



**HAL**  
open science

# Adaptation de maillages pour l'optimisation de formes aérodynamiques

Quentin van Aken

► **To cite this version:**

Quentin van Aken. Adaptation de maillages pour l'optimisation de formes aérodynamiques. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université de Technologie de Troyes, 2020. Français. NNT : 2020TROY0010 . tel-03808653

**HAL Id: tel-03808653**

**<https://theses.hal.science/tel-03808653>**

Submitted on 10 Oct 2022

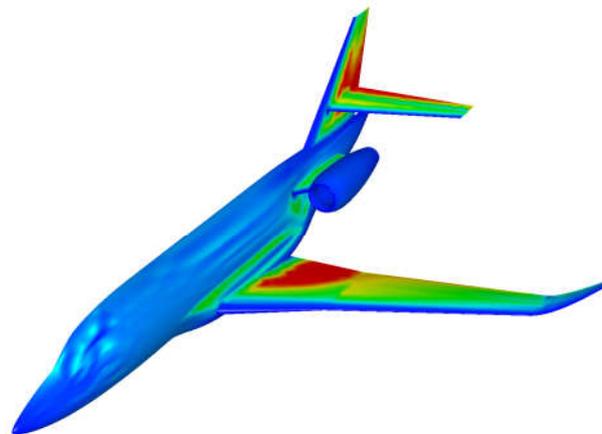
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse  
de doctorat  
de l'UTT

**Quentin VAN AKEN**

# Adaptation de maillages pour l'optimisation de formes aérodynamiques



**Champ disciplinaire :**  
Sciences pour l'Ingénieur

2020TROY0010

Année 2020

---

---

# THESE

*pour l'obtention du grade de*

## DOCTEUR

de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES

EN SCIENCES POUR L'INGENIEUR

**Spécialité : MATERIAUX, MECANIQUE, OPTIQUE, NANOTECHNOLOGIE**

*présentée et soutenue par*

**Quentin VAN AKEN**

*le 25 septembre 2020*

---

---

**Adaptation de maillages pour l'optimisation  
de formes aérodynamiques**

---

---

## JURY

M. Marc DANIEL	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Président
M. Thierry COUPEZ	PROFESSEUR CEMEF-MINES PARISTECH - HDR	Rapporteur
M. Frédéric HECHT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
M. Frédéric FEYEL	DOCTEUR	Examineur
M. Steven KLEINVELD	INGENIEUR	Examineur
Mme Chloé MIMEAU	MAITRE DE CONFERENCES	Examinatrice
Mme Géraldine PICHOT	CHARGEE DE RECHERCHE INRIA	Examinatrice
M. Houman BOROUCHEKI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Directeur de thèse

# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Houman Borouchaki, mon directeur de thèse, qui m'a donné la possibilité de découvrir le monde de la recherche en me proposant ce sujet. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir fait partager son savoir et d'avoir eu pleine confiance en mon travail.

Je voudrais adresser ma reconnaissance la plus profonde à mon encadrant Steven Kleinveld avec qui j'ai eu la chance de travailler tout au long de ma thèse. Son dynamisme et sa sympathie ont permis de rendre cet échange d'autant plus agréable. Je le remercie pour son aide précieuse dans l'élaboration de ce travail, ainsi que pour m'avoir fait partager son expérience et sa passion pour la recherche industrielle.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Didier Alleau responsable de l'équipe pour m'avoir intégré immédiatement en tant que membre à part entière dans l'entreprise. Au travers de ces échanges très instructifs que nous avons eu, j'ai pu acquérir une certaine maturité face à mon sujet et au monde industriel.

Je présente mes remerciements les plus sincères à Marc Daniel pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse, ainsi que Frédéric Hecht et Thierry Coupez pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et de leur intérêt porté à mes travaux. Je remercie également Frédéric Feyel, Steven Kleinveld, Chloé Mimeau et Géraldine Pichot d'avoir accepté d'être examinateurs de ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier les membres de l'équipe qui ont contribué à ce travail par leur précieux conseils, Alain Naim, Jean-Pierre Figeac, Nicolas Flandrin et Emmanuel Froustey. Je remercie aussi les membres des autres équipes du bâtiment Sénard pour leur disponibilité, ainsi que toutes les personnes que j'ai rencontrées dans le cadre de séminaires avec entre autre Paul-Louis George et Algiane Frœhly.

Merci également à tous les docteurs, doctorants, apprentis et stagiaires pour leur convivialité et leur intérêt porté à mon travail au cours de ces trois années. Merci à Gilbert, Pierre, Laurent, Flavien, Pierre-Elie, Aloïs, Loïc, Sarah, Ximun, Bony, Jean, Antoine, Julien et Damien qui ont partagé mon quotidien dans le bureau avec bonne humeur et disponibilité. Une attention particulière à Romain, Gustave et Maurel pour nos longs échanges sur ce travail.

Enfin, je remercie ma famille et en particulier mes parents pour leur soutien et pour m'avoir fait confiance dans ma quête du savoir. Je remercie du fond du cœur ma femme avec qui j'ai eu la chance et le bonheur de vivre cette expérience formidable et qui par sa présence m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles.



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>1</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Problématique . . . . .	12
État de l'art . . . . .	13
Démarches proposées . . . . .	15
Description de la thèse . . . . .	15
Plan de la thèse . . . . .	17
<b>1 Optimisation de formes aérodynamiques</b>	<b>19</b>
1.1 Modeleur géométrique . . . . .	20
1.1.1 Courbe paramétrique . . . . .	21
1.1.2 Courbe de Bézier . . . . .	23
1.1.3 Courbe B-spline . . . . .	25
1.1.4 Courbe NURBS . . . . .	27
1.1.5 Surface NURBS . . . . .	28
1.1.6 Bilan . . . . .	30
1.2 Code de calcul . . . . .	30
1.2.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	30
1.2.2 Écriture matricielle du système . . . . .	35
1.2.3 Symétrisation et formulation entropique . . . . .	35
1.2.4 Bilan . . . . .	36
1.3 Boucle d'optimisation automatique de formes . . . . .	36
1.3.1 Optimiseur . . . . .	38
1.3.2 Modeleur géométrique . . . . .	39
1.3.3 Solveur CFD . . . . .	39
1.3.4 Gradient . . . . .	39
1.3.5 Déformation Laplacien . . . . .	40
1.3.6 Déformation avec une fonction à base radiale . . . . .	41
1.3.7 Bilan . . . . .	42
1.4 Conclusions . . . . .	43
<b>2 Rappels et compléments sur le maillage surfacique</b>	<b>45</b>
2.1 Théorie de la métrique . . . . .	47
2.1.1 Produit scalaire usuel . . . . .	47
2.1.2 Produit scalaire généralisé . . . . .	49
2.1.3 Métrique et transformation . . . . .	49

2.1.4	Calcul d'angle dans la métrique . . . . .	51
2.1.5	Calcul d'aire ou de volume dans la métrique . . . . .	51
2.1.6	Calcul de segment dans la métrique . . . . .	52
2.1.7	Métrique et espace riemannien . . . . .	53
2.2	Courbures et directions principales . . . . .	54
2.2.1	Approximation de la courbure à partir d'un maillage . . . . .	58
2.2.2	Étude d'une sphère . . . . .	63
2.2.3	Bilan . . . . .	65
2.2.4	Calcul de la courbure à partir de la géométrie . . . . .	65
2.2.5	Étude d'un tore . . . . .	68
2.2.6	Bilan . . . . .	70
2.3	Calcul de longueur dans la métrique . . . . .	71
2.3.1	Métrique géométrique . . . . .	71
2.3.2	Métrique géométrique induite . . . . .	72
2.3.3	Intersection de métriques . . . . .	74
2.3.4	Interpolation de métriques et longueur d'arête . . . . .	75
2.3.5	Norme $L_0$ isotrope . . . . .	76
2.3.6	Norme $L_0$ anisotrope . . . . .	76
2.3.7	Norme $L_1$ isotrope . . . . .	77
2.3.8	Norme $L_2$ isotrope . . . . .	78
2.4	Conclusions . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Adaptation de maillages surfaciques</b>	<b>81</b>
3.1	Préparation du maillage pour l'adaptation . . . . .	82
3.1.1	Classifications des composants du maillage . . . . .	82
3.1.2	Structures de données utilisées . . . . .	86
3.1.3	Gradations d'un champ de métrique . . . . .	88
3.1.4	Algorithme d'initialisation pour l'adaptation . . . . .	92
3.2	Critères d'optimisation . . . . .	93
3.2.1	Jacobien de l'élément . . . . .	93
3.2.2	Angle dièdre entre deux éléments . . . . .	95
3.2.3	Qualités en forme de l'élément . . . . .	96
3.3	Opérateurs de modification locale de maillage . . . . .	100
3.3.1	Basculer les arêtes . . . . .	101
3.3.2	Casser-basculer les arêtes . . . . .	103
3.3.3	Enlever-basculer les arêtes . . . . .	105
3.3.4	Insérer un point . . . . .	107
3.3.5	Bouger-basculer de nœuds . . . . .	111
3.4	Algorithmes d'adaptation globale . . . . .	116
3.4.1	Algorithme d'adaptation isotrope . . . . .	117
3.4.2	Algorithme d'adaptation anisotrope . . . . .	117
3.4.3	Algorithme d'adaptation anisotrope avec alignement . . . . .	118
3.5	Conclusions . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>121</b>
4.1	Calculs de champs . . . . .	122
4.1.1	Courbures approchées et exactes . . . . .	123
4.1.2	Cartes de taille et correction $\mathcal{H}$ -choc . . . . .	126
4.1.3	Continuité et discontinuité géométrique . . . . .	127

4.2	Maillages 2d plans . . . . .	130
4.2.1	Adaptation isotrope mono-corps profil NACA0012 avec taille à la peau	131
4.2.2	Adaptation isotrope bi-corps après mouvement de corps . . . . .	132
4.2.3	Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec taille à la peau . . . . .	133
4.2.4	Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec zone de taille imposée	135
4.2.5	Adaptation isotrope tri-corps avec conservation du maillage couches limites . . . . .	136
4.2.6	Construction d'une métrique anisotrope basée sur une fonction à base radiale . . . . .	139
4.3	Maillages 3d surfaciques . . . . .	140
4.3.1	Adaptation isotrope profil ONERA M6 . . . . .	140
4.3.2	Adaptation anisotrope profil ONERA M6 . . . . .	146
4.3.3	Adaptation anisotrope avec alignement profil ONERA M6 . . . . .	154
4.3.4	Adaptation isotrope GBJ multi-carreaux . . . . .	161
4.3.5	Adaptation anisotrope GBJ multi-carreaux . . . . .	169
4.3.6	Adaptation GBJ déformable . . . . .	184
4.4	Conclusions . . . . .	191
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>193</b>
	Conclusions . . . . .	193
	Perspectives . . . . .	194
<b>A Adaptations de maillages sur surfaces fermées</b>		<b>195</b>
A.1	Tore . . . . .	195
A.2	Joint . . . . .	196
A.3	Entrelacement . . . . .	196
<b>B Adaptations de maillages sur surfaces ouvertes</b>		<b>199</b>
B.1	Cylindre . . . . .	199
B.2	Bosse . . . . .	202
B.3	Montagne . . . . .	204
B.4	Drapé . . . . .	205
B.5	Serpentin . . . . .	206
B.6	Ressort . . . . .	207
<b>C Adaptations de maillages sur surfaces complexes</b>		<b>209</b>
C.1	Hélice . . . . .	210
C.2	Intersections cylindriques . . . . .	211
C.3	Théière . . . . .	213
<b>Bibliographie</b>		<b>215</b>



# Liste des figures

1	Boucle d'optimisation de formes existante simplifiée. . . . .	8
2	Maillages — Maillage 2d plan du tri-corps combinant montée de couche structurée et insertion de nœuds avec une méthode Delaunay non structuré à gauche. Maillage 3d surfacique du Generic Business Jet combinant mailleur BLSURF non-structuré pour le fuselage et les racords, et mailleur CITRON structuré pour les voilures au milieu et à droite. . . . .	9
3	Étapes pour un calcul de Navier-Stokes sur un profil ONERA M6 — Maillage surfacique, volumique et vues en coupe en haut et au milieu. Calcul à Mach = 0.84, incidence = 3.0°, nombre de Reynolds = 18.14e <sup>6</sup> et modèle de turbulence K-Epsilon-Bicouche. Visualisation du CPLO, MUT et comparaison avec l'essai du Cp en fonction de X/C en bas. . . . .	10
4	Maillages 3d surfacique du Generic Business Jet avant et après étirement à iso-topologie et iso-nombre de nœuds — Visualisation de la qualité en forme isotrope des éléments. . . . .	11
5	Nouvelle boucle d'optimisation de formes avec un module d'adaptation de maillage fournissant un maillage conforme et optimal pour le calcul. . . . .	16
6	Algorithme d'adaptation générique d'un maillage surfacique à gauche. (*) représente la mise à jour locale de la métrique après chaque modification topologique. Adaptation isotrope du tri-corps sur géométrie fixe avec conservation du maillage de la couche limite au milieu. Adaptation anisotrope du GBJ sur géométrie fixe à droite. . . . .	17
1.1	Graphes de Bernstein ordre $n = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	22
1.2	Courbes de Bézier de degré $n = 3$ et polygones de contrôle associés. . . . .	23
1.3	Construction d'un point d'une courbe de Bézier de degré $n = 3$ pour $u = 0.25$ avec l'algorithme de De Casteljau. . . . .	24
1.4	Élévation de degré d'une courbe de Bézier de degré $n = 3$ à $n = 4$ . . . . .	25
1.5	Graphes des fonctions de base pour un vecteur nodal $t = \{0, 1, 2, 3\}$ pour $k = 0, 1, 2$ . . . . .	27
1.6	Surface NURBS mono-carreau — Carreau de degré 5 avec 9 multiplats. Visualisation des vecteurs tangents $S_u$ et $S_v$ du carreau. Vecteurs nodaux et fonctions de base en $u$ et en $v$ . . . . .	29
1.7	Surface NURBS multi-carreaux — Generic Business Jet composé de carreaux de degré 5. Visualisation des vecteurs tangents $S_u$ et $S_v$ des multiplats des carreaux fuselage et voilure externe. Vecteurs nodaux et fonctions de base en $u$ et en $v$ . . . . .	29
1.8	Équation de continuité — Volume de contrôle pour l'application du principe de conservation de la masse. . . . .	31
1.9	Équation de conservation de la quantité de mouvement — Volume de contrôle pour l'application de l'équation fondamentale de la mécanique. . . . .	32

1.10	Boucle d'optimisation automatique de formes aérodynamiques. . . . .	38
1.11	Maillage 2d plan déformé par Laplacien — le volet est déplacé vers l'arrière. . . . .	41
1.12	Types de fonction à base radiale infiniment lisses — À gauche variation de $\varepsilon$ pour la fonction gaussienne et à droite les trois fonctions à base radiale avec $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	42
1.13	Maillage 2d plan déformé par une fonction à base radiale gaussienne — le volet est déplacé vers l'arrière, visualisation du champ de déplacement. . . . .	42
2.1	Convention, notation, numérotation d'un élément, des nœuds et des arêtes. . . . .	46
2.2	Voisinage de l'élément, boule du nœud et coque de l'arête. . . . .	46
2.3	Cas 3d surfacique. Vue 3d d'un triangle et de ses trois métriques dans chacun de ses plans tangents. Vue de face d'un triangle isotrope et d'un triangle anisotrope. . . . .	47
2.4	Produit scalaire usuel. . . . .	48
2.5	Ellipse de l'espace euclidien usuel à gauche et la boule unité associée à la métrique $\mathcal{M} = \mathcal{R}\Lambda^t\mathcal{R}$ à droite avec la transformation pour passer de l'un à l'autre. . . . .	51
2.6	Métriques isotrope et anisotrope dans un espace euclidien. Métriques isotrope et anisotrope dans un espace riemannien. . . . .	53
2.7	Analyse de la courbure de la fonction $y = \sin(x)$ . . . . .	54
2.8	Rayon de courbure de la fonction $y = \sin(x)$ au point $x = 5$ , $R = 1.171$ . . . . .	56
2.9	Plan tangent, rayons de courbure, directions principales. . . . .	56
2.10	Construction d'une quadrique à partir des nœuds voisins. . . . .	58
2.11	Moyenne des normales aux éléments voisins pondérées par l'angle au sommet. . . . .	60
2.12	Évolution du raffinement d'une sphère en fonction de $\frac{R_{sphère}}{\min(h_{boule})}$ . . . . .	64
2.13	Rayon de courbure moyen en fonction du rayon de la sphère sur le rayon de courbure minimal moyen. . . . .	64
2.14	Méthode Newton. . . . .	66
2.15	Surface paramétrique $S(u, v)$ d'un tore $r = 1$ , $R = 3$ au point $P(3, 0, 1)$ , $R_1 = 1$ et $R_2 = +\infty$ . . . . .	70
2.16	Évolution du rayon de courbure $R_2 = \frac{3 + \cos u}{ \cos u }$ d'un tore pour $u \in [0, 2\pi]$ et $v = 0$ . . . . .	70
2.17	Surface paramétrique $S(u, v)$ d'un tore, métrique géométrique $\mathcal{M}_3(a)$ et métrique géométrique induite $\mathcal{M}_2(a)$ . . . . .	72
2.18	Écart $\delta$ entre l'arête et le premier cercle osculateur de $a$ . . . . .	72
2.19	Intersection de métriques à gauche et intersection de métriques antagonistes à droite annulant l'anisotropie. . . . .	74
2.20	Interpolations linéaires et géométriques de métriques. . . . .	75
2.21	Calcul de la longueur anisotrope. . . . .	77
2.22	Évolution des normes $L_{i\mathcal{M}(\overline{ab})}$ avec $\ \vec{ab}\  = 1$ pour des métriques isotropes telle que $h(a) = 1$ et $h(b)$ variant. $L_{0\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{h(b) + 1}{2h(b)}$ , $L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{\log(h(b))}{h(b) - 1}$ et $L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{h(b) - 1}{h(b) \log(h(b))}$ . . . . .	79
3.1	Géométrie $\mathcal{G}_0$ et maillage $\mathcal{M}_0$ du Generic Business Jet (GBJ). . . . .	83
3.2	Groupes d'éléments du maillage $\mathcal{M}_0$ du GBJ représentant les carreaux surfaciques. . . . .	83

3.3	Type de nœud du maillage $\mathcal{M}_0$ du GBJ. . . . .	84
3.4	Type d'arête du maillage $\mathcal{M}_0$ du GBJ. . . . .	85
3.5	Structure d'arête $\mathbf{e}$ en liste doublement chaînée. . . . .	86
3.6	Structure d'élément $\mathbf{E}$ . . . . .	87
3.7	Structure de nœud $\mathbf{N}$ . . . . .	87
3.8	Représentation de $h_{ab}(a)$ et $h_{ab}(b)$ . . . . .	91
3.9	Élément représenté dans l'espace physique et dans l'espace virtuel de référence. . . . .	94
3.10	Angle dièdre entre deux éléments, configuration initiale et configuration simulée avec les angles dièdres à calculer. . . . .	95
3.11	Visualisation du triangle équilatéral de qualité en forme $q_{iso}(E) = 1$ . . . . .	96
3.12	Visualisation des trois projections du triangle $E$ dans chacun des plans tangents. . . . .	97
3.13	Directions principales privilégiées pour l'alignement du triangle. . . . .	97
3.14	Visualisation de la projection du triangle $E$ dans le plan tangent $\mathcal{P}_T(N_0)$ et des angles $\alpha$ et $\beta$ les plus faibles entre $\vec{u}_1$ et $\vec{d}_i$ respectivement $\vec{u}_2$ et $\vec{d}_i$ pour $i = 1, \dots, 8$ . . . . .	98
3.15	Bascule d'arête et critère de qualité en forme. . . . .	101
3.16	Schéma de localisation et de mises à jour de la bascule d'arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite, pour les arêtes de type 2 avec une coque de deux éléments de même groupe et de type 3. . . . .	103
3.17	Schémas de localisation et de mises à jour de casser une arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite. En haut pour les arêtes de type 2 avec deux éléments pour la coque de l'arête, de type 4 et de type 3. Au milieu et en bas pour les arêtes de type 1 et arête de type 2 avec un élément pour la coque de l'arête. . . . .	104
3.18	Schémas de localisation et de mises à jour d'enlever une arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite. En haut pour les arêtes de type 4 et de type 3. Au milieu pour les arêtes de type 1. En bas pour les arêtes de type 2 avec deux éléments. . . . .	106
3.19	Milieu dans la métrique. . . . .	107
3.20	Évolution du paramètre $t$ pour les normes $L_{i\mathcal{M}(\overline{ab})}$ avec $\ \vec{ab}\  = 1$ pour des métriques isotropes telle que $h(a) = 1$ et $h(b)$ variant. $t_{L_{0\mathcal{M}(\overline{ab})}} = 0.5$ , $t_{L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})}} = \frac{1 - \sqrt{h(b)}}{1 - h(b)}$ et $t_{L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})}} = \frac{-\log\left(\frac{1 + h(b)}{2h(b)}\right)}{\log h(b)}$ . . . . .	110
3.21	Calcul itératif du milieu anisotrope. . . . .	110
3.22	Calcul de la position idéale du nœud en jaune pour deux boules pour un critère de qualité en forme isotrope en haut et en bas. À gauche, configuration initiale. Au milieu, calcul du point idéal de chaque élément de la boule dans chaque plan de triangle. À droite, configuration finale avec le point idéal moyenné. En vert les éléments de jacobien positif $J(E) > 0$ et en rouge les éléments de jacobien négatif $J(E) < 0$ . . . . .	113
3.23	Formule de relaxation entre $P_{initial}$ et $P_{idéal moyenné proj}$ avec un <i>pas</i> de 20%. . . . .	113

3.24	Calcul de la position idéale du nœud en jaune pour un critère de qualité en forme anisotrope avec alignement. À gauche, configuration initiale. Au milieu, calcul du point idéal de chaque arête incidente au nœud dans chacun des plans tangents. À droite, configuration finale avec le point idéal moyenné. En vert les éléments de jacobien positif $J(E) > 0$ et en rouge les éléments de jacobien négatif $J(E) < 0$ . . . . .	115
4.1	Maillage géométrique isotrope d'un tore de section ellipsoïde — Courbures approchées de la méthode de Hamann $\kappa_{1a}$ et $\kappa_{2a}$ en haut. Courbures exactes $\kappa_{1e}$ et $\kappa_{2e}$ au milieu. Comparaison entre les courbures approchées et exactes $ \kappa_{1a} - \kappa_{1e} $ et $ \kappa_{2a} - \kappa_{2e} $ en bas. . . . .	124
4.2	Maillage géométrique anisotrope d'un tore de section ellipsoïde — Courbures approchées de la méthode de Hamann $\kappa_{1a}$ et $\kappa_{2a}$ en haut. Courbures exactes $\kappa_{1e}$ et $\kappa_{2e}$ au milieu. Comparaison entre les courbures approchées et exactes $ \kappa_{1a} - \kappa_{1e} $ et $ \kappa_{2a} - \kappa_{2e} $ en bas. . . . .	125
4.3	Maillage géométrique isotrope grossier du Generic Business Jet — Courbures exactes $\kappa_1$ et $\kappa_2$ en haut. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ bornées avec $h_{min} = 5.0$ et $h_{max} = 300.0$ au milieu. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ avec correction $\mathcal{H}$ -choc et $G = 1.2$ en bas. . . . .	126
4.4	Maillage géométrique isotrope grossier du Generic Business Jet — Historiques de convergence des itérations des algorithmes de correction $\mathcal{H}$ -choc isotrope et anisotrope. . . . .	127
4.5	Adaptations de maillage géométrique anisotrope d'une selle. Maillage initial (1 099 nœuds) à gauche. Maillage adapté sur géométrie continue en courbures (405 961 nœuds) au milieu. Maillage adapté sur géométrie discontinue en courbures (457 287 nœuds) à droite. . . . .	128
4.6	Maillages géométriques anisotropes d'une selle avec continuité en courbures à gauche (405 961 nœuds) et discontinuité en courbures à droite (457 287 nœuds) — Maillage de la selle, qualité en forme anisotrope des éléments, courbures exactes $\kappa_1$ , $\kappa_2$ et cartes de taille $h_1$ , $h_2$ de gauche à droite. . . . .	128
4.7	Adaptations de maillage géométrique anisotrope d'une selle. Maillage initial en haut. Maillage adapté sur géométrie continue en courbures au milieu. Maillage adapté sur géométrie discontinue en courbures en bas. . . . .	129
4.8	Adaptations de maillage isotrope d'un profil de maquette NACA0012 à partir de la taille à la peau — Maillage initial (3 114 nœuds) à gauche. Maillage adapté avec gradation $G = 1.6$ (4 106 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation $G = 1.2$ (14 345 nœuds) à droite. Carte de taille $h_1$ du maillage adapté $G = 1.6$ et $G = 1.2$ avec visualisation des iso-ligne du champ en bas. . . . .	131
4.9	Adaptation de maillage isotrope d'un bi-corps après mouvement du volet — Maillage initial (2 280 nœuds) en haut à droite. Différentes étapes d'adaptation de maillage (bascule d'arête globale, enlever-basculer d'arête, casser-basculer d'arête, bouger de nœud-basculer d'arête et état final fixe) avec gradation $G = 1.2$ de gauche à droite et de haut en bas. Carte de taille $h_1$ sur maillage initial et adapté avec gradation $G = 1.6$ adéquate avec la discrétisation du profil en bas. . . . .	132

4.10 Adaptations de maillage isotrope d'un profil RA16 à partir de la taille à la peau — Maillage initial (2 410 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation $G = 1.2$ (5 654 nœuds) en dessous. Qualité en forme isotrope des éléments du maillage initial et du maillage adapté à droite. Carte de taille $h_1$ du maillage adapté en dessous. Maillages adaptés avec gradation $G = 1.01; 1.8; 100.0$ et respectivement 458 873 ;612 ;152 nœuds, en bas. . . .	134
4.11 Adaptations de maillage isotrope d'un profil RA16 avec zones de taille imposée — Maillage adapté avec gradation $G = 10.0$ (5 917 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation $G = 1.2$ (8 335 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation $G = 1.05$ (19 989 nœuds) en bas. Carte de taille $h_1$ des maillages adaptés sur la droite. . . . .	135
4.12 Champ de distance à la peau sur bi-corps avec trois échelles de zoom. . . .	136
4.13 Système Krüger. Cinématique du bec de la rétractation au déploiement complet pour un système d'hypersustentation de haut en bas et de gauche à droite. Source <a href="https://ec.europa.eu/inea/en/horizon-2020/projects/h2020-transport/aviation/uhura">https://ec.europa.eu/inea/en/horizon-2020/projects/h2020-transport/aviation/uhura</a> . . . . .	137
4.14 Maillage initial du tri-corps (314 320 nœuds) — Profil à gauche et zoom sur le maillage de la couche limite à droite. . . . .	137
4.15 Adaptations de maillage isotrope d'un tri-corps avec conservation du profil engraisé — Maillage initial (314 320 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation $G = 1.2$ (117 724 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation $G = 1.8$ (89 850 nœuds) en dessous. Carte de taille $h_1$ des maillages adaptés pour $G = 1.2$ et $G = 1.8$ en bas. . . . .	138
4.16 Construction d'une métrique anisotrope basée sur une RBF — Champ de déplacement à droite, champ vectoriel de la RBF tangent au profil représenté par un déplacement en $y$ , champ vectoriel de la RBF normal au profil représenté par un déplacement en $x$ . . . . .	139
4.17 M6 isotrope — Initialisation $\mathcal{M}_0$ , type de nœud, type d'arête, groupe d'élément. . . . .	141
4.18 M6 isotrope — Maillages $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	142
4.19 M6 isotrope — Carte de taille $h_1$ de $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	143
4.20 M6 isotrope — Qualité en forme isotrope des éléments de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	143
4.21 M6 isotrope — Angle dièdre de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	144
4.22 M6 isotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l'angle dièdre. . . . .	145
4.23 M6 anisotrope — Maillages $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	147
4.24 M6 anisotrope — Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ de $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	148
4.25 M6 anisotrope — Qualité en forme anisotrope des éléments de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	148
4.26 M6 anisotrope — Angle dièdre de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	149
4.27 M6 anisotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre. . . . .	151
4.28 M6 anisotrope — Historiques de convergence de l'algorithme. Histogrammes de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre pour $\theta = 1.0^\circ$ avec des gradations $G = 1.01, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.5, 5.0, 10.0, 100.0$ . . . . .	152

4.29	M6 anisotrope — Maillages anisotropes pour $\theta = 1.0^\circ$ avec des gradations $G = 1.01, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.5, 5.0, 10.0, 100.0$ de gauche à droite et de haut en bas. Qualité en forme anisotrope des éléments et angle dièdre. . . . .	153
4.30	Vérification du critère d'alignement à partir d'un maillage structuré selon les courbures — Visualisation de l'alignement des arêtes du maillage $\mathcal{M}$ généré avec CITRON suivant les directions $\vec{d}_i$ pour $i = 1, \dots, 8$ . . . . .	154
4.31	M6 anisotrope avec alignement — Visualisation de l'alignement des arêtes des maillages $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt\ align}$ suivant les directions $\vec{d}_i$ pour $i = 1, \dots, 8$ . . . . .	155
4.32	M6 anisotrope avec alignement — Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ de $\mathcal{M}_{adapt\ align}$ . . . . .	156
4.33	M6 anisotrope avec alignement — Qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt\ align}$ . . . . .	156
4.34	M6 anisotrope avec alignement — Angle dièdre de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt\ align}$ . . . . .	157
4.35	M6 anisotrope avec alignement — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement et de l'angle dièdre. . . . .	159
4.36	M6 anisotrope avec alignement — Maillages anisotropes avec alignement avec des gradations $G = 1.01, 1.15, 1.2, 2.5, 5.0, 10.0$ de haut en bas. . . . .	160
4.37	GBJ isotrope — Maillages $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	162
4.38	GBJ isotrope — Carte de taille $h_1$ de $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	163
4.39	GBJ isotrope — Qualité en forme isotrope des éléments de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	164
4.40	GBJ isotrope — Angle dièdre de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	165
4.41	GBJ isotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l'angle dièdre. . . . .	167
4.42	GBJ isotrope — $\mathcal{M}_{adapt}$ pour les normes $L_0, L_1$ et $L_2$ . . . . .	168
4.43	GBJ anisotrope — Maillages $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	170
4.44	GBJ anisotrope — Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ de $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	171
4.45	GBJ anisotrope — Qualité en forme anisotrope des éléments de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	172
4.46	GBJ anisotrope — Angle dièdre de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	173
4.47	GBJ anisotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre. . . . .	175
4.48	GBJ anisotrope fin — Nombre d'entités dans le maillage. Histogrammes de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre pour les maillages $\mathcal{M}_{adapt}$ , $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ , $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ et $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ . . . . .	177
4.49	GBJ anisotrope — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ et $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ , $\theta = 1.0^\circ$ , $G = 1.2$ à gauche et $G = 1.6$ à droite, $h_{min} = 1.0$ , $h_{max} = 300.0$ à partir du maillage $\mathcal{M}_{adapt}$ . . . . .	178
4.50	GBJ anisotrope fin — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ et $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ . Carte de taille $h_1, h_2$ . Qualité en forme anisotrope des éléments et angle dièdre. . . . .	179
4.51	GBJ anisotrope fin — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ , $\theta = 0.1^\circ$ , $G = 1.2$ , $h_{min} = 1.0$ , $h_{max} = 300.0$ à partir du maillage $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ . . . . .	180

4.52	GBJ anisotrope fin — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ , $\theta = 0.1^\circ$ , $G = 1.2$ , $h_{min} = 1.0$ , $h_{max} = 300.0$ à partir du maillage $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ .	181
4.53	GBJ anisotrope fin — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ , $\theta = 0.1^\circ$ , $G = 1.2$ , $h_{min} = 1.0$ , $h_{max} = 300.0$ à partir du maillage $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ .	182
4.54	GBJ anisotrope fin — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ , $\theta = 0.1^\circ$ , $G = 1.2$ , $h_{min} = 1.0$ , $h_{max} = 300.0$ à partir du maillage $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ .	183
4.55	GBJ déformable — Géométries GBJ initiale $\mathcal{G}_0$ , avec voilure déformée par étirement $\mathcal{G}_{etire}$ , avec voilure déformée par torsion et flexion combinées $\mathcal{G}_{torsion\ flexion}$ .	184
4.56	GBJ isotrope déformable — Maillages isotrope GBJ, $\mathcal{M}_0$ , $\mathcal{M}_{def}$ et $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .	185
4.57	GBJ isotrope déformable — Qualité en forme isotrope des éléments $\mathcal{M}_0$ , $\mathcal{M}_{def}$ et $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .	186
4.58	GBJ isotrope déformable — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l'angle dièdre.	187
4.59	GBJ anisotrope déformable — Maillage anisotrope GBJ, $\mathcal{M}_0$ , $\mathcal{M}_{def}$ et $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .	188
4.60	GBJ anisotrope déformable — Qualité en forme anisotrope des éléments $\mathcal{M}_0$ , $\mathcal{M}_{def}$ et $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .	189
4.61	GBJ anisotrope déformable — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre.	190
A.1	Adaptation d'un tore de section ellipsoïde — Maillage initial à gauche. Maillage adapté avec gradation $G = 1.2$ au milieu. Maillage adapté avec gradation $G = 1.8$ à droite.	195
A.2	Adaptation d'un tore de section ellipsoïde — Maillage et cartes de courbure $h_1$ et $h_2$ des maillages adaptés avec $G = 1.2$ en haut et $G = 1.8$ en bas pour un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une taille minimale $h_{min} = 1.0$ et une taille maximale $h_{max} = 100.0$ .	196
A.3	Adaptation d'un joint — Maillage initial avec vue en coupe en haut. Maillage adapté avec vue en coupe avec un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une gradation $G = 1.2$ , une taille minimale $h_{min} = 5.0$ et une taille maximale $h_{max} = 100.0$ au milieu haut. Cartes de courbure $\kappa_1$ et $\kappa_2$ du maillage adapté au milieu bas. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ du maillage adapté en bas.	197
A.4	Adaptation d'un entrelacement — Maillage initial en haut à droite. Maillage adapté en haut à gauche. Cartes de courbures $\kappa_1$ et $\kappa_2$ du maillage adapté au milieu haut. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ du maillage adapté au milieu bas. Qualité en forme anisotrope des éléments en bas.	198
B.1	Adaptation d'un cylindre — Maillage initial à gauche. Maillages adaptés avec un écart angulaire $\theta = 45^\circ, 15^\circ, 4^\circ, 0.1^\circ$ , une gradation $G = 1.2$ , une taille minimale $h_{min} = 10.0$ et une taille maximale $h_{max} = 4\ 000.0$ de gauche à droite.	199

- B.2 Adaptation d'un cylindre — Maillage initial en haut à gauche. Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  en haut droite. Qualité en forme anisotrope du maillage adapté au milieu. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  constante en bas. . . . . 200
- B.3 Adaptation d'un cylindre — Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 4^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 300.0$  en haut à gauche. Maillage adapté avec un bouger-basculer de nœuds avec le critère d'alignement en haut à droite. Alignement des arêtes des maillages adaptés au milieu. Qualité en forme anisotrope avec alignement des maillages adaptés en bas. . . . . 201
- B.4 Adaptation d'une bosse — Maillage généré avec BLSURF vue de dessus en haut. Maillage adapté à iso-paramètres vue de dessus en bas. . . . . 202
- B.5 Adaptation d'une bosse — Maillage isotrope initial en haut à gauche. Maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  en haut à droite. Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$ . Qualité en forme anisotrope des éléments avec vue de dessus en bas. . . . . 203
- B.6 Adaptation d'une bosse — Comparaison de la carte de courbure  $\kappa_2$  obtenue par adaptation anisotrope avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  à gauche et avec un écart angulaire  $\theta = 0.1^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 0.1$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  à droite. . . . . 204
- B.7 Adaptation d'une montagne — Maillage initial en haut à gauche. Maillage adapté en haut à droite. Carte de taille  $h_1$  et  $h_2$  du maillage adapté en bas. . . . . 204
- B.8 Adaptations d'un drapé — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.8$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ . Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté avec  $G = 1.2$  au milieu et  $G = 1.8$  en bas. . . . . 205
- B.9 Adaptations d'un serpent — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.8$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ . Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté avec  $G = 1.2$  au milieu et  $G = 1.8$  en bas. . . . . 206
- B.10 Adaptation d'un ressort — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , zoom et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté. En bas cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$ . . . . . 207

C.1	Adaptation d'une hélice — Maillage initial et maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une gradation $G = 1.2$ , une taille minimale $h_{min} = 1.0$ et une taille maximale $h_{max} = 1\ 000.0$ avec zooms en haut. Cartes de courbure $\kappa_1$ et $\kappa_2$ en dessous. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ en bas. . .	210
C.2	Adaptation d'intersections cylindriques — Maillage adapté. Cartes de courbure $\kappa_1$ et $\kappa_2$ en haut. Cartes de taille $h_1$ et $h_2$ en bas. . . . .	211
C.3	Adaptation d'intersections cylindriques — Maillage initial et maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une gradation $G = 1.2$ , une taille minimale $h_{min} = 10.0$ et une taille maximale $h_{max} = 1\ 000.0$ avec zooms. . . . .	212
C.4	Adaptations d'une théière — Maillage initial en haut. Maillage adapté avec un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une gradation $G = 1.2$ , une taille minimale $h_{min} = 1.0$ et une taille maximale $h_{max} = 1\ 000.0$ au milieu. Maillage adapté avec un écart angulaire $\theta = 2^\circ$ , une gradation $G = 1.8$ , une taille minimale $h_{min} = 1.0$ et une taille maximale $h_{max} = 1\ 000.0$ en bas. . . . .	213
C.5	Adaptations d'une théière — Cartes de courbure $\kappa_1$ et $\kappa_2$ , cartes de taille $h_1$ et $h_2$ avec $G = 1.2$ en haut et $G = 1.8$ en dessous. Qualité en forme anisotrope des éléments en bas avec $G = 1.2$ à droite et $G = 1.8$ à gauche. .	213



# Liste des tableaux

2.1	Évolution de l'approximation de la moyenne des rayons de courbure avec les normales approchées et corrigées en fonction du raffinement du maillage. . .	64
3.1	Type de nœud. . . . .	84
3.2	Type d'arête. . . . .	85
3.3	Liste des indices des directions restantes en fonction du premier indice de direction choisi. . . . .	99
3.4	Paramètres disponibles pour l'adaptation de maillage surfacique et valeurs par défaut. . . . .	116
4.1	M6 isotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation isotrope. . . . .	142
4.2	M6 isotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations. . .	144
4.3	M6 anisotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope. . .	147
4.4	M6 anisotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.	150
4.5	M6 anisotrope avec alignement — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope avec alignement. . . . .	155
4.6	M6 anisotrope avec alignement — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations. . . . .	158
4.7	GBJ isotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation isotrope. . . . .	161
4.8	GBJ isotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.	166
4.9	GBJ anisotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope. . .	169
4.10	GBJ anisotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.	174
4.11	GBJ anisotrope fin — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ $\mathcal{M}_{adapt}$ , $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ , $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ et $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ . Caractéristiques des maillages et paramètres d'entrées. . . . .	176



# Liste des algorithmes

2.1	Carte de courbure d'un maillage surfacique. . . . .	59
3.1	Correction $\mathcal{H}$ -choc isotrope. . . . .	90
3.2	Correction $\mathcal{H}$ -choc anisotrope. . . . .	92
3.3	Initialisation de l'adaptation. . . . .	93
3.4	Qualité en forme anisotrope avec alignement. . . . .	100
3.5	Basculer les arêtes. . . . .	102
3.6	Casser-basculer les arêtes. . . . .	103
3.7	Enlever-basculer les arêtes. . . . .	105
3.8	Milieu métrique anisotrope. . . . .	111
3.9	Bouger-basculer de nœuds. . . . .	114
3.10	Adaptation isotrope d'un maillage. . . . .	117
3.11	Adaptation anisotrope d'un maillage. . . . .	117
3.12	Adaptation anisotrope avec alignement d'un maillage. . . . .	118



# Préface

Le Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation (MESRI) finance cette thèse via l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (ANRT) dans le dispositif des Conventions Industrielles de Formation par la REcherche (CIFRE). J'ai effectué mes recherches pour l'entreprise Dassault Aviation en collaboration avec l'équipe de recherche Génération Automatique de Maillages et Méthodes Avancées (GAMMA3).

Mes travaux se sont déroulés au sein de la Direction Technique de l'Ingénierie de l'Avion et des Emports (DTIAE) du département Méthodes, Modélisations et Outils (MMO) à Saint-Cloud. Cette direction livre la forme de l'avion à partir de spécifications. DTIAE utilise la simulation numérique corroborée avec des essais en soufflerie pour trouver la forme la plus adaptée. Le département MMO où je travaille développe des outils pour les ingénieurs en simulation numérique et notamment des outils dédiés au maillage. Mon but est d'automatiser une partie de la boucle d'optimisation de formes.

L'équipe de recherche GAMMA3 quant à elle, est implantée à l'Université de Technologie de Troyes (UTT) et est rattachée à l'École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur (ED 361 SPI). L'UTT concentre sa recherche scientifique dans l'Institut Charles Delaunay (ICD) qui est une unité de recherche associée au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Les thèmes de GAMMA3 regroupent l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par les méthodes d'éléments ou de volumes finis, les aspects de modélisation géométrique, de post-traitement et de visualisation des résultats de calculs.



# Nomenclature

## Général

$\Omega$	Domaine d'étude
$\Gamma$	Frontière du domaine
$\mathcal{R}_{o,x,y,z}$	Repère globale
$\mathcal{B}_{N_i,u,v}$	Repère orthonormé locale surfacique passant par le nœud $i$
$\mathcal{P}_T$	Plan tangent
$d_j$	Distance de projection du nœud $j$ à un plan
$d$	Dimension
$\mathcal{I}_d$	Matrice identité
$\vec{n}$	Vecteur normal
${}^t\vec{v}$	Transposée du vecteur $\vec{v}$
$\Delta$	Opérateur Laplacien
$\nabla$	Opérateur gradient
$div$	Opérateur divergence
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire euclidien
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne
$ \cdot $	Valeur absolue

## Géométrie

$P$	Point de coordonnées $x, y$ et $z$
$S$	Surface de paramètre $u$ et $v$
$S_u$	Dérivée première de la surface en $u$
$I$	Première forme fondamentale
$II$	Deuxième forme fondamentale
$W$	Matrice de Weingarten
$V$	Volume
$R$	Rayon de courbure
$\kappa$	Courbure
$\vec{d}$	Direction principale
$B_i^n(u)$	Polynôme de Bernstein
$P_i$	Points de contrôle
$C_n$	Continuité d'un polynôme d'ordre $n$
$N_i^n(u)$	Fonction de base du point de contrôle $P_i$
$\omega_i$	Poids associé au point de contrôle

## Mécanique des Fluides

$S$	Surface
$dS$	Petit élément de la surface
$V$	Volume
$\rho$	Masse volumique
$\vec{v}$	Vecteur vitesse à l'élément de surface
$\vec{n}$	Normale à la surface
$\vec{F}$	Ensemble des forces appliquées à un système
$\vec{f}$	Ensemble des forces à distance
$\vec{P}$	Vecteur de tension pour les forces de contact
$t$	Temps
$m$	Masse
$\vec{a}$	Vecteur accélération
$p$	Pression statique
$\overline{\overline{T}}$	Tenseur des contraintes
$\delta_{ij}$	Tenseur unité
$\tau_{ij}$	Tenseur symétrique des contraintes visqueuses
$E_T$	Énergie totale
$e_T$	Énergie totale spécifique
$W$	Travail
$Q$	Chaleur
$\vec{q}$	Flux de chaleur
$h_T$	Enthalpie spécifique
$U$	Vecteur des variables conservatives
$F_i^E$	Flux d'Euler
$F_i^D$	Flux diffusifs
$K_{ij}$	Matrice de diffusivité
$s$	Entropie
$H(U)$	Fonction d'entropie généralisée
$T$	Température

## Maillage

$\mathcal{M}_d$	Métrie
$\mathcal{H}_d$	Matrice de taille
$\mathcal{R}$	Matrice des vecteurs propres
$\Lambda$	Matrice des valeurs propres
$\mathcal{D}$	Matrice des directions principales géométriques
$L_{\mathcal{M}}$	Longueur dans la métrie
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$	Produit scalaire dans la métrie
$\ \cdot\ _{\mathcal{M}}$	Norme dans la métrie
$\theta$	Écart angulaire entre le plan tangent et la facette
$G$	Rapport de taille minimale et maximale autour d'un nœud
$h$	Taille
$h_{min}$	Taille minimale autorisée
$h_{max}$	Taille maximale autorisée
$\Phi$	Angle dièdre, angle entre les normales de 2 plans
$\Phi_{seuil}$	Angle dièdre autorisé
$Pas$	Pas de relaxation
$\mathcal{M}_i$	Maillage à l'itération $i$
$N_i$	Nœud $i$
$A_i$	Arête $i$
$E_i$	Élément $i$
$nn$	Nombre de nœuds
$na$	Nombre d'arêtes
$ne$	Nombre d'éléments
$N_iNV_j$	Nœud voisin $j$ du nœud $i$
$N_iEV_j$	Élément voisin $j$ du nœud $i$
$nnv$	Nombre de nœuds voisins d'un nœud
$nev$	Nombre de d'éléments voisins d'un nœud
$ns$	Nombre de sommets de l'élément
$\overrightarrow{n_{N_i}}$	Normale au nœud $i$
$\overrightarrow{n_{E_i}}$	Normale à l'élément $i$
$\overrightarrow{n_{N_iEV_j}}$	Normale à l'élément $j$ voisin du nœud $i$
$\alpha_{N_iEV_j}$	Angle au sommet de l'élément voisin $j$ du nœud $i$
$J$	Jacobien
$q$	Qualité en forme de l'élément



# Introduction

## Sommaire

---

<b>Problématique</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>Démarches proposées</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Description de la thèse</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Plan de la thèse</b> . . . . .	<b>17</b>

---

Les simulations d'écoulements sur des configurations réelles en mécanique des fluides restent un défi malgré l'accroissement constant des calculateurs. En effet, les besoins industriels augmentent plus vite que les puissances de calculs à disposition. La finesse des discrétisations actuelles pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur des configurations complexes en trois dimensions est de l'ordre de dizaines voire de centaines de millions d'éléments.

Incontestablement le temps de retour est un enjeu industriel. Afin de lever les risques d'un programme avion, conjointement aux calculs, des essais en soufflerie doivent être réalisés. Ces essais sont longs et coûteux. Par conséquent, les premières phases de conception se font par calcul. Cela induit une réduction notable du temps de cycle. De plus, vu le nombre de calculs à réaliser en phase de conception préliminaire, l'optimisation du maillage en termes de nombre de nœuds et de qualité du résultat apporte un gain évident. C'est pour cette raison que Dassault Aviation utilise des maillages non structurés et fortement anisotropes.

Les contraintes sur la forme des avions ont augmenté à cause des préoccupations environnementales visées par ACARE<sup>1</sup> tels que le bruit et les émissions. Au niveau des études, ces contraintes ont engendré une identification plus précise des phénomènes physiques et une augmentation de la taille des maillages supports et par conséquent du temps de simulation.

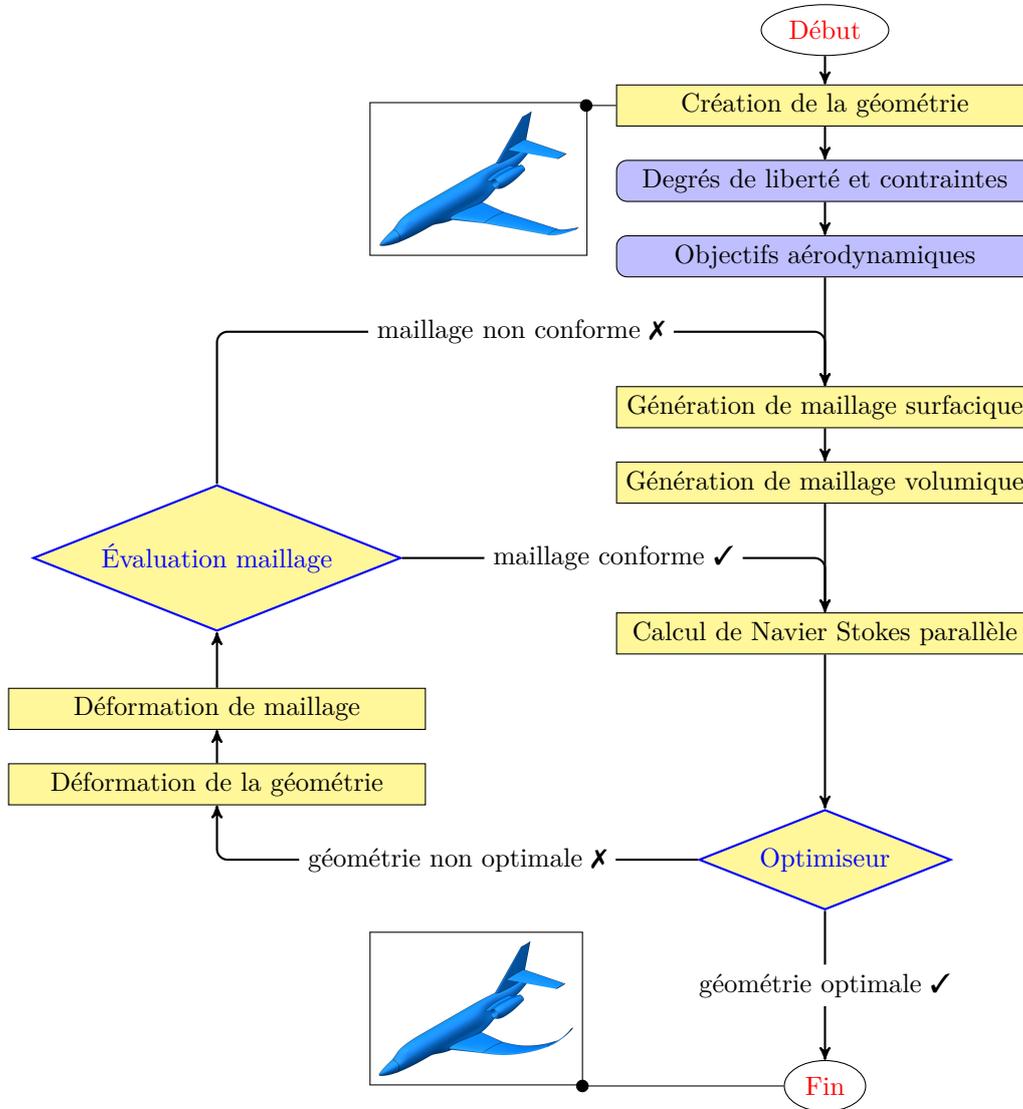
Le dessin des formes externes a évolué ces dernières années. En plus de la conception manuelle, une aide à la conception a pu être mise à disposition des équipes par l'intermédiaire d'une chaîne d'optimisation de formes multi-critères. Elle permet de décharger le concepteur des phases manuelles de définition de forme, de génération de maillage surfacique et volumique au cours des dessins de variantes.

Aidée du savoir-faire métier, cette chaîne, bien qu'efficace, doit progresser dans la génération des formes dérivées. En effet, la phase de déformation de maillage s'effectue à iso-topologie. Par conséquent, la qualité en forme des éléments se dégrade pour de fortes dé-

---

1. Advisory Council for Aeronautics Research in Europe. Ce conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe vise à améliorer la compétitivité et la durabilité de l'UE dans l'aéronautique.

formations dans des cas complexes tel que le braquage de gouvernes. C'est dans ce contexte que se situe cette thèse. Le but est de faciliter les modifications différentielles de formes en développant des méthodes efficaces de remaillage surfacique pour les variantes de grande amplitude. Ce processus d'aide à la conception enchaîne un certain nombre de modules de calcul, voir la boucle simplifiée en figure 1.



**Figure 1** Boucle d'optimisation de formes existante simplifiée.

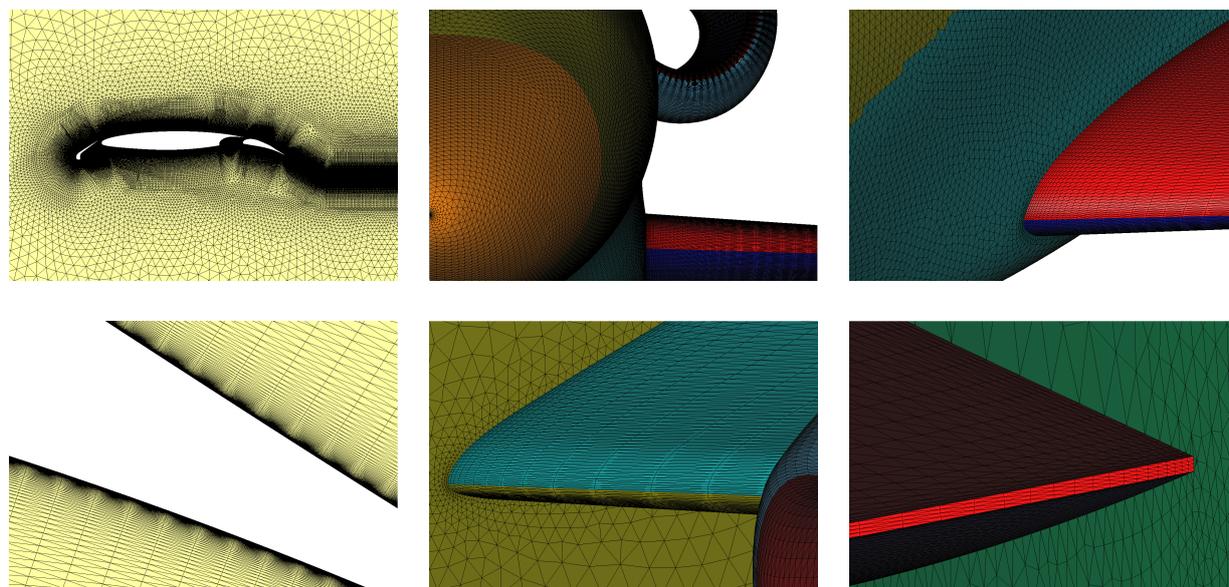
Le point de départ est la définition géométrique de la partie de l'avion concernée, définition qui se fait par l'assemblage de surfaces paramétrées. Ensuite des degrés de liberté et des contraintes sont mis en place. Puis les objectifs aérodynamiques sont précisés. Il s'agit alors de compléter les données d'entrée par la fourniture d'une discrétisation initiale : maillage surfacique et volumique, et le point de calcul visé. Enfin la chaîne d'optimisation réalise alors un premier calcul Navier-Stokes parallèle puis, par évaluation d'une fonction coût, déduit une évolution possible de la géométrie pour s'approcher de l'objectif à atteindre. Cela donne une déformée géométrique qui se traduit par un champ de déplacements des nœuds peau servant de condition de Dirichlet pour les limites du maillage 3d multi-blocs. Après une dernière étape de déformation du maillage, la chaîne peut être rebouclée.

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles de ce modèle théorique. Cette résolution est obtenue à travers une discrétisation, qui pour une précision de plus en plus accrue sur des modèles complexes, requiert des ressources informatiques conséquentes. Mais l'utilisation d'un maillage uniforme pour la simulation de modèles complexes sur des configurations réelles donne des temps longs de calcul et d'analyses.

Depuis de nombreuses années, Dassault Aviation a la capacité de modéliser les formes via des maillages non structurés et structurés dans son processus de conception. Le meilleur compromis est recherché entre précision, souplesse de mise en œuvre et temps de calcul pour la représentativité des géométries les plus complexes. Autrement dit, la complexité des simulations est réduite tout en conservant un maximum de précision. En effet, la réduction de la complexité entraîne une diminution des temps de calcul et d'analyses des résultats.

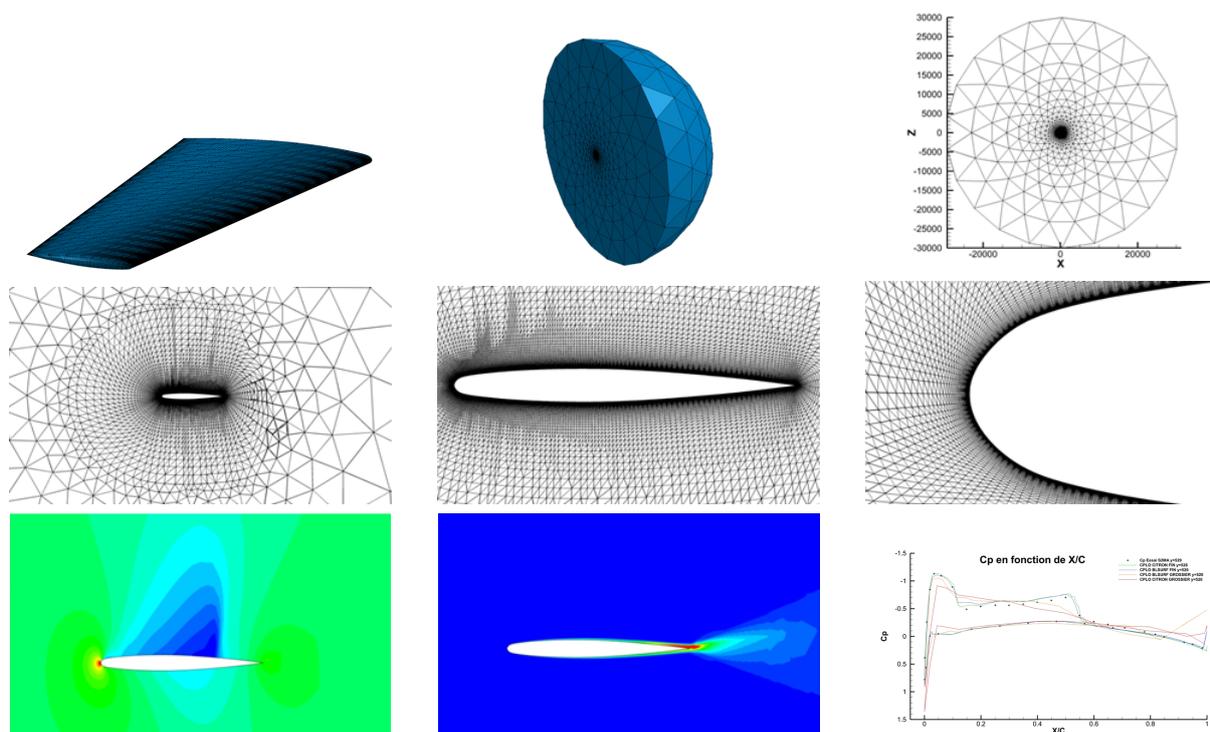
Les maillages 2d plans sont composés d'un maillage structuré pour la couche limite qui engraisse le profil puis d'un maillage non structuré jusqu'à l'infini, voir le tri-corps sur la figure 2. Cette couche est due à la viscosité de l'air adhérant à la paroi de l'avion et témoigne de fortes variations aérodynamiques. Le maillage structuré par couche permet de bien représenter les phénomènes physiques de la couche limite de l'avion. L'épaisseur de cette couche est typiquement de quelques microns car la hauteur de couche dépend des conditions de vol.

Les maillages 3d surfaciques sont composés de maillage non-structuré et structuré. Le maillage structuré anisotrope permet notamment pour les voilures d'économiser en nombre de nœuds tout en étant très bien représentatif de la géométrie, voir le Generic Business Jet sur la figure 2.



**Figure 2** Maillages — Maillage 2d plan du tri-corps combinant montée de couche structurée et insertion de nœuds avec une méthode Delaunay non structuré à gauche. Maillage 3d surfacique du Generic Business Jet combinant mailleur BLSURF non-structuré pour le fuselage et les racords, et mailleur CITRON structuré pour les voilures au milieu et à droite.

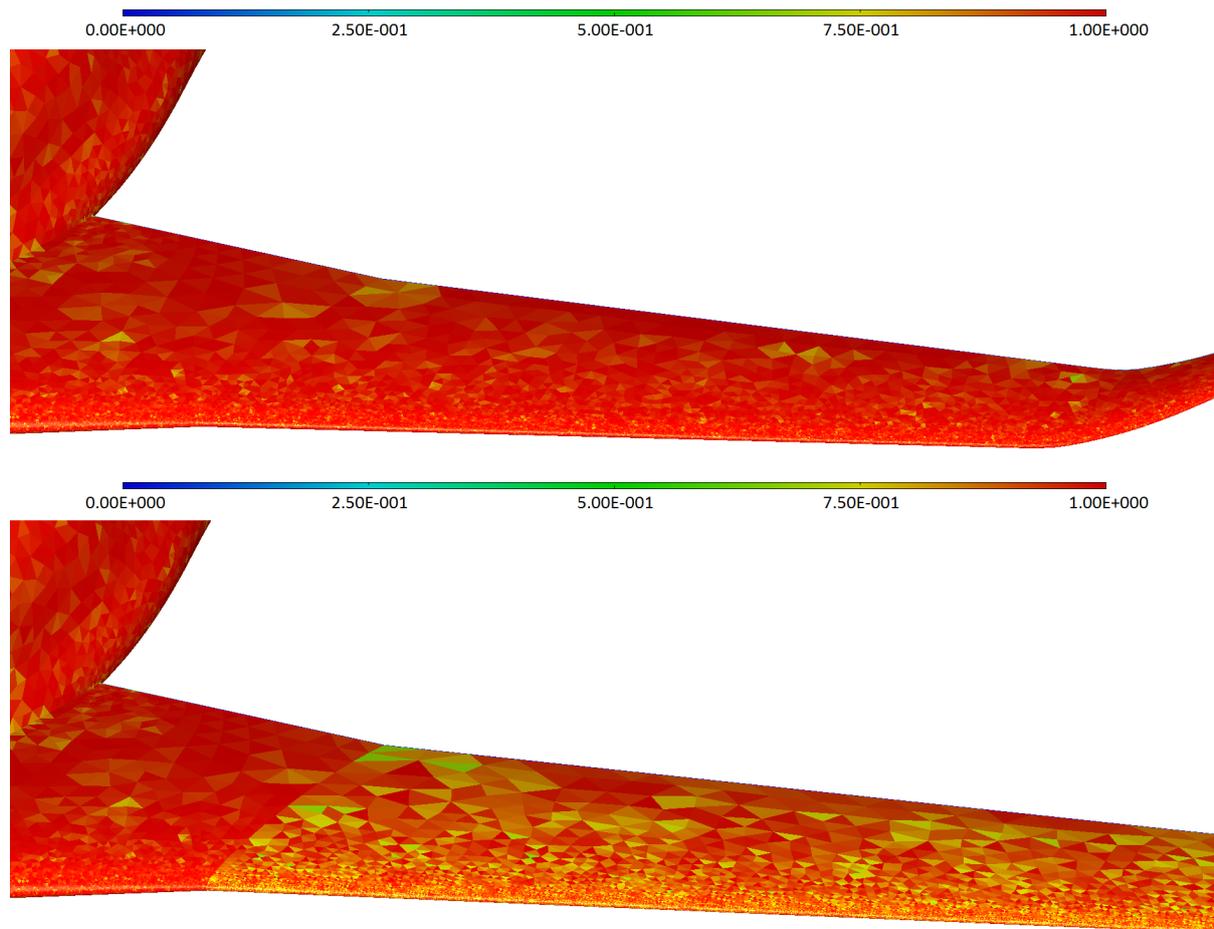
La résolution des équations de Navier-Stokes est réalisée avec le code de calculs **AeTher** développé par Dassault Aviation. La figure 3 présente les étapes d'un calcul type en 3d. Le maillage surfacique est généré à partir de la surface, le plan de symétrie et la demi-sphère à l'infini. Ce maillage volumique est généré par une montée frontale de plusieurs couches d'éléments à partir du maillage surfacique puis d'une insertion de nœuds avec une méthode Delaunay jusqu'à l'infini. Le calcul est alors lancé sur ce modèle surfacique et volumique. Enfin des étapes de post-traitement permettent d'extraire et de visualiser les éléments nécessaires aux comparaisons avec les résultats expérimentaux.



**Figure 3** *Étapes pour un calcul de Navier-Stokes sur un profil ONERA M6 — Maillage surfacique, volumique et vues en coupe en haut et au milieu. Calcul à Mach = 0.84, incidence = 3.0°, nombre de Reynolds = 18.14e<sup>6</sup> et modèle de turbulence K-Epsilon-Bicouche. Visualisation du CPLO, MUT et comparaison avec l'essai du Cp en fonction de X/C en bas.*

Il est très important de noter que dans ce processus la précision de la résolution est très dépendante de la proximité du maillage surfacique avec la géométrie évolutive ainsi que de la discrétisation adéquate des couches limites. Bien que le maillage volumique soit décrit de façon non structurée, la discrétisation tétraédrique dans la couche limite est, suivant les directions normales à la surface, la plus structurée possible. Si on compare la discrétisation micrométrique des premières couches de tétraèdres suivant la normale à la surface avec la discrétisation dans les autres directions, on constate que le maillage possède une très forte anisotropie.

Mais la principale limitation à laquelle nous sommes confrontés est que le maillage surfacique déformé tout en restant conforme et à iso-topologie est généralement non représentatif des zones fortement déformées. La figure 4 témoigne de la chute de la qualité des éléments après une grande déformation de la voilure. C'est cette limitation que nous souhaitons lever en considérant des maillages adaptatifs.



**Figure 4** Maillages 3d surfacique du Generic Business Jet avant et après étirement à iso-topologie et iso-nombre de nœuds — Visualisation de la qualité en forme isotrope des éléments.

L'adaptation de maillage permet de transformer la discrétisation initiale en suivant l'évolution de la forme ou du problème à traiter. De surcroît cette adaptation de maillage conforte les décisions à prendre sur la forme. La boucle d'optimisation en place est notamment limitée dans son espace de recherche par la contrainte de l'iso-topologie au niveau du maillage. L'introduction de l'adaptation de maillage au sein de la boucle devrait permettre à la fois une exploration plus large du domaine de recherche mais également une précision accrue des résultats de calcul ainsi que des gains en temps. D'autant plus qu'on se dirige vers d'autres essais en soufflerie dont on n'a pas encore la maîtrise numérique. Le gain de temps pour le concepteur lui permettra notamment d'explorer de nouvelles solutions.

Cette boucle d'optimisation peut conduire à des champs de déformation impossibles à satisfaire si ce n'est par modification du maillage et en particulier de sa topologie. Par conséquent, l'ajout ou la suppression de nœuds et la redéfinition des liaisons topologiques sont obligatoires pour que le maillage reste conforme. Le but de la thèse sera d'explorer des solutions susceptibles de lever ces verrous scientifiques et de permettre l'introduction de solutions non iso-topologiques. À titre de validation des solutions retenues, les cas applicatifs représentatifs feront référence à des problèmes rencontrés quotidiennement dans nos tâches de conception telles que, par exemple, les variations importantes de formes locales, l'implantation d'antennes ou la définition des cinématiques de becs ou de volets sur voilure.

Au vu de ces enjeux, l'objectif de cette thèse consiste à améliorer la boucle d'optimisation de formes grâce à un module d'adaptation de maillage après déformation pour les cas 2d plan et 3d surfacique.

## Problématique

Avec l'approche classique, on remarque immédiatement que l'on peut générer un nouveau maillage sur la nouvelle géométrie déformée mais les temps humains et de calcul sont longs. En l'état la génération du maillage 3d volumique est automatique mais c'est son temps d'exécution en séquentiel par rapport au temps de calcul du solveur ou de la déformation géométrique qui pose problème. De plus les maillages sont à la fois structurés et non structurés ainsi ils demandent beaucoup de réglages et de temps pour les générer.

**Pour améliorer la qualité en forme des éléments et optimiser la densité locale de nœuds d'un maillage déformé, il est nécessaire de l'adapter en modifiant sa topologie et en repositionnant ses nœuds.** L'adaptation de maillage consiste à contrôler les tailles de mailles pour qu'elles respectent un champ de taille donné tout en améliorant la qualité en forme des éléments. Ce champ de taille est déduit d'une métrique. Le problème est donc triple puisqu'il faut *(i)* déterminer cette métrique et *(ii)* développer les outils pour modifier ou adapter le maillage selon *(iii)* des critères d'optimisation.

Pour les **maillages 2d plans**, une métrique doit être mise au point en fonction de la taille des arêtes à la peau et du déplacement entre les corps. Ce déplacement est réalisé avec une fonction à base radiale pour la définition des cinématiques de becs ou de volets sur voilure. L'adaptation de maillage ne peut se faire qu'en dehors du profil engraisé par le maillage de la couche limite car les outils d'adaptation vont altérer cette structure. En effet le maillage requis pour un calcul de Navier Stokes proche de la peau est une succession de couches structurées anisotropes normales à la peau. Ce maillage de la couche limite n'est pas à adapter au risque de détruire son côté structuré.

Pour les **maillages 3d surfaciques**, une métrique doit être établie à partir de la géométrie déformée. Le champ de taille du maillage déformé doit être calculé à partir des données de cette géométrie déformée. En outre, on est confronté au problème de la projection sur la géométrie dès lors que l'on veut ajouter un nœud en cassant une arête. Par conséquent l'opérateur de projection utilisé doit être rapide et doit s'appliquer aux courbes et aux surfaces de la géométrie. La modification éventuelle du maillage doit être locale, c'est-à-dire que tout le maillage ne doit pas être adapté. Cela implique que le maillage initial avant déformation respecte la métrique ou que des zones de maillages ne sont pas à adapter.

**Un algorithme d'adaptation de maillage générique et automatique doit être mis en place pour des maillages isotropes et anisotropes.** Il doit supporter les géométries complexes bidimensionnelles et tridimensionnelles représentant des domaines de calculs réalistes. Cet algorithme doit faire respecter la métrique sur tout le maillage à adapter grâce à des outils de modification locale de maillage à mettre au point. Des longueurs seuils ainsi que des critères d'optimisation déclenchent les modifications de maillage. Cet algorithme doit conserver la conformité des mailles, maximiser la qualité en forme des éléments et en particulier pour les cas 3d surfaciques, il doit minimiser l'angle dièdre pour que le maillage soit au plus proche de la géométrie.

Cette étude nous a amenés à chercher un **nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments basé sur l’alignement des deux côtés du triangle suivant les directions principales** pour retrouver un maillage pseudo-structuré pour les couches limites en 2d plan et les voilures en 3d surfacique.

Dans ce travail, nous avons choisi délibérément d’effectuer des adaptations 2d plans et 3d surfaciques basées sur des modèles réalistes. En effet les adaptations 2d plan et 3d surfacique utilisent les mêmes outils de modification locale de maillage alors que l’adaptation 3d volumique requiert des outils différents de modification locale. Par conséquent, l’adaptation 3d volumique ne sera pas traitée dans cette thèse. Nous avons considéré des problèmes représentatifs pour les cas industriels 2d plan du tri-corps et 3d surfacique du Generic Business Jet.

## État de l’art

La robustesse des outils industriels de Dassault Aviation et des processus de réalisation de calculs CFD permet d’envisager un niveau d’automatisation pour mettre en place une boucle d’optimisation de formes. L’article de Laurent Daumas, Quang Dinh, Steven Kleinveld et Gilbert Rogé présente cette boucle utilisée par Dassault Aviation dans un contexte d’optimisation automatique de formes à l’aide de la CAO paramétrique appliquée à la réduction de la flèche sonique [24]. La CAO paramétrique différenciée est utilisée dans le cadre de cette optimisation automatique de formes aérodynamiques par Kleinveld [50]. L’article d’Alauzet [1] met en avant l’intérêt de l’adaptation de maillage dans cette boucle d’optimisation pour la réduction du bang sonique.

La triangulation a toujours été utilisée pour traduire une géométrie continue en éléments finis pour le solveur. L’idée est de lier une métrique à cette triangulation, sorte de pondération en chaque nœud, qui permet de créer le maillage optimal pour le calcul. Les méthodes pour obtenir ce maillage optimal ont évolué vers des processus adaptatifs. Borouchaki donne les étapes nécessaires pour remailler une structure mécanique lors de grandes déformations élasto-plastiques avec endommagement [12]. Il en résulte que l’adaptation de maillage avec de telles métriques respectera les critères géométriques et physiques.

La tendance est d’aller vers un processus global d’adaptation de maillage, qui permettra une convergence plus rapide du calcul, une meilleure représentation de la physique, un nombre de nœuds optimal pour la gestion mémoire et une très bonne automatisation. Plus tard Loseille [62, 61] met au point des opérateurs essentiels de modification locale générique de maillage pour une adaptation de maillage efficace. Enfin Michal [68, 69] présente des comparaisons entre l’adaptation de maillage avec de tels opérateurs et les méthodes classiques de génération de maillage avec raffinement a priori. Les résultats montrent une diminution drastique du nombre de nœuds et une meilleure précision sur des cas industriels.

Tous ces auteurs suggèrent l’utilisation de plus en plus intensive de l’adaptation de maillage de par l’augmentation de la complexité des maillages à atteindre pour capturer les phénomènes physiques de petites échelles.

Pour le cas 2d plan, les déplacements relatifs entre les corps permettent de simuler plusieurs configurations de vols chez Dassault Aviation. Les déplacements sont effectués

avec des opérateurs de type Laplacien ou avec une fonction à base radiale issu de l'article de Buhmann [16]. Les maillages sont donc déformés tant qu'ils restent conformes.

Pour le cas 3d surfacique, il existe des métriques géométriques introduites par Borouchaki et George [11]. Le but est d'approcher le maillage le plus possible de la surface, c'est-à-dire que l'angle dièdre est minimisé tout en contrôlant la taille des arêtes localement. Cette approche s'effectue depuis de nombreuses années par un mailleur frontal surfacique BLSURF chez Dassault Aviation. Ce mailleur surfacique a été développé par Borouchaki et Laug [54]. L'objectif est de retrouver les mêmes résultats que BLSURF mais avec un processus de remaillage adaptatif. De plus la méthode d'Hamann [41] de récupération des courbures et des directions principales géométriques à partir d'un maillage surfacique sera à l'étude dans cette thèse pour calculer la carte de taille géométrique.

Un autre mailleur 3d surfacique CITRON a été développé chez Dassault Aviation générant des maillages par tranches pour les voilures. Il permet de minimiser le nombre de nœuds tout en étant très proche de la géométrie. Cependant ce mailleur n'est pas piloté par une métrique. Pour l'adaptation de tel maillage, une nouvelle méthode de remaillage sera basée sur la métrique géométrique et un nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement pour conserver le plus possible cette structure.

La géométrie est un point essentiel dans notre étude, c'est en effet le support des éléments finis. En 1992, Farin décrit dans son livre [30] les courbes et les surfaces. En partant de l'algorithme de De Casteljaou pour approximer efficacement les polynômes écrits dans la base de Bernstein, Farin caractérise les courbes de Bézier. Il travaille sur la continuité des splines et des surfaces  $C^0$  en position,  $C^1$  en tangentes et notamment  $C^2$  en courbures. Il introduit les courbes de Bézier rationnelle qui permettent d'ajouter des poids sur les points de contrôle pour décrire plus fidèlement les courbes. Il regarde aussi des méthodes de lissage de surface qui sont utilisées encore aujourd'hui chez Dassault Aviation dans le but de lisser les surfaces dans sa recherche de voilure plus performante.

En 2012, Piegl et Tiller décrivent dans leur livre [75] les courbes et surfaces dans une description mathématique faite à base de NURBS. Cet ouvrage récent met à jour le livre de Farin appliqué à l'informatique moderne avec en plus l'ajout d'algorithmes géométriques fondamentaux. La surface NURBS est disponible et elle sera le support géométrique de départ de l'adaptation de maillage. En outre un opérateur de projection par itération de Newton [15] est aussi disponible et il permettra de faire la projection des nœuds insérés sur la géométrie.

Dans ce contexte, les méthodes de maillage d'espace continu en espace discret concernant les calculs éléments finis par George et Borouchaki [36] ou encore par Frey et George [33] sont très bien décrites dans leurs livres que ce soit pour la génération ou la modification de maillage. Un ouvrage plus récent en deux volumes de Borouchaki et George [9, 38] met à jour ce dernier et nous donne le détail de différentes métriques ainsi que des algorithmes associés tels que la recherche de voisinages, la gradation de métrique, l'optimisation de maillages, l'adaptation de maillage avec les opérateurs de modification locale, le parallélisme et la renumérotation des nœuds. Ces méthodes d'adaptation avec opérateurs de modification locale de maillage permettent à faible coût de transformer un maillage existant pour qu'il respecte une métrique donnée. Il est donc intéressant d'utiliser ces opérateurs dans un processus d'optimisation de formes pour que le maillage suive correctement les transformations. Au cours de la thèse, nous avons suivi les méthodes présentées dans cet ouvrage.

## Démarches proposées

Dans notre approche, l'adaptation de maillage non structuré est basée sur le calcul des longueurs d'arête dans une métrique discrète, c'est-à-dire qu'elle est définie aux sommets du maillage. Cette métrique isotrope ou anisotrope est construite en utilisant les données géométriques discrètes basées sur une le hessien approché ou exact de la solution à savoir les courbures géométriques. Le but est d'équi-répartir l'erreur d'interpolation sur le maillage en modifiant la longueur des arêtes du maillage par bascule topologique, subdivision ou condensation d'arête et repositionnement des nœuds.

Dans un processus automatique d'optimisation de formes, il est essentiel de détecter quand le maillage déformé n'est plus fidèle à la géométrie. Le but est donc d'adapter le maillage déformé par remaillage local pour conserver une précision constante tout au long du processus d'optimisation de formes. En théorie l'adaptation améliorera la convergence et la précision des résultats, et elle diminuera le temps de calcul.

Cette nouvelle approche se base sur les algorithmes existants d'adaptation de maillage. La solution étant connue, il faut alors adapter le maillage dans les régions où les déformations évoluent afin de préserver sa précision. Pour cela un nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement suivant les directions principales sera introduit pour adapter dans les zones de maillage structuré.

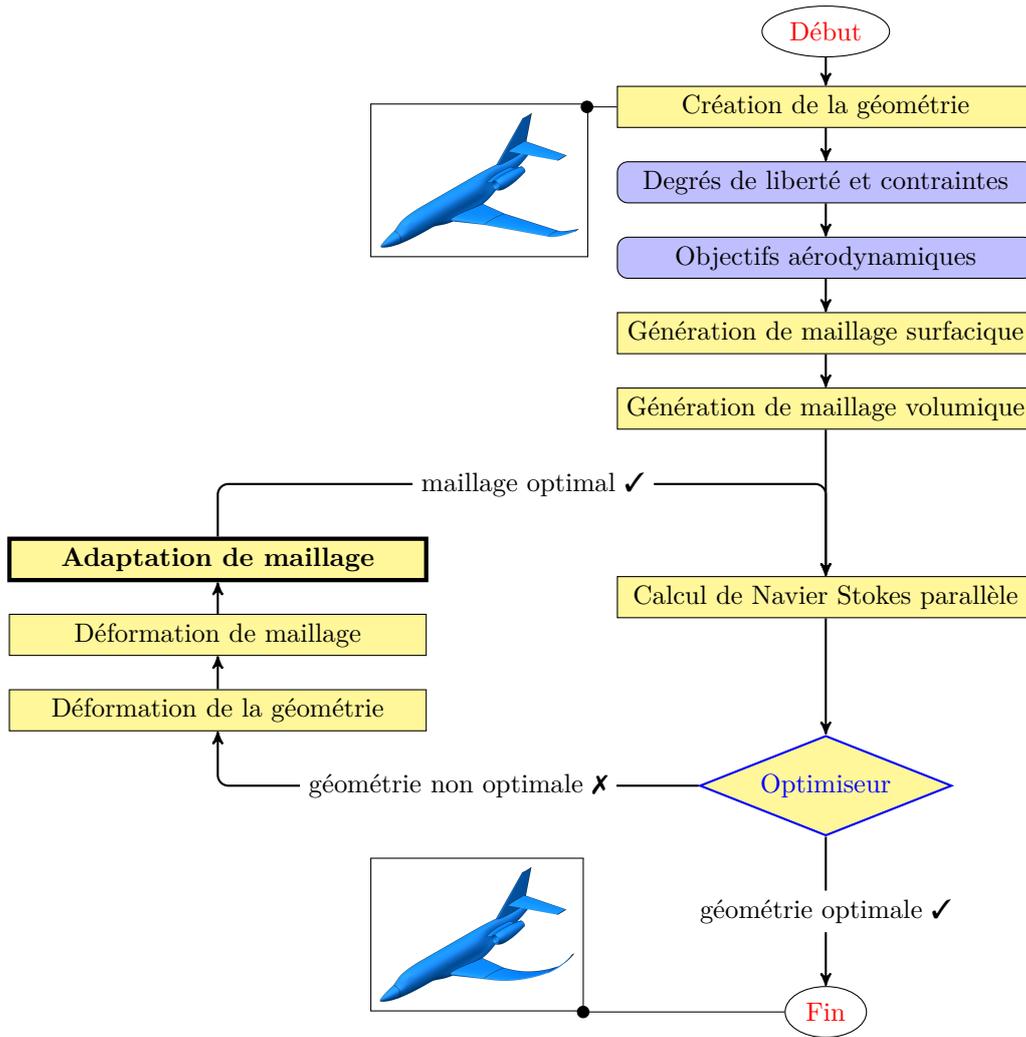
## Description de la thèse

L'objectif principal de la thèse est de réaliser la partie adaptation de maillage surfacique après la déformation de la géométrie pour automatiser cette partie de la boucle d'optimisation en figure 5.

La première étape consiste à initialiser l'adaptation de maillage en classifiant les nœuds, les arêtes et les éléments. Cela permet notamment de déclencher correctement les opérations de modification locale ou de conserver des zones de maillage telles que les zones où le maillage est structuré.

La deuxième étape est de calculer la carte de taille sur tout le maillage. Pour le cas 2d plan, deux métriques sont mises au point. Une métrique isotrope est basée sur la taille d'arête à la peau. Une autre métrique anisotrope est basée sur la taille tangentielle d'arête à la peau et la norme du déplacement normal à la peau. Cette norme est récupérée grâce à la fonction à base radiale utilisée pour le déplacement. Pour le cas 3d surfacique, deux métriques géométriques isotrope et anisotrope sont calculées à partir des courbures et des directions principales approchées et exactes de la surface. Un algorithme de correction sera appliqué sur la métrique pour contrôler la variation de taille locale.

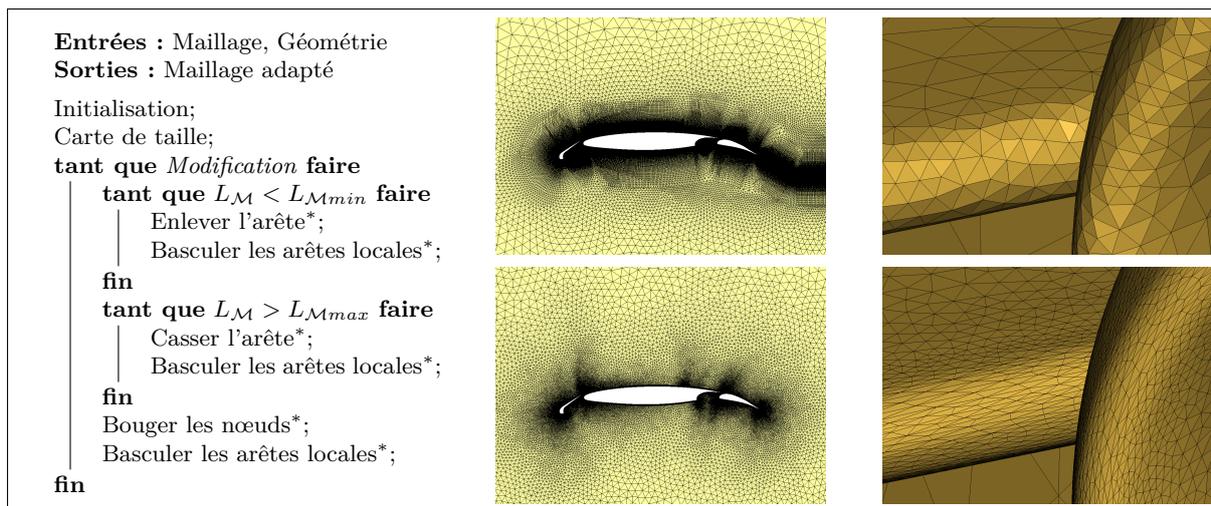
La troisième étape est la mise en place des opérateurs de modification locale d'un maillage surfacique dans le but de faire respecter la métrique. Par conséquent la bascule d'arête, la réduction d'arête, l'insertion d'arête et le repositionnement de sommets sont implémentés pour modifier la topologie localement et mettre à jour la métrique localement avec correction locale. De plus des critères d'optimisation seront appliqués pour déclencher les



**Figure 5** Nouvelle boucle d'optimisation de formes avec un module d'adaptation de maillage fournissant un maillage conforme et optimal pour le calcul.

modifications. Le Jacobien de l'élément permet de conserver un maillage conforme. L'angle dièdre permet de s'approcher de la géométrie. La qualité en forme des éléments isotrope ou anisotrope permet de maximiser la qualité des éléments du maillage. En outre un nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement des côtés de l'élément suivant les directions principales est introduit permettant de retrouver un maillage pseudo-structuré.

La dernière étape est la mise au point d'un algorithme d'adaptation de maillage automatique permettant de combiner les étapes précédentes. Le principe de cet algorithme est de converger vers un état fixe pour le couple formé par le maillage et la carte de taille. L'algorithme générique d'adaptation de maillage utilisé est représenté sur la figure 6. Les longueurs dans la métrique sont calculées et comparées à  $L_{\mathcal{M}min}$  et  $L_{\mathcal{M}max}$  pour atteindre l'objectif du maillage de longueur unité  $L_{\mathcal{M}} = 1$ . Plusieurs stratégies sont élaborées en fonction du type de l'adaptation isotrope ou anisotrope pour obtenir une méthode de remaillage efficace.



**Figure 6** *Algorithme d'adaptation générique d'un maillage surfacique à gauche. (\*) représente la mise à jour locale de la métrique après chaque modification topologique. Adaptation isotrope du tri-corps sur géométrie fixe avec conservation du maillage de la couche limite au milieu. Adaptation anisotrope du GBJ sur géométrie fixe à droite.*

Cette théorie novatrice doit être validée à travers une intégration de ces nouvelles méthodes au sein des logiciels et des chaînes de calculs de Dassault Aviation. À l'issue de cette thèse, nous pourrions élargir considérablement l'espace des solutions possibles lors des phases d'optimisation, notamment en levant le verrou de l'iso-topologie. Nous resterons dans un cadre différentiable, de manière à continuer d'utiliser des algorithmes de type gradient, ce qui est incontournable pour les temps de retour du processus de conception de forme. Nous automatiserons l'adaptation de maillage surfacique de manière à maîtriser l'erreur de discrétisation spatiale. L'adaptation de maillage se concentrera sur la partie surfacique.

## Plan de la thèse

La thèse comporte quatre chapitres qui reprennent les principaux points énoncés précédemment. Le premier chapitre, plus indépendant, décrit la boucle d'optimisation existante. Le deuxième chapitre développe la théorie de la métrique. Le troisième chapitre traite de la méthode utilisée pour l'adaptation de maillage. Le dernier chapitre présente des applications de l'adaptation de maillage pour les cas industriels dans le contexte de géométrie déformable.

Le chapitre 1 décrit la boucle d'optimisation de formes chez Dassault Aviation, notamment le modèleur géométrique **GANIMEDE**, le solveur **AeTher** et l'optimiseur. D'abord le support géométrique de type NURBS est rappelé. Ce support permet de lisser et de piloter la surface à volonté grâce aux multiplets de sa surface modifiable en position, en tangentes et en courbures. Ensuite les équations de Navier-Stokes sont introduites avec une formulation entropique pour former le système à résoudre par le code de calcul. Enfin la boucle d'optimisation est détaillée à travers ses modules. Plus spécifiquement, les opérateurs de déformation de nuage de points de type Laplacien et ceux avec une fonction à base radiale sont présentés.

Le chapitre 2 se concentre sur le calcul de la longueur dans la métrique. D'abord la théorie de la métrique est rappelée avec la définition d'un produit scalaire généralisé dans un espace riemannien. Puis la récupération des informations géométriques est étudiée à partir du maillage seul ou de la géométrie pour créer la métrique géométrique. Ensuite la métrique géométrique est définie sur les points de la surface. Enfin le calcul de la longueur dans la métrique est approché par une formule de quadrature ou par des fonctions d'interpolation linéaire ou géométrique.

Le chapitre 3 concerne l'adaptation de maillage surfacique et ses algorithmes dédiés. D'abord la préparation de l'adaptation de maillage est élaborée grâce à une classification des composants du maillage, à la structure de données utilisée et à la création de la carte de taille. Puis les critères d'optimisation sont étudiés tels que le Jacobien de l'élément, l'angle dièdre et la qualité en forme des éléments. Ensuite les opérateurs de modification locale sont mis au point : la bascule d'arête, la subdivision d'une arête, la condensation d'une arête, l'insertion d'un nœud sur une arête et le repositionnement de nœuds. Enfin plusieurs algorithmes d'adaptation globale sont proposés pour le cas isotrope, anisotrope et anisotrope avec alignement suivant les directions principales.

Le chapitre 4 regroupe les applications notamment pour le tri-corps 2d plan et le GBJ 3d surfacique. D'abord les courbures géométriques sont étudiées pour le calcul approché et exact. Puis la gradation de la métrique géométrique est analysée en isotrope et en anisotrope. Ensuite l'adaptation 2d plan est examinée sous diverses applications, plus particulièrement avec des zones conservées de maillages structurés et avec un déplacement par fonction à base radiale. Enfin une adaptation de maillage géométrique isotrope et anisotrope sur géométrie fixe mono-carreau permettra de valider les opérateurs de modification locale mis en place ainsi que la convergence entre le couple formé par le maillage et la solution géométrique. De plus une adaptation de maillage géométrique isotrope et anisotrope sera appliquée et validée sur géométrie multi-carreaux fixe et déformable dans le but d'insérer ce nouveau module d'adaptation dans la boucle d'optimisation de formes.

Des conclusions et des perspectives sont tirées de ce travail. D'abord les conclusions rappellent la problématique, les résultats obtenus d'adaptation de maillage surfacique, les contributions apportées sur les algorithmes d'adaptation développés et le nouveau critère de qualité d'alignement. Enfin les perspectives s'ouvrent sur une extension de l'adaptation de maillages 3d volumiques, l'intersection de métriques géométriques et physiques pour de l'adaptation de maillages surfaciques et volumiques, ainsi que le développement de nouveaux algorithmes d'adaptation de maillages surfaciques pour faire respecter le nouveau critère de qualité d'alignement des éléments.

Trois annexes sont ajoutées pour montrer l'efficacité des algorithmes d'adaptation développés. D'abord les adaptations de maillages sur surfaces fermées sont présentées à travers un tore, un joint et un entrelacement. Ensuite les adaptations de maillages sur surfaces ouvertes sont exposées pour un cylindre, une bosse, une montagne, un drapé, un serpent et un ressort. Enfin les adaptations de maillages sur surfaces complexes sont proposées pour une hélice, des intersections cylindriques et une théière.

