



HAL
open science

Dynamique de bulles isolées et interactions de bulles multiples dans des suspensions granulaires confinées entre deux plaques

Christopher Madec

► **To cite this version:**

Christopher Madec. Dynamique de bulles isolées et interactions de bulles multiples dans des suspensions granulaires confinées entre deux plaques. Physique [physics]. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1116 . tel-03815124

HAL Id: tel-03815124

<https://theses.hal.science/tel-03815124v1>

Submitted on 14 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro national de Thèse : 2021LYSE1116

Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon

Opérée au sein de :

l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale N°52
École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Discipline : Physique

Soutenue publiquement le jeudi 08 juillet 2021 par

Christopher MADEC

**Dynamique de bulles isolées et interactions de
bulles multiples dans des suspensions granulaires
confinées entre deux plaques**

Devant le jury composé de :

Anne JUEL

Professeure

Rapportrice

Bloen METZGER

Chargé de Recherche

Rapporteur

Catherine BARENTIN

Professeure

Examinatrice

Hugues BODIGUEL

Professeur

Examinateur

Patricia ERN

Directrice de Recherche

Examinatrice

John Soundar Jerome JOSEPH

Maître de Conférences

Co-Directeur

Sylvain JOUBAUD

Maître de Conférences

Directeur



À toi Maxime, mon roux préféré

Remerciements

Je crois que j'ai le droit de dire un peu ce que je veux et sur autant de pages que je veux alors je tiens à dire merci

Aux membres du jury, merci d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse. À Anne et Bloen, merci pour votre lecture attentive, vos commentaires très constructifs sur le manuscrit, j'avais envie qu'il soit un peu comme un livre et je suis très content que vous l'ayez apprécié. À Catherine, Hugues et Patricia, merci (en plus d'Anne et Bloen) pour cette discussion pendant l'oral de thèse, pour vos remarques, questions et commentaires très pertinents, on aurait pu rester encore des heures à discuter de tout ça ;)

À Sylvain (Steve Joubs sur mon téléphone), tu es un ami avant d'être mon directeur de thèse. Je vais te le dire franchement, tu as cru en moi et tu as été la clé de ma réussite scolaire. L'Agrégation et la thèse sont deux choses très importantes qui ont été réussies car tu étais là, je ne sais toujours pas comment tu as pu voir en moi une personne capable de tout ça (surtout qu'en avril 2016 j'en foutais pas une et que mon seul but était de ne rater aucune soirée à l'ENS, et de surcroît tu voyais très bien que je ne venais pas à tes cours d'Ondes et Optique!). Tu as su me guider sans jamais me forcer, être sérieux quand il le fallait, lâcher prise aussi (c'est une vertu! Bon parfois John prenait le relais). J'en regrette même presque de ne plus travailler avec toi, cela va définitivement me manquer, et j'espère qu'on continuera de jouer, manger et boire ensemble!

À John, Jon, Jerome, J.J.S.J comme c'est écrit sur mon portable, merci de ta présence pendant cette thèse, j'espère t'avoir bien mis dans le bain de l'encadrement d'un thésard (c'était sportif!). Tes mots en fin de soutenance orale m'ont beaucoup touché, et même presque donnés envie de continuer dans la recherche (on ne sait jamais, peut-être je reviendrai buller). Je suis très admiratif de tes connaissances, ta capacité à comprendre, restituer, analyser, et tu as été aussi un modèle pendant cette thèse. Au delà du côté Bad Cop, qui en fait me plaisait très bien car au moins les choses sont dites de manière explicite (et du coup je comprends direct), tu as su m'aiguiller, me donner l'envie de comprendre encore plus. En soit, toutes ces qualités dont tu m'as fait part, je te les renvoie, car elles viennent en grande partie de toi.

À Benjamin M., bon courage pour prendre la suite de ma thèse, j'ai hâte de voir comment tu vas buller pendant 3 ans (fallait que je fasse la blague, désolé).

À Brivael, d'avoir été un stagiaire exemplaire qui en deux mois a vraiment fait pas mal de bon boulot! Bon courage pour la suite ;)

Aux membres du laboratoire qui m'ont accompagné durant ces trois années, Valérie, Eric (je vous dois des bières et des chocolats je n'oublie pas) pour ces échanges nombreux, Sébastien pour une expérience osée (peut-être marchera t-elle un jour!), Marc Moulin qui a designé et fabriqué la cellule de Hele-Shaw, ton travail a été impressionnant, merci beaucoup.

À Alexandra, à chaque fois que l'on fait un truc ensemble, ça part en cacahuète alors qu'aucun ingrédient n'est là pour que ça soit le cas!? Vivement les prochaines soirées (et repas) ensemble, j'ai l'impression qu'on aura jamais plus rien à se dire.

À Alexandre, tu m'as intronisé biquette puis bouc, notre histoire fut longue et mouvementée mais je te considère comme quelqu'un de formidable avec lequel j'ai envie de continuer à échanger (et jouer!).

À Alice, la première chose à laquelle j'ai pensé en commençant à écrire c'est "omg vazy on fait un sushi à volonté", prochaine fois ça part hein comme on dit! Merci de faire partie de ce groupe soudé des ami·es de La Baule, et trop cool qu'on continue de se voir, de profiter, pleurer, s'amuser ensemble!

À Anais, c'est fou que à peine on se connaissait que sur Facebook tu avais déjà ce surnom de "copilote de trottinette électronique". Depuis, on a fait mille autres farces et attrapes ensemble, et entre deux soirées nous voilà maintenant tous deux avec un thermomix et un abonnement Keepcool jpp. Plus sérieusement, j'aime beaucoup partager des choses simples (les recettes thermomix justement) comme très compliquées sur nos vies respectives, j'ai hâte que cela continue, que ce soit devant un bon kebabos ou une bierasse.

À Antoine, je te découvre de jour en jour, et je t'apprécie de plus en plus au fil du temps, j'aime beaucoup ta vision de la vie, ta force et ton soutien envers nous, que ce soit dans les bons ou les mauvais moments. Compter sur toi est un pléonasme car c'est dans ta nature, et je suis très fier d'être ami avec toi et de pouvoir partager plein de moments privilégiés.

À Antoine, j'écris ces phrases en finissant de regarder les trois heures d'interview d'Antoine D., je crois que je connaîtrais personne dont l'univers est si proche du mien, bon maintenant viens sur Lyon nous apprendre à mixer sur vinyle stp.bises tonton

À Asma, rayonnante, ravissante, vivement que l'occasion de prendre un Uber ensemble se présente (cette fois-ci je le payerai hein j'oublie pas), ces moments passés avec toi sont tellement singuliers et pourtant riches en émotions.

À Aurélien, d'une simplicité sans précédent, et toujours prêt à s'amuser (même pour faire un Monopoly avec des règles chelou), tu es mon influenceur préféré, et aussi un très bon ami! Par contre, ne cherche pas les frites dans le manuscrit de thèse, j'ai vérifié elle n'y sont pas ..

À Auriane, je n'oublierai jamais cette soirée à chanter Ascendant Vierge, toute façon quand on fait une soirée ensemble c'est toujours trop bien, j'espère que tu m'inviteras pour mixer en warm-up de Tachycardia ou la Taquinerie. Hâte des prochaines soirées ensemble!

À Cassandre, toujours partante pour s'amuser, dommage que Paris ne soit pas à 2 minutes de Lyon sinon j'espère on en profiterait tout le temps avec Alexandra Pichard. Merci d'être toi, on se voit vite sur Paname (ou ailleurs)!

À Chloé, merci d'avoir été présente une partie de ma vie, tu as construit ce que je suis, et malgré les douleurs que cela a pu engendrer pour nous, je t'en serais jamais aussi reconnaissant.

À Clarisse, nous voilà maintenant propriétaires! On a des vies si différentes maintenant mais toujours reliées d'une façon ou d'une autre, j'ai hâte de visiter ta demeure et voir tes chats.

À Corentin, ton unicité et ton expérience de vie, ton sourire et ton étreinte, ton réalisme mais tes rêves font de toi une personne très importante à mes yeux. Tu m'as fait comprendre la bulle de vie qui m'entoure, et la nécessité de la préserver ou de la faire évoluer. Merci à toi, j'ai hâte d'écouter tes prochains sets à dire "mais omg comment elle trouve de genre de tracks c'est incroyable"!

À David, j'aime beaucoup cette relation agréable que l'on a, tous deux expérimentateurs (mais pas avec le même nombre de caméras), j'espère que tout se passera bien pour toi et j'ai hâte de partager d'autres moments avec toi!

À Diane, j'ai l'impression que je te connais depuis qu'on a 5 ans, on a été très proches au départ puis on a vécu des chemins de vie très différents et maintenant on se retrouve et on partage ces expériences complètement différentes mais qui nous ont construit, je trouve ça incroyable. J'aime beaucoup échanger avec toi, rire avec toi, et surtout trouver les meilleurs calembours pour amuser la galerie. Je ne peux pas résister à l'envie de quand même te dire "Tu t'moques de qui yvonnick???". À très vite, merci pour cette semaine sur Lyon!

