



**HAL**  
open science

# Modélisation et commande des systèmes à retards contraints sous incertitudes

Berna Bou Farraa

► **To cite this version:**

Berna Bou Farraa. Modélisation et commande des systèmes à retards contraints sous incertitudes. Automatique / Robotique. Université de Nantes (UN), FRA., 2020. Français. NNT: . tel-03789804

**HAL Id: tel-03789804**

**<https://theses.hal.science/tel-03789804>**

Submitted on 27 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE NANTES  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Automatique, Productique et Robotique*

Par

**Berna BOU FARRAA**

## **Modélisation et commande des systèmes à retards contraints sous incertitudes**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 30 Octobre 2020  
Unité de recherche : UMR 6004 - Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Islam BOUSSAADA      Professeur IPSA, Laboratoire L2S, Gif-sur-Yvette  
Przemyslaw IGNACIUK      Professeur assistant, Politechnika Łódzka, Pologne

### **Composition du Jury :**

Président :	Alexandre DOLGUI	
Examineurs :	Maria DI MASCOLO	Directrice de Recherche CNRS, Laboratoire G-SCOP, Grenoble INP
	Alexandre DOLGUI	Professeur de IMT Atlantique, Laboratoire LS2N, Nantes
Directeur de thèse :	Jean Jacques LOISEAU	Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire LS2N, Nantes
Encadrant de thèse :	Rosa ABBOU	Maître de Conférences IUT de Nantes, Laboratoire LS2N, Nantes



---

*« Un, n'oubliez pas de regarder les étoiles et non pas à vos pieds. Deux, n'abandonnez jamais le travail. Le travail vous donne un sens et un but et la vie est vide sans lui. Troisièmement, si vous avez la chance de trouver l'amour, souvenez-vous qu'il est là et ne le jetez pas. »*

**Stephen Hawking**

---



# REMERCIEMENTS

---

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs professeurs et personnes qui, par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques, ont guidé mes réflexions durant mes recherches. À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de thèse Jean Jacques Loiseau et mon encadrante Rosa Abbou avec lesquels j'ai eu la chance et le plaisir de travailler. Je leur suis reconnaissante pour m'avoir suivie pendant plus de quatre années de ma vie, dès mon arrivée en Master à l'École Centrale de Nantes, tout en m'accordant une large indépendance de travail. Je tiens à remercier spécialement mon directeur pour son intérêt, sa patience, sa grande disponibilité, ses judicieux conseils, et surtout ses connaissances techniques dans les domaines de recherche, qui ont présenté les outils méthodologiques indispensables à la conduite de mes contributions théoriques. Je remercie également mon encadrante, qui a partagé ses connaissances et expériences dans le domaine de la logistique et de la productique, tout en m'apportant son soutien, sa bienveillance, et sa confiance qu'elle a montré à maintes reprises.

Je présente toute ma reconnaissance envers chacun des membres du Jury de thèse. Je remercie vivement mes rapporteurs, pour le temps consacré à l'étude de ce mémoire et leurs intéressantes remarques qui m'ont permises d'améliorer sa rigueur.

Le travail de ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe *Pilotage des Systèmes Industriels* du *Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes*. À l'occasion, je remercie Olivier Cardin, le responsable de l'équipe, et Claude Jard, le directeur du laboratoire, pour leur accueil chaleureux et leur support sur le plan administratif et scientifique.

Je désire aussi remercier les thésards qui sont devenus plus que des collègues de travail. Je joins à ces remerciements l'ensemble des personnels du LS2N, particulièrement à Virginie Dupont, Annie Boilot et Christine Bouthet pour leur sympathie sincère.

Enfin, je tiens à témoigner toute ma gratitude à mes très chers parents, Laura et Ayoub, pour leurs attentions qui m'ont accompagnée tout au long de ces années. Je remercie ma sœur jumelle Dania et mon frère Dany pour leurs encouragements, et mon fiancé Badwi, pour son soutien inconditionnel et sa confiance indéfectible dans mes choix.



# TABLE DES MATIÈRES

---

Notations	17
<b>Introduction générale</b>	<b>21</b>
<b>I Positionnement et problématique de la thèse</b>	<b>27</b>
<b>1 Contexte et méthodologie de recherche</b>	<b>29</b>
1.1 Introduction . . . . .	29
1.2 Sur les systèmes logistiques . . . . .	30
1.3 Enjeux de la gestion des systèmes logistiques . . . . .	33
1.3.1 Indicateurs de performance . . . . .	33
1.3.2 Facteurs de variabilité et effet "Bullwhip" . . . . .	34
1.4 Étude des systèmes logistiques . . . . .	35
1.4.1 Modèles et outils de modélisation . . . . .	35
1.4.2 Modèles analytiques des systèmes logistiques . . . . .	37
1.4.3 Méthodes de gestion des stocks . . . . .	39
1.5 Modèle du système logistique basique . . . . .	41
1.5.1 Dynamique du stock dédiée aux produits périssables . . . . .	41
1.5.2 Spécifications des systèmes contraints . . . . .	43
1.6 Modèle général des réseaux logistiques . . . . .	44
1.6.1 Équation fondamentale de la dynamique des stocks . . . . .	44
1.6.2 Spécifications et contraintes de fonctionnement . . . . .	46
1.7 Approche de commande des systèmes contraints . . . . .	47
1.8 Conclusion du chapitre . . . . .	49
<b>2 Outils mathématiques de base</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction . . . . .	51
2.2 Modélisation des systèmes à retards . . . . .	52

2.3	Stabilité des systèmes à retards . . . . .	54
2.3.1	Stabilité Entrée-Sortie . . . . .	54
2.3.2	Stabilisation par prédiction d'état . . . . .	57
2.4	Calcul des bornes pour un système Entrée-Sortie monovariante . . . . .	60
2.5	Bornes du système Entrée-sortie multivariante . . . . .	62
2.5.1	Polyèdres et ensembles convexes . . . . .	62
2.5.2	Calcul des bornes pour un système multivariante . . . . .	64
2.6	Principe d'invariance et invariance polyédrale . . . . .	66
2.6.1	Conditions d'invariance du système monovariante . . . . .	66
2.6.2	Propriétés d'invariance polyédrale . . . . .	69
2.7	Méthode d'élimination de Fourier Motzkin . . . . .	71
2.8	Approche structurelle . . . . .	72
	<b>Conclusion et objectifs de la thèse</b>	<b>75</b>
	<b>II Commande par invariance d'une classe de systèmes de convolution</b>	<b>77</b>
<b>3</b>	<b>Pilotage du système logistique en configuration réseau</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	79
3.2	Description du modèle multivariante . . . . .	80
3.3	Passage du modèle retardé au modèle réduit . . . . .	82
3.4	Intervalle multivariante . . . . .	83
3.5	Conditions de $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée contrôlée du système réduit . . . . .	85
3.5.1	Caractérisation du polytope invariant . . . . .	86
3.5.2	Paramétrisation de la loi de commande . . . . .	89
3.5.3	Complexité algorithmique de résolution . . . . .	90
3.6	Conditions d'admissibilité du système à retards . . . . .	91
3.7	Discussion de l'étude . . . . .	94
3.8	Conclusion du chapitre . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Application des résultats sur une chaîne logistique</b>	<b>98</b>
4.1	Introduction . . . . .	98
4.2	Système d'étude . . . . .	99
4.3	Du système réduit au système découplé . . . . .	100

---

4.4	Construction des polytopes . . . . .	102
4.5	Structure de commande admissible . . . . .	104
	<b>Conclusion partielle</b>	<b>111</b>
	<b>III Pilotage du système logistique élémentaire</b>	<b>113</b>
<b>5</b>	<b>Solution de pilotage par principe d'invariance</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	115
5.2	Stratégie de commande . . . . .	116
5.2.1	Solution par prédiction d'état . . . . .	116
5.2.2	Loi de commande de type bang-bang . . . . .	117
5.3	Conditions de $\mathcal{D}$ -invariance . . . . .	119
5.4	Conditions d'admissibilité de la loi de commande . . . . .	121
5.4.1	Conditions nécessaires et suffisantes pour le régime établi . . . . .	124
5.4.2	Phase d'initialisation . . . . .	129
5.5	Exemple de simulation . . . . .	132
5.6	Optimisation de la loi de commande . . . . .	136
5.7	Conclusion du chapitre . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Solution de pilotage des flux par une commande linéaire</b>	<b>140</b>
6.1	Introduction . . . . .	140
6.2	Structure de la loi de commande linéaire . . . . .	141
6.3	Dynamique des flux d'entrée et de sortie . . . . .	142
6.4	Les bornes atteignables par les variables des flux . . . . .	145
6.5	Ensemble de conditions initiales admissibles . . . . .	147
6.6	Mise en œuvre de la loi de commande . . . . .	151
6.6.1	Conditions admissibles de la loi de commande . . . . .	151
6.6.2	Paramètres de la loi de commande . . . . .	153
6.7	Comparaison des lois de commande Bang-Bang et linéaire . . . . .	156
6.8	Exemple de simulation . . . . .	158
	<b>Conclusion partielle</b>	<b>161</b>

<b>IV Étude de robustesse de la commande linéaire vis-à-vis d'incertitudes</b>	<b>163</b>
<b>7 Stabilité de la commande linéaire</b>	<b>165</b>
7.1 Introduction . . . . .	165
7.2 Structure de commande . . . . .	166
7.3 Transfert en boucle fermée . . . . .	167
7.4 Conditions de stabilité robuste . . . . .	169
7.5 Choix des paramètres de commande . . . . .	174
7.6 Impact des incertitudes sur le dimensionnement du système logistique . . .	178
7.7 Conclusion du chapitre . . . . .	180
<b>8 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le retard</b>	<b>181</b>
8.1 Introduction . . . . .	181
8.2 Structure de prédiction : problème et solution . . . . .	182
8.3 Dynamique de la prédiction du stock . . . . .	184
8.4 Bornes atteignables des variables entrée-sortie . . . . .	186
8.5 Conditions d'admissibilité de la loi de commande . . . . .	188
8.6 Étude de cas pour un retard exact . . . . .	193
8.7 Exemple de simulation . . . . .	195
8.8 Conclusion du chapitre . . . . .	198
<b>9 Robustesse vis-à-vis d'incertitude sur le facteur de perte</b>	<b>199</b>
9.1 Introduction . . . . .	199
9.2 Stratégie de commande . . . . .	200
9.3 Propriétés de la structure de prédiction . . . . .	201
9.4 Bornes atteignables des flux entrée-sortie . . . . .	204
9.5 Loi de commande admissible . . . . .	205
9.6 Exemple de simulation . . . . .	211
9.7 Conclusion du chapitre . . . . .	213

<b>Conclusion générale</b>	<b>215</b>
<b>Annexe</b>	<b>219</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>225</b>



# TABLE DES FIGURES

---

1.1	Structure de systèmes logistiques . . . . .	32
1.2	Classification de systèmes logistiques [Beamon (1998)] . . . . .	36
1.3	Classification de systèmes logistiques [Min et Zhou (2002)] . . . . .	37
1.4	Modèles analytiques des systèmes logistiques [Riddals <i>et al.</i> (2000)] . . . . .	38
3.1	Exemple d'un réseau logistique de dimension $n = 4$ . . . . .	81
4.1	Exemple d'une chaîne logistique de dimension $n = 2$ . . . . .	99
4.2	Polytope $\mathcal{P}_w$ du système découplé . . . . .	102
4.3	Polytope $\mathcal{P}_z$ du système découplé . . . . .	103
5.1	Automate à états finis de la loi de commande bang-bang . . . . .	118
5.2	Processus d'hystérésis de la loi de commande bang-bang . . . . .	119
5.3	Ensemble invariant dans l'espace de commande . . . . .	127
5.4	Fonction illustrant la demande des clients pour l'exemple 5.5 . . . . .	134
5.5	Résultats de simulation pour l'exemple 5.5 . . . . .	135
5.6	Automate à états finis de la commande optimale . . . . .	137
5.7	Cycle de la commande optimale . . . . .	137
6.1	Schéma-bloc du système en boucle fermée . . . . .	142
6.2	Structure de la loi de commande affine . . . . .	158
6.3	Résultats de simulation pour l'exemple 6.8 . . . . .	159
7.1	Structure du système en boucle fermée . . . . .	169
7.2	Zones admissibles en fonction du retard . . . . .	179
7.3	Zones admissibles en fonction du taux de perte . . . . .	179
8.1	Résultats de simulation pour l'exemple 8.7 . . . . .	197
9.1	Résultats de simulation pour l'exemple 9.6 . . . . .	212



# LISTE DES TABLEAUX

---

3.1	Complexité algorithmique selon les dimensions des matrices $F$ et $M$ . . . . .	90
5.1	Paramètres du système pour l'exemple 5.5 . . . . .	133
5.2	Paramètres de commande pour l'exemple 5.5 . . . . .	133
8.1	Paramètres du système pour l'exemple 8.7 . . . . .	195
8.2	Paramètres de commande pour l'exemple 8.7 . . . . .	195



# NOTATIONS

---

## Typographie

Les expressions de langues étrangères ou les mots que nous voulons souligner sont indiqués *en italiques*.

Les notations « entre guillemets » permettent d'encadrer les citations, ainsi que les expressions utilisées dans un contexte inhabituel, que l'on désire souligner ou nuancer.

□ : fin d'une démonstration.

:= : égal par définition.

⇔ : relation d'équivalence.

## Ensemble et nombres

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^-$  : ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$\mathbb{N}$  : ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.

Re : partie réelle d'un nombre complexe.

Im : partie imaginaire d'un nombre complexe.

$j$  : nombre complexe imaginaire pur ( $j^2 = -1$ ).

$[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

$]a, b[$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

$[a, b[$  : intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

$|\cdot|$  : valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\|\cdot\|$  : norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

$t \in \mathbb{R}^+$  : variable temporelle.

$s$  : variable de Laplace.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  : dérivée de la variable  $x$  par rapport au temps.

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  : dérivée seconde de la variable  $x$  par rapport au temps.

## Vecteurs

$x \in \mathbb{R}^n$  : vecteur de composante  $x_i$  pour  $i = \{1, \dots, n\}$ .

$x^T$  : transposé du vecteur  $x$ .

## Matrices

$A^T$  : transposée de la matrice  $A$ .

$\det(A)$  : déterminant de la matrice  $A$ .

$A_{r_i}$  :  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ .

$A_{c_j}$  :  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ .

$I_n$  : matrice identité de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Fonctions

min : fonction minimum.

max : fonction maximum.

Conv : fonction convexe.

lim : limite d'une fonction.

\* : opérateur du produit de convolution.

$\hat{x}$  : transformée de Laplace de  $x$ .

$e^x$  : fonction exponentielle de  $x$ .

$\log(x)$  : fonction logarithme décimal de  $x$ .

sign( $x$ ) : signe de  $x$ .

---

*« Si vous mettez votre cœur dans la réalisation de vos projets, si la passion vous dévore et que rien ne vous arrête, succès il y aura. »*

**Mathieu Thomas**

---



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

La gestion des systèmes logistiques consiste à piloter l'ensemble des organisations et installations qui concourent à la réalisation et à la mise à disposition des produits. Elle vise d'une part, à fabriquer les articles en s'appuyant sur les informations issues des prévisions de la demande des clients et d'autre part, à minimiser les différents coûts d'approvisionnement, de production, de stockage et de livraison. Le domaine de la gestion des réseaux logistiques a subi une évolution importante ces dernières années. Les industriels cherchent en priorité à optimiser la satisfaction de leur clientèle, et il leur est nécessaire d'adopter une stratégie de management et de commande appropriée pour atteindre cet objectif.

La commande des systèmes logistiques est un domaine de recherche qui explore les liens entre la théorie de la commande des systèmes, et le management des systèmes logistiques de production. Ce domaine de recherche a pour objectif essentiel la modélisation et la formalisation des phénomènes complexes qui régissent la dynamique de ces systèmes, afin de pouvoir mettre en place des stratégies de gestion, qui permettent de maîtriser et de contrôler ces phénomènes dynamiques et leurs effets. Dans ce contexte, cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche, tout en proposant des politiques de gestion qui permettent de réguler la production et le taux d'approvisionnement, de sorte que le système de production soit capable de répondre aux exigences en matière de stock, et de fournir un bon niveau de service pour les demandes clients.

Les prémisses de la théorie des systèmes dynamiques pour l'étude des systèmes logistiques qui nous intéressent, remontent aux travaux de Simon [Simon (1952)], qui a proposé d'utiliser la transformée de Laplace pour analyser la dynamique d'un système manufacturier, en se basant sur les développements dans la théorie des servomécanismes. Ensuite, les travaux de Forrester [Forrester (1958)], ont mené à des résultats empiriques de « l'effet Bullwhip », développé dans le paragraphe 1.3.2, et ont participé à fonder le corpus des connaissances sur lesquels repose la logistique moderne. Après, de nombreux auteurs [Hadley et Whitin (1963), Towill (1982), Silver et Peterson (1985), Edghill et Towill (1989), Sterman (1989)] ont repris ces études, pour modéliser des chaînes logistiques et des réseaux logistiques à configuration plus complexe, en s'inspirant de la théorie des réseaux, et en utilisant des schémas de principe pour concevoir des lois de commande basées sur

des structures par rétroaction.

La dynamique retardée est un aspect longtemps négligé dans l'étude des systèmes en général, dû au fait que l'analyse des systèmes à retard est assez complexe et nécessite des méthodes spécifiques. La théorie de la commande des systèmes à retards est pour cette raison un domaine de recherche très actif qui ne cesse de s'enrichir. Dans ce contexte, un outil fondamental de prédiction d'état est introduit [Manitius et Olbrot (1979)], pour la stabilisation des systèmes retardés. Dans le domaine de la logistique, les retards sont présents partout et sont liés essentiellement aux mouvements des différents flux dans un système logistique. Ils caractérisent les délais nécessaires aux différents processus logistiques de production, d'achat, de prise de décision, d'approvisionnement et de livraison. Plusieurs travaux ont abordé à l'étude des systèmes retardés au moyen de l'approximation des retards, qui est souvent entachée d'erreurs. Au début des années 2000, Riddalls et ses coauteurs [Riddalls *et al.* (2000)] ont été les premiers à prendre en compte le retard de façon exacte, pour la commande des systèmes logistiques. Leur étude est analytique, et est basée sur l'analyse des équations différentielles qui modélisent le système. Ensuite, les travaux de Sipahi et Delice [Sipahi et Delice (2010)] ont généralisé l'étude en considérant plusieurs retards, et en utilisant des approches numériques pour l'analyse des propriétés dynamiques et la vérification de stabilité du système.

## Positionnement du travail

Dans notre travail de recherche, nous traitons les cas d'une classe de problèmes très importants dans la gestion des flux dans les systèmes logistiques à retards, c'est la classe des produits périssables. Nous pouvons citer plusieurs exemples dans ce sens tels que les produits alimentaires, les produits médicaux ayant des réactifs et le carbone utilisé dans l'industrie aéronautique. Dans un premier temps, nous avons considéré un modèle basé sur la dynamique des flux d'un système logistique élémentaire, composé d'une unité de production et d'une unité de stockage, en utilisant une équation dite équation fondamentale du stock exprimée sous la forme suivante :

$$\dot{y}(t) = -\sigma y(t) + u(t - \theta) - d(t).$$

Pour ce modèle,  $y(t)$  représente le niveau du stock,  $u(t)$  la commande appliquée au système pour réguler les ordres de production, et  $d(t)$  est la demande à laquelle doit répondre le système. Dans cette équation, le retard  $\theta$  représente le temps nécessaire pour compléter le

processus de production, et  $\sigma$  représente le taux de pertes de stockage due aux produits de nature périssable. Le système ainsi représenté, est un système monovariante à retard sur l'entrée.

Dans un deuxième temps, nous étendons le modèle du système basique, pour étudier le système logistique global, qui est constitué d'un ensemble d'entités interdépendantes, chacune en charge de suivre une activité précise de production et de stockage. Nous parlons alors de réseaux logistiques et de chaînes logistiques. L'interconnexion entre les différents nœuds, dont chacun représente un système logistique élémentaire, conduit au modèle général décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + \sum_{k=1}^h B_k u(t - \theta_k) - B_0 u(t) - Ed(t).$$

Pour ce système, les variables  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $d(t)$  sont, des vecteurs de dimension appropriée, qui représentent respectivement, les niveaux de stockage de chaque nœud, les ordres de production instantanés entre les différents entités, et le flux de la demande externe des clients. Les ordres de production internes sont soumis à des retards  $\theta_k$  pour  $k = 1$  à  $h$ , alors que les pertes sur les niveaux de stockage sont modélisées par la matrice  $A$ . Le système ainsi représenté, est un système multivariante à retards multiples sur l'entrée.

Ces variables ont des caractéristiques particulières, qui n'apparaissent pas dans les travaux susmentionnés, et qui sont évoquées dans les travaux [Moussaoui *et al.* (2017), Abbou *et al.* (2017)]. Une première particularité est que ces variables, qui sont en fait des variables de flux, représentent des grandeurs physiques qui ne prennent que des valeurs réelles positives. La seconde particularité est que la dynamique des différents flux dans un système logistique est en réalité limitée. Pour être précis, le stock est une ressource finie, et l'unité de production a aussi une capacité de production finie liée aux ressources de production utilisées. Ces particularités forment des contraintes de positivité et de capacité limitée, que nous intégrons lors de la modélisation des procédés et de la conception de la commande de ces systèmes.

Notre travail de recherche s'est porté alors sur la thématique principale de la commande des systèmes à retards contraints. Dans ce contexte, les modèles formalisés du problème de gestion des stocks, sont les plus adéquats pour nous permettre de modéliser les mécanismes et les interactions présents dans les systèmes logistiques, tout en considérant les retards de production, les pertes de stockage, les incertitudes sur la demande et les contraintes de positivité et de capacité. Pour répondre à ces attentes, nous avons considéré le système

logistique comme un système Entrée-Sortie, dont la sortie est  $y(t)$ , l'entrée de commande est  $u(t)$ , et l'entrée de perturbation est la demande  $d(t)$ . Ce formalisme des systèmes Entrée-Sortie, présente des propriétés utiles d'une part pour étudier la stabilité au sens BIBO ou Entrée Bornée Sortie Bornée [Desoer et Vidyasagar (1975)], et d'autre part, pour la vérification des contraintes par des méthodes plus poussées, liée aux calculs des bornes et au principe d'invariance.

## Contributions de la recherche

Après avoir introduit dans le chapitre 1 de la partie I, les principaux concepts et définitions qui concernent les systèmes logistiques et leur gestion, nous présenterons la démarche méthodologique de recherche que nous utilisons dans notre travail, ainsi que la description détaillée des modèles utilisés. Nous rappelons ensuite dans le chapitre 2, les méthodes et les outils de base dont nous aurons besoin pour l'étude des systèmes à retards contraints, tels que le principe de stabilisation par prédiction pour les systèmes retardés, et les applications qui en découlent concernant l'invariance d'ensembles convexes.

Pour répondre à la problématique de la commande de nos systèmes logistiques en présence de retards sur l'entrée, nous traitons d'abord dans la partie II chapitre 3, une approche très générale pour le système logistique en réseaux. Vu la présence de multiples retards quelconques, nous appliquons le principe de prédiction d'état, afin de compenser les effets des retards. Ainsi, nous proposons pour le modèle réduit obtenu, une nouvelle caractérisation de la propriété d'invariance de polytopes. Cette formalisation est une version explicite des conditions d'invariance polyédrale, obtenues de la littérature [Dorea et Hennet (1999), Blanchini *et al.* (1999)]. Elle permet la vérification des contraintes polyédrales convexes du système multivariable. Ensuite, cette étude a été appliquée dans le chapitre 4, au cas d'une chaîne logistique qui constitue une application intéressante en logistique, afin d'analyser les performances obtenues en ce qui concerne le respect des contraintes. Dans ces deux cas, pour les systèmes en configuration réseau ou en configuration cascade, une complexité algorithmique empêche la résolution du problème de commande. De plus, une difficulté ensembliste empêche la construction des ensembles invariants, ce qui aboutit à des conditions suffisantes pour l'existence d'une loi de commande admissible. À ce niveau, deux questions se posent. La première porte sur la possibilité d'améliorer les résultats obtenus en proposant des solutions de pilotage plus pratiques, et la deuxième concerne la sensibilité des stratégies de commande, face aux incertitudes et aux variations

des paramètres du système. Dans ce sens, ces deux aspects sont développés pour le système logistique élémentaire à retard pur, dans les parties [III](#) et [IV](#) respectivement.

Dans la partie [III](#), nous proposons de mettre en œuvre le principe de prédiction exacte afin de compenser les effets du retard présent dans la dynamique du système monovarié. Nous introduisons alors une commande bang-bang de type feedback-prédicteur dans le chapitre [5](#), et une autre commande linéaire du même type feedback-prédicteur dans le chapitre [6](#). Pour ces deux études, nous avons adopté la méthodologie de conception de commande de Karcanias [[Karcanias \(1994\)](#)], qui permet de considérer la question d'existence et de réalisation de contrôleurs, et celle de conception des systèmes contrôlés. Ainsi, les contributions de cette partie se situent sur un premier plan théorique général, et sur un second plan applicatif au pilotage des systèmes logistiques élémentaires. Sur le plan théorique, notre première contribution est alors de décrire des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance d'ensembles polyédraux et d'ensembles convexes, pour la réalisation des structures de commande contraintes. Une seconde contribution revient à présenter une méthode de calcul de bornes pour les systèmes Entrée-Sortie de la classe  $\mathcal{A}$  [[Desoer et Vidyasagar \(1975\)](#)], ce qui permet de formuler des résultats exacts pour suivre l'évolution instantanée de la sortie dès la phase d'initialisation du système. Au niveau de l'application aux systèmes logistiques, l'objectif des deux commandes proposées est de piloter le système de façon à répondre à toute demande arbitraire et bornée, sans provoquer de rupture ou de dépassement sur le niveau du stock, ni de causer de congestion dans les ressources de production. En appliquant les conditions d'invariance développées dans le chapitre [5](#), et en utilisant les résultats de calcul de bornes que nous proposons dans le chapitre [6](#), nous formulons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'admissibilité de systèmes de pilotage proposés pour la phase transitoire et le régime établi à la fois.

La dernière partie [IV](#) est dédiée à l'analyse de robustesse du système logistique élémentaire piloté, vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres intrinsèques du système. Une première étude développée a pour objectif de quantifier l'impact des incertitudes du retard sur les performances du système contrôlé. En effet, nous appliquons la stratégie de commande affine par feedback-prédicteur, basée sur une estimation du retard incertain. La première contribution de cette étude revient à fournir dans le chapitre [7](#), des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une loi de commande robuste. En particulier, nous déterminons l'écart de déviation du retard et le choix des paramètres de commande qui garantissent la stabilité du système. La seconde contribution développée dans le chapitre

8, concerne la méthodologie de conception de la loi de commande robuste, de façon à respecter les contraintes auquel le système est soumis. Cette dernière étude est complétée dans le chapitre 9, où l'on considère une incertitude sur le taux de perte. Des conditions, comparables à celles obtenues dans le cas d'incertitudes sur la valeur du retard, sont obtenues afin de garantir le respect des contraintes du système.

Ces travaux ont fait régulièrement l'objet de communications dans des conférences internationales du domaine, notamment le congrès mondial de l'*IFAC* en 2020 [Bou Farraa *et al.* (2020a)], la conférence *IFAC MIM* en 2019 [Bou Farraa *et al.* (2019)], et *IFAC Workshop TDS* en 2018 [Bou Farraa *et al.* (2018)]. Ces résultats forment également la base d'un chapitre d'ouvrage prochainement publié dans la collection *Advances in Delays and Dynamics* de Springer [Bou Farraa *et al.* (2020b)], et un article en deuxième phase de révision, soumis au journal *Systems and Control Letters*.

PREMIÈRE PARTIE

# Positionnement et problématique de la thèse

---

## Introduction

La partie I de ce rapport est dédiée à la présentation de la problématique de recherche développée dans ce rapport de thèse. Ces travaux portent sur l'étude de la dynamique des systèmes logistiques. Nous nous intéressons en particulier à l'impact des retards et des contraintes de limitation qui pourraient affecter ces systèmes. Dans cette direction, nos études comportent donc deux grands axes, qui sont les systèmes logistiques d'un côté, et les systèmes à retards contraints de l'autre coté.

Le chapitre 1 qui suit, englobe les aspects liés aux systèmes logistiques que nous considérons, tels que les notions de gestion des stocks, et les outils de modélisation des systèmes logistiques existants dans la littérature. Après compréhension des concepts de base, le premier axe concerne la modélisation du système logistique d'un point de vue automatique, que ce soit par un système logistique élémentaire ou par un réseau logistique. En effet, nous verrons qu'il est possible de se ramener aux modèles, très généraux, qui prennent en considération les pertes de stockage et les contraintes structurelles des différentes ressources.

Le second axe concerne l'élaboration de la commande du système. Cette commande assure les fonctions de gestion de production, par le biais de gestion de stock. Nous ferons alors appel à des techniques de stabilisation des systèmes à retards, et des méthodes de commandes contraintes pour garantir la stabilité du système et le respect de ses contraintes. Cela nous mène au chapitre 2, qui aborde les outils mathématiques de base des systèmes à retards contraints.

# CONTEXTE ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

---

## Table des matières

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>29</b>
<b>1.2</b>	<b>Sur les systèmes logistiques</b>	<b>30</b>
<b>1.3</b>	<b>Enjeux de la gestion des systèmes logistiques</b>	<b>33</b>
1.3.1	Indicateurs de performance	33
1.3.2	Facteurs de variabilité et effet "Bullwhip"	34
<b>1.4</b>	<b>Étude des systèmes logistiques</b>	<b>35</b>
1.4.1	Modèles et outils de modélisation	35
1.4.2	Modèles analytiques des systèmes logistiques	37
1.4.3	Méthodes de gestion des stocks	39
<b>1.5</b>	<b>Modèle du système logistique basique</b>	<b>41</b>
1.5.1	Dynamique du stock dédiée aux produits périssables	41
1.5.2	Spécifications des systèmes contraints	43
<b>1.6</b>	<b>Modèle général des réseaux logistiques</b>	<b>44</b>
1.6.1	Équation fondamentale de la dynamique des stocks	44
1.6.2	Spécifications et contraintes de fonctionnement	46
<b>1.7</b>	<b>Approche de commande des systèmes contraints</b>	<b>47</b>
<b>1.8</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>49</b>

---

## 1.1 Introduction

Le chapitre 1 de ce rapport est consacré à la présentation du contexte général et de la méthodologie de recherche liée aux systèmes logistiques que nous considérons, et qui

s'organise alors selon trois niveaux principaux. Dans un premier temps, nous commençons par définir les notions de gestion et de systèmes logistiques dans la section 1.2, puis nous verrons dans la section 1.3 les enjeux et les objectifs du problème de gestion, ainsi que les facteurs de variabilité des systèmes logistiques.

En second lieu, nous présentons un état de l'art riche des études théoriques et industrielles existantes dans la section 1.4, afin de mieux cerner les travaux et les outils de modélisation des systèmes logistiques. Nous nous intéressons en particulier dans la section 1.4.3, aux modèles analytiques de gestion des stocks, qui représentent la trame de départ de nos travaux de recherche.

Après avoir défini le contexte général de recherche, la dernière partie de ce chapitre concerne la méthodologie de résolution pour répondre à la problématique de pilotage des systèmes logistiques et de gestion des stocks, en présence des contraintes de positivité et de saturation, des retards purs et des pertes de stockage. La section 1.5 est dédiée à la présentation du système logistique basique, qui servira comme modèle de base à chaque entité du système logistique. Ensuite, ce modèle est étendu dans la section 1.6, pour inclure une classe générale de systèmes logistiques en configuration réseau. Enfin, la section 1.7 résume la démarche de conception et de contrôle des systèmes, que nous avons abordé dans ce rapport, pour résoudre notre problème de gestion de stock.

## 1.2 Sur les systèmes logistiques

La notion de système ou de chaîne logistique remonte au début des années 50 où le concept de la logistique était limité au domaine militaire. Depuis le 18<sup>ème</sup> siècle, la logistique fut appliquée dans le milieu industriel pour la manutention et le transport des marchandises [Journet (1997)]. En effet, Archimède était le premier scientifique qui a évoqué le problème de la logistique, en cherchant à optimiser le déplacement des troupes de masses énormes d'infanterie, d'éléphants et de cavalerie. Ce concept n'a cessé d'évoluer, en recouvrant aussi bien les opérations d'achat et d'approvisionnement, que les fonctions de gestion commerciale et de distribution. Cette évolution s'est naturellement accompagnée de différentes définitions des systèmes et chaînes logistiques.

Notre analyse de cette littérature montre qu'un système logistique se définit par le processus d'obtention d'un produit fini ainsi que les différents acteurs en charge de ce processus. En effet, selon le « SCC »<sup>1</sup>, un système logistique peut être défini comme étant « *la suite*

---

1. Supply Chain Council : un organisme à but non-lucratif, créé en 1996, dont le rôle est de développer des outils méthodologiques standardisés, pour l'amélioration et la certification de systèmes logistiques

*des étapes de production et de distribution d'un produit depuis les fournisseurs des fournisseurs du producteur jusqu'aux clients de ses clients* ». Cette définition met en avant le produit, de telle façon que le système logistique est perçu comme une succession de processus assurant les fonctions d'approvisionnement en matières premières, de transformation de ces matières en composants et produits finis, et de distribution de ces produits vers les clients finaux, sans distinction notable entre les entités en charge de ces opérations [Lee et Billington (1993)].

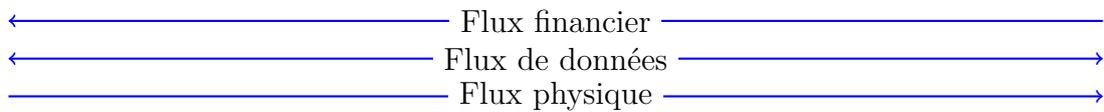
D'un autre point de vue, un système logistique peut être défini comme un système global d'entités, constitué de sous-traitants, de producteurs, de distributeurs, de détaillants, et de clients, entre lesquels s'échangent différents flux de matière et d'informations. Cette définition, qui conserve les activités liées à l'élaboration du produit, fait apparaître les entités comme acteurs majeurs du système global, et met en avant la notion de flux comme lien entre ces entités [Tayur *et al.* (1999)].

Les différentes définitions présentées, qui s'agissant d'amener un produit fini au consommateur final, donnent une vision générale du système logistique. Elles se situent à un niveau d'abstraction qui n'offre pas de détails sur la structuration des éléments qui composent le système, et les interactions qui gouvernent sa dynamique. Dans ce contexte, la structure des systèmes logistiques dépend essentiellement de la complexité du secteur d'activité, et des différents procédés de fabrication. Chaque entité du système logistique joue un rôle précis dans le processus global de l'obtention du produit fini. Ces entités, qui peuvent comporter soit des fournisseurs, des producteurs, des distributeurs, ou des consommateurs finaux, sont appelés maillons, échelons ou encore niveaux du système logistique. En effet, les différents échelons du système logistique sont reliés et interagissent entre eux moyennant un échange de trois types de flux : les flux physiques, les flux de données et les flux financiers.

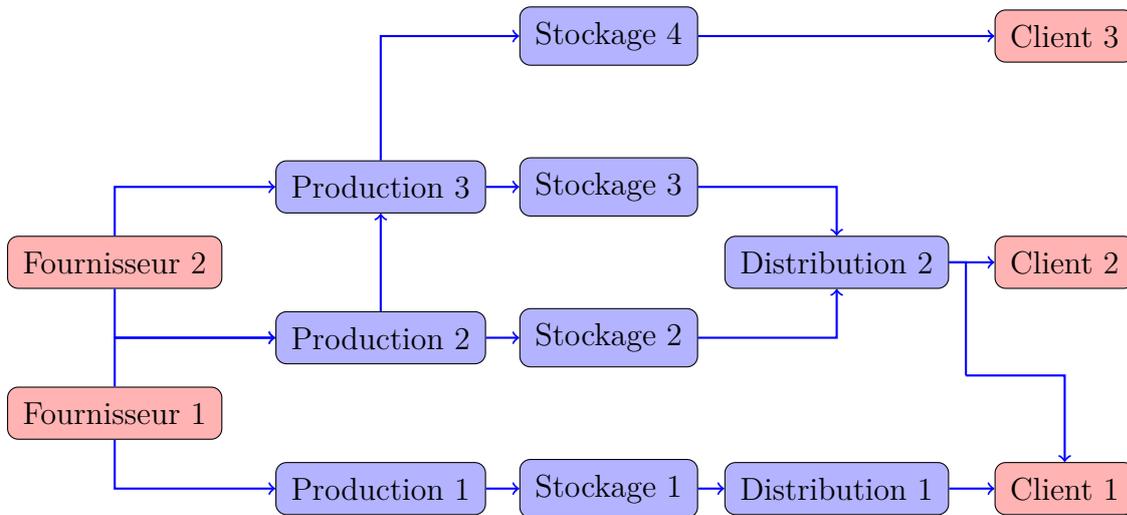
- Le flux physique, ou flux de matière, représente le cheminement de la matière physique dans le système logistique, et le traverse essentiellement des fournisseurs vers les clients, comme l'illustre la figure 1.1. Il comporte aussi bien les matières premières brutes que les composants et les encours, ainsi que les produits finis. Le mouvement de ce flux est gouverné par la succession des opérations de transformation ou de production, de stockage et de distribution des produits.
- Le flux de données englobe l'ensemble des données que s'échangent les différentes parties d'un système logistique, et qui se distinguent en deux sortes. Le flux informationnel comprend toutes les données commerciales concernant les commandes

passées par les clients, et les informations techniques de l'entreprise, telles que la capacité de production et de stockage. Quant aux flux décisionnels, ils résument les décisions prises par les centres de gestion, comme par exemple les ordres de production, d'approvisionnement et les consignes du stock.

- Le flux financier concerne toutes les transactions pécuniaires qui ont lieu au sein du système logistique. Ce flux traverse la chaîne essentiellement d'aval en amont, et se présente comme la contre-partie monétaire du flux physique. Dans le cadre de cette thèse, seuls les flux physiques et informationnels sont considérés.



(a) Structure en série



(b) Structure en réseau

FIGURE 1.1 – Structure de systèmes logistiques

De façon générale, les échelons du système logistique sont organisés selon deux grandes configurations : structure en série ou structure réseau comme l'illustre la figure ci-dessus. Une configuration en série, aussi dite en cascade, caractérise des échanges linéaires entre

les différents niveaux du système logistique. Dans ce cas, le produit passe successivement par différentes étapes de transformation. Dans une configuration en réseau, les échanges ou les interactions entre les maillons se font dans plusieurs directions. Cette structure se caractérise souvent par la présence de synchronisations, qui nécessitent une parfaite coordination des différents niveaux, et qui constitue un enjeu majeur dans la gestion de ces systèmes, comme nous le verrons dans la section suivante.

## 1.3 Enjeux de la gestion des systèmes logistiques

La gestion des systèmes logistiques consiste en un ensemble de management et d'optimisation visant à gérer et à coordonner toutes les entités du système logistique. Nous citons les méthodes de calcul des besoins, connues sous l'acronyme *MRP* pour *Material Requirements Planning*, les méthodes de gestion dite *Kanban* ou *juste à temps*, les politiques de gestion sur stock  $(S, s)$  et  $(Q, r)$ , et la politique connue sous l'acronyme *CONWIP* pour *Constant Work-In-Process*. Ces méthodes classiques de gestion développées dans la littérature portent essentiellement sur le pilotage des flux physiques des matières et des produits, à travers la maîtrise des différents processus logistiques tels que la production, l'approvisionnement, le stockage et le transport. Dans ce sens, l'objectif de chaque entreprise revient en premier temps à fixer ses indicateurs de performance, pour construire un système logistique qui lui permette d'augmenter les profits et de diminuer les pertes. Dans ce qui suit, nous citons les principaux indicateurs de performance fixés par les entreprises.

### 1.3.1 Indicateurs de performance

Pour la gestion d'un système logistique fiable, il convient de définir des outils d'analyse appropriés, pour mesurer de façon précise, l'efficacité et la performance du système. Ces mesures ou critères de performance peuvent être de natures qualitatives et quantitatives. Les mesures qualitatives ne sont pas numériquement mesurables, et englobent la satisfaction de la demande des clients, la flexibilité de la chaîne logistique en cas de fluctuation de la demande, ainsi que le degré de minimisation des pertes encourus par chaque entité du système. Quant aux mesures quantitatives, elles sont descriptibles numériquement, comme par exemple le taux de minimisation de coûts, la maximisation des ventes et des profits, et la stabilité du niveau de référence du stock.

Dans ce contexte, la maîtrise des stocks est un point essentiel. Le stock est en effet la

ressource critique car les autres indicateurs dépendent plus ou moins de sa dynamique d'évolution. La difficulté de la gestion des stocks réside dans le fait de garantir un taux de prestation le plus élevé possible, et d'avoir un coût de possession le plus faible possible. Le premier impose la nécessité d'avoir des stocks les plus réactifs pour répondre de façon idéale à la demande, ce qui présente un coût de détention conséquent et un risque de désuétude des marchandises stockées. En contre-partie, le second exige de minimiser les stocks au niveau le plus bas possible, le risque étant de ne pas pouvoir répondre à la demande ce qui explique le paradoxe. En effet, la gestion des systèmes logistiques vise à maintenir un équilibre entre les quantités stockées, nécessaires pour garantir un bon taux de service, et les coûts qui peuvent en être engendrés.

Dans les travaux de cette thèse, les enjeux et les objectifs globaux de gestion de systèmes logistiques portent sur la planification de la production et la gestion des stocks. Nous nous intéressons en particulier aux décisions de gestion de la production, afin de satisfaire les demandes des clients non connues et variables, et de maîtriser les niveaux de référence des stocks. Concrètement, nous proposons des solutions de configuration des ressources du système, à travers le dimensionnement des ressources de stockage et de production. Ces solutions peuvent être utilisées lors de la phase de conception des structures, pour déterminer les performances exigées telles que la stabilité du stock, la satisfaction des clients, et les profits économiques. En outre, il faut noter que toute variation de la demande finale peut engendrer des variations de plus en plus importantes à chaque niveau en amont du système logistique. Ce phénomène de propagation de variations, connu sous le nom de « *Bullwhip effect* », est introduit dans la section suivante.

### **1.3.2 Facteurs de variabilité et effet "Bullwhip"**

La complexité de la gestion du système logistique est appuyée par la présence d'incertitudes et des variations qui touchent le système avec des erreurs d'estimation et de transmission de données d'une part, et les pannes et autres aléas de production d'autre part. Les deux grands facteurs de variation sont principalement la demande du client, et les délais ou retards d'obtention du produit fini.

La demande du client est le point de départ de la tâche de gestion des systèmes logistiques. Plusieurs techniques d'estimation et de prévision de la demande sont utilisées pour prédire au mieux possible les changements du marché. Malgré cela, ces techniques de prévision échouent, et souvent le marché visé est instable car la demande est changeante et incertaine.

L'autre facteur qui est le délai, est présent intrinsèquement dans tous les processus logistiques, comme par exemple les délais des échanges d'information et de prise de décision, les retards de production et les temps de transport. Les retards ne peuvent être réduits au-deçà d'un temps donné nécessaire à l'exécution de ces opérations, et constituent alors un indicateur de performance pour le système logistique considéré. De même, la connaissance exacte de ces délais est une opération délicate et critique, puisqu'ils dépendent de facteurs extérieurs, tel que l'état des routes pour la distribution, le facteur humain dans la production et la décision, ainsi que les retards liés aux pannes et autres aléas rencontrés. Ces éléments et leur non prise en compte contribuent à l'apparition d'un phénomène connu sous le nom de « Bullwhip effect » ou « Effet Forrester », pouvant provoquer l'instabilité du système logistique. Cette appellation a été popularisée par [Lee *et al.* (1997)], mais elle remonte aux travaux [Forrester (1958), Forrester (1973)].

Ce phénomène correspond à l'amplification de la variation de la demande, et sa propagation le long d'une chaîne logistique, du client consommateur vers le fournisseur de matière première. Les oscillations croissantes propageant dans le sens inverse du flux physique illustré par la figure 1.1, entraînent une surproduction et donc un excès de stock, et par conséquent, pour éliminer ce surplus, les ordres de production sont revus à la baisse provoquant une nouvelle variation et ainsi de suite d'un échelon à un autre. Des travaux récents concernent les méthodes et outils de modélisation des systèmes logistiques, pour lutter contre ce problème typique [Wang et Disney (2016)]. En effet, la section suivante est dédiée à la synthèse de l'état de l'art des études des systèmes logistiques.

## 1.4 Étude des systèmes logistiques

Les outils de modélisation et de planification de la production au sein des systèmes logistiques, permettent aux entreprises d'anticiper leurs réactions, et d'évaluer l'agilité de leurs organisations face aux dynamiques des marchés. En premier lieu, nous présentons un état de l'art des travaux théoriques et industriels existants, afin de mieux cerner les outils de modélisation mis en œuvre. En second lieu, nous nous intéressons aux modèles de gestion de stock, qui représentent la trame de départ de nos travaux de recherche.

### 1.4.1 Modèles et outils de modélisation

Dans la littérature, plusieurs taxonomies de méthodes utilisées pour modéliser la dynamique des systèmes logistiques sont proposées. Une première typologie initiée par Beamon

dans [Beamon (1998)], classifie les modèles selon le type d’approche considérée et l’objectif visé pour la modélisation du système. Nous distinguons alors des modèles *déterministes*, des modèles *stochastiques*, des modèles *économiques* et des modèles *de simulation*.

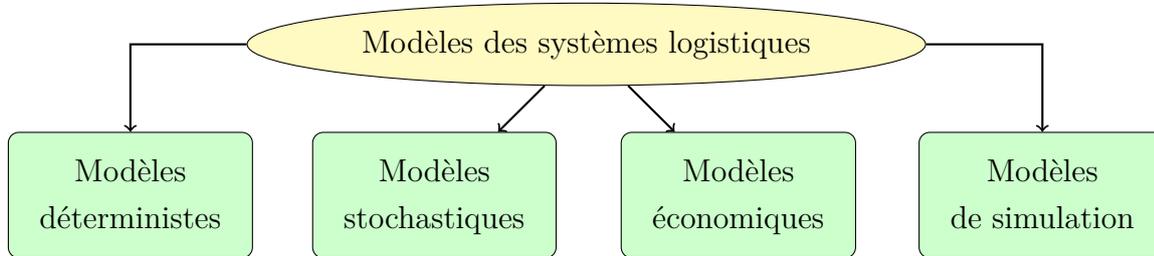


FIGURE 1.2 – Classification de systèmes logistiques [Beamon (1998)]

- Les modèles déterministes sont des modèles mathématiques formels, souvent présentés sous forme d’équations différentielles ou aux différences. Les modèles déterministes supposent que les variables et les paramètres du modèle sont connus avec certitude.
- Les modèles stochastiques au contraire, supposent qu’au moins une variable du système est à caractère aléatoire ou probabiliste, et suit une loi de distribution stochastique donnée. Ces modèles permettent de quantifier les dynamiques du système logistique [Tayur *et al.* (1999)], en particulier celles des flux physiques.
- Les modèles économiques se présentent souvent sous forme d’heuristiques décisionnelles, et abordent la dynamique des systèmes logistiques d’un point de vue action-réaction, entre le client et ses fournisseurs. Ces aspects font appel à la théorie des coûts de transaction et la théorie des jeux [Hennet et Arda (2008)], qui visent à étudier la dynamique du système logistique, et l’impact des décisions prises par chaque joueur participant.
- Les modèles de simulation sont utilisés lorsqu’il est difficile de décrire sous forme d’équation, les interactions entre les différentes variables des modèles analytiques. Ils sont l’alternative aux modèles analytiques, lorsque la résolution de ces derniers présente une grande complexité combinatoire, liée à la dimension du système étudié [Towill *et al.* (1992)]. Ces modèles offrent l’avantage de pouvoir tester, hors ligne, différents scénarios et stratégies de gestion possibles, et d’étudier de façon « qualitative » les effets des variations des paramètres du système.

Cette classification a été reprise plus tard dans [Min et Zhou (2002)], et étendue à deux autres catégories. Elle comprend d’une part, les modèles hybrides qui font appel à la fois

aux approches déterministes et aux approches stochastiques, et les modèles connus par *IT-driven models* ou *dirigés par les technologies de l'information* d'autre part. C'est un domaine qui vise à améliorer la visibilité et la communication entre les différents maillons, par l'utilisation des systèmes d'information et des langages de programmation, tels que les logiciels *GPAO* pour *Gestion de la Production Assistée par Ordinateur*, et *ERP* pour *Enterprise Resource Planning*.

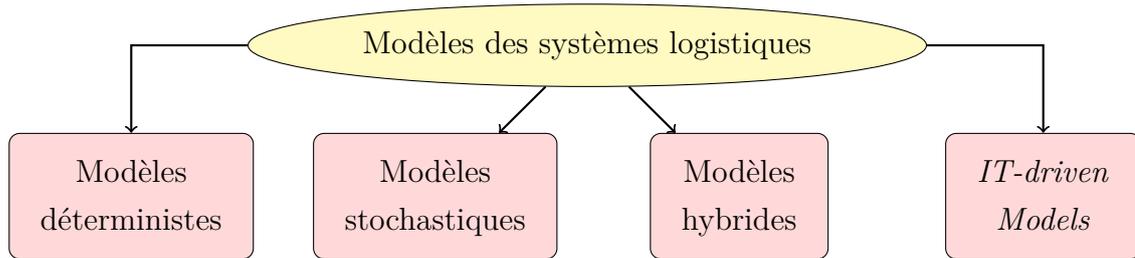


FIGURE 1.3 – Classification de systèmes logistiques [Min et Zhou (2002)]

Une dernière taxonomie, proposée par Labarthe [Labarthe (2006)], introduit la classe de modèles organisationnels, à côté des modèles analytiques et de simulation présentés précédemment. Cette nouvelle classe de systèmes est basée sur des modèles multi-agents et des méta-modèles, pour représenter le système logistique global. En se basant sur les classifications présentées, nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse, à la classe de modèles analytiques issue de la théorie du contrôle et systèmes asservis, que nous présentons dans la section suivante.

## 1.4.2 Modèles analytiques des systèmes logistiques

Les modèles analytiques représentent le système logistique selon une perspective quantitative, associée à l'utilisation d'approches issues de la théorie de l'asservissement des systèmes ainsi que de la recherche opérationnelle, selon la figure 1.4.

L'application de cette théorie au domaine logistique, est due aux travaux de Simon [Simon (1952)], prix Nobel d'économie en 1978, qui a constaté que la gestion des systèmes logistiques de production relève de l'automatique et de la régulation. La théorie du contrôle et des systèmes asservis consiste à modéliser le système logistique à partir d'équations différentielles, ou d'équations aux différences [Riddals *et al.* (2000)]. Cette modélisation permet d'étudier l'évolution dynamique du système en temps continu ou discret. Des structures de commande de type feedback, ou rétroaction, sont mises en œuvre pour contrôler

les système à temps continu et discret, et servent à étudier la stabilité de la structure commandée [Disney et Towill (2002)]. D'autres méthodes sont utilisées pour analyser les propriétés dynamiques, telles que les méthodes de contrôle robuste, de supervision, de contrôle optimal ou encore de contrôle prédictif [Sarimveis *et al.* (2008), Léchappé *et al.* (2015)].

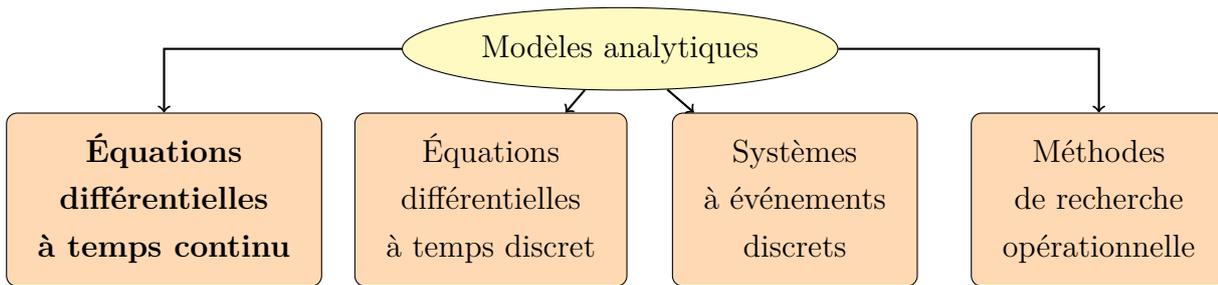


FIGURE 1.4 – Modèles analytiques des systèmes logistiques [Riddals *et al.* (2000)]

De plus, des formalismes à événements discrets étudient les modèles de systèmes logistiques, en se basant sur l'occurrence d'événements significatifs, tels que l'arrivée de nouvelles commandes, ou l'occurrence des incidents et des aléas. Ceux-ci sont capables de faire basculer le système d'un état à un autre, ce qui les différencie des modèles continus. Nous citons les réseaux de Petri, l'algèbre des dioïdes et les systèmes  $(\max,+)$ -linéaires, les chaînes de Markov et les réseaux de files d'attente, qui permettent de formuler les phénomènes de synchronisation et de parallélisme entre les ressources du système logistique. Comme nous l'avons déjà mentionné, les modèles analytiques sont souvent complétés par des études qualitatives de type simulation. En effet, la dynamique des systèmes est l'une des méthodologies les plus importantes appliquées dans les modèles de simulation. Forrester [Forrester (1958), Forrester (1973)], a été à l'origine de nombreux travaux de modélisation des systèmes dynamiques et de la commande des chaînes logistiques. Le modèle est principalement décrit par des équations différentielles ou au différences, qui permettent d'étudier la dynamique d'évolution du stock, et de l'interpréter en termes des variables ou paramètres intervenant dans le système logistique, tels que la demande client, les retards et les rétroactions internes qui affectent le comportement. Des travaux de recherche, tels que [Towill (1982), Edghill et Towill (1989), Wikner (2005)] ont mené à une famille de modèles génériques de gestion des stocks, appelés les modèles *Inventory and*

*Order-Based Production Control System* connus par *IOPBPCS*, présentés dans la section suivante.

### 1.4.3 Méthodes de gestion des stocks

L'enjeu principal de la gestion des systèmes logistiques est souvent lié à la bonne maîtrise des niveaux de stockage, vu que la stabilité des stocks reflète l'état du système global. De ce fait, une mauvaise stratégie de gestion des stocks provoque des retards de livraison, une rupture du stock ou un sur-stockage, et des situations de pénurie qui influent directement sur la qualité de la production. Dans ce contexte, les recherches sur l'étude de la dynamique d'évolution des stocks, ont abouti au modèle connu dans la littérature sous l'acronyme *APIOBPCS* pour *The Automatic Pipeline Inventory and Order Based Production Control System*, et issu de l'approche des systèmes asservis et des modèles de simulation du type *System Dynamics*.

Ce modèle est omniprésent dans la littérature pour la gestion et la modélisation de la dynamique des chaînes logistiques. C'est une variante du modèle *IOBPCS*, qui est utilisé pour faire un balayage périodique du système de commande, afin d'adapter les ordres de production délivrés aux différentes demandes et aléas. Les prémisses du *IOBPCS* sont inspirées des travaux de Simon [Simon (1952)], qui a appliqué la théorie des servomécanismes sur la dynamique des systèmes logistiques de production. Il a décrit la relation entre les ordres de production délivrés et le niveau du stock, par des équations différentielles en utilisant la transformée de Laplace. Ensuite, Towill [Towill (1982)] a repris la même logique en adoptant une représentation par schéma-block. Les ordres de production délivrés sont fonction du déficit du niveau du stock et de la demande entrante. Ce modèle a été étendu, tout en considérant que le niveau du stock désiré est estimé à partir d'une fraction des prévisions de la demande [Edghill et Towill (1989), Sterman (1989)], ce qui aboutit à la variante *Variable Inventory Order Based Production Control System* connue sous l'acronyme *VIOBPCS*. Un peu plus tard, les travaux de [John et al. (1994)] ont montré la nécessité de prendre en compte l'encours de production à travers la chaîne, noté *WIP*<sup>2</sup>, et qui a un effet indéniable sur la variation du niveau de stock. Tout cela a donné naissance au modèle *APIOBPCS*, qui permet donc la prise en compte l'encours de production en plus de la demande et de la consigne du niveau de stock.

Ces modèles ont permis de mettre en évidence la connexion entre les différentes entités du système logistique, à travers des fonctions de transfert et des paramètres de commande.

---

2. Work In Progress/Process

Un premier paramètre critique révélé est le retard, qui n'a pas été intégré dans les modèles qu'au début des années 2000 [Riddalls *et al.* (2000), Riddalls et Bennett (2002)]. Les systèmes à retards sont en effet des systèmes à dimension infinie, dont l'analyse des propriétés de stabilité et de stabilisation est souvent considérée comme difficile, en particulier pour des logisticiens non initiés à ces propriétés. L'essor des problèmes de stabilisation des systèmes logistiques par la communauté scientifique, a donné lieu à des études analytiques plus avancées, que nous verrons en détail dans le chapitre 2.

De plus, un deuxième aspect qui influe fortement sur la dynamique d'évolution des espaces de stockage, est la perte sur les pièces produites. Ceci revient à la nature de l'unité de production mise en place et au type des pièces produites. Les quantités stockées ayant une durée de vie limitée, et appelées produits périssables, ont des effets considérables sur la disponibilité des produits et le taux de service des clients en conséquence. Plusieurs travaux de la littérature évoquent ce problème des stocks périssables, que ce soit en considérant une durée de vie fixe et indépendante de tous les paramètres du système, comme nous verrons dans la section suivante, ou bien par une détérioration exponentielle continue des stocks [Nahmias (1982), Gloyal et Giri (2001), Baron (2010)].

En outre, la modélisation des travaux susmentionnés, est en déphasage avec la situation pratique de ces systèmes, où les limitations physiques constituent des contraintes fortes et non négligeables. En effet, dans un système logistique, les stocks sont des ressources physiques à capacités finies. De même, les ressources de production sont conditionnées par leurs caractéristiques technologiques, et leur productivité est de ce fait limitée. De plus, ces contraintes de capacité sont complétées par des contraintes de positivité. Ces dernières viennent du fait qu'un niveau de stock et un ordre de production ne peuvent pas avoir de valeurs négatives. Très peu de travaux de recherche analytiques ou formels traitent cette problématique contrainte. Nous pouvons citer [Wang *et al.* (2012)], où seule la contrainte de positivité des ordres de production est considérée, et les travaux [Abbou *et al.* (2017), Moussaoui *et al.* (2017)], dans lesquels les contraintes de positivité et de saturation sont à la fois considérées.

Dans cette direction, notre objectif repose sur l'étude de la dynamique des systèmes logistiques, en présence de retards de production et des pertes de stockage, et en prenant en compte les contraintes de saturation et de positivité liées aux différentes ressources. Pour cela, nous introduisons dans les sections suivantes, la modélisation du système logistique, que ce soit par le modèle basique du système logistique élémentaire, ou bien par un modèle plus général pour les systèmes en configuration cascade ou réseau.

## 1.5 Modèle du système logistique basique

Cette section est dédiée à la présentation de ce que nous appelons un système logistique élémentaire, qui servira de modèle de base à chaque entité du système logistique. Dans notre travail, un système logistique basique est constitué d'une unité de transformation et d'une unité de stockage. L'unité de transformation s'apparente à une unité de production ou d'assemblage, et qualifie toute entité en charge de la transformation d'un produit d'une matière première à un produit fini. Elle est caractérisée par un taux de production, et le délai nécessaire à l'accomplissement de cette tâche. La cadence est conditionnée par les capacités physiques des actionneurs et des machines utilisées, qui peuvent atteindre des seuils de saturation, correspondant à leurs capacités maximales de productivité. L'unité de stockage est caractérisée par le flux entrant de produits issu de la production, et par le flux sortant des matières correspondant à la demande du marché étant inconnue à l'avance, et aux pertes de stockage dues aux produits périssables. Tout comme l'unité de production, l'unité de stockage est une ressource dont la capacité est limitée. En effet, nous proposons le modèle de la dynamique du stock pour le système logistique basique que nous venons de décrire, dans la section qui suit.

### 1.5.1 Dynamique du stock dédiée aux produits périssables

Dans sa forme la plus basique, l'évolution du niveau du stock dépend essentiellement des flux entrants issus de la production et des flux sortants issus de la demande client. La dynamique de ce niveau de stock est alors régie par l'équation fondamentale du stock suivante :

$$\dot{y}(t) = p(t) - d(t), \text{ pour } t \geq 0. \quad (1.1)$$

La variable  $y(t)$  représente le niveau du stock instantané,  $p(t)$  représente le flux de produit entrant dans le stock à tout moment  $t$ , et  $d(t)$  est la demande instantanée des clients, qui correspond au flux des produits sortants du stock à tout instant  $t$ . En réalité, un délai d'exécution non négligeable noté  $\theta$ , est nécessaire pour obtenir les produits. Il s'agit de la durée de temps qui sépare le moment de réception d'un ordre de production, et l'instant de l'obtention du produit. En effet, la variable  $p(t)$  est exprimée par la relation suivante :

$$p(t) = \begin{cases} u(t - \theta) & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ \varphi(t) & , \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans cette expression, la variable  $u(t)$  correspond aux ordres de production instantanés, qui régissent les flux physiques des produits. Ces derniers ne sont disponibles qu'à partir de l'instant  $t = \theta$ , à cause du délai d'exécution  $\theta$ . Quant à la fonction  $\varphi(t)$ , elle correspond au flux de production pour les instants  $t$  entre 0 et  $\theta$ , qui résulte de l'exécution de l'encours de production présent à l'instant  $t = 0$ . Cette fonction  $\varphi(t)$  est ce qu'on appelle *la fonction des conditions initiales* du système à retard. Les systèmes à retards ont, en effet, la particularité de nécessiter un ensemble de conditions initiales, qui définissent la dynamique du système sur un horizon temporel passé, et qui doit être au minimum égal à la longueur du retard.

Ainsi, nous aboutissons à la forme classique du modèle dynamique d'évolution du stock, qui a été étudiée par Simon [Simon (1952)]. Ce modèle est donné par le système à retard suivant :

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} u(t - \theta) - d(t) & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ \varphi(t) - d(t) & , \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \end{cases} \quad (1.3)$$

De plus, nous nous intéressons à l'étude de la dynamique d'un stock périssable. Dans ces processus, les produits issus des entités de production pour satisfaire les demandes du marché, sont périssables et admettent des durées de consommation limitées, comme par exemple les produits frais et les produits de l'industrie pharmaceutique. De tels systèmes sont modélisés par divers formalismes, afin de considérer au mieux les pertes de stockage. Dans notre modèle, nous abordons un facteur de perte statique noté  $\sigma$  vérifiant  $0 \leq \sigma < 1$ . Ainsi, le modèle générique de la dynamique d'évolution du niveau d'inventaire, est décrit par le système d'équations différentielles du premier ordre sous la forme suivante :

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\sigma y(t) + u(t - \theta) - d(t) & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ -\sigma y(t) + \varphi(t) - d(t) & , \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \end{cases} \quad (1.4)$$

L'apparition du terme  $-\sigma y(t)$  dans l'équation fondamentale de la dynamique du stock, montre une décroissance naturelle du niveau de stockage, à cause de la préemption des produits de durée de vie limitée. En effet, ce modèle générique permet de décrire les processus logistiques de base, à savoir la planification de production, la gestion du stock et la livraison des produits. La littérature sur ce sujet n'est pas très vaste. Des études similaires sont développées dans les travaux [Abbou *et al.* (2015a), Abbou *et al.* (2015b)], où le modèle (1.3) est utilisé sans modéliser les pertes de stockage, c'est-à-dire pour un facteur de perte supposé nul. Nous citons aussi les travaux de [Ignaciuk et Bartoszewicz (2010)], dans lesquels le problème de contrôle des systèmes logistiques avec un niveau

de stock périssable est évoqué. Pourtant, ce modèle ne considère pas les limitations et les contraintes sur les ressources de production et de stockage. Cette spécificité, qui est développée dans la section suivante, différencie notre étude qui adopte en plus des systèmes à retards, la classe des systèmes contraints.