# Chapitre 1

## Optimisation de formes aérodynamiques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Modeleur géométrique</b>	<b>20</b>
1.1.1	Courbe paramétrique	21
1.1.2	Courbe de Bézier	23
1.1.3	Courbe B-spline	25
1.1.4	Courbe NURBS	27
1.1.5	Surface NURBS	28
1.1.6	Bilan	30
<b>1.2</b>	<b>Code de calcul</b>	<b>30</b>
1.2.1	Équations de Navier-Stokes	30
1.2.2	Écriture matricielle du système	35
1.2.3	Symétrisation et formulation entropique	35
1.2.4	Bilan	36
<b>1.3</b>	<b>Boucle d'optimisation automatique de formes</b>	<b>36</b>
1.3.1	Optimiseur	38
1.3.2	Modeleur géométrique	39
1.3.3	Solveur CFD	39
1.3.4	Gradient	39
1.3.5	Déformation Laplacien	40
1.3.6	Déformation avec une fonction à base radiale	41
1.3.7	Bilan	42
<b>1.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>43</b>

---

L'optimisation de formes aérodynamiques est un ensemble de méthodes permettant de trouver la meilleure forme à donner à une pièce pour qu'elle remplisse ses fonctions. Cette optimisation regroupe des modules de géométrie, de maillage et de code de calcul. Un modeleur géométrique permet de décrire en détail la forme complexe du modèle. Le maillage permet de discrétiser ce modèle continu en éléments simples discrets. Le code de calcul permet de résoudre les équations d'états aérodynamiques sur ces éléments discrets. De plus cette optimisation de formes, manuelle par le passé, est devenue en partie automatique de

nos jours. En effet le processus d'optimisation de formes a été automatisé à travers la mise en place d'une boucle d'optimisation constituant une aide à la conception.

D'abord nous décrivons le modèleur géométrique développé par Dassault Aviation par une introduction des concepts géométriques qui lui ont donné naissance. Ensuite nous présentons le code de calcul avec la formulation du problème aérodynamique. Enfin nous détaillons la boucle d'optimisation automatique de formes aérodynamiques et notamment les opérateurs de déformation de maillage de type Laplacien et avec une fonction à base radiale.

## 1.1 Modèleur géométrique

Les modèleurs 3d sont utilisés dans l'industrie en Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Ces modèleurs sont également le support de projection pour la génération ou l'adaptation de maillage surfacique. Il est donc essentiel de bien comprendre le support géométrique utilisé par Dassault Aviation.

Le modèleur CAO **GANIMEDE** (Geometry ANd Inherent MESH DEformation) gère les variables de conception. Ce modèleur géométrique permet de créer des formes complexes en trois dimensions à partir de la définition de multiplats décrivant la position, les tangentes et les courbures d'une surface de type NURBS correspondant à une généralisation des B-splines.

Historiquement dans la construction navale, les splines ou lattes sont des bandes de bois, de plastique ou métalliques longues, fines et flexibles. Elles étaient maintenues en place avec des poids en plomb servant de points de contrôle pour la courbe.

Les lattes furent généralisées dans les années 60 par Pierre Bézier chez Renault, Paul de Casteljaou chez Citroën et de Boor chez General Motors. À l'époque, les besoins sont de dessiner des courbes et des surfaces gauches lisses, continues  $C^1$  en tangence et  $C^2$  en courbure. L'utilisateur peut donc facilement définir des points de contrôle pilotant une courbe. Ces points de contrôle permettent de modifier la courbe localement et directement.

Le livre de Farin [30] est la référence pour les courbes et les surfaces polynomiales définies par morceaux avec des points de contrôle. Le nombre de points de contrôle est alors lié au degré du polynôme. Les applications sont le dessin vectoriel, les polices de caractère et notamment les courbes et les surfaces pour la CAO.

D'abord nous rappelons la définition d'une courbe paramétrique et plus particulièrement les polynômes de Bernstein. Puis nous étudions la courbe de Bézier et l'algorithme de Casteljaou. Ensuite nous généralisons cette forme à la B-spline. Enfin nous abordons une généralisation de la B-spline à la courbe NURBS et à la surface NURBS. Les courbes et les surfaces NURBS seront le support géométrique du maillage dans cette thèse avec entre autre la définition des courbures géométriques pour la métrique géométrique que l'on verra plus loin pour les problématiques d'adaptation de maillages surfaciques.

### 1.1.1 Courbe paramétrique

Une courbe paramétrique  $C(u)$  polynomiale de degré  $n$  est définie par :

$$C(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n a_i u^i \\ \sum_{i=0}^n b_i u^i \\ \sum_{i=0}^n c_i u^i \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Cette courbe est facile à calculer et infiniment différentiable sur tout le domaine.

### Courbe à pôles

La courbe à pôles s'appuie sur la notion de barycentre d'un ensemble de points. Soit le barycentre  $C$  de  $(n + 1)$  points  $P$  affectés de masses :

$$\left( \sum_{i=0}^n \varphi_i \right) C = \sum_{i=0}^n \varphi_i P_i \quad (1.2)$$

Si toutes les masses sont positives ou nulles,  $C$  est dans l'enveloppe convexe des points  $P$ . Si les masses varient en fonction d'un paramètre  $t$ , on a alors :

$$\left( \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \right) C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad (1.3)$$

### Courbe à pôles continues

La partition de l'unité implique que :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i = 1 \quad (1.4)$$

La courbe paramétrique  $C(t)$  est donc définie par :

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad (1.5)$$

Ces courbes sont invariantes par transformation affine. Si tous les points sont alignés, la courbe est un segment de droite.

## Polynômes de Bernstein

L'idée est de partir du développement binomial :

$$1 = (1 + (1 - u))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i} \quad (1.6)$$

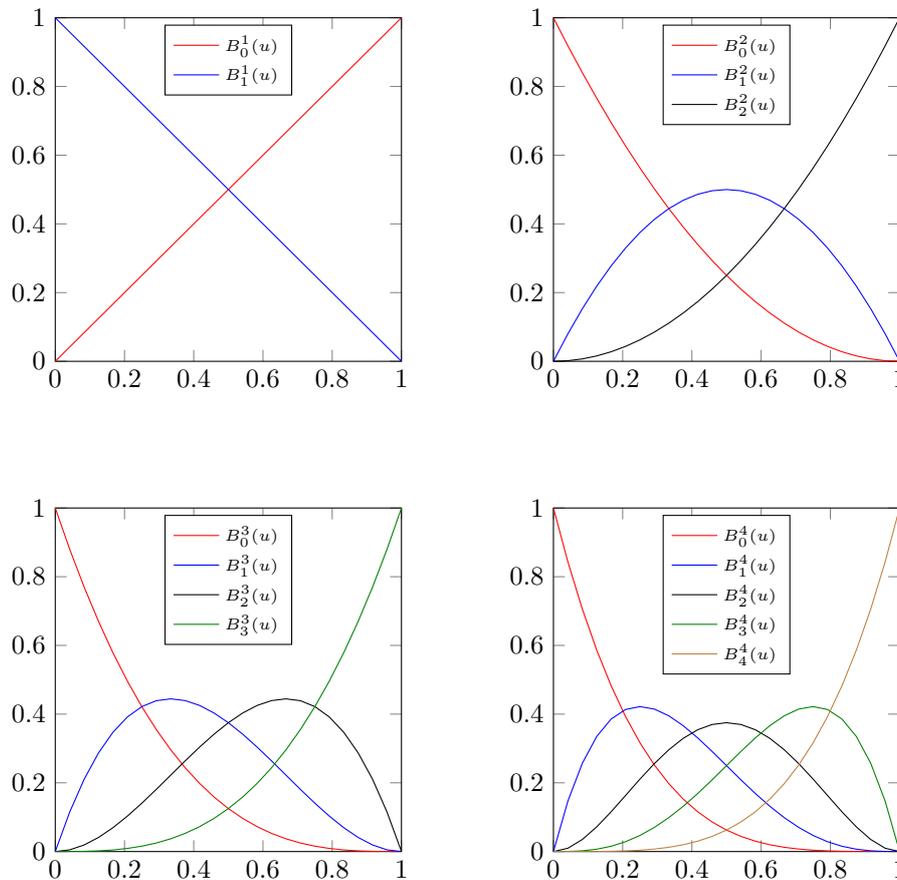
Ainsi, on obtient la somme de  $n + 1$  polynômes de degré  $n$  que l'on appelle polynômes de Bernstein :

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1 - u)^{n-i} \text{ avec } i = 0, \dots, n \quad (1.7)$$

Une importante relation, la formule de Pascal, lie les coefficients binomiaux : pour tout couple  $(n, i)$  d'entiers naturels :

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1} \quad (1.8)$$

Les graphes de Bernstein de la figure 1.1 montre que les polynômes sont linéairement indépendants.



**Figure 1.1** Graphes de Bernstein ordre  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Les polynômes de Bernstein sont symétriques (1.9), forment une partition de l'unité (1.10) et sont positifs pour  $u$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  (1.11).

$$B_i^n(u) = B_i^{n-i}(1-u) \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad (1.10)$$

$$B_i^n(u) > 0 \quad (1.11)$$

Ces polynômes satisfont la formule de récurrence suivante :

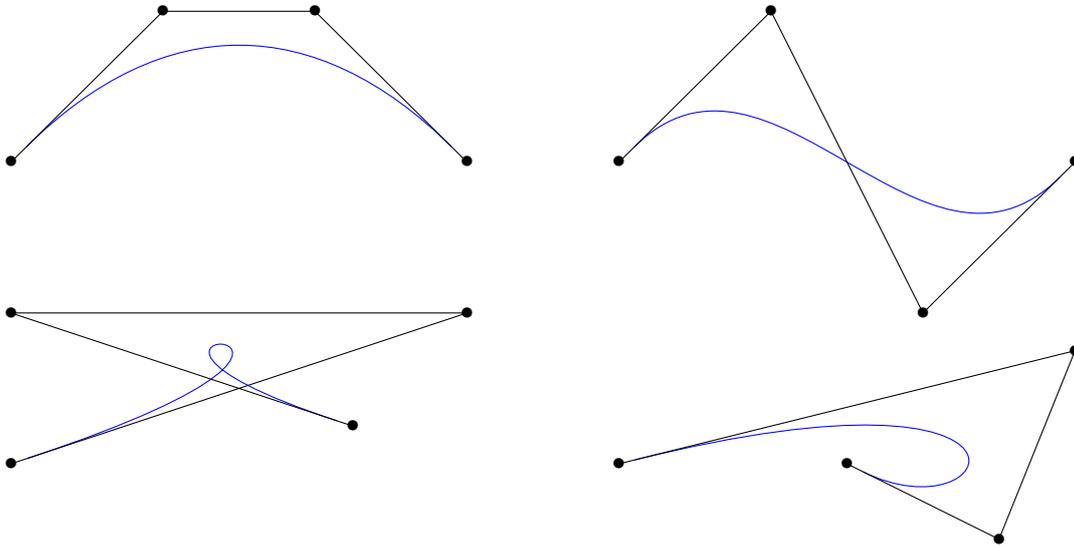
$$B_i^{n+1}(u) = uB_{i+1}^n(u) + (1-u)B_i^n(u) \text{ avec } B_{-1}^n = B_{n+1}^n = 0 \text{ et } B_0^0 = 1 \quad (1.12)$$

### 1.1.2 Courbe de Bézier

La courbe de Bézier est définie par :

$$\forall u \in [0, 1], p(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u)P_i \quad (1.13)$$

$P_i$  représente les points de contrôle. La ligne polygonale  $P_0P_1\dots P_n$  est appelée polygone caractéristique de la courbe ou polygone de contrôle. La courbe est d'ordre  $n+1$  et de degré  $n$ . Les polynômes de Bernstein définissent les fonctions de base ou de mélange de la courbe. Le nombre de points de contrôle est égal au degré  $n+1$ .



**Figure 1.2** Courbes de Bézier de degré  $n = 3$  et polygones de contrôle associés.

La courbe de Bézier forme une invariance affine puisque c'est une combinaison barycentrique. Les points de contrôle forment une enveloppe convexe dont les bases sont positives. La courbe de Bézier passe par le premier et le dernier point de contrôle puisque  $B_0^n = 1$  et  $B_n^n = 1$  donc  $p(0) = P_0$  et  $p(1) = P_n$ . Les polynômes ont une symétrie car  $B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$ . De plus la courbe de Bézier est tangente au premier et au dernier segment du polygone de contrôle.

## Dérivée d'une courbe de Bézier

La dérivée d'un polynôme donne :

$$\frac{dB_i^n(u)}{du} = n \left( B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u) \right) \quad (1.14)$$

La dérivée d'une courbe de Bézier donne donc :

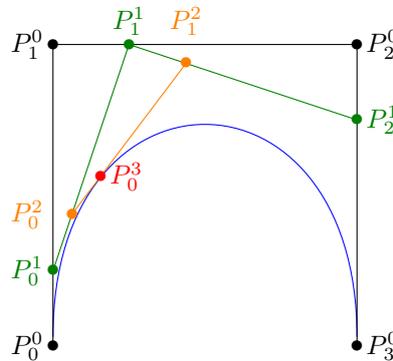
$$p'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) (P_{i+1} - P_i) \quad (1.15)$$

## Algorithme de Casteljau

L'algorithme de Casteljau permet de construire la courbe de Bézier de façon récursive pour approximer efficacement les polynômes écrits dans la base de Bernstein. Cet algorithme s'appuie sur la formule de récurrence suivante :

$$p(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_i^0 = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) P_i^1 = \dots = \sum_{i=0}^0 B_i^0(u) P_i^n = P_0^n \quad (1.16)$$

avec  $P_i^{k+1} = (1-u)P_i^k + uP_{i+1}^k$

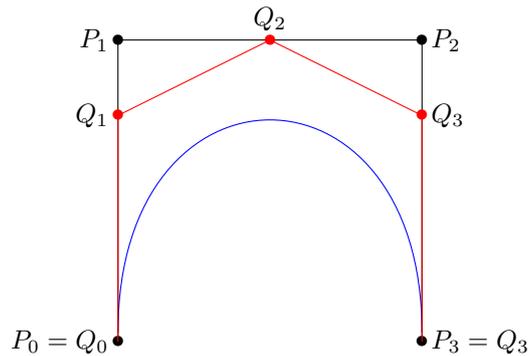


**Figure 1.3** Construction d'un point d'une courbe de Bézier de degré  $n = 3$  pour  $u = 0.25$  avec l'algorithme de De Casteljau.

## Élévation de degré

L'élévation de degré permet d'avoir plus de contrôle sur la courbe. Une courbe de Bézier de degré  $n$  peut donc toujours s'exprimer sous la forme d'une courbe de Bézier de degré  $n + 1$ . En augmentant le degré, le polygone de contrôle se rapproche de la courbe.

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i \quad (1.17)$$



**Figure 1.4** Élévation de degré d'une courbe de Bézier de degré  $n = 3$  à  $n = 4$ .

### Raccordement de courbes de Bézier

Soit deux courbes de Bézier  $p(u)$  et  $q(v)$ .  $p(u)$  est de degré  $n$ ,  $u \in [0, 1]$ , de points de contrôle  $P_i$ .  $q(v)$  est de degré  $m$ ,  $v \in [0, 1]$ , de points de contrôle  $Q_i$ . La condition sur le polygone de contrôle pour que les courbes soient raccordées en  $u = 1$  et  $v = 0$  pour une continuité :

- $C^0$  si  $P_n = Q_0$
- $G^1$  si  $P_n = Q_0$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$  et  $\overrightarrow{Q_0Q_1}$  sont colinéaires
- $C^1$  si  $P_n = Q_0$  et  $P_n - P_{n-1} = Q_1 - Q_0$
- $C^2$  si  $P_n = Q_0$  et  $P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2} = Q_2 - 2Q_1 + Q_0$

### Bilan

Le contrôle des courbes de Bézier est intuitif grâce au lissage. La courbe est incluse dans le polygone convexe. La mise en œuvre est simple. La courbe de Bézier permet de représenter tout polynôme à coefficients vectoriels avec peu de paramètres. Par contre le degré est lié au nombre de points de contrôle. La complexité augmente avec le nombre de points. Le contrôle est global. Cette courbe n'est pas adaptée pour l'interpolation directe d'un nuage de points.

### 1.1.3 Courbe B-spline

Les courbes de Bézier sont des B-splines de degré  $n$  avec  $n + 1$  points de contrôle. Les B-splines (Basis splines) sont des fonctions définies par morceaux qui peuvent avoir un nombre arbitraire de points de contrôle et qui permettent de spécifier le degré du polynôme qui va les interpoler.

La B-spline est définie à partir de  $n + 1$  fonctions de contrôle. Le degré de la courbe est  $k$ . Les  $P_i$  représentent les  $n + 1$  points de contrôle. Les  $t_i$  représentent les vecteurs nodaux. Il y a donc  $n$  intervalles pour  $n + 1$  points de contrôle.  $1 \leq k \leq n$  est le degré de la courbe donc  $k + 1$  est le nombre de points de contrôle qui influence un seul intervalle. Par conséquent il y a  $k + n + 2$  nœuds avec  $t_i \leq t_{i+1}$ .

L'équation d'une B-spline est définie par :

$$p(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)P_i \text{ avec } u_{min} \leq u < u_{max} \quad (1.18)$$

$N_{i,k}(u)$  est la fonction de base du point de contrôle  $P_i$ . De plus  $N_{i,k}(u)$  est définie récursivement par l'algorithme de Boor-Cox. Il s'agit d'une généralisation de l'algorithme de Casteljaou.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.19)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \quad (1.20)$$

### Dérivée d'une B-spline

La dérivée d'une fonction de base de degré  $k$  est :

$$\frac{dN_{i,k}(u)}{du} = \frac{k}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) - \frac{k}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \quad (1.21)$$

Ce qui nous donne la formule suivante pour la dérivée d'une courbe B-spline :

$$p'(u) = k \sum_{i=0}^{n-1} \frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} (P_{i+1} - P_i) \quad (1.22)$$

### Fonctions de base

On se propose de définir les fonctions de base pour un vecteur nodal  $t = \{0, 1, 2, 3\}$ . Pour  $k = 0$ , on applique la formule (1.19) :

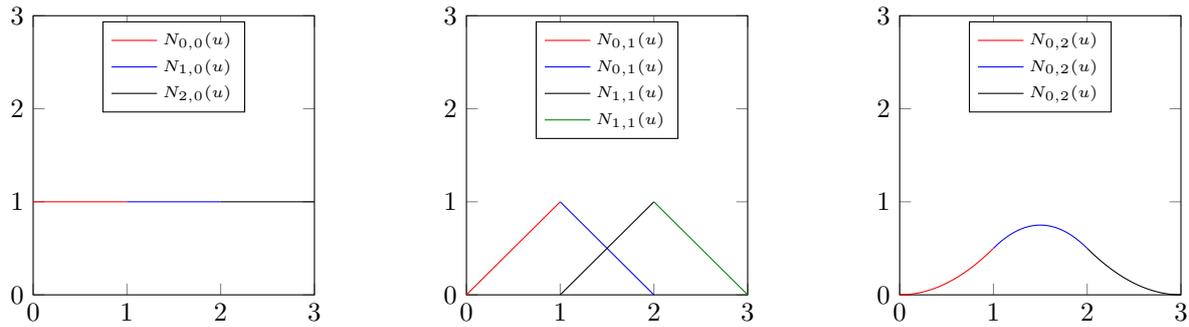
$$\begin{cases} N_{0,0}(u) = 1 \text{ pour } 0 \leq u < 1 \\ N_{1,0}(u) = 1 \text{ pour } 1 \leq u < 2 \\ N_{2,0}(u) = 1 \text{ pour } 2 \leq u < 3 \end{cases}$$

Pour les autres fonctions avec  $k = 1, 2$ , on applique la formule (1.20) :

$$\begin{cases} N_{0,1}(u) = \begin{cases} u \text{ pour } 0 \leq u < 1 \\ 2 - u \text{ pour } 1 \leq u < 2 \end{cases} \\ N_{1,1}(u) = \begin{cases} u - 1 \text{ pour } 1 \leq u < 2 \\ 3 - u \text{ pour } 2 \leq u < 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{0,2}(u) = \begin{cases} (u/2)u \text{ pour } 0 \leq u < 1 \\ (u/2)(2 - u) + ((3 - u)/2)(u - 1) \text{ pour } 1 \leq u < 2 \\ ((3 - u)/2)(3 - u) \text{ pour } 2 \leq u < 3 \end{cases} \end{cases}$$

Les fonctions sont linéairement indépendantes et symétriques. Elles forment une partition de l'unité et elles sont définies positives. Le support de base des fonctions est compact puisque l'influence est locale. De plus le degré de la courbe est indépendant du nombre de points de contrôle.



**Figure 1.5** Graphes des fonctions de base pour un vecteur nodal  $t = \{0, 1, 2, 3\}$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

### Vecteur nodal

Le vecteur nodal ou vecteur de nœud est uniforme puisque  $u_{i+1} - u_i = u_{i+2} - u_{i+1}$ . Par conséquent la variation de la taille d'un intervalle change la distribution de l'espace paramétrique des poids associés aux fonctions de contrôle. La répétition d'une valeur de nœud réduit de 1 la continuité de la courbe dans la zone affectée. Si on répète  $k + 1$  fois un nœud, la fonction de contrôle ne sera influencée que par ce nœud. La courbe passe donc par ce point avec une continuité  $C^0$ . Un vecteur nodal qui répète son premier et dernier nœud  $k + 1$  fois est dit fermé, autrement il est dit ouvert.

### Bilan

La courbe de Bézier est un cas particulier des B-Splines. La B-Spline est le modèle opérationnel le plus courant. Ce modèle est plus souple que les courbes de Bézier puisque le contrôle est local et le degré de la courbe est indépendant du nombre de points de contrôle. Le vecteur nodal permet de bien contrôler le modèle. Les inconvénients de ce modèle sont la complexité algorithmique et la difficile maîtrise du vecteur nodal. En outre les coniques ne peuvent pas être représentées par des polynômes définis par morceaux.

#### 1.1.4 Courbe NURBS

Les B-splines rationnelles non uniformes, plus communément désignées par leur acronyme anglais NURBS pour Non-Uniform Rational Basis Splines, correspondent à une généralisation des B-splines. Les NURBS permettent de représenter fidèlement des coniques. En effet différents poids associés aux points de contrôle modifient le facteur d'attraction. On multiplie les coordonnées de  $P_i$  avec un poids  $\omega$  dans l'équation de la B-spline (1.18).

L'équation d'une NURBS est donc définie par :

$$p^\omega(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) P_i^\omega \quad \text{avec } u_{\min} \leq u < u_{\max} \quad (1.23)$$

Le passage en coordonnées cartésiennes se fait en divisant  $p^\omega(u)$  avec la quatrième coor-

donnée :

$$p^\omega(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) \begin{bmatrix} \omega_i x_i \\ \omega_i y_i \\ \omega_i z_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$p(u) = \sum_{i=0}^n \frac{N_{i,k}(u)\omega_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(u)\omega_j} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$p(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,k}(u)P_i \text{ avec } R_{i,k}(u) = \frac{N_{i,k}(u)\omega_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(u)\omega_j} \quad (1.26)$$

Si tous les poids sont égaux à 1, la courbe NURBS est réduite à une courbe B-spline. De plus les NURBS sont rationnelles. En effet  $R_{i,k}(u)$  est une fonction rationnelle de degré  $k$  en  $u$ . Les fonctions sont définies positives. Le support est local puisque la fonction rationnelle  $R_{i,k}(u)$  est une fonction composite de fonctions rationnelles de degré  $k$ . Sur chaque intervalle de  $u$  au plus  $k + 1$  fonctions de base de degré  $k$  sont non-nulles. La somme des fonctions de degré  $k$  sur chaque intervalle est égale à 1, ce qui prouve la partition de l'unité. Si le nombre de nœuds est  $m + 1$ , le degré est  $k$  et le nombre de fonctions de base de degré  $k$  est  $n + 1$  alors  $m = n + k + 1$ . Si la multiplicité d'un nœud est  $p$ , la fonction de base  $R_{i,k}(u)$  est de continuité  $C^{k-p}$ . Si  $\omega_i = c$ ,  $c$  étant une constante non nulle, alors  $R_{i,k}(u) = N_{i,k}(u)$ .

La courbe NURBS  $p(u)$  est une courbe définie par morceaux dont chaque morceau est une courbe rationnelle de degré  $k$ . L'égalité  $m = n + k + 1$  doit être satisfaite. Une courbe dont le vecteur nodal est fermé passe par les points de contrôle  $P_0$  et  $P_n$ . Le polygone de contrôle est l'enveloppe convexe de la courbe.  $p(u)$  est de continuité  $C^{k-p}$  à un nœud de multiplicité  $p$ .

Plus le poids est grand et plus la courbe se rapproche du point de contrôle. Plus le poids est faible et plus la courbe s'éloigne du point de contrôle.

## Bilan

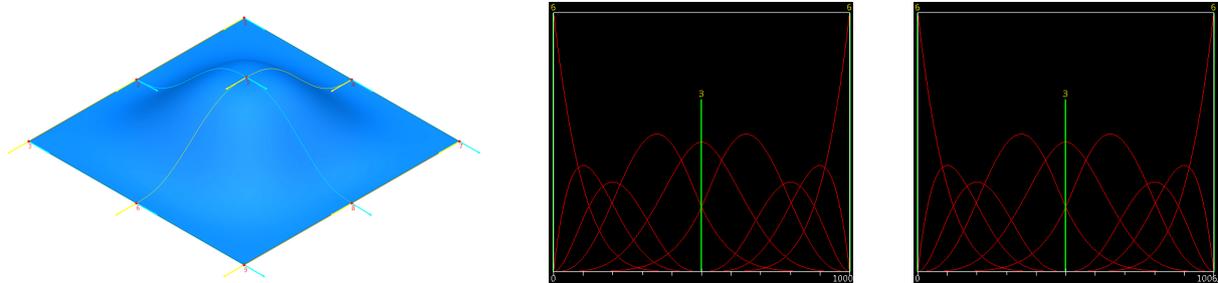
La modification de la courbe NURBS peut se faire simplement par les poids attachés aux nœuds. L'algorithme de Casteljau se généralise et il s'applique à la courbe NURBS. On divise par la valeur finale de la coordonnée du poids pour retrouver les coordonnées cartésiennes.

### 1.1.5 Surface NURBS

La courbe NURBS de paramètre  $u$  est étendue à la surface NURBS de paramètres  $u$  et  $v$ . Une approche par le contrôle de multipléts sur la surface NURBS permet de créer des surfaces complexes chez Dassault Aviation.

### Surface NURBS mono-carreau

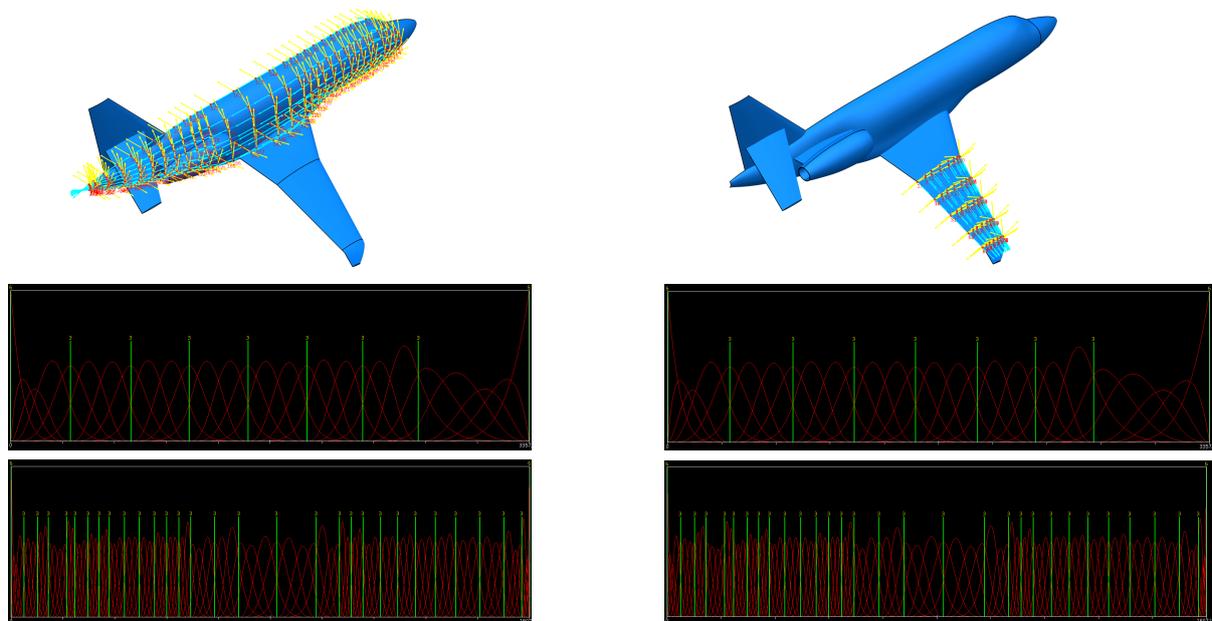
La figure 1.6 illustre un carreau surfacique quintique. Ce carreau est symétrique puisque les fonctions de base sont les mêmes pour  $u$  et  $v$ .



**Figure 1.6** Surface NURBS mono-carreau — Carreau de degré 5 avec 9 multiplats. Visualisation des vecteurs tangents  $S_u$  et  $S_v$  du carreau. Vecteurs nodaux et fonctions de base en  $u$  et en  $v$ .

### Surface NURBS multi-carreaux

La figure 1.7 illustre la surface multi-carreaux du Generic Business Jet qui est l'objet de notre étude par la suite.



**Figure 1.7** Surface NURBS multi-carreaux — Generic Business Jet composé de carreaux de degré 5. Visualisation des vecteurs tangents  $S_u$  et  $S_v$  des multiplats des carreaux fuselage et voilure externe. Vecteurs nodaux et fonctions de base en  $u$  et en  $v$ .

### 1.1.6 Bilan

Cette construction géométrique est le support de l’adaptation de maillage surfacique géométrique basée sur la courbure qui est développée dans les chapitres suivants. Deux approches d’évaluation de la courbure seront explorées dans le chapitre 2. Une approche se base sur ce support car les dérivées secondes de la surface sont disponibles mais ce calcul est coûteux. Une autre approche basée sur le maillage uniquement permet d’évaluer rapidement la courbure mais celle-ci est approchée.

## 1.2 Code de calcul

Le code **AeTher** (AeroThermodynamique) est utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible exprimé en variables entropiques à l’aide de la méthode des éléments finis stabilisés par SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin).

La formulation éléments finis permet l’utilisation de maillages non-structurés très adaptés à des configurations complexes [18]. L’utilisation des variables entropiques symétrise les équations de Navier-Stokes et elle permet d’obtenir des propriétés thermodynamiques [47], [63]. Cette formulation facilite l’ajout d’équations de chimie pour traiter les espèces réactives apparaissant dans des écoulements hypersoniques [19].

De nombreux modèles de turbulence ( $k - \varepsilon$ , Spalart-Allmaras, etc ...) sont disponibles pour les calculs stationnaires utilisant les équations RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Les calculs temporels en DES/LES (Detached Eddy Simulation/Large Eddy Simulation) sont possibles grâce à la méthode classique ZDES (Zonal Detached Eddy Simulation) [25], et également grâce à une approche originale utilisant la méthode VMS (Variational MultiScale) [56], [83].

Des fonctions de forme d’ordre élevé sont utilisables pour améliorer la convergence spatiale du schéma [70]. Ce code de calcul peut fonctionner en parallèle en découpant le domaine en plusieurs sous domaines [48].

D’abord nous introduisons les équations de Navier Stokes qui régissent le comportement des fluides. Puis nous écrivons ce système sous forme matricielle. Enfin nous symétrisons le problème grâce à une formulation entropique.

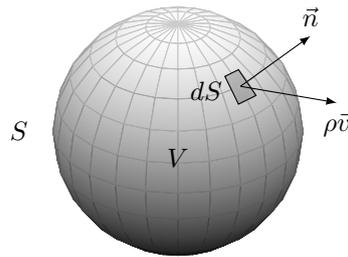
### 1.2.1 Équations de Navier-Stokes

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens. Deux scientifiques sont à l’origine de ces équations. En 1821 Henri Navier définit les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. Il introduit la notion de viscosité dans les équations d’Euler. Plus tard, Sir Georges Gabriel Stokes reprend ces lois et il les formalise mathématiquement. Il est possible de trouver l’application de ces équations dans le livre de Déleroy et Reynald pour des cas industriels [26].

Ces équations générales de conservation sont une équation scalaire de continuité pour la conservation de la masse, trois équations scalaires de conservation de la quantité de mouvement et une équation scalaire de conservation de l'énergie.

### Équation de continuité

On considère la masse fluide contenue dans le volume  $V$  fixe et délimité par la surface  $S$ , figure 1.8. Le volume  $V$  ne contient aucun obstacle. Le vecteur  $\vec{n}$  représente la normale unitaire.  $\rho$  représente la masse volumique. Le vecteur  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse.



**Figure 1.8** Équation de continuité — Volume de contrôle pour l'application du principe de conservation de la masse.

La variation de la masse volumique contenue dans le volume  $V$  fixe est égale au flux de masse à travers la surface  $S$  limitant  $V$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \iiint_V \rho dV \right] = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.27)$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.28)$$

On applique le théorème de la divergence et on trouve l'équation de la continuité générale avec les équations (1.27) et (1.28) :

$$\boxed{\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0} \quad (1.29)$$

Cette équation est vérifiée quel que soit le volume  $V$  fixe. L'équation locale est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.30)$$

ce qui donne en notations tensorielles et en système de coordonnées orthonormé :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.31)$$

On utilise la convention de sommation d'Einstein. L'indice est répété pour indiquer la sommation.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0} \quad (1.32)$$

## Équations de conservation de la quantité de mouvement

La loi de Newton impose :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.33)$$

Pour un système à masse variable, nous avons :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (1.34)$$

Le terme de quantité de mouvement est développé :

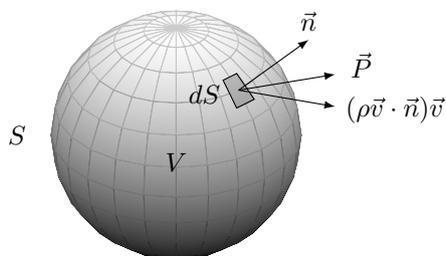
$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \vec{v} dv \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_V \rho \vec{v} dV \right) + \iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS \quad (1.35)$$

Le bilan des forces appliquées au système donne des actions à distance ou forces massiques telles que la pesanteur et les forces électromagnétiques

$$\iiint_V \rho \vec{f} dV \quad (1.36)$$

et des forces de contact s'exerçant sur la frontière  $S$  où  $\vec{P}$  représente le vecteur de tension exprimant les actions de contact au sein d'un fluide, figure 1.9

$$- \iint_S \vec{P} dS \quad (1.37)$$



**Figure 1.9** Équation de conservation de la quantité de mouvement — Volume de contrôle pour l'application de l'équation fondamentale de la mécanique.

On introduit dans le bilan des forces : les équations de quantité de mouvement (1.35) et les forces appliquées au système (1.36) et (1.37). On trouve l'équation générale de la conservation de quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_V \rho \vec{v} dV \right) + \iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S \vec{P} dS} \quad (1.38)$$

Le vecteur tension  $\vec{P}$  s'exprime pour un fluide Newtonien sous la forme :

$$\vec{P} = -\vec{T} \cdot \vec{n} \quad (1.39)$$

Le vecteur  $\vec{P}$  est le produit contracté du tenseur des contraintes  $\overline{\overline{T}}$  par le vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ . Le théorème de la divergence avec la notation indicielle tensorielle donne l'équation locale :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.40)$$

Le calcul de  $\vec{P}$  ou de  $\overline{\overline{T}}$  nécessite une loi de comportement pour le fluide considéré. On peut exprimer ce tenseur des contraintes en variables tensorielles :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.41)$$

$-p\delta_{ij}$  représente le tenseur sphérique avec la pression  $-p$  et le tenseur unité  $\delta_{ij}$ .  $\tau_{ij}$  représente le tenseur symétrique des contraintes visqueuses. L'action de contact  $\vec{P}dS$  se décompose en une force normale de pression à  $dS$  et une force tangentielle de frottement à  $dS$ . L'équation locale de la conservation de la quantité de mouvement est :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i} \quad (1.42)$$

### Équation de l'énergie

L'équation de la variation de l'énergie totale de la masse contenue dans le volume  $V$  est :

$$E_T = \iiint_V \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (1.43)$$

où  $e_T$  est l'énergie totale spécifique par unité de masse :

$$e_T = e + \frac{v^2}{2} \quad (1.44)$$

La variation de  $E_T$  pendant le temps  $\delta t$  est :

$$\delta E_T = \frac{\partial E_T}{\partial t} \delta t \quad (1.45)$$

La variation de  $E_T$  résulte de processus thermodynamique interne et de variations de vitesse ainsi que du flux d'énergie à travers la surface  $S$  délimitant  $V$ . Par conséquent la variation d'énergie totale du système  $\delta E_T$  se décompose en un terme de volume  $\delta(E_T)_1$  et un terme de flux  $\delta(E_T)_2$ .

$$\delta E_T = \delta(E_T)_1 + \delta(E_T)_2 \quad (1.46)$$

$$\delta E_T = \left\{ \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \iint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right\} \delta t \quad (1.47)$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, le bilan de l'énergie est la somme du travail  $\delta W$  et de la chaleur  $\delta Q$  reçus par le système pendant le temps  $\delta t$  :

$$\delta E_T = \delta W + \delta Q \quad (1.48)$$

L'évaluation du travail reçu donne le travail des forces de contact sur la surface  $S$

$$\delta W_1 = - \left( \iint_S \vec{P} \cdot \vec{v} dS \right) \delta t \quad (1.49)$$

et le travail des forces de masse dans le volume  $V$

$$\delta W_2 = \left( \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV \right) \delta t \quad (1.50)$$

L'évaluation de la chaleur reçue est obtenue par la loi de Fourier :

$$\delta Q = - \left( \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS \right) \delta t \quad (1.51)$$

avec  $\vec{q}$  le flux de chaleur représentant l'énergie reçue par unité de temps et de surface.

L'équation générale de la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e_T) dV + \iint_S \rho e_T \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \iint_S \vec{P} \cdot \vec{v} dS + \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS} \quad (1.52)$$

L'équation locale de la conservation de l'énergie avec le théorème de la divergence et la notation tensorielle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j e_T) = \rho f_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i T_{ij} - q_j) \quad (1.53)$$

en exprimant le tenseur  $T_{ij}$  avec l'équation (1.41)

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_T u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i u_j - \frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}} \quad (1.54)$$

L'enthalpie totale spécifique  $h_T$  est donnée par :

$$h_T = e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (1.55)$$

On peut donc réécrire l'équation de l'énergie locale (1.54) avec l'enthalpie totale :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho h_T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h_T u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i u_j - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}} \quad (1.56)$$

### 1.2.2 Écriture matricielle du système

Les équations locales (1.32), (1.42), (1.54) forment un système de 5 inconnues et de 5 équations. On néglige les forces à distance.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial(\rho e_T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_T u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Il est possible de décliner ce système d'équations sous une forme matricielle conservative. On définit le vecteur des variables conservatives  $U$ . Les vecteurs flux d'Euler  $F_i^E$  et flux diffusifs  $F_i^D$  s'identifient depuis le système d'équation (1.57) :

$$U = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e_T \end{pmatrix} \quad F_i^E = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + p \delta_{1j} \\ \rho u_j u_2 + p \delta_{2j} \\ \rho u_j u_3 + p \delta_{3j} \\ \rho u_j e_T + p u_j \end{pmatrix} \quad F_i^D = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i - q_j \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Les équations de Navier-Stokes compressibles se mettent sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i^E}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i^D}{\partial x_i} \quad (1.59)$$

que l'on note par la suite :

$$U_{,t} + F_{i,i}^E = F_{i,i}^D \quad (1.60)$$

Si l'on note  $A_i$  la matrice jacobienne du flux d'Euler  $F_i^E$  alors  $F_{i,i}^E = A_i U_{,i}$ . De même, on définit les matrices  $K_{ij}$  de diffusivité tel que  $F_{i,i}^D = K_{ij} U_{,j}$ . On obtient une écriture matricielle des équations de Navier-Stokes compressibles :

$$U_{,t} + A_i U_{,i} = K_{ij} U_{,j} \quad (1.61)$$

Les matrices  $A_i$  et  $K_{ij}$  dépendent de  $U$ , donc l'équation (1.61) est non linéaire.

### 1.2.3 Symétrisation et formulation entropique

Il est nécessaire d'avoir des propriétés symétriques définies positives pour les matrices du système. Un changement de variables dit entropiques est utilisé. Il se place dans le cadre théorique proposé par Harten [42] et Tadmor [81]. Soit la fonction d'entropie généralisée  $H(U)$  tels que définie par Hughes, Franca et Mallet [47] et Mallet [63] :

$$H(U) = \rho s \quad (1.62)$$

où  $s$  est l'entropie. On définit les variables  $V$  entropiques par :

$$V = \left( \frac{\partial H}{\partial U} \right)^T \quad (1.63)$$

On exprime plus simplement le vecteur  $V$  des variables entropiques en utilisant les hypothèses d'un gaz parfait divariant avec  $h$  l'enthalpie massique :

$$V = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} h - Ts - \frac{u^2}{2} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

$$A_0 V_{,t} + \tilde{A}_i V_{,i} = \left( \tilde{K}_{ij} V_{,j} \right)_{,i} \quad (1.65)$$

Les matrices  $A_0$  et  $\tilde{A}_i$  sont symétriques définies positives et la matrice  $K$  est symétrique définie semi-positive. De plus, la formulation entropique permet d'imposer l'inégalité thermodynamique de Clausius-Duhem. Ainsi, l'utilisation des variables entropiques permet facilement d'intégrer au système des équations de chimie.

## 1.2.4 Bilan

La formulation du problème aérodynamique permet maintenant de mieux comprendre le système que résout le code de calcul **AeTher**. Pour plus de détails sur la matrice de stabilisation des éléments finis, la linéarisation des équations de Navier-Stokes et la différenciation automatique, on peut consulter les travaux de mes prédécesseurs, Yser et Bissuel, sur la simulation numérique [83] et la résolution des équations [7] avec ce code de calcul. Les travaux de cette thèse sont destinés principalement à fournir des maillages surfaciques adaptés géométriquement pour ce code de calcul pour augmenter la précision des résultats. Mais nous allons voir dans la section suivante que ce code s'intègre dans une chaîne plus vaste : la boucle d'optimisation de formes.

## 1.3 Boucle d'optimisation automatique de formes

Au cours des dernières années, l'optimisation automatique de formes aérodynamiques s'est avérée très utile dans le processus de conception définissant la forme détaillée de l'avion. En effet ce processus d'optimisation aide l'ingénieur aérodynamicien à concevoir les formes de l'avion. De plus cette boucle d'optimisation a permis de réduire considérablement le coût de développement et la durée du cycle de conception en tenant compte des aspects multi-objectifs et multi-contraintes du problème.

L'optimisation automatique de formes aérodynamiques permet de minimiser une fonction coût sous contraintes, en jouant sur des variables aérodynamiques ou issues d'autres

disciplines qui paramétrisent la forme. La fonction coût est la quantité que l'on cherche à minimiser. Elle est issue de données aérodynamiques telle que la traînée de l'avion ou un écart à une répartition de pression objectif, mais elle peut également inclure dans sa formulation des données issues d'autres disciplines telle que la structure. Les contraintes peuvent être d'ordre aérodynamique pour respecter une portance minimale ou bien d'ordre géométriques pour respecter une envergure maximale de l'aile, une épaisseur ou un volume minimal. Enfin l'optimisation automatique de formes nécessite une méthode de déformation de la surface. Cela implique que la surface soit facilement modifiable de manière à respecter des paramètres métiers.

D'abord nous décrivons la boucle d'optimisation et ses acteurs. Les articles de Daumas, Dinh, Kleinveld et Rogé présentent cette boucle dans un contexte d'optimisation automatique de formes à l'aide de la CAO paramétrique appliquée à la réduction du bang sonique du SSBJ (Super Sonic Business Jet) [24] et sur le GBJ (Generic Business jet) dans des conditions de croisière transsonique. La CAO paramétrique différenciée est utilisée dans le cadre de cette optimisation automatique de formes aérodynamiques. Rogé et Martin présentent une adaptation de maillage anisotrope orientée objectif dans le cadre de cette boucle d'optimisation [77], [64]. Ils reprennent la formulation de Venditti et Darmofal [82] d'une méthode d'adaptation anisotrope pour estimer et réduire l'erreur commise sur les fonctions d'intérêt issues d'équations aux dérivées partielles. La procédure est basée sur une formulation adjointe grâce à laquelle l'erreur estimée sur la fonction est directement reliée aux résidus locaux des solutions primale et duale. Ils proposent une extension de cette méthode au cas anisotrope.

D'autres boucles d'optimisation de formes existent. On peut citer comme précurseurs Reuters, Jameson, Alonso, Rimlinger et Saunders et leur méthode d'optimisation de formes pour des problèmes de conception aérodynamique impliquant des configurations d'aéronefs complexes et de multiples points de conception soumis à des contraintes géométriques [76]. Les performances aérodynamiques sont évaluées à l'aide d'un ensemble d'équations gouvernantes de haute fidélité discrétisées sur la conformité des maillages multiblocs. Le processus de conception est considérablement accéléré grâce à l'utilisation d'une méthode adjointe et de la parallélisation.

Plus récemment Botasso utilise un algorithme Gauss-Seidel pour optimiser une grille non structurée tridimensionnelle par adaptation afin de se conformer à une métrique donnée [13]. La fonction objectif du processus d'optimisation est basée sur la valeur maximale d'un résidu élémentaire mesurant la distance de n'importe quel simplexe du réseau à la métrique cible locale. Cela conduit à une équation matricielle, dont le résidu est utilisé pour piloter l'optimisation par la définition de la fonction objectif. On peut encore citer Kim [49], Seo [79], Gauci [34], Skinner [80] et Belme [5].

Un résultat encourageant dans la motivation cette thèse, Kouhi travaille sur l'optimisation de formes aérodynamiques à l'aide d'un remaillage adaptatif [52]. Ce travail de recherche montre les résultats obtenus avec un schéma de remaillage adaptatif couplé à un algorithme génétique et un outil d'analyse CFD (Computational fluid dynamics) pour résoudre deux problèmes pratiques d'optimisation de la conception des profils aérodynamiques transsoniques. L'optimisation couplée à la technique de remaillage adaptatif converge 95% plus rapidement avec une amélioration de la précision des résultats de 38% par rapport à l'optimisation utilisant un maillage uniforme.

En résumé le processus d'optimisation global comprend un modelleur CAO paramétrique différencié et un solveur CFD en combinaison avec une approche adjointe discrète. Le but est de calculer le gradient du modèle CAO à partir du gradient exact fourni par le solveur et une différenciation du modelleur CAO. Ce gradient donne le coût et les contraintes à l'optimiseur qui aura un impact sur les variables de conception et les variables aérodynamiques.

D'abord nous présentons la boucle d'optimisation, puis nous nous intéressons à la déformation de type Laplacien utilisée. Enfin nous étudions la fonction à base radiale comme opérateur de déformation.

### 1.3.1 Optimiseur

La flexibilité opérationnelle étant un facteur clé dans le monde des avions d'affaires, les exigences de conception aérodynamique doivent inclure des signatures sonores particulières permettant une croisière subsonique, sonique ou supersonique au-dessus des terres en plus d'assurer une finesse maximale. Le processus d'optimisation automatique de formes est présenté sur la figure 1.10.

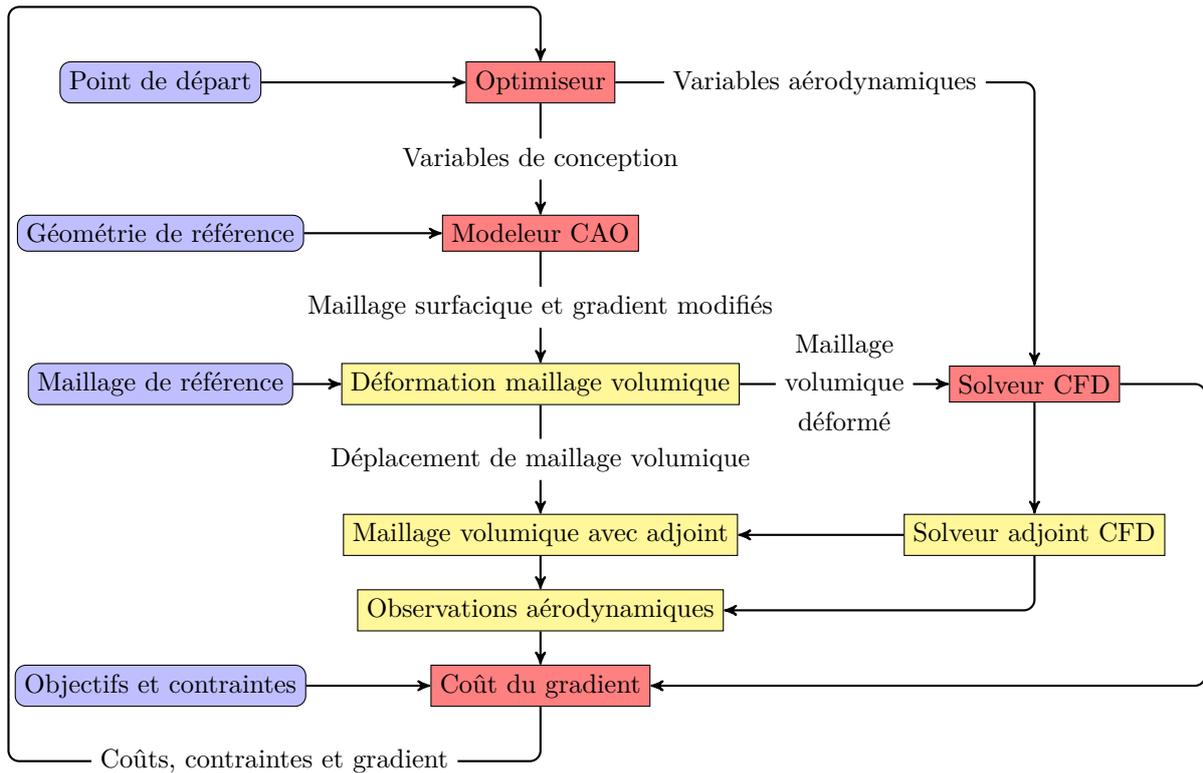


Figure 1.10 Boucle d'optimisation automatique de formes aérodynamiques.

L'optimiseur pilote l'ensemble du processus. Il utilise des évaluations de gradients obtenues par une formulation adjointe basée sur les articles de Lions [57] et Dinh [28]. L'optimiseur utilisé pour les cas contraints est l'algorithme de point intérieur décrit dans l'article de Herskovits [44]. La recherche unidimensionnelle est effectuée par la méthode Wolfe. En optimisation, les critères de Wolfe sont un ensemble d'inégalités permettant d'optimiser la

méthode de recherche linéaire. Plus précisément, cela permet de sélectionner un pas adéquat pour la recherche linéaire.

Une particularité est l'inclusion d'un modèleur basé sur la CAO dans la boucle qui permet également de gérer les contraintes géométriques. Une partie des contraintes du problème d'optimisation en question peut donc être traitée au niveau du module plutôt qu'au niveau de la boucle, contribuant ainsi à une nouvelle réduction des coûts.

### 1.3.2 Modèleur géométrique

Le modèleur géométrique **GANIMEDE** gère les variables locales et globales de conception. Les modifications au niveau du point de contrôle sont les valeurs de position, de tangentes et de courbures qui sont des variables locales de conception. Les variables globales de conception redéfinissent plusieurs points de contrôle permettant de modifier les caractéristiques tels que l'épaisseur, la torsion et le calage des sections d'ailes.

Lorsque la géométrie est déformée pendant le processus d'optimisation, son nouveau maillage surfacique est déformé à iso-topologie. Le maillage volumique initial est ensuite déformé par déformation des nœuds du maillage volumique avec un opérateur de type laplacien à l'aide du nouveau maillage surfacique.

### 1.3.3 Solveur CFD

L'écoulement aérodynamique est fournie par le solveur **AeTher** sur des maillages. Les coûts et les contraintes associés par rapport aux objectifs fixés sont évalués par un outil de fonction coût distinct. Ainsi les gradients fournis à l'optimiseur sont évalués à l'aide d'une formulation adjointe. La méthode adjointe rend indépendant du nombre de variables, le calcul des sensibilités du coût par rapport aux variables de conception. En résumé la boucle d'optimisation utilise d'abord un adjoint discret pour les équations d'états aérodynamiques et ensuite un adjoint discret pour la déformation de maillage.

### 1.3.4 Gradient

La minimisation de la fonction coût se fait à l'aide d'une méthode utilisant un gradient. Cela demande le calcul des dérivées partielles des observations aérodynamiques par rapport aux variables géométriques. Il faut donc connaître les dérivées partielles du champ aérodynamique par rapport aux variables géométriques.

Le schéma numérique de résolution des équations de Navier Stokes non-linéaires est linéarisé par différenciation automatique pour obtenir le gradient discret. L'utilisation de ce gradient permet toujours de diminuer la fonction coût sur le maillage choisi.

Dans les problèmes pratiques de conception, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes géométriques qui peuvent apparaître. Pour des raisons de fabrication, on peut vouloir fixer la position de certaines entités géométriques les unes par rapport aux autres.

Pour de nombreux avions, y compris les très grands concepts de transports commerciaux, une contrainte de portance doit être incluse d'un point de vue opérationnel dans le processus de conception. L'inclusion de contraintes géométriques dans le processus de conception permet d'évaluer ce qui est réalisable étant donné un espace de conception limité lorsqu'un couplage fort avec une autre discipline n'est pas disponible.

Un autre cas d'intérêt pour l'imposition de contraintes existe lors de la modernisation d'un avion. Ainsi les contraintes géométriques seront directement gérées par le modelleur CAO. Ceci contribue à une réduction des coûts par rapport au fait d'avoir l'optimiseur pour faire face aux contraintes nécessitant un calcul de gradient via l'évaluation du multiplicateur de Lagrange. En éliminant les contraintes au niveau de la CAO, le processus d'optimisation se déroule dans un espace variable réduit, en les intégrant directement dans la génération de la nouvelle forme. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux opérateurs de déformation.

### 1.3.5 Déformation Laplacien

Dans le cadre d'une optimisation de formes utilisant les gradients directs, les variables de définition de la forme caractérisent un champ de déplacement des nœuds de la peau. La propagation de ce déplacement dans le domaine est effectuée par un opérateur linéarisé de déformation de maillage qui utilise un opérateur de type Laplacien.

Concernant les travaux antérieurs sur la déformation de maillage, on peut consulter les grandes déformations en forgeage grâce à Coupez [21], l'application de la méthodologie de corps mobiles adaptatifs non structurés à la simulation de la séparation du réservoir de carburant d'un F-16 par Baum [3] et également les maillages mobiles en simulation avec Olivier [71] et Barral [2].

Le Laplacien est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence. Intuitivement, il combine la description statique d'un champ décrit par son gradient, aux effets dynamiques de la divergence de ce champ dans l'espace. Le Laplacien permet ainsi de modéliser un problème de diffusion.

Soit  $\Omega$  un domaine de frontière  $\Gamma$  et  $u$  un champ de déplacement connu sur  $\Gamma$ . L'équation de Poisson  $\Delta u = 0$  permet de modéliser la diffusion de  $u$  dans le domaine  $\Omega$  à partir de sa frontière  $\Gamma$ , ce qui est équivalent à un problème de minimisation :

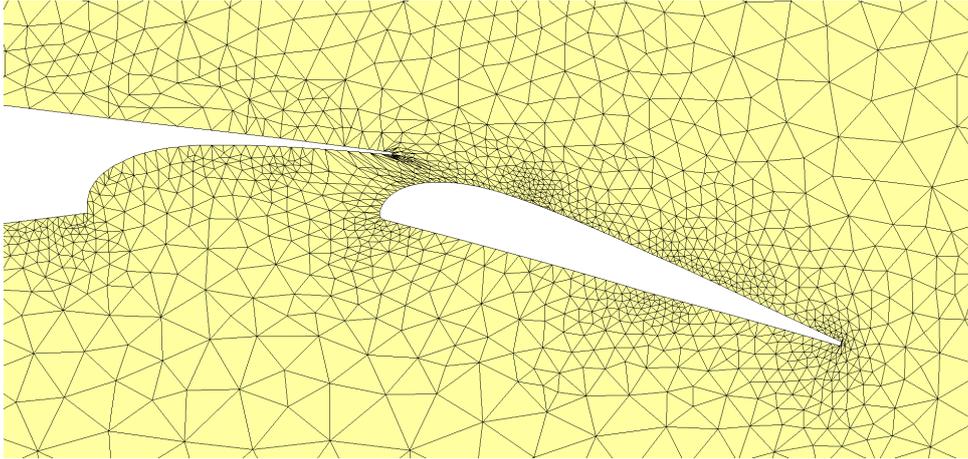
$$\min \|\nabla u\|_{L^2} \quad (1.66)$$

avec  $\nabla u$  le gradient du champ déplacement  $u$ . On peut encore écrire ce problème avec une formulation faible sous la forme :

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} {}^t \nabla u \nabla u \, d\Omega \quad (1.67)$$

représentant une minimisation d'énergie dont la solution est harmonique.

La figure 1.11 montre le maillage déformé par un opérateur de déformation de type Laplacien pour le déplacement d'un volet vers l'arrière par rapport au corps principal.



**Figure 1.11** *Maillage 2d plan déformé par Laplacien — le volet est déplacé vers l'arrière.*

### 1.3.6 Déformation avec une fonction à base radiale

Un déplacement peut être effectué par une fonction à base radiale (RBF). Buhmann présente la théorie et l'implémentation des RBF [16]. Une RBF est une fonction à valeur réelle  $\varphi$  dont la valeur dépend uniquement de la distance entre l'entrée et des points fixes. Soit l'origine, de sorte que  $\varphi(x) = \varphi(\|x\|)$ , ou un autre point fixe  $c$ , appelé centre, de sorte que  $\varphi(x) = \varphi(\|x - c\|)$ . Toute fonction  $\varphi$  qui satisfait la propriété  $\varphi(x) = \varphi(\|x\|)$  est une fonction radiale. La distance est généralement la distance euclidienne, bien que d'autres mesures soient parfois utilisées. Elles sont souvent utilisées comme un ensemble  $\varphi_k$  qui forme la base d'une fonction espace d'intérêt.

Les fonctions à base radiale sont utilisées pour établir une fonction de déplacement  $u$  à partir des nœuds déplacés de la frontière d'un corps. La fonction de déplacement est représentée comme une somme de  $n$  fonctions à base radiale, chacune associée à un point fixe  $P_i$  de la frontière  $\Gamma$ . Elle est pondérée par un coefficient approprié  $\omega_i$ . Les poids sont estimés en utilisant les méthodes matricielles des moindres carrés linéaires, car la fonction d'approximation est linéaire dans les poids.

$$u(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \varphi(\|P - P_i\|) \quad (1.68)$$

Le problème est découpé sur deux coordonnées pour le cas 2d et trois coordonnées pour le cas 3d.

Plusieurs types de RBF existent et notamment les types de RBF infiniment lisses. Ces RBF sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  définies positives strictement ce qui nécessite le réglage d'un paramètre de forme  $\varepsilon$ . Les RBF les plus utilisées sont :

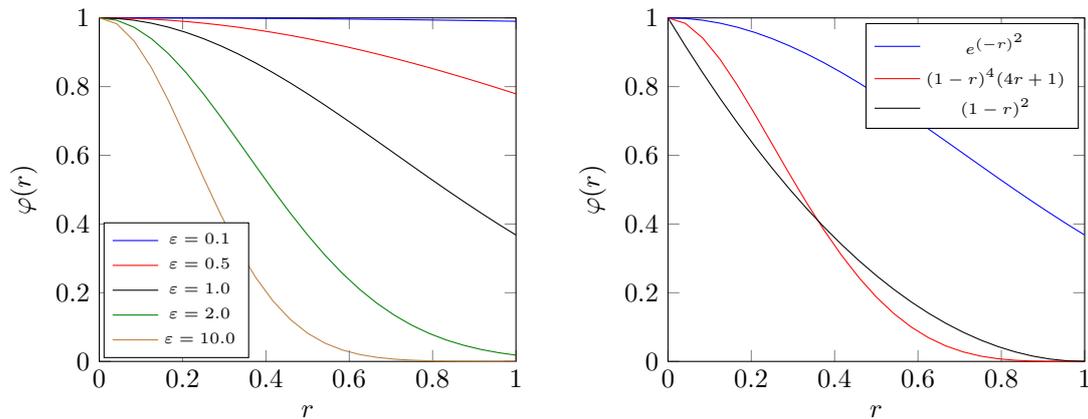
$$\varphi(r) = e^{(-\varepsilon r)^2} \quad \text{Gaussienne} \quad (1.69)$$

$$\varphi(r) = (1 - r)^4(4r + 1) \quad (1.70)$$

$$\varphi(r) = (1 - r)^2 \quad (1.71)$$

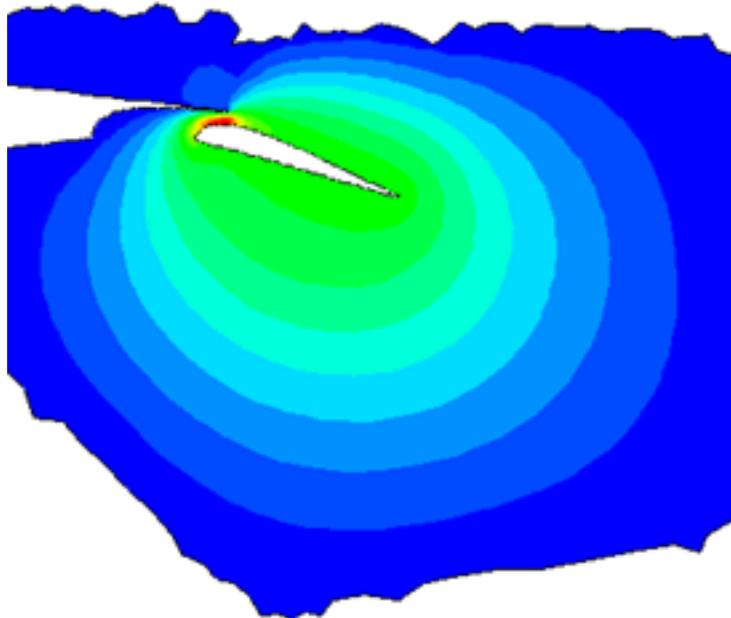
en posant  $r = \|x - x_i\|$  pour la première coordonnées de P. La figure 1.12 montre les graphes des différentes fonctions à base radiale. On s'aperçoit que le paramètre  $\varepsilon$  de la gaussienne

permet de piloter le rayon d'influence du déplacement des nœuds fixes sur les nœuds à déplacer. Plus  $\varepsilon$  est petit et plus le rayon d'influence est grand et inversement.



**Figure 1.12** Types de fonction à base radiale infiniment lisses — À gauche variation de  $\varepsilon$  pour la fonction gaussienne et à droite les trois fonctions à base radiale avec  $\varepsilon = 1.0$ .

La figure 1.13 montre le champ de déplacement d'un volet vers l'arrière par rapport au corps principal avec une fonction à base radiale gaussienne.



**Figure 1.13** Maillage 2d plan déformé par une fonction à base radiale gaussienne — le volet est déplacé vers l'arrière, visualisation du champ de déplacement.

### 1.3.7 Bilan

L'application de cet outil automatique de conception impliquant des contraintes s'avère très utile pour atteindre un équilibre entre des objectifs concurrents. Il permet de mieux

comprendre les phénomènes physiques et, grâce à une analyse de sensibilité, d'évaluer l'importance relative des différentes variables de conception jouant un rôle dans l'amélioration d'une configuration donnée. De ce fait une fois le problème bien posé, les gains peuvent être substantiels.

Mais la déformation de maillage à iso-topologie et iso-nombre de nœuds implique une limitation du domaine de recherche dans le cas de grandes déformations. En effet lorsque la déformation est trop importante par rapport à la géométrie de référence, la répartition des mailles devient mauvaise pour la bonne représentation de la géométrie ou de la physique. Il est donc impératif d'adapter le maillage pour avoir une bonne discrétisation pour le solveur, des meilleurs résultats et des temps de calcul réduits.

## 1.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de mieux cerner le concept d'optimisation de formes aérodynamiques chez Dassault Aviation à travers le modeler géométrique **GANIMEDE**, le code de calcul **AeTher** et la boucle d'optimisation de formes. Le modeler géométrique permet de piloter la géométrie via des multiplats en position, en tangentes et en courbures. Le code de calcul permet de résoudre les équations de Navier Stokes pour un fluide compressible exprimé en variables entropiques à l'aide de la méthode des éléments finis stabilisés par SUPG. La boucle d'optimisation de formes permet de trouver des formes optimales dans un contexte multi-objectifs et multi-contraintes.

Cependant des déformations trop importantes entraînent une chute dans la qualité des éléments qui ne sont plus fidèles à la géométrie ou pire les éléments deviennent non conformes par retournement. Une adaptation de maillage surfacique est requise pour palier à ce problème. L'adaptation isotrope et anisotrope de maillage 3d surfacique sera le principal enjeu dans les chapitres suivants. Deux évaluations des courbures géométrique seront mises en concurrence pour permettre d'adapter le maillage surfacique. Dans une moindre mesure, l'adaptation isotrope et anisotrope de maillage 2d plan sera étudiée afin de trouver des solutions d'adaptation de maillage après déformation de celui-ci, tout en préservant des zones de maillages structurés.



# Chapitre 2

## Rappels et compléments sur le maillage surfacique

### Sommaire

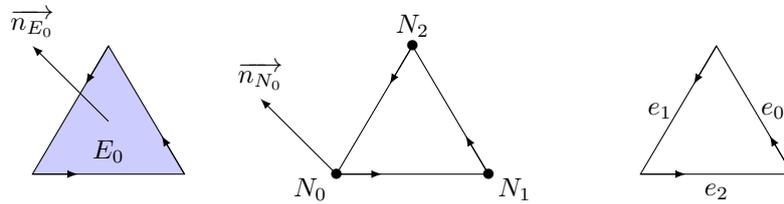
---

<b>2.1</b>	<b>Théorie de la métrique</b>	<b>47</b>
2.1.1	Produit scalaire usuel	47
2.1.2	Produit scalaire généralisé	49
2.1.3	Métrique et transformation	49
2.1.4	Calcul d'angle dans la métrique	51
2.1.5	Calcul d'aire ou de volume dans la métrique	51
2.1.6	Calcul de segment dans la métrique	52
2.1.7	Métrique et espace riemannien	53
<b>2.2</b>	<b>Courbures et directions principales</b>	<b>54</b>
2.2.1	Approximation de la courbure à partir d'un maillage	58
2.2.2	Étude d'une sphère	63
2.2.3	Bilan	65
2.2.4	Calcul de la courbure à partir de la géométrie	65
2.2.5	Étude d'un tore	68
2.2.6	Bilan	70
<b>2.3</b>	<b>Calcul de longueur dans la métrique</b>	<b>71</b>
2.3.1	Métrique géométrique	71
2.3.2	Métrique géométrique induite	72
2.3.3	Intersection de métriques	74
2.3.4	Interpolation de métriques et longueur d'arête	75
2.3.5	Norme $L_0$ isotrope	76
2.3.6	Norme $L_0$ anisotrope	76
2.3.7	Norme $L_1$ isotrope	77
2.3.8	Norme $L_2$ isotrope	78
<b>2.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>79</b>

---

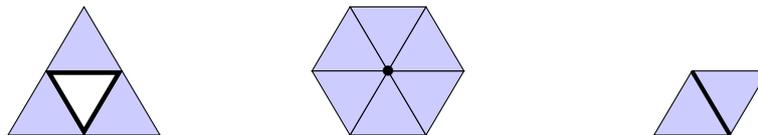
Une triangulation surfacique représente la discrétisation par des triangles d'un espace continu surfacique. Cette triangulation est composée de triangles  $E_i$  chacun défini par trois

nœuds  $N_i$  et trois arêtes  $e_i$ . Les nœuds et les arêtes sont numérotés dans le sens trigonométrique. La normale de l'élément  $\vec{n}_{E_i}$  est la normale du plan de l'élément. Elle pointe vers l'extérieur de la surface. La normale au nœud  $\vec{n}_{N_i}$  est la normale du plan tangent  $\mathcal{P}_T$  de la surface passant par le nœud  $N_i$ .



**Figure 2.1** Convention, notation, numérotation d'un élément, des nœuds et des arêtes.

Les informations minimales de stockage d'un maillage sont les coordonnées des nœuds  $x$   $y$   $z$  avec le nombre total de nœuds  $nn$  et les triangles composés des 3 indices de nœuds  $i_1$   $i_2$   $i_3$  avec le nombre total de triangles  $ne$  voir Peucker et Beall [74, 4]. Le type d'élément doit être précisé ainsi que la dimension de l'espace, et la version. Le format .mesh de l'INRIA est utilisé pour la visualisation sous MEDIT<sup>1</sup>. Les arêtes, les normales et les solutions peuvent aussi être stockées et visualisées. Il est possible de stocker ou de retrouver des informations supplémentaires sur la topologie de la triangulation surfacique. Cette topologie étendue définit différentes liaisons. Le voisinage d'un élément se définit par les éléments ayant une arête en commun avec cet élément. La boule d'un nœud représente tous les éléments incidents à ce nœud. La coque d'une arête est l'ensemble des éléments ayant cet arête en commun.



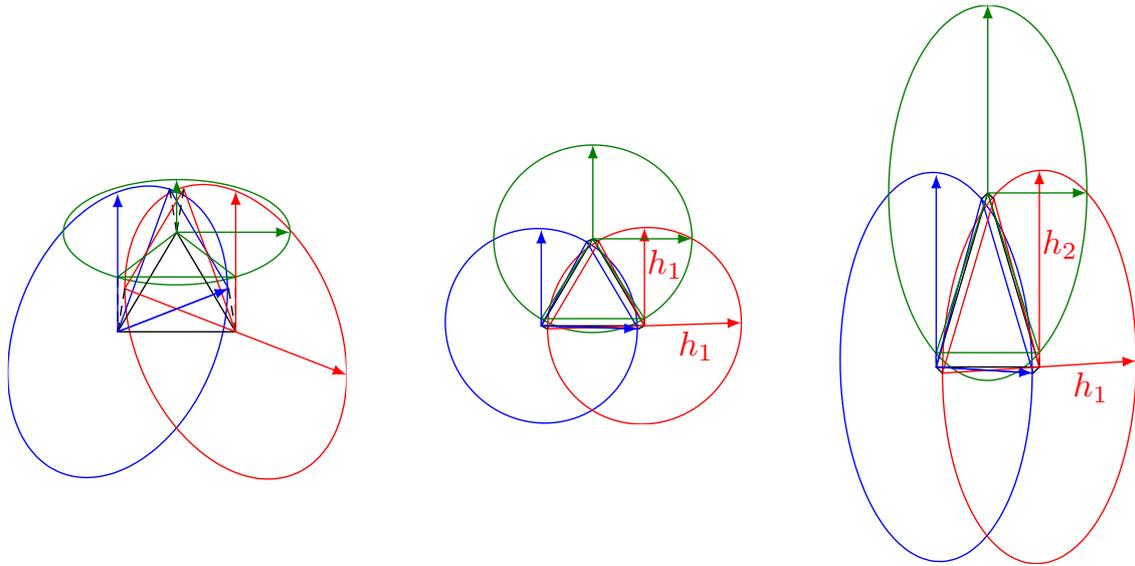
**Figure 2.2** Voisinage de l'élément, boule du nœud et coque de l'arête.

D'abord la théorie de la métrique est rappelée pour susciter son intérêt pour l'adaptation de triangulations surfaciques. Ensuite des méthodes de calcul des courbures et des directions principales géométriques sont étudiées pour définir quelle méthode est la plus adaptée pour le remaillage. Puis la métrique est définie et plus particulièrement la métrique géométrique qui utilise les courbures et les directions principales pour pondérer l'espace local en chaque nœud de la triangulation surfacique. Enfin des calculs de longueur dans cette métrique sont présentés.

1. Ce programme a été développé à l'INRIA pour permettre la visualisation interactive de maillages plans, surfaciques ou volumiques, spécifiquement dans le contexte d'applications numériques.

## 2.1 Théorie de la métrique

La triangulation est un ensemble d'éléments discrétisant un objet continu. Un maillage est une triangulation gouvernée par une métrique, c'est une triangulation « unité » dans la métrique. Autrement dit une triangulation unité est telles que toutes les longueurs d'arête soient égales à 1. Il est donc indispensable de rappeler ce qu'est une métrique puisque la métrique va être omniprésente par la suite. Cette métrique contrôle la taille, la forme et la direction de chaque élément. La métrique contrôle donc le maillage de façon globale en traitant localement chacune des tailles et des directions d'arête.



**Figure 2.3** Cas 3d surfacique. Vue 3d d'un triangle et de ses trois métriques dans chacun de ses plans tangents. Vue de face d'un triangle isotrope et d'un triangle anisotrope.

Pour le cas 2d plan, la métrique est définie en chaque nœud et dans ce même plan. Pour le cas 3d surfacique, la métrique est définie dans le plan tangent de chaque nœud. La métrique spécifie les tailles optimales  $h_1$  et  $h_2$  des arêtes suivant les directions principales autour de chaque nœud. Le maillage tenant compte de ces deux tailles est dit anisotrope. Il possède des propriétés dans des directions privilégiées. Le maillage tenant compte uniquement de la taille  $h_1$  est dit isotrope. Une taille locale est spécifiée pour toutes les arêtes du maillage indépendamment des directions.

Une métrique représente la mesure de l'unité dans toutes les directions. Elle est donc liée à la notion de distance. La distance est définie à partir de la donnée d'un produit scalaire. Par conséquent le produit scalaire est rappelé pour introduire la théorie de la métrique.

### 2.1.1 Produit scalaire usuel

**Définition 1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  désigné par de  $\langle u, v \rangle$  est une forme bilinéaire vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) Symétrie :  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(ii) Définie :  $\langle u, u \rangle = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$

(iii) Positivité :  $\langle u, u \rangle \geq 0$  pour tout  $\vec{u} \neq \vec{0}$

La propriété (i) se démontre en utilisant la commutativité.

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \langle v, u \rangle$$

La propriété (ii) se vérifie si  $u_1 = 0$  et  $u_2 = 0$  donc si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$ .

$$\langle u, u \rangle = u_1u_1 + u_2u_2 = 0 \times 0 + 0 \times 0$$

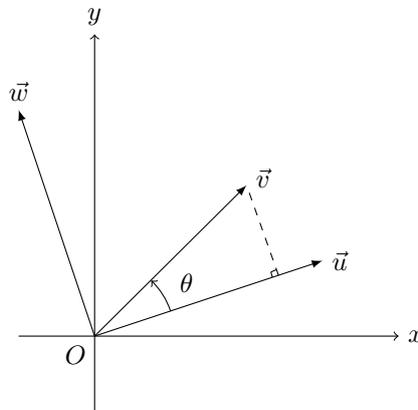
Pour la propriété (iii), il suffit de montrer que le produit scalaire  $\langle u, u \rangle$  est égal à la norme au carré  $\|\vec{u}\|^2$ .

$$\langle u, u \rangle = u_1u_1 + u_2u_2 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$$

**Définition 2.** La boule unité représente la mesure de l'unité dans toutes les directions par  $\|\vec{u}\| = 1$  avec  $u = \overrightarrow{OP}$ , centrée en  $O$  fixe et  $P$  variant.

**Définition 3.** Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , le produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  peut s'exprimer sous la forme  $\langle u, v \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$  avec  $\theta$  l'angle formé par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Calculons le produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  dans la base orthogonale  $\mathcal{B}(O, \vec{u}, \vec{v})$ , voir figure 2.4.



**Figure 2.4** Produit scalaire usuel.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos \theta \\ \|\vec{v}\| \sin \theta \end{pmatrix}$$

On a donc pour le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta + 0 \times \|\vec{v}\| \sin \theta \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \end{aligned}$$

Le produit scalaire usuel s'écrit dans le repère canonique :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = {}^t u v = \sum_i^n u_i v_i$$

avec  $u_i$  et  $v_i$  les coordonnées de  $u$  et  $v$  dans ce repère. La somme ne fait intervenir que les produits des coordonnées de même indice. En effet les produits croisés ne sont pas pris en compte donc les coordonnées d'indices différents sont décorréliées. Si le vecteur est tourné dans sa boule unité, un cercle dans  $\mathbb{R}^2$  et une sphère dans  $\mathbb{R}^3$ , ce vecteur aura la même norme. Les longueurs sont donc isotropes. Ce produit scalaire peut donc s'écrire sous la forme :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{I}_d} = {}^t u \mathcal{I}_d v = \sum_{ij}^n u_i i_{ij} v_j \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{I}_d$  est la matrice identité de l'espace  $\mathbb{R}^d$ .  $\mathcal{I}_d$  est symétrique définie positive pour vérifier le produit scalaire. Dans l'espace euclidien, en tout point, la matrice identité représente la métrique. La longueur d'un vecteur s'exprime donc par  $\|\vec{u}\|_{\mathcal{I}_d} = \sqrt{{}^t u \mathcal{I}_d u}$ .

### 2.1.2 Produit scalaire généralisé

En prenant en compte les produits des coordonnées croisées, le produit scalaire usuel se généralise sous la forme bilinéaire définie par

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = {}^t u \mathcal{M} v = \sum_{ij}^n u_i m_{ij} v_j \quad (2.2)$$

qui doit vérifier les trois propriétés du produit scalaire, c'est-à-dire symétrique définie positive. La longueur d'un vecteur s'exprime comme la norme  $\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t u \mathcal{M} u}$ . La boule unité  $\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} = 1$  avec  $u = \overrightarrow{OP}$ . Elle est centrée en  $O$  fixe et  $P$  varie telle que la boule soit une ellipse dans  $\mathbb{R}^2$  ou une ellipsoïde dans  $\mathbb{R}^3$ . La matrice  $\mathcal{M}$  est symétrique réelle par conséquent elle est diagonalisable et ses vecteurs propres sont orthogonaux.

### 2.1.3 Métrique et transformation

Soit  $\mathcal{R}$  la matrice orthogonale dont les colonnes sont composées des vecteurs propres normalisés de  $\mathcal{M}$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale composée des valeurs propres de  $\mathcal{M}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \mathcal{R} &= \mathcal{R} \Lambda \\ \mathcal{M} &= \mathcal{R} \Lambda \mathcal{R}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \mathcal{R}^{-1} = {}^t \mathcal{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{R} \Lambda {}^t \mathcal{R} \\ {}^t u \mathcal{M} u &= {}^t u \mathcal{R} \Lambda {}^t \mathcal{R} u \end{aligned}$$

On pose  $v = {}^t \mathcal{R} u$  tel que

$${}^t u \mathcal{M} u = {}^t v \Lambda v$$

Dans  $\mathbb{R}^2$  la boule unité  $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}} = 1$  s'écrit dans la nouvelle base définie par les colonnes de  $\mathcal{R}$  comme  $\|\vec{v}\|_{\Lambda} = 1$ . De plus  $\mathcal{M}$  est définie positive donc les coefficients  $\lambda_i$  de la matrice  $\Lambda$  sont strictement positifs.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{\Lambda} &= 1 \\ \sqrt{{}^t v \Lambda v} &= 1 \\ \left( \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ \left( \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

On pose  $\lambda_i = \frac{1}{h_i^2}$  tel que

$$\left( \frac{v_1}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{v_2}{h_2} \right)^2 = 1$$

Cette équation est celle d'une ellipse dont les demi-grands axes sont  $h_i = (\sqrt{\lambda_i})^{-1}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , voir figure 2.5. L'équation est celle d'une ellipsoïde dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans l'espace euclidien muni du produit scalaire usuel, la métrique  $\mathcal{M}$  est égale à l'identité  $\mathcal{I}$  avec  $h_i = 1$ . Dans l'espace euclidien muni du produit scalaire généralisé, la métrique peut être isotrope avec  $h_1 = h_2$  ou anisotrope avec  $h_1 \neq h_2$ .

La forme quadratique associée à  $\mathcal{M}$  permet de définir la boule unité dans l'espace euclidien usuel

$$\begin{aligned} {}^t u \mathcal{M} u &= {}^t u \mathcal{R} \Lambda {}^t \mathcal{R} u \\ &= {}^t u \mathcal{R} \sqrt{\Lambda} \sqrt{\Lambda} {}^t \mathcal{R} u \end{aligned}$$

On pose  $w = \sqrt{\Lambda} {}^t \mathcal{R} u$ , on a donc

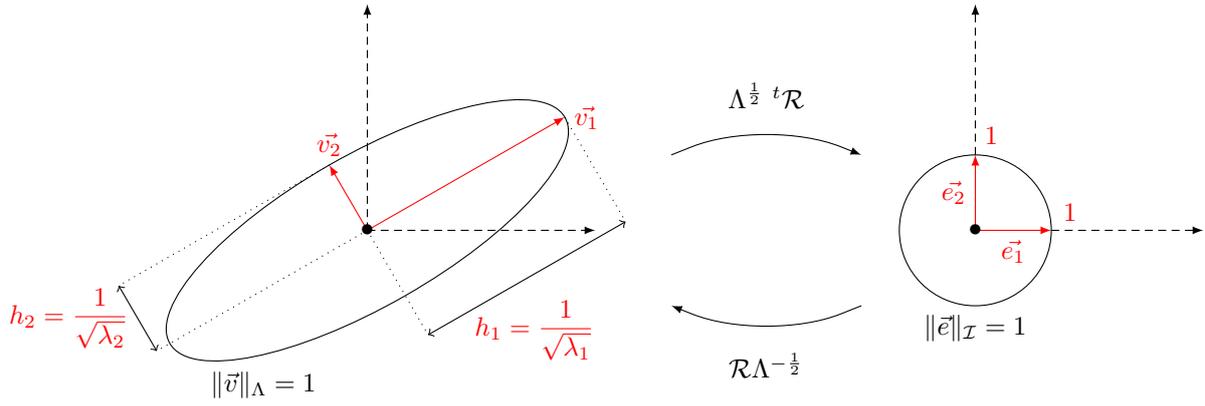
$${}^t u \mathcal{M} u = {}^t w w$$

On retrouve la forme quadratique usuelle associée à  $\mathcal{I}$  par un changement de variable. On en déduit qu'un espace euclidien muni d'une métrique  $\mathcal{M}$  est équivalent à un espace euclidien muni de la métrique usuelle identité  $\mathcal{I}$  déformé par l'application linéaire  $\phi_{\mathcal{M}}$  telle que

$$\phi_{\mathcal{M}} = \sqrt{\Lambda} {}^t \mathcal{R} \text{ avec } {}^t \phi_{\mathcal{M}} \phi_{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \quad (2.3)$$

Cette application permet de défaire la métrique  $\mathcal{M}$  pour obtenir la métrique identité  $\mathcal{I}$ . Elle se compose du changement de base  ${}^t \mathcal{R}$  suivi de l'homothétie  $\sqrt{\Lambda}$ .

L'équation de déformation d'espace (2.3) permet d'étendre les notions définies dans l'espace euclidien usuel muni d'une métrique quelconque. Plus particulièrement dans les problématiques de maillages, on s'intéresse à l'angle formé par deux vecteurs, au déterminant d'une matrice représentant l'aire ou le volume suivant la dimension et à la longueur d'un segment courbe.



**Figure 2.5** Ellipse de l'espace euclidien usuel à gauche et la boule unité associée à la métrique  $\mathcal{M} = \mathcal{R}\Lambda^t\mathcal{R}$  à droite avec la transformation pour passer de l'un à l'autre.

### 2.1.4 Calcul d'angle dans la métrique

**Définition 4.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  munis de la métrique  $\mathcal{M}$ , l'angle  $\theta_{\mathcal{M}}$  formé par ces deux vecteurs est défini comme l'angle formé par les vecteurs  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}u}$  et  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}v}$  qui sont définis dans l'espace usuel. Cet angle est défini par

$$\cos \theta_{\mathcal{M}} = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}}{\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}}} \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) se démontre en utilisant l'équation de transformation (2.3)

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\mathcal{M}} &= \frac{\langle \overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}u}, \overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}v} \rangle_{\mathcal{M}}}{\|\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}u}\| \|\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}v}\|} \\ &= \frac{{}^t u^t \phi_{\mathcal{M}} \phi_{\mathcal{M}} v}{\sqrt{{}^t u^t \phi_{\mathcal{M}} \phi_{\mathcal{M}} u} \sqrt{{}^t v^t \phi_{\mathcal{M}} \phi_{\mathcal{M}} v}} \\ &= \frac{{}^t u \mathcal{M} v}{\sqrt{{}^t u \mathcal{M} u} \sqrt{{}^t v \mathcal{M} v}} \\ &= \frac{\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}}}{\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}}} \end{aligned}$$

### 2.1.5 Calcul d'aire ou de volume dans la métrique

**Définition 5.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  munis de la métrique  $\mathcal{M}$ , on considère la matrice d'ordre 2 ou 3 dont les colonnes sont ces vecteurs. Le déterminant de cette matrice dans cet espace est défini par le déterminant de la matrice formé par les deux vecteurs  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}u}$  et  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}v}$  de  $\mathbb{R}^2$  ou les 3 vecteurs  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}u}$ ,  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}v}$  et  $\overrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}w}$  de  $\mathbb{R}^3$  munis de la métrique usuelle. Ce déterminant est défini par

$$\left| \begin{array}{cc} u & v \end{array} \right|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\mathcal{M}|} \left| \begin{array}{cc} u & v \end{array} \right| \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad (2.5)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \right|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\mathcal{M}|} \left| \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \right| \text{ dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) se démontre en utilisant l'équation de transformation (2.3)

$$\begin{aligned}
|u \ v|_{\mathcal{M}} &= |\phi_{\mathcal{M}}u \ \phi_{\mathcal{M}}v|_{\mathcal{M}} \\
&= |\phi_{\mathcal{M}}| |u \ v| \\
&= |\sqrt{\Lambda}| |{}^t\mathcal{R}| |u \ v| \\
&= |\sqrt{\Lambda}| |u \ v| \text{ car } |{}^t\mathcal{R}| = 1 \\
&= \sqrt{|\Lambda|} |u \ v| \\
&= \sqrt{|\mathcal{M}|} |u \ v|
\end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{R}^2$ , le déterminant représente l'aire du parallélogramme de base  $u$  et  $v$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , le déterminant représente le volume du parallélépipède de base  $u, v$  et  $w$ .

### 2.1.6 Calcul de segment dans la métrique

**Définition 6.** Soit  $\Gamma$  un segment courbe défini par l'application continue  $\gamma$  d'un intervalle  $I = [a, b] \in \mathbb{R}$  vers l'espace  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  muni de la métrique  $\mathcal{M}$

$$\gamma : I = [a, b] \rightarrow \Gamma : t \rightarrow \gamma(t)$$

alors la longueur de  $\Gamma$  en considérant l'espace déformé est définie par

$$L_{\mathcal{M}}(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}} dt \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) se démontre en utilisant l'équation (2.3)

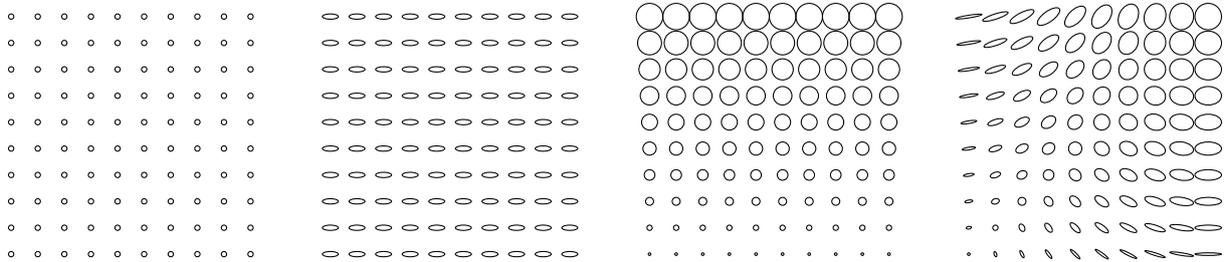
$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{M}}(\Gamma) &= \int_a^b \|\phi_{\mathcal{M}}\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_a^b \sqrt{{}^t\gamma'(t) \ {}^t\phi_{\mathcal{M}}\phi_{\mathcal{M}}\gamma'(t)} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{{}^t\gamma'(t) \ \mathcal{M}\gamma'(t)} dt \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}} dt
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $\Gamma$  est un segment droit, on a  $\gamma(t) = a + t\vec{ab}$  défini dans l'intervalle  $I = [0, 1]$  donc  $\gamma'(t) = \vec{ab}$ . La longueur du segment droit est donc définie par la norme du vecteur  $\|\vec{ab}\|$  dans la métrique  $\mathcal{M}$ .

$$L_{\mathcal{M}}(\Gamma) = \int_0^1 \|\vec{ab}\|_{\mathcal{M}} dt \quad (2.8)$$

### 2.1.7 Métrique et espace riemannien

Un espace muni d'une métrique constante  $\mathcal{M}$  est appelé espace euclidien. Dans un espace riemannien, en tout point, la métrique  $\mathcal{M}$  est différente, voir figure 2.6. Autrement dit les propriétés de l'espace changent en fonction du point de l'espace où l'on se trouve.



**Figure 2.6** Métriques isotrope et anisotrope dans un espace euclidien. Métriques isotrope et anisotrope dans un espace riemannien.

Le produit scalaire défini par la forme bilinéaire associé à  $\mathcal{M}$  change d'un point à un autre. Chaque vecteur doit être considéré avec la métrique en son origine donc le produit scalaire n'a de sens que si les deux vecteurs ont la même origine et la même métrique. Les calculs d'angle et de déterminant s'appliquent si les vecteurs ont la même origine et ont la même métrique. Le calcul de la longueur d'un segment dans la métrique d'un espace riemannien est plus complexe. En effet la métrique varie d'un point à un autre donc la norme varie aussi d'un point à un autre. On a donc pour les segments courbes (2.7)

$$L_{\mathcal{M}(\gamma(t))}(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}(\gamma(t))} dt \tag{2.9}$$

et pour les segments droits (2.8)

$$L_{\mathcal{M}(a+t\vec{ab})}(\Gamma) = \int_0^1 \|\vec{ab}\|_{\mathcal{M}(a+t\vec{ab})} dt \tag{2.10}$$

**Remarque 1.** La longueur ci-dessus ne représente pas la longueur du vecteur  $\vec{ab}$  dans la métrique  $\mathcal{M}(a)$ .

Avant d'expliquer plus précisément la longueur dans la métrique dans espace riemannien, il est nécessaire de définir la métrique géométrique et donc de calculer les données géométriques de la surface continue. En effet pour limiter le nombre de nœuds d'un maillage et représenter la géométrie, il est nécessaire d'utiliser un critère géométrique d'optimisation. Ce critère permet de limiter le nombre de nœuds et de diminuer l'écart entre la triangulation surfacique et la géométrie. La courbure géométrique est un bon critère pour représenter fidèlement la géométrie. En effet le bord d'attaque d'une voilure est une zone à forte courbure qui nécessite une densité de nœuds importante alors que le centre de la voilure a une courbure faible et nécessite une densité de nœuds faible.

## 2.2 Courbures et directions principales

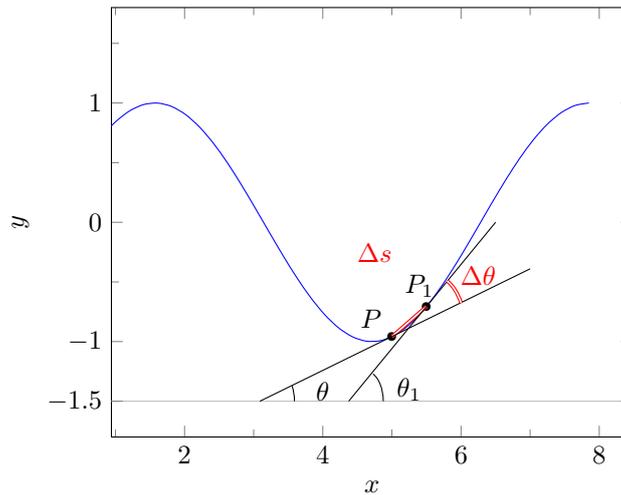
La courbure d'une courbe donnée en un point particulier est la courbure du cercle osculateur en ce point. La courbure dépend du rayon. Plus le rayon est petit, plus la courbure est grande et plus le rayon est grand, plus la courbure est petite. Un très grand cercle osculateur signifie que la courbe est presque une ligne droite en ce point. Le rayon de courbure  $R$  est simplement l'inverse de la courbure  $\kappa$ .

