En classant les plus grandes villes allemandes en 1913 par population, Auerbach observe que le produit du rang des villes par leur population est à peu près constant et égal à ce qu'il définit comme l'*absolute Konzentration (AK)* dont la valeur est proche de 50. Ainsi,

$$\forall n, nP(n) \simeq AK \quad (7.12)$$

où n est le rang de la ville de population $P(n)$, ce qui correspond bien à la loi de Zipf d'exposant 1.

Auerbach démontre également que sa loi est valide dans le temps — c'est-à-dire à plusieurs époques de l'histoire allemande — et dans l'espace — c'est-à-dire pour différents pays. Il fournit donc à la fois la première observation et la première étude comparative de la loi de Zipf.

La régularité dans le temps et l'espace de la loi de Zipf, multiplement observée après Auerbach [120-125] est probablement le fait quantitatif le plus frappant — pour ne pas dire le seul — de la science des villes, au point de servir de référence et de critère de validité de nombreux modèles urbains [89]. C'est un résultat statique, d'équilibre, dans un système de villes.

Ce résultat caractérise l'organisation hiérarchique des villes et, en particulier, il quantifie l'occurrence statistique des grandes villes. La loi de Zipf implique que dans tout pays, la ville la plus peuplée est généralement deux fois plus grande que la suivante, et ainsi de suite. Il s'agit d'une signature de la très grande hétérogénéité de la taille des villes et montre que les villes ne sont pas gouvernées par des considérations optimales qui conduiraient à une taille unique mais, au contraire, que les tailles des villes sont largement distribuées et suivent une sorte de hiérarchie [126].

La valeur empirique de l'exposant de Pareto nous renseigne ainsi sur le degré de hiérarchisation d'un système de villes : une grande valeur de l'exposant de Pareto (et donc petite valeur de l'exposant de Zipf) correspond à une répartition plus égale de la population entre les villes tandis que pour les petites valeurs de l'exposant, le système de villes est très hétérogène et dominé par quelques métropoles.

7.2.2. Des remises en cause récentes

La loi de Zipf, bien qu'elle continue encore à apparaître comme une pierre d'angle des études urbaines, notamment économiques — tout cours d'économie urbaine commence par la loi de Zipf —, est remise en cause depuis une vingtaine d'années par l'accroissement du nombre de données démographiques urbaines disponibles [127].

Cette remise en cause s'est faite en deux temps ; d'abord par la mesure d'exposants de Zipf de plus en plus éloignés de la valeur centrale 1 [128, 129], ensuite par

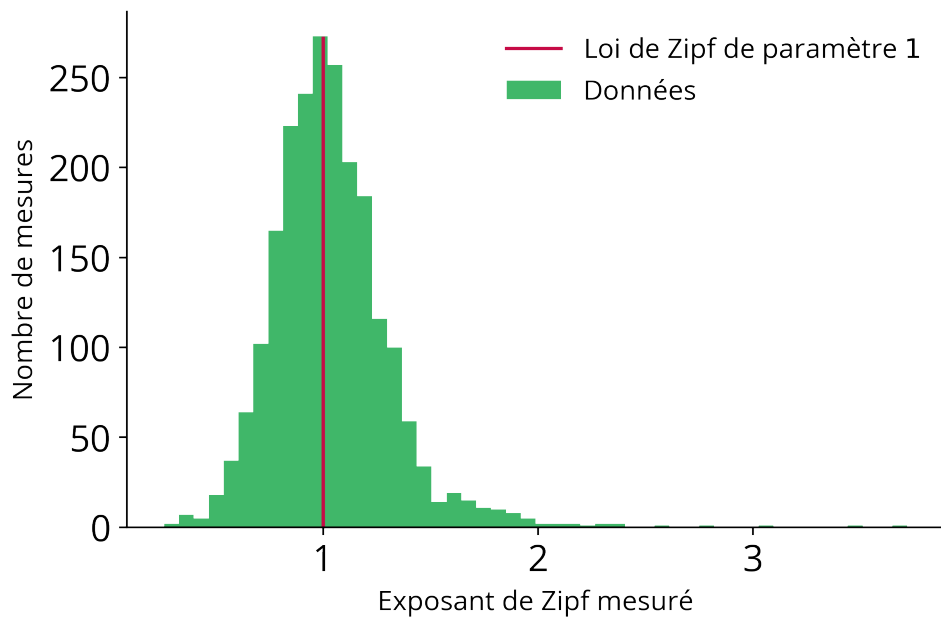


FIGURE 7.2 – Exposants de Zipf pour la distribution des populations mesurés dans environ deux mille cas répartis dans plus de quatre-vingts études et rassemblés par Cottineau [129]. Même si la valeur d'exposant 1 semble centrale, les estimations empiriques peuvent s'en éloigner sensiblement dans certains pays.

des questionnements généraux sur le fond et sur la validité de la loi de Zipf [130]. De fait, la principale prétention et qualité de la loi de Zipf étant d'être universelle, son invalidité, même pour un petit nombre de systèmes, en questionne le sens global.

L'on doit à Clémentine Cottineau une méta-analyse synthétique des mesures de l'exposant de Zipf dans la littérature pour différents systèmes de villes à différentes époques [129]. Nous reproduisons les résultats de cette étude sur la figure 7.2. Si l'étude permet de montrer que l'exposant mesuré dans la littérature est le plus souvent proche de 1, il peut d'une part s'en éloigner considérablement, d'autre part, être très différent d'un pays à l'autre ou au sein d'un même pays entre deux époques différentes, sans raison apparente. Cette étude corrobore donc plusieurs travaux antérieurs qui, localement, avaient déjà questionné la pertinence de la loi de Zipf, par les variations empiriques observées autour de l'exposant 1.

De plus, la méthode d'estimation et la définition du système considéré s'avèrent déterminantes dans la mesure de l'exposant. Nous montrons par exemple sur la figure 7.3 comment la valeur de l'exposant, pour un même pays, peut varier selon le nombre de villes incluses dans la distribution (en prenant les n villes les plus grandes) — un tel résultat assurant que la loi de Zipf ne tient pas en général.

Comment expliquer, dès lors, l'apparente ubiquité de la loi de Zipf? La réponse vient de la loi elle-même : il est en réalité extrêmement facile de *fit*ter une loi de

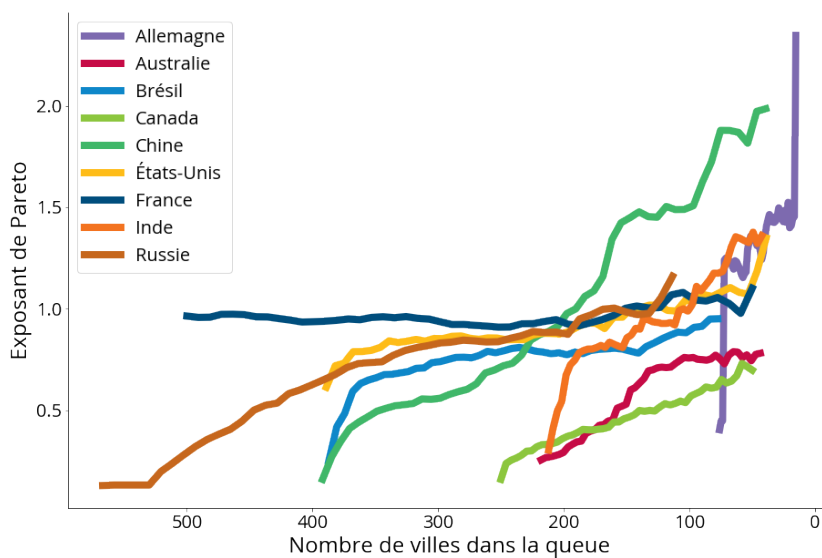


FIGURE 7.3 – On montre ici l'exposant de Pareto *apparent* de la queue supérieure de la distribution des tailles des villes en fonction du seuil inférieur définissant la queue de la plus petite ville considérée. Plus précisément, dans chacun des pays, on choisit un seuil minimal S_{\min} à partir duquel on définit le système de villes puis l'on mesure par maximum de vraisemblance l'exposant de Pareto de la distribution des tailles de villes $S > S_{\min}$ correspondantes. À chaque valeur de S_{\min} correspond un exposant différent, parfois très éloigné de la valeur attendue 1. Ce résultat souligne que la loi de Zipf n'est pas vraie en générale puisque sa mesure dépend des villes que l'on choisit de prendre en compte (selon un seuil arbitraire). La figure est extraite de [2].

Zipf sur une distribution de probabilité. Gan *et al.* [127] montrent ainsi, pour toute une série de simulations aléatoires suivant des distributions de référence (loi normale, log-normale, Pareto et Gamma) qu'une régression linéaire simple de la loi de Zipf donne des résultats en apparence extrêmement satisfaisants (avec des R^2 très proches de 1), même lorsque la distribution sous-jacente n'a rien à voir avec la loi de Zipf [127]. La bonne adéquation de la loi de Zipf est donc un phénomène statistique et ne nécessite pas une théorie économique; elle est fallacieuse. C'est un artefact provoqué par les méthodes classiques d'évaluation paramétrique par régression linéaire en échelle log-log et biaisé par les choix de villes dans la littérature : l'obstination à rechercher la loi de Zipf a fait qu'elle était facile à prouver mais de façon générale, il n'y a aucune raison de penser que la loi de Zipf existe pour les villes [2, 131].

Ainsi semble disparaître la principale loi *statique* de la population urbaine. Qu'en est-il alors de la compréhension *dynamique* de la population urbaine ?

8 - Modèles de croissance urbaine

*And was Jerusalem builded here
Among those dark Satanic Mills ?*

William Blake – *Jerusalem* (1804)

La croissance démographique et, par ricochet, économique d'une ville est un processus extrêmement complexe, multi-paramétrique et difficilement prédictible. Les exemples historiques de villes dont le destin a changé sur des échelles de temps très courtes — on peut penser à San Francisco pendant la ruée vers l'or — en font des objets presque aussi peu prévisibles que les cours de la bourse.

De ce fait, la modélisation de la croissance urbaine ne peut raisonnablement se faire par une équation déterministe ; elle appelle à prendre en compte le hasard et à être *stochastique*. Une loi de la croissance urbaine ne peut donc être évaluée sur des villes particulières et prises indépendamment mais sur des *systèmes de villes*, ensembles de plusieurs villes en interaction ou non mais qui, collectivement, permettent de vérifier les prédictions statistiques du modèle et sa capacité à reproduire la distribution du système de villes à un instant donné, souvent supposé à l'équilibre. Ainsi, les modèles de croissance urbaine sont des modèles *dynamiques* mais dont le critère d'évaluation est la capacité à reproduire, à un équilibre supposé, une loi *statique*, qui historiquement a été la loi de Zipf.

8.1. Modèles pré-gabaisiens

8.1.1. Modèle de Simon

Le modèle de Simon, proposé par Herbert Simon [132], est un modèle stochastique élémentaire cherchant à comprendre l'origine de la loi de Zipf dans une grande variété de systèmes comme les populations de villes ou la fréquence d'apparition des mots dans un texte. On le présente ici dans sa forme initiale, c'est-à-dire sous l'angle linguistique.

Le modèle est un modèle à attachement préférentiel : il suppose que la probabilité de voir un nouveau mot apparaître est proportionnelle au nombre de fois où le mot est déjà apparu. Soit un livre de k mots et soit $f(i, k)$ le nombre de mots apparus exactement i fois parmi les k premiers mots. Simon fait deux hypothèses :

1. La probabilité que le $(k + 1)$ -ième mot soit déjà apparu i fois est proportionnelle à $if(i, k)$.
2. Il y a une probabilité constante α que le $(k + 1)$ -ième mot soit un nouveau mot.

Dans ces conditions, on peut écrire la loi d'évolution

$$\mathbb{E}(f(i, k + 1)) - f(i, k) = K(k)((i - 1)f(i - 1, k) - if(i, k)) \quad (8.1)$$

où $\mathbb{E}(f(i, k + 1))$ est l'espérance du nombre mots apparus exactement i fois parmi les $k + 1$ premiers mots et $K(k)$ est un facteur de proportionnalité. Le premier terme du membre de droite représente le cas où le $(k + 1)$ -ième mot serait déjà apparu $i - 1$ fois et le second terme le cas où le $(k + 1)$ -ième mot serait déjà apparu i fois. On a par ailleurs la loi de génération

$$\mathbb{E}(f(1, k + 1)) - f(1, k) = \alpha - K(k)f(1, k) \quad (8.2)$$

pour les nouveaux mots avec $0 < \alpha < 1$.

À l'équilibre, $\mathbb{E}(f(i, k)) = f(i, k)$ et on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} f(i, k + 1) - f(i, k) = K(k)((i - 1)f(i - 1, k) - if(i, k)) \\ f(1, k + 1) - f(1, k) = \alpha - K(k)f(1, k). \end{cases} \quad (8.3)$$

La condition de normalisation de la probabilité permet de calculer la valeur du coefficient de proportionnalité $K(k)$ solution de

$$\alpha + \sum_{i=1}^k K(k)if(i, k) = 1. \quad (8.4)$$

Or le nombre total de mots est

$$k = \sum_{i=1}^k if(i, k), \quad (8.5)$$

d'où

$$K(k) = \frac{1 - \alpha}{k}. \quad (8.6)$$

En résolvant le système 8.3, on peut alors montrer que la fréquence relative d'occurrence des mots apparaissant i fois (indépendamment de k) est

$$f(i) = AB(i, \rho + 1) \quad (8.7)$$

où B est la fonction bêta et $\rho = 1/(1 - \alpha)$. Dans la limite $i \rightarrow \infty$:

$$f(i) \sim \Gamma(\rho + 1)i^{-(\rho+1)} \quad (8.8)$$

où Γ est la fonction gamma.

Le modèle dans lequel la probabilité d'apparition d'un mot est proportionnelle à sa présence converge donc vers une loi de Zipf, un résultat qui s'étend facilement aux villes en remplaçant le nombre de mots apparaissant i fois par le nombre de villes de taille i .

8.1.2. Modèle de Gibrat

La loi de Gibrat, ou loi de l'effet proportionnel, est une loi énoncée par Louis Gibrat en 1931 pour expliquer la dynamique des tailles d'entreprise [33]. Dans sa version urbaine, la loi de Gibrat est à temps discrétisé et la population au temps $t + \Delta t$ est :

$$S(t + \Delta t) = \eta(t)S(t) \quad (8.9)$$

où $\eta(t)$ est un bruit indépendant de S dans la convention d'Itô, pour laquelle le bruit au temps t est indépendant du passé (voir annexe B pour une discussion plus détaillée sur les conventions d'Itô et de Stratonovich). C'est donc une loi multiplicative, ce qu'on attend intuitivement de la croissance d'une ville, ne serait-ce que du fait de l'accroissement naturel. Pour simplifier, on étudie la forme normalisée :

$$w(t) = \frac{S(t)}{e^{\gamma t}} \quad (8.10)$$

où γ est le taux de croissance moyen de la population totale du système. En passant au logarithme, la loi de Gibrat devient :

$$\log w(t + 1) = (\log \eta(t) - \gamma) + \log w(t) \quad (8.11)$$

$$= \sum_{i=0}^t (\log \eta(i) - \gamma) + \log S_0 \quad (8.12)$$

$$\simeq \sum_{i=0}^t (\log \eta(i) - \gamma) \quad (8.13)$$

en négligeant la population initiale S_0 . Par le théorème central limite (pour un choix raisonnable de η), la distribution de $w(t)$ est log-normale de la forme :

$$p(w, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{w} \exp\left(-\frac{(\log w - rt)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (8.14)$$

où $r = \langle \log \eta \rangle - \gamma$ et $\sigma^2 = \langle (\log \eta)^2 \rangle - \langle \log \eta \rangle^2$.

La loi de Gibrat permet donc d'expliciter la distribution de probabilité de la population des villes à tous les temps. Deux problèmes apparaissent cependant : il n'y a pas de distribution d'équilibre et la loi log-normale n'est pas celle de Zipf.

Il est possible de réécrire l'expression 8.14 sous la forme [34, 133] :

$$p(w, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{S^{1+\mu(w)}} \exp(\mu(w)rt) \quad (8.15)$$

avec

$$\mu(w) = \frac{1}{2\sigma^2 t} \log \frac{w}{e^{\gamma t}} \quad (8.16)$$

où $\mu(w)$ est une fonction variant lentement avec w .

Cette dernière expression laisse envisager qu'une loi log-normale puisse être confondue avec une loi de puissance comme évoqué en 7.2.2. Toutefois, pour

$w(t) \gg e^{r+2\sigma^2 t}$, $\mu(w) \rightarrow \infty$ et la loi log-normale s'éloigne d'une loi de puissance. Il reste donc encore un peu de travail pour établir le lien avec la distribution de Pareto.

Enfin, on peut noter que lorsque le bruit est gaussien, la version continue de la loi de Gibrat s'écrit comme une équation de Langevin avec diffusion inhomogène :

$$\partial_t S = (r + \eta(t)) S(t) \quad (8.17)$$

pour où $\langle \eta(t) \rangle = 0$ et $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \sigma_0^2 \delta(t - t')$, équation qui n'admet pas d'état d'équilibre si $r > 0$.

De façon discrète ou continue, la loi de Gibrat fut longtemps le modèle de référence pour expliquer la dynamique de la démographie urbaine comme la loi de Zipf en était la loi de référence statique [134-136]. Le travail des économistes et géographes de la fin du XX^e a été de réconcilier les deux lois, par de petites adaptations de la loi de Gibrat.

8.2. Modèles récents

8.2.1. Modèle de Gabaix

Les équations 8.15 et 8.16 montrent qu'il n'y a pas grand chose — pourvu par ailleurs qu'on puisse atteindre une distribution stationnaire — pour passer d'une loi de Gibrat à une distribution des populations urbaines en loi de puissance, réconciliant ainsi les deux paradigmes, dynamique et statique, de la démographie urbaine. Théoriquement, il convient faire en sorte que le domaine d'approximation $\mu(S) \simeq \text{cte}$ soit le plus large possible et que la distribution $p(S, t)$ converge vers une distribution stationnaire. Pour cela, on peut envisager de rajouter de la « friction » dans le processus, ralentissant ainsi la croissance moyenne de S et permettant au système de converger.

Cette friction peut être modélisée par l'introduction d'un taux de mortalité ou par l'ajout d'une barrière réflexive en une valeur minimale w_0 . C'est l'argument développé d'abord par Lévy et Salomon [137], étendu par Sornette et Cont [133] et repris par Xavier Gabaix [118] dans le contexte urbain.

En posant $x(t) = \log w(t)$ et $l(t) = \log \eta(t) - \gamma$, le processus de Gibrat 8.11 devient :

$$x(t + 1) = \max(x(t) + l(t), x_0) \quad (8.18)$$

où $x_0 = \log w_0$.

La barrière en w_0 est bien réflexive : elle empêche les tailles de ville de dériver vers $-\infty$ sans supprimer les villes qui deviendraient trop petites. Les populations inférieures à w_0 se voient en quelque sorte offrir une « seconde chance » de recommencer leur marche aléatoire.

Toutefois, pour garantir la convergence et éviter une dérive vers $+\infty$, il est nécessaire d'imposer la condition $r = \langle l \rangle < 0$ (le cas $r = \langle l \rangle > 0$ conduisant à une

loi log-normale indépendamment de la barrière)¹.

En faisant l'hypothèse que l se comporte suffisamment bien, on peut réécrire l'équation 8.18 dans la limite continue sous la forme d'une équation de Langevin :

$$\frac{dx}{dt} = r + \xi(t) \quad (8.19)$$

avec $\langle \xi(t) \rangle = 0$ et $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma_0^2 \delta(t - t')$.

L'équation de Fokker-Planck associée est :

$$\partial_t p(x, t) = -r \partial_x p(x, t) + \frac{\sigma_0^2}{2} \partial_x^2 p(x, t) \quad (8.20)$$

dont la solution stationnaire, solution de $\partial_t p(x, t) = 0$ est

$$p_\infty(x) = A - \frac{B}{\mu} e^{-\mu x} \quad \text{avec} \quad \mu = 1 + \frac{2|r|}{\sigma_0^2}, \quad (8.21)$$

soit pour la variable $w(t)$:

$$p_\infty(w) = \frac{\mu w_0^\mu}{w^{1+\mu}}, \quad (8.22)$$

ce qui est bien la forme d'une loi de puissance.

Puisque par construction $\langle w(t) \rangle = \langle S(t) \rangle / e^{\gamma t} = 1$, la condition de normalisation :

$$1 = \langle w \rangle = \int_{w_0}^{\infty} w p_\infty(w) dw \quad (8.23)$$

donne

$$\mu = \frac{1}{1 - w_0} \quad \text{et} \quad p_\infty(w) \propto \frac{1}{w^{1 + \frac{1}{1 - w_0}}}, \quad (8.24)$$

soit une loi de puissance avec un exposant de Zipf proche de 1 quand $w_0 \rightarrow 0$.

C'est ce résultat principal que retrouve Gabaix et qui lui sert de justification à l'existence de la loi de Zipf pour les villes. Gabaix réconcilie ainsi les deux paradigmes statique (Zipf) et dynamique (Gibrat) de la démographie urbaine.

Gabaix va plus loin et cherche à expliquer les variations autour de la valeur d'exposant 1 qui peuvent être observées empiriquement. Ces variations peuvent s'expliquer par le fait que r et σ_0 dépendent en général de la taille w .

De fait, le modèle de Gabaix constitue aujourd'hui le paradigme majoritaire de la loi de la croissance urbaine. Pourtant, malgré le saut théorique important

1. Cela peut sembler paradoxal puisqu'en apparence les populations décroîtraient en moyenne. En réalité, la condition $r > 0$ est équivalente à dire que $\langle \log \eta \rangle < \gamma$, c'est-à-dire que la croissance moyenne d'une ville donnée dans le processus de dérive aléatoire est inférieure à la croissance moyenne de toutes les villes, nouveau paradoxe résolu par l'existence de la barrière réflexive qui vient en moyenne compenser la dérive vers les petites valeurs. Ainsi, si les villes voient leur population croître moins vite que la moyenne dans leur marche aléatoire, c'est que proche de la barrière w_0 , elles peuvent rebondir d'autant.

de la réconciliation entre lois statique et dynamique et la possibilité d'expliquer les variations temporelles ou spatiales de l'exposant de Zipf, le modèle de Gabaix n'est pas satisfaisant dans ses hypothèses, notamment dans le sens empirique d'une barrière réflexive qui empêcherait les villes d'être plus petites qu'une certaine taille alors qu'en réalité, les villes peuvent décroître éternellement, voire disparaître.

8.2.2. Modèle de Bouchaud-Mézard

Le modèle proposé par Bouchaud et Mézard pour expliquer l'inégalité de répartition des revenus [138] est aisément transposable à la théorie urbaine. Contrairement aux modèles précédents, c'est un modèle avec interaction : dans le système de villes considéré, les villes échangent des habitants entre elles, ce sont les *migrations*. L'équation d'évolution de la population d'une ville i est alors donnée par :

$$\frac{dS_i}{dt} = \eta(t)S_i + \sum_{j \neq i} (I_{ij}S_j - I_{ji}S_i) \quad (8.25)$$

où $\eta(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne r et de variance σ_0^2 et les termes I_{ij} sont des coefficients de migration. La variation de la population d'une ville i s'explique donc comme la résultante d'un terme endogène, stochastique, qui correspond à une forme d'accroissement naturel et d'un terme migratoire, dépendant des populations des autres villes.

En supposant $J_{ij} = J/N$ pour N villes, on peut trouver une solution de champ moyen au modèle. En posant $\bar{S}(t) = N^{-1} \sum_i S_i(t)$ la population moyenne et en supposant que $\bar{S}(t) = \langle S(t) \rangle = e^{rt}$ à tous les temps (hypothèse d'auto-moyenne), on a pour la quantité normalisée $w_i(t) = S_i(t)/\bar{S}(t)$:

$$\frac{dw_i}{dt} = (\eta(t) - r) w_i + J(1 - w_i) \quad (8.26)$$

dont l'équation de Fokker-Planck associée est, dans la convention d'Itô :

$$\partial_t p(x, t) = -J\partial_w ((1 - w)p(w, t)) + \frac{\sigma_0^2}{2} \partial_w^2 (w^2 p(w, t)), \quad (8.27)$$

qui a pour solution stationnaire

$$p_\infty(w) \propto \frac{e^{-\frac{\mu-1}{w}}}{w^{1+\mu}} \quad \text{avec} \quad \mu = 1 + \frac{2J}{\sigma_0^2}, \quad (8.28)$$

qui se comporte asymptotiquement comme une loi de puissance dont on peut voir que la valeur de l'exposant dépend de l'intensité des migrations, une intuition que nous allons fortement développer dans le prochain chapitre.

9 - Loi de la croissance urbaine

Roma celtica, soror et aemula Romae.

Devise d'Autun

Au chapitre 7, nous avons vu puis remis en cause la façon dont la loi de Zipf pouvait rendre compte de la distribution des populations de ville à l'équilibre. Au chapitre 8, nous avons revu les différents modèles stochastiques qui ont été proposés pour décrire l'évolution dynamique des populations urbaines. Nous y avons en particulier compris que le modèle de Gabaix (voir *supra* 8.2.1), paradigme contemporain de la croissance urbaine, pouvait prédire l'apparition de la loi de Zipf. Mais, dès lors d'une part que la loi de Zipf n'a plus de raison de servir de référence, d'autre part que le modèle de Gabaix repose sur des hypothèses fortes et peu réalistes, que peut-on tenir pour acquis? Dans ce chapitre, inspiré de [2], nous proposons un nouveau modèle explicatif de la croissance urbaine. Les interactions, identifiées dans le modèle de Bouchaud-Mézard (voir *supra* 8.2.2) sous la forme de transferts de valeur puis dans le contexte urbain sous la forme de *migrations* [139] y jouent un rôle essentiel.

9.1. De l'importance des chocs migratoires

9.1.1. Une dynamique de population turbulente

Le grand nombre d'études sur la distribution de la population contraste avec le peu d'analyses empiriques de l'évolution temporelle des villes, capables d'évaluer directement les différents modèles évoqués au chapitre 8.

L'étude la plus significative de la dynamique urbaine a été proposée par Michael Batty et son choix de représenter les évolutions démographiques des villes sous la forme d'*horloges de rang* [140]. Ces horloges permettent de classer les villes par rang de population sur le cadran d'une horloge, la ville la plus grande étant à l'extérieur (de rang $r = 1$) et le rang décroissant à mesure que l'on s'approche du centre (voir un exemple français sur la figure 9.1).

Batty constate qu'à l'échelle des siècles, la dynamique de rang des villes est très riche et qu'une ville peut changer de rang de nombreuses fois sur une large gamme d'échelles de temps, ce qu'on peut qualifier de *dynamique turbulente*. En comparant l'évolution réelle de la population des plus grandes villes du monde sur 2 000 ans et des villes américaines sur 200 ans, Batty montre que le modèle de Gabaix est quantitativement et qualitativement incapable d'expliquer les dynamiques chaotiques observées dans la réalité.

Il manque donc un modèle capable d'expliquer la dynamique temporelle des systèmes de villes et son comportement micro-turbulent. À cet égard, nous n'avons

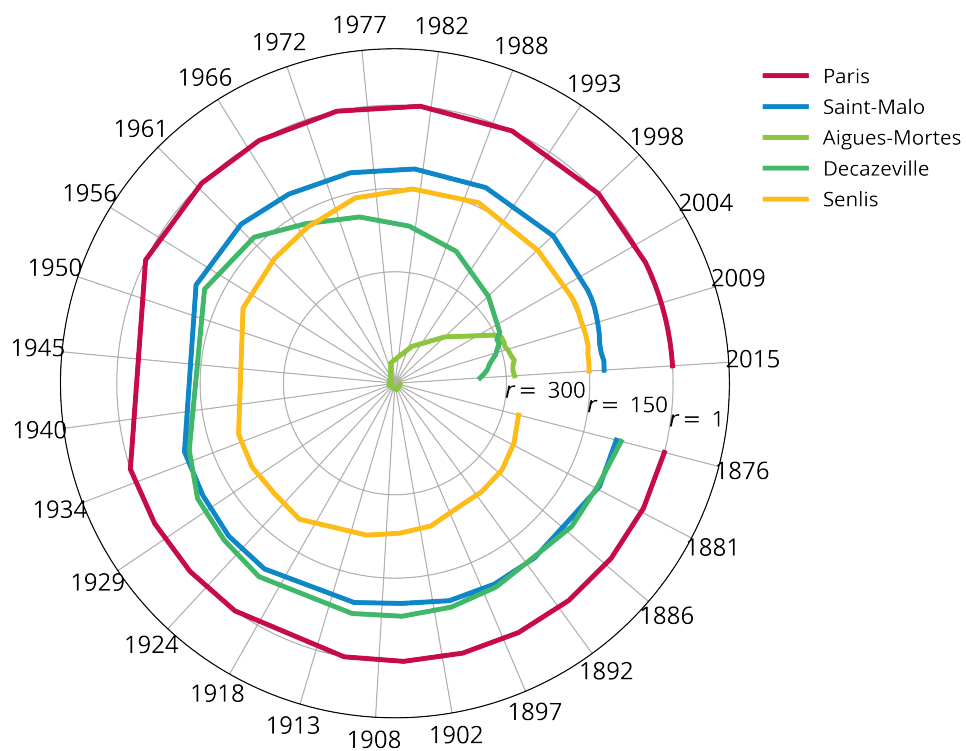


FIGURE 9.1 – Évolution du rang de population de plusieurs villes françaises au cours du temps. Si les trajectoires de villes comme Paris, Saint-Malo et Senlis sont relativement stables, les exemple d'Aigues-Mortes et Decazeville montrent que le destin d'une ville peut changer sur des échelles de temps très brèves.

pas seulement besoin d'une amélioration quantitative des modèles précédents mais d'un changement conceptuel. Pour ce faire, le plus raisonnable semble de repartir à zéro. Dans cette réflexion rafraîchie, nous verrons le rôle majeur joué par les interactions interurbaines sous la forme d'échanges de population : *les migrations interurbaines*.

9.1.2. Un nouveau modèle migratoire

Pour comprendre la croissance des villes, nous avons besoin d'une approche ascendante, partant de mécanismes élémentaires et reproduisant des tendances universelles générales. Sans perte de généralité, la dynamique de croissance d'un système de villes i ¹ de taille S_i peut être décomposée en la somme d'un terme de croissance naturelle (les naissances et les décès) et d'un terme migratoire, solde du nombre de nouveaux arrivants dans la ville moins le nombre d'émigrés [139]. Par commodité et pour faciliter la mise en cohérence avec les sources de données migratoires entre villes, nous proposons de recombinaison ces termes en séparant migrations au sein du système $\{S_i\}$ d'une part, croissance naturelle et migrations hors système d'autre part :

$$\partial_t S_i = \underbrace{\text{Croissance naturelle} + \text{Migrations hors de } \{S_i\}}_{\text{croissance « hors système »}} + \underbrace{\text{Migrations dans } \{S_i\}}_{\text{migrations interurbaines}} \quad (9.1)$$

Ce que nous appelons croissance hors système est donc l'addition de deux sources de croissance hétérogènes : la croissance naturelle de la ville i et les migrations qui n'ont pas lieu à l'intérieur du système des villes, qui correspondent essentiellement aux migrations internationales et aux échanges entre la ville i et des villes trop petites pour être prises en compte dans $\{S_i\}$. Mettre à part ces sources extérieures n'est pas absurde dans la mesure où elles sont minoritaires². On désigne par $N(i)$ l'ensemble des voisins de la ville i , c'est-à-dire les villes qui échangent un nombre non nul d'habitants avec i . Dans la suite de ce chapitre, on considère quatre jeux de données migratoires récentes dans quatre pays différents (migrations interurbaines américaines entre 2012 et 2017 [141], migrations intercommunales françaises entre 2003 et 2008 [142], migrations interurbaines britanniques entre 2012 et 2016 [143] et migrations interurbaines canadiennes entre 2012 et 2016 [144]).

1. Par exemple, un pays.

2. Aux États-Unis, entre 2013 et 2017, plus de 9 000 000 de personnes ont déménagé d'une zone métropolitaine à une autre, contre 1 300 000 personnes à l'étranger et 1 500 000 personnes dans le reste des États-Unis. Les migrations au sein du système des villes sont donc dominantes.

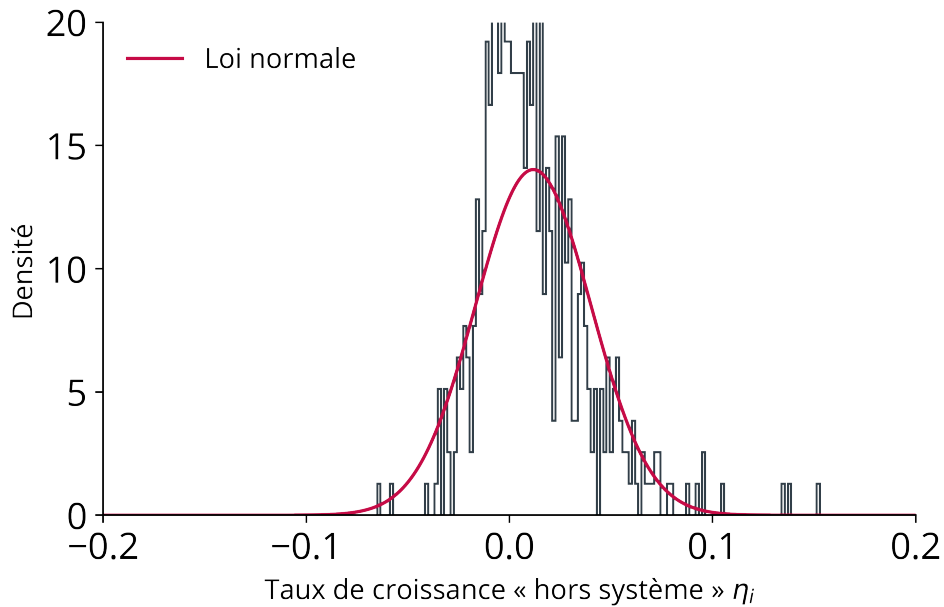


FIGURE 9.2 – La croissance « hors système » d'un système de villes s'approxime facile par une loi normale. Exemple ici des villes françaises.

En France et aux États-Unis¹, on trouve une loi d'échelle reliant le nombre de voisins de la ville i à sa population : $|N(i)| \propto S_i^\gamma$, où $\gamma \simeq 1/2$. L'évolution temporelle de la taille de la population S_i peut alors être écrite comme

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = \eta_i S_i + \sum_{j \in N(i)} (J_{j \rightarrow i} - J_{i \rightarrow j}) \quad (9.2)$$

où la quantité η_i est une variable aléatoire représentant la croissance « hors système » de la ville i , empiriquement distribuée selon une loi normale (voir figure 9.2) et le flux $J_{i \rightarrow j}$ est le nombre d'individus déménageant de la ville i à la ville j pendant une période de temps dt .

Cette équation est une équation-bilan simple, très similaire à l'équation 8.25 du modèle de Bouchaud-Mézard. On note également que s'il existe un équilibre exact des flux migratoires ($J_{i \rightarrow j} = J_{j \rightarrow i}$), l'équation devient équivalente au modèle de Gibrat dans sa version continue (équation 8.17), qui prédit une distribution log-normale des populations.

Partir de l'équation générale 9.2 est très naturel puisqu'elle revient à faire la somme des naissances, des décès et des migrations d'une façon réarrangée. Néanmoins, comme c'est souvent le cas lorsque l'on utilise des équations de base très générales, elle est difficile à utiliser. Des simplifications de cette équation ont été

1. Les ensembles de données britannique et canadien sont entièrement connectés, ce qui conduit à $\gamma = 0$.

Données	I_0	μ	ν	σ	R^2
Flux américains (avec distance)	$1,6 \cdot 10^{-2}$	0,46	0,44	0,53	0,42
Flux américains (sans distance)	$3,8 \cdot 10^{-3}$	0,38	0,37	/	0,34
Flux français (avec distance)	$3,7 \cdot 10^{-3}$	0,49	0,49	0,54	0,45
Flux français (sans distance)	$4,3 \cdot 10^{-4}$	0,45	0,45	/	0,38

TABLE 9.1 – Estimations des paramètres du modèle gravitaire obtenues par régression log-linéaire avec et sans l'effet de la distance. Les distances n'expliquent qu'une petite partie (environ 8 %) de la dispersion des flux.

proposées, dans lesquelles diverses hypothèses conduisent au modèle de Gibrat, mais manquent les grandes fluctuations des termes migrations, dont nous verrons qu'elles sont quantitativement et qualitativement cruciales.

Le flux migratoire $J_{i \rightarrow j}$ dépend *a priori* (et au moins) des populations S_i et S_j et de la distance d_{ij} entre les villes i et j . Une façon naturelle d'étudier les flux est de tester le modèle gravitationnel [145] :

$$J_{i \rightarrow j} = I_0 \frac{S_i^\mu S_j^\nu}{d_{ij}^\sigma} \quad (9.3)$$

où μ, ν et σ sont des exposants empiriques et I_0 est un préfacteur.

Puisque, fidèle à notre méthodologie générale, notre objectif est de construire un modèle aussi parcimonieux que possible, nous pouvons tester l'importance relative des distances d_{ij} et des populations S_i dans l'explication des migrations. On compare donc deux modèles différents :

- un modèle gravitaire « complet » $J_{i \rightarrow j} = I_0 \frac{S_i^\mu S_j^\nu}{d_{ij}^\sigma}$;
- un modèle sans distance $J_{i \rightarrow j} = I_0 S_i^\mu S_j^\nu$.

On ajuste les paramètres des deux modèles sur les données françaises et américaines par régression. Les résultats sont présentés dans la table 9.1.

On remarque d'abord que les paramètres de la France et des États-Unis sont très proches ($\mu \in [0.38, 0.49]$ et $\nu \in [0.37, 0.44]$ et $\sigma \simeq 0.5$) et que dans les deux pays, les deux modèles expliquent environ 40 % de la dispersion. L'augmentation de la qualité du *fit* résultant de la prise en compte des distances d_{ij} est faible : la valeur de R^2 augmente de 8 % dans le cas américain et de 7 % dans le cas français. L'utilisation d'un modèle sans distance donne donc des résultats presque aussi bons qu'un modèle gravitaire complet tout en étant beaucoup plus simple.

Cette analyse nous amène à la conclusion que les effets de distance ne sont pas primordiaux pour expliquer les flux migratoires. On peut les mettre de côté et les considérer comme des effets de second ordre par rapport à la taille des villes qui joue le rôle dominant. Cela ne signifie pas que les distances sont négligées, mais qu'elles peuvent être incluses dans le bruit. Ainsi, il est possible de réduire les équations d'évolution à un modèle universel, dépendant uniquement de la population.

On note également que le modèle gravitaire est globalement très bruité puisque la plupart de la dispersion ne peut être expliquée ni par les populations ni par les distances. Si la qualité du modèle gravitaire est un sujet commun de débat dans la littérature [146], il est très simple à écrire et donne des résultats suffisamment acceptables pour l'analyse présentée ici. En effet, un point clef du raisonnement est de noter que bien que les fluctuations autour du modèle $I_0 S_i^\mu S_j^\nu$ soient très grandes, on peut toujours traiter *complètement* les flux migratoires en les considérant comme des variables aléatoires.

Ainsi, le terme $J_{i \rightarrow j}$ peut être représenté par une variable de la forme $I_0 S_i^\mu S_j^\nu x_{ij}$, où les variables aléatoires x_{ij} ont moyenne égale à 1 et encodent tout le bruit (qui inclut toutes sortes de paramètres cachés dont la distance). On désigne par $I_{ji} = J_{i \rightarrow j}/S_i$ la probabilité par unité de temps et par habitant de passer de la ville i à la ville j . Le rapport I_{ij}/I_{ji} en fonction du rapport des populations S_i/S_j exhibe, en moyenne, un comportement linéaire (figure 9.3, colonne de gauche). Cela implique que $\mu = \nu$, et que nous avons, en moyenne, une sorte de bilan détaillé $\langle J_{i \rightarrow j} \rangle = \langle J_{j \rightarrow i} \rangle$ ¹, mais que, de manière cruciale, les fluctuations sont non nulles.

Plus précisément, si l'on pose $X_{ij} = (J_{j \rightarrow i} - J_{i \rightarrow j})/I_0 S_i^\nu$, on observe qu'empiriquement les variables aléatoires X_{ij} ont des queues épaisses, c'est-à-dire qu'elles sont distribuées selon une loi large qui décroît asymptotiquement comme une loi de puissance avec un exposant $\alpha < 2$. L'équation 9.2 peut donc être réécrite sous la forme :

$$\sum_{j \in N(i)} (J_{j \rightarrow i} - J_{i \rightarrow j}) = I_0 S_i^\nu \sum_{j \in N(i)} X_{ij}. \quad (9.4)$$

En supposant que les corrélations entre les variables X_{ij} sont négligeables, le théorème central limite généralisé (voir annexe A) permet d'écrire que

$$\zeta_j = \frac{1}{|N(i)|^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j \in N(i)} X_{ij} \quad (9.5)$$

suit une loi de Lévy L_α de paramètre α (pour une taille suffisante de $N(i)$)². Ceci est confirmé empiriquement : les données françaises, américaines, britanniques et canadiennes sont mieux représentées par une loi stable de Lévy que par toute autre distribution (figure 9.3, colonne de droite). Les estimations de α sont données dans la table 9.2³. On écrit donc :

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = \eta_i S_i + D S_i^\nu N(i)^{\frac{1}{\alpha}} \zeta_i \quad (9.6)$$

$$= \eta_i S_i + D S_i^\nu S_i^{\frac{\gamma}{\alpha}} \zeta_i. \quad (9.7)$$

1. $\langle \dots \rangle$ renvoie à la moyenne sur les bruits η .
2. Les lois de Lévy comportent un paramètre d'asymétrie, qui n'est pas détaillé ici mais qui n'est pas empiriquement nul.
3. On rappelle notamment que l'important est d'observer une valeur $\alpha < 2$.