### 1.5.2 Spécifications des systèmes contraints

Comme précédemment cité, le système logistique est soumis à des contraintes structurelles, liées à la nature physique intrinsèque du système. Le modèle proposé doit alors prendre compte ces contraintes que nous formalisons de la façon suivante.

**a) Contraintes de stockage.** Dans un système logistique, la capacité de stockage est limitée par la taille et la contenance des espaces, alloués à la fonction de stockage des produits. De ce fait, le niveau du stock  $y(t)$  ne peut dépasser une certaine valeur, que nous notons  $y_{max}$ , correspondant à cette capacité maximale de contenance. Aussi, un niveau de stock est une grandeur toujours positive, car il quantifie de la matière mesurée en nombre de pièces, de sorte qu'il est limité par un paramètre minimale de dimensionnement noté  $y_{min}$ . Ainsi, à tout instant  $t$ ,  $y(t)$  vérifie la contrainte suivante :

$$0 \leq y_{min} \leq y(t) \leq y_{max}. \quad (1.5)$$

**b) Contraintes de production.** De la même façon, les ordres de production sont aussi des grandeurs physiques positives, qui ont des limites sur les ressources de production. Celles-ci présentent des seuils de saturation qu'il est nécessaire de respecter, et qui présentent de vrais freins lors de la mise en pratique du modèle. En notant  $u_{min}$  et  $u_{max}$  les capacités minimale et maximale de production respectivement, les contraintes sur les ordres de production se présentent sous la forme suivante :

$$0 \leq u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}. \quad (1.6)$$

**c) Spécification de la demande.** La contrainte que nous présentons sur le flux de demande, est une spécification de fonctionnement. Dans notre travail, nous considérons que la demande  $d(t)$  est inconnue, de sorte que le modèle et les résultats que nous présentons par la suite, restent valables tant pour une demande constante, que pour une demande saisonnière ou aléatoire. Néanmoins, la demande est aussi une grandeur physique positive et limitée par deux valeurs, l'une étant minimale et l'autre maximale, que nous notons  $d_{min}$  et  $d_{max}$  respectivement. Cette spécification

se formalise sous la forme suivante :

$$0 \leq d_{min} \leq d(t) \leq d_{max}. \quad (1.7)$$

La prise en compte de ces contraintes revient à imposer aux variables du système logistique basique, une certaine évolution dans des intervalles prescrits. Nous introduisons dans la section suivante, un modèle général des systèmes logistiques comprenant plusieurs maillons, pour lesquels nous définissons des contraintes plus complexes sous forme d'ensembles polyédraux.

## 1.6 Modèle général des réseaux logistiques

Après avoir défini le modèle basique du système logistique élémentaire, cette section a comme objectif de définir le système que nous adoptons pour la modélisation d'un système logistique général en configuration réseau ou cascade, en présence de contraintes de capacité et de positivité, de retards quelconques et de facteurs de perte.

### 1.6.1 Équation fondamentale de la dynamique des stocks

Un système global est constitué d'un ensemble d'entités interdépendantes, chacune en charge de suivre une activité logistique précise de production, d'approvisionnement, de transport et de stockage. Chaque entité planifie ses activités, gère ses ressources et harmonise les échanges entre les autres entités du système logistique, de façon à pouvoir répondre aux demandes de ses clients, et à atteindre ses objectifs de performance. Dans ce contexte, les problèmes concernant la production, et la distribution des marchandises présentent un grand nombre d'applications qui peuvent être résolues par des modèles de réseaux, soutenues par la théorie de contrôle des systèmes dynamiques [Boukas *et al.* (1995), Blanchini *et al.* (1997), Blanchini *et al.* (2000a), Blanchini *et al.* (2000b), Blanchini *et al.* (2003)].

Les systèmes logistiques en configuration réseau sont essentiellement représentés par un ensemble de nœuds représentant les capacités de stockage, et alimentés chacun par les flux des arcs incidents qui représentent les échanges de production et de transport. Fondamentalement, ces problèmes consistent à déterminer l'acheminement des flux d'arc, qui expédie la marchandise de certains nœuds vers d'autres nœuds du réseau, afin de satisfaire la demande des clients. De plus, des retards se produisent dans de nombreuses situations

pratiques, dans lesquelles un processus transforme les matières de certains nœuds, pour fournir d'autres produits finis et les transporter vers d'autres nœuds quelque temps plus tard.

Il faut noter que chaque nœud du réseau logistique est associé à un ou plusieurs arcs entrants, qui correspondent à des ordres de production ou des achats. Cette situation est typique surtout dans les réseaux de production où les arcs entrants dans un nœud peuvent être, soit indépendants soit liés de façon proportionnelle. La proportionnalité résulte d'une politique d'approvisionnement des fournisseurs, destinée à minimiser les pertes sur les marchandises [Aissaoui *et al.* (2007), Ignaciuk (2012)]. Dans notre cas d'étude, nous supposons que les ordres de production sont indépendants, ce qui mène à une classe très générale de réseaux logistiques.

Sur la base de cette introduction, l'interconnexion entre les différents nœuds dont chacun présente un système logistique élémentaire défini sous la forme (1.4), conduit à système en configuration réseau dont l'équation différentielle fondamentale est décrite sous la forme suivante :

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + \sum_{k=1}^h B_k u(t - \theta_k) - B_0 u(t) - Ed(t). \quad (1.8)$$

Cette équation correspond à un système multivariable à retards multiples, pour lequel les variables sont  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $d(t) \in \mathbb{R}^r$ , et les matrices constantes  $A$ ,  $B_k$ , pour  $k = 0$  à  $h$ , et  $E$  sont de dimensions appropriées. Les composantes de la variable  $y(t)$  correspondent aux quantités de ressources des différents nœuds de stockage. Ces ressources sont les matières premières, les produits intermédiaires et finis, ainsi que toute autre ressource utilisée dans les processus de production et de distribution. Les composantes de la variable  $u(t)$  représentent les ordres de production instantanés entre les différents entrepôts. Ces flux internes sont acquis avec des retards  $\theta_k$  à partir de plusieurs étapes de production et de transport, tandis que  $B_0 u(t)$  présente les flux de production sortant des nœuds qui alimentent d'autres nœuds du système. En outre, la variable  $d(t)$  désigne la demande des clients supposée inconnue. Enfin, les produits des différents niveaux de stockage sont des produits de nature périssable, ce qui conduit à des baisses continues sur les niveaux des stockages de chaque nœud, en raison des pertes de stockage. Celles-ci sont modélisées par la matrice diagonale  $A$ , dont les composantes correspondent aux taux de perte égaux notés  $\sigma_i$ , avec  $0 \leq \sigma_i < 1$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .

Notre modèle d'étude (1.8) permet de décrire les processus logistiques en configuration réseau, pour lesquels l'interaction entre les différents nœuds et l'échange des ordres de

production sont valables dans toutes les directions du réseau. Ce modèle conduit en particulier à la définition du modèle de la chaîne logistique. Dans ce cas, l'interaction entre les nœuds du réseau est linéaire et en configuration cascade, c'est-à-dire les ordres de production passent successivement du nœud en amont à celui en aval, pour approvisionner le niveau de stockage qui sert directement la demande externe. Ces deux modèles sont étudiés profondément dans les chapitres 3 et 4.

Les divers travaux de Blanchini et de ses coauteurs concernant la commande par invariance de systèmes logistiques, que nous introduisons dans le chapitre 2, sont basés sur le même modèle que nous utilisons [Blanchini (1990), Blanchini *et al.* (2014)]. De même, Ignaciuk et Bartoszewicz ont utilisé ce modèle dans leurs travaux [Ignaciuk et Bartoszewicz (2011), Ignaciuk (2012)], pour l'étude des systèmes logistiques complexes constitués de plusieurs fournisseurs. Ils traitent aussi, dans leur ouvrage [Ignaciuk et Bartoszewicz (2013)] les problèmes de contrôle de congestion des réseaux de communication en utilisant le modèle que nous proposons. D'ailleurs, le système est soumis à des contraintes de fonctionnement identique à celles du système logistique basique, que nous présentons dans la section suivante.

### 1.6.2 Spécifications et contraintes de fonctionnement

Notre modèle d'étude permet de décrire les processus logistiques de base, à savoir la production, le stockage pour satisfaire la demande clientèle. Identiquement au système basique composé d'une seule unité de stockage et d'une seule unité de production, chaque entité du réseau logistique est soumise aux mêmes types de contraintes de positivité et de saturation exprimées par (1.5) et (1.6). Les quantités de produits qui peuvent être échangées entre les nœuds sont limitées, d'une part, par la capacité des ressources de production, et d'une autre part, par les capacités de stockage au niveau de chaque nœud. De plus, les demandes externes sont supposées inconnues, dont chaque composante vérifie la contrainte (1.7). Ainsi, le système étant multivariable, les contraintes introduites précédemment sous forme d'intervalles, sont généralisées dans ce cas, et correspondent aux ensembles suivants :

$$y^{\min} \leq y(t) \leq y^{\max}, \quad (1.9)$$

$$u^{\min} \leq u(t) \leq u^{\max}, \quad (1.10)$$

$$d^{\min} \leq d(t) \leq d^{\max}. \quad (1.11)$$

Les inégalités sont respectées pour chaque composante du réseau logistique, avec  $y^{\min}$ ,  $y^{\max} \in \mathbb{R}^n$ ,  $u^{\min}$ ,  $u^{\max} \in \mathbb{R}^m$ , et  $d^{\min}$ ,  $d^{\max} \in \mathbb{R}^r$ . Pour les entités de production, les valeurs  $u^{\min}$  et  $u^{\max}$  définissent respectivement les capacités minimales et maximales de production pour chaque composante du système logistique considéré. De la même manière, les quantités  $y^{\min}$  et  $y^{\max}$  correspondent respectivement aux paramètres de dimensionnement minimaux et maximaux de chaque espace de stockage du réseau. Les valeurs extrêmes de la demande,  $d^{\min}$  et  $d^{\max}$ , déterminent respectivement les limites minimales et maximales de la variation de la demande du marché. Notons que dans le cadre de cette étude, nous ne supposons pas connu l'origine de ces variations, ni leur nature. Seules les bornes de variation seront prises en compte. En effet, ces contraintes définissent trois polytopes d'intervalle, qui sont respectivement nommés  $\mathcal{P}_y$ ,  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_d$ . Ces ensembles convexes de type polyédral présentent des propriétés assez intéressantes que nous détaillons dans le chapitre 2.

À l'issue des sections précédentes, nous avons pu voir le modèle d'évolution du stock pour le système basique (1.4) et pour le système général en configuration réseau (1.8), ainsi que les contraintes de positivité et de saturation auxquelles sont soumis les différents flux des modèles. Dans ce contexte, la gestion de la production revient à maîtriser les flux de produits, de façon à atteindre les objectifs globaux fixés par la stratégie générale du système logistique. Cette stratégie vise à garantir un taux de service client élevé, pour une demande inconnue exprimée par (1.7) ou sous la forme générale (1.11), et à maîtriser des variations des niveaux de stockage, respectant les contraintes de positivité et de saturation, de la forme (1.5) et (1.6) pour le système logistique élémentaire, et par les contraintes (1.9) et (1.10) pour le réseau logistique. Nous allons voir dans la section suivante que cette problématique de gestion des systèmes logistiques repose sur une approche de contrôle avec un aspect de conception de la structure de commande.

## 1.7 Approche de commande des systèmes contraints

La démarche de résolution que nous avons adoptée dans notre travail, s'inscrit dans le cadre de l'approche structurelle de conception et de commande des systèmes initiée par Karcanias [Karcanias (1994), Karcanias (1995)]. Dans le cadre de l'application de la théorie du contrôle et des systèmes asservis, la démarche de conception et de contrôle répond

à la problématique issue de la situation suivante.

En règle générale, un modèle contient des paramètres fixes liés à la structure physique du système et les dimensions des ressources. De ce fait, ils tiennent le rôle de contraintes à considérer lors de la phase de la conception de la commande du système. Des paramètres variables s'ajoutent aux paramètres fixes. Ils sont principalement des paramètres de régulation et d'action du contrôleur, tels que les gains et les consignes. Dans l'approche classique de conception des systèmes, la phase de contrôle succède naturellement à la phase du dimensionnement de la structure physique. Ce mode opératoire, intuitif, peut se révéler problématique au sens des systèmes asservis. Cependant, l'approche proposée par Karcaniyas [Karcaniyas (1995)], transcende cette démarche classique de contrôle, séparant la conception du système physique de celle de son système de commande. Dans cette approche, la conception des systèmes est une approche globale, de sorte que, l'existence et la faisabilité d'un système de commande sont garanties, en adéquation avec les contraintes physiques du système à contrôler.

Notre méthodologie de travail suit cette même ligne de démarche. Dans le cadre de la résolution de notre problématique de gestion des stocks dans un système logistique élémentaire (1.4), nous rencontrons en effet le même type de contraintes dans notre modèle. Dans notre étude, les paramètres fixes du modèle sont les capacités minimales et maximales de stockage, de production et de la demande, notées respectivement  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ , ainsi que le retard unique d'exécution  $\theta$  et le facteur de perte  $\sigma$ . Dans un premier temps, connaissant ces paramètres, notre objectif est de définir notre loi de commande pour piloter le système logistique, en faisant en sorte de bien respecter les contraintes de type intervalle (1.5), (1.6) et (1.7). Il s'agit de calculer les paramètres du régulateur, qui représentent les paramètres variables de notre modèle. Nous aboutissons de ce fait, à des conditions dites d'existence du contrôleur, qui indiquent si la configuration actuelle du système physique, permet en effet de piloter le système en respectant toutes les contraintes indiquées. Suite à cela, nous formulons d'autres conditions de paramétrisation, qui décrivent comment il convient de choisir les paramètres du régulateur. Ces conditions d'existence et de paramétrisation obtenues servent à définir le dimensionnement préalable du système logistique, de façon à remplir tous les objectifs de pilotage. De la même manière, la problématique de contrôle des systèmes, peut être étendue par la mise en place d'une commande  $u(t)$  qui permet de stabiliser le système multivariable (1.8) à retards quelconques, tout en prenant en compte les différentes contraintes et spécifications sous la forme d'ensembles polyédraux (1.9), (1.10) et (1.11), les retards et les

pertes de stockage présents au niveau de chaque nœud du réseau logistique. Pour ce faire, nous utiliserons un contrôleur dit feedback-prédicteur, que nous introduisons dans le chapitre 2. Ce principe de commande est décliné par une approche hybride, que nous développons dans la partie II pour le système multivariable. Ensuite, Celle-ci est comparée avec une autre approche de commande de type linéaire dans la partie III, pour le pilotage du système logistique élémentaire. Il est important de signaler que tous les retards et les facteurs de perte sont considérés comme constants dans ces études. Pour cette raison, la stratégie de pilotage par feedback-predicteur de type linéaire est reprise dans la partie IV, pour étudier les performances du système piloté, vis-à-vis des incertitudes que peuvent présenter les paramètres intrinsèques du système logistique élémentaire. Avant de détailler ces structures de commande et leur mise en œuvre, il est nécessaire d'introduire l'ensemble des outils mathématiques et techniques utilisés lors de nos développements. Ces notions de base se rapportent principalement à l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retards, et aux méthodes théoriques de vérifications des contraintes, comme nous le verrons dans le chapitre 2 de cette partie.

## 1.8 Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté le contexte et la problématique de notre travail de recherche. Nous nous sommes intéressés aux systèmes logistiques et à leur paradigme. Nous avons pu voir que ces systèmes sont formés d'un ensemble de procédés de différentes natures, dont la gestion apporte un grand intérêt à la communauté scientifique. À travers la littérature abondante que nous avons présentée, sur la thématique de l'étude et de la modélisation de ces systèmes logistiques, nous avons pu préciser les principales approches utilisées pour aborder l'évolution dynamique des entités de stockage. Nous avons alors positionné notre travail de recherche, en modélisant l'évolution dynamique du stock sous forme d'un système basique à retard, et sous forme d'un système général pour les systèmes logistiques en configuration réseau. L'objectif de notre travail est trouver une solution de pilotage des systèmes logistiques, par une approche analytique issue de la théorie de la commande, de sorte à garantir le respect des différentes contraintes formulées. Dans ce cadre, l'élaboration des structures de commande est basée sur l'utilisation des concepts de base et d'outils de commande, autour des systèmes à retards contraints, qui seront détaillés dans le chapitre 2.



# OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

---

## Table des matières

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation des systèmes à retards</b>	<b>52</b>
<b>2.3</b>	<b>Stabilité des systèmes à retards</b>	<b>54</b>
2.3.1	Stabilité Entrée-Sortie	54
2.3.2	Stabilisation par prédiction d'état	57
<b>2.4</b>	<b>Calcul des bornes pour un système Entrée-Sortie monovariante</b>	<b>60</b>
<b>2.5</b>	<b>Bornes du système Entrée-sortie multivariante</b>	<b>62</b>
2.5.1	Polyèdres et ensembles convexes	62
2.5.2	Calcul des bornes pour un système multivariante	64
<b>2.6</b>	<b>Principe d'invariance et invariance polyédrale</b>	<b>66</b>
2.6.1	Conditions d'invariance du système monovariante	66
2.6.2	Propriétés d'invariance polyédrale	69
<b>2.7</b>	<b>Méthode d'élimination de Fourier Motzkin</b>	<b>71</b>
<b>2.8</b>	<b>Approche structurelle</b>	<b>72</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation des outils mathématiques qui nous servent durant ce travail de recherche, et qui s'articulent autour de deux axes principaux. Le premier porte sur la description des systèmes à retards, et l'introduction des principales caractéristiques qui s'y apportent dans la section 2.2. Ensuite, nous définissons les modèles Entrée-Sortie appartenant à la classe  $\mathcal{A}$  des systèmes, et nous nous intéresserons dans la section 2.3 à la stabilité et à la stabilisation des systèmes à retards sur l'entrée, en utilisant le principe de commande par prédiction.

Le second axe de ce chapitre, présente les notions de base des systèmes contraints, et

les méthodes théoriques de vérification des contraintes. Dans les sections 2.4 et 2.5, nous introduisons le principe de calcul de bornes pour les systèmes monovariabiles et multivariabiles de la classe  $\mathcal{A}$ , respectivement. Nous utiliserons ces calculs pour répondre dans les sections 2.6 et 2.7, à des questions plus poussées liées aux systèmes contraints, à savoir les résultats d'invariance et d'inclusion polyédrales, qui serviront par la suite à la synthèse de contrôleurs stabilisant et assurant le respect des contraintes imposées pour nos systèmes logistiques.

## 2.2 Modélisation des systèmes à retards

La classe des systèmes à retards englobe les systèmes ayant des phénomènes de décalages temporels et de temps morts dans leurs dynamiques. Ces retards et ces délais d'exécution ont des effets complexes sur les propriétés structurelles des systèmes. Ces particularités ont suscité un sujet important et de grande qualité par la communauté d'automatique, donnant lieu à une littérature abondante à ce sujet telle que [Richard (2003), Delice et Sipahi (2009), Sipahi et Delice (2010) Sipahi *et al.* (2011)].

D'un point de vue pratique, l'intérêt qui est porté à cette classe de systèmes trouve sa justification dans de nombreux problèmes appliqués. Nous citons par exemple le temps de réaction des capteurs dans les processus physiques, le temps de transmission des paquets d'information dans les réseaux de télécommunication, et le délai de fabrication et de distribution des pièces finies dans les systèmes logistiques de production. En effet, les systèmes à retards permettent une modélisation plus réaliste des dynamiques qui régissent ces processus, en formalisant les mécanismes et les effets qui y sont présents [Chiasson et Loiseau (2007), Normey-Rico et Camacho (2007)].

Un système à retard peut être modélisé de diverses façons, notamment par des équations différentielles retardées ou par des systèmes Entrée-Sortie sur lesquels se porte notre attention. Pour la modélisation des systèmes sans retard, la dynamique de l'état  $x(t)$  est déterminée à partir de l'instant présent, ce qui correspond pour des entrées de perturbation nulles, au modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ pour } t \geq 0,$$

où l'opérateur  $f$  est une fonction, et  $u(t)$  présente l'entrée de commande. Contrairement aux systèmes ordinaires, la dynamique des systèmes à retards dépend des valeurs passées

de l'état  $x(t - \theta)$ , où  $\theta$  représente le retard, de sorte que le modèle des systèmes retardés est défini sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t) \text{ pour } t \geq \theta. \quad (2.1)$$

L'état du système  $x_t$  et l'entrée de commande  $u_t$  sont des fonctions instantanées et retardées vérifiant  $x_\tau = x(t - \tau)$  et  $u_\tau = u(t - \tau)$  pour  $\tau \in [0, \theta]$ , alors que  $x(t)$  et  $u(t)$  représentent les valeurs prises par ces fonctions à l'instant  $t$ . Dans ce cas, l'opérateur  $f$  est une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction de fonctions [Hale (1971)]. C'est le cas des *systèmes à mémoire* et des *systèmes héréditaires* où la détermination de l'état présent nécessite la connaissance d'une partie de leur historique.

En outre, les actions qu'expriment les retards sont de nature ponctuelle ou distribuée. Un retard ponctuel ou pur, caractérise une simple translation dans le temps de l'action retardée. Notons qu'en présence de plusieurs retards, ces derniers sont dits commensurables s'ils sont multiples d'un retard unitaire. Autrement ils sont quelconques ou rationnellement indépendants. Un retard distribué quant à lui, formalise l'effet cumulatif d'une action qui s'étend sur une fenêtre temporelle donnée. Il se présente sous la forme générale :

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (2.2)$$

où  $f(t)$  est une fonction définie pour  $t \in [t_1, t_2]$  dans le cas scalaire, et une matrice de fonctions dans le cas multivariable, que nous appelons le noyau du retard distribué.

En plus des différentes natures des retards, les modèles se distinguent selon le positionnement des retards qui y sont présents, soit sur l'état du système ou bien sur ses entrées ou ses sorties. En effet, les systèmes logistiques que nous avons introduit sous la forme (1.4) pour le modèle monovariable, et de la forme (1.8) pour le modèle multivariable, correspondent à des systèmes à retards quelconques sur l'entrée de commande  $u(t)$ . Dans ce cadre, les retards sur l'entrée servent à modéliser les délais d'acquisition de produits, que ce soit à l'issue de la production elle-même où le retard représente le temps de transformation ou de production, ou à l'issue d'une phase de livraison, le retard étant alors le délai nécessaire à la distribution des produits vers les espaces de stockage.

En effet, les modèles du type Entrée-Sortie servent pour l'analyse des propriétés du système auxquelles nous nous intéressons, notamment les propriétés de stabilité comme nous le verrons dans la section suivante, et certaines propriétés de bornitude.

## 2.3 Stabilité des systèmes à retards

Nous présentons dans cette partie, les principes fondamentaux qui caractérisent l'étude de la stabilité des systèmes à retards, puis nous introduisons la notion de BIBO-stabilité<sup>1</sup>, et les techniques de stabilisation par prédiction d'état.

La stabilité décrit la propriété d'un système à rester proche d'un état d'équilibre donné malgré toutes les perturbations présentes. Dans notre travail, nous considérons principalement la notion de stabilité Entrée–Sortie. L'étude de la stabilité pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, est liée au transfert de la forme  $T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  et précisément à l'équation caractéristique  $D(s) = 0$ . Ainsi, le système sans retard est stable si son transfert est propre, c'est-à-dire le degré du dénominateur  $D(s)$  est supérieur à celui du numérateur  $N(s)$ , et si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative. Sous ces conditions, la stabilisation revient à poser un contrôleur  $C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$  tel que le transfert en boucle fermée  $\frac{N(s)X(s)}{D(s)Y(s)+N(s)X(s)}$  soit stable. Dans ce cas,  $X(s)$  et  $Y(s)$  sont déterminées par la résolution de l'équation diophantine  $N(s)X(s) + D(s)Y(s) = \Phi(s)$  où  $\Phi(s)$  est un polynôme stable connu par l'identité de Bézout.

Pour les systèmes sans retard, l'équation caractéristique  $D(s) = 0$ , et l'équation de Diophantus sont des fonctions polynômiales en  $s$ . En revanche, pour les systèmes à retards, ces équations sont des polynômes en  $s$  et  $e^{-s\theta}$ , dont la résolution n'est pas aisée et de complexité à considérer surtout dans le cas de plusieurs retards [Sipahi et Delice (2010), Sipahi *et al.* (2011)]. L'équation diophantine est aussi non triviale pour les systèmes à retards et pour les systèmes de la classe  $\mathcal{A}$  qui sont introduits dans la section 2.3.1. De ce fait, plusieurs travaux ont été conduits dans ce domaine d'étude, introduisant des notions de quasi-polynômes et de pseudo-polynômes [Callier et Desoer (1978), Brethé et Loiseau (1997), Loiseau (2000), Di Loreto (2006), Tarbouriech *et al.* (2011)], rendant ainsi possible la synthèse de lois de commande stabilisantes pour ces systèmes à retards. Dans notre travail, nous nous intéressons à la stabilité des systèmes Entrée–Sortie, et à la notion de BIBO-stabilité qui est l'objet de la section suivante.

### 2.3.1 Stabilité Entrée-Sortie

La notion de BIBO-stabilité ou de stabilité Entrée–Sortie, est attachée à la réaction de la sortie du système en réponse à la variation de l'entrée qui lui est appliquée. Nous introduisons d'abord la représentation Entrée–Sortie, par une relation entre les entrées et

---

1. Bounded-Input Bounded-Output

les sorties du système, sous la forme d'une fonction de transfert  $\hat{H}(s)$ , de sorte que

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (2.3)$$

Dans le domaine temporel, la relation (2.3) correspond à une convolution qui est définie comme suit :

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.4)$$

Le noyau de convolution  $h(t)$  correspond à la réponse impulsionnelle du système, et le transfert  $\hat{H}(s)$  n'est autre que la transformée de Laplace du noyau  $h(t)$ . Dans le cas de systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, comme par exemple le système (1.8) où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ , le système Entrée–Sortie est défini sous la forme suivante :

$$y(t) = (H * u)(t) = \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.5)$$

Dans ce cas, les composantes notés  $H_{ij}$  de la matrice  $H(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sont les noyaux de convolution du système multivariable. Sommairement, un système est dit stable Entrée–Sortie si sa sortie reste bornée pour toute entrée bornée. Cette définition est formalisée de la façon suivante.

**Définition 2.1.** (*BIBO-stabilité*)

*Un système Entrée-Sortie de la forme (2.4) est BIBO-stable, s'il existe des nombres réels positifs  $u_m$  et  $y_m$  tels que, toute entrée vérifiant  $|u(t)| \leq u_m$  produit une sortie du système telle que  $|y(t)| \leq y_m$ , pour tout instant  $t \geq 0$ .*

Ensuite, nous considérons une famille de systèmes Entrée-Sortie plus générale dite la classe  $\mathcal{A}$  [Desoer et Vidyasagar (1975)]. Elle comporte aussi bien des systèmes de dimension finie, que des systèmes de dimension infinie, dont des systèmes à retards, et autorise la présence de distributions dans les noyaux de transfert, comme l'atteste la définition suivante.

**Définition 2.2.** (*Classe  $\mathcal{A}$  des systèmes*)

*La classe  $\mathcal{A}$  des systèmes est définie comme l'ensemble des systèmes de convolution de la forme (2.4) dont le noyau de convolution s'écrit comme suit :*

$$h(t) = \begin{cases} h_a(t) + \sum_{i=0}^{\infty} h_i \delta(t - t_i) & , \text{ pour } t \geq 0, \\ 0 & , \text{ pour } 0 \leq t < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $h_a(t)$  est une fonction mesurable qui vérifie les conditions  $\int_0^\infty |h_a(t)|dt < \infty$ ,  $\sum_{i=0}^\infty |h_i| < \infty$ ,  $\delta(t)$  est la mesure de Dirac, et  $t_i$  sont des réels positifs ou nuls. Nous supposons ensuite que  $t_0 = 0$ , et  $t_i > t_{i-1}$  pour  $i \geq 1$ .

La classe  $\mathcal{A}$  ainsi définie, forme une algèbre de Banach commutative, dont l'élément neutre est  $\delta$ , pour la norme<sup>2</sup> suivante :

$$\|h\|_{\mathcal{A}} = \int_0^\infty |h_a(t)|dt + \sum_{i=0}^\infty |h_i|. \quad (2.7)$$

Dans le cas de systèmes Entrée–Sortie multivariables de la forme (2.5), la norme de  $H$  est définie par l'expression suivante :

$$\|H\|_{\mathcal{A}} = \max_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m \|h_{ij}\|_{\mathcal{A}} \right\}. \quad (2.8)$$

En effet, tous les systèmes de la classe  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire dont les noyaux vérifient la relation (2.6) de la définition 2.2, sont stables au sens BIBO selon la définition 2.1. Partant de ce résultat, le théorème<sup>3</sup> suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes de BIBO-stabilité de ces systèmes Entrée-Sortie.

**Théorème 2.1.** [*Desoer et Vidyasagar (1975)*] *Un système Entrée-Sortie de la forme (2.4), est BIBO stable si et seulement si son noyau de convolution  $h(t)$  est un élément de  $\mathcal{A}$ .*

Pour les systèmes de la forme (2.5), le corollaire<sup>4</sup> suivant étend la condition de stabilité établie par le théorème 2.1, aux cas de systèmes Entrée-Sortie multivariables.

**Corollaire 2.1.** [*Desoer et Vidyasagar (1975)*] *Un système Entrée-Sortie de la forme (2.5) est BIBO-stable si et seulement si la matrice de convolution  $H$  est un élément de  $\mathcal{A}^{n \times m}$ .*

Après avoir introduit les notions de BIBO-stabilité pour la classe des systèmes à retards et en particulier la classe  $\mathcal{A}$  des systèmes distribués, nous présentons dans la section suivante les techniques de stabilisation par prédiction d'état, qui offrent un résultat fondamental pour la commandabilité des équations différentielles à retards sur l'entrée.

---

2. Définitions des espaces normés et de l'algèbre de Banach dans l'annexe, section A.1

3. Preuve dans l'annexe, section A.2

4. Preuve dans l'annexe, section A.3

### 2.3.2 Stabilisation par prédiction d'état

Le principe de prédiction d'état pour les systèmes à retards sur l'entrée, revient à trouver une loi de commande qui pourra compenser les effets des retards sur la boucle de régulation du système. Pour l'introduire, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = u(t - \theta) - d(t), \quad (2.9)$$

où  $d(t)$  est une entrée de perturbation et  $u(t)$  une entrée de commande, et  $x(t = 0) = 0$ . En utilisant un retour d'état de la forme  $u(t) = -Fx(t)$  où  $F$  est un gain statique positif, le système en boucle fermée correspond à son tour, à l'équation différentielle retardée suivante :

$$\dot{x}(t) = -Fx(t - \theta) - d(t). \quad (2.10)$$

ce qui correspond dans le domaine de Laplace, au transfert

$$\hat{h}(s) = \frac{\hat{x}(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{1}{1 + Fe^{-s\theta}}.$$

Pour attaquer ce problème, nous appliquons une autre loi de commande anticipative du type retour d'état, ou feedback, de la forme :

$$u(t) = -Fx(t + \theta). \quad (2.11)$$

Le système en boucle fermée s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{x}(t) = -Fx(t + \theta - \theta) - d(t) = -Fx(t) - d(t). \quad (2.12)$$

Contrairement à la commande proposée précédemment, la commande (2.11) permet de compenser entièrement le retard  $\theta$ , de sorte que le système obtenu en boucle fermée correspondant au transfert :

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{1 + F},$$

est un système ordinaire stable pour toute valeur positive du gain  $F$ . Cela dit, la commande anticipative de la forme (2.11) ne peut être mise en œuvre de façon causale. Dans ce contexte, les travaux de Manitius et Olbrot [[Manitius et Olbrot \(1979\)](#)], et de Kwon et Pearson [[Kwon et Pearson \(1980\)](#)], montrent que l'utilisation d'une telle commande anticipative correspond à l'utilisation d'une prédiction sur l'état du système, qui est réalisable,

et qui permet de faire du placement de pôles fin pour le système en boucle fermée. Pour introduire ces résultats, considérons un système à entrée retardée à plusieurs variables soit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \theta), \quad (2.13)$$

où les matrices  $A$  et  $B$  sont de dimensions appropriées. La commande  $u(t)$  proposée par Manitius et Olbrot est donnée sous la forme :

$$u(t) = K.z(t), \quad (2.14)$$

où  $K$  est un gain statique positif, et  $z(t)$  est définie par l'expression suivante :

$$z(t) = e^{A\theta}x(t) + \int_{t-\theta}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.15)$$

Ainsi, le spectre du système (2.13) soumis à la loi de commande de la forme (2.14)-(2.15), est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 2.2.** *Le spectre du système en boucle fermée (2.13)-(2.14)-(2.15) est celui de la matrice*

$$A + BK. \quad (2.16)$$

*De plus, sous les hypothèses de commandabilité des matrices  $A$  et  $B$ , le spectre du système en boucle fermée peut être placé arbitrairement dans un ensemble de points conjugués du plan complexe, par un choix approprié de la matrice  $K$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est apportée en considérant la solution de l'équation différentielle (2.13), qui s'écrit à l'instant  $t + \theta$  sous la forme :

$$x(t + \theta) = e^{A\theta}x(t) + \int_t^{t+\theta} e^{A(t+\theta-\tau)}Bu(\tau - \theta)d\tau.$$

En opérant un changement de variable, cette dernière expression se réécrit sous la forme ci-dessous :

$$x(t + \theta) = e^{A\theta}x(t) + \int_{t-\theta}^t e^{A(t-\alpha)}Bu(\alpha)d\alpha, \quad (2.17)$$

ce qui correspond à la définition de  $z(t)$ . Finalement, en remplaçant successivement les expressions de  $z(t)$  et  $u(t)$  dans l'équation dynamique (2.13), nous aboutissons à la for-

mulation suivante du système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t),$$

qui est un système dont le spectre correspond bien à celui de la matrice  $A + BK$ . □

En se référant à l'expression (2.17), nous remarquons que la variable  $z(t)$  utilisée dans la commande (2.14) n'est autre que la prédiction sur l'état du système. La commande (2.14) est donc bien réalisable, puisque la détermination de la prédiction  $z(t)$  est causale, et ne nécessite que la connaissance des valeurs de la commande sur un horizon temporel passé de longueur  $\theta$ .

Les travaux précédemment mentionnés [Manitius et Olbrot (1979), Kwon et Pearson (1980)], et d'autres par la suite tel que [Artstein (1982), Diagne *et al.* (2017)], introduisent le principe de prédiction pour les systèmes instables en boucle ouverte, sous l'appellation de placement de pôles fini. En effet, la loi de commande agit sur les pôles du système et permet de faire du placement de pôles fini de façon à stabiliser le système bouclé.

Dans notre travail, les lois de commande que nous proposons pour réguler nos systèmes logistiques sont du type feedback-prédicteur. Nous appliquons dans les chapitre 3 et 4, le principe de prédiction d'état proposée dans cette partie. Puis, nous utiliserons une structure de commande par feedback-prédicteur en la déclinant avec une commande hybride dans le chapitre 5, puis avec une commande linéaire contrainte dans le chapitre 6. Nous verrons finalement, que les caractéristiques de compensation du retard qu'offrent ces méthodes, jouent un rôle primordial dans le domaine logistique.

En outre, ces méthodes nécessitent une connaissance exacte du modèle et du retard, pour garantir une entière compensation du retard. Cela dit, dans [Manitius et Olbrot (1979), Olbrot (2000), Mirkin et Raskin (2003)], les auteurs montrent que l'utilisation de la structure feedback-prédicteur présente une meilleure robustesse face à des petites variations du modèle. Le système en boucle fermée reste dans ce cas stable même si le placement souhaité du spectre n'est pas exactement préservé. Dans ce contexte de robustesse, nous citons en particulier les résultats présentés dans [Mondié *et al.* (2001)], où des conditions suffisantes de stabilité robuste face à une incertitude sur le retard sont présentées, et qui nous seront particulièrement utiles lors de nos développements dans le chapitre 7.

Dans cette première partie du chapitre, nous avons introduit les diverses notions des systèmes à retards, en ce qui concerne la modélisation, la stabilité Entrée-Sortie, ainsi que la méthode de stabilisation par prédiction d'état. Nous présentons par la suite, les propriétés

de bornitude qui nous intéressent pour l'étude des systèmes Entrée–Sortie de la classe  $\mathcal{A}$ , pour les cas monovariabiles et multivariabiles, dans les sections 2.4 et 2.5 respectivement.

## 2.4 Calcul des bornes pour un système Entrée–Sortie monovariable

Dans notre travail, les résultats formulés pour les systèmes contraints, sont principalement basés sur le calcul des bornes des systèmes de la classe  $\mathcal{A}$ , que nous avons présentée dans la section précédente. La prise en compte de ces contraintes revient à imposer aux variables concernées une certaine évolution dans des ensembles donnés. Pour les systèmes monovariabiles, les contraintes sont exprimées par des inégalités qui se traduisent par l'évolution des variables dans des intervalles bornés, formulés par les conditions (1.5), (1.6) et (1.7). De façon équivalente, le respect des contraintes revient à vérifier leur appartenance à des intervalles d'évolution donnés. En effet, l'approche utilisée est basée sur le calcul des bornes des systèmes Entrée–Sortie de la classe  $\mathcal{A}$ . Nous considérons le système contraint monovariable de la forme (2.4), dont nous rappelons l'expression,

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Le but étant d'établir les bornes exactes atteintes par la sortie de ce système, quand son entrée est contrainte et évolue dans un intervalle borné et fermé. Le théorème suivant établit les bornes exactes atteintes par la sortie du système correspondant à une telle entrée.

**Théorème 2.3.** *Soit un système Entrée–Sortie de la forme (2.4) où le noyau  $h$  est un élément positif de la classe  $\mathcal{A}$ . Pour toute entrée bornée du système, soit  $u$  vérifiant  $m_u \leq u(t) \leq M_u$  pour tout  $t \geq 0$ , avec  $m_u$  et  $M_u$  deux réels positifs non nuls. La sortie du système  $y$  est bornée de la façon suivante :*

$$\|h\|_{\mathcal{A}} \cdot m_u \leq y(t) \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot M_u. \quad (2.18)$$

De plus, ces bornes sont exactes, avec :

$$\inf_{m_u \leq u(t) \leq M_u} \{y(t)\} = \|h(t)\|_{\mathcal{A}} \cdot m_u, \quad \text{et} \quad \sup_{m_u \leq u(t) \leq M_u} \{y(t)\} = \|h(t)\|_{\mathcal{A}} \cdot M_u.$$

*Démonstration.* La positivité de  $y(t)$  est évidente sous les hypothèses de positivité de  $h$  et de  $u$ . De plus, le système ainsi décrit par l'expression (2.4) et étant de la classe  $\mathcal{A}$ , le théorème 2.3 montre que la sortie du système vérifie l'appartenance suivante :

$$\|y(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}, \text{ pour } t \geq 0. \quad (2.19)$$

L'entrée  $u(t)$  étant bornée sous la forme  $m_u \leq u(t) \leq M_u$ , et par définition de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty}$ , nous avons alors la condition suivante :

$$m_u \leq \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq M_u.$$

Celle-ci reportée dans l'équation (2.19) établit les bornes (2.18) du théorème. La démonstration de l'exactitude de ces bornes est immédiate, en considérant la définition suivante de la norme  $\|h\|_{\mathcal{A}}$  en terme de la norme  $\mathcal{L}_\infty$ -induite :

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|h * u\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}} = \|h\|_{\mathcal{A}}.$$

□

Ces résultats montrent que pour un système Entrée-Sortie monovariante de la classe  $\mathcal{A}$ , nous pouvons décrire exactement les limites atteintes par la sortie du système, connaissant uniquement la contrainte imposée sur son entrée et le noyau de convolution qui correspond à son transfert. Il est intéressant de souligner que ces inégalités, en plus de quantifier les bornes minimales et maximales atteintes lorsque  $t$  tend vers l'infini, permettent de borner la sortie du système à tout instant  $t$ .

**Remarque 2.1.** *Sous les hypothèses du théorème 2.3, nous vérifions qu'à tout instant  $t \geq 0$ , la sortie  $y(t)$  vérifie l'inégalité suivante :*

$$m_u \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau \leq y(t) \leq M_u \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

Cette caractérisation permet de suivre et de vérifier en temps réel l'évolution des trajectoires du système. Aussi, nous constatons que l'intervalle de variation de la sortie suit les mêmes caractéristiques que l'intervalle d'entrée. Dans la section suivante, nous allons présenter ces résultats de calcul de bornes pour des systèmes multivariants.

## 2.5 Bornes du système Entrée-sortie multivariable

Les résultats présentés dans la section précédente pour un système monovariante, sont étendus aux systèmes multivariants de la classe  $\mathcal{A}$  sous la forme (2.5). Ces systèmes sont contraints de sorte que chaque variable évolue, non plus dans un intervalle, mais dans un polyèdre, comme par exemple les contraintes polyédrales (1.9), (1.10) et (1.11) pour le système logistique multivariable. Chaque polyèdre résulte de l'agrégation des multiples contraintes sur chaque composante des variables du système. Pour cela, nous présentons d'abord les propriétés préliminaires des polyèdres et des ensembles convexes, qui seront utilisées par la suite pour le calcul des bornes pour le cas multivariable.

### 2.5.1 Polyèdres et ensembles convexes

Cette section présente un rappel sur la notion de polyèdres et les principales propriétés utilisées dans notre travail. Nous nous référons à [Blanchini et Miani (2008)], qui proposent les définitions suivantes de polyèdres et des ensembles convexes.

**Définition 2.3.** (*Polyèdre*)

Étant donné une matrice  $P \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et un vecteur  $\pi \in \mathbb{R}^q$ , le polyèdre  $\text{Pol}(P, \pi)$  est défini par la forme suivante :

$$\text{Pol}(P, \pi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px \leq \pi\}. \quad (2.20)$$

Chaque ligne de l'inégalité  $Px \leq \pi$  définit un demi-espace de  $\mathbb{R}^n$ , limité par le plan  $Px = \pi$ . Un polyèdre est donc un ensemble convexe, issu de l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un polyèdre borné, aussi appelé polytope, est un ensemble convexe finement généré et défini comme suit.

**Définition 2.4.** (*Ensemble convexe*)

Une matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times r}$  étant donnée, l'ensemble convexe généré par  $C$  est défini par la forme ci-contre :

$$\text{Conv } C = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists v \in \Gamma, x = Cv\}, \quad (2.21)$$

où l'ensemble de combinaisons convexes de dimension  $r$ , est défini sous la forme suivante :

$$\Gamma(r) = \{v \in \mathbb{R}^r \mid v \geq 0, \sum_{i=1}^r v_i = 1\}. \quad (2.22)$$

En se basant sur les définitions de polyèdres et de polytopes, nous introduisons le célèbre théorème de Minkowski-Weyl (voir par exemple [Schrijver (1986)]). Il annonce

que chaque polytope peut être représenté de deux façons équivalentes, soit sous la forme d'un polyèdre défini par un ensemble fini d'inégalités linéaires (2.20), soit par un ensemble de combinaisons convexes (2.21) de dimension appropriée.

**Théorème 2.4.** (*Minkowski-Weyl*). *Un ensemble  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  étant donné, les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\mathcal{P}$  est borné, il existe un entier  $q \in \mathbb{N}$ , une matrice réelle  $P \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et un vecteur réel  $\pi \in \mathbb{R}^q$ , de sorte que  $\mathcal{P}$  soit égal à  $\text{Pol}(P, \pi)$ .
- (ii) Il existe une matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , telle que  $\mathcal{P}$  soit l'ensemble convexe généré par les colonnes de  $M$ , soit  $\mathcal{P} = \text{Conv } M$ .

Ce résultat présente un outil fondamental de l'étude que nous détaillons dans le chapitre 3. Ensuite, nous présentons les résultats préliminaires énoncés dans les travaux [Moussaoui *et al.* (2014)], sur les propriétés des ensembles convexes, qui vont servir de base pour établir les bornes du système Entrée-Sortie multivariable.

**Lemme 2.1.** *Pour un vecteur  $w \in \mathbb{R}^r$ , où  $r$  est un entier positif, la propriété suivante est vérifiée :*

$$\max_{v \in \Gamma} \{w^T v\} = \max_{i=1}^r \{w_i\}. \quad (2.23)$$

De plus, l'identité suivante est toujours vraie pour toute matrice  $C \in \mathbb{R}^{r \times q}$  :

$$\max_{x \in \text{Conv } C} \{w^T x\} = \max_{i=1}^q \{(w^T C)_i\}. \quad (2.24)$$

*Démonstration.* Le produit de deux vecteurs est défini par  $w^T v = \sum_{i=1}^r w_i v_i$ . Sachant que  $w_i \leq \max_{i=1}^r \{w_i\}$  pour  $i = 1$  à  $r$ , et que  $v \geq 0$ , nous vérifions l'inégalité suivante :

$$w^T v \leq \max_{i=1}^r \{w_i\} \sum_{i=1}^r v_i.$$

Le vecteur  $v$  étant élément de l'ensemble  $\Gamma$ , nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$\max_{\Gamma} \{w^T v\} \leq \max_{i=1}^r \{w_i\}.$$

Nous montrons que les membres de droite de cette inégalité est une bornes exacte. Pour un indice  $j$  tel que  $w_j = \max_{i=1}^r \{w_i\}$ , nous obtenons ainsi l'inégalité (2.23) en choisissant  $v_j = 1$  pour  $i = j$ , et  $v_j = 0$  pour  $i \neq j$ . On a ainsi  $\max_{x \in \text{Conv } C} \{w^T x\} = \max_{v \in \Gamma} \{w^T C v\}$ .

L'identité (2.24) est alors déduite de l'expression (2.23) en appliquant la définition (2.21) de l'ensemble convexe.  $\square$

Les résultats présentés dans cette section portent essentiellement sur les caractéristiques des ensembles convexes et des ensembles polyédrales que nous considérons. Ces résultats sont essentiels pour le calcul des bornes qui sont l'objet de la section suivante.

## 2.5.2 Calcul des bornes pour un système multivariable

Dans cette section, nous considérons des systèmes Entrée–Sortie de la forme (2.5), dont l'entrée est contrainte dans un polytope convexe de la forme (2.21). En se basant sur les résultats de la section précédente, les auteurs [Moussaoui *et al.* (2014)] et [Loiseau (2017)] ont formulé dans le théorème suivant les bornes polyédrales du système (2.5).

**Théorème 2.5.** *Soit un système de la forme (2.5) dont l'entrée  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  varie dans un ensemble convexe de la forme (2.21), la sortie  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  évolue dans le polyèdre  $\text{Pol}(P, \pi)$  défini sous la forme (2.20), si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour  $i = 1$  à  $q$  :*

$$\int_0^t \max_{j=1}^r \{(PH(\tau)C)_{ij}\} d\tau \leq \pi_i.$$

*Démonstration.* Nous procédons en utilisant d'abord, la définition (2.20) du polyèdre  $\text{Pol}(P, \pi)$ , suivie de la définition (2.5) de la sortie système  $y(t)$ . Ensuite, nous utilisons la définition (2.21) de l'ensemble convexe  $\text{Conv } C$  et appliquons enfin le résultat du lemme 2.1. En effet, nous aboutissons aux équivalences successives ci-dessous :

$$\begin{aligned} y(t) \in \text{Pol}(P, \pi) &\Leftrightarrow Py \leq \pi && , \text{ par la définition (2.20),} \\ &\Leftrightarrow \int_0^t PH(\tau)u(t-\tau)d\tau \leq \pi && , \text{ par la définition (2.5),} \\ &\Leftrightarrow \int_0^t PH(\tau)Cv(t-\tau)d\tau \leq \pi && , \text{ par la définition (2.21),} \\ &\Leftrightarrow \int_0^t \max_{j=1}^r \{(PH(\tau)C)_{ij}\} d\tau \leq \pi_i && , \text{ selon le lemme 2.1.} \end{aligned}$$

Les composantes  $H_{ij}$  de la matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sont les noyaux de convolution du système multivariable appartenant à la classe  $\mathcal{A}$ . Sous cette hypothèse, le vecteur  $v(t-\tau)$  appartient à l'ensemble des combinaisons convexes  $\Gamma$ , ce qui permet d'appliquer le lemme 2.1. Le fait que ce lemme donne des bornes exactes, constitue un résultat essentiel pour obtenir la dernière équivalence, et achever la démonstration.  $\square$

Les résultats donnés dans le théorème 2.5 sont ensuite étendus dans les travaux [Moussaoui *et al.* (2014), Loiseau (2017)], afin d'obtenir des bornes explicites atteintes pour le système Entrée-Sortie de la forme (2.5). Ainsi, les bornes atteintes par chaque composante du vecteur de sortie sont énoncées dans le corollaire suivant, dans le cas où l'entrée évolue dans le polytope  $\text{Conv } C$ .

**Corollaire 2.2.** *Soit un système de la forme (2.5) dont l'entrée  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  évolue dans un polytope  $\text{Conv } C$  de la forme (2.21). Les inégalités suivantes sont alors vérifiées, pour tout instant  $t \geq 0$  et  $i = 1$  à  $n$  :*

$$\int_0^t \min_{j=1}^r \{(H(\tau)C)_{ij}\} d\tau \leq y_i(t) \leq \int_0^t \max_{j=1}^r \{(H(\tau)C)_{ij}\} d\tau.$$

*De plus, ces inégalités constituent des bornes exactes et atteignables par la sortie  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  du système, en ce sens que pour chaque valeur de  $i$  et de  $t$ , il existe une entrée  $u$  pour laquelle l'égalité stricte est obtenue.*

*Démonstration.* La borne supérieure du corollaire est obtenue en remplaçant la matrice  $P$  par  $I_n$  dans le théorème 2.5. La borne inférieure est obtenue pour  $P = -I_n$ , et en admettant l'identité  $\min_j \{x_j\} = -\max_j \{-x_j\}$ , et la condition  $-\max_{v \in \Gamma} \{-x_j v_j\} = \min_{v \in \Gamma} \{x_j v_j\}$ , du lemme 2.1. Ces bornes sont exactes du fait que les bornes proposées dans le lemme 2.1 sont elles-même exactes. De plus, si  $j(\tau)$  vérifie  $(H(\tau)C)_{ij(\tau)} = \max_{k=1}^r \{(H(\tau)C)_{ik}\}$ , alors la borne supérieure est atteinte en choisissant la commande  $u(\tau) = Cv(\tau)$ , avec  $v_i(\tau) = 1$ , si  $i = j(\tau)$ , et  $v_i(\tau) = 0$ , si  $i \neq j(\tau)$ . De la même façon, la borne inférieure est atteinte en utilisant une commande, qui maximise  $-y_i(t)$  et qui est définie pour un indice  $j(\tau)$  vérifiant  $(H(\tau)C)_{ij(\tau)} = \min_{k=1}^r \{(H(\tau)C)_{ik}\}$ , ce qui complète la démonstration.  $\square$

En résumé, les résultats de calcul des bornes que nous avons présentés dans le théorème 2.5 et le corollaire 2.2, pour les systèmes Entrée-Sortie multivariables de la classe  $\mathcal{A}$ , sont intéressants du fait que les bornes calculées sont exactes. En particulier, ces résultats sont utilisés dans le chapitre 3 pour le calcul des bornes d'une différente classe de systèmes que comporte la classe  $\mathcal{A}$ . L'exactitude des bornes atteintes ouvre un grand champ d'applications de ces calculs. Nous utiliserons ces bornes dans la section suivante, pour décrire des méthodes de vérification des contraintes et le principe d'invariance.

## 2.6 Principe d'invariance et invariance polyédrale

Le principe d'invariance est une des notions de base en automatique et de la théorie de commande. Ce concept déclare qu'un ensemble est invariant pour un système dynamique, si les trajectoires initialisées dans cet ensemble évoluent dans ce même ensemble. Le principe d'invariance répond aussi bien aux questions d'existence de contrôleurs réalisables pour des systèmes contraints. En effet, les contraintes sur l'état d'un système ou sur ses variables d'entrée de commande ou de perturbation, définissent des domaines admissibles dans lesquels l'évolution de ces variables est contenue, de façon à satisfaire les spécifications imposées. Le respect de ces contraintes revient alors à vérifier l'invariance de ces domaines, ou à trouver sous quelles conditions ils le deviennent [Benvenuti et Lorenzo (1998)]. Il s'agit dans ce cas de trouver la loi de commande qui oblige les trajectoires de ces variables à rester dans les domaines admissibles. Nous parlons alors d'invariance contrôlée [Basile et Marro (1992)] ou de  $(A, B)$ -invariance [Dorea et Hennet (1999), (Blanchini et al., 1999)]. Le concept de  $\mathcal{D}$ -invariance, introduit par Blanchini [Blanchini (1990)], étend le principe d'invariance, pour résoudre les problèmes de rejet de perturbation, au cas où le système est soumis à une perturbation arbitraire et bornée. Les résultats des travaux mentionnés précédemment portent sur des systèmes linéaire invariant en temps de dimension finie. D'autres auteurs se sont intéressés à l'extension et généralisation de ces travaux dans le cas de systèmes à dimension infinie et des structures sur anneaux [Hennet et Tarbouriech (1997)]. De plus, les notions d'invariance ne sont pas seulement utilisées dans la théorie du contrôle, mais aussi dans de nombreux sujets tels que la commande par prédiction [Mayne et al. (2000)], la commande des capteurs tolérants aux pannes [Olaru et al. (2010)], et la stabilité des équations retardées aux différences [Laraba et al. (2015)]. Dans cette section, nous nous intéressons à ces questions d'invariance, dans le cadre de la résolution des problèmes de commandes contraintes que nous mettons en œuvre pour le contrôle de nos systèmes logistiques. Pour commencer, nous présentons les conditions d'invariance d'intervalles pour des systèmes monovariabiles. Puis, nous passerons en revue les définitions d'invariance pour le cas de systèmes linéaires multivariabiles avec des contraintes polyédrales.

### 2.6.1 Conditions d'invariance du système monovariabiles

Avant d'énoncer les conditions d'invariance pour un système monovariabiles, nous introduisons d'abord des résultats de littérature [Nagumo (1942)], qui formalisent la condition

d'invariance d'un ensemble fermé dans le théorème 2.6, pour un système général de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

**Définition 2.5.** (*Cône contingent [Nagumo (1942)]*)

Étant donné un ensemble convexe fermé  $\Omega$  avec  $x$  un élément de  $\Omega$ , le cône contingent à  $\Omega$  au point  $x$  est défini par l'ensemble suivant :

$$\tau_{\Omega}(x) = \left\{ z \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(x + hz, \Omega)}{h} = 0 \right\},$$

où  $\text{dist}(x, \Omega)$  est la fonction distance.

**Théorème 2.6.** (*Condition d'invariance [Nagumo (1942)]*). Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , et  $\Omega$  un sous-ensemble de son espace d'état, qui admet une solution unique pour toute condition initiale  $x(0) \in \Omega$ . L'ensemble  $\Omega$  est dit invariant pour ce système, si et seulement si la condition suivante est vérifiée pour tout  $x$  appartenant à  $\Omega$  :

$$f(x(t)) \in \tau_{\Omega}(x).$$

La condition d'invariance donnée par le théorème 2.6, a été initialement proposée par Nagumo [Nagumo (1942)], et reprise fréquemment dans la littérature. Cette condition désigne que les trajectoires générées par le système restent généralement dans l'ensemble  $\Omega$  si, pour tout point  $x$  appartenant au contour de  $\Omega$ , la dérivée du système est dirigée vers l'intérieur de l'ensemble  $\Omega$ .

Dans notre contexte, nous allons souvent utiliser cette propriété avec des intervalles afin de formuler les conditions explicites d'invariance des intervalles fermés pour les systèmes monovariabiles. Dans ce cas, la fonction  $f$  est scalaire, et l'ensemble  $\Omega$  correspond à un intervalle fermé de la forme  $[\alpha, \beta]$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels positifs. Nous nous référons aux travaux [Moussaoui (2014)] pour la formulation du résultat suivant.

**Théorème 2.7.** Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , qui vérifie  $x(0) \in \Omega$  avec  $\Omega = [\alpha, \beta]$ . L'intervalle  $\Omega$  est dit invariant pour ce système si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$f(\alpha) \geq 0, \quad \text{et} \quad f(\beta) \leq 0. \tag{2.25}$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est apportée en appliquant le théorème 2.6. Nous caractérisons en premier lieu les cônes contingents pour l'intervalle  $\Omega$ . Pour  $x \in ]\alpha, \beta[$ ,

nous remarquons que l'ensemble  $\tau_\Omega(x)$  n'est autre que l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , puisque la distance  $\text{dist}(x + hz, \Omega)$  est nulle pour toute variable  $z \in \mathbb{R}$  et pour  $h$  tend vers 0. Lorsque  $x(t) = \alpha$ , la variable  $z$  doit être positif de façon à ce que le cône soit dirigé vers l'intervalle. Nous constatons en effet, que si  $z$  est négatif, alors  $\alpha + hz$  n'appartient pas à l'intervalle donné. Dans ce cas,  $z$  étant positif nous obtenons la limite ci-contre :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(\alpha + hz, \Omega)}{h} = \frac{hz}{h} = z,$$

du fait que  $\tau_\Omega(x) = \mathbb{R}^+$ . De la même façon, pour la borne supérieure de l'intervalle, soit  $x(t) = \beta$ , la variable  $z$  doit être négatif, et le cône contingent correspond en ce point à  $\tau_\Omega(x) = \mathbb{R}^-$ , d'où les conditions du théorème.  $\square$

Dans ce qui suit, nous considérons le cas du système monovarié avec une entrée supplémentaire de perturbation. Nous parlons alors du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance, que nous définissons d'abord pour un ensemble convexe fermé  $\Omega$ , sous l'effet de l'évolution de l'entrée  $d(t)$  dans un ensemble noté  $\mathcal{D}$ .

**Définition 2.6.** ( *$\mathcal{D}$ -invariance [Blanchini et Miani (2008)]*).

Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$  donné avec  $\Omega$  un sous-ensemble de son espace d'état, et une perturbation  $d(t)$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{D}$ . L'ensemble  $\Omega$  est dit  $\mathcal{D}$ -invariant pour ce système si, pour toute condition initiale dans  $\Omega$ , les trajectoires générées par ce système sont toutes incluses dans  $\Omega$ , pour tout instant  $t$ , et toute perturbation  $d(t)$  évoluant dans  $\mathcal{D}$ .

Pour un système dynamique monovarié de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t) - d(t))$ , la condition de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle fermé  $\Omega = [\alpha, \beta]$  est donnée par le théorème suivant [Moussaoui (2014)]. Dans ce cas, identiquement à l'intervalle  $\Omega$ , la perturbation  $d(t)$  varie arbitrairement dans l'intervalle fermé  $\mathcal{D} = [\gamma, \delta]$ , où  $\gamma$  et  $\delta$  sont deux réels positifs.

**Théorème 2.8.** Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t) - d(t))$  qui vérifie  $x(0) \in \Omega$  avec  $\Omega = [\alpha, \beta]$ , et  $d(t) \in \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = [\gamma, \delta]$ . L'intervalle  $\Omega$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour ce système si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$f(\alpha) \geq \delta, \quad \text{et} \quad f(\beta) \leq \gamma. \quad (2.26)$$

*Démonstration.* La preuve est obtenue directement en considérant la preuve du théorème 2.7 précédent. En effet, le calcul du cône contingent est identique, de sorte que  $\tau_\Omega(x) = \mathbb{R}$

pour  $x \in ]\alpha, \beta[$ , c'est-à-dire à l'intérieur de l'intervalle, et  $\tau_\Omega(x) = \mathbb{R}^+$  pour la borne supérieure  $x(t) = \alpha$ , et  $\tau_\Omega(x) = \mathbb{R}^-$  pour la borne inférieure  $x(t) = \beta$ . En effet, nous vérifions la condition  $f(\alpha) - d(t) \geq 0$  pour  $x(t) = \alpha$ , ou de façon équivalente  $f(\alpha) \geq d(t)$ , et que la condition  $f(\beta) - d(t) \leq 0$  est obtenue pour  $x(t) = \beta$ . La demande  $d(t)$  étant bornée par l'intervalle  $\mathcal{D} = [\gamma, \delta]$ , les inégalités précédentes se réécrivent sous les formes  $f(\alpha) \geq \delta$  et  $f(\beta) \leq \gamma$  respectivement. Ce qui établit les conditions d'invariance données par ce théorème.  $\square$

En relation avec notre travail, les résultats obtenus permettent une bonne synthèse des commandes stabilisantes pour les systèmes logistiques contraints qui nous intéressent. Les contraintes auxquelles sont soumis ces systèmes dans le cas monovarié sont exprimées par des inégalités, qui se traduisent par l'évolution des variables dans des intervalles bornés, tels que ceux formulés par les conditions (1.5), (1.6) et (1.7). En effet, la vérification de ces contraintes revient à appliquer le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance, comme nous le verrons dans les chapitres 5, 8 et 9. Dans la section suivante, nous allons présenter ces notions d'invariance pour les systèmes multivariés, où les contraintes se présentent sous forme d'ensembles polyédraux.

## 2.6.2 Propriétés d'invariance polyédrale

Dans cette section, nous présentons les concepts de base du principe d'invariance des ensembles des polyédraux pour les systèmes multivariés. Nous nous intéressons en particulier aux concepts de  $\mathcal{D}$ -invariance et de l'invariance contrôlée. Pour commencer, nous présentons la définition d'invariance connue dans la littérature [[Castelan et Hennet \(1993\)](#)], pour un système dynamique de la forme :

$$\dot{x}(t) = -Ax(t), \tag{2.27}$$

où  $A$  est une matrice constante de dimension appropriée.

**Définition 2.7.** (*Invariance polyédrale*)

Un polyèdre  $\mathcal{P} = \text{Pol}(P, \pi)$  de la forme (2.20) est dit invariant pour le système (2.27) si, pour tout vecteur initial  $x(0) \in \mathcal{P}$ , les trajectoires du vecteur de sortie  $x(t)$  sont contenues dans le polyèdre  $\mathcal{P}$ , pour tout instant  $t \geq 0$ .

Cette définition est en fait une généralisation de la définition d'invariance du système monovarié, au cas où l'ensemble convexe  $\Omega$  correspond au polyèdre convexe  $\mathcal{P}$ .

D’ailleurs, si les systèmes dynamiques multivariés de la forme (2.27) sont soumis à des entrées de perturbation, qui varient de façon arbitraire dans un polyèdre noté  $\mathcal{D}$ , nous parlons ainsi du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance polyédrale. Dans ce contexte, nous présentons la définition suivante, introduite par Blanchini [Blanchini (1990)].

**Définition 2.8.** ( *$\mathcal{D}$ -Invariance polyédrale*)

Étant donné le système de la forme  $\dot{x}(t) = -Ax(t) - Ed(t)$ , le polyèdre  $\mathcal{P} = \text{Pol}(P, \pi)$  vérifiant (2.20) est dit invariant si, pour tout vecteur initial  $x(0) \in \mathcal{P}$ , les trajectoires du vecteur de sortie  $x(t)$  sont contenues dans le polyèdre  $\mathcal{P}$  pour tout instant  $t \geq 0$ , et ceci pour n’importe quelle variation de l’entrée de perturbation  $d(t)$  dans l’ensemble polyédral convexe  $\mathcal{D}$ .

En outre, nous considérons le problème de commande du système dynamique multivarié défini sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Bu(t), \quad (2.28)$$

où les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes et de dimensions appropriées. Dans ce cas, l’entrée de commande  $u(t)$  est contrainte dans un ensemble polyédral convexe noté  $\mathcal{U}$ . En effet, la propriété d’invariance contrôlée ou de  $(A, B)$ -invariance d’une région polyédrale est introduite dans la littérature. Nous présentons la propriété de l’invariance contrôlée dans ce qui suit, en se référant aux travaux de [Dorea et Hennes (1999)].