**Définition 7.** La courbure est inversement proportionnelle au rayon de courbure.

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

Soient  $P$  et  $P_1$  deux points d'une courbe relativement proche.  $\Delta s$  est la longueur de l'arc  $PP_1$ .  $\Delta\theta$  est l'angle entre les 2 tangentes en  $P$  et  $P_1$  de la courbe. La courbure de l'arc  $PP_1$  est :

$$\kappa = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$



**Figure 2.7** Analyse de la courbure de la fonction  $y = \sin(x)$ .

La courbure du point  $P$  est donnée par :

$$\kappa = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Ce rapport se décompose grâce aux règles de dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (2.11)$$

Ces deux termes sont à identifier et de plus on sait que :

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{dy}{dx} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) \end{aligned}$$

On remplace  $\theta$  dans  $\frac{d\theta}{dx}$  :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

La différenciation des fonctions transcendantes nous apprend que la dérivée de

$$y = \arctan u \text{ avec } u = f(x)$$

est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1 + u^2}$$

Le terme  $\frac{d\theta}{dx}$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le second terme  $\frac{dx}{ds}$  peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}}$$

D'après Pythagore  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  ce qui donne pour le second terme :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (2.13)$$

Les termes (2.12) et (2.13) sont rassemblés dans l'équation (2.11) de la courbure

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Le rayon de courbure  $R$  est l'inverse de  $\kappa$  et il est positif strictement

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (2.14)$$

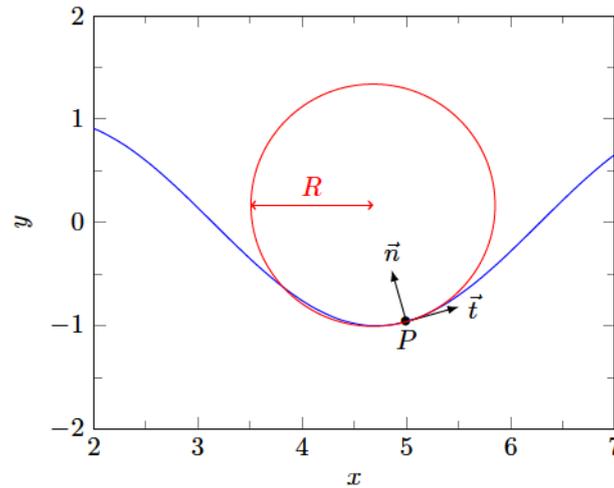


Figure 2.8 Rayon de courbure de la fonction  $y = \sin(x)$  au point  $x = 5$ ,  $R = 1.171$ .

Sur une surface, la notion de courbure se décrit par deux courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  et deux directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ . Il faut imaginer la normale de la surface en un point. Cette normale définit le plan tangent  $\mathcal{P}_T$  à la surface. Un autre plan peut tourner autour de cet axe, voir figure 2.9.

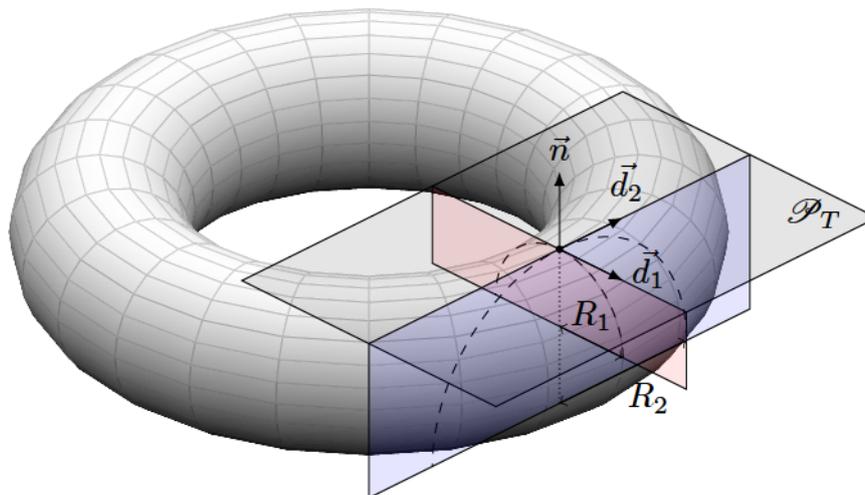


Figure 2.9 Plan tangent, rayons de courbure, directions principales.

Ce plan intersecte la surface considérée par une courbe. Il y a donc une infinité de rayons de courbure  $R_i$ . Mais il existe deux plans particuliers où la courbure est minimale et maximale en introduisant le rapport du déterminant de la seconde forme fondamentale  $II$  sur le déterminant de la première forme fondamentale  $I$  que l'on rappellera plus loin. Ces courbures représentent les courbures locales minimales et maximales en un point de la surface. Elles sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique du plan tangent. Ce dernier, l'endomorphisme de Weingarten que l'on verra plus loin, s'obtient à partir de la différentielle de l'application de Gauss.

Supposons que la surface régulière  $S(x, y, z)$  soit donnée par une équation  $z = f(x, y)$ , où  $f$  est une fonction de classe  $C^2$ . On a donc

$$S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Une base peut être donnée par les deux vecteurs tangents  $\overrightarrow{S_x(x, y, z)} = \frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x}$  et  $\overrightarrow{S_y(x, y, z)} = \frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y}$ .

$$\overrightarrow{S_x(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{S_y(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

La normale  $\overrightarrow{n(x, y)}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{S_x(x, y, z)} \wedge \overrightarrow{S_y(x, y, z)}$ .

$$\overrightarrow{n(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}} \begin{pmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme de Weingarten envoie  $\overrightarrow{S_x(x, y, z)}$  sur  $-\overrightarrow{n_x(x, y)}$  et  $\overrightarrow{S_y(x, y, z)}$  sur  $-\overrightarrow{n_y(x, y)}$ . En simplifiant l'écriture de  $(x, y)$  pour plus de lisibilité, on a donc

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{n_x} &= \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \left( (f_{xx} + f_y^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy}) \overrightarrow{S_x} + (f_{xy} + f_x^2 f_{xy} - f_x f_y f_{xx}) \overrightarrow{S_y} \right) \\ -\overrightarrow{n_y} &= \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \left( (f_{xy} + f_y^2 f_{xy} - f_y f_x f_{yy}) \overrightarrow{S_x} + (f_{yy} + f_x^2 f_{yy} - f_x f_y f_{xy}) \overrightarrow{S_y} \right) \end{aligned}$$

Dans la base  $(\overrightarrow{S_x}, \overrightarrow{S_y})$ , la matrice de Weingarten vaut

$$W = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} f_{xx} + f_y^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy} & f_{xy} + f_y^2 f_{xy} - f_y f_x f_{yy} \\ f_{xy} + f_x^2 f_{xy} - f_x f_y f_{xx} & f_{yy} + f_x^2 f_{yy} - f_x f_y f_{xy} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les courbures principales géométriques  $\kappa_1, \kappa_2$  et les vecteurs propres sont les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ .

Deux méthodes de calcul des courbures surfaciques sont explorées. Une première méthode permet de calculer les courbures approchées à partir du maillage. Une seconde méthode permet de calculer les courbures exactes à partir de la géométrie avec l'endomorphisme de Weingarten et les formes fondamentales.

### 2.2.1 Approximation de la courbure à partir d'un maillage

La méthode de Hamann [41] d'approximation de courbures à partir d'un maillage surfacique permet d'obtenir un résultat approché des courbures principales en tout nœud du maillage. Charton [20] reprend plus en détail les travaux de Hamann pour les arêtes vives et la notion de normales multiples. Une approximation des courbures principales est donc calculée pour chaque nœud. Cette méthode se découpe en huit étapes avec en entrée le maillage  $\mathcal{M}_i$  et en sortie les courbures principales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en chaque nœud ainsi que les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ .

La figure 2.10 représente en bleu la projection des nœuds voisins  $NV_j$ , notés  $N_j$  par simplification, sur le plan de normale  $\vec{n}_{N_1}$ . La quadrique de sommet  $N_1$  passant par les nœuds voisins est représentée en rouge.

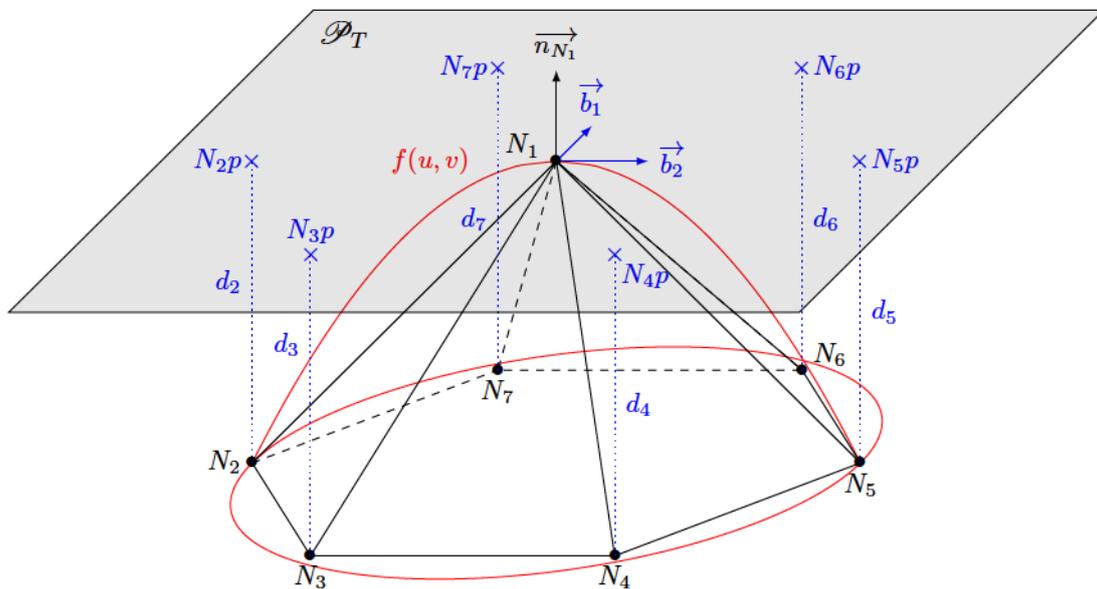


Figure 2.10 Construction d'une quadrique à partir des nœuds voisins.

#### Récupération des nœuds voisins d'un nœud

Les nœuds voisins d'un nœud d'un maillage surfacique d'éléments triangles P1 sont récupérés avec l'algorithme 2.1. Il est nécessaire de boucler sur les nœuds, puis on tourne sur les éléments de la boule du nœud et enfin on parcourt les sommets  $a$ ,  $b$  et  $c$  de l'élément pour récupérer les nœuds voisins d'un nœud. Les topologies des éléments voisins de nœud et des nœuds voisins de nœud sont au préalable nécessaires. En effet une structure de données topologique adéquate, que l'on abordera dans le chapitre suivant, voir Peucker et Chrisman [74] pour la structure de données, et Beall et Shepard pour la topologie [4], permet de récupérer facilement ces informations.

**Algorithme 2.1** : Carte de courbure d'un maillage surfacique.

**Entrées** : Maillage

**Sorties** :  $\kappa_1, \kappa_2, \vec{d}_1, \vec{d}_2$

```

1 pour  $i = 0$  à  $nn$  faire
2   Déterminer les nœuds voisins  $N_j$ ;
3   Calculer le plan tangent  $\mathcal{P}_T$  de  $N_i$ ;
4   Définir un repère  $\mathcal{B}_{N_i,u,v}$  orthonormé dans  $\mathcal{P}_T$ ;
5   Calculer les distances de projection  $d_j$  entres  $N_iNV_j$  et  $\mathcal{P}_T$ ;
6   Projeter  $N_iNV_j$  sur  $\mathcal{P}_T$ ;
7   Représenter les  $N_{jp}$  dans  $\mathcal{B}_{N_i,u,v}$ ;
8   Interpréter les  $N_{jp}$  comme des abscisses et les  $d_j$  comme ordonnées;
9   Construire  $f(u, v) = d$  approximant ces ordonnées;
10  Calculer  $\kappa_1, \kappa_2, \vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  de  $f(u, v)$  au nœud  $N_i$ ;
11 fin

```

### Calcul de la normale au nœud et équation du plan tangent

La normale au nœud  $\vec{n}_{N_i}$  est calculée à partir de la géométrie ou approximée à partir du maillage.

**Proposition 1.** La normale au nœud  $\vec{n}_{N_i}$  est la moyenne des normales aux éléments voisins  $\vec{n}_{N_iEV_j}$  pondérées par l'angle au sommet  $\alpha_{N_iEV_j}$ .

$$\vec{n}_{N_i} = \sum_{j=0}^{nev} \vec{n}_{N_iEV_j} \alpha_{N_iEV_j} \quad (2.15)$$

La figure 2.11 représente en bleu les angles au sommet des éléments voisins  $\alpha_{N_iEV_j=2,\dots,7}$ , notés  $\alpha_j$ , les normales des éléments voisins  $\vec{n}_{N_iEV_j=2,\dots,7}$ , notées  $n_j$ , et en rouge la normale au nœud  $\vec{n}_{N_i}$ .

La normale d'un élément s'obtient par le produit vectoriel de deux arêtes.

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{N_1N_2} \wedge \overrightarrow{N_1N_3}$$

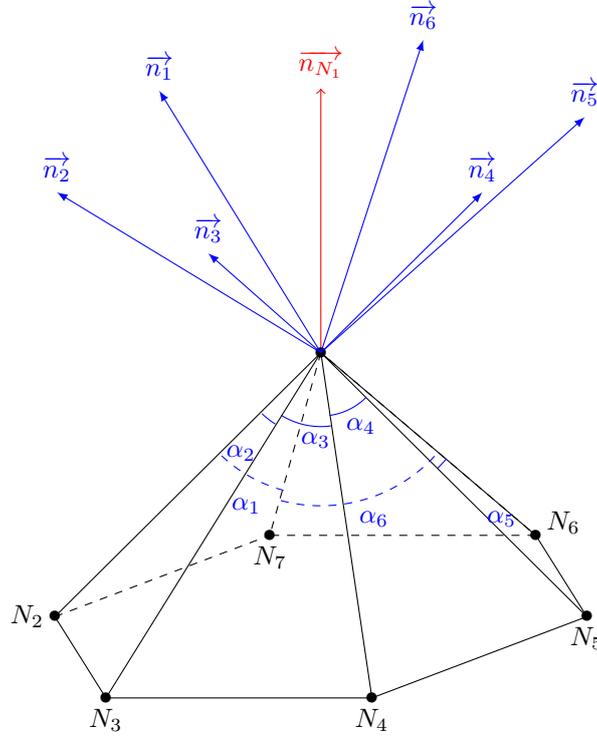
**Définition 8.** La norme euclidienne d'un vecteur est égale à la racine carré de la somme des carrés de ses coordonnées.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

L'angle au sommet s'obtient par le produit scalaire de ses deux arêtes.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_1N_2} \cdot \overrightarrow{N_1N_3} &= \|\overrightarrow{N_1N_2}\| \|\overrightarrow{N_1N_3}\| \cos(\overrightarrow{N_1N_2}, \overrightarrow{N_1N_3}) \\ \cos(\overrightarrow{N_1N_2}, \overrightarrow{N_1N_3}) &= \frac{\overrightarrow{N_1N_2} \cdot \overrightarrow{N_1N_3}}{\|\overrightarrow{N_1N_2}\| \|\overrightarrow{N_1N_3}\|} \\ \alpha_2 &= \arccos\left(\frac{\overrightarrow{N_1N_2} \cdot \overrightarrow{N_1N_3}}{\|\overrightarrow{N_1N_2}\| \|\overrightarrow{N_1N_3}\|}\right) \end{aligned}$$

**Remarque 2.** Il faut souligner l'importance de la connaissance de l'angle au sommet. L'algorithme ordonne les sommets des éléments voisins pour que le sommet  $a$  corresponde à l'angle au sommet.



**Figure 2.11** Moyenne des normales aux éléments voisins pondérées par l'angle au sommet.

L'équation du plan tangent  $\mathcal{P}_T$  passant par  $N_i$  se calcule avec la normale  $\overrightarrow{n_{N_i}}$  normalisée telle que :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{n_{N_i}}}{\|\overrightarrow{n_{N_i}}\|}$$

La normale  $\vec{n}$  et le point  $N_i$  donnent naturellement l'équation implicite du plan  $\mathcal{P}_T$  passant par  $N_i$ .

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad N_i = \begin{pmatrix} N_{ix} \\ N_{iy} \\ N_{iz} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_T : (n_x - N_{ix})x + (n_y - N_{iy})y + (n_z - N_{iz})z = 0$$

$$\mathcal{P}_T : n_x x + n_y y + n_z z - (n_x N_{ix} + n_y N_{iy} + n_z N_{iz}) = 0$$

L'équation du plan s'exprime aussi sous la forme :

$$\mathcal{P}_T : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ avec } \begin{cases} A = n_x \\ B = n_y \\ C = n_z \\ D = -(n_x N_{ix} + n_y N_{iy} + n_z N_{iz}) \end{cases} \quad (2.16)$$

### Repère orthonormé local

Le premier vecteur  $\vec{b}_1$  de la base est à choisir parmi :

$$\vec{a} = \begin{cases} \frac{1}{n_x} (- (n_y + n_z), n_x, n_x)^T \\ \frac{1}{n_y} (n_y, - (n_x + n_z), n_y)^T \\ \frac{1}{n_z} (n_z, n_z, - (n_x + n_y))^T \end{cases} \quad \text{avec } \vec{b}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \text{ et } n_x, n_y, n_z \neq 0 \quad (2.17)$$

**Proposition 2.** *Le choix du  $\max(n_x, n_y, n_z)$  donne plus de stabilité numérique pour le calcul.*

Le second vecteur  $\vec{b}_2$  de la base s'obtient en faisant le produit vectoriel des deux autres vecteurs.

$$\vec{b}_2 = \vec{n} \wedge \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_y b_{1z} - b_{1y} n_z \\ n_z b_{1x} - b_{1z} n_x \\ n_x b_{1y} - b_{1x} n_y \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

### Calcul des distances de projection

Les distances de projections des nœuds voisins sur le plan  $\mathcal{P}_T$  découlent directement des coordonnées des nœuds voisins et de l'équation (2.16).

$$d_j = \frac{AN_{jx} + BN_{jy} + CN_{jz} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{avec } j = 0 \text{ à } nnv$$

Or comme la normale  $\vec{n}$  est normalisée  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$

$$d_j = AN_{jx} + BN_{jy} + CN_{jz} + D \quad \text{avec } j = 0 \text{ à } nnv \quad (2.19)$$

### Projection des nœuds voisins

Les équations (2.16) et (2.19) permettent d'exprimer les nœuds projetés dans le repère  $\mathcal{R}_{o,x,y,z}$ .

$$N_{jp}^{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} N_{jx} - Ad_j \\ N_{jy} - Bd_j \\ N_{jz} - Cd_j \end{pmatrix}$$

Puis les équations (2.17) et (2.18) permettent d'exprimer les nœuds projetés dans le repère local  $\mathcal{B}_{N_1,u,v}$ .

$$N_{jp}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} N_{jpx} b_{1x} + N_{jpy} b_{1y} + N_{jpz} b_{1z} \\ N_{jpx} b_{2x} + N_{jpy} b_{2y} + N_{jpz} b_{2z} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

**Interpréter les projections en abscisses et les distances en ordonnées**

**Proposition 3.** *Les coordonnées locales de (2.20) sont interprétées comme des abscisses  $u$  et  $v$  qui donnent par une fonction  $f$  les ordonnées  $d$  de l'équation (2.19).*

$$f(u_j, v_j) = d_j$$

**Construction de la quadrique  $f(u, v) = d$** 

La quadrique s'écrit sous la forme :

$$f(u_j, v_j) = \frac{1}{2} (c_{2,0}u_j^2 + 2c_{1,1}u_jv_j + c_{0,2}v_j^2) = d_j$$

Les coefficients  $c_{2,0}$ ,  $c_{1,1}$  et  $c_{0,2}$  sont les inconnues à déterminer. Cette équation peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_1^2 & 2u_1v_1 & v_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_j^2 & 2u_jv_j & v_j^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{nnv}^2 & 2u_{nnv}v_{nnv} & v_{nnv}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2,0} \\ c_{1,1} \\ c_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 \\ \vdots \\ 2d_j \\ \vdots \\ 2d_{nnv} \end{pmatrix}$$

Le système est surdéterminé car il y a plus d'équations que d'inconnues.

**Remarque 3.** *Pour un maillage d'éléments P1 avec 2 nœuds voisins, le problème est plan et la courbure est nulle.*

Ce système matriciel est donc de la forme :

$$Uc = d$$

**Proposition 4.** *La méthode des moindres carrés [58] permet de résoudre un système surdéterminé en multipliant le système par la matrice transposée.*

$${}^tUUc = {}^tUd$$

Le système se développe

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{nnv} u_j^4 & 2 \sum_{j=0}^{nnv} u_j^2 v_j & \sum_{j=0}^{nnv} u_j^2 v_j^2 \\ & 4 \sum_{j=0}^{nnv} u_j^2 u_j^2 & 2 \sum_{j=0}^{nnv} u_j v_j^2 \\ \text{Symétrique} & & \sum_{j=0}^{nnv} v_j^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2,0} \\ c_{1,1} \\ c_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=0}^{nnv} d_j u_j^2 \\ 4 \sum_{j=0}^{nnv} d_j u_j v_j \\ 2 \sum_{j=0}^{nnv} d_j v_j^2 \end{pmatrix}$$

et peut s'écrire par simplification sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2,0} \\ c_{1,1} \\ c_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$Ac = d$$

Ce système se résout par décomposition LU.

### Résolution du polynôme

**Théorème 1.** *Les courbures principales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  du graphe  ${}^t(u, v, f(u, v)) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  du polynôme à deux variables*

$$f(u_j, v_j) = \frac{1}{2} (c_{2,0}u^2 + 2c_{1,1}uv + c_{0,2}v^2)$$

au point  ${}^t(0, 0, f(0, 0))$  sont données par les deux racines réelles de l'équation quadratique

$$\kappa^2 - (c_{2,0} + c_{0,2})\kappa + c_{2,0}c_{0,2} - c_{1,1}^2 = 0$$

### 2.2.2 Étude d'une sphère

La précision de la courbure dépend de la précision de la normale calculée au nœud. Cette normale définit ensuite le plan tangent au nœud. Pour un faible écart dans les coefficients de la normale au nœud, le plan tangent est mal orienté et entraîne une erreur avant les moindres carrés. Il faut tester cette méthode avec différents calculs de normale au nœud et aussi déterminer à partir de quel raffinement de maillage surfacique les courbures calculées sont proches des courbures géométriques.

Une étude paramétrique du maillage surfacique d'une sphère avec cette méthode permet de comparer le rayon de courbure calculé en chacun des nœuds par rapport au rayon supposé connu de la sphère. En effet l'inverse de la courbure est le rayon de courbure qui est égal au rayon de la sphère. Autrement dit en tout nœud du maillage, les courbures calculées sont identiques et leurs inverses donnent le rayon de la sphère. Une sphère de rayon  $R = 1\,000$  mm est discrétisée avec BLSURF<sup>2</sup> pour différentes tailles d'arête. De plus la normale au nœud de l'équation(2.15) est comparée avec la normale au nœud calculée par les codes de Dassault Aviation dans la méthode Hamann. La précision de la normale définit la précision du plan tangent à partir duquel les courbures sont calculées. La figure 2.12 montre l'évolution du raffinement d'une sphère en fonction du rayon de la sphère  $R_{sphère}$  sur la taille d'arête minimale de la boule du nœud  $min(h_{boule})$ .

D'après le tableau 2.1, plus la taille d'arête est faible et plus l'approximation du rayon de courbure est exacte. La figure 2.13 démontre qu'à partir de  $\frac{R_{sphère}}{min(h_{boule})} = 15.0$  il y a 0.3%

---

2. Le logiciel BLSURF, codéveloppé par l'INRIA (équipe-projet GAMMA) et l'UTT (équipe ICD/GAMMA3), est un générateur de maillages de qualité des surfaces composées de carreaux paramétrés. Il génère des maillages triangulaires ou quadrilatéraux de taille imposée par l'utilisateur et/ou dépendant des courbures géométriques.

d'erreur entre le rayon de courbure exact et le rayon de courbure approximé. De plus le calcul des normales aux facettes approchées par le produit vectoriel des arêtes de l'élément converge moins vite vers la même valeur par rapport aux normales aux facettes corrigées.

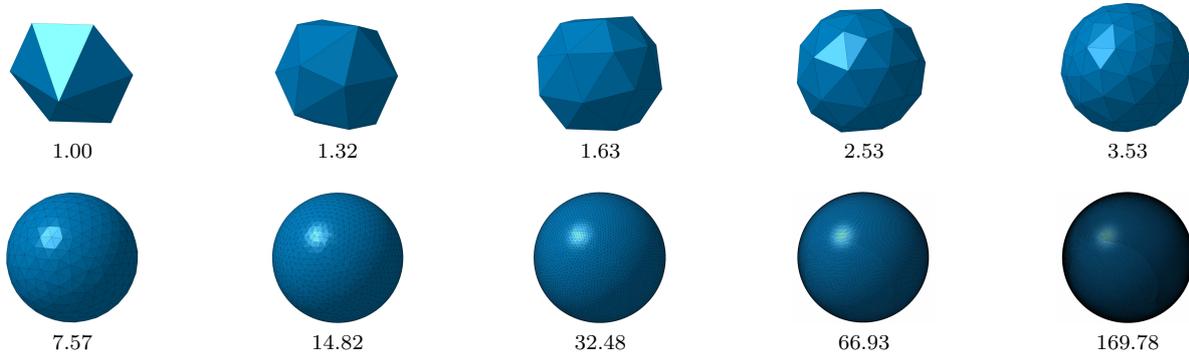


Figure 2.12 *Évolution du raffinement d'une sphère en fonction de  $\frac{R_{\text{sphère}}}{\min(h_{\text{boule}})}$ .*

$\frac{R_{\text{sphère}}}{\min(h_{\text{boule}})}$	1.00	1.32	1.63	2.53	3.53	7.57	14.82	32.48	66.93	169.78
$\frac{1}{nn} \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{\kappa_{1i}}$	452.57	690.01	805.57	878.98	954.19	988.93	997.53	999.55	999.97	1 000.08
$\frac{1}{nn} \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{\kappa_{2i}}$	902.22	838.46	882.12	918.49	967.24	992.05	998.06	999.64	999.99	1 000.09
$\frac{1}{nn} \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{\kappa_{1iCR}}$	298.21	676.03	773.54	869.75	950.93	988.25	997.28	999.38	999.85	999.98
$\frac{1}{nn} \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{\kappa_{2iCR}}$	403.08	833.20	917.24	912.86	964.46	991.18	997.73	999.39	999.85	999.98

Table 2.1 *Évolution de l'approximation de la moyenne des rayons de courbure avec les normales approchées et corrigées en fonction du raffinement du maillage.*

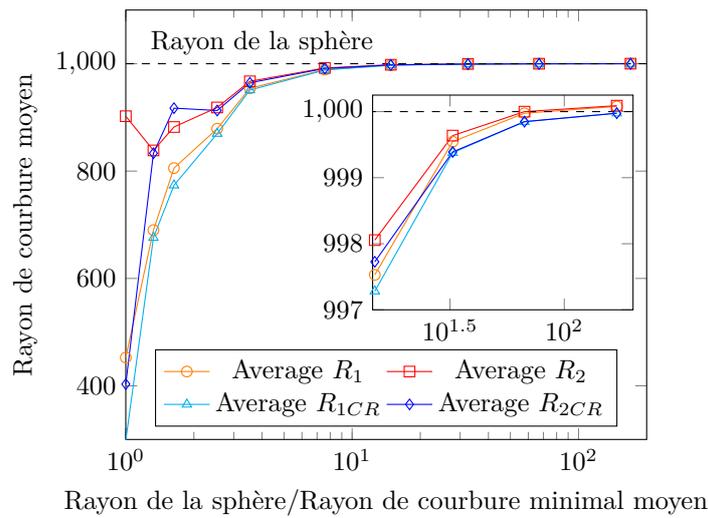


Figure 2.13 *Rayon de courbure moyen en fonction du rayon de la sphère sur le rayon de courbure minimal moyen.*

### 2.2.3 Bilan

La méthode Hamann d'approximation de la courbure à partir d'un maillage surfacique a l'avantage d'être robuste. Elle est indépendante du type d'élément utilisé. Elle ne requiert pas la géométrie et elle est rapide. La précision de l'évaluation de la courbure dépend de la qualité du voisinage et de la précision de la normale au plan tangent. Le traitement de plusieurs surfaces intersectées, par exemple entre une voilure et un fuselage, est plus complexe. Il faut séparer le maillage du fuselage et le maillage de la voilure. Autrement dit pour évaluer la courbure d'un nœud du fuselage appartenant à la fois au fuselage et à la voilure, il faut prendre uniquement le voisinage du fuselage qui est souvent dégénéré car les connexions topologiques sont quasi-symétriques. L'article relativement récent de Kotani [51] sur la théorie de surface discrète semble pallier ce problème en construisant un réseau avec de bonnes connexions topologiques pour évaluer la courbure correctement. D'autre méthode existe pour récupérer la courbure telle que la méthode de Frey et Borouchaki [32]. Ils construisent un support géométrique, G1 continu, associé à la triangulation de surface initiale, qui représente une approximation adéquate de la géométrie de surface sous-jacente. Cette géométrie approchée permet de récupérer l'information de la courbure. Nous allons aller plus loin en considérant directement la surface géométrique utilisée dans la conception de formes.

### 2.2.4 Calcul de la courbure à partir de la géométrie

Une méthode permet de récupérer les courbures et les directions principales d'un nœud projeté sur une surface paramétrique. Le type de projection utilisé et les termes essentiels de la géométrie différentielle sont rappelés pour déterminer les courbures et directions principales en tout point de cette surface.

#### Projection du nœud sur la géométrie

Le résultat de la projection est calculé par la méthode de Newton [15]. Cette méthode est un algorithme pour trouver numériquement une approximation précise d'une racine d'une fonction réelle d'une variable réelle. Une bonne approximation d'un zéro de la fonction d'une variable réelle  $f(x)$  est construite en considérant son développement de Taylor au premier ordre. Un point  $x_i$  est choisi proche du zéro à trouver. La fonction est approchée au premier ordre en la considérant asymptotiquement égale à sa tangente en ce point.

$$f(x) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

Pour trouver un zéro de cette fonction d'approximation, il suffit de calculer l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses, voir figure 2.14.

$$f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) = 0$$

On trouve un point  $x_{i+1}$  plus proche du zéro que  $x_i$ . La méthode est itérée pour trouver le point le plus proche du zéro. Généralement le critère d'arrêt est défini par un  $\varepsilon$  très petit

lorsque :

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$$

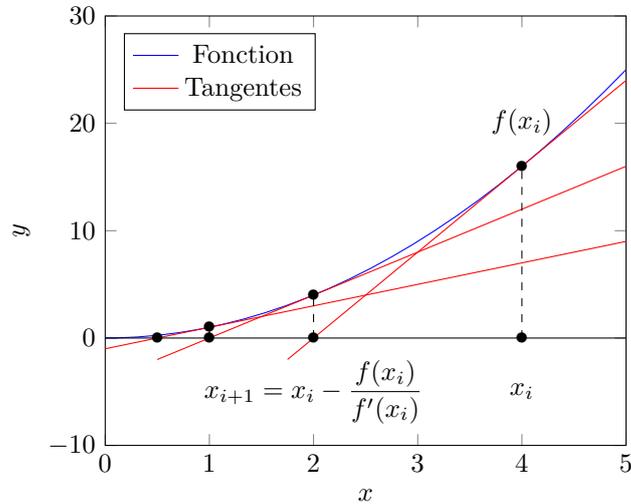


Figure 2.14 Méthode Newton.

La projection d'un point dans l'espace requiert trois dimensions. L'idée est d'avoir une surface paramétrée composée de trois fonctions dérivables. Le point projeté est approché par itération de Newton suivant la première coordonnée  $x$ , la deuxième coordonnée  $y$  et la dernière coordonnée  $z$ .

### Surface paramétrique régulière

En géométrie différentielle classique voir le livre de Farin pour la théorie [30], Boissonnat pour l'algorithmique [8], et Piegl et Tiller pour les B-spline dite NURBS [75], une surface est définie comme une cartographie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La surface est en réalité un quadrillage de type  $u$  et  $v$ .

**Définition 9.** Une surface bidimensionnelle paramétrique régulière  $S(u, v)$  de classe  $C^m$  avec  $m \geq 1$  est l'ensemble des points  $P$  de l'espace tridimensionnel réel  $\mathbb{R}^3$  défini par un ensemble ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  de telles sortes que toutes les dérivées partielles de  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'ordre  $m$  ou moins sont continues dans  $U$ , et  $S_u \wedge S_v \neq \vec{0}$  pour tous  $(u, v) \in U$ .

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Premières dérivées partielles

$$\overrightarrow{S_u(u, v)} = \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \quad \overrightarrow{S_v(u, v)} = \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \quad (2.22)$$

Deuxièmes dérivées partielles

$$\overrightarrow{S_{uu}(u, v)} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u^2} \quad \overrightarrow{S_{vv}(u, v)} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial v^2} \quad \overrightarrow{S_{uv}(u, v)} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (2.23)$$

### Plan tangent et vecteur normal

Soit  $P(u_0, v_0)$  un point d'une surface paramétrique  $S(u, v)$ . Il existe deux vecteurs tangents  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  suivant  $u$  et  $v$  à la surface  $S(u, v)$ . Ces deux vecteurs définissent le plan tangent de normale  $\vec{n}$

**Définition 10.** *Le plan tangent en un point  $P(u_0, v_0)$  sur une surface bidimensionnelle paramétrique régulière  $S(u, v)$  dans un espace tridimensionnel est défini comme l'ensemble de tous les points  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$  satisfaisant l'équation*

$$y = S(u_0, v_0) + aS_u(u_0, v_0) + bS_v(u_0, v_0) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

**Définition 11.** *Le vecteur normal  $\overrightarrow{N(u_0, v_0)}$  est défini par le produit vectoriel des vecteurs  $\overrightarrow{S_u(u_0, v_0)}$  et  $\overrightarrow{S_v(u_0, v_0)}$  tangents à la surface  $S(u, v)$  en  $P(u_0, v_0)$*

$$\overrightarrow{N(u_0, v_0)} = \frac{\overrightarrow{S_u(u_0, v_0)} \wedge \overrightarrow{S_v(u_0, v_0)}}{\|\overrightarrow{S_u(u_0, v_0)} \wedge \overrightarrow{S_v(u_0, v_0)}\|} \quad (2.25)$$

### Première forme fondamentale

**Définition 12.** *Le polynôme du second degré  $I(du, dv)$  où  $du, dv \in \mathbb{R}$ , est appelé la première forme fondamentale d'une surface paramétrique régulière  $S(u, v)$ . Les coefficients  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  et  $G(u, v)$  sont appelés les premiers coefficients fondamentaux.*

$$I(du, dv) = \overrightarrow{S_u(u, v)} \cdot \overrightarrow{S_u(u, v)} du^2 + 2\overrightarrow{S_u(u, v)} \cdot \overrightarrow{S_v(u, v)} dudv + \overrightarrow{S_v(u, v)} \cdot \overrightarrow{S_v(u, v)} dv^2$$

$$I(du, dv) = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \quad (2.26)$$

### Seconde forme fondamentale

**Définition 13.** *En supposant que la surface paramétrique régulière  $S(u, v)$  est au moins d'ordre 2, le polynôme du second degré  $II(du, dv)$  où  $du, dv \in \mathbb{R}$ , est appelé la deuxième forme fondamentale de  $S(u, v)$ . Les coefficients  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$  et  $N(u, v)$  sont appelés les deuxièmes coefficients fondamentaux.*

$$II(du, dv) = \overrightarrow{S_{uu}(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} du^2 + 2\overrightarrow{S_{uv}(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} dudv + \overrightarrow{S_{vv}(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} dv^2$$

$$II(du, dv) = L(u, v)du^2 + 2M(u, v)dudv + N(u, v)dv^2 \quad (2.27)$$

### Courbures surfaciques

**Définition 14.** Les deux valeurs propres réelles  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  de la matrice de Weingarten  $W$  d'une surface régulière  $S(u, v)$  de classe d'au moins 2 en un point  $P(x_0, v_0)$  sont appelées courbures principales de la surface paramétrique régulière en  $P$ .

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.28)$$

$$w_{11} = \frac{M(u, v)F(u, v) - L(u, v)G(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \quad w_{12} = \frac{L(u, v)F(u, v) - M(u, v)E(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$$

$$w_{21} = \frac{N(u, v)F(u, v) - M(u, v)G(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \quad w_{22} = \frac{M(u, v)F(u, v) - N(u, v)E(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$$

Les vecteurs propres associés déterminent les directions des courbures principales. Par conséquent, les courbures principales sont les racines réelles du polynôme caractéristique quadratique de  $W$ .

$$\kappa^2 + (w_{11} + w_{22})\kappa + w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = 0 \quad (2.29)$$

### 2.2.5 Étude d'un tore

Soit  $S(u, v)$  la surface paramétrée représentant le tore d'axe de révolution  $z$  de cercle de rayon  $r$  et de distance entre le centre du tube et le centre du tore  $R$ .

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin(u) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} u, v \in [0, 2\pi[ \\ 0 < r < R \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles premières (2.22) et secondes (2.23) en  $u$  et  $v$  ainsi que la normale.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_u}(u, v) &= \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} & \overrightarrow{S_v}(u, v) &= \begin{pmatrix} -R \sin v - r \cos u \sin v \\ R \cos v + r \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{S_{uu}}(u, v) &= \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \\ -r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix} & \overrightarrow{S_{vv}}(u, v) &= \begin{pmatrix} -R \cos v - r \cos u \cos v \\ -R \sin v - r \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{S_{uv}}(u, v) &= \begin{pmatrix} r \sin u \sin v \\ -r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} & \overrightarrow{N}(u, v) &= \frac{\overrightarrow{S_u}(u, v) \wedge \overrightarrow{S_v}(u, v)}{\|\overrightarrow{S_u}(u, v) \wedge \overrightarrow{S_v}(u, v)\|} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons les termes de la première forme fondamentale (2.26).

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \overrightarrow{S_u}(u, v) \cdot \overrightarrow{S_u}(u, v) = r^2 \\ F(u, v) &= \overrightarrow{S_u}(u, v) \cdot \overrightarrow{S_v}(u, v) = 0 \\ G(u, v) &= \overrightarrow{S_v}(u, v) \cdot \overrightarrow{S_v}(u, v) = (R + r \cos u)^2 \end{aligned}$$

Calculons les termes de la seconde forme fondamentale (2.27).

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \overrightarrow{S_u u(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} = r \\ M(u, v) &= \overrightarrow{S_u v(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} = 0 \\ N(u, v) &= \overrightarrow{S_v v(u, v)} \cdot \overrightarrow{N(u, v)} = (R + r \cos u) \cos u \end{aligned}$$

Calculons les coefficients de la matrice de Weingarten (2.28).

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{M(u, v)F(u, v) - L(u, v)G(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = -\frac{1}{r} \\ w_{12} &= \frac{L(u, v)F(u, v) - M(u, v)E(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = 0 \\ w_{21} &= \frac{N(u, v)F(u, v) - M(u, v)G(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = 0 \\ w_{22} &= \frac{M(u, v)F(u, v) - N(u, v)E(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = -\frac{\cos u}{R + r \cos u} \end{aligned}$$

Réolvons le polynôme (2.29) :

$$\begin{aligned} \kappa^2 + (w_{11} + w_{22})\kappa + w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} &= 0 \\ \kappa^2 - \left( \frac{R + 2r \cos u}{Rr + r^2 \cos u} \right) \kappa + \left( \frac{\cos u}{Rr + r^2 \cos u} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Le déterminant de cette équation vaut

$$\Delta = \left( \frac{R}{Rr + r^2 \cos u} \right)^2$$

Les racines réelles correspondantes aux courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont

$$\kappa_1 = \frac{1}{r} \quad \kappa_2 = \frac{\cos u}{R + r \cos u}$$

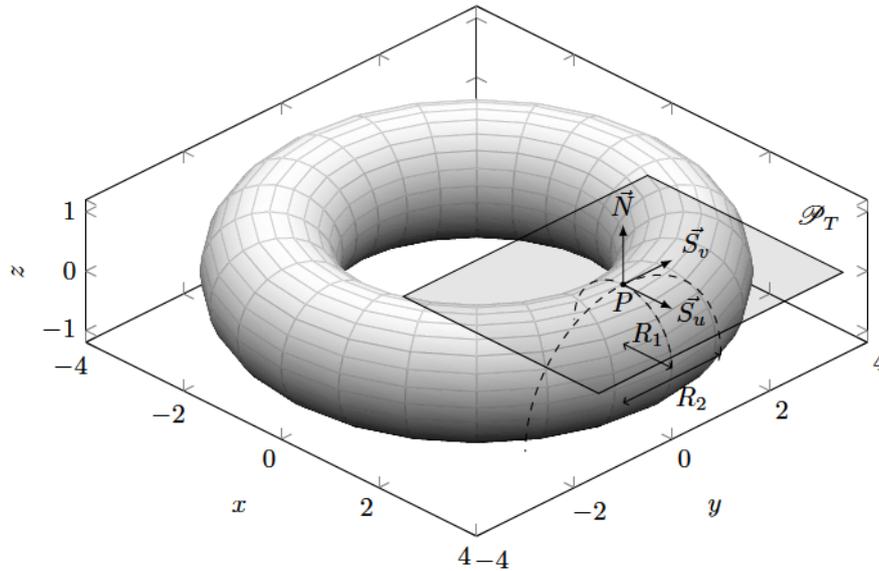
Les rayons de courbures  $R_1$  et  $R_2$  sont

$$R_1 = r \quad R_2 = \frac{R + r \cos u}{|\cos u|}$$

On voit que selon les  $u$ , le rayon de courbure est constant et est égal à  $r$ .

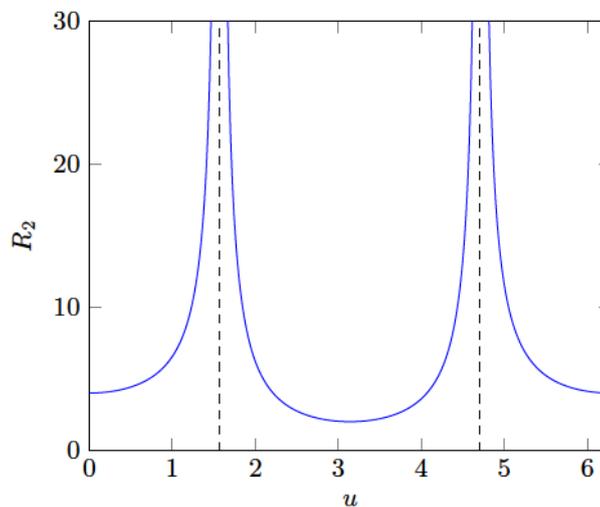
$$R_1 = 1.0 \quad R_2 = \frac{3 + \cos u}{|\cos u|}$$

Soit un tore d'axe de révolution  $z$  avec  $r = 1$  et  $R = 3$ , voir figure 2.15. Le point  $P(3, 0, 1)$  correspond au couple  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  de la surface. On a  $R_1 = 1$  et  $R_2 = +\infty$ .



**Figure 2.15** Surface paramétrique  $S(u, v)$  d'un tore  $r = 1$ ,  $R = 3$  au point  $P(3, 0, 1)$ ,  $R_1 = 1$  et  $R_2 = +\infty$ .

Ce point représente une discontinuité dans le rayon de courbure suivant  $v$ . Le rayon de courbure passe brutalement à l'infini. Le graphe sur la figure 2.16 représente le rayon de courbure  $R_2$  pour les couples  $(u, v)$  avec  $u \in [0, 2\pi]$  et  $v = 0$ . Deux discontinuités avec  $R_2 = +\infty$  apparaissent et correspondent à  $u = \pi/2$  et  $u = 3\pi/2$ . Deux rayons de courbures locaux sont minimaux :  $R_2 = 4$  pour  $u = 0$  et  $R_2 = 2$  pour  $u = \pi$



**Figure 2.16** Évolution du rayon de courbure  $R_2 = \frac{3 + \cos u}{|\cos u|}$  d'un tore pour  $u \in [0, 2\pi]$  et  $v = 0$ .

## 2.2.6 Bilan

La méthode de calcul de la courbure à partir d'une géométrie de type surface paramétrée régulière semble être une bonne voie pour récupérer des valeurs précises. Il ne faut pas

oublier que l'on veut mettre en place un processus d'adaptation de maillage qui respecte la forme géométrique. Notre support géométrique est la NURBS détaillé dans le chapitre 1. La surface NURBS est composée de fonctions de degré  $n > 2$  pilotée par des points de contrôle. Cette surface est donc facilement dérivable à l'ordre 2. Par conséquent il est aisé d'utiliser cette méthode de calcul de la courbure exacte à partir de cette surface après projection. Pour ce qui est des surfaces intersectées, le calcul de la courbure ne semble pas poser problème puisque le nœud est projeté sur la géométrie qui est soit un point, soit une courbe ou soit une surface. Dès la projection, la géométrie est donc identifiée pour le calcul de la courbure.

Les discontinuités dans les courbures sont des problèmes à traiter dans un cadre d'espace local ou riemannien avec une métrique spécifique pour créer des triangulations surfaciques représentatives de la géométrie.

## 2.3 Calcul de longueur dans la métrique

En introduisant une métrique adéquate, la longueur d'arête peut se comparer avec une longueur d'arête théorique optimale. La métrique permet d'ajouter des informations géométriques et/ou physiques dans l'espace local autour d'un nœud. En effet ces deux critères sont indispensables car rien ne présuppose que la physique soit conforme à la géométrie. Le but est de calculer une longueur unité entre deux nœuds pour contrôler le maillage dans sa globalité. Le calcul de la longueur d'arête dépend donc de l'espace local.

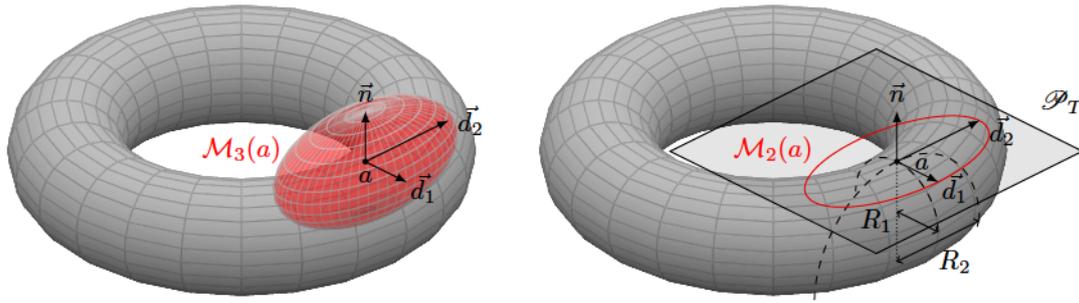
### 2.3.1 Métrique géométrique

La métrique géométrique transforme les données géométriques en une prescription de taille locale pour les arêtes. La métrique géométrique dans  $\mathbb{R}^3$  présentée dans les livres de Frey et George [33] et de George et Borouchaki [38] est de la forme  $\mathcal{M}_3(a) = {}^t\mathcal{D}(a)\mathcal{H}_3(a)\mathcal{D}(a)$  au point  $a$  tel que

$$\mathcal{M}_3(a) = {}^t\mathcal{D}(a) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 R_1^2(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2 R_2^2(a)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathcal{D}(a) \quad (2.30)$$

Les colonnes de  $\mathcal{D}(a)$  sont les directions unitaires principales et la normale unitaire au point  $a$ .  $R_1(a)$  est le plus petit rayon de courbure.  $R_2(a)$  est le plus grand rayon de courbure.  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients pour piloter l'écart angulaire entre le plan tangent et la discrétisation.  $\lambda$  est un scalaire quelconque. Ces coefficients permettent de contrôler l'anisotropie.

La surface  $S(u, v)$  où repose  $a$  est considérée régulière et dérivable au moins à l'ordre 2 localement. Avec la première forme fondamentale (2.26), la deuxième forme fondamentale (2.27) et la matrice de Weingarten (2.28), on retrouve une approximation correspondant à une quadrique (2.29). C'est cette approximation de la surface que nous allons contrôler dans la métrique géométrique via  $\kappa_1(a) = 1/R_1(a)$  et  $\kappa_2(a) = 1/R_2(a)$ .



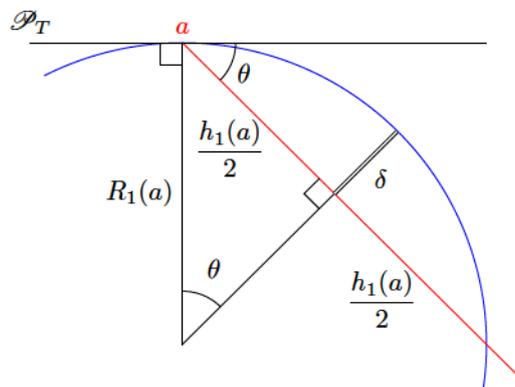
**Figure 2.17** Surface paramétrique  $S(u, v)$  d'un tore, métrique géométrique  $\mathcal{M}_3(a)$  et métrique géométrique induite  $\mathcal{M}_2(a)$ .

### 2.3.2 Métrique géométrique induite

La métrique que l'on souhaite chercher à contrôler un maillage sur une variété. Il est donc naturel de s'affranchir de la dimension 3 et de se placer dans le plan tangent, voir figure 2.17. Ainsi la métrique géométrique induite est définie dans le plan tangent. La métrique ne dépend donc plus que des courbures principales. La métrique induite en  $a$  est définie par  $\mathcal{M}_2(a) = {}^t\mathcal{D}(a)\mathcal{H}_2(a)\mathcal{D}(a)$  où  $\mathcal{D}(a)$  représente la matrice des directions principales unitaires dans le plan tangent  $\mathcal{P}_T$ , pour plus de détails, voir l'article de Laug et Borouchaki [54] et la thèse de Laug [53]. Cette métrique est induite et elle représente la trace de la métrique  $\mathcal{M}_3(a)$  sur le plan tangent  $\mathcal{P}_T$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\mathcal{M}_2(a) = {}^t\mathcal{D}(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_1^2(a) & 1 \\ 0 & h_2^2(a) \end{pmatrix} \mathcal{D}(a) \quad (2.31)$$

La prescription de taille  $h_1(a)$  et  $h_2(a)$  est en fonction des rayons osculateurs  $R_1(a)$ ,  $R_2(a)$  et de l'angle  $\theta$ .  $\theta$  représente l'écart angulaire entre le plan tangent  $\mathcal{P}_T$  et l'arête.  $\delta$  est la différence absolue entre discrétisation et la géométrie approchée par le cercle osculateur, voir figure 2.18.



**Figure 2.18** Écart  $\delta$  entre l'arête et le premier cercle osculateur de  $a$ .

L'écart maximal  $\delta$  entre une arête et le cercle osculateur peut s'écrire :

$$\delta = R_1(a) (1 - \cos(\theta))$$

Fixons le paramètre  $\varepsilon$  qui représente une distance relative :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{R_1(a)} = 1 - \cos(\theta) \quad (2.32)$$

D'après le théorème de Pythagore, en remplaçant et en utilisant l'équation (2.32) :

$$\begin{aligned} R_1(a)^2 &= \left(\frac{h_1(a)}{2}\right)^2 + (R_1(a) \cos(\theta))^2 \\ R_1(a)^2 &= \left(\frac{h_1(a)}{2}\right)^2 + (R_1(a)(1 - \varepsilon))^2 \\ h_1(a)^2 &= 4\varepsilon(2 - \varepsilon)R_1(a)^2 \\ h_1(a) &= 2\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)}R_1(a) \end{aligned}$$

Nous trouvons la prescription de taille pour la première direction en posant  $\alpha$  :

$$h_1(a) = \alpha R_1(a) \text{ avec } \alpha = 2\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)}$$

Pour le second cercle osculateur reprenons l'équation (2.32) :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\delta}{R_1(a)} \\ \frac{R_1(a)}{R_2(a)} \varepsilon &= \frac{\delta}{R_2(a)} \end{aligned}$$

Nous trouvons la prescription de taille pour la seconde direction en posant  $\beta$  :

$$h_2(a) = \beta R_2(a) \text{ avec } \beta = 2\sqrt{\varepsilon \frac{R_1(a)}{R_2(a)} \left(2 - \varepsilon \frac{R_1(a)}{R_2(a)}\right)}$$

La forme générale de la métrique géométrique s'écrit donc :

$$\mathcal{M}_2(a) = {}^t\mathcal{D}(a) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 R_1^2(a)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2 R_2^2(a)} \end{pmatrix} \mathcal{D}(a) \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon = 1 - \cos \theta \\ \alpha = 2\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} \\ \beta = 2\sqrt{\varepsilon \frac{R_1(a)}{R_2(a)} \left(2 - \varepsilon \frac{R_1(a)}{R_2(a)}\right)} \end{cases} \quad (2.33)$$

### 2.3.3 Intersection de métriques

Il est possible qu'en un point de la surface ou du volume plusieurs métriques d'origines variées soient données, par exemple, une métrique géométrique et une métrique solution aérodynamique, voir Hecht et Mohammadi [43]. Le but est de représenter l'ensemble ou une partie des propriétés de celles-ci sous la forme d'une métrique unique, voir les livres de George et Borouchaki [36] et [38].

Supposons deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  centrées en  $O$ . Le processus de réduction simultanée est appliqué pour trouver la métrique intersection  $\mathcal{M}_{intersection} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ . La métrique intersection  $\mathcal{M}_{intersection}$  représente l'ellipse de surface maximale en 2d (ou l'ellipsoïde de volume maximal en 3d) incluse dans l'intersection au sens géométrique des ellipses (ou des ellipsoïdes)  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

Pour une variété, l'idée est de trouver une base  $\mathcal{B}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , pas forcément orthogonale, telles que  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  soient diagonales dans cette base, puis on en déduit la métrique intersectée. Pour cela, on introduit la matrice  $\mathcal{N}$  définie par :

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2 \quad (2.34)$$

$\mathcal{N}$  est symétrique dans la métrique  $\mathcal{M}_1$  donc  $\mathcal{N}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}^2$ . La base  $\mathcal{B}$  est donnée par les vecteurs propres normalisés  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  de  $\mathcal{N}$ . On trouve les valeurs propres de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans la base  $\mathcal{B}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  grâce au quotient de Rayleigh :

$$\lambda_i = {}^t \vec{e}_i \mathcal{M}_1 \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \mu_i = {}^t \vec{e}_i \mathcal{M}_2 \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad i = 1, 2 \quad (2.35)$$

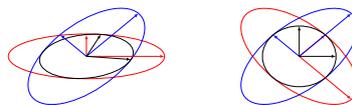
On pose  $\mathcal{P} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2)$  la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres  $\vec{e}_i$  avec  $i = 1, 2$  de  $\mathcal{N}$ . De plus  $\mathcal{P}$  est inversible car  $(\vec{e}_1 \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . On a donc :

$$\mathcal{M}_1 = {}^t \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = {}^t \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad (2.36)$$

La métrique intersection est donnée par

$$\mathcal{M}_{intersection} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = {}^t \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad (2.37)$$

Les intersections de la figure 2.19 montrent que la base formée par  $\mathcal{P}$  n'est pas forcément orthogonale. L'intersection de deux métriques anisotropes peut donner une métrique isotrope.



**Figure 2.19** Intersection de métriques à gauche et intersection de métriques antagonistes à droite annulant l'anisotropie.

### 2.3.4 Interpolation de métriques et longueur d'arête

D'après l'équation du segment droit dans un espace riemannien (2.10), on cherche une métrique  $\mathcal{M}(t)$  définie sur le segment paramétré  $\gamma(t) = ab$  pour tout  $t \in [0, 1]$  interpolée entre  $\mathcal{M}(a)$  et  $\mathcal{M}(b)$ . Le but est que la variation entre la métrique  $\mathcal{M}(a)$  et  $\mathcal{M}(b)$  soit monotone sur le segment  $[ab]$ .

Une variation linéaire sur les longueurs  $h$  est équivalent à une variation linéaire des  $\mathcal{M}^{-1/2}$ . On en déduit un schéma d'interpolation linéaire, la métrique anisotrope au point d'abscisse  $t$  est donnée par

$$\mathcal{M}(t) = \left( (1-t)\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} + t\mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.38)$$

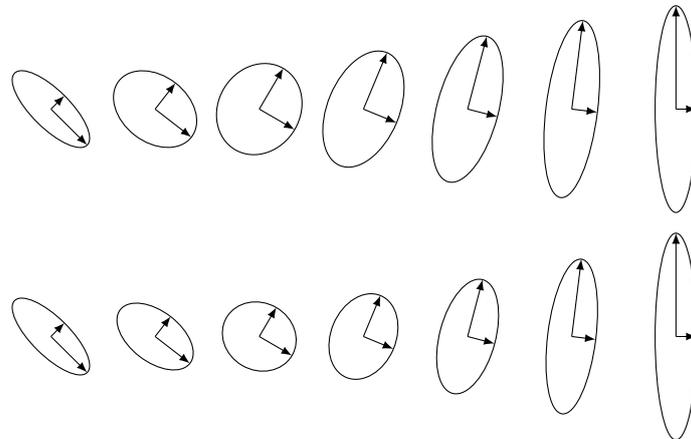
Il faut exprimer les deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans la même base. La matrice  $\mathcal{N}$  (2.34) permet de trouver ses vecteurs propres normalisés  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . Les valeurs propres de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont déduites grâce à l'équation (2.35). La matrice  $\mathcal{P}$  est formée par les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . La métrique interpolée de façon linéaire est donc égale à

$$\mathcal{M}(t) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{H_1^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_2^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \text{ avec } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ i = 1, 2 \\ h_{1,i} = 1/\sqrt{\lambda_i} \\ h_{2,i} = 1/\sqrt{\mu_i} \\ H_i(t) = (1-t)h_{1,i} + th_{2,i} \end{cases} \quad (2.39)$$

On peut aussi utiliser une variation géométrique qui favorise aussi les petites tailles avec  $H_i(t) = h_{1,i}^{(1-t)} h_{2,i}^t$  avec  $i = 1, 2$  tel que

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_1^{(1-t)} \mathcal{M}_2^t \text{ avec } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.40)$$

L'interpolation géométrique favorise les petites tailles par rapport à l'interpolation linéaire, voir figure 2.20.



**Figure 2.20** Interpolations linéaires et géométriques de métriques.

Dans un espace riemannien, la métrique est différente en fonction de chaque point de l'espace. Il existe donc une infinité de métriques le long d'un segment. Par conséquent la longueur d'un segment  $L_{\mathcal{M}(a+t\vec{ab})}(\Gamma)$  de l'équation (2.10) pour  $t = 1$  notée  $L_{\mathcal{M}(\vec{ab})}$  par la suite se calcule en fonction de ces métriques  $\mathcal{M}(a)$  et  $\mathcal{M}(b)$  avec des fonctions d'interpolation.

$$L_{\mathcal{M}(\vec{ab})} = \int_0^1 \|\vec{ab}\|_{\mathcal{M}(\vec{ab})} dt$$

Soit  $\mathcal{M}(t)$  la métrique au point de paramètre  $t \in [0, 1]$  parcourant le segment  $[ab]$ . La formule générale s'écrit donc :

$$L_{\mathcal{M}(\vec{ab})} = \int_0^1 \sqrt{{}^t\vec{ab} \mathcal{M}(t) \vec{ab}} dt$$

Le calcul de la norme  $L_{\mathcal{M}(\vec{ab})}$  est approché soit par une formule de quadrature ( $L_0$ ) soit par une fonction d'interpolation en  $h(t)$  linéaire ( $L_1$ ) ou géométrique ( $L_2$ ).

$$L_{\mathcal{M}(\vec{ab})} = \int_0^1 \frac{\|\vec{ab}\|}{h(t)} dt \tag{2.41}$$

### 2.3.5 Norme $L_0$ isotrope

La norme  $L_{0\mathcal{M}(\vec{ab})}$  s'obtient par une formule de quadrature.

$$L_{0\mathcal{M}(\vec{ab})} = \frac{\|\vec{ab}\|}{2} \left( \frac{1}{h_1(a)} + \frac{1}{h_1(b)} \right) \tag{2.42}$$

### 2.3.6 Norme $L_0$ anisotrope

La figure 2.21 montre les métriques associées aux nœuds  $a$  et  $b$ , les plans tangents de chaque nœud ainsi que les projections de nœuds sur les plans tangents. Calculons le terme  $\|\vec{ab}\|_{\mathcal{M}(a)}$  et supposons que  $b \approx b_{\mathcal{P}_T(a)}$  tel que :

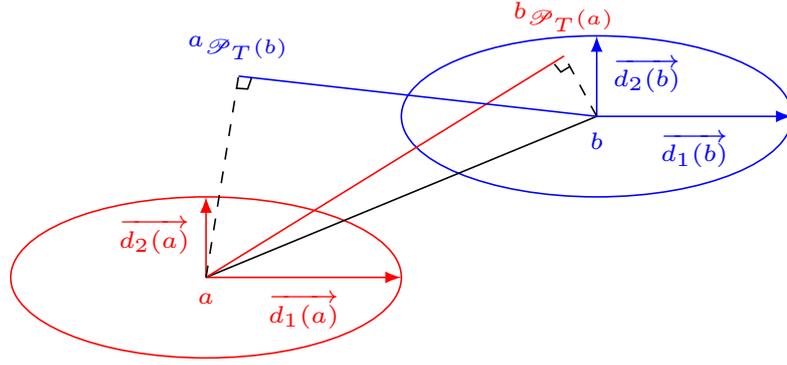
$$\vec{ab} \|_{\mathcal{M}(a)} \approx \vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \|_{\mathcal{M}(a)}$$

Exprimons ce vecteur dans la base  $\mathcal{B}(a, \vec{d}_1(a), \vec{d}_2(a))$  en posant  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} u &= \vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \cdot \vec{d}_1(a) \\ v &= \vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \cdot \vec{d}_2(a) \end{aligned}$$

D'après l'équation de la métrique induite (2.31), nous avons :

$$\vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \|_{\mathcal{M}(a)} = \sqrt{{}^t\vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \mathcal{M}(a) \vec{ab}_{\mathcal{P}_T(a)}}$$



**Figure 2.21** Calcul de la longueur anisotrope.

$$\overrightarrow{ab}_{\mathcal{P}_T(a)} \|\mathcal{M}(a)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(a)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

Finalement on obtient l'approximation suivante :

$$\|\overrightarrow{ab}\|_{\mathcal{M}(a)} \approx \sqrt{\left(\frac{u}{h_1(a)}\right)^2 + \left(\frac{v}{h_2(a)}\right)^2}$$

Le calcul de  $\|\overrightarrow{ab}\|_{\mathcal{M}(b)}$  dans le plan tangent  $\mathcal{P}_T(b)$  est identique. La longueur dans la métrique anisotrope est approchée par la moyenne des longueurs dans la métrique projetées dans chacun des plans tangents.

$$L_{0\mathcal{M}(\overline{ab})} \approx \frac{\|\overrightarrow{ab}\|_{\mathcal{M}(a)} + \|\overrightarrow{ab}\|_{\mathcal{M}(b)}}{2} \quad (2.43)$$

**Remarque 4.** Les normes anisotropes ne peuvent pas être calculer autrement que par la formule de quadrature car on ne peut pas utiliser une fonction d'interpolation entre  $a$  et  $b$  sur une variété car il y a une infinité de plans tangents entre  $a$  et  $b$ .

### 2.3.7 Norme $L_1$ isotrope

La norme  $L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})}$  s'obtient par une interpolation linéaire de la fonction  $h(t)$  entre  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} h(t) &= h(a)(1-t) + h(b)t \\ h(t) &= h(a) + t(h(b) - h(a)) \\ h(t) &= \alpha + \beta t \end{aligned}$$

La fonction  $h(t)$  est remplacée dans l'équation (2.41) :

$$L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta t} dt$$

En résolvant l'intégrale, on obtient :

$$L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \left[ \frac{\log(|\alpha + \beta t|)}{\beta} \right]_0^1$$

En remplaçant  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \frac{\log(h(b)) - \log(h(a))}{h(b) - h(a)} \quad (2.44)$$

### 2.3.8 Norme $L_2$ isotrope

La norme  $L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})}$  s'obtient par une interpolation géométrique de la fonction  $h(t)$  entre  $a$  et  $b$ .

$$h(t) = h(a)^{(1-t)} h(b)^t$$

$$h(t) = h(a) \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)^t$$

$$h(t) = h(a) \exp \left( t \log \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right) \right)$$

$$h(t) = \alpha \exp(\beta t)$$

La fonction  $h(t)$  est remplacée dans l'équation (2.41) :

$$L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \int_0^1 \frac{1}{\alpha \exp(\beta t)} dt$$

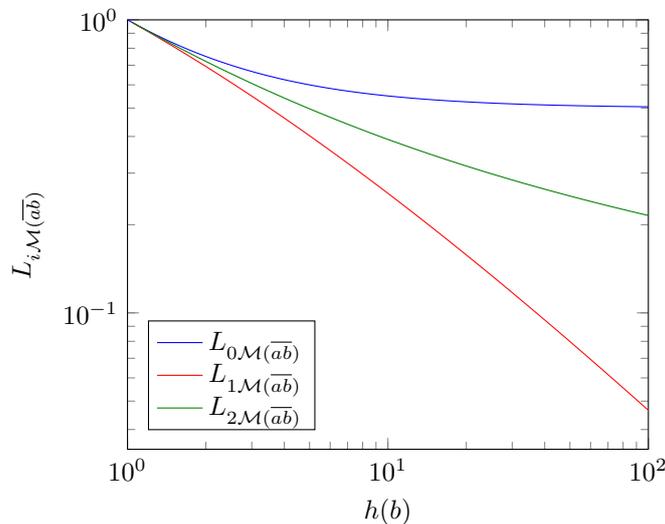
En résolvant l'intégrale, on obtient :

$$L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \left[ \frac{\exp(-\beta t)}{-\alpha \beta} \right]_0^1$$

En remplaçant  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})} = \|\vec{ab}\| \frac{h(b) - h(a)}{h(b)h(a) \log \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)} \quad (2.45)$$

Pour le cas isotrope, on peut tracer l'évolution de la norme  $L_{i\mathcal{M}(\overline{ab})}$  avec  $\|\vec{ab}\| = 1$  pour  $h(a) = 1$  et  $h(b)$  variant. Pour la formule de quadrature,  $L_{0\mathcal{M}(\overline{ab})}$  tend vers 0.5. Pour les fonctions d'interpolation linéaire et géométrique,  $L_{1,2\mathcal{M}(\overline{ab})}$  tendent vers 0. Elles favorisent donc les petites tailles. Cependant  $L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})}$  décroît moins rapidement vers 0 que  $L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})}$ .



**Figure 2.22** Évolution des normes  $L_{i\mathcal{M}(\overline{ab})}$  avec  $\|\vec{ab}\| = 1$  pour des métriques isotropes telle que  $h(a) = 1$  et  $h(b)$  variant.  $L_{0\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{h(b) + 1}{2h(b)}$ ,  $L_{1\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{\log(h(b))}{h(b) - 1}$  et  $L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})} = \frac{h(b) - 1}{h(b) \log(h(b))}$ .

**Remarque 5.** Les normes  $L_1$  et  $L_2$  ne sont définies que si  $h(a) \neq h(b)$ . Dans ce cas il faut utiliser la norme  $L_0$ .

## 2.4 Conclusions

La théorie de la métrique est rappelée, les méthodes de calcul de courbures sont étudiées et le calcul de longueur dans la métrique est décrit. La métrique est définie dans un espace riemannien avec un produit scalaire généralisé. Les calculs d'angle, de déterminant et de longueur sont définis avec ce produit scalaire généralisé dans un espace riemannien.

Le critère pour optimiser le maillage au sens géométrique est la courbure. Deux méthodes de calcul de la courbure radicalement différentes sont présentées. La première méthode s'affranchit de la géométrie. En effet une estimation de la courbure au nœud est créée à partir de sa boule. L'idée est de calculer une quadrique dont les deux racines réelles de son équation correspondent à une estimation des courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Malheureusement, la précision de l'estimation dépend fortement de la qualité de la boule du nœud et de la précision de la normale au nœud. En ce sens il faudrait que le maillage approche très bien la géométrie pour qu'il représente fidèlement les courbures avec cette méthode d'approximation. L'étude d'une sphère à montrer qu'à partir de  $R/\min(h_{boule}) > 15$  l'approximation de la courbure est correcte à 99.7% avec  $R$  pour le rayon de la sphère et  $\min(h_{boule})$  la taille minimale de l'arête incidente au nœud.

L'autre méthode consiste à calculer les courbures exactes d'une surface paramétrique  $S(u, v)$  régulière et dérivable à l'ordre 2. La première forme fondamentale et la deuxième forme fondamentale sont utilisées pour calculer la matrice de Weingarten dont les valeurs propres réelles sont les courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Les valeurs obtenues sont exactes puisqu'on utilise directement le support géométrique. De plus les surfaces NURBS utilisées sont régulières et dérivables au minimum à l'ordre 2. En outre l'opérateur de projection permet dans un processus de remaillage de récupérer directement le point sur la surface et donc de calculer les courbures et les directions principales exactes.

La métrique géométrique basée sur les courbures et les directions principales est donc utilisée par la suite. Elle est définie dans le plan tangent  $\mathcal{P}_T$  donc il est primordial de comprendre que tous les calculs de longueur se font dans ce plan tangent. Les opérations telles que l'intersection et l'interpolation de métriques sont rappelées.

*Quatre calculs de longueur dans un espace riemannien muni d'une métrique sont proposés. La norme  $L_0$  est définie par une formule de quadrature pour le cas isotrope (2.42) et anisotrope (2.43). Les normes  $L_1$  (2.44) et  $L_2$  (2.45) correspondent à des calculs de longueur dans le cas isotrope avec une fonction d'interpolation linéaire et géométrique respectivement. Il faut tester les trois normes pour le cas isotrope.*

Par la suite, il est nécessaire d'adapter le maillage et plus particulièrement les arêtes de ce maillage. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment faire pour obtenir un maillage unité, c'est-à-dire respectant la métrique au mieux en tout nœud du maillage. D'autres problèmes s'ajoutent à cela tels que le lissage de la métrique sur tout le champ discret, les critères d'optimisation choisis et les opérateurs de modification locale mis en place.

# Chapitre 3

## Adaptation de maillages surfaciques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Préparation du maillage pour l'adaptation</b>	<b>82</b>
3.1.1	Classifications des composants du maillage	82
3.1.2	Structures de données utilisées	86
3.1.3	Gradations d'un champ de métrique	88
3.1.4	Algorithme d'initialisation pour l'adaptation	92
<b>3.2</b>	<b>Critères d'optimisation</b>	<b>93</b>
3.2.1	Jacobien de l'élément	93
3.2.2	Angle dièdre entre deux éléments	95
3.2.3	Qualités en forme de l'élément	96
<b>3.3</b>	<b>Opérateurs de modification locale de maillage</b>	<b>100</b>
3.3.1	Basculer les arêtes	101
3.3.2	Casser-basculer les arêtes	103
3.3.3	Enlever-basculer les arêtes	105
3.3.4	Insérer un point	107
3.3.5	Bouger-basculer de nœuds	111
<b>3.4</b>	<b>Algorithmes d'adaptation globale</b>	<b>116</b>
3.4.1	Algorithme d'adaptation isotrope	117
3.4.2	Algorithme d'adaptation anisotrope	117
3.4.3	Algorithme d'adaptation anisotrope avec alignement	118
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>118</b>

---

Le processus d'adaptation de maillage surfacique utilise les critères géométriques du chapitre précédent. Le maillage initial  $\mathcal{M}_0$  est adapté de façon itérative en se basant sur la métrique pour obtenir un maillage unité  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Ce processus intègre le calcul de la longueur d'arête dans un espace local, la découpe d'arête par insertion de nœud, la condensation d'arête en un nœud, la bascule d'arête et la projection sur la géométrie des nouveaux nœuds générés. Le maillage surfacique  $\mathcal{M}_{adapt}$  minimise l'angle dièdre et maximise un critère de qualité en forme des éléments.

Les méthodes de maillage d'espace continu en espace discret pour les calculs éléments finis par George et Borouchaki [36] ainsi que Frey et George [33] sont très bien décrites

dans leur livre que ce soit pour la génération ou la modification de maillage. Un ouvrage en deux volumes plus récent de Borouchaki et George [9, 38] met à jour ce dernier et donne les fonctions de formes pour divers éléments, définit la métrique et ses opérations ainsi que différents algorithmes de recherche ou de modification de maillage. Gou, Yuan, et Su montrent en 2018 l'intérêt des technologies de remaillage local par rapport aux techniques de remaillage global [39]. C'est à partir de toutes ces connaissances sur le maillage, la métrique et de ces analyses sur l'adaptation de maillage qu'il devient nécessaire de créer un algorithme de modification locale de maillage industriel pour être plus compétitif et plus efficace.

Les travaux antérieurs montrent la nécessité de développer des algorithmes d'adaptation de maillage dans le but d'améliorer la précision de la solution, la convergence des résultats et les temps de calcul Lohner [59], George [35], Castro et Hecht [17], Coupez [23], Borouchaki [12], Bibb [6], Loseille [60], Sahni [78], Borouchaki [10], Huang [46], Olivier [72], Dobrzynski [29], Menier [67], [66], Park [73], Frazza [31] ainsi que Digonnet et Coupez [27]. Concernant les opérateurs de modification locale, on peut consulter Coupez [22], Michal et Krakos et leur bibliothèque modulaire pour l'adaptation de maillage anisotrope [68] ainsi que Loseille [62], [61].

D'abord le maillage  $\mathcal{M}_0$  est préparé avant l'adaptation avec un algorithme d'initialisation à travers la classification des composants du maillage, les structures de données utilisées et la gradation de champ de métrique. Ensuite des critères d'optimisation sont étudiés pour définir ce qui est valide, possible et déclenchable en terme d'opérateur de modification locale de maillage. Puis ces opérateurs de modification locale de maillage sont mis en place tels que la bascule d'arête, le casser et l'enlever d'arête avec insertion de point ainsi que le bouger de nœuds. À ce titre, un nouveau bouger de nœuds permettant d'avoir un maillage anisotrope avec des éléments rectangle alignés sur les directions principales de la métrique est présenté. Enfin les algorithmes d'adaptation globale sont détaillés pour les cas isotrope, anisotrope et anisotrope avec alignement.

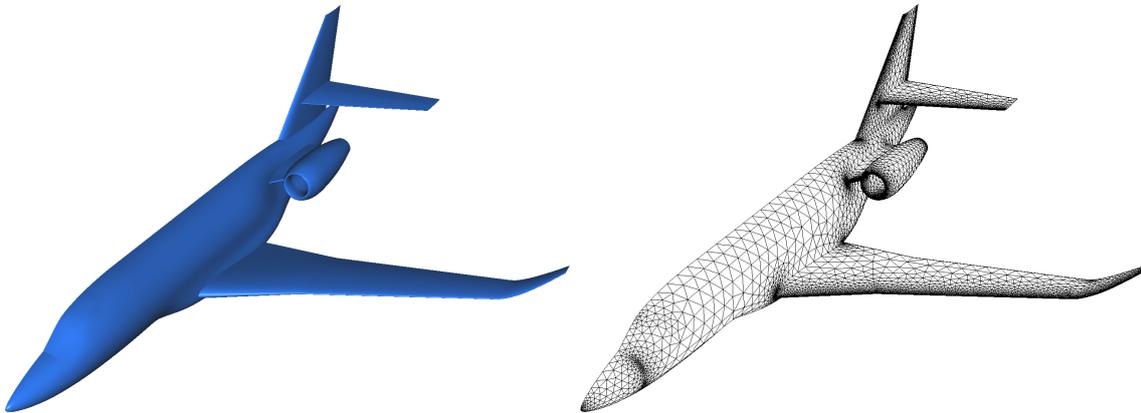
## 3.1 Préparation du maillage pour l'adaptation

L'adaptation de maillage surfacique a besoin de classifier chaque composant du maillage, de structures de données adéquates et d'une carte de taille géométrique corrigée. Tout d'abord le maillage doit être identifié, c'est-à-dire les types d'élément, de nœuds et d'arêtes doivent être mis en place. Ces types servent de références pour le déclenchement de modification particulière ou pour traiter une partie bien précise du maillage. Ensuite la structure de données utilisée doit être souple dynamiquement. Enfin la carte de taille est calculée à partir des courbures et des directions principales. Cette carte de taille est bornée puis elle est corrigée par un algorithme afin de lisser le champ de taille.

### 3.1.1 Classifications des composants du maillage

Le maillage initial  $\mathcal{M}_0$  est généré avec BLSURF à partir d'une géométrie  $\mathcal{G}_0$  composée de carreaux surfaciques de type NURBS, voir figure 3.1. Pour modifier ce maillage, il faut faire attention à certains nœuds, arêtes géométriques et groupe d'éléments. Ce problème

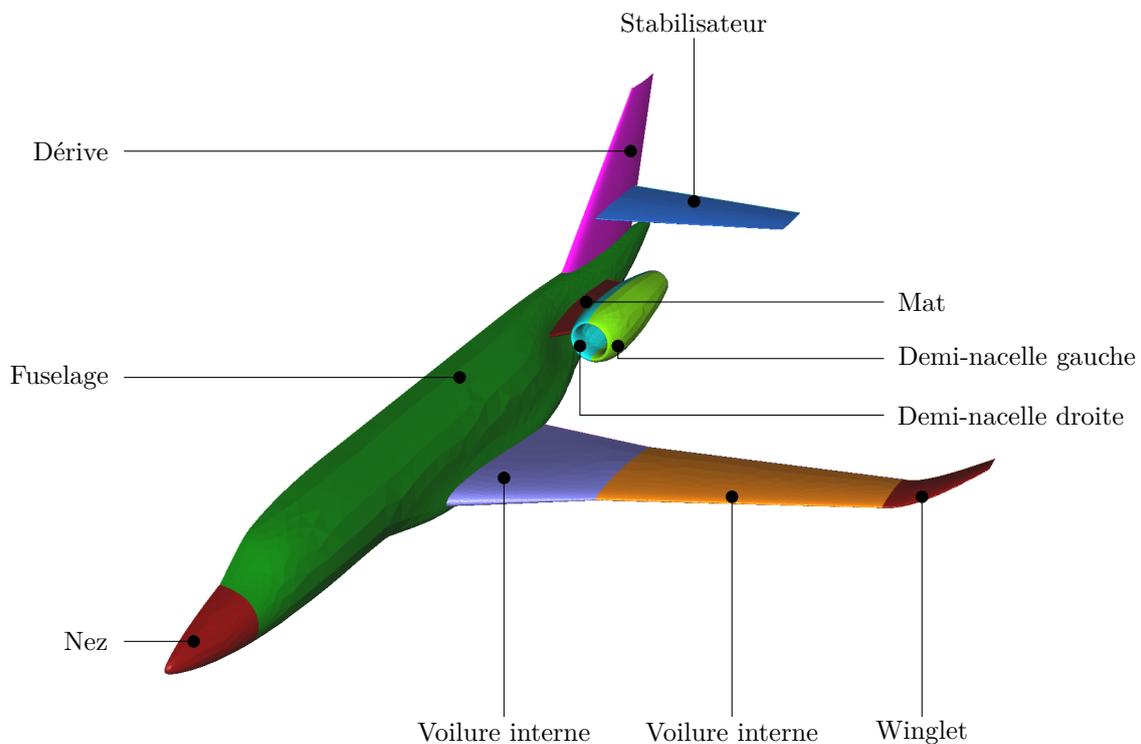
de localisation doit être résolu pour effectuer des opérations de modification locale. Les éléments, les nœuds et les arêtes sont donc classifiés.



**Figure 3.1** Géométrie  $\mathcal{G}_0$  et maillage  $\mathcal{M}_0$  du Generic Business Jet (GBJ).

### Classification des éléments

Chaque élément appartient à une surface régulière continue, voir figure 3.2. Un ensemble d'éléments correspond à un carreau surfacique. Il est essentiel de savoir sur quelle géométrie repose l'élément. Cela permet de projeter rapidement et le cas échéant de paralléliser facilement l'adaptation par carreau surfacique. En effet la projection sur la géométrie est l'opération la plus coûteuse en temps CPU.



**Figure 3.2** Groupes d'éléments du maillage  $\mathcal{M}_0$  du GBJ représentant les carreaux surfaciques.

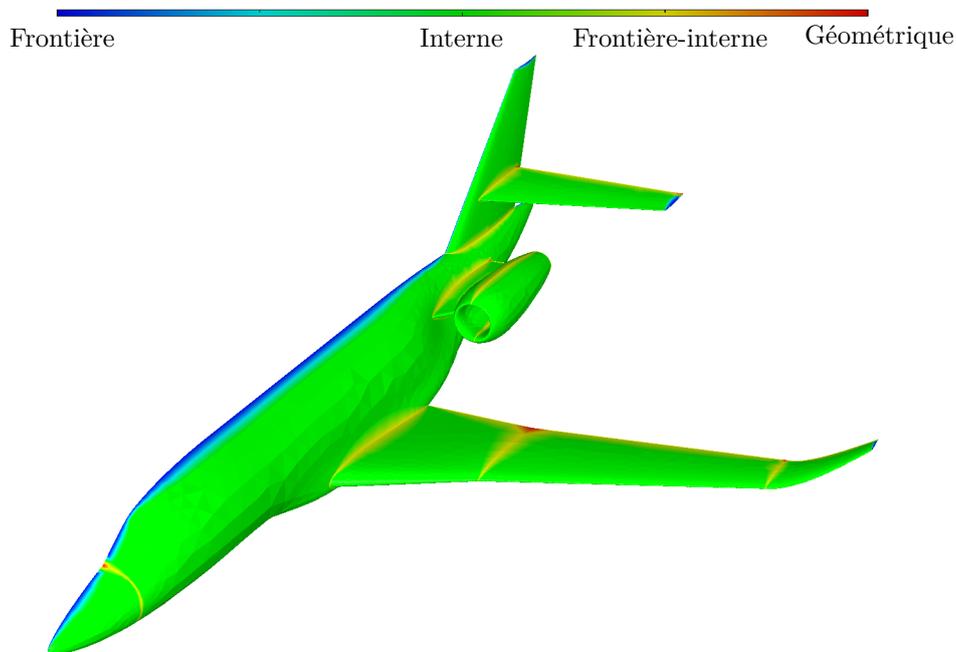
### Classification des nœuds

Les nœuds sont distingués en six catégories, voir tab. 3.1. Les nœuds peuvent être volontairement conservés. Il peut être utile de ne pas vouloir adapter une partie du maillage pour conserver sa structure par exemple. Les nœuds sur les courbes frontières d'un seul carreau surfacique sont de type frontière. Les nœuds sur un carreau surfacique sont de type interne. Les nœuds sur des courbes internes à la surface ou entre deux carreaux sont de type frontière-interne. Les nœuds peuvent être l'intersection de trois surfaces ou les coins de chaque carreau ou carreau surfacique, c'est ce que l'on appelle un nœud géométrique.

Index	Type de nœud	Description
0	Fixe	Nœud conservé par l'utilisateur
1	Frontière	Nœud sur la courbe frontière d'un carreau surfacique
3	Interne	Nœud sur la surface d'un carreau surfacique
4	Interne-frontière	Nœud sur la courbe frontière de deux carreaux surfaciques
5	Géométrique	Nœud sur le coin d'un ou plusieurs carreaux surfaciques

**Table 3.1** Type de nœud.

La figure 3.3 représente les types de nœud sur le maillage  $\mathcal{M}_0$  du GBJ. Les types de nœud frontière, interne, frontière-interne et géométrique sont représentés avec la colormap.



**Figure 3.3** Type de nœud du maillage  $\mathcal{M}_0$  du GBJ.

### Classification des arêtes

Les arêtes sont distinguées en six grandes catégories, voir tab. 3.2. Une arête est différenciée par le type de ses deux nœuds extrémités, par le nombre d'éléments de la coque de l'arête et par le ou les carreaux surfaciques adjacents. La difficulté réside dans l'identification des arêtes mixtes, c'est-à dire avec des types de nœuds extrémités différents. La figure 3.4 montre les types d'arête sur le maillage  $\mathcal{M}_0$  du GBJ. Les types d'arête frontière, mixte, interne et frontière interne sont représentés.

Index	Type d'arête ab	Type a	Type b	Éléments	Carreaux adjacents	
0	Fixe	0	0	1 ou 2	= ou $\neq$	
1	Frontière	1	1	1	$\emptyset$	
		1	1	2	=	
3	Interne	3	3	2	=	
		4	4	2	=	
4	Frontière-interne	4	4	2	$\neq$	
5	Géométrique	5	5	1 ou 2	$\emptyset$ ou = ou $\neq$	
		0	1	1 ou 2	$\emptyset$ ou = ou $\neq$	
		0	3	2	= ou $\neq$	
		0	4	2	= ou $\neq$	
		0	5	1 ou 2	$\emptyset$ ou = ou $\neq$	
2		Mixte	1	3	2	= ou $\neq$
			1	4	2	= ou $\neq$
			1	5	1 ou 2	$\emptyset$ ou = ou $\neq$
			3	4	2	= ou $\neq$
			3	5	2	= ou $\neq$
	4		5	2	= ou $\neq$	

Table 3.2 Type d'arête.

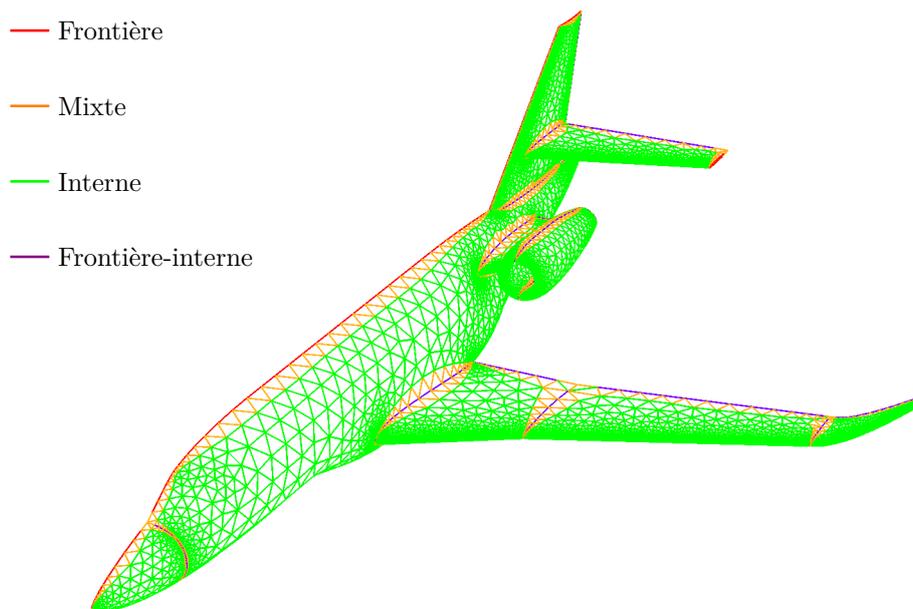


Figure 3.4 Type d'arête du maillage  $\mathcal{M}_0$  du GBJ.

### 3.1.2 Structures de données utilisées

Le choix de la structure de données est important pour la rapidité de l'adaptation, voir l'article de Peucker [74]. Le but est d'obtenir un maillage unité en effectuant un test sur les longueurs d'arête pour les modifier. Par conséquent il devient intéressant de considérer une structure d'arête, voir l'article de Beall [4].

#### Structure d'arête $e$

Le nombre d'arête augmente et/ou diminue lors d'une adaptation. De plus l'adaptation de maillage s'effectue de façon locale. Autrement dit dès qu'une modification topologique est effectuée, il faut mettre à jour la topologie. Il faut donc une grande souplesse dans cette structure. Les arêtes appartiennent toujours à deux nœuds et à un ou deux éléments pour un maillage surfacique. Pour le stockage des arêtes, la construction d'un tableau  $[i][j]$  avec comme premier indice, l'indice  $i$  du nœud  $N_i$  et comme deuxième indice, l'indice  $j$  du nœud  $N_j$  est envisageable. Or le tableau a une taille  $nn \times nn$  donc toutes les combinaisons de nœuds possibles sont dans ce tableau ce qui prend énormément de place mémoire, de plus le tableau est très creux. Si cette structure d'arêtes est utilisée alors la modification d'une arête entraîne une boucle sur tout ce tableau. L'idée est d'utiliser une structure dynamique telle une liste doublement chaînée sur les arêtes pour effectuer des opérations locales. En effet les opérateurs de modification locale que l'on verra dans les sections suivantes tel que casser ou enlever une arête ne modifient que certaines arêtes. Dans cette liste doublement chaînée, une arête renseigne les indices des nœuds extrémités  $a$  et  $b$ , les indices des éléments de la coque de l'arête  $E_1$  et  $E_2$ , le type de l'arête  $Type$ , l'adresse de la géométrie pour la projection  $Geom$ , la longueur euclidienne  $L$ , la longueur dans la métrique  $L_M$  et les pointeurs sur l'arête précédente  $Prec$  et l'arête suivante  $Suiv$ , voir figure 3.5. Pour ajouter une arête, il suffit d'allouer une arête et de l'insérer grâce aux pointeurs  $Prec$  et  $Suiv$ . Pour enlever une arête, il suffit de la retirer de la liste en brisant la chaîne et en la raccordant avec les pointeurs  $Prec$  et  $Suiv$ . Ensuite on peut libérer la mémoire de l'arête enlevée pour la détruire. Cette structure permet facilement de retrouver la boule d'un nœud en tournant sur les éléments voisins  $E_1$  et  $E_2$ .

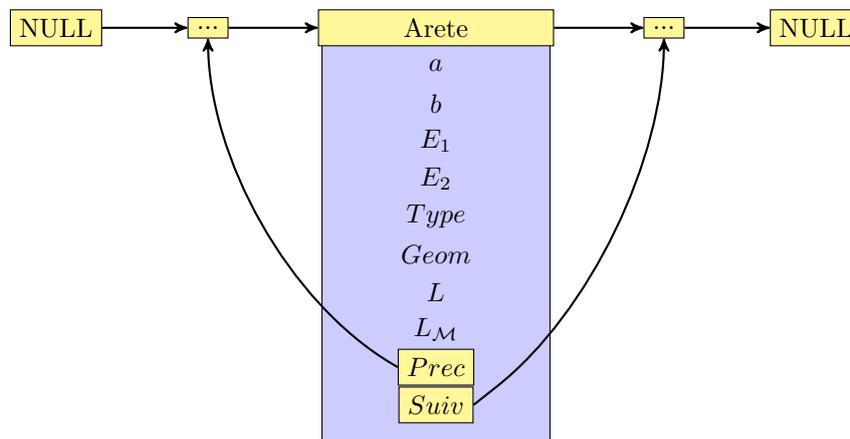


Figure 3.5 Structure d'arête  $e$  en liste doublement chaînée.

### Structure d'élément E

La structure d'élément **E** est plus classique, c'est un tableau de pointeur de pointeur. Chaque élément pointe vers les trois arêtes de la structure d'arête **e**, voir figure 3.6. Cette structure permet notamment de tourner autour d'un nœud et de retrouver rapidement les éléments de la boule et les arêtes incidentes au nœud.