À Éléonore, ça fait déjà 6 ans qu'on se connaît!! Et encore on a pas joué à tant de jeux que ça ni tant tu que ça ensemble, hmmm faut remédier à ça. Plus sérieusement, merci à toi de ces moments agréables à discuter, échanger, tu m'as très souvent aidé à aller mieux, et toujours contribué à aller encore mieux quand j'allais déjà bien.

À Fanny, merci à toi de ta grande sincérité et des bons moments que l'on passe ensemble (bon malheureusement t'es comme moi, refuser un verre ça se fait pas, et ne pas servir de verre à ses invités, ça se fait pas, donc à nous deux c'est le cercle vicieux!). Hâte de savoir qui de nous deux va planter l'arbre de la vie en premier (fallait que je la fasse désolé).

À Jérémy, toujours présent et à l'écoute, à ne pas juger et tenter de comprendre, à grommeler un peu mais toujours être dans l'action (je suis pareil, t'inquiète). Tu es comme un grand frère pour moi, et je te remercie de cette relation que l'on a.

À Johanna, des après-midi sur la plage aux soirées au Scénario, on a toujours passé de bons moments ensemble, bon je suis triste de pas pouvoir encore plus profiter avec toi (surtout en dehors de la France) mais je suis sûr que l'on trouvera le temps pour ça;) Reste comme tu es future docteur!

À Jules, tu es tout aussi singulier que Perle, Oberyne et Morphée ont hâte de te revoir (moi aussi), viens en Lyonnaiserie apporter ton calme et ta sérénité dès que possible!

À Julien, cette symétrie entre nous pendant toutes ces années est incroyable, j'ai l'impression que ça en est presque irréel. Vraiment, un jour on se met dans une salle et on compose quelque chose ensemble! Avec un plat de pâtes gigantesque bien évidemment (je ne m'en remets toujours pas d'avoir réussi à manger tout ça). Merci pour cet été ensemble (go Philippe allez)!

À Karen, je pense que l'agrégation aurait été complètement différente sans toi, et même si on ne se parle et voit que peu, j'aime beaucoup les moments passés ensemble, vivement le prochain;))

À Lola, je ne peux pas oublier ce terme de crush psychologique depuis que je l'ai imaginé, merci de tous ces petits moments passés ensemble, j'aime beaucoup ta vision des choses qui nous entourent, du détail le plus simple à la description de sentiments complexes.

À Lozéea, j'aimerais trouver un qualificatif autre que meilleure amie pour décrire ce que tu représentes, mais je trouve pas donc bon (bref hein tu vois ce que je veux dire non?). Nos moments passés ensemble sont toujours remplis de plein d'émotions, à rire à gorge déployée (oui j'utilise cette expression apparue à la fin du XVI^e siècle évoquant la partie antérieure du cou), où à critiquer les gentes (oups). Merci sincèrement.

À Lucile, merci pour cette amitié, d'avoir fourni tes documents de Master 2, puis ta thèse en .tex, j'espère que tu vas te plaire dans ton nouvel établissement;) A très vite.

À Marianne et Arnaud (et Gabriel), un grand merci pour ces petits moments simples mais remplis de convivialité que l'on passe ensemble, n'oubliez pas de nous laisser Gabriel si vous voulez vous enfuir quelque part;))

À Marion, ton soutien sans faille et tes mots justes à tout instant me font un bien fou, j'ai hâte de venir te voir et de me retrouver à 6h du mat dans un transport en commun à Helsinki en me demandant ce qu'il se passe!

À Matthias, on se voit rarement mais à chaque fois c'est un bon moment, on aura réussi à aller au théâtre un jour avant le confinement total, c'était vraiment sympa ! Je t'offre un bon bière à utiliser quand tu veux ;)

À Mélie, je le dis et je le redis aussi pour d'autres personnes, mais reste comme tu es, autrement dit merci d'être toi ! Bravo pour ta thèse, partons maintenant danser et s'amuser ensemble ;)

À Paul, merci pour ta résidence secondaire de soirée, mais plus sincèrement de ces moments passés ensemble que ce soit sur Lyon ou Paris (heureusement que y'a que 2h de tgv). Courage pour ta fin de thèse, Matlab est ton ami même dans les moments où il te sort un NaN (à ne pas confondre avec cette feuille de pain, faite de farine de blé et cuite sur la paroi brûlante d'un four).

À Paupau Coli, c'est vraiment une chance de t'avoir comme amie, j'ai l'impression qu'on se comprend beaucoup l'un · e l'autre. Et pour couronner le tout, ton humour je suis 100% fan (pas le ventilateur). A très vite pour un mojito ensemble !

À Perceval, guerre ? Merci de m'avoir fait reprendre Dota, de nos soirées à débattre des changements des héros, et aussi et bien évidemment des multiples bières et autres breuvages, et des dizaines de gueule de bois dans ton canapé confortable.

À Perle, je t'ai détestée, puis le miracle de l'agrégation m'a fait découvrir une personne beaucoup plus complexe que ce que je voulais en voir, caractérisée par ton unicité singulière (oui faut insister dessus). Bravo pour le rendu de ta thèse, courage pour la suite des événements, à très vite !

À Quentin, le fameux botlaner 10/2/18 200 cs à 20 minutes, j'espère rester ta lux supp pendant longtemps (mdr tu crois que dans 20 ans on jouera encore sur ces jeux video-ludiques électroniques ?). En écrivant ces mots sur le kick de Hyperballad, je me dis que le chemin ensemble ne fait que commencer, j'espère que ça durera longtemps, que je saurai te fournir des mélodies incroyables (ou que depuis t'auras appris à en faire autrement qu'en appuyant de manière random sur ton push2 ou le clavier). Merci de ton écoute, de ta présence que ce soit simplement pour boire un café, se pinter dans un bar, ou faire n'importe quoi en soirée. La personne que tu appelles parfois petit frère est très content d'être à tes côtés.

À Robin et Julia, je ne peux pas vous séparer tellement nos moments passés ensemble étaient magiques (pourquoi je tournoyais avec un bidon de cocktail au fait ?), vivement que ça recommence l'année prochaine !

À Shanis, avec qui j'ai passé l'un des meilleurs moments de ma vie, taper du pied avec toi est toujours un plaisir, prendre pleine conscience de la musique et oublier tout le reste l'instant d'une soirée. J'espère que tu trouveras ta voie, et je serai toujours là pour t'accompagner ou t'aider (et pour danser bien évidemment).

À Sidonie, tu es d'une sincérité et joie de vivre incroyable, c'est toujours cool de partager des moments avec toi, merci d'être toi !

À Typhaine, j'aurais aimé écrire un message totalement autre que celui-là. On a tous quelque chose en nous de Maxime Gregoire, et toi tu as tout de lui, son sourire, ses blagues nulles comme bien, sa joie de vivre, ses conneries, ... Je ne peux imaginer combien c'est difficile pour toi, mais je sais que tu garderas toutes ses qualités en toi. Prends le temps qu'il te faudra, je serai toujours là pour toi.

À Ugo, merci pour ce que tu m'as apporté, notre relation a évolué d'une certaine façon, j'espère que tout va bien pour toi, je serai là au besoin, et j'espère que tu t'épanouis :)

Aux blanc · hes pêches, Ariana, Cassandre, Emilien, Jules, Maxime, Timothée, vous êtes arrivé · es comme des anges venant du square Delfosse et maintenant vous voilà dans ma vie, j'aime vraiment m'amuser avec vous et être dans cette simplicité de vivre, vivement les b2b ou b2b2b (plus on est de fous, plus on mixe).

À Céline, Delphine, Lilian, Perceval, Sami, toujours disponibles pour un verre ou une soirée sur Paris City Beach, svp restez dans les environs pour continuer à faire ça !

Aux ami · es rencontré · es grâce au Laboratoire de géologie, Delphine (bon c'est aussi grâce à Pau hein), Pierre-Jean, Samuel, toujours un plaisir d'échanger et se marrer ensemble.

Aux ami · es parisien · nes, Ann, Lola, Richard, quand je pense à vous, je souris et je sais que ça sera un bon moment avec vous. Voici un bon pour un verre gratuit quand on se voit (valable 60 ans).

À tous mes ami · es rencontré · es sur la presqu'île Guérandaise, Camille B., Camille M. et Marie, Flo', Thibault, Antoine J., Allan, Pierre, Julien, Louis. Ces années passées à la plage, au Bidule, en soirée c'était incroyable.

To my friends I met in Cambridge, Yeorgia, Andrew and April, looking forward to seeing you again !

Aux ami · es de l'agrégation, Camille, Louis, Karen, David, Balkis, Alexandre, Clément, Amélie, Benjamin C., Benjamin G., Antoine, Alexia, Noémie, Jérémy, Théo, Louisiane, grâce à vous cette année a été vraiment incroyable malgré la difficulté du concours.

À toutes les personnes avec qui les contacts sont moins présents aujourd'hui, mais qui ont été importants à mes yeux : Alicia, Clélia, Dorian, Elise C., Elise N., Guillaume D., Marie, Marie Scha, Marine, Maxellende, Maxime T., Maylis, Naomi, Ophélie, Sarah B., Thibault, Vanille, les ami · es de l'agrégation.

À mes platines DJ (oui oui pas besoin d'être une personne pour avoir des remerciements), qui m'ont fait découvrir une nouvelle facette de moi que j'apprécie tout particulièrement.