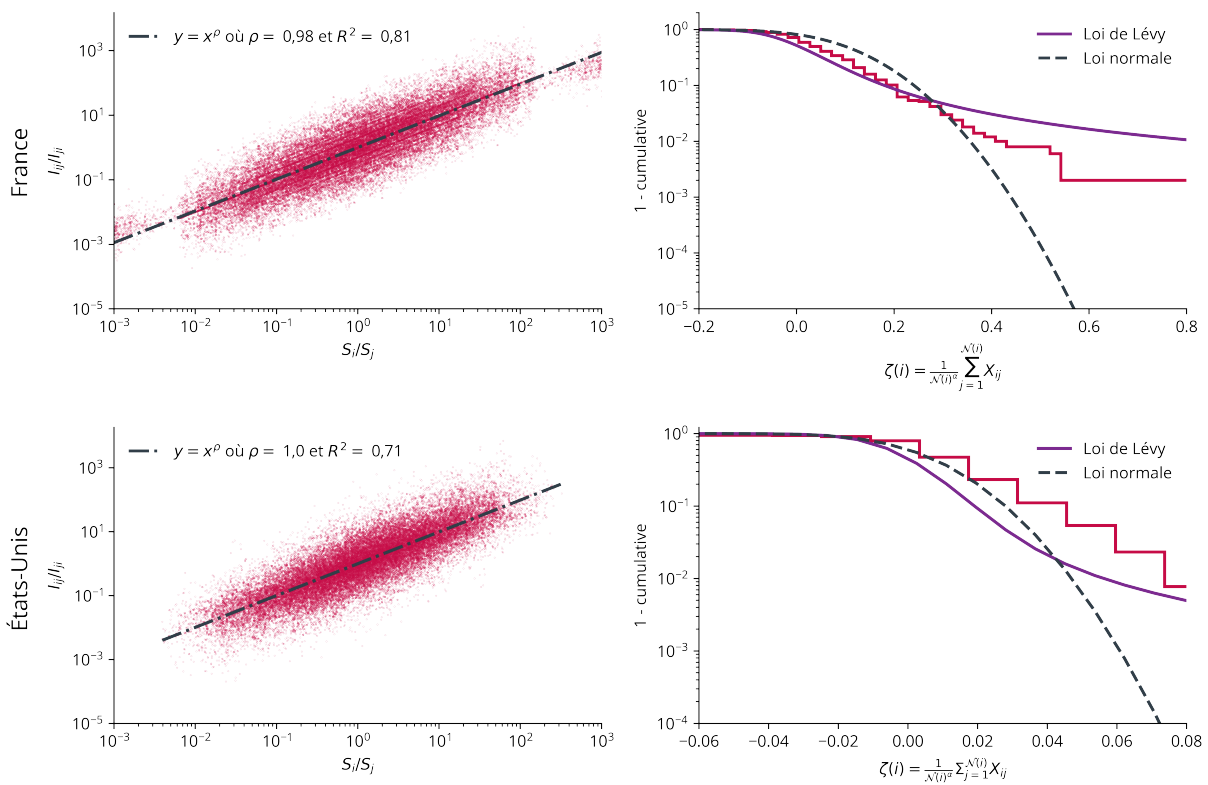


FIGURE 9.3 – Analyse des flux migratoires en France et aux États-Unis. À gauche, rapport du taux de migration en fonction du rapport des populations. La ligne est une régression de loi de puissance qui donne un exposant égal à 1. À droite, fonction de distribution cumulative empirique (queue de droite) des flux migratoires renormalisés ζ_i , comparée à une loi de Lévy et à la loi normale.

Données	Maximum de vraisemblance	Kolmogorov-Smirnov	Log-moments	Hill
France 2003-2008	$1,43 \pm 0,07$	$1,2 < \alpha < 1,8$	1,3	$1,4 \pm 0,3$
É-U 2013-2017	$1,76 \pm 0,07$	$1,7 < \alpha < 1,8$	1,6	Non-concluant
R-U 2012-2016	$1,32 \pm 0,26$	Non-concluant	1,0	$1,2 \pm 0,8$
Canada 2012-2016	$1,69 \pm 0,12$	Non-concluant	1,9	$1,4 \pm 0,6$

TABLE 9.2 – Estimation du paramètre α de quatre façons différentes dans les quatre pays. On compare une estimation par maximum de vraisemblance au paramètre minimisant la distance de Kolmogorov-Smirnov, à la méthode des log-moments et au paramètre de Hill.

Ainsi, l'équation de base 9.2 peut se réécrire sous la forme d'une équation différentielle stochastique d'un nouveau genre :

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = \eta_i S_i + DS_i^\beta \zeta_i \quad (9.8)$$

où $D \propto I_0$ et $\beta = \nu + \gamma/\alpha$ et η_i est un bruit gaussien ayant pour moyenne le taux de croissance moyen r et pour dispersion σ . Dans cette équation, ni les bruits ni les villes ne sont corrélés, c'est-à-dire que l'augmentation du nombre d'habitants du fait des migrations à un endroit ne signifie pas qu'il y a une baisse du nombre d'habitants symétrique à un autre. C'est bien évidemment une simplification de la réalité mais qui permet d'avoir des équations découplées.

L'équation 9.8 est l'équation de la croissance des villes, qui régit la dynamique des grandes populations urbaines. Dans l'équation 9.8, les deux bruits sont non corrélés et multiplicatifs et la convention d'Itô semble ici plus appropriée que celle de Stratonovich car les populations au temps t sont calculées indépendamment des termes de migration interurbaine au temps $t + dt$ [147]. Les estimations des différents paramètres sont récapitulées dans la table 9.3.

Pour résumer notre démarche, le théorème de la limite centrale, eu égard à la largeur de la distribution des flux migratoires, nous permet de montrer que de nombreux détails dans l'équation 9.2 sont inutiles et que la dynamique peut être décrite par l'équation 9.8, plus universelle.

Si l'importance des migrations a déjà été notée par le passé, même sous la forme d'une équation différentielle stochastique [139], nous montrons qu'un bruit gaussien est empiriquement non représentatif et moins approprié qu'un bruit multiplicatif de Lévy, à moyenne nulle. Il s'agit d'un changement théorique important, d'abord

Données	γ	ν	$\beta = \nu + \gamma/\alpha$	β mesuré
France 2003-2008	$0,55 \pm 0,06$	$0,4 \pm 0,3$	$0,8 \pm 0,4$	$0,75 \pm 0,07$
US 2013-2017	$0,36 \pm 0,05$	$0,4 \pm 0,4$	$0,6 \pm 0,5$	$0,96 \pm 0,05$
UK 2012-2016	0	$0,7 \pm 0,3$	$0,7 \pm 0,3$	$0,51 \pm 0,05$
Canada 2012-2016	0	$0,5 \pm 0,4$	$0,5 \pm 0,4$	$0,78 \pm 0,06$

TABLE 9.3 – On observe un bon accord entre les valeurs mesurées et prédites de β aux États-Unis et en France. Les ensembles de données britanniques et Canadiens sont petits et entièrement connectés (ce qui implique $\gamma = 0$) et donc davantage bruités.

quantitatif puis — selon le principe de l'émergence (voir *supra* le chapitre 4) — qualitatif.

9.2. Un nouveau cadre conceptuel

9.2.1. Pas de distribution d'équilibre

L'équation 9.8 régit l'évolution des populations urbaines et son analyse à grande échelle donne des indications sur la distribution stationnaire des populations urbaines. Pour discuter de ses propriétés analytiques, on suppose que les fluctuations gaussiennes sont négligeables par rapport au bruit de Lévy et écrivons $\eta_i \simeq r$. L'équation de Fokker-Planck correspondante (avec la convention d'Itô) peut être résolue en utilisant le formalisme des dérivés d'ordre fractionnaire (voir annexe B) [148-151], conduisant à une distribution au temps t qui peut être développée en puissances de S :

$$P(S, t) = N \alpha(1 - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{a(t)^{-\alpha\beta - \alpha(1-\beta)k}}{|S|^{1+\alpha\beta + \alpha(1-\beta)k}} \quad (9.9)$$

où C_k est un préfacteur qui est une fonction de α , β et k et indépendant de t et S et où

$$a(t) = \left(\frac{r/c_L}{\exp(r\alpha(1-\beta)t) - 1} \right)^{1/\alpha(1-\beta)} \quad (9.10)$$

avec $c_L \propto D^\alpha$.

Ce développement montre que la distribution de probabilité des tailles des villes est dominée aux grands S par l'ordre $k = 1$ et converge à l'équilibre vers une distribution de Pareto d'exposant $\alpha \neq 1$, apparemment cohérente avec la loi de Zipf. La vitesse de convergence vers cette loi de puissance peut être estimée par le rapport $\lambda(S, t)$ du premier et du second terme du développement :

$$\lambda(S, t) \propto a(t)^{-\alpha(1-\beta)} S^{-\alpha(1-\beta)} \sim \frac{r}{D^\alpha} \left(\frac{e^{rt}}{S} \right)^{\alpha(1-\beta)}, \quad (9.11)$$

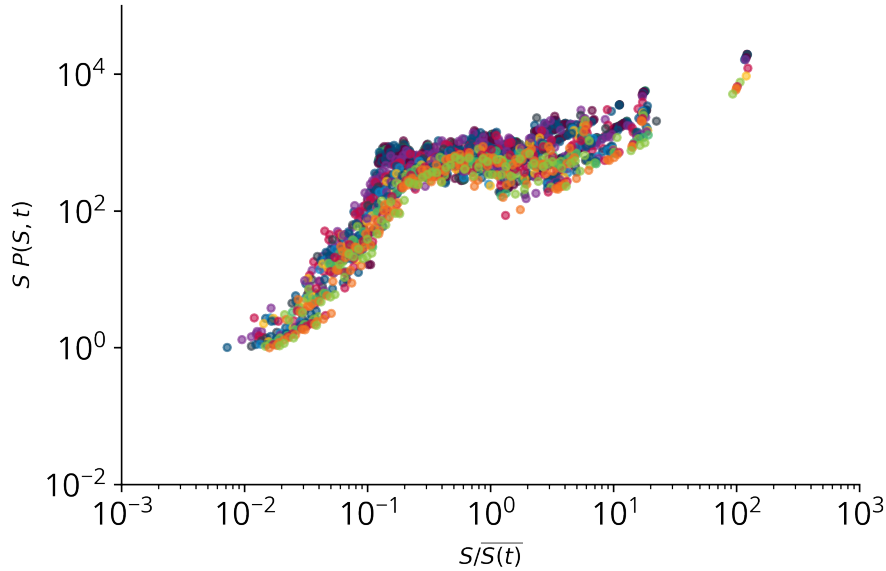


FIGURE 9.4 – Répartition de la quantité $P(S, t)S$ en fonction du rapport $S/\overline{S}(t)$ pour les 500 plus grandes villes françaises entre 1876 et 2015. Chaque couleur correspond à une année différente. On observe que les graphes de toutes les années s'effondrent en une fonction universelle unique de $S/\overline{S}(t)$ en accord avec le résultat de l'équation 9.13.

l'équilibre étant atteint si $\lambda(S) \ll 1$. Pour les valeurs de β proches de 1 (autour de 0,8 dans les données), on a $\alpha(1 - \beta) \simeq 0,2$. Par conséquent,

$$\left(\frac{e^{rt}}{S}\right)^{\alpha(1-\beta)} \ll 1 \iff S > 10^5 \overline{S}(t) \quad (9.12)$$

où $\overline{S}(t)$ est la taille moyenne des villes au temps t . La gamme de taille pour laquelle nous pouvons observer une distribution en loi de puissance de paramètre α est donc, dans la pratique, très loin dans la queue supérieure de la distribution et peut ne pas exister. Il n'y a donc pas de raison d'observer la loi de Zipf ou toute autre distribution stationnaire pour les populations urbaines. Nous notons également qu'à partir de l'équation 9.9, il existe une loi d'échelle de la forme

$$P(S, t) = \frac{1}{S} F_{\alpha, \beta} \left(\frac{S}{\overline{S}(t)} \right) \quad (9.13)$$

où la fonction $F_{\alpha, \beta}$ dépend du pays ou système considéré, ce qui est confirmé empiriquement pour la France, seul pays pour lequel les données soient suffisantes (voir figure 9.4).

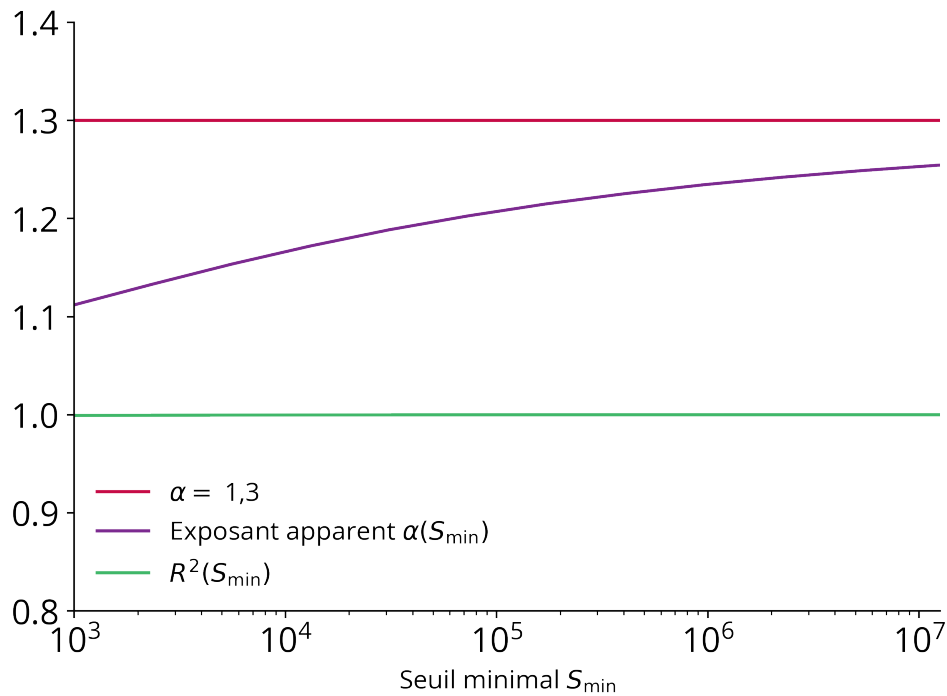


FIGURE 9.5 – Fit en loi de puissance du développement B.36 avec $\alpha = 1,3$ en fonction du seuil inférieur de la taille des villes considérées S_{\min} . La régression de l'exposant *apparent* $\alpha(S_{\min})$ de très bonne qualité $R^2 \simeq 1$) bien que le développement lui-même ne soit pas une loi de puissance, similairement aux résultats de [127]. L'exposant apparent est plus petit que α mais converge lentement vers $\alpha = 1,3$ lorsque la valeur du seuil S_{\min} augmente. Les paramètres sont ici : $\alpha = 1,3, \beta = 0,8, r = 0,01, D = 0,06$ et $t = 500$.

Enfin, en *fittant* naïvement l'équation 9.9 comme si c'était une loi de puissance, on peut montrer que la queue supérieure de la distribution de la taille des villes peut être confondue avec une loi de Pareto, avec un *exposant apparent*, qui semble de très bonne qualité (R^2 très proche de 1) mais qui varie avec la définition de la queue supérieure, confirmant un artefact de mesure déjà évoqué en 7.2.2. Lorsque la taille des villes augmente, l'exposant apparent change et peut s'écarter considérablement de 1 tout en convergeant vers la valeur donnée par α (voir figure 9.5), comme cela est effectivement observé, par exemple en France ($\alpha = 1,4$) et aux États-Unis ($\alpha = 1,3$).

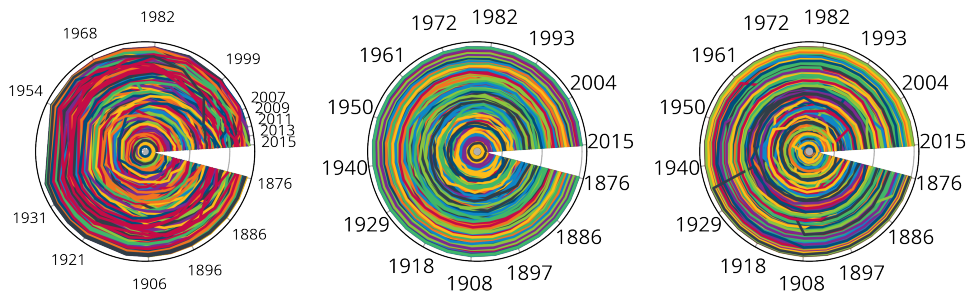


FIGURE 9.6 – On compare la dynamique réelle des 500 plus grandes villes françaises entre 1876 et 2015 (à gauche) à la prédiction statistique de Gabaix (au milieu) et à notre prédiction statistique (à droite). Sur les horloges, chaque ligne représente un rang de ville au cours du temps où le rayon est donné par le rang et l'angle par le temps. Dans cette représentation, la plus grande ville est au centre et la plus petite au bord du disque.

9.2.2. Dynamiques de rang

La validité de notre modèle peut être testée plus avant sur de grandes périodes de temps, dans l'esprit de Batty. Batty avait montré que la dynamique des rangs de ville sur le long terme était très turbulente et ne pouvait pas résulter du modèle de Gabaix [140]. Nous comparons sur la figure 9.6 l'horloge des rangs empiriques pour France de 1876 à 2015 aux résultats obtenus avec le modèle de Gabaix et au nôtre.

On voit que dans le modèle de Gabaix (au milieu), le rang des villes est stable en moyenne, et non turbulent : les trajectoires de rang sont concentriques et le rang d'une ville oscille autour d'un certain niveau. Dans la dynamique réelle, au contraire, les villes peuvent émerger ou mourir et des changements très rapides peuvent se produire. Dans notre modèle (droite), les grandes fluctuations du bruit de Lévy sont capables de reproduire statistiquement ces flux et reflux de villes, ce que nous pouvons montrer quantitativement en définissant la variation de rang moyenne par unité de temps

$$d = \frac{1}{NT} \sum_t \sum_{i=1}^N (r_i(t) - r_i(t-1)) \quad (9.14)$$

sur T années et pour N villes. On constate que les fluctuations de Lévy sont beaucoup plus aptes à reproduire la dynamique turbulente des villes, ce qui se comprend qualitativement : les fondations et les disparitions des villes — dues, par exemple, aux guerres, à la découverte de nouvelles ressources, à des politiques de colonisation, etc. — s'expliquent par des chocs migratoires incompatibles avec la loi normale mais compatibles avec la loi de Lévy, dont une propriété essentielle est de pouvoir déstabiliser sa propre somme « en un coup » : si les X_i sont des variables

Saut de rang moyen par unité de temps d	Données	Lévy	Gabaix
France 1876–2015	6,0	6,1	8,0
É-U 1790–1990	4,7	16	27
R-U 1861–1991	4,8	16	25

TABLE 9.4 – Les paramètres du modèle de Lévy et du modèle de Gabaix sont ajustés sur les ensembles de données françaises entre 2003 et 2008, américaines entre 2013 et 2017 et britanniques entre 2012 et 2016 respectivement. L'ensemble de données le plus complet est le française, qui contient la population totale de toutes les villes à tous les temps tandis qu'aux États-Unis et au Royaume-Uni, seules les populations des plus grandes villes sont enregistrées (les 100 premières aux États-Unis et les 40 premières au Royaume-Uni), ce qui peut expliquer les grands écarts de la valeur d .

aléatoires indépendants distribuées selon un loi de Lévy, alors il est possible d'avoir

$$X_{n+1} \sim \sum_{i=1}^n X_n. \quad (9.15)$$

Enfin, nous pouvons comparer la qualité des différents modèles dans leur capacité à prédire le plus grand saut de rang d'une ville au cours du temps. Nous confirmons que le modèle de Gabaix est incapable de reproduire ces très grandes fluctuations et que notre équation s'accorde très bien avec les données (voir figure 9.7).

En conclusion, nous montrons que les détails microscopiques ne sont pas pertinents et que la dynamique des villes peut être représentée par une équation différentielle universelle. Un point crucial dans ce raisonnement est que, bien que nous disposions en moyenne d'une sorte d'équilibre détaillé qui conduirait à un processus gaussien de croissance multiplicative, c'est l'existence de fluctuations largement distribuées des flux migratoires interurbains qui perturbe leur croissance au point d'en changer la forme, un phénomène typique d'émergence.

Nous montrons par ailleurs que si un régime stationnaire est prédit par notre modèle, ce régime stationnaire n'est généralement pas atteint, puisque la croissance des villes suit une dynamique de retour à l'équilibre très longue.

9.2.3. Interprétation

Ce sont donc les grands chocs migratoires qui gouvernent les variations temporelles des populations urbaines et qui peuvent, en un temps très court, changer le destin d'une ville, le meilleur exemple étant celui de San Francisco qui, pendant la ruée vers l'or, passa d'un peu plus de 1 000 à 150 000 habitants entre 1850 et 1870. Plus près de chez nous, la population du Creusot est plus que décuplée entre 1831 et 1856 par l'implantation de la famille Schneider.

Finalement, cette équation porte un message optimiste, assez éloigné du darwinisme sous-jacent d'une loi de Gibrat, dans laquelle l'accumulation de petits chocs

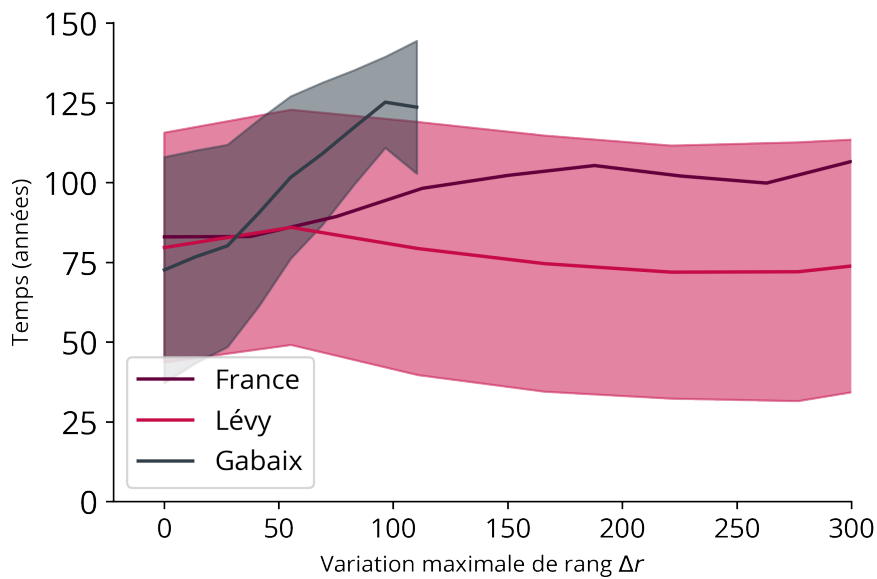


FIGURE 9.7 – Nombre moyen d’années nécessaires pour observer la variation maximale de rang Δr en fonction de Δr . Bien que la dispersion soit importante, le modèle de Lévy est compatible avec les données réelles, contrairement au modèle de croissance de Gabaix.

incontrôlables conduit invariablement à une distribution très inégalitaire des villes. Elle montre que le destin d’une ville n’est pas figé et ne dépend pas de petits chocs — ceux qu’on ne peut pas contrôler — mais de grands chocs extérieurs, potentiellement provoqués par des décisions de planification urbaine, qui ont donc un rôle majeur à jouer pour renforcer l’attractivité d’une ville : une façon de plaider pour l’interventionnisme politique.

Conclusion

Dans cette partie, nous sommes revenus sur ce qui est sans doute la caractéristique urbaine la plus importante : la population. Nous en avons d'abord justifié la valeur et la capacité à expliquer d'autres quantités urbaines au chapitre 6.

La population étant comprise comme essentielle, nous nous sommes ensuite intéressé au chapitre 7 au problème de sa distribution sur un territoire. Cette distribution est très étendue, ce qui rejette l'idée d'une taille optimale des villes. Nous avons montré comment cette distribution a longtemps été perçue comme une loi de puissance particulière, la loi de Zipf, avant que des mesures plus nombreuses et plus récentes remettent en cause ce paradigme.

Après le problème statique, nous avons comparé au chapitre 8 les différents modèles visant à rendre compte de l'évolution dynamique des villes. Nous avons vu que ces modèles, stochastiques, ont longtemps cherché à expliquer ce qui était le paradigme commun de la distribution statique des villes et donc à retrouver l'existence d'une distribution stationnaire particulière, la loi de Zipf.

Au chapitre 9 enfin, nous avons présenté ce qui nous semble être notre résultat le plus important. Nous avons vu que les modèles de croissance habituels ne pouvaient pas rendre compte de la rapidité avec laquelle certaines villes pouvaient voir leur population croître ou décroître et avons identifié les chocs migratoires comme la principale variable contrôlant le destin des villes. Mathématiquement ces chocs peuvent se représenter par des lois à queue épaisse, les lois de Lévy, introduisant une équation dynamique stochastique d'un nouveau genre. Nous avons montré que cette équation rejette l'idée d'une distribution stationnaire et de la loi de Zipf, tandis qu'elle rend mieux compte que les modèles précédents des dynamiques urbaines historiques.

Troisième partie
Dynamiques sociales

Introduction

Les migrations interurbaines, dont nous avons vu dans la partie précédente la capacité à expliquer les dynamiques démographiques macroscopiques des villes et donc à en modifier le cours sont en quelque sorte les dynamiques de long-terme des villes. En parallèle, et en général sur des échelles de temps plus courtes, les villes sont aussi le théâtre de migrations internes — les déménagements intra-urbains — , qui les font évoluer de l'intérieur et modifient le poids, l'attrait et la valeur relatives des quartiers. Bien sûr, migrations internes et externes sont corrélées et indissociables, l'attractivité d'un quartier pouvant se faire sentir au-delà des frontières de la ville.

Il n'en reste pas moins que ces dynamiques internes sont causes et conséquences de phénomènes sociaux et économiques importants : attractivité, prix de l'immobilier, gentrification, ségrégation. La répartition des habitants dans une ville ne se fait en effet pas de façon homogène et dépend fortement de marqueurs économiques, sociaux voire ethniques ou religieux.

Dans cette partie, nous tentons d'écrire quelques lois de dynamiques sociales dans les villes. Nous proposons d'abord de synthétiser les différents modèles de ségrégation urbaine (chapitre 10) qui ont pu être développés pour expliquer l'hétérogénéité de répartition des individus dans une villes selon des critères de revenus ou selon des critères plus personnels de « vivre ensemble » et de tolérance à l'autre, cas étudié par le modèle de Schelling. Ensuite, nous nous intéresserons à un problème sociologique connu, celui de la gentrification. Nous verrons d'une part qu'elle est indissociable du phénomène inverse, qu'on peut qualifier d'appauvrissement, et que cette symétrie est aussi quantitative malgré le décalage dans le nombre d'études entre les deux phénomènes. Nous proposerons de modéliser ces deux formes de dynamiques sociales dont les aspects sont multiformes par la dynamique des revenus dans les villes, simplification brutale mais utile pour écrire une loi quantitative (chapitre 11). Nous verrons qu'un modèle issu de la physique statistique, le modèle de l'électeur, permet très convenablement de représenter ces dynamiques, mettant en évidence l'influence respective d'un quartier sur ses voisins lorsqu'il s'agit de tenter d'en prédire l'évolution sociale. Conformément à notre méthode générale, nous verrons qu'il est possible d'écrire une loi d'évolution des revenus dans les villes à seulement deux paramètres et dont les résultats sont tout à fait satisfaisants et à capacité prédictive.

10 - Modèles de ségrégation

Car il y avait autour de Combray deux « côtés » pour les promenades, et si opposés qu'on ne sortait pas en effet de chez nous par la même porte, quand on voulait aller d'un côté ou de l'autre : le côté de Méséglise-la-Vineuse, qu'on appelait aussi le côté de chez Swann parce qu'on passait devant la propriété de M. Swann pour aller par là, et le côté de Guermantes.

Marcel Proust – *Du côté de chez Swann* (1913)

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier différents modèles explicatifs du phénomène de ségrégation spatiale dans les villes, issus de la littérature économique. Le premier de ces modèles est une adaptation du modèle d'Alonso-Muth-Mills étudié au chapitre 2, le second est un modèle-agent dynamique : le modèle de Schelling.

10.1. Agents hétérogènes dans le modèle d'Alonso-Muth-Mills

10.1.1. Modèle de premier ordre

Le modèle d'Alonso-Muth-Mills [47, 48] que nous avons présenté précédemment (voir *supra* 2.2) permet de faire quelques prédictions sur la ségrégation sociale dans les villes, c'est-à-dire sur la répartition spatiale différenciée d'agents hétérogènes. Comme le modèle d'Alonso-Muth-Mills considère qu'il n'y a dans la ville qu'un agent unique représentatif, la façon la plus simple d'introduire de l'hétérogénéité est de dédoubler l'agent en deux agents : un riche et un pauvre.

Supposons en effet qu'il existe dans la ville deux types d'agents : riches et pauvres. Ces agents se distinguent par leurs revenus. Les riches sont plus riches parce qu'ils gagnent plus d'argent :

$$Y_r > Y_p. \quad (10.1)$$

Pour le moment, nous retenons que le coût de transport entre les deux groupes est identique.

Notons \tilde{x} la position frontière entre riches et pauvres. En \tilde{x} , le loyer est le même pour les deux groupes : $R_r(\tilde{x}) = R_p(\tilde{x})$. En considérant que le logement est un bien normal¹, il vient que la surface occupée par un ménage riche en \tilde{x} est

1. En économie, un *bien normal* est un bien dont la consommation augmente avec le revenu.

supérieure à celle occupée par le ménage pauvre :

$$s_r(\tilde{x}, u_r) > s_p(\tilde{x}, u_p). \quad (10.2)$$

La condition d'Alonso 2.7 donne :

$$-\frac{dR_p(\tilde{x})}{dx} = \frac{T'(\tilde{x})}{s_r(\tilde{x}, u_p)} > \frac{T'(\tilde{x})}{s_r(\tilde{x}, u_r)} = -\frac{dR_r(\tilde{x})}{dx}, \quad (10.3)$$

c'est-à-dire que le gradient de loyer est plus fort pour le ménage pauvre que le ménage riche. Ainsi,

$$\begin{cases} R_p(x) < R_r(x) \text{ pour } x < \tilde{x} \\ R_p(x) > R_r(x) \text{ pour } x > \tilde{x}. \end{cases} \quad (10.4)$$

Dans le modèle à deux catégories d'agents et à coût de transport identique, le modèle d'Alonso prédit que les ménages les plus pauvres sont plus compétitifs sur le marché immobilier que les ménages riches à proximité du centre-ville et moins compétitifs lorsque l'on s'en éloigne. Les ménages défavorisés occupent des logements plus près du centre mais plus petits quand les ménages aisés, qui privilégient des grands logements, préfèrent habiter loin du centre-ville.

Ce résultat très simple repose sur l'hypothèse de premier ordre d'une égalité entre coûts de transport pour les ménages pauvres et aisés. On peut néanmoins supposer que les ménages aisés sont plus enclins à payer plus cher leurs moyens de transport que les ménages pauvres, pour gagner du temps ou du confort par exemple.

10.1.2. Valeur du temps

Il est courant en économie d'introduire la notion de *valeur du temps* [152, 153], déjà ébauchée en 2.3.4. La valeur du temps permet de convertir un coût temporel en coût économique : puisqu'il est possible d'utiliser du temps pour gagner de l'argent (en travaillant), perdre du temps doit avoir un coût — bref, le temps c'est de l'argent.

Intuitivement, la valeur du temps est liée au salaire, le coût d'une heure perdue devant être du même ordre de grandeur que ce qu'on aurait pu gagner en travaillant cette heure-là ; la valeur du temps augmente donc avec le salaire, plus l'on est riche, plus l'on préfère utiliser son temps efficacement :

$$V_r > V_p. \quad (10.5)$$

Le coût de transport du modèle d'Alonso-Muth-Mills peut donc être réécrit sous la forme d'un *coût généralisé*, qui est la somme d'un coût monétaire pur et d'un coût temporel égal au temps perdu fois la valeur du temps.

En suivant désormais le raisonnement de Glaeser *et al.* [154], on considère qu'il y a deux types de moyens de transport dans la ville : les transports en commun

et la voiture¹. Ces moyens de transport se distinguent par leurs coûts généralisés (voir *infra* 12.2.3) :

$$C_{\text{voiture}} = C + V \frac{d}{v_v} \quad (10.6)$$

$$C_{\text{public}} = \left(f + \frac{d}{v_m} \right) V \quad (10.7)$$

où C est le coût financier d'une voiture, f le temps supplémentaire constant du transport public, d la distance et v_v et v_m les vitesses respectives de la voiture et du réseau de transport public (avec $v_v > v_m$).

Pour chaque groupe de revenus i , la condition d'Alonso 2.7 donne :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = - \frac{T'_i(x)}{s_i}. \quad (10.8)$$

Si l'on suppose $V_r f > C > V_p f$, les riches ne prennent jamais les transports en commun et les pauvres seulement jusqu'à une certaine distance d^* . À l'intérieur de cette zone ($x < d^*$), la condition pour que les pauvres vivent en centre-ville est

$$- \frac{\partial R_p(x)}{\partial x} = \frac{V_p}{v_m s_p} > \frac{V_r}{v_v s_r} = - \frac{\partial R_r(x)}{\partial x} \quad (10.9)$$

soit

$$\frac{s_r}{s_p} > \frac{v_m V_r}{v_v V_p}. \quad (10.10)$$

Glaeser *et al.* montrent que cette inégalité permet d'expliquer le fait empirique de centres-villes plus pauvres dans les villes américaines. Il ne permet pas en revanche d'expliquer pourquoi ce n'est pas le cas dans les villes européennes ni ne rend compte de la forme plus complexe que prennent les limites des quartiers riches et pauvres dans les villes, bien plus indépendants de la distance au centre qu'un modèle strictement radial ne le prédit [155].

Le modèle d'Alonso-Muth-Mills à agents hétérogènes est un modèle d'équilibre qui explique la répartition entre deux populations dans une ville. Thomas Schelling, économiste américain, est le premier à avoir introduit un modèle dynamique reposant sur beaucoup moins d'hypothèses et expliquant la manière dont s'établit la ségrégation urbaine à partir de comportements individuels : c'est le modèle de Schelling.

1. Les effets de congestion sont négligés ici.

10.2. Modèle de Schelling

10.2.1. Description

Le modèle de Schelling [156] est un modèle-agent de ségrégation spatiale. Sur une grille, deux catégories d'agents peuvent se déplacer et maximisent leur fonction d'utilité, qui décroît avec la part d'individus de l'autre catégorie. Le modèle de Schelling est donc un modèle à interactions répulsives entre des agents différents, les catégories pouvant symboliser le niveau de revenus, la religion, l'origine ethnique, etc. C'est historiquement le premier modèle de sciences sociales à expliquer l'apparition de motifs macroscopiques à partir d'interactions individuelles.

On considère une grille bidimensionnelle de sites occupables par les agents. Une partie ρ de ces sites est inoccupée. Soit un agent i en la case x , entouré par huit cases voisines. Notons $S(i)$ le nombre de voisins de i de la même catégorie et $D(i)$ le nombre de voisins de la catégorie différente. La fonction d'utilité de i est définie à l'instant t par :

$$u(i, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{D(i)}{D(i)+S(i)} > T \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.11)$$

où T est appelé le seuil de tolérance. À chaque pas de temps, un agent aléatoire i change de position de façon à maximiser sa fonction d'utilité : s'il existe un site vide y où il peut augmenter son utilité, i déménage en y . Sinon, il reste sur place.

L'équilibre est atteint au bout d'un grand nombre de simulations et dépend des deux paramètres initiaux du modèle : le seuil de tolérance T et le nombre de sites vides ρ .

Les résultats du modèle sont inattendus et montrent qu'une ville peut être dans un état de ségrégation même pour un seuil de tolérance élevé ! Ici encore, une approche de physique statistique nous permet d'expliquer ces résultats.

10.2.2. Physique statistique du modèle de Schelling

Le modèle de Schelling est l'équivalent en sciences sociales du modèle d'Ising avec lequel il partage quelques similarités [157]. Numériquement, à densité ρ donnée, il y a trois phases d'état final dans le modèle de Schelling, qui dépendent du seuil de tolérance T , qui joue le rôle de la température [158] :

- Pour $T < T_1$, le système est gelé et malgré la faible tolérance des agents, reste dans un état proche de sa situation initiale, même si elle implique un nombre important d'agents frustrés.
- Pour $T_1 < T < T_2$, le système est suffisamment « chaud » pour évoluer et converge vers un équilibre ségrégué : les deux populations se séparent en deux phases et minimisent leur frontière commune.
- Pour $T_2 < T$, le système est tolérant et l'équilibre permet une importante mixité entre les agents.

Pour $\rho < 50\%$, les valeurs des transitions T_1 et T_2 sont surprenamment élevées. Dans la limite où $\rho \rightarrow 0$, $T_1 = 1/2$ et pour $\rho < 48\%$, $T_2 = 3/4$.

Enfin, on peut montrer que dans les conditions de la phase ségréguée, la relaxation vers l'état d'équilibre traduit une dynamique agrégative (*coarsening dynamics*) caractérisée par une décroissance de la longueur d'interface moyenne entre les deux catégories d'agents en loi de puissance [157, 159] :

$$\langle L \rangle \sim t^{-\alpha} \quad (10.12)$$

avec dans la limite de faible vacance ($\rho \rightarrow 0$), $\alpha \simeq \frac{1}{2}$.

Très récemment a été étudié l'effet du vieillissement dans le modèle de Schelling [160]. Par équivalence avec la physique statistique, le vieillissement se définit par un effet d'inertie ou d'attachement émotionnel à un lieu : plus longtemps un agent est resté à une certaine position, moins il a envie d'en bouger.

Abella *et al.* [160] montrent que les effets du vieillissement sont non triviaux et changent complètement la dynamique du modèle de Schelling. Ils cassent la transition entre phase ségréguée et phase de tolérance, une phase ségréguée continue d'exister même pour de très hautes valeurs de tolérance individuelle. La dynamique d'agrégation est également ralentie :

$$\langle L \rangle \sim t^{-0,2} \quad (10.13)$$

pour $T < 0,75$.

À partir de ces modèles de ségrégation se pose la question de la compréhension des dynamiques sociales des quartiers d'une ville, notamment du fameux effet de la *gentrification*. Le chapitre suivant propose ainsi de comprendre comment, localement, la population d'un quartier change au cours du temps.

11 - Modèle de l'électeur pour les dynamiques de revenus

Les inégalités urbaines constituent un sujet central des études sociales [161] et représentent un défi majeur pour le développement des villes, l'hétérogénéité spatiale des classes sociales ayant des conséquences sociales, économiques, éducatives ou sanitaires importantes [162-164]. Dans les études sociologiques, la dynamique spatiale des inégalités est souvent vue à travers le prisme de la gentrification. Ce phénomène est le processus en plusieurs étapes par lequel des quartiers à faibles revenus se transforment après l'arrivée de résidents plus aisés [165, 166]. Au cours de l'installation de la nouvelle population, la valeur immobilière du quartier augmente, de nouvelles entreprises se développent et les prix des loyers montent, provoquant le déménagement progressif des anciennes familles [167, 168]. La gentrification a été largement étudiée au cours des quarante dernières années [169], dans des villes données [167, 169-171] ou à l'échelle mondiale.

Le processus inverse à la gentrification, par lequel des quartiers se paupérisent, a en revanche été beaucoup moins conceptualisé, ce qui a conduit certains auteurs à remettre en cause la pertinence du concept de gentrification *per se* [172]. Les deux phénomènes sont pourtant corrélés puisque l'exode de population généré par la gentrification dans un quartier entraîne généralement d'autres changements (étalement urbain, paupérisation) ailleurs dans la ville. Une question évidente est alors de comprendre pourquoi et comment certains quartiers peuvent s'enrichir ou s'appauvrir [173].

Dans ce chapitre, qui est une reprise de [6], nous réduirons cette question complexe, qui a de multiples implications sociales, démographiques, culturelles ou économiques, au problème plus quantitatif et plus facile à traiter de la dynamique spatiale des revenus, en laissant de côté les aspects qualitatifs de la gentrification et de la paupérisation.

Nous présenterons d'abord quelques résultats théoriques d'un modèle bien connu de la physique statistique, le « modèle de l'électeur ». Nous verrons qu'il est empiriquement bien adapté pour décrire l'évolution des revenus moyens des quartiers d'une ville, qui dépend du niveau économique de ses voisins immédiats. Cette modélisation nous permettra enfin de faire quelques prédictions quantitatives dans plusieurs villes du monde.

11.1. Modèle de l'électeur

11.1.1. Modèle de l'électeur classique

Le modèle de l'électeur est un modèle simple, inspiré de la dynamique du spin, qui décrit la formation du consensus au sein d'une population [174-180]. Soit $G = (V, E)$ un graphe, le modèle de l'électeur est un processus markovien $S(t)$ sur G d'espace d'état $\{-1, 1\}^{|V|}$.

Chaque sommet se retourne à un taux qui est égal à la fraction de ses voisins dans l'état opposé. À chaque pas de temps t , la valeur $S_x(t)$ où $x \in V$ est mise à jour selon la probabilité de transition suivante :

$$w_x(S) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_x}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} S_y \right) \quad (11.1)$$

où $N(x)$ sont les voisins de x dans G . Par conséquent, la probabilité de transition de l'état de x est égale à la fraction de voisins en désaccord. L'opinion moyenne sur toutes les configurations possibles $\langle S_x \rangle$ ¹ évolue comme

$$\frac{d\langle S_x \rangle}{dt} = -2\langle w_x(S) S_x \rangle \quad (11.2)$$

$$= -\langle S_x \rangle + \frac{1}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} \langle S_y \rangle. \quad (11.3)$$

Si G est un réseau régulier avec $|N(x)| = z$, on peut montrer que l'aimantation moyenne $M = \sum_x \langle S(x) \rangle / |V|$ est conservée. En conséquence, si ρ est la proportion initiale d'états +1 dans G , la probabilité d'atteindre le consensus final +1 est ρ et la probabilité d'atteindre le consensus final -1 est $1 - \rho$. Enfin, on peut prouver que la densité interfaciale sur un réseau hypercubique évolue comme :

$$I(t) = \begin{cases} t^{-1/2}, & d = 1, \\ \log(t)^{-1}, & d = 2, \\ \mathcal{O}(1), & d > 2. \end{cases} \quad (11.4)$$

11.1.2. Modèle de l'électeur bruité

On considère ici une légère variation du modèle précédent [181, 182] sur un graphe G où le taux de transition est donné par

$$w_x(S) = \frac{w_0}{2} + \frac{w_1}{2} \left(1 - \frac{S_x}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} S_y \right) \quad (11.5)$$

avec $0 \leq w_0 + w_1 \leq 1$.

Dans un tel modèle, la probabilité de retournement est non-nulle même lorsque tous les spins sont alignés. La probabilité de retournement est également limitée par

1. $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur les réalisations possibles.

$w_0 + w_1$ mais, quitte à renormaliser le temps, on peut supposer que $w_0 + w_1 = 1$ de sorte que la probabilité de retournement lorsque tous les voisins sont en désaccord est de 1. L'opinion moyenne dans le modèle évolue alors comme :

$$\begin{aligned}\frac{d\langle S_x \rangle}{dt} &= -(w_0 + w_1)\langle S_x \rangle + \frac{w_1}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} \langle S_y \rangle \\ &= -\langle S_x \rangle + \frac{w_1}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} \langle S_y \rangle\end{aligned}\quad (11.6)$$

Sur un réseau hypercubique, $|N(x)| = 2d$ et l'aimantation moyenne $M = \frac{1}{N} \sum_x \langle S(x) \rangle$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{dM}{dt} = -(1 - w_1)M = -w_0M \quad (11.7)$$

de sorte que l'aimantation moyenne évolue comme suit

$$M(t) = M(0)e^{-w_0 t}. \quad (11.8)$$

Ainsi, le modèle de l'électeur bruité converge en moyenne vers une aimantation nulle et aucun consensus n'est atteint quelles que soient les conditions initiales. C'est une conséquence du bruit introduit par le terme w_0 : même lorsque tous les spins sont en haut, il y a en moyenne $w_0 N \Delta t$ spins qui se retournent pendant le temps Δt .