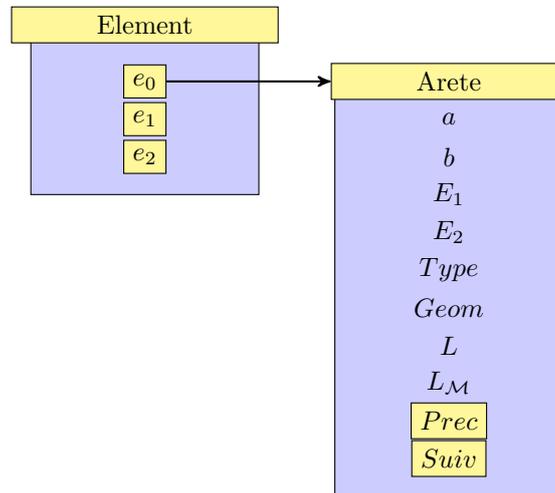


Figure 3.6 Structure d'élément E.

### Structure de nœud N

La structure **N** est utilisée uniquement pour le bouger de nœud que l'on verra dans les sections suivantes qui se fait à iso nombre de nœud. Cette structure permet de stocker l'indice du nœud *indice*, la boule du nœud *Boule[]*, le voisinage du nœud *Noeud[]*, le type de la boule *Type*, le nombre de l'itération du bouger *Flag* et l'adresse de la géométrie *Geom*, voir figure 3.7. La boule peut être soit de type ouvert, par exemple nœud frontière ou soit de type fermé, nœud interne. Une fois que cette structure est allouée, elle ne sera pas altérée, c'est-à-dire qu'il n'y aura ni de libération de la mémoire et ni d'allocation mémoire dynamique pendant le bouger de nœud. La mise à jour ne se fera que pour les valeurs des indices dans la boule du nœud, le voisinage du nœud et le nombre d'itération du bouger.

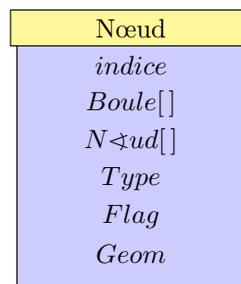


Figure 3.7 Structure de nœud N.

**Remarque 6.** Pour le calcul de la boule fermée, une arête incidente au nœud est sélectionnée et en tournant dans le même sens grâce aux éléments voisins de l'arête, l'ensemble de la boule est parcouru. Pour le calcul de la boule ouverte, une arête incidente au nœud est sélectionnée et en tournant dans les deux sens, l'ensemble de la boule est récupéré.

### 3.1.3 Gradations d'un champ de métrique

Le but est de corriger la carte de taille  $\mathcal{H}$  obtenue grâce à la formule de la métrique induite (2.33) pour avoir une faible variation de taille entre les nœuds voisins. Pour obtenir la carte de taille géométrique  $\mathcal{H}$ , il faut spécifier l'écart angulaire  $\theta$  par rapport au plan tangent. Néanmoins avant de faire la gradation, il est nécessaire de borner la carte de taille par une borne minimale  $h_{min}$  et une borne maximale  $h_{max}$  pour éviter les problèmes d'épsilon machine. Par exemple la courbure  $\kappa$  d'un plan donne un rayon de courbure  $R$  infini donc la taille prescrite  $h$  est infiniment grande. On a donc :

$$h_{min} < h_i < h_{max} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Les tailles  $h_{min}$  et  $h_{max}$  sont définies par l'utilisateur. Elles représentent les tailles euclidiennes minimale et maximale que l'on souhaite dans le maillage adapté. Les algorithmes 3.1 et 3.2 sont issus du livre de référence du maillage de George et Borouchaki [38]. Des applications ont été étudiées dans les articles de Borouchaki et Hecht [11], de Huang [45] et de Laug [55]. La gradation  $G$  permet de contrôler la variation de taille entre deux nœuds voisins telle que :

$$1 < G < +\infty \quad (3.2)$$

Plus la gradation est proche de 1 et plus la variation de taille est progressive entre deux nœuds. Plus la gradation est grande et plus la variation de taille est grande entre deux nœuds. Les gradations pour le cas isotrope et le cas anisotrope sont présentées.

#### Gradation $\mathcal{H}$ -choc isotrope

Cette correction est appliquée grâce à l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc de la carte de taille isotrope en parcourant toutes les arêtes du maillage tant qu'il y a des corrections de taille.

Supposons  $h(b) \geq h(a)$  et  $L$  la longueur dans la métrique isotrope calculée avec la formule d'interpolation géométrique soit la norme  $L_{2\mathcal{M}(\overline{ab})}$  (2.45) telle que :

$$L = \|\overrightarrow{ab}\| \frac{h(b) - h(a)}{h(b)h(a) \log \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)} \quad (3.3)$$

Définissons la gradation  $g$  entre  $a$  et  $b$  telle que :

$$g = \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)^{\frac{1}{L}} \quad (3.4)$$

On veut que  $g \leq G$  autrement dit on cherche  $h(b)$  de façon à ce que  $g' = G$  où  $g'$  est la nouvelle valeur de  $g$  obtenue avec la nouvelle valeur de  $h(b)$  notée  $h'(b)$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{h'(b)}{h(a)}\right)^{\frac{1}{L'}} &= G \\ \frac{1}{L'} \log \left( \left(\frac{h'(b)}{h(a)}\right) \right) &= \log G \text{ en introduisant (3.3)} \\ \frac{h'(b)h(a) \log \left( \left(\frac{h'(b)}{h(a)}\right) \right)}{\overrightarrow{\|ab\|} h'(b) - h(a)} &= \log G \text{ en posant } h'(b) = rh(a) \\ \frac{h(a) r \log^2 r}{\overrightarrow{\|ab\|} r - 1} - \log G &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation est trop complexe. Une solution approchée est donc proposée. Le but est de réduire la grande taille par un facteur. On sait que :

$$\begin{aligned} h'(b) &\leq h(b) \\ \overrightarrow{\|ab\|} \frac{h'(b) - h(a)}{h'(b)h(a) \log \left( \left(\frac{h(b)}{h(a)}\right) \right)} &\geq \overrightarrow{\|ab\|} \frac{h(b) - h(a)}{h(b)h(a) \log \left( \left(\frac{h(b)}{h(a)}\right) \right)} \\ L' &\geq L \\ \left(\frac{h'(b)}{h(a)}\right)^{\frac{1}{L'}} &\leq \left(\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\frac{1}{L}} \\ g' &\leq \left(\frac{h'(b)}{h(b)} \frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\frac{1}{L}} \\ g' &\leq \eta^{\frac{1}{L}} g \text{ avec } \eta = \frac{h'(b)}{h(b)} \end{aligned}$$

Pour avoir  $g' \leq G$  il suffit que :

$$\eta^{\frac{1}{L}} g \leq G$$

Par conséquent pour respecter la gradation  $G$ ,  $h(b)$  se réduit par le facteur  $\eta$  tel que :

$$\eta = \left(\frac{G}{g}\right)^L \tag{3.5}$$

**Algorithme 3.1** : Correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope.**Entrées** : Carte de taille isotrope  $\mathcal{H}_{iso}$ **Sorties** : Carte de taille isotrope  $\mathcal{H}_{iso}$  corrigée

```

1  pour  $i = 0$  à  $na$  faire
2    si  $h(b) \geq h(a)$  alors
3       $L = \|\overrightarrow{ab}\| \frac{h(b) - h(a)}{h(a)h(b) \log \frac{h(b)}{h(a)}}$ ;
4       $g = \left(\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\frac{1}{L}}$ ;
5      si  $g > G$  alors
6         $\eta = \left(\frac{G}{g}\right)^L$ ;
7         $h(b) = \eta h(b)$ ;
8      fin
9    fin
10   sinon
11      $L = \|\overrightarrow{ab}\| \frac{h(a) - h(b)}{h(a)h(b) \log \frac{h(a)}{h(b)}}$ ;
12      $g = \left(\frac{h(a)}{h(b)}\right)^{\frac{1}{L}}$ ;
13     si  $g > G$  alors
14        $\eta = \left(\frac{G}{g}\right)^L$ ;
15        $h(a) = \eta h(a)$ ;
16     fin
17   fin
18 fin
19 Si une taille a été modifiée aller en 1;

```

**Gradation  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope**

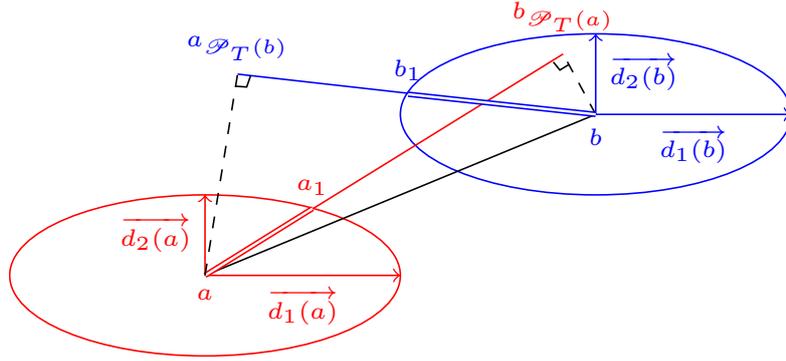
La correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope est bornée par la correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope. Les tailles sont modifiées mais les directions principales restent inchangées. La forme géométrique des boules unités est préservée jusqu'à un certain seuil, puis la forme peut se dégénérer le long de ses axes principaux jusqu'à la plus petite taille de la boule isotrope.

Le calcul de  $L$  est approchée avec la formule d'interpolation géométrique et par une approximation de la spécification de taille suivant une seule direction, celle de l'arête. Les hypothèses de gradation du cas isotrope peuvent donc s'appliquer au cas anisotrope via une approximation. Cette approximation consiste à considérer que la taille  $h_{ab}(a)$  en  $a$  est celle de la taille le long de l'arête  $\overline{ab}$ , voir figure 3.8 telle que :

$$h_{ab}(a) = \|\overrightarrow{aa_1}\| \quad \text{avec } a_1 = [ab] \cap \overline{\mathcal{M}(a)} \quad (3.6)$$

où  $\overline{\mathcal{M}(a)}$  représente la boule unité dans la métrique  $\mathcal{M}(a)$  centrée en  $a$ .

Les longueurs  $h_{ab}(a)$  et  $h_{ab}(b)$  de la ligne 3 de l'algorithme sont représentées par  $\|\overrightarrow{aa_1}\|$



**Figure 3.8** Représentation de  $h_{ab}(a)$  et  $h_{ab}(b)$ .

et  $\|\vec{bb_1}\|$  sur la figure 3.8. Calculons  $a_1$  qui est l'intersection entre la droite  $(ab_{\mathcal{P}_T(a)})$  et l'ellipse de centre  $a$ .

$$\begin{cases} \frac{u^2}{h_1^2(a)} + \frac{v^2}{h_2^2(a)} = 1 \\ v = c \times u \end{cases}$$

Exprimons  $\vec{ab_{\mathcal{P}_T(a)}}$  dans la base  $\mathcal{B}_{a,u,v}$  et calculons le coefficient directeur  $c$  de la droite  $(ab_{\mathcal{P}_T(a)})$

$$\begin{aligned} ab_{\mathcal{P}_T(a)u} &= \vec{ab_{\mathcal{P}_T(a)}} \cdot \vec{d_1(a)} \\ ab_{\mathcal{P}_T(a)v} &= \vec{ab_{\mathcal{P}_T(a)}} \cdot \vec{d_2(a)} \\ c &= \frac{ab_{\mathcal{P}_T(a)v}}{ab_{\mathcal{P}_T(a)u}} \end{aligned}$$

Le système peut se résoudre

$$\begin{cases} u = \frac{h_1(a) \times h_2(a)}{\sqrt{c^2 \times h_1^2(a) + h_2^2(a)}} \\ v = c \times u \end{cases}$$

La longueur  $h_{ab}(a)$  vaut

$$\|\vec{aa_1}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

**Algorithme 3.2** : Correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope.**Entrées** : Cartes de taille isotrope  $\mathcal{H}_{iso}$  et anisotrope  $\mathcal{H}_{aniso}$  et directions principales  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ **Sorties** : Cartes de taille isotrope  $\mathcal{H}_{iso}$  et anisotrope  $\mathcal{H}_{aniso}$  corrigées

```

1 Correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope  $h_{iso}$ ;
2 pour  $i = 0$  à  $na$  faire
3   Calculer  $h_{ab}(a)$ ,  $h_{ab}(b)$  et  $\|\vec{ab}\|$ ;
4   si  $h_{ab}(a) \geq h_{ab}(b)$  alors
5     
$$L = \|\vec{ab}\| \frac{h_{ab}(a) - h_{ab}(b)}{h_{ab}(a)h_{ab}(b) \log \frac{h_{ab}(a)}{h_{ab}(b)}};$$

6     
$$g = \left( \frac{h_{ab}(a)}{h_{ab}(b)} \right)^{\frac{1}{L}};$$

7     si  $g > G$  alors
8       
$$\eta = \left( \frac{G}{g} \right)^L;$$

9       pour  $i = 1$  à  $2$  faire
10        
$$h_i(a) = \max(\eta h_i(a), h_{iso}(a));$$

11      fin
12    fin
13  fin
14  sinon
15    
$$L = \|\vec{ab}\| \frac{h_{ab}(b) - h_{ab}(a)}{h_{ab}(a)h_{ab}(b) \log \frac{h_{ab}(b)}{h_{ab}(a)}};$$

16    
$$g = \left( \frac{h_{ab}(b)}{h_{ab}(a)} \right)^{\frac{1}{L}};$$

17    si  $g > G$  alors
18      
$$\eta = \left( \frac{G}{g} \right)^L;$$

19      pour  $i = 1$  à  $2$  faire
20        
$$h_i(b) = \max(\eta h_i(b), h_{iso}(b));$$

21      fin
22    fin
23  fin
24 fin
25 Si une taille a été modifiée aller en 2;

```

**3.1.4 Algorithme d'initialisation pour l'adaptation**

L'algorithme 3.3 permet de préparer l'adaptation du maillage. D'abord les nœuds sont projetés sur la géométrie ce qui permet de calculer les courbures et les directions principales, de récupérer l'adresse de la géométrie pour chaque élément et de récupérer les nœuds de type géométrique. Ensuite les groupes d'éléments sont identifiés ainsi que le type de nœud. Les courbures permettent d'évaluer la carte de taille  $\mathcal{H}$  (2.33). Cette carte est bornée (3.1) puis elle est corrigée avec le  $\mathcal{H}$ -choc (3.2). Une table de hachage est nécessaire pour identifier les éléments voisins d'une arête. C'est une structure de données qui permet une association clé-valeur pour récupérer les éléments voisins d'une arête via une fonction de hachage. La structure d'arête  $\mathbf{e}$  peut donc être remplie ainsi que la structure d'élément  $\mathbf{E}$ . L'identification des types d'arête se déduit des groupes d'éléments et des

types de nœud grâce aux structures  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}$ . Il ne reste plus qu'à compléter la structure d'arête  $\mathbf{e}$  avec les types d'arête.

**Algorithme 3.3 :** Initialisation de l'adaptation.

**Entrées :** Maillage  $\mathcal{M}_0$ , géométrie  $\mathcal{G}_0$

**Sorties :** Structure d'arête  $\mathbf{e}$ , structure d'élément  $\mathbf{E}$ , groupes d'éléments, type de nœud et type d'arête

- 1 **pour**  $i = 0$  à  $nn$  **faire**
- 2     Projeter les nœuds du maillage  $\mathcal{M}_0$  sur la géométrie  $\mathcal{G}_0$ ;
- 3     Calculer les courbures géométriques  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ ;
- 4     Calculer les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ ;
- 5     Récupérer les adresses de la géométrie pour chaque élément;
- 6     Récupérer les adresses de la géométrie pour les nœuds géométriques;
- 7 **fin**
- 8 Identifier les groupes d'éléments;
- 9 Identifier les types de nœud;
- 10 Calculer la carte de taille  $\mathcal{H}$ ;
- 11 Borner la carte de taille  $\mathcal{H}$ ;
- 12 Corriger la carte de taille  $\mathcal{H}$  avec la gradation  $\mathcal{H}$ -choc;
- 13 Hacher les arêtes;
- 14 Remplir la structure d'arête  $\mathbf{e}$  ( $a, b, E_1, E_2, type, geom, L, L_M, prec, suiv$ );
- 15 Remplir la structure d'élément  $\mathbf{E}$  ( $e_0, e_1, e_2$ );
- 16 Identifier les types d'arête 0, 1, 3, 4, 5;
- 17 Identifier le type d'arête 2;
- 18 Remplir le type d'arête dans la structure d'arête  $\mathbf{e}$ ;

## 3.2 Critères d'optimisation

Les critères d'optimisation permettent de valider, rendre possible et déclencher les opérations de modification de maillage. D'abord il faut trouver un critère qui permet de connaître la validité d'un élément, le jacobien. Ensuite nous devons chercher un critère en rapport avec la géométrie de type variété, l'angle dièdre. Enfin il faut savoir optimiser la qualité des triangles au sens de la forme avec des critères isotropes et anisotropes.

### 3.2.1 Jacobien de l'élément

Le jacobien de l'élément est défini à partir des fonctions de formes de l'élément dans l'espace virtuel de référence, voir le livre de Borouchaki et George [9].

Soit le triangle  $E$  défini par ses trois sommets  $A_0, A_1$  et  $A_2$  dans le sens direct dans  $\mathbb{R}^2$ . Ce triangle peut se représenter dans l'espace virtuel de référence  $O, \hat{x}, \hat{y}$  tel que le triangle de référence  $\hat{E}$  défini par les sommets de références  $\hat{A}_0, \hat{A}_1$  et  $\hat{A}_2$  dans le sens direct, voir figure 3.9. Soit l'application  $F(\hat{x}, \hat{y})$  qui envoie le triangle de référence de l'espace virtuel de référence sur l'élément physique dans l'espace physique. Cette fonction est définie par la somme de fonctions linéaires par morceaux  $\hat{\varphi}_i$  définies dans un repère barycentrique telle que :

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^n \hat{A}_i \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.7)$$

où  $\hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y})$  représentent les fonctions de forme associées au triangle de référence de sommets  $\hat{A}_i$  telles que :

$$F(0, 0) = A_0$$

$$F(1, 0) = A_1$$

$$F(0, 1) = A_2$$



**Figure 3.9** Élément représenté dans l'espace physique et dans l'espace virtuel de référence.

$\varphi_0$  représente la droite de coordonnées barycentrique 1 par rapport à  $\hat{A}_0$ .  $\varphi_1$  représente la droite de coordonnées barycentrique 1 par rapport à  $\hat{A}_1$ .  $\varphi_2$  représente la droite de coordonnées barycentrique 1 par rapport à  $\hat{A}_2$ . On a donc les fonctions de formes suivantes :

$$\hat{\varphi}_0(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$$

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$$

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$

On a donc l'application  $F(\hat{x}, \hat{y})$  de l'équation (3.7) égale à :

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{A}_0 + \hat{x}\hat{A}_1 + \hat{y}\hat{A}_2 \quad (3.8)$$

**Définition 15.** Le jacobien  $J(F(\hat{x}, \hat{y}))$  de la fonction  $F(\hat{x}, \hat{y})$  est défini par

$$J(F(\hat{x}, \hat{y})) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \end{array} \right| \quad (3.9)$$

Calculons les dérivées partielles de  $F(\hat{x}, \hat{y})$ .

$$\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} = -\hat{A}_0 + \hat{A}_1$$

$$= \hat{A}_1 - \hat{A}_0$$

$$= \overrightarrow{\hat{A}_0\hat{A}_1}$$

$$\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} = -\hat{A}_0 + \hat{A}_2$$

$$= \hat{A}_2 - \hat{A}_0$$

$$= \overrightarrow{\hat{A}_0\hat{A}_2}$$

Calculons le jacobien  $J(F(\hat{x}, \hat{y}))$ .

$$J(F(\hat{x}, \hat{y})) = \left| \begin{array}{cc} \overrightarrow{\hat{A}_0\hat{A}_1} & \overrightarrow{\hat{A}_0\hat{A}_2} \end{array} \right| \Leftrightarrow \text{Aire}(\hat{E}) > 0 \quad (3.10)$$

**Proposition 5.** *Pour que l'élément soit valide, il faut que son aire soit positive strictement autrement dit il faut que le jacobien  $J$  de  $F(\hat{x}, \hat{y})$  du triangle  $\hat{E}$  soit positif strictement.*

$$J(F(\hat{x}, \hat{y})) > 0 \quad (3.11)$$

Par conséquent, l'élément est valide si il tourne dans le sens direct et si ces trois sommets ne sont pas alignés. Quand on envisage une modification locale de maillage, il est donc impératif de calculer le jacobien des nouveaux triangles. Cela permet de rejeter tout de suite les modifications qui vont rendre le maillage invalide et non conforme.

### 3.2.2 Angle dièdre entre deux éléments

Le critère de l'angle dièdre ne concerne que les maillages 3d surfaciques.

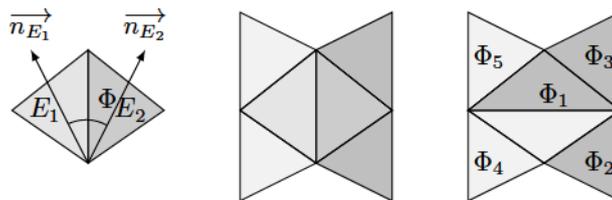
**Définition 16.** *L'angle dièdre  $\Phi$  représente l'angle entre les 2 normales aux facettes  $\overrightarrow{n_{E_1}}$  et  $\overrightarrow{n_{E_2}}$ . Le cosinus de l'angle dièdre s'obtient par le produit scalaire des normales aux facettes normées, figure 3.10.*

$$\cos(\Phi) = \frac{\langle \overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}} \rangle}{\|\overrightarrow{n_{E_1}}\| \|\overrightarrow{n_{E_2}}\|} \quad (3.12)$$

Dans un maillage, l'angle dièdre n'a de sens qu'à l'intérieur d'un même carreau géométrique. Le but est de savoir si la bascule d'arête est possible, c'est-à-dire si elle ne dégrade pas trop l'angle dièdre localement pour approcher au mieux la géométrie. Au maximum il y a cinq angles dièdres pour la coque d'une arête. L'idée est de calculer ces cinq angles dans la configuration simulée  $\Phi_i \text{ simulé}$  et de les comparer à un angle seuil  $\Phi_{\text{seuil}}$ .

**Proposition 6.** *La bascule d'arête est possible si le critère de l'angle dièdre est vérifié tel que*

$$\cos(\Phi_i \text{ simulé}) > \cos(\Phi_{\text{seuil}}) \text{ pour } i = 1, \dots, 5 \quad (3.13)$$



**Figure 3.10** *Angle dièdre entre deux éléments, configuration initiale et configuration simulée avec les angles dièdres à calculer.*

### 3.2.3 Qualités en forme de l'élément

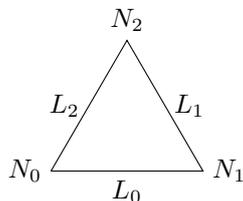
La qualité en forme de l'élément permet de juger si l'élément respecte la métrique. L'élément est dégénéré si sa qualité vaut 0 et l'élément est parfait si sa qualité vaut 1. La qualité d'un simplexe isotrope et anisotrope est démontrée dans l'article de Laug et Borouchaki [37]. Les qualités en forme isotrope et anisotrope sont rappelées. Un nouveau critère de qualité anisotrope est introduit avec un alignement des côtés de l'élément suivant les directions principales.

#### Qualité en forme isotrope

La qualité en forme isotrope d'un triangle est évaluée dans ses boules unités à savoir des cercles. Par conséquent, les calculs se font dans l'espace euclidien usuel.

**Définition 17.** *La qualité en forme isotrope du triangle  $E$  est le rapport de son aire sur la somme de ses longueurs au carré multiplié par un coefficient de normalisation.*

$$q_{iso}(E) = 4\sqrt{3} \frac{\|\overrightarrow{N_0 N_1} \wedge \overrightarrow{N_0 N_2}\|}{\sum_{i=0}^2 L_i^2} \quad (3.14)$$



**Figure 3.11** Visualisation du triangle équilatéral de qualité en forme  $q_{iso}(E) = 1$ .

On considère le triangle  $E$  et on cherche  $\alpha$  tel que la qualité du triangle équilatéral soit égale à 1.

$$\begin{aligned} q_{iso}(E) &= \alpha \frac{\frac{1}{2} \times base \times hauteur}{L_0^2 + L_1^2 + L_2^2} \\ 1 &= \alpha \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \\ \alpha &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

#### Qualité en forme anisotrope

Le calcul de la qualité en forme isotrope peut se transposer dans la métrique anisotrope comme vu au chapitre précédent. Les longueurs (2.43) et les aires (2.5) sont calculées dans

la métrique. La qualité en forme anisotrope d'un triangle est donc évaluée dans ses boules unités à savoir des ellipses. Par conséquent, les calculs se font dans l'espace riemannien.

**Définition 18.** La qualité en forme anisotrope du triangle  $E$  dans un plan tangent  $\mathcal{P}_T(N_i)$  est le rapport de son aire multiplié par la racine du déterminant de  $\mathcal{M}(N_i)$  sur la somme de ses longueurs dans la métrique au carré multipliée par un coefficient de normalisation. Le triangle est projeté dans chacun des 3 plans tangents. La qualité en forme anisotrope globale du triangle  $E$  est le minimum des trois qualités calculées dans chacun des plans tangents.

$$q_{aniso}(N_0) = 4\sqrt{3} \frac{\overrightarrow{N_0 N_1} \wedge \overrightarrow{N_0 N_2}}{2 \sum_{i=0}^2 L_{\mathcal{M}(N_0)i}^2} \sqrt{\det(\mathcal{M}(N_0))} \quad (3.15)$$

$$q_{aniso}(E) = \min(q_{aniso}(N_0), q_{aniso}(N_1), q_{aniso}(N_2)) \quad (3.16)$$

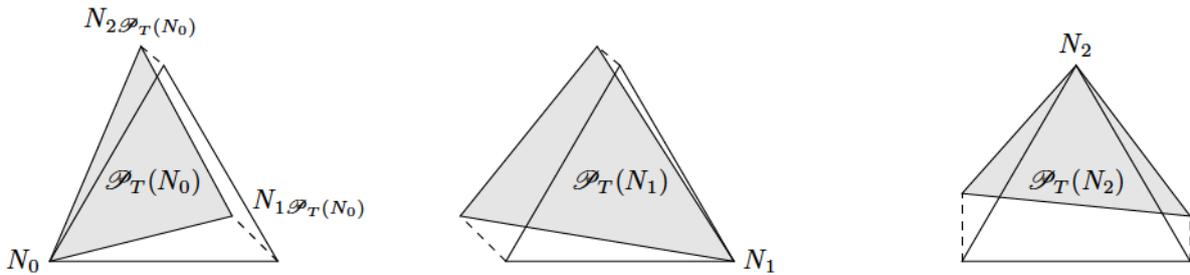


Figure 3.12 Visualisation des trois projections du triangle  $E$  dans chacun des plans tangents.

### Qualité en forme anisotrope avec alignement

La qualité en forme anisotrope avec alignement d'un triangle est évaluée suivant l'écart angulaire entre ses côtés et les directions privilégiées de l'ellipse. Cela permet de quantifier l'alignement du triangle par rapport aux directions principales de l'ellipse, voir figure 3.13. Le triangle recherché est rectangle. Il a deux côtés égaux à 1 alignés suivant les directions  $\overrightarrow{d_{1,2,3 \text{ ou } 4}}$  et un côté égal à  $\sqrt{2}$  aligné suivant les directions  $\overrightarrow{d_{5,6,7 \text{ ou } 8}}$ .

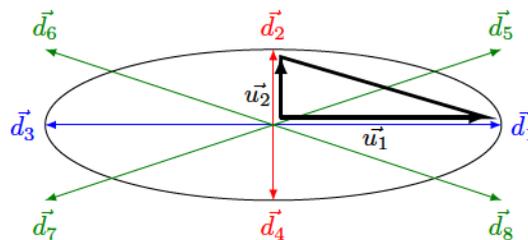


Figure 3.13 Directions principales privilégiées pour l'alignement du triangle.

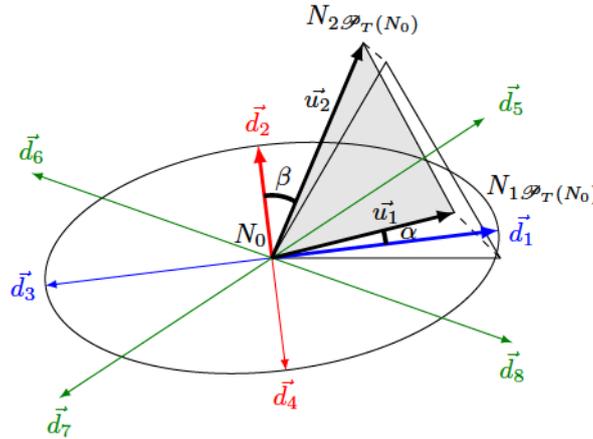
D'après la formule du produit scalaire on a :

$$\langle u_1, d_1 \rangle = \|\vec{u}_1\| \|\vec{d}_1\| \cos \alpha$$

De plus si les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{d}_1$  sont normalisés, on a  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{d}_1\| = 1$  donc

$$\cos \alpha = \langle u_1, d_1 \rangle \text{ avec } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{d}_1 \text{ normalisés}$$

Les cosinus des angles entre les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{d}_i$  et  $\vec{u}_2$  et  $\vec{d}_i$  respectivement peuvent être évalués. On sait que le cosinus d'un angle vaut 1 quand l'angle est nul entre les deux vecteurs de même origine et c'est justement ce que l'on cherche. On va donc regarder les deux cosinus maximaux pour les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  par rapport aux directions  $\vec{d}_i$ . Le maximum des deux angles, respectivement le minimum des deux cosinus, est retenu pour la qualité anisotrope calculé au nœud. Le minimum des trois qualités au nœud définit donc la qualité globale du triangle comme pour la qualité anisotrope sans alignement. La figure 3.14 illustre les angles  $\alpha$  et  $\beta$  minimaux entre  $\vec{u}_1$  et  $\vec{d}_1$  et respectivement  $\vec{u}_2$  et  $\vec{d}_2$ . La qualité en forme anisotrope avec alignement au nœud  $N_0$  vaut donc  $\min(\cos \alpha, \cos \beta) = \cos \beta$ .



**Figure 3.14** Visualisation de la projection du triangle  $E$  dans le plan tangent  $\mathcal{P}_T(N_0)$  et des angles  $\alpha$  et  $\beta$  les plus faibles entre  $\vec{u}_1$  et  $\vec{d}_i$  respectivement  $\vec{u}_2$  et  $\vec{d}_i$  pour  $i = 1, \dots, 8$ .

**Définition 19.** La qualité en forme anisotrope  $q_{\text{aniso align}}(N_i)$  avec alignement selon les directions principales de la métrique du triangle  $E$  dans un plan tangent évalue les deux plus grands cosinus  $\cos \alpha$  et  $\cos \beta$  correspondants aux produits scalaires  $\langle u_1, d_j \rangle$  et  $\langle u_2, d_j \rangle$  entre les deux côtés du triangle  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  normalisés avec pour origine le centre de la boule unité et les huit directions normalisées liées aux directions principales  $\vec{d}_j$  avec  $j = 1, \dots, 8$ .

$$\cos \alpha = \max(\langle u_1, d_j \rangle) \text{ avec } j = 1, \dots, 8 \quad (3.17)$$

$$\cos \beta = \max(\langle u_2, d_j \rangle) \text{ avec } j = 1, \dots, 8 \quad (3.18)$$

La qualité en forme anisotrope avec alignement au nœud est égale au minimum des deux cosinus.

$$q_{\text{aniso align}}(N_i) = \min(\cos \alpha, \cos \beta) \quad (3.19)$$

La qualité en forme anisotrope avec alignement globale est égale au minimum des trois qualités calculées dans chacun des plans tangents.

$$q_{\text{aniso align}}(E) = \min(q_{\text{aniso align}}(N_i)) \text{ avec } i = 1, \dots, 2 \quad (3.20)$$

**Remarque 7.** Quand le premier plus grand cosinus est trouvé avec l'équation (3.17), il faut éliminé un ensemble de directions pour le calcul du second cosinus. Le triangle ne peut pas avoir deux côtés alignés sur la même direction donc la direction utilisée pour le premier cosinus est éliminée. Ensuite on cherche un triangle rectangle donc il ne peut pas être plat, aigu ou obtus. Le tableau 3.3 recense toutes les listes d'indices possibles en fonction de l'indice de la première direction choisie.

Indice de direction choisi	Indices de directions restants	Schémas
1	2, 4, 5, 8	
2	1, 3, 5, 6	
3	2, 4, 6, 7	
4	1, 3, 7, 8	
5	1, 2	
6	2, 3	
7	3, 4	
8	1, 4	

**Table 3.3** Liste des indices des directions restantes en fonction du premier indice de direction choisi.

L'algorithme 3.4 présente la méthode de calcul de la qualité anisotrope d'alignement. Les lignes 18 et 24 font référence au tableau 3.3 pour définir la liste des directions à utiliser pour le calcul du second cosinus en fonction de la première direction choisie pour le premier cosinus.

<b>Algorithme 3.4 :</b> Qualité en forme anisotrope avec alignement.	
	<b>Entrées :</b> Triangle $E$ et directions principales $\vec{d}_1, \vec{d}_2$
	<b>Sorties :</b> Qualité en forme anisotrope avec alignement $q_{anisoalign}(E)$
1	<b>pour</b> $i = 0$ à 2 <b>faire</b>
2	Projeter le triangle $E$ dans le plan tangent $\mathcal{P}_T(N_i)$ ;
3	Calculer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4, \vec{d}_5, \vec{d}_6, \vec{d}_7$ et $\vec{d}_8$ avec $N_i$ pour origine;
4	Normaliser $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4, \vec{d}_5, \vec{d}_6, \vec{d}_7$ et $\vec{d}_8$ ;
5	$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \alpha' = \cos \beta' = -1$ ;
6	$indice_{\cos \alpha} = indice_{\cos \beta} = 0$ ;
7	<b>pour</b> $j = 1$ à 8 <b>faire</b>
8	$\cos \alpha = \max(\langle u_1, d_j \rangle)$ ;
9	<b>si</b> $\cos \alpha = \max(\langle u_1, d_j \rangle)$ <b>alors</b>
10	$indice_{\cos \alpha} = j$ ;
11	<b>fin</b>
12	$\cos \beta = \max(\langle u_2, d_j \rangle)$ ;
13	<b>si</b> $\cos \beta = \max(\langle u_2, d_j \rangle)$ <b>alors</b>
14	$indice_{\cos \beta} = j$ ;
15	<b>fin</b>
16	<b>fin</b>
17	<b>si</b> $\cos \alpha > \cos \beta$ <b>alors</b>
18	<b>pour</b> les $j$ restants de la Liste( $indice_{\cos \alpha}$ ) <b>faire</b>
19	$\cos \beta' = \max(\langle u_2, d_j \rangle)$ ;
20	<b>fin</b>
21	$q_{anisoalign}(N_i) = \min(\cos \alpha, \cos \beta')$ ;
22	<b>fin</b>
23	<b>sinon</b>
24	<b>pour</b> les $j$ restants de la Liste( $indice_{\cos \beta}$ ) <b>faire</b>
25	$\cos \alpha' = \max(\langle u_1, d_j \rangle)$ ;
26	<b>fin</b>
27	$q_{anisoalign}(N_i) = \min(\cos \alpha', \cos \beta)$ ;
28	<b>fin</b>
29	<b>fin</b>
30	$q_{anisoalign}(E) = \min(q_{anisoalign}(N_0), q_{anisoalign}(N_1), q_{anisoalign}(N_2))$ ;

### 3.3 Opérateurs de modification locale de maillage

L'objectif principal est d'avoir une longueur d'arête égale à la longueur unité pour toutes les arêtes du maillage tout en maximisant la qualité en forme des éléments et en minimisant l'angle dièdre. L'adaptation d'arête se définit par la bascule d'une arête entre 2 éléments, par le découpage d'une arête en insérant un nouveau nœud ou par la condensation d'une arête en un seul nœud. L'optimisation du maillage se définit à iso nombre de nœud par le bouger de nœuds couplé à des bascules d'arêtes locales.

D'abord Coupez initie les travaux d'adaptation et d'optimisation de maillage [22]. Ensuite Michal introduit les opérateurs élémentaires de modification de maillage, casser et enlever les arêtes dans son article [68]. Puis Loseille publie un article sur un couplage modification de maillage casser et enlever les arêtes avec la bascule d'arête en 2013 [62]. Enfin Loseille écrit un article sur le fractionnement du maillage pour un calcul parallèle [61]. Nous souhaitons avant de passer au calcul parallèle pousser encore plus loin le concept de modification de maillage pour être plus efficace en introduisant la bascule d'arête, le casser-basculer d'arête, le enlever-basculer d'arête et le bouger-basculer de nœuds.

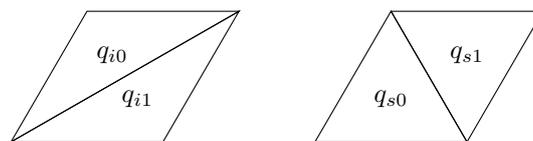
Les algorithmes basculer les arêtes 3.5, casser les arêtes 3.6 et enlever les arêtes 3.7 sont présentés de façon générique. Les opérations de modification diffèrent selon le type d'arête. L'insertion de point se fait via le milieu dans la métrique. Le milieu dans la métrique isotrope est calculé directement et décliné pour les trois normes isotropes à partir des équations de quadrature  $L_0$  (2.42), linéaire  $L_1$  (2.44) et géométrique  $L_2$  (2.45). Le milieu dans la métrique anisotrope est déterminé par itération via la formule de quadrature anisotrope  $L_0$  (2.43). Le bouger de nœuds avec bascule d'arête classique en adaptation de maillage est présenté pour les qualités en forme isotrope et anisotrope. Un nouveau bouger de nœuds avec bascule d'arête est introduit pour la qualité en forme anisotrope avec alignement.

### 3.3.1 Basculer les arêtes

La bascule d'arête est le pilier de l'adaptation elle permet rapidement après chaque modification locale de maillage (casser, enlever une arête et bouger un nœud) d'améliorer la qualité en forme des éléments. Une adaptation de maillage avec la bascule d'arête autorise de grandes modifications locales de maillage tout en conservant le plus possible un maillage conforme et de bonne qualité. La bascule d'arête permet de minimiser l'écart entre la géométrie et le maillage 3d surfacique tout en respectant la qualité en forme des éléments. Elle se fait en 3 temps. D'abord il faut s'assurer que la bascule soit valide avec le critère du Jacobien (3.11). Ensuite il faut vérifier qu'elle soit possible avec le critère de l'angle dièdre (3.13). Enfin il faut définir si la bascule améliore la qualité en forme des éléments selon le critère choisi : isotrope (3.14), anisotrope (3.16) ou anisotrope avec alignement (3.20).

**Proposition 7.** *Si le minimum des qualités en forme des deux éléments de la coque de l'arête dans la configuration simulée est supérieure au minimum de la qualité en forme des deux éléments de la coque de l'arête de la configuration initiale alors la bascule d'arête est déclenchée.*

$$\min(q_{s0}, q_{s1}) > \min(q_{i0}, q_{i1}) \quad (3.21)$$



**Figure 3.15** *Bascule d'arête et critère de qualité en forme.*

L'algorithme 3.5 traite les arêtes mixtes (type 2) dont la coque a deux éléments de même groupe et les arêtes internes (type 3). L'étape de localisation des nœuds, des arêtes et des éléments, ligne 3 et la mise à jour des nœuds, arêtes et éléments suite à une bascule d'arête, ligne 10 de l'algorithme, se font selon le schéma générique donné en figure 3.16. De plus si la bascule est appelée après un bouger de nœud, il faut mettre à jour les boules des nœuds ①, ② et ③ de la structure de nœud N.

**Algorithme 3.5 :** Basculer les arêtes.

**Entrées :** Maillage  $\mathcal{M}_0$ , géométrie  $\mathcal{G}_0$ , Nombre d'arête, Liste d'arête, carte de taille  $\mathcal{H}$ , directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , structures e, E (et N si appelé par bouger-basculer), Nombre de nœuds, Liste de nœuds

**Sorties :** Maillage adapté  $\mathcal{M}_{adapt}$ , Nombre d'arête, Liste d'arête, carte de taille  $\mathcal{H}$ , structures e, E (et N si appelé par bouger-basculer), Nombre de nœuds, Liste de nœuds

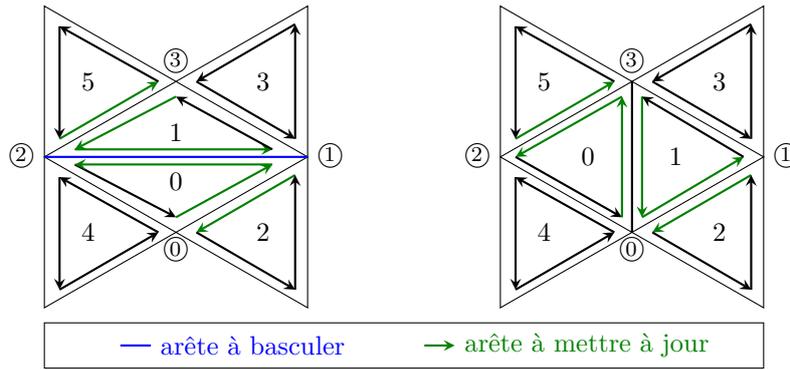
```

1 tant que Nombre d'arêtes  $\neq$  0 faire
2   si Arête interne et Liste d'arête[Nombre d'arête - 1]  $\neq$  0 alors
3     Localiser les nœuds, les arêtes, les éléments;
4     Vérifier le critère de validité;
5     si Bascule valide alors
6       Vérifier le critère de l'angle dièdre;
7       si Bascule possible alors
8         Vérifier le critère de qualité;
9         si Bascule déclenchée alors
10          Mettre à jour les nœuds, arêtes et éléments;
11          Corriger la carte taille  $\mathcal{H}$  par la gradation  $\mathcal{H}$ -choc en local;
12          Mettre à jour les longueurs euclidiennes et dans la métrique en local;
13          Ajouter les arêtes en cascade dans la liste d'arête;
14          Ajouter les deux nœuds dans la liste de nœuds pour bouger ultérieur;
15          fin
16        fin
17      fin
18      Liste d'arête[Nombre d'arête - 1] = 0;
19      Nombre d'arêtes = Nombre d'arêtes - 1;
20    fin
21 fin

```

Après la mise à jour topologique, il est nécessaire de mettre à jour la métrique avec l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope ou anisotrope en local. Les arêtes incidentes aux deux nœuds extrémités de la nouvelle arête sont envoyées pour correction. Bien sûr si une taille est modifiée, les arêtes incidentes au nœud où la taille a été modifiée sont ajoutés à la liste d'arête pour correction.

Une fois la mise à jour de la métrique par l'algorithme de correction effectuée, les longueurs euclidiennes et les longueurs dans la métrique sont mises à jour localement. Enfin les arêtes incidentes aux deux nœuds extrémités de la nouvelle arête sont ajoutées dans le tas d'arête. Cet algorithme se termine quand le tas d'arête est vide. De plus les indices des nœuds ajoutés de la nouvelle arête sont stockés dans une liste de nœud pour un bouger de nœuds ultérieur.



**Figure 3.16** Schéma de localisation et de mises à jour de la bascule d'arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite, pour les arêtes de type 2 avec une coque de deux éléments de même groupe et de type 3.

### 3.3.2 Casser-basculer les arêtes

L'arête est cassée si sa longueur dans la métrique  $L_{\mathcal{M}}$  est supérieure à un seuil telle que :

$$L_{\mathcal{M}} > L_{\mathcal{M}max} \quad (3.22)$$

#### Algorithme 3.6 : Casser-basculer les arêtes.

**Entrées :** Maillage  $\mathcal{M}_0$ , géométrie  $\mathcal{G}_0$ , carte de taille  $\mathcal{H}$ , directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , structures  $e$  et  $E$ , Nombre de nœuds, Liste de nœuds

**Sorties :** Maillage adapté  $\mathcal{M}_{adapt}$ , carte de taille  $\mathcal{H}$ , directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , structures  $e$  et  $E$ , Nombre de nœuds, Liste de nœuds

```

1 tant que  $L_{\mathcal{M}} > L_{\mathcal{M}max}$  faire
2   Localiser les nœuds, les arêtes et les éléments;
3   Calculer le milieu dans la métrique;
4   Projeter ce point sur la géométrie;
5   Vérifier le critère de validité;
6   si Point valide alors
7     Mettre à jour les nœuds, arêtes et éléments;
8     Calculer les courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  du nœud projeté;
9     Calculer les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  du nœud projeté;
10    Calculer la carte de taille  $\mathcal{H}$  du nœud projeté;
11    Borner la carte de taille  $\mathcal{H}$  du nœud projeté;
12    Corriger la carte taille  $\mathcal{H}$  par la gradation  $\mathcal{H}$ -choc en local;
13    Mettre à jour les longueurs euclidiennes et dans la métrique en local;
14    Ajouter le nœud dans la liste de nœuds pour un bouger de nœuds ultérieur;
15    Basculer les arêtes locales;
16  fin
17 fin

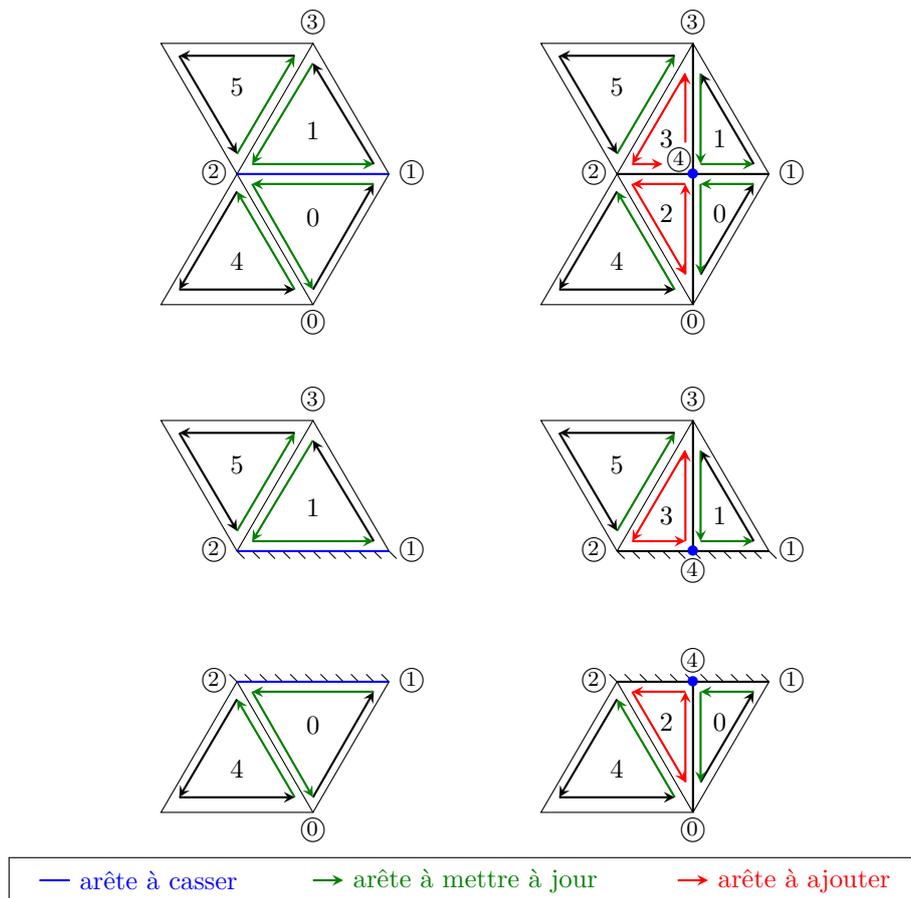
```

L'algorithme 3.6 est générique et ne tient pas compte des types d'arête. Les étapes de localisation des nœuds, des arêtes et des éléments, ligne 2 et de mises à jour, ligne 7 de l'algorithme se font selon les schémas de la figure 3.17. Selon le type d'arête l'opération de découpage de l'arête n'est pas la même. Trois schémas génériques de découpage d'arête

sont proposés pour les arêtes frontières (type 1), les arêtes frontières-internes (type 4), les arêtes mixtes (type 2) et les arêtes internes (type 3). L'ordre dans le traitement des types d'arête est important pour la stabilité du maillage. L'ordre préconisé des types d'arête est le suivant : 1, 4, 2 et 3. L'arête est cassée au milieu dans la métrique. Ce milieu est détaillé dans les sections suivantes. Ce point milieu est projeté sur la géométrie. Si le critère de validité est vérifié alors la découpe d'arête est effective.

Après les mises à jour topologiques, les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et les directions principales  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  sont calculées au nœud projeté. La carte de taille  $\mathcal{H}$  est calculée, bornée et corrigée à partir du nœud projeté. La correction se fait comme pour la bascule par cascade d'arête. Puis les longueurs euclidiennes et dans la métrique sont mises à jour.

Enfin l'indice du nœud ajouté est stocké dans une liste de nœud pour un bouger de nœud ultérieur. Finalement les arêtes des éléments incidents au nœud inséré sont envoyées dans le tas d'arête pour la bascule d'arête. L'algorithme s'arrête quand toutes les arêtes à traiter sont de longueur dans la métrique  $L_M < \sqrt{2}$ .



**Figure 3.17** Schémas de localisation et de mises à jour de casser une arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite. En haut pour les arêtes de type 2 avec deux éléments pour la coque de l'arête, de type 4 et de type 3. Au milieu et en bas pour les arêtes de type 1 et arête de type 2 avec un élément pour la coque de l'arête.

### 3.3.3 Enlever-basculer les arêtes

L'arête est enlevée si sa longueur dans la métrique  $L_{\mathcal{M}}$  est inférieure à un seuil telle que :

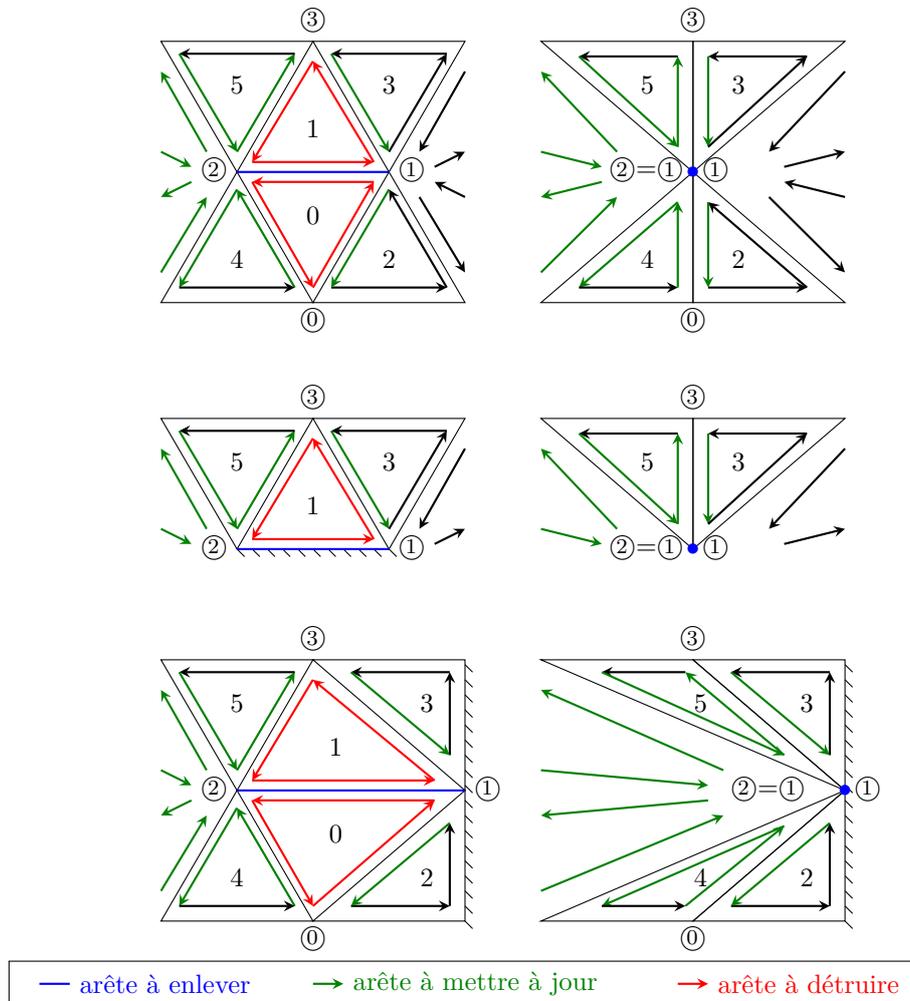
$$L_{\mathcal{M}} < L_{\mathcal{M}min} \quad (3.23)$$

#### Algorithme 3.7 : Enlever-basculer les arêtes.

<p><b>Entrées :</b> Maillage <math>\mathcal{M}_0</math>, géométrie <math>\mathcal{G}_0</math>, carte de taille <math>\mathcal{H}</math>, directions principales <math>\vec{d}_1</math> et <math>\vec{d}_2</math>, structures <math>e</math> et <math>E</math>, Nombre de nœuds, Liste de nœuds</p> <p><b>Sorties :</b> Maillage adapté <math>\mathcal{M}_{adapt}</math>, carte de taille <math>\mathcal{H}</math>, directions principales <math>\vec{d}_1</math> et <math>\vec{d}_2</math>, structures <math>e</math> et <math>E</math>, Nombre de nœuds, Liste de nœuds</p> <pre> 1 <math>L_{\mathcal{M}min pas} = 0;</math> 2 <b>pour</b> <math>i = 0</math> à 10 <b>faire</b> 3   <math>L_{\mathcal{M}min pas} = L_{\mathcal{M}min pas} + 0.1 \times L_{\mathcal{M}min};</math> 4   <b>tant que</b> <math>L_{\mathcal{M}} &lt; L_{\mathcal{M}min pas}</math> <b>faire</b> 5     Localiser les nœuds, arêtes, éléments et les deux boules des deux nœuds        extrémités; 6     Calculer le milieu dans la métrique; 7     Projeter ce point sur la géométrie; 8     Vérifier le critère de validité; 9     <b>si</b> <i>Point valide</i> <b>alors</b> 10      Mettre à jour les nœuds, arêtes, éléments et les deux boules; 11      Calculer les courbures <math>\kappa_1</math> et <math>\kappa_2</math> du nœud projeté; 12      Calculer les directions principales <math>\vec{d}_1</math> et <math>\vec{d}_2</math> du nœud projeté; 13      Calculer la carte de taille <math>\mathcal{H}</math> du nœud projeté; 14      Borner la carte de taille <math>\mathcal{H}</math> du nœud projeté; 15      Corriger la carte taille <math>\mathcal{H}</math> par la gradation <math>\mathcal{H}</math>-choc en local; 16      Mettre à jour les longueurs euclidiennes et dans la métrique en local; 17      Ajouter le nœud dans la liste de nœuds pour un bouger de nœuds ultérieur; 18      Basculer les arêtes locales; 19     <b>fin</b> 20   <b>fin</b> 21 <b>fin</b> 22 Tassage des éléments, des nœuds, des arêtes et de la liste de nœuds;</pre>
--

L'algorithme 3.7 est générique et ne tient pas compte des types d'arête. Il est préférable de traiter les arêtes les plus petites puis les plus grandes d'où un découpage en 10 de  $L_{\mathcal{M}min}$  avec  $L_{\mathcal{M}min pas}$ . Les étapes de localisation des nœuds, des arêtes, des éléments et des deux boules des deux nœuds extrémités de l'arête, ligne 5 et de mises à jour, ligne 10 de l'algorithme se font selon les schémas de la figure 3.18. Selon le type d'arête l'opération d'enlever l'arête n'est pas la même. Trois schémas génériques d'enlever d'arête sont proposés pour les arêtes frontières (type 1), les arêtes frontières-internes (type 4), les arêtes mixtes (type 2) et les arêtes internes (type 3). L'ordre dans le traitement des types d'arêtes est important pour la stabilité du maillage. L'ordre préconisé des types d'arête est le suivant : 1, 4, 2 et 3. L'arête se condense au milieu dans la métrique pour les arêtes de type 1, 3, 4 ou se condense sur le point de type 1, 4 ou 5 pour les arêtes de type 2. Pour la mise à jour, le nœud ② prend l'indice du nœud ①. Le point milieu est projeté sur la géométrie. Si le critère de validité est vérifié alors l'enlever d'arête est effectif.

Pendant les mises à jour, ligne 10, des arêtes sont à détruire dans la structure d'arête  $e$ . Il est important de s'assurer que l'on ne va pas détruire l'arête pointée par le pointeur suivant de l'arête en cours dans la liste doublement chaînée sinon la chaîne est corrompue. Après les mises à jour topologiques, les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et les directions principales  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  sont calculées pour le nœud projeté. La carte de taille  $\mathcal{H}$  est calculée, bornée et corrigée à partir du nœud condensé. La correction se fait comme pour la bascule par cascade d'arête. Puis les longueurs euclidiennes et les longueurs dans la métrique sont mises à jour. Enfin l'indice de ce nœud est stocké dans une liste de nœud pour un bouger de nœud ultérieur. Finalement les arêtes des éléments incidents au nœud condensé sont envoyées dans le tas d'arête pour la bascule d'arête. Le traitement des arêtes s'arrête quand toutes les arêtes à traiter sont de longueur dans la métrique  $L_M > 1/\sqrt{2}$ . Le tassage des éléments, des nœuds, des arêtes et de la liste de nœud pour bouger ultérieur permet de supprimer tous les éléments plats générés par les condensations d'arête et de tout renuméroter en une seule fois. Ce tassage global permet d'économiser beaucoup de temps de calcul par rapport à un tassage local. Il consiste en la suppression des éléments avec plus de deux indices de nœuds égaux. Ce tassage supprime les indices de nœuds doubles. Il renumérote et redimensionne les tableaux de nœuds et d'éléments.

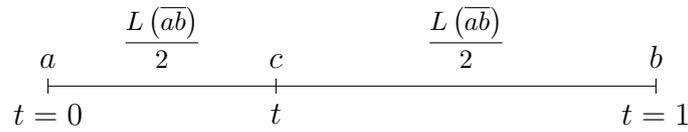


**Figure 3.18** Schémas de localisation et de mises à jour d'enlever une arête avec la configuration initiale à gauche et la configuration finale à droite. En haut pour les arêtes de type 4 et de type 3. Au milieu pour les arêtes de type 1. En bas pour les arêtes de type 2 avec deux éléments.

### 3.3.4 Insérer un point

Il est nécessaire d'insérer un point sur l'arête quand celle-ci est cassée ou enlevée. L'insertion de points consiste à positionner un point au milieu de l'arête tout en respectant la métrique. Nous allons chercher à calculer ce milieu suivant les trois normes  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  pour le cas isotrope et la formule de quadrature pour le cas anisotrope. Il existe donc un point  $c$  de paramètre  $t$  telle que l'arête  $[ab]$  soit coupée au milieu dans la métrique.

$$c = a(1 - t) + bt \quad (3.24)$$



**Figure 3.19** Milieu dans la métrique.

#### Milieu norme $L_0$ isotrope

Pour la norme  $L_0$ , la formule de quadrature impose le choix de  $t = 0.5$  dans l'équation (3.24) pour trouver le point  $c$ . Par conséquent le milieu pour la norme  $L_0$  isotrope de l'arête  $[ab]$  se situe au point  $c$  tel que :

$$c = \frac{a + b}{2} \quad (3.25)$$

#### Milieu norme $L_1$ isotrope

D'après la formule du calcul de segment droit dans un espace riemannien du chapitre précédent (2.10), il suffit de trouver  $s$  tel que :

$$\int_0^s \frac{\|\vec{ab}\|}{h(t)} dt = \frac{L_{\mathcal{M}(\overline{ab})}}{2} \quad (3.26)$$

L'interpolation linéaire impose  $h(t) = h(a) + t(h(b) - h(a))$ . La fonction  $h(t)$  est rem-

placée dans l'équation (3.26) :

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{\|\vec{ab}\|}{h(a) + t(h(b) - h(a))} dt &= \frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}}{2} \\
\int_0^s \frac{1}{h(a) + t(h(b) - h(a))} dt &= \frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}}{2\|\vec{ab}\|} \\
\left[ \frac{\log |h(a) + t(h(b) - h(a))|}{h(b) - h(a)} \right]_0^s &= \frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}}{2\|\vec{ab}\|} \\
\frac{1}{h(a) - h(b)} (\log |h(a) + s(h(b) - h(a))| - \log |h(a)|) &= \frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}}{2\|\vec{ab}\|} \\
\log |h(a) + s(h(b) - h(a))| &= \underbrace{\frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}(h(b) - h(a))}{2\|\vec{ab}\|}}_{\alpha} + \log |h(a)| \\
h(a) + s(h(b) - h(a)) &= \exp(\alpha) \\
s &= \frac{\exp(\alpha) - h(a)}{h(b) - h(a)}
\end{aligned}$$

Pour la norme  $L_1$ , le milieu dans la métrique se situe au point  $c$  (3.24) de paramètre :

$$t = \frac{\exp(\alpha) - h(a)}{h(b) - h(a)} \text{ avec } \alpha = \frac{L_{1\mathcal{M}(\vec{ab})}(h(b) - h(a))}{2\|\vec{ab}\|} + \log |h(a)| \quad (3.27)$$

**Milieu norme  $L_2$  isotrope**

L'interpolation géométrique impose  $h(t) = h(a) \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)^t$ . La fonction  $h(t)$  est remplacée dans l'équation (3.26) :

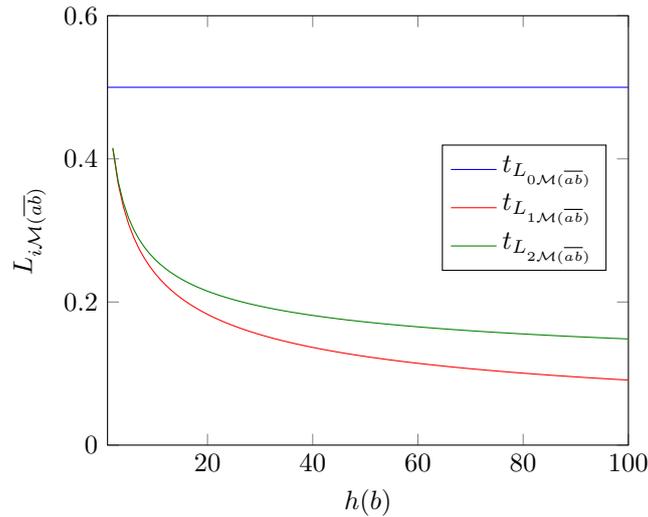
$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{\|\vec{ab}\|}{h(a) \left( \frac{h(b)}{h(a)} \right)^t} dt &= \frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})}}{2} \\
\int_0^s \exp \left( -t \log \frac{h(b)}{h(a)} \right) dt &= \frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})} h(a)}{2 \|\vec{ab}\|} \\
\left[ \frac{\exp \left( -t \log \frac{h(b)}{h(a)} \right)}{-\log \frac{h(b)}{h(a)}} \right]_0^s &= \frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})} h(a)}{2 \|\vec{ab}\|} \\
\frac{1}{-\log \frac{h(b)}{h(a)}} \left[ \exp \left( -s \log \frac{h(b)}{h(a)} \right) - 1 \right] &= \frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})} h(a)}{2 \|\vec{ab}\|} \\
\exp \left( -s \log \frac{h(b)}{h(a)} \right) &= 1 - \underbrace{\frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})} h(a) \log \frac{h(b)}{h(a)}}{2 \|\vec{ab}\|}}_{\alpha} \\
s &= -\frac{\log(\alpha)}{\log \frac{h(b)}{h(a)}}
\end{aligned}$$

Pour la norme  $L_2$ , le milieu dans la métrique se situe au point  $c$  (3.24) de paramètre :

$$t = -\frac{\log(\alpha)}{\log \frac{h(b)}{h(a)}} \text{ avec } \alpha = 1 - \frac{L_{2\mathcal{M}(\vec{ab})} h(a) \log \frac{h(b)}{h(a)}}{2 \|\vec{ab}\|} \quad (3.28)$$

Le graphique 3.20 présente la variation du paramètre  $t$  en fonction de  $h(b)$  avec  $h(a) = 1$  et  $\|\vec{ab}\| = 1$  pour les trois milieux dans les normes  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . Pour  $L_0$ , le paramètre est constant et est égal à 0.5. Pour les deux autres normes, le paramètre  $t$  décroît vers 0. Le paramètre  $t$  décroît plus rapidement pour l'interpolation linéaire que pour l'interpolation géométrique.

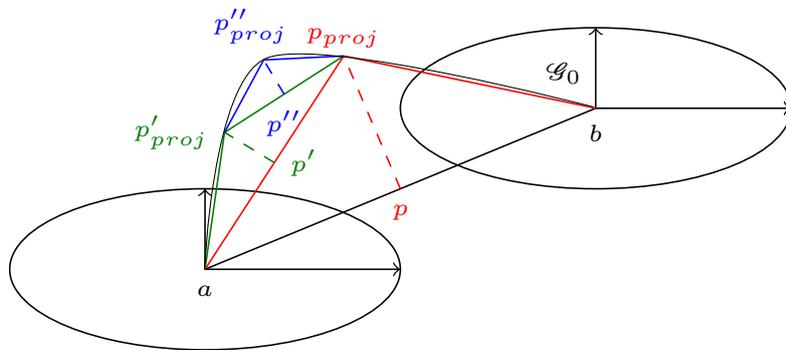
**Remarque 8.** Les milieux pour les normes  $L_1$  et  $L_2$  ne sont définies que si  $h(a) \neq h(b)$ . Dans ce cas il faut utiliser le milieu dans la norme  $L_0$ .



**Figure 3.20** Évolution du paramètre  $t$  pour les normes  $L_{i\mathcal{M}}(\overline{ab})$  avec  $\|\vec{ab}\| = 1$  pour des métriques isotropes telle que  $h(a) = 1$  et  $h(b)$  variant.  $t_{L_{0\mathcal{M}}(\overline{ab})} = 0.5$ ,  $t_{L_{1\mathcal{M}}(\overline{ab})} = \frac{1 - \sqrt{h(b)}}{1 - h(b)}$  et  $t_{L_{2\mathcal{M}}(\overline{ab})} = \frac{-\log\left(\frac{1 + h(b)}{2h(b)}\right)}{\log h(b)}$ .

### Milieu norme $L_0$ anisotrope

En anisotrope, le milieu dans la métrique est trouvé par itération. Soit  $p$  le milieu euclidien de l'arête  $[ab]$  et  $p_{proj}$  sa projection sur la surface  $\mathcal{G}_0$ . Si les longueurs dans la métrique  $L_{0\mathcal{M}}(\overline{ap_{proj}})$  et  $L_{0\mathcal{M}}(\overline{bp_{proj}})$  sont égales autrement dit si  $\|\overline{ap_{proj}}\|_{\mathcal{M}} = \|\overline{bp_{proj}}\|_{\mathcal{M}}$  alors  $p_{proj}$  est le milieu dans la métrique. Sinon le point  $p$  est décalé vers  $a$  ou  $b$  et on itère pour trouver le milieu, voir figure 3.21 et algorithme 3.8. L'*Ecart* représente la différence relative entre  $\|\overline{ap_{proj}}\|_{\mathcal{M}}$  et  $\|\overline{bp_{proj}}\|_{\mathcal{M}}$ . La précision  $Precision_{milieu}$  représente à partir de quel pourcentage on accepte le milieu. Cette précision est réglée à seuil de 10%. Le nombre d'itération maximum  $Iteration_{milieu}$  est fixé à 5.



**Figure 3.21** Calcul itératif du milieu anisotrope.

**Algorithme 3.8** : Milieu métrique anisotrope.**Entrées** : Arête  $[ab]$ , géométrie  $\mathcal{G}_0$ , carte de taille  $\mathcal{H}_{aniso}$ , directions principales  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ **Sorties** : Milieu  $p_{proj}$  de  $[ab]$  dans la métrique

```

1 Calculer le milieu euclidien  $p$  de  $[ab]$ ;
2 Calculer  $p_{proj}$  projection de  $p$  sur la surface  $\mathcal{G}_0$ ;
3 Calculer les courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en  $p_{proj}$ ;
4 Calculer les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  en  $p_{proj}$ ;
5 Calculer la carte de taille  $h_{aniso}$  en  $p_{proj}$ ;
6 Calculer la longueur dans la métrique de  $\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}}$ ;
7 Calculer la longueur dans la métrique de  $\overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}$ ;
8  $iteration = 1$ ;
9 si  $\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}} > \overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}$  alors
10    $Ecart = \frac{\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}} - \overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}}{100}$ ;
11   tant que  $Ecart > Precision_{milieu}$  et  $iteration < Iteration_{milieu}$  faire
12      $iteration = ++$ ;
13      $p = (p_{proj} - b) \left( \frac{\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}} + \overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}}{\overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}} \right) + b$ ;
14     Itérer 2, 3, 4, 5, 6, 7, (9, 10, 11) ou (17, 18, 19);
15   fin
16 fin
17 sinon
18    $Ecart = \frac{\overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}} - \overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}}}{100}$ ;
19   tant que  $Ecart > Precision_{milieu}$  et  $iteration < Iteration_{milieu}$  faire
20      $iteration = ++$ ;
21      $p = (p_{proj} - a) \left( \frac{\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}} + \overrightarrow{\|bp_{proj}\|_{\mathcal{M}}}}{\overrightarrow{\|ap_{proj}\|_{\mathcal{M}}}} \right) + a$ ;
22     Itérer 2, 3, 4, 5, 6, 7, (9, 10, 11) ou (17, 18, 19);
23   fin
24 fin

```

**3.3.5 Bouger-basculer de nœuds**

Les arêtes peuvent respecter la métrique mais la qualité en forme des éléments peut être fortement dégradée. L'idée est de bouger les nœuds tels que leurs éléments incidents ont une qualité en forme optimale. Pour optimiser le temps de calcul du bouger, dès le début de l'adaptation on peut créer une liste de nœuds impactés par la bascule, le casser-basculer, et le enlever-basculer d'arêtes. Cette liste de nœuds est à traiter par le bouger-basculer. Le but est donc de traiter uniquement les nœuds impactés par les modifications de maillage ainsi que leurs nœuds incidents puisqu'on optimise les éléments de la boule de ce nœud en le repositionnant. En ce qui concerne les nœuds voisins de nœud, il est préférable de les localiser dès le début et de les mettre à jour pendant le bouger-basculer puisque qu'il n'y aura pas de réaffectations de la mémoire. La structure de nœud  $\mathbf{N}$  est donc employée.

D'abord le bouger de nœuds avec bascule d'arêtes locales est décrit pour optimiser la qualité en forme isotrope ou anisotrope. Ensuite un bouger de nœuds avec bascule d'arêtes locales est présenté pour optimiser la qualité en forme anisotrope avec alignement des éléments sur les directions principales.

### Bouger-basculer de nœuds isotrope ou anisotrope

Le bouger-basculer de nœuds permet de maximiser la qualité en forme des éléments via le critère de qualité en forme isotrope (3.14) ou anisotrope (3.16).

**Proposition 8.** *Si le minimum de la qualité en forme des éléments de la boule du nœud idéal est meilleure que le minimum de la qualité en forme des éléments de la boule du nœud initial alors le nœud est bougé sinon le nœud n'est pas bougé.*

$$\min(q_{initial}) < \min(q_{possible}) \quad (3.29)$$

D'abord le point idéal de chaque élément de la boule du nœud est calculé dans le plan du triangle initial pour que leur qualité en forme soit parfaite, c'est-à-dire  $q = 1$ . On cherche donc un point  $P_{ideal}$  telle que la qualité en forme du triangle  $abP_{ideal}$  soit égale à 1 dans le plan du triangle  $abc$ . Il faut une base  $\mathcal{B}$  centrée en  $a$  avec  $\vec{ab}$  comme premier vecteur et un autre vecteur  $\vec{ad}$  tel que :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{ab} \wedge \vec{ac} \\ \vec{ad} &= \vec{n} \wedge \vec{ab} \\ \vec{ad} &= \|\vec{ab}\| \vec{ad} \end{aligned}$$

Cette base  $\mathcal{B}(a, \vec{ab}, \vec{ad})$  permet de calculer le point  $P_{ideal}$  tel que le triangle  $abc$  soit régulier donc le point  $P_{ideal}$  a pour coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$  :

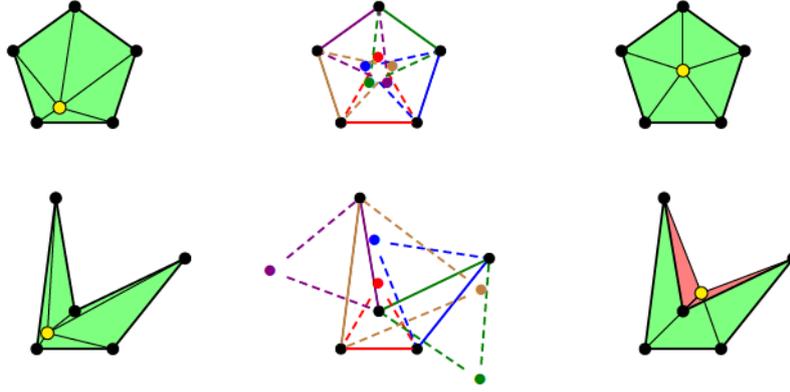
$$\begin{aligned} P_{ideal x} &= a_x + \frac{1}{2}ab_x + \frac{\sqrt{3}}{2}ad_x \\ P_{ideal y} &= a_y + \frac{1}{2}ab_y + \frac{\sqrt{3}}{2}ad_y \\ P_{ideal z} &= a_z + \frac{1}{2}ab_z + \frac{\sqrt{3}}{2}ad_z \end{aligned}$$

Ensuite l'ensemble de ces points idéals est moyenné en un seul.

$$P_{ideal moyenné} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n P_{ideal i}$$

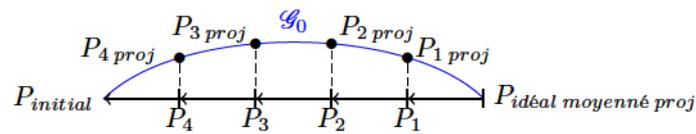
La figure 3.22 synthétise le calcul du point idéal moyenné pour deux boules différentes.

Ce point idéal moyenné est projeté sur la surface  $\mathcal{G}_0$ . Le jacobien de chaque élément de la nouvelle boule est calculé. Si un jacobien est nul ou négatif alors le nœud n'est



**Figure 3.22** Calcul de la position idéale du nœud en jaune pour deux boules pour un critère de qualité en forme isotrope en haut et en bas. À gauche, configuration initiale. Au milieu, calcul du point idéal de chaque élément de la boule dans chaque plan de triangle. À droite, configuration finale avec le point idéal moyenné. En vert les éléments de jacobien positif  $J(E) > 0$  et en rouge les éléments de jacobien négatif  $J(E) < 0$ .

pas bougé. L'algorithme 3.9 décrit l'ensemble du processus du bouger-basculer de nœuds. Une vérification relative sur le *gain* potentiel du bouger est mise en place. Ce *gain* est le produit de la longueur minimale dans la métrique de la boule du nœud  $\min(L_{\mathcal{M}boule})$  et d'un facteur de précision  $Precision_{bouger}$  égale à 10% par défaut. Si le déplacement entre la position du nœud initial et le nœud idéal projeté est inférieur à ce *gain* alors le nœud n'est pas bougé. Sinon le minimum des qualités possibles de la boule  $\min(q_{possible})$  est calculé. Si  $\min(q_{initial}) > \min(q_{possible})$  ou si la configuration est invalide  $J(E) < 0$  alors une formule de relaxation est mise en place pour trouver une meilleure configuration, voir figure 3.23. En effet la projection du point idéal moyenné peut dégrader la qualité en forme des éléments ou pour des configurations non convexe le maillage peut devenir invalide, il faut donc chercher un autre point entre le point idéal projeté et le point initial via une formule de relaxation. Le *pas* choisi est de 20% par défaut.



**Figure 3.23** Formule de relaxation entre  $P_{initial}$  et  $P_{idéal moyenné proj}$  avec un pas de 20%.

Chaque point relaxé est projeté puis le  $\min(q_{possible})$  est calculé. Si finalement le minimum des qualités de la boule initiale est inférieur au minimum de la qualité de la boule possible  $\min(q_{initial}) < \min(q_{possible})$  alors le nœud est bougé. Les coordonnées du nœud sont donc mises à jour. Les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et les directions principales  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  sont calculées. La carte de taille  $\mathcal{H}$  est évaluée et bornée en ce point. Puis cette carte de taille  $\mathcal{H}$  est corrigée par adjacence. Les longueurs euclidiennes et les longueurs dans la métrique sont mises à jour. Enfin la bascule d'arête est appelée pour les arêtes de la boule du nœud. Elle met à jour N si besoin. Le nœud est ajouté à la liste de nœud pour potentiellement le bouger à l'itération de bouger suivante. Les nœuds sont repositionnés tant qu'il y a des

modifications.

**Algorithme 3.9** : Bouger-basculer de nœuds.

**Entrées** : Maillage  $\mathcal{M}_0$ , géométrie  $\mathcal{G}_0$ , carte de taille  $\mathcal{H}$ , directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , structures  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}$ , Nombre de nœuds, Liste de nœuds

**Sorties** : Maillage adapté  $\mathcal{M}_{adapt}$ , carte de taille  $\mathcal{H}$ , directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , structures  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}$ , Nombre de nœuds, Liste de nœuds

```

1 Créer la structure de nœud  $\mathbf{N}$ ;
2 Localiser la boule et les nœuds incidents de la liste;
3 Ajouter les nœuds incidents aux nœuds de la liste;
4 tant que Nombre de nœuds  $\neq 0$  faire
5     si Liste de nœuds[Nombre de nœuds - 1]  $\neq 0$  alors
6         Calculer le minimum des qualités initiales de la boule  $\min(q_i)$ ;
7         Calculer les coordonnées du point idéal  $P_{idéal}$ ;
8         Projeter le point idéal sur la géométrie;
9         Vérifier le critère de validité;
10        si Point valide alors
11             $Distance = \overrightarrow{\|P_{initial}P_{idéal\ projeté}\|}$ ;
12             $L_{\mathcal{M}\ min\ boule} = \min(L_{\mathcal{M}\ boule})$ ;
13             $gain = L_{\mathcal{M}\ min\ boule} \times Precision_{bouger}$ ;
14            si Distance  $>$  gain alors
15                Calculer le minimum des qualités possibles de la boule  $\min(q_p)$ ;
16                Relaxation = 1.0;
17                 $i = 0$ ;
18                tant que  $\min(q_p) < \min(q_i)$  et Relaxation  $> 0$  faire
19                    Relaxation = Relaxation - Pas;
20                    Calculer le point idéal relaxé;
21                    Itérer 8, 9, 10, 11, 14, 15;
22                     $i++$ ;
23                fin
24                si  $\min(q_p) > \min(q_i)$  alors
25                    Mettre à jour le nœud;
26                    Calculer les courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  du nœud projeté;
27                    Calculer les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  du nœud projeté;
28                    Calculer la carte de taille  $\mathcal{H}$  du nœud projeté;
29                    Borner la carte de taille  $\mathcal{H}$  du nœud projeté;
30                    Corriger la carte taille  $\mathcal{H}$  par la gradation  $\mathcal{H}$ -choc en local;
31                    Mettre à jour les longueurs euclidiennes et dans la métrique en local;
32                    Basculer les arêtes locales;
33                    Ajouter le nœud dans la liste de nœuds;
34                fin
35            fin
36        fin
37    fin
38    Liste de nœuds[Nombre de nœuds - 1] = 0;
39    Nombre de nœuds = Nombre de nœuds - 1;
40 fin
41 Si la nouvelle liste n'est pas vide aller en 2;

```

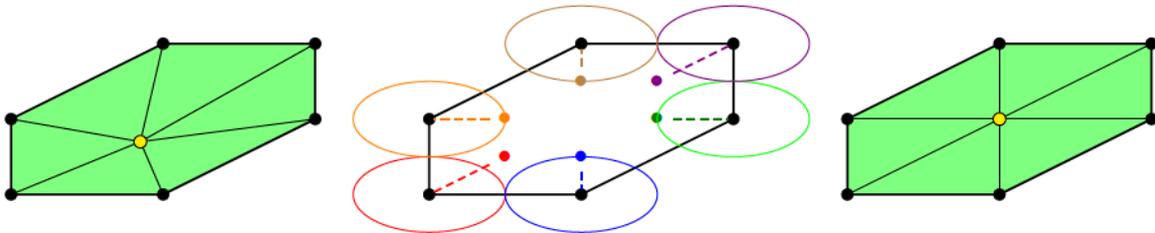
### Bouger-basculer de nœuds anisotrope avec alignement

Le bouger de nœuds anisotrope avec alignement est basé sur le même critère que le bouger de nœuds classique (3.29). Le point idéal moyenné de la boule d'un nœud est calculé et le minimum des qualités de chaque boule est comparé. Si la qualité est meilleure dans la nouvelle configuration alors le nœud est bougé.

Le calcul du point idéal repose sur l'identification des arête incidentes aux nœuds. En effet il faut identifié si l'arête est alignée suivant les directions  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  ou  $\vec{d}_4$  auquel cas la longueur d'arête doit être égale à 1. Sinon l'arête doit être alignée suivant les directions  $\vec{d}_5, \vec{d}_6, \vec{d}_7$  ou  $\vec{d}_8$  auquel cas la longueur d'arête doit être égale à  $\sqrt{2}$ . Soit l'arête  $N_i N_{\mathcal{P}_T(N_i)}$  ayant pour origine  $N_i$  le nœud  $i$  de la boule de  $N$  et  $N_{\mathcal{P}_T(N_i)}$  le nœud  $N$  projeté dans le plan tangent de  $N_i$ . Le maximum des produits scalaires entre cette arête et les huit directions de l'ellipse centrée en  $N_i$  donne la direction la plus proche de l'arête.

$$\max(\langle N_i N_{\mathcal{P}_T(N_i)}, d_j \rangle) \text{ avec } j = 1, \dots, 8 \quad (3.30)$$

Sur la figure 3.24, toutes les arêtes sont identifiées dans le plan tangent de chaque nœud. Le calcul de la longueur d'arête optimale 1 ou  $\sqrt{2}$  est donc du point idéal se fait aussi dans le plan tangent de chaque nœud incident au nœud à optimiser. On voit que dans la configuration optimale, c'est-à-dire six nœuds voisins d'un nœud, il y a quatre arêtes égales à 1 et deux arêtes égales à  $\sqrt{2}$ . C'est cette structure que l'on souhaite faire apparaître dans un maillage de bord d'attaque de voilure par exemple car la métrique est très anisotrope et dans le même sens sur tout le long de ce bord d'attaque.



**Figure 3.24** Calcul de la position idéale du nœud en jaune pour un critère de qualité en forme anisotrope avec alignement. À gauche, configuration initiale. Au milieu, calcul du point idéal de chaque arête incidente au nœud dans chacun des plans tangents. À droite, configuration finale avec le point idéal moyenné. En vert les éléments de jacobien positif  $J(E) > 0$  et en rouge les éléments de jacobien négatif  $J(E) < 0$ .

L'algorithme précédent 3.9 s'applique pour le bouger de nœuds anisotrope avec alignement en prenant le critère de qualité en forme anisotrope avec alignement 3.20 et le calcul du point idéal avec choix de la direction 3.30. La stratégie est donc d'obtenir des longueurs d'arête  $L_M = 1$  et  $L_M = \sqrt{2}$  de telle manière que les triangles soient rectangles et alignés sur les directions principales. Cependant cette nouvelle stratégie reste à tester car la recherche du maillage unité, c'est-à-dire  $L_M = 1$ , était l'objectif jusqu'à présent que ce soit pour le casser et l'enlever d'arête.

### 3.4 Algorithmes d'adaptation globale

Trois algorithmes d'adaptation de maillage surfacique sont proposés pour les cas isotrope, anisotrope et anisotrope avec alignement. Le tableau 3.4 rassemble tous les paramètres disponibles pour l'adaptation de maillage surfacique ainsi que les valeurs par défaut. Le calcul des courbures peut être approché ou exact. La norme utilisée est soit une formule de quadrature, soit une interpolation linéaire ou géométrique. Le maillage unité,  $L_{\mathcal{M}} = 1$ , que l'on cherche doit respecter un intervalle de longueur dans la métrique telle que  $L_{\mathcal{M}min} < L_{\mathcal{M}} < L_{\mathcal{M}max}$ . La valeur  $L_{\mathcal{M}max} = \sqrt{2}$  semble appropriée car  $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = L_{\mathcal{M}min}$  est alors le seuil pour décider qu'une arête est trop courte, assurant ainsi la consistance dans le critère de décision. L'écart angulaire par rapport au plan tangent  $\theta$  doit être assez petit pour que le maillage soit proche de la géométrie. La gradation  $G$  doit être proche de 1 si on veut que la variation de taille entre les éléments voisins soit faible. Les tailles  $h_{min}$  et  $h_{max}$  sont les bornes minimale et maximale de la carte de taille  $\mathcal{H}$ . Elles représentent les tailles d'arêtes euclidiennes minimales et maximales que l'on trouvera dans le maillage adapté. Le cosinus de l'angle dièdre seuil  $\cos(\Phi_{seuil})$  doit être assez faible, c'est-à-dire que l'on tolère la bascule d'arête si les angles dièdres sont assez grands. La précision du bouger de nœuds  $Precision_{bouger}$  représente la limite à partir de laquelle le bouger est inutile. Cette précision est en fonction du minimum de la longueur dans la métrique de la boule du nœud  $L_{\mathcal{M}min\ boule}$ . Le pas de relaxation représente le pourcentage de réduction que l'on autorise entre le point initial à bouger et le point optimal projeté pour trouver une meilleure qualité en forme des éléments de la boule du nœud. La précision et le nombre maximal d'itération du milieu ne concerne que le cas anisotrope.  $Iteration_{boucle}$  représente le nombre maximal d'itération de la boucle principale de l'algorithme d'adaptation. C'est une sécurité pour ne pas tomber dans des boucles infinies car il arrive que certaines arêtes soient à la limite d'être cassée  $L_{\mathcal{M}} \approx \sqrt{2}$  puis enlevée  $L_{\mathcal{M}} \approx 1/\sqrt{2}$ .

Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Iso, aniso ou aniso avec alignement
Calcul des courbures	$\kappa$	Approchées ou exactes
Norme	$L$	Quadrature, linéaire ou géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M}min}$	$]0; 1[ \rightarrow 1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M}max}$	$]1; +\infty[ \rightarrow \sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$]0.0; 45.0] \rightarrow 4.0^\circ$
Gradation	$G$	$]1.0; +\infty[ \rightarrow 1.2$
Taille minimale	$h_{min}$	$] - \infty; +\infty[ \rightarrow 10.0$
Taille maximale	$h_{max}$	$] - \infty; +\infty[ \rightarrow 300.0$
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{seuil})$	$]0.0; 1.0] \rightarrow 0.140$
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{bouger}$	$]0.0; 1.0] \rightarrow 10.0\%$
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	$]0.0; 1.0] \rightarrow 0.2$
Précision du milieu anisotrope	$Precision_{milieu}$	$]0.0; 1.0] \rightarrow 10.0\%$
Nombre maximal d'itération milieu aniso	$Iteration_{milieu}$	$]0; +\infty[ \rightarrow 5$
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{boucle}$	$]0; +\infty[ \rightarrow 50$

**Table 3.4** Paramètres disponibles pour l'adaptation de maillage surfacique et valeurs par défaut.

### 3.4.1 Algorithme d'adaptation isotrope

Le but de l'adaptation isotrope est d'obtenir un maillage unité telle que  $L_{\mathcal{M}} = 1$  avec une métrique isotrope. Une bascule d'arête sur tout le maillage est recommandée avant de débiter la boucle principale. Cela permet d'améliorer la qualité en forme isotrope des éléments très rapidement.

<b>Algorithme 3.10</b> : Adaptation isotrope d'un maillage.	
<b>Entrées</b> : Maillage initial $\mathcal{M}_0$ , géométrie $\mathcal{G}_0$	
<b>Sorties</b> : Maillage adapté isotrope $\mathcal{M}_{adapt}$	
1	Initialisation 3.3;
2	<b>Amélioration</b>
3	Basculer les arêtes 3.5;
4	<b>fin</b>
5	<b>Boucle principale</b>
6	<b>tant que</b> <i>Modification faire</i>
7	Enlever-basculer les arêtes 3.7;
8	Casser-basculer les arêtes 3.6;
9	Bouger-basculer de nœuds 3.9;
10	<b>fin</b>
11	<b>fin</b>

### 3.4.2 Algorithme d'adaptation anisotrope

Le but de l'adaptation anisotrope est d'obtenir un maillage unité telle que  $L_{\mathcal{M}} = 1$  avec une métrique anisotrope. Une étape de saturation par casser-basculer est nécessaire en début d'adaptation afin de conserver un maillage valide en anisotrope car le enlever-basculer avec la projection rend le maillage invalide si le maillage est loin de la surface.

<b>Algorithme 3.11</b> : Adaptation anisotrope d'un maillage.	
<b>Entrées</b> : Maillage initial $\mathcal{M}_0$ , géométrie $\mathcal{G}_0$	
<b>Sorties</b> : Maillage adapté anisotrope $\mathcal{M}_{adapt}$	
1	Initialisation 3.3;
2	<b>Saturation</b>
3	<b>tant que</b> <i>Modification faire</i>
4	Casser-basculer les arêtes 3.6;
5	<b>fin</b>
6	<b>fin</b>
7	<b>Boucle principale</b>
8	<b>tant que</b> <i>Modification faire</i>
9	Enlever-basculer les arêtes 3.7;
10	Casser-basculer les arêtes 3.6;
11	Bouger-basculer de nœuds 3.9;
12	<b>fin</b>
13	<b>fin</b>

### 3.4.3 Algorithme d'adaptation anisotrope avec alignement

Le but de l'adaptation anisotrope avec alignement est d'obtenir un maillage rectangle avec une métrique anisotrope. L'alignement par bouger-basculer de nœuds se fait en fin d'algorithme quand le maillage est proche de la surface.

<b>Algorithme 3.12</b> : Adaptation anisotrope avec alignement d'un maillage.	
<b>Entrées</b> :	Maillage initial $\mathcal{M}_0$ , géométrie $\mathcal{G}_0$
<b>Sorties</b> :	Maillage adapté anisotrope avec alignement $\mathcal{M}_{adapt}$
1	Initialisation 3.3;
2	<b>Saturation</b>
3	<b>tant que</b> <i>Modification faire</i>
4	Casser-basculer les arêtes 3.6;
5	<b>fin</b>
6	<b>fin</b>
7	<b>Boucle principale</b>
8	<b>tant que</b> <i>Modification faire</i>
9	Enlever-basculer les arêtes 3.7;
10	Casser-basculer les arêtes 3.6;
11	Bouger-basculer de nœuds 3.9;
12	<b>fin</b>
13	<b>fin</b>
14	<b>Alignement</b>
15	Bouger-basculer de nœuds avec alignement 3.9;
16	<b>fin</b>

Dans l'utilisation de ces algorithmes, on se rend compte que le bouger-basculer est couteux en temps. Cependant on peut diminuer son temps de calcul en prenant une précision du bouger de nœuds grossière pour la première itération de la boucle principale puis une précision du bouger de plus en plus fine jusqu'à la convergence de la boucle principale. Pour l'avenir, une précision du bouger de nœuds évolutive en fonction des itérations est à envisager.