À l'Internet mondial, sur lequel j'ai perdu des milliers d'heures, mais qui a construit en grande partie ce que je suis.

À Laurence, si la musique est ma passion, c'est aussi grandement grâce à toi, j'ai vraiment hâte que l'on se retrouve devant un piano (et aussi un bon repas évidemment), merci pour toutes ces années d'apprentissage !

À Yvonnick B., tu es un grand père (je n'ose pas dire grand-père, tu n'es pas aussi vieux que ça !) pour moi, tu m'as donné des conseils simples et efficaces, et je t'en donne un (en tant que docteur, tu peux me faire confiance) : tu as encore beaucoup à vivre, tu peux croquer dans une pomme à pleines dents (pas comme moi), alors fais-le ;)

À Martine, grand-mère de coeur, je reviens bientôt sur La Baule pour revoir ton grand sourire et écouter tes histoires, toujours autour d'un bon vin (sinon à quoi bon)

Aux amis de mes parents, Yves, Najwa, Yvonnick, vivement un repas à parler de tout et n'importe quoi (oui ça tourne souvent autour de la bouffe, mais on mange bien dans la presqu'île Guérandaise).

À Colette et Pascal, vous êtes une vraie seconde famille pour moi, merci de m'avoir accepté comme je suis (c'est pas une simple affaire je vous l'accorde), vivement la prochaine bavette-patates (ou frites)-salade, je salive rien que d'y penser.

À Valentine, les atomes crochus ont eu du mal à apparaître, mais un jour peut-être regardera t-on Ascuns tester le jeu "Touche pas à Mon Poste sur DS" autour d'une bonne bière.

À Lorraine et Nicolas, hâte de votre mariage (enfin !), et de revenir boire de la sangria après avoir fait ce magnifique marché de Montbrison (en vrai vous habitez dans un super endroit !).

À Nadine et Domi, vous êtes des personnes formidables. Vous savez donner de votre amour sans faille, et j'espère que l'on vous le rend comme il se doit. Merci de cette sincérité de vie, et j'ai hâte de venir vous voir avec Pau pour visiter plein d'autres endroits !

À Philippe et David, je ne suis pas le frère parfait, je ne suis pas le plus manuel d'entre vous, et pour une dernière fois je suis pas plus intelligent que vous, vous possédez des qualités que je n'aurai jamais et même si parfois (souvent) je subtilise ces qualités que vous avez, je n'en oublie pas que vous êtes mes frères qui m'ont éduqué, m'ont appris la vie, la vraie. Je suis fier de cette relation que l'on a, je suis reconnaissant de votre présence sans faille, je suis admiratif des familles que vous avez formé, et je vous aime.

À Sharon, Déborah, Mayron, Clara, Cristiano, Giulian, merci de faire partie de cette (maintenant grande) famille, hâte de venir à Narbonne, et peut-être à La Baule pour Sharon et David ..?? on y croît (le rer E ça suffit). À mes neveux et nièces, tous · tes plus mignon · nes les un · es que les autres.

À mes parents, d'une présence et d'un soutien sans faille. Ne pensez pas que je ne suis pas fier de vous (j'espère que vous l'êtes en retour?), que je suis stérile à vos paroles, votre présence. Si j'en suis là, c'est fondamentalement grâce à vous. Je ne pense pas comme vous, mon ouverture d'esprit est différente, et ce n'est pas parce que je ne fais pas comme vous l'entendez que cela influe de manière négative sur ma manière de vivre. Malgré tout ce qu'il a pu se passer, vous restez les parents que j'aime.

À Oberyn et Morphée, mes enfants.

Enfin, À Pauline, merci pour ta présence et ton soutien sans faille, pour ton amour, et bien plus encore. Tu m'as beaucoup demandé ce que j'aime en toi, alors je vais te répondre maintenant : j'aime ta vision de la vie, d'un pot en plastique qui peut s'utiliser de mille façons différentes à ton amour inconditionné des chats. J'aime ce que tu me fais devenir, chaque jour une personne plus aboutie, sans que cela n'enlève ce que suis. Tu es fondamentalement différent de ce que je suis, et pourtant tu me comprends dans mes actions, mes choix, et tu me soutiens dans mes projets. J'aime tes contradictions : tu es cartésienne et en même temps mystique, ce qui me fait découvrir un tout nouveau monde, de nouvelles façons de penser. J'aime ce que tu souhaites pour nous dans l'avenir, et cela me rassure et me donne envie de continuer ce chemin de vie avec toi, aussi longtemps que possible. C'est pour toutes ces raisons, et bien d'autres encore, que je t'aime.

Voilà, si tu es arrivé · e jusque là, voici maintenant quelque chose de profond que je vais te partager : je suis autiste, atteint du syndrome d'Asperger, je l'ai su en début d'année. Même si cela ne change pas ma vie actuelle, vu que j'apprends à vivre avec, cela a beaucoup influencé ma vie passée, avec des paroles, des mots, des actions souvent non-adaptées à la situation. Alors à toi, qui a pu être blessé · e de ce que j'ai pu faire, je suis sincèrement désolé.

Table des matières

Introduction générale	1
Motivations de l'étude	3
I Introduction	7
1 Dynamique de bulles dans des liquides Newtoniens	9
1.1 Bulle d'air isolée remontant dans un liquide Newtonien	9
1.1.1 Nombres adimensionnels	9
1.1.2 Forme et trajectoire des bulles	10
1.1.3 Vitesse des bulles	12
1.2 Bulle confinée dans une cellule de Hele-Shaw	14
1.2.1 Cellule de Hele-Shaw : présentation	14
1.2.2 Mise en équation théorique	17
1.2.3 Équation de Laplace et résolution	20
1.2.4 Vitesse de remontée de la bulle	22
1.2.5 Vérification expérimentale	24
2 Dynamique et rhéologie des suspensions	29
2.1 Dynamique d'une particule dans un liquide	29
2.1.1 Mise en équation	29
2.1.2 Régimes d'évolution : nombre de Stokes et de Péclet	31
2.2 Modèle collectif d'une suspension	33
2.2.1 Fraction volumique	34
2.2.2 Régime dilué, semi-dilué, concentré	34
2.2.3 Exemple introductif : la sédimentation	35
2.2.4 Interactions dans les suspensions	36
2.3 Rhéologie globale des suspensions non-Browniennes	37
2.3.1 Introduction à la rhéologie	37
2.3.2 Relation constitutive	38
2.3.3 Modèles théoriques	40
2.3.4 Modèles empiriques	40
2.4 Au delà du modèle du fluide effectif	42
2.4.1 Contraintes normales	42
2.4.2 Pression particulaire	43
2.4.3 Migration induite par cisaillement	46
2.4.4 Migration dans un Poiseuille plan	47

3	Suspensions et interfaces	53
3.1	Bulle évoluant dans une suspension tridimensionnelle	53
3.2	Particules et interfaces	55
3.2.1	Déstabilisation de l'interface suspension - gaz	55
3.2.2	Particules et films liquide/gaz	57
II	Moyens expérimentaux	63
4	Matériel et méthodes	64
4.1	Description du dispositif expérimental : cellule de Hele-Shaw	64
4.1.1	Contraintes expérimentales	64
4.1.2	Cellule de Hele-Shaw	65
4.1.3	Caractérisation de l'entrefer de la cellule	66
4.2	Propriétés des liquides et des particules	67
4.2.1	Particules	67
4.2.2	Liquide suspendant	69
4.2.3	Mise en suspension	71
4.3	Mesures rhéologiques expérimentales à volume constant	72
4.3.1	Principe de mesure et géométries utilisées	72
4.3.2	Rhéologie des liquides	72
4.3.3	Rhéologie des suspensions	74
4.4	Analyse des bulles	77
4.4.1	Acquisition des images	77
4.4.2	Traitement des images	78
4.4.3	Détection et mouvement des bulles	81
III	Remontée d'une bulle unique	85
5	Remontée d'une bulle d'air dans un liquide Newtonien	87
5.1	Expérience typique de remontée d'une bulle d'air	89
5.2	Forme et trajectoire des bulles : quelques généralités	92
5.2.1	Comparaison des paramètres instantanés	92
5.2.2	Influence du diamètre sur la remontée d'une bulle	94
5.2.3	Influence de la viscosité	94
5.2.4	Influence du rapport d'aspect	96
5.3	Modèle de Taylor-Maxworthy	96
6	Remontée d'une bulle d'air dans une suspension	101
6.1	Expérience typique de remontée d'une bulle d'air	102
6.2	Forme et trajectoire des bulles	104
6.2.1	Exemples	104
6.2.2	Trajectoire des bulles : quelques généralités	107
6.2.3	Forme des bulles : cas général	110
6.2.4	Inhomogénéités de la fraction volumique	112
6.3	Vitesse de remontée moyenne	116
6.3.1	Comparaison avec un environnement sans grains	117
6.3.2	Vitesse de Maxworthy modifiée et renormalisation	118
6.4	Hydrodynamique de la suspension	120
6.4.1	Champ moyenné et texture des grains	120
6.4.2	Velocimétrie par Image de Particule	121
6.5	Modélisation théorique de la remontée de bulles	125