Sur un réseau hypercubique, la fonction de corrélation à 2 points $S(x, y) = \langle S_x S_y \rangle$ obéit à une règle similaire à celle de l'équation 11.6 :

$$\frac{dS(x, y)}{dt} = -2S(x, y) + \frac{w_1}{2d} \left(\sum_{y' \in N(x)} S(x, y') + \sum_{x' \in N(y)} S(x', y) \right). \quad (11.9)$$

Dans un système homogène, on peut définir $S(x, y) = G(x - y)$ et dans la limite continue, la fonction de corrélation G obéit à l'équation de diffusion

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = D \nabla^2 G \quad (11.10)$$

où $D = w_1/d$. En $d = 2$, on peut prouver que la densité d'interface évolue en

$$I(t) \sim (\log t)^{-1}, \quad (11.11)$$

ce qui est similaire au résultat de l'équation 11.4.

11.2. Dynamiques sociales dans les villes

11.2.1. Données

Le modèle de l'électeur peut trouver toute sa place dans un contexte social. En effet, la valeur des spins peut aussi représenter l'avis d'individus, leur classe

sociale ou n'importe quelle information individuelle sous forme binaire. Le modèle de l'électeur nous semble donc adapté pour décrire la dynamique urbaine entre quartiers riches et pauvres, selon l'intuition que le niveau de revenus d'un quartier dépend de celui des quartiers adjacents. Pour étudier cela, nous disposons pour cela de deux jeux de données, américains et français.

Aux États-Unis, notre analyse s'appuie sur les données annuelles disponibles des revenus des ménages entre 2010 et 2019 à l'échelle des *census tracts*¹ [183]. Nous recoupons ces données avec les frontières des 159 FUAs définies par l'OCDE aux États-Unis. Nous ne gardons que les villes de 200 tracts, ce qui nous laisse 45 villes.

En France, nous utilisons les données annuelles de revenus des ménages au niveau des îlots regroupés pour l'information statistique (IRIS) de l'INSEE entre 2001 et 2017 [184]. Nous croisons ces données avec les délimitations des 85 FUAs en France parmi lesquelles nous gardons les villes avec plus de 150 IRIS, ce qui nous laisse 9 villes.

11.2.2. Modèle

Dans chaque ville, on calcule la moyenne des revenus médians des ménages chaque année :

$$\mu(t) = \overline{s_i(t)} \quad (11.12)$$

où $s_i(t)$ est le revenu médian des ménages du secteur (*tract* ou IRIS) i au temps t . On divise ensuite les secteurs en deux ensembles — en-dessous de la moyenne ($s_i(t) < \mu(t)$) ou au-dessus de la moyenne ($s_i(t) \geq \mu(t)$) — et l'on définit le statut de la zone i par

$$S_i(t) = \begin{cases} -1, & \text{if } s_i(t) < \mu(t), \\ 1, & \text{if } s_i(t) \geq \mu(t). \end{cases} \quad (11.13)$$

Observant quelques bizarreries dans les données — comme des baisses brutales et ponctuelles des revenus des ménages sur une année — on régularise les données par convolution, en lissant les valeurs de revenus sur trois années. On calcule donc d'abord le niveau de chaque secteur chaque année, puis on recalcule ce niveau en tant que niveau moyen sur trois ans via une règle de majorité :

$$S_i(t) = \text{Arrondi} \left(\frac{1}{3} (S_i(t-1) + S_i(t) + S_i(t+1)) \right). \quad (11.14)$$

Cette classification donne donc une définition très simple du niveau de richesse d'un secteur par rapport à la ville. Chaque ville possède des tracts dans les deux ensembles avec une part relative de chaque catégorie proche de 50 %. Bien que très basique, cette définition est suffisante pour suivre l'évolution locale des revenus et pour identifier les changements sociaux les plus significatifs.

1. Un *tract* compte autour de 2 000 habitants.

Dans les données, on peut suivre la part de chaque catégorie (riche ou pauvre) sur dix ans. Dans les villes américaines, la part des personnes vivant dans des quartiers plus pauvres que la moyenne a diminué sur 10 ans (en moyenne de 0,6 pp), mais elle a augmenté dans plus de 42 % des villes, ce qui nous permet de conclure qu'il n'y a pas de tendance globale et constante à la gentrification ou à la paupérisation à l'échelle des États-Unis.

Une question naturelle est alors de comprendre si nous pouvons expliquer pourquoi certains secteurs s'enrichissent ou s'appauvrissent et pas d'autres. Pour ce faire, on pourrait examiner les caractéristiques socio-économiques de chaque secteur et essayer d'en ébaucher la dynamique locale. Ici, nous cherchons plutôt, conformément à notre démarche générale, à identifier une loi universelle qui ne dépende pas des caractéristiques locales de chaque secteur. Nous formulons l'hypothèse que la probabilité qu'un quartier change de catégorie au cours du temps dépend de ses voisins immédiats.

Pour tester cette hypothèse, on construit un graphe des secteurs dans chaque ville, dans lequel les secteurs sont voisins si et seulement s'ils partagent une frontière commune. À chaque pas de temps, on compare $S_i(t)$ à $S_i(t-1)$ et à la part f_i de ses voisins qui étaient précédemment dans le statut opposé :

$$f_i = \frac{|\{j \in \mathcal{N}(i) \text{ où } S_j(t-1) \neq S_i(t-1)\}|}{|\mathcal{N}(i)|} \quad (11.15)$$

où $\mathcal{N}(i)$ est l'ensemble des voisins de i .

Lorsque le statut du secteur i change entre t et $t+1$, on dit que le secteur a *basculé*. Puisqu'on cherche à savoir si la probabilité de basculement d'un secteur dépend de la part de ses voisins dans l'état opposé, une approche naturelle consiste à rechercher une relation linéaire entre la part de voisins opposés f_i et la probabilité de basculement.

Cette relation peut ne pas être symétrique, ce qui signifie que la probabilité de basculer du statut $S_i = -1$ à $S_i = +1$ peut être différente de la probabilité de basculer du statut $S_i = +1$ à $S_i = -1$. Pour tester la symétrie et la validité de la relation linéaire entre la part de voisins en désaccord et la probabilité de basculement, on teste une régression linéaire à quatre paramètres :

$$\mathbb{P}(S_i(t) \neq S_i(t-1)) = w_0 + w_1 f_i + w_2 \delta_{S_i(t-1)=1} + w_3 f_i \delta_{S_i(t-1)=1} + \epsilon \quad (11.16)$$

où δ est le symbole de Kronecker et ϵ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

Des valeurs non nulles pour w_2 ou w_3 indiquent une asymétrie des probabilités de retournement. Les paramètres de la régression ajustée sur les données sont présentés dans la table 11.1. Le R^2 est de 0,40 aux États-Unis et de 0,72 en France. Les valeurs de w_0 et w_1 sont positives, ce qui signifie que la probabilité qu'un secteur se retourne augmente avec la part de voisins opposés, comme on s'y attend naïvement. Les p -valeurs des coefficients w_2 et w_3 sont cependant trop élevées pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle ils ne sont pas différents de 0 et doivent de ce fait être écartés.

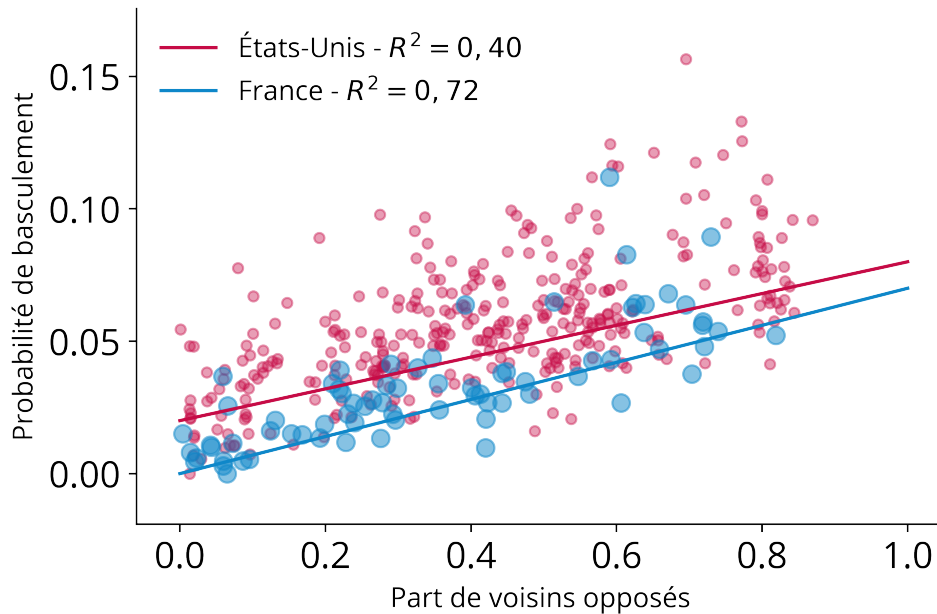


FIGURE 11.1 – Probabilité pour un *tract* i de changer de catégorie de revenus entre l'année t et $t + \Delta t$ ($\Delta t = 2$) en fonction de la fraction de voisins directs dans le niveau opposé f_i . Chaque point représente une ensemble de *tracts* de la même ville (8 points par ville). La probabilité de basculement peut être estimée de façon linéaire : $P(S_i(t) \neq S_i(t - 1)) = w_0 + w_1 f_i$. Les coefficients w_0 et w_1 sont prouvés être indépendants du sens de basculement.

Par conséquent, il convient de rejeter l'hypothèse selon laquelle la probabilité de basculer de -1 à $+1$ est différente de celle du processus inverse. La probabilité de basculement est symétrique et il n'y a pas de tendance à observer en moyenne la gentrification d'un secteur plutôt que son appauvrissement. On peut donc supposer :

$$\mathbb{P}(S_i(t) \neq S_i(t - 1)) = w_0 + w_1 f_i \quad (11.17)$$

dont la qualité est représentée sur la figure 11.1. Ce résultat montre qu'il existe une forte dépendance entre la probabilité de changer de catégorie de revenus d'un secteur et le revenu de ses voisins immédiats.

On souhaite maintenant comprendre si un modèle de l'électeur peut rendre compte de la dynamique du revenu des ménages dans les villes. On note d'abord que la distribution de degrés des secteurs dans les FUAs américaines et françaises (voir figure 11.2), sans être régulière, peut être bien approximée par un réseau régulier de degré 6.

Dans la table 11.1, on a vu également vu qu'en concaténant tous les secteurs dans les villes américaines et françaises, la probabilité qu'un secteur i bascule entre l'année t et l'année $t + \Delta t$ est une fonction linéaire de la part de ses voisins

Pays	Coefficient	Valeur	<i>p</i> -valeur
É-U	w_0	0.027 ± 0.003	0
	w_1	0.064 ± 0.006	0
	w_2	0.005 ± 0.004	0.29
	w_3	0.003 ± 0.008	0.75
France	w_0	0.004 ± 0.004	0.25
	w_1	0.073 ± 0.008	0
	w_2	0.005 ± 0.005	0.32
	w_3	-0.013 ± 0.011	0.25

TABLE 11.1 – Coefficients de la régression linéaire 11.16 appliquée aux secteurs des FUAs américaines et françaises avec les *p*-valeurs correspondantes. La *p*-valeur des coefficients w_2 et w_3 empêche de supposer qu'ils sont différents de 0. La probabilité de passer de $S_i = -1$ à $S_i = 1$ ne dépend donc pas différemment des voisins de i de la probabilité de passer de $S_i = 1$ à $S_i = -1$. Le pas de temps est de deux ans. On note également qu'en France, on peut supposer $w_0 = 0$.

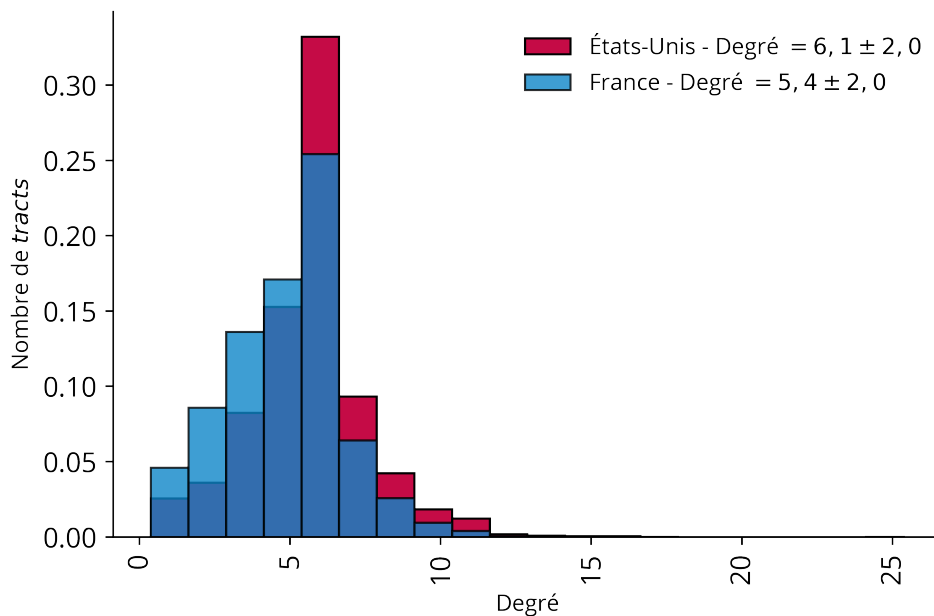


FIGURE 11.2 – Distribution du degré des *tracts* dans les FUAs américaines et françaises. On peut supposer que le réseau de *tracts* dans les villes américaines est française est un réseau régulier de degré 6.

dans l'état opposé. Empiriquement, cette probabilité est indépendante du fait que l'état initial est $+1$ ou -1 , conduisant à l'équation 11.17. Les valeurs de w_1 dans les deux pays correspondent à des temps de retournement typiques de l'ordre de $t_1 = 1/w_1 \simeq 33$ ans pour les États-Unis et 29 ans pour la France. Le temps typique pour que le système perde sa magnétisation globale et retourne à un état désordonné est de l'ordre de $t_0 = 1/w_0 \simeq 66$ ans pour les États-Unis (pour la France, l'aimantation est constante puisque $w_0 = 0$). Ces deux échelles de temps sont bien plus grandes que celle des données (~ 10 ans) ce qui implique que l'aimantation moyenne et la longueur d'interface sont à peu près constantes à l'échelle de temps de cette étude et que des temps bien plus longs sont nécessaires pour observer un effet comme la diminution logarithmique de la longueur d'interface par exemple [181].

11.2.3. Capacité prédictive

On a vu, à travers l'équation 11.17, qu'il existe une relation *a priori* entre la probabilité de basculement d'un secteur et la proportion de voisins de statut opposé et que cette relation s'apparente à l'équation d'évolution d'un modèle d'électeur bruité.

Il convient désormais de vérifier si un tel modèle est capable de reproduire *a posteriori* les tendances d'évolution du revenu des ménages dans les villes. On construit donc un modèle d'électeur contrefactuel avec les paramètres $w_0 = 0.015/\text{an}$ et $w_1 = 0.03/\text{an}$ aux États-Unis¹. Pour simplifier, on utilise les mêmes valeurs pour toutes les villes américaines. En commençant en 2010, on exécute plusieurs simulations numériques du modèle de l'électeur contrefactuel (1 000 exécutions par ville) et l'on compare chaque année le niveau de revenus empirique des secteurs à ceux prédits par les simulations.

Après dix ans de simulation, on calcule la probabilité simulée pour chaque secteur d'avoir basculé entre 2010 et 2019. On regroupe ensuite les quartiers dont la probabilité de basculement est similaire et l'on compare la probabilité simulée de basculement au fil des ans avec la probabilité empirique de basculement (voir figure 2). La même méthode est appliquée aux villes françaises en commençant en 2001 et en terminant en 2017 avec les paramètres $w_0 = 0$ et $w_1 = 0.03/\text{an}$ (voir figure 11.3).

On constate qu'il existe une tendance linéaire positive entre les probabilités simulées — et donc prédites — et réelles de basculement pour les secteurs français et américains. Le coefficient de la régression linéaire est inférieur à 1, ce qui signifie que nous avons tendance à surestimer la probabilité de basculement.

La principale raison à cela est l'existence de baisses ponctuelles du revenu médian des ménages dans certains secteurs, qui basculent un an avant de revenir à leur statut précédent. Le résultat est toutefois étonnamment satisfaisant pour

1. Les paramètres de l'équation 11.1 ont été calculés sur deux ans et il faut donc diviser les valeurs par deux.

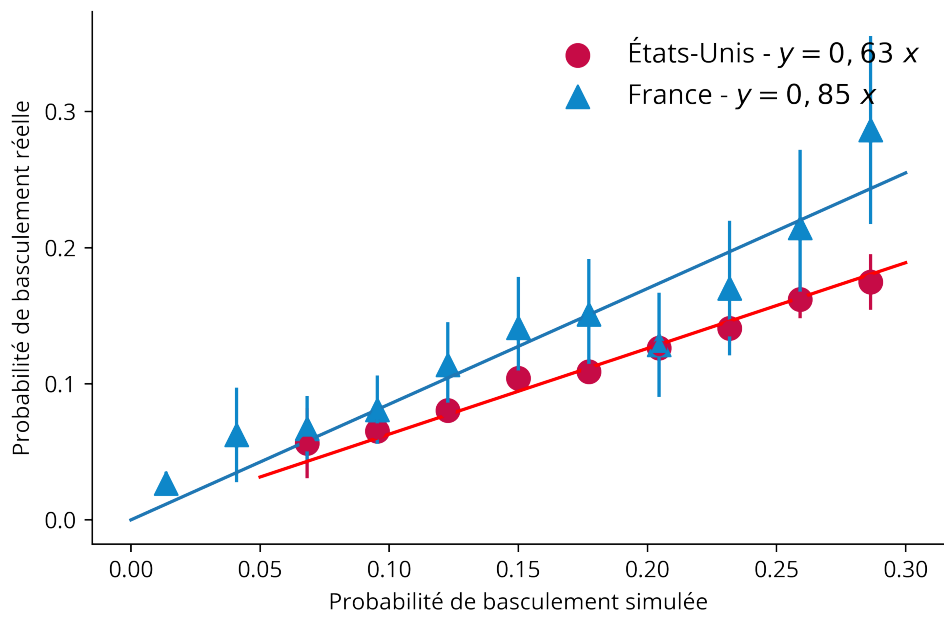


FIGURE 11.3 – On calcule la probabilité pour chaque *tracts* des villes américaines et françaises d’avoir changé de niveau de revenu entre 2010 et 2019 (aux États-Unis) ou entre 2001 et 2017 (en France). On regroupe ensuite les *tracts* ayant des probabilités simulées de basculement similaires et on compare cette probabilité avec la part des mêmes *tracts* qui ont effectivement basculé au fil des ans. Il existe une tendance positive linéaire entre les résultats simulés et les résultats attendus, bien que nous ayons tendance à surestimer la probabilité de changement de niveau. Pourtant, avec seulement deux paramètres aux États-Unis, notre modèle est capable de prédire quels *tracts* dans les villes américaines sont les plus susceptibles de changer de niveau de revenu au cours du temps. En France, un seul paramètre est nécessaire (puisque $w_0 = 0$) alors que la prédiction est beaucoup plus proche de la réalité.

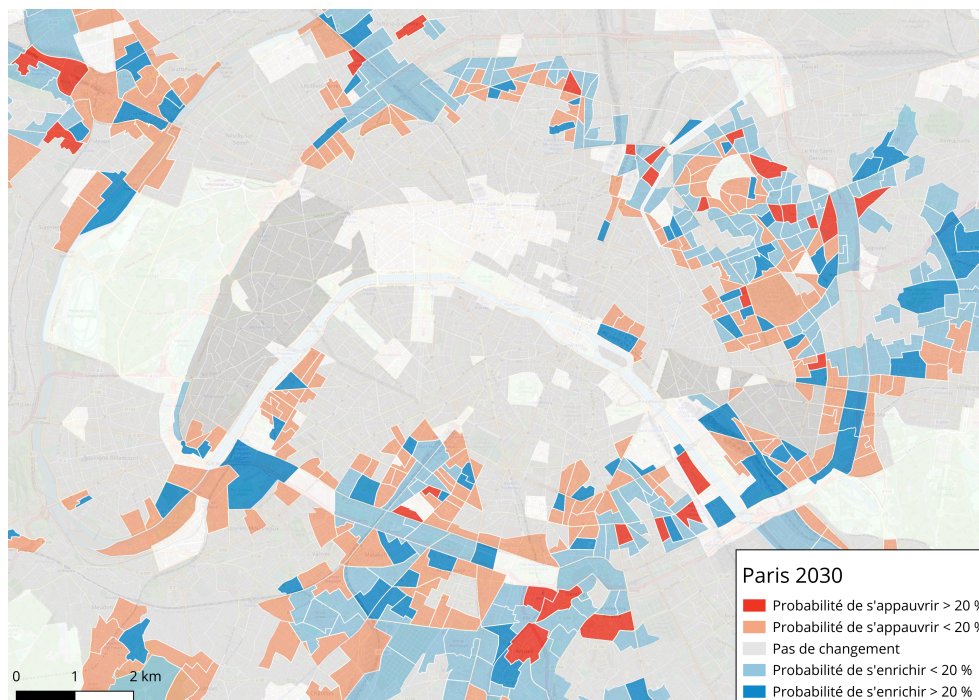


FIGURE 11.4 – Probabilité prédite de changement de catégorie de revenu avant 2030 pour les IRIS parisiens. Les secteurs foncés sont ceux qui présentent les plus fortes probabilités de changement de catégorie. La couleur (rouge ou bleue) prédit la direction du changement.

un modèle à seulement deux paramètres. De plus, si la probabilité de basculement est surestimée, elle peut être rectifiée par un simple facteur linéaire, ce qui signifie notamment que l'ordre de probabilité de basculement est conservé : le coefficient de Kendall entre les deux listes de probabilités est égal à 1 pour les États-Unis et à 0,92 pour la France.

Ces résultats nous conduisent à l'idée qu'il est possible de construire un modèle très simple de la dynamique spatiale des revenus dans les villes avec seulement deux paramètres pour les États-Unis et un pour la France (puisque en France $w_0 = 0$). Ce modèle nous permet d'estimer la probabilité qu'un quartier change de catégorie de revenu sur une période typique de 10 ans.

Il est donc théoriquement possible de faire une anticipation de l'évolution des revenus future dans une ville, ce que nous testons à Paris en France (figure 11.4).

En commençant en 2017, on simule 1 000 évolutions de Paris qui suivent un modèle d'électeur. Pour chaque secteur, on calcule une probabilité de basculement entre 2017 et 2030. Les zones les plus sombres correspondent à des probabilités de retournement plus élevées. Les zones bleues sont des zones à revenu inférieur à la moyenne pour lesquelles on trouve la probabilité d'être au-dessus de la moyenne en 2030. Les zones rouges sont des zones à revenu supérieur à la moyenne pour lesquelles on trouve la probabilité de passer sous la moyenne en 2030. Les secteurs

les plus intéressants sont les zones sombres, bleues ou rouges, puisqu'il y a de plus fortes raisons de penser qu'elles vont basculer au cours de la prochaine décennie.

Nos résultats s'inscrivent dans notre démarche générale exposée aux chapitres 3 et 4. En faisant abstraction des détails et des spécificités socio-économiques ou culturelles de chaque micro-quartier, nous avons montré qu'il était possible de trouver, à l'échelle d'un pays entier, une loi universelle et économe en paramètres (deux aux États-Unis, un seul en France) dotée d'une capacité prédictive qui, sans être parfaite, est très satisfaisante.

Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressé à un problème intra-urbain, celui des dynamiques sociales. Nous avons vu au chapitre 10 que dès lors que l'on suppose que la ville comporte des agents différents, aux revenus ou préférences variées, ceux-ci ont tendance à se répartir inégalement dans la ville selon leurs caractéristiques, au point parfois de ségréguer la ville en plusieurs phases et ce jusqu'à des niveaux de tolérance individuels à l'autre relativement élevés.

Ces dynamiques de ségrégation invitent naturellement à poser le problème de l'évolution sociale des quartiers et notamment de la gentrification. Nous avons montré que celle-ci était indissociable de son phénomène réciproque, que nous appelons appauvrissement. En modélisant au chapitre 11 les deux phénomènes par la dynamique d'évolution du revenu moyen des ménages dans les quartiers des villes américaines et françaises, nous avons montré que l'évolution sociale d'un quartier dépendait très fortement du niveau social de ses voisins immédiats et qu'un modèle de l'électeur, issu de la physique statistique, était très satisfaisant pour rendre compte et prédire les changements locaux de revenus dans une ville.

Quatrième partie

Transports urbains

Introduction

Dans la théorie économique, la ville est le résultat d'un équilibre entre des économies d'échelle, issues du regroupement des individus, et un coût de transport : coût pour aller travailler ou pour livrer des marchandises jusqu'au centre-ville.

Les transports, et surtout les réseaux qui les portent, ont donc une place centrale dans l'étude des villes. Ils facilitent les interactions entre individus à grande distance, donnent aux villes leur cohésion, leur structure et sous-tendent aussi leur évolution, la création d'une nouvelle infrastructure de transport public favorisant bien souvent le développement du nouveau quartier desservi.

Les réseaux de transport se divisent facilement en deux catégories : les transports publics et les transports privés. Les premiers peuvent s'appuyer sur des infrastructures lourdes (métro, rail, etc.) ou sur le réseau routier (pour les bus). Les seconds n'utilisent que le réseau routier. Malgré cette division, les deux types de réseau interagissent : ils attirent des publics complémentaires et une personne de plus dans le métro est une personne de moins sur la route.

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux deux types de réseaux et à la relation qui les lie. Nous verrons d'abord, sous le prisme des déplacements domicile-travail qu'il est possible d'écrire une équation simple associant trafic automobile et développement des transports en commun dans les villes (chapitre 12). Cette relation, universelle, permet également de faire quelques prédictions environnementales et de comparer l'effet relatif des transports publics et de l'étalement urbain dans la réduction des gaz à effet de serre issus des transports publics. Elle montre en particulier que la densité de population dans une ville n'est qu'au second ordre le facteur explicatif de ces émissions dans les villes. Fort de ce résultat, nous essayerons de décrire plus en détail ce que nous entendons par développement des transports en commun en introduisant une nouvelle métrique, *People Near Transit*, caractérisant leur accessibilité au sens de la proximité entre stations et lieux d'habitation (chapitre 13). Après en avoir arrêté la définition, nous proposons un nouvel ensemble de données de cette mesure à l'échelle mondiale, à destination des spécialistes des villes. Enfin, nous terminerons cette thèse par un dernier résultat relatif cette fois au réseau routier. Nous étudierons l'effet des rues à sens unique dans ce réseau. Nous montrerons comment ces choix d'aménagement peuvent modifier la structure globale du trafic dans les villes, en déportant la fréquentation de ces certains quartiers vers d'autres et comment la part de sens uniques est liée à la résilience du réseau. Nous associerons ce dernier résultat à la physique théorique de la percolation, justifiant la mise en évidence d'une nouvelle classe d'universalité pour les graphes mixtes, graphes mélangeant liens uni- et bidirectionnels (chapitre 14). Ainsi, nous démontrons qu'il est aussi possible d'obtenir des résultats de physique à partir de l'étude des villes et que la pluridisciplinarité qui nous anime ne se fait pas seulement dans un sens.

12 - Déplacements domicile-travail

Dans l'autobus S considérons l'ensemble A des voyageurs assis et l'ensemble D des voyageurs debout. À un certain arrêt, se trouve l'ensemble P des personnes qui attendent. Soit C l'ensemble des voyageurs qui montent ; c'est un sous-ensemble de P et il est lui-même l'union de C' l'ensemble des voyageurs qui restent sur la plateforme et de C'' l'ensemble de ceux qui vont s'asseoir. Démontrer que l'ensemble C'' est vide.

Raymond Queneau – *Exercices de style* (1947)

Ce chapitre, qui est une reprise de [1], questionne la relation entre les deux principales façons de se déplacer dans les villes : l'automobile et les transports en commun. À partir de la théorie économique et d'estimations empiriques, nous établissons une relation simple entre ces deux modes de déplacement, dont nous analysons ensuite les conséquences environnementales.

12.1. Trafic automobile

12.1.1. Résultat de Newman-Kenworthy

Puisque le monde est désormais majoritairement urbanisé, la compréhension des schémas de mobilité urbaine [185] est devenue indispensable pour réduire les émissions de gaz à effet de serre liées au transport (près d'un quart des émissions mondiales) alors que l'efficacité environnementale relative des villes fait débat [41, 42, 186, 187].

Dans un article fondateur, Newman et Kenworthy corrélèrent la consommation d'essence dans les villes à un critère spatial déterminant : la densité urbaine [188], démontrant que les villes à forte densité de population consommaient moins d'essence par habitant et avaient donc un meilleur bilan environnemental (voir figure 12.1). Leur résultat a eu un impact significatif sur les théories urbaines des dernières décennies et est devenu un paradigme de l'économie spatiale [189]. Cette étude est cependant purement empirique et n'a pas de fondement théorique, ce qui soulève quelques questions sur le rôle exact de la densité dans l'explication du trafic automobile.

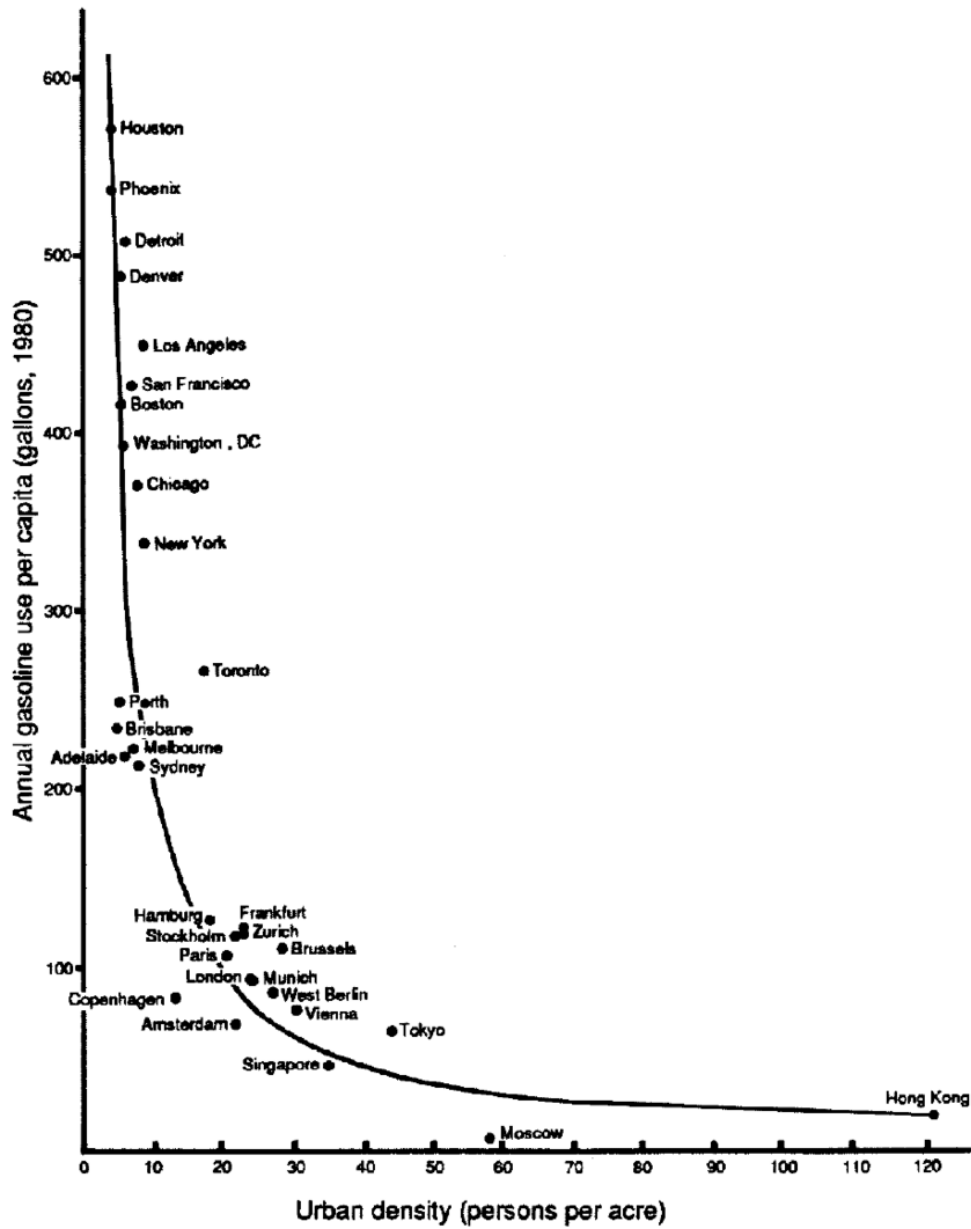


FIGURE 12.1 - Figure originale de Newman-Kenworthy [188], montrant que la consommation de carburant décroît avec la densité dans les grandes villes du monde.

12.1.2. Modèles de trafic

Le trafic automobile a été étudié à diverses granularités mais principalement au niveau théorique d'une seule voie de circulation, avec des outils variés allant de la modélisation par agents [190] ou par automates cellulaires [191] aux approches hydrodynamiques [192].

Le sujet n'est pas non plus oublié de l'économie [97, 193-195] et des modèles appliquées de planification urbaine [196], qui sont multi-paramétriques et aux capacités prédictives douteuses.

Fidèle à notre démarche générale, nous abordons ici le problème du trafic sous un angle macroscopique en essayant de construire un modèle universel et économe en paramètres doté d'une capacité prédictive. Nous mettons en relation la *part modale automobile*, c'est-à-dire le pourcentage quotidien d'individus qui vont travailler en voiture et l'accessibilité des transports en commun.

12.2. Modèle

12.2.1. Simplification du modèle Fujita-Ogawa

Une fois n'est pas coutume, nous avons ici recours au formalisme économique du modèle de Fujita-Ogawa (voir *supra* 2.3.3). Les individus y choisissent les lieux d'emploi et de domicile qui maximisent leur revenu net après déduction des coûts de loyer et de trajet. Plus précisément, un individu cherche à vivre en un point x et travailler en un point y de façon à maximiser

$$Z(x, y) = W(y) - C_R(x) - G(x, y) \quad (12.1)$$

où $W(y)$ est le salaire typique gagné à l'endroit y , $C_R(x)$ le coût du loyer en x et $G(x, y)$ est le coût du transport pour aller de x à y .

Il existe également une équation similaire pour le profit des entreprises et qui n'est pas nécessaire ici : on suppose que l'emploi est localisé en un centre unique $y = 0$ et que les salaires et les coûts de loyer sont du même ordre pour tous les individus. On note ici que la plupart des grandes villes sont polycentriques (voir *supra* 2.3.5) et comptent plusieurs centres d'activités différents. On peut toutefois supposer que la polycentricité ne change pas l'ordre de grandeur des distances de déplacement domicile-travail [197]. On suppose également que le lieu de résidence x est fixe et aléatoire¹.

Ces simplifications permettent d'écrire une version réduite du modèle de Fujita-Ogawa dans laquelle le choix du mode de transport devient l'élément principal : les individus ont déjà un domicile et un travail et le problème consiste pour eux à choisir un mode de transport. Sous ces hypothèses, la maximisation de $Z(x, 0)$ revient à la

1. Le choix de résidence est évidemment un problème complexe et le remplacement d'une quantité complexe par une quantité aléatoire est une hypothèse typique que nous avons déjà faite et qui est illustrative de l'apport de la physique statistique.

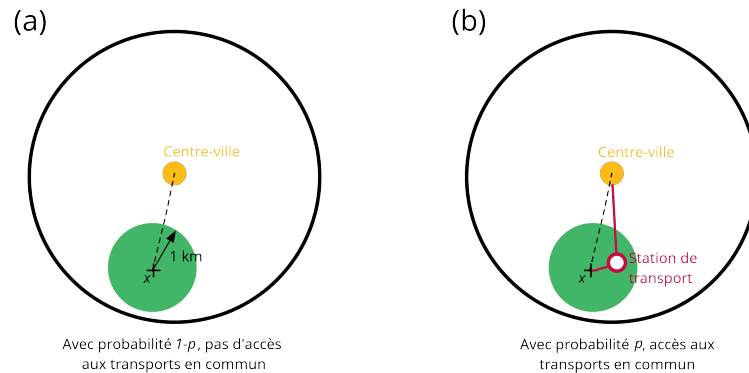


FIGURE 12.2 – (a) Avec probabilité $1 - p$, un individu habitant en x n'a pas accès aux transports en commun à moins d'1 km et va travailler au centre-ville en voiture. (b) Avec p , il existe une station de transport dans le voisinage de x et l'individu compare les coûts relatifs de la voiture et des transports en commun avant d'aller travailler.

minimisation du coût de transport $G(x, 0)$: $\max Z(x, 0) \iff \min G(x, 0)$. Dans ces conditions, la densité de population est une quantité exogène.

12.2.2. Accessibilité des transports en commun

Afin d'établir les coûts de déplacement de chaque individu, on suppose qu'une proportion p de la population a accès aux transports en commun rapides¹ dans le sens d'habiter à leur proximité. Nous reviendrons plus longuement sur cette notion d'accessibilité au chapitre 13. Ici, la quantité p est définie comme

$$p = \text{part de la population habitant à moins d'1 km d'un arrêt.} \quad (12.2)$$

Il convient de noter que si p est la probabilité d'avoir accès aux transports en commun (voir figure 12.2), cela n'implique pas que ce soit le mode de transport choisi : si une personne a accès au métro, elle doit comparer les coûts de chaque option et choisir le mode de transport le moins cher.

À l'opposé, une part $1 - p$ de la population n'a pas accès aux transports en commun et, par hypothèse, n'a pas d'autre choix que de se déplacer en voiture².

Toutes les hypothèses utilisées sont bien sûr des approximations fortes de la réalité mais nous affirmons ici que notre modèle capture l'essentiel des mécanismes du trafic dans les grandes zones urbaines.

1. Ici, « rapide » veut dire en voie propre et donc indépendamment du trafic automobile, ce qui regroupe les métros, les trains de banlieue et pas les bus. Pour simplifier, nous comptons aussi les tramways dans cette définition.

2. En faisant l'hypothèse que tout le monde peut conduire si besoin.

12.2.3. Coût généralisé

Afin de définir complètement le modèle, il faut préciser les expressions des coûts généralisés, qui traduisent le coût financier et temporel pour un individu à se déplacer. On omet toutes les autres formes de déplacement domicile-travail (marche, vélo, etc.) et on néglige les corrélations spatiales entre les densités de transport public et les lieux de domicile. La fraction p des individus qui a le choix entre la voiture et les transports en commun choisit le mode de transport avec le coût généralisé le plus bas, coût généralisé qui prend en compte à la fois des coûts monétaires et un coût temporel proportionnel à la valeur du temps (voir *supra* 10.1.2).

Pour les automobilistes, le coût généralisé inclut les effets d'embouteillage décrits par la fonction du *Bureau of Public Roads* [58] : l'augmentation du trafic sur une route fait baisser la vitesse effective sur celle-ci.

Pour les transports en commun, nous négligeons le coût d'abonnement qui est très faible par rapport au coût d'entretien d'une voiture. Les coûts généralisés sont alors :

$$G_{\text{voiture}}(x) = C_c + \frac{r}{v_c} V \left(1 + \left(\frac{T}{c} \right)^\mu \right) \quad (12.3)$$

$$G_{\text{public}}(x) = V \left(f + \frac{r}{v_m} \right) \quad (12.4)$$

où C_c est le coût quotidien d'une voiture, v_c et v_m sont respectivement les vitesses moyennes de la voiture et des transports en commun, c la capacité routière de la ville, f le temps de marche et d'attente des transports en commun, r la distance entre le domicile et le centre-ville, T le trafic automobile total et μ l'exposant qui caractérise la sensibilité au trafic. La quantité V est la valeur du temps définie comme le montant qu'un voyageur est prêt à payer pour gagner une heure de temps. C'est une fonction croissante du revenu bornée par le salaire horaire. On suppose que la voiture est en moyenne plus rapide que les transports en commun ($v_c > v_m$) mais qu'elle coûte plus cher. Une fois qu'un individu a choisi un mode de transport, il s'y tient et ne reconsidère pas son choix même si le trafic évolue. Autrement dit, on suppose ici que les habitudes individuelles ont une échelle de temps plus longue que la dynamique du trafic.

12.3. Données

On étudie 25 zones métropolitaines en Europe, en Amérique, en Asie et en Australie, le nombre de villes étant limité par la disponibilité de données sur l'accessibilité des transports en commun et par le nombre d'estimations fiables de la part modale.

La quantité p est tirée de rapports sur l'accessibilité des transports en commun [198-202]. Les parts modales ont été obtenues à partir de [203-208], les émissions de CO₂ de [209-213] et les temps de déplacement domicile-travail de [214-

[222]. Les valeurs du temps sont estimées en prenant la moitié du salaire horaire après impôt pour chaque ville [223, 224]. Les délais de congestion sont tirés de l'indice TomTom [55], sauf pour Séoul et Tokyo où, en l'absence de données, on suppose un délai moyen de 50 %. La capacité routière est calculée à partir du délai d'encombrement τ par $c \sim P/\tau^{1/\mu}$ avec la valeur $\mu = 2$. Pour les vitesses v_m et v_c et les coûts C_c et f , les valeurs sont constantes pour toutes les villes. Pour v_m , les valeurs varient entre 25 et 35 km/h selon la ville et l'on choisit $v_m \simeq 30$ km/h. La vitesse moyenne des voitures v_c dépend aussi de la ville et varie de 30 km/h (sans effet de congestion) dans les villes européennes comme Paris à 56 km/h dans certaines villes américaines. On prend une valeur moyenne d'environ 40 km/h. Pour C_c , on utilise un simulateur de coût [225] qui donne en moyenne une valeur de $C_c \simeq 15$ \$ par trajet. Pour f enfin, on compte en moyenne 10 minutes pour marcher jusqu'à la station, 10 minutes pour en sortir et aller travailler et 10 minutes pour les changements éventuels soit un total d'environ $f \simeq 30$ min.