**Définition 2.9.** (*Invariance contrôlée*)

Un polyèdre  $\mathcal{P} = \text{Pol}(P, \pi)$  vérifiant (2.20) est dit invariant contrôlé ou  $(A, B)$ -invariant pour le système de la forme (2.28), si pour tout vecteur initial  $x(0) \in \mathcal{P}$ , il existe une loi de commande vérifiant  $u(t) \in \mathcal{U}$ , de sorte que les trajectoires du vecteur de sortie  $x(t)$  sont incluses dans le polyèdre  $\mathcal{P}$ , pour tout instant  $t \geq 0$ .

Enfin, les résultats obtenus de l’invariance contrôlée ont été étendus dans les travaux de [Dorea et Hennes (1999)] et [Blanchini et al. (1999)], pour la résolution des problèmes de commande et de rejet de perturbation. Identiquement à la définition 2.8, nous décrivons le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée, pour les systèmes de la forme (2.28) soumis à des entrées de perturbations, qui varient de façon arbitraire dans le polyèdre  $\mathcal{D}$ .

**Définition 2.10.** ( *$\mathcal{D}$ -invariance contrôlée*)

Un polyèdre  $\mathcal{P} = \text{Pol}(P, \pi)$  vérifiant (2.20) est dit  $\mathcal{D}$ -invariant contrôlé pour le système

de la forme :

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Bu(t) - Ed(t),$$

si pour tout vecteur initial  $x(0) \in \mathcal{P}$ , il existe une loi de commande vérifiant  $u(t) \in \mathcal{U}$ , de sorte que les trajectoires du vecteur de sortie  $x(t)$  sont incluses dans le polyèdre  $\mathcal{P}$  pour tout instant  $t \geq 0$ , et pour n'importe quelle perturbation vérifiant  $d(t) \in \mathcal{D}$ .

En transposant les définitions précédentes de  $\mathcal{D}$ -invariance et de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée pour les systèmes multivariables à contraintes polyédrales, des conditions d'existence des stratégies de commande sous l'effet des perturbations, sont proposées dans la littérature. De plus, selon la description duale des régions polyédrales, par une représentation de demi-espace (2.20) ou par une représentation convexe (2.21), nous verrons dans le chapitre 3 plusieurs formulations des conditions d'invariance. Nous nous basons en particulier sur les conditions nécessaires et suffisantes proposées dans les travaux de [Dorea et Hennet (1999), Blanchini *et al.* (1999)], pour déterminer dans la section 3.5, une nouvelle caractérisation des conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance polyédrale. Ce résultat va permettre de résoudre le problème de commande du modèle multivariable (1.8) des réseaux logistiques, et de vérifier le respect des contraintes polyédrales (1.9), (1.10) et (1.11).

Cependant, ces concepts d'invariance et d'inclusion polyédrales, conduisent à des problèmes de calcul algébrique. Pour cela, nous introduisons dans la section suivante, la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin pour la résolution des ensembles à inégalités linéaires.

## 2.7 Méthode d'élimination de Fourier Motzkin

La projection d'un ensemble polyédral de l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  sur un de ses sous espaces vectoriels est aussi un polyèdre. Celui-ci peut être décrit par un ensemble d'inégalités, sous la forme (2.20). La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin est une méthode qui sert à déterminer cet ensemble d'inégalités. Cette méthode d'élimination est utilisée dans les travaux [Kuhn (1956), Schrijver (1986), Hennet (1995)], pour résoudre la faisabilité d'inégalités linéaires simultanées pour des problèmes de programmation linéaire. Lorsque la procédure est appliquée à des problèmes linéaires, des variables continues sont éliminées des inégalités dans lesquelles elles se produisent. La procédure se base sur un réarrangement du système d'inégalités, selon la valeur des coefficients des inégalités. Le théorème<sup>5</sup>

---

5. Preuve dans l'annexe, section A.4

suisant décrit la méthode de Fourier-Motzkin lorsque la  $k^{\text{ème}}$  variable d'un ensemble de  $n$  variables est éliminée d'un système d'inégalités de dimension  $m$ .

**Théorème 2.9.** *Étant donné un ensemble de variables  $x_j$  pour  $j = 1$  à  $n$ , un système d'inégalités linéaires de dimension  $m$  est défini sous la forme suivante :*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m, \text{ et } 1 \leq j \leq n, \quad (2.29)$$

où  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont des coefficients constants. La procédure d'élimination d'une variable  $x_k$  est divisée en trois étapes. Premièrement, toutes les inégalités du système (2.29) dans lesquelles la variable  $x_k$  n'apparaît pas, c'est-à-dire pour des coefficients  $a_{ik} = 0$ , restent inchangées. Ensuite, il convient de remplacer les autres lignes ayant les coefficients  $a_{ik} > 0$  pour  $1 \leq i \leq p$ , par d'autres inégalités pour chaque indice  $i$ . De la même façon, les inégalités où les coefficients  $a_{i'k}$  sont strictement négatifs, sont également remplacées par d'autres inégalités pour  $p \leq i' \leq q$  avec  $p$  et  $q \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, un nouveau système équivalent est généré, sous la forme des inégalités linéaires de dimension  $(m - q) + p(q - p)$ , suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{a_{ij}}{a_{ik}} - \frac{a_{i'j}}{a_{i'k}} \right) x_j \leq \frac{b_i}{a_{ik}} - \frac{b_{i'}}{a_{i'k}}, \text{ pour } 1 \leq i \leq p, p < i' \leq q, \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \quad \quad , \text{ pour } q < i \leq m. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Géométriquement, le nouveau système (2.30) correspond à la projection d'un polyèdre de dimension  $n$ , défini par les inégalités (2.29), parallèlement à l'axe  $x_k$ .

La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin peut être interprétée dans deux directions. Mathématiquement, c'est une procédure d'élimination des variables intermédiaires dans un ensemble des inégalités linéaires. Du point de vue conceptuel, la recherche d'une solution de commande pour un système à contraintes polyédrales, s'interprète par une approche structurelle ensembliste que nous développons dans la section suivante.

## 2.8 Approche structurelle

De façon générale, le problème de base en automatique repose sur la conception du système de commande, destiné à piloter un système physique de façon à répondre à une

certaine spécification. Ça revient à déterminer les paramètres de commande en fonction des paramètres du système à piloter et les paramètres qui définissent la spécification. Cette méthode consiste donc à trouver la région admissible dans l'espace tridimensionnel de tous les paramètres. En fait, la projection de cette région parallèlement à l'espace des paramètres de commande, correspond à l'ensemble du système pour lequel il existe une loi de commande, qui répond au problème posé par la spécification. Cette idée simple a été largement déclinée dans le cadre de la commande des systèmes multivariables par une approche géométrique [Wonham (1979)] d'une part, et la théorie de la supervision des systèmes à événements discrets [Ramadge et Wonham (1987)]. Cette idée est également l'une des clés de l'approche structurelle que proposait Karcanias [Karcanias (1994)].

Dans un système de production, les paramètres du système sont d'une part les paramètres intrinsèques  $\theta$  et  $\sigma$ , et les contraintes de dimensionnement du système  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $y_{min}$  et  $y_{max}$  d'autre part. La spécification revient à pouvoir répondre à la demande des clients variante entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . Dans la suite de notre rapport, les solutions des problèmes de commande que nous proposons ainsi que leur résolution vont générer un ensemble d'inégalités linéaires. Et dans tous ces problèmes, nous allons définir les zones admissibles sous forme de polyèdres. En effet, les régions projetées dans l'espace des paramètres sont interprétées en terme de conditions d'existence de lois de commande admissibles pour le système de pilotage.

Dans le cas d'étude du système multivariable, précisément dans le chapitre 4, les résultats sont directement issues de cette vision structurelle, tout en caractérisant les conditions d'invariance polyédrales en terme de conditions d'existence de lois de commande admissibles. Dans le cas du système monovariable, les contraintes sont définies par des intervalles, ce qui simplifie la description de l'existence d'une famille de lois de commande admissibles. La formulation de résultats est donc plus explicite dans les parties III et IV du rapport.



# OBJECTIFS DE LA THÈSE

---

Dans cette première partie et précisément dans le chapitre 1, nous avons positionné notre travail de recherche. Il s'inscrit dans la thématique de pilotage des systèmes logistiques et de gestion des stocks, par une approche analytique issue de la théorie de la commande. Dans ce cadre, notre principal objectif revient à compléter les travaux de recherche existants, en tenant compte de la nature retardée des différents processus logistiques, des pertes de stockage, et en considérant des contraintes de saturation et de positivité liées aux ressources de production et aux capacités de stockage. La stratégie de commande proposée traite à la fois la question de régulation des flux, et aussi la question de conception et de dimensionnement préalable du système logistique.

La mise en place des concepts de commande, est issue des développements et des recherches autour des systèmes à retards contraints. Dans ce sens, nous avons introduit dans le chapitre 2, les concepts liés à l'analyse des systèmes à retards, notamment en ce qui concerne les systèmes à retards sur l'entrée et les techniques de stabilisation par feedback-prédicteur. Nous avons aussi présenté des résultats de calculs des bornes, basés sur le formalisme de la classe  $\mathcal{A}$  des systèmes Entrée-Sortie. Ces résultats permettent de considérer des applications importantes sur les problématiques de commandes contraintes, et qui portent sur l'invariance et la vérification de contraintes polyédrales.

Ces différents éléments sont essentiels pour la recherche et la synthèse des commandes stabilisantes et admissibles pour ces systèmes logistiques. Deux cas sont à considérer, selon la modélisation que ce soit d'un réseau logistique ou d'un système logistique élémentaire. Dans le premier cas, le modèle d'étude correspond à un système multivariable à retards quelconques sur l'entrée et soumis à des contraintes polyédrales, comme nous le verrons dans la partie II qui suit. Alors que dans le deuxième cas, le modèle décrit la dynamique d'évolution d'un système monovariable à retard pur sur l'entrée et avec des contraintes de type intervalle. Ce système est étudié dans la partie III pour des paramètres intrinsèques constants, et il fait l'objet de la partie IV, pour analyser la performance du système de pilotage, vis-à-vis des incertitudes du retard et du facteur de perte.



DEUXIÈME PARTIE

# Commande par invariance d'une classe de systèmes de convolution

---

## Introduction

Dans cette partie, nous traitons les configurations en réseau et en cascade des systèmes logistiques. Ces derniers représentés sous la forme (1.8), sont traités par des modèles interconnectés, dans lesquels les nœuds représentent les niveaux de stockage et les arcs représentent les flux des processus de production et d’approvisionnement. Un tel système composé de plusieurs unités de production suivies des niveaux de stocks, amplifie les petites perturbations qui se produisent suite à la variation de la demande des clients. Ce phénomène est connu sous le nom d’*Effet de Forrester*, car il a été d’abord remarqué par cet auteur [Forrester (1973)] (voir Section 1.3.2). Pour une chaîne logistique, plus la demande externe est éloignée, plus la perturbation du modèle est importante. Ce célèbre problème des systèmes logistiques a généré une série de travaux de recherche au cours des cinquante dernières années, comme nous l’avons vu dans les sections 1.3.2 et 1.4.

Pour faire face à ce problème, nous considérons les contraintes de dimensionnement (1.9), (1.10), et (1.11) respectivement associés à la production, au stockage et à la variation de la demande. Ainsi, notre modèle d’étude présente une classe de systèmes de convolution soumis à des contraintes polyédrales sur la sortie  $y(t)$ , sur l’entrée de commande  $u(t)$  et sur l’entrée de perturbation  $d(t)$ . La problématique que nous posons consiste alors à trouver une stratégie de pilotage qui garantisse le respect des contraintes de fonctionnement. Le travail est développé sous l’hypothèse que les retards multiples  $\theta$  et les facteurs de perte  $\sigma$ , sont connus exactement au niveau de tous les nœuds du réseau.

La contribution dans cette partie s’articule autour de deux axes principaux. Le premier porte sur la méthodologie de commande développée, en terme de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée pour les ensembles polyédrales convexes. Certains auteurs [Blanchini (1990), Tarbouriech and Hennet (1997), Blanchini *et al.* (2000a), Hennet (2003), Ignaciuk et Bartoszewicz (2013)] ont déjà utilisé le principe d’invariance polyédrale dans ce contexte. Nous fournissons une nouvelle caractérisation explicite de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des ensembles convexes pour les systèmes contraints à temps continu. Le second axe de cette partie est dédié à l’application des résultats théoriques sur un exemple de chaîne logistique. Nous déterminons dans le chapitre 4 des conditions améliorées d’invariance polyédrale, dans le cas où les retards de production sont identiques et les facteurs de perte sont égaux sur tous les nœuds.

# PILOTAGE DU SYSTÈME LOGISTIQUE EN CONFIGURATION RÉSEAU

---

## Table des matières

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Description du modèle multivariable</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>3.3</b>	<b>Passage du modèle retardé au modèle réduit</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>3.4</b>	<b>Intervalle multivariable</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>3.5</b>	<b>Conditions de <math>\mathcal{D}</math>-invariance contrôlée contrôlée du système réduit</b> . . . . .	<b>85</b>
3.5.1	Caractérisation du polytope invariant . . . . .	86
3.5.2	Paramétrisation de la loi de commande . . . . .	89
3.5.3	Complexité algorithmique de résolution . . . . .	90
<b>3.6</b>	<b>Conditions d’admissibilité du système à retards</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>3.7</b>	<b>Discussion de l’étude</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>3.8</b>	<b>Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>96</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au pilotage du réseau logistique en tant que système interconnecté. De point de vue de la commande, chaque nœud du réseau est un système dynamique, pour lequel le niveau de stockage est la sortie, l’ordre de production est l’entrée de commande et la demande correspond à une entrée de perturbation. À un premier niveau, notre objectif revient à proposer une structure de commande qui prenne en compte les spécifications du système, qui sont la présence de retards de production, les pertes de stockage et les contraintes de dimensionnement, et qui permette de réguler les niveaux de stockage et de limiter l’effet Forrester.

La méthodologie de commande est formulée en terme du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance pour des systèmes contraints à temps continu, tout en définissant une nouvelle caractérisation de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des ensembles polyédraux convexes. Dorea et Hennet [Dorea et Hennet (1999)] ont développé une caractérisation de la propriété d'invariance contrôlée pour les ensembles polyédraux. Des conditions sont ainsi établies sous forme d'inégalités matricielles. Cette étude a été ensuite étendue pour contrôler les systèmes perturbés et contraints. De plus, Blanchini et Miani [Blanchini *et al.* (1999)] ont développé une autre caractérisation, en terme de représentation convexe des polytopes. Notre approche fournit une caractérisation explicite de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée en se basant sur une double représentation des ensembles polytopiques. Cette nouvelle formulation a l'avantage de définir immédiatement une commande admissible, et de réduire la complexité algorithmique par rapport à l'approche de Blanchini et Miani.

Le chapitre est organisé comme suit. Nous rappelons dans la section 3.2, le modèle d'étude pour les systèmes en configuration réseau. Ce modèle est transformé en un système sans retard à l'aide de la réduction d'Artstein dans la section 3.3. La réduction d'Artstein permet d'introduire plus facilement une loi de commande stabilisante pour le système sans retard en utilisant des méthodes d'invariance, et qui est également stabilisante pour le système d'origine. Dans un premier temps, nous développons l'approche de commande dans la section 3.5, qui revient à déterminer une nouvelle caractérisation de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des polytopes pour le système réduit. Le deuxième problème, développé dans la section 3.6, consiste à trouver les conditions d'admissibilité de la loi de commande proposée pour le système à retards. Nous utilisons la relation entre les variables du système d'origine et du système réduit, pour déduire des conditions d'invariance pour le système d'origine. Enfin, nous terminons l'étude dans la section 3.7 par une discussion des difficultés principales qui seront étudiées dans les chapitres suivants.

## 3.2 Description du modèle multivariable

Dans cette partie, nous considérons le réseau logistique comme étant l'interconnexion de  $n$  systèmes logistiques élémentaires. Cette description conduit au modèle multivariable du système logistique à retard sur l'entrée. Nous rappelons le modèle introduit sous la forme (1.8) par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + \sum_{k=1}^h B_k u(t - \theta_k) - B_0 u(t) - Ed(t).$$

Pour des entiers  $n, m,$  et  $r \in \mathbb{N}$ , les vecteurs  $y(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, d(t) \in \mathbb{R}^r$  présentent respectivement, le vecteur de sortie, le vecteur d'entrée de commande et le vecteur de perturbation, alors que  $A, B_k$  pour  $k = 0$  à  $h$ , et  $E$  sont des matrices constantes de dimensions  $\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $\mathbb{R}^{n \times r}$  respectivement. Chaque composante du vecteur  $y(t)$  représente le niveau de stockage sur chaque nœud du réseau, tandis que les composantes de  $u(t)$  représentent les opérations de production et de transport sur les différents arcs. Elles sont effectuées en ligne pour répondre de manière satisfaisante à la demande des clients  $d(t)$ . Les paramètres intrinsèques du système sont d'une part les retards multiples  $\theta_k$  pour  $k = 0$  à  $h$ , qui représentent les délais de production et de transport des produits entre les différents nœuds du réseau, et d'autre part les pertes de produits périssables sur les niveaux de stockage, représentées par la matrice diagonale  $A$ .

Un exemple d'un réseau logistique de deux retards purs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est illustré en figure 3.1, sous forme d'un graphe composé de nœuds et d'arcs correspondant à des flux de production et de transport. Les vecteurs du système vérifient les dimensions  $y(t) \in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R}^6$  et  $d(t) \in \mathbb{R}$ . Les magasins en sortie  $y_2(t)$  et  $y_4(t)$  répondent à la demande des clients  $d(t)$ . Les deux usines en amont,  $y_1(t)$  et  $y_3(t)$ , sont associées à des systèmes de production sur lesquels il y a des retards de production. Ainsi, chacune des deux usines peut alimenter chacun des deux magasins avec des durées de transport  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

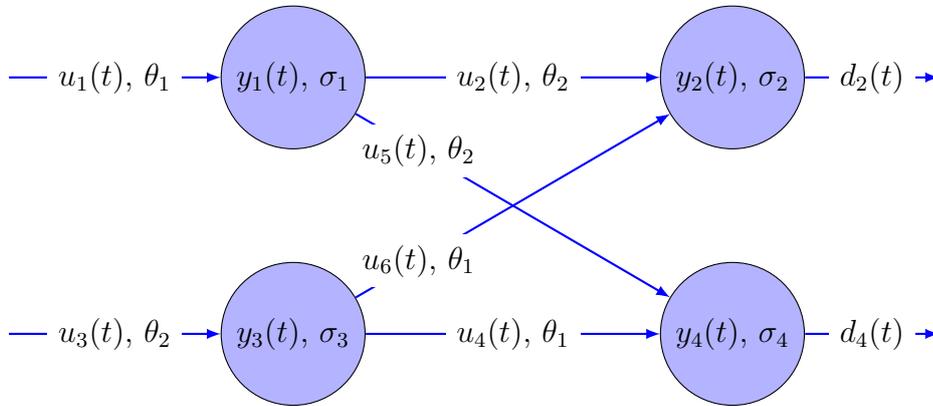


FIGURE 3.1 – Exemple d'un réseau logistique de dimension  $n = 4$

Les caractéristiques d'un tel système sont, la présence de retards et des contraintes de positivité et de saturation. En effet, les niveaux de stockage, les ordres de production et la demande sont essentiellement soumis aux contraintes (1.9), (1.10) et (1.11). Ces contraintes définissent trois intervalles multivariés considérés comme des polyèdres,

qui sont indiqués respectivement, par  $\mathcal{P}_y$ ,  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_d$  dans la suite.

Le problème fondamental auquel nous nous sommes confrontés est de concevoir une loi de commande qui stabilise le système retardé. Elle doit permettre aussi de respecter les contraintes imposées à la sortie (1.9) et à l'entrée de commande (1.10) sur tous les nœuds, pour chaque demande bornée vérifiant (1.11). L'approche de commande est formulée en terme de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée, ce qui permet en particulier de déterminer les conditions d'existence d'une loi de commande admissible. Dans ce contexte, nous introduisons la définition de la propriété de commande admissible pour le système à retards (1.8).

**Définition 3.1.** *Une loi de commande est dite admissible pour le système à retards (1.8) si, pour toute condition initiale  $y(0) \in \mathcal{P}_y$ , les contraintes (1.9) des différents niveaux de stockage  $y(t)$  et les contraintes (1.10) des ordres de production  $u(t)$  sont satisfaites pour  $t \geq 0$ , et ceci pour toute demande  $d(t)$  qui évolue dans le polytope  $\mathcal{P}_d$  de la forme (1.11).*

Ainsi, nous commençons la méthode de conception d'une commande admissible par l'élimination des retards sur les entrées de commande du système (1.8), en utilisant la réduction d'Artstein, dans la section suivante.

### 3.3 Passage du modèle retardé au modèle réduit

La méthode de conception d'une structure de commande admissible, commence par l'élimination des retards en se basant sur la prédiction de la sortie du système. Le principe de stabilisation par prédiction, introduit dans la section 2.3.2, permet de transformer les systèmes retardés en systèmes sans retard. Pour notre système à retards de la forme (1.8), nous définissons d'abord la variable réduite  $z(t)$  par l'égalité suivante :

$$z(t) = y(t) + \sum_{k=1}^h \int_{t-\theta_k}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta_k} B_k u(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Ensuite, nous définissons le système réduit correspondant au système logistique (1.8) par la proposition suivante. La réduction d'Artstein [Artstein (1982)] présente un résultat fondamental pour résoudre ce problème de commande.

**Proposition 3.1.** *Le système (1.8) et les matrices  $A$ ,  $B$  et  $E$  étant fixés, la variable  $z(t)$  définie par (3.1) satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{z}(t) = -Az(t) + Bu(t) - Ed(t), \quad (3.2)$$

avec  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et définie par  $B = \sum_{k=1}^h e^{A\theta_k} B_k - B_0$ .

*Démonstration.* Nous constatons que l'intégrale qui apparaît dans la définition (3.1) peut être réécrite par la formulation suivante,  $e^{-At} \int_{t-\theta_k}^t e^{A\tau} e^{A\theta_k} B_k u(\tau) d\tau$ . Sa dérivée est ensuite calculée en utilisant les formules habituelles des règles de produit de dérivation, et d'une intégrale dont l'intégrande ne dépend pas des bornes d'intégration. Nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t-\theta_k}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta_k} B_k u(\tau) d\tau = \\ -A \int_{t-\theta_k}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta_k} B_k u(\tau) d\tau + e^{A\theta_k} B_k u(t) - B_k u(t - \theta_k). \end{aligned}$$

La conclusion est ensuite obtenue par la dérivation temporelle de l'identité (3.1), et en utilisant la définition du système (1.8). □

La variable réduite  $z(t)$  correspond à la prédiction d'état définie par l'expression (2.15) de la section 2.3.2. L'idée de base de cette transformation revient à compenser entièrement les retards de la boucle de régulation, tout en générant le système dynamique sans retard sous la forme (3.2).

Ensuite, nous remarquons que la dynamique du système réduit dépend de l'entrée de commande  $u(t)$ , à laquelle est soumise une contrainte polyédrale (1.10). Les contraintes auxquelles est soumis le vecteur de sortie  $y(t)$  à travers les conditions (1.9), représentent aussi un ensemble polyédral  $\mathcal{P}_y$ . Le vecteur réduit  $z(t)$  évolue également dans un intervalle multivariable que nous définirons dans la section suivante, en se basant sur les représentations de demi-espaces et d'ensembles convexes.

## 3.4 Intervalle multivariable

Dans l'approche que nous proposons, nous définissons l'évolution du vecteur réduit  $z(t)$ , sous la forme d'un ensemble polyédral nommé  $\mathcal{P}_z$ . Le théorème 2.4 de la section 2.5, déclare que tout polyèdre convexe peut être décrit de façon équivalente par une représentation demi-espace sous la forme (2.20), ou par une représentation convexe de la forme (2.21). En d'autres termes, pour toute combinaison convexe définie par la matrice  $M$ , il existe une autre matrice  $P$  et un vecteur  $\pi$  tels que  $\text{Pol}(P, \pi) = \text{Conv } M$ . Et inversement, pour un polyèdre borné  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi)$ , il existe une matrice  $M$  vérifiant

$\text{Conv } M = \text{Pol}(P, \pi)$ . Ensuite, en se référant sur ces résultats, nous introduisons la définition de l'intervalle multivariable  $\mathcal{P}_z = [z^{\min}, z^{\max}]$ .

**Définition 3.2.** *L'intervalle multivariable  $[z^{\min}, z^{\max}]$  correspond à un ensemble polyédrale de la forme  $\mathcal{P}_z = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^{\min} \leq z \leq z^{\max}\}$ , où les vecteurs  $z^{\min}$  et  $z^{\max}$  sont de dimension  $n$  et vérifient l'hypothèse  $z^{\min} \leq z^{\max}$ .*

Les faces de l'intervalle multivariable sont en nombre  $q = 2 \times n$ . Elles correspondent aux sous-ensembles des vecteurs qui satisfont soit  $z_i = z_i^{\min}$  soit  $z_i = z_i^{\max}$ , pour un des indices  $i$ . De même, les sommets de l'intervalle multivariable  $\mathcal{P}_z$  sont les vecteurs qui, pour chaque indice  $i$ , satisfont l'une ou l'autre de ces deux égalités. Cet ensemble de sommets est de dimension  $p = 2^n$  et forme la matrice  $M$ . En effet, ces remarques sont utilisées pour déterminer la représentation de l'intervalle multivariable  $\mathcal{P}_z$  de façon équivalente par ses points sommets et par un ensemble fini de directions, tels qu'ils sont présentés dans la proposition suivante.

**Proposition 3.2.** *L'intervalle multivariable correspondant aux vecteurs  $z^{\min}$  et  $z^{\max}$  satisfait la représentation polytopique suivante :*

$$[z^{\min}, z^{\max}] = \text{Conv } M = \text{Pol}(P, \pi),$$

où la matrice  $P$  et le vecteur  $\pi$  sont définis comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \pi = \begin{pmatrix} z^{\max} \\ -z^{\min} \end{pmatrix},$$

et la matrice  $M$  de taille  $n \times 2^n$ , est définie pour  $j = 1$  à  $2^n$  par

$$M_{ij} = \begin{cases} z_i^{\min}, & \text{si } \beta_i(j-1) = 0, \\ z_i^{\max}, & \text{si } \beta_i(j-1) = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\beta_i(k)$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  bit de la représentation binaire de l'entier  $k$ , pour  $k$  variant de 0 à  $2^n - 1$ .

*Démonstration.* L'intervalle du système réduit  $\mathcal{P}_z = [z^{\min}, z^{\max}]$  correspond à l'ensemble des vecteurs  $z \in \mathbb{R}^n$  qui satisfont les deux conditions  $z(t) \leq z^{\max}$  et  $z^{\min} \leq z(t)$ . Ainsi, la définition de la matrice  $P$  et du vecteur  $\pi$  définis dans la proposition 3.2 correspondent à ces inégalités. Ensuite, Les colonnes de la matrice  $M$  représentent les sommets de l'intervalle  $[z^{\min}, z^{\max}]$ . Ils forment la famille  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{pour } i = 1 \text{ à } n, z_i = z_i^{\min} \text{ ou } z_i = z_i^{\max}\}$ .

La matrice  $M$  vérifiant cette famille est alors définie par une représentation binaire selon la proposition 3.2. □

Le polytope  $\mathcal{P}_z$  qui résume l'évolution du vecteur réduit  $z(t)$  étant défini, nous abordons dans la section suivante la structure de commande du modèle réduit. Elle consiste à déterminer une nouvelle caractérisation du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée contrôlé de l'ensemble polytopique  $\mathcal{P}_z$ , afin de trouver les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée contrôlée pour le système réduit (3.2).

### 3.5 Conditions de $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée contrôlée du système réduit

Nous avons utilisé la réduction d'Artstein dans la section 3.3 pour éliminer les retards et obtenir un système dynamique réduit exprimé sous la forme (3.2). Cette transformation va assurer la stabilité du système à retards (1.8) équivalent. De plus, nous avons défini le polytope de variation du vecteur réduit sous la forme  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi) = \text{Conv } M$ . À ce niveau, nous traitons l'approche de commande afin de déterminer les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du système réduit. L'invariance du polytope réduit permet ensuite de déterminer des conditions d'invariance de la variable d'origine  $y(t)$ , en utilisant la définition de la variable réduite  $z(t)$ , et de vérifier le respect des contraintes (1.9) et (1.10). La perturbation  $d(t)$  est soumise à une contrainte polyédrale de la forme (1.11), dont l'intervalle est noté  $\mathcal{D}$ . Cette section est donc consacrée à la caractérisation du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée pour le système réduit sans retard (3.2). Nous rappelons d'abord la définition du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des polytopes, introduite dans la section 2.6.2.

**Définition 3.3.** *Un ensemble  $\mathcal{P}_z$  est dit  $\mathcal{D}$ -invariant contrôlé pour le système réduit (3.2) avec une commande évoluant dans l'ensemble  $\mathcal{U}$  si, pour toute condition initiale  $z(0) \in \mathcal{P}_z$ , il existe une loi de commande vérifiant  $u(t) \in \mathcal{U}$  telle que la trajectoire du système réduit  $z(t)$  reste dans le polyèdre  $\mathcal{P}_z$  pour tout instant  $t \geq 0$ , et ceci pour n'importe quelle perturbation  $d(t)$  évoluant dans l'ensemble  $\mathcal{D}$  de la forme (1.11).*

Cette définition sert à déterminer une nouvelle caractérisation de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du polytope  $\mathcal{P}_z$ , pour le système réduit (3.2), dans la section suivante. Nous précisons pour la suite que la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $P$  est donnée par  $P_{r_i}$ , et que la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $M$  correspond à  $M_{c_j}$ .

### 3.5.1 Caractérisation du polytope invariant

Le système contraint à temps continu de la forme (3.2) soumis à une perturbation de la forme (1.11), présente une application intéressante du concept de  $\mathcal{D}$ -invariance pour étudier le problème fondamental de rejet de perturbation. En effet, suivant la double représentation d'un polyèdre convexe, par un ensemble fini d'inégalités linéaires (2.20) ou bien par un ensemble de combinaisons convexes (2.21), la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des ensembles polyédraux convexes peut être décrite par quatre formulations différentes. Deux d'entre elles sont les caractérisations développées dans les travaux de Dorea et Hennet [Dorea et Hennet (1999)], et les travaux de Blanchini et Miani [Blanchini et al. (1999)]. Nous décrivons une troisième caractérisation explicite de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des ensembles polyédraux pour les systèmes sans retard (3.2). D'abord, Blanchini et Miani fournissent dans leurs travaux [Blanchini et al. (1999)], une caractérisation de la propriété de l'invariance contrôlée définie dans la section 2.6.2 pour les systèmes à temps discret. Ils se basent uniquement sur la représentation convexe des polytopes sous la forme (2.21), en utilisant l'analyse duale du principe de l'invariance contrôlée des régions polyédrales. Les résultats sont obtenus sous forme de conditions géométriques et simples, mais de grande complexité combinatoire. Cette formulation nécessite non seulement le calcul de la matrice de commande  $U$ , mais aussi la recherche d'une matrice non négative, définie sur les sommets de l'ensemble convexe et dont les colonnes sont des éléments de l'ensemble convexe  $\Gamma(p)$ .

Ensuite, Dorea et Hennet [Dorea et Hennet (1999)] ont formulé une deuxième caractérisation modifiée pour les systèmes linéaires à temps continu, en se basant sur la représentation polyédrale des ensembles convexes. Des conditions nécessaires et suffisantes sont établies sous forme de relations linéaires entre les matrices du système. Cette étude de l'invariance contrôlée est ensuite étendue dans leur travail pour piloter les systèmes soumis à des perturbations. Nous parlons alors de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée. Ainsi, le théorème 3.1 présente les conditions générales de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée.

**Théorème 3.1.** ( *$\mathcal{D}$ -invariance contrôlée [Dorea et Hennet (1999)]*)

*Étant donné une matrice  $T$  vérifiant  $TPB = 0$ , dont le noyau est l'image de la matrice  $PB$ , un polyèdre  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi)$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système (3.2), pour n'importe quelle perturbation  $d \in \mathcal{D}$ , si et seulement si, il existe une matrice  $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$  qui vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned}
 FP &= TPA, \\
 F\pi &\leq T\delta, \quad \text{avec } \delta = \max_{d \in \mathcal{D}} (PED), \\
 F_{ij} &\geq 0, \quad \text{pour } T_{ij} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les résultats de ce théorème présentent les conditions d'invariance contrôlée des ensembles polyédraux convexes en termes d'existence d'une matrice contrainte  $F$  de dimension  $\mathbb{R}^{q \times q}$ . L'avantage de cette formulation est que les conditions obtenues sont testables par des algorithmes de programmation linéaire et d'analyse différentielle. En fait, une interprétation pratique de ces conditions est que le polyèdre  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi)$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système (3.2) si et seulement si, pour chaque point  $z$  de la face correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $P$ , de sorte que  $P_{r_i}z = \pi_i$ , et  $P_{r_j}z \leq \pi_j$ , pour  $j \neq i$ , il existe un vecteur de commande  $u \in \mathcal{U}$  qui vérifie la condition  $P_{r_i}(-Az + Bu - Ed) \leq 0$ , pour toute perturbation  $d \in \mathcal{D}$ . Pourtant, cette caractérisation ne peut résoudre notre problème de commande, car les contraintes sur l'entrée ne sont pas prises en compte à travers cette formulation.

Dans notre étude, nous proposons une caractérisation mixte de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée dans le théorème suivant. Cette formulation est basée sur une double description du polytope considéré comme nous l'avons introduit dans le théorème 2.4.

**Théorème 3.2.** *Étant donné une matrice  $D$  sous la forme  $\mathcal{D} = \text{Conv } D$ , qui définit  $\delta_i$  comme suit :*

$$\delta_i = \max_j (P_{r_i}ED)_j, \text{ pour } i = 1 \text{ à } q,$$

le polytope  $\mathcal{P}_z = \text{Conv } M = \text{Pol}(P, \pi)$  est alors  $\mathcal{D}$ -invariant contrôlé pour le système (3.2) si et seulement si, pour tout sommet  $M_{c_j}$  de  $\mathcal{P}$ , il existe un vecteur de commande  $U_{c_j} \in \mathcal{U}$ , telle que la condition suivante est vraie :

$$P_{r_i}(-AM_{c_j} + BU_{c_j}) \leq \delta_i, \tag{3.5}$$

pour chaque face contenant le sommet  $M_{c_j}$ , de sorte que  $P_{r_i}M_{c_j} = \pi_i$ . De plus, si  $\mathcal{U}$  est un ensemble convexe, une loi de commande admissible est alors définie par les matrices  $U \in \mathbb{R}^{m \times p}$  et  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , sous la forme suivante :

$$u(t) = Uv(t), \tag{3.6}$$

où le vecteur des combinaisons convexes  $v(t) \in \Gamma(p)$  est choisit à chaque instant  $t \geq 0$ ,

parmi ceux qui vérifient l'identité suivante :

$$z(t) = Mv(t). \quad (3.7)$$

*Démonstration.* Selon la définition 3.3, si le polytope  $\mathcal{P}_z$  est  $\mathcal{D}$ -invariant, alors la condition (3.5) est nécessairement satisfaite par chaque sommet du polytope. Ainsi, les vecteurs  $U_{c_j}$  qui sont déterminés successivement pour chaque sommet  $M_{c_j}$ , forment une matrice  $U$  qui permet de définir la loi de commande (3.6), pour chaque vecteur  $z(t) \in \mathcal{P}_z$ . Nous remarquons de plus que, par définition de la matrice  $M$ , un vecteur  $v(t) \in \Gamma(p)$  satisfaisant (3.7) peut être défini pour chaque vecteur  $z(t) \in \mathcal{P}_z$ . La suffisance des conditions vient du fait que cette loi de commande peut être utilisée pour vérifier la condition (3.5) du théorème 3.2. Considérons en effet un vecteur  $z$  qui se trouve sur l'une des faces du polyèdre  $\mathcal{P}_z$ . Il correspond alors à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $P$ , et présente une combinaison convexe des sommets qui satisfont  $P_{r_i} M_{c_j} = \pi_i$ . Si  $J_i$  désigne l'ensemble des indices de ces sommets, nous avons donc l'égalité  $z = \sum_{j \in J_i} \alpha_j M_{c_j}$ , avec  $\alpha_j \geq 0$  et  $\sum_{j \in J_i} \alpha_j = 1$ . Nous définissons ensuite un vecteur  $v$  par la formulation suivante :

$$v_j = \begin{cases} \alpha_j & , \text{pour } j \in J_i, \\ 0 & , \text{pour } j \notin J_i. \end{cases}$$

Cela correspond à la définition d'une loi de commande  $u = Uv$  qui vérifie  $P_{r_i}(-Az + Bu) \leq 0$ . En effet, le vecteur  $u$  est admissible puisqu'il s'agit d'une combinaison convexe des vecteurs de commandes admissibles. La condition (3.5) est donc satisfaite car, pour chaque perturbation  $d \in \mathcal{D}$ , nous avons  $\sum_{j \in J_i} \alpha_j \times d = d$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Cette nouvelle caractérisation des conditions de l'invariance contrôlée est avantageuse par rapport aux formulations développées dans les travaux de Dorea et Hennet [Dorea et Hennet (1999)], et de Blanchini et Miani [Blanchini *et al.* (1999)]. Dans un premier temps, elle permet de contrôler directement le système sans retard (3.2), par une construction directe de la loi de commande admissible (3.6)-(3.7) et un calcul explicite de la matrice  $U$ , comme nous l'étudions dans la section 3.5.2. Les conditions obtenues sont encore plus générales puisqu'elles permettent de prendre en compte des contraintes sur la commande. Dans un deuxième temps, cette formulation réduit la complexité algorithmique par rapport à l'approche de Blanchini et Miani, ce qui est expliqué dans la section 3.5.3.

### 3.5.2 Paramétrisation de la loi de commande

Cette section traite la paramétrisation de la loi de commande  $u(t)$ . Tel qu'exprime la définition (3.6), le vecteur  $v$  n'est pas défini de façon unique en général. Cela permet un premier degré de liberté dans la définition de la matrice  $U$ . Un autre degré de liberté vient du fait que l'expression (3.5) est une inégalité. Par conséquent, nous pouvons suivre le paramétrage suivant de chaque colonne  $U_{c_j}$  de la matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times p}$  :

$$U_{c_j} \in \{u \in \mathbb{R}^m \mid u \in \mathcal{U}, \text{ et pour tout } i \text{ tel que } P_{r_i} M_{c_j} = \pi_i, P_{r_i} B u \leq P_{r_i} A M_{c_j} + \delta_i\}. \quad (3.8)$$

Cet ensemble est un polyèdre si l'ensemble de vecteurs de commande  $\mathcal{U}$ , est lui-même un polyèdre. Le paramétrage (3.5) permet de vérifier l'existence d'une solution de commande de la forme (3.8) choisie parmi toutes les possibilités. En effet, cette caractérisation de la matrice  $U$  présente une solution de commande de type non linéaire. Le fait que le polyèdre correspondant aux sommets  $p = 2^n$  du polytope  $\mathcal{P}_z$  ne soit pas vide, fournit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice  $U$  qui garantisse la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du polytope  $\mathcal{P}_z$ . En outre, comme nous l'avons annoncé dans le théorème 3.2, une loi de commande est donnée par la formulation  $u(t) = Uv(t)$ , où le vecteur de combinaisons linéaires  $v(t)$  vérifie nécessairement l'identité  $z(t) = Mv(t)$ , pour tout vecteur réduit vérifiant  $z(t) \in \mathcal{P}$ . Ainsi, nous soulignons la définition suivante de la structure de commande :

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ U \end{pmatrix} v(t), \quad (3.9)$$

avec  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $U \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Cette loi de commande permet d'associer à chaque sommet  $M_{c_j}$  du polytope  $\mathcal{P}_z$ , vérifiant  $P_{r_i} M_{c_j} = \pi_i$ , un vecteur de commande  $U_{c_j}$ . Celui ci vérifie  $U_{c_j} \in \mathcal{P}_u$  et la condition (3.8), et assure la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance du polytope  $\mathcal{P}_z$ . Ainsi, le système en boucle fermée (3.2) satisfait les contraintes du système réduit  $z(t) \in \mathcal{P}_z$ , et les contraintes des entrées de commande  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ , pour chaque demande vérifiant  $d(t) \in \mathcal{P}_d$ . Nous pouvons effectivement constater que ce choix de la commande non linéaire (3.9) permet de maîtriser les variations entre  $u^{\min}$  et  $u^{\max}$ , de tous les ordres de production lancés entre les différents nœuds du réseau logistique, tant que la demande des clients varie arbitrairement entre  $d^{\min}$  et  $d^{\max}$  au niveau de chaque nœud, sans causer d'engorgement des unités de production.

### 3.5.3 Complexité algorithmique de résolution

Suite à la double représentation polyédrale et convexe du polytope  $\mathcal{P}_z$ , plusieurs formulations de la caractérisation du principe de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée, sont définies pour le système de la forme (3.2). Ainsi, un problème de complexité est constaté selon les différentes versions algorithmiques. La difficulté se ramène au calcul des différentes matrices dont la taille dépend des dimensions  $n$ ,  $p$  et  $q$ . Nous remarquons que le nombre de sommets  $p = 2^n$  augmente plus rapidement que le nombre de faces  $q = 2 \times n$ . Ainsi, le tableau 3.1 illustre les dimensions des matrices  $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$  et  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , définies dans les théorèmes 3.1 et 3.2 respectivement, pour les dimensions  $n = 2, 3, 4$  et 10.

Dimensions			Matrices	
$n$	$q = 2 \times n$	$p = 2^n$	$F \in \mathbb{R}^{q \times q}$	$M \in \mathbb{R}^{n \times p}$
2	4	4	$\mathbb{R}^{4 \times 4}$	$\mathbb{R}^{2 \times 4}$
3	6	8	$\mathbb{R}^{6 \times 6}$	$\mathbb{R}^{3 \times 8}$
4	8	16	$\mathbb{R}^{8 \times 8}$	$\mathbb{R}^{4 \times 16}$
10	20	1024	$\mathbb{R}^{20 \times 20}$	$\mathbb{R}^{10 \times 1024}$

TABLE 3.1 – Complexité algorithmique selon les dimensions des matrices  $F$  et  $M$

En observant les dimensions des matrices, nous constatons que l'application de la formulation de Dorea et de Hennet est moins complexe car la taille de la matrice  $F$  est la plus petite. En effet, elle permet de vérifier l'existence d'une solution plus économique du point de vue de la complexité algorithmique. Tandis que pour l'approche de Blanchini et Miani, une matrice non négative de dimension  $p \times p$  doit être calculée, dont les colonnes sont des éléments de l'ensemble convexe  $\Gamma(p)$ . Ce calcul conduit à une grande augmentation de la complexité algorithmique. Par conséquent, notre approche présente une complexité algorithmique intermédiaire, en se basant sur le calcul de la matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  de dimension réduite.

En ce qui concerne la construction de la loi de commande, Dorea et Hennet utilisent implicitement dans leur approche la détermination des sommets du polyèdre. La caractérisation proposée dans le théorème 3.2 suit en fait le même argument. Donc, lorsqu'il s'agit de tester l'existence de la loi de commande  $u$ , Dorea et Hennet se réfèrent également à la caractérisation définie par le théorème 3.2, pour l'implémentation et la mise en

œuvre pratique de la commande. En effet, le calcul de la matrice  $U$ , que nous proposons permet la construction d'une loi de commande de la forme (3.9) tout en considérant les contraintes sur la commande du système.

Arrivée à ce niveau de l'étude, Le premier sous-problème de notre approche est résolu. Il revient à identifier les conditions d'invariance du modèle réduit. En effet, le théorème 3.2 déclare que le polyèdre  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi) = \text{Conv} M$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système réduit (3.2), si et seulement s'il existe une matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times p}$  qui satisfait les conditions (3.5), (3.6) et (3.7). Le calcul de la matrice  $U$  sous la forme (3.8) permet de vérifier la propriété d'admissibilité de la loi de commande du système à retards. Cette fonctionnalité est utilisée dans la section suivante pour résoudre le deuxième sous-problème. Il consiste à trouver la relation de passage du système réduit au système d'origine, pour déterminer les conditions d'invariance du système à retards (1.8). Celles-ci permettent de répondre positivement aux contraintes (1.9) du vecteur de sortie  $y(t)$ , et de vérifier l'admissibilité de la structure de commande pour le système à retards.

### 3.6 Conditions d'admissibilité du système à retards

La démarche de résolution de commande consiste à formuler des conditions liant les paramètres de commande (3.9) et les paramètres du système d'origine (1.8), de façon à garantir l'évolution dynamique du vecteur de sortie  $y(t)$  et du vecteur d'entrée de commande  $u(t)$  dans les polytopes  $\mathcal{P}_y$  et  $\mathcal{P}_u$ , respectivement. Dans ce contexte, nous nous basons sur la définition 3.1 de la propriété de commande admissible, pour pouvoir caractériser les conditions d'admissibilité pour notre système à retards (1.8).

Nous précisons d'abord la relation de passage du modèle réduit exprimé par (3.2) et le système d'origine de la forme (1.8). À partir de la définition de la variable  $z(t)$  donnée par l'expression (3.1), et en utilisant la caractérisation (3.9) de la structure de commande, nous obtenons l'identité suivante :

$$y(t) = Mv(t) - \sum_{k=1}^h \int_{t-\theta_k}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta_k} B_k U v(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

où le vecteur de combinaisons convexes  $v(t)$  appartient pour tout instant  $t$ , à l'ensemble de combinaisons convexes de dimension  $q$ , défini sous la forme suivante,

$$\Gamma(q) = \{v \in \mathbb{R}^q \mid v \geq 0, \sum_{i=1}^q v_i = 1\}.$$

Il en résulte que les matrices  $U$  et  $M$  définies pour la structure de commande (3.9), sont de dimension  $m \times q$  et  $n \times q$  respectivement, pour un vecteur convexe vérifiant  $v(t) \in \Gamma(q)$ . En analysant l'expression (3.10), nous pouvons ainsi constater qu'elle correspond à un système de convolution, dont le vecteur de sortie est  $y(t)$ , le vecteur d'entrée est  $v(t)$ , et le noyau de convolution s'écrit :

$$H(t) = M\delta(t) - \sum_{k=1}^h H_k(t),$$

où les matrices de convolution  $H_k(t)$  de dimension  $n \times q$ , sont définies comme suit :

$$H_k(t) = \begin{cases} e^{-At} e^{A\theta_k} B_k U & , \text{ pour } t \in [0, \theta_k], \\ 0 & , \text{ pour } t \geq \theta_k. \end{cases}$$

En résumé, nous aboutissons à un système de convolution entrée-sortie (3.10), pour lequel le vecteur d'entrée est contraint de sorte que  $v(t) \in \Gamma(q)$  et  $\Gamma(q) = \text{Conv}I_q$ . Ces remarques préliminaires sont utiles pour pouvoir déterminer la variation exacte du vecteur de sortie  $y(t)$ . En effet, nous appliquons les résultats du théorème 2.5 introduit dans la section 2.5, afin de formuler dans la proposition suivante, les conditions qui définissent le polyèdre d'évolution du vecteur de sortie  $y(t)$ .

**Proposition 3.3.** *Le vecteur de sortie  $y(t)$  du système (1.8) qui est soumis à la structure de commande (3.9), évolue dans un polyèdre  $\text{Pol}(G, \gamma)$  où la matrice  $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$  et le vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ , pour tout vecteur réduit vérifiant  $z(t) \in \mathcal{P}_z$ , si et seulement si les conditions suivantes sont vraies de  $i = 1$  à  $s$  :*

$$\max_{j=1}^q (GM)_{ij} - \sum_{k=1}^h \int_0^{\theta_k} \min_{j=1}^q (Ge^{-A\tau} B_k U)_{ij} d\tau \leq \gamma_i. \quad (3.11)$$

*Démonstration.* Cette proposition est une application directe du théorème 2.5 sur le système de convolution (3.10). Le résultat est obtenu par équivalence, en utilisant la définition basique du polyèdre  $\text{Pol}(G, \gamma)$  donnée par l'assertion (i) du théorème 2.4, suivie de la définition du système de convolution (3.10) du vecteur de sortie  $y(t)$ . Ensuite, nous appliquons l'assertion (ii) du théorème 2.4 qui définit l'ensemble convexe  $\text{Conv} M$ . Enfin, la démonstration est achevée en utilisant les propriétés des ensembles convexes énoncées dans le lemme 2.1. □

Cette proposition précise explicitement le polyèdre d'évolution du vecteur de sortie  $y(t)$  pour un vecteur d'entrée  $u(t)$  borné dans le polytope  $\mathcal{P}_u$ . Ce polyèdre étant un ensemble convexe, nous constatons que le système en boucle fermée (3.2) est effectivement BIBO-stable. Le polyèdre de variation du vecteur de sortie  $\text{Pol}(G, \gamma)$  étant identifié par la condition (3.11), nous pouvons enfin traiter l'admissibilité de la commande (3.9) pour le système à retards considéré (1.8). Pourtant, nous avons déjà déterminé les conditions (3.8), qui assurent l'existence d'une loi de commande admissible pour  $t \geq \theta$ , et la satisfaction de la contrainte polyédrale (1.10) de la forme  $\mathcal{P}_u = [u^{\min}, u^{\max}]$ . Pour compléter l'étude, nous nous référons au calcul des bornes exactes et atteignables, formulées dans le corollaire 2.2 de la section 2.5, afin de présenter les résultats du théorème suivant. En effet, nous formulons des conditions suffisantes, pour lesquelles le polytope de variation de la sortie  $\text{Pol}(G, \gamma)$  est inclus dans le polytope  $\mathcal{P}_y = [y^{\min}, y^{\max}]$ , ce qui permet de respecter la contrainte (1.9) du système (1.8).

**Théorème 3.3.** *Les variables d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  du système multivariable (1.8), contrôlé par une loi de commande de la forme (3.8)-(3.9), évoluent dans les polyèdres  $\mathcal{P}_u = [u^{\min}, u^{\max}]$  et  $\mathcal{P}_y = [y^{\min}, y^{\max}]$  respectivement, pour toute perturbation vérifiant  $d(t) \in \mathcal{P}_d = [d^{\min}, d^{\max}]$ , si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites, pour  $i = 1$  à  $n$  :*

$$\max_{j=1}^q M_{ij} - \sum_{k=1}^h \int_0^{\theta_k} \min_{j=1}^q (e^{-A\tau} B_k U)_{ij} d\tau \leq y_i^{\max}, \quad (3.12)$$

$$y_i^{\min} \leq \min_{j=1}^q M_{ij} - \sum_{k=1}^h \int_0^{\theta_k} \max_{j=1}^q (e^{-A\tau} B_k U)_{ij} d\tau. \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Premièrement, les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée (3.5) du système réduit, aboutissent à la définition d'une structure de commande de la forme (3.8)-(3.9), qui garantit le respect de la contrainte (1.10). Ensuite, l'intervalle multivariable  $[y^{\min}, y^{\max}]$  correspond à l'ensemble des vecteurs de sortie  $y \in \mathbb{R}^n$ , qui vérifient les deux inégalités,  $y \leq y^{\max}$  et  $-y \leq -y^{\min}$ . En effet, les inégalités du théorème sont obtenues en utilisant deux fois la proposition 3.3. La première fois, nous remplaçons la matrice  $G$  par  $I_n$ , et le vecteur  $\gamma$  par  $y^{\max}$  pour identifier la condition (3.12). De la même manière, la deuxième condition (3.13) est obtenue en prenant la matrice  $G = -I_n$  et le vecteur  $\gamma = -y^{\min}$ , ce qui complète la démonstration.  $\square$

Les bornes formulées par le théorème 3.3 montrent que si le réseau logistique est

soumis à une stratégie de pilotage implémentée sous la forme (3.8) et (3.9), et qui prend en compte les limitations des ressources de production (1.10), nous pouvons ainsi éviter toute rupture du stock, au dessous de la capacité  $y^{\min}$ , ou risque de sur-stockage au delà de la capacité  $y^{\max}$ , au niveau de chaque nœud du réseau. En d'autres termes, cela implique que le vecteur de sortie du système est bien borné dans le polytope  $\mathcal{P}_y$  vérifiant ainsi la contrainte (1.9), et qu'il est BIBO-stable en conséquence.

En termes de gestion de production, les résultats (3.8), (3.12) et (3.13), présentés dans cette partie s'interprètent en termes de viabilité de la stratégie de gestion proposée, et de sa réalisation par le système de pilotage mis en place, qui correspond dans ce cas à une commande non linéaire de la forme (3.9) et contrainte vérifiant (1.10). Dans ce contexte, nous avons en effet considéré que les paramètres physiques du réseau logistique sont donnés et fixes, et que la stratégie de gestion vise à satisfaire la totalité des demandes externes et à garantir le respect des spécifications de fonctionnement prescrites.

Pour résumer, un polytope  $\mathcal{P}_z$  étant donné, nous pouvons vérifier s'il existe une commande contrainte vérifiant (1.10), qui permet de garder la variable  $z$  dans le polytope  $\mathcal{P}_z$ . Cette commande peut être appliquée aussi au système retardé, afin de vérifier le respect des contraintes de la sortie (1.9) pour toute perturbation de la forme (1.11). Nous finissons ce chapitre par une discussion qui permet de prononcer les limitations auxquelles nous nous sommes confrontés, et qui seront résolues dans les chapitres suivants.

## 3.7 Discussion de l'étude

Étant donné le système (1.8) à retards quelconques sur l'entrée, nous avons déterminé dans cette étude une nouvelle caractérisation de l'invariance du polytope  $\mathcal{P}_z = \text{Pol}(P, \pi) = \text{Conv} M$  pour un système réduit sans retard. Les conditions obtenues (3.5) présentent un résultat général pour les méthodes d'invariance, et non seulement pour la résolution des problématiques du réseau logistique. De plus, la construction de la loi de commande permet de vérifier les contraintes polyédrales  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ . De même, les conditions (3.12) et (3.13) garantissent le respect des contraintes (1.9) sur la variable de sortie  $y(t)$  du système à retards. Donc, le problème de conception d'une solution de commande stable et admissible est formulé de façon claire. Pour compléter cette approche, différents aspects restent à résoudre. Nous identifions donc les problèmes les plus importants dans la discussion ci-dessous.

**Initialisation du système** La définition du système logistique élémentaire (1.4) dans la section 1.5, attribue une phase initiale pour la dynamique d'évolution du niveau de stockage  $y(t)$ . Cette phase dépend d'une fonction notée  $\varphi(t)$  pour les instants initiaux  $0 \leq t < \theta$ . Du fait que l'entrée de commande  $u(t)$  est définie à partir de l'instant  $t = \theta$ , cette fonction initiale  $\varphi(t)$  est alors interprétée en termes de l'encours initial de production noté *WIP*.

Il en va de même dans le cas d'un système logistique en configuration réseau. Ainsi, les équations du système réduit (3.1) et (3.2), ne peuvent être satisfaites que pour les instants de temps supérieurs ou égaux au retard maximal de l'ensemble des retards  $\theta_k$ , pour  $k = 1$  à  $h$ . Nous pouvons ensuite supposer que l'ensemble de retards est organisé par une séquence  $\theta_k$  qui suit un ordre croissant, de sorte que le retard maximal est égal au dernier élément de la séquence, soit  $\theta_h$ . En effet, nous rappelons la définition (3.1) de la variable  $z(t)$  par l'expression suivante :

$$z(t) = y(t) + \sum_{k=1}^h \int_{t-\theta_k}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta_k} B_k u(\tau) d\tau, \quad \text{pour } t \geq \theta_h.$$

En se basant sur cette définition, nous constatons que durant la période d'initialisation, pour les instants  $t \in [0, \theta_h[$ , la variable réduite  $z(t)$  dépend également de certaines fonctions initiales  $\varphi_k(t)$ , qui correspondent aux encours initiaux de production pris en compte le long du réseau logistique. Par conséquent, les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du polytope  $\mathcal{P}_z$  pour le système réduit (3.2), énoncées dans le théorème 3.2, sont en fait satisfaites pour les instants  $t \geq \theta_h$ . En conséquence, elles ne garantissent pas l'admissibilité de la loi de commande (3.9) durant la phase initiale. Dans cette direction, ce problème d'initialisation sera traité en détail dans la partie III, afin d'étudier la conception d'une solution de pilotage admissible pour la phase initiale que pour le régime établi, pour le système logistique élémentaire au niveau d'un seul nœud de stockage.

**Interprétation de la variable réduite** Une deuxième remarque importante concerne l'interprétation de la variable  $z(t)$  pour le modèle multivariable du système logistique (1.8). En effet, cette variable est définie par l'expression (3.1) pour les instants  $t \geq \theta_h$ . Elle correspond alors à la prédiction exacte des niveaux futurs de stockage, seulement pour les flux représentant les entrées de commande  $u(t)$  retardées d'une période égal à  $\theta_h$ . Cette spécificité ne peut être généralisée sur la totalité des nœuds du réseau logistique, même si les retards  $\theta_k$  sur le réseau sont tous identiques pour  $k = 1$  à  $h$ . La difficulté vient

de la nature du système en réseau, et précisément des flux de commandes internes qui sont soit des achats soit des ordres de production. Ceux-ci présentent différents retards pour servir les nœuds de stockage, et ne peuvent donc pas être prévus sur les mêmes horizons futurs. Pour cette raison, les conditions obtenues dans le théorème 3.3 sont nécessaires et suffisantes pour prouver l'admissibilité de la structure de commande proposée, mais non pas pour garantir son existence. Dans cette direction, nous pouvons améliorer ces résultats dans l'étude développée dans le chapitre 5. Nous montrons que l'application d'une prédiction exacte du niveau futur de stockage pour le système logistique élémentaire (1.4) à un seul retard sur l'entrée de commande, fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'admissibilité d'une structure de commande.

**Construction du polytope  $\mathcal{P}_z$**  Théoriquement, les conditions nécessaires et suffisantes obtenues dans ce chapitre sont utilisées pour vérifier la stabilité du système en boucle fermée et l'admissibilité de la structure de commande, en terme de satisfaction des contraintes polyédrales de fonctionnement (1.9),(1.10) et (1.11). Pourtant, ces conditions sont limitées au choix du polytope  $\mathcal{P}_z$  et de la commande que nous proposons. En gros, un polytope  $\mathcal{P}_z$  étant donné, nous pouvons vérifier s'il est  $\mathcal{D}$ -invariant en testant les conditions du théorème 3.2. Si c'est le cas, nous construisons une solution de commande d'après la paramétrisation (3.8), et nous vérifions son admissibilité par les conditions du théorème 3.3. Mais en réalité, la recherche d'un polytope  $\mathcal{P}_z$  qui soit convenable au système de pilotage est un problème difficile, sur le plan algorithmique. Cette complexité vient du fait que la relation entre les paramètres des matrices  $M$  et  $P$  n'est pas évidente, ce qui rend les résultats obtenus plutôt implicites. Par contre, la construction polyédrale est de toute façon possible dans de nombreuses situations pratiques, en particulier pour des chaînes logistiques comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

## 3.8 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle d'un réseau logistique (1.8) qui est composé de  $n$  systèmes logistiques élémentaires. Les paramètres intrinsèques du système sont les différents retards  $\theta_k$  pour  $k = 1$  à  $h$  sur les flux des ordres de production, et les facteurs de perte identiques  $\sigma$  sur le niveau de stockage de chaque nœud. Le système est modélisé par le vecteur de sortie  $y(t)$ , le vecteur de commande  $u(t)$  et le vecteur de perturbation  $d(t)$ , qui sont contraints et évoluent respectivement dans les polytopes

$$\mathcal{P}_y = [y^{\min}, y^{\max}], \mathcal{P}_u \in [u^{\min}, u^{\max}] \text{ et } \mathcal{P}_d = [d^{\min}, d^{\max}].$$

La stratégie de pilotage que nous utilisons, est basée sur l'application de la réduction Artstein afin d'éliminer les retards et obtenir un système dynamique réduit de la forme (3.2). Ensuite, après avoir défini un polytope  $\mathcal{P}_z$  dans lequel le vecteur réduit  $z(t)$  évolue, nous avons déterminé les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée pour le système réduit en utilisant une nouvelle caractérisation de l'ensemble invariant, formulée dans le théorème 3.2 et la condition (3.8). En outre, une loi de commande admissible est choisie de type non linéaire et implémentée sous la forme (3.9), de sorte que le système en boucle fermée réponde aux contraintes  $z(t) \in \mathcal{P}_z$  et  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ , pour chaque demande vérifiant  $d(t) \in \mathcal{P}_d$ . De plus, en se référant à la relation (3.10) entre les variables du modèle réduit et du modèle retardé, nous avons identifié les conditions nécessaires et suffisantes (3.12) et (3.13), qui assurent la propriété d'admissibilité de la structure de commande pour le système à retards, et qui vérifient en effet la contrainte  $y(t) \in \mathcal{P}_y$  pour le vecteur de sortie.

D'ailleurs, les résultats obtenus permettent de vérifier la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du polytope  $\mathcal{P}_z$ . De cette manière, une large classe de solutions de commande stables et admissibles est proposée. Pourtant les conditions obtenues n'étant pas explicites, nous ne pouvons ni tester l'existence d'une solution de pilotage, ni étudier la robustesse de la loi de commande proposée. Ayant discuté de la difficulté de la construction polyédrale, nous présentons dans le chapitre suivant, un calcul explicite du polytope  $\mathcal{P}_z$  dans le cas d'une chaîne logistique composée de deux nœuds, ayant des retards identiques et des facteurs de perte égaux. Ensuite, nous étudions en détail dans les parties suivantes l'existence de solutions de commande admissibles et robustes, dans le cas de systèmes logistiques élémentaires.

# APPLICATION DES RÉSULTATS SUR UNE CHAÎNE LOGISTIQUE

---

## Table des matières

<a href="#">4.1 Introduction</a>	98
<a href="#">4.2 Système d'étude</a>	99
<a href="#">4.3 Du système réduit au système découplé</a>	100
<a href="#">4.4 Construction des polytopes</a>	102
<a href="#">4.5 Structure de commande admissible</a>	104

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'application des résultats théoriques développés dans le chapitre précédent, sur un cas particulier de réseau logistique. Nous utilisons la caractérisation d'invariance polyédrale, effectuée pour la synthèse d'un contrôleur stabilisant et assurant le respect des contraintes imposées par un système logistique en configuration cascade.

Nous montrons que la structure de commande proposée conduit à une solution explicite, dans le cas d'une chaîne logistique composée de deux nœuds en cascade. Nous supposons pour cette application que les retards de production sont identiques et que les facteurs de perte de stockage sont égaux. Ainsi, les complexités ensembliste et algorithmique étant réduites, la méthode de conception permet alors une construction réalisable des polytopes invariants, et un calcul plus explicite de conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée, respectivement.

Pour ce faire, nous introduisons le modèle d'application dans la section 4.2. Ensuite, la structure de commande est légèrement modifiée sur cet exemple, et débute dans la section 4.3 par l'élimination des retards en utilisant la réduction d'Artstein, suivie d'un changement de base pour obtenir un système découplé. Le problème est alors double. Un premier

axe consiste à construire les polytopes des systèmes réduit et découplé, dans la section 4.4. Un deuxième axe, revient à trouver les conditions explicites de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du système découplé, et les conditions d'admissibilité du modèle initial, dans la section 4.5. Enfin, les conditions peuvent être réinterprétées en termes des capacités de production et de stockage sur chaque nœud, ce qui aboutit à une formulation des conditions d'existence de la loi de commande admissible.

## 4.2 Système d'étude

Dans cette étude, nous considérons une chaîne logistique composée de deux nœuds en configuration série, le premier alimente le second, qui à son tour va satisfaire la demande externe. Nous supposons que les retards de production des deux systèmes élémentaires sont identiques de sorte que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , ainsi que les facteurs de perte sur les deux niveaux de stockage sont égaux, soit  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . L'interconnexion des deux systèmes logistiques élémentaires est illustrée dans le schéma suivant.