6.5.1	Loi de Darcy	125
6.5.2	Modèle de Maxworthy appliqué aux suspensions granulaires	126
6.5.3	Fraction volumique locale entre les plaques	128
6.5.4	Hydrodynamique de la suspension : résolution	131
6.5.5	Conclusion	133
6.6	Étude de l'influence de divers paramètres sur la dynamique	135
6.6.1	Influence de l'épaisseur	135
6.6.2	Suspension polydisperse	136
IV	Bulles multiples dans un liquide Newtonien	141
7	Remontée de bulles multiples : une introduction	145
7.0.1	Chronophotographie	145
7.0.2	Dynamique de type bulle unique (Zone I)	148
7.0.3	Interaction mutuelle et contact (Zone II)	148
7.0.4	Bulle double collée (zone III)	150
8	Dynamiques d'interaction de plusieurs bulles	153
8.1	Mécanismes d'interaction de deux bulles	154
8.1.1	Modification de la forme des bulles	154
8.1.2	Vitesse de deux bulles en interaction	157
8.2	Interactions de bulles multiples	161
8.2.1	Premier exemple : interaction de 3 bulles	161
8.2.2	Deuxième exemple : interactions de 5 bulles	163
9	Dynamique de bulles multiples : train de bulles	167
9.1	Étude de la dynamique de deux bulles collées	167
9.1.1	Dynamique générale	167
9.1.2	Interface entre deux bulles	169
9.1.3	Bulles de type Maxworthy	170
9.2	Dynamique des trains de bulles	170
9.2.1	Morphologie des trains de bulles	170
9.2.2	Dynamique des trains de bulles : un exemple	171
9.2.3	Réorganisation d'un train de bulle	172
9.2.4	Dynamique générale de remontée	174
V	Conclusion générale et Perspectives	179
A	Équation de Maxey-Riley	187
B	Interactions dans les suspensions	191
C	Tenseur des contraintes particulières	195
D	Équation de Navier-Stokes a viscosité variable	197
E	Interaction dipolaire entre deux bulles elliptiques	201
	Bibliographie	210

Introduction générale

«Alors ... ça bulle ?» est souvent la première blague qui vient à l'esprit quand je parle de ma thèse. Pour les personnes étrangères à cette expression, buller signifie «ne rien faire», «paresser». Si la question semble rhétorique dans le sens où il n'y a rien à répondre à cela, amène un sourire crispé jusqu'aux lèvres et peut provoquer un silence gênant d'au moins une seconde *, elle est loin d'être dénuée d'intérêt. Ironiquement, il n'y a rien de moins paresseux qu'une bulle : leur vie se résume à naître violemment, évoluer dangereusement et devoir se conformer aux environnements qui l'entourent et modifient leur parcours de vie, interagir avec d'autres bulles, tout ça pour disparaître par une mort vaine, oubliée aux yeux de tout le monde. Ne venons-nous pas de décrire la vie humaine ... ? Soucieux de ne pas être triste à chaque fois que je regarde l'avenir dans les bulles d'air, cette thèse va se concentrer sur la vie des bulles au sein d'un environnement particulier : les suspensions granulaires.

Prenons un exemple : lorsque l'on souffle dans une paille immergée dans de l'eau, l'air que l'on crée remonte dans l'eau sans surprise et nous éclabousse le visage. Si l'on effectue la même opération mais avec du sable mouillé : il est plus difficile de créer des bulles d'air. Rien d'étonnant à cela, car le mélange eau-sable est beaucoup plus épais : les particules solides qui composent le sable confèrent une texture de pâte à l'ensemble qui s'écoule plus difficilement, et le mélange résiste beaucoup plus à notre souffle. Cet exemple simple possède son homologue dans la nature : les éruptions volcaniques. Dans une chambre puis dans les cheminées volcaniques, le gaz dissous dans le magma peut former des bulles lorsque la pression baisse, comme des bulles de gaz qui se forment au fond d'une casserole d'eau qui boue. Le mélange ainsi créé contient une phase liquide (roche fondue), gazeuse (bulles) et différentes phases solides (cristaux) que l'on nomme mélange triphasique. Les gaz vont chercher à remonter à la surface, ce qui peut mener à des éruptions.



FIGURE 1 - **Expériences de remontée de bulles.** a) Création de bulles d'air en soufflant dans une paille. b) Même expérience réalisée par Timothée. c) Éruption volcanique. Au sommet du volcan, un mélange triphasique gaz-liquide-roches.

*. ndlr : oui, une seconde c'est déjà énorme.

Dans cette thèse, nous traitons donc de manière expérimentale des problèmes de remontée de bulles de gaz à travers des suspensions granulaires – un mélange de particules solides fines dispersées dans un liquide, le magma étant un exemple de suspension granulaire parmi d'autres : la pâte à crêpe[†], mélange (entre autres) de farine et d'eau, les globules rouges évoluant dans le sang, le dentifrice, le mortier pour les constructions, ...

Comme souvent en physique expérimentale, on cherche à étudier le problème posé (ici une éruption volcanique et le mélange triphasique en interaction) de façon simplifiée. Si on peut difficilement recréer un volcan dans un laboratoire, on peut s'en approcher par une démarche de modélisation. On transforme le magma par un liquide visqueux (comme du miel), les roches par des fines particules, et le gaz par de l'air. Cependant, l'observation de la remontée de gaz dans une suspension est compliquée car les particules dans un liquide, si elles sont trop nombreuses, bloquent la vue de la bulle si celle-ci évolue au plein milieu de la suspension. Si des méthodes d'instrumentation pour s'affranchir de ce problème de visualisation existent, elles sont souvent compliquées à mettre en oeuvre. Une manière simple de contourner ce problème est d'utiliser deux plaques de verre très proches dans laquelle on introduit la suspension. Lorsque l'on crée une bulle d'air d'une grande taille par rapport à l'écart entre les plaques de verre, la bulle occupe tout l'espace, et est visible de part et d'autre des plaques. Bien que cette géométrie particulière restreigne le cadre général d'étude de la remontée de bulles dans une suspension, elle va tout de même apporter des phénomènes jusque là peu connus.

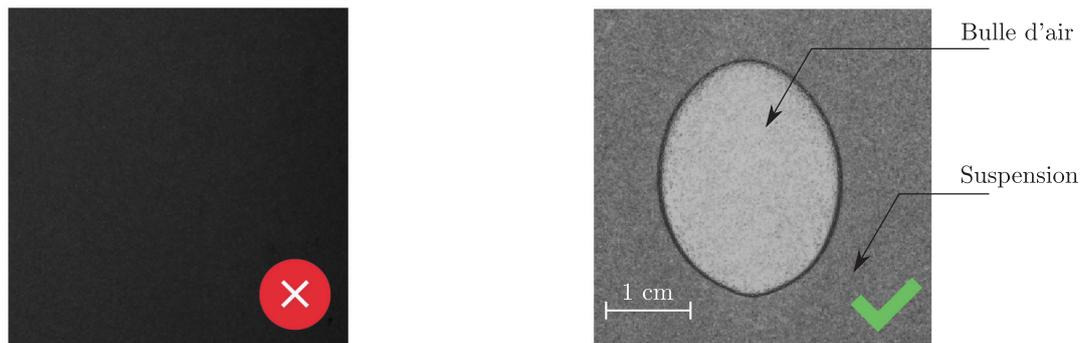


FIGURE 2 - **Visualisation d'une bulle d'air dans une suspension.** À gauche : visualisation d'une bulle d'air dans dans une suspension tridimensionnelle. À droite : bulle d'air dans une suspension confinée entre deux plaques.

Une autre facette de la recherche expérimentale est de déterminer les paramètres d'influence du problème posé. Dans le cas des volcans, en fonction de la quantité de gaz, de la composition, de la proportion en roches du magma et de la vitesse de remontée des bulles, il existe différents types d'éruptions volcaniques. Pour des expériences de laboratoire modèles, il est possible de choisir et contrôler ces paramètres. Le but est d'isoler les comportements dans des cas simples afin de comprendre leur rôle dans la réalité beaucoup plus complexe. En général, cela permet d'améliorer la compréhension pour pouvoir prédire et prévenir des événements naturels comme les éruptions. Dans notre modèle simplifié, nous avons choisi de nous intéresser à la remontée d'un nombre faible de bulles, et de nous concentrer sur deux paramètres majeurs : la quantité de particules au sein de la suspension, ainsi que la taille des bulles créées.

Le titre de cette thèse est alors : **Dynamique de bulles isolées et interactions de bulles multiples dans des suspensions granulaires confinées entre deux plaques.**

[†]. ou à gaufre suivant les spécialités régionales.

Motivations de l'étude

Cette partie est un complément à l'introduction générale dans laquelle nous dressons un bref panorama non-exhaustif des applications associées à l'étude de la remontée de gaz dans des suspensions granulaires, montrant la grande variété des domaines d'étude s'intéressant à ce problème.

Suspension granulaire

Une **suspension granulaire** est un milieu constitué de particules solides, généralement dispersées dans un fluide, appelé fluide interstitiel ou suspendant. La partie solide seule est appelée milieu granulaire, c'est une collection de particules solides, ou grains, d'un même matériau ou non. Cette définition large regroupe des matériaux dont la taille varie de plusieurs ordres de grandeur : de la farine ($50 \mu\text{m}$) aux roches (1 m), en passant par le sable (quelques mm). Les particules solides en dispersion dans la phase liquide forment alors la suspension [Oswald, 2005, Coussot, 2012].