12.4. Résultats

12.4.1. Distance critique

La mobilité individuelle est régie par la comparaison des coûts G_{voiture} et G_{public} et dépend des paramètres donnés *supra*. Étant données les valeurs des coûts G_{voiture} et G_{public} , il existe une probabilité $P_C = F(G_{\text{voiture}} - G_{\text{public}})$ de choisir la voiture [226]. La fonction F est en général continue et satisfait $F(-\infty) = 1$ et $F(+\infty) = 0$ et l'on considère ici le cas le plus simple où $F(x > 0) = 0$ et $F(x < 0) = 1$.

Un individu situé à x et ayant aux transports en commun choisit alors d'utiliser la voiture si $G_{\text{voiture}} < G_{\text{public}}$, ce qui implique une condition sur la valeur du temps de la forme $V < V_m(r)$ où $V_m(r)$ dépend des paramètres du système et de la distance au centre r et s'écrit

$$V_m(r) = \frac{C_c}{f + r \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_c} \left(1 + \left(\frac{T}{c} \right)^\mu \right) \right)}. \quad (12.5)$$

De même, l'écriture de l'égalité $G_{\text{voiture}} = G_{\text{public}}$ entre les coûts généralisés conduit à l'existence d'une distance critique

$$d(V, T) = \min \left(L, \frac{\frac{C_c}{V} - f}{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_c} \left(1 + \left(\frac{T}{c} \right)^\mu \right)} \right) \quad (12.6)$$

où $L \sim \sqrt{A}$ (A est la superficie de la ville) est la taille linéaire typique de la ville. Cette distance critique évolue avec l'augmentation du trafic (Fig 12.3), traduisant le fait que conduire est moins intéressant lorsque le trafic est important. Cette expression montre également que les individus ayant une faible valeur du temps sont plus enclins à utiliser les transports publics, préférant dépenser du temps que

de l'argent. La distance au centre est déterminante dans ce processus de décision : trop loin du centre — au-delà de la distance critique $d(V, T)$ — les individus privilégient la voiture pour éviter les longs trajets, et plus ils sont riches, plus ce seuil de changement comportemental est proche du centre.

Écrire $d(V, T = T^*) = L$ permet enfin d'obtenir le trafic maximal T^* au-delà duquel conduire n'est plus intéressant nulle part :

$$T^* = c \left[v_c \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_c} - \frac{C_c - f}{L} \right) \right]^{1/\mu}. \quad (12.7)$$

12.4.2. Part modale automobile

Lorsque la population totale P augmente, le trafic automobile T peut augmenter de deux façons, soit par les travailleurs n'ayant pas du tout accès aux transports publics soit par ceux qui, s'ils y ont accès, habitent trop loin du centre et préfèrent conduire, ce qu'on peut résumer par une équation différentielle :

$$\frac{dT}{dP} = 1 - p + p[1 - \eta(d(V, T))] \quad (12.8)$$

où le premier terme du membre de droite correspond à la part $1 - p$ des individus éloignés des stations publiques et le second terme à la fraction $1 - \eta$ des individus qui vivent proches de stations mais qui vivent plus loin du centre que $d(V, T)$. Cette équation est valable pour $T < T^*$ tandis que pour $T > T^*$, $\eta = 1$.

En considérant des villes isotropes de densité de population $\rho(r)$, on a :

$$\eta(d(V, T)) = \frac{\int_0^{d(V, T)} dr r \rho(r)}{\int_0^L dr r \rho(r)}. \quad (12.9)$$

Pour résoudre le modèle, il faut donc introduire l'expression 12.6 de $d(V, T)$ dans la formule précédente et résoudre l'équation différentielle 12.8, ce qui est en général trop difficile.

La densité, normalement endogène dans le modèle de Fujita-Ogawa, est toutefois exogène du fait des hypothèses et on peut la supposer décroissante en r sous une forme simple : $\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/r_0)$. Cela donne à l'ordre dominant en T/C :

$$\frac{dT}{dP} \simeq 1 - p e^{-r/r_0} \left(1 + \frac{a}{r_0} \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{T}{C} \right)^\mu \right) \quad (12.10)$$

où

$$a = \frac{c_c/V - f}{1/v_m - 1/v_c}. \quad (12.11)$$

Ce résultat est valable pour

$$P < P^* = \frac{T^*}{1 - p e^{-a/r_0} (1 + a/r_0)}. \quad (12.12)$$

1. Dans le cas d'une densité uniforme ρ_0 , $\eta = \pi d(V, T)^2/A$ et $T \simeq (1 - \frac{p}{Ab^2}) P + \mathcal{O} \left(\left(\frac{T}{C} \right)^\mu \right)$ où $b = (1/v_m - 1/v_c)/\sqrt{\pi}(C_c/V - f)$.

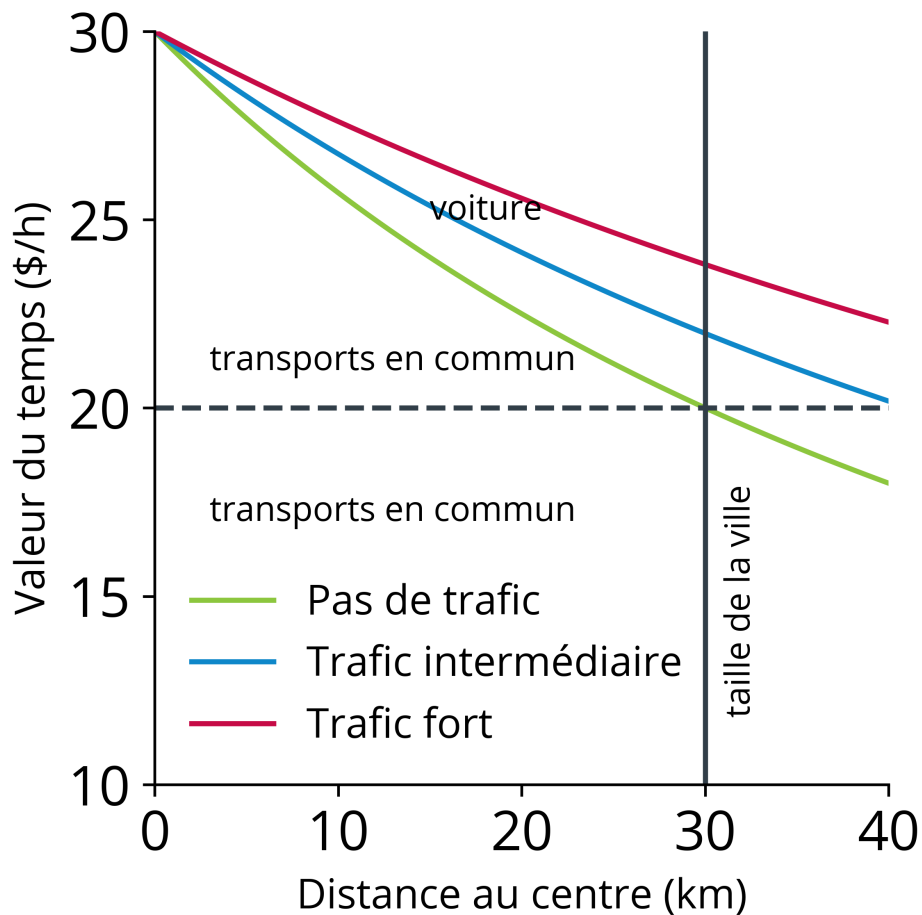


FIGURE 12.3 – Le mode de transport le plus avantageux dépend de la valeur du temps des individus et de la distance au centre-ville. La limite entre la zone où la voiture est plus avantageuse et la zone où ce sont les transports en commun évolue avec le trafic : plus le trafic est important (courbes verte à rouge) et plus la zone dans laquelle le transport rapide est avantageux par rapport à la voiture est grande. La ligne verticale grise marque la frontière de la ville et indique la valeur critique du temps (ligne pointillée) en dessous de laquelle les transports en commun sont plus intéressants dans toute l'agglomération quelle que soit la valeur de la congestion. Les valeurs des paramètres sont choisies ici comme suit : $C_c = 15$ \$, $v_c = 40$ km/h, $v_m = 30$ km/h, $f = 30$ minutes.

Au-delà, $d(V, T) > L$ et la seule source d'augmentation du trafic automobile provient des individus qui n'ont pas accès aux transports en commun, ce qui conduit à $dT/dP = 1 - p$ impliquant

$$T = (1 - p)(P - P^*) + T^*. \quad (12.13)$$

Même si ce résultat semble assez simple, il découle de considérations non triviales. Le fait important à retenir ici est que les coûts conduisent à favoriser les transports en commun lorsque ceux-ci sont accessibles. On note également que l'effet de la densité se situe essentiellement dans le premier régime $T < T^*$ et disparaît au-delà.

À partir des données précédemment présentées, on calcule les seuils critiques T^* et P^* dans les 25 villes. Pour des valeurs raisonnables de la valeur du temps [223, 224], la plupart des villes ont $T^* = 0$ et toutes ont $T^* \ll P$ (T^* varie de 0 à 50 % de P).

Le cas $T^* = 0$ signifie que même à trafic nul la distance critique $d(V, T = 0)$ est plus grande que la taille typique de la ville L . Dans la plupart des cas, on observe donc que les villes sont dans le régime saturé où la voiture est moins intéressante que les transports en commun, même en l'absence de trafic : les transports publics sont si économiques que les individus vivant à proximité des stations ont tout intérêt à les emprunter. Ainsi, le trafic n'apparaît pas comme un paramètre déterminant dans les choix de mobilité individuelle, puisqu'il concerne surtout les personnes qui n'ont pas d'autre choix que de conduire et qui subissent de coûts de transport élevés mais incompressibles¹.

Puisque nous avons en général $T^*, P^* \ll P$, l'équation 12.13 se réécrit donc sous la forme :

$$\boxed{\frac{T}{P} \simeq 1 - p,} \quad (12.14)$$

une conséquence non triviale du coût généralisé empirique relatif de la voiture et des transports publics. On peut alors comparer les parts modales empiriques de la voiture T/P à cette prédiction dans les villes (voir Fig 12.4) étudiées. On observe — compte-tenu de la simplicité du modèle — un très bon accord et une tendance linéaire mettant en évidence l'efficacité des transports publics dans la réduction du trafic automobile.

La plupart des villes européennes sont en particulier bien décrites par notre prédiction même si on observe quelques écarts, qui peuvent trouver leur origine dans l'existence d'autres modes de déplacement domicile-travail, des taux de motorisation plus faibles (par exemple à Buenos Aires [227]) ou un degré élevé de polycentrisme.

1. On peut d'ailleurs noter qu'une corrélation positive entre revenu faible et absence de transports en commun fait office de double peine pour les plus pauvres, une source supplémentaire de ségrégation urbaine et d'exclusion sociale [154].

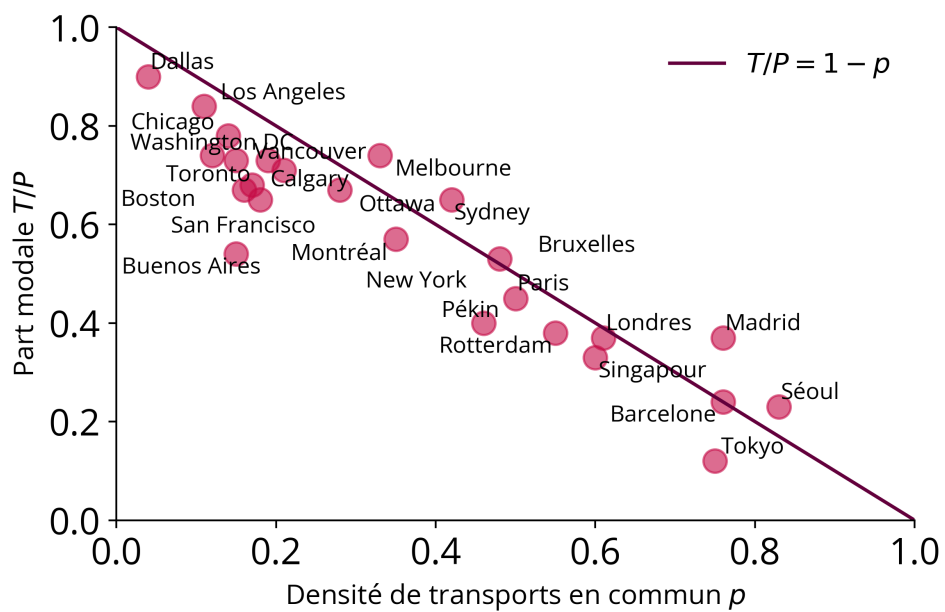


FIGURE 12.4 – Comparaison entre la part modale de la voiture observée T/P et la part de la population p vivant à proximité des stations de transports en commun pour 25 zones métropolitaines dans le monde. La ligne représente la prédiction du modèle ($R^2 = 0,69$). Le modèle étant non-paramétrique, la concordance est très satisfaisante. Les écarts sont probablement dus à l'existence d'autres modes de transport (marche ou vélo), à un taux de motorisation plus faible, etc.

12.4.3. Émissions de gaz à effets de serre

Le modèle peut aussi permettre de prédire les émissions de gaz à effet de serre liées au transport. On fait l'hypothèse la plus simple que ces émissions sont proportionnelles au temps total passé sur les routes. La quantité de CO₂ émise pour un conducteur résidant à x est alors donnée par $Q_{\text{CO}_2}(r) \propto r[1 + (T/c)^\mu]$ ce qui conduit à un total de

$$Q_{\text{CO}_2} \propto \sum_{\text{automobilistes } i} r_i \left[1 + \left(\frac{T}{c} \right)^\mu \right] \quad (12.15)$$

$$\propto g\sqrt{A}(1-p)P \left[1 + \left(\frac{T}{c} \right)^\mu \right]. \quad (12.16)$$

d'après le résultat 12.14 et en supposant que la somme $\sum_i r_i$ est de la forme $g\sqrt{A}T$ où \sqrt{A} est l'échelle typique déplacement et où le préfacteur g encode les caractéristiques géométriques de la mobilité automobile dans la ville, notamment la distribution spatiale des résidences et des activités et l'infrastructure de transport. Son estimation nécessite probablement un calcul détaillé, mais l'aspect important à retenir ici est la proportionnalité avec \sqrt{A} . On obtient ainsi que l'émission annuelle de CO₂ par voiture et par habitant est donnée par

$$\boxed{\frac{Q_{\text{CO}_2}}{P} \propto \sqrt{A}(1-p)(1+\tau)} \quad (12.17)$$

où $\tau = (T/c)^\mu$ est le retard moyen dû à la congestion, empiriquement calculable à partir de la base de données TomTom [55] (alors que la capacité c n'est habituellement pas directement accessible).

Il est intéressant de noter que Q_{CO_2} est le produit de trois termes principaux : taille de la ville, fraction de conducteurs d'automobilistes et effets de la congestion ; ce qui est finalement assez intuitif. De plus, le terme dominant de Q_{CO_2} est proportionnel à la population, ce qui semble plaider en faveur d'une loi linéaire — modulo les termes correctifs — entre population et émissions, pouvant expliquer les difficultés à parvenir à un consensus sur le comportement de cette loi d'échelle [228].

On compare la prédiction 12.17 à des valeurs désagrégées des émissions urbaines de CO₂ sur la Fig 12.5. On remarque globalement un bon accord malgré quelques valeurs aberrantes comme Buenos Aires, qui a un taux de motorisation très faible et donc des émissions de CO₂ plus faibles que prévues ou New York qui semble être l'un des plus grands émetteurs de CO₂ dû aux transports dans le monde [209].

Ce résultat illustre le rôle joué par les transports publics dans la réduction des gaz à effet de serre liés aux transports. Plus important encore, l'étalement urbain, caractérisé par la distance typique parcourue \sqrt{A} est une cause majeure des émissions liées au transport.

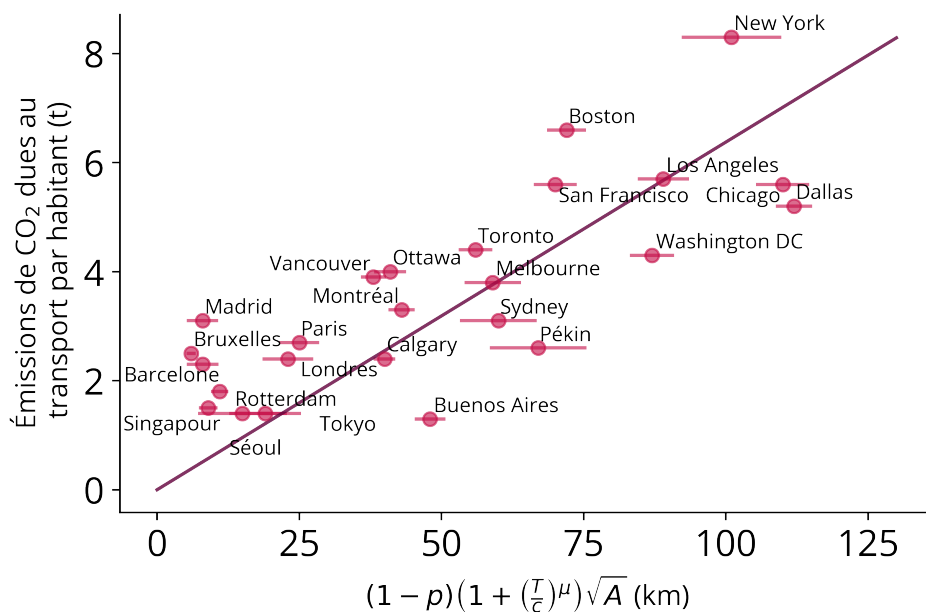


FIGURE 12.5 – Comparaison entre les émissions annuelles de CO₂ par habitant liées au transport et les effets de la congestion, de la taille de la zone et de la densité de transit rapide prédits par notre modèle. La ligne rouge est l'ajustement linéaire de la forme prédite $y = \alpha x$ où $\alpha \approx 0.064$ CO₂tons/km/hab/an (le coefficient de Pearson est de 0.79) et $R^2 = 0,41$. Notez que l'absence d'intercept ici interdit d'interpréter cette valeur comme le carré d'un coefficient de corrélation). Nous n'avons pas d'estimation de la congestion pour Séoul et Tokyo et nous avons utilisé un taux de congestion moyen $\tau = 50\%$. Les barres d'erreur sont calculées pour une erreur typique de 10 % sur ρ et τ .

En introduisant la densité moyenne de population $\rho = P/A$, l'équation 12.17 peut se réécrire

$$\frac{Q_{\text{CO}_2}}{P} \propto \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\rho}}(1-p)(1+\tau), \quad (12.18)$$

c'est-à-dire que

$$\frac{Q_{\text{CO}_2}}{P} \propto \rho^{-\frac{1}{2}} \quad (12.19)$$

puisque \sqrt{P} est une fonction variant lentement sur l'échelle des populations typiques dans les grandes villes. On comprend ainsi comment Newman et Kenworthy [188] ont pu obtenir leur résultat en supposant que la densité était le paramètre de contrôle. Cependant, ce raisonnement est qualitativement erroné : l'aire urbaine A et la densité des transports publics p semblent être les véritables paramètres contrôlant les variables quantifiant l'effet de la présence automobile en ville telles que les émissions de CO_2 . L'atténuation du trafic n'est donc pas obtenue *stricto sensu* en augmentant la densité, mais en réduisant l'étalement urbain et en améliorant la densité des transports publics. Au contraire, à aire urbaine constante, l'augmentation de la population se traduit par une augmentation des émissions de CO_2 par habitant (par augmentation des embouteillages et donc de τ), en contradiction avec l'hypothèse de Newman-Kenworthy dans laquelle l'augmentation de la densité entraîne toujours une diminution des émissions de CO_2 .

On note également que

$$\frac{\partial \log Q_{\text{CO}_2}}{\partial \log p} = -\frac{p}{1-p} \quad (12.20)$$

peut être relativement importante (en valeur absolue) alors que

$$\frac{\partial \log Q_{\text{CO}_2}}{\partial \log A} = \frac{1}{2} \quad (12.21)$$

est faible, ce qui suggère que l'augmentation de la densité de transport est en général très efficace pour réduire les émissions de gaz à effet de serre.

12.4.4. Temps de déplacement moyen

Le temps de trajet des usagers des transports en commun est en moyenne de $f + g\sqrt{A}/v_c$ tandis qu'il est de $g\sqrt{A}(1+\tau)/v_c$ pour les automobilistes (g est un facteur géographique). On obtient donc pour le temps de trajet aller-retour τ_c moyenné sur la population l'expression suivante :

$$\bar{\tau}_c = p \left(f + \frac{g\sqrt{A}}{v_m} \right) + (1-p) \frac{g\sqrt{A}}{v_c} (1+\tau). \quad (12.22)$$

La comparaison de ce résultat avec les données empiriques est illustrée sur la Figure 12.6.

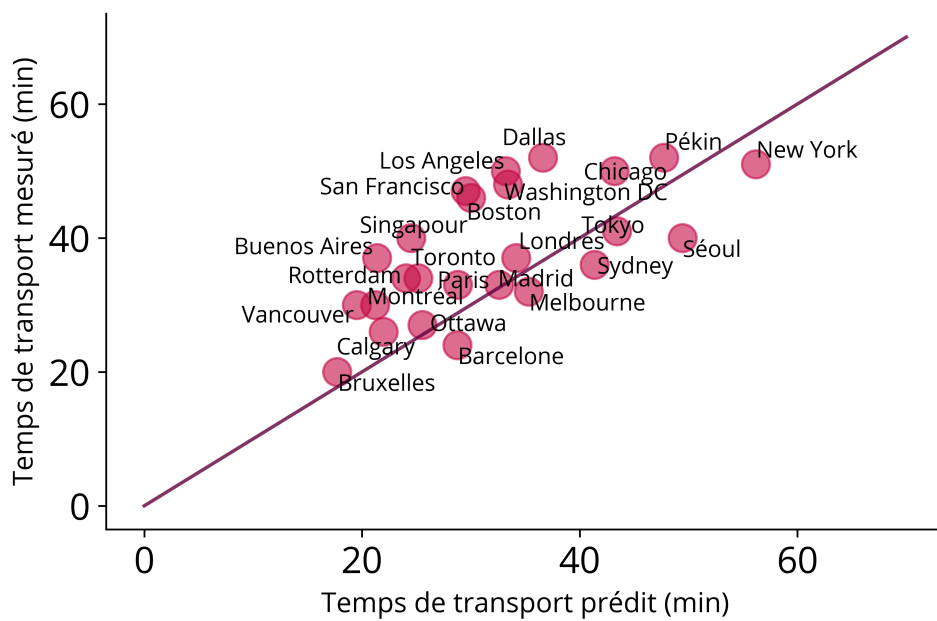


FIGURE 12.6 - Temps de trajet moyen $\bar{\tau}_c$ mesuré pour différentes villes par rapport à la valeur prédite par notre modèle (équation 12.22). Nous effectuons l'ajustement sur le paramètre unique g en utilisant l'équation 12.22, ce qui conduit à une valeur moyenne $g \simeq 0,203$ (la corrélation de Pearson est ici de 0,65). L'existence de grandes fluctuations autour de notre prédiction est probablement liée à l'organisation spatiale de la ville et à la structure des réseaux de transport.

Même si les fluctuations sont relativement importantes, l'équation 12.22 capture la tendance principale et permet d'évaluer $g \simeq 0,203$. Par comparaison, une distribution uniforme des résidences aurait conduit à $g = 2/3\sqrt{\pi} \simeq 0,376$ tandis que dans le cas simple où la densité diminue avec la distance r comme $\rho(r) = \rho_0(1 - r/L)$, on aurait obtenu $g = 1/3\sqrt{\pi} \simeq 0,188$. La valeur moyenne g obtenue se situe donc entre ces deux estimations théoriques.

À partir de la figure 12.6, on peut aussi calculer la valeur effective g_{eff} pour chaque ville et la comparer à la valeur moyenne g . Cette quantité g_{eff} (et le rapport $\eta = g_{\text{eff}}/g$) encode toute la complexité des densités de population, d'activité et des infrastructures de transport. Le ratio moyen est de l'ordre de 1,37 et l'on observe des valeurs aberrantes dans certaines villes comme Barcelone ($\eta = 0,04$), Séoul ($\eta = 0,62$), Buenos Aires 1,92, Rotterdam 2,32 ou Singapour 3,38. La plupart des villes (76 %) ont cependant un ratio η supérieur à 1 ce qui implique que le modèle sous-estime en général la distance parcourue. De nombreux effets locaux peuvent expliquer ces variations observées : l'existence de la polycentricité pourrait réduire la distance domicile-travail (par exemple, il semble que le temps de trajet à New York soit surestimé, ce qui peut être une conséquence du polycentrisme) tandis que de mauvaises infrastructures de transport ou des goulots géographiques pourraient avoir l'effet inverse et augmenter le temps de trajet. En général, on s'attend à ce que la structure du réseau de transport ait un effet important, surtout si elle est anisotrope.

12.5. Interprétation

Nous avons donc présenté un modèle parcimonieux et générique du trafic automobile et de ses conséquences dans les villes et l'avons testé sur des données empiriques issues de 25 grandes villes du monde. Notre analyse montre que les quantités liées au trafic sont régies par trois facteurs : l'accès aux transports en commun rapides, les effets de la congestion et l'étalement urbain. Afin de réduire les émissions de CO₂, notre modèle suggère d'augmenter la densité des transports publics (contrairement aux conclusions d'autres études économiques [194]) ou encore de réduire la taille de l'aire urbaine (ce qui est impossible dans la plupart des contextes). À l'opposé, l'augmentation du coût de l'utilisation de la voiture semble en fait incapable de faire baisser le trafic automobile en l'absence de moyens de transport alternatifs.

Compte-tenu de la simplicité de ce modèle, l'accord avec les données n'est pas parfait mais il nous semble que notre approche capture correctement les tendances les plus importantes et identifie correctement les facteurs critiques du trafic automobile. Nous soulignons notamment la difficulté de trouver des données fiables et harmonisées de :

- parts modales dans les villes ;
- accessibilité des transports en commun.

L'augmentation des sources de données de parts modale ne peut se faire que par l'augmentation des enquêtes nationales. En revanche, nous avons décidé d'étendre nous-même les sources d'accessibilité des transports en commun, ce qui est l'objet du chapitre prochain.

13 - Accessibilité des transports publics

Diverses tentatives de quantification de l'usage de la voiture dans les villes ont été proposées [34, 105, 188, 189] dont le résultat de Newman et Kenworthy, présenté en 12.1.1. Par ailleurs, Duranton et Turner [194] ont affirmé que les transports en commun ne parvenaient pas à réduire le trafic routier car les usagers attirés hors des routes sont remplacés par de nouveaux automobilistes sur les routes devenues fluides. Cependant, ces résultats manquent cruellement de fondements théoriques et empiriques [229-232] et nos recherches, exposées au chapitre précédent [1] montrent que les deux principaux facteurs qui contrôlent le trafic automobile dans les villes sont l'étalement urbain et l'accès aux transports en commun.

Mais quelle est une bonne mesure de l'accessibilité des transports en commun ? Les études sur le sujet ont principalement porté sur le nombre de lignes ou d'arrêts [233-235], la longueur du réseau ou l'analyse de graphes [236-238]. Peu de travaux [1, 198, 199], cependant, ont envisagé d'étudier les zones d'attraction des stations de transports en commun, c'est-à-dire d'examiner la part de la population vivant à proximité de ces stations, typiquement à distance de marche.

Dans ce chapitre, qui est une reprise de [3], nous revenons sur cette notion d'accessibilité, en formalisons la définition et en étendons la mesure à de nouvelles villes.

13.1. Vers une nouvelle métrique

La définition la plus détaillée des zones d'accessibilité des transports en commun est la métrique *People Near Transit (PNT)*, qui trouve son origine dans une publication de 2016 de l'Institute for Transportation and Development Policy (IDTP) [198]. Elle fournit un ensemble de données rigoureuses sur la part de la population vivant à proximité des transports en commun (moins d'un kilomètre) pour 25 villes dans le monde (12 dans les pays de l'OCDE). Cependant, les définitions des zones urbaines et des systèmes de transport dans cet ensemble de données sont multiples, pas toujours cohérentes et doivent être affinées.

Il est donc nécessaire de proposer une nouvelle définition universelle et transnationale de la PNT, tout en élargissant le nombre de villes où elle peut être mesurée. Comme à plusieurs reprises dans cette thèse, nous choisissons de découper les villes selon les FUAs, une définition cohérente des villes dans plusieurs pays de l'OCDE [95]. On se restreint aux transports en commun dits rapides, qui désignent généralement les transports publics sur rail de grande capacité (métro ou trains de banlieue), auxquels on ajoute les tramways. Dans ce sens, les transports en communs rapides englobent donc :

- les services de tram, de tramway ou de métro léger ;

- les métros ou tout autre service souterrain ;
- les services ferroviaires nationaux, régionaux ou de banlieue.

Les bus ne sont donc pas compris dans cette définition, même lorsqu'ils circulent en voie propre. Contrairement à [198], on ne filtre pas les stations et les arrêts par leur fréquence de desserte.

13.2. Méthode et données

13.2.1. Populations urbaines

Notre analyse s'appuie sur les estimations de la population résidentielle en 2015 regroupés dans le projet *Human Settlement Population* (GHS-POP) [239]. Les estimations de la population sont fournies par le projet GPWv4.10 [102] et ont été désagrégées à partir des unités de recensement administratives (voir 6.1.2).

Ces données matricielles sont constituées de pixels de largeur 250 m auxquels est associé le nombre de personnes vivant dans la cellule. On peut les retraiter grâce à GDAL [240] pour convertir les fichiers matriciels en *shapefiles* vectorisés, constitués de polygones avec une valeur de champ correspondant à la population du polygone. Étant donné que le processus de polygonisation fusionne les pixels adjacents ayant une valeur commune dans des polygones uniques, les populations de chaque polygone doivent être recalculées à l'aide de la règle :

$$\text{Pop}_{\text{polygone}} = \text{Pop}_{\text{pixel}} \times \frac{\text{Aire}_{\text{polygone}}}{\text{Aire}_{\text{pixel}}} \quad (13.1)$$

où $\text{Aire}_{\text{pixel}} = 250 \times 250 = 62\,500 \text{ m}^2$. On obtient ainsi une liste de 224 fichiers de population couvrant la surface terrestre.

En intersectant ces fichiers avec les limites des FUAs dans les pays de l'OCDE [95], on peut construire un ensemble mondial de populations urbaines à une échelle très fine. Ces fichiers résultants sont les substrats de population utilisés dans la suite pour mesurer la population vivant à proximité des stations de transport en commun.

13.2.2. Emprises des transports en commun

Un format standard commun pour les horaires des transports publics et les informations géographiques associées est le *General Transit Feed Specification* (GTFS) [241].

Un flux GTFS comprend des informations générales sur les services de transport et les lignes des réseaux, des informations sur les horaires ainsi que des informations géographiques sur les arrêts, notamment leurs coordonnées géographiques.

Les trois principaux champs qui importent ici sont :

- *Routes* : une route est une ligne régulière (unidirectionnelle), par exemple une ligne de métro ou de bus. Les types de routes que nous utilisons sont les suivants :
 - *tram, streetcar, light rail* : tout système de métro léger ou de tramway dans une zone métropolitaine ;

- *subway, metro* : tout système ferroviaire souterrain dans une zone métropolitaine ;
- *rail* : tout système de train national, régional ou de banlieue ;
- *cable tram* : tramway à traction par câble comme à San Francisco.

Notre définition exclut les types :

- *bus* : ligne de bus à courte et longue distance ;
- *ferry* : service de bateau à courte et longue distance.
- *Trips* : associés à une route, ils définissent un trajet particulier et programmé entre des stations, par exemple le premier train de la journée.
- *Stops* : les emplacements géographiques des arrêts et des stations.

En joignant dans cet ordre les trois champs, on peut lier les arrêts aux types de lignes qui leur sont associées et faire ainsi la distinction entre les arrêts de bus et les arrêts de métro.

13.2.3. Mesures de PNT

Afin de mesurer les PNT dans les grandes villes, il faut récupérer — et fusionner — tous les fichiers GTFS disponibles dans les grandes villes, en vérifiant qu'ils soient complets, et les associer à leurs FUAs correspondantes.

La plupart des fichiers GTFS sont collectés par la plateforme OpenMobility-Data [242].

Pour certains pays européens (Allemagne, France), les fichiers GTFS n'étaient pas disponibles sur OpenMobilityData et ont dû être récupérés auprès d'autres sources [243, 244]. On note également que le format GTFS n'est pas courant en Corée du Sud, au Japon et au Royaume-Uni où les données ne sont accessibles que pour Manchester et Londres [245].

Il y a donc 85 zones urbaines dans le monde pour lesquelles les données sont complètes, fiables et étendues. À partir des coordonnées géographiques des arrêts de transport dans ces données, il est possible de représenter géographiquement des zones d'attraction de ces stations à différentes distances. L'intersection de ces zones avec la grille de population permet alors de calculer la population totale vivant dans ces zones, qui peut être exprimée en tant que part de la population totale de la zone urbaine et permet de définir la PNT :

$$\text{PNT}(d) = \frac{\text{population telle que distance euclidienne d'une station} < d}{\text{population totale}} \quad (13.2)$$

où $d = 500, 1\ 000$ ou $1\ 500$. Nos résultats sont présentés dans [3].

Les tables 13.1 et 13.2 montrent les cinq villes ayant la plus grande et la plus petite PNT. Nous fournissons également sur Figshare [246] les cartes des villes étudiées avec leurs zones d'accessibilité. À titre d'exemple, la figure 13.1 montre l'aire d'attraction des transports parisiens.

Nous étendons ainsi de manière inédite la mesure de l'accessibilité quotidienne des transports en commun, que nous avons identifiée au chapitre précédent comme

Ville	Pays	PNT (%) à 500 m	PNT (%) à 1000 m	PNT (%) à 1500 m
Bâle	Suisse	57,78	80,15	86,96
Bilbao	Espagne	56,84	76,79	83,52
Genève	Suisse	50,44	74,68	85,07
Londres	Royaume-Uni	43,09	72,56	85,8
Zürich	Suisse	42,7	68,18	82,09

TABLE 13.1 – Taux de population à proximité des transports en commun (PNT) aux seuils de 500 m, 1 000 m et 1 500 m dans les cinq villes ayant l'accès le plus facile (à 1000 m) aux transports publics.

Ville	Pays	PNT (%) à 500 m	PNT (%) à 1000 m	PNT (%) à 1500 m
Winnipeg	Canada	0	0	0
Détroit	États-Unis	0,1	0,18	0,31
Houston	États-Unis	0,98	2,28	3,54
Miami	États-Unis	1,26	3,51	5,65
Dallas	États-Unis	1,18	4,05	7,64

TABLE 13.2 – Taux de population à proximité des transports en commun (PNT) aux seuils de 500 m, 1 000 m et 1 500 m dans les cinq villes ayant le pire accès (à 1000 m) aux transports publics.

indispensable à la compréhension du trafic dans les villes. Ces résultats, en accès libre, ouvrent aussi à tout un champ de recherche à la possibilité d'identifier des relations entre présence de transports en commun et variables environnementales ou sociales.

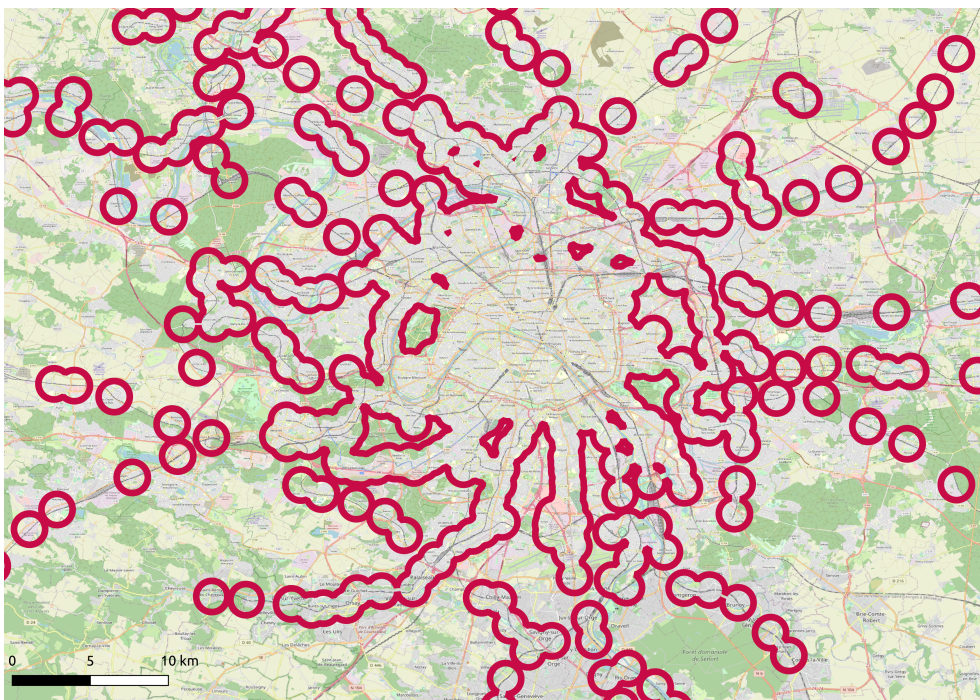


FIGURE 13.1 – Région parisienne et accessibilité des transports en commun. Aire de recouvrement à moins de 1 000 m d'une station de transports en commun rapide dans l'agglomération parisienne.

14 - Sur les sens uniques

Si Monaco nous emmerde, on fait un blocus, rien de plus facile, il suffit de deux panneaux de sens interdit, un au cap d'Ail et un second à la sortie de Menton.

Charles de Gaulle (1962)

Jusqu'ici nous nous sommes finalement surtout intéressé aux transports urbains sous l'angle des transports publics et de leur capacité à réduire le trafic automobile. Nous n'avons pas en détail essayé d'étudier le réseau routier, celui des rues. Ce chapitre, qui est une reprise de [4], essaie de comprendre le rôle joué par les rues à sens uniques dans les villes et leur effet sur les déplacements. La démarche est originale et en sens contraire de notre méthode habituelle : à partir d'une étude comparative de la présence des sens unique dans les villes, nous théorisons un problème de physique statistique, plus précisément de théorie de la percolation, dont nous écrivons les propriétés caractéristiques.

14.1. Réseaux routiers et graphes mixtes

Dans la plupart des pays, la majorité des individus se déplace en voiture [1] et la bonne gestion du trafic routier dans les villes est devenue indispensable pour réduire les émissions de gaz à effet de serre [186, 247].

Historiquement, un moyen simple et efficace de gérer le trafic est d'utiliser un code de la route, qui peut prévoir la mise en place de rues à sens unique [248]¹. Le panneau *sens interdit* a été normalisé lors d'une convention de la Société des Nations à Genève en 1931 [248]. Aujourd'hui, les rues à sens unique permettent de fluidifier le trafic automobile dans les villes [250], de réduire les encombrements ou de préserver certains quartiers [251].

Mathématiquement, un réseau de rues peut être modélisé par un graphe dont les sommets sont les intersections et les liens les segments de route entre deux intersections consécutives. La majorité des études consacrées aux réseaux de rues [197, 252-260] les modélise comme des graphes non dirigés. Formellement toutefois, un réseau de liens qui peuvent être non dirigés (rues à double sens) ou dirigés (rues à sens unique) est un *graphe mixte* [261, 262].

Il existe très peu de résultats disponibles sur les réseaux de rues dirigées, à l'exception peut-être du théorème de Robbins [263] : il est possible de choisir une direction pour chaque arête — appelée ci-après une orientation forte — d'un graphe

1. La première tentative officielle de créer des routes à sens unique remontait à une initiative londonienne en 1617 [249].

non dirigé G le transformant en un graphe dirigé qui possède un chemin entre chaque paire de sommets si et seulement si G est connecté et n'a pas de pont (c'est-à-dire une arête dont la suppression entraîne la division de la composante géante). Le résultat fondamental de Robbins peut être étendu aux graphes mixtes [264] : si G est un graphe mixte fortement connecté, alors toute arête non dirigée de G qui n'est pas un pont peut être orientée sans changer la connectivité de G . Par conséquent, il est possible de changer une rue à double sens en rue à sens unique tant que sa suppression ne déconnecte pas l'ensemble du réseau. Il est donc récursivement possible de transformer tout réseau sans pont en un graphe entièrement dirigé. Dans la plupart des villes, il devrait alors être possible de trouver une orientation des rues qui maintient le réseau fortement connecté.

Ce théorème ne dit cependant rien sur la façon dont les rues à sens unique modifient les plus courts chemins. A cet égard, très peu de résultats ont été obtenus : pour le diamètre¹ par exemple, Chvatal et Thomassen [265] ont prouvé que si le graphe non orienté a un diamètre d , alors il existe une orientation forte avec un diamètre inférieur à la limite (la meilleure possible) $2d + 2d^2$, mais que ce problème est en général NP-difficile. Il est d'ailleurs intéressant de noter que, dans certains cas pratiques, il est souhaitable de trouver une orientation forte qui ne soit pas efficace du point de vue des plus courts chemins (c'est-à-dire qui ne minimise pas le diamètre) afin de décourager les gens de prendre leur voiture soit localement soit globalement [266].

14.2. Quelques mesures empiriques

On peut trouver des informations sur les rues à sens uniques des grandes villes mondiales sur OpenStreetMap [267]. En exploitant ces données avec le logiciel libre OSMnX [268], on peut extraire directement le réseau de rues de 146 villes définies par leurs limites administratives. L'analyse graphique de ces réseaux réels a été réalisée avec la bibliothèque networkx [269] et l'analyse théorique avec le paquet C/C++ igraph [270]. Le code est disponible sur [271].

14.2.1. Fraction de sens interdits et détour

On définit la fraction de rues à sens unique dans une ville comme $p = L_1/L(G)$ où L_1 est la longueur totale des rues à sens unique et $L(G)$ la longueur totale du réseau G de taille N . On observe que cette fraction varie de valeurs très faibles (8 % pour la moyenne des villes africaines) à des valeurs assez importantes (31 % pour la moyenne des villes européennes). La table 14.1 montre la valeur empirique de p dans cinq villes différentes comparée au seuil de percolation de la composante fortement connexe dans les graphes correspondants. Les rues à sens unique sont nettement plus courantes en Europe que dans le reste du monde.

1. Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance possible entre deux sommets.

Ville	Pays	Part de sens uniques (%)	Seuil de percolation
Pékin	Chine	37	0,63(2)
Casablanca	Maroc	19	0,73(2)
Paris	France	66	0,78(2)
New York	États-Unis	55	0,77(2)
Buenos Aires	Argentine	71	0,78(2)

TABLE 14.1 – Fraction empirique (en longueur) des rues à sens unique dans cinq villes différentes comparée au seuil de percolation de la composant fortement connexe dans les graphes correspondants. Le seuil de percolation correspond au pourcentage de sens uniques pour lequel la probabilité d'avoir une composante géante (reliant des côtés opposés) est de 1/2.