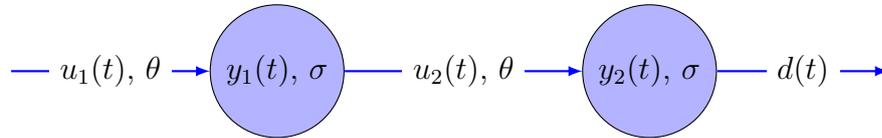


FIGURE 4.1 – Exemple d'une chaîne logistique de dimension  $n = 2$

Cette figure montre la différence entre la structure d'une chaîne logistique et celle du réseau logistique (voir figure 3.1). L'ordre de production en amont alimente le premier niveau de stockage, qui à son tour va alimenter le nœud de stockage en aval. La demande des clients est en relation directe avec le deuxième niveau de stockage. Les produits passent alors successivement d'un nœud au suivant pour servir à la fin de la structure en cascade la demande externe. L'interconnexion en cascade de deux systèmes logistiques élémentaires, conduit à la définition du modèle de la chaîne logistique de dimension  $n = 2$ , dont la dynamique des stocks s'écrit par l'équation différentielle à retard suivante :

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + B_1u(t - \theta) - B_0u(t) - Ed(t), \quad (4.1)$$

où les matrices correspondantes sont définies comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Le vecteur de sortie  $y(t) \in \mathbb{R}^2$ , le vecteur d'entrée de commande  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  et la perturbation  $d(t) \in \mathbb{R}$  représentent respectivement le niveau de stockage des deux nœuds, l'ordre de production instantané des deux arêtes et la demande externe. Le système considéré est soumis à des contraintes de dimensionnement des deux niveaux de stockage et des limitations des ressources de production, vérifiant ainsi les intervalles multivariables  $y(t) \in \mathcal{P}_y$  et  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ , et  $d(t) \in [d^{\min}, d^{\max}]$ . En effet, l'objectif consiste à appliquer la structure de commande proposée dans le chapitre précédent, de manière à concevoir en ligne un système de pilotage qui garantit le respect des contraintes (1.9), (1.10) et (1.11). Pour ce faire, nous introduisons la structure du système réduit définie dans le chapitre précédent, dans la section suivante.

### 4.3 Du système réduit au système découplé

Comme nous l'avons vu dans la section 3.3, la méthode de conception de la structure de commande consiste à éliminer les retards de production au niveau des deux nœuds, en appliquant la réduction d'Artstein [Artstein (1982)]. Ainsi, la variable  $z(t)$  définie par l'expression (3.1), est décrite dans notre cas d'étude sous la forme suivante :

$$z(t) = y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-A(t-\tau)} e^{A\theta} B_1 u(\tau) d\tau, \text{ pour } t \geq \theta. \quad (4.3)$$

Cette transformation permet de compenser entièrement l'effet du retard  $\theta$  sur les deux nœuds du système (4.1). En fait, le système sans retard défini par l'équation (3.2) correspond au système réduit suivant :

$$\dot{z}(t) = -Az(t) + Bu(t) - Ed(t), \quad (4.4)$$

où la matrice  $B$  du système réduit, définie dans la proposition 3.1, correspond à la forme suivante :

$$B = \begin{pmatrix} e^{\sigma\theta} & -1 \\ 0 & e^{\sigma\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dans ce cas, le modèle réduit présente une prédiction exacte des niveaux futurs de stockage sur un horizon temporel allant de  $t$  à  $t + \theta$ , en raison que les retards sont égaux. De plus, nous observons que  $B$  est une matrice carrée et inversible. Cette propriété est en fait vérifiée pour n'importe quel exemple de chaîne logistique. Pour cette raison, cette application est particulièrement significative. En outre, la matrice  $B$  correspond à une matrice triangulaire supérieure, ce qui implique que les variables du système réduit  $z(t)$  dépendent les unes des autres et des variables d'entrée  $u(t)$ . Cette spécificité va nous permettre d'effectuer une deuxième transformation sur le système réduit, afin d'obtenir un système totalement découplé. Nous définissons d'abord le concept de découplage qui va nous servir comme étape fondamentale pour la suite.

**Définition 4.1.** *Un système d'équation est diagonalement découplé lorsque les matrices de coefficients du système sont transformées en matrices diagonales, ce qui conduit à un ensemble des équations différentielles découplées pour résoudre l'ensemble du système. Cela signifie que chacune des variables de sortie ne dépend que de la variable d'entrée qui lui correspond.*

Nous définissons ainsi la transformation statique  $w(t) = B^{-1}z(t)$  qui est effectuée sur le système réduit (3.2), afin d'obtenir des variables de sortie qui ne dépendent pas les unes des autres. Dans la perspective de régler le système à retard (4.1) de dimension  $n = 2$ , le but du découplage est de pouvoir commander chaque sortie indépendamment de l'autre. Ainsi, le système découplé est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{w}(t) = -B^{-1}AB w(t) + u(t) - B^{-1}E d(t), \quad (4.6)$$

où les matrices correspondantes sont définies par  $B^{-1}AB = \sigma I_2$ ,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\sigma\theta} & e^{-2\sigma\theta} \\ 0 & e^{-\sigma\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{et } B^{-1}E = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma\theta} \\ e^{-\sigma\theta} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous aboutissons à deux sous-systèmes élémentaires de la forme  $\dot{w}_i(t) = -\sigma w_i(t) + u_i(t) - (B^{-1}E)_i d(t)$ , pour  $i = 1$  et  $i = 2$ . En résumé, le passage du système à retards (4.1) au système découplé (4.6) va permettre l'implémentation d'une structure de commande admissible qui vérifie  $u(t) \in [u^{\min}, u^{\max}]$  pour chaque composante  $i$ , ainsi que la construction du polytope invariant  $\mathcal{P}_z$  du système réduit. Celui-ci va assurer également l'invariance du vecteur de sortie  $y(t)$  dans l'intervalle multivariable  $\mathcal{P}_y = [y^{\min}, y^{\max}]$ . En

effet, nous abordons le problème de construction des polytopes, du système découplé et du système réduit dans la section suivante.

## 4.4 Construction des polytopes

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, la recherche du polytope invariant  $\mathcal{P}_z$  est difficilement réalisable dans le cas d'un réseau logistique (1.8). Un moyen possible de simplifier le problème et de calculer des solutions particulières dans l'application d'une chaîne logistique, ce qui revient à définir le polytope d'évolution du système découplé sous la forme de l'intervalle multivariable ci-contre :

$$w(t) \in [w^{\min}, w^{\max}], \quad (4.7)$$

où les vecteurs  $w^{\min}$  et  $w^{\max}$  désignent les valeurs minimales et les maximales, respectivement calculées composante par composante pour le vecteur découplé  $w(t)$ . De plus, en se référant au théorème 2.4, l'intervalle  $[w^{\min}, w^{\max}]$  est représenté par un polytope noté  $\mathcal{P}_w = \text{Conv } W$ , où la matrice  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  est définie sous la forme suivante :

$$W = \begin{pmatrix} w_1^{\min} & w_1^{\max} & w_1^{\min} & w_1^{\max} \\ w_2^{\min} & w_2^{\min} & w_2^{\max} & w_2^{\max} \end{pmatrix}.$$

De cette représentation convexe, nous constatons que le polytope  $\mathcal{P}_w$  du système découplé correspond à un rectangle, dont les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont définis par les colonnes de la matrice  $W$ , comme présenté sur la figure 4.2.

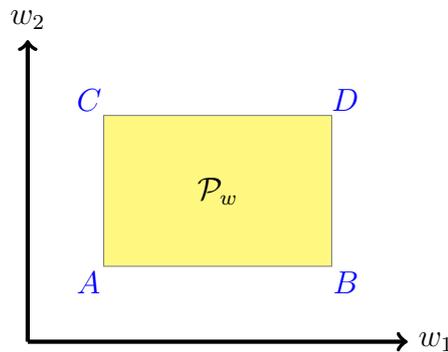


FIGURE 4.2 – Polytope  $\mathcal{P}_w$  du système découplé

Ensuite, en se basant sur la transformation statique du système découplé (4.6) au système réduit (4.4), et sous l'hypothèse de base que  $B$  est une matrice carrée et inversible, nous pouvons donc construire l'intervalle bidimensionnel de l'évolution du vecteur réduit dans l'espace des  $z$ . Celui-ci est donc obtenu depuis l'intervalle  $\mathcal{P}_w = [w^{\min}, w^{\max}]$ , par un changement de base  $z(t) = Bw(t)$ , soit  $Bw^{\min} \leq z \leq Bw^{\max}$ . Ainsi, en utilisant l'assertion (ii) du théorème 2.4, nous décrivons la représentation convexe du polytope  $\mathcal{P}_z$  du vecteur  $z(t)$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_z = B[w^{\min}, w^{\max}] = \text{Conv}M, \quad (4.8)$$

où la matrice  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  est égale à l'expression  $M = BW$  définie ci-dessous,

$$M = \begin{pmatrix} e^{\sigma\theta}w_1^{\min} - w_2^{\min} & e^{\sigma\theta}w_1^{\max} - w_2^{\min} & e^{\sigma\theta}w_1^{\min} - w_2^{\max} & e^{\sigma\theta}w_1^{\max} - w_2^{\max} \\ e^{\sigma\theta}w_2^{\min} & e^{\sigma\theta}w_2^{\min} & e^{\sigma\theta}w_2^{\max} & e^{\sigma\theta}w_2^{\max} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

En utilisant la représentation convexe 4.8, nous construisons le polytope  $\mathcal{P}_z$  sous la forme d'un parallélogramme, dont les sommets  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$ , tels schématisés dans la figure 4.3, sont bien définis par les colonnes de la matrice  $M = BW$ . En effet, chaque ligne de la matrice  $B$  correspond à deux droites parallèles entre lesquelles évolue la variable  $z_i(t)$  pour  $i = 1$  et pour  $i = 2$ .

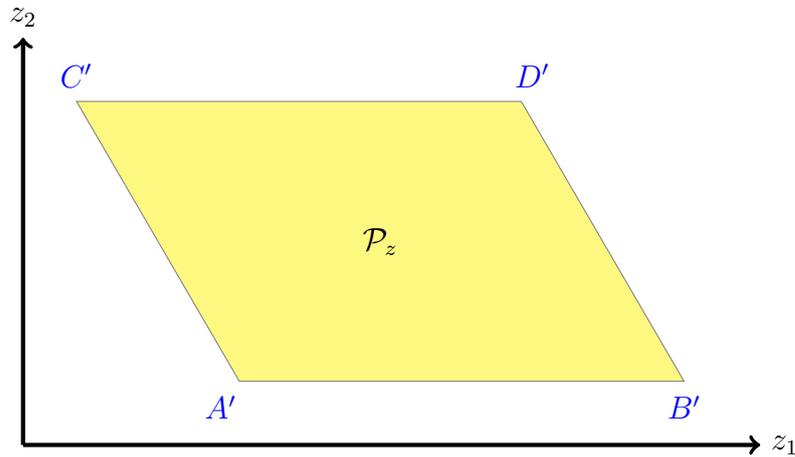


FIGURE 4.3 – Polytope  $\mathcal{P}_z$  du système découplé

Suite à la définition des polytopes  $\mathcal{P}_w$  et  $\mathcal{P}_z$  du système découplé et du système réduit respectivement, nous utilisons une version légèrement modifiée de la stratégie de com-

mande développée dans le chapitre précédent. Une première modification de l'approche revient à calculer les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée du polytope  $\mathcal{P}_w$  du système découplé (4.6), et non pas du polytope  $\mathcal{P}_z$  comme nous l'avons introduit dans le chapitre 3. Ensuite, la deuxième modification est basée sur deux transformations successives, qui sont la transformation de découplage  $w(t) = B^{-1}z(t)$  et la prédiction de sortie (4.3), pour pouvoir identifier la relation du passage du système découplé au système à retards (4.1). Enfin, l'étude consiste à déterminer les conditions d'admissibilité de la structure de commande pour le système d'origine (4.1), de sorte que les polytopes  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_y$  décrivent respectivement les évolutions des vecteurs d'entrée et de sortie, pour n'importe quelle perturbation vérifiant l'inclusion  $d(t) \in [d^{\min}, d^{\max}]$ . Ainsi, nous trouverons des conditions explicites améliorées que nous développons dans la section suivante.

## 4.5 Structure de commande admissible

Dans cette partie, nous appliquons la méthode de conception de la structure de commande proposée dans le chapitre précédent. Ainsi, une façon d'implémenter la loi de commande revient à choisir les paramètres de commande de manière à ce que chacune des colonnes de la matrice  $U$ , vérifie la contrainte (1.10) et la condition (3.8). Par conséquent, la loi de commande décrit un polyèdre  $[u^1, u^2] \in \mathcal{P}_u$ , de sorte que les vecteurs de commande  $u^1$  et  $u^2$  satisfassent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u^1 &\in [u^{\min}, u^{\max}], \\ u^2 &\in [u^{\min}, u^{\max}]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

La structure de commande est alors déterminée sous la forme (3.9), où la matrice  $M$  vérifie l'identité (4.9), et la description convexe  $[u^1, u^2] = \text{Conv } U$  définit la matrice  $U$  sous la forme suivante :

$$U = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^1 & u_2^2 & u_2^2 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Ensuite, selon les résultats du théorème 3.2, nous déduisons que le polyèdre du système découplé (4.6), défini par  $\mathcal{P}_w = [w^{\min}, w^{\max}] = \text{Conv } M$  est  $\mathcal{D}$ -invariant si et seulement s'il existe une matrice  $U$  qui satisfait les inclusions (4.10) et (4.11), et si les conditions ci-dessous sont vérifiées :

$$u^1 \leq \sigma w^{\max} + B^{-1}E d^{\min}, \tag{4.12}$$

$$\sigma w^{\min} + B^{-1} E d^{\max} \leq u^2, \quad (4.13)$$

$$w^{\min} \leq w^{\max}. \quad (4.14)$$

Ces conditions permettent au système découplé (4.6) de satisfaire les contraintes  $w(t) \in \mathcal{P}_w$  et  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ , pour chaque demande vérifiant  $d(t) \in [d^{\min}, d^{\max}]$ . D'ailleurs, la transformation de découplage  $w(t) = B^{-1}z(t)$  est interprétée en terme de propriété d'invariance de polytopes  $\mathcal{P}_w$  et  $\mathcal{P}_z$ . En effet, l'invariance du polytope  $\mathcal{P}_w = \text{Conv } W$  est équivalente à l'existence du polytope invariant  $\mathcal{P}_z = \text{Conv } M$  pour le système réduit (4.4). Sous l'hypothèse que la matrice  $B$  est une matrice carrée et inversible, nous aboutissons alors à la relation d'équivalence entre les deux énoncés ci-dessous :

$$w(t) \in \mathcal{P}_w = [w^{\min}, w^{\max}] = \text{Conv } W \Leftrightarrow z(t) \in \mathcal{P}_z = \text{Conv } M. \quad (4.15)$$

Cette interprétation est conditionnée par l'existence d'une loi de commande de type hybride définie par les relations (4.10) et (4.11). En outre, pour revenir au système d'origine à retards sur l'entrée, nous utilisons la relation de passage du modèle réduit (3.2) au modèle retardé (1.8). Ainsi, l'expression (4.3) va servir pour déterminer les conditions d'admissibilité de la structure de commande pour le système retardé. Ces conditions étant développées dans le théorème 3.3 pour une classe générale des systèmes à retards, elles correspondent dans notre modèle simplifié aux conditions suivantes :

$$y^{\min} \leq \begin{pmatrix} e^{\sigma\theta} w_1^{\min} - w_2^{\max} \\ e^{\sigma\theta} w_2^{\min} \end{pmatrix} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} \max(u^1, u^2), \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} e^{\sigma\theta} w_1^{\max} - w_2^{\min} \\ e^{\sigma\theta} w_2^{\max} \end{pmatrix} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} \min(u^1, u^2) \leq y^{\max}. \quad (4.17)$$

À ce niveau, nous obtenons un ensemble de conditions d'invariance (4.12), (4.13) et (4.14), et des conditions d'admissibilité (4.10), (4.16) et (4.17), qui garantissent les inclusions  $y(t) \in \mathcal{P}_y$  et  $u(t) \in \mathcal{P}_u$ , pour toute variation de la demande  $d(t)$  dans l'intervalle  $[d^{\min}, d^{\max}]$ . Ces résultats sont suffisants pour l'existence d'une loi de commande admissible qui vérifie les contraintes (1.9), (1.10) et (1.11). Les conditions ne sont pas conservatives, car les définitions (3.9) et (4.8) couvrent une grande classe de structure de

commande, paramétrées en termes de vecteurs  $u^1$  et  $u^2$ ,  $w^{\min}$  et  $w^{\max}$ , pour résoudre le problème de commande contraint d'une application de réseau logistique, à retards identiques et facteurs de pertes égaux.

Dans cette dernière partie, nous traitons la question du dimensionnement préalable des ressources de la chaîne logistique (4.1). L'objectif est donc de déterminer les ressources de production pour des retards de production identiques, et les capacités de stockage sur chaque nœud lorsque les facteurs de pertes sont égaux. En effet, la méthodologie de conception consiste à trouver des conditions indépendantes des paramètres de commande  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $w^{\min}$  et  $w^{\max}$ , de façon à garantir l'existence d'un système de pilotage, sous la forme d'une commande contrainte et admissible vis-à-vis des contraintes et des spécifications de fonctionnement. La solution de dimensionnement des paramètres  $u^{\min}$ ,  $u^{\max}$ ,  $y^{\min}$  et  $y^{\max}$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** *Étant donné le système dynamique bidimensionnel de la forme (4.1), il existe une loi de commande de la forme (3.9) définie par les matrices (4.9) et (4.11), qui permet de satisfaire les contraintes (1.9), (1.10) et (1.11), si les capacités  $u^{\max}$  et  $y^{\max}$  vérifient les conditions suivantes :*

$$\frac{e^{-\sigma\theta}}{e^{\sigma\theta} - (1 - e^{-\sigma\theta})} d^{\max} \leq u_1^{\max}, \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{e^{\sigma\theta} - (1 - e^{-\sigma\theta})} d^{\max} \leq u_2^{\max}, \quad (4.19)$$

$$e^{-\sigma\theta} d^{\max} - u_2^{\max} - (1 - e^{-\sigma\theta}) u_1^{\max} \leq \sigma y_1^{\max}, \quad (4.20)$$

$$\frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} e^{-\sigma\theta} d^{\max} \leq y_2^{\max}. \quad (4.21)$$

*Démonstration.* Le système (4.1) étant soumis à une structure de commande (3.9) définie par les matrices (4.11) et (4.9), les conditions d'invariance et d'admissibilité obtenues dépendent alors des paramètres de commande  $u^1$  et  $u^2$ ,  $w^{\min}$  et  $w^{\max}$ . D'abord, en se basant sur la contrainte (4.10) et les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance (4.12) et (4.13), les paramètres de commande  $u^1$  et  $u^2$  vérifient les inclusions suivantes :

$$u^1 \in [u^{\min}, \min(u^{\max}, \sigma w^{\max} + B^{-1} E d^{\min})], \quad (4.22)$$

$$u^2 \in [\max(u^{\min}, \sigma w^{\min} + B^{-1} E d^{\max}), u^{\max}]. \quad (4.23)$$

En effet, les deux paramètres  $u^1$  et  $u^2$  sont éliminés successivement en appliquant le principe de fourier Motzkin introduit dans la section 2.7, sur les inégalités (4.16), (4.17), (4.22) et (4.23). Un nouvel ensemble d'inégalités est alors généré en fonction des paramètres  $w^{\min}$  et  $w^{\max}$ . Celles-ci sont exprimées pour  $y^{\min} = u^{\min} = d^{\min} = 0$ , par les conditions suivantes :

$$\sigma w_1^{\min} \leq u_1^{\max} - e^{-2\sigma\theta} d^{\max}, \quad (4.24)$$

$$\sigma w_2^{\min} \leq u_2^{\max} - e^{-\sigma\theta} d^{\max}, \quad (4.25)$$

$$e^{\sigma\theta} w_1^{\max} - w_2^{\min} \leq y_1^{\max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} u_1^{\max}, \quad (4.26)$$

$$e^{\sigma\theta} w_2^{\max} \leq y_2^{\max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} u_2^{\max}, \quad (4.27)$$

$$(e^{\sigma\theta} - (1 - e^{-\sigma\theta})) w_2^{\max} \leq x_2^{\max}, \quad (4.28)$$

$$\frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} e^{-\sigma\theta} d^{\max} \leq (e^{\sigma\theta} - (1 - e^{-\sigma\theta})) w_2^{\min}, \quad (4.29)$$

$$w_2^{\max} \leq e^{\sigma\theta} w_1^{\min}, \quad (4.30)$$

ainsi que la condition (4.14). Ensuite, le principe d'élimination de Fourier-Motzkin introduit s'applique deux fois sur les inégalités linéaires (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (4.28), (4.29), (4.30) et (4.14), afin d'éliminer successivement les variables des sous-systèmes découplés  $w_i(t)$ . Premièrement, les paramètres  $w_1^{\min}$  et  $w_1^{\max}$  sont éliminés des inégalités (4.26), (4.24), (4.25), (4.29) et (4.14), tout en générant les conditions (4.18) et (4.20) équivalentes. De la même manière, les conditions (4.19) et (4.21) sont dérivées des inégalités (4.28), (4.25), (4.29) et (4.14), suite à l'élimination des paramètres  $w_2^{\min}$  et  $w_2^{\max}$ . Ainsi, nous identifions les conditions suffisantes du théorème 4.1, pour l'existence d'une loi de commande admissible du type suggéré.  $\square$

Les résultats de ce théorème, achèvent la méthode de conception d'un système de

pilotage efficient pour une chaîne logistique de deux nœuds. En effet, connaissant une estimation des niveaux futurs de stockage, il est possible de dimensionner la structure du système, en déterminant les capacités de production, ainsi que les capacités de stockage nécessaires pour pouvoir répondre efficacement à la demande externe. Nous constatons en observant les conditions (4.18) et (4.19), que les taux de production sont dimensionnés selon la demande maximale attendue  $d^{\max}$ . Concernant les ressources de stockage, nous remarquons d'après la condition (4.21), que le deuxième nœud permet de faire face à la demande externe cumulée  $\frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}e^{-\sigma\theta}d^{\max}$ . De plus, la condition (4.20) illustre la complexité de dimensionnement du premier nœud de stockage. La capacité de stockage dépend des flux entrants et sortants du niveau de stockage, et elle est choisie en adéquation avec la demande prévue, pour pouvoir faire face à l'effet Bullwhip que peut engendrer toute variation imprévue.

Dans la continuité de la démarche de conception et de commande de systèmes que nous appliquons, nous pouvons déduire les conditions de dimensionnement de la chaîne logistique lorsque les nœuds ne sont pas soumis à des pertes de stockage, de sorte que les facteurs de pertes sont nuls  $\sigma = 0$ . L'objectif du corollaire suivant revient alors à déterminer les paramètres  $y^{\max}$  et  $u^{\max}$  considérés comme inconnus, de façon à garantir l'existence d'un système de pilotage, sous forme d'une commande contrainte (3.9), admissible vis-à-vis des contraintes et des spécifications de fonctionnement.

**Corollaire 4.1.** *Une chaîne logistique de la forme (4.1) étant donnée, il existe une solution de pilotage de la forme (3.9)–(4.9)–(4.11), permettant de vérifier les contraintes (1.9) et (1.10), et de répondre à toute demande de la forme (1.11) si les ressources de production et de stockage sont dimensionnées de façon à ce que leurs capacités maximales  $u^{\max}$  et  $y^{\max}$  vérifient les conditions suivantes :*

$$d^{\max} \leq u_1^{\max}, \quad (4.31)$$

$$d^{\max} \leq u_2^{\max}, \quad (4.32)$$

$$\theta d^{\max} \leq y_2^{\max}. \quad (4.33)$$

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du théorème 4.1, et se déduit directement des conditions données par ce théorème. La méthodologie revient à éliminer les paramètres

de commande  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $w_1^{\min}$  et  $w_1^{\max}$  des conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée (4.12), (4.13) et (4.14), et des conditions d'admissibilité (4.16) et (4.17), pour un facteur de perte nul.  $\square$

Les résultats de ce corollaire définissent les conditions sous lesquelles un système de pilotage répond aux spécifications de régulation données avec des pertes de stockage négligeables. L'hypothèse fondamentale de notre travail est que la demande est variable et bornée. Les conditions (4.31) et (4.32) obtenues expriment que les capacités de production alimentant les deux nœuds, doivent être au moins égale à la demande maximale prévue, pour pouvoir y satisfaire. La condition (4.33) est intrinsèquement liée à la variation de la demande. Elle montre que pour éviter toute rupture dans la globalité des niveaux de stockage de la chaîne, il suffit juste de disposer d'une capacité de stockage au niveau du dernier nœud, qui puisse répondre à la demande cumulée  $d^{\max}$  durant le temps d'adaptation  $\theta$ .

À la fin de ce chapitre d'application, une remarque importante est discutée au niveau des résultats obtenus. En effet, les conditions formulées dans le théorème 4.1 et le corollaire 4.1 sont interprétés suivant l'approche ensembliste de la méthode de Fourier-Motzkin. Les conditions d'invariance et d'admissibilité (4.10), (4.12), (4.13), (4.14), (4.16) et (4.17) étant affines, elles définissent une région polyédrale admissible  $\mathcal{P}_z$  dans l'espace des paramètres  $d^{\min}$ ,  $d^{\max}$ ,  $u^{\min}$ ,  $u^{\max}$ ,  $y^{\min}$ ,  $y^{\max}$ , et l'espace de commande  $w^{\min}$ ,  $w^{\max}$ ,  $u^1$  et  $u^2$ . Ensuite, la procédure d'élimination de Fourier-Motzkin est utilisée pour attribuer au polyèdre  $\mathcal{P}_z$  un polyèdre  $\mathcal{P}_y$  qui lui est équivalent, et défini dans l'espace des paramètres. Celui-ci est obtenu en projetant l'ensemble  $\mathcal{P}_z$  parallèlement à l'espace de commande. Techniquement, c'est la procédure d'élimination des variables de commande intermédiaires  $u^1, u^2, w^{\min}$  et  $w^{\max}$ . Le polyèdre  $\mathcal{P}_y$  correspond alors à la région admissible du système à retards (4.1), et il est défini par les inégalités sur les sommets, sous la forme des conditions du théorème 4.1 et du corollaire 4.1.

Enfin, nous remarquons que la contrainte du vecteur de sortie  $y(t)$ , est définie dans notre cas d'étude par l'intervalle bidimensionnel  $\mathcal{P}_y = [y^{\min}, y^{\max}]$ , pour résoudre le problème d'invariance proposé. Il faut souligner que cette hypothèse n'est pas limitative si nous supposons une représentation polyédrale  $y \in \mathcal{P}_y = \text{Pol}(P_y, \pi_y)$ . Dans ce cas, l'intervalle  $[y^{\min}, y^{\max}]$  correspond à l'ensemble des vecteurs vérifiant les conditions  $y \leq y^{\max}$  et  $y^{\min} \leq y$ , comme nous l'avons introduit dans la proposition 3.2 du chapitre précédent. En effet, la matrice  $P_y$  et le vecteur  $\pi_y$  sont définis par les formulations ci-contre :

$$P_y = \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \pi_y = \begin{pmatrix} x^{max} \\ -x^{min} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons conclure que l'approche d'invariance développée sur cet exemple de chaîne logistique est toujours applicable, et que les conditions obtenues dans le théorème 4.1 sont in-changeables.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la loi de commande saturée introduite dans le chapitre 3 sous la forme (3.9), pour piloter une chaîne logistique bidimensionnelle. Cette loi de commande nous a permis de répondre aux attentes du pilotage en ce qui concerne la stabilisation du système par invariance polyédrale, et le respect des contraintes par admissibilité de la commande. En plus des résultats du chapitre 3, un dimensionnement des ressources de production et de stockage a été déterminé dans le théorème 4.1 et le corollaire 4.1, pour pouvoir répondre à une demande inconnue mais bornée.

# CONCLUSION PARTIELLE

---

Dans cette partie, nous avons développé une approche générale de pilotage des systèmes logistiques en configuration réseau. Une nouvelle caractérisation de la propriété d'invariance des ensembles convexes est ainsi formulée, sous la forme d'un système d'inégalités. Celle-ci s'interprètent en terme de la recherche des ensembles invariants pouvant garantir le respect des contraintes de dimensionnement.

Pour le système général à retards multiples, la complexité algorithmique de l'approche empêche la résolution du problème de commande et la construction des ensembles invariants. En revanche, l'approche générale peut être améliorée si nous tenons compte d'une prédiction exacte, effectuée sur l'état futur de chaque niveau de stockage. Dans cette direction, un système logistique à retard unique, composé d'une unité de production et d'une seule unité de stockage, est traité dans la partie III. Dans ce cas, le modèle réduit présente la prévision exacte du niveau de stockage et le problème d'existence des solutions de pilotage admissibles est alors développé profondément dans les chapitres 5 et 6.

D'ailleurs, le système multivariable présente des conditions initiales canoniques, qui vérifient les contraintes de dimensionnement durant la phase initiale. Cependant, le fonctionnement du système logistique comprend une phase d'initialisation. Celle-ci peut désigner soit le démarrage du processus de production après un arrêt d'une certaine durée, soit une période initiale pour la mise en œuvre d'une nouvelle solution de pilotage. Dans les deux cas, une analyse spécifique de la période d'initialisation est nécessaire, pour bien étudier la conception et le paramétrage d'une solution de pilotage admissible pour la phase initiale que pour le régime établi. Pour cette raison, nous discuterons l'étude de la phase d'initialisation pour le système logistique élémentaire dans la partie III.

Enfin, au-delà de la prise en compte des contraintes de fonctionnement, l'analyse de la dynamique des systèmes logistiques que nous menons, est axé autour de la prise en compte exacte des retards et des facteurs de perte. Ainsi, une deuxième difficulté concerne la sensibilité de la méthode de commande par rapport aux variations des paramètres intrinsèques du réseau logistique. Ces incertitudes étant nombreux, la partie IV est alors dédiée à l'étude des performances du système de pilotage proposé, pour le système logistique élémentaire soumis à des incertitudes.



TROISIÈME PARTIE

# Pilotage du système logistique élémentaire

---

## Introduction

Dans cette partie de notre étude, nous considérons le système logistique élémentaire dont la dynamique du stock est décrite par le système à retard sur l'entrée (1.4) de la forme suivante :

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\sigma y(t) + u(t - \theta) - d(t) & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ -\sigma y(t) + \varphi(t) - d(t) & , \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \end{cases}$$

Un tel problème permet de décrire les processus logistiques de base, à savoir la production, l'acheminement et la livraison ainsi que la planification et la gestion du niveau de stockage. Les variables  $u(t)$ ,  $y(t)$  et  $d(t)$  représentent l'entrée de commande, la variable de sortie et la perturbation respectivement. Ce système est soumis aux contraintes de fonctionnement (1.5), (1.6) et (1.7), qui présentent deux types de limitations, la positivité et la saturation des variables du système. La problématique que nous posons consiste à trouver une stratégie de pilotage pour ce système afin que les contraintes sur les variables d'entrée et de sortie,  $u(t)$  et  $y(t)$ , déjà citées restent toujours vérifiées, et ceci pour toute demande qui varie de façon arbitraire dans l'intervalle  $[d_{min}, d_{max}]$  qui est aussi noté  $\mathcal{D}$ . Le travail est développé sous l'hypothèse que les paramètres intrinsèques du système,  $\theta$  et  $\sigma$ , sont connus exactement.

Dans la suite, Nous proposons deux solutions de pilotage. La première est basée sur l'utilisation d'une commande bang-bang du type feedback prédictif, en s'appuyant sur le principe d'invariance des systèmes contraints, dans le chapitre 5. La seconde est une structure de commande affine par feedback prédictif, basée sur la caractérisation des bornes atteintes par les variables des flux, ce qui est l'objet du chapitre 6.

# SOLUTION DE PILOTAGE PAR PRINCIPE D'INVARIANCE

---

## Table des matières

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>115</b>
<b>5.2</b>	<b>Stratégie de commande</b>	<b>116</b>
5.2.1	Solution par prédiction d'état	116
5.2.2	Loi de commande de type bang-bang	117
<b>5.3</b>	<b>Conditions de <math>\mathcal{D}</math>-invariance</b>	<b>119</b>
<b>5.4</b>	<b>Conditions d'admissibilité de la loi de commande</b>	<b>121</b>
5.4.1	Conditions nécessaires et suffisantes pour le régime établi	124
5.4.2	Phase d'initialisation	129
<b>5.5</b>	<b>Exemple de simulation</b>	<b>132</b>
<b>5.6</b>	<b>Optimisation de la loi de commande</b>	<b>136</b>
<b>5.7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>139</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous réalisons une étude portant sur la problématique de pilotage du système logistique présentant un facteur de perte  $\sigma$  et un retard  $\theta$  constant, au moyen d'une approche issue de la théorie du contrôle. Le système introduit par l'équation (1.4) est soumis à des contraintes de positivité et de saturation liées essentiellement aux caractéristiques physiques des processus. Celles-ci doivent être prises en compte lors de la conception de la loi de commande bang-bang du type feedback prédictif, qui vise à stabiliser le système logistique.

L'utilisation de ce type de commande introduit une non-linéarité dans le système contrôlé,

ce qui rend l'analyse des équations de la dynamique du système et l'étude de la stabilité en boucle fermée plus complexe. Dans ce cadre-là, nous utiliserons le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance introduit dans la section 5.3, ainsi que les propriétés de la stabilisation par prédiction d'état que nous avons présentées dans la section 2.3.2, afin d'identifier les ensembles invariants des variables et la région admissible du système contrôlé.

Nous commencerons ce chapitre par introduire la stratégie de commande proposée, dans la section 5.2, et nous finissons par présenter le modèle réduit d'Artstein. Ensuite, nous appliquons le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance dans la section 5.3, afin de déterminer les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance pour le système réduit sans retard. La section 5.4 est dédiée à la définition de l'admissibilité de la commande, ainsi que le dimensionnement préalable de la structure et des ressources du système logistique. De plus, nous formulons les résultats d'admissibilité de la loi de commande, sous forme de conditions nécessaires et suffisantes pour le régime établi, dans la section 5.4.1, et de conditions nécessaires pour la phase d'initialisation du système, dans la section 5.4.2. Enfin, nous appliquons un exemple de simulation dans la section 5.5, qui met en œuvre une discussion sur la possibilité d'optimiser de la commande bang-bang, dans la section 5.6.

## 5.2 Stratégie de commande

Dans cette section, nous abordons la mise en application d'une loi de commande de type feedback prédictif qui sert à stabiliser le système élémentaire représenté par l'équation (1.4), tout en respectant les contraintes de positivité et de saturation, pour toute demande inconnue des clients mais toujours bornée.

### 5.2.1 Solution par prédiction d'état

L'approche proposée pour la commande des systèmes à retards sur l'entrée de commande est basée sur le principe de retour d'état par prédiction. Cette structure a été d'abord étudiée par [Olbrot (1978)], et permet de compenser les effets du retard présent dans la dynamique du système à retard, afin de stabiliser le système en boucle fermée. Nous notons que la variable  $z(t)$  présente la prédiction de l'état futur du niveau du stock  $y(t)$  sur un horizon temporel de  $t$  à  $(t + \theta)$ , et est exprimée par la forme suivante :

$$z(t) = e^{-\sigma\theta}y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta. \quad (5.1)$$

Le statut de prédiction de cette variable  $z(t)$  peut en effet être observé, à partir de la définition de la dynamique du système (1.4), qui montre que :

$$y(t + \theta) = e^{-\sigma\theta}y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau - \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}d(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta. \quad (5.2)$$

Ainsi, l'expression de prédiction (5.1) peut être exprimée de manière équivalente en utilisant l'expression (5.2) sous la forme suivante :

$$z(t) = y(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq 0. \quad (5.3)$$

Ensuite, par dérivation temporelle de l'expression (5.1), et en se basant sur la dynamique d'évolution de la variable de sortie (1.4), nous aboutissons au système suivant :

$$\dot{z}(t) = -\sigma z(t) + u(t) - e^{-\sigma\theta}d(t). \quad (5.4)$$

Cette structure de prédiction d'état est connue par la réduction d'Artstein [Artstein (1982)], et présente un résultat basique dans plusieurs études sur les systèmes à retards, comme par exemple les travaux récents suivants [Abbou *et al.* (2017), Abbou *et al.* (2015a), Abbou *et al.* (2015b)]. L'idée de base de la prédiction de l'état revient à anticiper et compenser entièrement le retard, tout en générant le système dynamique sans retard sous la forme (5.4). De plus, nous remarquons que la dynamique de variation de la prédiction dépend de l'entrée de commande  $u(t)$  sans l'intervention du retard. Ainsi, nous pouvons passer à la section suivante pour introduire la structure de la loi de commande proposée.

### 5.2.2 Loi de commande de type bang-bang

La structure de commande de type feedback prédictif introduite dans la section précédente est définie sous la forme d'une loi bang-bang. Celle-ci exprime en faveur le comportement hybride du processus de production, présentant deux types de non-linéarité. Le premier type fournit une commande optimale dont la valeur permute entre deux valeurs positives de la commande, une valeur maximale  $u_1$  et une valeur minimale  $u_2$ . Nous définissons ces deux valeurs de la loi de commande  $u(t)$ ,  $u_1$  et  $u_2$ , par l'hypothèse suivante :

$$u_2 < u_1, \quad (5.5)$$

tout en vérifiant la contrainte sur l'entrée de commande (1.6), telle que :

$$u_1, u_2 \in [u_{min}, u_{max}]. \quad (5.6)$$

La deuxième non-linéarité présente deux seuils positifs de commutation définis par  $z(t) = z_{min}$  et  $z(t) = z_{max}$ . Les variables minimale  $z_{min}$ , et maximale  $z_{max}$ , de la variation de la prédiction  $z(t)$  sont définies par l'hypothèse suivante :

$$z_{min} < z_{max}. \quad (5.7)$$

En outre, le comportement de  $u(t)$  ne dépend pas seulement de l'état de la variable de prédiction  $z(t)$ , mais aussi de l'historique des sollicitations passées. En d'autres termes,  $u(t)$  présente un processus d'hystérésis  $u(t) = f(z(t), \dot{z}(t))$ . En effet, toutes ces non-linéarités forment ce que nous avons appelé la loi de commande bang-bang, qui est définie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{pour } z(t) \geq z_{min} \text{ et } \dot{z}(t) \geq 0, \\ u_2, & \text{pour } z(t) \leq z_{max} \text{ et } \dot{z}(t) \leq 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Le comportement de la loi de commande bang-bang est décrit par l'automate à états finis de la figure 5.1 et le processus d'hystérésis de la figure 5.2 ci-dessous.

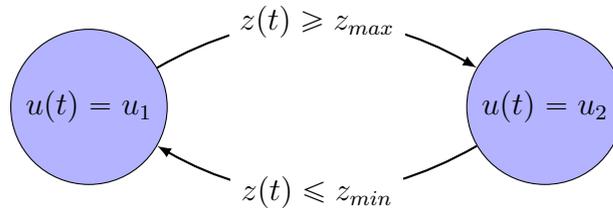


FIGURE 5.1 – Automate à états finis de la loi de commande bang-bang

Cette loi de commande est de nature hybride présentant des discontinuités au niveau des flux de production qui alimentent le niveau de stockage. Un exemple réaliste de cette loi de commande est le système logistique de production, où les machines de production fonctionnent en continu entre deux niveaux de production selon les spécifications du système sur les ressources de stockage. Donc, cette loi de commande bang-bang correspond bien à ce type de gestion de l'unité de production.

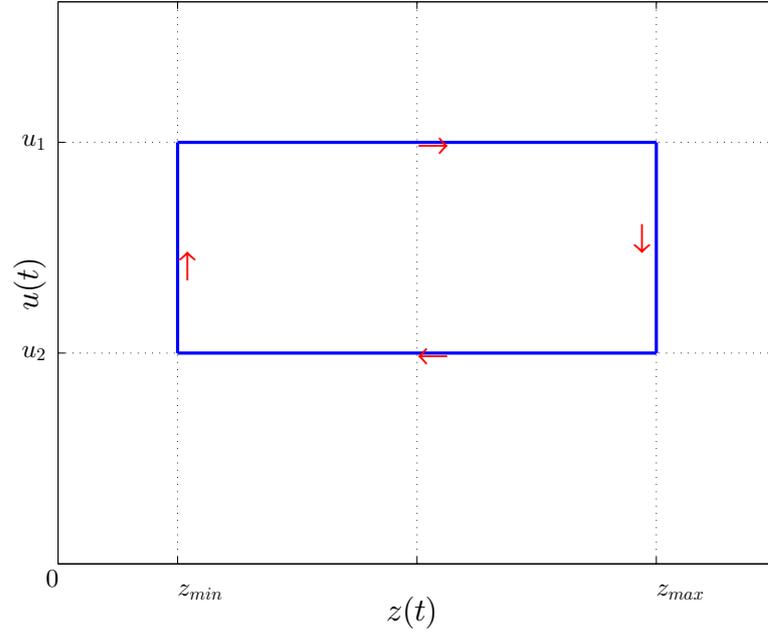


FIGURE 5.2 – Processus d’hystérésis de la loi de commande bang-bang

La stratégie de commande étant définie par une loi de commande bang-bang (5.8) et basée sur le principe de retour d’état de prédiction (5.1), nous pouvons donc appliquer les propriétés de  $\mathcal{D}$ -invariance sur le système réduit (5.4), qui sont rappelées dans la section 2.6.1.

### 5.3 Conditions de $\mathcal{D}$ -invariance

Dans cette section, nous évoquons les notions de  $\mathcal{D}$ -invariance que nous avons introduites dans la section 2.6.1 et précisément dans le théorème 2.8, dans le contexte de la résolution de problèmes de commande contrainte pour le système dynamique sans retard (5.4), qui est soumis à son tour à une perturbation arbitraire dont l’intervalle de variation est noté  $\mathcal{D}$ .

Dans notre système, la réduction d’Artstein (5.4) peut être exprimée par la fonction  $f$  définissant le système réduit  $\dot{z}(t) = f(z(t), u(t), d(t))$ . On définit pour la suite l’intervalle de variation de la prédiction  $z(t)$  par  $[z_{min}, z_{max}]$ , et l’intervalle de variation de la perturbation  $d(t)$  par  $\mathcal{D} = [d_{min}, d_{max}]$ . Ainsi, si on applique le théorème 2.8 de la  $\mathcal{D}$ -invariance du système défini par la fonction  $f$ , on obtient que l’intervalle  $[z_{min}, z_{max}]$  est  $\mathcal{D}$ -invariant

pour ce système, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$f(z_{min}, d_{max}) \geq 0,$$

et

$$f(z_{max}, d_{min}) \leq 0.$$

Ensuite, nous développons les conditions de la  $\mathcal{D}$ -invariance ci-dessus pour le système réduit (5.4) défini par  $f$ , et nous aboutissons aux relations suivantes.

Lorsque  $z(t)$  atteint sa borne minimale  $z_{min}$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$-\sigma z_{min} + u(t) - e^{-\sigma\theta} d_{max} \geq 0. \quad (5.9)$$

Et lorsque la variable  $z(t)$  équivaut à sa borne maximale  $z_{max}$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$-\sigma z_{max} + u(t) - e^{-\sigma\theta} d_{min} \leq 0. \quad (5.10)$$

Par ailleurs, nous remarquons que les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance (5.9) et (5.10), dépendent toutes les deux de la variable de commande  $u(t)$ . Pour cela, nous interprétons ces conditions, tout en prenant en considération le comportement de la loi de commande bang-bang, qui permute entre les deux valeurs de commande  $u_1$  et  $u_2$ , déjà introduites. Celles-ci vérifient la contrainte sur l'entrée de commande (5.6). En effet, nous obtenons les conditions suivantes :

$$\sigma z_{min} + e^{-\sigma\theta} d_{max} \leq u_1, \quad (5.11a)$$

$$u_2 \leq \sigma z_{max} + e^{-\sigma\theta} d_{min}. \quad (5.11b)$$

Par conséquent, nous déterminons les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle  $[z_{min}, z_{max}]$  pour le système réduit sans retard (5.4). Celles-ci sont formulées par la proposition suivante.

**Proposition 5.1.** *Étant donné le système sous la forme (1.4), il existe une loi de commande bang-bang qui vérifie les contraintes (1.6) et (5.6), de sorte que l'intervalle de prédiction  $[z_{min}, z_{max}]$  soit  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système en boucle fermée (5.4), sous l'hypothèse que les réels  $z_{min}$  et  $z_{max}$  vérifient l'inégalité (5.7), si et seulement si les deux*

conditions suivantes sont vérifiées :

$$\sigma z_{min} + e^{-\sigma\theta} d_{max} \leq u_{max}, \quad (5.12)$$

$$u_{min} \leq \sigma z_{max} + e^{-\sigma\theta} d_{min}. \quad (5.13)$$

*Démonstration.* Les inégalités (5.12) et (5.13) se déduisent des inégalités (5.11a) et (5.11b) en prenant en compte l'hypothèse (5.6) sur les valeurs de commande. Ainsi, si les paramètres  $u_1$  et  $u_2$  vérifient les inégalités (5.11a) et (5.11b), ils vérifient par conséquent les conditions (5.12) et (5.13). Celles-ci sont vraies pour des valeurs de commande vérifiant  $u_1 \leq u_{max}$  et  $u_{min} \leq u_2$ . Inversement, si les conditions (5.12) et (5.13) sont vérifiées, alors on peut choisir des valeurs de commande telles que  $u_1 = u_{max}$  et  $u_2 = u_{min}$ . Les paramètres  $z_{min}$  et  $z_{max}$  étant donnés, ce choix définit une loi de commande bang-bang du type feedback-prédicteur, de sorte que l'intervalle  $[z_{min}, z_{max}]$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système en boucle fermée.  $\square$

Après avoir déterminé l'intervalle invariant  $[z_{min}, z_{max}]$ , qui décrit l'évolution de la variable de prédiction  $z(t)$  pour le système réduit (5.4), le problème revient à déterminer l'ensemble invariant de la variable sortie  $y(t)$  pour le système à retard. Pour cela, nous introduisons la relation de passage du système sans retard au système à retard (1.4) dans la section suivante, afin de trouver les conditions d'admissibilité de la loi de commande.

## 5.4 Conditions d'admissibilité de la loi de commande

La mise en œuvre de la loi de commande consiste à formuler des conditions liant les paramètres de commande et les paramètres du système de façon à garantir que l'évolution dynamique de la sortie et de l'entrée du système soient contraintes dans les intervalles de variation prescrits, qui sont décrits par les inclusions (1.5) et (1.6) respectivement. Ce contexte porte sur l'admissibilité de la loi de commande du système piloté. Pour cela, nous commençons par définir l'admissibilité précisément pour pouvoir caractériser correctement les conditions d'admissibilité de la loi de commande bang-bang proposée.

**Définition 5.1.** (*Loi de commande admissible*)

Une loi de commande est supposée d'être admissible si, pour toute condition initiale  $y(0) \in [y_{min}, y_{max}]$ , il existe non seulement un encours initial  $\varphi(\tau)$  pour  $\tau \in [0, \theta[$ , mais encore

des nombres réels  $u_1, u_2, z_{min}$  et  $z_{max}$ , de sorte que la solution unique du système en boucle fermée vérifie les contraintes (1.5) et (1.6), sur le niveau de stock  $y(t)$  et l'ordre de production  $u(t)$  à la fois, pour  $t \geq 0$ , et ceci pour toute demande  $d(t)$  qui satisfait la spécification (1.7).

Ensuite, nous allons s'appuyer sur la formulation (5.3) de la prédiction d'état  $z(t)$ , déjà définie dans la section 5.2.1, afin de déterminer les conditions d'admissibilité pour notre système d'étude (1.4). Cette expression dépend à la fois d'une estimation du niveau d'inventaire futur  $y(t + \theta)$ , et d'une erreur d'estimation donnée sous la forme d'une somme  $\int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)} d(\tau) d\tau$ , pour des instants compris entre  $t$  et  $t + \theta$ . Ainsi, nous rappelons l'expression (5.3) par la relation suivante :

$$y(t + \theta) = z(t) - \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)} d(\tau) d\tau, \text{ pour } t \geq \theta. \quad (5.14)$$

De plus, lorsque le système évolue dans le temps, la variable  $d(t)$  varie entre les bornes limites  $d_{min}$  et  $d_{max}$ , et la variable  $z(t)$  varie aussi entre les bornes  $z_{min}$  et  $z_{max}$ . À savoir que la relation (5.14) résume la variation  $y(t)$ , nous déduisons en conséquence l'évolution de la sortie entre deux limites exactes notées  $y_1$  et  $y_2$ , qui vérifient l'hypothèse suivante :

$$y_1 \leq y_2. \quad (5.15)$$

Du fait que la variable  $z(t)$  n'est déterminée que par les valeurs que prend  $d(\tau)$  pour les instants précédant  $t$ , et que l'intégrale ne dépend que des valeurs prises par  $d(\tau)$  pour les instants suivant  $t$ , nous déduisons la relation exacte qui existe entre les bornes atteignables  $y_1, y_2, z_{min}$  et  $z_{max}$  des régions parcourues par les variables  $y(t)$  et  $z(t)$ .

**Proposition 5.2.** *Étant donné les hypothèses (5.7) et (5.15) ainsi que les notations précédentes, les bornes exactes et atteignables de l'évolution de la sortie  $y(t)$  du système (1.5) prennent les formes suivantes :*

$$y_1 = z_{min} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max}, \quad (5.16)$$

et

$$y_2 = z_{max} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}. \quad (5.17)$$

*Démonstration.* L'intégrale qui intervient dans l'expression (5.14) est une convolution, dont le noyau est stable, sa norme au sens  $L_1$  valant  $\frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}$ . Nous remarquons que cette

expression est analytique, donc elle est définie pour chaque valeur de  $\theta$ . En particulier, elle est égale à  $\theta$  pour un facteur de perte nul  $\sigma = 0$ . Ensuite, nous déduisons que lorsque la variable  $d(t)$  varie entre les deux limites  $d_{min}$  et  $d_{max}$ , avec  $d_{min} \leq d(t) \leq d_{max}$ , l'intégrale évolue entre  $\frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{min}$  et  $\frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{max}$ , vérifiant :

$$\frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{min} \leq \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau \leq \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{max}.$$

En outre, tenant compte de l'égalité (5.3) ainsi que les deux inégalités ci-dessus, nous obtenons les limites de l'évolution de la sortie, qui sont définies par les expressions (5.16) et (5.17). L'égalité vient du fait que les bornes  $y_1$  et  $y_2$  sont réellement atteignables. D'une part, si la variable  $z(t)$  atteint sa borne minimale  $z_{min}$ , et que la demande  $d(t)$  appliquée entre les instants  $t$  et  $t+\theta$  vaut sa limite maximale  $d_{max}$ , alors  $y(t+\theta)$  prend la valeur exacte  $y_1$  vérifiant (5.16) en conséquence. Cette valeur définit la borne inférieure de l'ensemble parcouru par la sortie  $y(t)$  lorsque  $t$  est supérieur ou égal à  $\theta$ . D'autre part et de la même façon, si la prédiction  $z(t)$  vaut sa borne maximale  $z_{max}$ , et que la demande appliquée entre les instants  $t$  et  $t+\theta$  est égale à la limite minimale  $d_{min}$ , alors nous constatons que la variable  $y(t+\theta)$  prend exactement la valeur  $y_2$ , qui est donc la borne inférieure de l'ensemble parcouru par la sortie  $y(t)$  lorsque  $t$  est supérieur ou égal à  $\theta$ .  $\square$

Cette proposition précise explicitement les bornes exactes atteintes par la variable de sortie  $y(t)$ . Sous prétexte que le système de prédiction évolue dans l'ensemble  $\mathcal{D}$ -invariant  $[z_{min}, z_{max}]$ , ça devient assez intéressant de reformuler ces variations de la sortie en termes d'intervalle  $[y_1, y_2]$ , dans le corollaire suivant.

**Corollaire 5.1.** *Le système (1.4) et la prédiction  $z(t)$  définie par (5.14) étant donnés, ainsi que les limites  $z_{min}$  et  $z_{max}$  vérifiant (5.7), et les bornes  $y_1$  et  $y_2$  vérifiant (5.15), (5.16) et (5.17), nous observons que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$\forall t \geq 0, \forall d(t) \in [d_{min}, d_{max}], z(t) \in [z_{min}, z_{max}], \tag{5.18}$$

$$\forall t \geq \theta, \forall d(t) \in [d_{min}, d_{max}], y(t) \in [y_1, y_2]. \tag{5.19}$$

*Démonstration.* À partir de la proposition 5.2, il est clair que l'assertion (5.18) implique l'assertion (5.19). Inversement, il existe une valeur de  $t$  pour laquelle la prédiction  $z(t)$  n'évolue pas dans l'intervalle  $[z_{min}, z_{max}]$ . Deux cas se présentent, suivant que  $z(t)$  soit

plus grand que  $z_{max}$  ou plus petit que  $z_{min}$ . Dans le premier cas, pour  $z(t) > z_{max}$ , une demande égale à  $d_{max}$  appliquée entre les instants  $t$  et  $t + \theta$  produit une valeur de la sortie plus petit que  $y_1$ . Dans le second cas, pour  $z(t) < z_{min}$ , la demande égale à  $d_{min}$  produit une sortie plus grande  $y_2$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

En résumé, nous avons traité l'admissibilité de la commande pour le système logistique considéré. Pour ce faire, nous avons déterminé la variation de la sortie  $y(t)$  par l'intervalle  $[y_1, y_2]$ , étant donné que l'entrée du système varie dans l'intervalle  $[u_2, u_1]$ . En effet, le paragraphe suivant présente les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce système de pilotage soit effectivement admissible pour le système logistique, dans le sens de satisfaire les contraintes de positivité et de saturation (1.5) et (1.6) des variables de sortie et d'entrée respectivement, afin de remplir la demande  $d(t)$  donnée sous la forme (1.7).

### 5.4.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour le régime établi

Dans cette section, nous déterminons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de loi de commande admissible pour  $t \geq \theta$ . En général, l'étude revient à trouver les conditions pour lesquelles les intervalles de variation de l'entrée et de la sortie respectent bien les contraintes (1.6) et (1.5) respectivement. Nous rappelons que l'intervalle de variation de l'entrée de commande est donné par  $[u_2, u_1]$  selon la définition de la commande bang-bang (5.8). De plus, l'intervalle de variation de la sortie est défini par la proposition 5.2. En effet, en se basant sur ces résultats, nous introduisons les lemmes 5.1 et 5.2 qui servent comme résultats intermédiaires, afin d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour le régime établi.

**Lemme 5.1.** *Étant donné le système sous la forme (1.4), la structure de commande bang-bang de type feedback-prédicteur (5.8)-(5.1) est admissible, si et seulement si les paramètres de commande  $u_1, u_2, z_{min}$  et  $z_{max}$  vérifient les conditions (5.6), (5.7), (5.11a) et (5.11b), ainsi que les paramètres de sortie  $y_1, y_2$ , qui vérifient les conditions (5.15) et (5.19).*

*Démonstration.* Ce lemme est établi en se basant sur les conditions obtenues précédemment. D'un coté, les paramètres de commande de loi de commande bang-bang sont définis par les hypothèses (5.6) et (5.7) sur les valeurs de commande  $u_1$  et  $u_2$ , et les limites de prédiction  $z_{min}$  et  $z_{max}$  respectivement. De plus, la relation entre ces paramètres est déterminée par les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance (5.11a) et (5.11b). De l'autre coté, en ce qui

concerne la variable de sortie du système, les bornes de l'intervalle donné par le corollaire 5.1, sont définis par les égalités (5.16) et (5.17) de la proposition 5.2 tout en vérifiant l'hypothèse (5.15).  $\square$

**Lemme 5.2.** *Étant donné le système de la forme (1.4), il existe deux valeurs de commande  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant (5.6) de sorte que la loi de commande  $u(t)$  de type bang-bang soit admissible si et seulement si les paramètres de prédiction  $z_{min}$  et  $z_{max}$  satisfont l'hypothèse (5.7), et les conditions suivantes (5.12), (5.13),*

$$y_{min} \leq z_{min} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max}, \quad (5.20a)$$

et

$$z_{max} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min} \leq y_{max}. \quad (5.20b)$$

*Démonstration.* D'une part, les conditions (5.12) et (5.13) présentent les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle  $[z_{min}, z_{max}]$ . Elles sont déterminées par la proposition 5.1 pour une entrée de commande vérifiant  $[u_1, u_2] \subset [u_{min}, u_{max}]$ . D'autre part, les conditions (5.20a) et (5.20b) sont déduites des définitions des bornes de sortie (5.16) et (5.17). Elles vérifient l'inclusion de l'intervalle  $[y_1, y_2] \subset [y_{min}, y_{max}]$ . Ce dernier se traduit par les conditions  $y_{min} \leq y_1$  et  $y_2 \leq y_{max}$ , qui permettent de respecter la contrainte de dimensionnement du niveau de stockage  $y(t)$ .  $\square$

D'ailleurs, nous obtenons un paquet d'inégalités (5.12), (5.13), (5.20a) et (5.20b) qui dépendent des paramètres  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $z_{min}$ ,  $z_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . Tous ces paramètres sont classés en plusieurs catégories. D'abord, les paramètres intrinsèques du système sont représentés par le retard  $\theta$  et le facteur de perte  $\sigma$ . Ensuite, les paramètres liés aux contraintes et aux spécifications du système sont donnés par  $y_{min}$  et  $y_{max}$ ,  $u_{min}$  et  $u_{max}$ , et  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . Enfin, il reste les paramètres de la prédiction,  $z_{min}$  et  $z_{max}$ , qui sont utilisés pour déterminer correctement la structure de commande. Ainsi, la dernière étape consiste à éliminer les paramètres de commande,  $z_{min}$  et  $z_{max}$ , tout en appliquant le principe d'élimination de Fourier-Motzkin introduit dans la section 2.7 sur le paquet d'inégalités obtenu. Cette méthode a l'avantage de générer de nouvelles conditions équivalentes qui ne dépendent que des paramètres du système. En guise de synthèse des résultats obtenus, et en se basant sur cette procédure d'élimination, nous formulons dans le théorème suivant les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la loi de commande admissible.

**Théorème 5.1.** *Étant donné le système dynamique sous la forme (1.4), il existe une loi de commande admissible de type bang-bang (5.8) définie par retour d'état de prédiction (5.1), si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\sigma y_{min} + d_{max} \leq u_{max}, \quad (5.21a)$$

$$u_{min} \leq \sigma y_{max} + d_{min}, \quad (5.21b)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max} < y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}. \quad (5.21c)$$

*Démonstration.* Les conditions (5.6), (5.7), (5.12), (5.13), (5.20a) et (5.20b) présentent des inégalités qui dépendent des paramètres intrinsèques  $\theta$ ,  $\sigma$ , des paramètres du système  $y_{min}$  et  $y_{max}$ ,  $u_{min}$  et  $u_{max}$ ,  $d_{min}$  et  $d_{max}$ , ainsi que des paramètres de prédiction  $z_{min}$  et  $z_{max}$ . Afin d'éliminer  $z_{min}$  et  $z_{max}$ , les conditions (5.12), (5.13), (5.20a) et (5.20b) sont reformulées par les expressions suivantes,

$$z_a \leq z_{min} \leq z_b, \quad (5.22)$$

$$z_c \leq z_{max} \leq z_d, \quad (5.23)$$

où les limites  $z_a$ ,  $z_b$ ,  $z_c$  et  $z_d$  sont définies par les égalités ci-dessous :

$$z_a = y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max},$$

$$z_b = \frac{1}{\sigma} (u_{max} - e^{-\sigma\theta} d_{max}),$$

$$z_c = \frac{1}{\sigma} (u_{min} - e^{-\sigma\theta} d_{min}),$$

$$z_d = y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}.$$

Ensuite, le principe d'élimination de Fourier-Motzkin s'applique sur les inégalités (5.22) et (5.23) pour l'élimination successive des paramètres  $z_{min}$  et  $z_{max}$ . Premièrement, le paramètre  $z_{min}$  est supprimé de l'inégalité (5.22), tout en générant la condition équivalente (5.21a) qui est égale à  $z_a \leq z_b$ . De la même façon, l'inégalité  $z_c \leq z_d$  est obtenue par

l'élimination du paramètre  $z_{max}$  de l'inégalité équivalente (5.23), tout en engendrant la condition (5.21b). Enfin, la condition (5.21c) vérifie l'hypothèse (5.7), ce qui complète la démonstration.  $\square$

Les conditions obtenues peuvent être interprétées suivant l'approche ensembliste de la méthode de Fourier-Motzkin. Ainsi, les expressions  $z_a$ ,  $z_b$ ,  $z_c$  et  $z_d$  représentent les limites de la région invariante d'évolution du système contrôlé, dans le plan  $(z_{min}, z_{max})$  comme c'est illustré par la figure 5.3. En effet, la région admissible d'existence de la loi de commande est obtenue par simple projection dans le plan  $(z_{min}, z_{max})$ , tout en générant les conditions  $z_a \leq z_b$ ,  $z_c \leq z_d$  et  $z_a < z_d$ . Ces conditions sont équivalentes aux conditions (5.21a), (5.21b) et (5.21c). Il faut noter en plus, que la dernière condition ne présente non seulement l'hypothèse (5.7) introduite précédemment, mais encore une condition primordiale qui prouve que la région invariante en question est non vide.

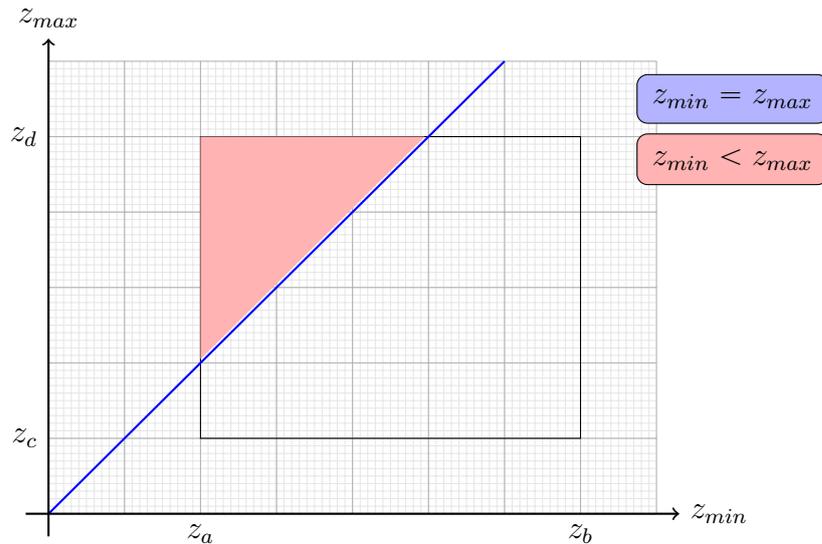


FIGURE 5.3 – Ensemble invariant dans l'espace de commande

Les conditions nécessaires et suffisantes obtenues (5.21a), (5.21b) et (5.21c) vérifient les contraintes de positivité et de saturation (1.5) et (1.6), pour une paramétrisation des paramètres de commande suivant les conditions (5.6), (5.7), (5.11a) et (5.11b). Toutefois, le système (1.4) traite le niveau de stockage présentant des pertes sur les produits périssables, dont la durée de vie est limitée. Pour cela, un cas particulier peut être discuté, lorsque le niveau de stockage ne présente pas des produits périssables, en sorte que le

système d'étude (1.4) est réduit au système (1.3), qui présente un facteur de perte nul,  $\sigma = 0$ . Ainsi, les conditions sont exprimées dans le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2.** *Étant donné le système sous la forme (1.3), les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une loi de commande admissible de type bang-bang (5.8), sont les suivantes :*

$$d_{max} \leq u_{max}, \quad (5.24a)$$

$$u_{min} \leq d_{min}, \quad (5.24b)$$

et

$$y_{min} + \theta d_{max} < y_{max} + \theta d_{min}. \quad (5.24c)$$

*Démonstration.* Les différentes conditions ont légèrement changé d fait que le facteur de perte  $\sigma$  vaut zero. D'une part, les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance données par la proposition (5.1), (5.12) et (5.13), sont réduites aux conditions (5.24a) et (5.24b) dans le cas où  $\sigma = 0$ . Elles peuvent être déduites aussi des conditions (5.21a) et (5.21b). D'autre part, la prédiction  $z(t)$  définie par l'expression (5.14), est exprimée pour  $\sigma = 0$  par  $y(t + \theta) = z(t) - \int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau$ , pour  $t \geq \theta$ . Ainsi, les bornes exactes et atteignables de variation de la sortie  $y(t)$ , définies dans la proposition 5.2, seront exprimées par  $y_1 = z_{min} - \theta d_{max}$ , et  $y_2 = z_{max} - \theta d_{min}$ . Par conséquent, les conditions admissibles (5.20a) et (5.20b) seront exprimées pour un facteur de perte nul par les inégalités suivantes :

$$y_{min} \leq z_{min} - \theta d_{max}, \quad (5.25)$$

et

$$z_{max} - \theta d_{min} \leq y_{max}. \quad (5.26)$$

Enfin, la condition (5.24c) est obtenue en utilisant l'hypothèse (5.7) et en se basant sur les conditions (5.25) et (5.26), pour éliminer les paramètres  $z_{min}$  et  $z_{max}$ .  $\square$

À la fin de cette approche, nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'admissibilité d'une loi de commande bang-bang de type feedback-prédicteur (5.1)-(5.8). En plus, les conditions (5.21a), (5.21b) et (5.21c) conviennent au système (1.4) qui traitent les produits périssables, alors que les conditions (5.24a), (5.24b) et (5.24c) résument la région admissible du système (1.3) qui traitent tout type de produit fini ne présentant pas des pertes de stockage.