Applications

Réacteurs à lit fluidisés

Dans le domaine de l'industrie, les réacteurs à lit fluidisés [Su et al., 2020] sont utilisés pour amener un mélange solide/liquide à se comporter comme un liquide. Ceci est généralement réalisé par l'introduction de gaz ou de liquide sous pression à travers le milieu particulaire. Le but est de favoriser le contact entre les particules solides, qui font office de catalyseur, et le gaz/liquide.

Ces réacteurs sont utilisés pour produire par exemple de l'essence (vapocraquage catalytique d'alcane) et de nombreux produits chimiques (herbicides, ...) [Duduković et al., 2007]. Dans ces dispositifs, il est important de connaître le comportement des bulles d'air pour comprendre l'hydrodynamique globale de l'écoulement. Par exemple, la coalescence des bulles est un phénomène qu'il faut à tout prix éviter car les bulles qui coalescent remontent beaucoup plus vite et leur surface d'échange effective diminue [Vera et al., 2000]. Ce phénomène est accentué par la présence de particules [Li and Prakash, 2000], mais la présence de particules doit être aussi élevée pour maximiser les échanges. Le liquide doit aussi être présent pour mettre en suspension les particules. Il y a donc un équilibre à trouver entre quantité de gaz, de liquide et de solide.

Jusqu'à présent, les expériences ont surtout été réalisées à des échelles macroscopiques [Gogate, 2017]. Une description locale complète est une étape importante dans l'amélioration de l'efficacité de tels systèmes. Par conséquent, il est crucial de comprendre la dynamique collective de chaque phase et leur interaction pendant que les bulles s'élèvent dans le système.

Géophysique

Dégagements de gaz sous-marins - Les hydrates de méthane, formé de molécules d'eau piégeant des molécules de méthane dans des gaz, sont abondamment présents dans les fonds sous-marins,

car stables à très haute pression. Cependant, ils sont responsables de nombreux accidents dans des gazoducs. Pendant le forage ou la production de puits sous-marins, des poches de gaz peuvent se libérer, et entraîner des quantités élevées de sédiments marins, créant de forts courants jusqu'en surface, perturbant profondément l'éco-système, et pouvant même affecter le climat par le biais de l'effet de serre [Olsen and Skjetne, 2016]. La compréhension des mécanismes du rejet de gaz, du transport des sédiments et du gaz, sont des enjeux actuels importants pour prévenir et mieux contrôler ces phénomènes [Homan et al., 2020].

Volcans et éruptions volcaniques - Les magmas dits éruptifs sont des suspensions contenant des bulles de gaz piégées dans des silicates fondus [Wilson et al., 1980, Papale, 1999]. Les éruptions volcaniques sont généralement causées par des expansions de phases gazeuses issues des magmas. La mobilité des bulles influence alors fortement la dynamique de l'éruption et donc la capacité du magma à entrer en éruption. [Oppenheimer et al., 2015].



FIGURE 3 - **Exemples.** a) Schéma simplifié d'un réacteur à lit fluidisé (Wikimedia Commons). b) Essaim de bulles de méthane s'échappant du fond de la mer (Alfred Wegener Institut). c) Éruption volcanique au-dessus de l'Eyjafjallajökull en Islande pendant une éruption en 2010 (Sigurdur Stefni-son).

Avalanches

Les avalanches sont composées de cristaux de glace (neige) sous forme solide et d'air. Lors de l'écoulement d'une avalanche, qui s'apparente à celui d'un milieu granulaire, les cristaux de glace peuvent devenir liquide à cause des contraintes appliquées et de la température. La stabilité d'un manteau neigeux, puis la formation et la dynamique des avalanches est alors dépendante de la fraction volumique de chaque phase [Du Pont, 2003, Andreotti et al., 2012].

Agro-alimentaire

La microstructure des aliments congelés est très complexe et souvent constituée d'un grand nombre de phases distinctes : l'article [Pinzer et al., 2012] prend de l'exemple la crème glacée, qui contient une phase non congelée liquide, des bulles d'air, des cristaux de glace et des particules de graisse. Ici, la température affecte grandement les phases en présence, et la compréhension des interactions entre toutes ces phases est un enjeu important dans l'agro-alimentaire.

Recherche fondamentale

En dehors de ces aspects appliqués, la compréhension des milieux multiphasiques [Dauxois et al., 2021] est fascinante du point de vue des physiciens, en particulier à cause des multiples échelles de temps et d'espace en jeu. Ne serait-ce que les bulles [Dollet et al., 2019] ou les suspensions [Butler, 2014] réservent encore beaucoup de surprises et amènent des paradoxes intéressants à étudier d'un point de vue fondamental. Nous souhaitons alors apporter notre pierre à l'édifice dans le but de faire progresser les connaissances dans ces domaines.

Plan de la thèse

Au cours de ces trois ans de thèse, j'ai amélioré la compréhension de l'interaction entre une bulle d'air et une suspension visqueuse dans un environnement confiné, tant dans des régimes dilués que concentrés, et de l'interaction de bulles multiples dans ce même environnement. Le présent manuscrit, qui présente un état de l'art, les méthodes employées, ainsi que les résultats obtenus, s'articule en quatre parties :

- **Introduction**

La première partie, composée de trois chapitres, présente en détail la physique des remontées de bulles uniques dans des liquides Newtoniens et la dynamique et rhéologie des suspensions. Nous discutons plus particulièrement de l'effet d'un confinement latéral sur ces deux aspects. Pour finir, nous abordons les interactions entre particules, fluide et gaz au niveau des interfaces.

- **Matériel et Méthodes**

La deuxième partie correspond au chapitre quatre qui présente le dispositif expérimental employé, les techniques d'obtention d'une suspension granulaire ainsi que les outils numériques nous permettant d'analyser la remontée de bulles issues des expériences.

- **Remontée d'une bulle unique**

La troisième partie présente l'étude complète de la remontée d'une bulle unique dans une cellule de Hele-Shaw. Le chapitre cinq étudie la remontée dans un liquide Newtonien et permet de valider les techniques expérimentales mises en oeuvre en retrouvant les résultats de la littérature. Dans le chapitre six, nous étudions l'ascension d'une bulle dans une suspension et montrons qu'elle est plus rapide que dans un liquide pur de même viscosité. Nous expliquons ensuite par un modèle comment la migration de particules et le caractère bi-dimensionnel de la géométrie modifient la dynamique de remontée d'une bulle, en réduisant la dissipation visqueuse. Les résultats de cette partie sont publiés dans :

C. Madec, B. Collin, J. J. S. Jerome, S. Joubaud (2020). Puzzling Bubble Rise Speed Increase in Dense Granular Suspensions. Physical Review Letters, 127 7 :078004.

- **Bulles multiples dans un liquide Newtonien**

La quatrième partie explore la remontée de bulles multiples dans un liquide Newtonien en régime visqueux. Nous commençons par le cas de deux bulles en interaction dans le chapitre sept et montrons, par des mécanismes simples, l'importance de l'hydrodynamique du liquide et la déformabilité de la bulle sur l'interaction bulle-bulle. Le chapitre huit aborde la remontée de bulles multiples collées, autrement appelées train de bulles, et proposons une extension des mécanismes proposés pour les bulles doubles.

Première partie

Introduction

1	Dynamique de bulles dans des liquides Newtoniens	9
1.1	Bulle d'air isolée remontant dans un liquide Newtonien	9
1.1.1	Nombres adimensionnels	9
1.1.2	Forme et trajectoire des bulles	10
1.1.3	Vitesse des bulles	12
1.2	Bulle confinée dans une cellule de Hele-Shaw	14
1.2.1	Cellule de Hele-Shaw : présentation	14
1.2.2	Mise en équation théorique	17
1.2.3	Équation de Laplace et résolution	20
1.2.4	Vitesse de remontée de la bulle	22
1.2.5	Vérification expérimentale	24
2	Dynamique et rhéologie des suspensions	29
2.1	Dynamique d'une particule dans un liquide	29
2.1.1	Mise en équation	29
2.1.2	Régimes d'évolution : nombre de Stokes et de Péclet	31
2.2	Modèle collectif d'une suspension	33
2.2.1	Fraction volumique	34
2.2.2	Régime dilué, semi-dilué, concentré	34
2.2.3	Exemple introductif : la sédimentation	35
2.2.4	Interactions dans les suspensions	36
2.3	Rhéologie globale des suspensions non-Browniennes	37
2.3.1	Introduction à la rhéologie	37
2.3.2	Relation constitutive	38
2.3.3	Modèles théoriques	40
2.3.4	Modèles empiriques	40
2.4	Au delà du modèle du fluide effectif	42
2.4.1	Contraintes normales	42
2.4.2	Pression particulaire	43
2.4.3	Migration induite par cisaillement	46
2.4.4	Migration dans un Poiseuille plan	47
3	Suspensions et interfaces	53
3.1	Bulle évoluant dans une suspension tridimensionnelle	53
3.2	Particules et interfaces	55
3.2.1	Déstabilisation de l'interface suspension - gaz	55
3.2.2	Particules et films liquide/gaz	57

Dynamique de bulles dans des liquides Newtoniens

Au cours de cette thèse, nous souhaitons étudier la remontée de bulles d'air dans des mélanges liquide-particule, mais aussi dans des liquides purs. Ce chapitre présente un état de l'art sur les problèmes liés à la remontée de bulles. Celles-ci sont caractérisées par leur forme, leur trajectoire et leur vitesse. Nous analyserons tout d'abord un cas simple : les caractéristiques d'une bulle évoluant dans un environnement tri-dimensionnel, puis nous étudierons la forme et la dynamique d'une bulle dans un liquide Newtonien confiné entre deux plaques de verre.