On désigne par $d_G(i, j)$ la distance du plus court chemin du nœud i au nœud j sur le graphe non dirigé G et $d_{\vec{G}}(i, j)$ la quantité correspondante pour le graphe mixte \vec{G} . Le détour moyen dû à la présence de sens uniques est alors défini comme :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{(i,j) \in G} \frac{d_{\vec{G}}(i,j)}{d_G(i,j)} - 1. \quad (14.1)$$

La figure 14.1(a) montre comment le détour moyen augmente avec la fraction de rues à sens unique p dans les données. On observe tout d'abord que le détour augmente de manière linéaire avec la fraction de voies à sens unique (une loi de puissance donne un exposant de 0,8) et que la plupart des villes ont un détour moyen inférieur à 10 %. Nous notons également qu'il existe une grande dispersion de ce détour pour une valeur donnée de p . Par exemple, pour une valeur de $p \simeq 0,6$, le détour varie d'environ 6 % pour Singapour à 15 % pour Beyrouth ce qui montre que l'effet sur les plus courts chemins dépend fortement de la localisation précise des rues à sens unique. En outre, on peut calculer l'effet des sens interdits sur les chemins parcourus dans la ville en fonction de leur distance d en l'absence de sens uniques. On définit ainsi un profil de détour

$$\eta(d) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{(i,j) \text{ s.t. } d_G(i,j)=d} \frac{d_{\vec{G}}(i,j)}{d_G(i,j)} - 1. \quad (14.2)$$

On observe sur la figure 14.1(b) que $\eta(d)$ décroît approximativement comme une loi de puissance de la forme $\eta(d) \sim d^{-\theta}$, ce qui montre que l'effet des rues à sens unique est encore ressenti pour de grands trajets. Si, en moyenne, le détour dû aux rues à sens unique est de l'ordre de 10 %, ce qui semble faible, les détours à courtes distances peuvent être significativement plus élevés (jusqu'à 100 %). De plus, même si 10 % semble faible au niveau individuel, cela a un effet non négligeable en termes d'encombrement à l'échelle de la ville lorsqu'on considère l'ensemble des automobilistes.

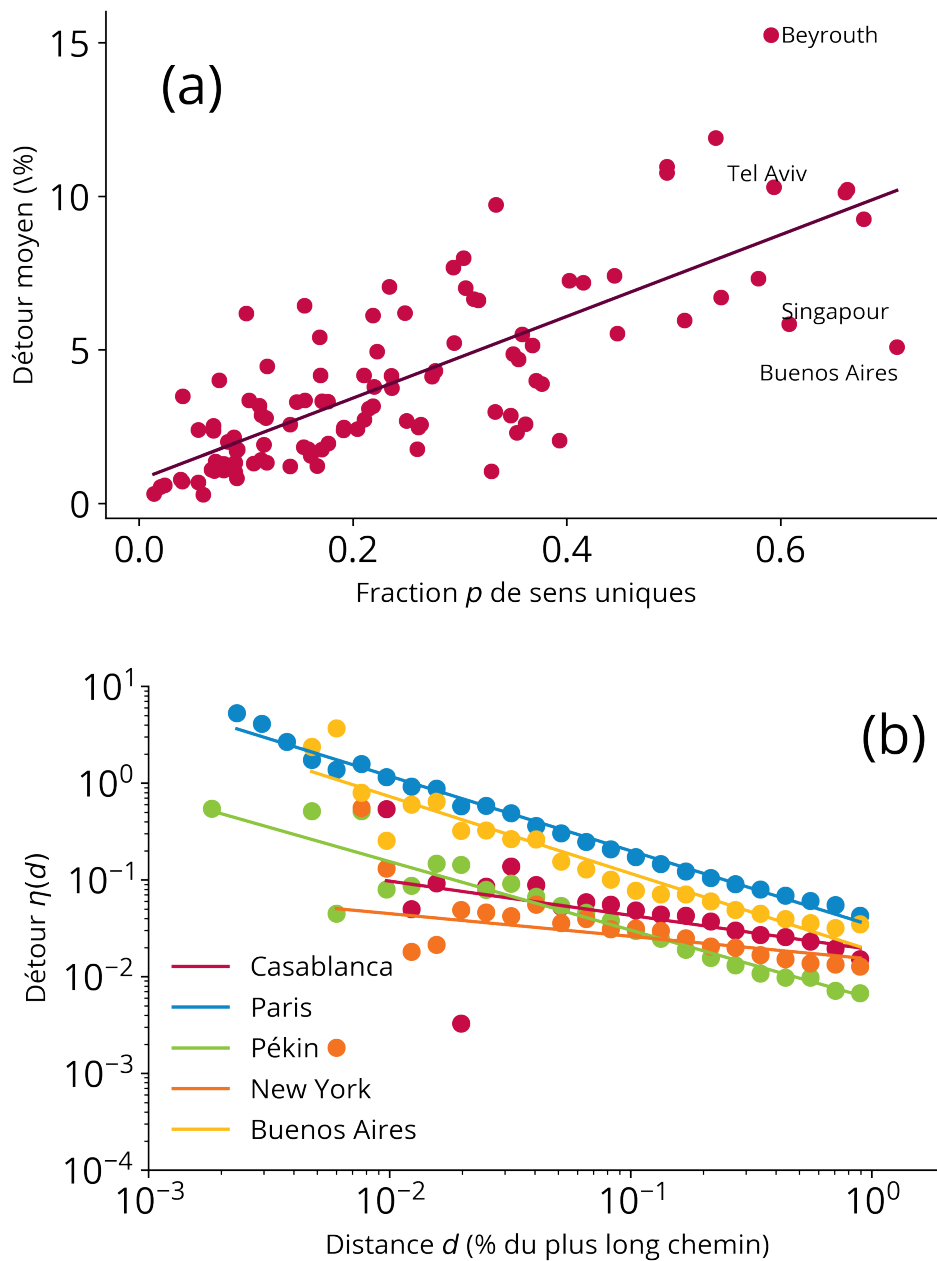


FIGURE 14.1 – (a) Distribution du détour moyen (%) en fonction de la fraction p des rues à sens unique pour 146 villes du monde ($R^2 = 0,59$). (b) Pour 5 villes particulières, on trace le détour moyen $\eta(d)$ dû aux rues à sens unique en fonction de la longueur d du trajet en l'absence de sens interdits (normalisé par la distance maximale obtenue pour chaque ville). Le détour se comporte en loi de puissance $\eta(d) \sim d^{-\theta}$ avec θ entre 0,2 et 0,8 selon les villes. De petites valeurs de l'exposant (comme à New York) pourraient être corrélées à la présence de très longues rues à sens unique conduisant à un grand détour.

L'exposant θ ne semble pas être universel et varie entre 0, 2 et 0, 8 pour différentes villes. On note que l'on s'attend en général à $\theta \in [0, 1]$. La limite supérieure $\theta = 1$ correspond au cas où les rues à sens unique créent un détour constant dans le réseau dirigé, ce qui implique que $d_{\vec{G}}(i, j) = C + d_G(i, j)$ et donc $\theta(d) \sim 1/d$. Le cas $\theta = 0$ correspond à la situation où le détour est proportionnel à la distance parcourue : $d_{\vec{G}}(i, j) \propto d_G(i, j)$, ce qui implique $\eta(d) \sim \text{cte}$. Dans tous les cas, la lente diminution de $\eta(d)$ avec d montre que l'effet sens uniques sur les plus courts chemin se maintient à longue distance.

14.2.2. Centralité intermédiaire

Les rues à sens unique régissent la structure spatiale du trafic et en modifiant la répartition. Cette évolution peut être mesurée par la *centralité intermédiaire* (voir annexe C), qui est une approximation du passage que peut subir un nœud [259, 272]. On désigne par $g_G(i)$ la centralité intermédiaire du nœud i dans le graphe G et définie par

$$g_G(i) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{s \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} \quad (14.3)$$

où σ_{st} est le nombre de plus courts chemins du nœud s au nœud t et $\sigma_{st}(i)$ le nombre de ces plus courts chemins qui passent par le nœud i . La quantité \mathcal{N} est une normalisation : ici $\mathcal{N} = (N - 1)(N - 2)$. On note $g_{\vec{G}}(i)$ la centralité intermédiaire du nœud i lorsque le nœud i dans le graphe mixte et on étudie la variation relative :

$$\Delta = (g_{\vec{G}}(i) - g_G(i))/g_G(i). \quad (14.4)$$

Dans le cas de Paris par exemple, on trouve que 53 % des nœuds ont une centralité intermédiaire plus faible ($\Delta < 0$) que si le réseau parisien était non dirigé, dont 27 % du total pour lesquels la centralité est divisée par deux et 3 % du total divisée par plus de dix (ce sont les nœuds les plus protégés par les sens uniques). Pour les autres nœuds (47 % avec $\Delta > 0$) la centralité intermédiaire est augmentée, plus que doublée pour 31 % du total et dix fois plus élevée dans 3 % des cas (pour les nœuds subissant le plus la modification de la répartition du trafic). On observe donc ici le double effet des rues à sens unique : certains nœuds sont préservés alors que simultanément se créent des goulots d'étranglement dans la ville où le passage peut être très important. Plus généralement, on observe que la distribution de Δ n'est pas symétrique (avec une moyenne globale $\simeq 0,59$) et biaisée vers les valeurs positives, ce qui indique que les goulots d'étranglement dus au trafic redirigé peuvent être extrêmement passants.

14.2.3. Composante fortement connexe

La composante fortement connectée d'un graphe dirigé est l'ensemble des nœuds tels qu'il existe un chemin dirigé reliant toutes les paires de nœuds qui s'y trouvent [266]. Pour un réseau de rues, il n'existe qu'une seule composante fortement connectée. On observe d'abord (voir figure 14.2 (colonne de gauche)) la distribution des degrés des nœuds dans trois villes différentes dans le monde, dont la fraction p de rues à sens unique varie de 19 % à 55 % (voir table 14.1). Comme on pouvait l'anticiper, il existe des différences significatives dans la distribution des degrés entre les vieilles villes comme Paris ou Pékin et des villes plus récentes comme New York au plan hippodamien. À part à Pékin, les rues à sens unique représentent plus de la moitié de la longueur totale du réseau, davantage encore dans une ville en damier comme Manhattan, où le pourcentage de sens uniques est de 69 % (avec de nombreuses avenues et rues orientées est/ouest ou nord/sud), ce qui correspond probablement au besoin de diminuer la congestion et de simplifier la navigation dans la ville.

Pour chacune de ces villes, on conserve la structure bidirectionnelle sous-jacente du graphe (qu'on appelle substrat du réseau réel et qui correspond au graphe non-dirigé équivalent) et on fait varier la fraction p de rues à sens unique de 0 à 1 en choisissant aléatoirement les rues qu'on souhaite transformer en rues à sens unique (avec orientation aléatoire) : $1 - p$ est donc la fraction restante de liens non orientés représentant les rues à double sens¹. On calcule ensuite la taille S de la composante fortement connectée, normalisée par le nombre total N de nœuds. On simule plusieurs réalisations de ce processus pour en calculer les propriétés statistiques.

La mesure de S/N permet de comprendre combien de rues peuvent être transformées en rues à sens unique dans un processus aléatoire avant que certaines parties de la ville ne deviennent déconnectées du reste. On compare sur figure 14.2 (colonne de droite) la courbe résultant du processus simulé dans les villes réelles à la même simulation sur des graphes réguliers. Dans chaque ville, on observe une transition abrupte de type percolation pour la taille de la composante géante lorsque la fraction de rues aléatoires à sens unique augmente. On remarque que pour chaque ville, la part réelle $p_{\text{réelle}}$ (représentée par une étoile) des rues à sens unique est inférieure au seuil de transition et qu'en général $(S/N)_{\text{réelle}} \simeq 1$, ce qui signifie — heureusement — que les réseaux urbains ne sont pas déconnectés dans la vie réelle. Ceci est attendu et le théorème de Robbins [263] affirme l'existence d'une telle solution quelle que soit la fraction de liens dirigés. On note, cependant, que cette solution n'est statistiquement pas fréquente et peut être très éloignée de la moyenne de S/N sur toutes les configurations aléatoires pour $p = p_{\text{réelle}}$.

1. Dans ce processus aléatoire, des rues qui sont bidirectionnelles dans la vraie vie peuvent devenir des sens uniques et inversement.

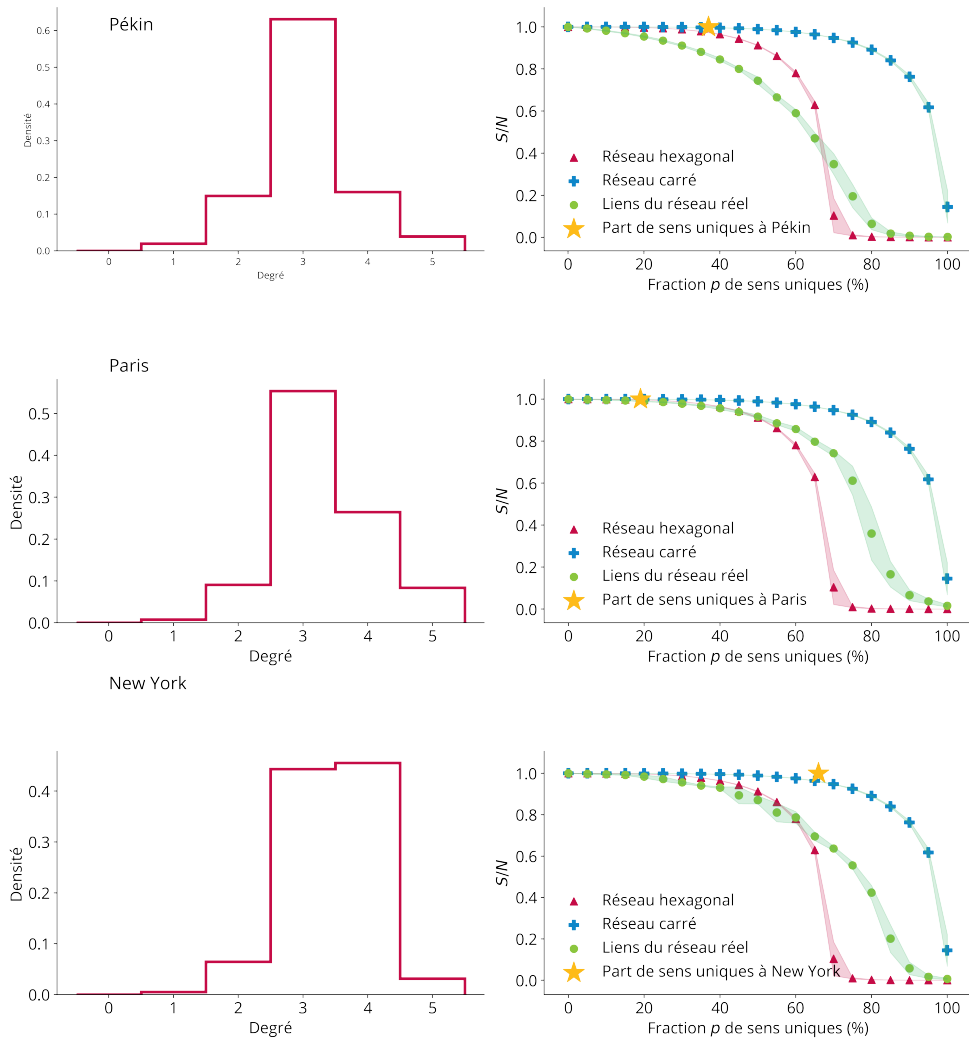


FIGURE 14.2 – (Colonne de gauche) : La distribution des degrés des carrefours dans trois villes différentes. Le degré moyen pour ces villes est $\langle k \rangle \simeq 3,1$ (Pékin), $\simeq 3,5$ (New York) et $\simeq 3,1$ (Paris). (Colonne de droite) Les points verts sont obtenus en choisissant une fraction p de rues dans la structure bidirectionnelle sous-jacente de la ville et en les transformant en rues à sens unique. Dans ce processus statistique, les rues bidirectionnelles du monde réel peuvent être transformées en rues à sens unique et inversement. On trace ensuite la taille de la composante géante S dans le réseau total normalisé par le nombre N de nœuds en fonction de p . Les résultats sont obtenus pour 10 réalisations différentes du désordre.

14.3. Percolation

14.3.1. Percolation et digraphes

Ces résultats empiriques nous amènent à étudier de manière plus approfondie la transition de type percolation observée pour les graphes mixtes. On note tout d'abord que cette question est différente des rares résultats disponibles pour les digraphes [273-278]. Par exemple, comme dans la transition d'Erdős-Rényi [279], l'ajout de liens dirigés dans un digraphe conduit à une transition de la composante fortement connexe [273] : pour $M/N > 1$, il existe une composante fortement connexe infinie (M est le nombre d'arêtes dirigées et N le nombre de nœuds) ; le paramètre d'ordre est alors le nombre d'arêtes qui sont toutes dirigées. D'autres études ont généralisé la percolation dans les réseaux aléatoires entièrement dirigés — généralement non corrélés — [274-277] mais ces résultats ne sont pas généralisables aux réseaux réguliers qui sont, par définition, fortement corrélés et dont la répartition des liens n'est pas aléatoire. Le cas étudié ici est également différent du modèle bien connu de percolation dirigée en physique statistique [280, 281] dans laquelle on choisit une direction privilégiée et qui définit une classe d'universalité différente de celle de la percolation habituelle.

Le modèle de percolation dans les graphes mixtes, celui qui nous intéresse ici, a été introduit par Sidney Redner dans une série d'articles [282-284] sous le nom de percolation aléatoire dans les réseaux diode-résistance, avant d'être étudié plus en détail pour ses propriétés théoriques [285-288]. Dans la version la plus générale de ce modèle — en suivant la métaphore électrique — les arêtes peuvent être absentes, modélisées par des résistances (qui font passer le courant dans les deux sens) ou par des diodes (qui font passer le courant dans une seule direction). Le diagramme de phase général a été discuté dans [282, 283] à l'aide d'arguments de renormalisation et prédit l'existence de points fixes associés à la percolation standard, à la percolation dirigée et à de nouvelles transitions : le point de bifurcation entre la percolation isotrope et la percolation dirigée a notamment été étudié dans [285-287, 289].

Redner [282] a également observé une transition d'une connectivité à double sens à une connectivité à sens unique. Cette transition a été discutée dans [288], qui en calcule les exposants critiques dans le cas où les liaisons peuvent être absentes, à double sens ou à sens unique. Le cas particulier où les liaisons sont soit non-dirigées soit dirigées (mais ne peuvent pas être absentes) est le cas spécifique qui s'applique aux réseaux routiers et sur lequel nous nous concentrons. On considère donc un graphe mixte \vec{G} dont les arêtes peuvent être dirigées ou non dirigées. Comme *supra*, on désigne par p la fraction d'arêtes dirigées et les limites $p = 0$ et $p = 1$ correspondent alors au graphe non dirigé et au graphe entièrement dirigé, respectivement. On suppose que les liens dirigés ont une direction aléatoire (c'est-à-dire que chaque direction a une probabilité $1/2$). On s'intéresse aux cas du réseau carré et du réseau hexagonal.

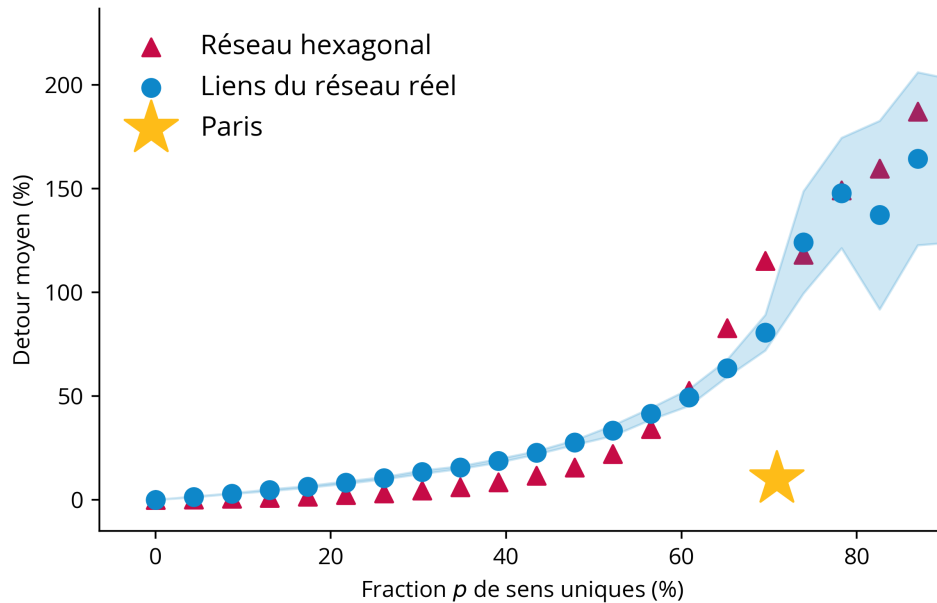


FIGURE 14.3 – Détour moyen $\bar{\eta}$ en fonction de la fraction p de rues à sens unique choisies au hasard à Paris (France). Le détour augmente avec p . On note cependant que le détour empirique dans le monde réel (indiqué par un symbole en forme d'étoile) reste en dessous du résultat attendu d'une distribution aléatoire de rues à sens unique. Cela indique que le choix réel des rues à sens unique à Paris n'est pas aléatoire et limite les grands détours. On compare ces résultats à ceux du réseau hexagonal dont la structure est proche de Paris.

14.3.2. Propriétés de détour

On considère d'abord le détour moyen dans le réseau hexagonal et on observe qu'il augmente avec p . On le compare sur la figure 14.3 au réseau parisien. On voit que le détour réel à Paris est inférieur au résultat obtenu pour une distribution aléatoire de rues à sens unique (des résultats similaires sont obtenus pour d'autres villes). Ceci démontre l'importance du positionnement exact des sens uniques dans la ville, qui peuvent affecter de manière très différente la statistique des plus courts chemins.

Dans le réseau hexagonal (figure 14.4), le détour moyen $\eta(d)$ se comporte comme une loi de puissance en fonction de d avec $\eta(d) \sim d^{-\theta}$ (la quantité d est ici normalisée par sa valeur maximale). On trouve $\theta = 0,5 \pm 0,1$ comme le montre le *data collapse* de la figure 14.4(a). Plus précisément, on montre que la relation est de la forme $\eta(d) = A(p)d^{-1/2}$, qui reste valable pour tout p avec $A(p) \sim p^{2,3}$ (voir figure 14.4(b)). Ce résultat en $1/\sqrt{d}$ suggère la possibilité d'un argument reposant sur la somme de quantités aléatoires conduisant à $d_G^2(i, j) - d_G(i, j) \sim \sqrt{d}$.

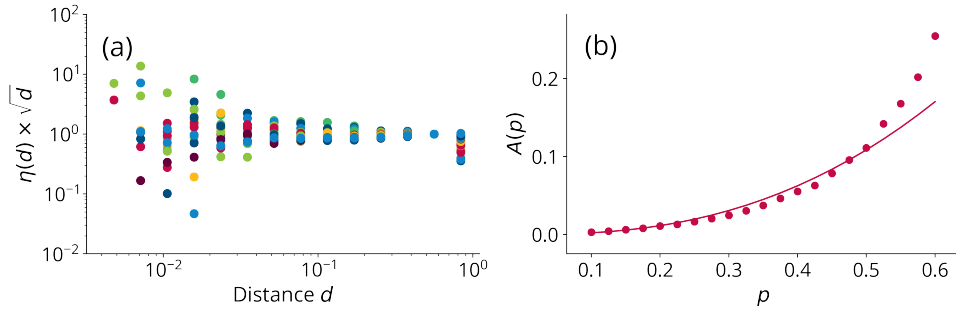


FIGURE 14.4 – Détour moyen dans le réseau hexagonal. (a) On montre la quantité $\eta(d)\sqrt{d}$ en fonction de d normalisée par sa valeur en $d = 0,1$. Les courbes s'effondrent sur une seule courbe indépendante de d et les divergences observées pour d proche de 1 et à d faible proviennent d'effets de taille finie. (b) Le *data collapse* suggère une forme $\eta(d) = A(p)d^{-1/2}$ avec $A(p) \sim p^\gamma$ et $\gamma \simeq 2,3$ ($R^2 = 0,94$).

14.3.3. Seuil de percolation

Nous nous intéressons ici aux propriétés de percolation de la composante fortement connexe. Afin de distinguer cette nouvelle transition de la percolation habituelle, on parlera de percolation mixte. Comme pour la percolation classique [290-296], on désigne par P_∞ la probabilité d'appartenir à la composante fortement connexe : P_∞ est le paramètre d'ordre. On observe numériquement (sur 1 000 simulations) que les deux réseaux réguliers (carré et hexagonal) exhibent une transition de phase (voir figure 14.6 et 14.7) à un seuil de percolation p_c au-dessus duquel la taille de la composante fortement connexe est négligeable. On détermine le seuil de percolation $p_c(L)$ pour un réseau fini de taille linéaire L en utilisant la méthode décrite dans [297] : afin de déterminer numériquement le seuil de percolation $p_c(\infty)$, on définit le seuil $p_c(L)$ pour un réseau de taille finie L comme étant la fraction de graphes dirigés pour laquelle la probabilité $P(L)$ d'avoir une composante fortement connexe reliant deux côtés opposés est de 1/2 [297]. En pratique, on calcule $p_c(L)$ comme le seuil moyen entre le dernier moment tel que $P(L) > 0,5$ et le premier moment où $P(L) < 0,5$ lorsque p augmente. À partir du seuil $p_c(L)$ pour différentes tailles L , on utilise l'*ansatz* [297]

$$p_c(L) = p_c(\infty) - A/L^\nu \quad (14.5)$$

où ν est l'exposant critique qui décrit la divergence de la longueur de corrélation $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$. Avec cette méthode, on trouve pour le réseau hexagonal $p_c = 0,6935 \pm 0,0005$ et $p_c = 0,998 \pm 0,002$ pour le réseau carré (voir figure 14.6 et figure 14.7).

Pour le réseau hexagonal, on observe donc un seuil $p_c < 1$ alors que pour le réseau carré, on a $p_c = 1$. Cela implique notamment que pour un degré égal ou supérieur à 4, le nombre de chemins différents entre toute paire de points est suffisamment grand pour que la composante fortement connexe soit toujours géante. En revanche, pour le réseau hexagonal, dans lequel le degré $k = 3$, certains nœuds

Ville	p_c	$p_c^0 = 1 - \frac{1}{2}p_c$	p_c (mesuré)
Pékin	0,63	0,685	0,67(3)
Casablanca	0,73	0,635	0,62(3)
Paris	0,78	0,61	0,57(3)
New York	0,77	0,615	0,57(3)
Buenos Aires	0,88	0,56	0,52(3)

TABLE 14.2 – Seuil de percolation mixte empirique pour différentes villes (p_c) comparé à la prédiction équation 14.6 proposée dans [288], et au seuil mesuré p_c^0 .

peuvent plus facilement constituer des « points de blocage ». Il est intéressant de noter que les réseaux de rues réels ont un degré moyen entre 3 et 4, ce qui implique un seuil de percolation non trivial et une courbe de percolation entre celles des deux réseaux réguliers.

La relation 14.5 permet également de calculer la valeur $\nu = 1,1 \pm 0,2$ (et la même valeur pour le réseau carré), qui est légèrement différente de la valeur de percolation isotrope $4/3$.

Pour ce modèle, de Noronha *et al.* [288] ont proposé un calcul heuristique du seuil de percolation qui repose sur la probabilité d'atteindre son plus proche voisin à partir d'un site donné. En utilisant des arguments de dualité, on peut prouver que cette approche est exacte pour les réseaux carré, triangulaire et hexagonal [288]. Dans les réseaux où les liaisons sont soit non dirigées, soit dirigées (mais pas absentes), cette conjecture s'écrit

$$p_c = 2(1 - p_c^0) \quad (14.6)$$

où p_c^0 est le seuil de transition équivalent pour la percolation habituelle sur le même graphe. Dans les réseaux hexagonaux, $p_c^0 = 1 - 2 \sin \pi/18$ d'où $p_c = 4 \sin \pi/18 \simeq 0,6926$ en accord avec notre estimation numérique. La conjecture de [288] a été testée sur les réseaux carré et hexagonal uniquement. On peut également la tester sur les graphes aléatoires du monde réel générées par les différentes villes. Les résultats sont présentés dans la table 14.2.

On observe qu'il y a un bon accord entre la valeur prédite par la conjecture 14.6 et une mesure directe pour différentes villes : la conjecture semble donc correcte pour ces graphes aléatoires (dans les limites de nos barres d'erreur).

Cette conjecture montre aussi que lorsque p_c^0 est plus petit que $1/2$, il n'y a pas de transition possible. Pour un réseau régulier de degré k ($k = 2d$ pour un réseau hypercubique de dimension d), on peut alors se demander quelle est la valeur de k au dessus de laquelle il n'y a plus de transition observable. Le seuil de percolation est bien évidemment une fonction croissante du degré du réseau k , puisqu'il est plus facile de trouver une composante sur des graphes avec plus de voisins et il semble ne pas y avoir de transition pour les réseaux dont le degré moyen est supérieur à 4.

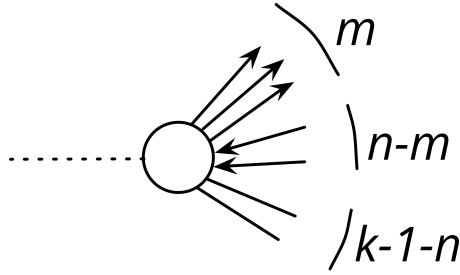


FIGURE 14.5 – Notations : un nœud de degré k a un lien entrant et $k - 1$ liens sortants. Parmi ceux-ci, il y a m liens sortants, $n - m$ liens entrants et $k - 1 - n$ arêtes bidirectionnelles.

Il est facile de montrer que $p_c = 0$ pour le réseau unidimensionnel (qui correspond à un réseau régulier de degré $k = 2$). Nous proposons le raisonnement suivant pour comprendre comment le seuil varie avec le degré k dans un réseau régulier en adaptant à notre cas l'argument proposé dans [275]. On suppose qu'un nœud a un lien entrant et on calcule son degré sortant moyen $\langle k_o \rangle$ (qui varie de 0 à $k - 1$ en excluant le cas entrant). Les notations utilisées sont définies sur la figure 14.5.

La probabilité d'avoir n liens sortants parmi m liens unidirectionnels est

$$p_{nm} = \left(\frac{p}{2}\right)^n (1 - p)^{k-1-n}, \quad (14.7)$$

le lien entrant pouvant être soit non dirigé (avec probabilité $1 - p$) soit dirigé et entrant avec une probabilité $p/2$, ce qui conduit à un préfacteur $p/2 + 1 - p$. Le degré sortant pour la configuration définie par n et j est alors $k - 1 - n + m$. On obtient donc

$$\langle k_o \rangle = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{p}{2}\right)^n (1 - p)^{k-1-n} \sum_{m=0}^n \binom{k-1}{m} \binom{k-1-m}{n-m} \quad (14.8)$$

$$\times (k - 1 - n + m) \left(\frac{p}{2} + 1 - p\right). \quad (14.9)$$

Ces sommes peuvent facilement être calculées d'où

$$\langle k_o \rangle = \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 (k - 1). \quad (14.10)$$

La condition de percolation est alors $\langle k_o \rangle \geq 1$, ce qui signifie qu'un chemin dirigé peut passer par ce nœud, une condition nécessaire pour appartenir à la composante géante. En écrivant $\langle k_o \rangle = 1$ on obtient alors le seuil de percolation

$$p_c(k) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right), \quad (14.11)$$

qui est valable dans l'intervalle $[2; 5]$. Cette formule approximative donne les résultats exacts $p_c(k = 2) = 0$ et $p_c(k \geq 5) = 1$ et est en accord, au moins

qualitativement, avec les résultats numériques précédents. Elle surestime cependant — comme on peut s’y attendre pour une condition nécessaire mais pas suffisante — le degré au-dessus duquel $p_c(k \geq 5) = 1$ et il serait intéressant de trouver une formulation heuristique du résultat numérique $p_c(k = 4) = 1, 0$.

14.3.4. Exposants critiques et nouvelle classe d’universalité

Les exposants critiques de la percolation mixte ont déjà été estimés dans [288] et nous les retrouvons de manière indépendante pour le réseau hexagonal (figure 14.6) et le réseau carré (figure 14.7). En particulier, dans [288], il est supposé que l’exposant ν est le même que dans la percolation isotrope et donné par $\nu = 4/3$. Nous avons remplacé ici cette hypothèse par le résultat de 14.5.

En dessous du seuil de percolation, le paramètre d’ordre se comporte comme $P_\infty \sim |p - p_c|^\beta$ et une régression directe (figure 14.6(d)) donne $\beta = 0, 26 \pm 0, 02$ ($0, 27 \pm 0, 02$ pour le carré). Au-dessus du seuil de percolation, la taille maximale de la composante géante se comporte comme $s_{\max} \sim |p - p_c|^\sigma$ tandis qu’au seuil, la probabilité n_s d’appartenir à une composante de taille s est égale à $n_s \sim s^{-\tau}$. Ces exposants classiques prennent ici les valeurs suivantes (figure 14.6) : $\tau = 2, 14 \pm 0, 05$ ($2, 11 \pm 0, 05$ pour le réseau carré) et $\sigma = 0, 56 \pm 0, 05$ (l’exposant σ n’est pas défini pour le réseau carré où $p_c = 1$). On remarque ici que trop près de la criticalité les effets de taille finie deviennent importants lorsque la longueur de corrélation est de l’ordre de la taille du système, ce qui réduit la plage sur laquelle l’estimation peut être effectuée.

On note ici que ces exposants satisfont les relations d’échelle [294] $\tau = d\sigma\nu + 1$ et $\beta = (\tau - 2)/\sigma$ (où la dimension est ici $d = 2$), ce qui est attendu puisque ces relations sont indépendantes du fait que les liens soient orientés ou non. À partir des relations classiques $d_f = d/(\tau - 1)$, on obtient aussi la dimension fractale de la composante géante au seuil de percolation $d_f = 1, 75 \pm 0, 08$.

La table 14.3 synthétise ces résultats. On observe que les exposants sont très différents de ceux obtenus pour la percolation sur des réseaux réguliers non dirigés ou pour la percolation dirigée, en accord avec les résultats obtenus en [288]. Ils indiquent une nouvelle classe d’universalité contrairement à l’analyse présentée en [287, 289], qui a conclu que ce modèle se trouve dans la même classe d’universalité que la percolation standard. Il existe cependant quelques désaccords numériques (pour ν , σ , et d_f) entre les résultats présentés ici et ceux de [288] et il conviendrait de raffiner ces estimations.

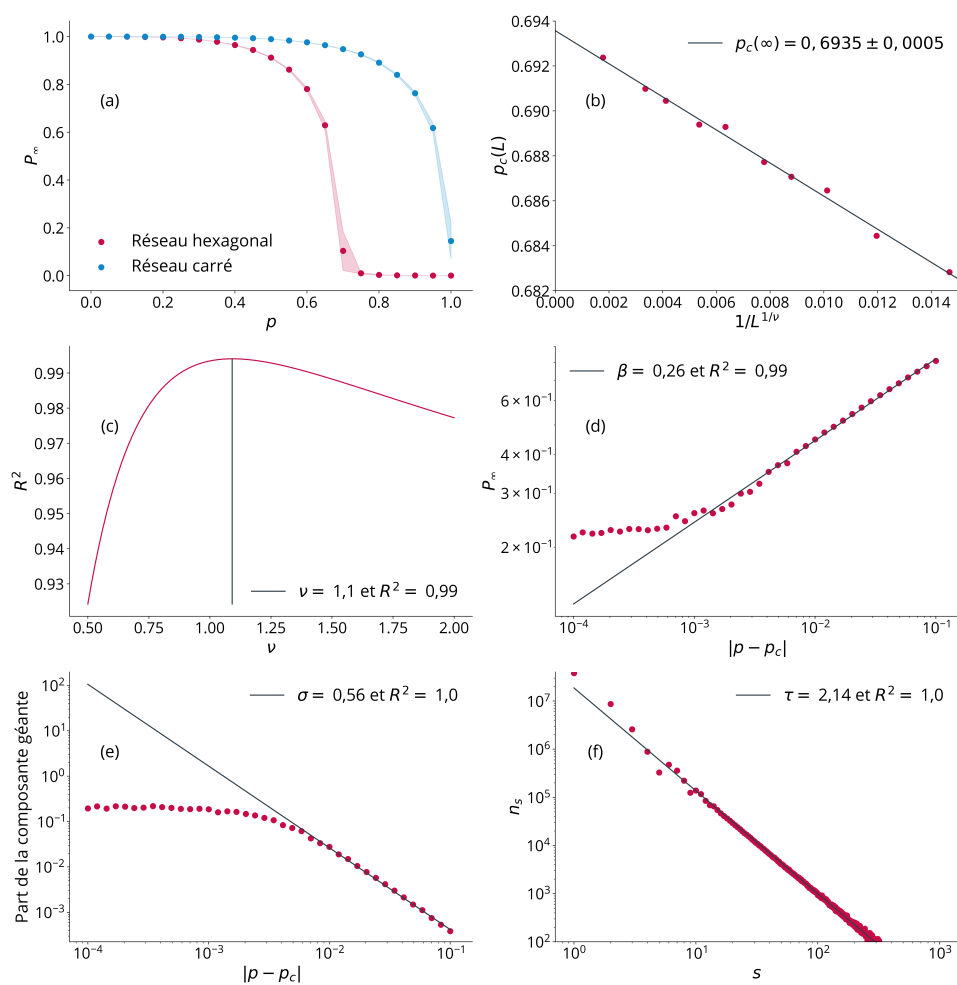


FIGURE 14.6 – Transition de percolation mixte du réseau hexagonal et calcul des exposants critiques. Trop proche de la criticalité, les effets de taille finie deviennent importants (la longueur de corrélation est de l'ordre de la taille du système), ce qui réduit la plage sur laquelle le *fit* peut être effectué. (a) La probabilité d'appartenir à l'amas infini P_∞ chute brutalement lorsque la fraction p des rues à sens unique est proche de 0,69 dans le réseau hexagonal et de 1 dans le réseau carré. (b) Calcul de $p_c = 0,6935 \pm 0,0005$. (c) La régression du seuil de percolation à taille finie en fonction de L donne l'exposant $\nu = 1,1 \pm 0,2$. (d) En dessous de la criticalité, le comportement de P_∞ avec $|p - p_c|$ donne l'exposant $\beta = 0,26 \pm 0,02$. (e) Au-dessus de la criticalité, la taille maximale normalisée de la composante géante s'échelonne en $s_{max} \sim |p - p_c|^\sigma$ avec $\sigma = 0,56 \pm 0,05$. (f) À la criticalité, le nombre de composantes s'échelonne comme $n_s \sim s^{-\tau}$ et on trouve $\tau = 2,14 \pm 0,05$.

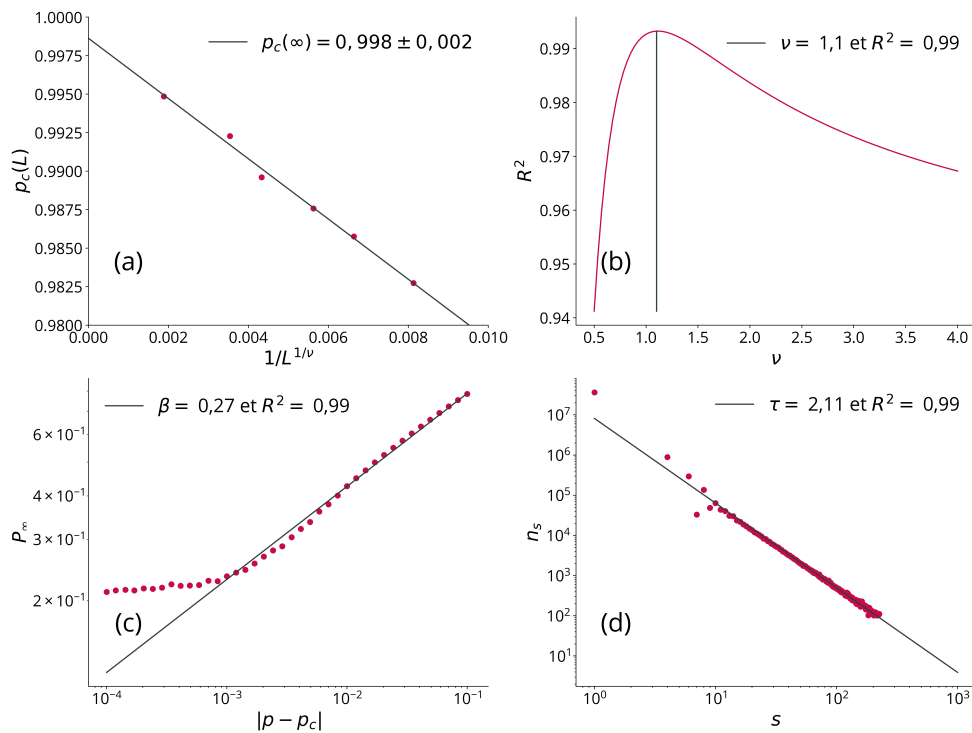


FIGURE 14.7 - (a) Le seuil de percolation d'un réseau carré infini est calculé par extrapolation à partir des seuils à taille finie. On trouve $p_c = 0,998 \pm 0,002$. (b) La régression du seuil de percolation en fonction de la taille linéaire donne également l'exposant critique $\nu = 1,1 \pm 0,2$. (c) En dessous de la criticalité, le comportement de P_∞ en fonction de $|p - p_c|$ donne l'exposant $\beta = 0,277$. (d) À la criticalité, le nombre de clusters de taille s s'échelonne comme une loi de puissance d'exposant critique $\tau = 2,14 \pm 0,05$.

Exposant critique	Percolation 2D	Percolation 2D dirigée	Résultats de [288]	Ici
ν	4/3	1,73 (parallèle) 1,09 (perp.)	4/3	$1,1 \pm 0,2$
β	0,14	0,28	$0,27 \pm 0,01$	$0,26 \pm 0,02$
σ	0,40	0,31	$0,41 \pm 0,01$	$0,56 \pm 0,05$
d_f	1,90	1,84	$1,80 \pm 0,01$	$1,75 \pm 0,08$
τ	2,05	1,46	$2,12 \pm 0,08$	$2,14 \pm 0,05$

TABLE 14.3 - Exposants critiques de la percolation standard [295, 298] par rapport à la percolation dirigée [299], aux résultats obtenus dans [288] et dans notre travail pour la percolation mixte.

14.4. Perspectives

Un résultat intéressant à retenir ici est de voir le décalage qui existe entre le nombre de sens interdits qu'une ville est capable de contenir sans détruire sa connexité totale et le nombre de ces sens interdits en pratique. On peut dire d'une certaine façon que cela laisse encore des possibilités aux politiques de limitation automobile, même si les sens interdits ont aussi d'autres effets sur le comportement des automobilistes et peuvent complètement changer les détours moyens et la centralité locale de certaines intersections ou de certains quartiers.