## 3.5 Conclusions

Des outils de modification locale de maillage surfacique ont été développés dans le cadre d'une adaptation de maillage à non iso-topologie et à non iso-nombre de nœud. Le maillage initial  $\mathcal{M}_0$  généré initialement à partir de la géométrie surfacique  $\mathcal{G}_0$  est adapté suivant des critères géométriques : les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et les directions principales  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ .

Le maillage est piloté par la longueur dans la métrique  $L_{\mathcal{M}}$ . L'objectif est de trouver un maillage unité telle que  $L_{\mathcal{M}} = 1$  avec un écart angulaire par rapport au plan tangent  $\theta$  défini et une variation de taille choisie  $G$  entre les arêtes voisines. Des itérations successives d'un enchaînement d'opérations génériques de modification locale de maillage permettent d'atteindre cet objectif.

D'abord la bascule d'arête est basée sur le jacobien de l'élément (3.9), l'angle dièdre (3.12) et la qualité en forme des éléments (3.21). Puis le casser d'arête et l'enlever d'arête sont basés sur la comparaison de la longueur dans la métrique à une valeur seuil (3.22) et (3.23) respectivement. L'insertion de points au milieu dans la métrique de l'arête peut se faire avec la formule de quadrature  $L_0$  (3.25) ou les interpolations linéaire  $L_1$  (3.27) et géométrique  $L_2$  (3.28) pour le cas isotrope. Pour le cas anisotrope, le milieu dans la métrique est déterminé de façon itérative via l'algorithme 3.8. Enfin le bouger de nœuds est basé sur des critères de qualité en forme des éléments isotrope (3.11), anisotrope (3.12) et notamment un nouveau critère d'alignement des éléments suivant les directions principales (3.20). Une évolution de la précision du bouger en fonction des itérations de la boucle principale est une perspective à explorer afin d'accélérer la convergence des algorithmes 3.10, 3.11 et 3.12.

*Les contributions sont l'intégration des algorithmes de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope 3.1 et anisotrope 3.2 dans un processus d'adaptation de maillage surfacique. Les algorithmes basculer les arêtes 3.5, casser-basculer les arêtes 3.6 et enlever-basculer les arêtes 3.7 sont développés avec succès. L'algorithme du calcul itératif du milieu dans la métrique anisotrope 3.8 est une contribution remarquable ainsi que la création d'un nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement suivant les directions principales de la métrique (3.20).*

Les résultats attendus sur le maillage adapté  $\mathcal{M}_{adapt}$  sont une maximisation de la qualité en forme des éléments, c'est-à-dire  $q$  proche de 1, et une minimisation de l'angle dièdre tel que  $\Phi$  proche de  $0^\circ$ , pour les cas isotrope, anisotrope et anisotrope avec alignement. Des applications 2d plan et 3d surfacique vont permettre de valider ces algorithmes et ces critères d'optimisation à travers un ensemble de cas industriels.



# Chapitre 4

## Applications

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Calculs de champs</b>	<b>122</b>
4.1.1	Courbures approchées et exactes	123
4.1.2	Cartes de taille et correction $\mathcal{H}$ -choc	126
4.1.3	Continuité et discontinuité géométrique	127
<b>4.2</b>	<b>Maillages 2d plans</b>	<b>130</b>
4.2.1	Adaptation isotrope mono-corps profil NACA0012 avec taille à la peau	131
4.2.2	Adaptation isotrope bi-corps après mouvement de corps	132
4.2.3	Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec taille à la peau	133
4.2.4	Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec zone de taille imposée	135
4.2.5	Adaptation isotrope tri-corps avec conservation du maillage couches limites	136
4.2.6	Construction d'une métrique anisotrope basée sur une fonction à base radiale	139
<b>4.3</b>	<b>Maillages 3d surfaciques</b>	<b>140</b>
4.3.1	Adaptation isotrope profil ONERA M6	140
4.3.2	Adaptation anisotrope profil ONERA M6	146
4.3.3	Adaptation anisotrope avec alignement profil ONERA M6	154
4.3.4	Adaptation isotrope GBJ multi-carreaux	161
4.3.5	Adaptation anisotrope GBJ multi-carreaux	169
4.3.6	Adaptation GBJ déformable	184
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>191</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons traiter les calculs de champs sur le maillage surfacique, les adaptations 2d plans et les adaptations 3d surfaciques.

Dans la première partie, on s'intéresse aux méthodes de calculs des courbures principales d'une surface, à l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc et aux discontinuités géométriques. D'abord les courbures calculées à partir du maillage surfacique sont étudiées et comparées aux calculs des courbures exactes sur un tore. Ensuite l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope est appliqué sur un maillage d'une surface multi-carreaux. Une comparaison des cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  est effectuée avant et après l'algorithme de correction sur le maillage surfacique du Generic Business Jet. Enfin une adaptation de maillages surfaciques de géométries continue et discontinue en courbures permet de montrer que la

métrique capte les fortes discontinuités. Les géométries continues et discontinues en courbures d'une selle sont utilisées dans le cadre d'une adaptation anisotrope très fine pour capter les fortes variations dans les champs de taille  $h_1$  et  $h_2$ .

Dans la deuxième partie, l'adaptation de maillage 2d plan est à l'étude via quatre stratégies de construction de la métrique. Ces maillages représentent l'air environnant autour des coupes de profils de voilure. D'abord une métrique isotrope est construite à partir des tailles d'arêtes à la peau. Cela permet de remailler un maillage déformé par exemple en conservant la discrétisation de la frontière du profil. De plus une stratégie annexe est mise en œuvre pour remailler des zones de taille imposée. Les cas du mono-corps arêtes internes, du bi-corps déformé arêtes internes et du bi-corps fixe arêtes internes et frontières seront traités. Ensuite une stratégie consiste à calculer les distances entre les nœuds et les nœuds de la peau du profil pour préserver un potentiel maillage de couche limite. Cela permet de conserver le maillage couche limite grâce à la distance à la peau et de remailler en isotrope le reste du domaine grâce à la taille à la peau de la dernière couche. Le cas du tri-corps sera traité. Enfin une dernière stratégie consiste en la création d'une carte de taille anisotrope basée sur la taille à la peau, la distance à la peau et aux vecteurs d'une fonction à base radiale utilisée pour le déplacement relatif entre deux corps.

Dans la dernière partie, l'adaptation de maillage 3d surfacique est effectuée sur des maillages représentant des surfaces mono-carreau et multi-carreaux. D'abord le cas mono-carreau est adapté en isotrope, en anisotrope et en anisotrope avec alignement. Les résultats sont analysés ainsi que la convergence de l'algorithme d'adaptation. De plus des analyses de qualité en forme des éléments et d'angle dièdre sont réalisées sur une large plage de variation de la gradation anisotrope. En outre une analyse concernant l'alignement des arêtes du maillage est exécutée sur une plage de variation de la gradation anisotrope. Enfin le cas multi-carreaux est adapté en isotrope, anisotrope et anisotrope sur géométrie déformable. Les résultats sont analysés ainsi que la convergence de l'algorithme d'adaptation. De plus une analyse sur le choix de la norme d'interpolation est effectuée pour le cas isotrope. En outre une analyse concernant la forte anisotropie est réalisée sur des adaptations de plus en plus anisotropes.

## 4.1 Calculs de champs

Dans cette partie, nous allons comparer deux calculs de courbures géométriques, analyser l'influence de l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope et capter les discontinuités géométriques dans la métrique.

La comparaison des deux méthodes de calculs de la courbure permet de choisir quelle méthode utilisée dans le processus d'adaptation de maillage surfacique. La méthode de Hamann est rapide a priori, moins précise et s'affranchit de la géométrie. La méthode exacte est plus coûteuse et utilise la véritable géométrie. La comparaison sera réalisée sur deux maillages isotrope et anisotrope d'un tore de section ellipsoïde.

L'algorithme de correction anisotrope doit influencer sur les cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  en réduisant les grandes tailles. Cet algorithme doit s'affranchir des frontières de carreaux.

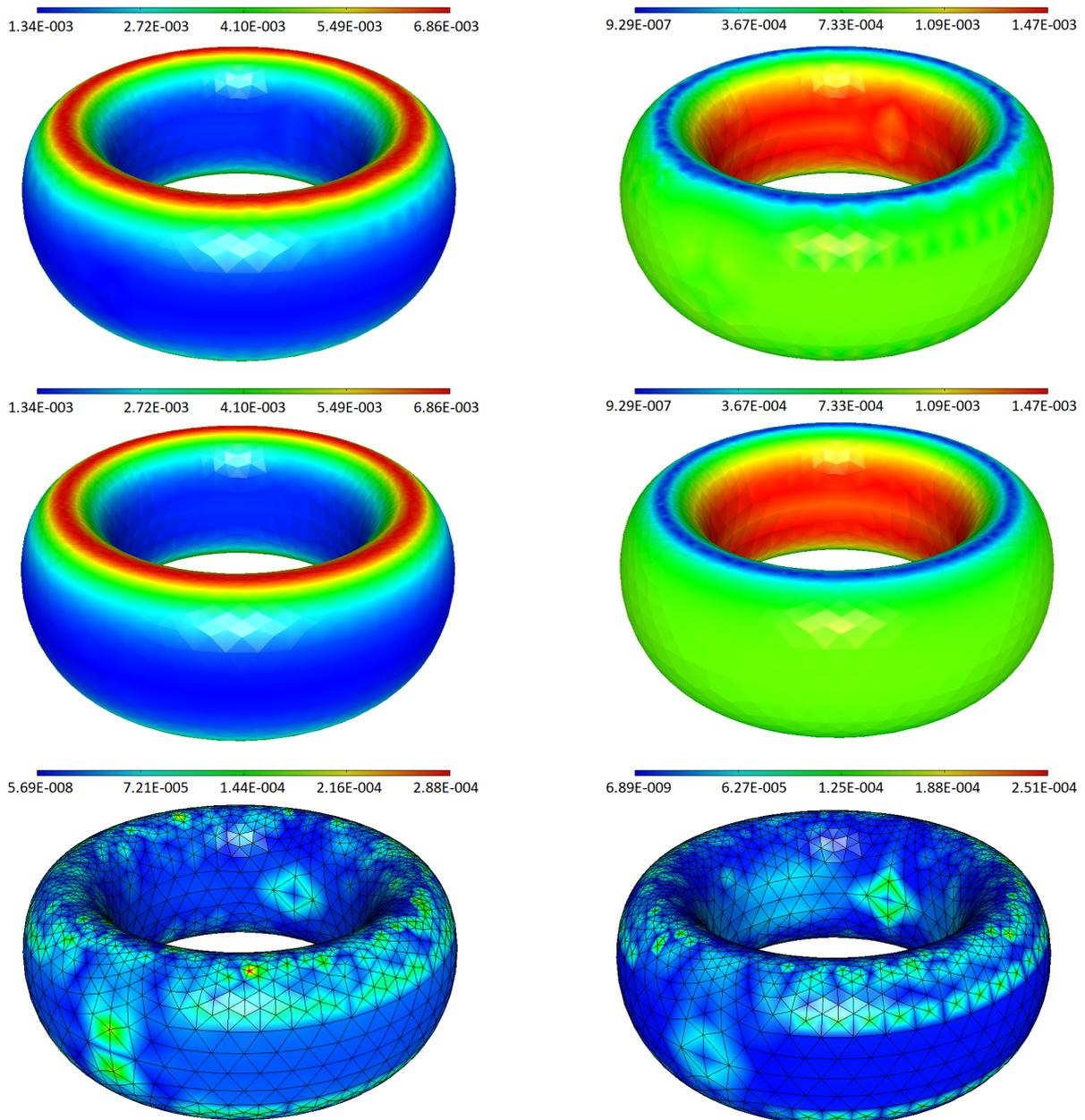
En effet il doit lisser le champ de taille en passant au travers de ces frontières. De plus il doit nécessairement converger. L'étude portera sur un maillage du Generic Business Jet.

Le processus d'adaptation de maillage surfacique doit capter les fortes discontinuités géométriques. Il faut vérifier que l'algorithme de correction ne dilue pas ces discontinuités dans ce processus. L'étude se concentrera sur une selle continue en courbures et une autre selle discontinue en courbures.

### 4.1.1 Courbures approchées et exactes

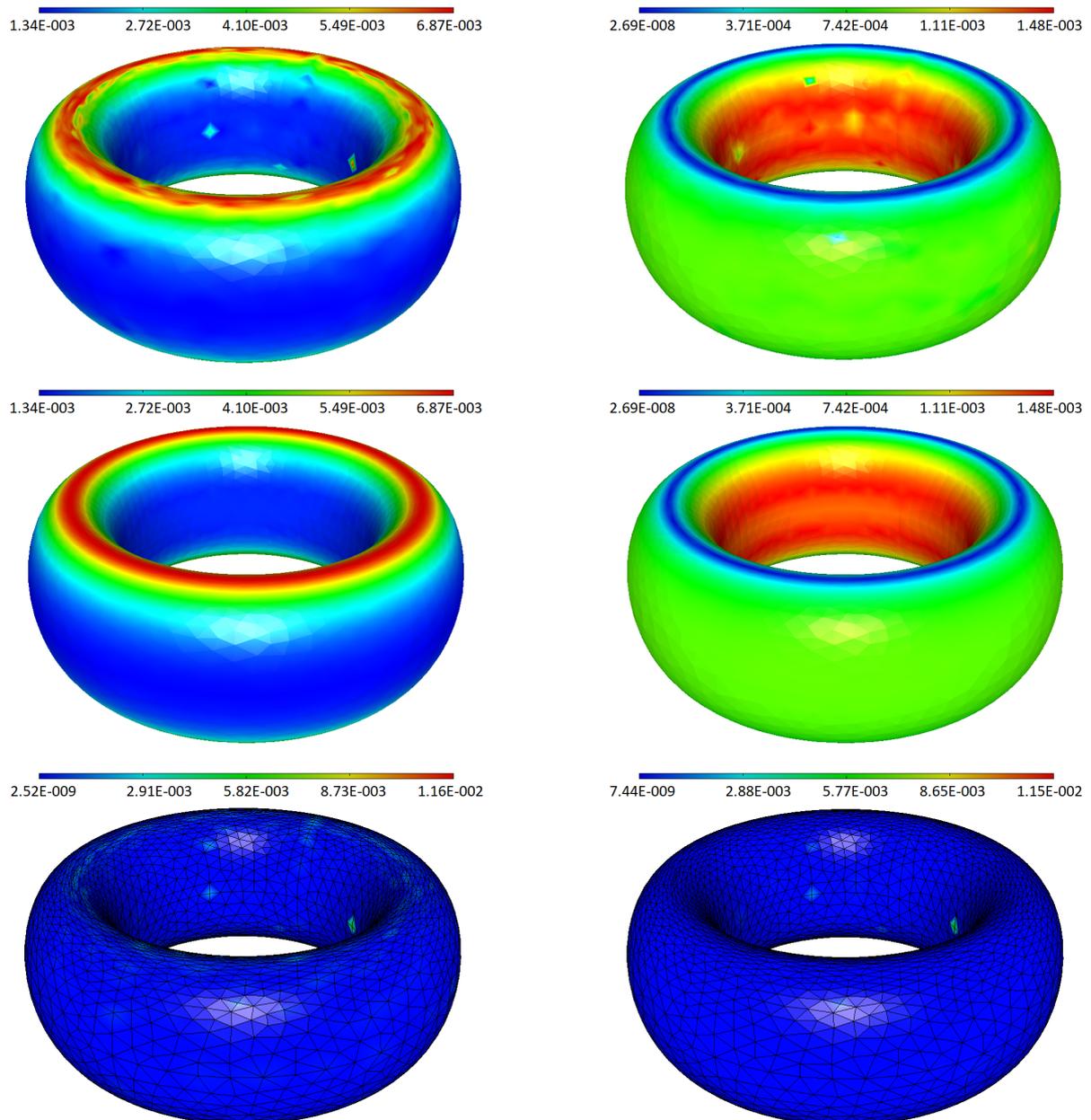
Dans le cadre de l'adaptation de maillage, on aimerait utiliser la méthode de Hamann [41] pour évaluer les courbures géométriques d'une surface à partir du maillage pour réduire le temps de calcul. Une comparaison entre les courbures approchées et exactes est analysée afin de déterminer si la méthode approchée est retenue dans les processus d'adaptation de maillage.

Pour les maillages isotropes, les courbures sont bien évaluées. Mais la courbure évaluée devient fautive quand le nombre de nœuds voisins d'un nœud est inférieur ou égal à 4. Les erreurs relatives maximum sont de l'ordre de 13% pour  $\kappa_1$  et de 4 000% pour  $\kappa_2$ . Les erreurs relatives moyennes sont de 1.30% pour  $\kappa_1$  et 16.01% pour  $\kappa_2$ .



**Figure 4.1** Maillage géométrique isotrope d'un tore de section ellipsoïde — Courbures approchées de la méthode de Hamann  $\kappa_{1a}$  et  $\kappa_{2a}$  en haut. Courbures exactes  $\kappa_{1e}$  et  $\kappa_{2e}$  au milieu. Comparaison entre les courbures approchées et exactes  $|\kappa_{1a} - \kappa_{1e}|$  et  $|\kappa_{2a} - \kappa_{2e}|$  en bas.

Pour les maillages anisotropes, les courbures sont très mal évaluées dans les endroits où le maillage est anisotrope. De plus la courbure évaluée est faussée quand le nombre de nœuds voisins d'un nœud est inférieur ou égal à 4. Les erreurs relatives maximum sont de l'ordre de 754% pour  $\kappa_1$  et de 63 180% pour  $\kappa_2$ . Les erreurs relatives moyennes sont de 5.15% pour  $\kappa_1$  et 38.90% pour  $\kappa_2$ . De plus la précision des directions principales est aussi dégradée puisque les valeurs des courbures sont fausses.



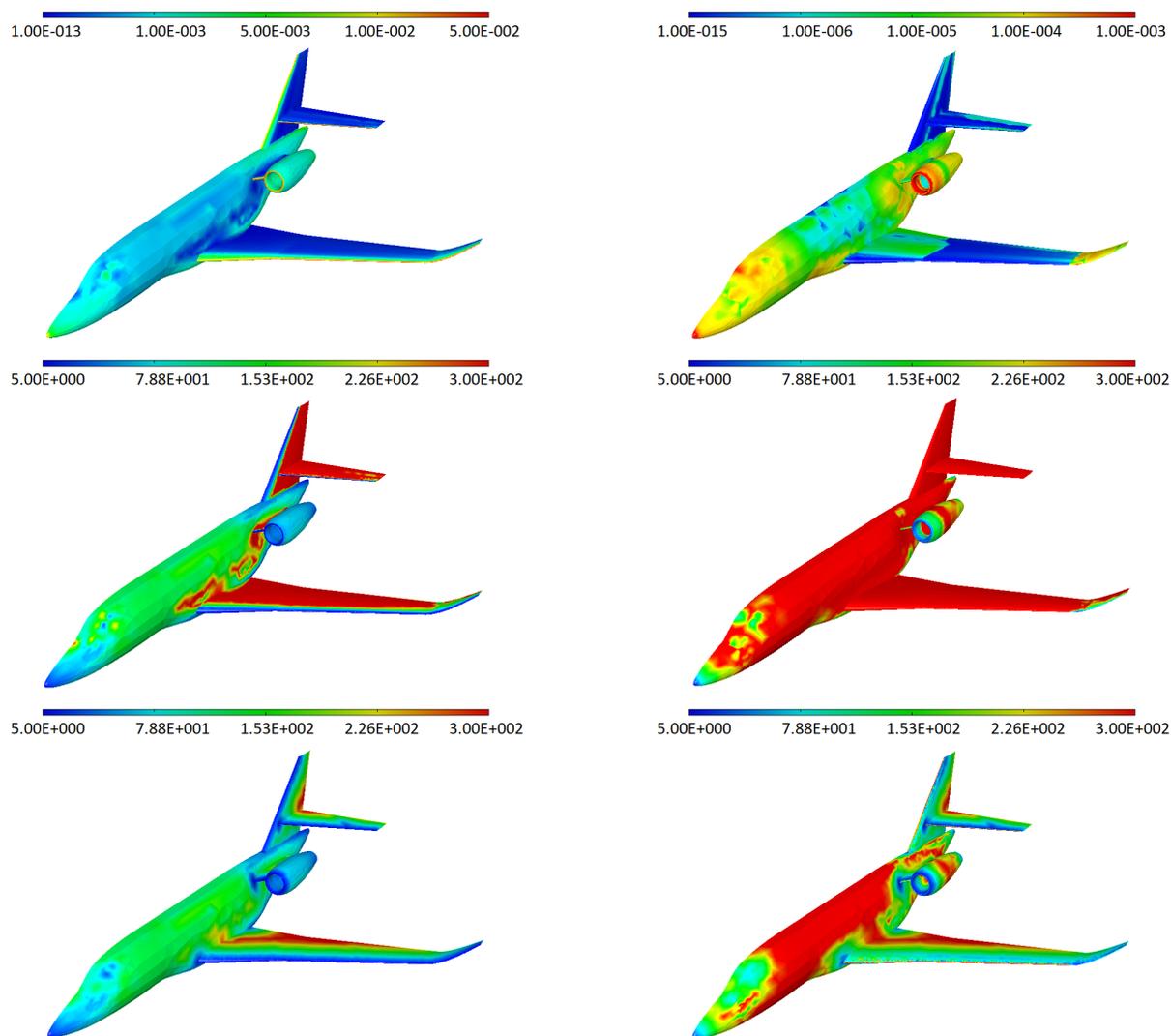
**Figure 4.2** *Maillage géométrique anisotrope d'un tore de section ellipsoïde — Courbures approchées de la méthode de Hamann  $\kappa_{1a}$  et  $\kappa_{2a}$  en haut. Courbures exactes  $\kappa_{1e}$  et  $\kappa_{2e}$  au milieu. Comparaison entre les courbures approchées et exactes  $|\kappa_{1a} - \kappa_{1e}|$  et  $|\kappa_{2a} - \kappa_{2e}|$  en bas.*

Au vu de ces résultats, une comparaison d'adaptation entre les courbures approchées et exactes a été étudiée. Il ressort de l'algorithme d'adaptation que le nombre d'itérations augmente avec l'utilisation des courbures approchées. L'algorithme d'adaptation ne converge pas pour de grandes modifications ou si le maillage de départ est trop grossier. En effet à chaque nouveau nœud inséré, une nouvelle évaluation de la courbure approchée est effectuée. Par conséquent, une erreur est introduite. De ce fait il y a plus de projections et le temps de l'adaptation devient plus long avec le calcul des courbures approchées que le temps de l'adaptation avec le calcul des courbures exactes.

Dans les processus d'adaptation itératifs, l'utilisation de la méthode de Hamann n'est pas recommandée, car elle introduit trop d'erreurs. De plus les résultats semblent plus mauvais quand le voisinage du nœud est trop pauvre et que le maillage est anisotrope.

### 4.1.2 Cartes de taille et correction $\mathcal{H}$ -choc

Dans le cadre de l'adaptation de maillage, nous allons voir comment à partir des courbures géométriques créer une carte de taille optimale avec l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope issu du livre [38].

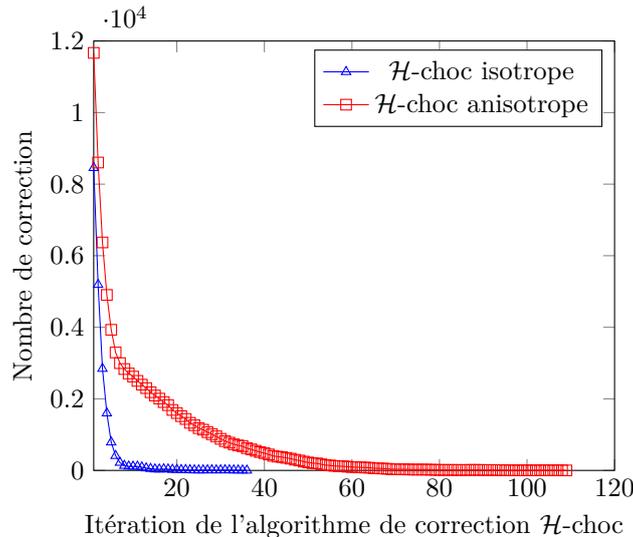


**Figure 4.3** Maillage géométrique isotrope grossier du Generic Business Jet — Courbures exactes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en haut. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  bornées avec  $h_{min} = 5.0$  et  $h_{max} = 300.0$  au milieu. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  avec correction  $\mathcal{H}$ -choc et  $G = 1.2$  en bas.

D'abord la création de la carte de taille sur le Generic Business Jet s'effectue à partir des courbures, voir figure 4.3. Les cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  sont donc calculées avec les

courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et l'écart angulaire  $\theta$  défini par l'utilisateur. Ensuite ces cartes de tailles sont bornées par  $h_{min}$  et  $h_{max}$ . Enfin l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc est appliqué avec le paramètre de gradation  $G$  choisi pour la carte isotrope puis la carte anisotrope. On remarque que l'effet de la gradation permet de s'affranchir des frontières entre le fuselage et la voilure. Tout le champ de taille est correctement lissé.

Pour ce maillage, l'algorithme de correction isotrope converge en 36 itérations et l'algorithme de correction anisotrope converge en 108 itérations. Les premières itérations concentrent la majeure partie des corrections des cartes de taille.



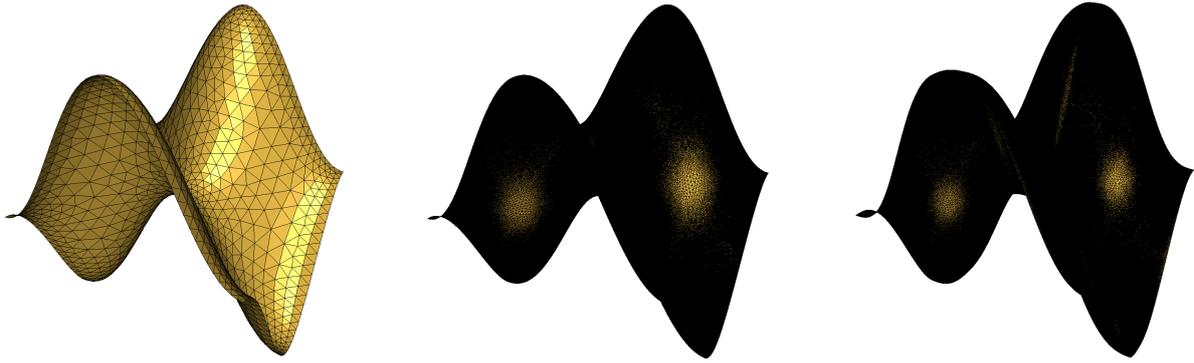
**Figure 4.4** Maillage géométrique isotrope grossier du Generic Business Jet — Historiques de convergence des itérations des algorithmes de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope et anisotrope.

En résumé, l'algorithme de gradation  $\mathcal{H}$ -choc est appliqué avec succès de façon globale sur les cartes de tailles puisqu'il lisse les champs de taille. De plus les corrections  $\mathcal{H}$ -choc isotrope et anisotrope convergent. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons l'application de cette correction en local dans le processus d'adaptation de maillage.

### 4.1.3 Continuité et discontinuité géométrique

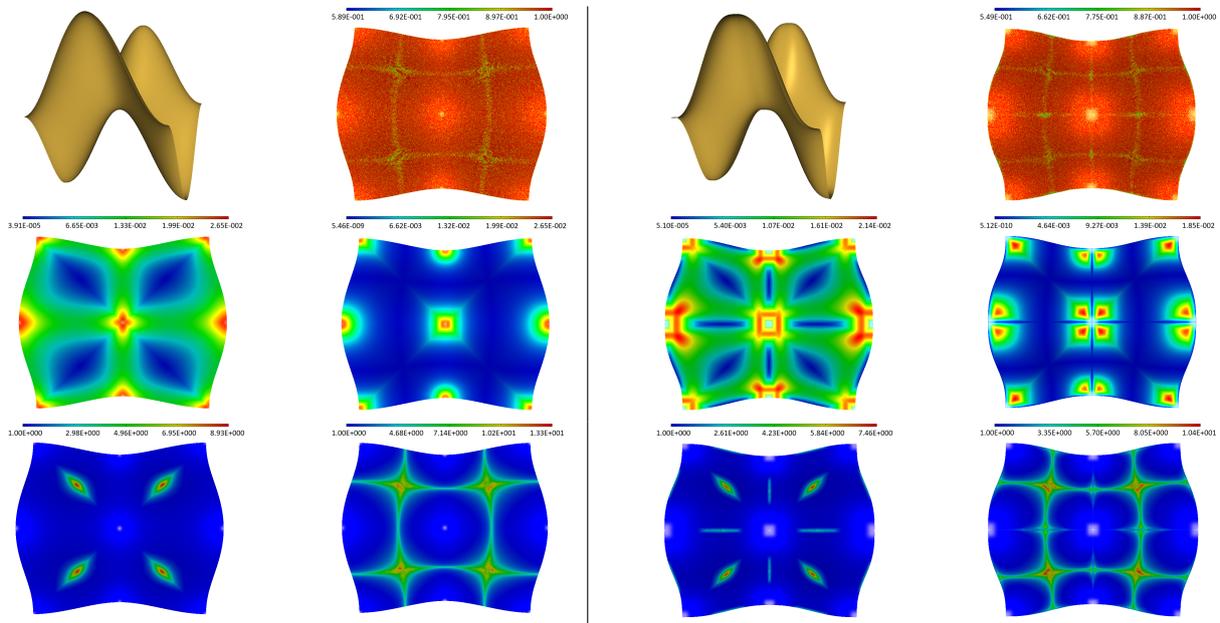
La discontinuité géométrique est au cœur des modèles réalistes complexes. L'analyse des résultats d'adaptation de maillages sur deux géométries, l'une continue en courbures et l'autre discontinue en courbures, va permettre de définir le comportement de l'algorithme d'adaptation par rapport à ces discontinuités.

Deux maillages de selles sont obtenus par adaptation à iso-paramètres d'un maillage isotrope grossier à partir des géométries de selle continue et discontinue en courbures, voir figure 4.5. Les paramètres d'adaptation sont un écart angulaire  $\theta = 0.1^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$ . On remarque immédiatement que le maillage adapté capte des discontinuités. De plus il semble qu'il faut plus de nœuds pour capter les discontinuités dans un modèle.

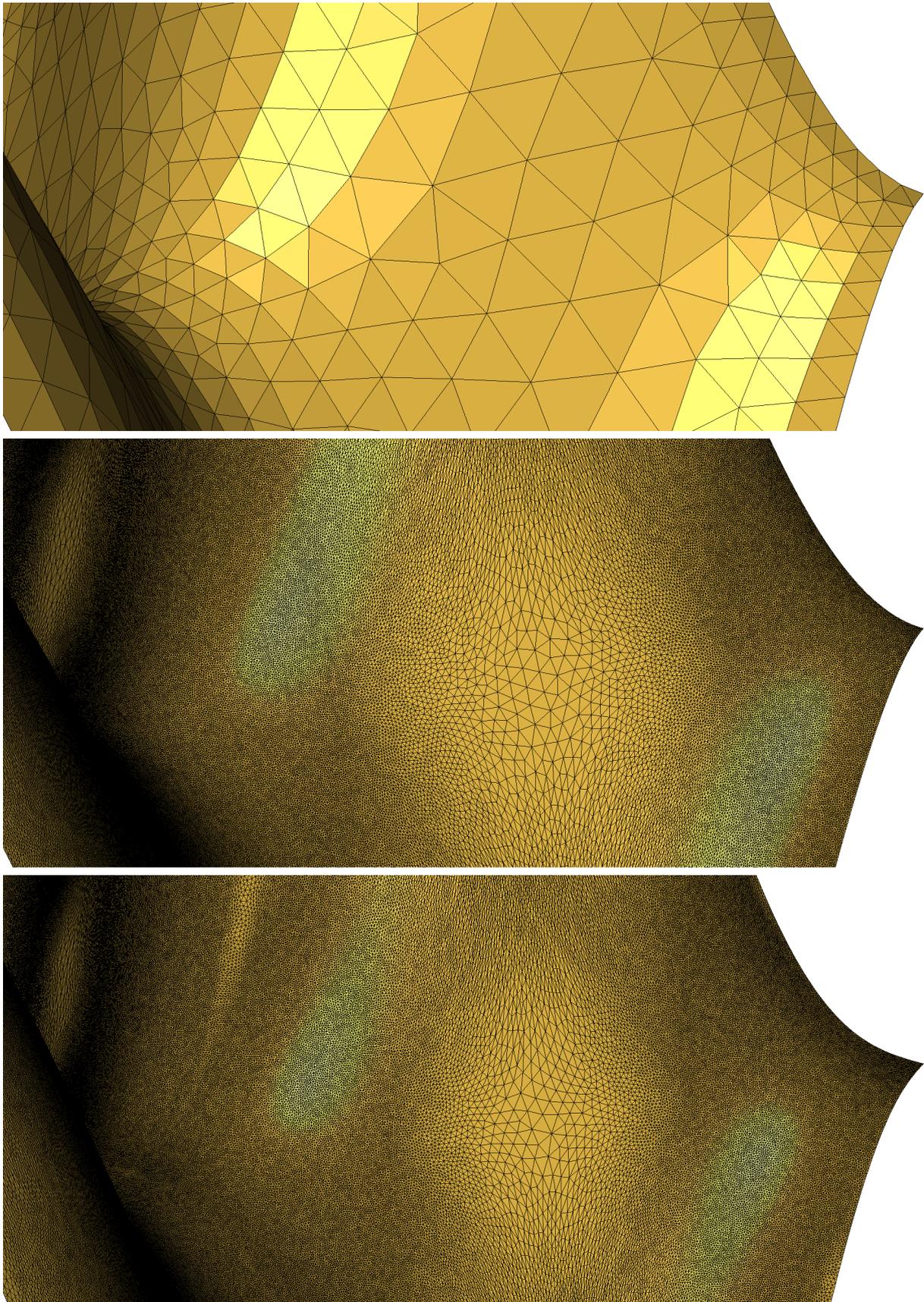


**Figure 4.5** Adaptations de maillage géométrique anisotrope d'une selle. Maillage initial (1 099 nœuds) à gauche. Maillage adapté sur géométrie continue en courbures (405 961 nœuds) au milieu. Maillage adapté sur géométrie discontinue en courbures (457 287 nœuds) à droite.

La figure 4.6 présente les résultats de la qualité en forme anisotrope des éléments, des courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , et des cartes de taille  $h_1$ ,  $h_2$  de ces deux maillages de selles. Le maillage adapté capte les discontinuités des deux courbures. La qualité en forme des éléments est très bonne. On s'aperçoit que la qualité des éléments diminue quand le champ de taille varie brusquement. La gradation appliquée est respectée. En conclusion, l'algorithme d'adaptation capte avec succès les discontinuités dans les champs de courbures.



**Figure 4.6** Maillages géométriques anisotropes d'une selle avec continuité en courbures à gauche (405 961 nœuds) et discontinuité en courbures à droite (457 287 nœuds) — Maillage de la selle, qualité en forme anisotrope des éléments, courbures exactes  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et cartes de taille  $h_1$ ,  $h_2$  de gauche à droite.



**Figure 4.7** Adaptations de maillage géométrique anisotrope d'une selle. Maillage initial en haut. Maillage adapté sur géométrie continue en courbures au milieu. Maillage adapté sur géométrie discontinue en courbures en bas.

La figure 4.7 expose les résultats d'adaptation des deux maillages de selles. Le champ de taille est continue pour le maillage de selle continue en courbures. A l'inverse le champ de taille témoigne de fortes discontinuités que l'on retrouve dans le maillage de selle discontinue en courbures.

En résumé la méthode de Hamman n'est pas recommandée pour l'adaptation de maillage anisotrope surfacique. Les algorithmes de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope et anisotrope convergent avec succès. L'algorithme d'adaptation de maillage surfacique permet de capter les fortes discontinuités dans les champs de courbures et permet l'adaptation de maillage dense.

## 4.2 Maillages 2d plans

Dans le cadre de l'adaptation de maillage 2d plan, des coupes de profils de voilure sont simulées. Le maillage 2d plan représente l'air environnant de la surface extérieure du corps jusqu'à l'infini. Cela permet de capturer tous les phénomènes aérodynamiques autour de la voilure, cône de Mach, pied de choc, laminarité ou turbulence de la couche limite. Trois stratégies sont étudiées concernant la construction de la carte de taille.

Une première stratégie consiste en la diffusion à l'infini des tailles d'arête à la peau. D'abord les tailles des arêtes de la frontière du corps sont récupérées sur les nœuds frontières. Puis une taille maximale est donnée sur tous les autres nœuds. Ensuite l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope est utilisé pour réduire les grandes tailles. En outre la carte de taille isotrope obtenue permet de remailler un domaine déformé après le mouvement d'un corps. Une stratégie annexe permet de créer des zones de taille imposée dans le domaine. La construction de la carte de taille est identique à la précédente avec en plus des zones délimitées où la taille est imposée. Cela est utile pour les calculs en acoustique quand la longueur des arêtes doit être proportionnelle à la fréquence étudiée.

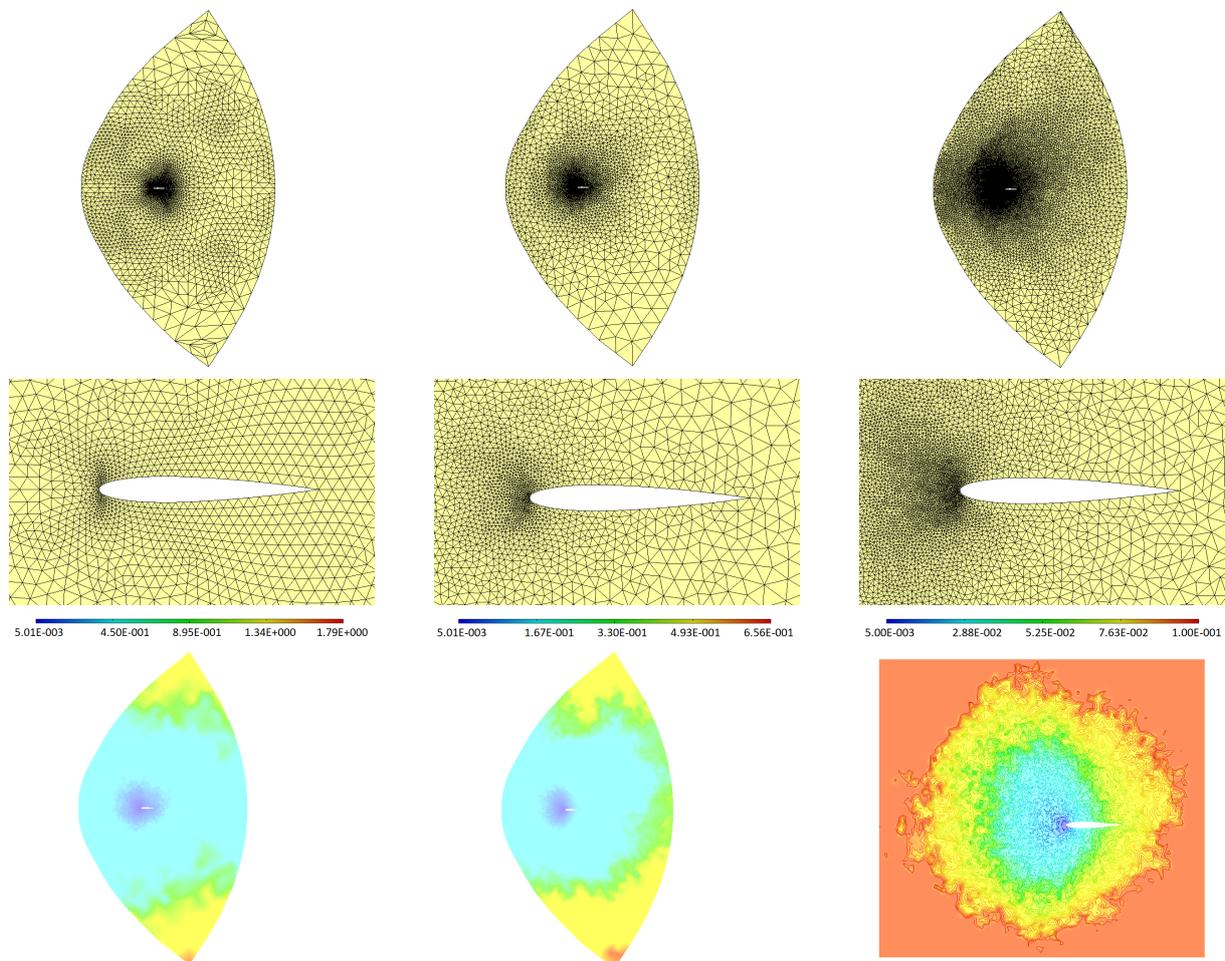
Une deuxième stratégie s'intéresse à l'adaptation de maillage avec couches limites. L'idée est de préserver la couche limite tout en remaillant le reste du domaine. D'abord le calcul de distance à la peau permet de sauvegarder une épaisseur de maillage structuré de la couche limite. Ensuite les tailles des arêtes de la dernière couche servent d'initialisation à la carte de taille. Puis une taille maximale est donnée pour le reste du domaine. Enfin l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope est utilisé pour réduire les tailles. Par conséquent, la carte de taille isotrope obtenue permet d'obtenir un remaillage des arêtes internes sans modifier les arêtes frontières de la dernière couche du maillage structuré de la couche limite.

Une dernière stratégie concerne l'adaptation anisotrope avec déplacement de corps. La carte de taille anisotrope est construite à partir de deux scalaires et de deux vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^2$ . D'abord le premier scalaire représente la taille tangentielle à la peau. Ensuite le second scalaire représente la distance normale à la peau. Puis les vecteurs unitaires tangentiels et les vecteurs unitaires normaux sont donnés par la fonction à base radiale utilisée lors du déplacement relatif entre les corps. Enfin l'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc anisotrope est utilisé pour lisser les tailles. Cela permet de faire du remaillage anisotrope de profil en mouvement relatif tout en préservant des zones de maillage.

### 4.2.1 Adaptation isotrope mono-corps profil NACA0012 avec taille à la peau

Une première adaptation mono-corps permet de valider l'ensemble des opérateurs de modification locale et algorithmes mis en place sur les arêtes internes. Cela permet aussi de vérifier que le processus de d'adaptation de maillage converge vers un état fixe.

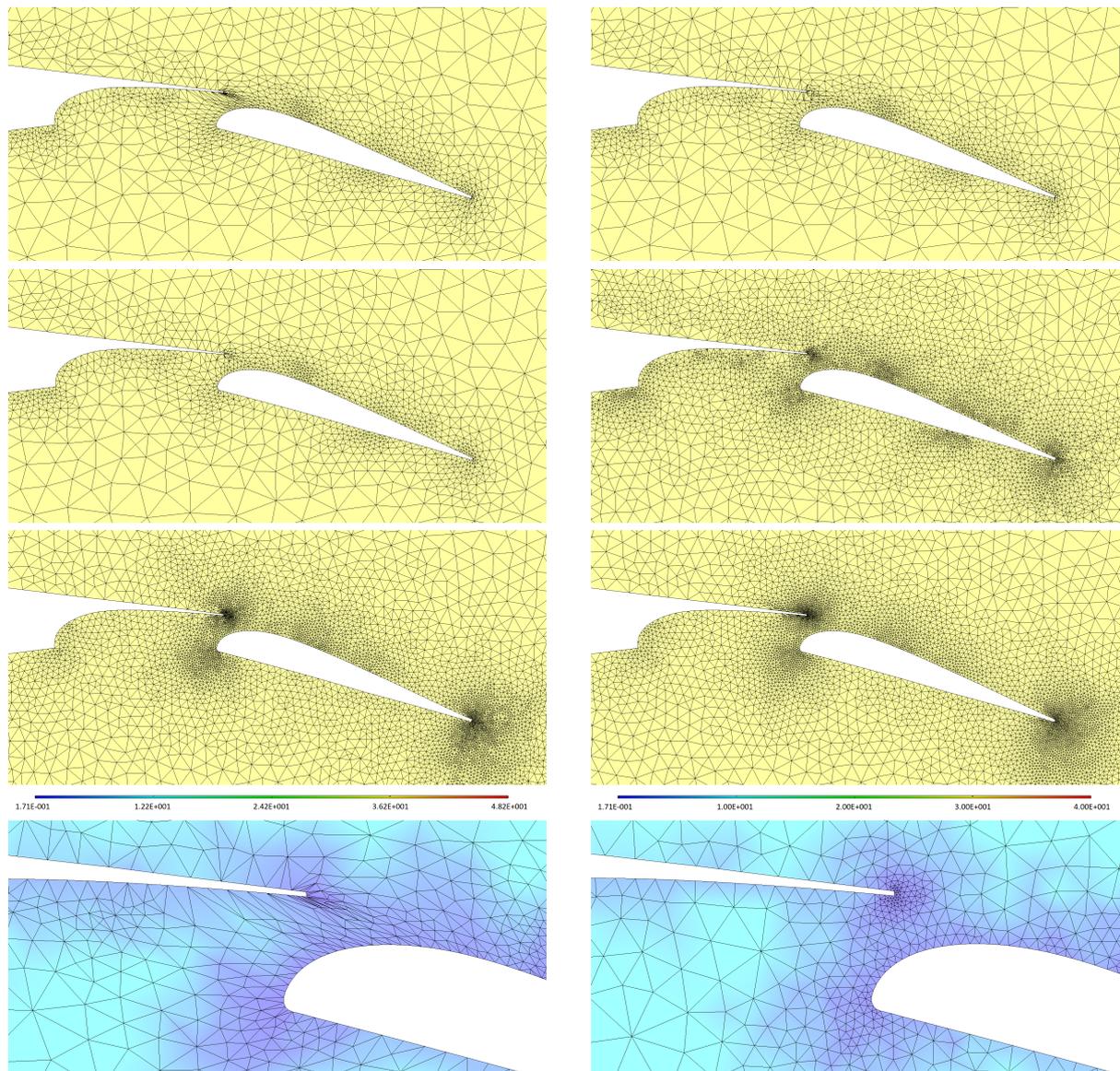
Pour le profil NACA0012, la carte de taille isotrope est construite à partir de la taille des arêtes de la frontière du profil. En chaque nœud du profil, la taille vaut la moyenne des deux tailles des arêtes du profil incidentes au nœud. Une taille  $h_{max}$  est fixée pour tous les autres nœuds du maillage. L'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc isotrope va permettre de créer le champ de taille en réduisant les grandes tailles voir la figure 4.8. Cependant cette approche impose que la discrétisation du profil soit déjà adaptée. De plus l'adaptation ne s'effectue que sur les arêtes internes.



**Figure 4.8** Adaptations de maillage isotrope d'un profil de maquette NACA0012 à partir de la taille à la peau — Maillage initial (3 114 nœuds) à gauche. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.6$  (4 106 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.2$  (14 345 nœuds) à droite. Carte de taille  $h_1$  du maillage adapté  $G = 1.6$  et  $G = 1.2$  avec visualisation des iso-ligne du champ en bas.

## 4.2.2 Adaptation isotrope bi-corps après mouvement de corps

Sur le cas d'un bi-corps, on souhaite remailler dans le volume après le mouvement du volet vers l'arrière du corps principal. Le but est de rehausser la qualité en forme isotrope des éléments du volume en préservant le maillage frontière du profil. La construction de la carte de taille se base sur la taille à la peau.



**Figure 4.9** Adaptation de maillage isotrope d'un bi-corps après mouvement du volet — Maillage initial (2 280 nœuds) en haut à droite. Différentes étapes d'adaptation de maillage (bascule d'arête globale, enlever-basculer d'arête, casser-basculer d'arête, bouger de nœud-basculer d'arête et état final fixe) avec gradation  $G = 1.2$  de gauche à droite et de haut en bas. Carte de taille  $h_1$  sur maillage initial et adapté avec gradation  $G = 1.6$  adéquate avec la discrétisation du profil en bas.

Sur la figure 4.9, la qualité en forme isotrope est médiocre entre les deux corps après la déformation. Les grandes étapes de l'adaptation sont illustrées. D'abord une bascule

d'arête sur tout le maillage permet d'augmenter la qualité de manière significative. Ensuite un enchaînement d'enlever-basculer, de casser-basculer et de bouger-basculer permet d'atteindre le maillage unitaire objectif de façon itérative. Ces opérateurs de modifications locales sont inspirés des travaux de Michal, Krakos, Loseille et Löhner.

En 2012, Michal et Krakos publient un article sur l'adaptation de maillage anisotrope avec des opérations élémentaires sur les arêtes [68]. Ils développent une bibliothèque modulaire pour l'adaptation de maillage anisotrope 3d non structuré. La méthode adaptative repose sur l'application répétée de simples opérations de rupture et de réduction d'arêtes pour modifier un maillage de telle sorte que les longueurs de bord individuelles correspondent à un champ de tenseur métrique anisotrope donné. La procédure maintient une distribution métrique continue grâce à une interpolation cohérente du champ de métrique initial.

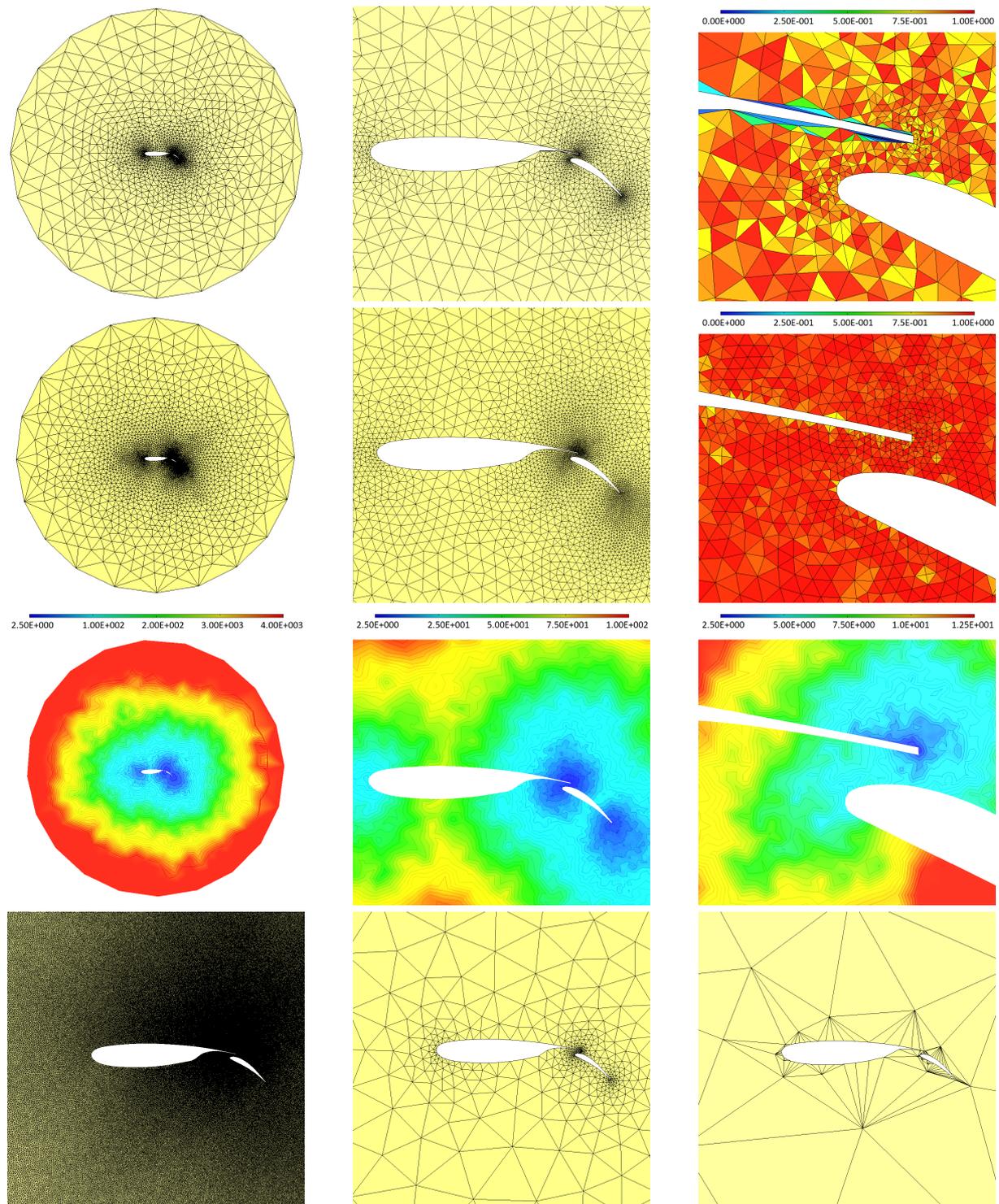
Loseille et Löhner présentent en 2013 un nouvel opérateur de modification de maillage [62]. Il s'utilise à chaque étape de la génération d'un maillage adapté : lors du remaillage de surface, de la génération de maillage structuré de la couche limite, de l'adaptation de maillage volumique et de l'optimisation de maillage. Cet opérateur généralise les opérateurs traditionnels basés sur les arêtes, rupture et réduction, et les opérateurs d'optimisation, bascule d'arêtes et/ou de faces, en modifiant automatiquement la cavité afin de permettre à la modification en cours d'être effectuée efficacement. Des contraintes supplémentaires sur l'approximation de la surface, la qualité ou la hauteur minimale des tétraèdres sont également mises en œuvre afin de contrôler la qualité globale du maillage.

On peut noter que l'adaptation de maillage avec les outils de modification locale mis en place, bascule d'arête, enlever une arête-basculer les arêtes, casser une arête-basculer les arêtes, et bouger de nœuds-basculer les arêtes est un succès puisqu'on voit une meilleure qualité en forme des éléments sur le maillage adapté.

### 4.2.3 Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec taille à la peau

Pour le profil RA16, la carte de taille isotrope est construite à partir de la taille des arêtes des peaux du corps principal et du volet. Le maillage est adapté sur les arêtes internes et les arêtes frontières des profils. Les arêtes frontières à l'infini ne sont pas traitées. Cela implique d'ajouter la projection de nœud sur la géométrie linéique du profil quand un nouveau nœud est inséré.

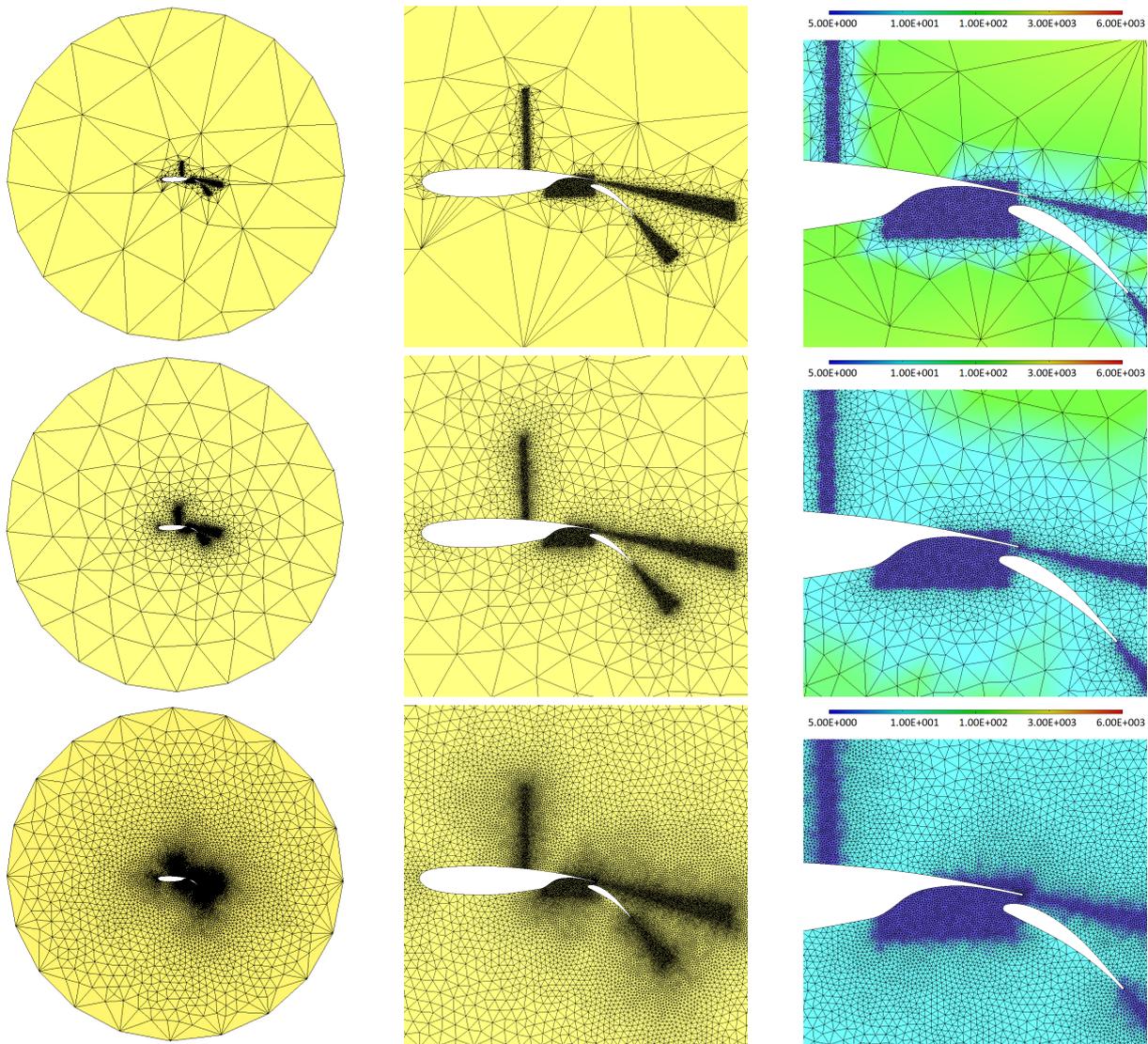
Sur la figure 4.10, la zone très mal discrétisée est adaptée avec succès. La qualité en forme des éléments est grandement améliorée. De plus, on a l'information de la proximité des corps avec cette métrique puisque les tailles au niveau du bord de fuite de la voilure sont répercutées sur le bord d'attaque du volet et inversement. La correction de la carte de taille fonctionne pour une large plage de gradation allant de 1.01 à 100.0. La projection fonctionne correctement puisque le profil est très bien discrétisé après adaptation.



**Figure 4.10** Adaptations de maillage isotrope d'un profil RA16 à partir de la taille à la peau — Maillage initial (2 410 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.2$  (5 654 nœuds) en dessous. Qualité en forme isotrope des éléments du maillage initial et du maillage adapté à droite. Carte de taille  $h_1$  du maillage adapté en dessous. Maillages adaptés avec gradation  $G = 1.01; 1.8; 100.0$  et respectivement 458 873 ;612 ;152 nœuds, en bas.

#### 4.2.4 Adaptation isotrope bi-corps profil RA16 avec zone de taille imposée

On peut vouloir des zones de taille imposée dans le domaine. Il suffit de délimiter une ou plusieurs zones et d'imposer une taille  $h_{1\text{boîte}}$ . Pendant le processus de remaillage, il faut vérifier si les nœuds insérés tombent dans une boîte auquel cas la valeur de la taille prescrite au nœud est imposée. La construction de la carte de taille se fait comme précédemment avec la distance à la peau. En particulier la correction de la carte de taille n'intervient pas dans ces zones.



**Figure 4.11** Adaptations de maillage isotrope d'un profil RA16 avec zones de taille imposée — Maillage adapté avec gradation  $G = 10.0$  (5 917 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.2$  (8 335 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.05$  (19 989 nœuds) en bas. Carte de taille  $h_1$  des maillages adaptés sur la droite.

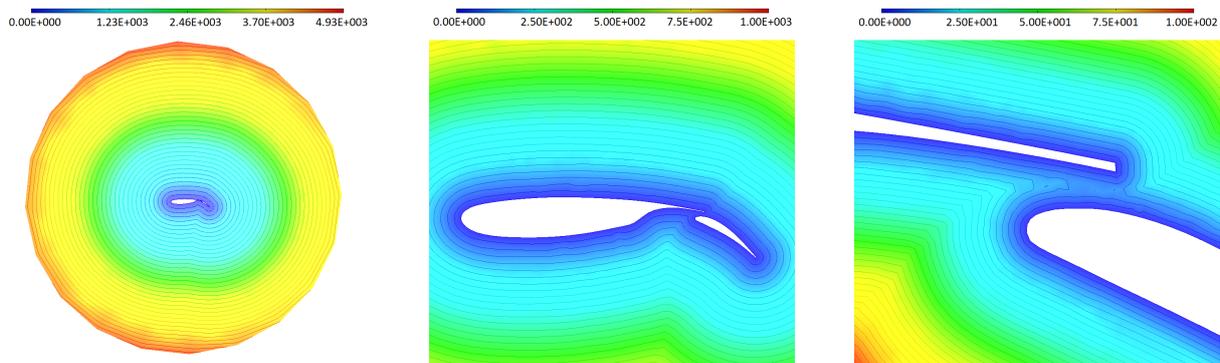
La figure 4.11 illustre cette méthode sur le maillage initial du profil RA16 avec quatre zones de taille imposée avec  $h_{1\text{boîte}} = 5\text{ mm}$ . Cette méthode est efficace et rapide pour

améliorer la précision de la solution dans certaines zones sans utiliser de processus complexes d'adaptation de maillage. De plus trois valeurs de gradations  $G = 1.05; 1.2; 10.0$  sont testées avec succès. On remarque que plus la gradation est grande et plus le maillage prend du temps pour converger vers un état fixe. À l'inverse, plus la gradation est proche de 1.0 et plus la convergence est rapide. Cependant le temps de calcul augmente, car il y a plus de nœuds.

#### 4.2.5 Adaptation isotrope tri-corps avec conservation du maillage couches limites

Pour un calcul de Navier-Stokes, un maillage par montée de couches structurées très fines normales à la peau est imposé pour une bonne représentation de la physique. L'adaptation de maillage est non-structurée. Il est donc nécessaire d'exclure la zone de couche limite pour laquelle on souhaite préserver un maillage structuré. Par la suite, on appellera profil engraisé, le profil avec le maillage couche limite. En combinant l'utilisation de la carte de taille avec la taille à la peau et l'utilisation des types de nœuds, on peut adapter le maillage en dehors du profil engraisé. En effet, il suffit de mettre le type de nœuds à 0 pour tous les nœuds de la couche limite que l'on veut conserver. Ce tri s'effectue grâce au calcul de la distance à la peau via une épaisseur de couche limite que l'on souhaite conservée.

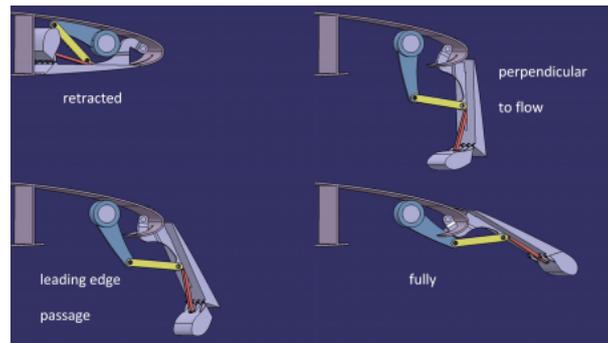
En particulier pour un nœud interne, la distance à la peau correspond à la distance minimale entre ce nœud et tous les nœuds frontières des corps. La figure 4.12 illustre ce champ sur un bi-corps.



**Figure 4.12** *Champ de distance à la peau sur bi-corps avec trois échelles de zoom.*

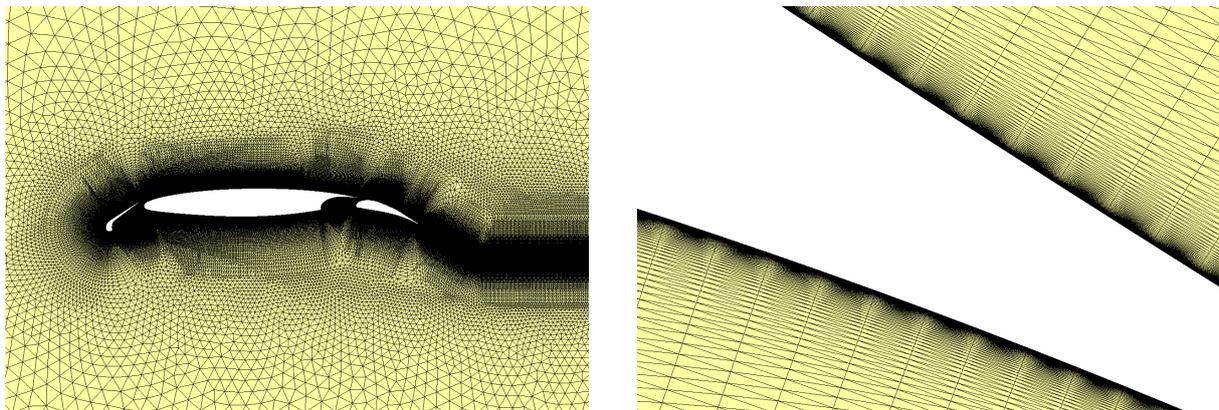
Dans le projet européen UHURA<sup>1</sup>, le tri-corps déploie son bec par un système de type Krüger, voir figure 4.13. Ce bec Krüger tourne autour d'un point d'articulation fixe en décrivant un mouvement circulaire pendant son déploiement.

1. Le projet UHURA étudie le comportement instationnaire de l'écoulement autour de systèmes d'hypersustentation dans le but de fournir, pour la première fois, une compréhension avancée des caractéristiques aérodynamiques critiques pendant les phases de décollage et d'atterrissage avec déploiement et rétraction du bec de la voilure ( Unsteady High-Lift Aerodynamics - Unsteady RANS Validation).



**Figure 4.13** *Système Krüger. Cinématique du bec de la rétractation au déploiement complet pour un système d'hypersustentation de haut en bas et de gauche à droite. Source <https://ec.europa.eu/inea/en/horizon-2020/projects/h2020-transport/aviation/uhura>.*

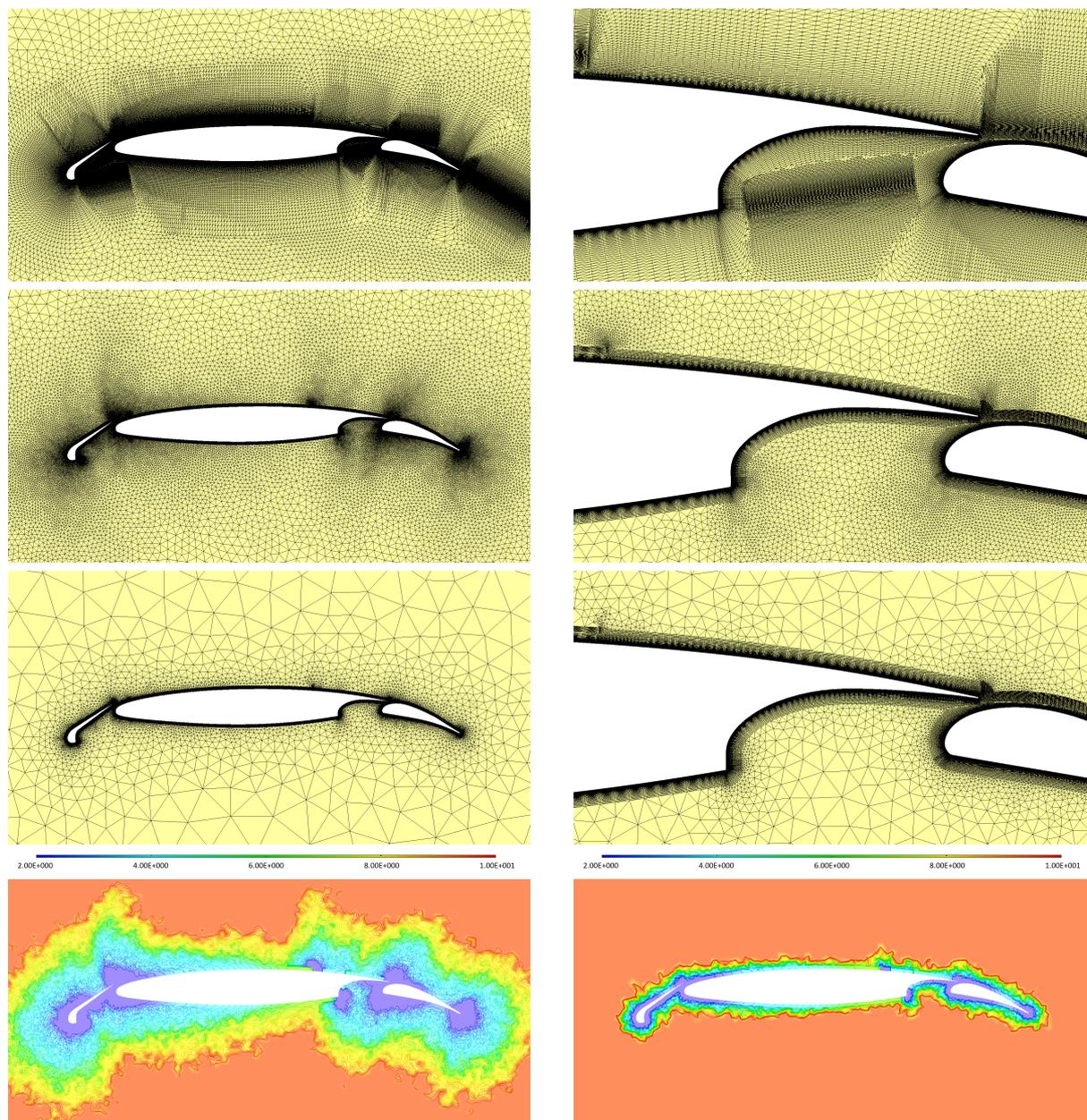
Dans le cadre de la simulation numérique, plusieurs configurations de bec sont étudiées pour comprendre les phénomènes instationnaires. Le maillage 2d plan n'est pas généré de façon automatique, voir figure 4.14. Les maillages de couche limite et les maillages de sillages sont faits à la main puis le maillage non-structuré est généré jusqu'à l'infini par une méthode d'insertion de nœud type Delaunay. Il est donc impératif de créer un processus rapide de remaillage sur le maillage déformé après le mouvement du bec.



**Figure 4.14** *Maillage initial du tri-cors (314 320 nœuds) — Profil à gauche et zoom sur le maillage de la couche limite à droite.*

La figure 4.15 montre l'adaptation de maillage isotrope du tri-cors pour différentes valeurs de gradation. On remarque immédiatement que le maillage initial est très dense. En plus de la couche limite, les sillages sont aussi maillés à la main. Nous nous affranchirons volontairement de ces sillages pour l'adaptation et nous conserverons uniquement le profil engraisé selon une épaisseur choisie.

On peut voir que l'adaptation de maillage isotrope est un succès en préservant le maillage de la couche limite. Deux adaptations sont réalisées pour des valeurs de gradation de  $G = 1.2$  et  $G = 1.8$ . Les outils de modification locale ont permis de détruire complètement la forte densité de nœuds dans les sillages et de rendre le maillage isotrope.



**Figure 4.15** Adaptations de maillage isotrope d'un tri-corps avec conservation du profil engrainé — Maillage initial (314 320 nœuds) en haut. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.2$  (117 724 nœuds) au milieu. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.8$  (89 850 nœuds) en dessous. Carte de taille  $h_1$  des maillages adaptés pour  $G = 1.2$  et  $G = 1.8$  en bas.

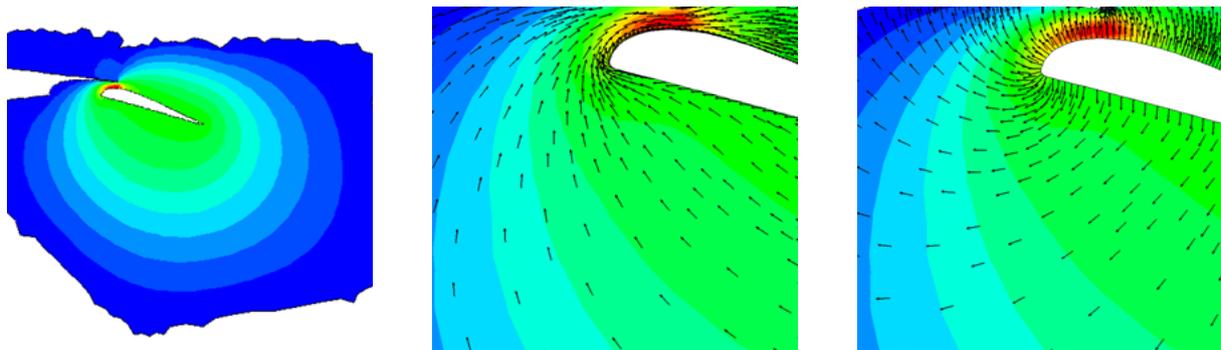
On s'aperçoit que la transition est brutale entre la dernière couche de maillage anisotrope et le maillage adapté isotrope. Il est donc nécessaire de faire une adaptation anisotrope pour avoir une transition progressive entre le maillage couche limite et le maillage adapté. Nous allons voir par la suite une nouvelle métrique anisotrope pour l'adaptation de tels maillages dans le cadre de mouvement relatif entre les corps.

### 4.2.6 Construction d'une métrique anisotrope basée sur une fonction à base radiale

On aimerait adapter un maillage anisotrope créé par un déplacement relatif entre deux corps. Ce déplacement est effectué par une fonction à base radiale.

Sur la figure 4.16, le champ de déplacement est visualisé ainsi que les champs vectoriels tangentiel et normal à la peau. On peut donc construire une métrique anisotrope à partir de ces deux champs vectoriels unitaires et de deux scalaires. Ces deux scalaires sont calculés aux nœuds de la peau du profil. Le premier scalaire est la taille à la peau pour la direction tangentielle et le deuxième scalaire est l'épaisseur de la couche que l'on souhaite. Une taille maximale pour chaque scalaire est donnée pour tous les autres nœuds du domaine. L'algorithme de correction anisotrope vient ensuite corriger la carte de taille en réduisant les grandes tailles.

Le maillage résultant devrait donner un maillage anisotrope non structuré qui développe chaque corps. De plus grâce à l'algorithme de gradation, les raccords entre les développements des deux corps devraient se faire correctement.



**Figure 4.16** Construction d'une métrique anisotrope basée sur une RBF — Champ de déplacement à droite, champ vectoriel de la RBF tangent au profil représenté par un déplacement en  $y$ , champ vectoriel de la RBF normal au profil représenté par un déplacement en  $x$ .

La métrique anisotrope peut se définir au point  $a$  comme :

$$\mathcal{M}_2(a) = {}^t\mathcal{D}(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{longueur de couche}^2(a) & 1 \\ 0 & \text{épaisseur de couche}^2(a) \end{pmatrix} \mathcal{D}(a) \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{D}(a)$  représente la matrice des directions principales unitaires composée des vecteurs tangentiel et normal à la peau issus de la RBF.

Cette nouvelle métrique anisotrope est à tester dans le cadre de l'adaptation de maillage 2d plan multi-corps avec conservation de maillage structuré de la couche limite. Il faut mettre au point les outils locaux de calcul de vecteurs unitaires en interrogeant le champ de la RBF quand un nouveau nœud est inséré dans le champ. Cette approche est encore en développement en raison de la priorité à l'adaptation 3d surfacique visé lors de cette thèse.

### 4.3 Maillages 3d surfaciques

Les algorithmes du précédent chapitre 3.10, 3.11 et 3.12 sont appliqués sur une aile de profil ONERA M6 avec un seul carreau surfacique et le Generic Business Jet avec plusieurs carreaux surfaciques. D'abord l'adaptation de l'aile M6 permet de valider la théorie sur une surface géométrique fixe pour les cas isotrope, anisotrope et anisotrope avec alignement. Ensuite le cas industriel, le GBJ, permet de valider l'adaptation sur plusieurs surfaces géométriques fixes pour les cas isotrope et anisotrope. Enfin une adaptation de maillage sur ce même GBJ déformable est présentée pour les cas isotrope et anisotrope.

La première partie concerne l'adaptation mono-carreau isotrope. D'abord la préparation de l'adaptation est vérifiée via les types de nœud, les types d'arête et les zones d'élément. Ensuite les paramètres de l'adaptation sont spécifiés. Une comparaison est visualisée entre le maillage initial et le maillage adapté via les champs de taille, de qualité en forme isotrope des éléments et de l'angle dièdre. Une analyse et un bilan sont réalisés sur la convergence de l'algorithme d'adaptation isotrope.

La deuxième partie concerne l'adaptation mono-carreau anisotrope. Les mêmes points que la première partie sont passés en revue. En outre une analyse est effectuée sur une large plage de variation de la gradation anisotrope.

La troisième partie concerne l'adaptation mono-carreau anisotrope avec alignement. Les mêmes points que la première partie sont passés en revue. De plus une analyse de l'alignement est réalisée en fonction de la gradation.

La quatrième partie concerne l'adaptation multi-carreaux isotrope. Les mêmes points que la première partie sont passés en revue. De surcroît, une comparaison est exécutée entre les trois normes d'interpolation  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .

La cinquième partie concerne l'adaptation multi-carreaux anisotrope. Les mêmes points que la première partie sont passés en revue. De plus l'algorithme d'adaptation est poussé à ses limites pour créer un maillage de plusieurs millions de nœuds avec une très forte anisotropie.

La dernière partie concerne l'adaptation multi-carreaux sur géométrie déformable. Les cas isotropes et anisotropes sont étudiés pour des déformations de voilure respectivement par étirement et par torsion-flexion combinées.

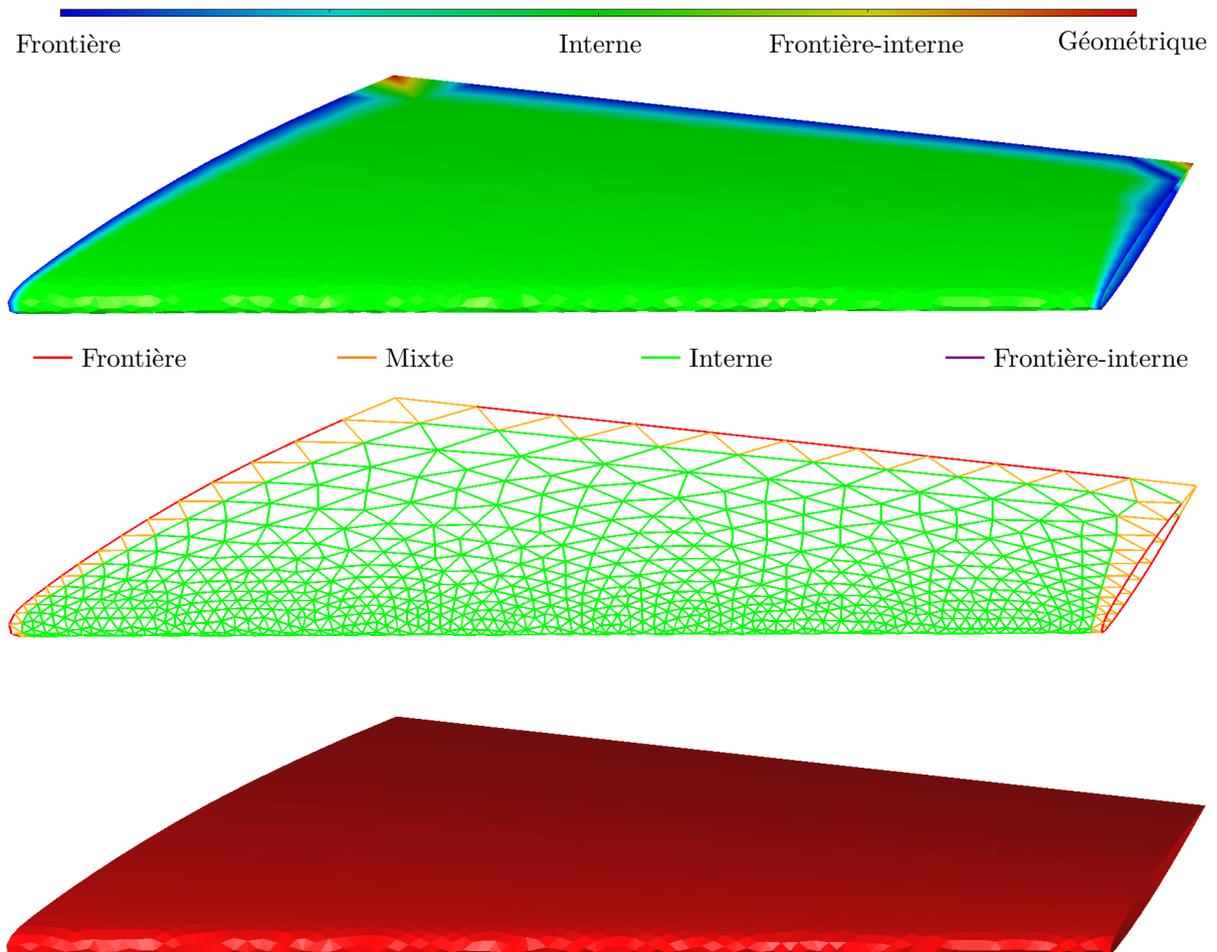
D'autres applications sur des surfaces fermées, ouvertes et complexes sont présentées en annexes A, B et C.

#### 4.3.1 Adaptation isotrope profil ONERA M6

Le profil ONERA M6 est adapté à partir d'un maillage  $\mathcal{M}_0$  généré avec BLSURF et d'une géométrie  $\mathcal{G}_0$  de type NURBS mono-carreau. L'objectif est d'adapter ce maillage  $\mathcal{M}_0$  avec des paramètres isotropes plus fins pour que le maillage s'approche plus de la géométrie grâce à l'algorithme 3.10.

### Préparation de l'adaptation mono-carreau

Le maillage  $\mathcal{M}_0$  est initialisé avec les types de nœud, d'arête et zone d'élément.



**Figure 4.17** *M6 isotrope — Initialisation  $\mathcal{M}_0$ , type de nœud, type d'arête, groupe d'élément.*

### Paramètres de l'adaptation isotrope mono-carreau

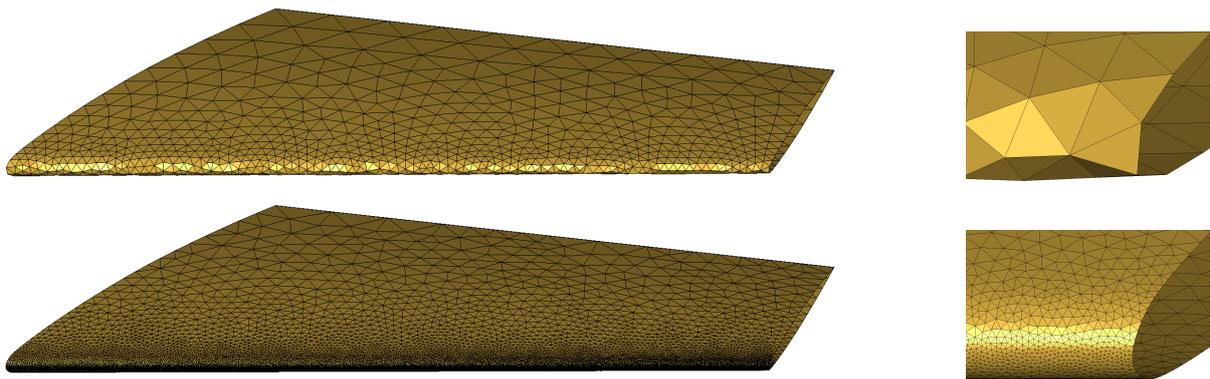
La courbure exacte et la norme géométrique sont choisies pour un écart angulaire de  $4^\circ$  avec une gradation de 1.2 et une taille d'arête entre 1 et 1 000. Les autres paramètres sont fixés sur la valeur par défaut, voir tableau 4.1.

Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Isotrope
Calcul des courbures	$\kappa$	Exactes
Norme	$L$	Géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M}min}$	$1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M}max}$	$\sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$4.0^\circ$
Gradation	$G$	1.2
Taille minimale	$h_{min}$	1.0
Taille maximale	$h_{max}$	1 000.0
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{seuil})$	0.140
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{bouger}$	10.0%
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	0.2
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{boucle}$	50

**Table 4.1** *M6 isotrope* — Paramètres d'entrée pour une adaptation isotrope.

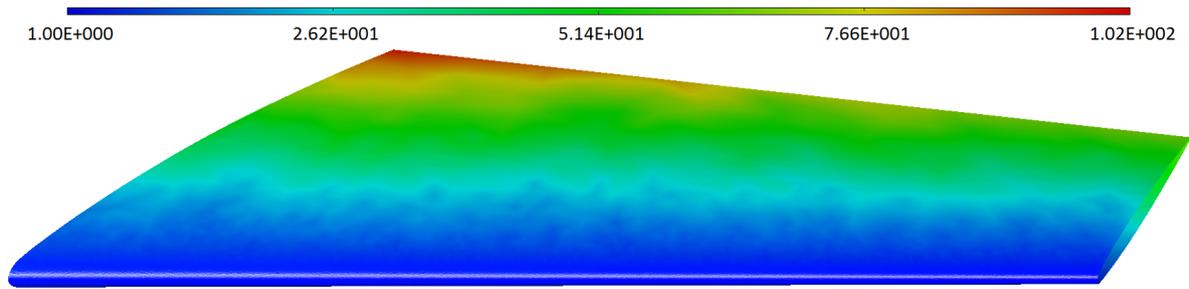
## Résultats de l'adaptation isotrope mono-carreau

Le maillage  $\mathcal{M}_0$  est adapté dans le cas isotrope pour donner le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  capte mieux le bord d'attaque de la voilure avec une densité de nœuds beaucoup plus élevée que le maillage  $\mathcal{M}_0$ , voir fig. 4.18.



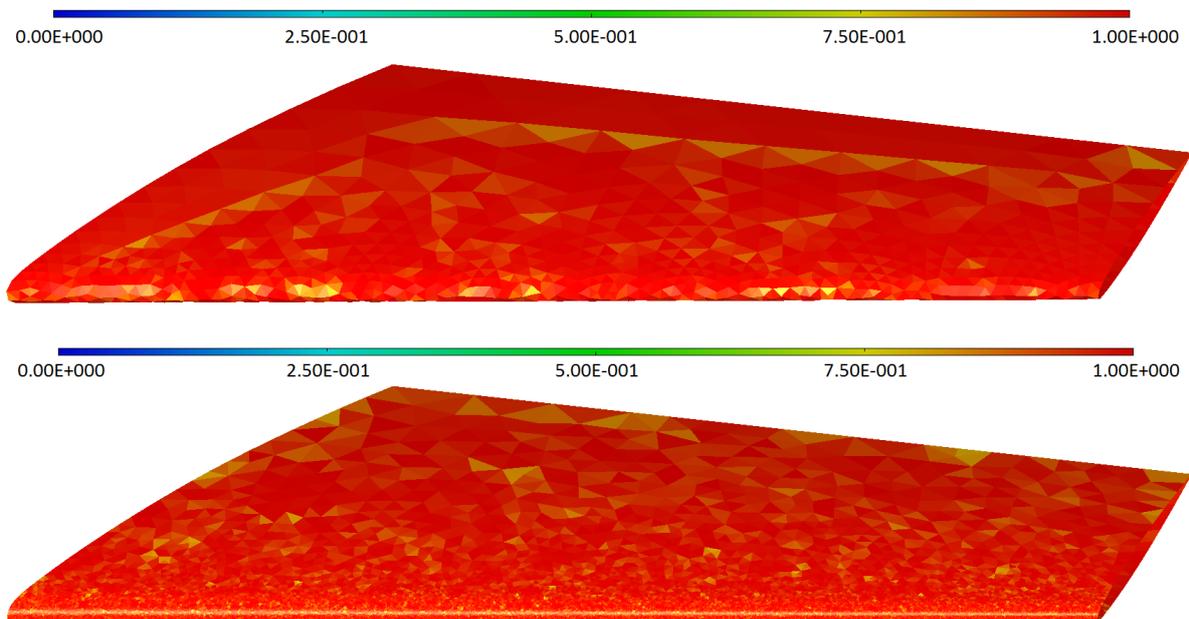
**Figure 4.18** *M6 isotrope* — Maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

La carte de taille du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bornée entre 1.0 et 102.0 ce qui est en accord avec  $h_{min} = 1.0$  et  $h_{max} = 1\ 000.0 > 102.0$ . De plus la gradation de taille semble progressive, voir fig. 4.19.



**Figure 4.19** *M6 isotrope* — Carte de taille  $h_1$  de  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

La qualité en forme isotrope des éléments des maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bonne puisqu'elle est à première vue supérieure à 0.75 sur l'ensemble du domaine, voir fig. 4.20.



**Figure 4.20** *M6 isotrope* — Qualité en forme isotrope des éléments de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

L'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_0$  est de  $20^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure alors que l'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est réduit à moins de  $5^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure, voir fig. 4.21.