1.1 Bulle d'air isolée remontant dans un liquide Newtonien

En effet, plusieurs phénomènes physiques sont en jeu lors de l'étude de la remontée d'une bulle de gaz dans un environnement tri-dimensionnel non confiné : pesanteur, tension de surface au niveau de l'interface entre le gaz et le liquide et des effets visqueux liés à la résistance à la mise en mouvement des phases en présence.

Il est alors courant dans les problèmes physiques de faire apparaître des grandeurs adimensionnées comparant l'importance de ces effets par rapport aux autres, ce que nous nous proposons de faire ici.

1.1.1 Nombres adimensionnels

La dynamique d'une bulle d'air dans un liquide, schématisée sur la figure I.1, est régie par différents paramètres liés aux fluides :

- Liquide caractérisé par sa masse volumique ρ_f , sa viscosité η_f et la tension de surface liquide/air γ_f .
- Bulle que l'on considère sphérique de $r_b = d_b/2$, de viscosité η_b et de masse volumique ρ_b .
- Paramètres extérieurs : seule la gravité \mathbf{g} intervient.

Nous négligeons ici les échanges thermiques et de matière. Il y a alors sept paramètres physiques dépendant de trois unités fondamentales de longueur masse et temps. Nous pouvons construire quatre nombres adimensionnés indépendants régissant la physique du problème étudié :

- Le rapport des masses volumiques et des viscosités :

$$\hat{\rho}_b \equiv \frac{\rho_b}{\rho_f}, \quad \hat{\eta}_b \equiv \frac{\eta_b}{\eta_f}. \quad (\text{I.1})$$

- La pression hydrostatique du liquide tend à étaler la bulle alors que les efforts de tension de surface tendent à maintenir une surface minimale d'interface liquide/gaz. Dans ce contexte,

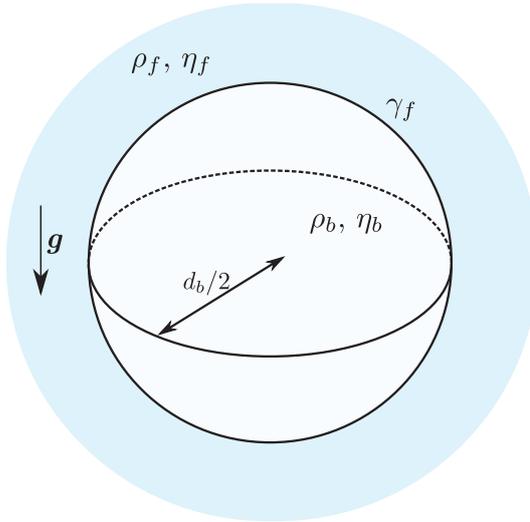


FIGURE I.1 - **Paramétrisation du problème de remontée d'une bulle.** La bulle d'air est sphérique de diamètre d_b , masse volumique ρ_b et viscosité η_b . Le liquide, de masse volumique ρ_f et viscosité η_f remplit tout l'espace. La tension de surface entre l'air et le liquide est notée γ_f .

le nombre de Bond Bo (ou d'Eötvös Eo) compare ces deux effets/phénomènes [Gennes and Brochard-Wyart, 2005] :

$$Bo \equiv Eo \equiv \left(\frac{r_b}{\lambda_c}\right)^2 = \frac{\rho_f g r_b^2}{\gamma_f}, \quad \lambda_c \equiv \sqrt{\frac{\gamma_f}{\rho_f g}}, \quad (I.2)$$

où λ_c est appelé longueur capillaire, qui est de l'ordre de 3 mm pour l'interface eau/air. Un nombre de Bond élevé indique que la remontée de la bulle n'est pas affectée par les effets capillaires. Au contraire, pour $Bo \lesssim 10$, les effets capillaires sur la forme et la dynamique des bulles deviennent non négligeables.

- Le principal moteur du mouvement des bulles est la différence de densité entre le liquide environnant et le gaz dans la bulle. La vitesse terminale de remontée, définie comme la vitesse de la bulle en régime permanent, dépend principalement de l'équilibre entre la gravité ou la poussée d'Archimède et la force de traînée, qui traduit la résistance du liquide à l'interface de la bulle (et opposée à son mouvement). Le nombre de Galilée Ga quantifie l'importance des effets de flottabilité par rapport aux forces visqueuses. Il est défini par

$$Ga \equiv \frac{(\rho_f - \rho_b)\sqrt{g r_b} r_b}{\eta_f}. \quad (I.3)$$

Le nombre d'Archimède Ar , parfois confondu avec Ga ou alors égal à Ga^2 , est aussi utilisé.

Par la suite, nous ne considérerons que des bulles pour lesquelles $\hat{\eta}_b \ll 1$ et $\hat{\rho}_b \ll 1$, c'est-à-dire en étudiant la remontée d'un gaz peu dense comme l'air, au lieu de gouttes de liquide.

1.1.2 Forme et trajectoire des bulles

La figure I.2 présente un résumé des formes possibles d'une bulle d'air initialement sphérique en fonction des deux nombres adimensionnés Eo et Ga , obtenus par simulation numérique [Tripathi et al., 2015].

On peut séparer le diagramme (Ga, Eo) en cinq zones :

- I L'écoulement global est symétrique par rapport à l'axe vertical de la bulle et celle-ci remonte verticalement, sans oscillation. La bulle est **axisymétrique**, d'une forme ellipsoïde légèrement aplatie : elle possède un axe de révolution, orienté sur la direction du vecteur vitesse de la bulle.
- II Les phénomènes inertiels influencent fortement la dynamique. L'écoulement devient turbulent en aval de la bulle, comme l'équivalent de l'écoulement à l'arrière d'un cylindre à haut nombre de Reynolds [Guyon et al., 2001]. Des tourbillons commencent à apparaître en aval de la bulle et qui

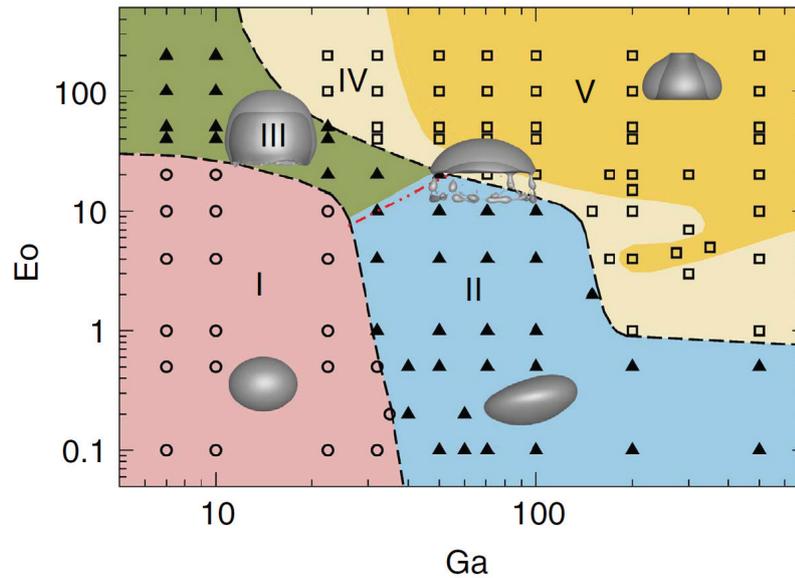


FIGURE I.2 - **Forme et comportement des bulles.** Diagramme (Eo, Ga) des bulles d'air évoluant dans un environnement 3D. Chaque point représente une simulation numérique. Zone I : régime axisymétrique (cercle, rouge). Zone II : régime asymétrique avec oscillations (triangle, bleu). Zone III : régime axisymétrique sans oscillation (triangle, vert). Zone IV : transition vers la rupture (carré, jaune clair). Zone V : zone de rupture (carré, jaune foncé). Les formes typiques des bulles dans chaque région sont indiquées. Figure issue de [Tripathi et al., 2015].

vont l'allonger, provoquant une modification de la résistance du liquide envers la bulle [Magnaudet and Eames, 2000]. Lorsque les tourbillons deviennent trop importants, la bulle devient instable à une valeur de vorticité critique et ne remonte plus verticalement. Plus précisément, les tourbillons sur le sillage de la bulle sont alternés, créant un mouvement horizontalement spiraliq (ou zigzag). La bulle garde une forme quasi-axisymétrique proche de la zone I.

III La bulle s'aplatit et prend la forme d'une calotte sphérique axisymétrique en aval. La remontée de la bulle reste uniquement verticale, toujours sans oscillation.