De façon amusante, c'est cette fois-ci un problème concret qui nous a amené à traiter un problème finalement très théorique et c'est la science des villes qui aide la physique statistique. C'est le dernier résultat que nous présentons dans cette thèse et qui montre comment la pluridisciplinarité entre géographie et physique peut fonctionner dans les deux sens et pas seulement à sens unique...

Conclusion

Les réseaux de transport ont une importance capitale dans les villes puisqu'en permettant de lier des individus de sur très grandes distances, ils en assurent la stabilité et la cohésion. Comprendre les réseaux et les modes de déplacement dans les villes ne peut donc être décorrélé de l'étude économique et sociale de celles-ci.

Dans cette partie, nous avons étudié à la fois indépendamment et conjointement les deux principaux réseaux de transport dans les villes : le réseau routier et le réseau des transports publics. Nous avons d'abord identifié au chapitre 12 comment le développement du second diminuait la congestion du premier et montré comment l'augmentation de l'accessibilité des transports publics, définie comme la part de population vivant à leur proximité, pouvait, mieux que la densité, expliquer l'usage de la voiture en ville et ses conséquences environnementales.

Forts de ce résultat, nous avons cherché à étendre au chapitre 13 la mesure de cette accessibilité dans le monde en en proposant une définition cohérente et en calculant la valeur dans 85 villes du monde, nous consacrant ainsi davantage à la seule étude du réseau public.

Enfin, et presque par symétrie, nous sommes revenus au chapitre 14 à l'étude spatiale du réseau routier sous un angle peu commun : celui des sens uniques. Nous avons montré que ceux-ci affectaient fortement les déplacements en ville, y compris à grande distance. En modélisant les réseaux routiers par des graphes mixtes, nous avons établi un lien remarquable avec la théorie de la percolation et retrouvé des résultats théoriques déjà identifiés dans d'autres contextes.

Conclusion générale

D'un point de vue scientifique, cette thèse démontre qu'il existe une manière d'étudier les villes issue de la physique statistique qui *marche*, c'est-à-dire qui soit capable de rendre compte d'observations empiriques et de faire des prédictions. Cette façon de penser a sa méthode, développée en [première partie](#). Elle diffère de l'économie et se veut non pas plus quantitative — à quoi bon — mais à la fois plus générale, par la réduction du nombre de paramètres à estimer, et plus empirique, ce que nous permettent les multiples données urbaines existant aujourd'hui.

Sa prétention à expliquer repose sur la notion centrale d'universalité : comme dans les autres systèmes complexes, les villes sont des ensembles énormes dans lesquels, bien souvent, les détails ne comptent pas. Les actions individuelles, fussent-elles irrationnelles ou aléatoires, sont en quelque sorte moyennées, mais le mot n'est pas le plus juste, dans un tout qui est différent de la somme de ses parties et qui peut être étudié selon ses propres lois.

C'est ce que nous illustrons en [deuxième partie](#) en écrivant l'équation de croissance des villes, une équation des villes et pas d'une échelle inférieure, qui met en évidence l'importance des chocs migratoires dans le destin des villes. C'est ce que nous illustrons en [troisième partie](#) lorsque nous adoptons le modèle de l'électeur à la dynamique des revenus dans les villes. C'est ce que nous illustrons en [quatrième partie](#) lorsque nous quantifions l'interaction entre transports publics et transports privés par une équation simple. De trois façons différentes, nous avons utilisé la même approche avec succès.

Pourtant, il faut bien le reconnaître, on ne peut pas forcément s'attendre à ce que notre méthode trouve son utilité dans tous les cas d'étude. Parfois — c'est le propre des systèmes chaotiques — le changement d'échelle rend la description déterministe du système impossible et l'on doit admettre qu'il y ait des phénomènes sociaux qui ne se laissent pas mettre en équation [300]. Une science des villes n'a pas vocation à tout expliquer ; elle n'y arrivera jamais. Elle restera toujours l'exception et non la règle. Mais lorsqu'elle réussit, peut-on le lui reprocher ?

On peut être au premier regard étonné par le rapport entre cette thèse et la carrière d'un futur administrateur public. Le lien est effectivement ténu bien qu'on tente souvent de le maintenir en plaidant les opportunités professionnelles qu'apporteraient la méthode scientifique, le « réseau » des chercheurs rencontrés ou je ne sais quelle autre vertu du monde du travail stéréotypée.

Après tout, et c'est peut-être pour ça que j'ai failli me la faire refuser, j'ai fait ma thèse par plaisir et par curiosité. Peut-être peut-on aussi se réjouir de voir arriver dans le monde professionnel et dans la fonction publique un peu guindée des gens qui ont fait leurs choix par plaisir ? Nul doute que l'administration et l'État en bénéficieront. Plus que cela, je pense qu'ils bénéficieront de l'expertise

du doute. Quand on fait une thèse, on doute en effet souvent et beaucoup : de soi, des nombres, des résultats. C'est peut-être le sentiment le plus fort qui ne transparaît pas dans le document final alors qu'il a guidé les années de travail. Et pourtant l'on s'y habitue. Le doute devient remise en cause. J'ai toujours été étonné par la capacité des chercheurs, même les plus chevronnés, à se remettre en cause devant une bonne argumentation. C'est ce qu'il faut pour que la recherche avance mais cela n'a rien d'évident sur le plan individuel. Voilà peut-être ce qui manque le plus ailleurs, voilà peut-être ce qu'une thèse apporte à la *vraie vie*.

Annexes

A - Théorème central limite généralisé

A.1. Théorème central limite

Le bien connu théorème central limite établit la convergence en loi d'une somme de variables aléatoires. Il prouve l'importance naturelle de la loi normale, véritable loi universelle puisque l'addition de petites perturbations aléatoires tend vers la loi normale. Comme évoqué en 4.2.2, c'est un résultat fondamental de renormalisation qui prouve que les détails sont éliminés à grand N .

Théorème 1. Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2 finies avec $\sigma \neq 0$. Soit la somme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors $Z_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite :

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. Soient $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X_1 et $\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itZ_n})$ la fonction caractéristique de S_n . On suppose $\mu = 0$ par simplicité. Alors :

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$= \left(\phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad (\text{A.3})$$

car les variables aléatoires sont i.i.d.

ϕ_X est de carré intégrable et donc sa fonction caractéristique est deux fois dérivable en 0. Son développement limité en 0 est donné par :

$$\phi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) \quad (\text{A.4})$$

À n grand, on a donc (en admettant l'existence du logarithme complexe) :

$$\begin{aligned} \phi_{Z_n}(t) &= \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \\ &\simeq -e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Par unicité de la fonction caractéristique, $Z_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. \square

A.2. Généralisation

Il existe plusieurs généralisations possibles du théorème central limite, c'est-à-dire qui donnent la convergence de sommes de variables aléatoires sous des hypothèses plus faibles. La généralisation qui nous concerne ici, due à Gnedenko et Kolmogorov, s'intéresse aux cas des variables aléatoires symétriques à espérance ou variance infinie dont la queue de distribution est asymptotiquement une loi de puissance.

Théorème 2. Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à queues positive et négative symétriques telles que la densité $f(x)$ décroisse comme $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\simeq} b|x|^{-1-\alpha}$. Soit la somme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors :

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} (bn)^{1/\alpha} \zeta_\alpha & \text{si } \alpha < 1 \\ n\mu + (bn)^{1/\alpha} \zeta_\alpha & \text{si } 1 < \alpha \leq 2 \\ n\mu + (bn)^{1/2} \eta & \text{si } 2 < \alpha \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où ζ_α est une loi de Lévy de paramètre α et η la loi normale centrée réduite.

Démonstration. On suppose $m\mu = 0$. peut montrer qu'un développement limité en zéro de la fonction caractéristique ϕ_X donne à n grand :

$$\phi_X \simeq 1 - Cb|t|^{-\alpha} \quad (\text{A.6})$$

La fonction caractéristique de $Z_n = S_n/n^{1/\alpha}$ est alors :

$$\phi_{Z_n} \simeq \left(1 - \frac{Cb|t|^{-\alpha}}{n}\right)^n \quad (\text{A.7})$$

$$\simeq e^{-Cb|t|^\alpha} \quad (\text{A.8})$$

qui est la fonction caractéristique de la loi de Lévy de paramètre α . \square

B - Équations différentielles stochastiques

B.1. Mouvement brownien

B.1.1. Équation de Langevin

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement d'une particule soumise à des chocs aléatoires.

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ N variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/N)$. Soit un intervalle de temps T découpé en N sous-intervalles de taille $\tau = T/N$.

On appelle processus de Wiener ou mouvement brownien la quantité :

$$W_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N=t/\tau} \xi_i \equiv \int_0^t dW_t \quad (\text{B.1})$$

En posant $\tau = dt$, on note que $dW_t \sim \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sqrt{dt} \equiv \sigma_0 \sqrt{dt}$. Le processus de Wiener vérifie alors les propriétés :

1. $W_0 = 0$;
2. $\forall t > 0, \forall u \geq 0$, $W_{t+u} - W_t$ est indépendant de W_s pour $s \leq t$;
3. $\forall t, u > 0$, $W_{t+u} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 u)$;
4. W_t est continu en temps.

Enfin, on appelle processus d'Ornstein–Uhlenbeck le processus :

$$dx_t = -\theta x_t dt - dW_t \quad (\text{B.2})$$

où x_t représente la position de la particule à l'instant t et $\theta > 0$.

B.1.2. Conventions d'Itô et de Stratonovich

En physique, les processus d'Ornstein–Uhlenbeck se généralisent sous la forme d'une équation de Langevin :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + \eta(t) \quad (\text{B.3})$$

où $\eta(t)$ est un bruit blanc gaussien :

$$\eta(t) \equiv \frac{dW_t}{dt}, \quad (\text{B.4})$$

c'est-à-dire la « dérivée » d'une marche aléatoire.

Une telle définition impose d'être prudent puisque dans la limite continue $\eta(t) \sim \sigma_0(dt)^{-1/2}$ diverge. Deux conventions permettent de résoudre une telle équation mais impliquent des règles d'intégration différentes.

Convention de Stratonovich

La convention de Stratonovich est la plus « physique », elle introduit un temps de corrélation τ_c entre les différents bruits tel que :

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{\sigma_0^2}{2\tau_c} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_c}} \quad (\text{B.5})$$

avec $\tau_c \rightarrow 0$ mais $\tau_c \gg dt$.

Comme $\eta(t) \sim \sigma_0(\tau_c)^{-1/2}$, le système est physique et le processus est fini dans la limite continue $dt \rightarrow 0$, les règles du calcul intégral ordinaire s'appliquent :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (\text{B.6})$$

Par ailleurs, comme les nouveaux événements sont corrélés au passé :

$$\langle g(x(t))\eta(t) \rangle = \frac{\sigma_0^2}{2} \langle g'(x(t)) \rangle \quad (\text{B.7})$$

pour toute fonction g .

Convention d'Itô

La convention d'Itô impose $\tau_c \leq dt$ et

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \sigma_0^2 \delta(t - t') \quad (\text{B.8})$$

avec $\tau_c \rightarrow 0$ mais $\tau_c \gg dt$.

La corrélation avec le passé est nulle et $\eta(t) \sim \sigma_0(dt)^{-1/2}$ pose un problème de définition. Il est nécessaire de revoir les règles d'intégration. Le lemme d'Itô donne alors la bonne règle d'intégration :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (\text{B.9})$$

Comme la corrélation avec le passé est nulle, on a par ailleurs :

$$\langle g(x(t))\eta(t) \rangle = 0 \quad (\text{B.10})$$

pour toute fonction g .

B.1.3. Équation de Fokker-Planck

L'équation de Langevin étant stochastique, la quantité d'intérêt est la densité de probabilité de x dont l'évolution est donnée par l'équation de Fokker-Planck.

Dans le cas de l'équation B.3, qui représente le cas homogène (le bruit est le même quelque soit $x(t)$), les conventions d'Itô et de Stratonovich sont équivalentes et donnent la même équation de Fokker-Planck.

Théorème 3. Dans le cas homogène, quelle que soit la condition d'intégration, la densité de probabilité $p(x, t)$ de x au temps t obéit à l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x)p(x, t)) + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) \quad (\text{B.11})$$

Démonstration. On note $\langle \dots \rangle$ la moyenne sur les réalisations de η , dont la distribution est indépendante du temps. Pour une fonction test f ,

$$\langle f(x(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \delta(x - x(t)) f(x) \rangle \quad (\text{B.12})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t) f(x) \quad (\text{B.13})$$

d'où

$$\frac{d\langle f(x(t)) \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} f(x) \quad (\text{B.14})$$

Par ailleurs,

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right\rangle \quad (\text{B.15})$$

$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} (f(x(t)) + \eta(t)) \right\rangle \quad (\text{B.16})$$

$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} f(x(t)) \right\rangle + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{B.17})$$

par la convention de Stratonovich (par exemple).

En intégrant par parties, il vient :

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} f(x) + \frac{\sigma_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} f(x). \quad (\text{B.18})$$

Comme la distribution de η est indépendante du temps,

$$\frac{d\langle f(x(t)) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle. \quad (\text{B.19})$$

En comparant les équations B.14 et B.18 pour toute fonction test f , on trouve le résultat. \square

B.2. Bruit multiplicatif

B.2.1. Équation de Langevin inhomogène

Lorsque le coefficient de diffusion de l'équation de Langevin dépend de la position $x(t)$, on parle d'équation de Langevin à bruit multiplicatif, de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))\eta(t) \quad (\text{B.20})$$

Théorème 4. Dans le cas de l'équation de Langevin inhomogène à bruit multiplicatif B.20, l'évolution de la densité de probabilité $p(x, t)$ est donnée par une équation de Fokker-Planck qui dépend de la convention d'intégration choisie.

Dans la convention d'Itô, l'équation de Fokker-Planck est :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x)p(x, t)) + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g(x(t))p(x, t)) \quad (\text{B.21})$$

Dans la convention de Stratonovich, l'équation de Fokker-Planck est :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x)p(x, t)) + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{g(x(t))} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{g(x(t))} p(x, t) \right) \right) \quad (\text{B.22})$$

B.3. Extension aux bruits de Lévy

Les équations différentielles stochastiques avec un bruit de Lévy ne sont pas très courantes et ont été étudiées principalement dans le contexte des marches de Lévy.

On peut cependant esquisser une solution analytique exacte au problème :

$$\partial_t S_i = rS_i + DS_i^\beta \zeta_i. \quad (\text{B.23})$$

Théorème 5. Dans l'interprétation d'Itô, l'équation B.23 est associée à une équation de Fokker-Planck :

$$\partial_t P(S, t) = -\partial_S (rSP(S, t)) + D^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} (P(S, t)S^{\alpha\beta}) \quad (\text{B.24})$$

où $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$ est une dérivée fractionnaire.

Démonstration. On considère une fonctionnelle $R[x(t)]$ de $x(t)$ où $x(t)$ est solution de l'équation B.23 et on désigne par $P(x, t) = P(x, t|x_0, 0)$ la probabilité d'avoir une population de taille x au temps t (en partant de x_0 au temps $t = 0$). La moyenne de cette fonctionnelle sur cette distribution de probabilité est

$$\langle R \rangle = \int dx R(x) P(x, t), \quad (\text{B.25})$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt} \langle R \rangle = \int dx R(x) \partial_t P(x, t). \quad (\text{B.26})$$

Par ailleurs, la variation de R s'écrit

$$dR = R(x(t+dt)) - R(x(t)) \quad (\text{B.27})$$

$$= \int dx P(x, t) \int dk R(k) (e^{ikx(t+dt)} - e^{ikx}) \quad (\text{B.28})$$

$$= \int dx P(x, t) \int dk R(k) e^{ikx} (e^{ik(rxdt + kDx^\beta d\zeta)} - 1) \quad (\text{B.29})$$

où $R(k)$ est la transformée de Fourier de $R(x)$.

Or

$$\langle e^{ikDx^\beta d\zeta} \rangle = e^{-(Dx^\beta)^\alpha |k|^\alpha dt} \quad (\text{B.30})$$

où $\langle \dots \rangle$ symbolisent la moyenne sur ζ . En développant au premier ordre en dt , on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle &= \int dx P(x, t) \int dk R(k) e^{ikx} \\ &\times \left[ikxr - D^\alpha x^{\alpha\beta} |k|^\alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

qui peut se réécrire

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle &= \int dx P(x, t) r_x \int dk R(k) e^{ikx} ik \\ &- \int dx P(x, t) D^\alpha x^{\alpha\beta} \int dk R(k) e^{ikx} |k|^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle &= \int dx P(x, t) r_x \frac{dR}{dx} \\ &- \int dx P(x, t) D^\alpha x^{\alpha\beta} \frac{d^\alpha R}{d|x|^\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

à partir de quoi on peut prouver [148, 150] l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (r_x P(x, t)) + D^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} (x^{\alpha\beta} P(x, t)). \quad (\text{B.34})$$

L'équation de Fokker-Planck associée au processus B.23 est donc :

$$\partial_t P(S, t) = -\partial_S (r_S P(S, t)) + D^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} (P(S, t) S^{\alpha\beta}) \quad (\text{B.35})$$

où $P(S, t)$ est la probabilité d'avoir une ville de taille de population S au temps t . La quantité $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$ est une dérivée fractionnaire, facilement exprimable dans l'espace de Fourier. \square

Théorème 6. *La solution analytique à tout moment peut être exprimée en termes de fonctions H de Fox. Les fonctions H de Fox sont définies par une intégrale de Merlin-Barnes et la transformée de Fourier d'une fonction de Fox est également une fonction de Fox, ce qui les rend adaptées à la résolution d'équations aux dérivées partielles. En cherchant une solution de la forme d'une fonction H de Fox dans l'équation B.24, on peut écrire le développement asymptotique de la solution en puissances de S^{-1} :*

$$P(S, t) = N \alpha(1 - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{a(t)^{-\alpha\beta - \alpha(1-\beta)k}}{|S|^{1+\alpha\beta + \alpha(1-\beta)k}} \quad (\text{B.36})$$

où

$$C_k = \frac{(-1)^k \Gamma(1 + \alpha(1 - \beta)k)}{\Gamma(a_2 + A_2(1 + \alpha\beta + \alpha(1 - \beta)k)) \Gamma(-\frac{\alpha - \alpha\beta}{2 - \alpha\beta}k)}. \quad (\text{B.37})$$

Les quantités N , a_2 et A_2 sont des constantes de normalisation estimables :

- $a_2 = 1/2 - \alpha\beta(1 - \alpha\beta)/(2 - \alpha\beta)$;
- $A_2 = 1 - 1/(2 - \alpha\beta)$;
- $N = |\Gamma[\alpha\beta/(2 - \alpha\beta)]\Gamma[a_2 + A_2]/2\Gamma(1 - \alpha\beta)\Gamma[\alpha\beta/(\mu - \alpha\beta)]|$.

et

$$a(t) = \left(\frac{r/c_L}{\exp(r\alpha(1 - \beta)t) - 1} \right)^{1/\alpha(1 - \beta)} \quad (\text{B.38})$$

avec $c_L \propto D^\alpha$.

C - Centralité intermédiaire

Cette annexe est une reprise de [5].

C.1. Définition et généralités

Il existe plusieurs métriques de centralité pour caractériser l'importance d'un nœud dans un réseau [301]. Parmi celles-ci, la centralité intermédiaire introduite dans [302], est une bonne mesure de la structure d'un réseau. De plus, si l'on suppose que les individus ou les biens se déplacent sur les chemins les plus courts et que la demande est uniforme (chaque paire de nœuds constitue un couple origine-destination), alors la centralité intermédiaire d'un nœud (ou d'une arête) correspond au trafic local que l'on peut attendre à ce nœud. En réalité, les deux hypothèses ne sont pas toujours satisfaites et la part du trafic réel que la centralité intermédiaire peut expliquer est débattue [303-305].

La centralité intermédiaire d'un nœud i dans un graphe G avec N nœuds est donc définie comme :

$$g(i) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{s \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} \quad (\text{C.1})$$

où σ_{st} est le nombre de plus courts chemins du nœud s au nœud t et $\sigma_{st}(i)$ le nombre de ces plus courts chemins qui passent par le nœud i . La quantité \mathcal{N} est une normalisation que nous choisissons ici $\mathcal{N} = (N-1)(N-2)$ pour que la centralité intermédiaire soit dans $[0, 1]$.

On peut montrer que la centralité intermédiaire moyennée sur tous les nœuds $\bar{g} = 1/N \sum_i g(i)$ est proportionnelle au plus court chemin moyen ℓ [259, 306], qui est la plus courte distance entre deux nœuds du graphe, moyennée sur toutes les paires de nœuds. Cela permet notamment de comprendre que l'ajout d'un lien au graphe diminue la centralité intermédiaire moyenne. Plus précisément, on peut montrer [306] que si l'on ajoute à un graphe de taille N un lien de longueur d , on a

$$\bar{g} \rightarrow \bar{g} - \frac{2(d-1)}{N}. \quad (\text{C.2})$$

Si la centralité intermédiaire diminue en moyenne, cela n'implique pas pour autant que la centralité intermédiaire de tous les nœuds diminue lors de l'ajout de nouveaux liens. Localement, la centralité de certains points peut augmenter.

C.2. Réseaux uni- et bidimensionnels

Pour des réseaux unidimensionnels à N nœuds, il est facile de voir que la centralité intermédiaire du nœud i ($i \in \llbracket 1; N \rrbracket$) est donnée par

$$g(i) = \frac{i}{N} \left(1 - \frac{i}{N}\right). \quad (\text{C.3})$$

Le barycentre de tous les nœuds $i_b = N/2$ est alors également le nœud le plus central.

Pour une grille carrée à deux dimensions, on peut exprimer la centralité intermédiaire d'un nœud comme la somme de facteurs combinatoires qui comptent le nombre de chemins passant par le nœud. Le nombre de chemins entre les points (a, b) et (i, j) avec $a < i$ et $b < j$ étant $\binom{i+j-a-b}{i-a}$, la centralité du nœud (i, j) sur la grille $\llbracket -L; L \rrbracket \times \llbracket -L; L \rrbracket$ est

$$g(i, j) = \frac{1}{4L^2} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}} \sum_{a=-L}^i \sum_{b=-L}^j \sum_{c=i}^L \sum_{d=j}^L \frac{\binom{j-b+\sigma(i-a)}{\sigma(i-a)} \binom{d-j+\sigma(c-i)}{\sigma(c-i)}}{\binom{c+d-a-b}{\sigma(c-a)}} \quad (\text{C.4})$$

où $\sigma = \pm 1$ correspond aux nœuds avec $j < 0$ et $j > 0$ respectivement. Cette expression est difficile à analyser, mais on peut recourir à l'approximation simple de la figure C.1(a). En supposant que le nombre de chemins passant par le nœud $(i, 0)$ est proportionnel au produit des zones grises sur la figure C.1, normalisé par le nombre total de chemins (multiplié par un facteur 2 par symétrie), on obtient

$$\begin{aligned} g(i, 0) &\propto L(L-i) \times (i+L)L/L^4 \\ &= 1 - \left(\frac{i}{L}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

On compare cette approximation au résultat numérique exact, qui montre un très bon accord (voir figure C.1(b)). La divergence apparaît essentiellement pour $i \simeq L$ où l'approximation prédit $g(L) = 0$ qui est exact pour $L \gg 1$. En utilisant ce même argument, on constate que pour tout nœud situé à (i, j) , on trouve

$$g(i, j) \simeq (1 - i^2)(1 - j^2). \quad (\text{C.6})$$

Ici aussi les erreurs les plus importantes apparaissent aux bords du carré mais, malgré sa simplicité, l'approximation est très satisfaisante.

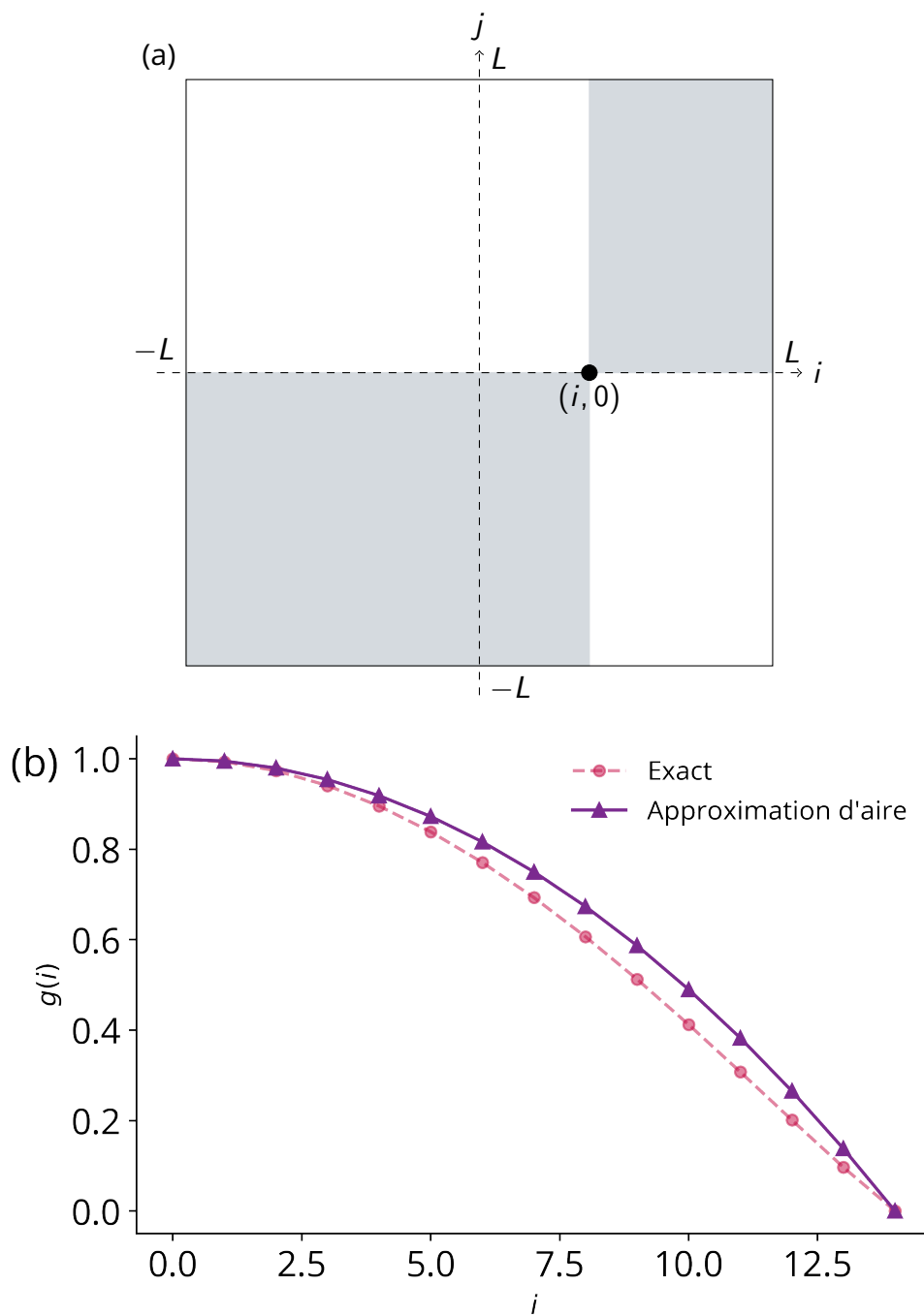


FIGURE C.1 – (a) Approximation du calcul de la centralité intermédiaire pour la grille carrée : la centralité intermédiaire au nœud $(i, 0)$ est proportionnelle au produit des zones grises (à un facteur deux près). (b) Comparaison de l'approximation de l'équation C.5 à la formule analytique de l'équation C.4 calculée numériquement pour $L = 15$.

C.3. Centralité intermédiaire dans les graphes spatialement denses et quasi-denses

C.3.1. Familles de graphe

On considère un processus de Poisson dans lequel N points sont distribués aléatoirement dans un domaine borné du plan \mathcal{D} d'aire V (un disque ou un carré). La densité des nœuds est notée $\rho = N/V$. Il existe de multiples façons de relier ces points entre eux et nous allons considérer ici différentes familles.

On s'intéresse d'abord aux graphes qui sont construits en connectant un nœud à ses k plus proches voisins (k -NN avec $k = 7$), au graphe géométrique aléatoire (RGG) qui connecte les points plus proches qu'une distance seuil d (on choisit $d = 2/\sqrt{\rho}$, qui est la distance typique pour laquelle le graphe est connecté), l'arbre minimal recouvrant (MST) qui connecte tous les sommets ensemble sans aucun cycle et avec le poids total des arêtes le plus faible possible, la triangulation de Delaunay (DT) qui donne une triangulation telle qu'aucun point n'est à l'intérieur du cercle circonscrit de chaque triangle de la triangulation, le graphe de Gabriel (GG) qui est le sous-graphe de DT dans lequel deux points distincts quelconques P et Q sont adjacents lorsque le disque fermé ayant pour diamètre PQ ne contient aucun autre point et enfin le graphe de voisinage relatif (RNG) qui relie deux points P et Q par une arête chaque fois qu'il n'existe pas de troisième point R plus proche de P et Q qu'ils ne le sont l'un de l'autre. Ces graphes sont des graphes très connus et sont largement étudiés. La compréhension de la centralité intermédiaire pour ces graphes particuliers représente donc une étape importante vers une théorie générale de la centralité intermédiaire dans les réseaux spatiaux.

C.3.2. Graphes spatialement denses

Théorème 7. Soit G un graphe spatial de N points aléatoirement distribués selon une loi uniforme dans un disque \mathcal{D} de rayon R . Soit ρ la densité spatiale de points. Soit un sommet de G à distance κ du centre de \mathcal{D} . Dans la limite $\rho \rightarrow \infty$, la centralité intermédiaire moyenne (sur tous les graphes) $\overline{g(\kappa)}$ à distance κ est :

$$\overline{g(\kappa)} = \frac{2}{\pi^2 R^3} (R^2 - \kappa^2) E\left(\frac{\kappa}{R}\right) \quad (C.7)$$

Démonstration. Cette approximation repose sur le fait que les plus courts chemins dans cette limite sont essentiellement des lignes droites : voir [307].

□

C.3.3. Perturbation autour de la limite dense

On peut aussi calculer la centralité intermédiaire des nœuds dans \mathcal{D} dans la limite quasi-dense ($1 \ll \rho < \infty$). On cherche à trouver une expression pour la centralité intermédiaire qui ne dépende que de la position absolue des points dans le plan (et éventuellement de la famille de graphe étudiée) mais pas de la réalisation particulière du graphe. Pour des densités ρ finies, les plus courts chemins présentent des déviations transversales significatives par rapport à la ligne droite et l'on s'attend généralement à des corrections non universelles.

On présente ici un développement par perturbation à l'ordre non trivial le plus bas du résultat précédent lorsque la densité est finie. On désigne par (i, j, κ) trois nœuds aléatoires (parmi N nœuds d'un graphe G) à l'intérieur d'un domaine disque \mathcal{D} d'aire V . La quantité $\text{PC}(i, j) = \{x_{ij_1}, \dots, x_{ij_m}, \dots, x_{ij_n}\}$ désigne le plus court chemin entre les points i et j qu'on suppose unique, ce qui est attendu pour les réseaux spatiaux (une dégénérescence impliquerait exactement la même distance euclidienne entre deux nœuds par deux chemins différents, ce qui est très improbable, contrairement à la distance topologique qui est un entier qui compte le nombre de sauts).

On définit la fonction indicatrice

$$\sigma_{ij}(\kappa) = \mathbf{1}_{\kappa \in \text{PC}(i, j)} = \sum_m \mathbf{1}_{\kappa = x_{ij_m}}. \quad (\text{C.8})$$

Cette fonction indicatrice $\sigma_{ij}(\kappa)$ est égale à l'unité si κ est dans $\text{PC}(i, j)$ et à zéro sinon. La centralité intermédiaire pour le nœud κ est alors

$$g(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\sigma_{ij}(\kappa)}{\sigma_{ij}} \quad (\text{C.9})$$

où i et j sont des nœuds du graphe. Pour les grands ρ , l'approximation continue donne

$$\sigma_{ij}(\kappa) = \int_{t_i}^{t_j} dt \delta(\kappa - \mathbf{x}(t)) \quad (\text{C.10})$$

où le plus court chemin $\{\mathbf{x}(t) \in \text{PC}(i, j)\}$ est paramétré par $t \in [t_1, t_2]$ où t_1 et t_2 correspondent aux points extrêmes (δ est la distribution de Dirac). La centralité intermédiaire pour κ est alors

$$g(\kappa) = \frac{1}{2V^2} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}_i \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}_j \sigma_{ij}(\kappa). \quad (\text{C.11})$$

Dans la limite continue [307] $\rho \rightarrow \infty$, les plus courts chemins sont des segments de droite et l'indicatrice se lit $\sigma_{ij} = \delta(x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - p)$ où $\kappa = (x, y)$ et où le segment (i, j) est paramétré par p et ϕ [308]. Cela signifie que κ est dans $\text{PC}(i, j)$ si et seulement si κ est sur la ligne entre i et j . En particulier, il est facile de vérifier que $\int_{\mathcal{D}} d\kappa \sigma_{ij}(\kappa) = |t_2 - t_1|$ comme prévu.

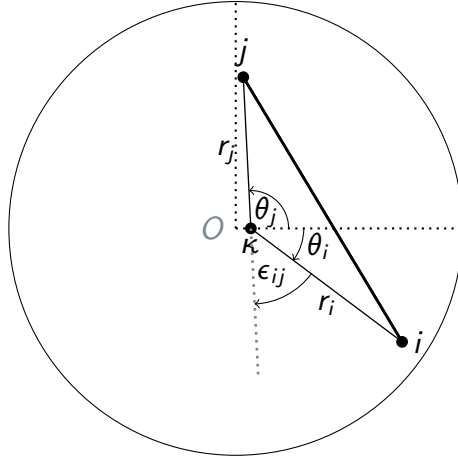


FIGURE C.2 – Illustration du système considéré et notations. L'origine du repère polaire est κ et les nœuds i et j ont pour coordonnées (r_i, θ_i) et (r_j, θ_j) dans ce système. L'écart des deux segments (i, κ) et (κ, j) par rapport à la droite est caractérisé par l'angle $\epsilon_{ij} = \theta_i - \theta_j + \pi$.

Dans la limite de quasi-densité ($1 \ll \rho < \infty$), on définit la centralité intermédiaire moyenne de κ comme l'espérance de la centralité intermédiaire de κ

$$\overline{g(\kappa)} = \mathbb{E}_G(g(\kappa)) \quad (\text{C.12})$$

où \mathbb{E}_G désigne la moyenne sur toutes les réalisations de graphes d'une famille données (le hasard est généré par le processus de Poisson de distribution des points).

On obtient alors

$$\overline{g(\kappa)} = \frac{1}{2V^2} \int_{\mathcal{D}} dr_i \int_{\mathcal{D}} dr_j \mathbb{E}_G(\sigma_{ij}(\kappa)). \quad (\text{C.13})$$

La quantité $\sigma_{ij}(\kappa)$ est une fonction indicatrice et sa moyenne est donc une probabilité

$$\mathbb{E}_G(\sigma_{ij}(\kappa)) = \text{Prob}(\kappa \in \text{PC}(i, j)) \quad (\text{C.14})$$

qu'on désigne par $\chi_{ij}(\kappa) = \text{Prob}(\kappa \in \text{PC}(i, j))$.

Dans la limite dense, les plus courts chemins sont des lignes droites et on a bien

$$\chi_{ij}(\kappa) = \delta(x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho). \quad (\text{C.15})$$

Lorsque la densité est finie, les plus courts chemins dévient de la ligne droite et on peut définir la déviation angulaire ϵ_{ij} de la ligne droite (i, j) dans le repère d'origine κ : $\epsilon_{ij} = \theta_i - \theta_j + \pi$ (voir figure C.2). Par isotropie du problème, il suffit de considérer un nœud à la distance κ du centre et à l'angle $\theta = 0$.

On exprime maintenant la probabilité $\chi_{ij}(\kappa)$ que κ soit dans $\text{PC}(i, j)$ pour une valeur donnée de ϵ_{ij} . La centralité intermédiaire moyenne peut alors être formellement réécrite comme la quintuple intégrale

$$\overline{g(\kappa)} = \frac{1}{2V^2} \int_{\mathcal{D}^2} \mathbf{dr}_i \mathbf{dr}_j \int_0^\infty d\epsilon_{ij} \delta(\theta_i - \theta_j + \pi - \epsilon_{ij}) \chi_{ij}(\kappa | \epsilon_{ij}) \quad (\text{C.16})$$

où $\chi_{ij}(\kappa | \epsilon_{ij})$ est la probabilité que $\{\kappa \in \text{PC}(i, j)\}$ conditionnée par ϵ_{ij} . La distribution de Dirac $\delta(\theta_i - \theta_j + \pi - \epsilon_{ij})$ assure la définition de l'angle ϵ_{ij} .

Dans la limite de densité infinie, on sait [307] que cette probabilité conditionnelle est donnée par

$$\chi_{ij}(\kappa | \epsilon_{ij}, \rho = \infty) = \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \delta(\epsilon_{ij}) \quad (\text{C.17})$$

ce qui permet de poser la généralisation

$$\chi_{ij}(\kappa | \epsilon_{ij}) = \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \chi(\epsilon_{ij}) \quad (\text{C.18})$$

où $\chi(\epsilon)$ est une fonction inconnue. En désignant ϵ_{ij} par ϵ , on suppose que $\chi(\epsilon)$ est indépendante de (i, j, κ) . C'est une hypothèse forte dont on montre qu'elle est empiriquement correcte pour les graphes k -NN, RGG, DT et GG¹. En effet, on observe que pour ces graphes, la fonction

$$\chi(\epsilon) = \frac{\chi_{ij}(\kappa | \epsilon)}{\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right)} \quad (\text{C.19})$$

peut être approximée par une fonction exponentielle décroissante de ϵ de paramètre ϵ_0 :

$$\chi(\epsilon) = \epsilon_0(\rho) e^{-\epsilon/\epsilon_0(\rho)} \quad (\text{C.20})$$

où $\epsilon_0(\rho)$ est supposé être une loi de puissance (voir figure C.3 et table C.1) de la forme

$$\epsilon_0(\rho) = A\rho^{-\beta}. \quad (\text{C.21})$$

À partir de l'équation. C.18, on obtient

$$\overline{g(\kappa)} = \frac{1}{2V^2} \int_0^\infty d\epsilon \chi(\epsilon) \int_{\mathcal{D}} \mathbf{dr}_i \int_{\mathcal{D}} \mathbf{dr}_j \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \delta(\theta_i - \theta_j + \pi - \epsilon). \quad (\text{C.22})$$

1. Cette approximation est incorrecte dans les cas des graphes MST et RNG, ce qui suggère que pour ces graphes l'hypothèse que $\chi(\epsilon)$ est indépendante de (i, j, κ) est trop forte.

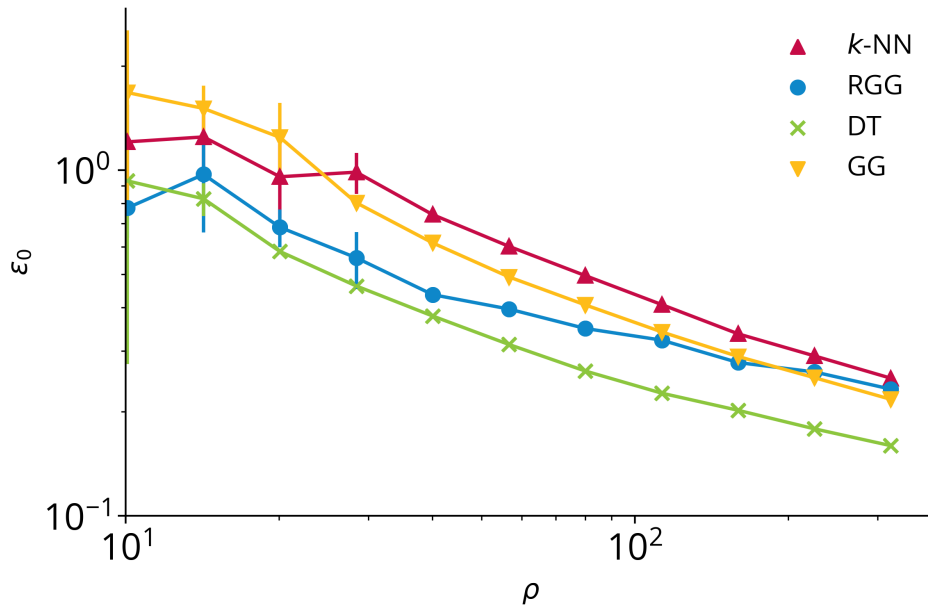


FIGURE C.3 - En écrivant $\chi(\epsilon) = \epsilon_0(\rho)e^{-\epsilon/\epsilon_0(\rho)}$, on montre que ϵ_0 est une fonction décroissante et lisse de la densité ρ , validant la forme de $\chi(\epsilon)$ pour les graphes k -NN, RGG, DT et GG (les barres d'erreur verticales correspondent à la dispersion). Le graphique suggère une relation en loi de puissance de la forme $\epsilon_0(\rho) \simeq A\rho^{-\beta}$ avec $\beta \simeq 0,5 \pm 0,1$. On note que l'exposant n'est pas exactement le même pour tous les graphes, tout comme le préfacteur, ce qui fait que certains types de graphes convergent plus rapidement vers le régime dense que d'autres.

Famille de graphes	A	β	R^2
k -NN	$1,3 \pm 0,2$ (pour $k = 7$)	$0,3 \pm 0,1$	0,98
RGG	$1,2 \pm 0,2$ (pour $r = 2/\sqrt{\rho}$)	$0,4 \pm 0,1$	0,95
DT	$1,7 \pm 0,2$	$0,5 \pm 0,1$	0,98
GG	$2,7 \pm 0,2$	$0,6 \pm 0,1$	0,98

TABLE C.1 - Détails de l'approximation $\epsilon_0(\rho) = A\rho^{-\beta}$ pour chaque famille de graphes.