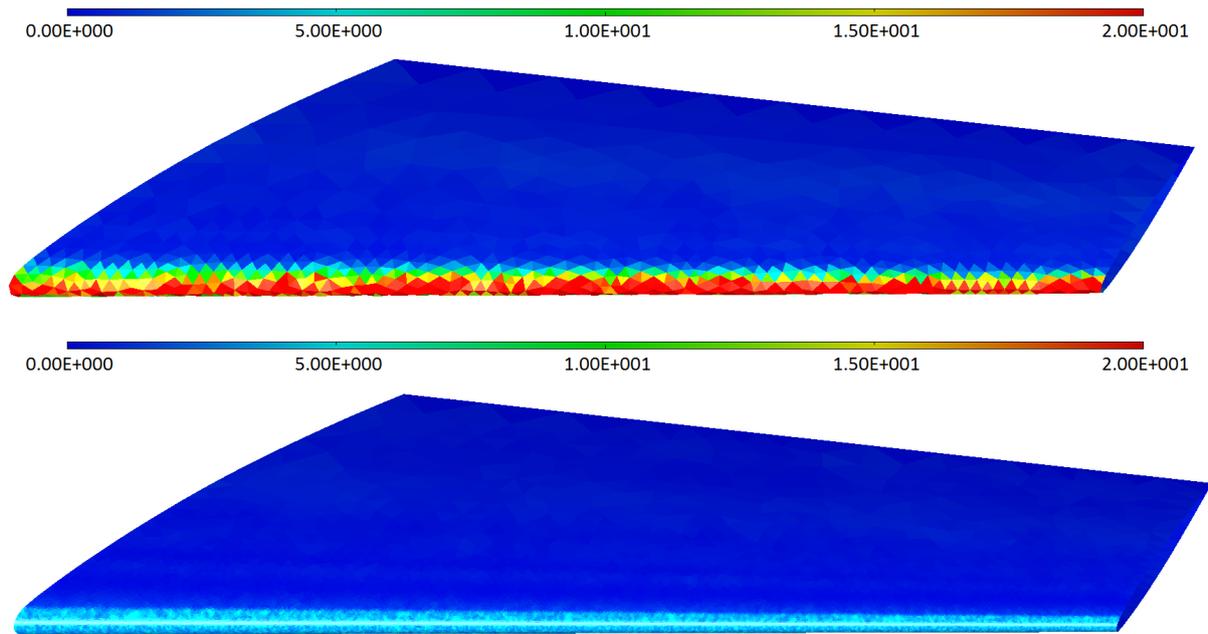


Figure 4.21  $M_6$  isotrope — Angle dièdre de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

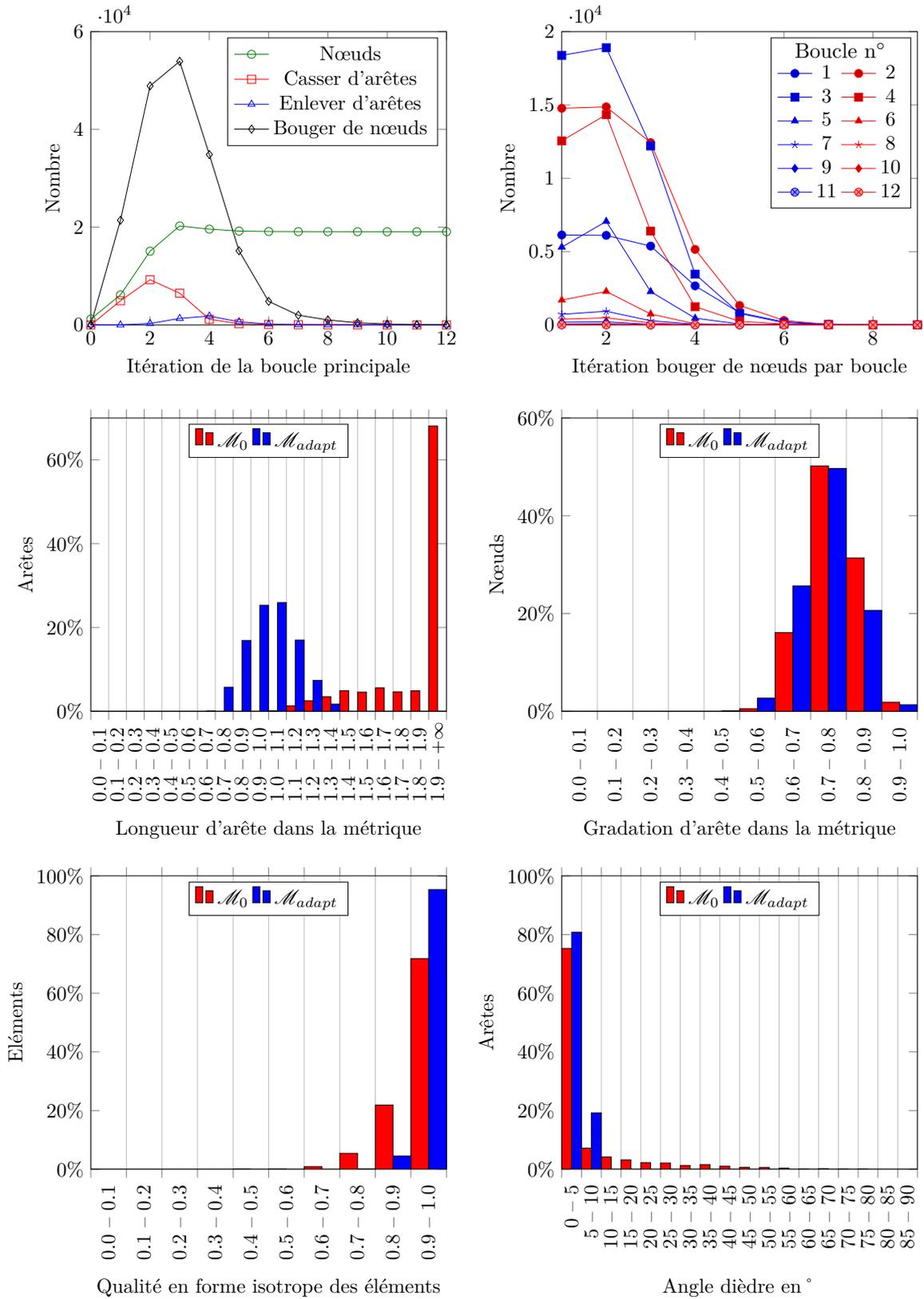
### Analyse des résultats isotropes mono-carreau

L'adaptation converge au bout de 12 itérations, c'est-à-dire que les longueurs des arêtes dans la métrique  $L_M$  sont comprises entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ . Le nombre de nœuds augmente de 1 200 à 19 071. L'adaptation commence comme une impulsion pour les trois premières itérations avec un nombre de nœuds croissant. Puis le nombre d'opérations de modification locale de maillage diminue ainsi que le nombre de nœuds jusqu'à se stabiliser, voir tableau 4.2.

Itérations	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	...	$\mathcal{M}_{12=adapt}$
Nombre de nœuds	1 200	6 135	15 081	20 246		19 071
Nombre d'éléments	2 322	12 140	29 999	40 312		37 961
Nombre de casser	0	4 935	9 236	6 486		0
Nombre d'enlever	0	0	290	1 321		0
Nombre de bouger	0	21 412	48 888	53 914		0

Table 4.2  $M_6$  isotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.

La figure 4.22 présente deux graphiques décrivant l'adaptation de maillage ainsi que quatre histogrammes montrant les différences entre les maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Le premier graphique d'itération de la boucle principale retrace l'évolution du nombre de nœuds et d'opérations de modification lors de l'adaptation. Le nombre de nœuds optimal est quasiment atteint dès la troisième itération. Le nombre de casser d'arêtes augmente puis diminue au moment où le nombre d'enlever d'arêtes croît. Les nombres de casser d'arêtes, d'enlever d'arêtes et de bouger de nœuds tendent vers 0 quand le maillage unité est atteint.



**Figure 4.22**  $M_6$  isotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l'angle dièdre.

Le second graphique sur les itérations de bouger de nœuds par itération de la boucle principale présente l'évolution du nombre de bouger de nœuds. A chaque itération de la boucle principale, le nombre de bouger de nœuds converge toujours vers 0.

Le premier histogramme montre une distribution gaussienne de longueur d'arête dans la métrique entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  en accord avec les objectifs fixés en paramètre d'entrée  $L_{\mathcal{M}min}$  et  $L_{\mathcal{M}max}$ .

Le deuxième histogramme sur la gradation d'arête dans la métrique est mesuré par le rapport entre le minimum de la longueur d'arête dans la métrique  $min(L_{\mathcal{M}boule})$  et le maximum de la longueur d'arête dans la métrique  $max(L_{\mathcal{M}boule})$  incidente au nœud tel que :

$$\frac{1}{G} = \frac{min(L_{\mathcal{M}boule})}{max(L_{\mathcal{M}boule})} \quad (4.2)$$

L'inverse de la gradation est autour de 0.8 d'après l'histogramme donc la gradation vaut  $G = 1/0.8 \approx 1.2$  ce qui est en accord avec l'objectif fixé en paramètre d'entrée  $G$ .

Le troisième histogramme évalue la qualité en forme isotrope des éléments. La qualité est maximisée pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $q_{\mathcal{M}_{adapt}} > 0.8$  et  $q_{\mathcal{M}_0} > 0.5$ .

Le dernier histogramme représente l'angle dièdre pour toutes les coques d'arête avec deux éléments. L'angle dièdre est minimisé pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt}} < 10^\circ$  et  $\Phi_{\mathcal{M}_0} < 80^\circ$ .

## Bilan de l'adaptation isotrope mono-carreau

Le processus de remaillage isotrope mono-carreau a convergé sur un profil ONERA M6. Les objectifs sur la longueur unité, la gradation et les bornes sur la carte de taille sont atteints. Les résultats sont une maximisation de la qualité en forme des éléments et une minimisation de l'angle dièdre. Ce processus valide l'algorithme d'adaptation isotrope d'un maillage surfacique mono-carreau 3.10.

### 4.3.2 Adaptation anisotrope profil ONERA M6

L'objectif est d'adapter le maillage précédent  $\mathcal{M}_0$  avec des paramètres anisotropes équivalents aux paramètres isotropes pour que le maillage s'approche plus de la géométrie avec une minimisation du nombre de nœuds grâce à l'algorithme 3.11.

#### Paramètres de l'adaptation anisotrope mono-carreau

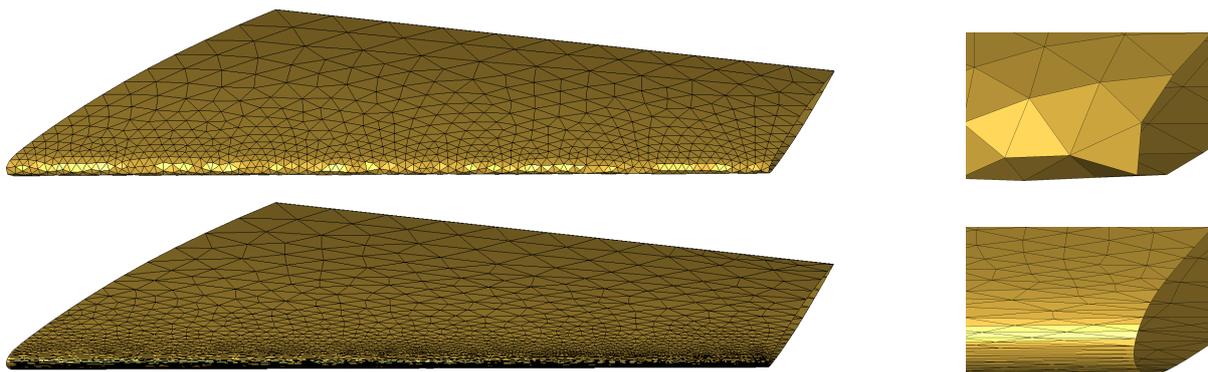
Il faut être à iso-paramètres pour comparer avec le cas isotrope précédent. La précision du milieu anisotrope et le nombre maximal d'itérations pour déterminer le milieu anisotrope sont deux paramètres supplémentaires. Ils sont fixés sur les valeurs par défaut.

Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Anisotrope
Calcul des courbures	$\kappa$	Exactes
Norme	$L$	Géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M}min}$	$1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M}max}$	$\sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$4.0^\circ$
Gradation	$G$	1.2
Taille minimale	$h_{min}$	1.0
Taille maximale	$h_{max}$	1 000.0
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{seuil})$	0.140
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{bouger}$	10.0%
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	0.2
Précision du milieu anisotrope	$Precision_{milieu}$	10.0%
Nombre maximal d'itération milieu anisotrope	$Iteration_{milieu}$	5
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{boucle}$	50

**Table 4.3** *M6 anisotrope* — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope.

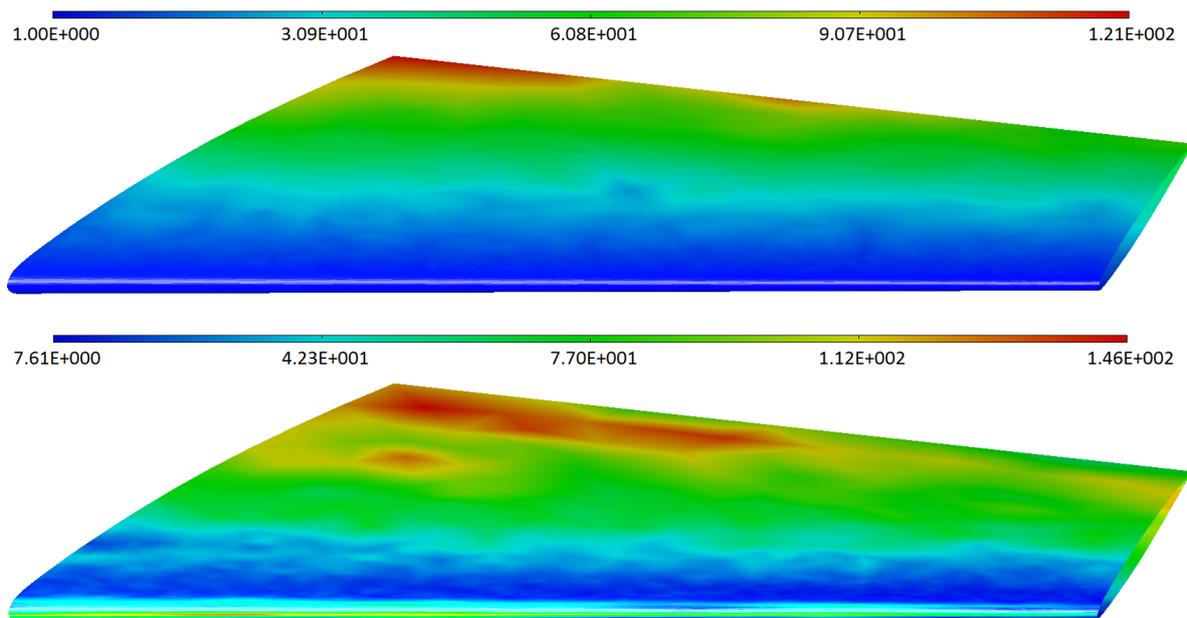
### Résultats de l'adaptation anisotrope mono-carreau

Le maillage  $\mathcal{M}_0$  est adapté dans le cas anisotrope pour donner le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  capte mieux le bord d'attaque de la voilure avec une densité de nœuds beaucoup moins élevée que le maillage  $\mathcal{M}_0$ , voir fig. 4.23.



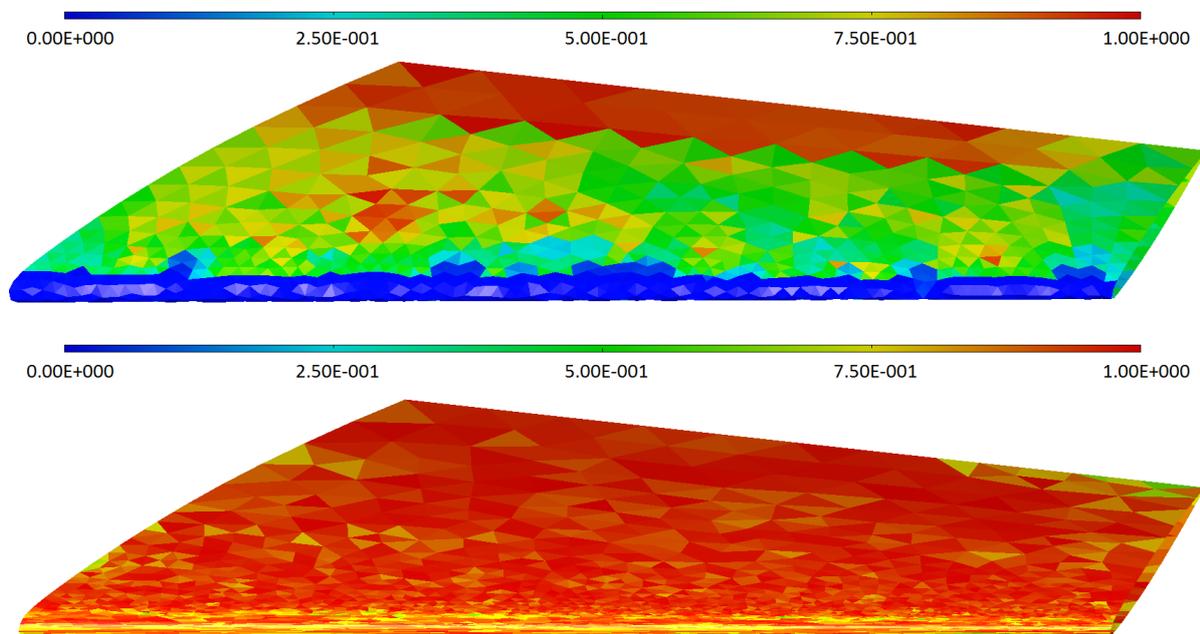
**Figure 4.23** *M6 anisotrope* — Maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

La carte de taille  $h_1$  du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bornée entre 1.0 et 121.0 ce qui est en accord avec  $h_{min} = 1.0$  et  $h_{max} = 1\ 000.0 > 102.0$ . Il en est de même pour  $h_2$  compris entre 7.61 et 146.0. De plus la gradation de taille semble progressive, voir fig. 4.24.



**Figure 4.24** *M6 anisotrope* — Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  de  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

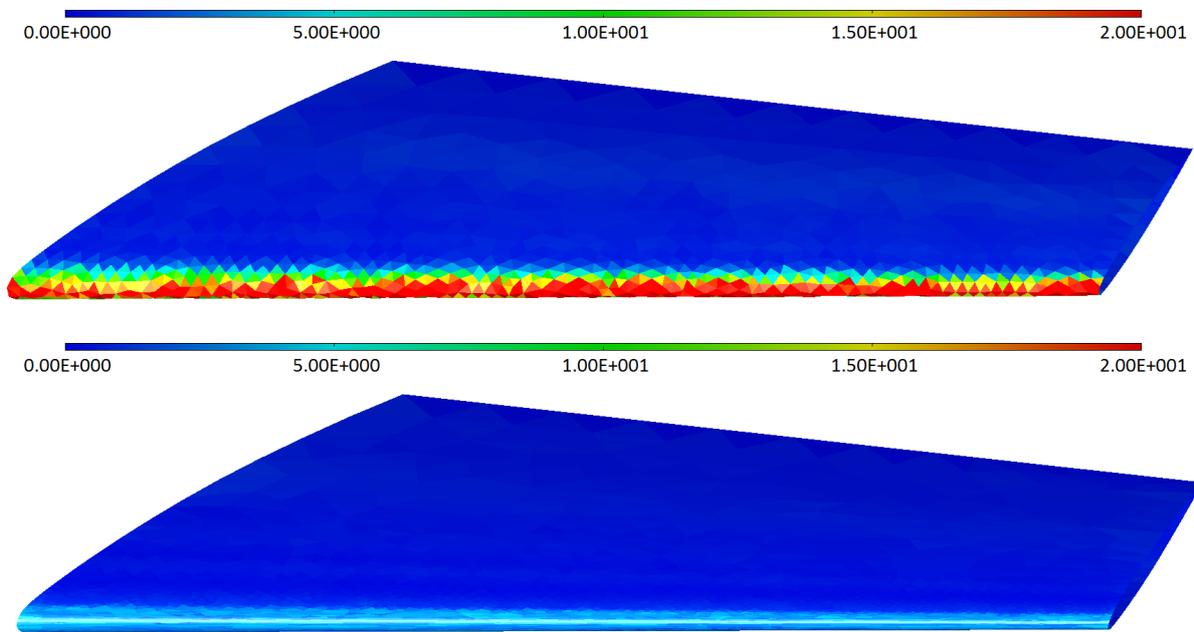
La qualité en forme anisotrope des éléments du maillage  $\mathcal{M}_0$  est très mauvaise surtout sur le bord d'attaque de la voilure alors que la qualité de  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bonne puisqu'elle est à première vue supérieure à 0.75 sur tout le maillage, voir fig. 4.25.



**Figure 4.25** *M6 anisotrope* — Qualité en forme anisotrope des éléments de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

L'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_0$  est de  $20^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure

alors que l'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est réduit à moins de  $5^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure, voir fig. 4.26.



**Figure 4.26** *M6 anisotrope* — Angle dièdre de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

### Analyse des résultats anisotropes mono-carreau

L'adaptation converge au bout de 10 itérations. Le nombre de nœuds optimal est atteint vers la troisième itération et les nombres de casser et d'enlever d'arêtes se compensent à la dixième itérations. Cependant il reste quelques arêtes trop grandes ou trop courtes dans la métrique en dehors de l'intervalle  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  ce qui entraîne une boucle infinie. L'approximation de la longueur d'arête dans la métrique par la formule de quadrature  $L_0$ , la précision du bouger de nœud et le milieu dans la métrique anisotrope itératif ne permettent pas de borner toutes les arêtes convenablement. Notre critère d'arrêt est la compensation du nombre de casser et d'enlever d'arêtes quand le nombre de nœuds se stabilise. Le nombre de nœuds augmente de 1 200 à 3 270 ce qui est faible par rapport au cas isotrope précédent de 19 071 nœuds à iso-paramètres. La réduction du nombre de nœuds est d'un facteur 6. L'adaptation commence comme une impulsion pour la première itération avec un nombre de nœuds croissant à cause de l'étape de saturation par casser-basculer d'arête. Puis le nombre d'opérations de modification locale de maillage diminue ainsi que le nombre de nœuds jusqu'à se stabiliser, voir tableau 4.4.

Itérations	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	...	$\mathcal{M}_{50=\text{adapt}}$
Nombre de nœuds	1 200	3 636	3 297	3 242		3 270
Nombre d'éléments	2 322	7 121	6 444	6 334		6 390
Nombre de casser	0	3 604	341	302		191
Nombre d'enlever	0	1 168	680	357		183
Nombre de bouger	0	15 765	12 619	9 934		6 705

**Table 4.4** *M6 anisotrope* — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.

La figure 4.27 présente deux graphiques décrivant l'adaptation ainsi que quatre histogrammes montrant les différences entre les maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ .

Le premier graphique d'itération de la boucle principale retrace l'évolution du nombre de nœuds et d'opérations de modification locale lors de l'adaptation de maillage. Le nombre de nœuds optimal est quasiment atteint à la troisième itération. Le nombre de casser d'arêtes augmente puis diminue en même temps que le nombre d'enlever d'arêtes. Les nombres de casser d'arêtes et d'enlever d'arêtes oscillent entre 125 et 250 soit une moyenne de 187.5 opérations par itération. Il y a donc autant d'arêtes à enlever que d'arêtes à casser. On peut donc en déduire que le maillage unité est atteint. Cela signifie que l'on peut sortir de la boucle infinie.

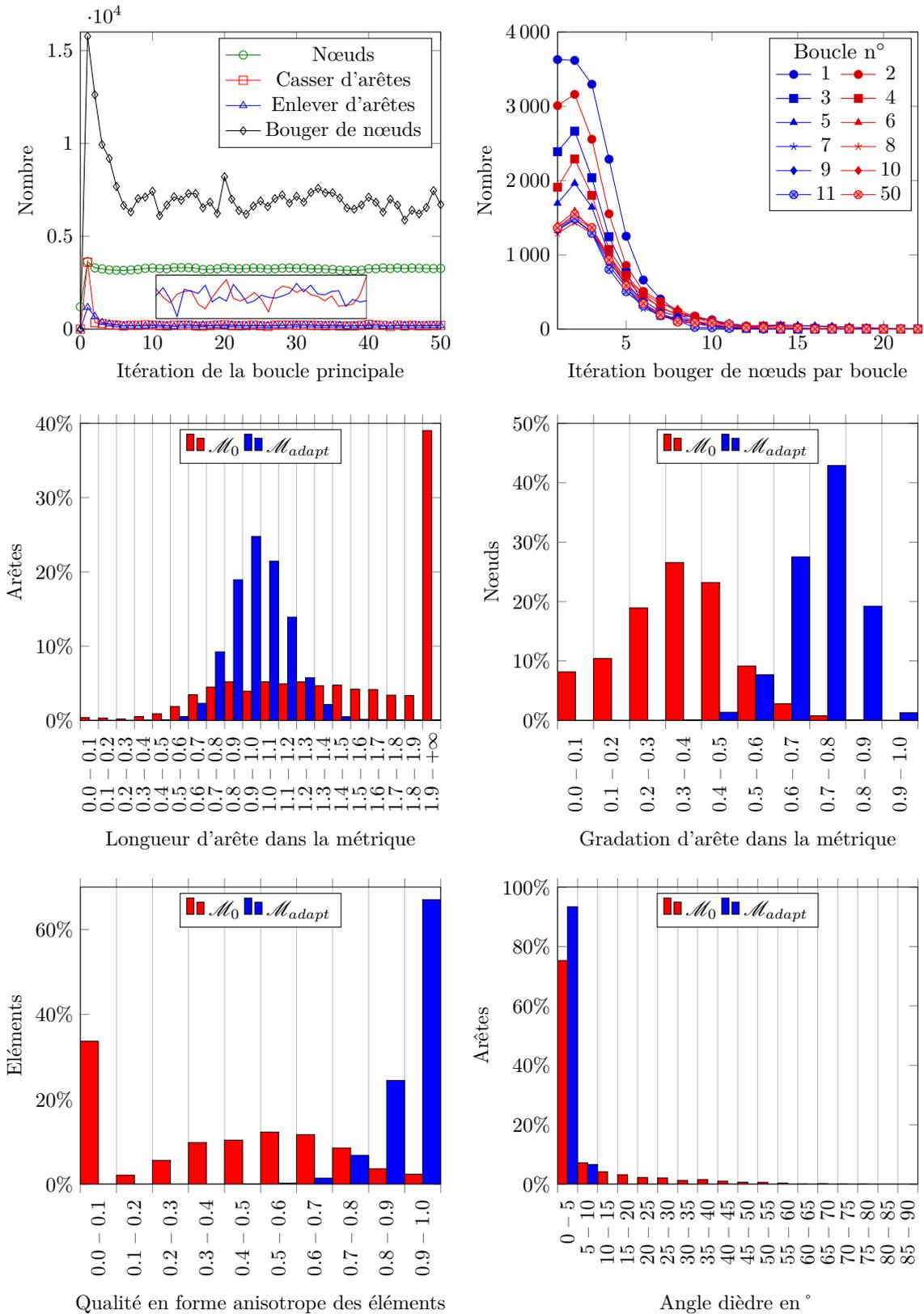
Le second graphique sur les itérations de bouger de nœuds par itération de la boucle principale présente l'évolution du nombre de bouger de nœuds. À chaque itération de la boucle principale, le nombre de bouger de nœuds converge toujours vers 0.

Le premier histogramme montre une distribution gaussienne de longueur d'arête dans la métrique entre 0.4 et 1.7 pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ . Cependant 95% des arêtes sont entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  en accord avec les objectifs fixés en paramètre d'entrée  $L_{\mathcal{M} \min}$  et  $L_{\mathcal{M} \max}$ .

Le deuxième histogramme sur la gradation d'arête dans la métrique montre que la gradation vaut  $G = 1/0.8 \approx 1.2$  ce qui est en accord avec l'objectif fixé en paramètre d'entrée  $G$ .

Le troisième histogramme évalue la qualité en forme anisotrope des éléments. La qualité est maximisée pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} > 0.6$  dont 90% des éléments avec  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} > 0.8$  et  $q_{\mathcal{M}_0} > 0.0$ .

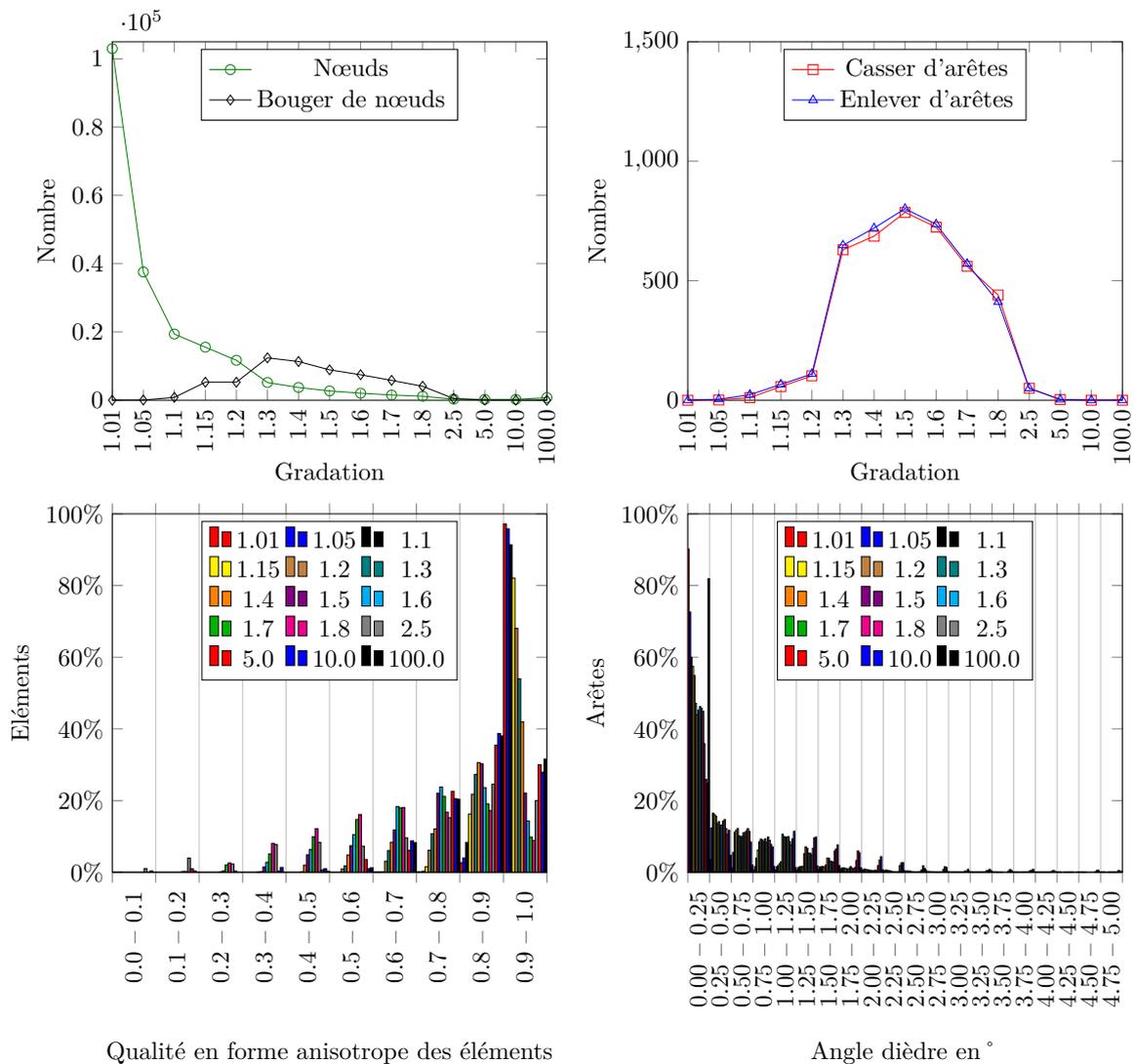
Le dernier histogramme représente l'angle dièdre pour toutes les coques d'arête avec deux éléments. L'angle dièdre est minimisé pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $\Phi_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} < 10^\circ$  et  $\Phi_{\mathcal{M}_0} < 80^\circ$ . À titre de comparaison, l'angle dièdre du maillage de l'adaptation anisotrope est plus minimisé que l'angle dièdre du maillage de l'adaptation isotrope, 93% d'arêtes avec  $\Phi_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} < 5^\circ$  pour le cas anisotrope contre 80% d'arêtes avec  $\Phi_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} < 5^\circ$  pour le cas isotrope.



**Figure 4.27** *M6 anisotrope* — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre.

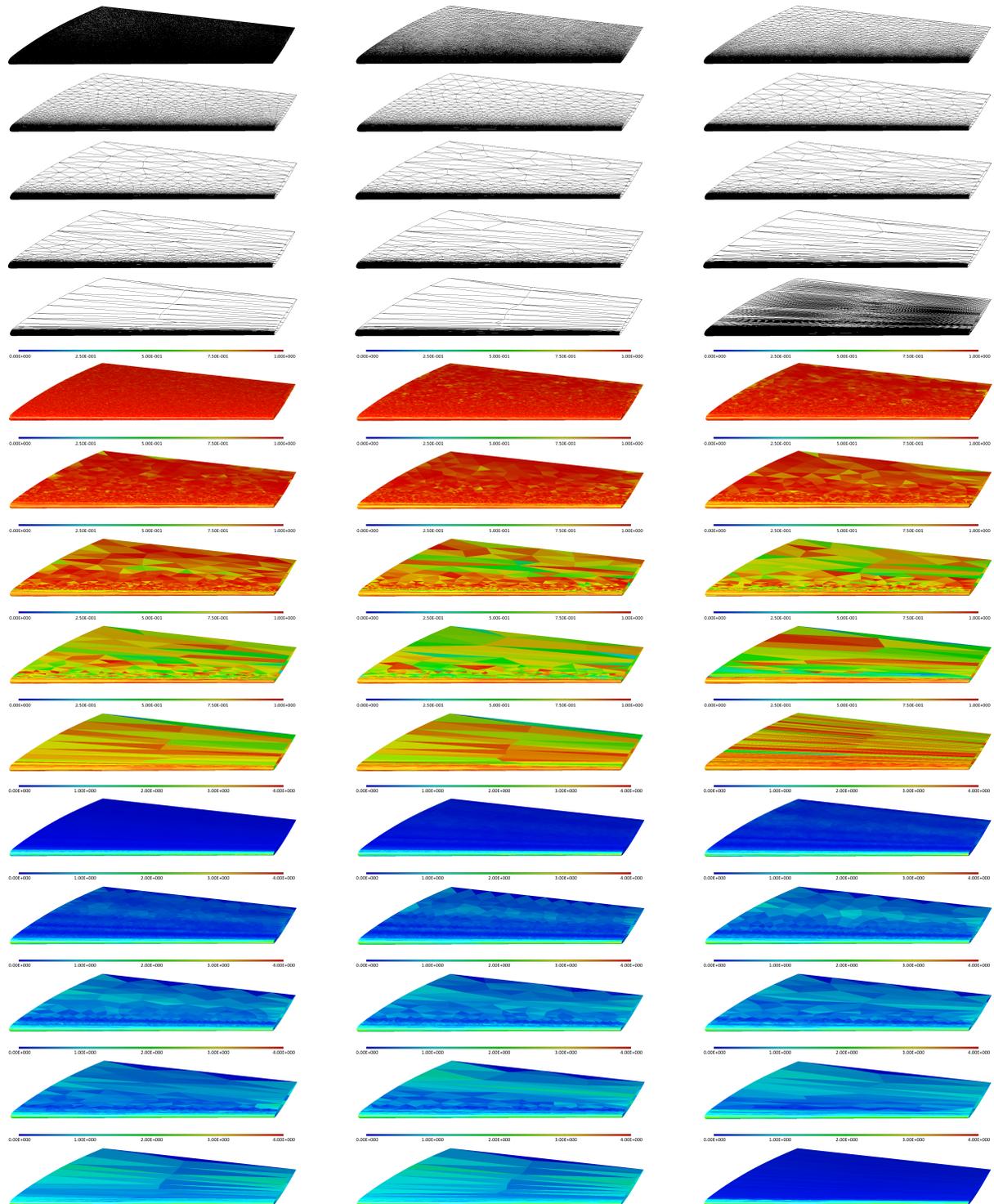
### Variation de la gradation et anisotropie mono-carreau

On étudie l'adaptation anisotrope en faisant varier le paramètre de la gradation  $G$ . Tous les autres paramètres sont fixés. La figure 4.28 montre le nombre de nœuds, le nombre de bouger de nœuds, le nombre de casser d'arêtes, le nombre d'enlever d'arêtes, la qualité en forme anisotrope des éléments et l'angle dièdre pour la dernière itération de l'algorithme en fonction des valeurs de gradation. On peut noter que plus la gradation est proche de 1.0 et plus le nombre de nœuds est élevé. On remarque une augmentation du nombre de nœuds pour une gradation  $G = 100.0$  par rapport à  $G = 10.0$ . De plus il semble que pour les valeurs de gradation intermédiaire  $1.3 < G < 1.8$ , l'algorithme a plus de difficultés pour converger vers un état fixe. D'après les histogrammes, plus la gradation est proche de 1.0 et plus la qualité en forme est maximisée. L'angle dièdre est minimisé quand la gradation est proche de 1.0 sauf quand la gradation est très grande. En effet on remarque que l'angle dièdre est très bien minimisé pour une gradation de 100.0.



**Figure 4.28** *M6 anisotrope* — Historiques de convergence de l'algorithme. Histogrammes de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre pour  $\theta = 1.0^\circ$  avec des gradations  $G = 1.01, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.5, 5.0, 10.0, 100.0$ .

Sur la figure 4.29, on remarque que plus la gradation est élevée et moins il y a de nœuds. Plus la gradation est faible et plus la qualité en forme globale décroît. Plus la gradation est faible et plus l'angle dièdre est minimisé sauf pour une gradation très grande  $G = 100.0$ .



**Figure 4.29** *M6 anisotrope* — Maillages anisotropes pour  $\theta = 1.0^\circ$  avec des gradations  $G = 1.01, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.5, 5.0, 10.0, 100.0$  de gauche à droite et de haut en bas. Qualité en forme anisotrope des éléments et angle dièdre.

## Bilan de l'adaptation anisotrope mono-carreau

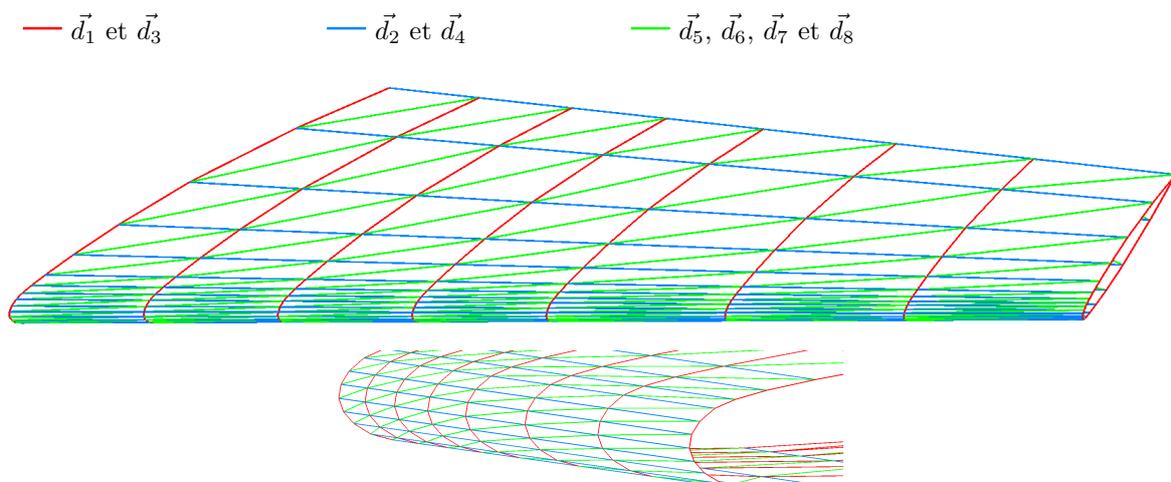
Le processus de remaillage anisotrope mono-carreau a convergé sur un profil ONERA M6. Les objectifs sur la longueur unité, la gradation et les bornes sur les cartes de taille sont atteints. Les résultats sont une maximisation de la qualité en forme des éléments et une minimisation de l'angle dièdre. Le nombre de nœuds et l'angle dièdre sont plus faibles par rapport au même cas isotrope à iso-paramètres. Ce processus valide l'algorithme d'adaptation anisotrope d'un maillage surfacique mono-carreau 3.11.

### 4.3.3 Adaptation anisotrope avec alignement profil ONERA M6

L'objectif est d'adapter le maillage précédent  $\mathcal{M}_0$  avec des paramètres anisotropes avec alignement pour retrouver un maillage pseuso-structuré grâce à l'algorithme 3.12. D'abord le critère d'alignement sera vérifié sur un maillage structuré selon les courbures. Ensuite une adaptation de maillage sera étudiée avec ce critère. Enfin nous regarderons l'influence de la gradation sur ce critère d'alignement.

#### Vérification du critère d'alignement

Sur la figure 4.30, on visualise l'alignement des arêtes par rapport aux directions principales de l'ellipse sur un maillage généré avec CITRON. On voit que toutes les arêtes alignées sur la grande courbure sont en rouge, les arêtes alignées sur la petite courbure sont en bleu et les arêtes alignées sur la diagonale sont en vertes. Par conséquent, le critère d'alignement est validé.



**Figure 4.30** Vérification du critère d'alignement à partir d'un maillage structuré selon les courbures — Visualisation de l'alignement des arêtes du maillage  $\mathcal{M}$  généré avec CITRON suivant les directions  $\vec{d}_i$  pour  $i = 1, \dots, 8$ .

### Paramètres de l'adaptation anisotrope avec alignement mono-carreau

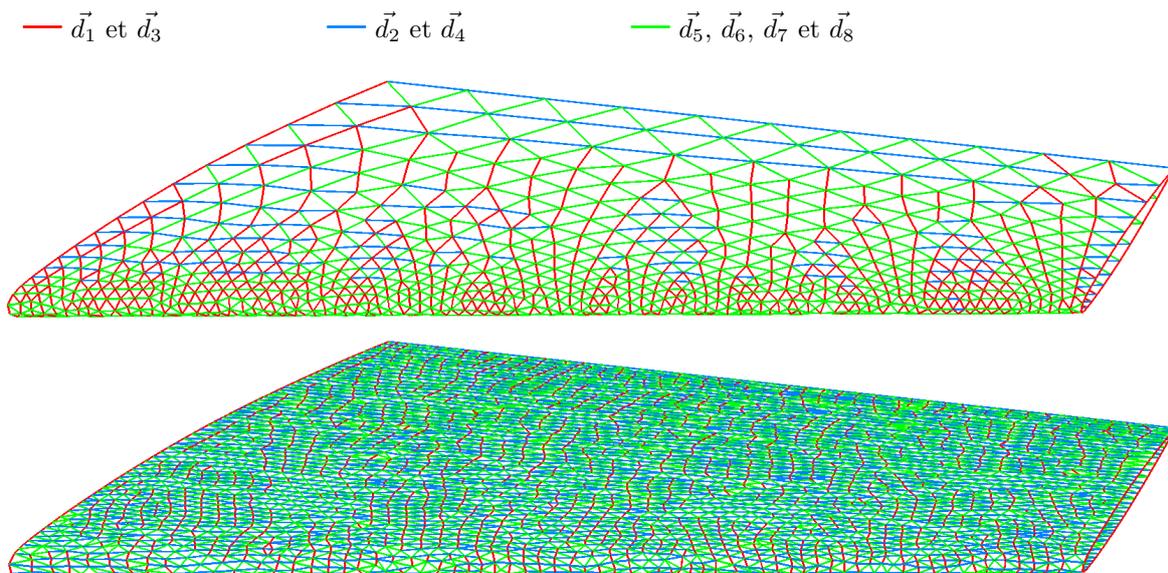
Dans un premier temps, nous testerons avec une gradation proche de 1.0 pour essayer de retrouver un maillage pseudo-structuré.

Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Anisotrope avec alignement
Calcul des courbures	$\kappa$	Exactes
Norme	$L$	Géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M} \min}$	$1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M} \max}$	$\sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$1.0^\circ$
Gradation	$G$	1.05
Taille minimale	$h_{\min}$	10.0
Taille maximale	$h_{\max}$	1 000.0
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{\text{seuil}})$	0.140
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{\text{bouger}}$	10.0% puis 1.0% (align)
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	0.2
Précision du milieu anisotrope	$Precision_{\text{milieu}}$	10.0%
Nombre maximal d'itération milieu anisotrope	$Iteration_{\text{milieu}}$	5
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{\text{boucle}}$	50

**Table 4.5** *M6 anisotrope avec alignement* — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope avec alignement.

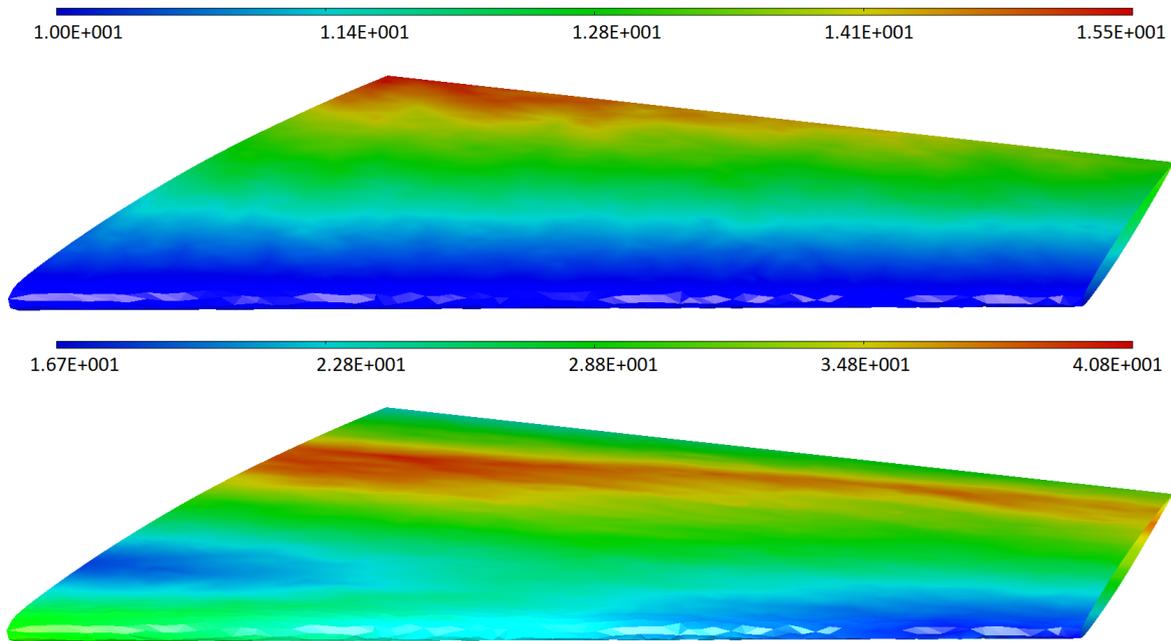
### Résultats de l'adaptation anisotrope avec alignement mono-carreau

On remarque l'alignement du maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$  suivant les directions principales sur la figure 4.31.

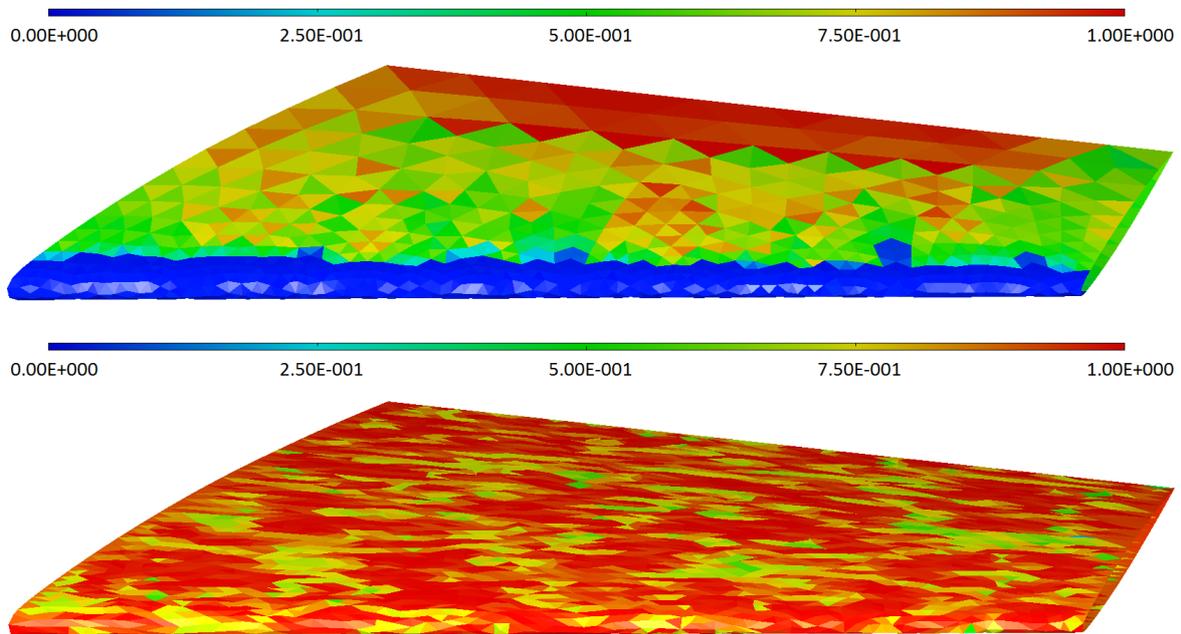


**Figure 4.31** *M6 anisotrope avec alignement* — Visualisation de l'alignement des arêtes des maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$  suivant les directions  $\vec{d}_i$  pour  $i = 1, \dots, 8$ .

La carte de taille  $h_1$  du maillage  $\mathcal{M}_{adapt align}$  est bornée entre 10.0 et 15.5 ce qui est en accord avec  $h_{min} = 10.0$  et  $h_{max} = 1\,000.0 > 15.5$ . Il en est de même pour  $h_2$  compris entre 16.7 et 40.8. De plus la gradation de taille semble très progressive, voir fig. 4.32.



**Figure 4.32** *M6 anisotrope avec alignement* — Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  de  $\mathcal{M}_{adapt align}$ .

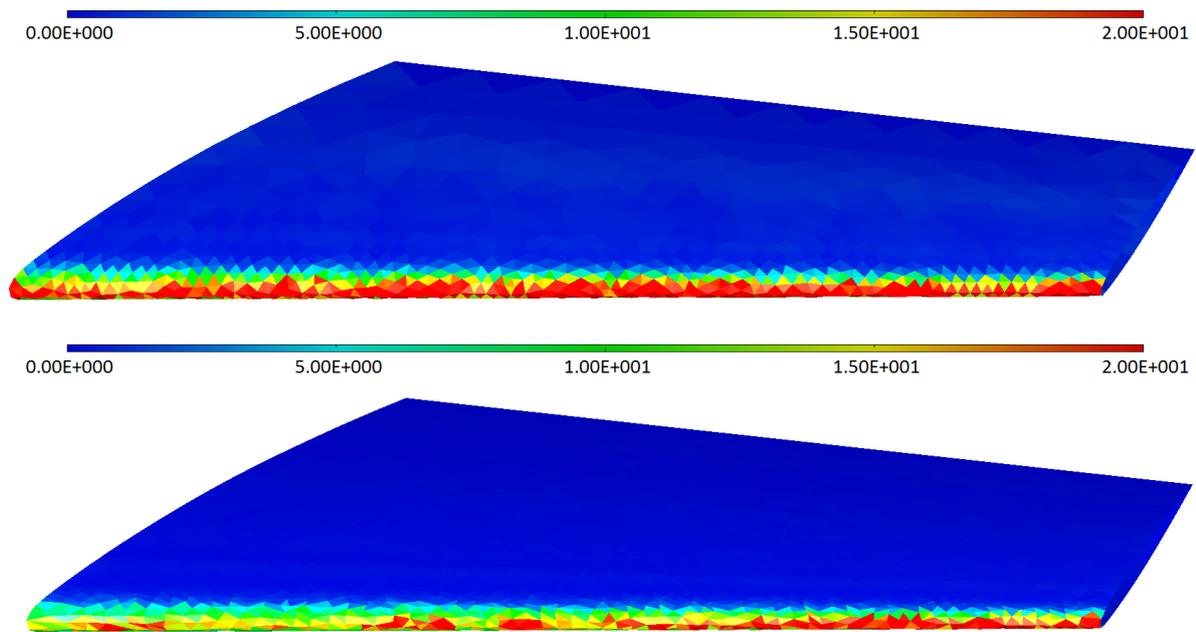


**Figure 4.33** *M6 anisotrope avec alignement* — Qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt align}$ .

La qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement  $\mathcal{M}_0$  est très mauvaise

surtout sur le bord d'attaque de la voilure alors que la qualité de  $\mathcal{M}_{adapt\ align}$  est meilleure  $> 0.5$ , voir fig. 4.33.

L'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_0$  est de  $20^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure alors que l'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_{adapt\ align}$  est un peu plus minimisé au niveau du bord d'attaque de la voilure, voir fig. 4.34. Ce résultat peut être amélioré en réduisant la taille minimale  $h_{min}$ .



**Figure 4.34** *M6 anisotrope avec alignement* — Angle dièdre de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ align}$ .

### Analyse des résultats anisotropes avec alignement mono-carreau

L'adaptation de maillage converge au bout de 8 itérations. Le nombre de nœuds optimal est atteint vers la troisième itération et les nombres de casser et d'enlever d'arêtes se compensent à la huitième itération. L'adaptation commence comme une impulsion pour la première itération avec un nombre de nœuds croissant à cause de l'étape de saturation par casser-basculer d'arête puis le nombre d'opérations de modification locale de maillage diminue ainsi que le nombre de nœuds jusqu'à se stabiliser. Une fois l'état fixe atteint, les nœuds sont bougés dans le but d'améliorer le critère de qualité d'alignement. De plus la précision de ce bouger est de 1.0% ce qui explique le nombre élevé de bouger de nœuds, voir tableau 4.4.

Itérations	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	...	$\mathcal{M}_{8=\text{adapt}}$	$\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$
Nombre de nœuds	1 200	5 732	5 339	5 218		5 197	5 197
Nombre d'éléments	2 322	11 163	10 377	10 135		10 093	10 093
Nombre de casser	0	5 942	201	57		0	0
Nombre d'enlever	0	1 410	594	178		0	0
Nombre de bouger	0	14 985	8 651	4 216		0	104 376

**Table 4.6** *M6 anisotrope avec alignement* — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.

La figure 4.35 présente deux graphiques décrivant l'adaptation de maillage ainsi que quatre histogrammes montrant les différences entre les maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$ .

Le premier graphique d'itération de la boucle principale retrace l'évolution du nombre de nœuds et d'opérations de modification locale lors de l'adaptation de maillage. Le nombre de nœuds optimal est quasiment atteint à la troisième itération. Le nombre de casser d'arêtes augmente puis diminue vers 0 en même temps que le nombre d'enlever d'arêtes. On peut donc en déduire que le maillage unité est atteint. Le bouger de nœuds avec alignement est alors déclenché avec une précision de 1.0% ce qui explique le nombre élevé de bouger pour la dernière itération.

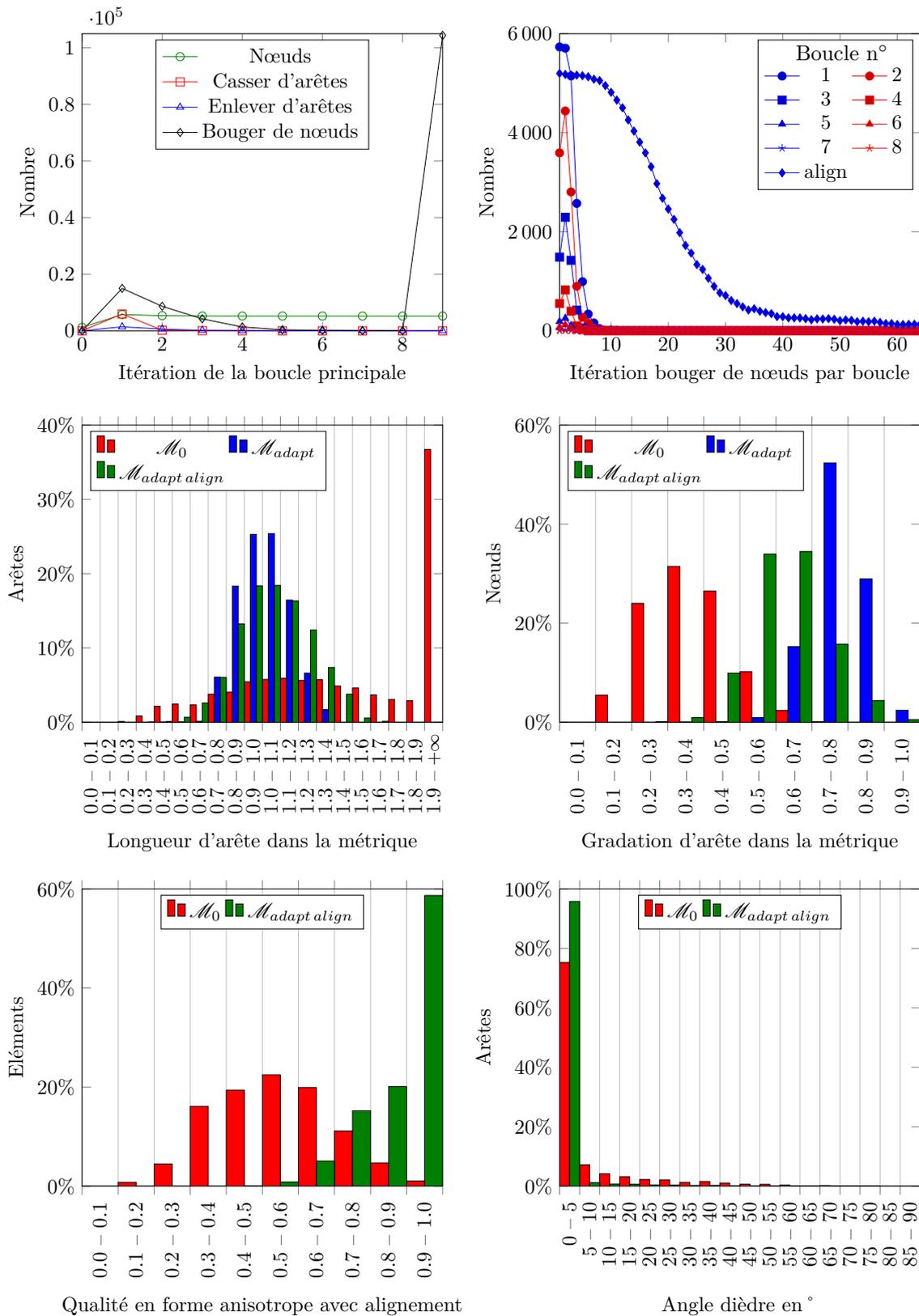
Le second graphique sur les itérations de bouger de nœuds par itération de la boucle principale présente l'évolution du nombre de bouger de nœuds. À chaque itération de la boucle principale, le nombre de bouger de nœuds converge toujours vers 0. On remarque que la convergence vers 0 est plus lente pour le bouger de nœuds avec alignement.

Le premier histogramme montre une distribution gaussienne de longueur d'arête dans la métrique entre 0.7 et 1.4 pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ . 100% des arêtes sont entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  en accord avec les objectifs fixés en paramètre d'entrée  $L_{\mathcal{M} \min}$  et  $L_{\mathcal{M} \max}$ . Cependant après le bouger de nœuds avec alignement la courbe se décale vers la droite pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$ . En effet la répartition de longueur dans la métrique que l'on cherche pour un alignement est de 66% d'arêtes de longueur dans la métrique  $L_{\mathcal{M}} = 1.0$  et 33% d'arêtes de longueur dans la métrique  $L_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}$ .

Le deuxième histogramme sur la gradation d'arête dans la métrique pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  montre que la gradation vaut  $G = 1/0.8 \approx 1.2$  ce qui est en accord avec l'objectif fixé en paramètre d'entrée  $G$ . Pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$ , la gradation se décale vers la gauche, elle est donc moins respectée après le bouger de nœuds avec alignement.

Le troisième histogramme évalue la qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement. La qualité est maximisée pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt align}}} > 0.6$  dont 90% des éléments avec  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt align}}} > 0.8$  et  $q_{\mathcal{M}_0} > 0.1$ .

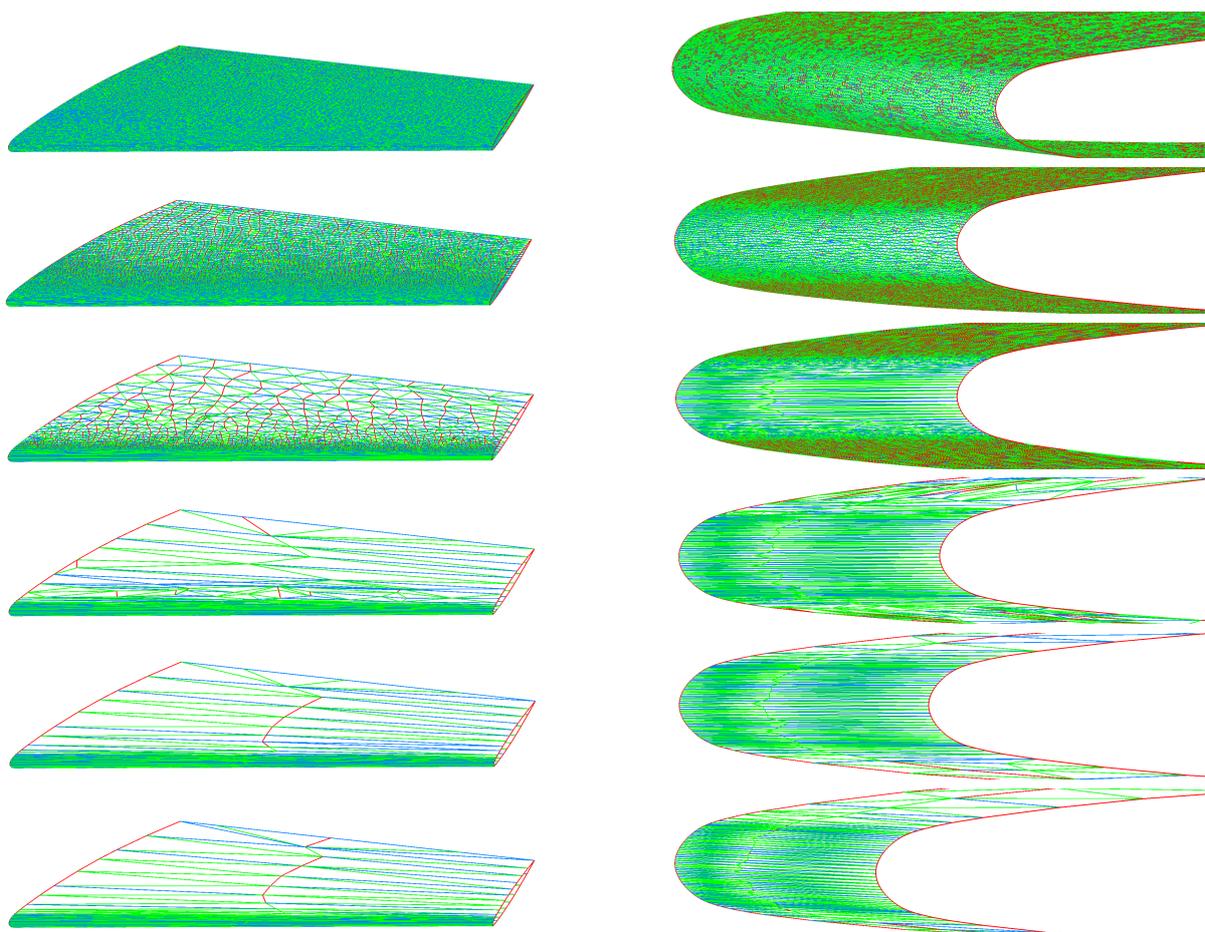
Le dernier histogramme représente l'angle dièdre pour toutes les coques d'arête avec deux éléments. L'angle dièdre est minimisé pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt align}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $\Phi_{\mathcal{M}_{\text{adapt align}}} < 30^\circ$  et  $\Phi_{\mathcal{M}_0} < 80^\circ$ .



**Figure 4.35** *M6 anisotrope avec alignement* — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments avec alignement et de l'angle dièdre.

### Variation de la gradation et alignement mono-carreau

Sur la figure 4.36, on remarque que plus la gradation est élevée et moins il y a d'arêtes alignées sur la grande courbure. Une grande gradation favorise donc les arêtes alignées sur la petite courbure et la diagonale. À l'inverse une gradation très proche de 1.0 favorise une structure proche du maillage CITRON.



**Figure 4.36** *M6 anisotrope avec alignement* — Maillages anisotropes avec alignement avec des gradations  $G = 1.01, 1.15, 1.2, 2.5, 5.0, 10.0$  de haut en bas.

### Bilan de l'adaptation anisotrope avec alignement mono-carreau

Le processus de remaillage anisotrope avec alignement mono-carreau a convergé sur un profil ONERA M6. Le critère d'alignement est validé. Cependant l'algorithme d'adaptation anisotrope avec alignement 3.12 cherche dans un premier temps la longueur unité puis il optimise le positionnement des nœuds pour un alignement. Or cet alignement détruit l'objectif de la longueur unité, car les longueurs résultantes sont soit 1 soit  $\sqrt{2}$ .

### 4.3.4 Adaptation isotrope GBJ multi-carreaux

Le GBJ est adapté à partir d'un maillage  $\mathcal{M}_0$  généré avec BLSURF et d'une géométrie  $\mathcal{G}_0$  de type NURBS multi-carreaux. L'objectif est d'adapter ce maillage  $\mathcal{M}_0$  avec des paramètres isotropes plus fins pour que le maillage s'approche plus de la géométrie grâce à l'algorithme 3.10.

L'aspect multi-carreaux est ici traité en séquentielle, mais on peut tout à fait le faire en parallèle. Loseille publie un article dans ce sens en 2017 [61]. Sa stratégie est basée sur un algorithme de fractionnement de domaine typique où le maillage initial est divisé en parties qui sont ensuite maillées en parallèle tandis que les frontières fictives entre les parties restent inchangées. Ensuite, il itère la procédure pour s'adapter aux précédentes parties non modifiées du domaine, c'est-à-dire le maillage d'interface. Les maillages surfaciques et volumiques sont adaptés simultanément. L'efficacité de la méthode est indépendante de la complexité de la géométrie. L'originalité de la méthode repose sur un équilibrage de charge statique basé sur des mesures, des techniques de partitionnement de maillage hiérarchique pour diviser les mailles d'interfaces et un noyau de modification de maillage basé sur une cavité séquentielle rapide, robuste et générique. Le stockage des maillages terminés est utilisé pour réduire l'empreinte mémoire afin de générer des maillages de grande taille. Il montre qu'il est capable de générer des maillages uniformes, isotropes et anisotropes qui génèrent plus de 1 milliard de tétraèdres en moins de 20 minutes sur 120 cœurs.

#### Paramètres de l'adaptation isotrope multi-carreaux

La courbure exacte et la norme géométrique sont choisies pour un écart angulaire de  $4^\circ$  avec une gradation de 1.2 et une taille d'arête entre 1 et 1 000. Les autres paramètres sont fixés sur la valeur par défaut, voir tableau 4.7.

Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Isotrope
Calcul des courbures	$\kappa$	Exactes
Norme	$L$	Géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M}min}$	$1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M}max}$	$\sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$4.0^\circ$
Gradation	$G$	1.2
Taille minimale	$h_{min}$	10.0
Taille maximale	$h_{max}$	300.0
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{seuil})$	0.140
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{bouger}$	10.0%
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	0.2
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{boucle}$	50

**Table 4.7** GBJ isotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation isotrope.

## Résultats de l'adaptation isotrope multi-carreaux

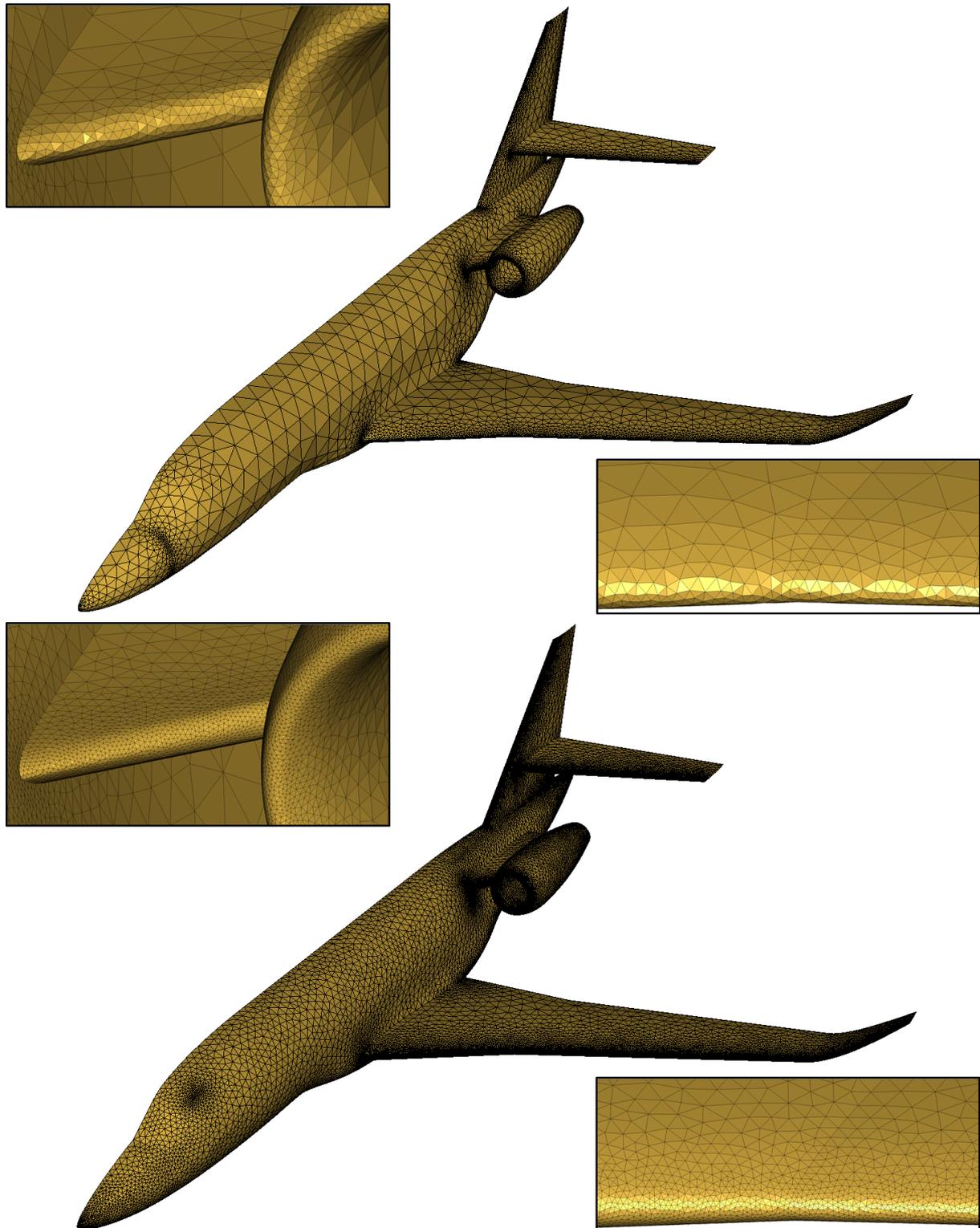
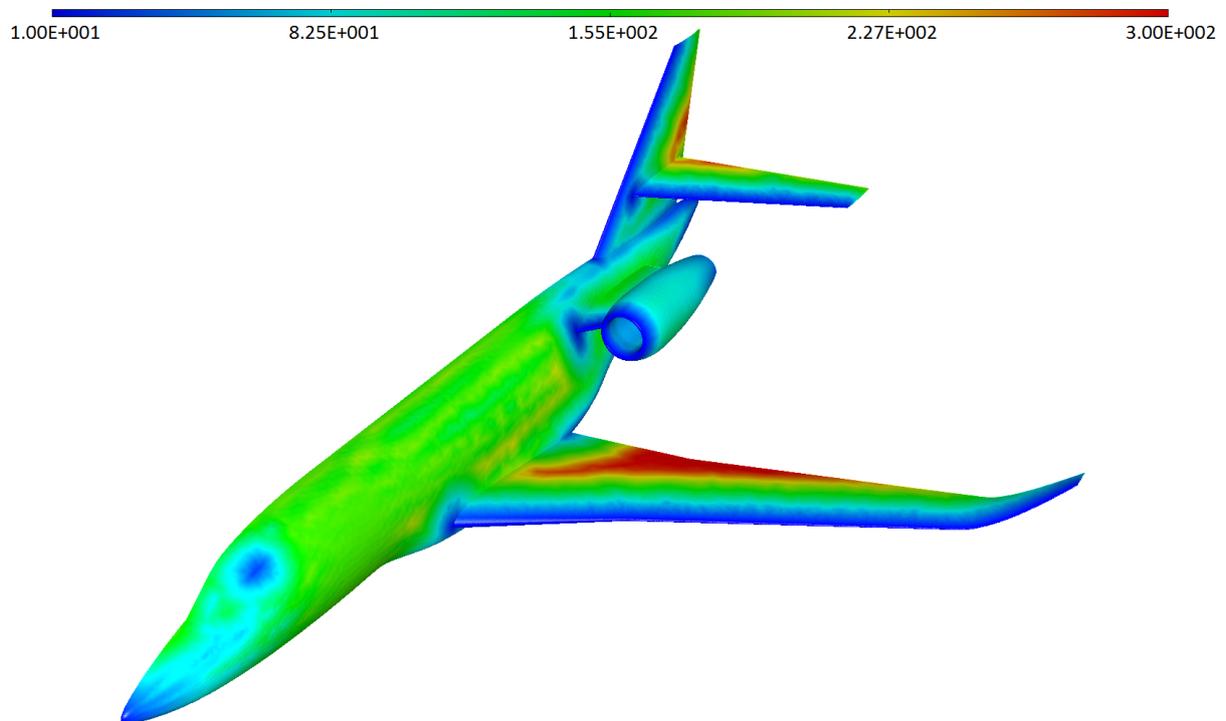


Figure 4.37 *GBJ isotrope* — Maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

Le maillage  $\mathcal{M}_0$  est adapté dans le cas isotrope pour donner le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  capte mieux les bords d'attaque de voilure avec une densité de nœuds

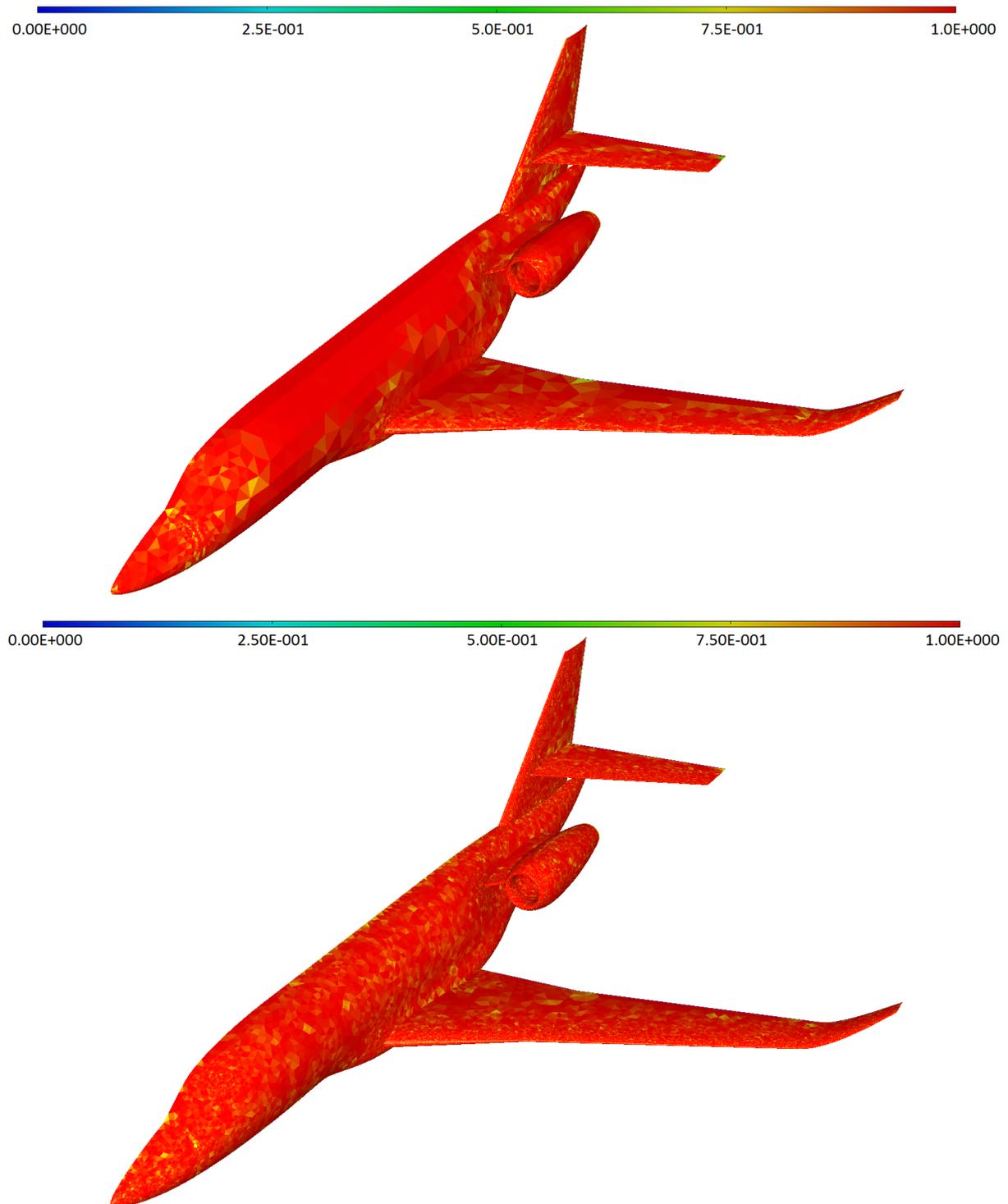
beaucoup plus élevée que le maillage  $\mathcal{M}_0$ , voir fig. 4.37.

La carte de taille du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bornée entre 10.0 et 300.0 ce qui est en accord avec  $h_{min} = 10.0$  et  $h_{max} = 300.0$ . De plus la gradation de taille semble progressive, voir fig. 4.38.



**Figure 4.38** *GBJ isotrope — Carte de taille  $h_1$  de  $\mathcal{M}_{adapt}$ .*

La qualité en forme isotrope des éléments des maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bonne puisqu'elle est à première vue supérieure à 0.75 sur tout le maillage, voir fig. 4.39.



**Figure 4.39** GBJ isotrope — Qualité en forme isotrope des éléments de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

L'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_0$  est de  $20^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure alors que l'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est réduit à moins de  $5^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure, voir fig. 4.40.

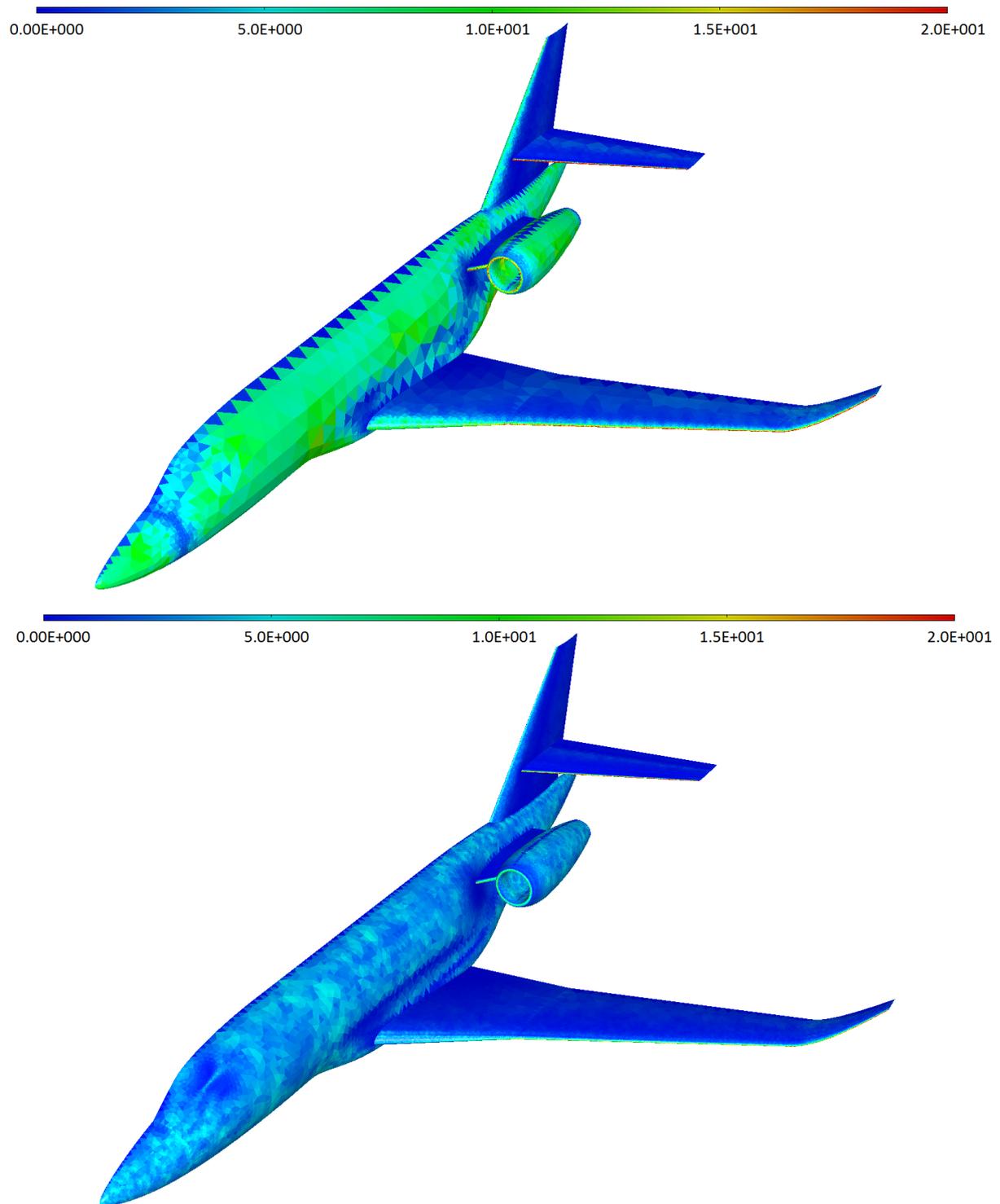


Figure 4.40 GBJ isotrope — Angle dièdre de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

### Analyse des résultats isotropes multi-carreaux

L'adaptation converge au bout de 12 itérations, c'est-à-dire que les longueurs d'arêtes dans la métrique  $L_M$  sont comprises entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ . Le nombre de nœuds augmente de

12 951 à 59 742. L'adaptation commence comme une impulsion pour les deux premières itérations avec un nombre de nœuds croissant puis le nombre d'opérations de modification locale de maillage diminue ainsi que le nombre de nœuds jusqu'à se stabiliser, voir tableau 4.8.

Itérations	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	...	$\mathcal{M}_{12=\text{adapt}}$
Nombre de nœuds	12 951	53 290	63 751	61 002		59 742
Nombre d'éléments	25 307	105 717	126 384	120 891		118 378
Nombre de casser	0	41 234	14 790	2 655		0
Nombre d'enlever	0	895	4 329	5 404		1
Nombre de bouger	0	174 646	467 099	100 851		20

**Table 4.8** *GBJ isotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.*

La figure 4.41 présente deux graphiques décrivant l'adaptation de maillage ainsi que quatre histogrammes montrant les différences entre les maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ .

Le premier graphique d'itération de la boucle principale retrace l'évolution du nombre de nœuds et d'opérations de modification locale lors de l'adaptation de maillage. Le nombre de nœuds optimal est quasiment atteint dès la troisième itération. Le nombre de casser d'arêtes augmente puis diminue au moment où le nombre d'enlever d'arêtes croît. Les nombres de casser d'arêtes, d'enlever d'arêtes et de bouger de nœuds tendent vers 0 quand le maillage unité est atteint.

Le second graphique sur les itérations de bouger de nœuds par itération de la boucle principale présente l'évolution du nombre de bouger de nœuds. À chaque itération de la boucle principale, le nombre de bouger de nœuds converge toujours vers 0.

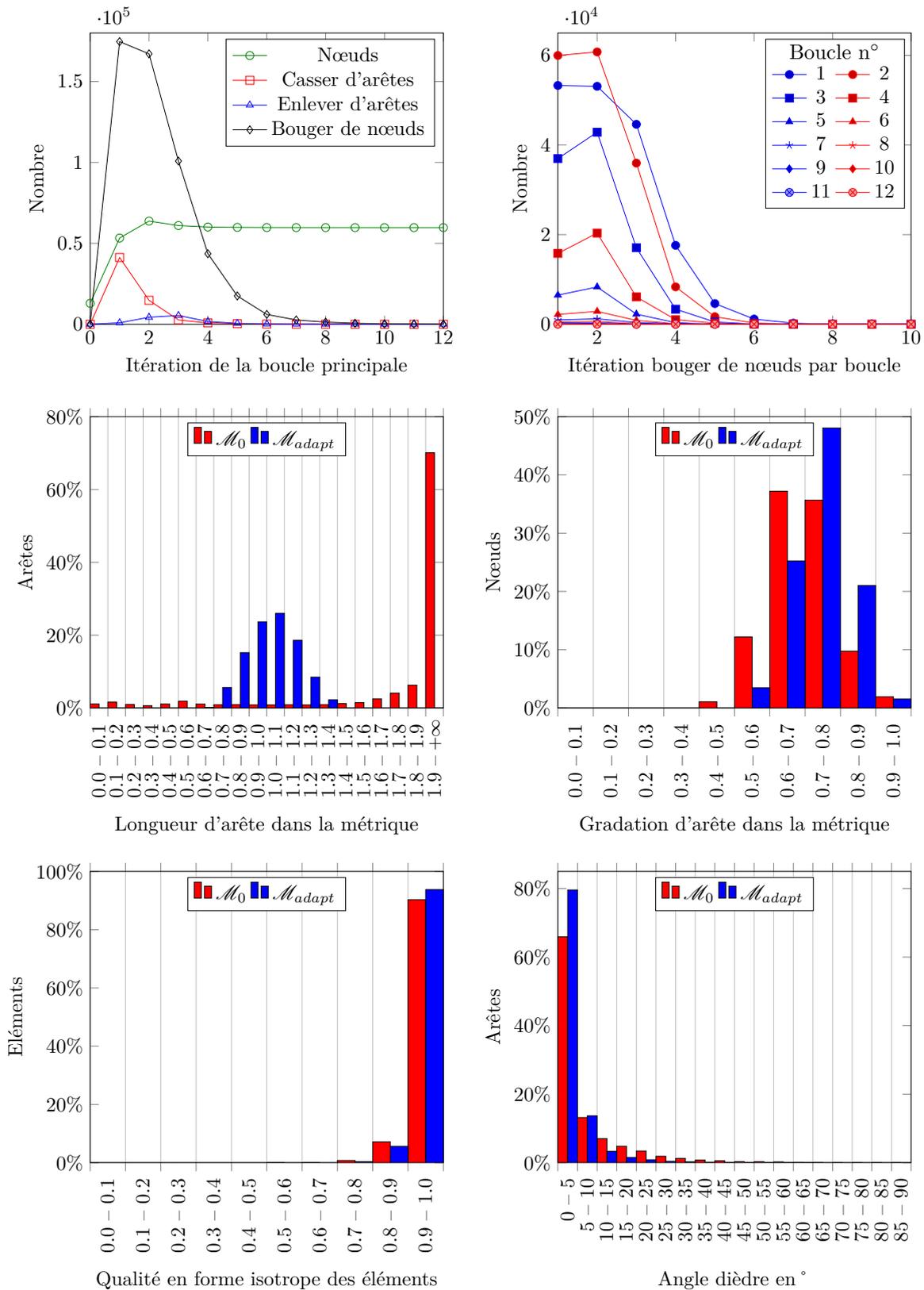
Le premier histogramme montre une distribution gaussienne de longueur d'arête dans la métrique entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  en accord avec les objectifs fixés en paramètre d'entrée  $L_{\mathcal{M} \min}$  et  $L_{\mathcal{M} \max}$ .

Le deuxième histogramme montre une gradation d'arête dans la métrique  $G = 1/0.8 \approx 1.2$  ce qui est en accord avec l'objectif fixé en paramètre d'entrée  $G$ .

Le troisième histogramme évalue la qualité en forme isotrope des éléments. La qualité est maximisée pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} > 0.8$  et  $q_{\mathcal{M}_0} > 0.5$ .

**Remarque 9.** *Les éléments appartenant aux bords de fuite ne sont pas pris en compte, car ils sont très anisotropes. Cette zone n'est pas adaptée par rapport à la courbure, car la surface est parfaitement plane. Il n'y a ni de casser d'arêtes, ni d'enlever d'arêtes, ni de bouger de nœuds dans ces zones. Des bascules d'arête basées sur la qualité isotrope sont effectuées dans ces zones.*

Le dernier histogramme représente l'angle dièdre pour toutes les coques d'arête avec deux éléments. L'angle dièdre est minimisé pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $\Phi_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} < 10^\circ$  et  $\Phi_{\mathcal{M}_0} < 80^\circ$ .

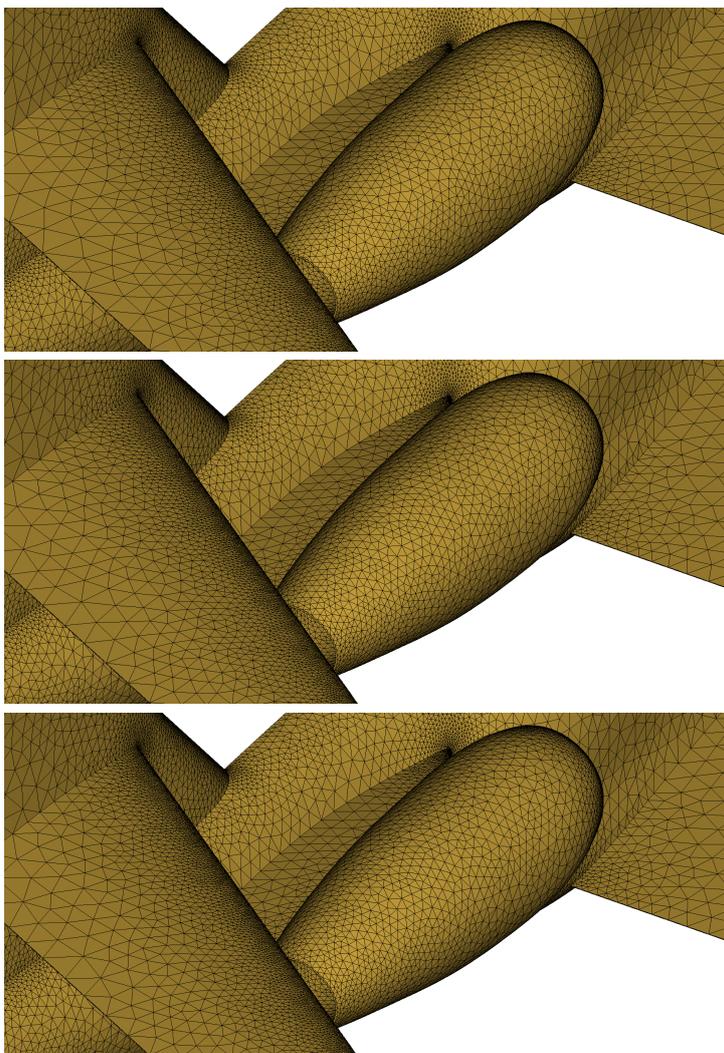


**Figure 4.41** GBJ isotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d’arête dans la métrique, de gradation d’arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l’angle dièdre.

### Choix de la norme d'interpolation multi-carreaux

Nous allons regarder l'influence dans le choix de la norme d'interpolation sur l'obtention du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  du GBJ. La norme isotrope est soit une formule de quadrature  $L_0$  soit une interpolation linéaire  $L_1$  soit une interpolation géométrique  $L_2$ .

La figure 4.42 présente les maillages du GBJ  $\mathcal{M}_{adapt}$  pour les normes  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . En résumé il n'y a pas de changements significatifs entre les maillages pour les différentes normes. Les temps de calcul sont équivalents. Le calcul de la norme avec la formule de quadrature est rapide, mais elle impose plus d'opérations de modification locale pour atteindre le maillage unité. À l'inverse, les formules d'interpolation linéaire et géométrique sont plus coûteuses en temps de calcul mais elles diminuent le nombre de modifications locales. Par conséquent l'algorithme converge plus rapidement vers le maillage unité.



**Figure 4.42** GBJ isotrope —  $\mathcal{M}_{adapt}$  pour les normes  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .

## Bilan de l'adaptation isotrope multi-carreaux

Le processus de remaillage isotrope multi-carreaux a convergé sur le Generic Business Jet. Les objectifs sur la longueur unité, la gradation et les bornes sur la carte de taille sont atteints. Les résultats sont une maximisation de la qualité en forme des éléments et une minimisation de l'angle dièdre. Ce processus valide l'algorithme d'adaptation isotrope d'un maillage surfacique multi-carreaux 3.10. De plus les différentes normes ont été étudiées et ne présentent pas de changements significatifs dans les résultats. On préférera la norme d'interpolation géométrique puisqu'elle permet à l'algorithme de converger plus rapidement pour le cas isotrope.

### 4.3.5 Adaptation anisotrope GBJ multi-carreaux

L'objectif est d'adapter le maillage précédent  $\mathcal{M}_0$  avec des paramètres anisotropes équivalents à ceux isotropes pour que le maillage s'approche plus de la géométrie avec une minimisation du nombre de nœuds grâce à l'algorithme 3.11.

#### Paramètres de l'adaptation anisotrope multi-carreaux

Il faut être à iso-paramètres pour comparer avec le cas isotrope précédent. La précision du milieu anisotrope et le nombre maximal d'itérations pour déterminer le milieu anisotrope sont deux paramètres supplémentaires. Ils sont fixés sur les valeurs par défaut.