IV La tension de surface n'est pas assez forte pour que la bulle reste intègre et elle se fragmente afin que les bulles résiduelles évoluent dans des zones plus stables. Dans la zone V, les contraintes visqueuses appliquées à la bulle sont encore plus importantes.

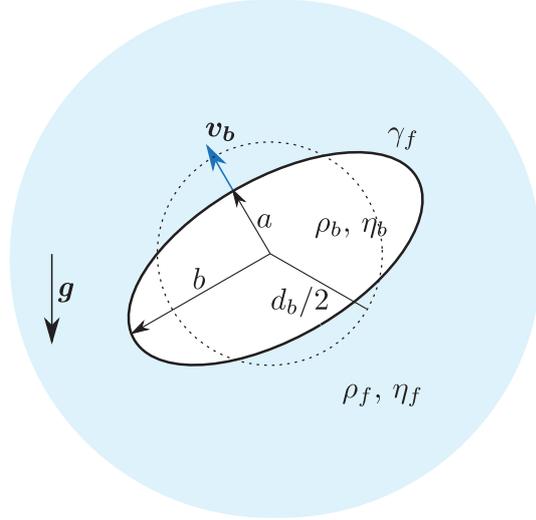
Par la suite, nous nous concentrerons sur des bulles de forme ellipsoïdale et axisymétrique dans la zone I, II et III, ce qui signifie entre autres que le vecteur vitesse des bulles \mathbf{v}_b est dirigé selon l'axe de révolution de l'ellipsoïde. On peut affiner l'analyse dimensionnelle en prenant en compte cette caractéristique :

Rapport d'aspect

Une bulle d'air en mouvement dans un liquide peut être approximée par un ellipsoïde de révolution. La forme de la bulle est alors caractérisée par l'axe a , défini par l'axe de la bulle parallèle à la direction du vecteur \mathbf{v}_b et l'axe b , perpendiculaire à \mathbf{v}_b . Le nombre adimensionné résultant se nomme le **rapport d'aspect** a/b pour lequel on portera un intérêt dans le cadre de cette thèse.

Les paramètres qui régissent l'évolution d'une bulle sont ainsi résumés sur la figure I.3.

FIGURE I.3 - **Paramétrisation de la remontée d'une bulle d'air ellipsoïdale axisymétrique.** L'axe a est dirigé selon la direction du vecteur vitesse de la bulle et l'axe b est perpendiculaire à a . Le diamètre équivalent de la bulle vaut $d_b = 2\sqrt{ab}$.



1.1.3 Vitesse des bulles

De très nombreuses études posent la question de la vitesse de remontée de bulles et sont pour la plupart résumées dans la revue [Kulkarni and Joshi, 2005]. Le bilan des différentes forces s'appliquant sur une bulle d'air s'écrit

$$\rho_b \mathcal{V}_b \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{MA} + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_f, \quad (\text{I.4})$$

avec \mathcal{V}_b le volume de la bulle, \mathbf{F}_g la force de gravité, \mathbf{F}_P la portance, \mathbf{F}_{MA} la force de masse ajoutée, \mathbf{F}_B la force de Basset, \mathbf{F}_f la force exercée par le liquide [Magnaudet, 1997]. Il faut aussi ajouter les conditions limites à l'interface reliées à la tension de surface. Le problème de la chute d'une particule ou de la remontée d'une bulle étant similaire, l'équation (I.4) est de la même forme que l'équation de Maxey-Riley-Gatignol [Maxey and Riley, 1983], régissant la dynamique de chute d'une particule dans un liquide (présentée dans le chapitre 2 partie 2.1.2, et dans l'annexe A).

La figure I.4 indique les différents régimes de vitesse terminale ascensionnelle des bulles $v_{b,\infty}$, c'est-à-dire leur vitesse verticale en régime stationnaire, dans de l'eau pure :

- le **régime de Stokes**, valide pour des petites bulles sphériques ($a/b = 1$) à faible nombre de Reynolds Re_{d_b} (typiquement inférieur à l'unité), pour laquelle la vitesse de remontée associée vaut

$$v_{b,\infty} = v_{b,St} = \frac{1}{18} \frac{gd_b^2(\rho_f - \rho_b)}{\eta_f}. \quad (\text{I.5})$$

Cette vitesse est due à un équilibre entre la force de traînée visqueuse dans un écoulement de Stokes et la force de gravité (pesanteur et poussée d'Archimède) [Guyon et al., 2001].

- Pour des bulles plus grosses (entre 1.3 mm et 2 cm), les oscillations de mouvement compliquent les calculs et les effets de tension de surface deviennent prépondérants. Une forme empirique proposée [Mendelson, 1967, Tomiyama et al., 2002] est de la forme

$$v_{b,\infty} = \sqrt{\frac{2g\lambda_c^2}{d_b} + \frac{(\rho_f - \rho_b)gd_b}{2\rho_f}}, \quad \lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma_f}{\rho_f g}}. \quad (\text{I.6})$$

λ_c est appelée longueur capillaire, de l'ordre de 2.7 mm pour l'eau pure, et représente la dimension caractéristique pour laquelle les effets gravitationnels et capillaires sont du même ordre de grandeur, ce qui est le cas ici. Les bulles sont de forme ellipsoïdale de rapport d'aspect inférieur à 1, c'est-à-dire allongées perpendiculairement à \mathbf{v}_b .

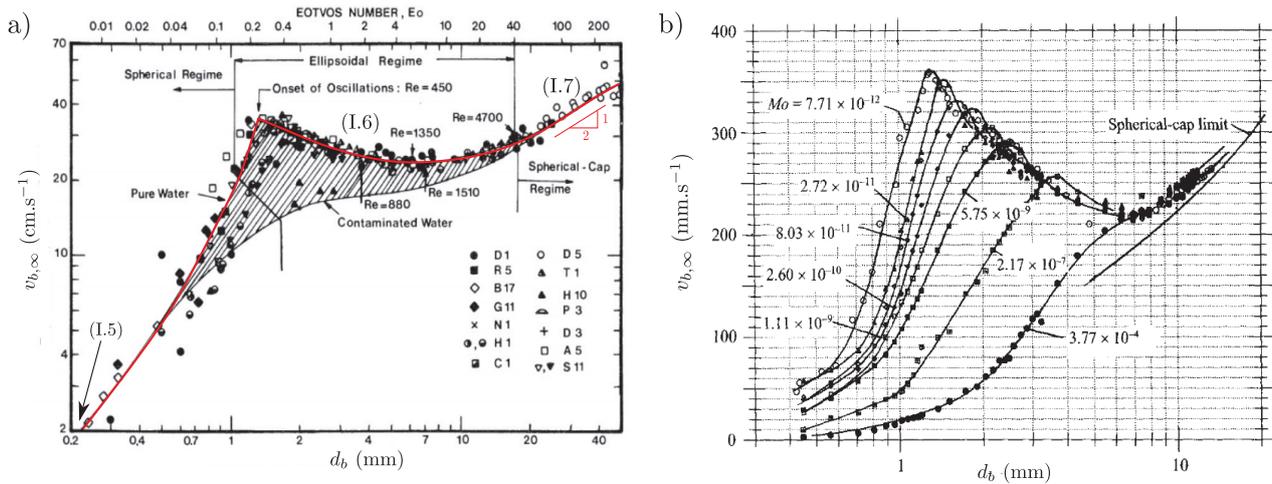


FIGURE I.4 - **Diagrammes $(d_b, v_{b,\infty})$ en environnement tridimensionnel.** a) Diagramme $(d_b, v_{b,\infty})$ pour l'eau. Les données sont indiquées en fonction du nombre d'Eötvös E_o et du nombre de Reynolds Re . La courbe d'intérêt est celle pour l'eau pure, indiquée en traits pleins rouge, et modélisée entre autres par les équations (I.5), (I.6) et (I.7). Le diagramme inclut les zones I et III de la figure I.2. Figure issue de [Clift et al., 1978]. b) Diagramme $(d_b, v_{b,\infty})$ pour des bulles d'air remontant dans différents liquides en fonction du nombre de Morton défini équation (I.8). Le nombre de Morton pour l'eau pure vaut $\sim 2 \times 10^{-11}$. Figure issue de [Maxworthy et al., 1996]

- Enfin, pour des bulles plus grosses, la vitesse terminale peut être estimée par

$$v_{b,\infty} = 0.707 \sqrt{g d_b}. \quad (\text{I.7})$$

Les bulles ont une forme de calotte sphérique (**spherical-cap** en anglais).

Il est courant d'utiliser également le nombre de Reynolds associé à la taille de la bulle $Re_{d_b} \equiv \frac{\rho_f \|\mathbf{v}_b\| d_b}{\eta_f}$, avec \mathbf{v}_b le vecteur vitesse de la bulle. Cependant, il requiert la connaissance de \mathbf{v}_b , *a priori* non connue avant expérience. C'est pour cette raison que le nombre de Galilée et de Bond sont principalement utilisés pour décrire la forme des bulles. Le nombre de Reynolds quant à lui est utilisé lorsque l'on étudie leur dynamique. L'apparition de l'instabilité et le minimum de vitesse terminale sont dépendants des propriétés du liquide, indiqués par le nombre de Morton :

$$Mo \equiv \frac{g \eta_f^4}{\rho_f \gamma_f^3} \simeq Bo^3 / Ga^4. \quad (\text{I.8})$$

La figure I.4-b) présente la transition entre le régime de Stokes et d'oscillations en fonction de Mo [Maxworthy et al., 1996]. On y remarque que le régime régi par l'équation (I.7) est indépendant des propriétés du liquide (η_f , γ_f , ρ_f) en accord avec une dynamique indépendante du nombre de Morton.