Dans la limite dense, on a $\chi(\epsilon) = \delta(\epsilon)$ et on retrouve le résultat de [307]. Pour aller plus loin, on développe cette fonction $\chi(\epsilon)$ autour de 0 au second ordre en ϵ_0 :

$$\begin{aligned}\chi(\epsilon) &= \epsilon_0(\rho)e^{-\epsilon/\epsilon_0(\rho)} \\ &\simeq \left(\delta(\epsilon) - \epsilon_0(\rho)\delta'(\epsilon) + \epsilon_0^2(\rho)\delta''(\epsilon) \right).\end{aligned}\quad (\text{C.23})$$

où l'on utilise la dérivée de la distribution de Dirac, qui est définie de telle sorte que pour toute fonction de test lisse à support compact ϕ , on ait

$$\int dx \phi(x)\delta'(x) = - \int dx \phi'(x)\delta(x).\quad (\text{C.24})$$

En insérant le développement de l'équation C.23 dans l'expression C.22, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{g(\kappa)} &= \frac{1}{2V^2} \int_0^\infty d\epsilon \left(\delta(\epsilon) - \epsilon_0(\rho)\delta'(\epsilon) + \epsilon_0^2(\rho)\delta''(\epsilon) \right) \\ &\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}_i \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}_j \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \delta(\theta_i - \theta_j + \pi - \epsilon) \\ &= \frac{1}{4V^2} \int_0^{2\pi} d\theta_i r(\theta_i)r(\theta_i + \pi)(r(\theta_i) + r(\theta_i + \pi)) \\ &\quad - \epsilon_0(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta_i r(\theta_i)r'(\theta_i + \pi)(r(\theta_i) + 2r(\theta_i + \pi)) \\ &\quad - \epsilon_0^2(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta_i r(\theta_i)r''(\theta_i + \pi)(r(\theta_i) + 2r(\theta_i + \pi)).\end{aligned}$$

En coordonnées polaires centrées en κ , la frontière du disque est donnée par $r(\theta) = \sqrt{R^2 - \kappa^2 \sin^2(\theta)} - \kappa \cos(\theta)$ et les expressions précédentes peuvent être réécrites comme

$$\begin{aligned}\overline{g(\kappa)} &= \frac{1}{4V^2} \left[2 \int_0^{2\pi} d\theta (R^2 - \kappa^2) \sqrt{R^2 - \kappa^2 \sin^2(\theta)} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_0^2(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\kappa^2(R^2 - \kappa^2)(R^2(6 \sin^2 \theta - 1) - 5\kappa^2 \sin^4 \theta)}{(R^2 - \kappa^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right]\end{aligned}\quad (\text{C.25})$$

Le terme du premier ordre (le coefficient de ϵ_0) est égal à 0 et le premier terme non trivial est du deuxième ordre. On introduit alors les fonctions

$$I_0(\kappa, R) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta (R^2 - \kappa^2) \sqrt{R^2 - \kappa^2 \sin^2(\theta)}\quad (\text{C.26})$$

et

$$\begin{aligned}I_2(\kappa, R) &= \\ &\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\kappa^2 (R^2 - \kappa^2) \left(R^2 (6 \sin^2(\theta) - 1) - 5\kappa^2 \sin^4(\theta) \right)}{(R^2 - \kappa^2 \sin^2(\theta))^{3/2}}\end{aligned}\quad (\text{C.27})$$

qui permettent de réécrire la centralité intermédiaire moyenne

$$\overline{g(\kappa)} = \frac{1}{4V^2} \left(I_0(\kappa) - \epsilon_0^2(\rho) I_2(\kappa, R) \right). \quad (\text{C.28})$$

Dans ce résultat, la limite de densité infinie qui correspond au premier terme est universelle, c'est-à-dire indépendante de la structure du graphe. En revanche, le second terme (terme en $\epsilon_0(\rho)$) dépend de la famille de graphes considérée et encode la déviation des plus courts chemins par rapport à la ligne droite qui varie d'un graphe à l'autre. Ceci implique qu'en général (et comme prévu) la centralité intermédiaire d'un graphe à densité finie n'est pas universelle et dépend de la famille de graphes. En particulier, le résultat numérique de la figure C.3 suggère une relation en loi de puissance de la forme $\epsilon_0(\rho) \simeq A\rho^{-\beta}$ avec $\beta \simeq 0,5 \pm 0,1$ (voir table C.1). On observe que la valeur de l'exposant β et le préfacteur ne sont pas exactement les mêmes pour tous les graphes, ce qui implique des vitesses de convergence vers le régime dense différentes.

On peut exprimer les intégrales apparaissant dans l'équation C.28 en utilisant des fonctions spéciales :

$$I_0(R, \kappa) = 8R(R^2 - \kappa^2)E\left(\frac{\kappa}{R}\right) \quad (\text{C.29})$$

et

$$I_2(R, \kappa) = 8R^3 \left(3 \left(\frac{\kappa}{R}\right)^2 K\left(\frac{\kappa}{R}\right) + 2K\left(\frac{\kappa}{R}\right) + 2 \left(\frac{\kappa}{R}\right)^2 E\left(\frac{\kappa}{R}\right) - 2E\left(\frac{\kappa}{R}\right) \right) \quad (\text{C.30})$$

où $K(x)$ et $E(x)$ sont respectivement les intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce. Si $\kappa \ll R$, on montre aussi que

$$I_2(R, \kappa) = 4\pi R^3 \left(\frac{\kappa}{R}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\kappa}{R}\right)^2\right) \quad (\text{C.31})$$

tandis que si $R - \kappa \ll R$

$$I_2(R, \kappa) \simeq 16R^3 \left(1 - \frac{\kappa}{R}\right) \log\left(1 - \frac{\kappa}{R}\right) \quad (\text{C.32})$$

En normalisant la centralité intermédiaire par $\overline{g(0)} = \frac{1}{4V^2} \times 4\pi R^3$, on obtient

$$\boxed{g^*(\kappa) = \frac{\overline{g(\kappa)}}{\overline{g(0)}} = \frac{1}{4\pi R^3} \left(I_0(\kappa) - \epsilon_0^2(\rho) I_2(\kappa, R) \right)}. \quad (\text{C.33})$$

Si $\kappa \ll R$, cela donne

$$g^*(\kappa) \simeq 1 - \left(5 + \frac{1}{2}\epsilon_0^2(\rho)\right) \left(\frac{\kappa}{R}\right)^2 \quad (\text{C.34})$$

tandis que si $R - \kappa \ll R$,

$$g^*(\kappa) \simeq \left(\frac{4}{\pi} - 2\epsilon_0^2(\rho) \log \left(1 - \frac{\kappa}{R} \right) \right) \left(1 - \frac{\kappa}{R} \right). \quad (\text{C.35})$$

On note qu'avec cette normalisation, on a toujours $g^*(0) = 1$ et $g^*(R) = 0$ (ce qui peut être facilement prouvé).

C.3.4. Limites de validité

On teste le résultat analytique de l'équation C.33 pour différentes familles de graphes : les graphes DT (figure C.4), k -NN (figure C.5), RGG (figure C.8), GG (figure C.9) et MST (figure C.11). Pour les simulations numériques, on échantillonne N sommets aléatoires dans un disque (pour des tailles de $N = 10$ à $N = 1\,000$) et on connecte les points selon la définition de chaque graphe. On calcule ensuite la centralité intermédiaire de chaque point à l'aide de l'algorithme de Brandes [309] et on fait la moyenne des résultats sur 5 000 exécutions (un graphe par exécution).

Pour les GG, DT, k -NN et RGG, l'accord est excellent entre le résultat analytique et les simulations numériques (moyenne sur 5 000 exécutions) pour $1 \ll \rho$. Les divergences entre le régime quasi-dense et le régime dense sont plus importantes autour de $\kappa/R = 0,8$. On observe que pour ces différents graphes, la vitesse de convergence vers la limite de densité infinie n'est pas la même. La convergence pour les GG, RGG et DT est rapide alors qu'elle est plus lente pour le k -NN. À cet égard, on montre comment la vitesse de convergence des graphes k -NN varie en fonction de k sur la figure C.6 et du rayon seuil pour les RGG sur la figure C.7. Pour les GG, la convergence est si rapide que l'approximation du régime infini est une bonne approximation pour des densités aussi faibles que 3 points par unité d'espace (graphes de 10 points). En général, cependant, il est difficile de prédire ou de comprendre pourquoi un type de graphe converge plus rapidement vers la limite infinie qu'un autre. Pour les graphes k -NN et RGG, l'approximation est bonne à partir de densités aussi faibles que 6 points par unité d'espace (ce qui correspond à moins de 20 points dans le disque) alors que l'approximation est valable pour des densités plus faibles (environ 10 points dans le disque) pour les graphes DT et les graphes de GG. On note également que les graphes de Gabriel (GG) étant des sous-graphes de la triangulation de Delaunay (DT), on peut s'attendre naïvement à ce que les GG convergent plus lentement vers la limite du régime dense que les DT. Cela résulterait du fait que les plus courts chemins sont plus proches des lignes droites (et donc du régime dense) lorsque plus de points sont ajoutés dans le réseau. Ce n'est cependant pas vrai puisque la centralité intermédiaire moyenne normalisée de κ dépend à la fois de la centralité intermédiaire moyenne de κ et de la centralité intermédiaire maximale dans le graphe (atteinte en 0). L'ajout de points supplémentaires au système peut à la fois diminuer la centralité intermédiaire moyenne mais augmenter la centralité intermédiaire maximale, ce qui conduit à des comportements non triviaux de convergence vers le régime dense.

On représente la qualité de la correction en fonction de la densité pour toutes

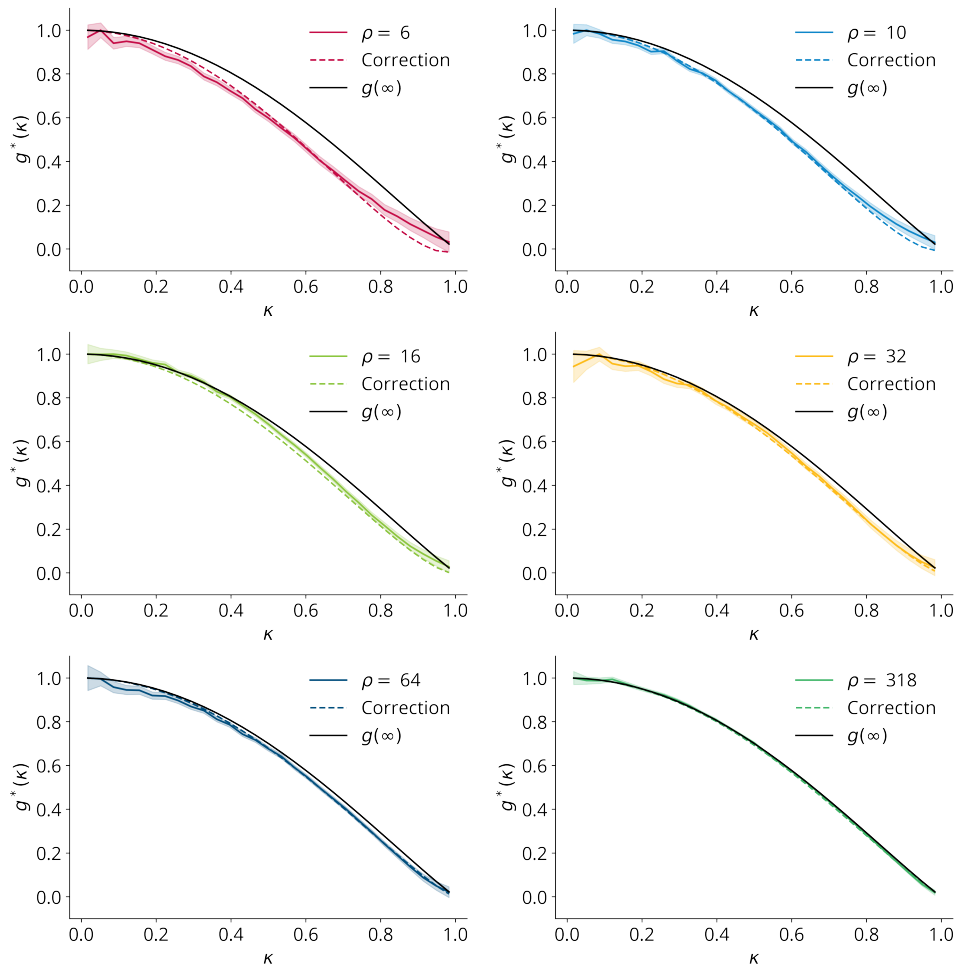


FIGURE C.4 – Comparaison du développement de l'équation C.33 avec le résultat numérique pour les DT. La qualité de l'approximation augmente avec la densité mais est valable à des densités étonnamment faibles (6 points par unité d'espace correspond à moins de 20 points dans le disque). Le nombre de points est $N = \rho\pi$.

les familles de graphes sur la figure C.10.

Enfin, on note que l'approximation ne fonctionne pas pour les graphes MST et RNG puisque l'hypothèse affirmant que $\chi(\epsilon)$ est indépendant de (i, j, κ) semble ne pas être valide pour ces graphes. La centralité intermédiaire converge cependant vers le résultat de la limite infiniment dense de [307] (voir figure C.11 pour les MST).

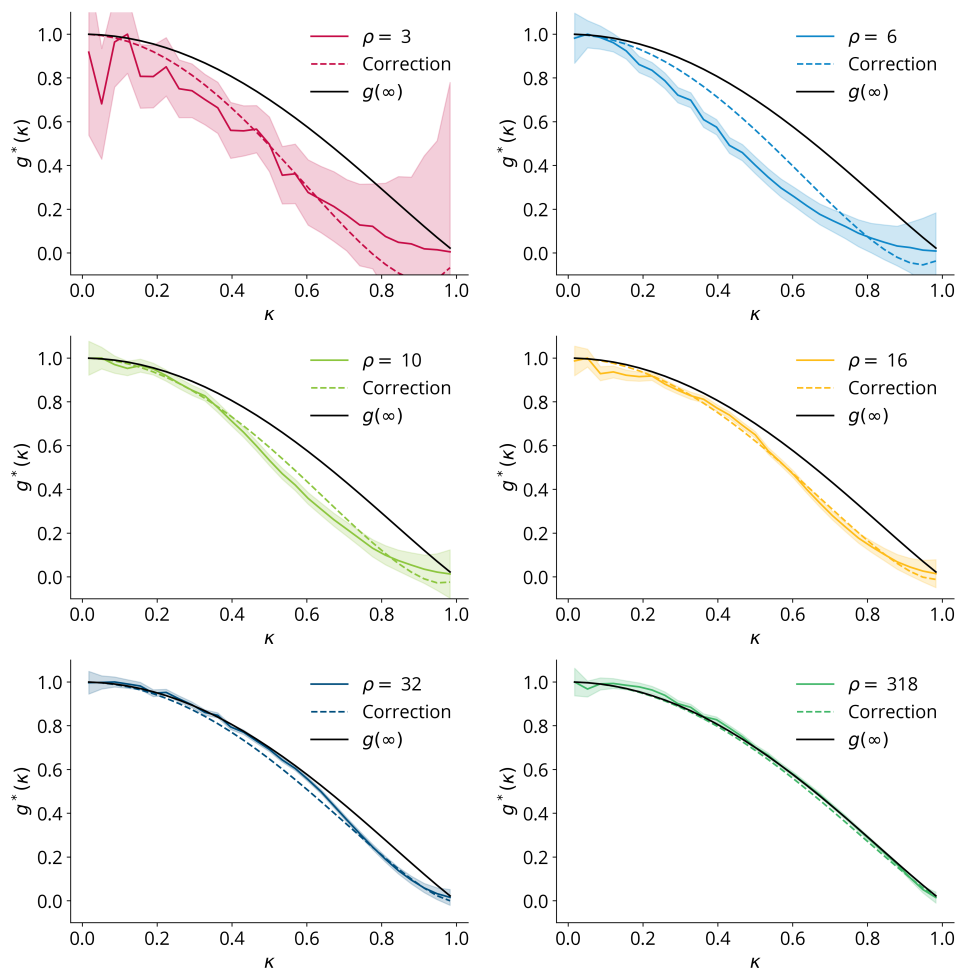


FIGURE C.5 – Comparaison du développement de l'équation C.33 avec le résultat numérique pour les k -NN. La qualité de l'approximation augmente avec la densité mais est valable à des densités étonnamment faibles ($\rho = 9$). Le nombre de points est $N = \rho\pi$.

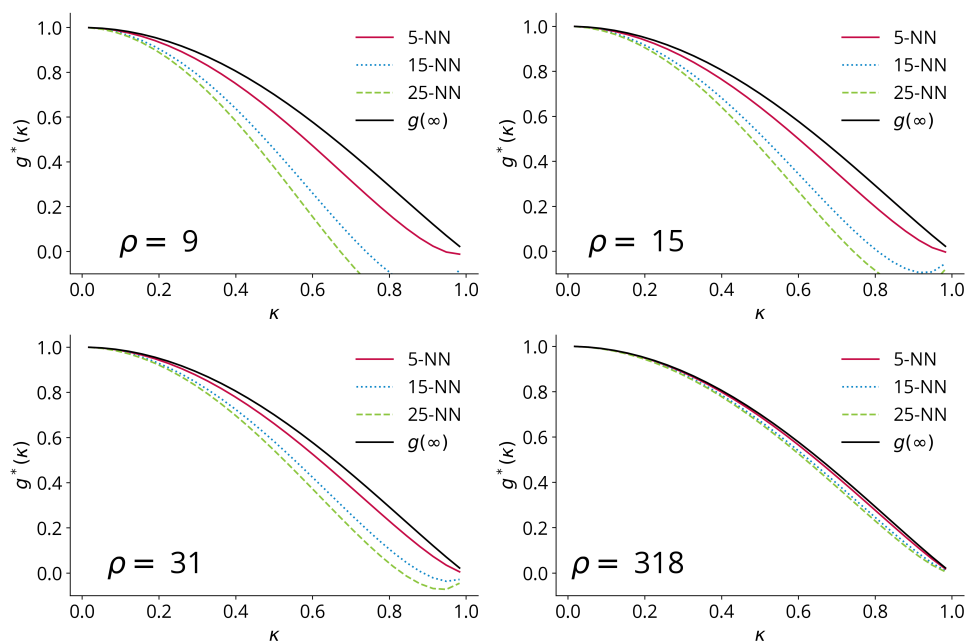


FIGURE C.6 – Comparaison de la vitesse de convergence des graphes k -NN vers la limite de densité infinie pour différentes valeurs de k : $k = 5$ (ligne du haut), $k = 15$ (ligne du milieu) et $k = 25$ (ligne du bas). La correction diffère car l'estimation empirique du préfacteur A dans l'équation C.21 dépend de la valeur choisie de k .

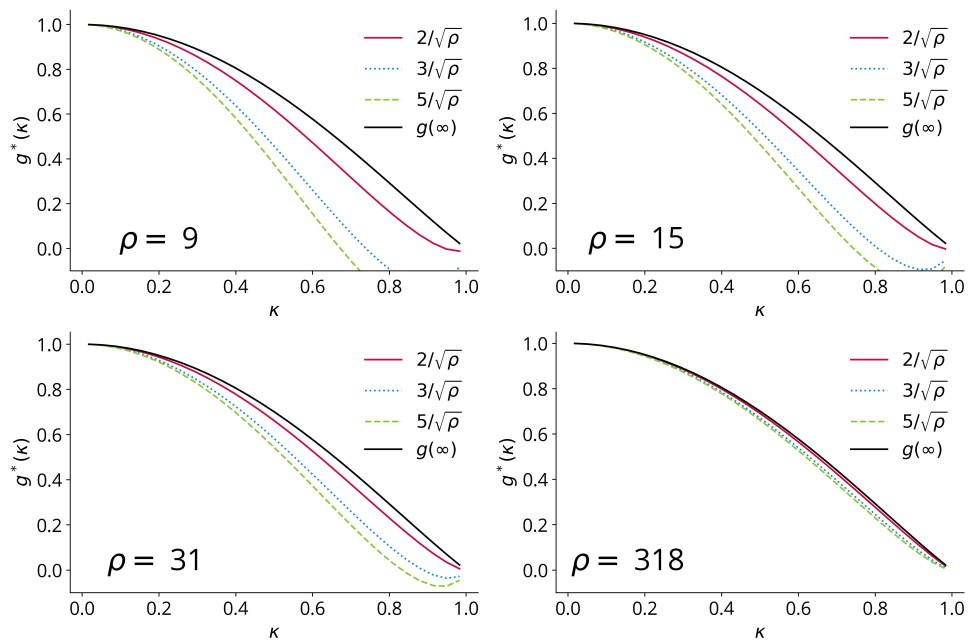


FIGURE C.7 – Comparaison de la vitesse de convergence des graphes RGG vers la limite de densité infinie pour différentes valeurs du rayon seuil. La correction diffère car l'estimation empirique du préfacteur A dans l'équation C.21 dépend de la valeur choisie du seuil.

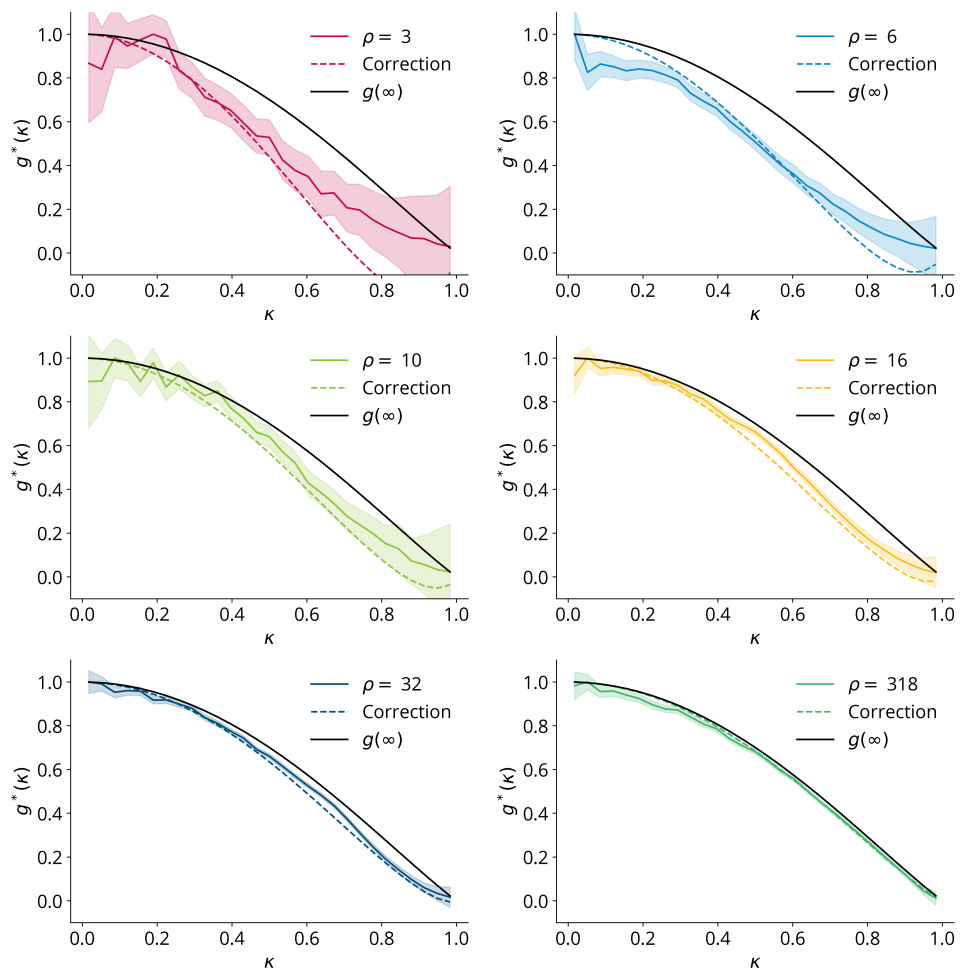


FIGURE C.8 – Comparaison du développement de l'équation C.33 avec le résultat numérique pour les RGG. La convergence vers la limite de densité infinie est plus rapide que pour les autres graphes et l'approximation est très bonne pour des densités aussi faibles que $\rho = 9$. Le nombre de points est $N = \rho\pi$.

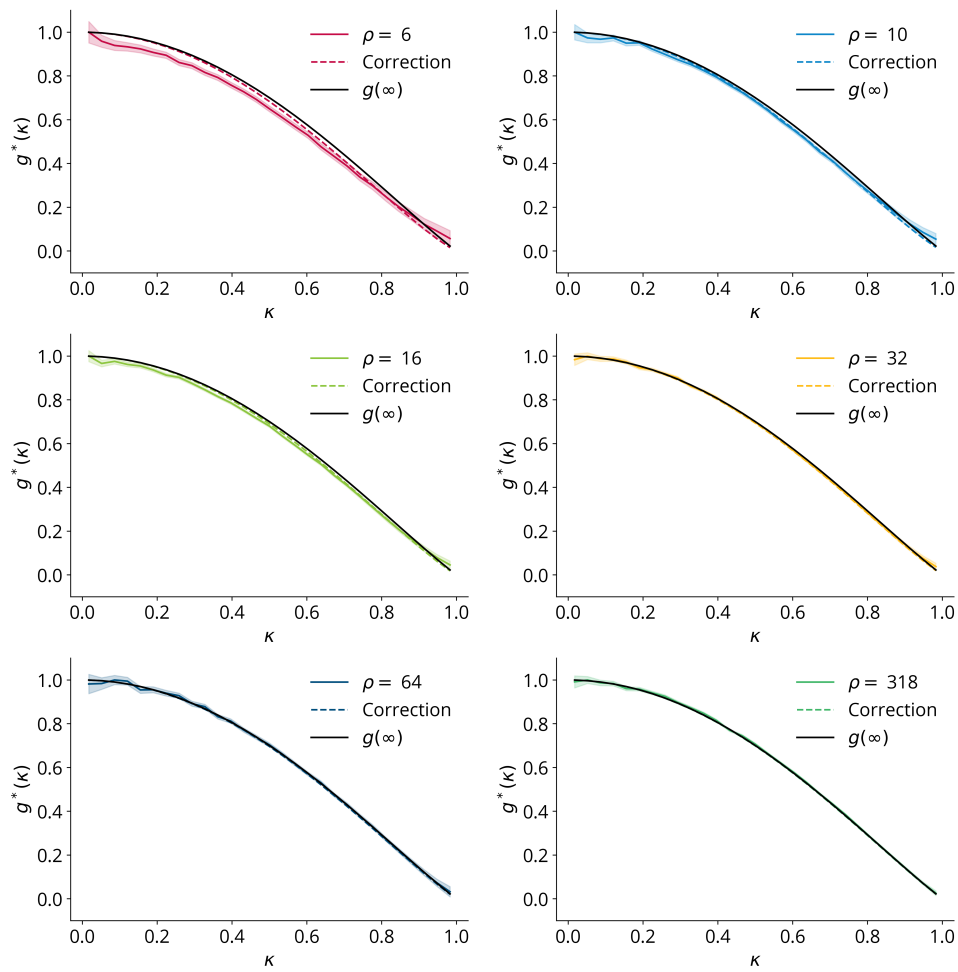


FIGURE C.9 – Comparaison du développement de l'équation C.33 avec le résultat numérique pour les GG. La convergence vers la limite de densité infinie est beaucoup plus rapide que pour les autres graphes et l'approximation est très bonne pour des densités aussi faibles que $\rho = 3$. Le nombre de points est $N = \rho\pi$.

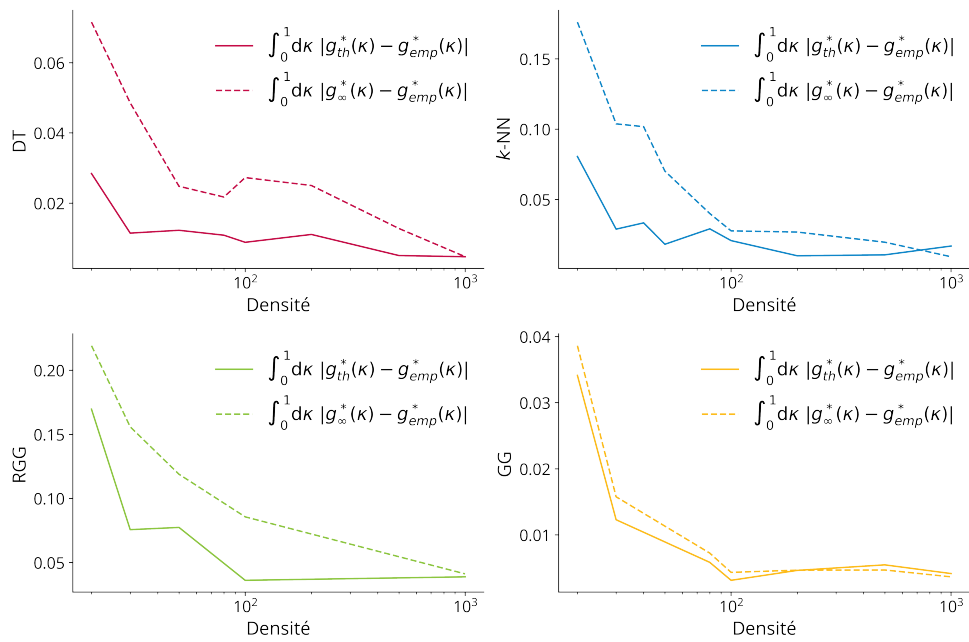


FIGURE C.10 – Comparaison de la qualité de la correction en fonction de la densité de points pour les différentes familles de graphes. La qualité est définie comme l'aire entre les courbes approximées et simulées. La qualité de l'approximation et de la limite de densité infinie augmente avec la densité. Comme prévu, la qualité de la correction est meilleure que celle de la limite de densité infinie, mais la différence s'estompe lorsque la densité augmente.

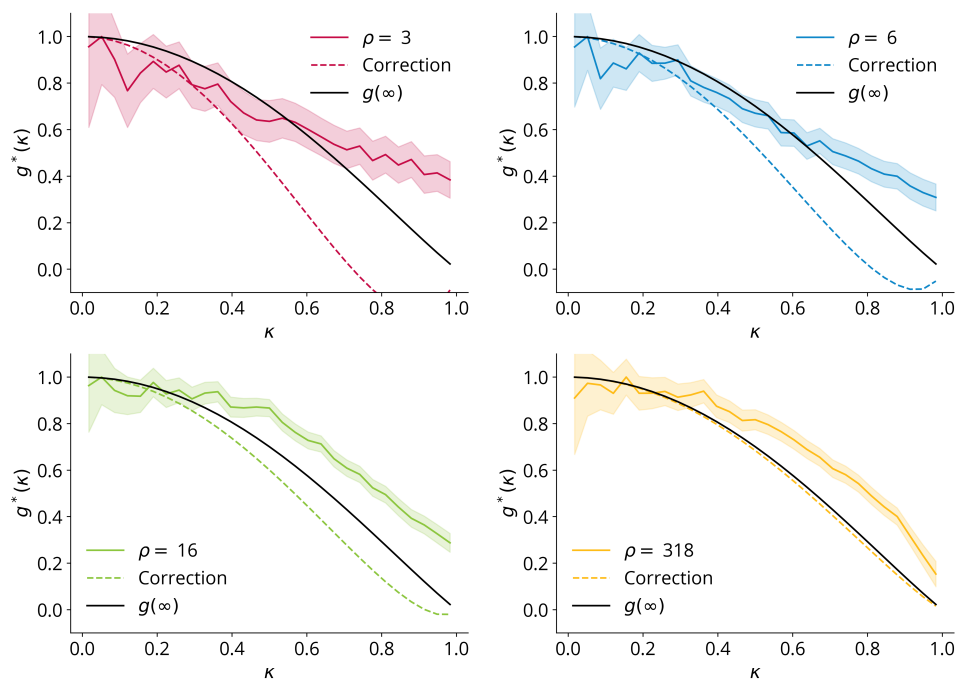


FIGURE C.11 – Comparaison du développement de l'équation C.33 avec le résultat numérique pour les MST. La centralité intermédiaire moyenne converge vers la limite du régime dense mais l'approximation du second ordre proposée n'est pas valide dans ce cas précis.

Références

- [1] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « Critical factors for mitigating car traffic in cities ». In : *PLoS one* 14.7 (2019), e0219559 (cf. p. 5, 131, 147, 153).
- [2] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « The growth equation of cities ». In : *Nature* 587.7834 (2020), p. 397-401 (cf. p. 5, 79, 80, 87).
- [3] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « Access to mass rapid transit in OECD urban areas ». In : *Scientific Data* 7.1 (2020), p. 1-6 (cf. p. 5, 147, 149).
- [4] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « From one-way streets to percolation on random mixed graphs ». In : *Physical Review E* 103.4 (2021), p. 042313 (cf. p. 5, 153).
- [5] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « Betweenness centrality in dense spatial networks ». In : *Phys. Rev. E* 105 (5 2022), p. 054303 (cf. p. 5, 183).
- [6] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « Modelling the spatial dynamics of income in cities ». In : (2022) (cf. p. 5, 113).
- [7] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. « Modelling car traffic in cities ». In : *Handbook on Cities and Complexity*. Edward Elgar Publishing, 2021 (cf. p. 5).
- [8] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. *The growth of Cities. en préparation*, 2022 (cf. p. 5).
- [9] Alain Desrosières. *La politique des grands nombres : histoire de la raison statistique*. La découverte, 2016 (cf. p. 7, 73).
- [10] Alain Supiot. *La gouvernance par les nombres*. Fayard, 2015 (cf. p. 7).
- [11] John M. Keynes. *Les conséquences économiques de la paix*. T. 4. Tel - Gallimard, 2002 (cf. p. 8).
- [12] Jacques Bainville. *Les conséquences politiques de la paix*. Tel - Gallimard, 2002 (cf. p. 8, 10).
- [13] Etienne Mantoux. *Carthaginian peace or the economic consequences of Mr Keynes*. Oxford University Press, London, 1946 (cf. p. 8, 9).
- [14] Sally Marks. « The myths of reparations ». In : *Central European History* 11.3 (1978), p. 231-255 (cf. p. 9).

- [15] Ruth Henig. *Versailles and after, 1919-1933*. Routledge, 2006 (cf. p. 9).
- [16] Faith Baldwin et Stig Förster. *The Treaty of Versailles : a reassessment after 75 years*. Cambridge University Press, 1998 (cf. p. 9).
- [17] Niall Ferguson. *The pity of war : Explaining world war I*. Hachette UK, 2008 (cf. p. 9).
- [18] Claude Lévi-Strauss. *Tristes tropiques*. Gallimard, 1976 (cf. p. 25).
- [19] Lewis Mumford. *The city in history : Its origins, its transformations, and its prospects*. T. 67. Houghton Mifflin Harcourt, 1961 (cf. p. 27, 28).
- [20] Vere G. Childe. *The Dawn of European Civilization*. Routledge, 2013 (cf. p. 27).
- [21] Ian Hodder. « Çatalhöyük in the context of the Middle Eastern Neolithic ». In : *Annu. Rev. Anthropol.* 36 (2007), p. 105-120 (cf. p. 28).
- [22] Fustel De Coulanges. *La cité antique*. 1864 (cf. p. 28).
- [23] Henri Pirenne. *Les villes du Moyen-Âge : essai d'Histoire économique et sociale*. M. Lamertin, 1927 (cf. p. 28).
- [24] Maurice W. Beresford. « The lost villages of medieval England ». In : *The geographical journal* 117.2 (1951), p. 129-147 (cf. p. 28).
- [25] Robert C. Allen *et al.* « Enclosure and the yeoman : the agricultural development of the South Midlands 1450-1850 ». In : *Oxford University Press Catalogue* (1992) (cf. p. 28).
- [26] David S. Landes. *The Unbound Prometheus : Technological Change and Industrial Development in Western Europe from 1750 to the Present*. Cambridge University Press, 2003 (cf. p. 28).
- [27] Hannah Ritchie et Max Roser. *Urbanization*. Rapp. tech. Our World in Data, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://ourworldindata.org/urbanization> (cf. p. 28).
- [28] *Revision of world urbanization prospects*. Rapp. tech. New York, États-Unis d'Amérique : Nations Unies, 2018 (cf. p. 29).
- [29] Michael Batty. *Inventing Future Cities*. MIT Press, 2018 (cf. p. 29).
- [30] Tertius Chandler. *Four Thousand Years of Urban Growth : An historical Census*. Mellen, 1987 (cf. p. 29).
- [31] Jean Gottmann. « Megalopolis or the urbanization of the northeastern seaboard ». In : *Economic geography* 33.3 (1957), p. 189-200 (cf. p. 29).

- [32] George K. Zipf. *Human Behavior and the Principle of Least Effort : An Introduction to Human Ecology*. Ravenio Books, 2016 (cf. p. 30, 73, 75).
- [33] Robert Gibrat. « Les Inégalités Économiques ». In : (1931) (cf. p. 30, 83).
- [34] Marc Barthelemy. *The Structure and Dynamics of Cities*. Cambridge University Press, 2016 (cf. p. 30, 36, 72, 83, 147).
- [35] Luís M.A. Bettencourt *et al.* « Urban scaling and its deviations : Revealing the structure of wealth, innovation and crime across cities ». In : *PloS one* 5.11 (2010), e13541 (cf. p. 31, 71).
- [36] Luís M.A. Bettencourt *et al.* « Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104.17 (2007), p. 7301-7306 (cf. p. 31, 71).
- [37] Luís M.A. Bettencourt. « The origins of scaling in cities ». In : *science* 340.6139 (2013), p. 1438-1441 (cf. p. 31, 71).
- [38] OCDE, éd. *Regions and Cities Data Vizualization*. 2016 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://regions-cities-atlas.oecd.org> (cf. p. 31).
- [39] Marc Barthelemy et Alessandro Flammini. « Modeling urban street patterns ». In : *Physical Review Letters* 100.13 (2008), p. 138702 (cf. p. 32).
- [40] Rémi Louf. « Wandering in cities : a statistical physics approach to urban theory ». Thèse de doct. Paris, France : Université Pierre et Marie Curie, 2015 (cf. p. 32, 70-72).
- [41] Erneson A. Oliveira, José S Andrade et Hernán A. Makse. « Large cities are less green ». In : *Scientific Reports* 4.1 (2014), p. 1-13 (cf. p. 32, 131).
- [42] Edward L. Glaeser et Matthew E. Kahn. « The greenness of cities : Carbon dioxide emissions and urban development ». In : *Journal of Urban Economics* 67.3 (2010), p. 404-418 (cf. p. 32, 131).
- [43] Rémi Louf et Marc Barthelemy. « Scaling : lost in the smog ». In : *Environment and Planning B : Planning and Design* 41.5 (2014), p. 767-769 (cf. p. 32).
- [44] Yves Charbit. « L'échec politique d'une théorie économique : la physiocratie ». In : *Population* 57.6 (2002), p. 849-878 (cf. p. 33).
- [45] Jean-Baptiste Robinet. *Dictionnaire universel des sciences morale, économique, politique et diplomatique ; ou Bibliothèque de l'homme-d'état et du citoyen*. T. 14. 1780 (cf. p. 33).

- [46] Johann Heinrich von Thünen. *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und national Ökonomie*. T. 13. G Fischer, 1910 (cf. p. 34).
- [47] William Alonso. *Location and Land Use*. Harvard University Press, 2013 (cf. p. 34, 107).
- [48] Masahisa Fujita *et al.* « Urban economic theory ». In : *Cambridge Books* (1989) (cf. p. 34, 107).
- [49] Gilles Duranton et Diego Puga. « Urban land use ». In : *Handbook of Regional and Urban Economics*. T. 5. Elsevier, 2015, p. 467-560 (cf. p. 34, 38).
- [50] Genevieve Giuliano et Kenneth A. Small. « Subcenters in the Los Angeles region ». In : *Regional Science and Urban Economics* 21.2 (1991), p. 163-182 (cf. p. 39).
- [51] Daniel P. McMillen. « Nonparametric employment subcenter identification ». In : *Journal of Urban Economics* 50.3 (2001), p. 448-473 (cf. p. 39).
- [52] Daniel P. McMillen et Stefani C. Smith. « The number of subcenters in large urban areas ». In : *Journal of Urban Economics* 53.3 (2003), p. 321-338 (cf. p. 39).
- [53] Thomas Louail *et al.* « From mobile phone data to the spatial structure of cities ». In : *Scientific Reports* 4.1 (2014), p. 1-12 (cf. p. 39).
- [54] Masahisa Fujita et Hideaki Ogawa. « Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations ». In : *Regional Science and Urban Economics* 12.2 (1982), p. 161-196 (cf. p. 41).
- [55] *TomTom Traffic Index 2008-2017*. Rapp. tech. TomTom International BV, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://www.tomtom.com/en_gb/traffic-index/ (cf. p. 42, 136, 141).
- [56] Rémi Louf et Marc Barthelemy. « Modeling the polycentric transition of cities ». In : *Physical Review Letters* 111.19 (2013), p. 198702 (cf. p. 42).
- [57] Rémi Louf et Marc Barthelemy. « How congestion shapes cities : from mobility patterns to scaling ». In : *Scientific Reports* 4.1 (2014), p. 1-9 (cf. p. 42, 72).
- [58] David Branston. « Link capacity functions : A review ». In : *Transportation Research* 10.4 (1976), p. 223-236 (cf. p. 42, 135).
- [59] Alfred Marshall. *Principles of Economics*. 1890 (cf. p. 44).

- [60] Jean-Philippe Bouchaud. « Economics needs a scientific revolution ». In : *Nature* 455.7217 (2008), p. 1181-1181 (cf. p. 44).
- [61] Gabriel M. Ahlfeldt *et al.* « The economics of density : Evidence from the Berlin Wall ». In : *Econometrica* 83.6 (2015), p. 2127-2189 (cf. p. 45, 46, 49).
- [62] A. Peter Young. *Spin Glasses and Random Fields*. T. 12. World Scientific, 1998 (cf. p. 47).
- [63] John M. Keynes. *A Tract on Monetary Reform*. Cosimo Classics, 1923 (cf. p. 47).
- [64] Marc Mézard, Giorgio Parisi et Miguel Angel Virasoro. *Spin Glass Theory and Beyond : An Introduction to the Replica Method and Its Applications*. T. 9. World Scientific Publishing Company, 1987 (cf. p. 48).
- [65] Jesus Felipe et F. Gerard Adams. « "A theory of production" the estimation of the Cobb-Douglas function : A retrospective view ». In : *Eastern Economic Journal* 31.3 (2005), p. 427-445 (cf. p. 49).
- [66] Herbert A. Simon. « Bounded rationality ». In : *Utility and probability*. Springer, 1990, p. 15-18 (cf. p. 49).
- [67] Philip W. Anderson. « More is different : broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science. » In : *Science* 177.4047 (1972), p. 393-396 (cf. p. 49).
- [68] Thomas C. Schelling. *Micromotives and Macrobehavior*. WW Norton & Company, 2006 (cf. p. 49, 57).
- [69] Adam Smith. *The Wealth of Nations : An inquiry into the nature and causes of the Wealth of Nations*. 1776 (cf. p. 50).
- [70] Garrett Hardin. « The tragedy of the commons ». In : *Food Ethics* (2016), p. 54 (cf. p. 50).
- [71] Kurt Hornik, Maxwell Stinchcombe et Halbert White. « Multi-layer feedforward networks are universal approximators ». In : *Neural Networks* 2.5 (1989), p. 359-366 (cf. p. 51).
- [72] Ira S. Lowry. *A model of metropolis*. Rapp. tech. Rand Corp Santa Monica Calif, 1964 (cf. p. 51).
- [73] Paul Waddell. « UrbanSim : Modeling urban development for land use, transportation, and environmental planning ». In : *Journal of the American Planning Association* 68.3 (2002), p. 297-314 (cf. p. 51).
- [74] Alain Laurent. *L'individualisme méthodologique*. Presses universitaires de France, 1994 (cf. p. 53).