Nous pouvons remarquer que les conditions d'existence du système de pilotage admissible sont indépendantes des paramètres de régulation. En effet, les paramètres de commande,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $z_{min}$  et  $z_{max}$  sont définis par les hypothèses (5.6) et (5.7), et sont paramétrés par les conditions (5.11a) et (5.11b). Ce résultat intervient lors de la conception du système de pilotage du système logistique. Connaissant les caractéristiques de ce dernier, c'est-à-dire les paramètres  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ ,  $\sigma$  et  $\theta$ , nous pouvons tester l'existence d'un système de pilotage en testant simplement la validité des conditions (5.21a), (5.21b) et (5.21c), ou bien les conditions (5.24a), (5.24b) et (5.24c) pour  $\sigma = 0$ . Si ces conditions ne sont pas satisfaites, le concepteur est certain de ne pas pouvoir piloter le système logistique en utilisant la commande bang-bang proposée, du fait que les conditions obtenues dans le théorème 5.1 et le corollaire 5.3 sont nécessaires et suffisantes.

Par ailleurs, ces conditions décrivent le comportement du régime établi du système pour  $t \geq \theta$ . D'où, ça devient intéressant de développer l'étude de la dynamique du niveau de stock du système logistique durant la phase initiale pour  $t \in [0, \theta[$ , afin de trouver les conditions initiales admissibles. Durant cette phase d'initialisation, les conditions canoniques initiales, sont le niveau d'inventaire initial noté  $y(0)$ , et l'encours initial de production modélisé par la fonction  $\varphi(\tau)$  pour les instants  $\tau$  avec  $0 \leq \tau < \theta$ .

### 5.4.2 Phase d'initialisation

Le système logistique élémentaire (1.4) considéré dans les paragraphes précédents présente des conditions initiales canoniques, qui vérifient les contraintes (1.5) et (1.6) du système pour les instants  $t$  entre 0 et  $\theta$ , respectivement. Dans cette partie, nous considérons que le fonctionnement du système logistique comprend une phase d'initialisation. Nous analysons dans la suite le comportement du système tout en prenant en considération les conditions initiales qui sont d'un côté le niveau d'inventaire à l'instant initial  $t = 0$  noté  $y(0)$ , et de l'autre la fonction initiale noté  $\varphi(t)$ . Cette fonction correspond à l'état initial de la production entre les instants  $0 \leq t < \theta$ , c'est-à-dire avant la mise en application de la commande  $u(t)$ . En effet, on reprend le système (1.4) dont la dynamique est exprimée durant la phase initiale par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -\sigma y(t) + \varphi(t) - d(t), \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \quad (5.27)$$

La définition de la dynamique de la sortie  $y(t)$  peut s'exprimer sous la forme ci-dessous :

$$y(t) = y(0)e^{-\sigma t} + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau - \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}d(\tau)d\tau, \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \quad (5.28)$$

De cette expression, nous pouvons définir l'encours de production pour  $0 \leq t < \theta$ , noté par WIP pour « *work in progress* ». Ce terme présente les ordres de production qui sont prêts pour les instants  $t \geq \theta$ , pour alimenter le niveau de l'inventaire par les produits finis. L'expression du WIP est définie à partir de la fonction initiale  $\varphi(t)$ , par la forme suivante :

$$\text{WIP} = \int_0^\theta e^{-\sigma(\theta-\tau)}\varphi(\tau)d\tau. \quad (5.29)$$

Ainsi, la sortie du système décrite par la forme (5.28) serait exprimée pour  $0 \leq t < \theta$  par la définition suivante :

$$y(t) = y(0)e^{-\sigma t} + \text{WIP} - \int_0^\theta e^{-\sigma(t-\tau)}d(\tau)d\tau, \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \quad (5.30)$$

En se basant sur cette analyse de la fonction de sortie du système, les conditions initiales admissibles qui permettent de respecter les contraintes (1.5) et (1.6) pour la phase initiale du système (1.4), sont déterminées par la proposition suivante.

**Proposition 5.3.** *Étant donné le système (5.27), soumis à une loi de commande de la forme (5.1)-(5.8) et une perturbation  $d(t)$  de la forme (1.7) pour tout  $t \geq 0$ , les conditions initiales sont dites admissibles pour  $0 \leq t \leq \theta$ , si les conditions suivantes sont vraies :*

$$y_{min} \leq y(0) \leq y_{max}, \quad (5.31)$$

et

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{max} \leq e^{-\sigma\theta}y(0) + \text{WIP} \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{min}, \quad (5.32)$$

*Démonstration.* la variable  $u(t)$  reste dans l'intervalle prescrit par la contrainte (1.6), selon la définition de la loi de commande bang-bang utilisée. Celle-ci est définie par les valeurs de commande  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant (5.6), ce qui justifie le respect de la contrainte (1.6). Pour la variable de sortie, comme nous l'avons expliqué précédemment, l'intégrale qui intervient dans l'expression (5.30) est une convolution, dont le noyau est stable, et de norme égale à  $\frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}$  au sens  $L_1$ . Donc, nous déduisons que lorsque la variable  $d(t)$  vérifie la spécification (1.7), telle que  $d_{min} \leq d(t) \leq d_{max}$ , l'intégrale évolue entre deux limites

exactes données par les inégalités suivantes :

$$\frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min} \leq \int_0^\theta e^{-\sigma(t-\tau)} d(\tau) d\tau \leq \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max}. \quad (5.33)$$

En outre, tenant compte des deux inégalités ci-dessus, ainsi que la contrainte (1.5) qui identifie la variation de la sortie  $y(t)$ , nous obtenons les limites de variation de l'expression  $e^{-\sigma t} y(0) + \text{WIP}$ , qui dépend des conditions initiales  $y(0)$  et  $\varphi(t)$  pour  $t < \theta$ . D'abord, si la variable  $y(t)$  atteint sa borne minimale  $y_{min}$ , et que la demande  $d(t)$  appliquée entre les instants  $t = 0$  et  $t = \theta$  vaut sa limite maximale  $d_{max}$ , nous obtenons par conséquent la borne inférieure dans l'expression (5.32). Cette valeur définit la borne inférieure de l'ensemble parcouru par les conditions initiales lorsque  $t$  est inférieur ou égal à  $\theta$ . Ensuite, de la même façon si la sortie  $y(t)$  vaut sa borne maximale  $y_{max}$ , et que la demande appliquée entre les instants 0 et  $\theta$  est égale à la limite minimale  $d_{min}$ , alors nous constatons que la limite de l'ensemble parcouru par les conditions initiales, est exprimée par la borne supérieure de la condition (5.32). Enfin, cette dernière condition implique en particulier, que la valeur initiale du niveau d'inventaire est choisie de manière à vérifier la contrainte (1.5), de sorte que  $y(0) \in [y_{min}, y_{max}]$ , d'où la condition (5.31), ce qui achève la démonstration.  $\square$

En se basant sur les résultats obtenus par cette proposition, nous pouvons déduire les conditions initiales admissibles dans le cas où le niveau de l'inventaire  $y(t)$  ne présente pas des pertes, c'est-à-dire pour un facteur de perte  $\sigma$  qui vaut zéro. Les conditions sont énoncées dans le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.** *Étant donné le système sous la forme (1.3), soumis à une loi de commande de la forme (5.1)-(5.8) et une perturbation  $d(t)$  de la forme (1.7) pour tout  $t \geq 0$ , les conditions nécessaires admissibles pour la phase initiale, sont définies par la condition (5.31) ainsi que la condition suivante :*

$$y_{min} + \theta d_{max} \leq y(0) + \text{WIP} \leq y_{max} + \theta d_{min}. \quad (5.34)$$

*Démonstration.* La contrainte (1.6) sur l'entrée de commande  $u(t)$  reste toujours vérifiée, grâce à la définition de la loi de commande bang-bang sous la forme (5.6) et (5.8). Pourtant, d'autres expressions sont légèrement changées, de sorte que le facteur de perte  $\sigma$  vaut zéro. Le *work in progress* serait défini par  $\text{WIP} = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ . Ainsi, la sortie du système décrite par la forme (5.30), serait exprimée pour  $0 \leq t \leq \theta$  par  $y(t) = y(0) + \text{WIP} - \int_0^\theta d(\tau) d\tau$ . En effet, les limites exactes de la variation des conditions initiales  $y(0) + \text{WIP}$ , seront expri-

mées par les bornes  $y_{min} + \theta d_{max}$ , et  $y_{max} + \theta d_{min}$ , et ceci pour une sortie  $y(t)$  vérifiant (1.5) et une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7). Par conséquent, la condition admissible (5.32) serait exprimée pour un facteur de perte nul par la condition (5.34), ce qui complète la démonstration.  $\square$

À la fin de cette partie, nous avons déterminé les conditions initiales admissibles, (5.31) et (5.32), qui permettent le respect de la contrainte (1.5) sur la sortie du système (1.4). Ces conditions complètent les conditions nécessaires et suffisantes (5.21a), (5.21b) et (5.21c) obtenues pour le régime établi du système. Nous remarquons que les bornes minimale et maximale présentées par la condition (5.32) coïncident avec celles données par la condition (5.21c) pour  $t = \theta$ . De même, dans le cas d'étude du système (1.3), qui traite tout type de produits finis sans considérer les pertes de stockage, les conditions nécessaires et suffisantes (5.24a), (5.24b) et (5.24c) ont été complétées par les conditions initiales admissibles (5.31) et (5.34).

Du point de vue gestion de production, les résultats présentés dans cette partie s'interprètent en termes de conception de la stratégie de gestion proposée, et de sa réalisation par le système de pilotage mis en place. Dans ce cadre, nous avons considéré que les paramètres physiques du système logistique sont donnés et fixes, et que la stratégie de gestion vise à satisfaire la demande en évitant toute rupture du stock ou risque de sur-stockage, en prenant en compte les limitations des ressources de production. La structure du système de pilotage étant définie par une commande bang-bang qui présente des non-linéarités, les conditions formulées par le théorème 5.1 et la proposition 5.3 permettent de garantir le respect des spécifications de fonctionnement prescrites pour le système logistique soumis à des pertes en quantités de stockage. Également, les conditions énoncées par les corollaires 5.2 et 5.3 vérifient la satisfaction des contraintes sur les ressources de production et de stockage, offrant ainsi une solution de dimensionnement du système logistique qui aborde les produits non périssables.

À la fin de ce chapitre, un exemple de simulation est présenté dans le section suivante pour mieux illustrer le comportement dynamique de notre système contrôlé.

## 5.5 Exemple de simulation

Suite à l'étude théorique, nous considérons un exemple de simulation qui montre bien comment la stratégie de pilotage développée dans ce chapitre a amélioré les performances du système logistique (1.4). La stratégie de commande est de type bang-bang (5.8), basée

sur un feedback-prédicteur (5.1).

Pour commencer, nous suivons une méthodologie de conception afin de calculer les paramètres du système, de sorte que les conditions nécessaires et suffisantes énoncées dans le théorème 5.1 soient bien vérifiées. Les paramètres intrinsèques, qui sont le retard  $\theta$  et le facteur de perte  $\sigma$ , sont imposés par le concepteur du système logistique. De plus, les paramètres physiques liés aux spécifications du système sont les contraintes de positivité et de saturation sur le niveau de stockage (1.5), sur l'ordre de production (1.6), et sur la demande des clients (1.7). Les valeurs des bornes minimale et maximale définissant ces contraintes sont indiquées dans le tableau 5.1.

$u(t)$ pièces/jour			$y(t)$ pièces			$d(t)$ pièces/jour	
$u_{min}$	$u_{max}$	$\theta$	$y_{min}$	$y_{max}$	$\sigma$	$d_{min}$	$d_{max}$
5.83	15.11	5 jours	0	105	0.07 jour <sup>-1</sup>	0	15

TABLE 5.1 – Paramètres du système pour l'exemple 5.5

Quant à la phase d'initialisation pour  $t \in [0, \theta]$ , nous prenons en compte la fonction initiale  $\varphi(t)$  supposée constante, soit  $\varphi(t) = 16$ . Ainsi, en respectant les conditions initiales admissibles (5.31) et (5.32), nous partons d'un niveau de stock initial  $y(0) = 0$  pièces, et un encours de production  $WIP = 67.4976$  pièces/jour, selon la définition (5.29). Ensuite, les paramètres de commande,  $z_{min}$ ,  $z_{max}$ ,  $u_1$  et  $u_2$ , sont utilisés pour la conception du contrôleur, et sont donnés par le tableau 5.2.

$z(t)$ pièces		$u(t)$ pièces/jour	
$z_{min}$	$z_{max}$	$u_1 = u_{max}$	$u_2 = u_{min}$
64.79	83.33	15.11	5.83

TABLE 5.2 – Paramètres de commande pour l'exemple 5.5

Nous avons mené plusieurs tests, en considérant diverses formes de signaux de la demande  $d(t)$ , précisément le signal aléatoire qui décrit le comportement arbitraire de la demande externe des clients. Par ailleurs, nous présentons dans cette simulation un signal rectangulaire évoluant entre 0 et 15 pour les unités de temps comprises entre  $t = 0$  et  $t = 180$  jours, selon la figure 5.4. Cette variation entre l'arrêt de demande, une demande quotidienne maximale  $d_{max} = 15$  pièces/jour, et une demande intermédiaire qui vaut  $d(t) = 8$

pièces/jour, reflète la tendance semestrielle et les changements saisonniers brusques allant sur une marge de demi-année.

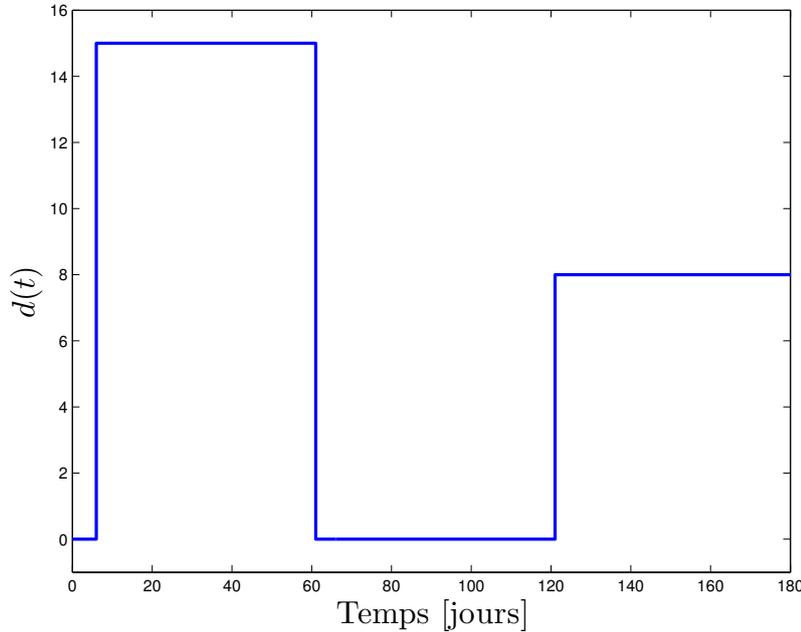
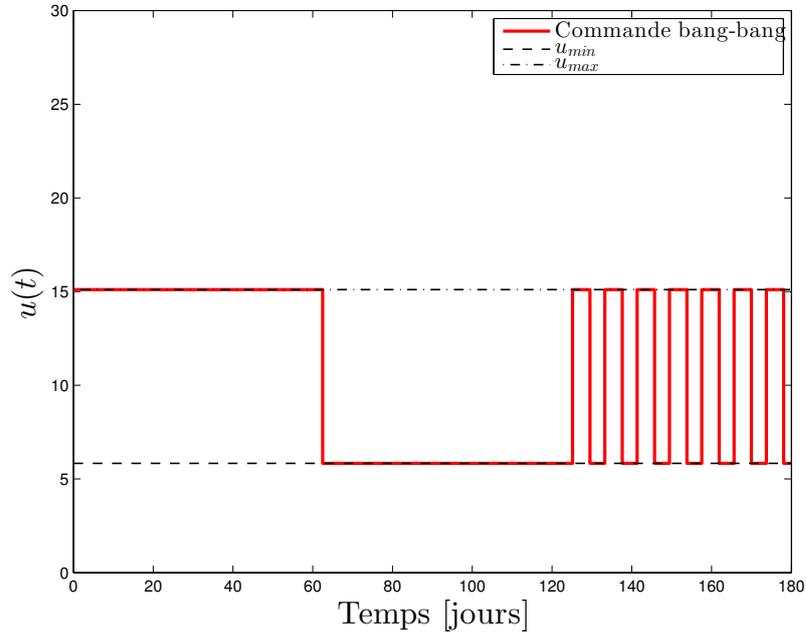


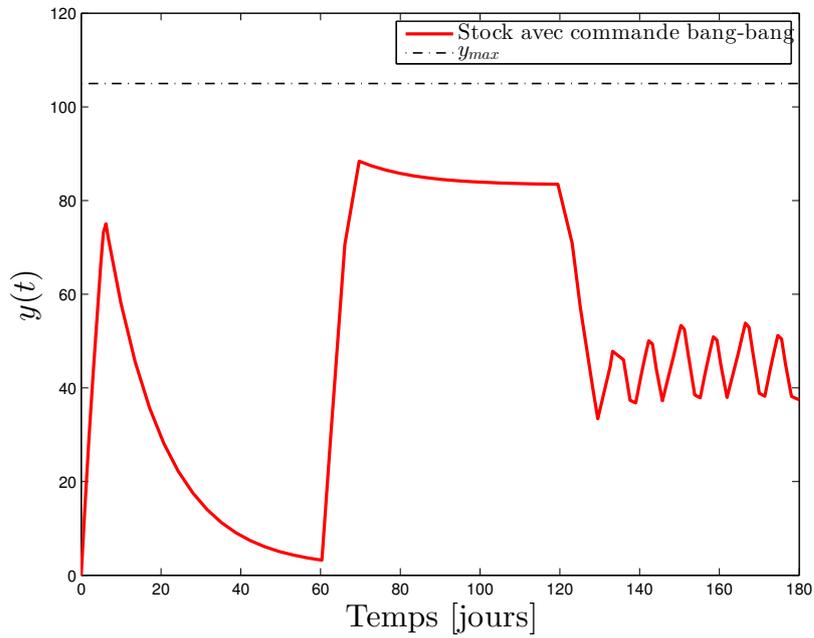
FIGURE 5.4 – Fonction illustrant la demande des clients pour l'exemple 5.5

Les résultats de la figure 5.5 représentent les évolutions temporelles de la commande  $u(t)$ , de la sortie  $y(t)$ , ainsi que les bornes des contraintes du système contrôlé. Nous constatons d'abord que le niveau d'inventaire  $y(t)$  n'augmente pas au-delà de  $y_{max} = 105$  pièces, et ne subit aucune rupture de stockage. De même, l'évolution temporelle de  $u(t)$  montre l'aspect hybride de la commande, qui bascule entre  $u_1 = u_{max} = 15.11$  pièces/jour et  $u_2 = u_{min} = 5.83$  pièces/jour. Ainsi, les contraintes de positivité et de saturation, (1.5) et (1.6), sont vérifiées pour la stratégie de commande bang-bang. En gestion de production, cela explique que le processus de production suit les changements saisonniers de la demande clientèle, et que l'unité de stockage est suffisamment dimensionnée, de manière à servir la demande externe à tout moment.

Ensuite, la dynamique du niveau de stockage fournit un niveau de service maximal durant l'état initial pour les unités de temps qui précèdent  $t = \theta = 5$  jours. Ceci explique que l'encours de production WIP et le niveau du stock initial  $y(0)$ , satisfont les conditions initiales admissibles (5.31) et (5.32), pour  $0 \leq t < \theta = 5$  jours. En résumé, la stratégie de pilotage développée dans ce chapitre fournit un niveau de service maximal et une satisfaction de la demande, aussi bien pour l'état transitoire que pour le régime établi.



(a) Évolution temporelle de  $u(t)$



(b) Évolution temporelle de  $y(t)$

FIGURE 5.5 – Résultats de simulation pour l'exemple 5.5

Enfin, nous pouvons constater que le niveau de stockage est en mode décroissant jusqu'à

$y_{min} = 0$ , quand il y a arrêt de la demande externe. En termes de gestion de production, un stock nul permet de réduire les pertes sur les produits périssables, de minimiser le coût d'exploitation et de stockage, et d'améliorer la planification des capacités au niveau du centre de distribution. Pourtant, lorsque la demande passe à un niveau intermédiaire  $d(t) = 8$  pièces/jour, la réponse de l'entrée de commande présente des battements fréquents, entre 5.83 pièces/jour et 15.11 pièces/jour. Ce comportement est non préférable en gestion de production car il provoque une augmentation des coûts de mise en marche et d'arrêts, et des coûts de production par conséquent. Ce phénomène vient du fait que la production permute entre deux niveaux de production, sans prendre en considération les prévisions exactes de demande. Pour cela, nous présentons dans la section suivante une méthode d'optimisation de la loi de commande bang-bang, à travers des stratégies de réapprovisionnement à points de commande, ce qui correspond bien à ce type de gestion de l'unité de production.

## 5.6 Optimisation de la loi de commande

Les méthodes traditionnelles de gestion des stocks engendrent un sur-stockage en cas de baisse de la demande des clients, et un risque de rupture en cas d'augmentation brutale des demandes. Sous ces conditions, la gestion d'un niveau de stockage optimal, est conditionnée par la mise en place d'un stock de sécurité, afin de satisfaire la demande externe et assurer un taux de service optimal et une disponibilité des produits. Dans notre étude, le seuil de sécurité noté  $z_s$ , correspond à la prédiction du niveau futur du stock de sécurité, et il est soumis à la contrainte suivante :

$$0 < z_{min} < z_s < z_{max}. \quad (5.35)$$

En effet, nous étudions dans cette section la possibilité d'améliorer la loi de commande bang-bang, tout en proposant une stratégie de commande optimale. Celle-ci est basée sur une production planifiée par des points de prise de décision, qui dépendent à leur tour des prévisions de la demande et de la prédiction du niveau de stockage. Pour ce faire, la loi de commande serait définie par trois permutations possibles. Nous ajoutons aux niveaux de production  $u_1$  et  $u_2$  définis par les conditions (5.5) et (5.6), le niveau  $u(t) = 0$  qui désigne l'arrêt de la production. En relation avec ces ordres de production, nous supposons que la demande des clients  $d(t)$  présente deux débits en pièces produites, notées par  $d_1$  et  $d_2$ ,

vérifiant l'hypothèse suivante :

$$0 < d_2 < u_2 < d_1 < u_1. \quad (5.36)$$

Ensuite, selon les combinaisons possibles entre les commutations de production (5.5), les seuils de prédiction du stock (5.35) et la variation de la demande (5.36), nous déterminons une stratégie de commande optimale, définie par l'automate et le cycle schématisés par les figures 5.6 et 5.7.

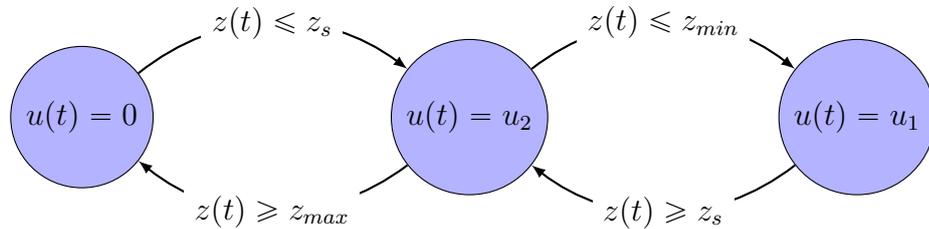


FIGURE 5.6 – Automate à états finis de la commande optimale

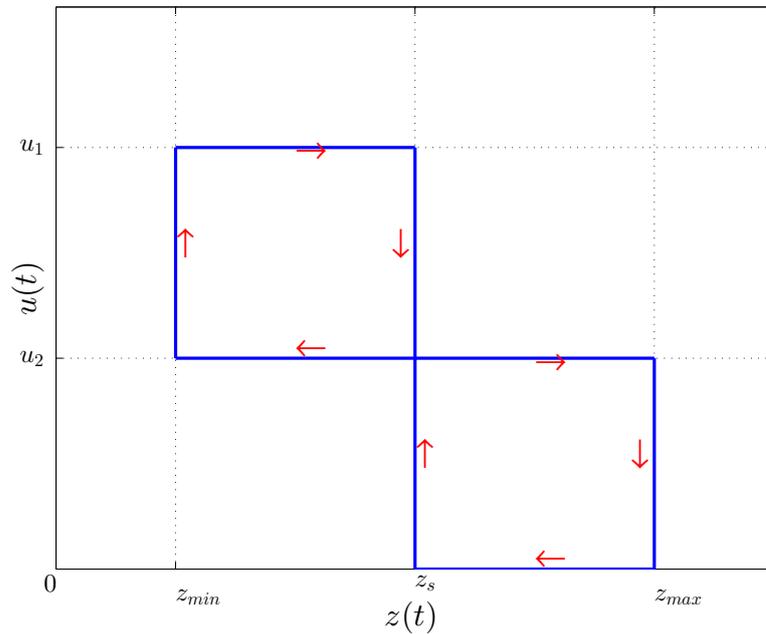


FIGURE 5.7 – Cycle de la commande optimale

Les figures 5.6 et 5.7 résument l'approche optimale de la commande, qui prend en compte la prévision de la demande externe à travers la prédiction  $z(t)$  définie sous la forme (5.3).

Nous remarquons ainsi, que si la demande est suffisamment grande, pour  $d(t) \geq d_1$ , les commandes de réapprovisionnement permutent entre les deux niveaux de production,  $u_2$  et  $u_1$ . Par contre, les commandes sont réduites au niveau de production  $u_2$  et à l'arrêt de production, pour une faible demande de l'ordre de  $d(t) \leq d_2$ . Contrairement à la loi de commande bang-bang illustrée par la figure 5.2, nous déduisons que cette stratégie de commande n'est plus limitée aux deux commutations  $u_1$  et  $u_2$ . De plus, si la prédiction du stock est suffisante pour satisfaire une faible demande, soit  $z(t) > z_s$  et  $d(t) \leq d_2$ , nous arrêtons l'approvisionnement dans ce cas afin d'éviter un excès de production et un sur-stockage par conséquence. De la même façon, si la demande devient importante, soit  $d(t) \geq d_1$ , avec une prédiction inférieure au seuil de sécurité pour  $z(t) < z_s$ , les ordres de production augmentent à un niveau  $u_1$  plus élevé. Ce processus permet d'éviter les ruptures du stock, et de satisfaire les demandes externes malgré leur variabilité. En résumé, nous déduisons que le point  $(u_2, z_s)$  présente un point stratégique pour la prise de décision à la production. Cette économie empêche en effet le sur-stockage en cas des faibles demandes, réduit les pertes de stockage, et permet d'éviter la rupture du stock pour des demandes importantes.

D'ailleurs, nous pouvons minimiser les coûts de démarrage et d'arrêt de la production, en considérant que chaque niveau de production représente une machine de production. Une première machine a un niveau de production  $u(t) = u_2$  et une deuxième machine a pour niveau de production  $u(t) = u_1$ . En effet, nous remarquons que pour une demande  $d_1$  supérieure à  $u_2$ , nous pouvons économiser les arrêts et les redémarrages des deux machines. Et pour demande  $d_2$  inférieure à  $u_2$ , les arrêts et les démarrages de la seconde machine sont évités. Ce processus de production résout ainsi le phénomène des battements fréquents, illustré par la figure 5.5, et réduit les coûts de démarrage et de mise en marche.

Enfin, nous avons proposé une stratégie de commande réaliste, qui fournit des points de commande optimaux pour approvisionner le niveau de stockage, tout en prenant en compte les prévisions de la demande. Celle-ci est comparable aux méthodes classiques de gestion de stock  $(S, s)$ , dans lesquelles un ordre de production est commandé afin d'amener le niveau de stockage à la position  $S = z_{max}$ , s'il est inférieur ou égal à un seuil  $s = z_s$ . De plus, ce type de commande rappelle la méthode de calcul des besoins connue sous l'acronyme *MRP* pour *Material Requirements Planning* avec la prise en compte de la quantité économique  $Q_e$ <sup>1</sup>, ce qui constitue un système de pilotage des ressources de production en se basant sur la prévision de la demande.

---

1. La quantité économique  $Q_e$  se calcule en appliquant la formule de Wilson [Javel et Le Bert (1993)]

## 5.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude portant sur la problématique de pilotage du système logistique élémentaire, présentant un facteur de perte sur le niveau de stockage et un retard de production. En effet, nous avons présenté le modèle dynamique retardé, sur lequel nous avons mis en œuvre une commande bang-bang du type feedback-prédicteur, pour piloter les flux dans un système logistique élémentaire. Puis, nous avons appliqué la réduction d'Artstein, afin d'anticiper les délais de production ainsi que leurs effets sur la dynamique du stock. L'approche de commande est développée sur un système équivalent dont la dynamique ne présente pas de retard sur l'entrée de commande, au moyen des propriétés d'invariance des systèmes contraints.

Ensuite, les résultats obtenus dans le cas où les paramètres du modèle sont exacts, sont tellement satisfaisants, puisque le système de pilotage fournit une satisfaction complète de la demande des clients. Ces résultats, sont énoncés sous forme de conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la loi de commande admissible, afin de stabiliser le système dynamique à retard. Nous avons également présenté les conditions nécessaires d'admissibilité pour la phase d'initialisation.

Dans le chapitre suivant, nous allons proposer une autre stratégie de commande qui va nous permettre de pallier au problème de respect des contraintes et des spécifications, en mettant en œuvre une loi de commande linéaire par feedback-prédicteur.

# SOLUTION DE PILOTAGE DES FLUX PAR UNE COMMANDE LINÉAIRE

---

## Table des matières

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	140
<b>6.2</b>	<b>Structure de la loi de commande linéaire</b>	141
<b>6.3</b>	<b>Dynamique des flux d'entrée et de sortie</b>	142
<b>6.4</b>	<b>Les bornes atteignables par les variables des flux</b>	145
<b>6.5</b>	<b>Ensemble de conditions initiales admissibles</b>	147
<b>6.6</b>	<b>Mise en œuvre de la loi de commande</b>	151
6.6.1	Conditions admissibles de la loi de commande	151
6.6.2	Paramètres de la loi de commande	153
<b>6.7</b>	<b>Comparaison des lois de commande Bang-Bang et linéaire</b>	156
<b>6.8</b>	<b>Exemple de simulation</b>	158

---

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une autre solution de commande pour piloter le même système logistique (1.4), tout en considérant une loi de commande linéaire basée sur une structure du type feedback-prédicteur. L'approche de résolution est basée sur la caractérisation des limites et des bornes atteintes par les variables des flux du système logistique contrôlé. Nous nous intéresserons principalement à l'existence d'un contrôleur satisfaisant les spécifications du système logistique piloté.

Nous commencerons le chapitre par introduire en détail la structure de commande choisie, dans la section 6.2. Ensuite, nous décrivons dans la section 6.3, les propriétés dynamiques du système entrée-sortie, afin de pouvoir déterminer les bornes de variations atteintes par les flux du système en boucle fermée, dans la section 6.4. Celles-ci nous permettra ainsi

de formuler les conditions d'existence de la structure de commande admissible, durant le régime transitoire dans la section 6.5. Dans la section 6.6.1, nous formulons les conditions d'existence de la structure de commande admissible en régime établi. Puis, nous traiterons la paramétrisation préalable de la structure de commande en section 6.6.2. Enfin, une comparaison des résultats obtenus avec ceux déterminés lors du pilotage par commande bang-bang, est développée dans la section 6.7, ainsi que sur l'exemple de simulation en section 6.8.

## 6.2 Structure de la loi de commande linéaire

Nous introduisons une structure de commande qui permet de stabiliser la dynamique du système (1.4) en boucle fermée, pour garantir le respect des contraintes de positivité et de saturation (1.6) et (1.5). La loi de commande proposée est linéaire de type feedback-prédicteur, définie sous la forme suivante :

$$u(t) = K(z_0 - z(t)). \quad (6.1)$$

Les paramètres de commande sont un gain statique  $K$ , qui permet de régler la cadence de production dans le système logistique, et une consigne du stock  $z_0$  pour le système contrôlé. Elle représente la valeur de référence à laquelle nous souhaitons stabiliser la sortie du système  $y(t)$ . Ce type de commande linéaire permet de réguler le niveau du stock d'un système logistique, dont l'entité de production présente des ordres de production en flux continu.

La variable  $z(t)$  présente la prédiction du niveau futur du stock, réalisée sur un horizon temporel de  $t$  à  $t + \theta$ , qui est défini par l'expression (5.1) du chapitre précédent. Cette expression a été complétée tout en prenant en compte des conditions initiales non nulles, de sorte que la prédiction serait décrite par la forme suivante :

$$z(t) = \begin{cases} e^{-\sigma\theta}y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ e^{-\sigma t}y(t) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau + \int_t^\theta e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau & , \text{ pour } 0 \leq t < \theta. \end{cases} \quad (6.2)$$

Nous rappelons que la prédiction permet de compenser le retard  $\theta$  sur l'entrée de commande, afin d'obtenir un système réduit sans retard, défini par l'équation différentielle (5.4). Le système en boucle fermée peut être représenté par le graphique ci-dessous.

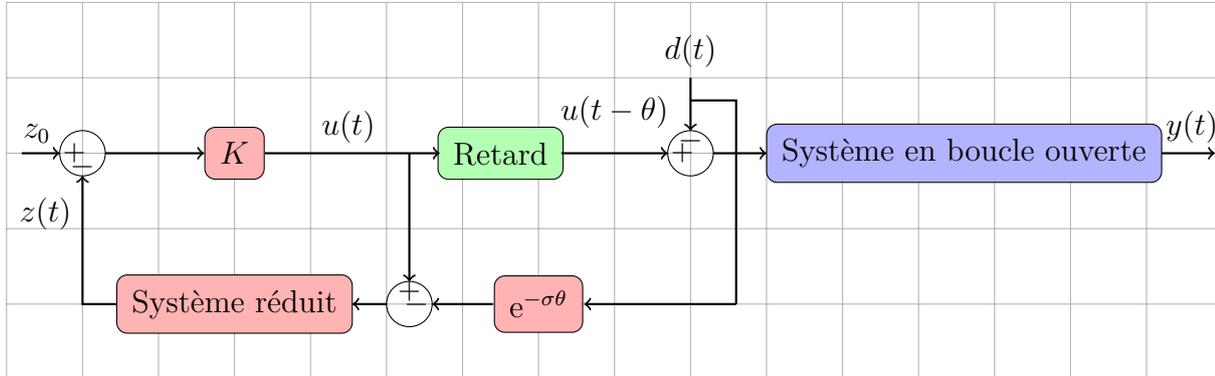


FIGURE 6.1 – Schéma-bloc du système en boucle fermée

Partant de la structure de commande linéaire par retour d'état de prédiction (5.1) - (6.1), nous étudions la dynamique du système en boucle fermée, dans la section suivante. L'enjeu revient alors à déterminer l'évolution des flux d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  du système (1.4), afin de vérifier par la suite les contraintes sur ces variables, (1.6) et (1.5), respectivement. La solution du problème est basée sur l'utilisation des résultats de calcul de bornes, que nous développerons dans la section suivante.

### 6.3 Dynamique des flux d'entrée et de sortie

L'approche de résolution que nous proposons consiste à calculer les bornes atteintes par les différentes variables du système, puis d'en déduire les conditions sous lesquelles les bornes atteintes respectent bien les contraintes spécifiées. Dans notre étude, les variables concernées par ces contraintes sont la variable de sortie  $y(t)$  et la variable d'entrée de commande  $u(t)$ . Afin de pouvoir utiliser le calcul de bornes présenté dans la section 2.4, nous commençons d'abord par représenter la dynamique des variables considérées sous une forme entrée-sortie. En effet, les expressions de l'évolution temporelle de chacune des variables de flux sont décrites pour l'état transitoire et l'état d'équilibre, dans la propriété suivante.

**Propriété 6.1.** *Le système (1.4), soumis à une commande linéaire par feedback-prédicteur de la forme (6.1)-(6.2), admet une représentation d'entrée-sortie telle que :*

$$u(t) = K \frac{\sigma}{\sigma + K} z_0 - K(y(0) + \text{WIP} - \frac{K}{\sigma + K} z_0) e^{-(\sigma + K)t} + K e^{-\sigma t} (e^{-(\sigma + K)} * d)(t), \text{ pour } t \geq 0,$$

$$y(t) = \begin{cases} T_1(t)y(0) + K(T_3 * (z_0 - e^{-\sigma t} \text{WIP}))(t) - (T_2 * d)(t) + \phi(t) & , \text{ pour } t \geq \theta, \\ e^{-\sigma t}y(0) - \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}d(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau & , \text{ pour } 0 \leq t \leq \theta. \end{cases}$$

L'opérateur du produit de convolution est noté par  $*$ , et les transferts correspondent aux fonctions temporelles suivantes :

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \begin{cases} e^{-\sigma t} & , \text{ pour } t \in [0, \theta[, \\ e^{-\sigma t} - e^{-\sigma(t-\theta)} + e^{-(\sigma+K)(t-\theta)} & , \text{ pour } t \geq \theta, \end{cases} \\ T_2(t) &= \begin{cases} e^{-\sigma t} & , \text{ pour } t \in [0, \theta[, \\ e^{-\sigma\theta}e^{-(\sigma+K)(t-\theta)} & , \text{ pour } t \geq \theta, \end{cases} \\ T_3(t) &= \begin{cases} 0 & , \text{ pour } t \in [0, \theta[, \\ e^{-(\sigma+K)(t-\theta)} & , \text{ pour } t \geq \theta, \end{cases} \\ \phi(t) &= \begin{cases} (e^{-\sigma t} * \varphi)(t) = \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau & , \text{ pour } t \in [0, \theta[, \\ \text{WIP} & , \text{ pour } t \geq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les affirmations de cette propriété sont obtenues en utilisant la transformée de Laplace et de ses propriétés. Ainsi, l'expression (6.1) de  $u(t)$ , correspond dans le domaine de Laplace à :

$$\hat{u}(s) = K\left(\frac{z_0}{s} - \hat{z}(s)\right). \quad (6.3)$$

En utilisant l'expression (5.4), nous montrons que  $\hat{z}(s)$  s'écrit sous la forme

$$\hat{z}(s) = \frac{z(0)}{s + \sigma} + \frac{\hat{u}(s)}{s + \sigma} - \frac{e^{-\sigma\theta}}{s + \sigma}\hat{d}(s), \quad (6.4)$$

où  $z(0)$  correspond à la valeur de prédiction à l'instant initial  $t = 0$ , de sorte que  $z(0) = y(0) + \text{WIP}$  selon la définition (6.2). En remplaçant  $\hat{z}(s)$  par son expression dans  $\hat{u}(s)$ , nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\hat{u}(s) = \frac{s + \sigma}{s} \frac{K}{s + \sigma + K} z_0 - \frac{K}{s + \sigma + K} (y(0) + \text{WIP}) + \frac{K}{s + \sigma + K} e^{-\sigma\theta} \hat{d}(s). \quad (6.5)$$

Dans cette expression, le transfert  $\frac{1}{s + \sigma + K} = \hat{T}_0(s)$ , correspond dans le domaine temporel à la fonction  $T_0(t) = e^{-(\sigma+K)t}$ . Ainsi, en utilisant la transformation de Laplace inverse, nous obtenons l'expression de  $u(t)$  énoncée dans la propriété 6.1.

L'expression de la sortie est obtenue de la même façon, en considérant l'expression (1.4)

de la dynamique de  $y(t)$ . En utilisant la transformation de Laplace, nous déduisons que :

$$\hat{y}(s) = \frac{y(0)}{s + \sigma} + \frac{e^{-s\theta}}{s + \sigma} \hat{u}(s) - \frac{\hat{d}(s)}{s + \sigma} + \frac{\hat{\phi}(s)}{s + \sigma}. \quad (6.6)$$

Puis, en remplaçant  $\hat{u}(s)$  par son expression précédemment obtenue, nous obtenons la formulation suivante :

$$\hat{y}(s) = \hat{T}_1(s)y(0) + K\hat{T}_3(s)\left(\frac{z_0}{s} - \frac{\text{WIP}}{s + \sigma}\right) - \hat{T}_2(s)\hat{d}(s) + \hat{\phi}(s). \quad (6.7)$$

Les transferts ci-dessus sont d'ailleurs définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{T}_1(s) &= \left(1 + \frac{K(1 - e^{-s\theta})}{s + \sigma}\right) \frac{1}{s + \sigma + K}, \\ \hat{T}_2(s) &= \left(1 + \frac{K(1 - e^{-(s+\sigma)\theta})}{s + \sigma}\right) \frac{1}{s + \sigma + K}, \\ \hat{T}_3(s) &= \frac{e^{-s\theta}}{s + \sigma + K}, \\ \hat{\phi}(s) &= \frac{\hat{\phi}(s)}{s + \sigma}. \end{aligned}$$

Enfin, l'expression de sortie  $y(t)$  est obtenue en prenant en compte les fonctions  $T_1(t)$ ,  $T_2(t)$ ,  $T_3(t)$  et  $\phi(t)$  pour les instants  $t$  entre 0 et  $\theta$ , et pour  $t \geq \theta$ .  $\square$

Les résultats donnés par cette propriété permettent de voir l'impact des conditions initiales non nulles sur la dynamique du système. Nous remarquons que les ordres de production ainsi que le niveau de stock sont influencés par les conditions initiales et dépendent des valeurs de  $y(0)$  et WIP. En effet, l'évolution de la sortie  $y(t)$  est décrite par deux fonctions distinctes. La première présente la phase d'initialisation pour les instants  $t \in [0, \theta[$ , où le niveau du stock dépend uniquement des conditions initiales  $y(0)$  et WIP et de la demande  $d(t)$ . Alors que les paramètres de commande  $K$  et  $z_0$  interviennent dans la deuxième fonction, pour  $t \geq \theta$ , au moment où la commande retardée commence à être visible.

Cette spécificité nous amène à définir l'ensemble des conditions admissibles pour le régime établi et pour la phase d'initialisation aussi. Plus précisément, cette approche permet de définir l'ensemble des valeurs  $y(0)$  et  $wip_0$  pour la phase initiale, ainsi que le choix des paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ , afin de permettre au système contrôlé de répondre aux contraintes et aux spécifications de fonctionnement. En fait, pour pouvoir caractériser cet

ensemble, l'étude consiste à calculer les bornes atteignables des variables de flux  $u$  et  $y$ , comme nous le montrons dans la section suivante.

## 6.4 Les bornes atteignables par les variables des flux

Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation des bornes atteintes par les variables des flux  $u(t)$  et  $y(t)$ . Leurs expressions sont données sous forme de relations entrée-sortie par la propriété 6.1. À partir de ces relations, on utilise les résultats de calcul de bornes donnés en section 2.4, pour déterminer les bornes exactes atteintes par les variables  $u(t)$  et  $y(t)$  du système dans la proposition suivante.

**Proposition 6.1.** *Étant donné le système (1.4), soumis à une loi de commande linéaire de la forme (6.1)-(6.2) et à une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7), les bornes exactes et atteignables de l'entrée de commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sont définies sous les formes suivantes :*

$$(i) \quad u(t) \in [u_1(t), u_2(t)], \quad \text{pour } t \geq 0,$$

$$(ii) \quad y(t) \in [y_1(t), y_2(t)],$$

avec

$$u_1(t) = \frac{K\sigma}{\sigma + K}z_0 - K(y(0) + \text{WIP}) - \frac{K}{\sigma + K}z_0 + \frac{e^{-\sigma\theta}}{\sigma + K}d_{\min}e^{-(\sigma+K)t} + \frac{Ke^{-\sigma\theta}}{\sigma + K}d_{\min},$$

$$u_2(t) = \frac{K\sigma}{\sigma + K}z_0 - K(y(0) + \text{WIP}) - \frac{K}{\sigma + K}z_0 + \frac{e^{-\sigma\theta}}{\sigma + K}d_{\max}e^{-(\sigma+K)t} + \frac{Ke^{-\sigma\theta}}{\sigma + K}d_{\max},$$

$$y_1(t) = \begin{cases} (e^{-\sigma t} - e^{-\sigma(t-\theta)})y(0) + \frac{1}{K+\sigma}(Kz_0 - Ke^{-\sigma t}\text{WIP} - e^{-\sigma\theta}d_{\max}) - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{\max} \\ + \text{WIP} + (y(0) - \frac{K}{K+\sigma}z_0 + \frac{K}{K+\sigma}e^{-\sigma t}\text{WIP} - \frac{e^{-\sigma\theta}}{K+\sigma}d_{\max})e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}, \quad \text{pour } t \geq \theta, \\ e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau - \frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma}d_{\max}, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \theta, \end{cases}$$

et, finalement

$$y_2(t) = \begin{cases} (e^{-\sigma t} - e^{-\sigma(t-\theta)})y(0) + \frac{1}{K+\sigma}(Kz_0 - Ke^{-\sigma t}\text{WIP} - e^{-\sigma\theta}d_{\min}) - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}d_{\min} \\ + \text{WIP} + (y(0) - \frac{K}{K+\sigma}z_0 + \frac{K}{K+\sigma}e^{-\sigma t}\text{WIP} - \frac{e^{-\sigma\theta}}{K+\sigma}d_{\min})e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}, \quad \text{pour } t \geq \theta, \\ e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau - \frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma}d_{\min}, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \theta. \end{cases}$$

*Démonstration.* Les bornes exprimées dans cette proposition sont obtenues tout en appli-

quant le principe de calcul des bornes présenté dans la section 2.4, sur chacune des expressions de  $u(t)$  et de  $y(t)$  données dans la propriété 6.1. En effet, la variable  $u(t)$  est exprimée sous la forme d'une somme de la fonction  $K \frac{\sigma}{\sigma+K} z_0 - K (y(0) + \text{WIP} - \frac{K}{K+\sigma} z_0) T_0(t)$ , et de la fonction de convolution  $K e^{-\sigma\theta} (T_0 * d)(t)$ , avec  $T_0(t) = e^{-(\sigma+K)t}$ . Étant donné que la variable  $d(t)$  évolue dans l'intervalle  $[d_{min}, d_{max}]$ , vérifiant (1.7), le terme de convolution peut être limité à tout instant  $t$  en appliquant le principe de calcul des bornes, de sorte que :

$$K e^{-\sigma\theta} d_{min} \int_0^t T_0(t-\tau) d\tau \leq K e^{-\sigma\theta} (T_0 * d)(t) \leq K e^{-\sigma\theta} d_{max} \int_0^t T_0(t-\tau) d\tau.$$

L'assertion (i) de la proposition est ensuite obtenue simplement en notant que :

$$\int_0^t T_0(t-\tau) d\tau = \frac{1 - e^{-(\sigma+K)t}}{\sigma + K}.$$

De la même manière, nous calculons les bornes atteintes par la sortie  $y(t)$  en se basant sur l'expression de  $y(t)$  donnée par la propriété 6.1. Pour la phase d'initialisation, pour  $t \in [0, \theta]$ , les bornes de la fonction de convolution  $-(T_2 * d)(t)$  sont déterminées par l'expression suivante :

$$-d_{max} \int_0^t T_2(t-\tau) d\tau \leq (T_2 * d)(t) \leq -d_{min} \int_0^t T_2(t-\tau) d\tau, \quad (6.8)$$

avec  $\int_0^t T_2(t-\tau) d\tau = \frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma}$ . En utilisant cette définition ainsi que celles des fonctions temporelles  $T_1(t)$  et  $\phi(t)$ , nous déterminons les expressions des bornes de la sortie  $y(t)$ , comme indiqué dans la proposition 6.1 pour  $t \in [0, \theta]$ .

Ensuite, les bornes de  $y(t)$  données par l'assertion (ii) sont obtenues, en calculant les bornes de toutes les fonctions définissant  $y(t)$  pour  $t \geq \theta$ . D'abord, la convolution  $-(T_2 * d)(t)$  pour  $t \geq \theta$  est bornée suivant l'expression (6.8), avec

$$\begin{aligned} (T_2 * d)(t) &= \int_0^\theta e^{-\sigma\tau} d(\tau) d\tau + \int_\theta^t e^{-(\sigma+K)(\tau-\theta)} d(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d(t) + e^{-\sigma\theta} \left( \frac{1 - e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}}{\sigma + K} \right) d(t). \end{aligned}$$

Ainsi, les bornes de cette convolution sont obtenues tout en considérant les variations de  $d(t)$  entre les limites  $d_{min}$  et  $d_{max}$ .

De plus, le calcul de la convolution  $K (T_3 * (z_0 - e^{-\sigma t} \text{WIP})) (t)$  correspond à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} K (T_3 * (z_0 - e^{-\sigma t} \text{WIP})) (t) &= K(z_0 - e^{-\sigma t} \text{WIP}) \int_{\theta}^t e^{-(\sigma+K)(\tau-\theta)} d\tau, \\ &= K(z_0 - e^{-\sigma t} \text{WIP}) \left( \frac{1 - e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}}{\sigma + K} \right). \end{aligned}$$

Enfin, les bornes de l'assertion (ii) de la proposition sont obtenues pour  $t \geq \theta$ , en remplaçant les fonctions temporelles  $T_1(t)$  par son expression pour  $t \geq \theta$ , et  $\phi(t)$  par WIP, ce qui complète la démonstration.  $\square$

Les résultats obtenus dans la proposition 6.1 expliquent les bornes qui sont atteintes par les variables de flux d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ . Ces bornes sont des fonctions bornées qui dépendent du temps, et qui tendent asymptotiquement à des valeurs finies. Cela garantit la propriété de la BIBO-stabilité. En effet, notre objectif revient à calculer les valeurs exactes des variables de flux à tout instant  $t$ , afin de caractériser les limites atteignables avec précision. Pour cela, nous nous basons sur les résultats de bornes atteintes pour déterminer les conditions initiales admissibles, qui permettent de vérifier les contraintes du système (1.5) et (1.6), dans la section suivante.

## 6.5 Ensemble de conditions initiales admissibles

Comme nous l'avons présenté, la mise en œuvre de la loi de commande linéaire consiste à formuler les conditions relatives aux paramètres de commande et aux paramètres du système afin de vérifier les contraintes positives et de saturation (1.5) et (1.6). Ainsi, dans cette section, nous formulons les conditions initiales admissibles, en se basant sur les bornes de variation de  $u(t)$  et  $y(t)$  obtenues dans la proposition 6.1. Ces conditions vont dépendre précisément de l'ensemble des valeurs du stock initial  $y(0)$ , et de l'encours de production WIP admissibles vis-à-vis des contraintes susmentionnées. Pour ce faire, nous commençons par présenter un résultat intermédiaire dans le lemme suivant qui va nous servir plus tard.

**Lemme 6.1.** *Pour toute fonction  $f(t)$  définie par  $f(t) = a + be^{-Kt}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels non nuls, et  $N$  et  $M$  deux nombres réels positifs, l'inclusion  $f(t) \in [N, M]$*

est vérifiée pour tout instant  $t \geq 0$  si et seulement si la propriété suivante est satisfaite,

$$N \leq a \leq M, \quad \text{et} \quad N \leq a + b \leq M.$$

*Démonstration.* La fonction  $f(t)$  est une fonction monotone ayant les limites suivantes,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a + b$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$ . Elle est ensuite bornée de sorte que  $f(t) \in [a + b, a]$  si  $b \leq 0$  et  $f(t) \in [a, a + b]$  si  $b \geq 0$ .

Ainsi, l'inclusion de  $f(t) \in [N, M]$  est vraie si les intervalles  $[a + b, a]$  pour  $b \leq 0$ , et  $[a, a + b]$  pour  $b \geq 0$  sont inclus dans l'intervalle  $[N, M]$ , d'où la suffisance des conditions du lemme. La nécessité vient du fait que les valeurs  $a$  et  $a + b$  sont des bornes exactes et bien atteignables par la fonction  $f$ .  $\square$

À partir des propriétés données par ce lemme et des bornes des variables de flux données dans la proposition 6.1, nous pouvons caractériser l'ensemble des conditions initiales admissibles pour le système logistique à travers le théorème suivant.

**Théorème 6.1.** *Étant donné le système (1.4), soumis à une commande de la forme (6.1)-(6.2) et une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7) pour tout instant  $t \geq 0$ , et admettant des bornes d'entrée-sortie données par la proposition 6.1, les conditions initiales sont considérées comme admissibles en ce qui concerne la contrainte (1.6) sur la loi de commande, si et seulement si l'inégalité suivante est vraie :*

$$z_0 - \frac{u_{max}}{K} \leq y(0) + \text{WIP} \leq z_0 - \frac{u_{min}}{K}, \quad (6.9)$$

et sont aussi admissibles vis-à-vis de la contrainte (1.5) et de la sortie  $y(t)$  si et seulement si l'inégalité suivante est vraie,

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max} \leq e^{-\sigma\theta} y(0) + \text{WIP} \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}, \quad (6.10)$$

et que, pour  $0 \leq t \leq \theta$ ,

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} d_{max} \leq e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} d_{min}. \quad (6.11)$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème consiste à formuler les conditions, pour lesquelles les variables  $u(t)$  et  $y(t)$  restent dans les intervalles décrits par les contraintes (1.6) et (1.5) respectivement, à tout moment  $0 \leq t \leq \theta$ . Ces contraintes sont vérifiées si les in-

tervalles de variation indiqués par les assertions (i) et (ii) de la proposition 6.1 sont inclus dans les intervalles  $[u_{min}, u_{max}]$ , et l'intervalle  $[y_{min}, y_{max}]$  respectivement. Pour vérifier ces inclusions, nous appliquons le lemme 6.1.

En effet, pour la variable d'entrée  $u(t)$ , nous constatons que  $u_1(t) \leq u_2(t)$  à tout moment  $t \geq 0$ . Puis, en appliquant le lemme 6.1 à chacune des limites de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  pour  $t = 0$ , nous remarquons que ces limites sont égales, soit  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} u_2(t)$ . Ensuite, nous constatons que l'inclusion  $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$  est vérifiée si  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t) \geq u_{min}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} u_2(t) \leq u_{max}$ , ce qui correspond à vérifier la condition  $u_{min} \leq K(z_0 - y(0) - \text{WIP}) \leq u_{max}$ , et obtenir par conséquent la condition (6.9) du théorème.

De même pour la variable de sortie  $y(t)$ , nous remarquons d'abord que  $y_1(t) \leq y_2(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Ensuite, l'inclusion  $y(t) \in [y_{min}, y_{max}]$  correspond à la vérification des deux inégalités,  $y_1(t) \geq y_{min}$  et  $y_2(t) \leq y_{max}$ . Pour les instants  $0 \leq t \leq \theta$ , la condition  $y_1(t) \geq y_{min}$  est équivalente à  $y_{min} + \frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma} d_{max} \leq e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau$ , et la condition  $y_2(t) \leq y_{max}$  est équivalente à  $e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \leq y_{max} + \frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma} d_{min}$ . Ainsi, la condition (6.11) du théorème est définie. Enfin, la condition (6.10) est l'équivalent de la condition (6.11) pour l'instant  $t = \theta$ .

Tout cela montre que les conditions énoncées sont suffisantes. Leur nécessité vient du fait que les bornes exprimées dans la proposition 6.1 sont exactes et atteintes par chacune des variables d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ . □

Ce théorème montre que la mise en œuvre d'un système de pilotage basé sur une commande linéaire, nécessite alors de prendre en compte des conditions initiales admissibles. Pour le système logistique, l'existence d'un ensemble non vide de conditions initiales admissibles, montre que la satisfaction de la demande nécessite un niveau de stockage suffisamment grand pour satisfaire la demande cumulée pendant cet intervalle de temps. Ceci permet d'éviter toute rupture de stockage pour  $y(t) \leq y_{min}$ , et une demande cumulée maximale qui vaut  $\frac{1-e^{-\sigma \theta}}{\sigma} d_{max}$ . De même, pour éviter tout risque de sur-stockage, le niveau de stockage qui peut être cumulé sur cette période ne doit pas dépasser la capacité maximale de stockage donnée par  $y_{max}$ , augmentée par le cumul minimal de la demande, soit  $\frac{1-e^{-\sigma \theta}}{\sigma} d_{min}$ . En conclusion, les effets des conditions initiales ne sont visibles sur la dynamique du stock qu'à partir de l'instant  $t = \theta$ , dès l'arrivée des premiers produits dans le stock.

En se basant sur les résultats du théorème 6.1, nous déduisons les conditions initiales admissibles au cas où le facteur de perte  $\sigma$  vaut zéro, dans le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1.** *Étant donné le système (1.3) avec un facteur de perte nul,  $\sigma = 0$ , soumis à une commande de la forme (6.1)-(6.2) et une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7) pour tout instant  $t \geq 0$ , les conditions initiales sont considérées comme admissibles en ce qui concerne la contrainte (1.6) sur la loi de commande, si et seulement si la condition (6.9) est vérifiée, et sont admissibles vis-à-vis la contrainte (1.5) de la sortie  $y(t)$  si et seulement si l'inégalité suivante est vraie :*

$$y_{min} + \theta d_{max} \leq y(0) + \text{WIP} \leq y_{max} + \theta d_{min}, \quad (6.12)$$

et que, pour  $0 \leq t \leq \theta$ ,

$$y_{min} + t d_{max} \leq y(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \leq y_{max} + t d_{min}. \quad (6.13)$$

*Démonstration.* Dans le cas où le facteur de perte  $\sigma$  est nul, les limites des bornes d'entrée  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , énoncées dans la proposition 6.1, seront définies pour l'instant  $t = 0$  comme précédemment par  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} u_2(t) = K(z_0 - y(0) - \text{WIP})$ . Donc, la condition (6.9) du théorème 6.1 reste la même.

Pourtant, les bornes de sortie,  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , énoncées dans la proposition 6.1 durant la phase initiale, seront définies pour  $\sigma = 0$  comme suit :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - t d_{max}, & \text{pour } 0 \leq t \leq \theta. \\ y_2(t) &= y(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - t d_{min}, & \text{pour } 0 \leq t \leq \theta. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inclusion  $y(t) \in [y_{min}, y_{max}]$  correspond à la vérification des inégalités,  $y_1(t) \geq y_{min}$  et  $y_2(t) \leq y_{max}$ . La première est équivalente à  $y_{min} + t d_{max} \leq y(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ , et la seconde correspond à  $y(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \leq y_{max} + t d_{min}$ . Ainsi, la condition (6.13) du corollaire est définie, et la condition (6.12) est déduite pour l'instant  $t = \theta$ . En effet, ces conditions sont nécessaires et suffisantes, du fait que les bornes exprimées par la proposition 6.1 sont exactes et atteignables.  $\square$

Nous pouvons remarquer que pour le système étudié (1.4), la condition initiale admissible (5.32) obtenue dans le chapitre précédent en utilisant une loi de commande bang-bang (5.8), est exactement la même condition (6.10), obtenue en utilisant la loi de commande linéaire (6.1). De même pour un facteur de perte nul, la condition (6.12) est égale à la condition (5.34) énoncée dans le corollaire 5.3 du chapitre précédent. Pourtant, la condition (6.9) n'intervient pas avec la loi de commande bang-bang. Cela est dû au

fait que lors de l'utilisation de la commande linéaire, les conditions initiales du système doivent être admissibles, non seulement vis-à-vis de la contrainte du stock (1.5), mais aussi de la contrainte sur la commande (1.6). Cette dernière contrainte est relaxée dans le cas de l'utilisation de la commande non linéaire, qui assure le respect de cette contrainte par définition de la commande bang-bang. Donc, nous affirmons que les conditions d'admissibilité ainsi formulées sont plus contraignantes que celles obtenues dans le chapitre précédent, en utilisant une commande bang-bang.

En outre, les résultats du théorème 6.1 montrent que les paramètres de commande  $K$  et  $z_0$  sont prédéterminés dans la condition (6.9) du théorème 6.1. Ceci confirme que les conditions initiales sont modulées en fonction du choix de la consigne  $z_0$  et du gain  $K$ . La structure de pilotage proposée est alors efficiente aussi bien durant la phase transitoire que durant le régime établi. Ainsi, les conditions étant définies durant la phase transitoire, nous passons à étudier la paramétrisation de la loi de commande mise en œuvre durant le régime établi. En effet, nous formulons dans la section suivante, les conditions admissibles de sorte que les intervalles exprimés par la proposition 6.1, répondent positivement aux contraintes de fonctionnement (1.6) et (1.5).

## 6.6 Mise en œuvre de la loi de commande

La mise en œuvre de la loi de commande linéaire consiste à formuler les conditions qui lient les paramètres de commande avec les paramètres du système, de façon à garantir l'évolution dynamique de la sortie et de l'entrée du système dans les intervalles décrits par les inclusions (1.5) et (1.6) respectivement. Ainsi, la méthodologie est divisée en deux axes principaux. Le premier axe porte sur l'admissibilité du système de commande (6.1)-(6.2) vis-à-vis des contraintes et des spécifications de fonctionnement du système. Alors que le deuxième axe est basé sur le choix des paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ , de sorte que la loi de commande soit admissible pour le système. Nous parlons de paramétrisation du système de commande. Ces deux axes sont l'objet des deux sections suivantes.

### 6.6.1 Conditions admissibles de la loi de commande

Dans cette section, nous discutons de l'admissibilité de la loi de commande pour le système considéré. Cela revient à vérifier les inclusions des intervalles de variations des variables  $y(t)$  et  $u(t)$ , formulés dans la proposition 6.1 dans les intervalles définis par les

contraintes (1.5) et (1.6), respectivement. Pour ce faire, une loi de commande (6.1)-(5.1) est donnée, où  $K$  et  $z_0$  sont fixes. Le théorème suivant présente les conditions nécessaires et suffisantes pour l'admissibilité du système contrôlé, permettant de faire face à la demande  $d(t)$  de la forme (1.7).