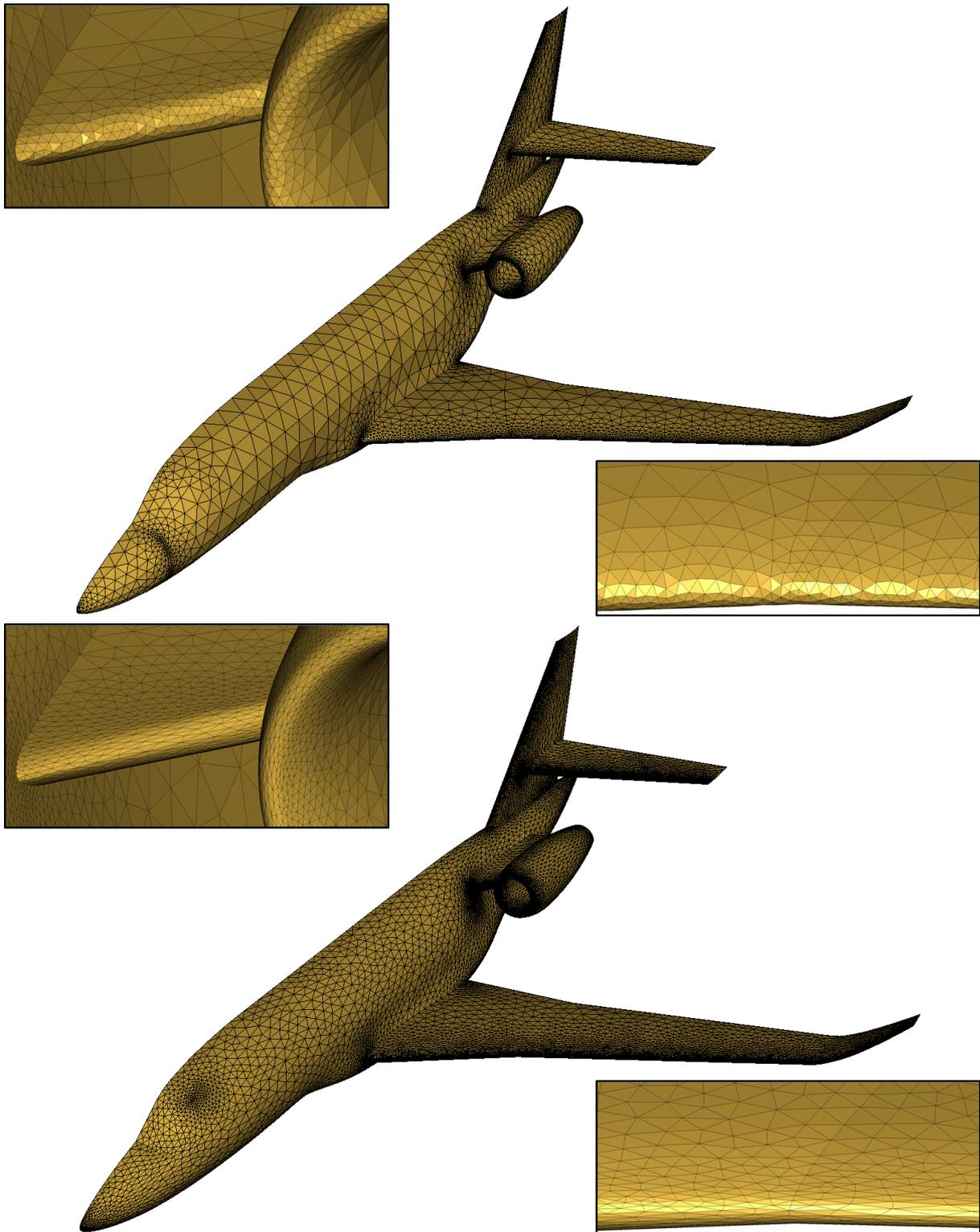
Description	Symbole	Valeur
Adaptation	$A$	Anisotrope
Calcul des courbures	$\kappa$	Exactes
Norme	$L$	Géométrique
Longueur minimale métrique	$L_{\mathcal{M}min}$	$1/\sqrt{2}$
Longueur maximale métrique	$L_{\mathcal{M}max}$	$\sqrt{2}$
Écart angulaire par rapport au plan tangent	$\theta$	$4.0^\circ$
Gradation	$G$	1.2
Taille minimale	$h_{min}$	10.0
Taille maximale	$h_{max}$	300.0
Cosinus angle dièdre seuil	$\cos(\Phi_{seuil})$	0.140
Précision du bouger de nœuds	$Precision_{bouger}$	10.0%
Pas de relaxation du bouger de nœuds	$Pas$	0.2
Précision du milieu anisotrope	$Precision_{milieu}$	10.0%
Nombre maximal d'itération milieu anisotrope	$Iteration_{milieu}$	5
Nombre maximal d'itération boucle	$Iteration_{boucle}$	50

**Table 4.9** GBJ anisotrope — Paramètres d'entrée pour une adaptation anisotrope.

#### Résultats de l'adaptation anisotrope multi-carreaux

Le maillage  $\mathcal{M}_0$  est adapté dans le cas anisotrope pour donner le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$ . Le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  capte mieux les bords d'attaque de voilure avec une densité de nœuds

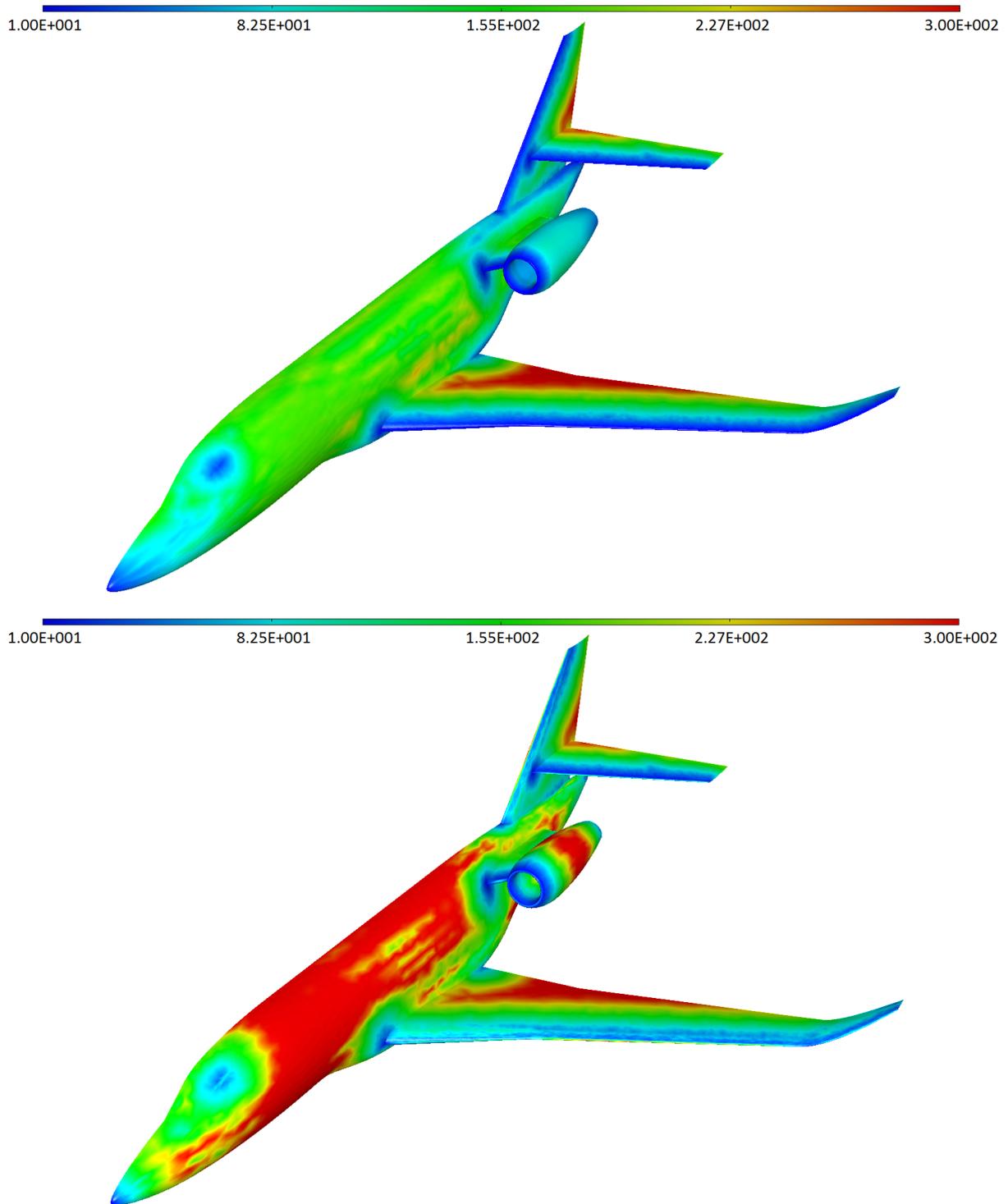
beaucoup moins élevée que le maillage  $\mathcal{M}_0$ , voir fig. 4.43.



**Figure 4.43** GBJ anisotrope — Maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

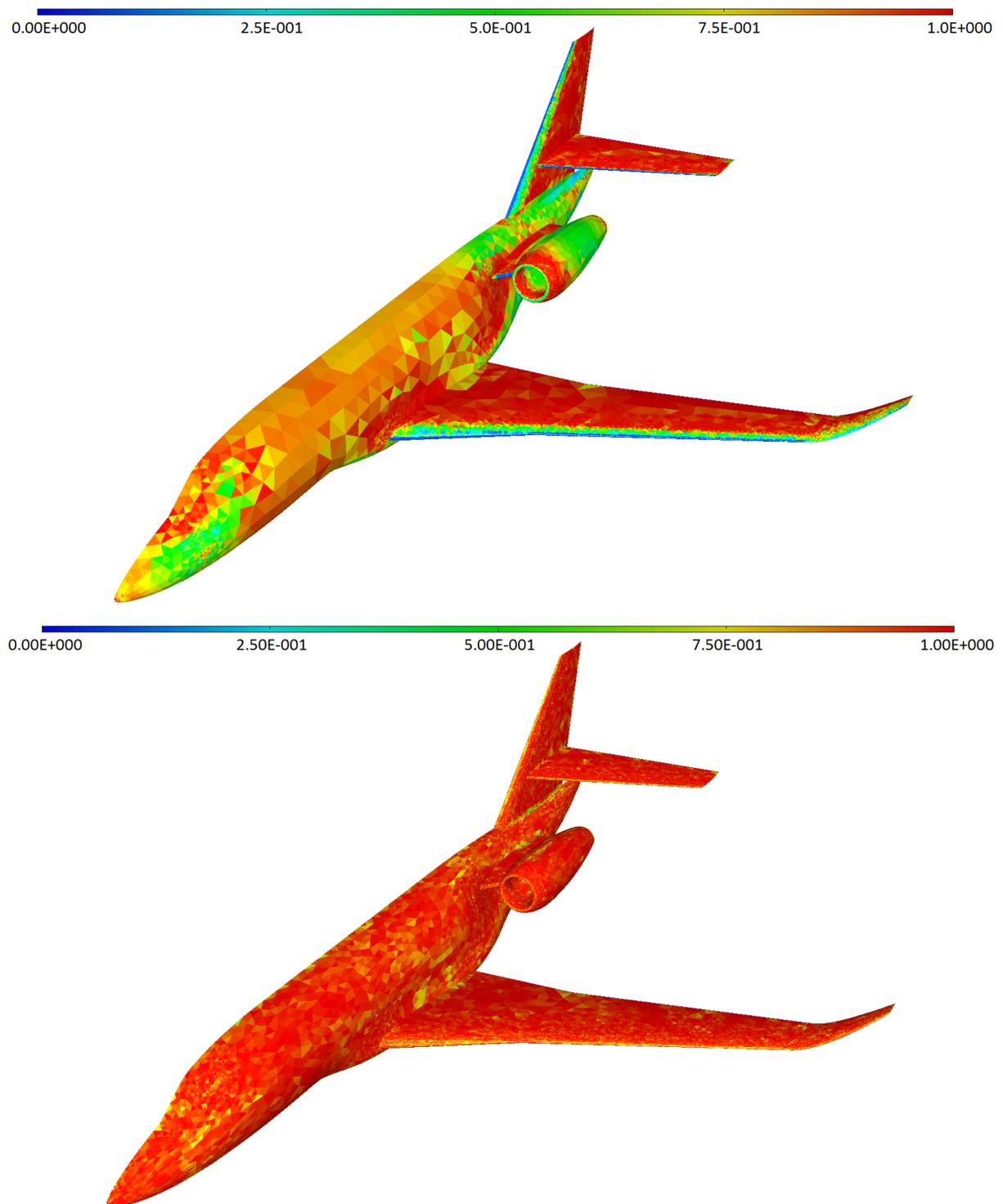
La carte de taille  $h_1$  du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bornée entre 10.0 et 300.0 ce qui est en accord avec  $h_{min} = 10.0$  et  $h_{max} = 300.0$ . Il en est de même pour  $h_2$  compris entre 10.0

et 300.0. De plus la gradation de taille semble progressive, voir fig. 4.44.



**Figure 4.44** *GBJ anisotrope* — Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  de  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

La qualité en forme anisotrope des éléments du maillage  $\mathcal{M}_0$  est très mauvaise surtout sur les bords d'attaque de voilure alors que la qualité de  $\mathcal{M}_{adapt}$  est bonne puisqu'elle est à première vue supérieure à 0.75 sur tout le maillage, voir fig. 4.45.



**Figure 4.45** *GBJ anisotrope* — Qualité en forme anisotrope des éléments de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

L'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_0$  est de  $20^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure alors que l'angle dièdre du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  est réduit à moins de  $5^\circ$  au niveau du bord d'attaque de la voilure, voir fig. 4.46.

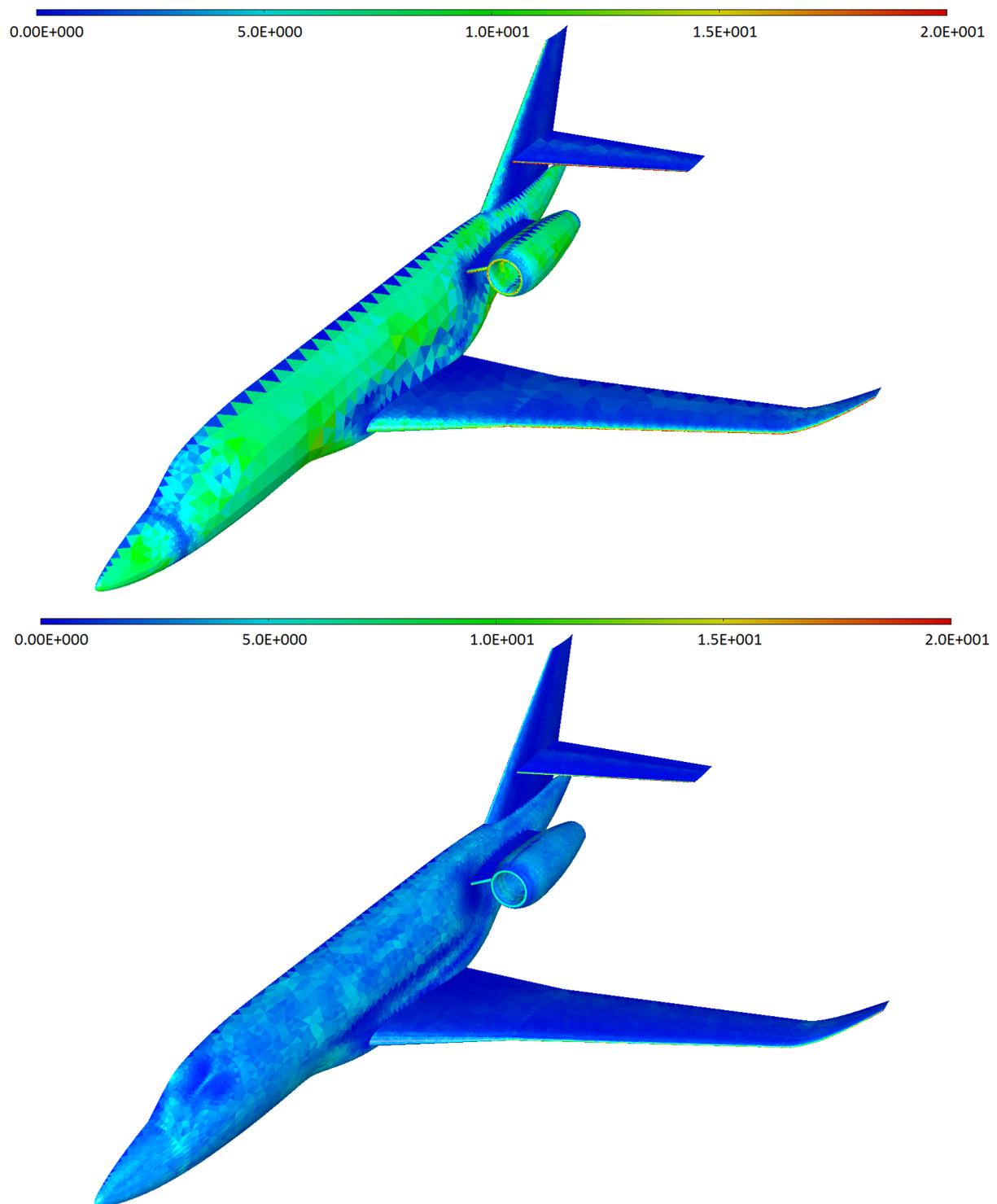


Figure 4.46 *GBJ anisotrope* — Angle dièdre de  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

#### Analyse des résultats anisotropes multi-carreaux

L'adaptation converge au bout de 10 itérations. Le nombre de nœuds optimal est atteint vers la troisième itération et les nombres de casser et d'enlever d'arêtes se compensent

à la dixième itération. Cependant il reste quelques arêtes trop grandes ou trop courtes dans la métrique en dehors de l'intervalle  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ , ce qui entraîne une boucle infinie. L'approximation de la longueur d'arête dans la métrique par la formule de quadrature  $L_0$ , la précision du bouger de nœud et le milieu dans la métrique anisotrope itératif ne permettent pas de borner toutes les arêtes convenablement. Notre critère d'arrêt est la compensation du nombre de casser et d'enlever d'arêtes quand le nombre de nœuds se stabilise. Le nombre de nœuds augmente de 12 951 à 27 326 ce qui est faible comparer au cas isotrope précédent de 59 742 nœuds à iso-paramètres. La réduction du nombre de nœuds est d'un facteur 2. L'adaptation commence comme une impulsion pour la première itération avec un nombre de nœuds croissant à cause de l'étape de saturation par casser-basculer d'arête puis le nombre d'opérations de modification locale de maillage diminue ainsi que le nombre de nœuds jusqu'à se stabiliser, voir tableau 4.10.

Itérations	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	...	$\mathcal{M}_{50=\text{adapt}}$
Nombre de nœuds	12 951	31 627	29 095	28 115		27 326
Nombre d'éléments	25 307	62 874	57 808	55 848		54 267
Nombre de casser	0	30 455	2 058	1 107		341
Nombre d'enlever	0	11 779	4 590	2 087		375
Nombre de bouger	0	115 447	87 517	57 993		15 254

**Table 4.10** *GBJ anisotrope — Évolution du maillage en fonction du nombre d'itérations.*

La figure 4.47 présente deux graphiques décrivant l'adaptation de maillage ainsi que quatre histogrammes montrant les différences entre les maillages  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ .

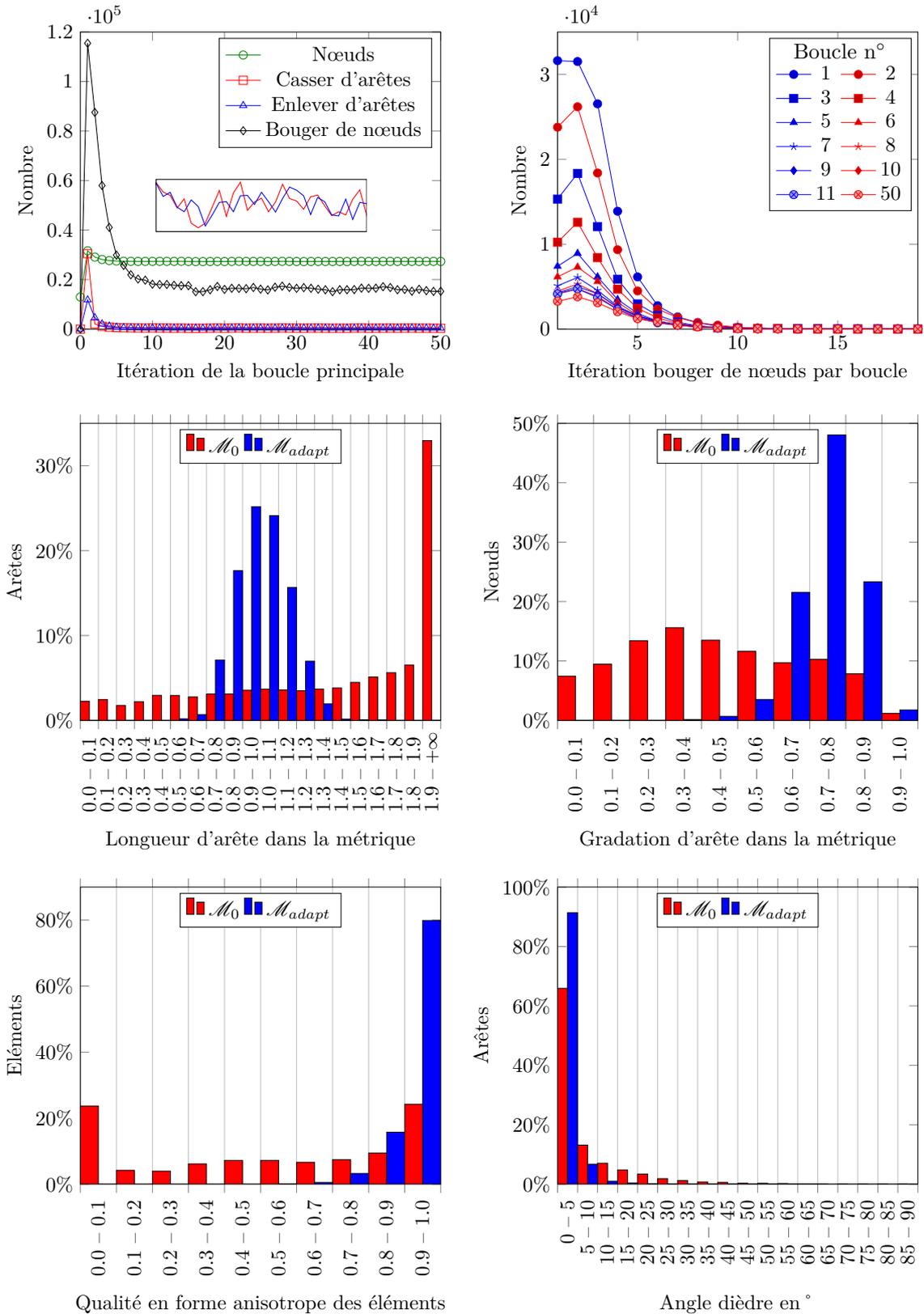
Le premier graphique d'itération de la boucle principale retrace l'évolution du nombre de nœuds et d'opérations de modification locale lors de l'adaptation. Le nombre de nœuds optimal est quasiment atteint à la troisième itération. Le nombre de casser d'arêtes augmente puis diminue en même temps que le nombre d'enlever d'arêtes. Les nombres de casser d'arêtes et d'enlever d'arêtes oscillent entre 325 et 375 soit une moyenne de 350 opérations par itération. Il y a donc autant d'arêtes à enlever que d'arêtes à casser. On peut donc en déduire que le maillage unité est atteint. Cela signifie que l'on peut sortir de la boucle infinie.

Le second graphique sur les itérations de bouger de nœuds par itération de la boucle principale présente l'évolution du nombre de bouger de nœuds. À chaque itération de la boucle principale, le nombre de bouger de nœuds converge toujours vers 0.

Le premier histogramme montre une distribution gaussienne de longueur d'arête dans la métrique entre 0.4 et 1.7 pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$ . Cependant 95% des arêtes sont entre  $1/\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$  en accord avec les objectifs fixés en paramètre d'entrée  $L_{\mathcal{M} \min}$  et  $L_{\mathcal{M} \max}$ .

Le deuxième histogramme sur la gradation d'arête dans la métrique montre que la gradation vaut  $G = 1/0.8 \approx 1.2$  ce qui est en accord avec l'objectif fixé en paramètre d'entrée  $G$ .

Le troisième histogramme évalue la qualité en forme anisotrope des éléments. La qualité est maximisée pour le maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt}}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} > 0.6$  dont 90% des éléments avec  $q_{\mathcal{M}_{\text{adapt}}} > 0.8$  et  $q_{\mathcal{M}_0} > 0.0$ .



**Figure 4.47** GBJ anisotrope — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d’arête dans la métrique, de gradation d’arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l’angle dièdre.

Le dernier histogramme représente l'angle dièdre pour toutes les coques d'arête avec deux éléments. L'angle dièdre est minimisé pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  par rapport au maillage  $\mathcal{M}_0$  puisque  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt}} < 10^\circ$  et  $\Phi_{\mathcal{M}_0} < 80^\circ$ . À titre de comparaison, l'angle dièdre du maillage de l'adaptation anisotrope est plus minimisé que l'angle dièdre du maillage de l'adaptation isotrope. 93% d'arêtes avec  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt}} < 5^\circ$  pour le cas anisotrope contre 80% d'arêtes avec  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt}} < 5^\circ$  pour le cas isotrope.

### Forte anisotropie multi-carreaux

L'anisotropie est recherchée de façon plus intensive sur le GBJ. D'une part l'idée est de montrer que l'on peut adapter un maillage en utilisant plusieurs fois le même algorithme d'adaptation avec des paramètres de plus en plus fins. D'autre part cela permet de vérifier que la structure de données utilisée supporte les grands maillages de plusieurs millions de nœuds.

En 1997, Beall et Shepard représentent un maillage basé sur la hiérarchie topologique des sommets, arêtes, faces et régions [4]. Cette hiérarchie topologique prévoit le maintien de la relation du maillage avec le modèle géométrique à partir duquel il a été créé, ce qui est essentiel pour les procédures de génération et d'enrichissement du maillage telles que celles envisagées sur le maillage du GBJ.

Trois adaptations de maillages  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ ,  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$  sont effectuées pour des tailles  $h_{min} = 1.0$  et  $h_{max} = 300.0$  pour différentes valeurs d'écart angulaire et de gradation. Le tableau 4.11 représente les caractéristiques des maillages adaptés et les paramètres d'entrées utilisés. Les maillages  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  sont obtenus par adaptation du précédent maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$  avec succès. Il en est de même pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$  obtenu à partir du maillage  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ .

On remarque qu'il est plus aisé d'adapter un maillage anisotrope pour le rendre encore plus anisotrope. En effet les temps de convergence sont plus rapides que si l'on démarrait du maillage initial  $\mathcal{M}_0$ . On voit qu'un nombre de nœuds de 4.5 millions est atteint avec l'adaptation. Par conséquent la structure d'arête a supporté avec succès 27 millions d'arêtes pour le maillage le plus fin avec un écart angulaire  $\theta = 0.1^\circ$ . La gradation  $G$  est testée pour des valeurs de 1.2 et 1.6. On remarque que l'augmentation de la gradation diminue le nombre de nœuds. Tous les autres paramètres sont identiques au cas  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

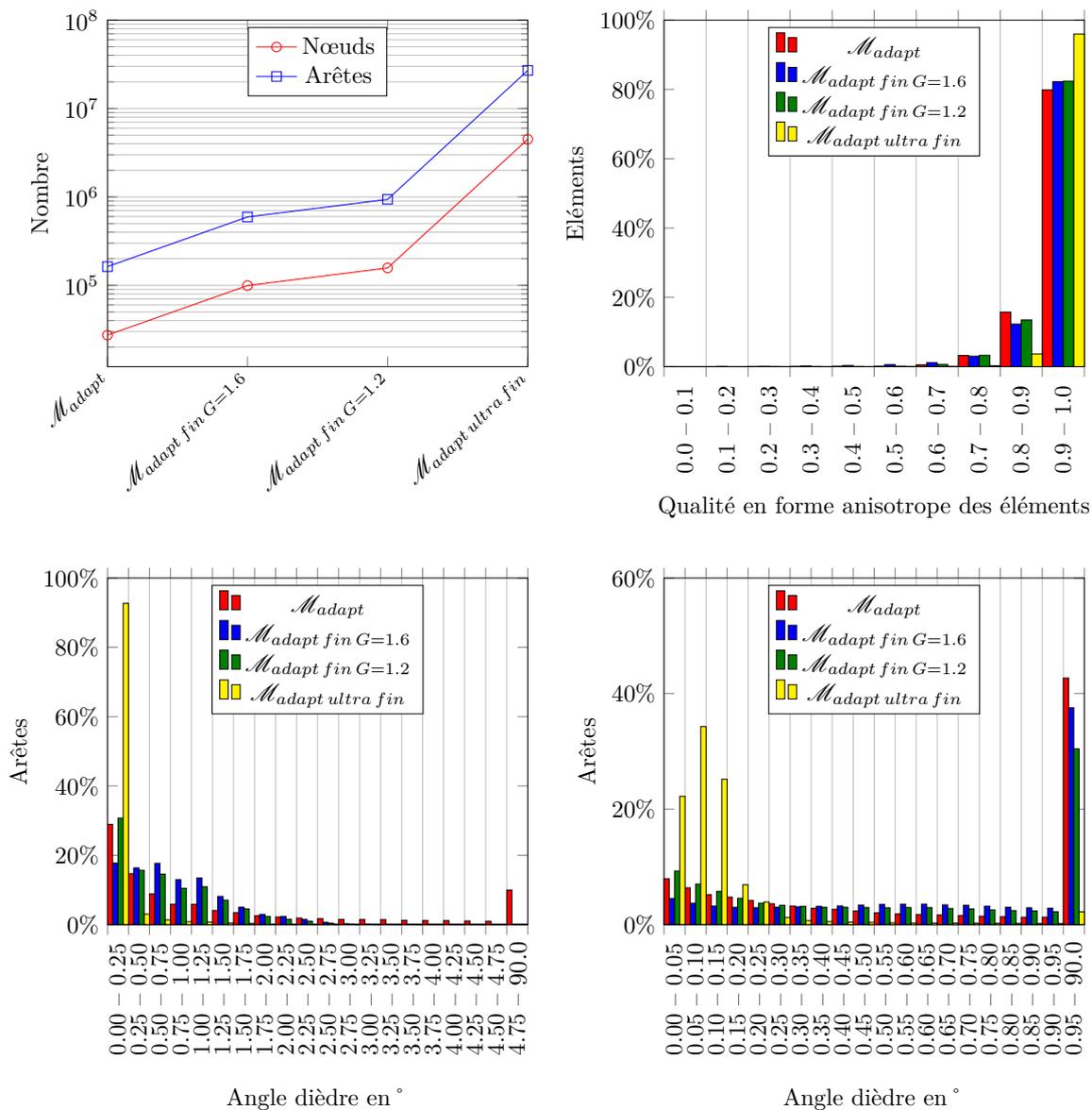
Maillage adapté	Nombre de nœuds	Nombre d'arêtes	Maillage initial	$\theta$	G
$\mathcal{M}_{adapt}$	27 326	162 801	$\mathcal{M}_0$	$4.0^\circ$	1.2
$\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$	99 392	593 790	$\mathcal{M}_{adapt}$	$1.0^\circ$	1.6
$\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$	157 199	938 376	$\mathcal{M}_{adapt}$	$1.0^\circ$	1.2
$\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$	4 491 488	26 937 270	$\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$	$0.1^\circ$	1.2

**Table 4.11** GBJ anisotrope fin — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ  $\mathcal{M}_{adapt}$ ,  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$ ,  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ . Caractéristiques des maillages et paramètres d'entrées.

La figure 4.48 présente l'évolution du nombre de nœuds et d'arêtes ainsi que les histo-

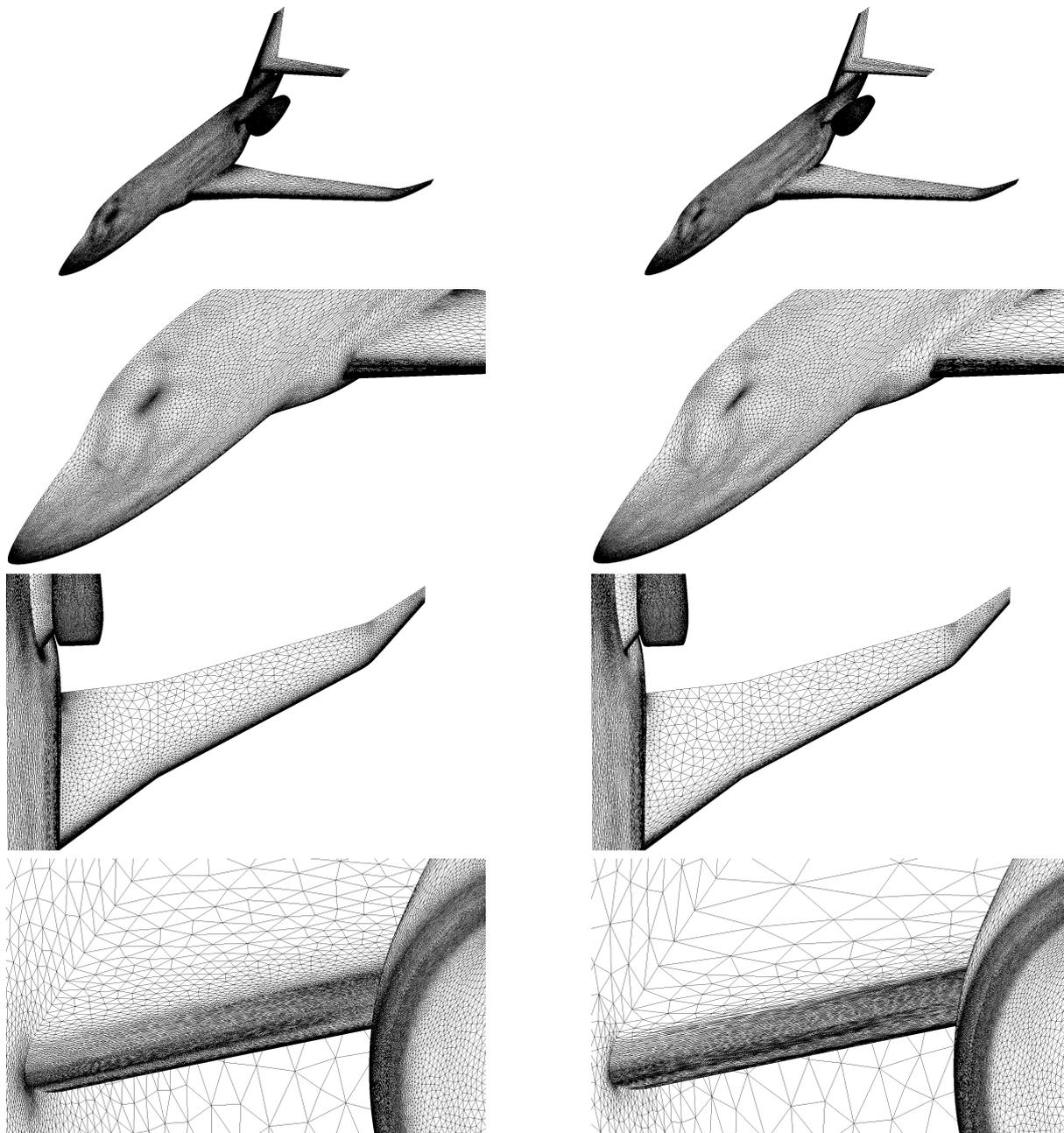
grammes de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre. Une augmentation de la gradation induit une perte en qualité.

Plus l'écart angulaire diminue et plus la qualité en forme anisotrope des éléments est meilleure. Pour le maillage  $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ , la qualité atteint les 96% pour l'intervalle  $[0.9 - 1.0]$ . Deux histogrammes permettent de mesurer et de comparer l'angle dièdre sur les maillages adaptés. On remarque que les maillages avec un écart angulaire de  $\theta = 1.0^\circ$  se situent à un angle dièdre  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt\ fin}} < 4^\circ$ . Le maillage avec un écart angulaire de  $\theta = 0.1^\circ$  se situe à un angle dièdre  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}} < 2^\circ$  ce qui est excellent pour un maillage géométrique multi-carreaux. De plus la répartition de l'angle dièdre est autour de  $\Phi_{\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}} = 0.1^\circ$ . Une augmentation de la gradation induit une perte sur l'angle dièdre.



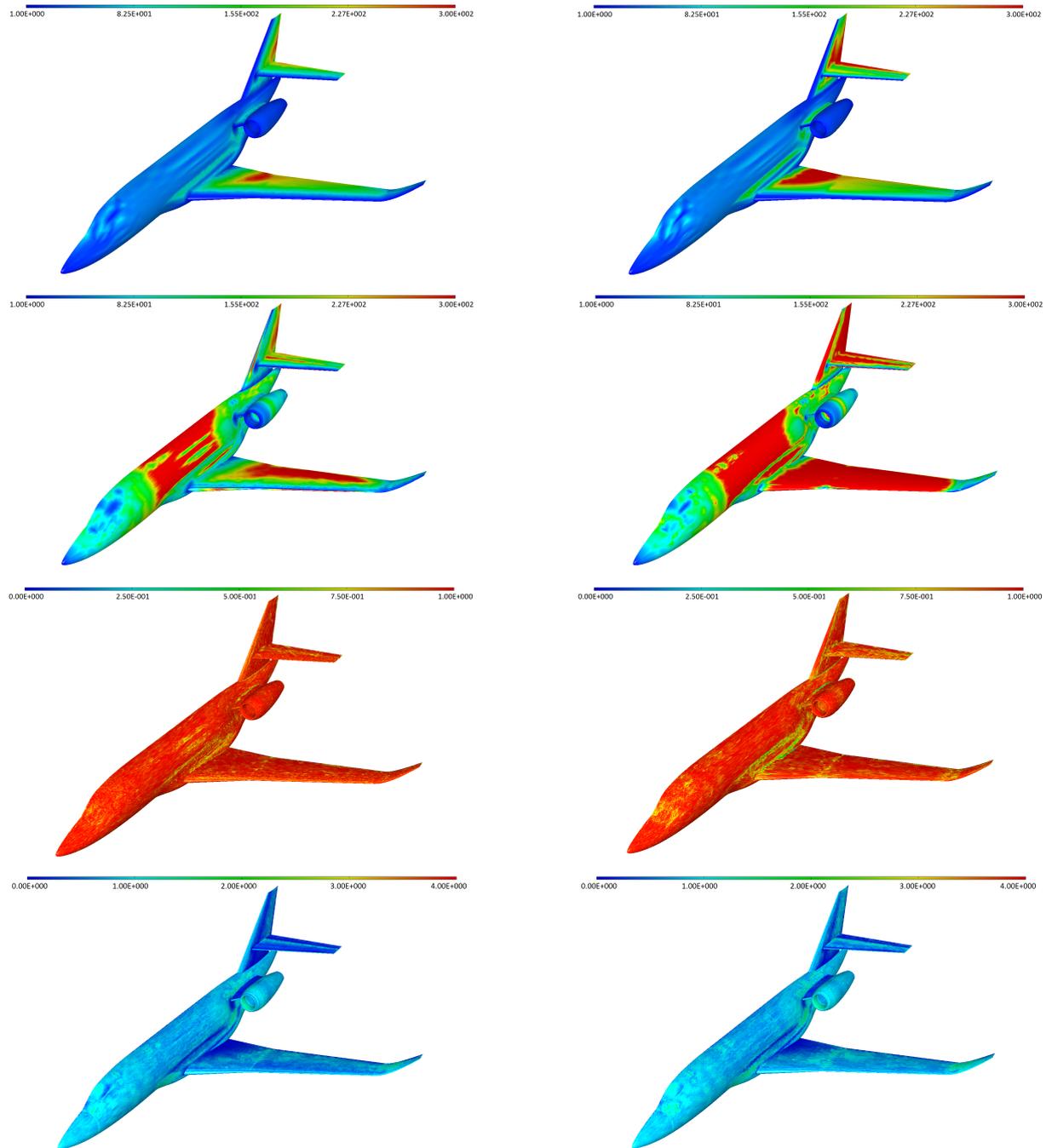
**Figure 4.48** GBJ anisotrope fin — Nombre d'entités dans le maillage. Histogrammes de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre pour les maillages  $\mathcal{M}_{adapt}$ ,  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ ,  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ ultra\ fin}$ .

La figure 4.49 montre les maillages anisotropes fins du GBJ  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ . On s'aperçoit de l'effet de la gradation, plus la gradation est élevée et moins il y a de nœuds.



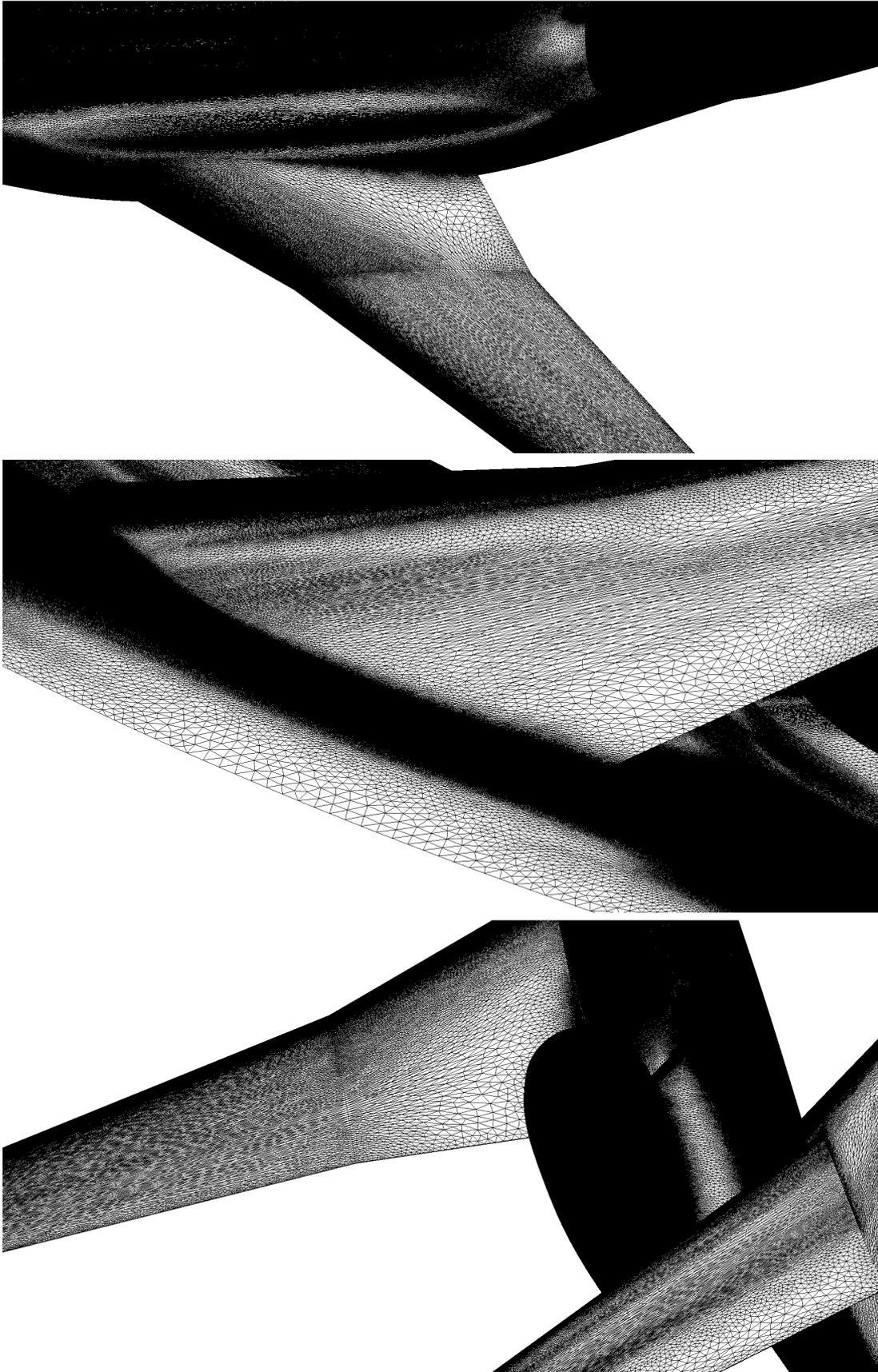
**Figure 4.49** GBJ anisotrope — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ ,  $\theta = 1.0^\circ$ ,  $G = 1.2$  à gauche et  $G = 1.6$  à droite,  $h_{min} = 1.0$ ,  $h_{max} = 300.0$  à partir du maillage  $\mathcal{M}_{adapt}$ .

La figure 4.50 montre les résultats des maillages anisotropes fins du GBJ  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{adapt\ fin\ G=1.6}$ . On s'aperçoit de l'effet de la gradation sur les cartes de tailles. Une augmentation de la gradation diminue la qualité en forme des éléments dans les zones de forte variation de courbures. Une augmentation de la gradation augmente l'angle dièdre dans les zones de forte variation de courbures.

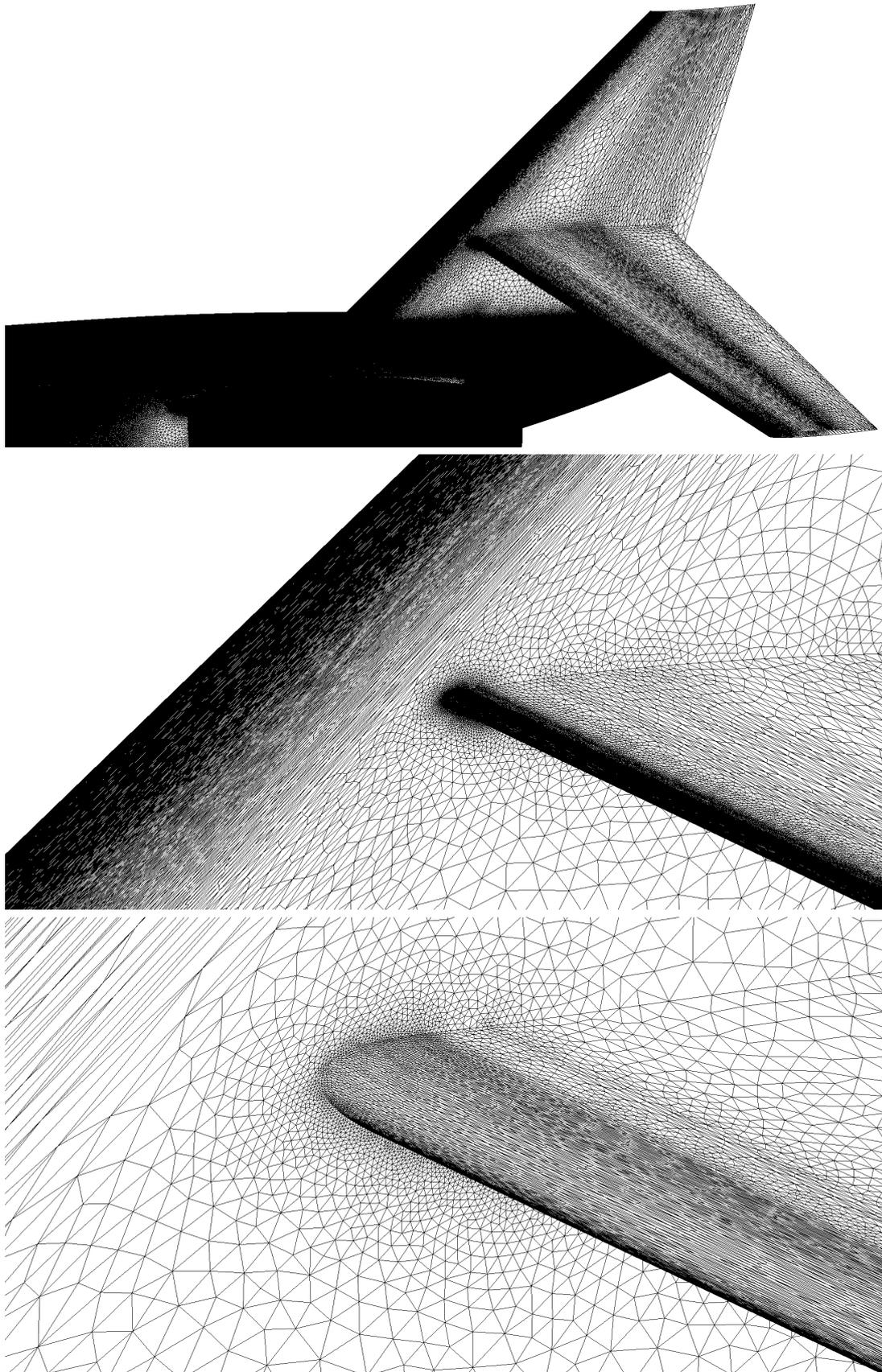


**Figure 4.50** *GBJ anisotrope fin* — Maillages géométriques anisotropes fins du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.2}$  et  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.6}$ . Carte de taille  $h_1, h_2$ . Qualité en forme anisotrope des éléments et angle dièdre.

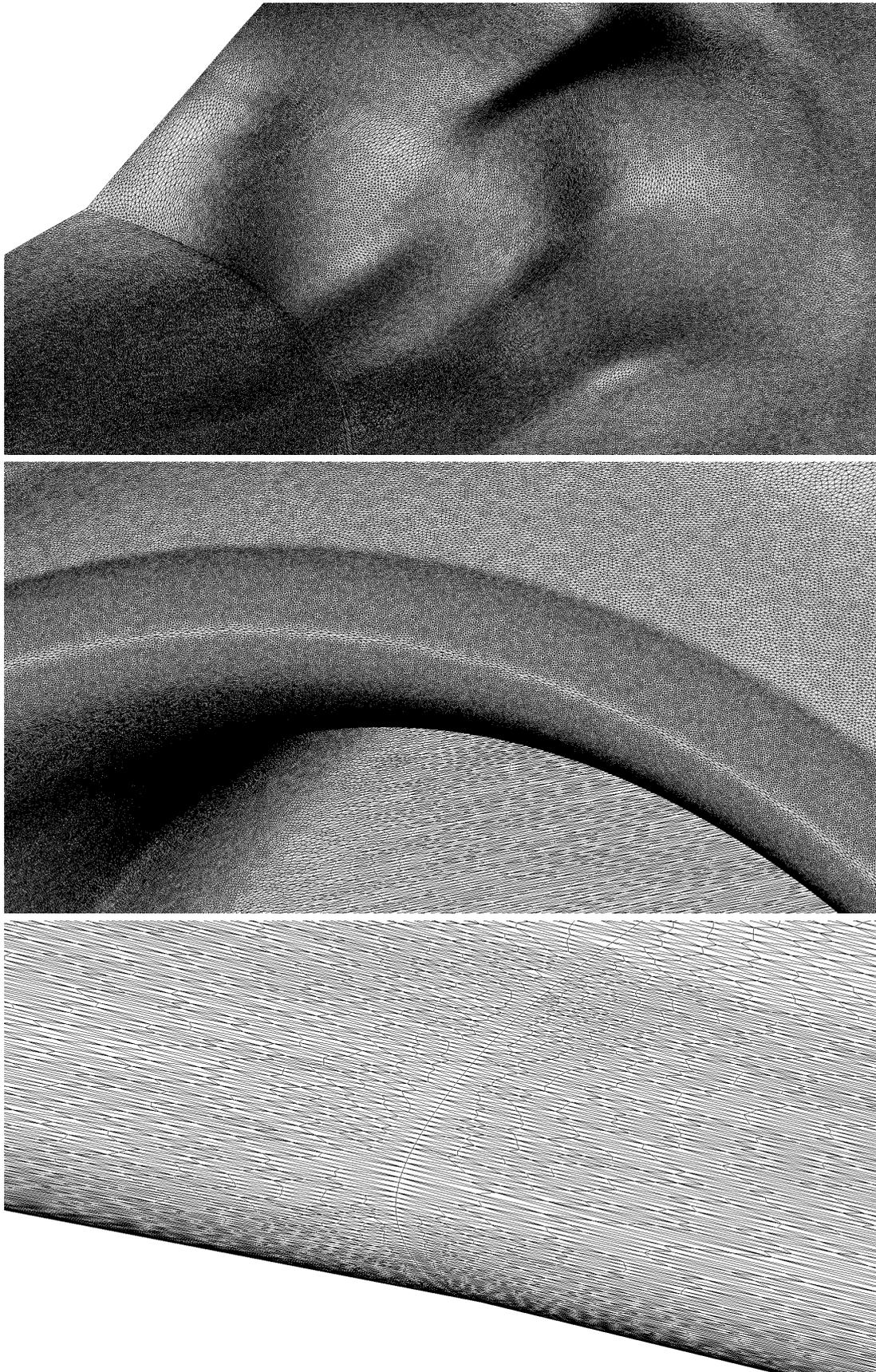
Les figures 4.51, 4.52, 4.53 et 4.54 montrent le maillage anisotrope ultra fin du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt ultra fin } G=1.2}$ . La densité de nœuds est extrême dans les zones à forte variation de courbures. Au contraire dans les zones à faible variation, la densité de nœuds diminue. La gradation des mailles entre le plan horizontal et la dérive est progressive en tailles et en directions.



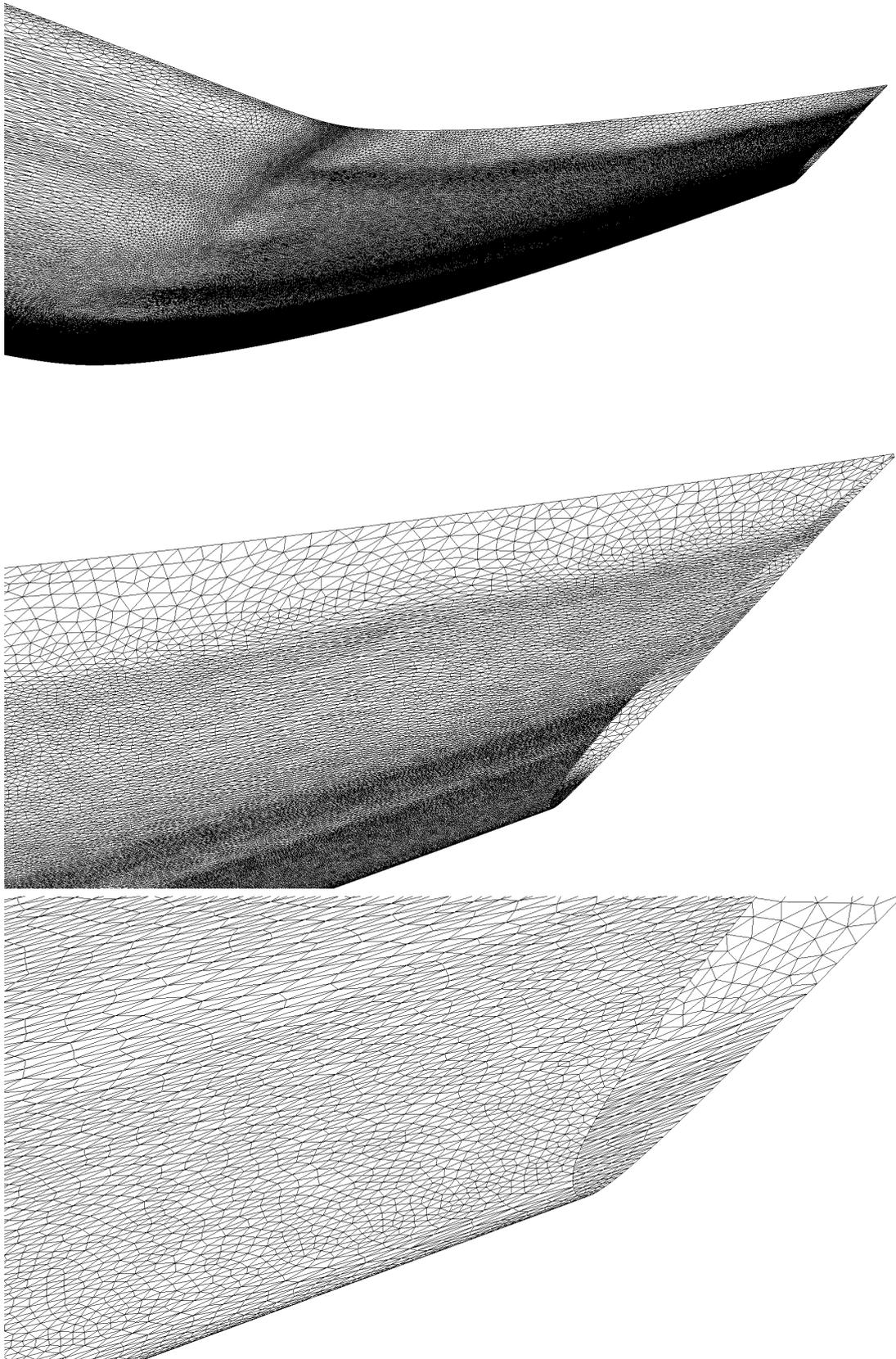
**Figure 4.51** *GBJ anisotrope fin* — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt ultra fin}}$ ,  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $G = 1.2$ ,  $h_{\min} = 1.0$ ,  $h_{\max} = 300.0$  à partir du maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.2}$ .



**Figure 4.52** *GBJ anisotrope fin* — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt ultra fin}}$ ,  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $G = 1.2$ ,  $h_{\min} = 1.0$ ,  $h_{\max} = 300.0$  à partir du maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.2}$ .



**Figure 4.53** *GBJ anisotrope fin* — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt ultra fin}}$ ,  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $G = 1.2$ ,  $h_{\min} = 1.0$ ,  $h_{\max} = 300.0$  à partir du maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.2}$ .



**Figure 4.54** *GBJ anisotrope fin* — Maillage géométrique anisotrope ultra fin du GBJ  $\mathcal{M}_{\text{adapt ultra fin}}$ ,  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $G = 1.2$ ,  $h_{\min} = 1.0$ ,  $h_{\max} = 300.0$  à partir du maillage  $\mathcal{M}_{\text{adapt fin } G=1.2}$ .

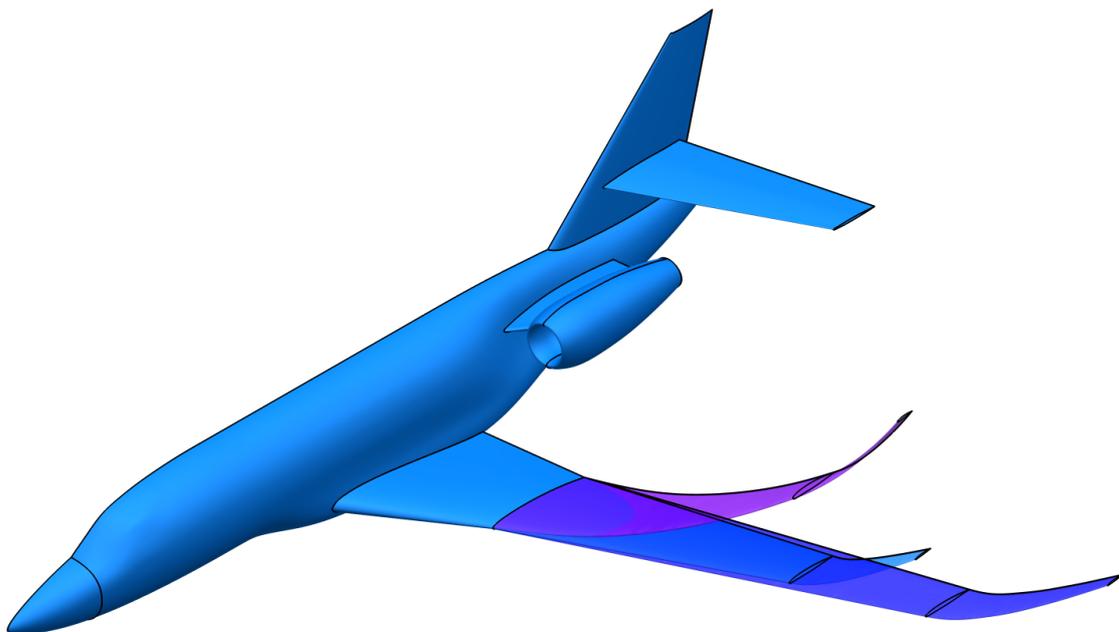
## Bilan de l'adaptation anisotrope multi-carreaux

Le processus de remaillage anisotrope multi-carreaux a convergé sur le Generic Business Jet. Les objectifs sur la longueur unité, la gradation et les bornes sur les cartes de taille sont atteints. Les résultats sont une maximisation de la qualité en forme des éléments et une minimisation de l'angle dièdre. Le nombre de nœuds et l'angle dièdre sont plus faibles par rapport au même cas isotrope à iso-paramètres. Ce processus valide l'algorithme d'adaptation anisotrope d'un maillage surfacique multi-carreaux 3.11. De plus la structure de données utilisée est éprouvée puisqu'un cas à 4.5 millions de nœuds a été généré par adaptation de maillage.

### 4.3.6 Adaptation GBJ déformable

Le résultat d'un calcul aérodynamique peut conduire à modifier ou changer la géométrie initiale via la boucle d'optimisation. Le maillage est déformé à iso-topologie et iso-nombre de nœuds. Or les grandes déformations peuvent cisailer le maillage ou pire le rendre non conforme. Pour améliorer ce maillage déformé, il est nécessaire de mettre en place un processus de remaillage automatique après déformation de la géométrie et du maillage. L'idée est donc d'adapter le maillage quand la qualité en forme des éléments est trop dégradée.

Deux déformations de la géométrie du GBJ sont envisagées au niveau de la voilure. Dans un premier cas, on étire la voilure principale. Dans l'autre cas, on combine une torsion et une flexion sur la voilure. Le but est de maximiser la qualité en forme des éléments du maillage suite à une déformation dans le cas isotrope et anisotrope.



**Figure 4.55** GBJ déformable — Géométries GBJ initiale  $\mathcal{G}_0$ , avec voilure déformée par étirement  $\mathcal{G}_{étire}$ , avec voilure déformée par torsion et flexion combinées  $\mathcal{G}_{torsion\ flexion}$ .

### Adaptation isotrope GBJ déformable

Le but est de maximiser la qualité en forme des éléments du maillage suite à cette déformation dans le cas isotrope pour la géométrie  $\mathcal{G}_{\text{etire}}$ . La figure 4.56 montre les maillages avant déformation, après déformation et après déformation avec adaptation. On remarque que les mailles sont étirées dans le sens de la déformation. Cette adaptation isotrope permet de retrouver des mailles isotropes.

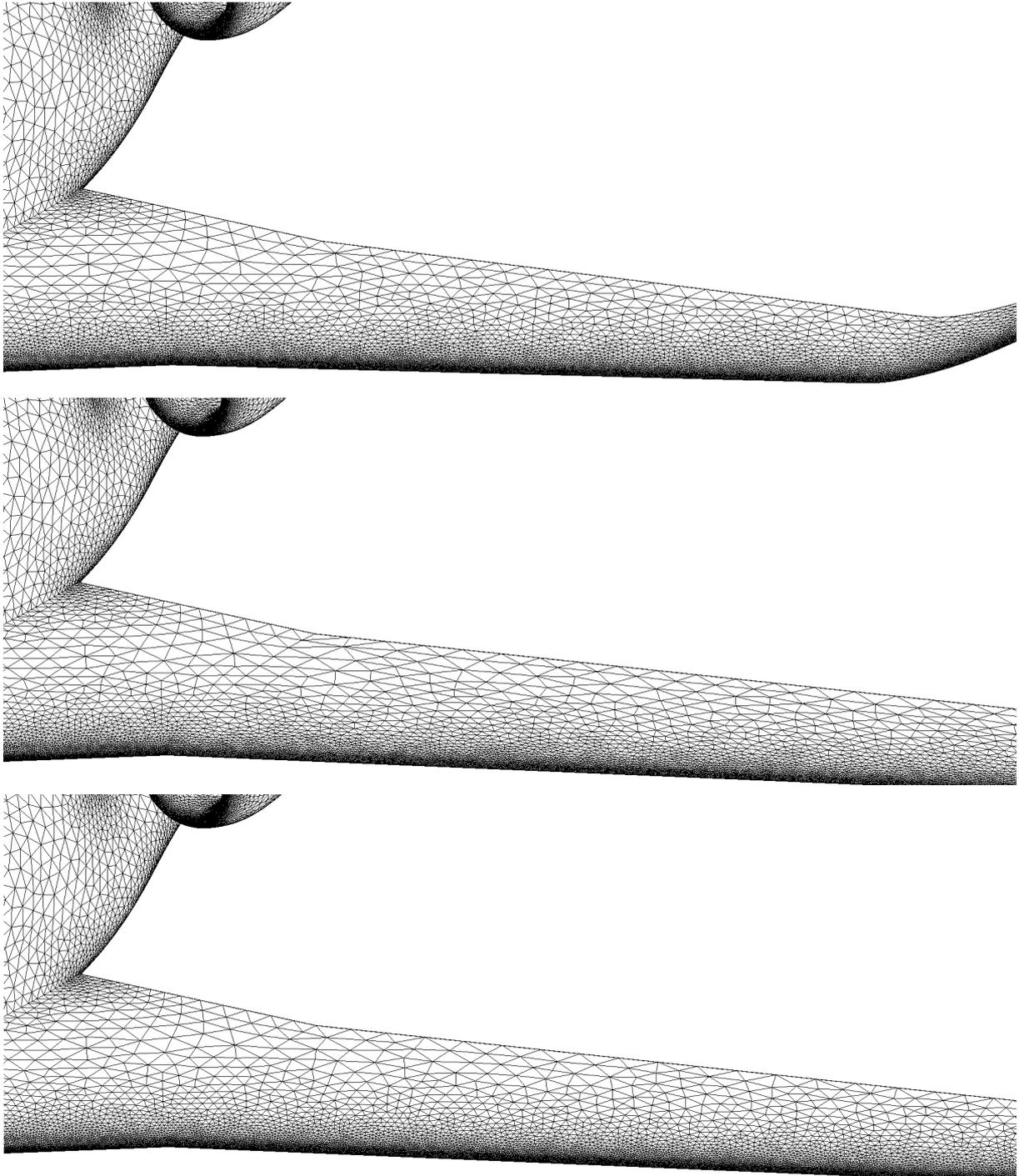
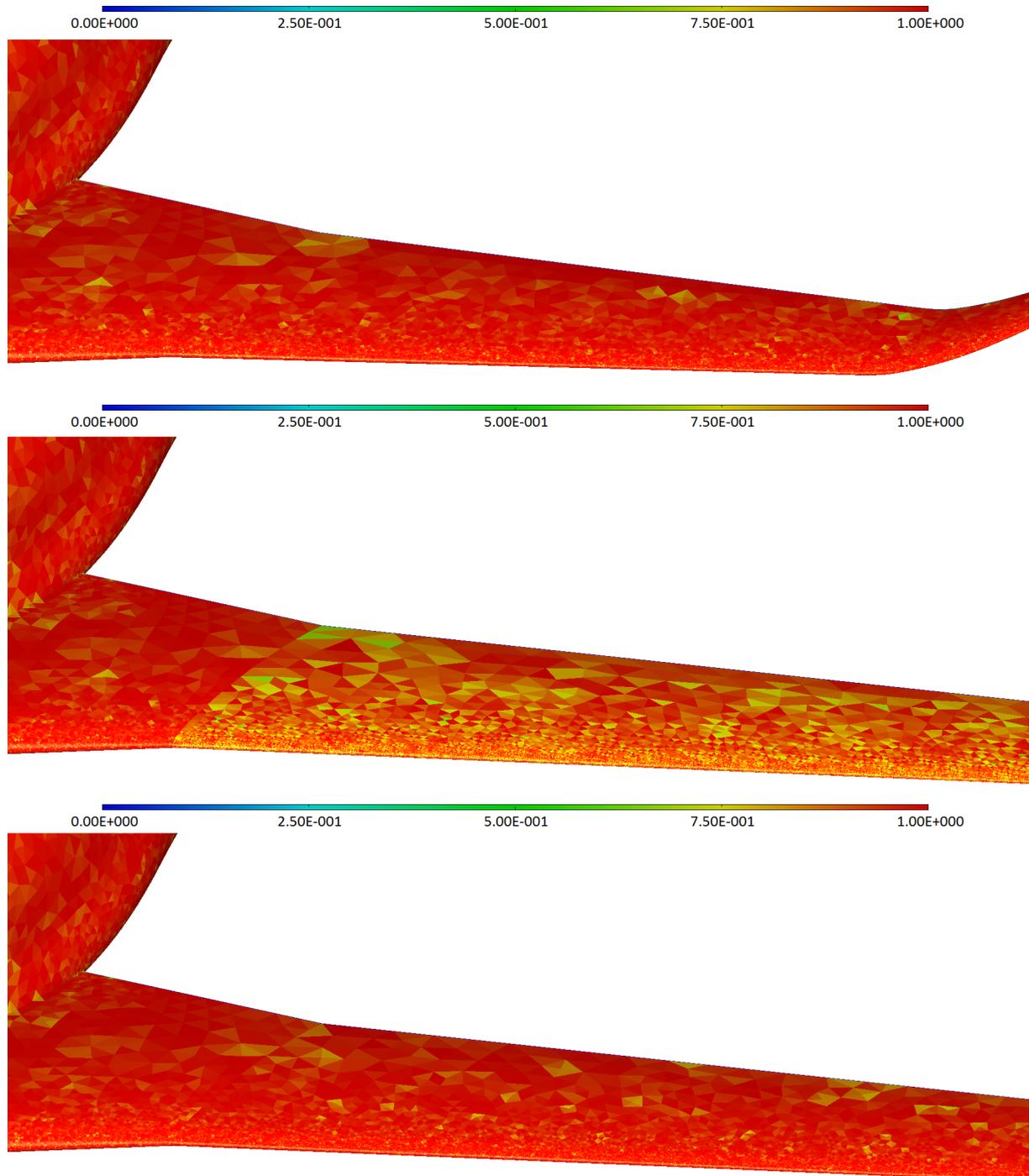


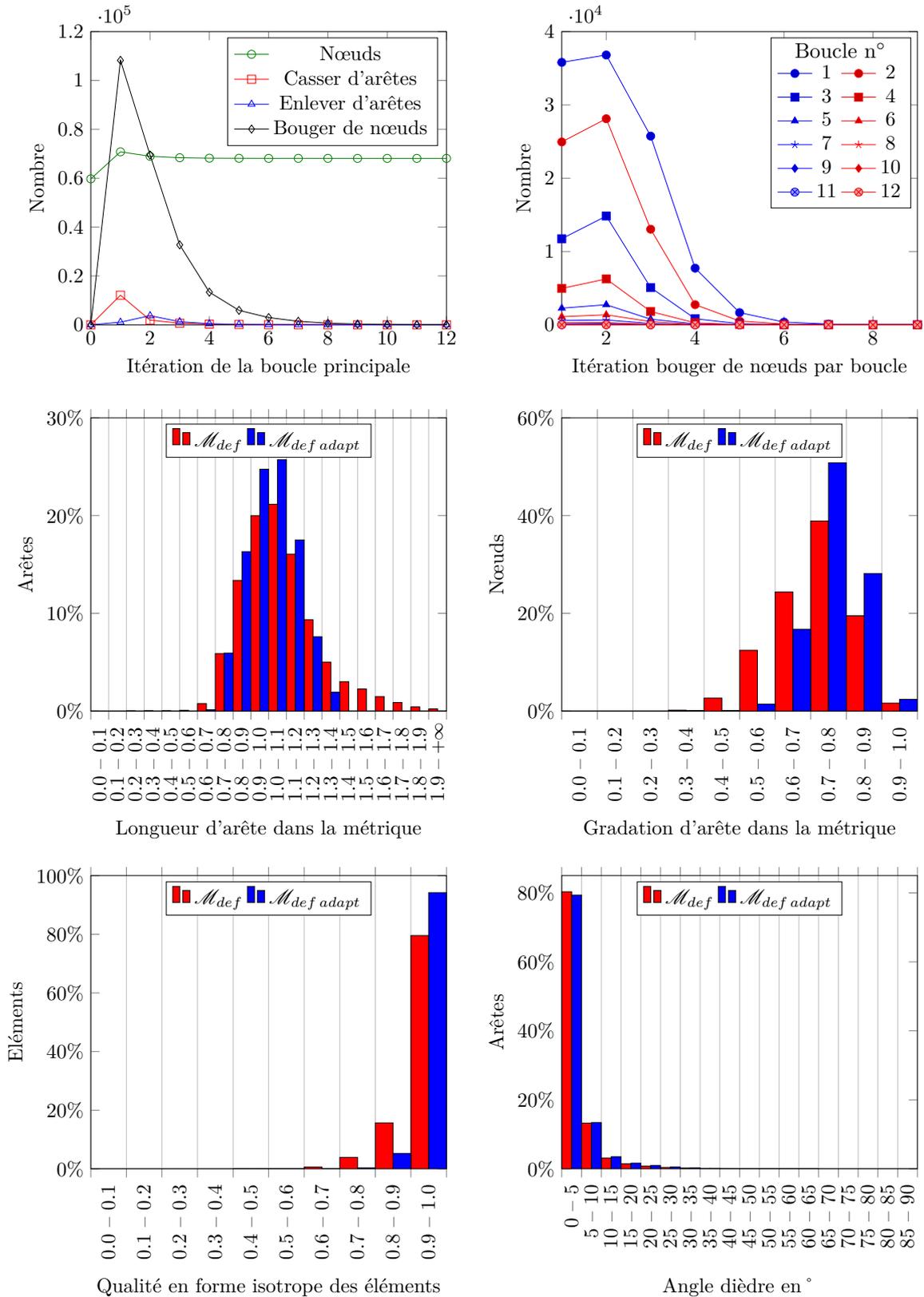
Figure 4.56 GBJ isotrope déformable — Maillages isotrope GBJ,  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{\text{def}}$  et  $\mathcal{M}_{\text{def adapt}}$ .

Sur la figure 4.57, on voit que la qualité en forme isotrope des éléments se dégrade après la déformation à iso-topologie. Après l'adaptation, la qualité en forme est améliorée et elle est équivalente à la qualité avant déformation.



**Figure 4.57** *GBJ isotrope déformable — Qualité en forme isotrope des éléments  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{def}$  et  $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .*

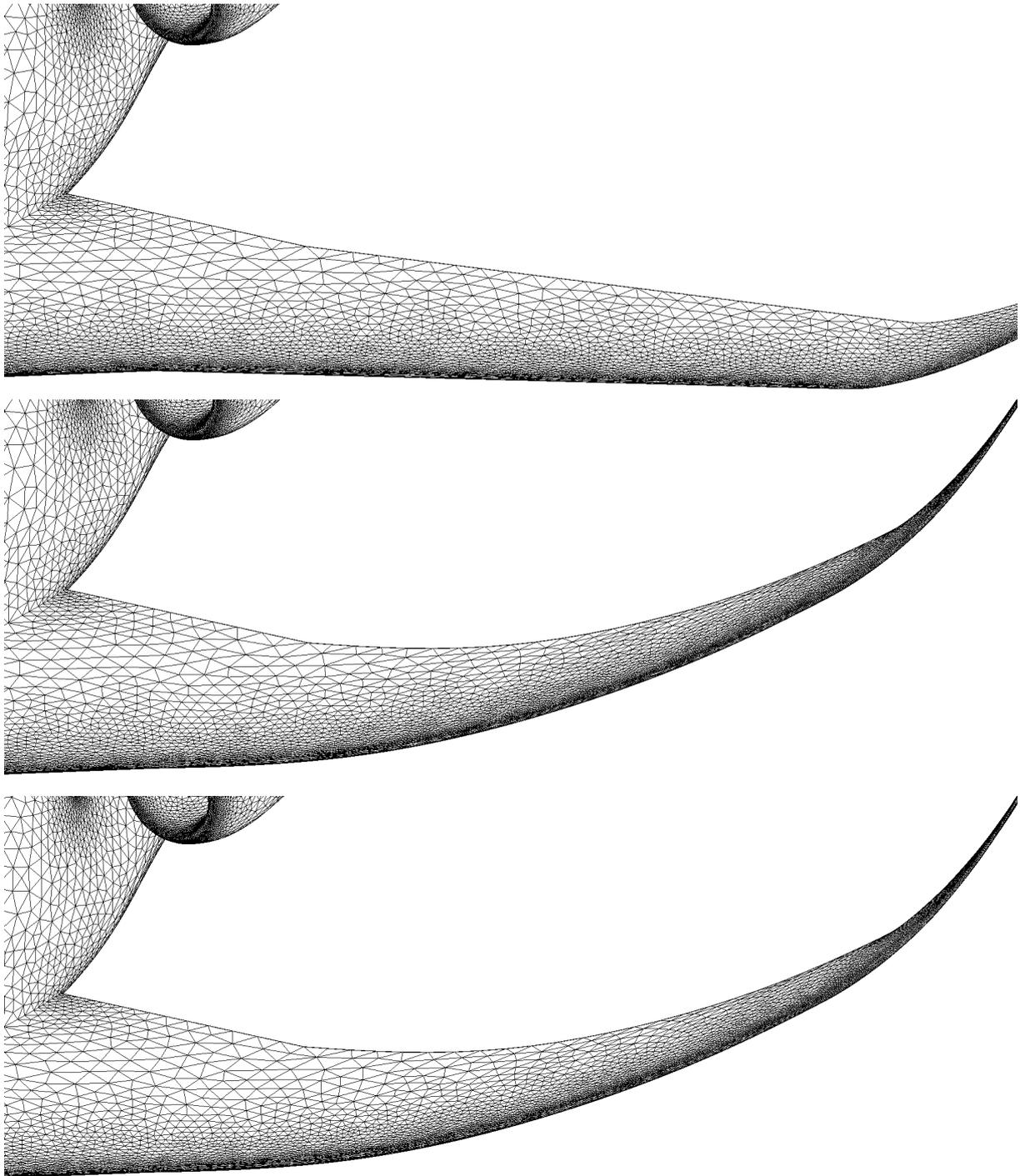
Sur la figure 4.58, on voit que le processus d'adaptation de maillage converge. Les objectifs de maillage unité et de gradation sont retrouvés.



**Figure 4.58** GBJ isotrope déformable — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d’arête dans la métrique, de gradation d’arête dans la métrique, de qualité en forme isotrope des éléments et de l’angle dièdre.

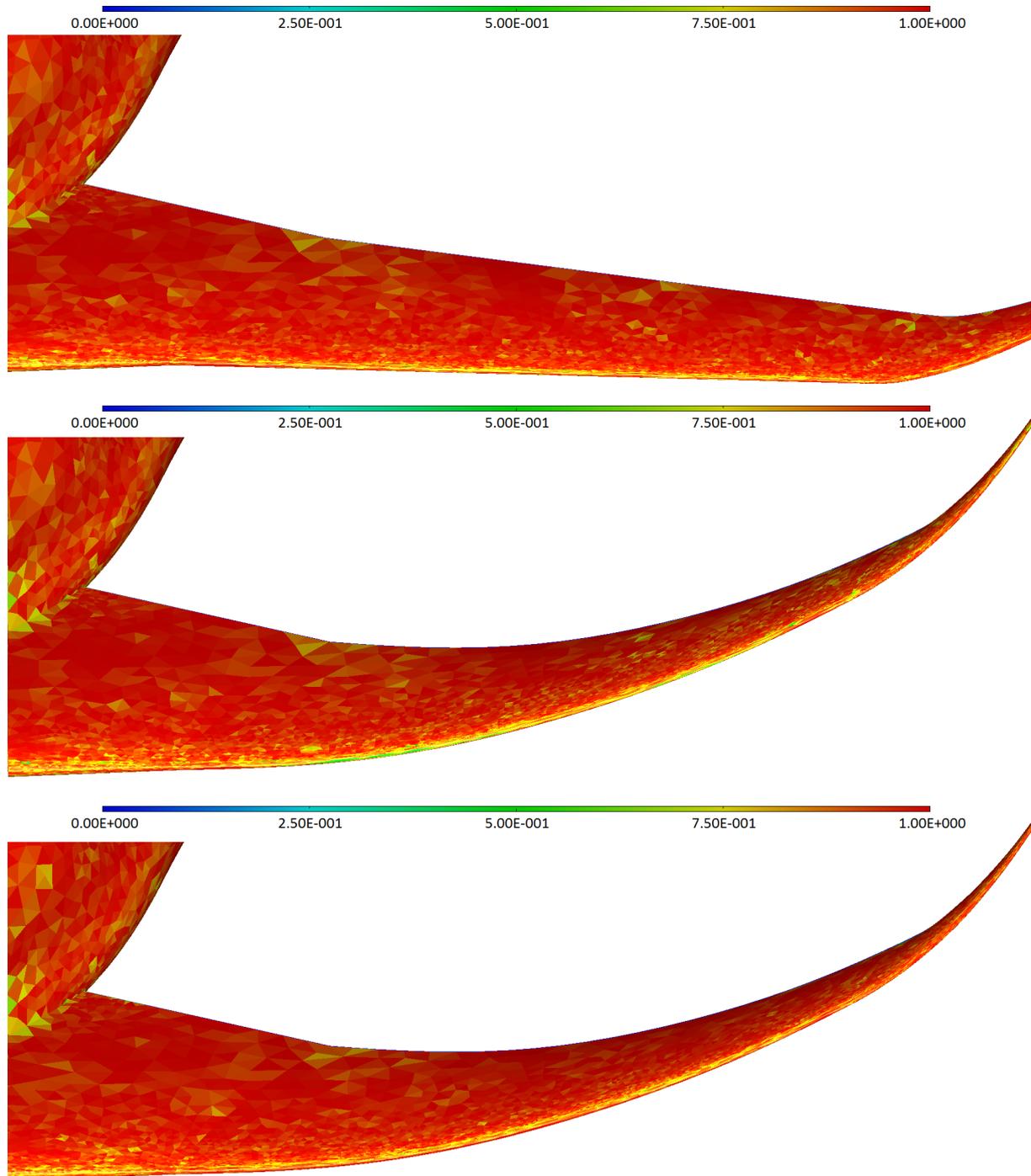
### Adaptation anisotrope GBJ déformable

Le but est de maximiser la qualité en forme des éléments du maillage suite à cette déformation dans le cas anisotrope pour la géométrie  $\mathcal{G}_{torsion\ flexion}$ . La figure 4.59 montre les maillages avant déformation, après déformation et après déformation avec adaptation. On remarque que les mailles sont étirées dans le sens de la déformation. Cette adaptation anisotrope permet de retrouver une bonne répartition de mailles anisotropes.



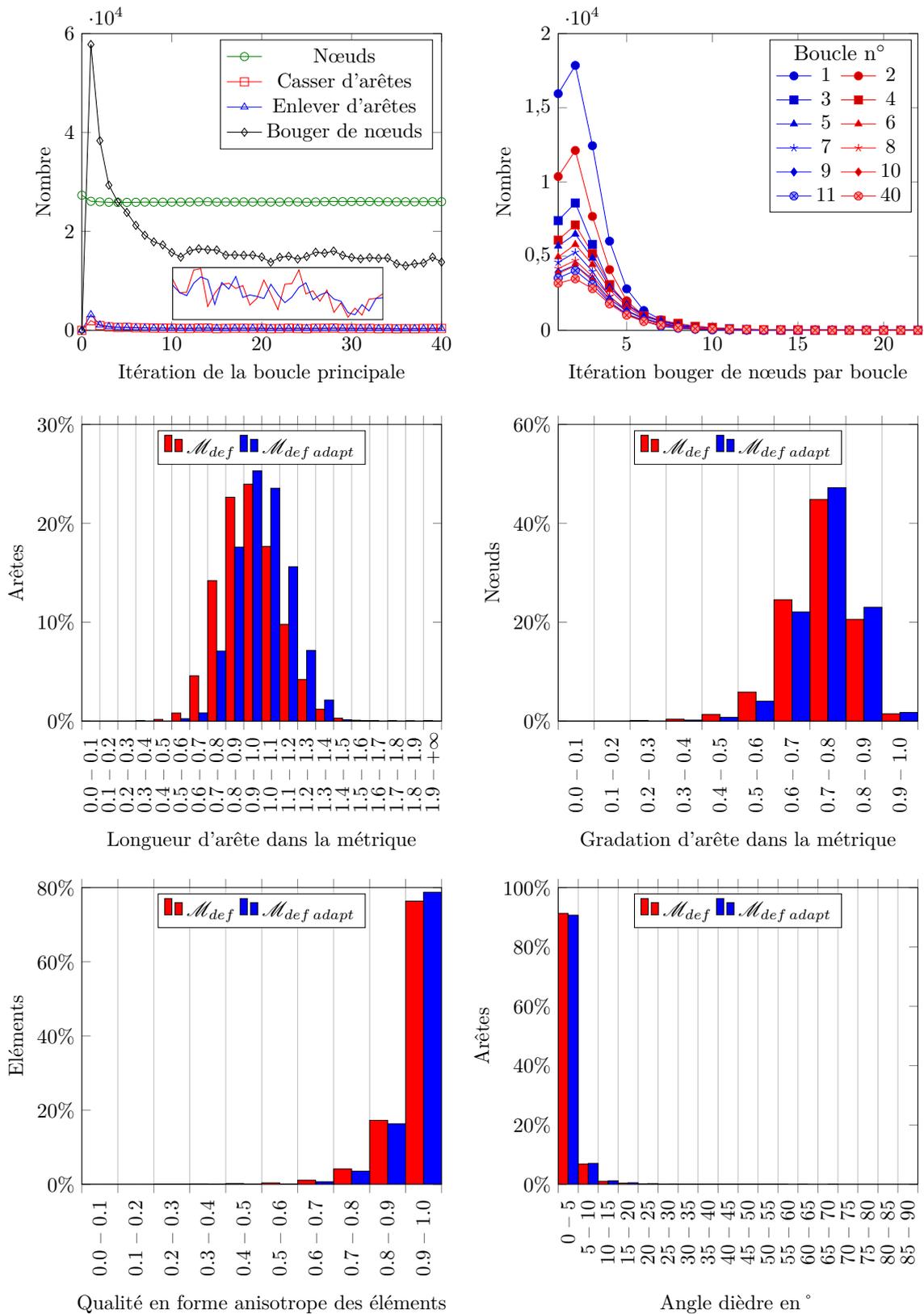
**Figure 4.59** *GBJ anisotrope déformable* — Maillage anisotrope GBJ,  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{def}$  et  $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .

Sur la figure 4.60, on voit que la qualité en forme anisotrope des éléments se dégrade après la déformation à iso-topologie sur le bord d'attaque de la voilure. Après l'adaptation de maillage, la qualité en forme est améliorée et équivalente à la qualité avant déformation.



**Figure 4.60** GBJ anisotrope déformable — Qualité en forme anisotrope des éléments  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{def}$  et  $\mathcal{M}_{def\ adapt}$ .

Sur la figure 4.61, on voit que le processus d'adaptation converge vers un état fixe. Les objectifs de maillage unité et de gradation sont retrouvés.



**Figure 4.61** GBJ anisotrope déformable — Historiques de convergence des opérateurs de modification locale de maillage et du bouger de nœuds par boucle. Histogrammes de longueur d'arête dans la métrique, de gradation d'arête dans la métrique, de qualité en forme anisotrope des éléments et de l'angle dièdre.

Cet algorithme itératif donne raison à Mavriplis. En effet dès 1998, il travaille sur les techniques d'accélération de convergence pour les maillages non structurés [65]. Il met en avant les avancés possibles en algorithmique et en matériel informatique de la future décennie pour l'accélération de la convergence : le parallélisme, la tolérance de latence de la mémoire et notamment la naissance d'une myriade d'algorithmes d'adaptation direct ou indirect par itération.

### Bilan de l'adaptation avec géométrie déformable

Les adaptations isotrope et anisotrope sur géométrie multi-carreaux déformable sont un succès. Le processus de remaillage est rapide, car le nombre de nœuds optimal est déjà quasiment atteint avant l'adaptation. En outre le remaillage se concentre uniquement sur les zones déformées.

## 4.4 Conclusions

L'ensemble de ces applications a permis de confirmer la théorie du chapitre 2, de valider les algorithmes du chapitre 3 et d'interfacer ses nouveaux outils dans les chaînes de calcul existantes présentées dans le chapitre 1. La théorie de la métrique fonctionne parfaitement pour l'adaptation de maillage. Les outils d'adaptation de maillage développés sont génériques et permettent de remailler n'importe quel maillage 2d plan ou 3d surfacique à partir d'une métrique.

La méthode de Hamann n'est pas recommandée pour un processus d'adaptation au risque de ne pas faire converger l'algorithme d'adaptation rapidement voir pas du tout pour le cas anisotrope. De plus sa mise en oeuvre est complexe dans le cas du multi-carreaux car il faut récupérer le voisinage du bon carreau pour évaluer la courbure correspondante. L'algorithme de correction  $\mathcal{H}$ -choc est validé pour les cas isotrope et anisotrope. De plus il est intégré avec succès dans le processus d'adaptation. Il permet notamment de lisser les champs de taille pour les cas multi-carreaux. L'adaptation de maillage a montré avec succès sa précision pour capter les champs à forte variation.

Trois constructions de métrique sont proposées pour le cas 2d plans. Deux métriques sont isotropes. Elles sont basées sur la taille à la peau et une combinaison de la taille à la peau et la distance à la peau pour préserver un potentiel maillage structuré de couche limites. Des applications sont effectuées avec succès sur des profils mono-corps, bi-corps et tri-corps. On peut adapter les arêtes internes en préservant les arêtes frontières ou adapter l'ensemble des arêtes. Une dernière construction de métrique est proposée dans le cadre de l'adaptation anisotrope après un déplacement relatif entre les corps. La métrique est basée sur la taille à la peau, la distance à la peau, le vecteur tangentiel à la peau et le vecteur normal à la peau. Cependant l'introduction de cette méthode reste à tester.

Dans le cadre de l'adaptation 3d surfacique, le processus d'adaptation converge plus facilement pour le cas isotrope que pour le cas anisotrope. En effet le cas anisotrope converge plutôt vers un état fixe où il reste un ensemble d'arêtes de longueurs limites

à casser ou à enlever à chaque itération. Pour le cas isotrope, les trois normes d'interpolation donnent les mêmes résultats à coût équivalent. Le changement de paramètres de l'adaptation donne des résultats différents. Une diminution de l'écart angulaire par rapport au plan tangent  $\theta$  entraîne une maximisation de la qualité en forme des éléments et une diminution de l'angle dièdre. Une gradation  $G$  proche de 1 augmente le nombre de nœuds mais maximise la qualité et minimise l'angle dièdre. Une gradation  $G$  entre 1.2 et 2.5 donne des difficultés à l'algorithme d'adaptation pour converger sur le profil ONERA M6. La qualité anisotrope et l'angle dièdre se dégradent avec l'augmentation de la gradation jusqu'à une gradation très grande  $G = 100.0$  où la qualité et l'angle dièdre s'améliorent.

*Le nouveau critère d'alignement permet d'aligner les éléments selon les directions principales à condition que la gradation  $G$  soit proche de 1.0. Cependant les longueurs créées par le bouger de nœuds avec alignement sont  $L_{\mathcal{M}} = 1.0$  et  $L_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}$  ce qui est en désaccord avec le maillage unité objectif  $L_{\mathcal{M}} = 1.0$ .*

*Une adaptation de maillage anisotrope ultra fine avec  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $G = 1.2$ ,  $h_{min} = 1.0$  et  $h_{max} = 300.0$  sur le GBJ est un succès. Le maillage adapté est composé de 4.5 millions de nœuds et de 27 millions d'arêtes ce qui conforte l'idée du bon choix de la structure de données. La qualité en forme anisotrope des éléments est excellente. L'angle dièdre est inférieur à  $2^\circ$  sur tout le domaine avec une répartition moyenne autour de  $0.1^\circ$ . De plus l'adaptation peut se faire de façon progressive en itérant l'algorithme d'adaptation avec des paramètres intermédiaires.*

Pour conclure, cette étude a montré que la plate-forme automatique d'adaptation de maillage est complètement maîtrisée et que les résultats obtenus avec elle sont satisfaisants. Par conséquent, il ne reste plus qu'à coupler l'adaptation de maillage dans la boucle d'optimisation pour mettre en place un processus complètement automatique d'optimisation de formes.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Dans cette thèse, nous avons présenté un travail sur l'adaptation de maillage 2d plan et 3d surfacique pour les cas isotrope et anisotrope après déformation de maillage dans une boucle d'optimisation de formes aérodynamiques. L'adaptation est au centre des préoccupations des mondes industriel et académique à cause de l'augmentation constante de la complexité des problèmes à modéliser numériquement. L'adaptation de maillage s'est développée grâce aux travaux antérieurs [59], [22] et [10]. Plus récemment des adaptations remarquables de maillage sur avion complet [69] ont montré l'intérêt des industriels dans le développement d'algorithme d'adaptation de maillage global.