- [75] Jan Christiaan Smuts. *Holism and Evolution*. Macmillan, 1926 (cf. p. 53).
- [76] Robert E. Park. « The city : suggestions for the investigation of human behavior in the city environment ». In : *American journal of Sociology* 20.5 (1915), p. 577-612 (cf. p. 55).
- [77] Denise Pumain. « Pour une théorie évolutive des villes ». In : *L'Espace géographique* (1997), p. 119-134 (cf. p. 55).
- [78] Michael Batty. *The New Science of Cities*. MIT Press, 2013 (cf. p. 55, 71).
- [79] Walter Christaller. *Die zentralen Orte in Süddeutschland : eine ökonomisch-geographische Untersuchung über die Gesetzmässigkeit der Verbreitung und Entwicklung der Siedlungen mit städtischen Funktionen*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1980 (cf. p. 55, 56).
- [80] France Guérin-Pace *et al.* « SIM POP, un modèle multi-agents pour l'évolution des systèmes de peuplement ». In : *Les rencontres de Théo Quant* (1995) (cf. p. 55).
- [81] Lena Sanders *et al.* « SIMPOP : a multiagent system for the study of urbanism ». In : *Environment and Planning B : Planning and design* 24.2 (1997), p. 287-305 (cf. p. 55).
- [82] Denise Pumain et Romain Reuillon. *Urban dynamics and Simulation Models*. Springer, 2017 (cf. p. 55).
- [83] Rosario N. Mantegna et H. Eugene Stanley. *Introduction to Econophysics : Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 1999 (cf. p. 57).
- [84] Louis Bachelier. « Théorie de la spéculation ». In : *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. T. 17. 1900, p. 21-86 (cf. p. 57).
- [85] Nigel Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. CRC Press, 2018 (cf. p. 57).
- [86] Gilles Duranton. « A proposal to delineate metropolitan areas in Colombia ». In : *Desarrollo y Sociedad* 75 (2015), p. 223-264 (cf. p. 60, 61).
- [87] Maarten Bosker, Jane Park et Mark Roberts. « Definition matters. Metropolitan areas and agglomeration economies in a large-developing country ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103275 (cf. p. 60).

- [88] Lewis Dijkstra *et al.* « Applying the degree of urbanisation to the globe : A new harmonised definition reveals a different picture of global urbanisation ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103312 (cf. p. 60).
- [89] Gilles Duranton. « Classifying locations and delineating space : an introduction ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103353 (cf. p. 60, 61, 77).
- [90] Daniel Arribas-Bel, M-À Garcia-López et Elisabet Viladecans-Marsal. « Building (s and) cities : Delineating urban areas with a machine learning algorithm ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103217 (cf. p. 60).
- [91] Marie-Pierre de Bellefon *et al.* « Delineating urban areas using building density ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103226 (cf. p. 60).
- [92] Jonathan I. Dingel, Antonio Miscio et Donald R. Davis. « Cities, lights, and skills in developing economies ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103174 (cf. p. 60).
- [93] Wenpu Cao *et al.* « Quantifying urban areas with multi-source data based on percolation theory ». In : *Remote Sensing of Environment* 241 (2020), p. 111730 (cf. p. 60).
- [94] *2010 Standards for Delineating Metropolitan and Micropolitan Statistical Areas*. Rapp. tech. Washington D.C., États-Unis d'Amérique, 2010 (cf. p. 60).
- [95] Lewis Dijkstra, Hugo Poelman et Paolo Veneri. « The EU-OECD definition of a functional urban area ». In : (2019) (cf. p. 60, 147, 148).
- [96] Ana I. Moreno-Monroy, Marcello Schiavina et Paolo Veneri. « Metropolitan areas in the world. Delineation and population trends ». In : *Journal of Urban Economics* 125 (2021), p. 103242 (cf. p. 60).
- [97] Victor Couture, Gilles Duranton et Matthew A. Turner. « Speed ». In : *Review of Economics and Statistics* 100.4 (2018), p. 725-739 (cf. p. 61, 133).
- [98] Elsa Arcaute *et al.* « Constructing cities, deconstructing scaling laws ». In : *Journal of the Royal Society Interface* 12.102 (2015), p. 20140745 (cf. p. 62, 72).
- [99] Hubert Charbonneau et Jacques Légaré. « La population du Canada aux recensements de 1666 et 1667 ». In : *Population* (1967), p. 1031-1054 (cf. p. 69).

- [100] Ferdinand Lot. « L'État des paroisses et des feux de 1328 ». In : *Bibliothèque de l'École des Chartes* (1929), p. 51-107 (cf. p. 69).
- [101] *Présentation du recensement de la population*. Rapp. tech. INSEE, 2021 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.insee.fr/fr/information/2383265> (cf. p. 69).
- [102] CIESIN, SEDAC. *Gridded population of the world, version 4 (GPWW4) : population density*. 2016 (cf. p. 69, 148).
- [103] Aurélien Jouhanneau. *En Birmanie, une capitale fantôme six fois plus grande que New York*. 2015 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://immobilier.lefigaro.fr/article/en-birmanie-une-capitale-fantome-six-fois-plus-grande-que-new-york_55a8aa92-d702-11e4-8f75-cca6747c5f3f (cf. p. 70).
- [104] Geoffrey B. West, James H. Brown et Brian J. Enquist. « The fourth dimension of life : fractal geometry and allometric scaling of organisms ». In : *science* 284.5420 (1999), p. 1677-1679 (cf. p. 70).
- [105] Denise Pumain. « Scaling laws and urban systems ». In : (2004) (cf. p. 71, 147).
- [106] Elisa Heinrich Mora *et al.* « Scaling of urban income inequality in the USA ». In : *Journal of the Royal Society Interface* 18.181 (2021), p. 20210223 (cf. p. 71).
- [107] Michail Fragkias *et al.* « Does size matter? Scaling of CO2 emissions and US urban areas ». In : *PLoS One* 8.6 (2013), e64727 (cf. p. 72).
- [108] Diego Rybski *et al.* « Cities as nuclei of sustainability? » In : *Environment and Planning B : Urban Analytics and City Science* 44.3 (2017), p. 425-440 (cf. p. 72).
- [109] Adolphe Quetelet. *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*. T. 2. 1869 (cf. p. 73).
- [110] Francis Galton. « Regression towards mediocrity in hereditary stature. » In : *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* 15 (1886), p. 246-263 (cf. p. 74).
- [111] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. T. 1. Librairie Droz, 1964 (cf. p. 74).
- [112] Benoît Mandelbrot et Richard L. Hudson. *The Misbehavior of Markets : A Fractal View of Financial Turbulence*. Basic books, 2007 (cf. p. 74).
- [113] José Moran. « Statistical physics and anomalous macroeconomic fluctuations ». Thèse de doct. Paris : EHESS, 2020 (cf. p. 75, 76).

- [114] Boris V. Gnedenko et Andreï N. Kolmogorov. « Limit distributions for sums of independent ». In : *American Journal of Mathematics* 105 (1954) (cf. p. 75).
- [115] Jean-Baptiste Estoup. *Gammes sténographiques : méthode et exercices pour l'acquisition de la vitesse*. Institut sténographique, 1916 (cf. p. 75).
- [116] Felix Auerbach. « Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration ». In : *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), p. 74-76 (cf. p. 75, 77).
- [117] Steven T. Piantadosi. « Zipf's word frequency law in natural language : A critical review and future directions ». In : *Psychonomic bulletin & review* 21.5 (2014), p. 1112-1130 (cf. p. 76).
- [118] Xavier Gabaix. « Zipf's law for cities : an explanation ». In : *The Quarterly Journal of Economics* 114.3 (1999), p. 739-767 (cf. p. 76, 84).
- [119] Réka Albert et Albert-László Barabási. « Statistical mechanics of complex networks ». In : *Reviews of Modern Physics* 74.1 (2002), p. 47 (cf. p. 76).
- [120] Hans W Singer. « The "courbe des populations". A parallel to Pareto's Law ». In : *The Economic Journal* 46.182 (1936), p. 254-263 (cf. p. 77).
- [121] Kenneth T. Rosen et Mitchel Resnick. « The size distribution of cities : an examination of the Pareto law and primacy ». In : *Journal of Urban Economics* 8.2 (1980), p. 165-186 (cf. p. 77).
- [122] Paul Krugman. « Confronting the mystery of urban hierarchy ». In : *Journal of the Japanese and International Economies* 10.4 (1996), p. 399-418 (cf. p. 77).
- [123] Aharon Blank et Sorin Solomon. « Power laws in cities population, financial markets and internet sites (scaling in systems with a variable number of components) ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 287.1-2 (2000), p. 279-288 (cf. p. 77).
- [124] Yannis M. Ioannides et Henry G. Overman. « Zipf's law for cities : an empirical examination ». In : *Regional Science and Urban Economics* 33.2 (2003), p. 127-137 (cf. p. 77).
- [125] Bernat Corominas-Murtra et Ricard V. Solé. « Universality of Zipf's law ». In : *Physical Review E* 82.1 (2010), p. 011102 (cf. p. 77).

- [126] Denise Pumain et François Moriconi-Ebrard. « City size distributions and metropolisation ». In : *Geojournal* 43.4 (1997), p. 307-314 (cf. p. 77).
- [127] Li Gan, Dong Li et Shunfeng Song. « Is the Zipf law spurious in explaining city-size distributions? » In : *Economics Letters* 92.2 (2006), p. 256-262 (cf. p. 77, 80, 97).
- [128] Kwok Tong Soo. « Zipf's Law for cities : a cross-country investigation ». In : *Regional Science and Urban Economics* 35.3 (2005), p. 239-263 (cf. p. 77).
- [129] Clémentine Cottineau. « MetaZipf. A dynamic meta-analysis of city size distributions ». In : *PloS one* 12.8 (2017), e0183919 (cf. p. 77, 78).
- [130] Sidra Arshad, Shougeng Hu et Badar Nadeem Ashraf. « Zipf's law and city size distribution : A survey of the literature and future research agenda ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 492 (2018), p. 75-92 (cf. p. 78).
- [131] Lucien Benguigui et Efrat Blumenfeld-Lieberthal. « The end of a paradigm : is Zipf's law universal? » In : *Journal of geographical systems* 13.1 (2011), p. 87-100 (cf. p. 80).
- [132] Herbert A. Simon. « On a Class of Skew Distribution Functions ». In : *Biometrika* 42.3/4 (1955), p. 425-440 (cf. p. 81).
- [133] Didier Sornette et Rama Cont. « Convergent multiplicative processes repelled from zero : power laws and truncated power laws ». In : *Journal de physique I* 7.3 (1997), p. 431-444 (cf. p. 83, 84).
- [134] Esteban Rossi-Hansberg et Mark L.J. Wright. « Urban structure and growth ». In : *The Review of Economic Studies* 74.2 (2007), p. 597-624 (cf. p. 84).
- [135] Moshe Levy. « Gibrat's law for (all) cities : Comment ». In : *American Economic Review* 99.4 (2009), p. 1672-75 (cf. p. 84).
- [136] Gilles Duranton et Diego Puga. « The growth of cities ». In : *Handbook of economic growth* 2 (2014), p. 781-853 (cf. p. 84).
- [137] Moshe Levy et Sorin Solomon. « Power laws are logarithmic Boltzmann laws ». In : *International Journal of Modern Physics C* 7.04 (1996), p. 595-601 (cf. p. 84).
- [138] Jean-Philippe Bouchaud et Marc Mézard. « Wealth condensation in a simple model of economy ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 282.3-4 (2000), p. 536-545 (cf. p. 86).

- [139] Luís M.A. Bettencourt et Daniel Zünd. « Demography and the emergence of universal patterns in urban systems ». In : *Nature Communications* 11.1 (2020), p. 1-9 (cf. p. 87, 89, 94).
- [140] Michael Batty. « Rank clocks ». In : *Nature* 444.7119 (2006), p. 592-596 (cf. p. 87, 98).
- [141] *Metro area-to-metro area migration flows : 2013–2017 American Community Survey*. Rapp. tech. United States Census Bureau, 2019 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.census.gov/data/tables/2017/demo/geographic-mobility/metro-to-metro-migration.html> (cf. p. 89).
- [142] *Migrations résidentielles en 2008 : lieu de résidence actuelle – lieu de résidence antérieure*. Rapp. tech. INSEE, 2011 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2022291> (cf. p. 89).
- [143] *Internal migration : matrices of moves by local authority and region (countries of the UK) 2012–2016*. Rapp. tech. Office for National Statistics, 2019 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.ons.gov.uk/peoplepopulationandcommunity/populationandmigration/migrationwithintheuk/datasets/matricesofinternalmigrationmovesbetweenloc> (cf. p. 89).
- [144] *Migrants interprovinciaux et intraprovinciaux, selon la région métropolitaine de recensement d'origine et de destination pour la période allant du 1er juillet au 30 juin*. Rapp. tech. Statistique Canada, 2019 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://www150.statcan.gc.ca/t1/tbl1/fr/tv.action?pid=1710008701&request_locale=fr (cf. p. 89).
- [145] Sven Erlander et Neil F. Stewart. *The Gravity Model in Transportation Analysis : Theory and Extensions*. T. 3. Vsp, 1990 (cf. p. 91).
- [146] Filippo Simini *et al.* « A universal model for mobility and migration patterns ». In : *Nature* 484.7392 (2012), p. 96-100 (cf. p. 92).
- [147] Nicolaas G. van Kampen. « Itô versus Stratonovich ». In : *Journal of Statistical Physics* 24.1 (1981), p. 175-187 (cf. p. 94).
- [148] Tomasz Srokowski. « Multiplicative lévy processes : Itô versus stratonovich interpretation ». In : *Physical Review E* 80.5 (2009), p. 051113 (cf. p. 95, 181).
- [149] Sune Jespersen, Ralf Metzler et Hans C. Fogedby. « Lévy flights in external force fields : Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions ». In : *Physical Review E* 59.3 (1999), p. 2736 (cf. p. 95).

- [150] Daniel Schertzer *et al.* « Fractional Fokker–Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises ». In : *Journal of Mathematical Physics* 42.1 (2001), p. 200-212 (cf. p. 95, 181).
- [151] Charles Fox. « The G and H functions as symmetrical Fourier kernels ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 98.3 (1961), p. 395-429 (cf. p. 95).
- [152] Kenneth A. Small. « Valuation of travel time ». In : *Economics of Transportation* 1.1-2 (2012), p. 2-14 (cf. p. 108).
- [153] David A. Hensher. « Measurement of the valuation of travel time savings ». In : *Journal of Transport Economics and Policy (JTEP)* 35.1 (2001), p. 71-98 (cf. p. 108).
- [154] Edward L. Glaeser, Matthew E. Kahn et Jordan Rappaport. « Why do the poor live in cities? The role of public transportation ». In : *Journal of Urban Economics* 63.1 (2008), p. 1-24 (cf. p. 108, 139).
- [155] Jan K. Brueckner, Jacques-Francois Thisse et Yves Zenou. « Why is central Paris rich and downtown Detroit poor? : An amenity-based theory ». In : *European Economic Review* 43.1 (1999), p. 91-107 (cf. p. 109).
- [156] Thomas C. Schelling. « Dynamic models of segregation ». In : *Journal of Mathematical Sociology* 1.2 (1971), p. 143-186 (cf. p. 110).
- [157] Luca Dall'Asta, Claudio Castellano et Matteo Marsili. « Statistical physics of the Schelling model of segregation ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2008.07 (2008), p. L07002 (cf. p. 110, 111).
- [158] Laetitia Gauvin, Jean Vannimenus et Jean-Pierre Nadal. « Phase diagram of a Schelling segregation model ». In : *The European Physical Journal B* 70.2 (2009), p. 293-304 (cf. p. 110).
- [159] Ezequiel V. Albano. « Interfacial roughening, segregation and dynamic behaviour in a generalized Schelling model ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2012.03 (2012), P03013 (cf. p. 111).
- [160] David Abella, Maxi San Miguel et José J. Ramasco. « Aging effects in Schelling Segregation model ». In : *arXiv preprint arXiv :2204.01417* (2022) (cf. p. 111).
- [161] Jan Nijman et Yehua Dennis Wei. « Urban inequalities in the 21st century economy ». In : *Applied Geography* 117 (2020), p. 102188 (cf. p. 113).

- [162] Rowland Atkinson et Gary Bridge. *Gentrification in a Global Context*. Routledge, 2004 (cf. p. 113).
- [163] Douglas Massey et Nancy A. Denton. *American Apartheid : Segregation and the Making of the Underclass*. Harvard University Press, 1993 (cf. p. 113).
- [164] Peter Lobmayer et Richard G. Wilkinson. « Inequality, residential segregation by income, and mortality in US cities ». In : *Journal of Epidemiology & Community Health* 56.3 (2002), p. 183-187 (cf. p. 113).
- [165] Loretta Lees, Tom Slater et Elvin K. Wyly. *Gentrification*. Routledge, 2013 (cf. p. 113).
- [166] Loretta Lees, Tom Slater et Elvin K. Wyly. *The Gentrification Reader*. T. 1. Routledge, 2010 (cf. p. 113).
- [167] Lance Freeman et Frank Braconi. « Gentrification and displacement New York City in the 1990s ». In : *Journal of the American Planning Association* 70.1 (2004), p. 39-52 (cf. p. 113).
- [168] Rowland Atkinson *et al.* « Gentrification and displacement : the household impacts of neighbourhood change ». In : *AHURI Final Report* 160 (2011), p. 1-89 (cf. p. 113).
- [169] Neil Smith. « Toward a theory of gentrification a back to the city movement by capital, not people ». In : *Journal of the American planning association* 45.4 (1979), p. 538-548 (cf. p. 113).
- [170] Anne Clerval. « La gentrification à Paris intra-muros : dynamiques spatiales, rapports sociaux et politiques publiques ». Thèse de doct. Université Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2008 (cf. p. 113).
- [171] Alessandro Venerandi *et al.* « Form and urban change—An urban morphometric study of five gentrified neighbourhoods in London ». In : *Environment and Planning B : Urban Analytics and City Science* 44.6 (2017), p. 1056-1076 (cf. p. 113).
- [172] Alain Bourdin. « Gentrification : un "concept" à déconstruire ». In : *Espaces et sociétés* 1 (2008), p. 23-37 (cf. p. 113).
- [173] Stuart S. Rosenthal et Stephen L. Ross. « Change and persistence in the economic status of neighborhoods and cities ». In : *Handbook of Regional and Urban Economics* 5 (2015), p. 1047-1120 (cf. p. 113).
- [174] Richard A. Holley et Thomas M. Liggett. « Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model ». In : *The Annals of Probability* (1975), p. 643-663 (cf. p. 114).

- [175] Pavel L. Krapivsky, Sidney Redner et Eli Ben-Naim. *A Kinetic View of Statistical Physics*. Cambridge University Press, 2010 (cf. p. 114).
- [176] Thomas M. Liggett. « Stochastic models of interacting systems ». In : *The Annals of Probability* 25.1 (1997), p. 1-29 (cf. p. 114).
- [177] Ivan Dornic *et al.* « Critical coarsening without surface tension : The universality class of the voter model ». In : *Physical Review Letters* 87.4 (2001), p. 045701 (cf. p. 114).
- [178] Pavel L. Krapivsky. « Kinetics of monomer-monomer surface catalytic reactions ». In : *Physical Review A* 45.2 (1992), p. 1067 (cf. p. 114).
- [179] Laurent Frachebourg et Pavel L. Krapivsky. « Exact results for kinetics of catalytic reactions ». In : *Physical Review E* 53.4 (1996), R3009 (cf. p. 114).
- [180] Peter Clifford et Aidan Sudbury. « A model for spatial conflict ». In : *Biometrika* 60.3 (1973), p. 581-588 (cf. p. 114).
- [181] Boris L. Granovsky et Neal Madras. « The noisy voter model ». In : *Stochastic Processes and their applications* 55.1 (1995), p. 23-43 (cf. p. 114, 120).
- [182] Adrián Carro, Raúl Toral et Maxi San Miguel. « The noisy voter model on complex networks ». In : *Scientific Reports* 6.1 (2016), p. 1-14 (cf. p. 114).
- [183] Steven M. Manson. *IPUMS national historical geographic information system : version 15.0*. 2020 (cf. p. 116).
- [184] *Dispositif sur les revenus localisés sociaux et fiscaux*. Rapp. tech. INSEE, 2022 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/source/serie/s1172> (cf. p. 116).
- [185] Hugo Barbosa *et al.* « Human mobility : Models and applications ». In : *Physics Reports* 734 (2018), p. 1-74 (cf. p. 131).
- [186] David Dodman. « Blaming cities for climate change? An analysis of urban greenhouse gas emissions inventories ». In : *Environment and Urbanization* 21.1 (2009), p. 185-201 (cf. p. 131, 153).
- [187] Peter Newman. « The environmental impact of cities ». In : *Environment and Urbanization* 18.2 (2006), p. 275-295 (cf. p. 131).
- [188] Peter G Newman et Jeffrey R Kenworthy. *Cities and Automobile Dependence : An International Sourcebook*. 1989 (cf. p. 131, 132, 143, 147).

- [189] Felix Creutzig *et al.* « Global typology of urban energy use and potentials for an urbanization mitigation wedge ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112.20 (2015), p. 6283-6288 (cf. p. 131, 147).
- [190] Ana L.C. Bazzan et Franziska Klügl. « A review on agent-based technology for traffic and transportation ». In : *The Knowledge Engineering Review* 29.3 (2014), p. 375-403 (cf. p. 133).
- [191] Kai Nagel et Michael Schreckenberg. « A cellular automaton model for freeway traffic ». In : *Journal de physique I* 2.12 (1992), p. 2221-2229 (cf. p. 133).
- [192] Takashi Nagatani. « The physics of traffic jams ». In : *Reports on Progress in Physics* 65.9 (2002), p. 1331 (cf. p. 133).
- [193] Richard Arnott, André De Palma et Robin Lindsey. « Economics of a bottleneck ». In : *Journal of Urban Economics* 27.1 (1990), p. 111-130 (cf. p. 133).
- [194] Gilles Duranton et Matthew A. Turner. « The fundamental law of road congestion : Evidence from US cities ». In : *American Economic Review* 101.6 (2011), p. 2616-52 (cf. p. 133, 145, 147).
- [195] Prottoy A. Akbar *et al.* *Mobility and congestion in urban India*. Rapp. tech. National Bureau of Economic Research, 2018 (cf. p. 133).
- [196] David A. Hensher et Kenneth John Button. *Handbook of Transport Modelling*. 1. 2000 (cf. p. 133).
- [197] Rémi Louf et Marc Barthélemy. « typology of street patterns ». In : *Journal of The Royal Society : Interface* 11 (2014), p. 20140924 (cf. p. 133, 153).
- [198] Michael Marks, Jacob Mason et Gabriel Oliveira. *People near transit : Improving accessibility and rapid transit coverage in large cities*. Rapp. tech. Institute for Transportation et Development Policy, 2016 (cf. p. 135, 147, 148).
- [199] Geoffrey Singer et Cherise Burda. *Fast Cities : A comparison of rapid transit in major Canadian cities*. Rapp. tech. Pembina Institute, 2014 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.pembina.org/pub/fast-cities> (cf. p. 135, 147).
- [200] *Part de la population à proximité d'un arrêt de métro ou d'un tram chrono (500 m)*. Rapp. tech. IBSA.brussels, 2015 (cf. p. 135).
- [201] *Singapore's Transportation Challenges and Plans*. Rapp. tech. GuideMeSingapore, 2013 (cf. p. 135).

- [202] *Housing and Land Survey*. Rapp. tech. Statistics of Japan, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.stat.go.jp/english/data/jyutaku/index.html> (cf. p. 135).
- [203] Brian McKenzie *et al.* *Who Drives to Work? : Commuting by Automobile in the United States : 2013*. US Department of Commerce, Economics et Statistics Administration, 2015 (cf. p. 135).
- [204] *Commuters using sustainable transportation in census metropolitan areas. Census of Population; 2016*. Rapp. tech. Statistique Canada, 2017 (cf. p. 135).
- [205] *Mobility Report*. Rapp. tech. Kennis Instituut voor Mobiliteitsbeleid, 2016 (cf. p. 135).
- [206] *EMTA Barometer of Public Transport in European Metropolitan Areas*. Rapp. tech. European Metropolitan Transport Authority, 2012 (cf. p. 135).
- [207] *Enquesta de Mobilitat en Dia Feiner (EMEF)*. Rapp. tech. Ajuntament de Barcelona, 2012 (cf. p. 135).
- [208] *Singapore Household Interview Travel Survey*. Rapp. tech. Government of Singapore, Land Transport Authority, Department of Statistics, 2012 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.lta.gov.sg/content/ltagov/en/newsroom/2013/10/2/household-interview-travel-survey-2012-public-transport-mode-share-rises-to-63.html> (cf. p. 135).
- [209] *The OECD Metropolitan Areas Database visualized through the Metropolitan eXplorer 2016*. Rapp. tech. OCDE, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.oecd.org/cfe/regional-policy/oecdexplorer.htm> (cf. p. 135, 141).
- [210] *The World Bank Trading Economics*. Rapp. tech. Banque mondiale, 2014 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://tradingeconomics.com/> (cf. p. 135).
- [211] *Cities and climate change : an urgent agenda*. Rapp. tech. Banque mondiale, 2010 (en ligne le 10/05/2022). URL : <http://documents.worldbank.org/curated/en/194831468325262572/Cities-and-climate-change-an-urgent-agenda> (cf. p. 135).
- [212] *GHC Inventory mitigation 2010-2015*. Rapp. tech. Buenos Aires Ciudad, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/folleto_limpio_ingles.pdf (cf. p. 135).

- [213] Rapp. tech. World Resource Institute, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : <http://wrirosscities.org/our-work/project-city/beijing-low-emission-zone> (cf. p. 135).
- [214] Kevin Lebrun *et al.* *Cahiers de l'Observatoire de la mobilité*. 2013 (cf. p. 135).
- [215] *Census of Population 2016*. Rapp. tech. Statistique Canada, 2017 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www12.statcan.gc.ca/census-recensement/2016/rt-td/population-eng.cfm> (cf. p. 135).
- [216] Mercedes Uranga. *Los portenos pierden hasta 18 dias al ano en ir y volver de trabajar*. 2016 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.lanacion.com.ar/economia/empleos/los-portenos-pierden-hasta-18-dias-al-ano-en-ir-y-volver-de-trabajar-nid1952256> (cf. p. 135).
- [217] Rafael Henrique Moraes Pereira et Tim Schwanen. *Commute time in Brazil (1992-2009) : differences between metropolitan areas, by income levels and gender*. Rapp. tech. Discussion Paper, 2015 (en ligne le 10/05/2022) (cf. p. 135).
- [218] *Governing calculations of 2011-2015 American Community Survey data*. Rapp. tech. Governing, 2018 (en ligne le 10/05/2022). URL : <http://www.governing.com/gov-data/transportation-infrastructure/commute-time-averages-drive-public-transportation-bus-rail-by-metro-area.html> (cf. p. 135).
- [219] *Five facts about commuting in Australia*. Rapp. tech. BITRE, 2016 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://www.bitre.gov.au/publications/2016/is_077.aspx (cf. p. 135).
- [220] Rapp. tech. Ministry of Land, Infrastructure et Transport, 1998 (en ligne le 10/05/2022). URL : <http://www.mlit.go.jp/crd/tosiko/pt/city/tokyo/04.html> (cf. p. 135).
- [221] *Sample Enumeration Results of the 2005 Population Census (Internal migration and commuting)*. Rapp. tech. Statistics Korea, 2005 (en ligne le 10/05/2022). URL : <http://kostat.go.kr/portal/eng/surveyOutline/8/5/index.static> (cf. p. 135).
- [222] Stephen Chen. « Beijing workers have longest daily commute in China at 52 minutes each way ». In : *South China Morning Post* 27 (2015) (cf. p. 135).

- [223] *Rankings by City of Average Monthly Net Salary (After Tax) (Salaries And Financing)*. Numbeo. 2018 <https://ourworldindata.org/urbanization>. URL : https://www.numbeo.com/cost-of-living/city_price_rankings?itemId=105 (cf. p. 136, 139).
- [224] Yves Crozet. « Le temps et les transports de voyageurs ». In : *Conférence européenne des Ministres des Transports*. T. 127. 2005 (cf. p. 136, 139).
- [225] Arata N. Reed P. *What is the total cost of owning a car?* 2019 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.nerdwallet.com/blog/loans/total-cost-owning-car/> (cf. p. 136).
- [226] Moshe E. Ben-Akiva, Steven R. Lerman *et al.* *Discrete Choice Analysis : Theory and Application to Travel Demand*. T. 9. MIT Press, 1985 (cf. p. 136).
- [227] Daniela Roque et Houshmand E. Masoumi. « An analysis of car ownership in Latin American cities : a perspective for future research ». In : *Periodica Polytechnica Transportation Engineering* 44.1 (2016), p. 5-12 (cf. p. 139).
- [228] Jorge C. Leitao *et al.* « Is this scaling nonlinear? » In : *Royal Society Open Science* 3.7 (2016), p. 150649 (cf. p. 141).
- [229] Mark Buchanan. « The benefits of public transport ». In : *Nature Physics* 15.9 (2019), p. 876-876 (cf. p. 147).
- [230] Todd Litman. « Evaluating rail transit benefits : A comment ». In : *Transport Policy* 14.1 (2007), p. 94-97 (cf. p. 147).
- [231] Michael L. Anderson. « Subways, strikes, and slowdowns : The impacts of public transit on traffic congestion ». In : *American Economic Review* 104.9 (2014), p. 2763-96 (cf. p. 147).
- [232] Nathaniel Baum-Snow, Matthew E. Kahn et Richard Voith. « Effects of urban rail transit expansions : Evidence from sixteen cities, 1970-2000 ». In : *Brookings-Wharton papers on urban affairs* (2005), p. 147-206 (cf. p. 147).
- [233] Phil Fouracre, Christian Dunkerley et Geoff Gardner. « Mass rapid transit systems for cities in the developing world ». In : *Transport Reviews* 23.3 (2003), p. 299-310 (cf. p. 147).
- [234] Riccardo Gallotti et Marc Barthelemy. « Anatomy and efficiency of urban multimodal mobility ». In : *Scientific Reports* 4.1 (2014), p. 1-9 (cf. p. 147).
- [235] Riccardo Gallotti et Marc Barthelemy. « The multilayer temporal network of public transport in Great Britain ». In : *Scientific Data* 2.1 (2015), p. 1-8 (cf. p. 147).

- [236] Antonio Musso et Vukan R. Vuchic. *Characteristics of Metro Networks and Methodology for their Evaluation*. National Research Council, Transportation Research Board, 1988 (cf. p. 147).
- [237] Domenico Gattuso et Ernesto Miriello. « Compared analysis of metro networks supported by graph theory ». In : *Networks and Spatial Economics* 5.4 (2005), p. 395-414 (cf. p. 147).
- [238] Sybil Derrible et Christopher Kennedy. « The complexity and robustness of metro networks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 389.17 (2010), p. 3678-3691 (cf. p. 147).
- [239] Aneta J. Florczyk *et al.* « GHSL data package 2019 ». In : *European Commission Joint Research Center* 29788 (2019) (cf. p. 148).
- [240] GDAL/OGR contributors. *GDAL/OGR Geospatial Data Abstraction software Library*, Open Source Geospatial Foundation. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://gdal.org> (cf. p. 148).
- [241] *GTFS Static Overview*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://developers.google.com/transit/gtfs> (cf. p. 148).
- [242] *OpenMobilityData*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://transitfeeds.com> (cf. p. 149).
- [243] *GTFS für Deutschland*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://gtfs.de/> (cf. p. 149).
- [244] *Data gouv*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.data.gouv.fr> (cf. p. 149).
- [245] *Transport for London. TFL Station Locations*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://data.london.gov.uk/dataset/tfl-station-locations> (cf. p. 149).
- [246] Vincent Verbavatz et Marc Barthelemy. *People Near Transit (PNT)*. figshare. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.12013020> (cf. p. 149).
- [247] Peter G. Newman. « The environmental impact of cities ». In : *Environment and Urbanization* 18 (2006), p. 275-295 (cf. p. 153).
- [248] Maxwell G. Lay. *History of the World's Roads and of the Vehicles That Used Them*. Rutgers University Press, 1992 (cf. p. 153).
- [249] Trevor Homer. *The Book of Origins*. Londres, Royaume-Uni : Portrait, 2006 (cf. p. 153).
- [250] John J. Stemley. « One-way streets provide superior safety and convenience ». In : *ITE journal* 68 (1998), p. 47-50 (cf. p. 153).

- [251] Alessandro Venerandi *et al.* « Form and urban change – An urban morphometric study of five gentrified neighbourhoods in London ». In : *Environment and Planning B : Urban Analytics and City Science* 44 (2017), p. 1056-1076 (cf. p. 153).
- [252] Bin Jiang et Christophe Claramunt. « Topological analysis of urban street networks ». In : *Environment and Planning B : Planning and Design* 31 (2004), p. 151-162 (cf. p. 153).
- [253] Jerome Buhl *et al.* « Topological patterns in street networks of self-organized urban settlements ». In : *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 49 (2006), p. 513 (cf. p. 153).
- [254] Emanuele Strano *et al.* « Urban street networks : a comparative analysis of ten European cities ». In : *Environment and Planning B : Planning and Design* 40 (2013), p. 1071-1086 (cf. p. 153).
- [255] Feng Xie et David Levinson. « Measuring the structure of road networks ». In : *Geographical Analysis* 39 (2007), p. 336-356 (cf. p. 153).
- [256] Stefan Lammer, Björn Gehlsen et Dirk Helbing. « Scaling laws in the spatial structure of urban road networks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 363 (2006), p. 89-95 (cf. p. 153).
- [257] Emanuele Strano *et al.* « Elementary processes governing the evolution of road networks ». In : *Scientific Reports* 2 (2012), p. 296 (cf. p. 153).
- [258] Paolo Crucitti, Vito Latora et Sergio Porta. « Centrality measures in spatial networks of urban streets ». In : *Physical Review E* 73 (2006), p. 036125 (cf. p. 153).
- [259] Marc Barthelemy. *Morphogenesis of Spatial Networks*. Cham, Suisse : Springer International Publishing, 2018 (cf. p. 153, 157, 183).
- [260] Geoff Boeing. « Urban spatial order : street network orientation, configuration, and entropy ». In : *Applied Network Science* 4 (2019) (cf. p. 153).
- [261] Esther M. Arkin et Refael Hassin. « A note on orientations of mixed graphs ». In : *Discrete Applied Mathematics* 116.3 (2002), p. 271-278 (cf. p. 153).
- [262] Matthias Beck *et al.* *On weak chromatic polynomials of mixed graphs*. Graphs et Combinatorics, 2013 (cf. p. 153).

- [263] Herbert E. Robbins. « A theorem on graphs with an application to a problem on traffic control ». In : *American Mathematical Monthly* 46 (1939), p. 281-283 (cf. p. 153, 158).
- [264] Frank Boesch et Ralph Tindell. « Robbins' theorem for mixed multigraphs ». In : *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), p. 716-719 (cf. p. 154).
- [265] Václav Chvatal et Carsten Thomassen. « Distances in orientations of graphs ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24 (1978), p. 61-75 (cf. p. 154).
- [266] F. S. Roberts. *Graph Theory and its Applications to Problems of Society*. Philadelphie, États-Unis d'Amérique : Society for industrial et applied mathematics (SIAM), 1978 (cf. p. 154, 158).
- [267] *OpenStreetMap*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://www.openstreetmap.org> (cf. p. 154).
- [268] Geoff Boeing. « OSMnx – New Methods for Acquiring, Constructing, Analyzing, and Visualizing Complex Street Networks ». In : *Computers, Environment and Urban Systems* 65 (2017), p. 126-139 (cf. p. 154).
- [269] Aric Hagberg, Pieter Swart et Daniel S Chult. *Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX*. Los Alamos, États-Unis d'Amérique, 2008 (cf. p. 154).
- [270] Gabor Csardi, Tamas Nepusz *et al.* « The igraph software package for complex network research ». In : *InterJournal, Complex Systems* 1695.5 (2006), p. 1-9 (cf. p. 154).
- [271] Vincent Verbavatz. *Code source Gitlab*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : <https://gitlab.iscpif.fr/vverbavatz/digraphs> (cf. p. 154).
- [272] Alec Kirkley *et al.* « From the betweenness centrality in street networks to structural invariants in random planar graphs ». In : *Nature Communications* 9.1 (2018), p. 1-12 (cf. p. 157).
- [273] Tomasz Łuczak. « The phase transition in the evolution of random digraphs ». In : *Journal of graph theory* 14.2 (1990), p. 217-223 (cf. p. 160).
- [274] Mark E. Newman, Steven H. Strogatz et Duncan Watts. « Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications ». In : *Physical Review E* 64 (2001), p. 026118 (cf. p. 160).
- [275] Nehemia Schwartz *et al.* « Percolation in directed scale-free networks ». In : *Physical Review E* 66 (2002), p. 015104 (cf. p. 160, 164).

- [276] Sergey N. Dorogovtsev, José F.F. Mendes et Alexander N. Samukhin. « Giant strongly connected component of directed networks ». In : *Physical Review E* 64 (2001), p. 025101 (cf. p. 160).
- [277] Marian Bogunà et M. Ángeles Serrano. « Generalized percolation in random directed networks ». In : *Physical Review E* 72 (2005), p. 016106 (cf. p. 160).
- [278] Ginestra Bianconi, Natali Gulbahce et Adilson E. Motter. « Local structure of directed networks ». In : *Physical Review Letters* 100 (2008), p. 118701 (cf. p. 160).
- [279] Paul Erdős et Alfréd Rényi. « On the evolution of random graphs ». In : *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 5 (1960), p. 17-60 (cf. p. 160).
- [280] Sergey P. Obukhov. « The problem of directed percolation ». In : *Physica A* 101 (1980), p. 145-155 (cf. p. 160).
- [281] Simon R. Broadbent et John M. Hammersley. « Percolation processes : I. Crystals and mazes ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53 (1957) (cf. p. 160).
- [282] Sidney Redner. « Directed and diode percolation ». In : *Physical Review B* 25.5 (1982), p. 3242 (cf. p. 160).
- [283] Sidney Redner. « Exact exponent relations for random resistor-diode networks ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 15.12 (1982), p. L685 (cf. p. 160).
- [284] Sidney Redner. « Conductivity of random resistor-diode networks ». In : *Physical Review B* 25.9 (1982), p. 5646 (cf. p. 160).
- [285] Norio Inui *et al.* « Critical behavior of a random diode network ». In : *Physical Review E* 59.6 (1999), p. 6513 (cf. p. 160).
- [286] Hans-Karl Janssen et Olaf Stenull. « Random resistor-diode networks and the crossover from isotropic to directed percolation ». In : *Physical Review E* 62.3 (2000), p. 3173 (cf. p. 160).
- [287] Zongzheng Zhou *et al.* « Crossover from isotropic to directed percolation ». In : *Physical Review E* 86.2 (2012), p. 021102 (cf. p. 160, 165).
- [288] Aurelio W.T. De Noronha *et al.* « Percolation on an isotropically directed lattice ». In : *Physical Review E* 98.6 (2018), p. 062116 (cf. p. 160, 163, 165, 167).
- [289] Olaf Stenull et Hans-Karl Janssen. « Conductivity of continuum percolating systems ». In : *Physical Review E* 64.5 (2001), p. 056105 (cf. p. 160, 165).

- [290] Martin F. Sykes et John W. Essam. « Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions ». In : *Journal of Mathematical Physics* 5 (1964), p. 1117-1127 (cf. p. 162).
- [291] Harry Kesten. *Percolation Theory for Mathematicians*. Boston, États-Unis d'Amérique : Birkhäuser, 1982 (cf. p. 162).
- [292] Muhammad Sahimi. *Applications of Percolation Theory*. T. 1994. CRC Press (cf. p. 162).
- [293] Duncan S. Callaway *et al.* « Network robustness and fragility : Percolation on random graphs ». In : *Physical Review Letters* 85 (2000), p. 5468 (cf. p. 162).
- [294] Kim Christensen et Nicholas R. Moloney. *Complexity and Criticality*. World Scientific Publishing Company, 2005 (cf. p. 162, 165).
- [295] Contributeurs Wikipedia. *List of Metro Systems*. 2020 (en ligne le 10/05/2022). URL : https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_metro_systems (cf. p. 162, 167).
- [296] Dietrich Stauffer et Amnon Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, 2018 (cf. p. 162).
- [297] Fumiko Yonezawa, Shoichi Sakamoto et Motoo Hori. « Percolation in two-dimensional lattices. A technique for the estimation of thresholds ». In : *Physical Review B* 40 (1989), p. 636 (cf. p. 162).
- [298] Iwan Jensen. « Low-density series expansions for directed percolation : I. A new efficient algorithm with applications to the square lattice ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 32 (1999), p. 5233 (cf. p. 167).
- [299] Youjin Deng et Robert M Ziff. « The elastic and directed percolation backbone ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* (2022) (cf. p. 167).
- [300] Pablo Jensen. *Pourquoi la société ne se laisse pas mettre en équations*. Média Diffusion, 2018 (cf. p. 171).
- [301] Francisco Aparecido Rodrigues. « Network centrality : an introduction ». In : *A Mathematical Modeling Approach from Nonlinear Dynamics to Complex Systems*. Springer, 2019, p. 177-196 (cf. p. 183).
- [302] Linton C. Freeman. « A set of measures of centrality based on betweenness ». In : *Sociometry* (1977), p. 35-41 (cf. p. 183).
- [303] Petter Holme. « Congestion and centrality in traffic flow on complex networks ». In : *Advances in Complex Systems* 6.02 (2003), p. 163-176 (cf. p. 183).

- [304] Amila Jayasinghe, Kazushi Sano et Hiroaki Nishiuchi. « Explaining traffic flow patterns using centrality measures ». In : *International Journal for Traffic and Transport Engineering* 5.2 (2015), p. 134-149 (cf. p. 183).
- [305] Aisan Kazerani et Stephan Winter. « Can betweenness centrality explain traffic flow ». In : *12th AGILE international conference on geographic information science*. 2009, p. 1-9 (cf. p. 183).
- [306] Silvia Gago, Jana C. Hurajová et Tomáš Madaras. « Notes on the betweenness centrality of a graph ». In : *Mathematica Slovaca* 62.1 (2012), p. 1-12 (cf. p. 183).
- [307] Alexander P. Giles, Orestis Georgiou et Carl P. Dettmann. « Betweenness centrality in dense random geometric networks ». In : *2015 IEEE International Conference on Communications (ICC)*. IEEE. 2015, p. 6450-6455 (cf. p. 186, 187, 189, 191, 194).
- [308] Luis A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge University Press, 2004 (cf. p. 187).
- [309] Ulrik Brandes. « A faster algorithm for betweenness centrality ». In : *Journal of Mathematical Sociology* 25.2 (2001), p. 163-177 (cf. p. 193).