**Théorème 6.2.** *Le système de la forme (1.4) étant donné, avec des conditions initiales admissibles, la loi de commande linéaire (6.1)-(5.1) permet de vérifier les contraintes (1.5) et (1.6), pour toute demande  $d(t)$  vérifiant (1.7), si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$u_{min} \leq \frac{K}{K + \sigma} (\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta} d_{min}), \quad (6.14)$$

$$\frac{K}{K + \sigma} (\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta} d_{max}) \leq u_{max}, \quad (6.15)$$

et

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max} + \frac{e^{-\sigma\theta}}{K + \sigma} d_{max} \leq \frac{K}{K + \sigma} z_0 \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min} + \frac{e^{-\sigma\theta}}{K + \sigma} d_{min}. \quad (6.16)$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème consiste à formuler les conditions pour lesquelles les variables  $u(t)$  et  $y(t)$  restent dans les intervalles prescrits par les contraintes (1.6) et (1.5) respectivement. En effet, ces contraintes sont vérifiées si les limites en régime établi des intervalles  $[u_1(t), u_2(t)]$  et  $[y_1(t), y_2(t)]$  indiqués par la proposition 6.1, sont inclus dans les intervalles  $[u_{min}, u_{max}]$  et  $[y_{min}, y_{max}]$ , respectivement. En utilisant le lemme 6.1 pour la variation de l'entrée  $u(t)$ , nous observons que l'intervalle  $[\frac{K}{K+\sigma}(\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta} d_{min}), \frac{K}{K+\sigma}(\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta} d_{max})]$  est inclus dans l'intervalle  $[u_{min}, u_{max}]$ , si les conditions (6.14) et (6.15) sont vérifiées. De même pour la variable de sortie  $y(t)$ , l'intervalle  $[\frac{1}{K+\sigma}(K z_0 - e^{-\sigma\theta} d_{max}) + \text{WIP} - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max}, \frac{1}{K+\sigma}(K z_0 - e^{-\sigma\theta} d_{min}) + \text{WIP} - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}]$  est inclus dans l'intervalle  $[y_{min}, y_{max}]$ , si la condition (6.16) est vraie. Cela montre la suffisance des conditions. La nécessité découle du fait que les bornes exprimées dans la proposition 6.1 sont des limites exactes et atteignables.  $\square$

Du point de vue gestion de production, les résultats obtenus dans cette section sont interprétés en termes de la réalisation de la stratégie de pilotage par le système de pilotage mis en place. De plus, la stratégie de pilotage vise à satisfaire la demande tout en évitant toute rupture du stock ou risque de sur-stockage, en tenant compte des limites des ressources de production. Dans ce contexte, nous avons effectivement considéré que les

paramètres de la commande linéaire du système logistique sont donnés et fixés. Pour cela, nous étudions dans la section suivante, la phase de conception du système de pilotage, qui est basée principalement sur la paramétrisation de la structure de commande proposée.

### 6.6.2 Paramètres de la loi de commande

La méthode de conception appliquée, consiste à proposer les conditions d'existence de la loi de commande, qui soient indépendantes des paramètres de commande, et qui permettent d'assurer l'existence d'un système contrôlé réalisable. Pratiquement, les conditions définies dans le théorème 6.2 dépendent des paramètres intrinsèques  $\theta$  et  $\sigma$  qui sont connus exactement, des paramètres  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $d_{min}$  et  $d_{max}$  qui sont liés aux spécifications du système, et des paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ . Ces derniers sont choisis avec précision dans le théorème suivant, afin de répondre au problème d'existence et de paramétrage du système de commande.

**Théorème 6.3.** *Étant donné le système de la forme (1.4) avec des conditions initiales admissibles, il existe une loi de commande linéaire de la forme (6.1)-(5.1) qui vérifie les contraintes du système (1.5) et (1.6), pour toute demande de la forme (1.7), si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$u_{min} \leq \sigma y_{max} + d_{min}, \quad (6.17)$$

$$\sigma y_{min} + d_{max} \leq u_{max}, \quad (6.18)$$

et

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max} < y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min}. \quad (6.19)$$

De plus, si ces conditions sont vraies, une loi de commande admissible est alors obtenue, en choisissant la consigne  $z_0$  vérifiant les conditions (6.14), (6.15) et (6.16), et un gain statique positif  $K$  vérifiant la condition suivante :

$$K \geq \frac{d_{max} - d_{min} - \sigma(y_{max} - y_{min})}{y_{max} - y_{min} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}(d_{max} - d_{min})}. \quad (6.20)$$

Si de plus, la condition suivante est remplie,

$$e^{-\sigma\theta}(d_{max} - d_{min}) > u_{max} - u_{min}, \quad (6.21)$$

alors, le gain statique  $K$  est choisi pour  $\sigma \neq 0$ , tout en vérifiant l'appartenance suivante :

$$K \in \left[ \frac{d_{max} - d_{min} - \sigma(y_{max} - y_{min})}{y_{max} - y_{min} - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}(d_{max} - d_{min})}, \frac{\sigma(u_{max} - u_{min})}{e^{-\sigma\theta}(d_{max} - d_{min}) - (u_{max} - u_{min})} \right]. \quad (6.22)$$

*Démonstration.* Les résultats obtenus dans ce théorème proviennent des conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité de la loi de commande, données par le théorème 6.2 et exprimées en termes de paramètres de commande. En effet, la preuve est basée sur l'élimination des paramètres  $K$  et  $z_0$  par le principe de Fourier-Motzkin, introduit dans la section 2.7. Premièrement, les conditions (6.14), (6.15) et (6.16) du théorème 6.2 dépendent de  $z_0$ . Ils sont reformulés par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{K + \sigma}{K\sigma} u_{min} - \frac{e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{min} &\leq z_0, \\ z_0 &\leq \frac{K + \sigma}{K\sigma} u_{max} - \frac{e^{-\sigma\theta}}{\sigma} d_{max}, \\ \frac{K + \sigma}{K} y_{min} + \left( \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} \frac{K + \sigma}{K} + \frac{e^{-\sigma\theta}}{K} \right) d_{max} &\leq z_0, \\ z_0 &\leq \frac{K + \sigma}{K} y_{max} + \left( \frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma} \frac{K + \sigma}{K} + \frac{e^{-\sigma\theta}}{K} \right) d_{min}. \end{aligned}$$

Après avoir isolé  $z_0$ , nous appliquons le principe d'élimination de Fourier-Motzkin introduit dans la section 2.7, sur les conditions obtenues en utilisant les hypothèses  $K > 0$  et  $\sigma > 0$ . Ainsi, nous obtenons un paquet de conditions équivalentes, qui sont les conditions (6.17), (6.18) et les deux inégalités suivantes :

$$K e^{-\sigma\theta} (d_{max} - d_{min}) \leq (K + \sigma)(u_{max} - u_{min}), \quad (6.23)$$

$$((1 - e^{-\sigma\theta})(K + \sigma) + \sigma e^{-\sigma\theta})(d_{max} - d_{min}) \leq \sigma(K + \sigma)(y_{max} - y_{min}). \quad (6.24)$$

Deuxièmement, nous passons à l'élimination du gain statique  $K$  des conditions (6.23) et (6.24). Nous reformulons la condition (6.24) par son équivalent, soit  $e^{-\sigma\theta}(d_{max} - d_{min}) \leq (K + \sigma)(y_{max} - y_{min} - \frac{1-e^{-\sigma\theta}}{\sigma}(d_{max} - d_{min}))$ . Ensuite, la condition (6.19) est déduite en supposant que  $d_{max} - d_{min}$  est strictement positif.

En outre, le choix du paramètre  $K$  est lié aux conditions (6.23) et (6.24). D'une part, la condition (6.24) est définie pour un choix de  $K$  vérifiant l'inégalité (6.20). D'autre part,

si l'inégalité (6.21) est satisfaite, alors le choix du gain statique est limité par une borne maximale pour  $\sigma \neq 0$ , suivant la condition ci contre :

$$K \leq \frac{\sigma(u_{max} - u_{min})}{e^{-\sigma\theta}(d_{max} - d_{min}) - (u_{max} - u_{min})}. \quad (6.25)$$

Ainsi, les inégalités (6.25) et (6.20) définissent les bornes de l'intervalle (6.22) qui résume le choix du gain  $K$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous avons déterminé dans ce théorème les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une loi de commande linéaire (6.1), basée sur un retour d'état par prédiction (6.2). Les conditions obtenues ne dépendent que des paramètres du système. Enfin, nous définissons dans le corollaire suivant, les résultats liés à l'existence et au paramétrage du système de commande proposé lorsque le système d'étude (1.3) présente un facteur de perte nul.

**Corollaire 6.2.** *Étant donné le système de la forme (1.3) avec un facteur de perte nul,  $\sigma = 0$ , les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une loi de commande admissible de la forme (6.1)-(5.1), pour toute demande  $d(t)$  vérifiant (1.7), sont les suivants :*

$$u_{min} \leq d_{min}, \quad (6.26)$$

$$d_{max} \leq u_{max}, \quad (6.27)$$

et

$$y_{min} + \theta d_{max} < y_{max} + \theta d_{min}. \quad (6.28)$$

De plus, si ces conditions sont vraies, la loi de commande admissible est obtenue, en choisissant une consigne  $z_0$  qui vérifie la condition suivante :

$$y_{min} + \theta d_{max} + \frac{d_{max}}{K} \leq z_0 \leq y_{max} + \theta d_{min} + \frac{d_{min}}{K}. \quad (6.29)$$

De plus, le gain statique  $K$  est choisi selon la relation suivante :

$$K \geq \frac{d_{max} - d_{min}}{y_{max} - y_{min} - \theta(d_{max} - d_{min})}. \quad (6.30)$$

*Démonstration.* Les résultats ci-dessus sont obtenus en utilisant les conditions d'admissibilité de la loi de commande, données par le théorème 6.2, avec un facteur de perte

$\sigma = 0$ . En effet, les conditions (6.14), (6.15) et (6.16) sont réduites aux conditions (6.26), (6.27) et (6.29). Ainsi, la condition (6.28) est déduite directement de la condition (6.29), en éliminant les paramètres de commande,  $z_0$  et  $K$  qui est supposé positif. Cette condition est donc nécessaire. Pour démontrer sa suffisance, nous observons que si la condition (6.28) est satisfaite, alors il existe un nombre réel positif, noté  $a$ , de sorte que l'inégalité  $y_{min} + \theta d_{max} < a < y_{max} + \theta d_{min}$  est vraie. Nous pouvons également constater qu'il existe un nombre réel positif, noté  $b$ , qui vérifie  $y_{min} + \theta d_{max} + b \leq y_{max} + \theta d_{min}$ . Ensuite, nous obtenons une loi de commande admissible qui vérifie la condition (6.29), en choisissant  $z_0 = a$ , et  $\frac{1}{K}(d_{max} - d_{min}) = b$ , et alors la suffisance de la condition (6.28) est prouvée. Ainsi, le choix du paramètre  $z_0$  est basé sur la vérification de la condition (6.29), ce qui implique en particulier que le gain  $K$  satisfait la relation (6.30).  $\square$

Suite à ce résultat, nous pouvons noter que les conditions d'existence d'un système de pilotage admissible sont indépendantes des paramètres de régulation. Ce résultat intervient lors de la conception du système de pilotage. Connaissant les caractéristiques du système logistique, c'est-à-dire les paramètres  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ ,  $\theta$  et  $\sigma$ , nous pouvons tester l'existence d'un système de pilotage. Il suffit de vérifier les conditions (6.17), (6.18) et (6.19) pour un facteur de perte positif, et les conditions (6.26), (6.27) et (6.28) pour un facteur de perte nul. En cas de réponse positive, nous pouvons choisir les paramètres de pilotage,  $z_0$  et  $K$ , comme décrit dans le théorème 6.3 pour  $\sigma \neq 0$ , et dans le corollaire 6.2 pour  $\sigma = 0$ . Si les conditions d'existence ne sont pas satisfaites, le concepteur du système de pilotage est certain de ne pas pouvoir contrôler le système logistique en utilisant la commande linéaire proposée. Nous devons alors concevoir une autre structure de commande. Enfin, les résultats du théorème 6.3 et du corollaire 6.2 présentent des ressemblances avec les résultats de l'étude développée dans le chapitre précédent. Pour cela, une sorte de comparaison des résultats est développée dans la section suivante.

## 6.7 Comparaison des lois de commande Bang-Bang et linéaire

Nous constatons que les conditions obtenues dans le théorème 6.3 et son corollaire, sont identiques à celles qui correspondent à une loi de commande bang-bang, obtenues dans le théorème 5.1 et son corollaire du chapitre précédent. La seule différence, est que ces derniers résultats ont été complétés par une paramétrisation pour la loi de commande

linéaire proposée. Pour cela, cette paramétrisation permet de définir une loi de commande de type affine, qui est à son tour réalisable pour le pilotage du système logistique (1.4). En effet, la commande affine est définie sous la forme linéaire (6.1) par un feedback-prédicteur (6.2), tout en vérifiant les spécifications suivantes :

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & , \text{pour } z(t) = z_{min}, \\ u_2 & , \text{pour } z(t) = z_{max}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Les valeurs de commande  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $z_{min}$ , et  $z_{max}$  sont définies par les hypothèses (5.6) et (5.7) et paramétrées selon les conditions (5.11a) et (5.11b), introduites dans le chapitre précédent. De plus, nous ajoutons une paramétrisation du gain statique  $K$  pour la commande affine (6.31), définie par la forme suivante :

$$K = \frac{u_1 - u_2}{z_{max} - z_{min}}. \quad (6.32)$$

Cette expression vérifie la condition (6.20) pour  $u_{max} - u_{min} \geq e^{-\sigma\theta}(d_{max} - d_{min}) - \sigma(z_{max} - z_{min})$  contrairement à la condition (6.21). En conséquence, nous déduisons d'après la spécification de la commande affine (6.31), le choix de la consigne  $z_0$ , qui respecte les conditions du théorème 6.2, sous la forme suivante :

$$z_0 = \frac{u_1 z_{max} - u_2 z_{min}}{u_1 - u_2}. \quad (6.33)$$

Le comportement de la loi de commande affine est illustré par la figure 6.2. Le choix des paramètres de commande  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $z_{min}$ , et  $z_{max}$ ,  $K$  et  $z_0$ , met en valeur la ressemblance entre la stratégie de commande par feedback-prédicteur de type affine (6.1)-(6.31)-(5.1), et la stratégie de commande par feedback-prédicteur de type bang-bang (5.8)-(5.1). Nous pouvons ensuite affirmer que la structure de commande affine présente une solution de commande admissible au système retardé, tout en appliquant le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'ensemble  $[z_{min}, z_{max}]$  du système réduit (5.4), selon l'étude du chapitre précédent. Ainsi, les conditions (6.17), (6.18) et (6.19) obtenues décrivent les limites de l'ensemble invariant, de l'évolution du système contrôlé dans l'espace des paramètres. À la fin de cette approche, nous concluons que la stratégie de conception de la commande linéaire ou affine développée dans ce travail, est faisable et que les résultats de l'existence et de la paramétrisation du système de pilotage sont toujours applicable pour le système logistique.

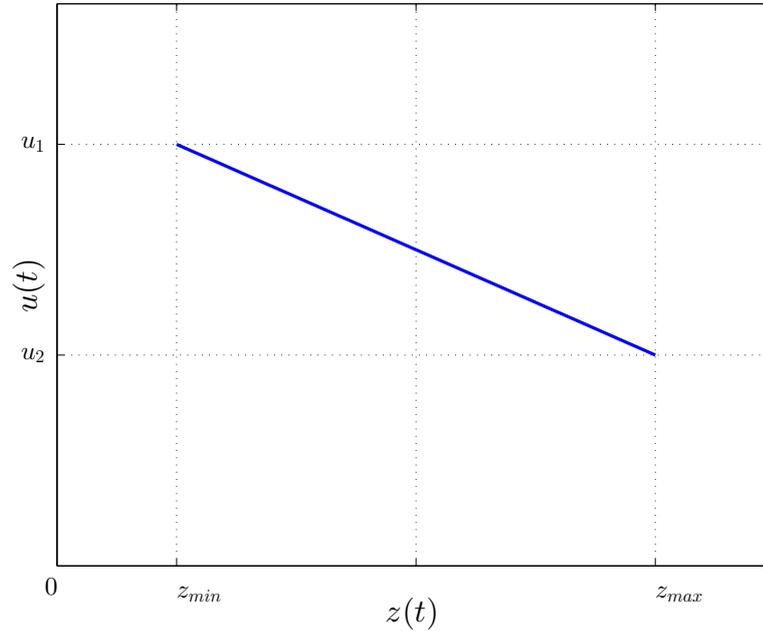
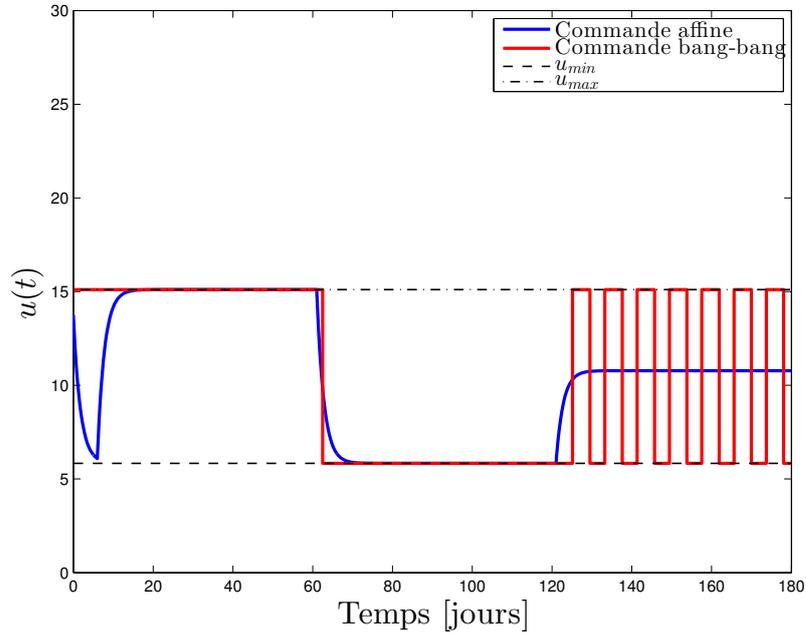


FIGURE 6.2 – Structure de la loi de commande affine

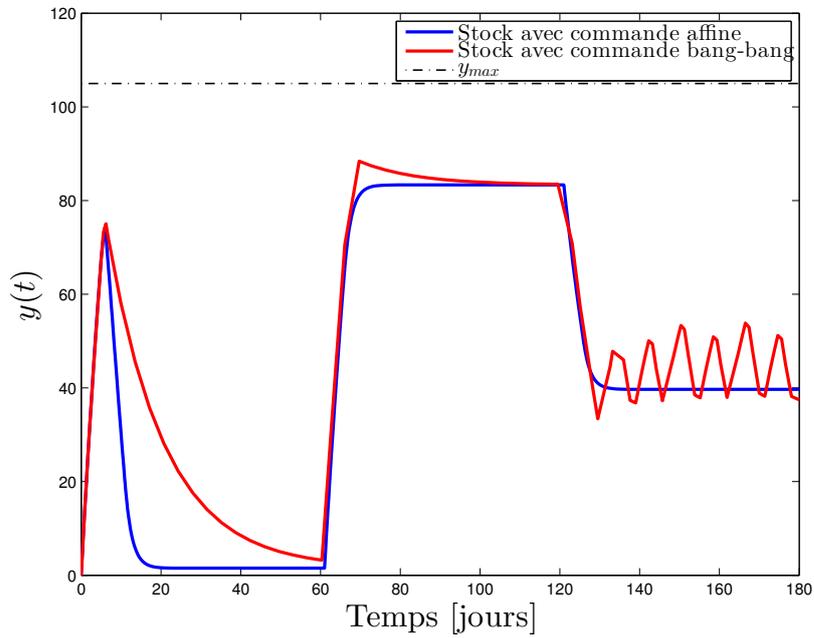
Nous proposons de clôturer cette étude par le même exemple de simulation du chapitre précédent, pour mieux illustrer les ressemblances et les différences entre les stratégies de pilotage par commande linéaire et par commande bang-bang.

## 6.8 Exemple de simulation

Nous effectuons dans cet exemple de simulation une comparaison de la stratégie de commande par feedback-prédicteur (5.1), entre la loi de commande affine (6.1)-(6.31), et la loi de commande bang-bang (5.8) identiquement à l'exemple 5.5 du chapitre précédent. Pour le système d'étude (1.4), les paramètres de dimensionnement du tableau 5.1 sont calculés suivant la même méthodologie de l'exemple 5.5. Celles-ci vérifient les conditions d'existence de la loi de commande affine admissible, données par le théorème 6.3. Les paramètres de commande sont définis par le tableau 5.2. De plus, la loi de commande affine définie sous la forme (6.31) est paramétrée de sorte que le gain statique est ajusté à  $K = 0,5$  vérifiant (6.32), et la consigne est définie par  $z_0 = 95$ , vérifiant (7.3). Les réponses de l'entrée de commande  $u(t)$  et de la sortie du système  $y(t)$ , sont illustrées dans la figure 6.3, pour une demande  $d(t)$  représentée en figure 5.4 par un signal rectangulaire.



(a) Évolution temporelle de  $u(t)$



(b) Évolution temporelle de  $y(t)$

FIGURE 6.3 – Résultats de simulation pour l'exemple 6.8

Nous constatons d'après les réponses du système, que le niveau du stock  $y(t)$  ne présente

ni un dépassement de la capacité maximale de stockage  $y_{max} = 105$  pièces, ni une rupture de stock, pour une commande de type feedback-prédicteur. Cela explique que la capacité de stockage est suffisante pour livrer les produits aux clients à tout moment.

La même remarque est constatée pour l'évolution temporelle de la commande  $u(t)$ , qui suit linéairement la variation de la demande tout en respectant les limites  $u_{min} = 5.83$  et  $u_{max} = 15.11$ . Elle ne présente aucun dépassement du domaine limité par la contrainte (1.6), ce qui affirme l'admissibilité des deux lois de commande affine et bang-bang, pour n'importe quelle demande vérifiant  $d(t) \in [0, 15]$ .

Ensuite, en termes de gestion de production, notre système de pilotage garantit une disponibilité des pièces en stock à un niveau de référence  $z_0 = 95$  pièces pour le régime établi. Et pour la phase d'initialisation, le système de pilotage présente un taux de service acceptable pour  $t < \theta = 5$  jours. Ceci vérifie l'admissibilité des conditions initiales, vis-à-vis de la sortie et de l'entrée du système, et la nécessité de considérer un encours de production WIP durant la phase d'initialisation du système.

De plus, si nous comparons le comportement des deux stratégies de commande, nous constatons d'une part que les deux lois de commande donnent des résultats très similaires, quand la demande passe au maximum  $d(t) = 15$  pièces/jour ou au minimum pour  $d(t) = 0$  pièces/jour. Pourtant, la commande affine présente un comportement plus continu, et une constante de temps qui anticipe l'action de la commande en diminuant le temps de réaction. D'autre part, lorsque la demande passe à un niveau intermédiaire,  $d(t) = 8$  pièces/jour, le comportement des stratégies de commande devient très différent. La commande affine répond finement à cette demande, alors que la commande bang-bang présente des variations brutales entre les valeurs de commande. Ce basculement fréquent entre les deux niveaux de production pour servir une même demande, est gênant dans les processus de production. En effet, un réglage plus fin est préférable dans ce cas, car il permet d'éviter ces phénomènes d'arrêt et de redémarrage, et de réduire les coûts de mise en marche et d'arrêt de production, en conséquence.

# CONCLUSION PARTIELLE

---

Nous avons proposé dans cette partie deux structures de commandes admissibles, pour le pilotage du système logistique élémentaire. La première est une loi de commande bang-bang de type saturé, alors que la seconde est une loi de commande affine de type linéaire. Les deux stratégies de commande sont basées sur un feedback-prédicteur, et servent à stabiliser le système logistique basique, tout en respectant les contraintes de saturation et de positivité, ainsi que la spécification sur la demande.

Ensuite, nous avons identifié des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces lois de commande admissibles, en fonction des paramètres du système. Pour la première étude, les résultats obtenus dans le chapitre 5 s'interprètent en terme de recherche des ensembles invariants pouvant garantir le respect des contraintes de dimensionnement. Ainsi, les conditions déterminées définissent l'ensemble invariant dans lequel les variables du système contrôlé sont bien confinées. Pour la deuxième étude, la stratégie de conception que nous avons appliquée dans le chapitre 6, offre un cadre formel pour répondre à chacune des questions de dimensionnement du système. En effet, les conditions obtenues offrent une méthodologie de paramétrage des ressources du système de pilotage, durant les régimes transitoire et établi à la fois.

D'ailleurs, les paramètres intrinsèques  $\theta$  et  $\sigma$  du système logistique basique, ont été considérés dans cette partie, comme étant connus avec exactitude. Cette spécificité met en évidence une question concernant l'incertitude de ces paramètres, et son impact sur les structures des lois de commande et leur performance, ainsi que sur les conditions du système et leur existence. Dans ce cas, nous parlons d'un certain aspect de robustesse de la structure de commande vis-à-vis de l'incertitude sur les paramètres. La propriété de robustesse est en effet l'une des caractéristiques les plus importantes en ce qui concerne le système de commande en général, et la gestion des systèmes logistiques en particulier, en présence de perturbations ou d'incertitudes. Au-delà de la prise en compte des contraintes de positivité et de saturation, la section suivante est consacrée à l'analyse de robustesse de la loi de commande proposée dans ce chapitre, en ce qui concerne l'incertitude sur le retard et le facteur de perte.



QUATRIÈME PARTIE

# Étude de robustesse de la commande linéaire vis-à-vis d'incertitudes

---

## Introduction

Dans la partie précédente, nous étions intéressés à la conception du système logistique élémentaire (1.4), dans le cas où les paramètres intrinsèques sont connus avec précision. La structure de commande linéaire par feedback-prédicteur appliquée, permet de stabiliser le système en boucle fermée, de vérifier les contraintes de positivité et de saturation (1.5) et (1.6), et de remplir les spécifications de la demande (1.7). Dans cette partie, nous supposons que les paramètres intrinsèques du système (1.4) présentent des incertitudes. Le problème consiste donc à trouver une solution de pilotage robuste et réactif du système logistique basique.

Une première approche dans le chapitre 7, consiste à étudier la stabilité du système logistique lorsque le retard sur l'entrée présente des incertitudes. Pour ce faire, nous avons appliqué la même stratégie de commande linéaire par feedback-prédicteur, en se basant sur une estimation du retard incertain. Nous avons montré que le système en boucle fermée est stable, et nous avons déterminé l'écart maximal de l'incertitude et le choix des paramètres de commande, qui garantissent la robustesse du système contrôlé.

Ensuite, une étude est développée dans le chapitre 8, sur la même structure de commande linéaire, afin de trouver les conditions qui garantissent l'admissibilité de la solution de pilotage robuste. Les résultats obtenus permettent de répondre positivement à toutes les contraintes de fonctionnement et les spécifications de la demande, malgré la présence d'incertitude du retard.

Cette étude a été complétée dans le chapitre 9, tout en considérant une incertitude sur le facteur de perte, en plus de l'incertitude sur le retard. La dynamique de variation des flux entrée-sortie est déterminée tout en précisant l'erreur de prédiction. Des conditions comparables à celles qui ont été obtenues dans le cas d'incertitude sur la valeur du retard, sont obtenues afin de garantir le respect des contraintes du système.

# STABILITÉ DE LA COMMANDE LINÉAIRE

---

## Table des matières

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	165
<b>7.2</b>	<b>Structure de commande</b>	166
<b>7.3</b>	<b>Transfert en boucle fermée</b>	167
<b>7.4</b>	<b>Conditions de stabilité robuste</b>	169
<b>7.5</b>	<b>Choix des paramètres de commande</b>	174
<b>7.6</b>	<b>Impact des incertitudes sur le dimensionnement du système logistique</b>	178
<b>7.7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	180

---

## 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le pilotage du modèle incertain du système logistique élémentaire (1.4), de sorte que le retard d'entrée présente des incertitudes considérables. Dans ce cas, la loi de commande linéaire (6.1)-(5.1) utilisée dans le chapitre 6 pour piloter le modèle exact, est développée en se basant sur une estimation du retard incertain. Le problème revient alors à analyser l'impact de cette incertitude sur la stabilité du système (1.4), ainsi que la performance de la structure de commande proposée sur la régulation du système logistique. On parle de la robustesse de la loi de commande linéaire vis-à-vis d'incertitudes sur le retard.

La contribution demeure dans la recherche d'une loi de commande robuste qui garantisse la stabilité du système en boucle fermée, tout en utilisant une structure de commande par feedback-prédicteur. Différentes études ont traité la robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le retard [Wang *et al.* (1987), Kharitonov (1998), Moon *et al.* (2001)]. Des conditions suffisantes, pour la stabilité du système à entrée retardée sont obtenues dans des travaux précédents [Mondié *et al.* (2001)]. Des conditions similaires sont également obtenues dans

les travaux [Gu *et al.* (2005)], pour l'étude de stabilité des systèmes avec deux retards. Pourtant, notre étude fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la loi de commande robuste, ce qui complète les conditions suffisantes obtenues dans les travaux de la littérature déjà cités.

Le chapitre est organisé comme suit. La structure de commande linéaire est d'abord introduite dans la section 7.2. Ensuite, la section 7.3 est dédiée à l'analyse du transfert du système en boucle fermée. Après, nous déterminons les conditions de stabilité en termes d'écart maximal sur l'incertitude du retard dans la section 7.4, et le choix des paramètres de commande en section 7.5, de façon à garantir la robustesse du système de commande. Nous finirons par une discussion sur l'impact des incertitudes sur le dimensionnement du système piloté, dans la section 7.6, ce qui va guider la méthodologie de conception vers les études ultérieures.

## 7.2 Structure de commande

Dans ce chapitre, l'approche proposée pour contrôler la dynamique du niveau d'inventaire pour le système logistique (1.4) ayant un retard sur l'entrée, est basée sur une structure de rétroaction d'état de prédiction, identiquement à celle étudiée dans la section 6.2 du chapitre 6. Ainsi la structure de commande est définie par une loi de commande linéaire sous la forme suivante :

$$u(t) = K(z_0 - p(t)), \quad (7.1)$$

où les paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ , représentent le gain statique et la consigne de la sortie du système contrôlé. Dans le cas présent, nous supposons que le retard réel  $\theta$  est en fait connu avec une incertitude, et que sa valeur varie dans un intervalle tel que :

$$\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}], \quad (7.2)$$

où  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$  sont deux valeurs positives. En effet, la prédiction  $p(t)$  qui intervient dans la loi de commande (7.1), est basée sur une estimation  $\theta_0$  du retard  $\theta$ , sous la forme suivante :

$$p(t) = e^{-\sigma\theta_0}y(t) + \int_{t-\theta_0}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta_0. \quad (7.3)$$

Ainsi, à cause de l'incertitude sur le retard, la variable  $p(t)$  ne constitue plus une prédiction exacte, mais une estimation du niveau de stockage futur, ce qui aura un impact considérable sur la réponse du système contrôlé. L'objectif de l'étude de robustesse est précisément de quantifier l'impact de l'incertitude induite par cette estimation sur la performance du système piloté, en particulier en ce qui concerne le respect des contraintes de fonctionnement. D'ailleurs, la dynamique d'évolution de la prédiction  $p(t)$  est exprimée par une équation différentielle retardée sous la forme suivante :

$$\dot{p}(t) = -\sigma p(t) + u(t) - e^{-\sigma\theta_0}d(t) + e^{-\sigma\theta_0}(u(t - \theta) - u(t - \theta_0)), \text{ pour } t \geq 0. \quad (7.4)$$

Contrairement au cas certain, pour  $\theta = \theta_0$  où l'équation (5.4) du système réduit en  $z(t)$  était sans retard, l'équation donnée par (7.4) correspond dans le cas présent, à un système à deux retards,  $\theta_0$  et  $\theta$ . L'étude de stabilité des systèmes à retards multiples peut être complexe, en particulier si les retards sont rationnellement indépendants. Par contre, le retard  $\theta$  étant incertain avec une précision de la forme (7.2), et suivant les valeurs de  $\theta_0$ , nous pouvons confronter à cette complexité, dans ce qui suit. Pour ce faire, nous commençons par le calcul du transfert en boucle fermée comme nous le verrons dans la section suivante.

### 7.3 Transfert en boucle fermée

Le système (1.4) soumis à une commande de type feedback-prédicteur de type linéaire (7.1)-(7.4) définit le système en boucle fermée selon la figure 7.1. Comme nous l'avions introduit dans le paragraphe 2.3.1, nous allons faire appel à la transformée de Laplace et ses propriétés pour caractériser la dynamique des variables de flux d'entrée de commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ . Ces derniers vont permettre de déterminer le transfert du système en boucle fermée. Ainsi, le quasi-polynôme caractéristique du système de boucle fermée (7.4) est défini en fonction des paramètres de commande, comme le montre la propriété suivante.

**Propriété 7.1.** *Le système (1.4) soumis à une structure de commande de la forme (7.1)-(7.4), admet un transfert en boucle fermée défini par l'expression suivante :*

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s + \sigma + k - ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-s\theta_0} - e^{-s\theta})}. \quad (7.5)$$

*Démonstration.* La prédiction  $p(t)$  définie sous la forme (7.3) peut s'écrire de manière équivalente, en utilisant la transformation de Laplace et ses propriétés, par l'expression suivante :

$$\hat{p}(s) = e^{-\sigma\theta_0}\hat{y}(s) + \frac{1 - e^{-(s+\sigma)\theta_0}}{s + \sigma}\hat{u}(s).$$

Ainsi, la dynamique de loi de commande linéaire (7.1) de type feedback-prédicteur (7.3) est exprimée dans le domaine de Laplace sous la forme suivante :

$$\hat{u}(s) = \hat{C}(s)(Kz_0 - Ke^{-\sigma\theta_0}\hat{y}(s)), \quad \text{avec } \hat{C}(s) = \frac{1}{1 + K\left(\frac{1 - e^{-(s+\sigma)\theta_0}}{s + \sigma}\right)}. \quad (7.6)$$

Ensuite, en utilisant l'équation du système (1.4), le niveau de stockage  $y(t)$  est exprimé dans le domaine Laplace par la forme suivante :

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s + \sigma}(e^{-s\theta}\hat{u}(s) - \hat{d}(s)). \quad (7.7)$$

Enfin, les expressions de l'entrée de commande  $\hat{u}(s)$  et de la sortie du système  $\hat{y}(s)$  formulées ci-dessus, permettent de définir l'équation caractéristique du système en boucle fermée sous la forme suivante :

$$\det \begin{pmatrix} s + \sigma & -e^{-s\theta} \\ Ke^{-\sigma\theta_0} & \left(1 + K\left(\frac{1 - e^{-(s+\sigma)\theta_0}}{s + \sigma}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'équation caractéristique du système en boucle fermée serait égale au quasi-polynôme  $\frac{1}{\hat{g}(s)}$ , où  $\hat{g}(s)$  défini par l'équation (7.5) représente le transfert en boucle fermée, ce qui complète la preuve.  $\square$

Suite aux résultats formulés dans cette propriété, le système en boucle fermée (7.4) représenté par la figure 7.1, correspond à un système dynamique dont l'entrée de perturbation est  $d(t)$ , l'entrée de commande est  $u(t)$  et la sortie du système est  $y(t)$ . De plus, l'expression fréquentielle (7.7) de la sortie présente un retard statique  $e^{-s\theta}$ , ainsi que le contrôleur  $\hat{C}(s)$  défini par l'expression (7.6), est décrit par un retard distribué  $\frac{1 - e^{-(s+\sigma)\theta_0}}{s + \sigma}$ . De plus, il est important de remarquer que l'entrée de commande (7.6) est exprimée par les paramètres de commande  $K$  et  $z_0$  et par le retard estimé  $\theta_0$ . Elle est définie aussi par l'intermédiaire de l'expression  $\hat{C}(s)$ , qui dépend à son tour de  $K$  et  $\theta_0$ . Nous constatons alors que la synthèse d'un contrôleur stabilisant pour le système en boucle fermée, revient à déterminer les conditions des paramètres de commande  $K$ ,  $z_0$  et  $\theta_0$ , qui permettent une

conception robuste de la loi de commande proposée.

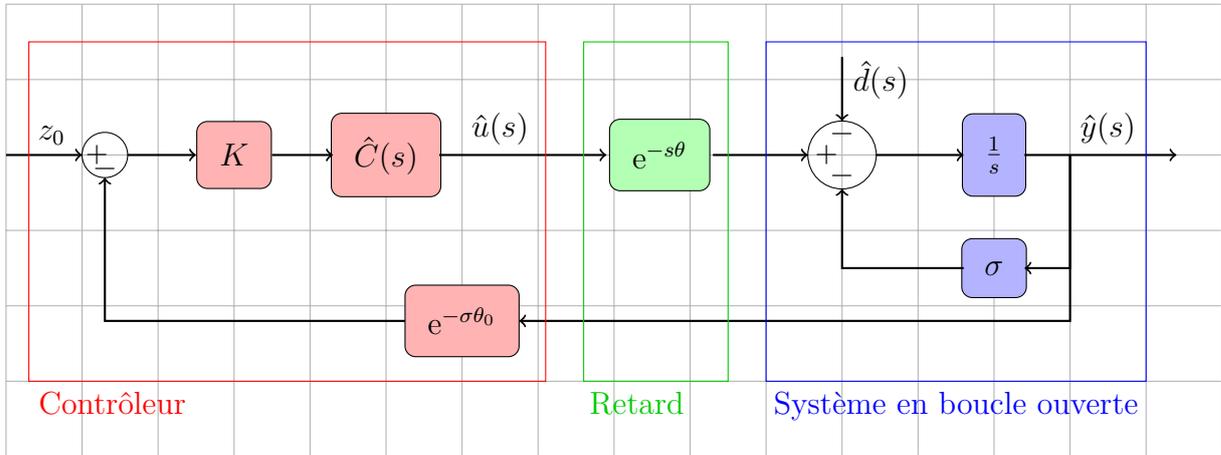


FIGURE 7.1 – Structure du système en boucle fermée

La section suivante est donc dédiée à la recherche des conditions de stabilité robuste du système contrôlé (7.4), et du choix des paramètres de commande qui définissent proprement le contrôleur (7.1)-(7.3).

## 7.4 Conditions de stabilité robuste

La conception de la loi de commande robuste pour le système (1.4) revient alors à définir l'écart maximal sur l'incertitude du retard  $\theta$  du système, ainsi que les conditions sur les paramètres de commande  $K$ ,  $z_0$  et  $\theta_0$ , qui permettent de garantir la stabilité du système en boucle fermée (7.4). En effet, le problème revient à l'étude de stabilité du transfert en boucle fermée.

En examinant l'expression de  $\hat{g}(s)$  décrite par l'expression (7.5), nous remarquons que ce transfert dépend explicitement du gain statique  $K$  et des deux retards  $\theta$  et  $\theta_0$ . Ainsi, il n'est pas facile de déduire son expression dans le domaine temporel, ni d'étudier ses variations dans le domaine de Laplace. Cependant, une étude robuste en terme d'écart maximale entre le retard incertain du système  $\theta$  et le retard estimé  $\theta_0$  convient mieux à notre objectif, afin de trouver les conditions de stabilité du système en boucle fermée. La première étape à considérer pour répondre à cette question consiste à factoriser  $\hat{g}(s)$  sous la forme suivante :

$$\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s) \cdot \hat{g}_2(s), \quad (7.8)$$

où  $\hat{g}_1(s) = \frac{1}{s+\sigma+K}$ , correspond dans le domaine temporel au noyau  $g_1(t) = e^{-(\sigma+K)t}$ , dont la norme est égale à  $\|g_1\|_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sigma+K}$ . Le deuxième transfert est défini sous la forme suivante :

$$\hat{g}_2(s) = \frac{1}{1 - \hat{\varepsilon}(s)}, \quad \text{avec } \hat{\varepsilon}(s) = K \frac{e^{-\sigma\theta_0}(e^{-s\theta_0} - e^{-s\theta})}{s + \sigma + K}. \quad (7.9)$$

Suivant les valeurs de  $\theta$  et  $\theta_0$ , nous pouvons déterminer la fonction  $\varepsilon(t)$  dans le domaine temporel.

- Pour  $\theta = \theta_0$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ .
- Pour  $\theta_0 > \theta$ , la fonction  $\varepsilon(t)$  est définie sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } t < \theta, \\ -Ke^{-\sigma\theta_0}e^{-(\sigma+K)(t-\theta)} & , \text{ pour } \theta \leq t < \theta_0, \\ Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-(\sigma+K)(t-\theta_0)} - e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}) & , \text{ pour } \theta_0 \leq t. \end{cases}$$

- Pour  $\theta_0 < \theta$ , la fonction  $\varepsilon(t)$  est définie sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } t < \theta_0, \\ Ke^{-\sigma\theta_0}e^{-(\sigma+K)(t-\theta_0)} & , \text{ pour } \theta_0 \leq t < \theta, \\ Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-(\sigma+K)(t-\theta_0)} - e^{-(\sigma+K)(t-\theta)}) & , \text{ pour } \theta \leq t. \end{cases}$$

Suite à cette analyse, nous remarquons que la fonction  $\varepsilon(t)$  peut être positive comme négative suivant les valeurs des retards  $\theta$  et  $\theta_0$ . En effet, la positivité du noyau  $g_2(t)$  n'est pas garantie dans ce cas. Et donc, la difficulté de l'analyse se pose lors de l'étude de la positivité du noyau  $g(t)$ , qui est un des problèmes ouverts les plus fondamentaux de la théorie des systèmes. En revanche, nous surmontons cette difficulté tout en étudiant la stabilité au sens BIBO du transfert  $\hat{g}(s)$ . Pour cela, nous introduirons dans la proposition suivante une condition intermédiaire concernant la stabilité des transferts  $\hat{g}(s)$  et  $\hat{g}_2(s)$ .

**Proposition 7.1.** *Considérant la factorisation (7.8) du transfert  $\hat{g}(s)$ , sous la forme suivante :*

$$\frac{1}{s + \sigma + k} \frac{1}{1 - \hat{\varepsilon}(s)},$$

*le transfert  $\hat{g}(s)$  est stable si et seulement si le transfert  $\frac{1}{1-\hat{\varepsilon}(s)}$  décrit par l'expression (7.9), est à son tour stable.*

*Démonstration.* Nous remarquons d'abord que  $\hat{g}_1(s)$  est BIBO-stable, pour des valeurs positives des paramètres  $\sigma$  et  $K$ . Nous déduisons alors que la stabilité du transfert  $\hat{g}(s)$

est équivalente à la stabilité du transfert  $\hat{g}_2(s)$ . En effet, le noyau de  $\hat{g}(s)$  est exprimé dans le domaine temporel par la convolution  $g(t) = (g_1 * g_2)(t)$ , où  $g_1(t) = e^{-(\sigma+K)t}$  et  $g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{1-\hat{\varepsilon}(s)}\}$ . Ensuite, si  $g_2(t)$  appartient aux systèmes de la classe  $\mathcal{A}$ , nous obtenons que

$$\|g\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{\sigma + K} \cdot \|g_2\|_{\mathcal{A}}.$$

Ainsi, le noyau du système de convolution  $g(t)$  est intégrable et BIBO stable. Cela montre la suffisance de la proposition 7.1. Inversement, le transfert  $\hat{g}_2(s)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}(s)} &= 1 + \frac{Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-s\theta_0} - e^{-s\theta})}{s+\sigma+K - Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-s\theta_0} - e^{-s\theta})} \\ &= 1 + \hat{g}_3(s) \cdot \hat{g}(s), \end{aligned}$$

où  $\hat{g}_3(s) = Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-s\theta_0} - e^{-s\theta})$ . Dans le domaine temporel, le noyau associé au transfert  $\hat{g}_3(s)$  est égal à  $g_3(t) = Ke^{-\sigma\theta_0}(\delta(t - \theta_0) - \delta(t - \theta))$ , et celui de  $\hat{g}_2(s)$  correspond à l'expression suivante :

$$g_2(t) = \delta(t) + Ke^{-\sigma\theta_0}(g(t - \theta_0) - g(t - \theta)).$$

En plus, si le noyau  $g(t)$  est intégrable vérifiant  $\|g\|_{\mathcal{A}} = \|g\|_{\mathcal{L}_1} < M$  où  $M$  est une limite de la norme  $\|g\|_{\mathcal{L}_1}$ , le noyau  $g_2(t)$  est alors intégrable, vérifiant  $\|g_2\|_{\mathcal{A}} < 1 + 2KM e^{-\sigma\theta_0}$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

La proposition 7.1 affirme que la stabilité du transfert en boucle fermée est liée directement à la stabilité du transfert  $\hat{g}_2(s)$ . Pour cela, nous introduisons dans le lemme suivant, un résultat de base sur la stabilité BIBO des transferts de la forme  $\frac{1}{1-\hat{\alpha}}$ . Ce résultat a été introduit dans les travaux de [Hille et Phillips (1957)], et ensuite développé dans les études de [Desoer et Vidyasagar (1975)].

**Lemme 7.1.** [Desoer et Vidyasagar (1975)] *Étant donné un élément  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$ , la fonction complexe  $\frac{1}{1-\hat{\alpha}}$  est un élément de  $\hat{\mathcal{A}}$  si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) > 0} |1 - \hat{\alpha}(s)| > 0.$$

L'application de ce lemme permet d'identifier une condition équivalente pour la stabilité robuste du transfert  $\hat{g}(s)$ . Ainsi, la condition formulée dans la proposition suivante est nécessaire et suffisante pour la stabilité du système en boucle fermée (7.4). Des conditions suffisantes similaires ont été obtenues dans les travaux de [Mondié et al. (2001)].

**Proposition 7.2.** *Le transfert  $\hat{g}(s)$  défini sous la forme (7.5), est stable si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} \left( \frac{2Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w^2 + (\sigma + K)^2}} \left| \sin \frac{w(\theta - \theta_0)}{2} \right| \right) < 1. \quad (7.10)$$

*Démonstration.* En se basant sur la proposition 7.1, nous avons déduit que la stabilité du transfert  $\hat{g}(s)$  est liée à la stabilité du transfert  $\hat{g}_2(s)$ . Ensuite, le lemme 7.1 présente une condition nécessaire et suffisante de la stabilité du transfert  $\hat{g}_2(s)$ . Ce dernier est stable si et seulement si le module  $|1 - \hat{\varepsilon}(s)|$  est plus grand qu'une valeur non nulle, pour tout nombre complexe  $s$  ayant une partie réelle positive. Cette condition est vérifiée si  $\sup_{\text{Re}(s) > 0} |\hat{\varepsilon}(s)| = \|\varepsilon(t)\|_{\mathcal{A}} < 1$ . De plus, il est bien connu qu'une fonction analytique limitée dans le bon plan complexe droit, atteint son maximum sur l'axe imaginaire pour  $s = jw$ . En effet, la condition devient  $\sup_{w \in \mathbb{R}} \left| \frac{Ke^{-\sigma\theta_0}(e^{-jw\theta_0} - e^{-jw\theta})}{jw + (\sigma + K)} \right| < 1$ , ou de façon équivalente :

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} \left| \frac{Ke^{-\sigma\theta_0}e^{-jw\theta_0}}{jw + (\sigma + K)} \right| |1 - e^{-jw(\theta_0 - \theta)}| < 1.$$

Finalement, nous remarquons que  $\left| \frac{Ke^{-\sigma\theta_0}e^{-jw\theta_0}}{jw + (\sigma + K)} \right| = \frac{Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w^2 + (\sigma + K)^2}}$ , et que

$$\begin{aligned} |(1 - e^{-jw(\theta_0 - \theta)})| &= |1 - \cos w(\theta - \theta_0) + j \sin w(\theta - \theta_0)| \\ &= \sqrt{2(1 - \cos w(\theta - \theta_0))} \\ &= 2 \left| \sin \frac{w(\theta - \theta_0)}{2} \right|, \end{aligned}$$

ce qui aboutit à la condition (7.10) de la proposition.  $\square$

La proposition 7.2 présente une condition nécessaire et suffisante qui permet de tester la stabilité du système en boucle fermée (7.4), et de garantir la robustesse de la loi de commande vis-à-vis de l'incertitude sur le retard  $\theta$ . Nous remarquons que lorsque le retard est connu exactement, pour  $\theta = \theta_0$ , le transfert du système en boucle fermée est égal à  $\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s) = \frac{1}{s + \sigma + K}$ , pour  $\varepsilon(s) = 0$ . Par conséquent, la condition de stabilité (7.10) serait satisfaite pour toute variation  $w \in [0, \frac{\pi}{(\theta - \theta_0)}]$ . En effet, les racines de l'équation caractéristique ont toutes une partie réelle strictement négative pour une valeur strictement positive de  $K$ , ce qui affirme la stabilité du système en boucle fermée.

D'ailleurs, nous avons vu que le problème de robustesse du système en boucle fermée, conduit au problème de la stabilisation du transfert  $\hat{g}_2(s)$ , qui est induit sous l'effet de

l'incertitude sur retard  $\theta$ . En effet, les propositions 7.1 et 7.2 présentent les résultats qui permettent de garantir la stabilité robuste du système contrôlée (7.4). Dans un deuxième temps, le problème revient à évaluer l'incertitude maximale acceptable pour conserver la stabilité du système en boucle fermée (7.4). Pour cela, nous déterminons dans le théorème suivant l'écart maximal du retard incertain  $\theta$  par rapport à sa valeur estimée  $\theta_0$  introduite dans le modèle de la commande (7.1)-(7.3), de sorte que la condition de stabilité (7.10) reste toujours satisfaite.

**Théorème 7.1.** *Étant donné le système de la forme (1.4), la structure de commande par feedback-prédicteur (7.1)-(7.3) est robustement stable vis-à-vis de l'incertitude du retard, pour des valeurs convenables des paramètres  $K$  et  $\theta_0$ , si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \theta \geq 0 & , \text{ pour } e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}, \\ \theta \in ] \max(0, \theta_0 - \Delta), \theta_0 + \Delta[ & , \text{ pour } e^{-\sigma\theta_0} > \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}, \end{cases} \quad (7.11)$$

où l'écart maximal est défini sous la forme suivante :

$$\Delta = \frac{\pi}{2K \sqrt{(e^{-\sigma\theta_0})^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}\right)^2}}.$$

*Démonstration.* En se basant sur la Proposition 7.2, nous constatons que le premier terme figurant dans la condition (7.10),  $\frac{2Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w^2+(\sigma+K)^2}}$ , correspond à une fonction décroissante, et que le deuxième terme  $\left| \sin \frac{w(\theta-\theta_0)}{2} \right|$  vérifie toujours l'inégalité  $\sin \frac{w|\theta-\theta_0|}{2} \leq 1$ , pour des variations de  $w \in [0, \frac{\pi}{|\theta-\theta_0|}]$ . Nous pouvons donc déduire la limite supérieure de l'expression  $\sup_{w \in \mathbb{R}} \left( \frac{2Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w^2+(\sigma+K)^2}} \left| \sin \frac{w(\theta-\theta_0)}{2} \right| \right)$ , qui est égale à  $\frac{2Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w_0^2+(\sigma+K)^2}}$ , pour  $w_0 \in [0, \frac{\pi}{|\theta-\theta_0|}]$ . En effet, la condition (7.10) est donc exprimée sous la forme suivante :

$$\frac{2Ke^{-\sigma\theta_0}}{\sqrt{w_0^2 + (\sigma + K)^2}} < 1, \quad (7.12)$$

D'ailleurs, si la condition est satisfaite,  $e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}$ , alors la borne supérieure (7.12) est vérifiée pour toute valeur positive de  $w_0$ , ce qui implique par conséquent, que le système est stable pour toute valeur positive du retard  $\theta$ . En revanche, si la condition contraire est remplie, soit  $e^{-\sigma\theta_0} > \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}$ , la limite supérieure de la condition (7.10) est obtenue pour

$\sin \left| \frac{w(\theta - \theta_0)}{2} \right| = 1$ , ce qui correspond à une valeur de  $w$  égale à  $w = \frac{\pi}{|\theta - \theta_0|}$ . Ainsi, le transfert  $\hat{g}(s)$  est stable dans ce cas, si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$|\theta - \theta_0| \sqrt{4K^2 e^{-2\sigma\theta_0} - (\sigma + K)^2} < \pi.$$

Celle-ci permet de définir la taille maximale de l'écart du retard de sorte que  $|\theta - \theta_0| < \Delta$  avec  $\theta \geq 0$ , ce qui aboutit aux conditions de stabilité du théorème 7.1.  $\square$

Les conditions nécessaires et suffisantes obtenues dans le théorème 7.1 permettent de quantifier l'écart maximal sur l'incertitude du retard, de sorte que la condition de stabilité (7.10) reste toujours vérifiée, et que la robustesse du système contrôlé (7.4) soit toujours garantie. De plus, nous constatons que l'écart maximal  $\Delta$  est caractérisé par l'ensemble des paramètres  $(K, \sigma, \theta_0)$ , où  $\sigma$  est un paramètre intrinsèque du système (1.4), et  $(K, \theta_0)$  sont les paramètres de commande. Ainsi, pour garantir la robustesse de la loi de commande linéaire proposée (7.1)-(7.3), il faut s'assurer que le choix des paramètres de commande conserve la propriété de BIBO-stabilité du système logistique piloté (7.4), ce qui fait l'objet de la section suivante.

## 7.5 Choix des paramètres de commande

Les conditions du théorème 7.1 dépendent de l'ensemble des paramètres  $(K, \sigma, \theta_0)$ , où  $\sigma$  représente le facteur de perte sur le niveau de stock du système logistique,  $K$  présente le gain statique qui intervient dans la définition de la commande linéaire (7.1), et le retard estimé  $\theta_0$  est utilisé lors de la mise en place de la prédiction (7.3). Pourtant, la valeur de la référence  $z_0$  n'intervient pas dans l'analyse de stabilité du système en boucle fermée. Conformément à la méthodologie de conception du système, un choix bien déterminé des paramètres de commande  $K$  et  $\theta_0$ , permet de tester si la commande linéaire par feedback-prédicteur conserve la stabilité BIBO du système contrôlé, en présence de l'incertitude sur le retard  $\theta$ . Pour cela, nous allons formuler maintenant les conditions qui déterminent le choix des paramètres de pilotage susmentionnés, dans les deux corollaires suivants.

**Corollaire 7.1.** *Étant donné le système en boucle fermée de la forme (1.4)-(7.1)-(7.3), les conditions de stabilité robuste (7.11) du théorème 7.1 sont vérifiées pour  $\sigma > 0$ , en*

choisissant le paramètre de commande  $K$  sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} K \geq 0 & , \text{ pour } e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2}, \\ K \in ]0, \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1}] & , \text{ pour } \frac{1}{2} < e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}, \\ K \in ]\frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1}, \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1} \alpha[ & , \text{ pour } e^{-\sigma\theta_0} > \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K} > \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad (7.13)$$

avec

$$\alpha = \left( \frac{1 + \sqrt{4e^{-2\sigma\theta_0} + (4e^{-2\sigma\theta_0} - 1) \frac{\pi^2}{\sigma^2(\theta - \theta_0)^2}}}{2e^{-\sigma\theta_0} + 1} \right).$$

*Démonstration.* Nous nous référons au théorème 7.1 pour obtenir les résultats qui déterminent le choix du paramètre  $K$  vis-à-vis de l'incertitude du retard  $\theta$ . D'abord, pour le cas le plus complexe, l'expression de l'écart sur le retard  $\Delta$ , définit un choix du paramètre de commande  $K$  suivant l'inéquation du second degré donnée sous la forme suivante :

$$(4e^{-2\sigma\theta_0} - 1)K^2 - 2\sigma K - \left(\sigma^2 + \frac{\pi^2}{(\theta - \theta_0)^2}\right) < 0. \quad (7.14)$$

Cette inégalité ne peut pas être satisfaite que si le discriminant  $(4e^{-2\sigma\theta_0} - 1)$  est positif, ce qui implique le respect de la condition  $e^{-\sigma\theta_0} > \frac{1}{2}$ . De plus, le signe du polynôme (7.14) est vérifié pour un choix du paramètre  $K$  dans l'intervalle défini par les racines du polynôme, sous la forme suivante :

$$K \in \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1} \cdot \left[ \frac{1 - \sqrt{4e^{-2\sigma\theta_0} + (4e^{-2\sigma\theta_0} - 1) \frac{\pi^2}{\sigma^2(\theta - \theta_0)^2}}}{2e^{-\sigma\theta_0} + 1}, \alpha \right].$$

En revanche, le paramètre  $K$  doit vérifier en plus la condition  $K > \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1}$ , pour une variation du retard incertain dans l'intervalle prescrit  $] \max(0, \theta_0 - \Delta), \theta_0 + \Delta[$ . Cette condition étant supérieure à la borne inférieure de l'intervalle de variation de  $K$  décrit ci-dessus, nous pourrions ainsi déduire l'ensemble des solutions acceptables du paramètre de commande  $K$  par  $]\frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1}, \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1} \alpha[$ , comme c'est introduit dans le corollaire. Ensuite, pour  $\frac{1}{2} < e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}$ , et selon la condition (7.11), nous pouvons affirmer que le système est stable pour toute variation positive du retard  $\theta$  vérifiant  $K \leq \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0}-1}$ . Enfin, nous déduisons un cas supplémentaire, pour  $e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2}$ . Dans ce cas, le signe négatif de l'inégalité

(7.14) est toujours vérifiée pour n'importe quel choix positif du paramètre  $K$  et du retard  $\theta$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Il apparaît alors, à travers le corollaire 7.1 que le choix du paramètre  $K$  dépend d'une paramétrisation du retard incertain  $\theta_0$ . Le corollaire suivant décrit comment il convient de choisir le paramètre  $\theta_0$  en fonction de l'intervalle d'incertitude (7.2), pour remplir les conditions (7.11) de stabilité robuste de la commande linéaire par feedback-prédicteur (7.1)-(7.3).

**Corollaire 7.2.** *Étant donné le système en boucle fermée de la forme (1.4)-(7.1)-(7.3), les conditions de stabilité robuste (7.11) du théorème 7.1 sont satisfaites en choisissant une estimation  $\theta_0$  du retard  $\theta$  soumis à une incertitude de la forme (7.2), qui vérifie les conditions suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_0 \geq \frac{1}{\sigma} \log 2 & , \text{ pour } K \geq 0, \\ \theta_0 < \frac{1}{\sigma} \log 2 & , \text{ pour } K \leq \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1}, \\ \Delta > \max(\theta_{max} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{min}) & , \text{ pour } K \in ]\frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1}, \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1}[\beta[ , \end{array} \right. \quad (7.15)$$

avec  $\Delta$  définie dans le théorème 7.1, et

$$\beta = \left( \frac{1 + \sqrt{4e^{-2\sigma\theta_0} + (4e^{-2\sigma\theta_0} - 1) \left( \frac{\pi^2}{\sigma^2 \max(\theta_{max} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{min})^2} \right)}}{2e^{-\sigma\theta_0} + 1} \right).$$

*Démonstration.* Le premier cas définissant le choix du retard estimé  $\theta_0$  est déduit directement du corollaire 7.1 pour  $e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2}$ . Ce choix est acceptable pour tout retard positif  $\theta$ , et en conséquence pour tout retard  $\theta$  vérifiant (7.2). De la même manière, le deuxième choix de  $\theta_0$  est obtenu en se basant sur le résultat du corollaire 7.1, pour  $\frac{1}{2} < e^{-\sigma\theta_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}$ . Également au premier cas, l'incertitude du retard donné par l'intervalle  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ , est une solution qui vérifie la condition de stabilité (7.11) pour ce choix du retard estimé. Ensuite, le dernier choix correspond à  $e^{-\sigma\theta_0} > \frac{1}{2} \frac{\sigma+K}{K}$ . Dans ce cas, le système en boucle fermée est stable si et seulement si l'incertitude (7.2) du retard  $\theta$  vérifie l'inclusion suivante :

$$[\theta_{min}, \theta_{max}] \subset ] \max(0, \theta_0 - \Delta), \theta_0 + \Delta[.$$

Cette condition implique que l'écart  $\Delta$  est borné sous la forme suivante  $\max(\theta_{max} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{min})$ . De plus, cette condition est garantie pour les variations du paramètre de commande vérifiant  $K \in ]\frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1}, \frac{\sigma}{2e^{-\sigma\theta_0} - 1} \beta[$ . Enfin, l'expression  $\beta$  n'est autre que celle de  $\alpha$  où l'écart  $(\theta - \theta_0)$  est remplacé par la marge maximale acceptable  $\max(\theta_{max} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{min})$ .  $\square$

À la fin de cette section, le résultat concernant la robustesse de la loi de commande utilisée (7.1)-(7.3), face à l'incertitude sur le retard  $\theta$  de la forme (7.2), s'interprète directement en termes de la marge de robustesse, que nous l'avons formulée dans le théorème 7.1. De plus, les résultats obtenus dans les corollaires 7.1 et 7.2 décrivent les conditions pour lesquelles la stratégie de commande linéaire par feedback-prédicteur (7.1)-(7.3) appliquée au système en boucle ouverte (1.4), est robustement stable en présence d'une incertitude sur le retard. Ces conditions sont très intéressants, et bien utiles lorsque il s'agit de définir les paramètres de la commande de façon robuste. La caractéristique de robustesse décrit comment il convient de choisir les paramètres de pilotage, suivant les incertitudes et les diverses perturbations sur le système logistique. Ainsi, la méthodologie que nous avons développée, et notamment les résultats des corollaires 7.1 et 7.2 concernant le paramétrage, apportent une démarche systémique pour concevoir et implémenter le système de pilotage. Selon les valeurs des paramètres du système, le gestionnaire est capable d'identifier les valeurs acceptables du gain statique  $K$  et du retard estimé  $\theta_0$  correspondant à la configuration du système piloté. Cette configuration repose sur une analyse mathématique précise et rigoureuse, qui nous a permis de considérer les différents scénarios de paramétrage possibles.

Cependant, la performance du système logistique repose sur la maîtrise totale des techniques de conception et des enjeux de pilotage. Pour cela, l'enjeu principal de la stratégie de pilotage dans le cas des systèmes logistiques, revient à maîtriser les variations de l'ordre de production et du niveau du stock, de façon à répondre positivement aux contraintes de positivité et de saturation (1.5) et (1.6), et à satisfaire la demande clientèle (1.7).

Cette propriété nous mène directement à la question de dimensionnement des ressources, portant sur les incertitudes des paramètres intrinsèques et précisément le retard de production et les pertes de stockage. D'ailleurs, nous avons obtenu dans le chapitre 6, des conditions concernant l'admissibilité de la loi de commande linéaire (6.1). Cette même commande est étudiée dans ce chapitre sous la forme (7.1), et en présence d'une incertitude sur le retard. Pour cela, il serait intéressant d'analyser les conditions obtenues dans le théorème 6.3 pour un modèle certain, afin de mieux illustrer l'impact des incertitudes sur le dimensionnement du système logistique piloté.

## 7.6 Impact des incertitudes sur le dimensionnement du système logistique

Dans la continuité de l'application de notre démarche méthodologie de conception et de commande des systèmes, nous illustrons les résultats précédents pour déterminer les paramètres de dimensionnement du système logistique. Cette détermination est utile au moment de la pré-étude de notre système, pour mieux prévoir l'effet des incertitudes sur la solution de pilotage. nous devons simplement supposer que les bornes de la demande sont donnés par  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . En considérant le théorème 6.3, nous pouvons constater que les conditions nécessaires et suffisantes (6.17), (6.18) et (6.19) peuvent être exprimées en termes d'intervalles par  $\delta u = u_{max} - u_{min}$ ,  $\delta y = y_{max} - y_{min}$  et  $\delta d = d_{max} - d_{min}$ . Ainsi, la zone admissible des paramètres  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ,  $y_{min}$  et  $y_{max}$  est déterminée en fonction des paramètres intrinsèques  $\theta$  et  $\sigma$ . Nous observons alors que la capacité de stockage  $\delta y$  est choisie telle que :

$$\delta y \in ]\frac{1 - e^{-\sigma\theta}}{\sigma}\delta d, y_{max}]. \quad (7.16)$$

Si  $\delta y$  est fixé, en vérifiant les conditions (6.17), (6.18) et (6.18), nous observons que la capacité de production  $\delta u$  doit être limitée de sorte que :

$$\delta u \in [\delta d - \sigma\delta y, u_{max}]. \quad (7.17)$$

De plus, si le retard  $\theta$  et le taux de perte  $\sigma$  présentent des incertitudes et ne peuvent pas être connus exactement, les figures 7.2 et 7.3 illustrent alors leur l'impact sur le dimensionnement de la région admissible du système, respectivement.