Cependant, le traitement des problèmes de maillage déformé dans les boucles d'optimisation de formes aérodynamiques restent encore problématique en raison du verrou de l'iso-topologie et de l'iso-nombre de nœuds. Relativement peu de travaux ont étudié ce problème et aucune approche n'a été proposée pour l'adaptation de maillage dans le cadre de méthodes de remaillage local. Trouver une réponse à ce problème est nécessaire, car les futures boucles d'optimisation automatique de formes aérodynamiques doivent élargir considérablement leur champ de recherche pour répondre aux contraintes économiques et environnementales.

Pour répondre à ces attentes, notre contribution a été de concevoir un nouvel algorithme d'adaptation de maillage automatique générique d'application 2d plan et 3d surfacique après déformation de maillage dans la boucle d'optimisation en définissant une métrique adéquate isotrope ou anisotrope. Le point central de cette approche a été de développer les outils de remaillage local pour transformer le maillage initial en maillage unité respectant la métrique. Cette approche a l'avantage d'être automatique et d'application générale. De plus, l'algorithme cherche à construire des maillages optimaux en termes de tailles et de directions. L'ensemble des applications a permis de confirmer la théorie de la métrique, de valider les algorithmes d'adaptation automatique mis en place et d'interfacer ses nouveaux outils génériques dans les chaînes de calcul existantes. Les exemples présentés ont montré que l'algorithme permet de remailler n'importe quel maillage 2d plan ou 3d surfacique à partir d'une métrique dans des temps de calcul raisonnables.

Par ailleurs, nous avons introduit un nouveau critère de qualité en forme anisotrope avec alignement suivants les directions principales dans le but d'adapter et de conserver dans une moindre mesure les maillages structurés. Notre apport sur ce point a été de construire ce critère de qualité par rapport aux directions principales d'une métrique et

de notamment mesurer l'écart angulaire entre les côtés d'un élément et ces directions.

En outre, les résultats d'adaptation de maillage obtenus à partir d'un maillage déformé tendent à montrer que l'adaptation automatique de maillage est un sujet prometteur pour l'industrie. Cependant il est étonnant de constater qu'actuellement l'adaptation de maillage automatique n'est pas utilisée de façon intensive dans ce milieu.

Toutefois, tous les problèmes ne sont pas encore résolus et les perspectives de recherches sont nombreuses. Ce travail a mis en évidence de futurs axes de recherches :

- l'adaptation de maillage 3d volumique et notamment le développement des opérateurs de modification locale associés [40] [14] [62]
- l'adaptation de maillage parallèle pour accélérer le temps de calcul grâce à la classification des zones aussi bien dans le maillage surfacique que le maillage volumique [61]
- l'adaptation de maillage avec intersection de métriques pour adapter un maillage selon la géométrie et la physique [43] [38]
- l'adaptation de maillage structuré pour les problèmes de couche limite avec la mise en place de nouveaux algorithmes d'adaptation de maillage structuré pour obtenir un maillage dont les éléments sont rectangles et alignés suivant les directions principales

## Perspectives

De ce travail découle un large éventail de perspectives pour l'adaptation de maillage avec des métriques d'origine géométrique et physique. Nous allons indiquer quelques axes de recherches futurs dans la continuité de ce travail et présenter des ouvertures vers de nouveaux problèmes d'adaptation de maillage structuré.

L'algorithme d'adaptation de maillage présenté dans cette thèse est d'application générale. Son utilisation peut être étendue à de nouvelles problématiques incluant le couplage de la géométrie et de la physique grâce à l'intersection de métrique et à son extension dans le cas 3d volumique. En effet les écoulements modélisés par les équations de Navier Stokes peuvent être capturés dans le maillage par la définition d'une métrique physique adéquate. Cependant des métriques sont encore à découvrir pour l'adaptation de maillage structuré type couche limite. De plus le parallélisme pourra être utilisé pour accélérer le temps de calcul de l'adaptation de maillage volumique.

L'introduction d'un nouveau critère de qualité anisotrope avec alignement a mis en lumière deux points fondamentaux. D'une part ce critère fonctionne et optimise le maillage pour aligner les éléments selon les directions principales de la métrique en créant des arêtes de longueur dans la métrique égale à  $L_M = 1$  et  $L_M = \sqrt{2}$ . D'autre part l'algorithme d'adaptation utilisé recherche le maillage unité telle que  $L_M = 1$ , ce qui n'est pas en adéquation avec  $L_M = \sqrt{2}$ . Il devient impératif pour l'avenir de développer des algorithmes d'adaptation de maillage structuré avec la recherche d'un maillage unité dont en théorie 60% des arêtes sont de longueur dans la métrique  $L_M = 1$  et 30% des arêtes sont de longueur dans la métrique  $L_M = \sqrt{2}$ .

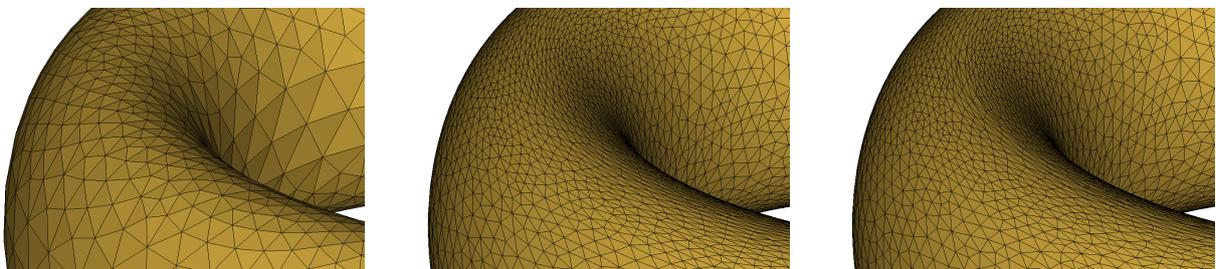
# Annexe A

## Adaptations de maillages sur surfaces fermées

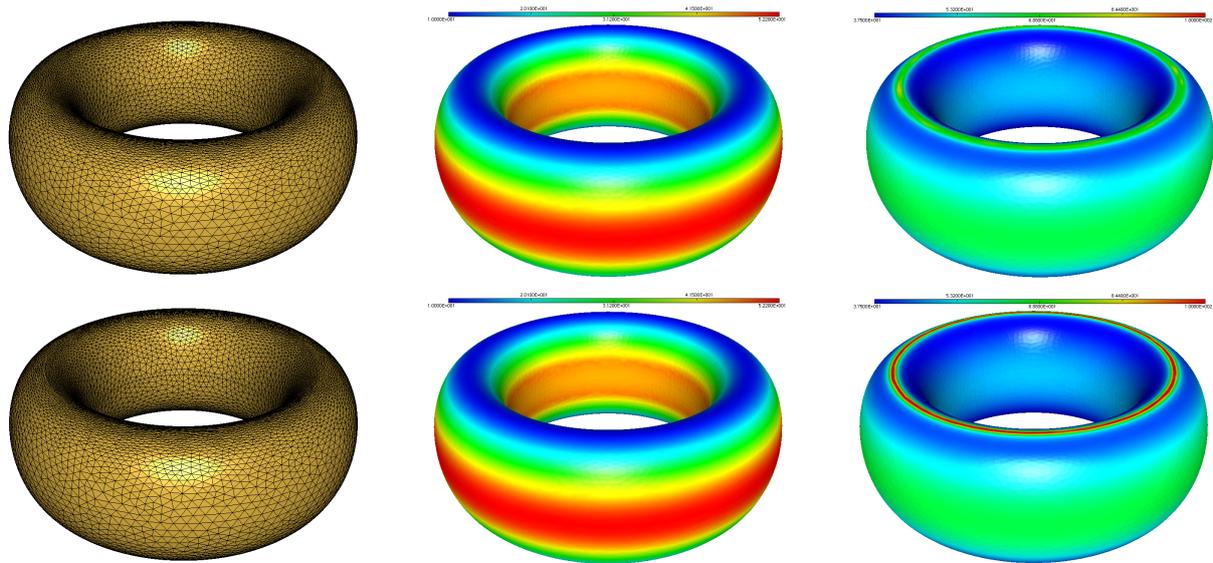
Cette annexe rassemble l'ensemble des adaptations anisotropes de maillages à partir de maillages isotropes de surfaces fermées. D'abord le tore est étudié à travers la variation de la gradation. Ensuite un maillage d'une géométrie de type joint est adapté pour s'assurer que les courbures négatives sont bien traitées. Enfin l'algorithme d'adaptation est testé sur un entrelacement.

### A.1 Tore

Le maillage isotrope d'un tore est adapté avec la métrique géométrique anisotrope pour deux valeurs de gradations  $G = 1.2$  et  $G = 1.8$ , figure A.1. On s'aperçoit qu'en augmentant la valeur de la gradation, l'anisotropie se concentre de plus en plus sur la zone où la courbure dans la deuxième direction est nulle, figure A.2. En outre on n'observe aucun changement pour  $h_1$ .



**Figure A.1** Adaptation d'un tore de section ellipsoïde — Maillage initial à gauche. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.2$  au milieu. Maillage adapté avec gradation  $G = 1.8$  à droite.



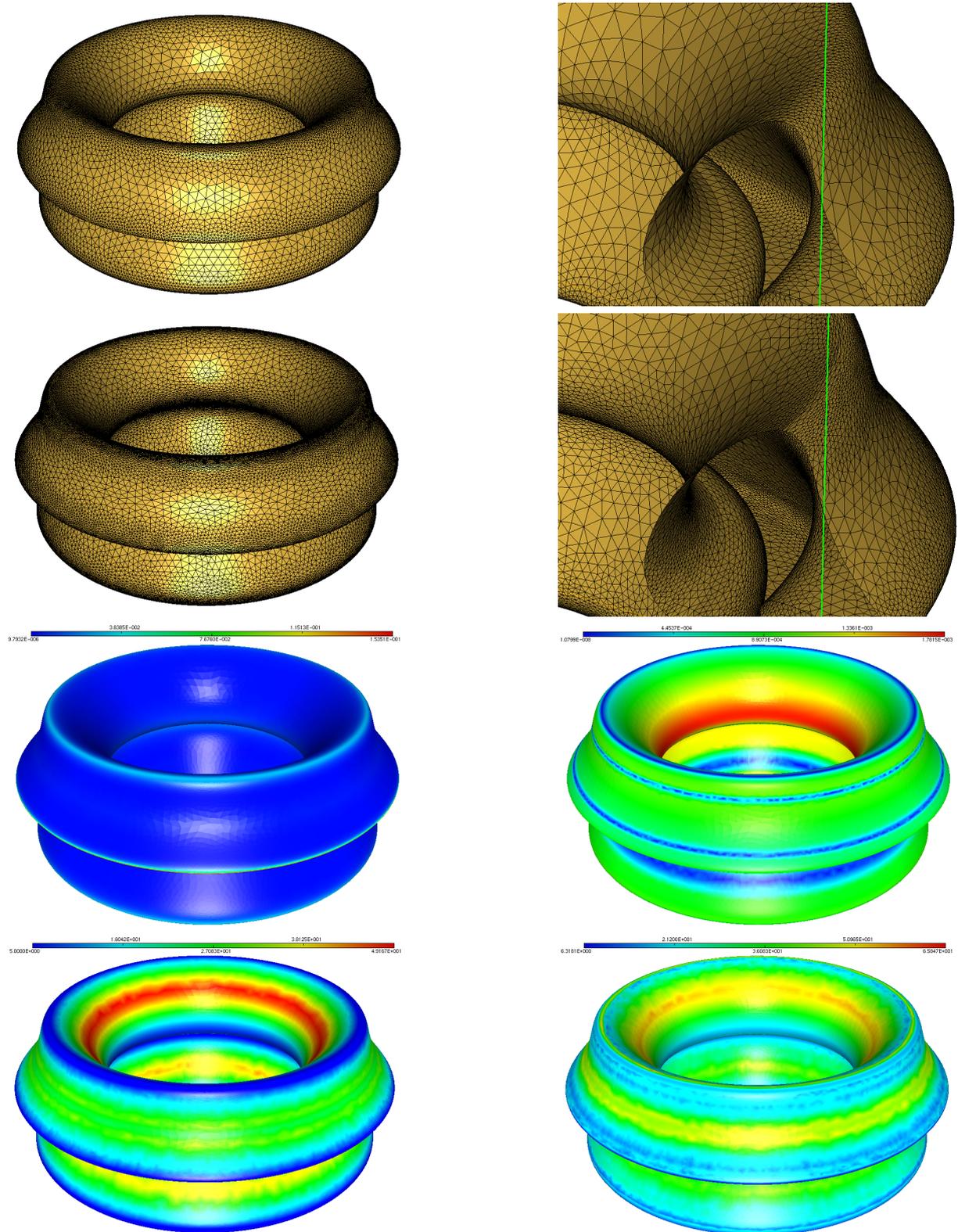
**Figure A.2** Adaptation d'un tore de section ellipsoïde — Maillage et cartes de courbure  $h_1$  et  $h_2$  des maillages adaptés avec  $G = 1.2$  en haut et  $G = 1.8$  en bas pour un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ .

## A.2 Joint

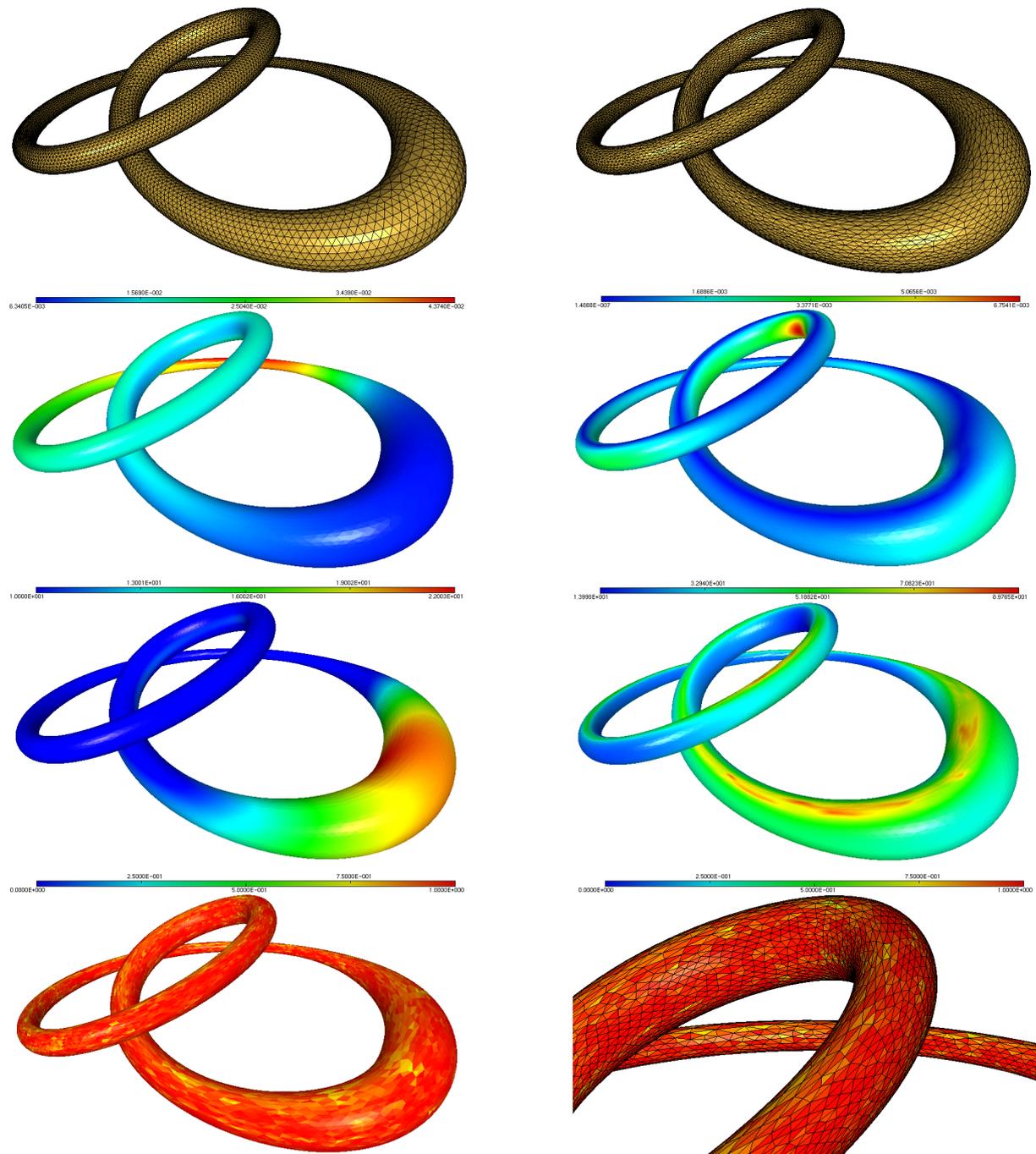
La figure A.3 montre l'adaptation anisotrope du maillage d'un joint axi-symétrique. On voit que la courbure négative est bien gérée comme la courbure positive. Les cartes de tailles sont conformes et en accord avec les cartes de courbures.

## A.3 Entrelacement

La figure A.4 présente l'adaptation anisotrope du maillage d'une forme fermée non axi-symétrique. On voit que la qualité en forme anisotrope des éléments est bonne. Les cartes de tailles sont conformes et en accord avec les cartes de courbures.



**Figure A.3** Adaptation d'un joint — Maillage initial avec vue en coupe en haut. Maillage adapté avec vue en coupe avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$  au milieu haut. Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  du maillage adapté au milieu bas. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  du maillage adapté en bas.



**Figure A.4** Adaptation d'un entrelacement — Maillage initial en haut à droite. Maillage adapté en haut à gauche. Cartes de courbures  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  du maillage adapté au milieu haut. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  du maillage adapté au milieu bas. Qualité en forme anisotrope des éléments en bas.

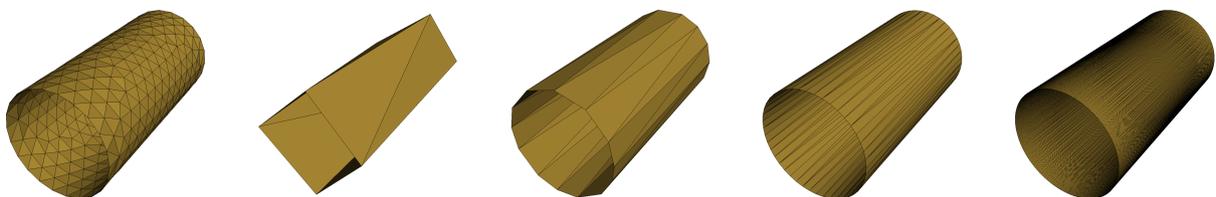
# Annexe B

## Adaptations de maillages sur surfaces ouvertes

Cette annexe rassemble l'ensemble des adaptations anisotropes de maillages à partir de maillages isotropes de surfaces ouvertes. D'abord la forme cylindrique est étudiée pour montrer les capacités de l'algorithme pour déraffiner/raffiner un maillage. En outre l'alignement des mailles est étudié suivant les directions principales. Ensuite le maillage obtenu avec le mailleur BLSURF est comparé au maillage adapté d'une géométrie en forme de bosse à iso-paramètres. Puis l'algorithme est testé sur une forme répétitive pour voir les différences de mailles dans les iso-zones. Enfin d'autres formes sont testées pour montrer l'efficacité de l'algorithme d'adaptation sur des formes diverses.

### B.1 Cylindre

D'abord nous étudions l'influence de l'écart angulaire par rapport au plan tangent dans l'adaptation en prenant une taille maximale  $h_{max}$  plus grande que la longueur du cylindre. Ensuite nous analysons une adaptation en prenant une taille maximale inférieure à la longueur du cylindre. Enfin nous intégrons le critère de qualité avec alignement pour aligner les éléments suivant les directions principales.

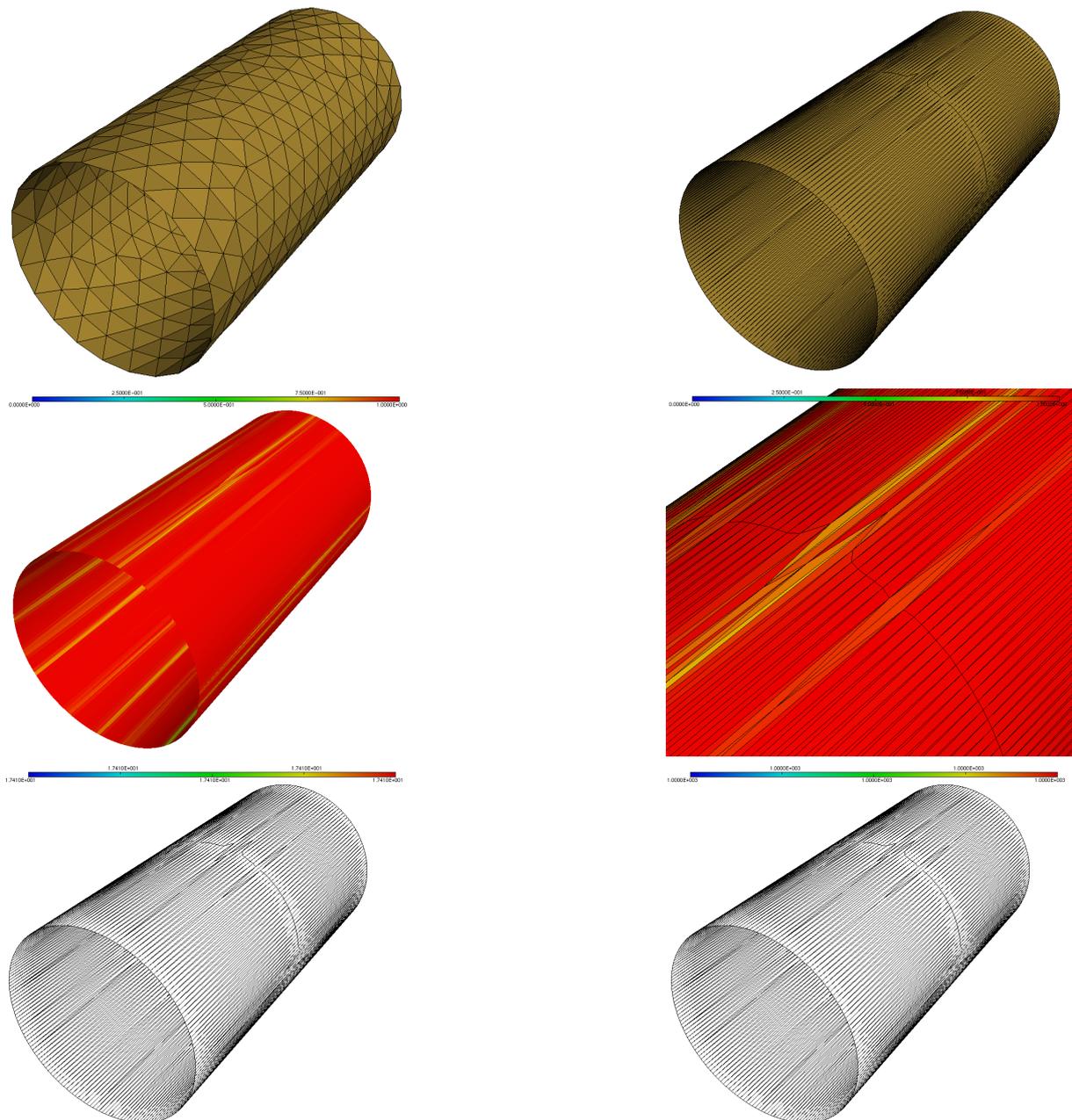


**Figure B.1** Adaptation d'un cylindre — Maillage initial à gauche. Maillages adaptés avec un écart angulaire  $\theta = 45^\circ, 15^\circ, 4^\circ, 0.1^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 4\,000.0$  de gauche à droite.

On s'aperçoit sur la figure [B.1](#) que l'algorithme d'adaptation fonctionne pour déraffiner

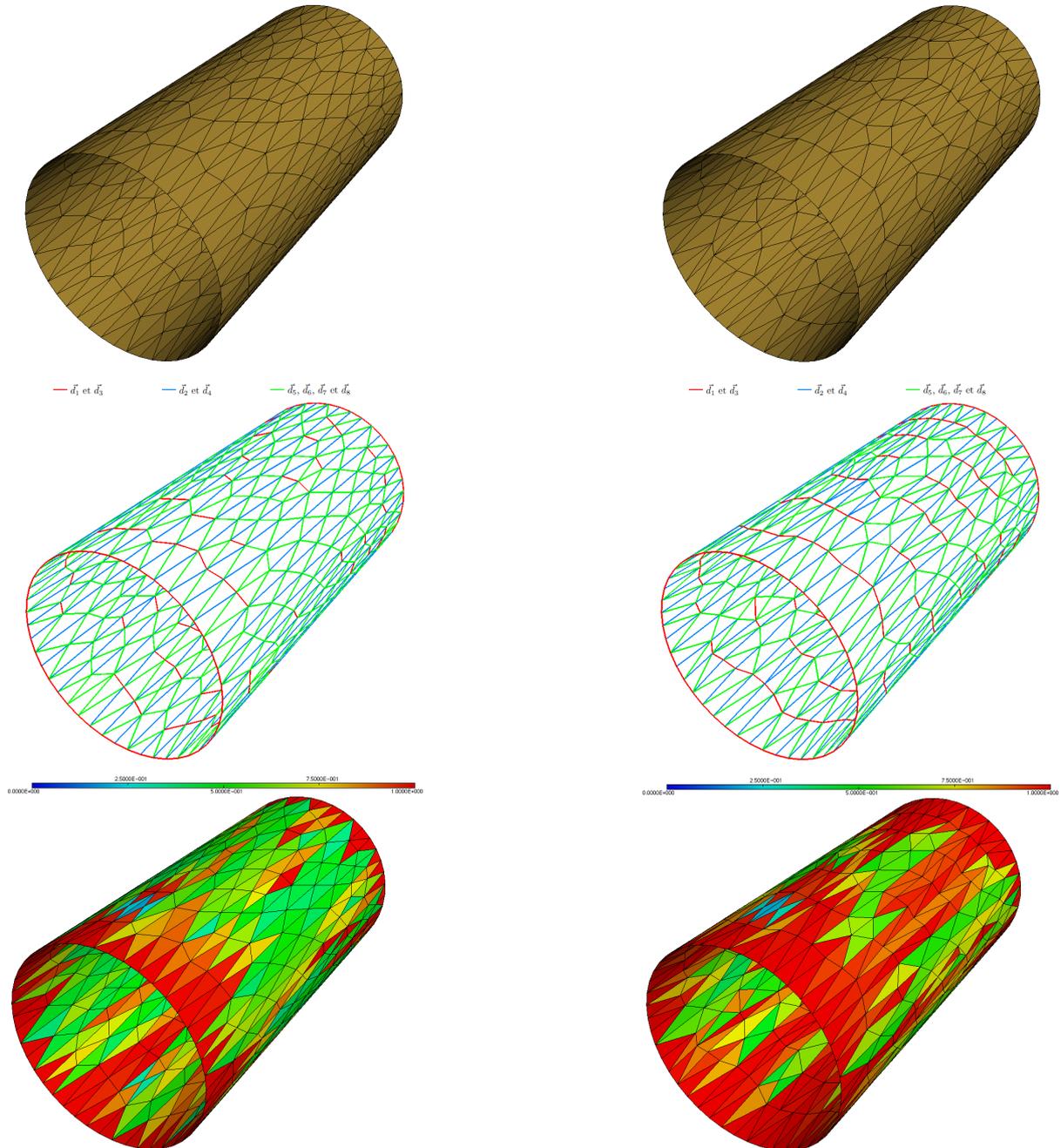
le maillage en choisissant un écart angulaire grand ainsi que pour raffiner le maillage en choisissant un écart angulaire petit.

la figure B.2 présente une adaptation de maillage avec une taille maximale inférieure à la longueur du cylindre. On voit une section circulaire se dessiner au milieu du cylindre mais la section circulaire n'est pas parfaite. L'introduction d'un critère d'optimisation est nécessaire pour aligner ses éléments. En outre on retrouve des cartes de taille constantes pour les deux directions.



**Figure B.2** Adaptation d'un cylindre — Maillage initial en haut à gauche. Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  en haut droite. Qualité en forme anisotrope du maillage adapté au milieu. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  constante en bas.

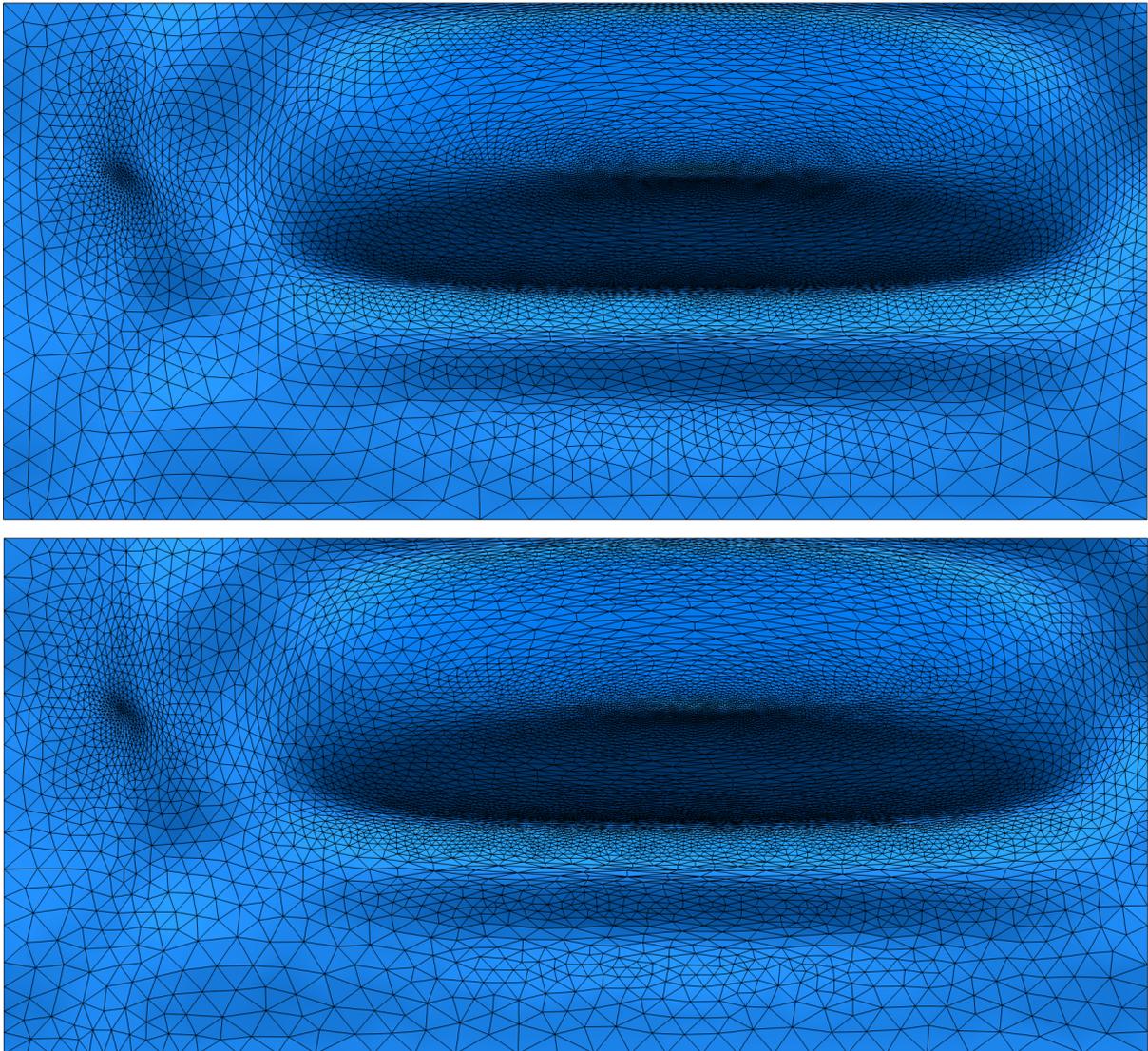
Le critère d'alignement est introduit pour essayer de corriger les mauvais alignements par un bouger-basculer en fin d'adaptation. La figure B.3 montre les résultats en prenant une taille maximale encore plus petite. L'amélioration se voit mais n'est pas parfaite. Une nouvelle stratégie d'adaptation est nécessaire pour obtenir ce type de maillage.



**Figure B.3** Adaptation d'un cylindre — Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 4^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 300.0$  en haut à gauche. Maillage adapté avec un bouger-basculer de nœuds avec le critère d'alignement en haut à droite. Alignement des arêtes des maillages adaptés au milieu. Qualité en forme anisotrope avec alignement des maillages adaptés en bas.

## B.2 Bosse

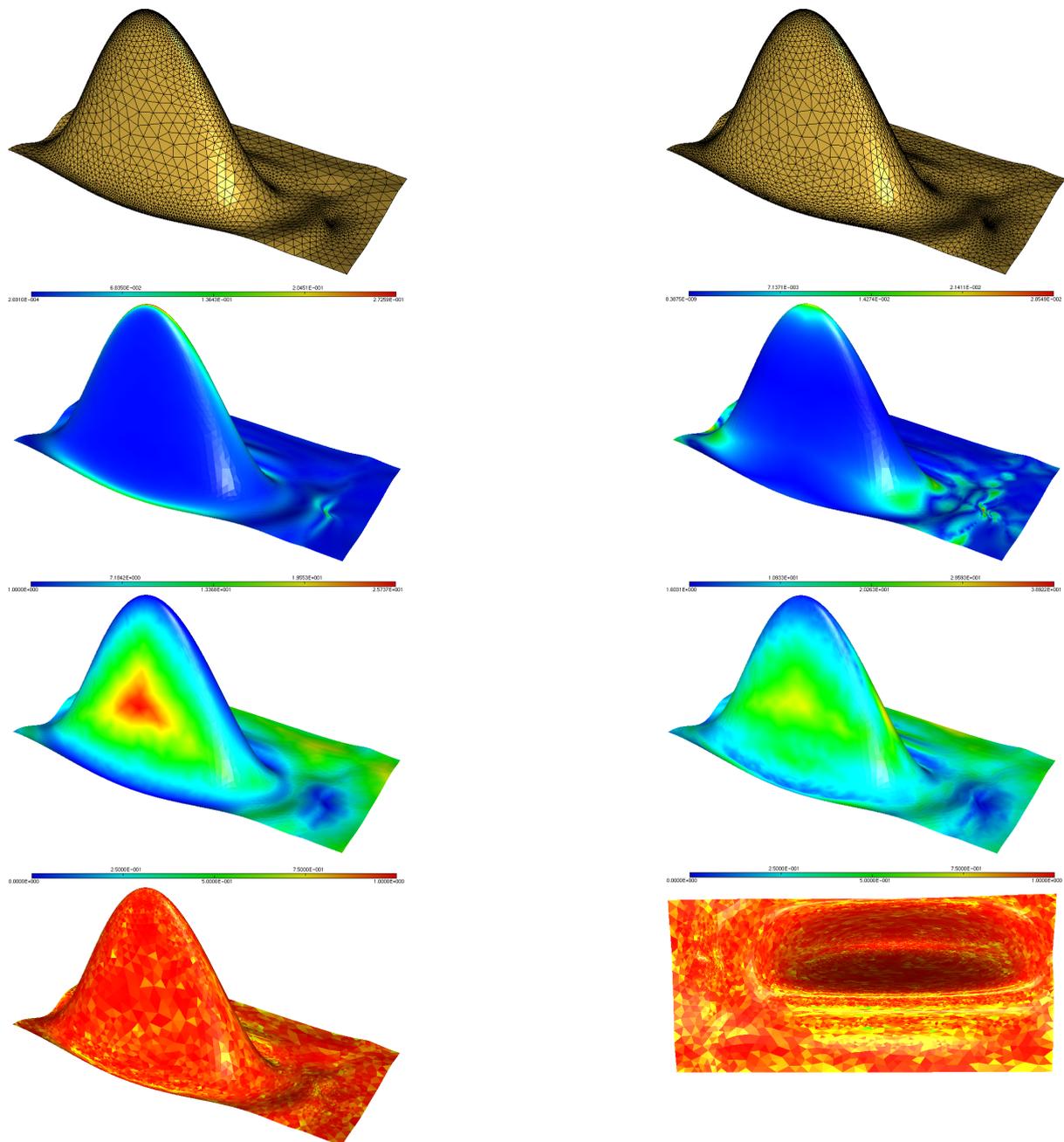
Une comparaison est effectuée entre le mailleur BLSURF et l'algorithme d'adaptation de maillage à iso-paramètres sur la figure B.4. On peut voir la méthode frontale de BLSURF dans les mailles en partant des frontières vers l'intérieur. L'adaptation montre un maillage non-structuré. Le nombre de nœuds est légèrement plus faible pour l'adaptation de maillage par rapport à BLSURF. Cette tendance s'explique par l'absence de fusion de fronts dans la méthode adaptative. La présence de la configuration, nombre de nœuds voisins d'un nœud égal à 4, est beaucoup plus élevée dans la méthode adaptative que pour BLSURF. Ce phénomène s'explique par le casser d'arête qui crée cette configuration à quatre voisins dans la méthode adaptative.



**Figure B.4** Adaptation d'une bosse — Maillage généré avec BLSURF vue de dessus en haut. Maillage adapté à iso-paramètres vue de dessus en bas.

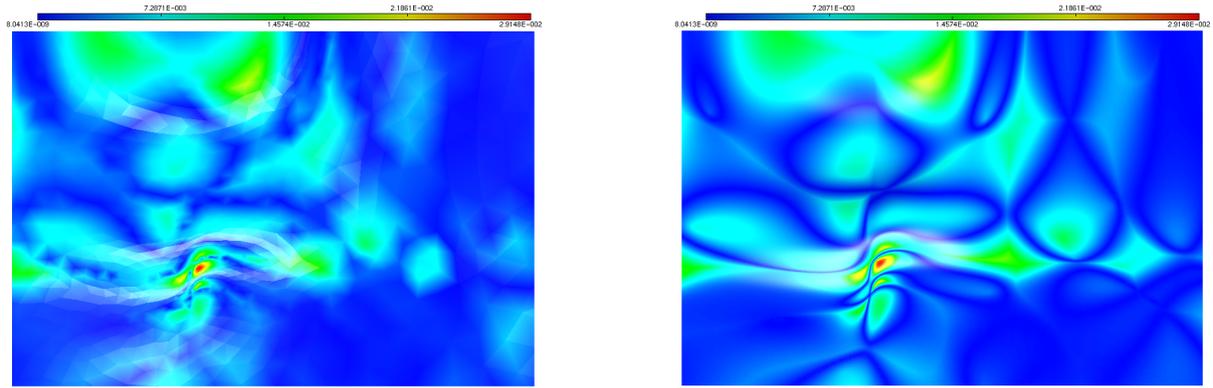
La figure B.5 montre l'adaptation de maillage anisotrope de la bosse à partir d'un maillage isotrope. On s'aperçoit que les champs de courbure sont captés correctement

par les champs de taille. De plus la qualité en forme anisotrope des éléments est très bonne. Cependant l'écart angulaire et la taille minimale ne sont pas assez fins pour capter correctement le champ  $\kappa_2$ .



**Figure B.5** Adaptation d'une bosse — Maillage isotrope initial en haut à gauche. Maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  en haut à droite. Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$ . Qualité en forme anisotrope des éléments avec vue de dessus en bas.

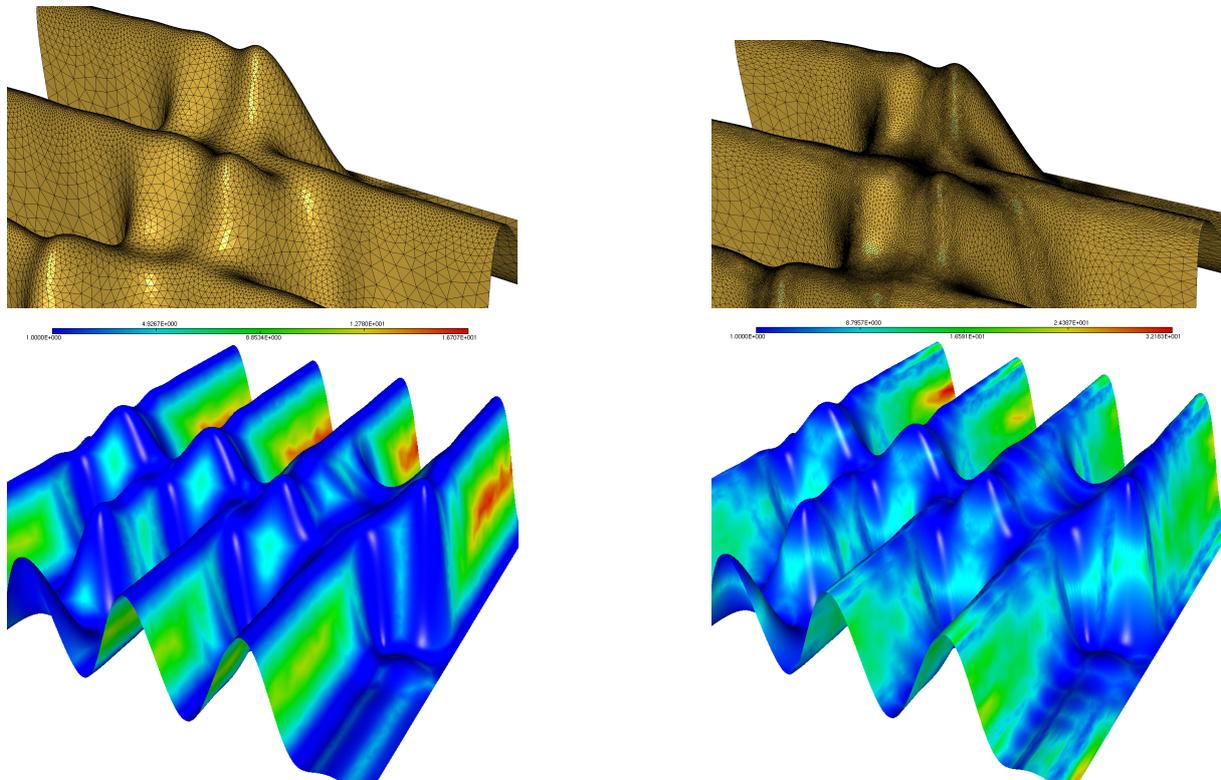
La figure B.6 compare le champ de courbure  $\kappa_2$  entre une adaptation avec  $\theta = 2^\circ$ ,  $h_{min} = 1.0$  et une adaptation avec  $\theta = 0.1^\circ$ ,  $h_{min} = 0.1$ . Le champ est mieux capté avec un  $\theta$  faible et un  $h_{min}$  faible mais le nombre de nœuds est beaucoup plus élevé.



**Figure B.6** Adaptation d'une bosse — Comparaison de la carte de courbure  $\kappa_2$  obtenue par adaptation anisotrope avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  à gauche et avec un écart angulaire  $\theta = 0.1^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 0.1$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  à droite.

### B.3 Montagne

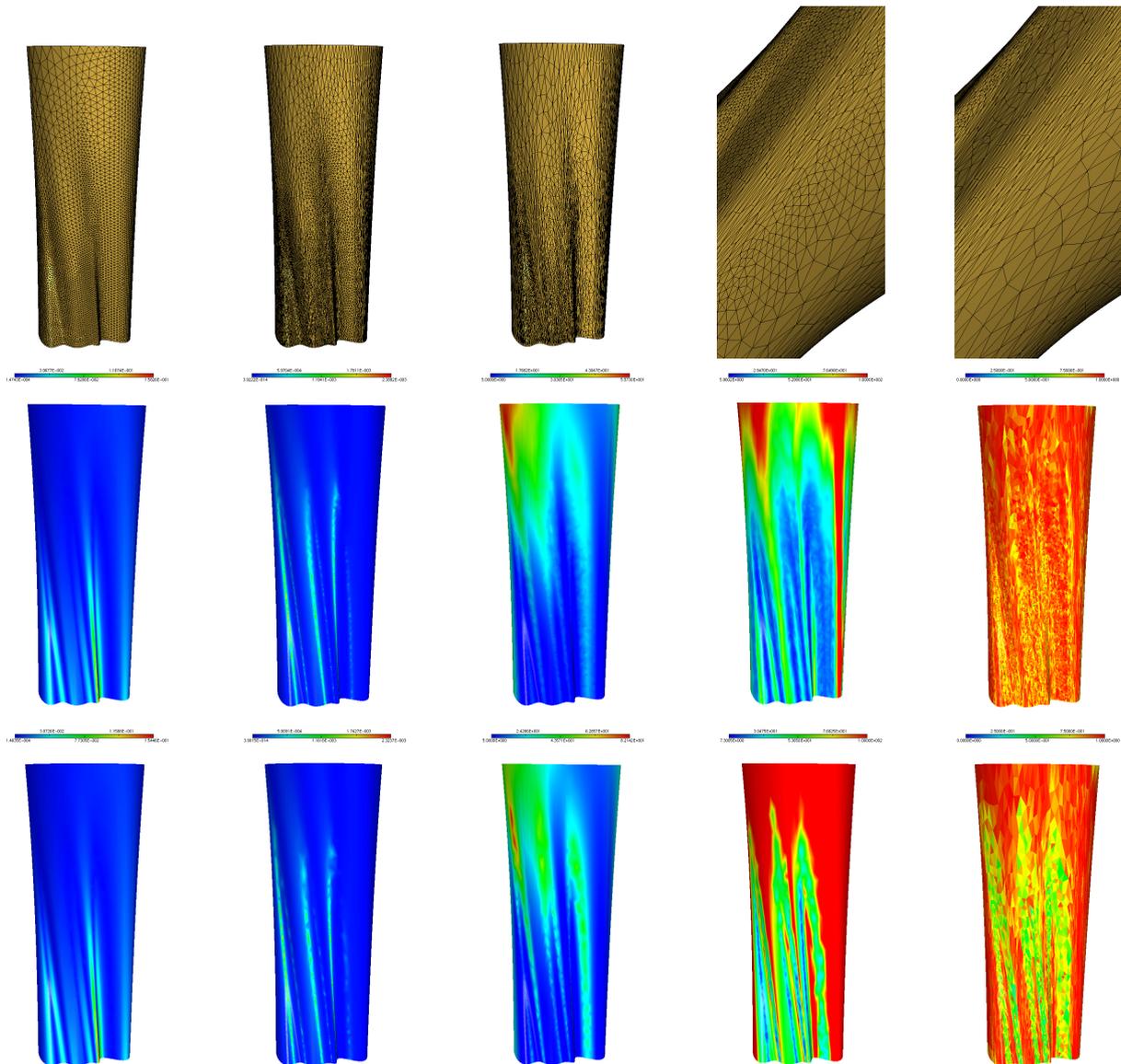
L'adaptation de maillage de la montagne montre la capacité de l'algorithme à adapter le maillage en créant des zones isotropes et anisotropes quand cela est nécessaire.



**Figure B.7** Adaptation d'une montagne — Maillage initial en haut à gauche. Maillage adapté en haut à droite. Carte de taille  $h_1$  et  $h_2$  du maillage adapté en bas.

## B.4 Drapé

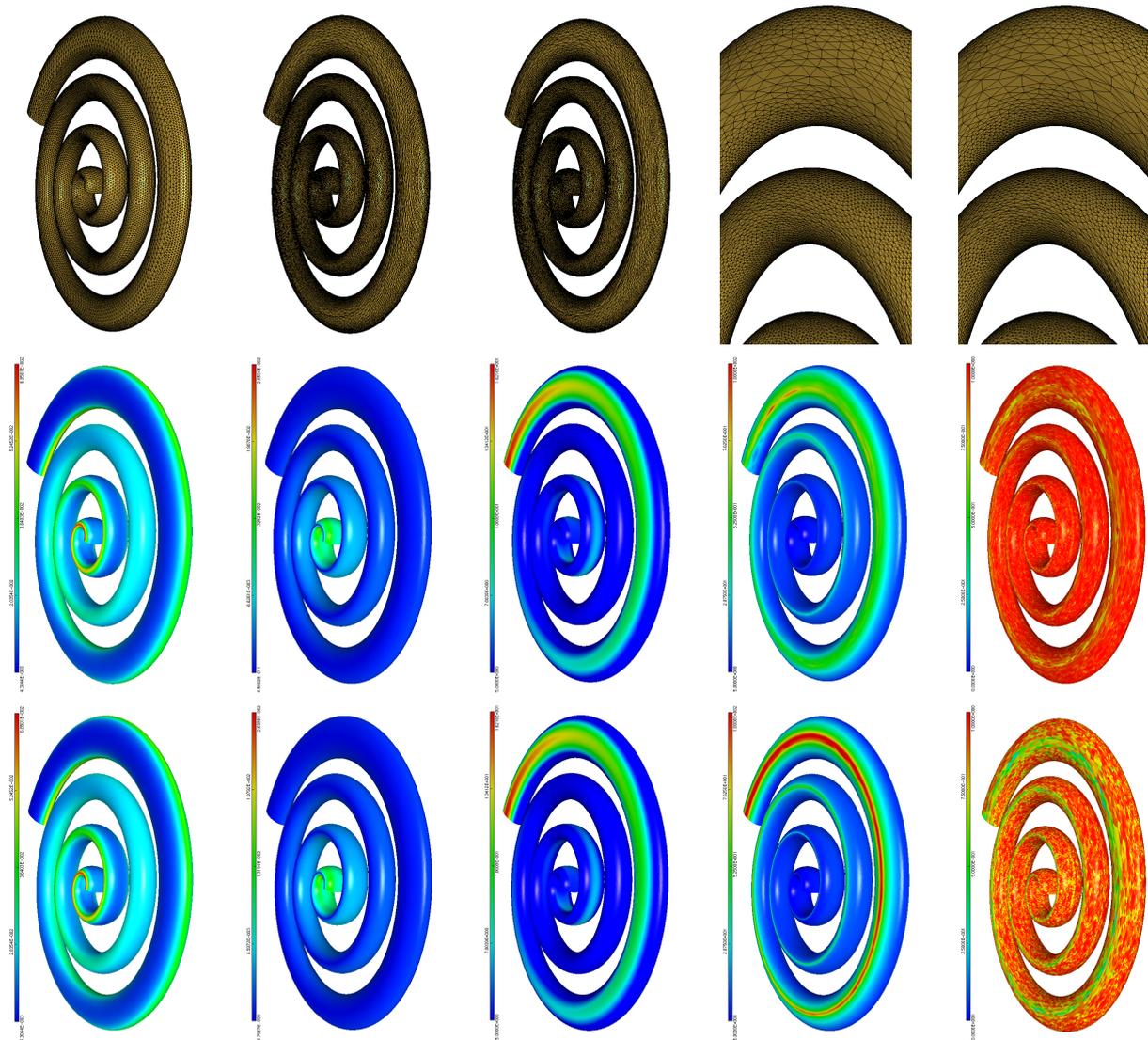
Les adaptations de maillages du drapé montrent une forte anisotropie avec des transitions brusques entre isotropie et anisotropie. Plus la valeur de la gradation augmente et plus la qualité en forme anisotrope des éléments se dégrade. Cependant les champs de courbure sont bien capturés même si la valeur de la gradation est grande.



**Figure B.8** Adaptations d'un drapé — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.8$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ . Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté avec  $G = 1.2$  au milieu et  $G = 1.8$  en bas.

## B.5 Serpentin

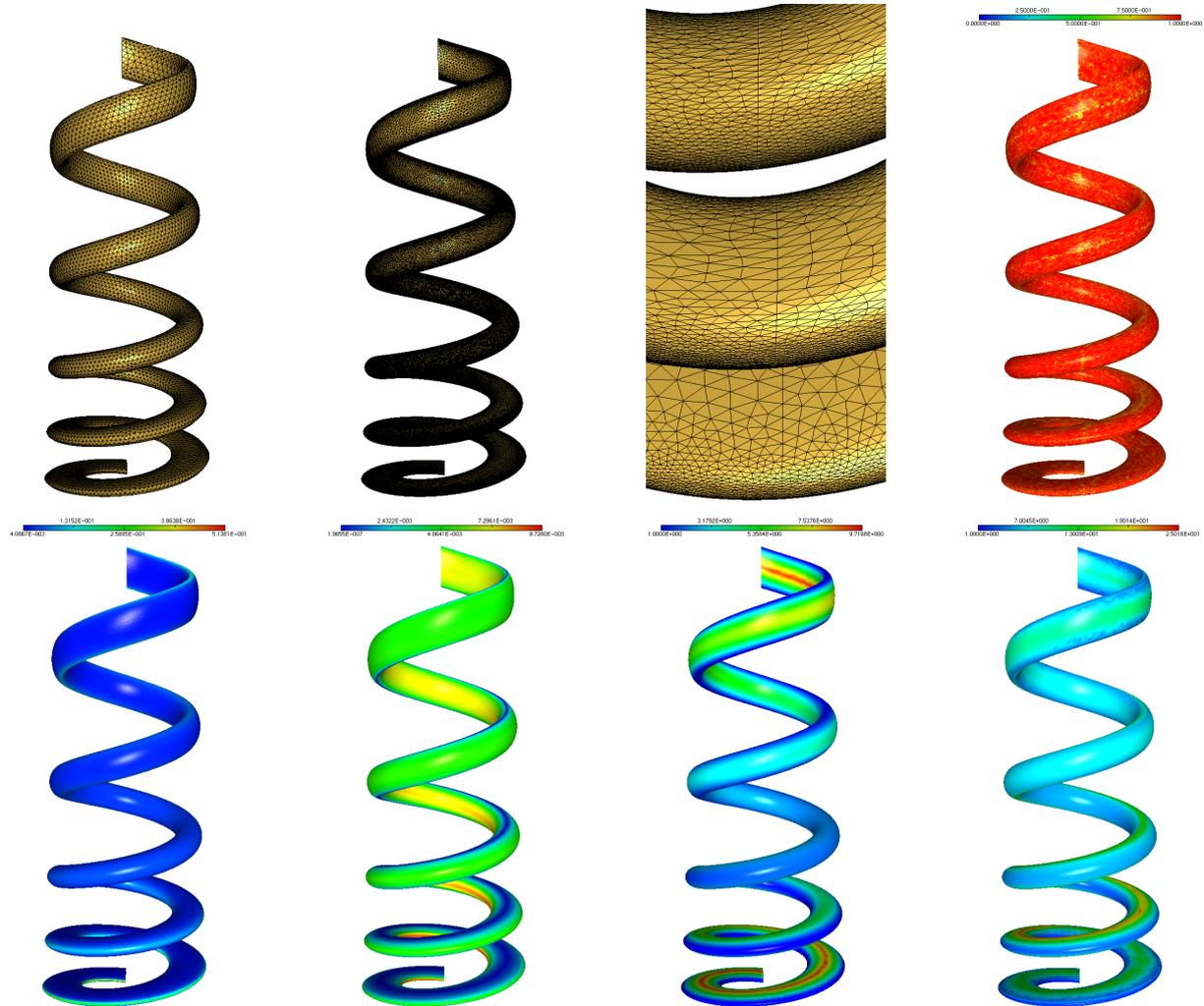
Les adaptations de maillages du serpentin présentent une évolution constante de l'anisotropie avec des transitions douces entre isotropie et anisotropie. L'augmentation de la valeur de gradation ne semble affecter que la taille  $h_2$ . En outre la qualité en forme anisotrope des éléments se dégrade avec cette augmentation. Comme le tore, la qualité en forme anisotrope des éléments est de plus mauvaise qualité quand il y a des discontinuités dans les courbures, à savoir la courbure  $\kappa_2$  qui s'annule.



**Figure B.9** Adaptations d'un serpentin — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.8$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ . Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté avec  $G = 1.2$  au milieu et  $G = 1.8$  en bas.

## B.6 Ressort

L'adaptation de maillage du ressort à section évolutive étaye les capacités de l'algorithme à adapter des formes diverses.



**Figure B.10** Adaptation d'un ressort — En haut de gauche à droite, maillage initial, maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 5.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 100.0$ , zoom et qualité en forme anisotrope des éléments du maillage adapté. En bas cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$ .



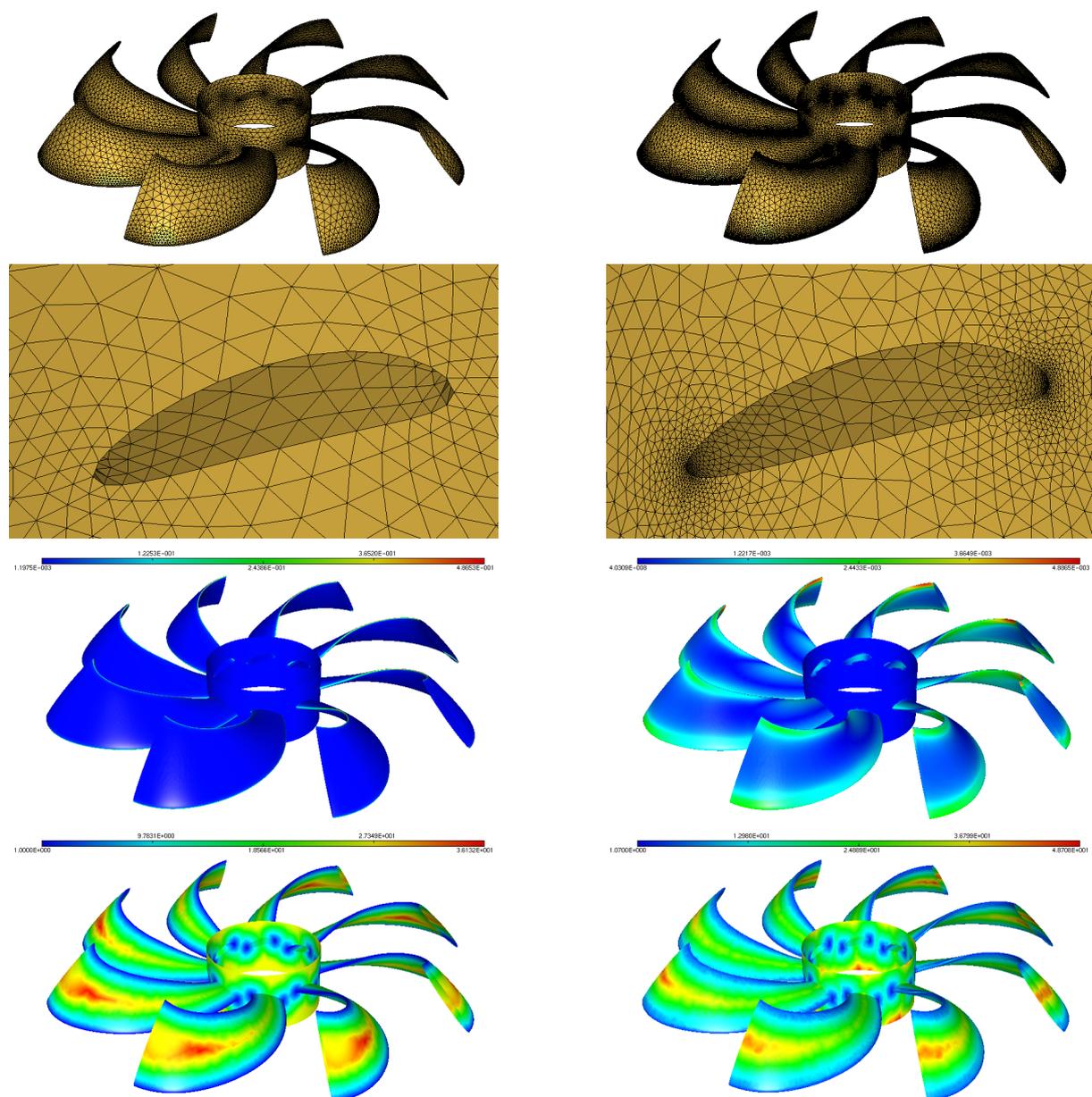
# Annexe C

## Adaptations de maillages sur surfaces complexes

Cette annexe rassemble l'ensemble des adaptations anisotropes de maillages à partir de maillages isotropes de surfaces complexes avec notamment des raccords de surfaces  $C_0$ . D'abord le maillage d'une hélice à huit pales est adapté pour vérifier la diffusion des tailles par la correction  $\mathcal{H}$ -choc entre les surfaces de raccord  $C_0$ . Ensuite une forme plus complexe composée principalement d'intersections cylindriques est testée pour vérifier la bonne diffusion des tailles lorsque l'anisotropie est forte ainsi que la bonne mise à jour des types d'arête lors de l'adaptation. Enfin le maillage d'une théière, faisant référence à la théière de l'Utah de Martin Newell, est adapté pour montrer l'efficacité de l'adaptation de maillage sur des géométries complexes.

## C.1 Hélice

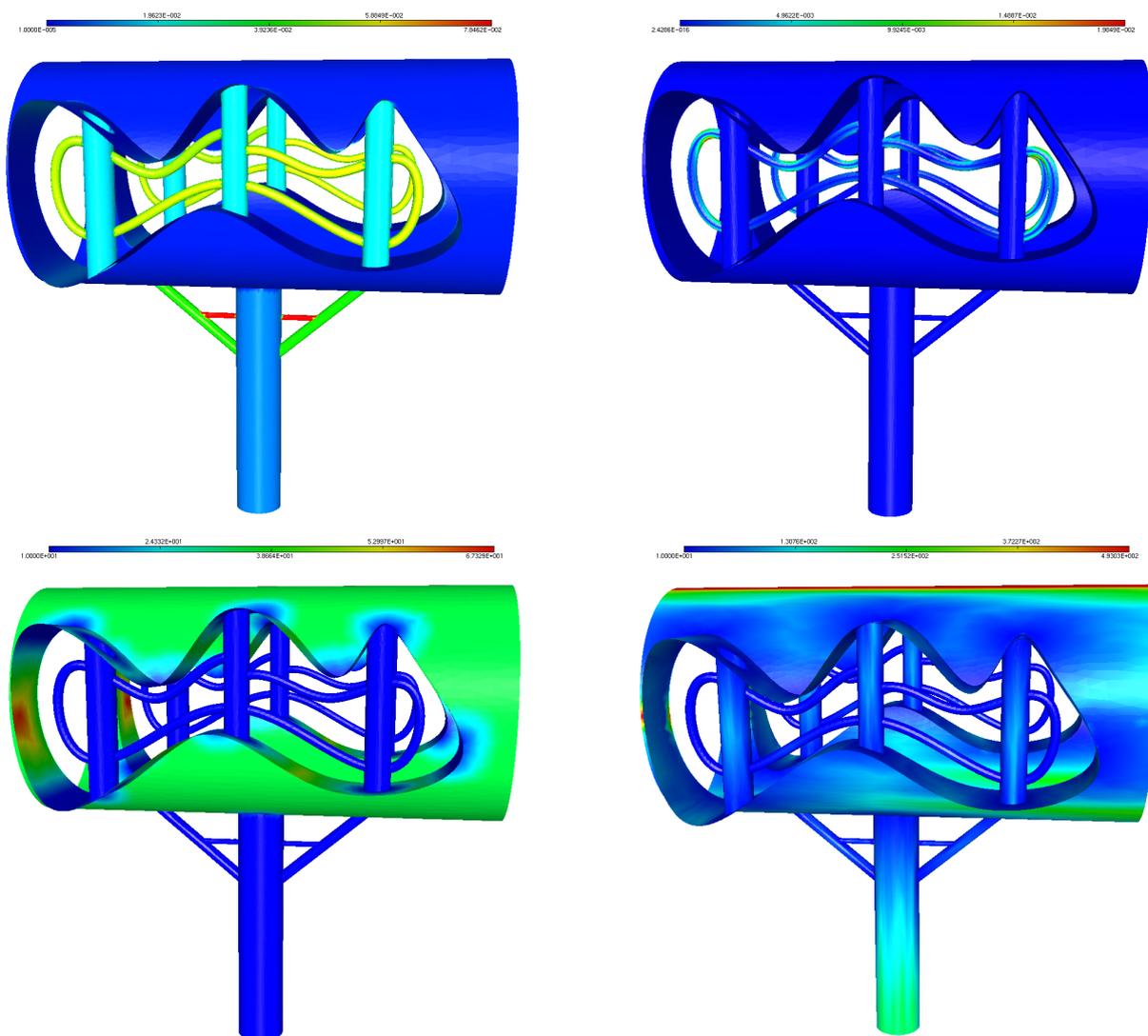
L'adaptation de maillage de l'hélice montre la dilution des petites tailles des pales vers des grandes tailles sur le moyeu central pour les cartes de tailles  $h_1$  et  $h_2$ .



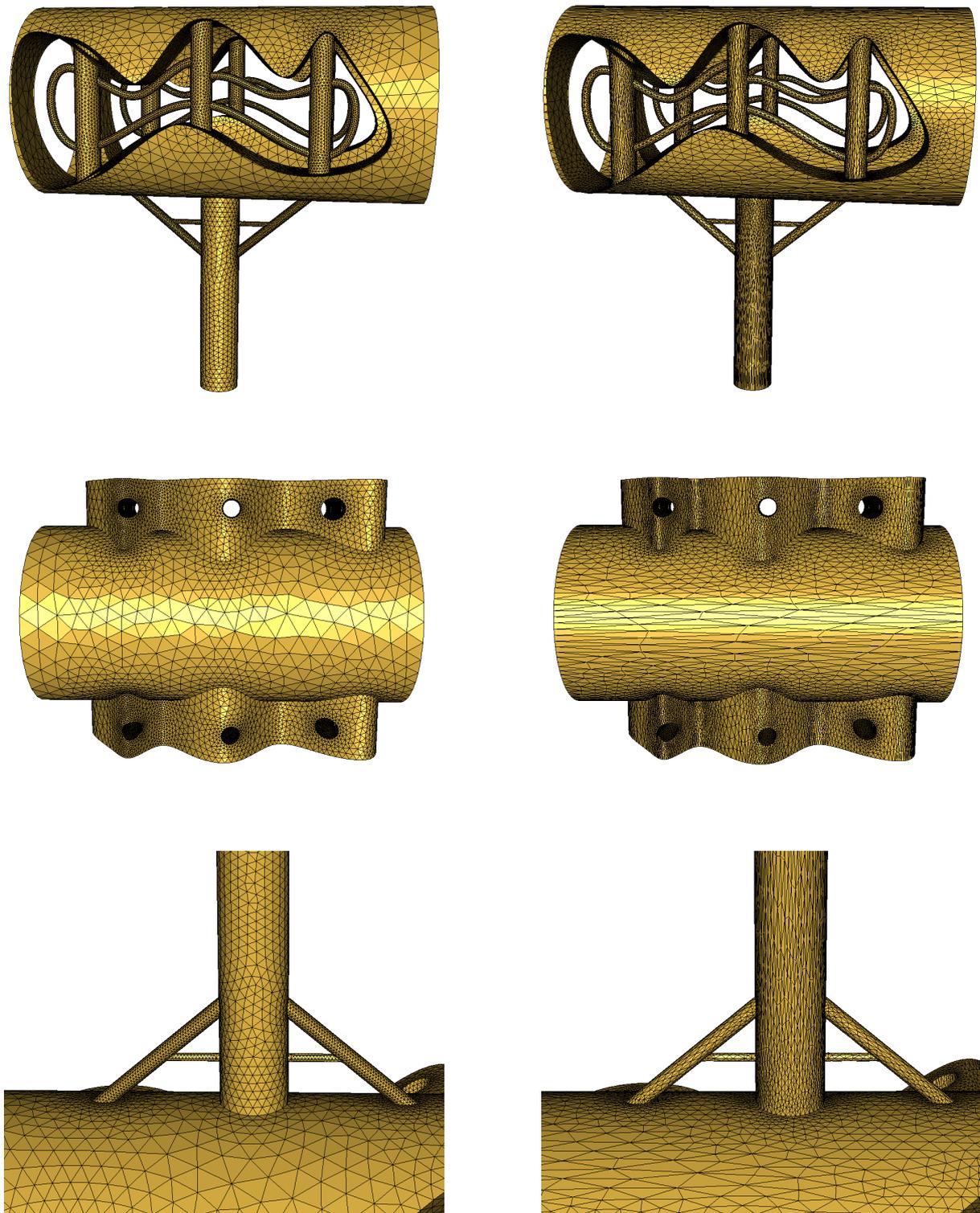
**Figure C.1** Adaptation d'une hélice — Maillage initial et maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  avec zooms en haut. Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en dessous. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  en bas.

## C.2 Intersections cylindriques

L'adaptation de maillage d'intersections cylindriques présente un remaillage sur 52 carreaux surfaciques. L'opérateur de projection a fonctionné correctement. Il n'y a pas eu d'erreurs dans la mise à jour des types d'arête. L'adaptation est un succès.

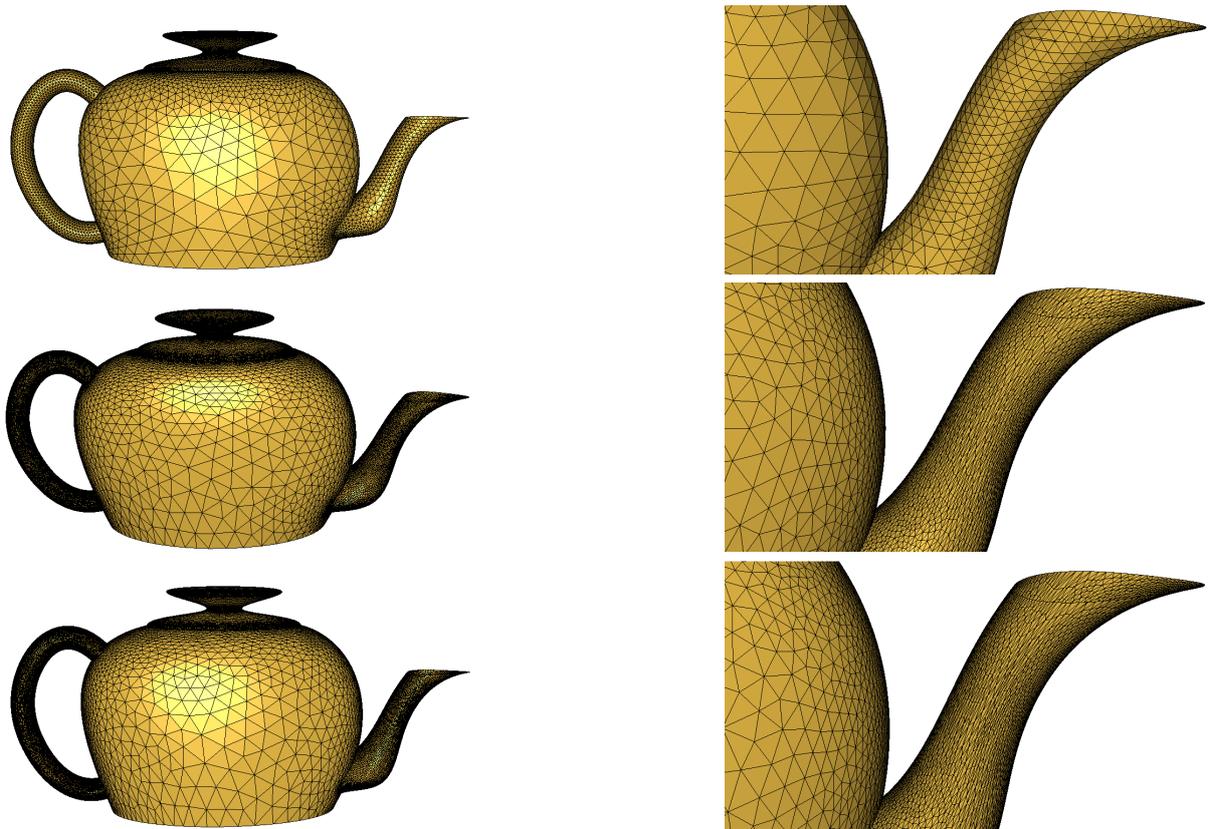


**Figure C.2** Adaptation d'intersections cylindriques — Maillage adapté. Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en haut. Cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  en bas.

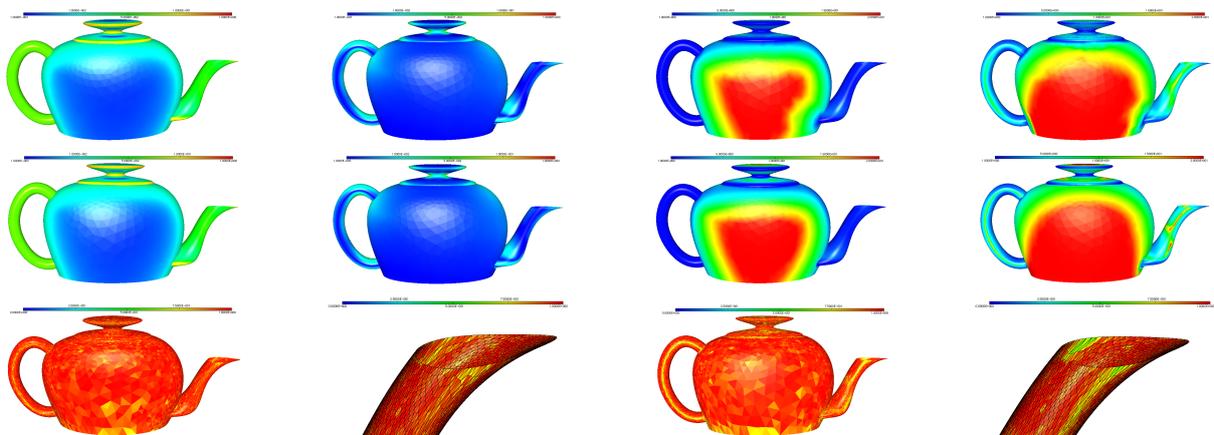


**Figure C.3** Adaptation d'intersections cylindriques — Maillage initial et maillage anisotrope adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 10.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\,000.0$  avec zooms.

## C.3 Théière



**Figure C.4** Adaptations d'une théière — Maillage initial en haut. Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.2$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\ 000.0$  au milieu. Maillage adapté avec un écart angulaire  $\theta = 2^\circ$ , une gradation  $G = 1.8$ , une taille minimale  $h_{min} = 1.0$  et une taille maximale  $h_{max} = 1\ 000.0$  en bas.



**Figure C.5** Adaptations d'une théière — Cartes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , cartes de taille  $h_1$  et  $h_2$  avec  $G = 1.2$  en haut et  $G = 1.8$  en dessous. Qualité en forme anisotrope des éléments en bas avec  $G = 1.2$  à droite et  $G = 1.8$  à gauche.



# Bibliographie

- [1] ALAUZET, F., BOREL-SANDOU, S., DAUMAS, L., DERVIEUX, A., DINH, Q., KLEINVELD, S., LOSEILLE, A., MESRI, Y., AND ROGÉ, G. Multimodel design strategies applied to sonic boom reduction. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* 17, 1-2 (2008), 245–269.
- [2] BARRAL, N. *Time-accurate anisotropic mesh adaptation for three-dimensional moving mesh problems*. PhD thesis, 2015.
- [3] BAUM, J., LUO, H., LOEHNER, R., GOLDBERG, E., FELDHUN, A., BAUM, J., LUO, H., LOEHNER, R., GOLDBERG, E., AND FELDHUN, A. Application of unstructured adaptive moving body methodology to the simulation of fuel tank separation from an f-16 fighter. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (1997), p. 166.
- [4] BEALL, M. W., AND SHEPHARD, M. S. A general topology-based mesh data structure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 9 (1997), 1573–1596.
- [5] BELME, A., ALAUZET, F., AND DERVIEUX, A. An a priori anisotropic goal-oriented error estimate for viscous compressible flow and application to mesh adaptation. *Journal of Computational Physics* 376 (2019), 1051–1088.
- [6] BIBB, K., GNOFFO, P., PARK, M., AND JONES, W. Parallel, gradient-based anisotropic mesh adaptation for re-entry vehicle configurations. In *9th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference* (2006), p. 3579.
- [7] BISSUEL, A. *Résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées pour l'aéroélasticité, l'optimisation de forme et l'aéroacoustique*. PhD thesis, Paris Saclay, 2018.
- [8] BOISSONNAT, J.-D., AND YVINEC, M. *Algorithmic geometry*. Cambridge university press, 1998.
- [9] BOROUCAKI, H., AND GEORGE, P. L. *Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 1 : Fonctions de forme, triangulations et modélisation géométrique*, vol. 1. ISTE editions, 2017.
- [10] BOROUCAKI, H., GROSGES, T., AND BARCHIESI, D. Improved 3d adaptive remeshing scheme applied in high electromagnetic field gradient computation. *Finite Elements in Analysis and Design* 46, 1-2 (2010), 84–95.
- [11] BOROUCAKI, H., HECHT, F., AND FREY, P. J. Mesh gradation control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43, 6 (1998), 1143–1165.
- [12] BOROUCAKI, H., LAUG, P., CHEROUAT, A., AND SAANOUNI, K. Adaptive remeshing in large plastic strain with damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63, 1 (2005), 1–36.

- [13] BOTTASSO, C. L. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60, 3 (2004), 597–639.
- [14] BOUSSETTA, R., COUPEZ, T., AND FOURMENT, L. Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195, 48-49 (2006), 6626–6645.
- [15] BROWN, P. N. A local convergence theory for combined inexact-newton/finite-difference projection methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 24, 2 (1987), 407–434.
- [16] BUHMANN, M. D. *Radial basis functions : theory and implementations*, vol. 12. Cambridge university press, 2003.
- [17] CASTRO-DIAZ, M., AND HECHT, F. Anisotropic surface mesh generation.
- [18] CHALOT, F. Encyclopaedia of computational mechanics, chapitre industrial aerodynamics, 2004.
- [19] CHALOT, F., HUGHES, T. J., AND SHAKIB, F. Symmetrization of conservation laws with entropy for high-temperature hypersonic computations. *Computing systems in engineering* 1, 2-4 (1990), 495–521.
- [20] CHARTON, J. *Etude de caractéristiques saillantes sur des maillages 3D par estimation des normales et des courbures discrètes*. PhD thesis, Bordeaux, 2014.
- [21] COUPEZ, T. *Grandes transformations et remaillage automatique*. PhD thesis, Paris, ENMP, 1991.
- [22] COUPEZ, T. Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue européenne des éléments finis* 9, 4 (2000), 403–423.
- [23] COUPEZ, T., DIGONNET, H., AND DUCLOUX, R. Parallel meshing and remeshing. *Applied mathematical modelling* 25, 2 (2000), 153–175.
- [24] DAUMAS, L., DINH, Q., KLEINVELD, S., AND ROGÉ, G. Automatic shape optimization using parametric cad applied to sonic boom reduction. In *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2007), p. 1919.
- [25] DECK, S. Recent improvements in the zonal detached eddy simulation (zdes) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 26, 6 (2012), 523–550.
- [26] DÉLERY, J., AND REYNALD, B. *Traité d’aérodynamique compressible*. Hermès Science publications, 2008.
- [27] DIGONNET, H., COUPEZ, T., LAURE, P., AND SILVA, L. Massively parallel anisotropic mesh adaptation. *The International Journal of High Performance Computing Applications* 33, 1 (2019), 3–24.
- [28] DINH, Q. V., ROGÉ, G., SEVIN, C., AND STOUFFLET, B. Shape optimization in computational fluid dynamics. *Revue Européenne des Éléments Finis* 5, 5-6 (1996), 569–594.
- [29] DOBRZYNSKI, C., MELCHIOR, M., DELANNAY, L., AND REMACLE, J.-F. A mesh adaptation procedure for periodic domains. *International journal for numerical methods in engineering* 86, 12 (2011), 1396–1412.
- [30] FARIN, G. *Courbes et surfaces pour la CGAO*. No. BOOK. Masson, 1992.
- [31] FRAZZA, L. *3D anisotropic mesh adaptation for Reynolds Averaged Navier-Stokes simulations*. PhD thesis, Sorbonne Université, UPMC, 2018.

- [32] FREY, P. J., AND BOROUCAKI, H. Geometric surface mesh optimization. *Computing and visualization in science* 1, 3 (1998), 113–121.
- [33] FREY, P. J., AND GEORGE, P.-L. *Maillages : applications aux éléments finis*. Hermès Science Publications, 1999.
- [34] GAUCI, E. *Goal-oriented metric-based mesh adaptation for unsteady CFD simulations involving moving geometries*. PhD thesis, 2018.
- [35] GEORGE, P., HECHT, F., AND VALLET, M. Creation of internal points in voronoi’s type method. control adaptation. *Advances in engineering software and workstations* 13, 5-6 (1991), 303–312.
- [36] GEORGE, P.-L., AND BOROUCAKI, H. *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. 1997.
- [37] GEORGE, P.-L., AND BOROUCAKI, H. Métrique et qualité d’un simplexe. *Comptes Rendus Mathématique* 355, 1 (2017), 105–112.
- [38] GEORGE, P. L., BOROUCAKI, H., ALAUZET, F., LAUG, P., LOSEILLE, A., AND MARÉCHAL, L. *Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 2 : Métriques, maillages et adaptation de maillages*, vol. 2. ISTE editions, 2018.
- [39] GOU, J., YUAN, X., AND SU, X. Adaptive mesh refinement method based investigation of the interaction between shock wave, boundary layer, and tip vortex in a transonic compressor. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering* 232, 4 (2018), 694–715.
- [40] GRUAU, C., AND COUPEZ, T. 3d tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 48-49 (2005), 4951–4976.
- [41] HAMANN, B. Curvature approximation for triangulated surfaces. In *Geometric modelling*. Springer, 1993, pp. 139–153.
- [42] HARTEN, A. On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy. *Journal of computational physics* 49 (1983), 151–164.
- [43] HECHT, F., AND MOHAMMADI, B. Mesh adaption by metric control for multi-scale phenomena and turbulence. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (1997), p. 859.
- [44] HERSKOVITS, J., LAPORTE, E., LE TALLEC, P., AND SANTOS, G. A quasi-newton interior point algorithm applied to constrained optimum design in computational fluid dynamics. *Revue Européenne des Éléments Finis* 5, 5-6 (1996), 595–617.
- [45] HUANG, W. Metric tensors for anisotropic mesh generation. *Journal of computational physics* 204, 2 (2005), 633–665.
- [46] HUANG, W., KAMENSKI, L., AND LANG, J. A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates. *Journal of Computational Physics* 229, 6 (2010), 2179–2198.
- [47] HUGHES, T. J., FRANCA, L., AND MALLET, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. symmetric forms of the compressible euler and navier-stokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 54, 2 (1986), 223–234.
- [48] KARYPIS, G., AND KUMAR, V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on scientific Computing* 20, 1 (1998), 359–392.

- [49] KIM, H.-M., AND KIM, K.-Y. Shape optimization of three-dimensional channel roughened by angled ribs with rans analysis of turbulent heat transfer. *International Journal of heat and mass transfer* 49, 21-22 (2006), 4013–4022.
- [50] KLEINVELD, S., ROGÉ, G., DAUMAS, L., AND DINH, Q. Differentiated parametric cad used within the context of automatic aerodynamic design optimization. In *12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference* (2008), p. 5952.
- [51] KOTANI, M., NAITO, H., AND OMORI, T. A discrete surface theory. *Computer Aided Geometric Design* 58 (2017), 24–54.
- [52] KOUHI, M., BUGEDA CASTELLTORT, G., LEE, D., AND OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA, E. Aerodynamic shape optimization using adaptive remeshing. In *2nd International Conference on Engineering Optimization* (2010), pp. 1–10.
- [53] LAUG, P. *Contribution à la génération automatique de maillages de qualité pour la simulation numérique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2006.
- [54] LAUG, P., AND BOROUCAKI, H. Interpolating and meshing 3d surface grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58, 2 (2003), 209–225.
- [55] LAUG, P., AND BOROUCAKI, H. Construction d’un champ continu de métriques. *Comptes Rendus Mathématique* 351, 15-16 (2013), 639–644.
- [56] LEVASSEUR, V. *Simulation des grandes échelles en éléments finis stabilisés : une approche variationnelle multi-échelles*. PhD thesis, Paris 6, 2007.
- [57] LIONS, J. L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.
- [58] LLOYD, S. Least squares quantization in pcm. *IEEE transactions on information theory* 28, 2 (1982), 129–137.
- [59] LÖHNER, R. Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing. *Computing Systems in Engineering* 1, 2-4 (1990), 257–272.
- [60] LOSEILLE, A. *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008.
- [61] LOSEILLE, A., ALAUZET, F., AND MENIER, V. Unique cavity-based operator and hierarchical domain partitioning for fast parallel generation of anisotropic meshes. *Computer-Aided Design* 85 (2017), 53–67.
- [62] LOSEILLE, A., AND LÖHNER, R. Cavity-based operators for mesh adaptation. In *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (2013), p. 152.
- [63] MALLET, M. *A finite element method for computational fluid dynamics*. PhD thesis, Stanford University Stanford, CA, 1985.
- [64] MARTIN, L. *Conception aérodynamique robuste*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2010.
- [65] MAVRIPLIS, D. On convergence acceleration techniques for unstructured meshes. In *29th AIAA, Fluid Dynamics Conference* (1998), p. 2966.
- [66] MENIER, V. *Mesh Adaptation For the High Fidelity Prediction of Viscous Phenomena and Their Interactions. Application to Aeronautics*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2015.

- [67] MENIER, V., LOSEILLE, A., AND ALAUZET, F. Cfd validation and adaptivity for viscous flow simulations.
- [68] MICHAL, T., AND KRAKOS, J. Anisotropic mesh adaptation through edge primitive operations. In *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (2012), p. 159.
- [69] MICHAL, T. R., KAMENETSKIY, D. S., AND KRAKOS, J. Generation of anisotropic adaptive meshes for the first aiaa geometry and mesh generation workshop. In *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting* (2018), p. 0658.
- [70] NORMAND, P.-E. *Application de méthodes d'ordre élevé en éléments finis pour l'aérodynamique*. PhD thesis, Bordeaux 1, 2011.
- [71] OLIVIER, G. *Anisotropic metric-based mesh adaptation for unsteady CFD simulations involving moving geometries*. PhD thesis, 2011.
- [72] OLIVIER, G., AND ALAUZET, F. A new changing-topology ale scheme for moving mesh unsteady simulations. In *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (2011), p. 474.
- [73] PARK, M. A., LOSEILLE, A., KRAKOS, J., MICHAL, T. R., AND ALONSO, J. J. Unstructured grid adaptation : status, potential impacts, and recommended investments towards cfd 2030. In *46th AIAA fluid dynamics conference* (2016), p. 3323.
- [74] PEUCKER, T. K., AND CHRISMAN, N. Cartographic data structures. *The American Cartographer* 2, 1 (1975), 55–69.
- [75] PIEGL, L., AND TILLER, W. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [76] REUTHER, J. J., JAMESON, A., ALONSO, J. J., RIMLINGER, M. J., AND SAUNDERS, D. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 1. *Journal of aircraft* 36, 1 (1999), 51–60.
- [77] ROGÉ, G., AND MARTIN, L. Goal-oriented anisotropic grid adaptation. *Comptes Rendus Mathématique* 346, 19-20 (2008), 1109–1112.
- [78] SAHNI, O., JANSEN, K. E., TAYLOR, C. A., AND SHEPHARD, M. S. Automated adaptive cardiovascular flow simulations. *Engineering with Computers* 25, 1 (2009), 25.
- [79] SEO, J. H., SEOL, D. M., LEE, J. H., AND RHEE, S. H. Flexible cfd meshing strategy for prediction of ship resistance and propulsion performance. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2, 3 (2010), 139–145.
- [80] SKINNER, S. N., AND ZARE-BEHTASH, H. State-of-the-art in aerodynamic shape optimisation methods. *Applied Soft Computing* 62 (2018), 933–962.
- [81] TADMOR, E. Skew-selfadjoint form for systems of conservation laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 103, 2 (1984), 428–442.
- [82] YANO, M., AND DARMOFAL, D. L. An optimization-based framework for anisotropic simplex mesh adaptation. *Journal of Computational Physics* 231, 22 (2012), 7626–7649.
- [83] YSER, P. *Simulation numérique aéroacoustique d'écoulements par une approche LES d'ordre élevé en éléments finis non structurés*. PhD thesis, Lyon, 2017.

# Quentin VAN AKEN

Doctorat : Matériaux, Mécanique, Optique, Nanotechnologie

Année 2020

## Adaptation de maillages pour l'optimisation de formes aérodynamiques

Dans le contexte de boucle d'optimisation automatique de formes aérodynamiques, la précision des solutions dépend étroitement de la qualité des maillages. L'adaptation de maillage permet, de manière automatique, de contrôler cette précision en modifiant la discrétisation du domaine de calcul. Ce travail présente l'adaptation de maillage isotrope et anisotrope ainsi que son application dans cette boucle d'optimisation après déformation de maillage. Le maillage est adapté en utilisant des opérateurs de modifications locales tels que la bascule, la condensation, la subdivision d'arêtes et le repositionnement des nœuds pour atteindre le maillage unité dans la métrique prescrite. Dans le cas 2d plan, la construction de la métrique anisotrope est basée sur la taille tangentielle des arêtes de la peau du corps ou du profil engraisé et la norme du déplacement issue de la fonction à base radiale utilisé lors du déplacement d'un corps. Dans le cas 3d surfacique, la construction des cartes de tailles de la métrique géométrique anisotrope est effectuée à partir des courbures de la surface déformée. Dans le cas d'adaptation de maillage structuré, un nouveau critère de qualité en forme anisotrope des éléments est proposé pour aligner les éléments suivant les directions principales.

Plusieurs exemples bidimensionnels et tridimensionnels sur des géométries complexes viennent illustrer la pertinence de l'approche proposée. En particulier, elle est appliquée à des problèmes d'optimisation 2d plan d'un tri-corps et 3d surfacique du *Generic Business Jet*.

Mots clés : calcul adaptatif – anisotropie – grilles (analyse numérique) – topologie de l'espace métrique – Navier-Stokes, équations de.

## Mesh Adaptation for the Optimization of Aerodynamic Shapes

In the context of an automatic optimization loop for aerodynamic shapes, the accuracy of a solution depends closely on the mesh quality. Mesh adaptation allows this accuracy to be automatically controlled by modifying the computational domain discretization. This work presents isotropic and anisotropic mesh adaptation and its application in this optimization loop after mesh deformation. The mesh is adapted by using local modification operators such as swapping, condensation, subdivision of edges and relocating nodes to reach a unit mesh in the prescribed metric. In the 2d plane case, the construction of the anisotropic metric is based on the tangential size of the edges of the body skin or the fattened airfoil and the norm of the displacement resulting from the radial basis function used during the displacement of a body. In the 3d surface case, the construction of the size maps of the anisotropic geometric metric is carried out from the curvatures of the deformed surface. In the case of adaptation of structured mesh, a new anisotropic quality criterion of the elements is proposed to align the elements following the main directions.

Several two-dimensional and three-dimensional examples on complex geometries are provided so as to emphasize the relevance of the proposed approach. In particular, it is applied to 2d plan optimization problems of a tri-body and applied to 3d surface of the *Generic Business Jet*.

Keywords: adaptive computing – anisotropy – numerical grid generation (numerical analysis) – distance geometry – Navier-Stokes equations.

Thèse réalisée en partenariat entre :