En premier temps, il est clair selon la figure 7.2 que le dimensionnement de la capacité de production (7.17) ne dépend pas du retard, alors que la capacité de stockage (7.16) est influencée par la variation du retard. Ainsi, l'intervalle admissible de  $\delta y$  est initialisé par  $]0, y_{max}]$  si le retard est négligeable, et peut atteindre une variation allant jusqu'à  $] \frac{\delta d}{\sigma}, y_{max}]$  si le retard  $\theta$  est devient plus important. Ceci s'explique par le fait que lorsque l'unité de production présente un retard nul, le gestionnaire est susceptible d'avoir un accès direct aux produits finis pour satisfaire la demande des clients. Donc, un niveau de stockage nul ne cause pas un problème sur la disponibilité des produits. Par contre, si le délai de production est trop élevé, le concepteur a intérêt à avoir un stock de sécurité plus grand de l'ordre de  $\frac{\delta d}{\sigma}$ , pour prévoir la demande externe des clients et la servir en juste à temps.

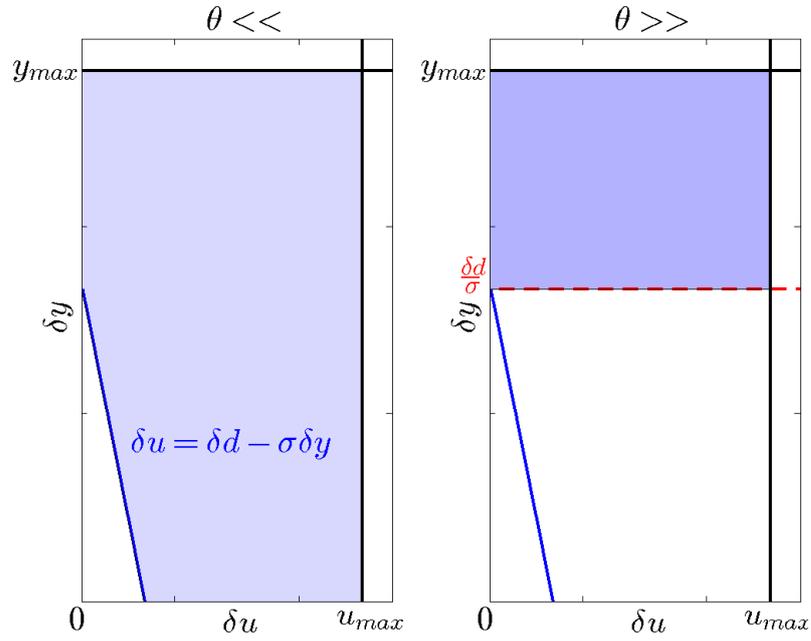


FIGURE 7.2 – Zones admissibles en fonction du retard

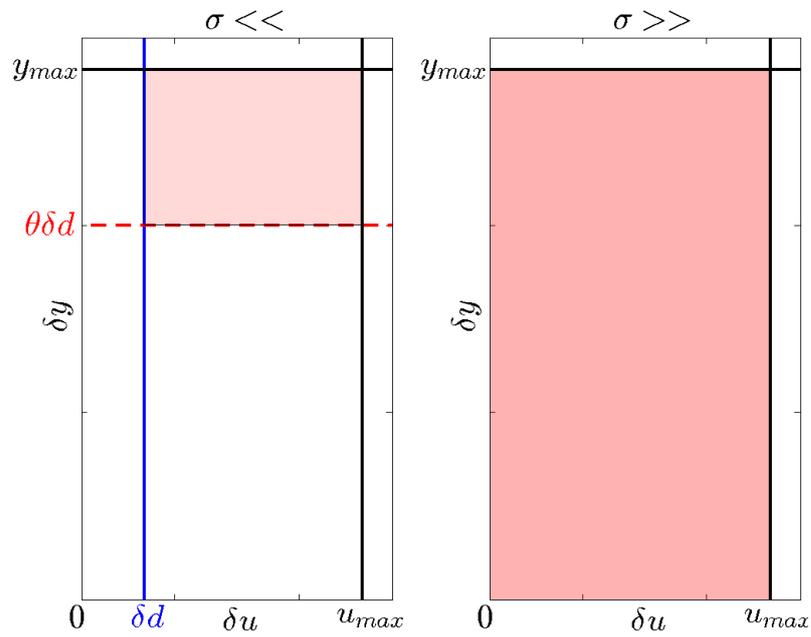


FIGURE 7.3 – Zones admissibles en fonction du taux de perte

Ensuite, en se référant à la figure (7.3), nous pouvons étudier les variations du taux de perte sur le dimensionnement du système et son impact sur la zone admissible. Lorsque le

taux de perte est négligeable de sorte qu'il n'y a pas des pertes de stockage, les capacités de stockage (7.16) et de production (7.17) sont de la forme  $\delta y \in ]\theta\delta d, y_{max}]$  et  $\delta u \in [\delta d, u_{max}]$ . Le dimensionnement est plus petit dans ce cas, du fait que le concepteur n'a pas besoin d'anticiper les pertes pour pouvoir satisfaire entièrement la demande. Par contre, la zone admissible devient plus importante lorsque le taux de perte croît énormément, de sorte que  $\delta y \in ]0, y_{max}]$  et  $\delta u \in [0, u_{max}]$ . En effet, l'augmentation des pertes de stockage implique un écart plus important sur la capacité de production  $\Delta u$ , afin de compenser les pertes. Ceci nécessite aussi une marge de stockage  $\delta y$  plus grande, pour stocker l'excès de production, et agir contre l'effet Bullwhip.

En se basant sur cette analyse comparative, nous pouvons conclure que le dimensionnement de la zone admissible est fortement influencé par les incertitudes et les variations des paramètres intrinsèques du système logistique. Le problème important de la gestion des stocks réside ainsi dans l'étude de la robustesse et de l'admissibilité du système de pilotage proposé dans ce chapitre, face aux incertitudes sur le retard et sur le taux de perte, ce qui ferait l'objet des chapitres suivants.

## 7.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit une loi de commande linéaire pour piloter notre système logistique incertain. Nous avons étudié la stabilité de la stratégie de commande proposée vis-à-vis des incertitudes sur le retard d'entrée. Cela nous a permis de montrer que la solution de pilotage est robuste, et nous avons ainsi caractérisé la marge de robustesse, qui correspond à l'incertitude ou l'erreur sur l'estimation tolérée du retard.

Au-delà de la stabilité robuste, une analyse du dimensionnement de la région admissible du système nous mène au chapitre suivant, où nous proposons d'analyser les performances de notre système de pilotage, en matière de respect des contraintes de fonctionnement et sous l'effet des incertitudes du retard.

# ROBUSTESSE VIS-À-VIS D'INCERTITUDES SUR LE RETARD

## Table des matières

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	181
<b>8.2</b>	<b>Structure de prédiction : problème et solution</b>	182
<b>8.3</b>	<b>Dynamique de la prédiction du stock</b>	184
<b>8.4</b>	<b>Bornes atteignables des variables entrée-sortie</b>	186
<b>8.5</b>	<b>Conditions d'admissibilité de la loi de commande</b>	188
<b>8.6</b>	<b>Étude de cas pour un retard exact</b>	193
<b>8.7</b>	<b>Exemple de simulation</b>	195
<b>8.8</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	198

## 8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la conception du système de pilotage mis en œuvre dans le chapitre 7, qui va permettre au système logistique (1.4) de respecter les contraintes (1.5), (1.6) et (1.7) auquel il est soumis. Cette spécification définit la propriété d'admissibilité de la structure de commande qui, pour un système dynamique soumis à des contraintes, se fusionne avec la caractéristique de robustesse. Pour cela, l'approche de ce chapitre qui consiste à vérifier la propriété d'admissibilité de la structure de commande linéaire, va compléter l'étude de robustesse développée dans le chapitre 7 sur la même loi de commande (7.1).

La méthodologie de conception consiste à définir les paramètres de pilotage, de façon à pouvoir répondre aux spécifications du système et à respecter les contraintes de positivité et de saturation sur les ressources. Ainsi, une recherche des conditions sous lesquelles les paramètres de commande permettent de vérifier les contraintes du système (1.5) et

(1.6), serait développée dans ce chapitre. L'avantage de cette étude revient à appliquer le principe d'invariance, qui est introduit dans la section 2.6.1 et ensuite utilisé dans le chapitre 5, sur le système qui présente non seulement un retard sur l'entrée, mais aussi des incertitudes liées à ce retard.

Nous commençons par analyser le problème que peut engendrer l'incertitude du retard sur la structure de prédiction (7.3) utilisée, dans la section 8.2, afin de déterminer la dynamique de la prédiction en section 8.3. Ensuite, nous étudions dans la section 8.4, la dynamique de variation de l'entrée de commande et de la sortie du système, pour pouvoir déterminer les bornes atteignables par ces variables. Puis, nous identifions les conditions d'admissibilité de la structure de commande, ainsi que le paramétrage convenable des paramètres de commande dans la section 8.5. Nous finissons ce chapitre par une analyse des résultats obtenus dans le cas où le retard est exact dans la section 8.6, suivie d'un exemple de simulation dans la section 8.7.

## 8.2 Structure de prédiction : problème et solution

L'introduction de l'incertitude sur le retard  $\theta$  sous la forme  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ , où  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$  sont donnés, ne modifie pas l'expression de la dynamique de la sortie  $y(t)$  donnée par le système (1.4). Elle intervient dans la définition de la structure de commande linéaire (7.1), où la prédiction  $p(t)$  utilisée est basée sur l'estimation  $\theta_0$  du retard réel  $\theta$ , et qui est définie par la relation (7.3), que nous rappelons ci-dessous,

$$p(t) = e^{-\sigma\theta_0}y(t) + \int_{t-\theta_0}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta_0.$$

La dynamique de  $p(t)$  se présente sous la forme (7.4) que nous rappelons aussi :

$$\dot{p}(t) = -\sigma p(t) + u(t) - e^{-\sigma\theta_0}d(t) + e^{-\sigma\theta_0}(u(t - \theta) - u(t - \theta_0)), \text{ pour } t \geq 0.$$

Plus explicitement, en tenant compte de la définition (7.1) de  $u(t)$ , la dynamique de  $p(t)$  s'écrit sous la forme :

$$\dot{p}(t) = -(K + \sigma)p(t) + Kz_0 - e^{-\sigma\theta_0}d(t) + Ke^{-\sigma\theta_0}(p(t - \theta_0) - p(t - \theta)). \quad (8.1)$$

Comme nous l'avons constaté avant, l'équation de cette dynamique correspond à une équation retardée qui dépend de deux retards rationnellement indépendants,  $\theta$  et  $\theta_0$ , ce qui

rend l'étude de la dynamique de prédiction plus complexe. Ainsi, afin de mieux quantifier les effets de l'incertitude du retard sur la dynamique du système, nous introduisons la prédiction  $z(t)$ , utilisée dans la partie III, dans le cas où le système (1.4) ne présente aucune incertitude sur les paramètres intrinsèques, et précisément sur le retard  $\theta$ . Nous rappelons la définition (5.1) de la prédiction  $z(t)$  par l'expression suivante :

$$z(t) = e^{-\sigma\theta}y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta.$$

Cette variable correspond à la prédiction exacte du niveau futur du stock  $y(t)$  connaissant la valeur précise du retard réel  $\theta$ . Ensuite, en utilisant les définitions de  $p(t)$  et  $z(t)$  et les propriétés de la réduction d'Artstein [Artstein (1982)], la prédiction exacte présente alors les caractéristiques suivantes.

**Propriété 8.1.** *Les variables  $p(t)$  et  $z(t)$  définies par (7.3) et (5.1) respectivement, vérifient les propriétés suivantes.*

- (i)  $z(t) = y(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau,$
- (ii)  $z(t) = e^{-\sigma(\theta-\theta_0)}p(t) + e(t),$
- (iii)  $\dot{z}(t) = Kz_0 - (\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0-\theta)})z(t) + Ke^{-\sigma(\theta_0-\theta)}e(t) - e^{-\sigma\theta}d(t),$

avec

$$e(t) = (1 - e^{-\sigma(\theta-\theta_0)}) \int_{t-\theta_0}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \quad (8.2)$$

*Démonstration.* L'assertion (i) n'est autre que la propriété de base du prédicteur exact  $z(t)$  que nous avons établi dans le chapitre 5 en intégrant l'équation (1.4), entre les instants  $t$  et  $t + \theta$ , et en utilisant l'expression de  $z(t)$  donnée par l'expression (5.1). La seconde assertion (ii) se déduit immédiatement des définitions (5.1) de  $z(t)$  et (7.3) de  $p(t)$ . Enfin, la troisième assertion (iii) s'obtient en dérivant l'expression de  $z(t)$  donnée par la relation (5.1), on obtient ainsi la réduction d'Artstein,  $\dot{z}(t) = -\sigma z(t) + u(t) - e^{-\sigma\theta}d(t)$ , puis en remplaçant  $u(t)$  par son expression (7.1). □

En se référant à l'expression (ii) de la propriété 8.1, le terme  $e(t)$  correspond à l'erreur de prédiction induite par l'incertitude sur retard. En effet, si le système ne présente aucune incertitude, pour  $\theta_0 = \theta$ , nous constatons que l'erreur s'annule, soit  $e(t) = 0$ , et que  $z(t) = p(t)$  en conséquence. Du fait de ces incertitudes, il devient difficile de définir des bornes pour les variables de flux  $y(t)$  et  $u(t)$  qui nous intéressent. Pourtant, la dynamique

de la prédiction exacte  $z(t)$  donnée par l'assertion (iii) présente un système sans retard. Nous pouvons donc arriver à cette fin, tout en identifiant la variation de la prédiction exacte  $z(t)$ , comme nous le montrons dans la section suivante. Cette étape va servir comme résultat intermédiaire et fondamental pour le calcul des bornes atteignables d'entrée et de sortie.

### 8.3 Dynamique de la prédiction du stock

L'objectif de cette section est de déterminer les bornes des variables de prédiction  $z(t)$ . Comme nous avons pu le constater dans la section précédente, la présence de retards et d'incertitude sur ces retards dans la dynamique du système (8.1) de  $p(t)$  complique l'analyse de la prédiction. En revanche, nous surmontons cette complexité, en caractérisant les variations de la prédiction exacte  $z(t)$ , dont l'expression de la dynamique donnée par l'assertion (iii) de la propriété 8.1 paraît plus simple à manipuler. Pour ce faire, commençons par introduire les résultats intermédiaires suivants.

**Lemme 8.1.** *Pour toute entrée de commande vérifiant (1.6), et tout retard incertain de la forme (7.2), l'erreur de prédiction (8.2) vérifie les bornes suivantes, pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$e(t) \in [e_1, e_2].$$

*De plus, les bornes exactes sont définies pour  $e_1 \leq e_2$ , par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} e_1 &= \left( \frac{1-e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma} + e^{-\sigma\theta_{max}} \left( \frac{1-e^{\sigma\theta_0}}{\sigma} \right) \right) u_{min}, \\ e_2 &= \left( \frac{1-e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma} + e^{-\sigma\theta_{min}} \left( \frac{1-e^{\sigma\theta_0}}{\sigma} \right) \right) u_{max}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

*Démonstration.* La démonstration de ce lemme est apportée en formulant les bornes de la quantité  $e(t)$  définie par l'expression (8.2), en utilisant nos résultats de calcul de bornes, pour  $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ . La fonction de convolution définie par le premier intégrale de  $e(t)$  est exprimée par la forme suivante,  $\int_{t-\theta_0}^t e^{-\sigma(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \frac{1-e^{-\sigma\theta_0}}{\sigma} u(t)$ . Ainsi, pour l'entrée de commande  $u(t)$  vérifiant (1.6), et un retard  $\theta$  vérifiant (7.2), la borne inférieure du terme gauche de l'expression de  $e(t)$  est donnée sous la forme suivante  $(1 - e^{-\sigma(\theta_{max}-\theta_0)}) \frac{1-e^{-\sigma\theta_0}}{\sigma} u_{min}$ , alors que la borne supérieure correspond à l'identité suivante  $(1 - e^{-\sigma(\theta_{min}-\theta_0)}) \frac{1-e^{-\sigma\theta_0}}{\sigma} u_{max}$ . De la même manière, en prenant  $\theta = \theta_{min}$  et

$u(t) = u_{min}$ , le deuxième terme de l'expression de  $e(t)$  atteint la borne inférieure, qui est égale à  $(\frac{e^{-\sigma\theta_0} - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma})u_{min}$ . Et en prenant  $\theta = \theta_{max}$  et  $u(t) = u_{max}$ , il atteint la borne supérieure qui est donnée par  $(\frac{e^{-\sigma\theta_0} - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma})u_{max}$ . L'énoncé du lemme formule donc précisément ces bornes exactes, tout en vérifiant que  $e_1 \leq e_2$ .  $\square$

Ce lemme permet de borner l'erreur de prédiction  $e(t)$  définie par l'expression (8.2), qui apparait dans l'expression de  $z(t)$ . En utilisant les bornes obtenues, nous allons maintenant calculer des bornes générales pour la variable  $z(t)$  qui nous seront utiles par la suite. En fait, nous appliquons le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance, introduit dans la section 2.6.1 et utilisé ensuite dans le chapitre 5, à l'équation sans retard donnée par l'assertion (iii) de la propriété 8.1, afin de pouvoir caractériser proprement l'intervalle de variation de la prédiction  $z(t)$ .

**Proposition 8.1.** *Pour le système de la forme (1.4), si  $e(t) \in [e_1, e_2]$ , avec deux nombres réels  $e_1$  et  $e_2$  définis par le lemme 8.1, alors l'ensemble  $\mathcal{D}$ -invariant de la prédiction (5.1) est défini sous l'effet de l'incertitude (7.2) du retard  $\theta$ , comme suit :*

$$z(t) \in [z_{min}, z_{max}], \quad (8.4)$$

avec

$$z_{min} = \frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}} (Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{min}}d_{max} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}e_1), \quad (8.5)$$

$$z_{max} = \frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}} (Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{max}}d_{min} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}e_2). \quad (8.6)$$

*Démonstration.* Ce résultat est obtenu en appliquant le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance. À partir de l'identité (iii) de la propriété 8.1, nous constatons que  $\dot{z}(t)$  est forcément positive, si l'inégalité suivante est vérifiée,

$$Kz_0 - (\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta)})z(t) + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta)}e(t) \geq e^{-\sigma\theta_{min}}d_{max}.$$

Ainsi, nous définissons la borne minimale vérifiant  $z(t) \leq z_{min}$ , pour toute demande  $d(t)$  et tout retard  $\theta$  prenant les valeurs  $d_{max}$  et  $\theta_{min}$  respectivement, et sans oublier de borner l'erreur de la prédiction par  $e_1$ . De la même façon, nous remarquons que la dérivée  $\dot{z}(t)$  est forcément négative si la demande  $d(t)$  est égale à  $d_{min}$ , pour  $\theta = \theta_{max}$  et pour une erreur de prédiction maximale qui vaut  $e_2$ . Nous définissons alors la borne maximale vérifiant  $z(t) \geq z_{max}$ . En effet, en appliquant le théorème d'invariance, nous arrivons à la conclusion

que l'ensemble  $[z_{min}, z_{max}]$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour  $\mathcal{D} = [d_{min}, d_{max}]$ , de sorte que  $z(t)$  évolue dans cet ensemble pour tout  $t \geq 0$ .  $\square$

Les bornes de l'intervalle de variation de la prédiction  $z(t)$  ainsi obtenu, dépendent des paramètres de pilotage  $K$ ,  $z_0$  et  $\theta_0$ . Il est donc possible de moduler ces paramètres de façon à ce que l'intervalle de variation du stock corresponde aux attentes et aux spécifications de la stratégie de gestion appliquée. Ceci montre la flexibilité de la loi de commande linéaire proposée (7.1), et va nous permettre de définir dans la section suivante, la dynamique de variation des flux d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  du système piloté.

## 8.4 Bornes atteignables des variables entrée-sortie

La démarche que nous mettons en œuvre pour vérifier la propriété d'admissibilité de la structure de commande utilisée, consiste en premier lieu, à calculer les intervalles de variation des flux de l'entrée de commande  $u(t)$  et de la sortie du système  $y(t)$ . En fait, l'assertion (i) de la propriété 8.1 permet de déterminer les variations de la sortie  $y(t)$ , en se référant sur les variations de la prédiction  $z(t)$  déjà formulées dans la proposition 8.1. De plus, la définition de la loi de commande linéaire par feedback-prédicteur (7.1), et sous préserve de la formulation de la prédiction  $p(t)$  dans l'assertion (ii) de la proposition 8.1, va nous permettre d'identifier les variations de l'entrée de commande  $u(t)$  sous forme d'intervalle. Ces résultats sont développés avec précision dans le théorème suivant.

**Théorème 8.1.** *Étant donné le système (1.4) avec une incertitude (7.2) sur le retard et une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7), soumis à une stratégie de commande de la forme (7.1)-(7.3), alors les variables d'entrée et de sortie vérifient les inclusions suivantes :*

$$u(t) \in [u_1, u_2], \quad y(t) \in [y_1, y_2], \quad (8.7)$$

où les bornes exactes  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $y_1$  et  $y_2$  sont définies respectivement par les identités suivantes :

$$u_1 = \frac{K}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}} (\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta_0} d_{min} + \sigma e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} e_1 - Ke^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} (e_2 - e_1)), \quad (8.8)$$

$$u_2 = \frac{K}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}} (\sigma z_0 + e^{-\sigma\theta_0} d_{max} + \sigma e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} e_2 - Ke^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} (e_1 - e_2)), \quad (8.9)$$

$$y_1 = \frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}} \left( Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{min}}d_{max} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}e_1 \right) - \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma}d_{max}, \quad (8.10)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}} \left( Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{max}}d_{min} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}e_2 \right) - \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma}d_{min}. \quad (8.11)$$

*Démonstration.* En utilisant l'assertion (ii) de la propriété 8.1 qui décrit la relation entre la prédiction  $p(t)$  et la prédiction exacte  $z(t)$ , la loi de commande linéaire (7.1) est donc définie par l'expression suivante,  $u(t) = K(z_0 - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta)}(z(t) - e(t)))$ . Ensuite, nous identifions les variations de  $u(t)$  en se basant sur les intervalles de variation de la prédiction  $z(t)$  et de l'erreur de prédiction  $e(t)$  qui sont définis dans la proposition 8.1 et le lemme 8.1 respectivement, ainsi que l'intervalle (7.2) définissant l'incertitude sur le retard  $\theta$ . En effet, la borne inférieure  $u_1$  est donnée par  $u_1 = K(z_0 - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}(z_{max} - e_1))$ , et la borne supérieure correspond à  $u_2 = K(z_0 - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}(z_{min} - e_2))$ . Par conséquent, nous trouvons les bornes exactes  $u_1$  et  $u_2$  en remplaçant  $z_{min}$  et  $z_{max}$  par leurs expressions données précédemment.

De la même manière, nous calculons les bornes exactes délimitant la variation de la sortie  $y(t)$ , en se basant sur l'identité (i) de la propriété 8.1. Étant donné les variations de  $\theta$  et de  $d(t)$  par les intervalles (7.2) et (1.7) respectivement, l'intégrale  $\int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau$  est bornée sous la forme suivante :

$$\frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma}d_{min} \leq \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau \leq \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma}d_{max}.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver facilement les bornes exactes de la variation de la sortie  $y(t)$ , de sorte que  $y_1 = z_{min} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma}d_{max}$  et  $y_2 = z_{max} - \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma}d_{min}$ . Cette démonstration est achevée en remplaçant simplement les bornes  $z_{min}$  et  $z_{max}$  par leurs expressions définies dans la proposition 8.1.  $\square$

Nous avons obtenu les bornes exactes et atteignables de la variation de l'entrée de commande  $u(t)$  et de la sortie du système  $y(t)$ , qui nous sont fondamentaux pour notre travail. Comme nous le constatons, ces bornes dépendent des paramètres de pilotage ainsi que les retards considérés. Ainsi, ces résultats vont nous permettre de définir les paramètres de pilotage qui permettent au système logistique de répondre positivement aux contraintes (1.5) et (1.6). Nous parlons alors de l'admissibilité de la loi de commande, ce qui fait l'objet de la section suivante.

## 8.5 Conditions d'admissibilité de la loi de commande

La deuxième étape de notre démarche de conception consiste à formuler les conditions d'admissibilité de la structure de commande donnée sous la forme (7.1)–(7.3). Cela revient à vérifier les inclusions des intervalles de variation de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ , formulés sous la forme (8.7), dans les intervalles définis par les contraintes (1.5) et (1.6), respectivement. La proposition suivante présente les conditions suffisantes pour l'admissibilité du système contrôlé, permettant de faire face à la variation de la demande  $d(t)$  de la forme (1.7), en présence d'incertitude sur le retard de la forme (7.2).

**Proposition 8.2.** *Étant donné un système de la forme (1.4), avec une incertitude sur le retard réel  $\theta$  vérifiant (7.2), une commande de la forme (7.1)–(7.3) permet de garantir la BIBO-stabilité et le respect des contraintes (1.5) et (1.6) pour toute demande  $d(t)$  vérifiant (1.7), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$u_{min} \leq \frac{K}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}} \left( \sigma z_0 + e^{-\sigma\theta_0} d_{min} + \sigma e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} e_1 - Ke^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} (e_2 - e_1) \right), \quad (8.12)$$

$$\frac{K}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}} \left( \sigma z_0 + e^{-\sigma\theta_0} d_{max} + \sigma e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} e_2 - Ke^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} (e_1 - e_2) \right) \leq u_{max}, \quad (8.13)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma} d_{max} \leq \frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}} \left( Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{min}} d_{max} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} e_1 \right), \quad (8.14)$$

$$\frac{1}{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}} \left( Kz_0 - e^{-\sigma\theta_{max}} d_{min} + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} e_2 \right) \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma} d_{min}. \quad (8.15)$$

*Démonstration.* La preuve de cette proposition consiste à formuler les conditions, pour lesquelles les variations  $u(t)$  et  $y(t)$  vérifient dans les contraintes (1.6) et (1.5) respectivement. Pour l'entrée  $u(t)$ , il suffit de vérifier que l'intervalle  $[u_1, u_2]$ , défini dans le théorème 8.1, est bien inclus dans l'intervalle  $[u_{min}, u_{max}]$ . Ainsi, les conditions (8.12) et (8.13) de la proposition traduisent simplement les conditions de cette inclusion. De la même manière, les conditions (8.14) et (8.15) s'obtiennent simplement, en considérant que la sortie  $y(t)$

évolue dans l'intervalle prescrit  $[y_{min}, y_{max}]$ , si celui-ci contient l'intervalle  $[y_1, y_2]$ , qui est défini dans le théorème 8.1.  $\square$

Cette proposition donne les conditions d'admissibilité d'une commande robuste linéaire (7.1), pour le système logistique incertain (1.4) que nous considérons. Il apparaît à travers cette proposition, que les conditions dépendent du choix de  $K$ ,  $z_0$  et  $\theta_0$ . Ces résultats expliquent que, pour des paramètres de pilotage donnés, et des contraintes du système logistique fixées par (1.5) et (1.6), nous pouvons tester si la commande linéaire permet de répondre aux spécifications de fonctionnement du système logistique, en présence de l'incertitude sur le retard, et pour toute demande  $d(t)$  variant entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . Conformément à la méthodologie de conception des système, le théorème suivant répond à cette attente, en décrivant les conditions d'existence d'une telle commande, et comment il convient de choisir les paramètres de pilotage susmentionnés.

**Théorème 8.2.** *Étant donné le système de la forme (1.4), avec une incertitude sur le retard réel  $\theta$  vérifiant (7.2), et soumis à une demande de la forme (1.7), il existe une commande robuste admissible de la forme (7.1)–(7.3) avec  $\theta_0$  étant le retard estimé, qui permet de garantir la BIBO-stabilité et les contraintes (1.5) et (1.6), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$u_{min} < \sigma y_{max} + d_{min} + (e^{-\sigma\theta_{max}} - e^{-\sigma\theta_{min}})d_{min}, \quad (8.16)$$

$$\sigma y_{min} + d_{max} + (e^{-\sigma\theta_{min}} - e^{-\sigma\theta_{max}})d_{max} < u_{max}, \quad (8.17)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma} d_{max} < y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma} d_{min}. \quad (8.18)$$

Sous ces conditions, les paramètres de commande sont choisis de sorte que  $z_0$  vérifie les conditions (8.12), (8.13), (8.14) et (8.15), et le gain statique vérifie la condition suivante :

$$K > \frac{(d_{max} - d_{min}) - \sigma(y_{max} - y_{min}) + (e^{-\sigma\theta_{min}} - e^{-\sigma\theta_{max}})(d_{min} + d_{max})}{e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}(y_{max} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma} d_{min}) - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}(y_{min} + \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma} d_{max})}. \quad (8.19)$$

Si de plus, la condition suivante est remplie,

$$e^{-\sigma\theta_0}(d_{max} - d_{min}) > (e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}(u_{max} - \sigma e_2) - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}(u_{min} - \sigma e_1)), \quad (8.20)$$

alors, le gain statique  $K$  est choisi pour  $\sigma \neq 0$ , tout en respectant, en plus de la condition (8.19), la borne supérieure suivante :

$$K < \frac{\sigma(u_{max} - u_{min})}{e^{-\sigma\theta_0}(d_{max} - d_{min}) - (e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}(u_{max} - \sigma e_2) - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}(u_{min} - \sigma e_1))}, \quad (8.21)$$

*Démonstration.* Les conditions obtenues dans ce théorème proviennent des conditions suffisantes d'admissibilité de la loi de commande, données par la proposition 8.2, et exprimées en termes de paramètres de commande. Cette démonstration est basée sur la procédure de Fourier-Motzkin, introduite dans la section 2.7 pour l'élimination des paramètres  $K$  et  $z_0$ . D'abord, les conditions de la proposition 8.2 sont reformulées par les inégalités suivantes :

$$\frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}}{K} \frac{u_{min}}{\sigma} - \frac{e^{-\sigma\theta_0}}{\sigma} d_{min} - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} e_1 + \frac{K}{\sigma} e^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} (e_2 - e_1) \leq z_0, \quad (8.22)$$

$$z_0 \leq \frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}}{K} \frac{u_{max}}{\sigma} - \frac{e^{-\sigma\theta_0}}{\sigma} d_{max} - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} e_2 + \frac{K}{\sigma} e^{-2\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} (e_1 - e_2), \quad (8.23)$$

$$\frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}}{K} y_{min} + \left( \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{max}}}{\sigma} \frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})}}{K} + \frac{e^{-\sigma\theta_{min}}}{K} \right) d_{max} - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} e_1 \leq z_0, \quad (8.24)$$

$$z_0 \leq \frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}}{K} y_{max} + \left( \frac{1 - e^{-\sigma\theta_{min}}}{\sigma} \frac{\sigma + Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})}}{K} + \frac{e^{-\sigma\theta_{max}}}{K} \right) d_{min} - e^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} e_2. \quad (8.25)$$

Ensuite, nous appliquons le principe d'élimination de Fourier-Motzkin, afin d'obtenir un ensemble équivalent d'inégalités qui sont indépendantes de  $z_0$ . En effet, connaissant que  $K > 0$  et  $\sigma > 0$ , la condition (8.16) est alors déduite des inégalités (8.22) et (8.25) sous l'hypothèse suivante,

$$Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{max})} (e_2 - e_1) \geq 0. \quad (8.26)$$

Également, la condition (8.17) est dérivée des inégalités (8.23) et (8.24) en utilisant l'hypothèse suivante :

$$Ke^{-\sigma(\theta_0 - \theta_{min})} (e_2 - e_1) \geq 0. \quad (8.27)$$

De la même manière, la condition (8.18) est obtenue à partir des inégalités (8.24) et (8.25), en utilisant les hypothèses suivantes :

$$\frac{e^{-\sigma\theta_{min}}}{K}d_{max} - \frac{e^{-\sigma\theta_{max}}}{K}d_{min} \geq 0, \quad (8.28)$$

et

$$e^{-\sigma(\theta_0-\theta_{max})}e_2 - e^{-\sigma(\theta_0-\theta_{min})}e_1 \geq 0. \quad (8.29)$$

Ensuite, nous passons à la procédure d'élimination du gain statique  $K$ . En effet, la condition (8.19) qui définit la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de  $K$  acceptables, est déduite des inégalités (8.24) et (8.25) en utilisant l'hypothèse (8.29). Tandis que la condition (8.21) s'ajoute à cette dernière si la condition (8.20) est satisfaite. Celle-ci définit la borne maximale du choix de  $K$ , en utilisant les inégalités (8.22), (8.23) et l'hypothèse ci-dessous :

$$K^2(e_2 - e_1)(e^{-2\sigma(\theta_0-\theta_{min})} + e^{-2\sigma(\theta_0-\theta_{max})}) \geq 0. \quad (8.30)$$

Il faut noter que les hypothèses (8.26), (8.27), (8.28), (8.29) et (8.30), utilisées dans la démonstration sont toutes satisfaites, ce qui permet d'obtenir les conditions (8.16), (8.17) et (8.18) à inégalités strictes simplifiées.  $\square$

Le théorème 8.2 fournit des conditions suffisantes pour lesquelles le système (1.4), soumis à une structure de commande par feedback-prédicteur de type linéaire (7.1)-(7.3), respecte les contraintes et (1.5) et (1.6), malgré la présence d'incertitude sur le retard  $\theta$ , et la variation arbitraire de la demande  $d(t)$ . De plus, les résultats obtenus sont très intéressants, et bien utiles lorsque il s'agit de définir les paramètres de la commande robuste. La caractéristique de robustesse peut être définie de diverses manières suivant les attentes et les objectifs du pilotage. En effet, en plus de devoir garantir la stabilité du système en boucle fermée comme nous l'avons développée dans le chapitre précédent, la stratégie de pilotage peut aussi viser à satisfaire les contraintes de positivité et de saturation imposées sur les ressources du système. La paramétrisation de  $z_0$  et  $K$ , que nous proposons dans ce théorème permet justement de satisfaire cet objectif. Sous ces mêmes conditions, nous pourrions alors envisager de respecter le dimensionnement des stocks et des ressources de production, même si celles-ci présentent des incertitudes considérables sur le retard de production.

À la fin de cette étude, nous identifions dans le corollaire suivant, les conditions liées à l'existence d'une commande linéaire (7.1) admissible dans le cas où le système d'étude

(1.3) présente un facteur de perte nul. Dans ce cas les bornes de l'erreur de prédiction (8.2) sont définies par les expressions réduites  $e_1 = (\theta_{min} - \theta_0)u_{min}$  et  $e_2 = (\theta_{max} - \theta_0)u_{max}$ .

**Corollaire 8.1.** *Étant donné le système de la forme (1.3) soumis à une demande de la forme (1.7), avec un facteur de perte  $\sigma = 0$  et une incertitude sur le retard vérifiant (7.2), les conditions suffisantes pour l'existence d'une loi de commande admissible de la forme (7.1)-(7.3), sont les suivantes :*

$$u_{min} < d_{min}, \quad (8.31)$$

$$d_{max} < u_{max}, \quad (8.32)$$

$$y_{min} + \theta_{max}d_{max} < y_{max} + \theta_{min}d_{min}. \quad (8.33)$$

De plus, sous ces conditions, la consigne  $z_0$  est choisie tout en vérifiant la condition suivante :

$$y_{min} + \theta_{max}d_{max} + \frac{d_{max}}{K} - e_1 \leq z_0 \leq y_{max} + \theta_{min}d_{min} + \frac{d_{min}}{K} - e_2, \quad (8.34)$$

avec un gain statique  $K$  vérifiant la condition suivante :

$$K \geq \frac{d_{max} - d_{min}}{(y_{max} - y_{min}) - (\theta_{max}d_{max} - \theta_{min}d_{min}) - (e_2 - e_1)}. \quad (8.35)$$

*Démonstration.* Les résultats ci-dessus sont obtenus en utilisant les conditions d'admissibilité de la loi de commande, données par la proposition 8.2. Pour un facteur de perte nul,  $\sigma = 0$ , ces conditions sont exprimées comme suit :

$$u_{min} + K(e_2 - e_1) \leq d_{min}, \quad (8.36)$$

$$d_{max} + K(e_2 - e_1) \leq u_{max}, \quad (8.37)$$

$$y_{min} + \theta_{max}d_{max} \leq \frac{1}{K}(Kz_0 - d_{max} + Ke_1), \quad (8.38)$$

$$\frac{1}{K}(Kz_0 - d_{min} + Ke_2) \leq y_{max} + \theta_{min}d_{min}. \quad (8.39)$$

Ensuite, les conditions (8.31) et (8.32) sont dérivées des inégalités (8.36) et (8.37) respectivement, en se basant sur l'hypothèse suivante :

$$K(e_2 - e_1) \geq 0. \tag{8.40}$$

De plus, la condition (8.34) est déduite des conditions (8.38) et (8.39) en isolant la consigne  $z_0$ . Ainsi, la condition (8.33) est obtenue en appliquant le principe d'élimination de Fourier-Motzkin sur la condition (8.34). Enfin, la vérification de la condition (8.34), implique en particulier que le gain  $K$  est choisi selon la relation (8.35).  $\square$

Le corollaire 8.1 présente les conditions d'existence d'une commande linéaire (7.1)-(7.3), qui permet au système de pilotage de garantir les spécifications de fonctionnement requises, en présence d'incertitude sur le retard du système (1.3). Les conditions décrivent aussi comment il convient de choisir les paramètres de pilotage  $K$  et  $z_0$  pour conserver l'admissibilité de la structure de commande. Ce résultat consolide la caractéristique de robustesse de la loi de commande utilisée face à l'incertitude sur le retard. Dans ce cas d'étude, les résultats obtenus correspondent au dimensionnement d'un niveau de stock qui ne présente pas des pertes de stockage. Cette spécification vient du fait que le système logistique ne traite pas les produits pétrissables. Et donc les pièces produites ne présentent ne sont plus périmées après une certaine durée de vie limitée.

À la fin de cette l'étude, la dernière question qui se pose, concerne la ressemblance entre cette solution de pilotage appliquée sur le système logistique à retard incertain, et l'approche appliquée dans le chapitre 6 avec la même structure de commande linéaire (6.1), pour piloter le système logistique sans incertitude sur le retard d'entrée. La réponse à cette question est développée dans la section suivante.

## 8.6 Étude de cas pour un retard exact

Étant donné que les résultats d'admissibilité de la loi de commande proposée, fournit une caractéristique de robustesse du système en boucle fermée face à l'incertitude sur le retard, nous pourrions alors analyser les conditions lorsque le retard est connu exactement sans incertitude.

Dans ce cas, l'intervalle de variation (7.2) qui décrit l'incertitude sur le retard  $\theta$  n'existe plus, et donc  $\theta = \theta_{min} = \theta_{max}$ . De plus, la prédiction  $p(t)$  utilisée dans la structure de commande (7.3) n'est autre que la prédiction exacte du niveau futur de stockage (5.1),

soit  $p(t) = z(t)$ . Ceci implique plus précisément que le retard estimé est égal au retard réel, soit  $\theta_0 = \theta$ , et que l'erreur de prédiction  $e(t)$  devient nulle de sorte que  $e_1 = e_2 = 0$ . À ce niveau, nous remarquons que la formulation (6.1) utilisée dans le chapitre 6, et la formulation (7.1) du chapitre courant, définissent la même loi de commande linéaire. En effet, nous analysons le théorème 8.2 développé pour un facteur de perte  $\sigma$  positif, et le corollaire 8.1 énoncé pour un facteur de perte nul,  $\sigma = 0$ , dans le cas où le retard réel du système est connu exactement.

Une première comparaison entre les résultats du théorème 8.2 pour un retard incertain, et ceux du théorème 6.3 du chapitre 6 pour un retard exact, est développée dans la suite.

- D'abord, nous constatons que les hypothèses (8.26) et (8.27), qui ont été utilisées pour obtenir les conditions (8.16) et (8.17) sous forme d'inégalités strictes, s'annulent dans le cas d'un retard exact. Nous déduisons donc que les conditions (8.16) et (8.17) seront réduites aux conditions (6.17) et (6.18) du théorème 6.3.
- Ensuite, Les hypothèses (8.28) et (8.29) sont utilisées lors de l'identification de la condition (8.18). La deuxième hypothèse (8.29) s'annule lorsque le retard est exact, alors que l'hypothèse (8.28) se traduit par l'inégalité stricte  $\frac{e^{-\sigma\theta}}{K}(d_{max} - d_{min}) > 0$ . Cette hypothèse étant vérifiée pour  $d_{max} > d_{min}$ , alors l'inégalité stricte de la condition (8.18) est toujours conservée. Par conséquent, la condition (8.18) est identique à la condition (6.19) du théorème 6.3.
- Enfin, vu que l'hypothèse (8.29) et (8.30) sont nulles pour un retard exact, les inégalités (8.19) et (8.21) qui précisent la paramétrisation de  $K$ , ne sont plus de inégalités strictes. Ainsi, les conditions qui décrivent le choix des paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ , seront égales aux conditions obtenues dans le théorème 6.3 du chapitre 6.

En conclusion, les conditions suffisantes du théorème 8.2 se coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes du théorème 6.3, lorsque le retard du système  $\theta$  est connu exactement. Ce qui présente un indicateur fort que les résultats du théorème 8.2 ne sont pas limitatives.

Dans un deuxième temps, nous remarquons aussi une ressemblance des résultats lorsque le facteur de perte est nul. La comparaison est basée principalement sur les conditions du corollaire 8.1 pour  $\theta$  vérifiant (7.2), et les résultats du corollaire 6.2 du chapitre 6 pour un retard exact. Ainsi, en considérant une incertitude nulle sur le retard de sorte que  $\theta_{min} = \theta_{max}$ , l'erreur de prédiction  $e(t)$  ainsi que les bornes  $e_1$  et  $e_2$  s'annulent. Alors, l'hypothèse (8.40) qui intervient dans le calcul des conditions (8.31) et (8.32) du corollaire

8.1, et qui est la cause pour obtenir des conditions à inégalités strictes, s'annule aussi. En effet, nous aboutissons aux mêmes conditions d'existence et de paramétrisation de la commande linéaire robuste, formulées dans le corollaire 6.2 du chapitre 6 pour un système sans incertitude.

À la fin de ce chapitre, un exemple de simulation illustre bien le comportement de la structure de commande proposée, en termes de robustesse et d'admissibilité, sous l'effet d'incertitude et de perturbation.

## 8.7 Exemple de simulation

Afin d'illustrer l'action de la commande linéaire proposée dans ce chapitre, nous considérons le système logistique (1.4), avec la loi de commande (7.1)–(7.3), dont les paramètres de dimensionnement sont donnés dans le tableau 8.1. Pour ce système, nous calculons les paramètres de pilotage de sorte que les conditions d'admissibilité et d'existence de la commande, données par le théorème 8.2 soient satisfaites. De plus, le tableau 8.2 présente les configurations possibles pour le paramétrage robuste de la structure de commande. Dans cette simulation, et pour des raisons de clarté, la demande est représentée par un signal rectangulaire qui vaut  $d_{max}$  entre les instants  $t = 15$  et  $t = 45$  unités de temps, et les conditions initiales sont admissibles (voir Théorème 6.1), de sorte que  $\varphi(t) = 70$  pièces/jour et  $y(0) = 2400$  pièces.

$u(t)$ pièces/jour			$y(t)$ pièces			$d(t)$ pièces/jour	
$u_{min}$	$u_{max}$	$\theta$	$y_{min}$	$y_{max}$	$\sigma$	$d_{min}$	$d_{max}$
0	300	6 jours	0	3000	0.02 jour <sup>-1</sup>	0	240

TABLE 8.1 – Paramètres du système pour l'exemple 8.7

Figure	$z_0$	$K$	$\theta_0$	$\theta$
Figure 8.1(a)	2800	0.4468	6	6
Figure 8.1(b)	2800	$K \in [0.0271, 2.2187[$	6	$\theta \in ]\theta_0 - \Delta, \theta_0 + \Delta[, \Delta = 5.06$

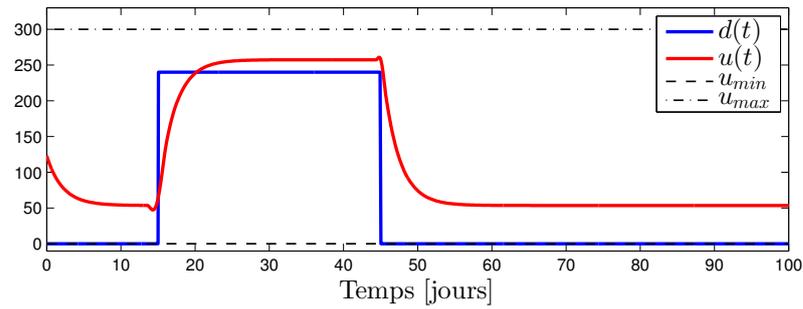
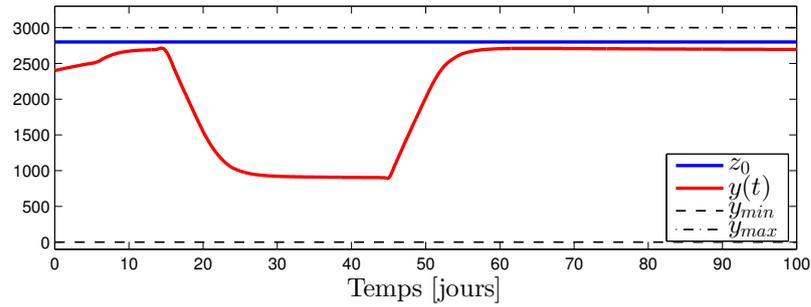
TABLE 8.2 – Paramètres de commande pour l'exemple 8.7

Dans un premier temps, en choisissant  $K = 0.4468$ , nous avons considéré que le retard est connu avec exactitude, de sorte que  $\theta = \theta_0 = 6$ . Dans un second temps, nous avons choisi de présenter les paramètres de simulation qui illustrent au mieux la mise en œuvre de la structure de commande, parmi ceux donnés dans le tableau 8.2. Ainsi, avec la même valeur du gain pour  $K = 0.4468$ , nous avons introduit une incertitude sur le retard, de sorte que le retard estimé est  $\theta_0 = 6$ , alors que le retard réel est  $\theta = 7$ . Les résultats de ces deux simulations sont donnés sur la figure (8.1), où nous avons représenté la consigne de référence  $z_0$ , la demande  $d(t)$ , l'évolution du stock  $y(t)$ , l'évolution de la commande  $u(t)$ , ainsi que les contraintes (1.5) et (1.6).

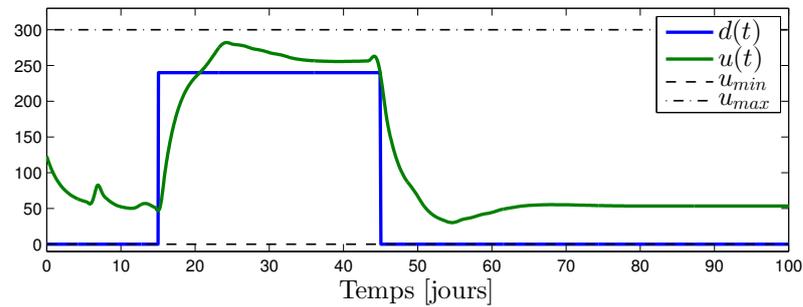
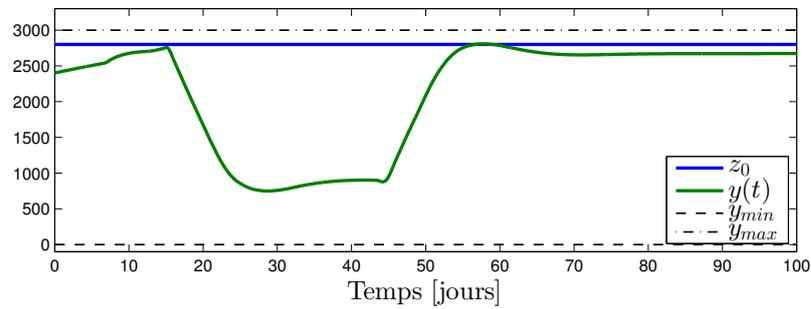
Sur la figure 8.1(a), nous pouvons constater que les réponses du système à cette entrée  $d(t)$  sont lisses, et que le niveau du stock ne présente pas de dépassement par rapport à la consigne  $z_0$ , et est toujours positif. La même remarque est faite pour la commande  $u(t)$  qui reste toujours positive et inférieure ou égale à sa valeur maximum  $u_{max}$ . Aussi, lorsque la demande est non-nulle, le signal de commande suit la variation de la demande, de façon à ce que celle-ci soit entièrement satisfaite, et que le stock ne subisse pas de pénurie. Autrement, lorsque la demande est nulle, la commande du système permet de réapprovisionner le stock pour atteindre le seuil de référence  $z_0$ . Les effets de la structure de commande feedback-prédicteur linéaire sont donc bien visibles sur cet exemple, et la compensation du retard est totale lorsque le retard est certain.

Pour les résultats de la figure 8.1(b), le retard réel présente une incertitude de sorte que  $\theta$  est différent de son estimation  $\theta_0$ . Nous constatons que les réponses du système à la même demande précédente, présentent des petites fluctuations. Celles-ci n'aboutissent jamais à des réponses négatives. En effet, les contraintes de positivité et de saturation sont aussi bien respectées sur le niveau du stock que sur la commande. Ce résultat montre la performance de la loi de commande feedback-prédicteur sous l'effet des incertitudes sur le retard.

Nous avons mené de nombreuses simulations, en considérant plusieurs configurations possibles pour le choix des paramètres donnés par le triplet  $(K, \theta, \theta_0)$ . L'avantage de l'étude de stabilité du chapitre 7, revient à fournir une spécification sur le choix de ces paramètres, de façon à garantir la BIBO-stabilité du système en boucle fermée. En effet, nous identifions l'écart maximal acceptable sur le retard par  $\Delta = 5.06$ , de sorte que  $\theta \in ]\theta_0 - 5.06, \theta_0 + 5.06[$ , et un gain statique  $K$  limité par l'intervalle  $[0.0271, 2.2187[$ , comme nous le présentons dans le tableau 8.2. Ce résultat illustre donc la robustesse de la loi de commande affine face aux incertitudes sur le retard.



(a) Sans incertitude sur le retard ( $\theta = \theta_0 = 6$ )



(b) Avec incertitude sur le retard ( $\theta = 7, \theta_0 = 6$ )

FIGURE 8.1 – Résultats de simulation pour l'exemple 8.7

## 8.8 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre une commande linéaire du type feedback-prédicteur, pour piloter le système logistique élémentaire. Dans le cadre d'un modèle incertain, les résultats obtenus sont satisfaisants, et permettent au système logistique de remplir ses objectifs qualitatifs vis-à-vis de la satisfaction de la demande des clients. De plus, nous avons obtenu des conditions suffisantes pour la paramétrisation de la commande et le dimensionnement du stock. Ces conditions garantissent les spécifications de positivité et de saturation des ressources. Pour cela, nous pouvons prononcer définitivement les qualités de robustesse de la loi de commande proposée.

Au-delà de la prise en compte des incertitudes sur le retard de production, d'autres types d'incertitudes peuvent troubler le pilotage du système logistique. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le dimensionnement du système logistique est fortement affecté par les pertes de stockage et leur variabilité. Ceci nous mène alors au chapitre suivant, où nous analysons les performances du système de pilotage, en matière d'admissibilité vis-à-vis de l'incertitude sur le facteur de perte.

# ROBUSTESSE VIS-À-VIS D'INCERTITUDE SUR LE FACTEUR DE PERTE

## Table des matières

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>199</b>
<b>9.2</b>	<b>Stratégie de commande</b>	<b>200</b>
<b>9.3</b>	<b>Propriétés de la structure de prédiction</b>	<b>201</b>
<b>9.4</b>	<b>Bornes atteignables des flux entrée-sortie</b>	<b>204</b>
<b>9.5</b>	<b>Loi de commande admissible</b>	<b>205</b>
<b>9.6</b>	<b>Exemple de simulation</b>	<b>211</b>
<b>9.7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>213</b>

## 9.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous étions intéressés à la propriété de robustesse de la stratégie de commande linéaire en ce qui concerne l'incertitude du retard d'entrée du système (1.4). De façon générale, l'étude de la robustesse revient à étudier la performance et la réactivité du système piloté vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres intrinsèques du système ou des perturbations supplémentaires. Pour cela, nous considérons dans ce chapitre, que le retard est connu avec précision, et que le taux de perte présente des fluctuations considérables. En effet, la même solution de pilotage par commande linéaire est étudiée, afin d'obtenir une réponse complète sur les propriétés de robustesse et d'admissibilité du système piloté.

Pour la structuration de cette approche, nous introduisons la stratégie de commande linéaire dans la section 9.2. Ensuite, une analyse fondamentale de la structure de prédiction dans la section 9.3, permet de quantifier l'erreur induite par l'incertitude du facteur de

perte, sur la dynamique du système. Ensuite, nous passons à calculer les bornes atteignables par les flux de l'entrée de commande et de la sortie du système, dans la section 9.4. Puis, nous déterminons les conditions d'admissibilité de la structure de pilotage proposée, par rapport au respect des contraintes de fonctionnement et la satisfaction de la demande externe, dans la section 9.5. Nous finissons par un exemple de simulation dans la section 9.6.

## 9.2 Stratégie de commande

Nous aborderons dans ce chapitre l'étude du système logistique élémentaire dont la dynamique du stock s'exprime par le modèle à retard sur l'entrée (1.4). Pour ce modèle incertain, nous supposons que le facteur de perte réel  $\sigma$  présente des incertitudes sur le niveau de stockage, et qui sont décrites sous la forme suivante :

$$\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}], \quad (9.1)$$

où  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$  sont deux valeurs positives vérifiant  $0 \leq \sigma_{min} \leq \sigma_{max} < 1$ . Le système de pilotage que nous proposons de mettre en œuvre est basé sur l'utilisation d'une commande par feedback-prédicteur de type linéaire, également à celle développée dans les chapitres 7 et 8. La structure de commande est alors définie sous la forme suivante :

$$u(t) = K(z_0 - \bar{p}(t)), \quad (9.2)$$

et

$$\bar{p}(t) = e^{-\sigma_0 t} y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \text{ pour } t \geq \theta. \quad (9.3)$$

Les paramètres de commande sont, le gain statique  $K$ , la consigne de la sortie  $z_0$ , et un facteur de perte connu  $\sigma_0$ , qui présente une estimation de la valeur exacte du facteur de perte incertain  $\sigma$ . De plus, la prédiction utilisée dans la structure de commande (9.2), est dans ce cas en fonction du facteur de perte estimé  $\sigma_0$ , de sorte que sa dynamique correspond à l'équation différentielle ci-dessous :

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\sigma_0 \bar{p}(t) + u(t) - e^{-\sigma_0 \theta} d(t) + (\sigma - \sigma_0) \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \quad (9.4)$$

En effet, la dynamique du système en boucle fermée correspond bien à un système sans retard, et donc la structure de commande par feedback-prédicteur (9.2)-(9.3) permet la

compensation totale du retard de la boucle de régulation. Pourtant, cette dynamique ne constitue par un modèle réduit, identiquement au modèle d'Artstein [Artstein (1982)], introduit dans la section 5.2.1, lorsque le système (1.4) ne présente pas d'incertitudes. Cette erreur entre les deux modèles, conduit à considérer la prédiction  $\bar{p}(t)$  comme une estimation du niveau futur de stockage, et non plus une prédiction exacte. Ainsi, le facteur  $\sigma$  étant incertain de la forme (9.1), nous pouvons quantifier l'impact de l'incertitude induite sur la performance du système piloté, en particulier en ce qui concerne la robustesse de la structure de commande. Pour commencer, nous développons une analyse de la structure de prédiction, dans la section suivante.

### 9.3 Propriétés de la structure de prédiction

À partir de la structure de commande présentée, nous proposons d'analyser la dynamique du système contrôlé, c'est-à-dire en boucle fermée. L'objectif est alors de déterminer l'erreur induite par cette incertitude (9.1), afin de pouvoir identifier exactement le comportement de la prédiction. Afin de mieux quantifier les effets de l'incertitude du retard sur la dynamique du système, nous rappelons la définition (5.1) de la variable  $z(t)$ ,

$$z(t) = e^{-\sigma\theta}y(t) + \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq \theta,$$

qui exprime en fait la prédiction exacte de la sortie  $y(t)$ , connaissant la valeur précise du retard  $\theta$  et du facteur de perte  $\sigma$ . Cette prédiction exacte présente alors les propriétés suivantes.

**Propriété 9.1.** *Les variables  $\bar{p}(t)$  et  $z(t)$  définies par (9.3) et (5.1) respectivement, vérifient les propriétés suivantes.*

- (i)  $z(t) = y(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)}d(\tau)d\tau,$
- (ii)  $z(t) = e^{-\theta(\sigma-\sigma_0)}\bar{p}(t) + \bar{e}(t),$
- (iii)  $\dot{z}(t) = Kz_0 - (\sigma + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma)})z(t) + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma)}\bar{e}(t) - e^{-\sigma\theta}d(t),$

avec

$$\bar{e}(t) = (1 - e^{-\theta(\sigma-\sigma_0)}) \int_{t-\theta}^t e^{-\sigma_0(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \quad (9.5)$$

*Démonstration.* L'assertion (i) est une propriété de base du prédicteur exact  $z(t)$  utilisée dans le chapitre 8. Ensuite, l'assertion (ii) se déduit des définitions (5.1) de  $z(t)$  et (9.3)

de  $p(t)$ . Enfin, la troisième assertion (iii) s'obtient en dérivant l'expression de  $z(t)$  donnée par la relation (5.1). Nous obtenons la réduction d'Artstein (5.4) sous la forme  $\dot{z}(t) = -\sigma z(t) + u(t) - e^{-\sigma\theta}d(t)$ , puis nous remplaçons  $u(t)$  par son expression (9.2).  $\square$

Dans l'expression (ii) de la propriété 9.1, le terme  $\bar{e}(t)$  correspond à l'erreur de prédiction induite par l'incertitude du facteur de perte  $\sigma$ , car en effet, si  $\sigma = \sigma_0$ , nous constatons que  $\bar{p}(t) = z(t)$ . Du fait de ces incertitudes, il devient difficile de définir des bornes pour les variables de flux  $y(t)$  et  $u(t)$  qui nous intéressent. Pourtant, nous allons pallier à cette complexité, en caractérisant les variations de  $z(t)$  dont l'expression paraît plus simple à manipuler. Pour ce faire, commençons par borner l'erreur de prédiction (9.5) qui apparaît dans la dynamique de  $z(t)$ .

**Lemme 9.1.** *Pour toute entrée de commande vérifiant (1.6), et un facteur de perte incertain de la forme (9.1), l'erreur de prédiction (9.5) vérifie les bornes suivantes pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\bar{e}(t) \in [\bar{e}_1, \bar{e}_2].$$

*De plus, les bornes exactes sont définies pour  $\bar{e}_1 \leq \bar{e}_2$ , par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \left(1 - e^{-\theta(\sigma_{max} - \sigma_0)}\right) \frac{1 - e^{-\sigma_0\theta}}{\sigma_0} u_{min}, \\ \bar{e}_2 &= \left(1 - e^{-\theta(\sigma_{min} - \sigma_0)}\right) \frac{1 - e^{-\sigma_0\theta}}{\sigma_0} u_{max}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

*Démonstration.* La preuve de ce lemme consiste à formuler les bornes de l'erreur  $\bar{e}(t)$  définie par l'expression (9.5), en utilisant les résultats de calcul des bornes, pour un facteur de perte  $\sigma$  vérifiant (9.1). En fait, la fonction de convolution définie par l'intégrale de  $\bar{e}(t)$ , est exprimée par la forme suivante  $\int_{t-\theta}^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \frac{1 - e^{-\sigma_0\theta}}{\sigma_0} u(t)$ . Ainsi, pour une entrée de commande vérifiant l'inclusion  $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$ , et une incertitude de la forme  $\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ , l'erreur  $\bar{e}(t)$  serait bornée, de sorte que la borne inférieure correspond exactement à  $\bar{e}_1$  et la borne supérieure est définie par  $\bar{e}_2$  avec  $\bar{e}_1 \geq \bar{e}_2$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

Ce lemme permet de borner l'erreur (9.5) qui apparaît dans l'assertion (iii) de la propriété 9.1. En observant cette équation, nous constatons que la dynamique de la prédiction exacte  $z(t)$  présente un modèle sans retard. Nous pouvons donc en utilisant les bornes déjà obtenues, identifier la variation de la prédiction exacte  $z(t)$ , comme nous le montrons dans la proposition suivante.

**Proposition 9.1.** *Étant donné le système (1.4), l'ensemble  $[z_{min}, z_{max}]$  de la prédiction (5.1), est  $\mathcal{D}$ -invariant sous l'effet d'une incertitude du facteur de perte  $\sigma$  de la forme (9.1), si ses bornes sont définies comme suit :*

$$z(t) \in [z_{min}, z_{max}], \quad (9.7)$$

avec

$$z_{min} = \frac{1}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}} (Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{min}}d_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})} \bar{e}_1), \quad (9.8)$$

$$z_{max} = \frac{1}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}} (Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{max}}d_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})} \bar{e}_2). \quad (9.9)$$

*Démonstration.* Le résultat de cette proposition est obtenu en appliquant le principe de  $\mathcal{D}$ -invariance, introduit dans la section 2.6.1, sur l'identité (iii) de la propriété 9.1. Nous constatons que la dynamique  $\dot{z}(t)$  est forcément positive, pour toute demande  $d(t)$  prenant sa valeur maximale  $d_{max}$ , si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$Kz_0 - (\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})})z(t) + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})} \bar{e}_1 \geq e^{-\theta\sigma_{min}}d_{max}.$$

De la même façon, nous remarquons que la dérivée  $\dot{z}(t)$  est forcément négative pour toute demande prenant la valeur minimale  $d_{min}$ , si :

$$Kz_0 - (\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})})z(t) + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})} \bar{e}_2 \leq e^{-\theta\sigma_{max}}d_{min}.$$

En appliquant le théorème de  $\mathcal{D}$ -invariance, nous arrivons à la conclusion que l'ensemble  $[z_{min}, z_{max}]$  est  $\mathcal{D}$ -invariant, de sorte que  $z(t)$  évolue pour tout  $t \geq 0$  dans l'ensemble défini dans l'énoncé de la proposition.  $\square$

Cette étape de l'approche va servir comme résultat fondamental pour le calcul des bornes d'entrée et de sortie du système (1.4). Identiquement au chapitre 8, la démarche consiste à calculer les bornes atteintes par les variables de flux, et puis formuler les conditions sous lesquelles ces bornes respectent les contraintes de fonctionnement du système. De plus, les bornes de l'intervalle de variation de la prédiction  $z(t)$  ainsi obtenues, dépendent des paramètres de pilotage  $K$  et  $z_0$ . Ceci va illustrer la caractéristique de robustesse de la loi de commande (9.2) proposée, et la flexibilité qu'elle offre au système logistique pour répondre positivement aux contraintes et aux spécifications de fonctionnement. En effet, en utilisant les bornes obtenues dans la proposition 9.1, nous allons

calculer les bornes générales de la variable de commande  $u(t)$  et de la variable de sortie  $y(t)$ , que nous développons dans la section suivante.

## 9.4 Bornes atteignables des flux entrée-sortie

L'objectif de l'étude de robustesse est justement de quantifier l'impact de l'incertitude sur le facteur de perte ainsi que l'erreur induite par l'estimation de ce facteur, sur les performances du système piloté, notamment en ce qui concerne le respect des contraintes de positivité et de saturation considérées. La démarche que nous mettons en œuvre pour mener cette analyse, consiste à calculer les bornes atteintes par les variables de flux  $u(t)$  et  $y(t)$ , puis de trouver les conditions sur les paramètres de contrôle  $K$  et  $z_0$ , afin que ces bornes restent dans les intervalles prescrits par les contraintes (1.5) et (1.6). Ainsi, nous formulons les bornes exactes atteintes par les deux variables des flux  $y(t)$  et  $u(t)$ , dans la proposition suivante.

**Théorème 9.1.** *Étant donné le système (1.4) avec une incertitude (9.1) sur le facteur de perte  $\sigma$ , soumis à une stratégie de commande de la forme (9.2)-(9.3) avec une perturbation  $d(t)$  vérifiant (1.7), alors les variables d'entrée et de sortie vérifient les inclusions suivantes :*

$$u(t) \in [u_1, u_2], \quad y(t) \in [y_1, y_2], \quad (9.10)$$

où les bornes exactes  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $y_1$  et  $y_2$  sont définies respectivement par les identités suivantes :

$$u_1 = \frac{K\sigma_{max}z_0 + Ke^{-\theta\sigma_0}d_{min}}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})} \left( \frac{\sigma_{max} \bar{e}_1 - Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}} \right), \quad (9.11)$$

$$u_2 = \frac{K\sigma_{min}z_0 + Ke^{-\theta\sigma_0}d_{max}}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})} \left( \frac{\sigma_{min} \bar{e}_2 - Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}} \right), \quad (9.12)$$

$$y_1 = \frac{Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{min}}d_{max}}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}} + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})} \bar{e}_1}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}} - \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}} d_{max}, \quad (9.13)$$

$$y_2 = \frac{Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{max}}d_{min}}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}} + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})} \bar{e}_2}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}} - \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}} d_{min}. \quad (9.14)$$

*Démonstration.* En se basant sur l'assertion (ii) de la propriété 9.1, nous définissons la loi de commande linéaire (7.1) en fonction de la prédiction exacte  $z(t)$  par l'expression sui-

vante  $u(t) = K (z_0 - e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma)}(z(t) - \bar{e}(t)))$ . Ensuite, les variations de  $u(t)$  sont identifiées en se basant sur les intervalles de variation de la prédiction  $z(t)$ , et de l'erreur de prédiction  $\bar{e}(t)$ . En effet, en se référant à la proposition 9.1, le lemme 9.1 et l'intervalle (7.2) décrivant l'incertitude sur le facteur de perte, nous calculons l'intervalle de variation de l'entrée de commande  $u(t)$ , par la borne inférieure  $u_1 = K (z_0 - e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}(z_{max} - \bar{e}_1))$ , et la borne supérieure  $u_2 = K (z_0 - e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}(z_{min} - \bar{e}_2))$ . De la même manière, nous définissons les bornes exactes de la variation de la sortie  $y(t)$ , en se basant sur l'identité (i) de la propriété 9.1. Étant donné les variations de  $\sigma$  et de  $d(t)$  par les intervalles (9.1) et (1.7) respectivement, l'intégrale  $\int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)} d(\tau) d\tau$  est bornée sous la forme suivante :

$$\frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}} d_{min} \leq \int_t^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-\tau)} d(\tau) d\tau \leq \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}} d_{max}.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver facilement les bornes exactes de la variation de la sortie  $y(t)$  de sorte que  $y_1 = z_{min} - \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}} d_{max}$ , et  $y_2 = z_{max} - \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}} d_{min}$ . Finalement, cette démonstration est achevée en remplaçant simplement les bornes  $z_{min}$  et  $z_{max}$  par leurs expressions définies dans la proposition 9.1.  $\square$

Cette proposition précise explicitement les bornes atteintes par les deux variables de flux  $y(t)$  et  $u(t)$ . Ces bornes étant finies, nous constatons que le système en boucle fermée (1.4)-(9.2)-(9.3) est effectivement BIBO-stable. Nous pouvons effectivement affirmer que l'application de la commande linéaire permet de maîtriser la variation des ordres de production  $u(t)$ , et le dimensionnement du niveau du stock, malgré la présence d'incertitudes des pertes de stockage. De plus, les bornes obtenues étant dépendantes des paramètres de pilotage  $K$  et  $z_0$ , il est alors possible de moduler ces paramètres, de façon à ce que l'intervalle de variation du stock corresponde aux attentes et aux spécifications de la stratégie de gestion appliquée. Nous nous intéressons donc à la propriété d'admissibilité du système de pilotage, afin de satisfaire les contraintes de positivité et de saturation (1.5) et (1.6) du système logistique, ce qui fait l'objet de la section suivante.

## 9.5 Loi de commande admissible

Dans cette section, nous nous intéressons à la conception du système de pilotage de notre système logistique. Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, il s'agit de définir les paramètres de la commande de façon à pouvoir répondre aux spécifications de gestion, formulées par les contraintes de capacité et de positivité (1.5) et (1.6). À cet

effet, nous allons d'abord formuler les résultats concernant l'admissibilité d'un contrôleur donné sous la forme (9.2)–(9.3), qui consistent en des conditions suffisantes pour garantir le respect des contraintes de positivité et de saturation. Ensuite, nous formulons les résultats de la paramétrisation, qui décrivent les conditions d'existence d'une commande linéaire satisfaisante, et comment il convient de choisir les paramètres du régulateur, c'est-à-dire la consigne du niveau du stock  $z_0$  et le gain  $K$ , de façon à ce que le système logistique réponde aux spécifications de fonctionnement prescrites.

Considérons le système logistique donné sous la forme (1.4), où le facteur de perte présente des incertitudes sous la forme (9.1). Les conditions d'admissibilité d'une commande linéaire et contrainte donnée sous la forme (9.2)–(9.3), sont formulées par la proposition suivante.

**Proposition 9.2.** *Étant donné le système de la forme (1.4), avec une incertitude sur le facteur de perte vérifiant (9.1), une commande de la forme (9.2)–(9.3) permet de garantir le respect des contraintes (1.5) et (1.6) pour toute demande  $d(t)$  vérifiant (1.7), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$u_{min} - \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})} (\sigma_{max} \bar{e}_1 - Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})} (\bar{e}_2 - \bar{e}_1))}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}} \leq \frac{K\sigma_{max}z_0 + Ke^{-\theta\sigma_0}d_{min}}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}}, \quad (9.15)$$

$$\frac{K\sigma_{min}z_0 + Ke^{-\theta\sigma_0}d_{max}}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}} \leq u_{max} - \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})} (\sigma_{min} \bar{e}_2 - Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})} (\bar{e}_1 - \bar{e}_2))}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}}, \quad (9.16)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}} d_{max} \leq \frac{Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{min}}d_{max}}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}} + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})} \bar{e}_1}{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}}, \quad (9.17)$$

$$\frac{Kz_0 - e^{-\theta\sigma_{max}}d_{min}}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}} + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})} \bar{e}_2}{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}} \leq y_{max} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}} d_{min}. \quad (9.18)$$

*Démonstration.* La preuve de cette proposition consiste à formuler les conditions, pour lesquelles les variations  $u(t)$  et  $y(t)$  vérifient dans les contraintes (1.6) et (1.5) respectivement. Pour l'entrée  $u(t)$ , il faut vérifier l'inclusion de l'intervalle  $[u_1, u_2]$ , défini dans le théorème 9.1, dans l'intervalle  $[u_{min}, u_{max}]$ . Ainsi, les conditions (9.15) et (9.16) de la proposition sont formulées. De la même manière, les conditions (9.17) et (9.18) sont dé-

finies, tout en considérant que l'intervalle  $[y_{min}, y_{max}]$  contient l'intervalle  $[y_1, y_2]$ , qui est introduit dans le théorème 9.1.  $\square$

Cette proposition donne les conditions d'admissibilité d'une commande robuste de type linéaire (9.2), pour le système logistique incertain que nous considérons. En effet, nous pouvons tester si la commande linéaire permet de répondre aux spécifications de fonctionnement du système logistique, en présence de l'incertitude sur le facteur de perte, et pour toute demande  $d(t)$  variant entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$ . C'est à dire, pour des paramètres du système et de commande donnés, les gestionnaires sont en mesure de se prononcer sur l'applicabilité ou non de ce système de pilotage, grâce à une simple vérification des inégalités données dans cette proposition. Conformément à la méthodologie de conception du système, nous allons formuler dans le théorème suivant, les conditions d'existence d'une telle commande, et comment il convient de choisir les paramètres de pilotage  $K$  et  $z_0$ , afin de respecter les spécificités de fonctionnement requises.

**Théorème 9.2.** *Étant donné le système (1.4), avec une incertitude sur le facteur de perte  $\sigma$  de la forme (7.2), il existe une commande robuste admissible de la forme (9.2)–(9.3) qui permet de garantir les contraintes (1.5) et (1.6), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$u_{min} < \sigma_{max}y_{max} + d_{min} + (e^{-\theta\sigma_{max}} - e^{-\theta\sigma_{min}})d_{min}, \quad (9.19)$$

$$\sigma_{min}y_{min} + d_{max} + (e^{-\theta\sigma_{min}} - e^{-\theta\sigma_{max}})d_{max} < u_{max}, \quad (9.20)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}}d_{max} < y_{max} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}}d_{min}. \quad (9.21)$$

Les paramètres de commande sont choisis de sorte que  $z_0$  vérifie les conditions (9.15), (9.16), (9.17) et (9.18), et que le gain statique vérifie la condition suivante :

$$K > \frac{(d_{max} - d_{min}) - (\sigma_{max}y_{max} - \sigma_{min}y_{min}) + (e^{-\theta\sigma_{min}} - e^{-\theta\sigma_{max}})(d_{min} + d_{max})}{e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}\left(y_{max} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}}d_{min}\right) - e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}\left(y_{min} + \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}}d_{max}\right)}. \quad (9.22)$$

Si de plus, la condition suivante est remplie,

$$e^{-\theta\sigma_0}\left(\frac{d_{max}}{\sigma_{min}} - \frac{d_{min}}{\sigma_{max}}\right) > \left(e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{min})}\left(\frac{u_{max}}{\sigma_{min}} - \bar{e}_2\right) - e^{-\theta(\sigma_0 - \sigma_{max})}\left(\frac{u_{min}}{\sigma_{max}} - \bar{e}_1\right)\right), \quad (9.23)$$

alors, le gain statique  $K$  doit vérifier, en plus de la condition (9.22), l'inégalité suivante :

$$K < \frac{u_{max} - u_{min}}{e^{-\theta\sigma_0}\left(\frac{d_{max}}{\sigma_{min}} - \frac{d_{min}}{\sigma_{max}}\right) - \left(e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}\left(\frac{u_{max}}{\sigma_{min}} - \bar{e}_2\right) - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}\left(\frac{u_{min}}{\sigma_{max}} - \bar{e}_1\right)\right)}. \quad (9.24)$$

*Démonstration.* Les conditions obtenues dans ce théorème proviennent des conditions suffisantes d'admissibilité de la loi de commande, données par la proposition 9.2. Cette démonstration est basée sur la procédure de Fourier-Motzkin, introduite dans la section 2.7 pour l'élimination des paramètres  $K$  et  $z_0$ . D'abord, les conditions de la proposition 9.2 sont reformulées par les inégalités suivantes :

$$\frac{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}}{K} \frac{u_{min}}{\sigma_{max}} - \frac{e^{-\theta\sigma_0}}{\sigma_{max}} d_{min} - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})} \left( \bar{e}_1 + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}}{\sigma_{max}} (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \right) \leq z_0, \quad (9.25)$$

$$z_0 \leq \frac{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}}{K} \frac{u_{max}}{\sigma_{min}} - \frac{e^{-\theta\sigma_0}}{\sigma_{min}} d_{max} - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})} \left( \bar{e}_2 + \frac{Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}}{\sigma_{min}} (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \right), \quad (9.26)$$

$$\frac{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}}{K} y_{min} + \left( \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{max}}}{\sigma_{min}} \frac{\sigma_{min} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}}{K} + \frac{e^{-\theta\sigma_{min}}}{K} \right) d_{max} - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})} \bar{e}_1 \leq z_0, \quad (9.27)$$

$$z_0 \leq \frac{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}}{K} y_{max} + \left( \frac{1 - e^{-\theta\sigma_{min}}}{\sigma_{max}} \frac{\sigma_{max} + Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}}{K} + \frac{e^{-\theta\sigma_{max}}}{K} \right) d_{min} - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})} \bar{e}_2. \quad (9.28)$$

Ensuite, nous appliquons le principe d'élimination de Fourier-Motzkin, afin d'obtenir un ensemble équivalent d'inégalités qui sont indépendantes de  $z_0$ . En effet, connaissant que  $K > 0$  et  $\sigma > 0$ , la condition (9.19) est alors déduite des inégalités (9.25) et (9.28) sous l'hypothèse suivante,

$$Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}(\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \geq 0. \quad (9.29)$$

Également, la condition (9.20) est dérivée des inégalités (9.26) et (9.27) en utilisant l'hypothèse suivante :

$$Ke^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}(\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \geq 0. \quad (9.30)$$

De la même manière, la condition (9.21) est obtenue à partir des inégalités (9.27) et (9.28),

en utilisant les hypothèses suivantes :

$$\frac{e^{-\theta\sigma_{min}}}{K}d_{max} - \frac{e^{-\theta\sigma_{max}}}{K}d_{min} \geq 0, \quad (9.31)$$

et

$$e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}\bar{e}_2 - e^{-\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}\bar{e}_1 \geq 0. \quad (9.32)$$

Ensuite, nous passons à la procédure d'élimination du gain statique  $K$ . En effet, la condition (9.22) qui définit la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de  $K$ , est déduite des inégalités (9.27) et (9.28) en utilisant l'hypothèse (9.32). Tandis que la condition (9.24) s'ajoute à cette dernière si la condition (9.23) est satisfaite. Ainsi, la borne maximale du choix de  $K$ , est obtenue en utilisant les inégalités (9.25), (9.26) et l'hypothèse ci-dessous :

$$K^2(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\left(\frac{e^{-2\theta(\sigma_0-\sigma_{min})}}{\sigma_{min}} + \frac{e^{-2\theta(\sigma_0-\sigma_{max})}}{\sigma_{max}}\right) \geq 0. \quad (9.33)$$

Enfin, les hypothèses (9.29), (9.30), (9.31), (9.32) et (9.33), utilisées dans la démonstration sont toutes satisfaites, ce qui permet d'obtenir les conditions (9.19), (9.20) et (9.21) à inégalités strictes simplifiées.  $\square$

Les résultats de ce théorème définissent les conditions sous lesquelles, il existe un système de pilotage sous forme d'une commande linéaire (9.2) par feedback-prédicteur (9.3). Celle-ci permet au système en boucle fermée de répondre aux spécifications de régulation données, malgré la présence d'incertitudes sur le paramètre  $\sigma$ . Les conditions (9.19), (9.20) et (9.21) sont intrinsèquement liées au dimensionnement des ressources de production et de stockage. Ils montrent que pour éviter toute rupture, il suffit de dimensionner le niveau de stockage tout en prenant en considération les marges d'incertitude, et de prévoir une capacité de production qui puisse répondre à la demande cumulée durant le délai  $\theta$ . Ensuite, les conditions (9.22) et (9.24) décrivent comment il convient de choisir le paramètre de pilotage  $K$ , afin de garantir les spécifications de fonctionnement requises. En résumé, ces résultats présentent une solution de pilotage du système logistique, par une stratégie de commande linéaire, qui est à la fois admissible vis-à-vis des contraintes et des spécifications de fonctionnement, et robuste vis-à-vis des incertitudes des pertes de stockage.

Arrivé à la fin de cette étude, plusieurs observations nécessitent d'être discutées. Nous avons proposé une structure de pilotage du système logistique élémentaire, sous la forme d'une commande par feedback-prédicteur de type linéaire. Pour le modèle certain, la stra-

tégie de pilotage (6.1)-(5.1) est développée dans le chapitre 6, et les résultats obtenus sont présentés dans le théorème 6.3. Tandis que pour un modèle incertain, deux incertitudes sur les paramètres intrinsèques ont été prises en compte séparément, lors de la conception du système de pilotage. Dans le chapitre 8, la structure de commande linéaire (7.1)-(7.3) s'est basée sur une estimation du retard incertain, et les résultats sont formulés dans le théorème 8.2. Alors que dans le chapitre courant, les résultats obtenus dans le théorème 9.2, présentent les conditions de pilotage par la structure de commande linéaire (9.2)-(9.3), qui est basée sur une estimation du facteur de perte incertain. À ce niveau, deux remarques sont énoncées dans la suite.

**Remarque 9.1.** *Les résultats du théorème 9.2 rejoignent ceux obtenus dans le théorème 8.2 en appliquant une loi de commande contrainte linéaire. Ils donnent les conditions sous lesquelles la commande permet de répondre aux attentes du pilotage du système logistique vis-à-vis de l'incertitude sur les paramètres intrinsèques du système (1.4). La différence majeure lors de l'applicabilité de cette loi de commande réside dans le type d'incertitude auquel le système logistique est soumis, que ce soit l'incertitude sur le retard ou bien sur le facteur de perte. Il apparaît clairement dans les énoncés des deux formulations (théorèmes 9.2 et 8.2), que les conditions ressemblent et sont complémentaires, dans le cas où le système logistique est soumis aux deux incertitudes simultanément. Ainsi, les résultats se superposent de sorte que les conditions d'admissibilité obtenues sont les suivantes :*

$$u_{min} < \sigma_{max}y_{max} + d_{min} + (e^{-\theta_{max}\sigma_{max}} - e^{-\theta_{min}\sigma_{min}})d_{min}, \quad (9.34)$$

$$\sigma_{min}y_{min} + d_{max} + (e^{-\theta_{min}\sigma_{min}} - e^{-\theta_{max}\sigma_{max}})d_{max} < u_{max}, \quad (9.35)$$

$$y_{min} + \frac{1 - e^{-\theta_{max}\sigma_{max}}}{\sigma_{min}}d_{max} < y_{max} + \frac{1 - e^{-\theta_{min}\sigma_{min}}}{\sigma_{max}}d_{min}. \quad (9.36)$$

*Cette observation est très importante, et donne une forte indication sur la robustesse et la viabilité de la stratégie de gestion proposée, lorsque le facteur de perte et le retard sont soumis à des incertitudes du type  $\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$  et  $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ , respectivement.*

**Remarque 9.2.** *Une deuxième remarque est constatée dans le cas où l'incertitude sur le facteur de perte est négligée. Ainsi, l'intervalle (9.1) n'existe plus, et donc  $\sigma = \sigma_{min} = \sigma_{max}$ . De plus, la prédiction  $\bar{p}(t)$  définie par l'expression (9.3) est égale à la prédiction exacte du niveau futur de stockage (5.1), soit  $\bar{p}(t) = z(t)$  et  $\sigma_0 = \sigma$ . Aussi, l'erreur de*

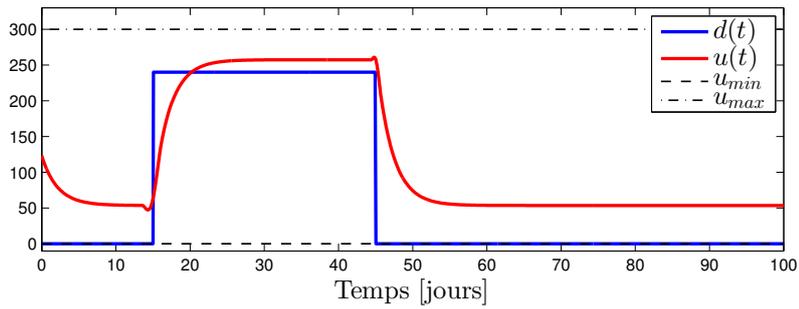
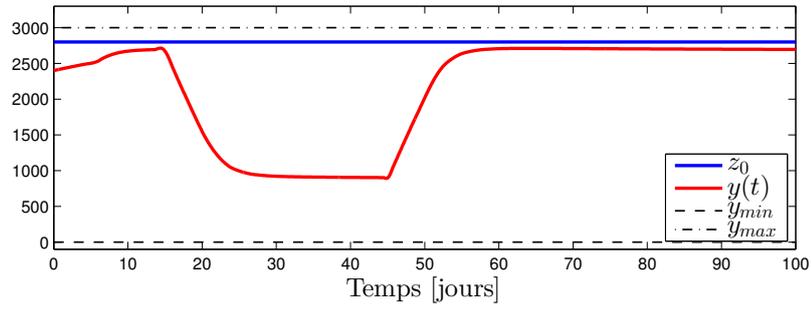
prédiction  $\bar{e}(t)$  s'annule de sorte que  $\bar{e}_1 = \bar{e}_2 = 0$ . En effet, les formulations (6.1) et (9.2) définissent la même loi de commande linéaire  $u(t) = K(z_0 - z(t))$ . Dans ce cas, une comparaison est observée entre les résultats (Théorème 6.3) du modèle certain, et le ceux du modèle soumis à une incertitude sur le facteur de perte (Théorème 9.2).

- D'abord, nous constatons que les hypothèses (9.29) et (9.30), utilisées pour obtenir les conditions (9.19) et (9.20) s'annulent dans le cas d'un facteur de perte exact. Nous déduisons donc que les conditions (9.19) et (9.20) seront identiques aux conditions (6.17) et (6.18) du théorème 6.3.
- Ensuite, seulement l'hypothèse (9.32) utilisée pour l'identification de la condition (9.21), s'annule lorsque le facteur de perte est exact. Tandis que l'hypothèse (9.31) devient égale à  $\frac{e^{-\sigma\theta}}{K}(d_{max} - d_{min}) > 0$ . Par conséquent, l'inégalité stricte de la condition (9.21) est toujours conservée, ce qui implique que la condition (9.21) est réduite à la condition (6.19) du théorème 6.3.
- Enfin, vue que l'hypothèse (9.32) et (9.33) s'annulent pour un paramètre  $\sigma$  exact, alors les inégalités (9.22) et (9.24) ne sont plus de inégalités strictes. Ainsi, les conditions qui décrivent le choix des paramètres de commande  $K$  et  $z_0$ , seront égales aux conditions obtenues dans le théorème 6.3 du chapitre 6.

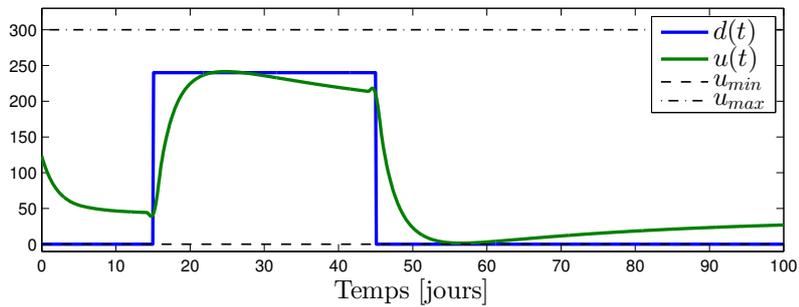
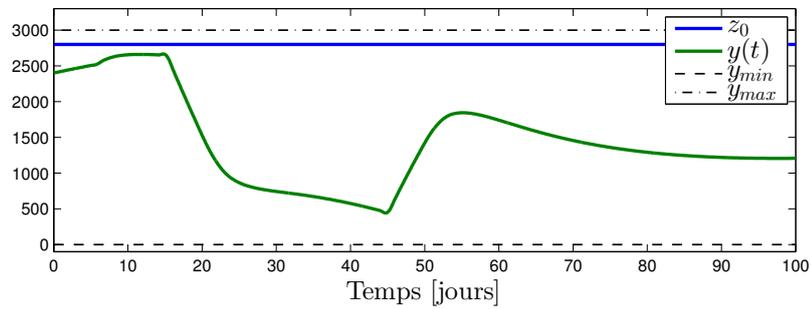
À la fin de cette discussion, nous pouvons conclure que pour un facteur de perte  $\sigma$  connu exactement, les conditions suffisantes du théorème 9.2 se coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes du théorème 6.3. Ceci présente un indicateur que les résultats du théorème 9.2 ne sont pas très conservatives.

## 9.6 Exemple de simulation

Dans cette simulation, nous affichons le comportement du système logistique élémentaire (1.4) face à la présence des fluctuations sur les pertes de stockage. Pour ce faire, nous appliquons la stratégie de commande linéaire par feedback-prédicteur (9.2)-(9.3), que nous avons étudiée dans ce chapitre. Nous considérons le même dimensionnement de l'exemple de simulation 8.7 du chapitre 8. En effet, les paramètres du système sont donnés dans le tableau 8.1, et les conditions initiales admissibles (voir Théorème 6.1) sont  $\varphi(t) = 70$  pièces/jour et  $y(0) = 2400$  pièces. De plus, la loi de commande linéaire de la forme (9.2) est paramétrée par un gain statique  $K = 0.4468$  et une consigne  $z_0 = 2800$  pièces, identiquement à l'exemple 8.7. Les résultats sont illustrés dans la figure 9.1, avec la même demande rectangulaire de la simulation 8.7.



(a) Sans incertitude sur le taux de perte ( $\sigma = \sigma_0 = 0.02$ )



(b) Avec incertitude sur le taux de perte ( $\sigma = 0.03, \sigma_0 = 0.02$ )

FIGURE 9.1 – Résultats de simulation pour l'exemple 9.6

Nous avons trouvé les réponses d'entrée et de sortie du modèle exact dans la figure 9.1(a), pour un taux de perte fixé à  $\sigma = 0.02$ . Puis dans la figure 9.1(b), nous avons introduit une incertitude de sorte que le facteur de perte réel est égal à  $\sigma = 0.03$ , alors que nous l'avons estimé par une valeur qui vaut  $\sigma_0 = 0.02$ .

Comme nous l'avons constaté sur l'exemple 8.7 pour le modèle exact, les réponses temporelles de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie du système  $y(t)$  sont lisses, et remplissent les contraintes de positivité et de saturation. Ce qui prouve l'admissibilité de la structure de commande, en ce qui concerne le respect des spécifications sur les ressources et des capacités de dimensionnement d'une part, et la satisfaction de la demande externe d'autre part. Ainsi, cette politique s'apparente à une stratégie de production sur stock et sur demande. Les effets de la structure de commande par feedback-prédicteur sont donc bien visibles sur cet exemple, lorsque le facteur de perte est certain.

Sur la deuxième figure 9.1(b), où nous avons utilisé une estimation du taux de perte qui n'est pas exact, nous constatons des changements considérables sur les réponses du système, pour répondre à la même demande précédente. Le signal de commande présente un temps de réaction plus important. Ce résultat montre la sensibilité de la loi de commande par feedback-prédicteur aux incertitudes de modélisation du facteur de perte, comme nous l'avons introduit dans les sections 9.2 et 9.3. En effet, il devient clair en comparant l'évolution du niveau de stockage dans le cas certain avec le cas incertain, que l'erreur de prédiction du niveau futur de stockage conduit à des variations importantes sur le niveau de stockage. Dans le cas d'une demande nulle, une incertitude de l'ordre de 1% sur le taux de perte  $\sigma$ , conduit à un abaissement du niveau de stockage jusqu'à la moitié du dimensionnement. Malgré tout, la commande du système permet toujours de réapprovisionner le stock, sans présenter un sur-stockage ou une rupture de stock. Ce résultat montre la performance de la loi de commande feedback-prédicteur, au niveau du respect des contraintes de positivité et de saturation.

## 9.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude des performances de la loi de commande linéaire que nous avons proposée, sous l'effet d'incertitudes sur les pertes de stockage. Nous avons introduit la structure de prédiction en se basant sur une estimation du facteur de perte, pour laquelle nous avons étudié la dynamique de variation. Ensuite, une analyse du flux de la commande suite à la variation de la demande, et du flux de la

sortie suite aux fluctuations du taux de perte, permet de maîtriser le dimensionnement des ressources et de garantir le respect des contraintes de fonctionnement. Les conditions ainsi obtenues ont complété les résultats que nous avons obtenus dans les chapitres précédents, concernant la paramétrisation et la conception du contrôleur. En conclusion, nous pouvons affirmer le comportement robuste et réactif de la solution de pilotage du système logistique élémentaire, considéré comme un système dynamique contraint sous incertitudes.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Dans ce mémoire de thèse, nous avons traité la problématique de pilotage des systèmes logistiques en présence des retards et des pertes de stockage, par une approche analytique issue de la théorie de contrôle des systèmes dynamiques. Ces systèmes sont soumis à des contraintes induites par la positivité des processus physiques, et la saturation liée essentiellement aux caractéristiques et capacités des ressources. Nous avons introduit dans le chapitre 1, le modèle basique de chaque nœud du système logistique, qui constitue un système monovarié à retard sur l'entrée. Nous avons ensuite généralisé le modèle pour résumer la dynamique des systèmes logistiques en configuration réseau, caractérisés par l'échange entre les différents nœuds. Ces systèmes doivent répondre à des demandes clients que nous avons supposées inconnues et bornées. L'objectif du pilotage est de réguler les systèmes logistiques monovariés et multivariés afin de les stabiliser vis-à-vis des retards, et de respecter les contraintes de positivité et de saturation imposées.

Pour résoudre le problème de commande contrainte des systèmes logistiques ainsi formulés, nous avons d'abord introduit dans le chapitre 2, les concepts fondamentaux concernant la commande des systèmes à retards contraints. Ces résultats concernent notamment, le principe de prédiction qui permet de ramener l'étude à celle d'un système sans retard, et les techniques d'invariance des ensembles convexes polyédrales, qui permettent de vérifier le respect des contraintes et des spécifications prescrites par le système.

La contribution notable de la première partie II, est liée à la commande par invariance d'une classe de systèmes Entrée-Sortie pour le système multivarié soumis à des contraintes polyédrales. La méthode de vérification des contraintes que nous proposons, fournit une nouvelle caractérisation explicite de la propriété de  $\mathcal{D}$ -invariance contrôlée des ensembles convexes pour les systèmes contraints à temps continu. Cette méthode, basée sur la représentation double des ensembles polyédrales convexes, permet d'identifier les bornes atteignables de l'évolution instantanée de toutes les sorties du système. Le second axe de cette contribution, remonte à l'application de l'étude théorique sur un exemple de chaîne logistique en configuration série. Les résultats obtenus nous ont permis de décrire des conditions améliorées d'invariance polyédrale, dans le cas où les retards sont identiques et les facteurs de pertes sont égaux sur tous les nœuds. En revanche, la complexité algorith-

mique et ensembliste du système en réseau peut être réduite dans différents cas simplifiés, tels que le système logistique élémentaire, sur lequel reposent les approches développées dans les parties III et IV.

Notre méthodologie de travail adoptée dans la partie III est basée sur l'approche préconisée par Karcanias, pour considérer les conditions d'existence de contrôleurs et de conception des systèmes contrôlés. Nos conditions de dimensionnement permettent de prendre en compte un aspect dynamique en présence d'une demande variable, de retards et des pertes de stockage. En effet, nous avons considéré deux types de lois de commande pour le pilotage du système logistique élémentaire, une commande bang-bang et une commande linéaire, basées toutes les deux sur l'utilisation d'une structure de type feedback-prédicteur. À travers les méthodes d'invariance ou le calcul des bornes atteignables par la sortie du système, nous avons montré l'efficacité de ces structures de commande en termes de satisfaction de la demande en temps réel. De plus, les conditions d'existence de telles commandes que nous avons obtenues, sont nécessaires et suffisantes, ce qui permet de réguler le niveau du stock, en évitant tout risque de sur-stockage ou de pénurie, ou de congestion des ressources.

Quant à la partie IV, la contribution porte sur l'étude de la robustesse du système de pilotage en présence d'incertitudes sur le retard et le taux de perte du système logistique élémentaire. La loi de commande proposée est linéaire de type feedback-prédicteur, basée sur une estimation de l'incertitude intrinsèque. Nous avons obtenu des conditions de description des marges de robustesse, et de paramétrisation du système de pilotage, afin de garantir le comportement robuste de la commande vis-à-vis de ces incertitudes. Ces résultats ont été complétés par une étude qui permet au système piloté, de répondre positivement à toutes les contraintes de fonctionnement et les spécifications de la demande, malgré la présence d'incertitudes sur le retard et le facteur de perte. La particularité réside dans le fait que les conditions obtenues coïncident avec celles qui ont été obtenues dans la partie III, dans le cas où les paramètres intrinsèques sont connus avec exactitude.

L'originalité de ce travail de thèse réside dans la prise en compte conjointe des retards exacts, des facteurs de pertes de stockage, des contraintes de positivité et de saturation, dans l'étude des systèmes logistiques élémentaires et en configuration réseau. Ceci ouvre la voie vers de nouvelles pistes de recherche, qui peuvent être considérées comme de grandes problématiques à élaborer et développer dans des travaux futurs.

- Une première piste de recherche est d'approfondir les études obtenues pour les systèmes logistiques complexes, en configuration réseau. Dans ce contexte, il se-

rait important de considérer d'autres structures de commande, et d'analyser leur performances en termes de robustesse.

- Pour le pilotage des réseaux logistiques, nous n'avons pas distingué entre les produits des différents nœuds de stockage. Il serait intéressant de considérer différentes références de produits, ce qui nécessite la mise en place de lois de gestion spécifiques pour chaque référence. Les différentes références se retrouvent en concurrence pour l'utilisation des ressources de production et de stockage.
- Pour le système logistique élémentaire, il serait intéressant également de tester d'autres types de lois de commande, et de comparer leur efficacité à celle des lois de commande que nous avons proposées. Nous pouvons penser à des lois de commande hybrides, et d'autres basées sur la mesure de la demande.
- Dans la continuité de cette dernière perspective, une autre direction serait de considérer une demande estimée, en exploitant des méthodes de prévision de ventes existantes.
- D'autres causes de perturbations et erreurs de mesure sont souvent envisagées en gestion des stocks, précisément avec des produits de nature périssable. Dans notre étude, nous avons modélisé les pertes de stockage avec un taux de perte fixe. Il serait intéressant de considérer des contraintes temporelles en plus des contraintes de positivité et de saturation, qui résument les durées de validité des produits.
- En outre, nous avons considéré que le retard présent dans la dynamique du système est constant, et pouvait présenter des incertitudes. Une extension très intéressante de nos travaux serait d'étendre notre approche pour le cas des systèmes logistiques à retards variables. Les retards variables tiennent en effet une grande importance en logistique, notamment dans les processus de distribution et de communication.
- Finalement, sur le plan formel, il faut bien noter que la notion d'invariance n'est bien définie dans la littérature que pour les systèmes autonomes. Nos travaux peuvent s'interpréter en termes de  $\mathcal{D}$ -invariance des ensembles convexes de sortie, ce qui laisse à penser qu'ils pourraient se prolonger avec une définition de l'invariance, de l'invariance contrôlée ou de la  $\mathcal{D}$ -invariance, pour des systèmes à mémoire et d'autres plus généraux.



## A.1 Espaces normés des systèmes

**Définition A.1.** (*Espace normé*)

Un espace normé  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_E)$  sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est un espace vectoriel  $\mathbf{E}$  muni d'une application  $x \mapsto \|x\|$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , dite **norme**, qui vérifie les axiomes suivants :

$$(i) \quad \forall x \in \mathbf{E}, \text{ et } x \neq 0, \quad \|x\|_E \geq 0;$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbf{E}, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E;$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in \mathbf{E}, \quad \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E.$$

Pour tout espace vectoriel  $\mathbf{E}$ , il est possible de définir plusieurs normes. En règle générale, ces normes sont d'ordre  $p$  tel que  $1 \leq p \leq \infty$ , comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple A.1.** Soit  $\mathbf{E} = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ est intégrable au sens de Lebesgue}\}$ , nous définissons les normes suivantes.

$$1. \quad \|f\|_1 := \int |f(t)| dt;$$

$$2. \quad \|f\|_p := \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \text{ pour } 1 \leq p < \infty;$$

$$3. \quad \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu[\{t \mid |f(t)| < a\}] = 0\}, \text{ où } \mu[\cdot] \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$

Les sous-espaces normés correspondants à ces trois normes sont appelés  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_p$  et  $\mathcal{L}_\infty$ .

**Définition A.2.** (*Algèbre de Banach*)

Soit  $\mathbf{B}$  une algèbre équipée d'une norme  $\|\cdot\|$ . On dit que  $\mathbf{B}$  est une algèbre de Banach si les conditions suivantes sont satisfaites.

(i)  $\mathbf{B}$  est une espace vectoriel normé ;

(ii) Pour tout  $x, y \in \mathbf{B}$ , on a  $\|x.y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  ;

(iii) Il existe un élément  $e$  de  $\mathbf{B}$ , tel que pour tout  $x \in \mathbf{B}$ , on a  $x.e = e.x = x$ .

Si de plus, tout  $x, y \in \mathbf{B}$  vérifiant  $x.y = y.x$ , alors l'espace  $\mathbf{B}$  est commutative.

## A.2 Preuve du théorème 2.1 de BIBO-stabilité

Soit  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$  respectivement l'espace d'entrée et l'espace de sortie du système Entrée-Sortie. Nous définissons un opérateur linéaire  $\mathcal{H}$  pour la relation de convolution de la forme (2.4), de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{Y}, \\ u &\rightarrow y = \mathcal{H}u := h * u. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons la relation suivante :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} |(h * u)(t)| = \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau \right|.$$

L'inégalité ci contre,

$$\left| \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |h(t - \tau)| \cdot |u(\tau)| d\tau, \quad (\text{A.37})$$

étant toujours vérifiée, nous constatons que la condition suivante :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t |h(t - \tau)| \cdot |u(\tau)| d\tau.$$

L'entrée  $u(t)$  appartenant à l'espace  $\mathcal{L}_\infty$ , vérifie de ce fait  $u(t) \leq \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}$  pour tout instant  $t \geq 0$ . Ainsi, nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \sup_{t \geq 0} \left[ \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \cdot \int_0^t |h(\tau)| d\tau \right],$$

qui reste valable quant  $t$  tend vers l'infini, ce qui correspond à la formulation ci-dessous :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \cdot \|h\|_{\mathcal{L}_1}.$$

À ce niveau, nous allons démontrer que le membre de droite est effectivement la borne supérieure atteinte. En effet, considérons une suite d'entrées  $u_t(\tau)$  vérifiant :

$$u_t(\tau) = \mu \cdot \text{sign}(h(t - \tau)), \text{ pour } 0 \leq \tau \leq t,$$

avec  $\mu \geq 0$  et  $u_t(\tau) = 0$  pour  $\tau \geq t$ . Notons que la norme de  $u_t$  vaut dans ce cas  $\|u_t\|_{\mathcal{L}_\infty} = \mu$ . La sortie du système (2.4) correspondant à cette entrée  $u_t$  est donnée par la suite de sorties :

$$y_t(t) = \mu \int_0^t h(t - \tau) \cdot \text{sign}(h(t - \tau)) d\tau = \mu \int_0^t |h(t - \tau)| d\tau.$$

Nous pouvons conclure que, quand  $t$  tend vers l'infini,  $y_t(t)$  tend vers la quantité  $\|u_t\|_{\mathcal{L}_\infty} \cdot \|h(t)\|_{\mathcal{A}}$ , ce qui vérifie l'égalité suivante :

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}} = \|h\|_{\mathcal{A}}.$$

Finalement, nous formulons les résultats suivants :

$$\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|h\|_{\mathcal{A}},$$

et

$$\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty \Leftrightarrow \|h\|_{\mathcal{A}} < \infty,$$

ce qui achève notre démonstration.

### A.3 Preuve du corollaire 2.1 de BIBO-stabilité

La preuve du corollaire est similaire à celle du théorème 2.1, en considérant la norme d'une fonction vectorielle  $v$  sur  $\mathcal{L}_\infty^n$ , définie par  $\|v\|_{\mathcal{L}_\infty^n} = \max_{i=1}^n \sup_{t \geq 0} |v_i(t)|$ . Nous cherchons alors à démontrer la condition suivante :

$$\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}_\infty^n} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty^n}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty^n}} < \infty.$$

Par définition, nous avons l'identité ci-contre :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty^n} = \max_{i=1}^n \sup_{t \geq 0} (|y_i(t)|) = \max_{i=1}^n \sup_{t \geq 0} \left( \left| \int_0^t \sum_{j=1}^m h_{ij}(t-\tau) \cdot u_j(\tau) d\tau \right| \right).$$

En utilisant l'argument donné par la condition (A.37), nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty^n} \leq \max_{i=1}^n \sup_{t \geq 0} \left( \sum_{j=1}^m \int_0^t |h_{ij}(t-\tau)| d\tau \right) \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_\infty^n},$$

qui reste valable quand  $t$  tend vers l'infini, de sorte que :

$$\|\mathcal{H}u\|_{\mathcal{L}_\infty^n} \leq \max_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \|h_{ij}\|_{\mathcal{A}} \right) \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_\infty^n}.$$

Considérons maintenant une série d'entrée du système  $u_t(\tau)$  vérifiant :

$$u_{i_t}(\tau) = \text{sign}(h(t-\tau)), \text{ pour } 0 \leq \tau \leq t,$$

avec  $u_t(\tau) = 0$  pour  $\tau \geq t$ . Notons que la norme de  $u_t$  vaut dans ce cas  $\|u_t\|_{\mathcal{L}_\infty^n} = 1$ . La sortie du système (2.5) correspondante à cette entrée  $u_t$ , est caractérisée par la suite de sorties :

$$y_{i_t}(\tau) = \sum_{j=1}^m \int_0^t |h_{ij}(t-\tau)| d\tau,$$

qui reste valable quand  $t$  tend vers l'infini. Considérons ensuite l'indice  $q$  sous la forme suivante :

$$q = \arg \max_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m \|h_{ij}\|_{\mathcal{A}} \right\},$$

et une entrée du système  $u^*(t)$ , telle que  $u_i^*(t) = 0$  pour  $i \neq q$  et  $u_q^*(t) = \delta(t)$ . Ainsi, la sortie correspondante à cette entrée est donnée sous la forme ci-dessous :

$$y^*(t) = (h_{1_q}(t), h_{2_q}(t), \dots, h_{n_q}(t))^T.$$

En effet, nous remarquons l'identité suivante :

$$\|y\|_{\mathcal{L}_\infty^n} = \max_{i=1}^n \sup_{t \geq 0} \int_0^t |h_{ij}(\tau)| d\tau,$$

qui complète la démonstration.

## A.4 Preuve du théorème 2.9 de Fourier-Motzkin

La procédure d'élimination de la variable  $x_x$  commence par un réarrangement du système de la forme (2.29), selon la valeur de chaque coefficient  $a_{ik}$ . Pour des entiers naturels  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$ , nous supposons que les coefficients  $a_{ik}$  sont strictement positifs, soit  $a_{ik} > 0$  pour  $1 \leq i \leq p$ , et qu'ils sont strictement négatifs,  $a_{ik} < 0$  pour  $p < i \leq q$ , et enfin ces coefficients sont nuls, soit  $a_{ik} = 0$ , pour  $q < i \leq m$  avec  $p \leq q \leq m$ . Cette réorganisation entraîne les trois séries d'inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_k & \leq \frac{b_i}{a_{ik}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{ik}} x_j \quad , \text{ pour } 1 \leq i \leq p, \\ \frac{b_i}{a_{ik}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{ik}} x_j & \leq x_k \quad , \text{ pour } p < i \leq q, \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j & \leq b_i \quad , \text{ pour } q < i \leq m. \end{array} \right. \quad (\text{A.38})$$

Le premier paquet d'inégalités dans le système (A.38) définit les bornes supérieures de la variable  $x_k$ . Alors que le deuxième paquet, c'est-à-dire les  $q - p$  inégalités suivantes correspond aux bornes inférieures délimitant la variable  $x_k$ . Ainsi, la variable  $x_k$  est éliminée en remplaçant toutes les inégalités pour  $1 \leq i \leq q$ , par les inégalités pour lesquelles chaque borne inférieure de  $x_k$  est plus petite ou égale à chaque borne supérieure de cette variable. Cela aboutit aux inégalités équivalentes de taille  $p \cdot (q - p)$  ci-contre, où  $1 \leq i \leq p$  et  $p < i' \leq q$  :

$$\frac{b_{i'}}{a_{i'k}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{i'j}}{a_{i'k}} x_j \leq \frac{b_i}{a_{ik}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{ik}} x_j. \quad (\text{A.39})$$

De plus, pour des coefficients nuls de  $a_{ik}$ , la variable  $x_k$  est éliminée directement du dernier paquet d'inégalités de dimension  $m - q$ . Par conséquent, les inégalités de la forme (A.39) ainsi que le dernier paquet d'inégalités du système (A.38), définissent un nouveau système équivalent sous la forme (2.30), pour lequel les inégalités linéaires sont de taille  $(m - q) + p(q - p)$ , et les variables sont réduites et ne dépendent plus de  $x_k$ .

D'ailleurs, nous pouvons remarquer que les inégalités exprimées par le système (2.29) définissent un polyèdre  $\mathcal{A}_b = \text{Pol}(A, b)$  dans l'espace  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  avec  $j = 1, \dots, n$ .

Tandis que ceux donnés par le système (2.30) correspondent à un polyèdre  $\mathcal{F} = \text{Pol}(F, g)$ , défini dans l'espace  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n-1})$  parallèle à l'axe  $x_k$ , avec  $j = 1, \dots, n-1$  et  $j \neq k$ . Nous pouvons en déduire que le polyèdre  $\mathcal{F}$  est dérivé du polyèdre  $\mathcal{A}_b$ , par une transformation positive définie par la matrice  $H \geq 0$  contenant uniquement les coefficients positifs 1, 0,  $\frac{1}{a_{ik}}$  et  $\frac{-1}{a_{i'k}}$ , de sorte que  $F = H.A$  et  $g = H.b$ . Il résulte en fait, que la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin correspond géométriquement à une projection polyédrale de l'ensemble défini par le système (2.29), parallèlement à l'axe  $x_k$ . Dans le cas où  $(m-q) + p(q-p) = 0$ , la projection du polyèdre est égale à l'ensemble  $\mathbb{R}^{n-1}$ , ce qui achève la démonstration.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- Abbou, R., Moussaoui, C., et Loiseau J.J. (2015). Effects of inventory control on bullwhip in logistic systems under demand and lead time uncertainties. *15<sup>th</sup> IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, 48(3), 266–271. [42](#), [117](#)
- Abbou, R., Moussaoui, C., et Loiseau J.J. (2015). On stability of uncertain time-delay systems: robustness margin for the inventory control. *12<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 48(12), 310–315. [42](#), [117](#)
- Abbou, R., Loiseau, J.J., Khaldi, H., et Bou Farraa, B. (2017). On inventory control for perishable inventory systems subject to uncertainties on customer demands. *20<sup>th</sup> World Congress of the IFAC Mondial* 50(1), 10172–10177. [23](#), [40](#), [117](#)
- Aissaoui, N., Haouari, M., et Hassini, E. (2007). Supplier selection and order lot sizing modeling: a review. *Computers and Operations Research*, 34(12), 3516–3540. [45](#)
- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: a reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4), 869–879. [59](#), [82](#), [100](#), [117](#), [183](#), [201](#)
- Baron, O. (2010). Managing perishable inventory. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*. [40](#)
- Basile, G., et Marro, G. (1992). Controlled and conditioned invariants in linear system theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. [66](#)
- Beamon, B.M. (1998). Supply chain design and analysis: models and methods. *International Journal of Production Economics*, 55(3), 281–294. [36](#)
- Benvenuti, L., et Lorenzo, F. (1998). Invariance and feedback control with state and input constraints. In *Theory and Practice of Control and Systems*, 295–300. [66](#)
- Blanchini, F. (1990). Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(11), 1231–1234. [46](#), [66](#), [70](#), [78](#)

- Blanchini, F., et Miani, S. (2008). *Set-Theoretic Methods in Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Springer. [68](#), [171](#)
- Blanchini, F., Franco, E., et Giordano, G. (2014). Network-decentralized control strategies for stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2), 491–496. [46](#)
- Blanchini, F., Miani, S., Dorea, C.E.T., et Hennet, J.C., (1999). Discussion on  $(A, B)$ -invariance conditions of polyhedral domains for continuous-time systems by C.E.T. Dorea and J.C. Hennet. *European Journal of Control*, 5(1), 82–86. [24](#), [66](#), [70](#), [71](#), [80](#), [86](#), [86](#), [88](#)
- Blanchini F., Miani, S., et Ukovich, W. (2000). Control of production–distribution systems with unknown inputs and system failures. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(6), 1072–1081. [44](#)
- Blanchini, F., Miani, S., Pesenti, R., et Rinaldi, F. (2003). Stabilization of multi-inventory systems with uncertain demand and setups. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1), 103–116. [44](#)
- Blanchini, F., Pesenti, R., Rinaldi, F., et Ukovich, U. (2000). Feedback control of production–distribution systems with unknown demand and delays. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(3), 313–317. [44](#), [78](#)
- Blanchini, F., Rinaldi, F., et Ukovich, W. (1997). A network design problem for a distribution system with uncertain demands. *SIAM Journal on optimization*, 7(2), 560–578. [44](#)
- Bou Farraa B., Abbou R., et Loiseau, J.J. (2020). Control by set Invariance of a class of convolution systems. *Advances in Delays and Dynamics*, Springer. [26](#)
- Bou Farraa B., Abbou R., et Loiseau J.J. (2019). Impact of uncertainties of lead times and expiration dates on the stability of inventory levels in a distribution system. *9<sup>th</sup> IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control*, 52(13), 1984–1989. [26](#)
- Bou Farraa B., Abbou R., et Loiseau J.J. (2018). Necessary and sufficient conditions for the stability of input-delayed systems. *14<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 51(14), 218–223. [26](#)

- Bou Farraa B., Abbou R., et Loiseau, J.J. (2020). Robust stabilization of an elementary logistic system with an input delay. *21<sup>st</sup> IFAC World Congress*. [26](#)
- Boukas, E.K., Yang, H., et Zhang, Q. (1995). Minimax production planning in failure-prone manufacturing systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 87(2), 269–286. [44](#)
- Brethé, D., et Loiseau, J.J. (1997). Stabilization of time-delay systems. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 31(6), 1025–1047. [54](#)
- Callier, F.M., Desoer, C.A. (1978). An algebra of transfer functions for distributed linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(9), 651–663. [54](#)
- Castelan, E.B., et Hennes, J.C. (1993). On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(11), 1680–1685. [69](#)
- Chiasson, J., et Loiseau, J.J. (2007). *Applications of time delay systems*. Lecture notes in control and information sciences, Springer. [52](#)
- Delice, I.I., et Sipahi, R. (2009). Inventory dynamics models of supply chains with delays system-level connection & stability. In: Loiseau J.J. *et al.* (eds) Topics in Time Delay System. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 388, 349–358. [52](#)
- Desoer, C.A., et Vidyasagar, M. (1975). *Feedback systems: input-output properties*. Academic Press. [24](#), [25](#), [55](#), [171](#)
- Diagne, M., Bekiaris-Liberis, N., et Krstic, M. (2017). Compensation of input delay that depends on delayed input. *Automatica*, 85, 362–373. [59](#)
- Di Loreto, M. (2006). *Méthodologie pour l'analyse et la commande de systèmes à retards*. PhD thesis, École centrale de Nantes. [54](#)
- Disney, S.M., et Towill, D.R. (2002). A discrete transfer function model to determine the dynamic stability of a vendor managed inventory supply chain. *International Journal of Production Research*, 40(1), 179–204. [38](#)
- Dorea, C.E.T., et Hennes, J.C. (1999).  $(A, B)$ -invariance conditions of polyhedral domains for continuous-time systems. *European Journal of Control*, 5(1), 70–81. [24](#), [66](#), [70](#), [71](#), [80](#), [86](#), [86](#), [88](#)

- Edghill, J., et Towill, D. (1989). The use of system dynamics in manufacturing systems engineering. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 11(4), 208–216. [21](#), [38](#)
- Forrester, J.W. (1958). Industrial dynamics: a major breakthrough for decision makers. *Harvard Business Review*, 36(4), 37–66. [21](#), [35](#), [38](#)
- Forrester, J.W. (1973). *Industrial Dynamics*. Cambridge, MA: M.I.T. press. [35](#), [38](#), [78](#)
- Gloyal S.K., et Giri B.C. (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European journal of operational research*, 134, 1–16. [40](#)
- Gu, K., Niculescu, S.I., et Chen, J. (2005). On stability crossing curves for general systems with two delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(1), 231–253. [166](#)
- Hadley, G., et Whitin, T. M. (1963). *Analysis of inventory systems*. [21](#)
- Hale, J.K. (1971). Functional differential equations. In *Analytic theory of differential equations*, Springer, 9–22. [53](#)
- Hennet, J.C. (2003). A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control. *Automatica*, 39(3), 793–805. [78](#)
- Hennet, J.C. (1995). Discrete-time constrained linear systems. *Control and Dynamic Systems, C.T. Leondes Ed., Academic Press*, 71, 157–213. [71](#)
- Hennet, J.C., et Arda, Y. (2008). Supply chain coordination: a game-theory approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(3), 399–405. [36](#)
- Hennet, J.C., et Tarbouriech, S. (1997). Stability and stabilization of delay differential systems. *Automatica*, 33(3), 347–354. [66](#)
- Hille, E., et Phillips, R.S. (1957). *Functional analysis and semi-groups*. New Providence, American Mathematical Society. [171](#)
- Ignaciuk P. (2012). Dead-time compensation in continuous-review perishable inventory systems with multiple supply alternatives. *Journal of Process Control*, 22(5), 915–924. [45](#), [46](#)

- Ignaciuk, P., et Bartoszewicz, A. (2013). *Congestion control in data transmission on networks sliding mode and other designs*. Springer. 46, 78
- Ignaciuk, P., et Bartoszewicz, A. (2010). Smith predictor based control of continuous-review perishable inventory systems with a single supply source. 8<sup>th</sup> *European Workshop on Advanced Control and Diagnosis*. 42
- Ignaciuk, P., et Bartoszewicz, A. (2011). Smith predictor based control of continuous-review perishable inventory systems with multiple supply alternatives. 19<sup>th</sup> *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 1427–1432. 46
- Javel, G., et Le Bert, J. (1993). *L'Organisation et la Gestion de Production*. Masson. 138
- John, S., Naim, M., et Towill, D. (1994). Dynamic analysis of a wip compensated decision support system. *International Journal of Management Systems and Design*, 4(1), 283–297. 39
- Journet, M. (1997). Histoire de l'évolution de la logistique des entreprises industrielles. *Revue Défense Nationale*, 5, 25–35. 30
- Karcanias, N. (1994). Global process instrumentation issues and problems of a system and control theory framework. *Measurement*, 14(1), 103–113. 25, 47, 73
- Karcanias, N. (1995). Integrated process design: a generic control theory/design based framework. *Computers in Industry*, 26(3), 291–301. 47
- Kharitonov, V.L. (1998). Robust stability analysis of time delay systems: a survey. 4<sup>th</sup> *IFAC Conference on system structure and control*, 31(18), 1–12. 165
- Kuhn, H.W. (1956). Solvability and consistency for linear equations and Inequalities, *Am. Math. Monthly*, 63, 217–232. 71
- Kwon, W., et Pearson, A. (1980). Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(2), 266–269. 57, 59
- Labarthe, O. (2006). *Modélisation et simulation orientées agents de chaînes logistiques dans un contexte de personnalisation de masse : modèles et cadre méthodologique*. PhD thesis. 37

- Laraba, M.T., Oлару, S., Niculescu, S.I., Blanchini, F., Giordano, G., Casagrande, D., et Miani, S. (2015). Set invariance for delay difference equations. *IFAC-PapersOnLine*, 48(12), 215–220. ??
- Léchappé, V., Moulay, E., Plestan, F., Glumineau, A., et Chriette, A. (2015). New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances. *Automatica*, 52, 179–184. 38
- Lee, H.L., et Billington, C. (1993). Material management in decentralized supply chains. *Operations research*, 41(5), 835–847. 31
- Lee, H.L., Padmanabhan, V., et Whang, S. (1997). Information distortion in a supply chain: the bullwhip effect. *Management Science*, 43(4), 546–558. 35
- Loiseau, J.J. (2000). Algebraic tools for the control and stabilization of time-delay systems. *Annual Reviews in Control*, 24(0), 135–149. 54
- Loiseau, J.J. (2017). Polyhedral invariance for convolution systems over the Callier-Desoer class. In: Cacace F. et al. (eds.) Positive Systems. POSTA 2016. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 471, 151–170. 64, 65
- Manitius, A., et Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problems for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4), 541–552. 22, 57, 59
- Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., et Scokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814. 66
- Min, H., et Zhou, G. (2002). Supply chain modeling: past, present and future. *Computers & Industrial Engineering*, 43(1-2), 231–249. 36
- Mirkin, L., et Raskin, N. (2003). Every stabilizing dead-time controller has an observer–predictor-based structure. *Automatica*, 39(10), 1747–1754. 59
- Mondié, S., Niculescu, S.I., et Loiseau, J.J. (2001). Delay robustness of closed loop finite assignment for input delay systems. *3<sup>rd</sup> IFAC Conference on Time Delay Systems*, 34(23), 207–212. 59, 165, 171
- Moon, Y.S., Park, P., Kwon, W.H., et Lee, Y.S. (2001). Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of Control*, 74(14), 1447–1455. 165

- Moussaoui, C., Abbou, R., et Loiseau, J.J. (2014). On bounds of input-output systems. Reachability set determination and polyhedral constraints verification. *19<sup>th</sup> IFAC World Congress*, 47(3), 11012–11017. [64](#), [65](#), [171](#)
- Moussaoui, C., Abbou, R., et Loiseau, J.J. (2017). Robust inventory control of production systems subject to uncertainties on demand and lead time. *International Journal of Production Research*, 55(8), 2177–2196. [23](#), [40](#)
- Moussaoui, C. (2014). *Contribution à la commande des systèmes logistiques en présence de retards*. PhD thesis, École centrale de Nantes. [67](#), [68](#)
- Nagumo, M. (1942). Über die lage der integralkurven gewöhnlicher differentialgleichungen. In *Proceedings of the Physico Mathematical Society of Japan*, 551–559. [67](#)
- Nahmias S. (1982). Perishable inventory theory: a review. *Operations research*, 30(4), 680–708. [40](#)
- Normey-Rico, J., et Camacho, E. (2007). *Control of Dead-time Processes*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing Series. Springer-Verlag London Limited. [52](#)
- Olaru, S., De Doná, J.A., Seron, M.M., et Stoican, F. (2010). Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. *International Journal of Control*, 83(12), 2622–2640. [66](#)
- Olbrot, A.W. (2000). Finite spectrum property and predictors. *Annual Reviews in Control*, 24(0), 125–134. [59](#)
- Olbrot, A.W. (1978). Stabilizability, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(5), 887–890. [116](#)
- Ramadge, P.J., et Wonham, W.M. (1987). Supervisory control of a class of discrete event processes. *SIAM journal on control and optimization*, 25(1), 206–230. [73](#)
- Richard, J. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), 1667–1694. [52](#)
- Riddalls, C.E., Bennett, S., et Tipi, N.S. (2000). Modelling the dynamics of supply chains. *International Journal of Systems Science*, 31(8), 969–976. [22](#), [38](#), [40](#)

- Riddalls, C., et Bennett, S. (2002). The stability of supply chains. *International Journal of Production Research*, 40(2), 459–475. [40](#)
- Sarimveis H., Patrinos P., Tarantilis C.D., et Kiranoudis C.T. (2008). Dynamic modeling and control of supply chain systems: a review. *Computers and Operations Research*, 35, 3530–3561. [38](#)
- Schrijver, A. (1986). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and sons. [71](#), [62](#)
- Silver, E.A., et Peterson, R. (1985). *Decision systems for inventory management and production planning*. John Wiley & Sons Inc. [21](#)
- Simon, H.A. (1952). On the application of servomechanism theory in the study of production control. *Econometrica*, 20(2), 247–268. [21](#), [37](#), [39](#), [42](#)
- Sipahi, R., et Delice, I. (2010). Stability of inventory dynamics in supply chains with three delays. *International Journal of Production Economics*, 123(1), 107–117. [23](#), [52](#), [54](#)
- Sipahi, R., Niculescu, S.I., Abdallah, C.T., Michiels, W., et Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(1), 38–65. [52](#), [54](#)
- Sterman, J.D. (1989). Modelling managerial behaviour misinterpretations of feedback in a dynamic decision-making experiment. *Management Science*, 35(3), 321–329. [21](#), [39](#)
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Da Silva Jr, J.M.G., et Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer. [54](#)
- Tarbouriech, S., et Hennes, J.C. (1997). Conditions of stability via positive invariance for delay systems. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 31(6), 983–999. [78](#)
- Tayur, S., Ganeshan, R., et Magazine, M. (1999). *Quantitative Models for Supply Chain Management*. International Series in Operations Research & Management. Springer. [31](#), [36](#)
- Towill, D.R. (1982). Dynamic analysis of an inventory and order based production control system. *The International Journal of Production Research*, 20(6), 3–12. [21](#), [38](#)

- Towill, D., Naim, M., et Wikner, J. (1992). Industrial dynamics simulation models in the design of supply chains. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, 22(5), 3–13. [36](#)
- Wang X., et Disney, S.M. (2016). The bullwhip effect: progress, trends and directions. *European Journal of Operational Research*, 250(3), 691–701. [35](#)
- Wang, S.S., Chen, B.S., et Lin, T.P. (1987). Robust stability of uncertain time-delay systems. *International Journal of Control*, 46(3), 963–976. [165](#)
- Wang, X., Disney, S.M., et Wang, J. (2012). Stability analysis of constrained inventory systems with transportation delay. *European Journal of Operational Research*, 223(1), 86–95. [40](#)
- Wikner, J. (2005). Dynamic analysis of a production-inventory model. *Kybernetes*, 34(6), 803–823. [38](#)
- Wonham, W.M. (1979). *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*. Springer. [73](#)

---

**Titre :** Modélisation et commande des systèmes à retards contraints sous incertitudes

**Mot clés :** Réseaux et systèmes logistiques, systèmes à retards, contraintes d'intervalles et polyédrales, propriétés d'invariance, commande par feedback-prédicteur, analyse de robustesse

**Résumé :** Ce travail de thèse porte sur l'étude analytique de la dynamique des réseaux logistiques et des systèmes logistiques élémentaires, soumis aux retards d'acquisition des produits, aux pertes de stockage vu la nature périssable des produits, et aux contraintes de positivité et de saturation des ressources du système. La finalité est de maîtriser la production afin de satisfaire la demande des clients incertaine mais bornée, sans risque ni de rupture ni de débordement de stockage, et en tenant compte des diverses spécifications notamment les capacités de production et de stockage. En se basant sur les formalismes des systèmes Entrée-Sortie et les propriétés d'invariance, un premier objectif consiste à

proposer des méthodes de calcul de bornes, afin d'identifier les ensembles de sortie atteignables, du réseau logistique. Un objectif secondaire, repose sur l'étude de nouvelles méthodes de synthèse et de conception de commandes du type feedback-prédicteur, linéaires ou saturées, pour déterminer des conditions d'existence de lois de commande satisfaisantes pour le système élémentaire. Un troisième aspect guidant ce sujet est de prendre en compte les incertitudes sur certains paramètres intrinsèques du système ou des perturbations supplémentaires, d'où l'introduction de nouvelles techniques de commandes robustes et réactives.

---

**Title:** Modeling and control of constrained delayed systems with uncertainties

**Keywords:** Logistic networks and systems, delayed systems, interval and polyhedral constraints, invariance properties, feedback-predictor control, robustness analysis

**Abstract:** This thesis work focuses on the analytic study of the dynamics of logistic networks and elementary logistic systems, subject to production delays, storage losses due to perishable products, and positive and saturation constraints of the system's resources. The aim is to adapt the production in order to satisfy the uncertain and bounded customers demand, without any risk of storage breakage or overflow, and taking into account the system specifications, in particular production and storage capacities. Based on Input-Output system formalization and the invariance prop-

erties, a first objective is to provide methods for bounds calculation, in order to identify the reachable output sets of the logistics network. A second objective is based on the study of new methods for the synthesis and the design of linear or saturated controls with feedback-predictor type, in order to determine satisfying conditions of control laws existence for the elementary logistic system. A third aspect guiding this topic, is to take into account uncertainties on the intrinsic system parameters or additional disturbances, hence the introduction of new robust and reactive control techniques.