En conclusion, la forme, la trajectoire et la vitesse des bulles en milieu infini peuvent être diverses et variées en fonction de différents paramètres adimensionnés et des conditions opératoires. Étudions maintenant les dynamiques en jeu lorsque la taille du système est finie.

1.2 Bulle confinée dans une cellule de Hele-Shaw

Dans cette partie, nous nous intéressons aux effets de confinement sur la remontée d'une bulle d'air. De nombreux types de confinement existent, les liquides étant toujours étudiés dans des récipients, tubes ou tuyaux cylindriques, surfaces planes, etc. Il faut ainsi prendre en compte des phénomènes supplémentaires comme par exemple la possible augmentation de la dissipation visqueuse, due à la présence des parois ou au caractère non-infini du liquide environnant.

Même dans le simple exemple académique de la remontée d'une bulle en régime visqueux, régi par la vitesse de Stokes (I.5), la présence de parois induit des corrections à $v_{b,\infty}$. Par exemple, la vitesse de remontée d'une bulle d'air de rayon r_b dans un cylindre de rayon R est approximée par la formule [Ladenburg, 1907]

$$v_{b,\infty} = \frac{v_{b,St}}{1 + 2.4 \frac{r_b}{R}}, \quad (\text{I.9})$$

pour $r_b/R < 0.15$. Dans le cadre de notre étude, nous nous concentrerons uniquement sur l'écoulement quasi bi-dimensionnel dans une cellule de Hele-Shaw. Nous allons donc mettre en exergue l'influence du confinement sur la dynamique de remontée d'une bulle.

1.2.1 Cellule de Hele-Shaw : présentation

La cellule de Hele-Shaw, présentée sur la figure I.5, est un dispositif expérimental initialement utilisé en hydrodynamique pour modéliser des écoulements potentiels bidimensionnels autour d'obstacles [Hele-Shaw, 1898]. La cellule est composée de deux plaques verticales de dimensions l_x selon x et l_z selon z , généralement en verre, qui sont espacées d'une distance appelée *gap* ou entrefer h selon la direction transverse y , et très faible devant l_x et l_z . On remplit le volume intersticiel d'un liquide, et l'on crée une bulle d'air par un capillaire situé en bas de la cellule qui évolue dans ce système confiné. Les bords de la cellule sont hermétiquement clos, seule la surface libre du liquide en haut de la cellule est en contact avec l'atmosphère. Il est souvent possible d'incliner la cellule pour modifier l'influence de la gravité sur la dynamique étudiée.

Mise en équation théorique

On étudie l'écoulement d'un liquide Newtonien de viscosité η_f et de masse volumique ρ_f à travers la cellule de Hele-Shaw. De plus, on suppose que l'écoulement est isotherme. La dynamique du liquide est décrite par l'équation de Navier-Stokes, à laquelle on rajoute la relation d'incompressibilité de l'écoulement [Guyon et al., 2001] :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right] = -\nabla P + \rho_f \mathbf{g} + \eta_f \Delta \mathbf{v}_f \quad (\text{I.10})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0. \quad (\text{I.11})$$

P représente ici le champ de pression, et \mathbf{v}_f le champ de vitesses du liquide. Le mouvement du fluide à l'intérieur de la bulle (ici, le gaz) est aussi régi par la relation (I.10), avec ρ_b la masse volumique de la bulle, η_b sa viscosité et \mathbf{v}_b le champ de vitesses dans la bulle. Notons que la bulle peut être une goutte de fluide en cellule de Hele-Shaw (donc de viscosité et masse volumique non négligeable devant celle du liquide environnant) et de nombreuses études s'intéressent à cette configuration [Gallaire et al., 2014, Reichert et al., 2018, Keiser et al., 2018].

L'équation de Navier-Stokes fait apparaître un nombre adimensionné important dans la mise en équation du problème : le nombre de Reynolds.

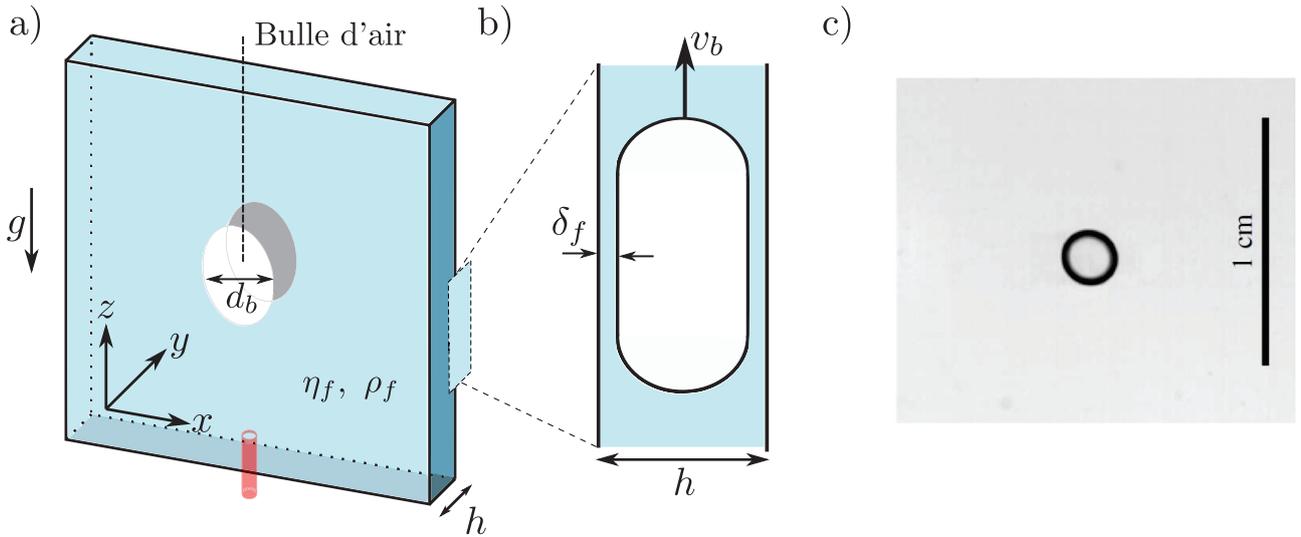


FIGURE I.5 - **Cellule de Hele-Shaw.** a) Vue de face de la cellule. Le liquide de viscosité η_f et de masse volumique ρ_f remplit tout l'espace entre les plaques de verre et une bulle d'air, caractérisée par son diamètre d_b évolue dans cet environnement. La distance entre les plaques de verre est notée h . b) Vue de côté de la cellule. La bulle d'air remonte verticalement à une vitesse v_b , et l'on note δ_f la taille du film de liquide situé entre la bulle et les plaques de verre. c) Photographie issue de [Filella, 2015] d'une bulle d'air de diamètre $d_b = 2.7$ mm évoluant dans une cellule de gap $h = 1$ mm.

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds compare le transport par advection de quantité de mouvement et transport par diffusion visqueuse dans l'équation (I.10). Il s'écrit généralement sous la forme

$$\text{Re}_{L_i} \equiv \frac{\rho_f L_i U_i}{\eta_f}, \quad (\text{I.12})$$

où U_i est une vitesse caractéristique et L_i une distance caractéristique de l'écoulement. L_i est généralement associée à la plus petite longueur dans le système considéré qui correspond aux variations les plus importantes de vitesse (dont les gradients sont importants) et U_i est la vitesse typique d'écoulement du fluide. Nous montrerons partie 1.2.2 que dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, le nombre de Reynolds Re associé à l'écoulement est donné par

$$\text{Re} \equiv \text{Re}_{d_b} \left(\frac{h}{d_b} \right)^2, \quad \text{Re}_{d_b} = \frac{\rho_f \|v_b\| d_b}{\eta_f}. \quad (\text{I.13})$$

$\|v_b\|$ représente la vitesse typique de remontée de la bulle et d_b son diamètre, dans le cas où $d_b > h$. Un nombre de Reynolds inférieur à l'unité correspond physiquement à un fluide qui se met aisément en mouvement lors d'une perturbation quelconque, dans notre cas le mouvement de la bulle, sans création de structures tourbillonnaires dans le sillage [Guyon et al., 2001]. Dans l'équation (I.10), cela reviendra à négliger le terme inertiel $(v_f \cdot \nabla)v_f$.

Dynamique à haut nombre de Reynolds

Notre étude se concentrera sur la dynamique à faible nombre de Reynolds, mais nous nous proposons de faire un court état de l'art sur les remontées de bulle à haut Reynolds [Roudet, 2008, Roig et al., 2012, Filella, 2015]. La figure I.6 présente différentes formes et trajectoires de bulles remontant dans

1.2. Bulle confinée dans une cellule de Hele-Shaw

une cellule de Hele-Shaw pour différents diamètres de bulles d_b (le liquide environnant est de l'eau) en fonction du nombre d'Archimède, égal au nombre de Galilée (I.3).

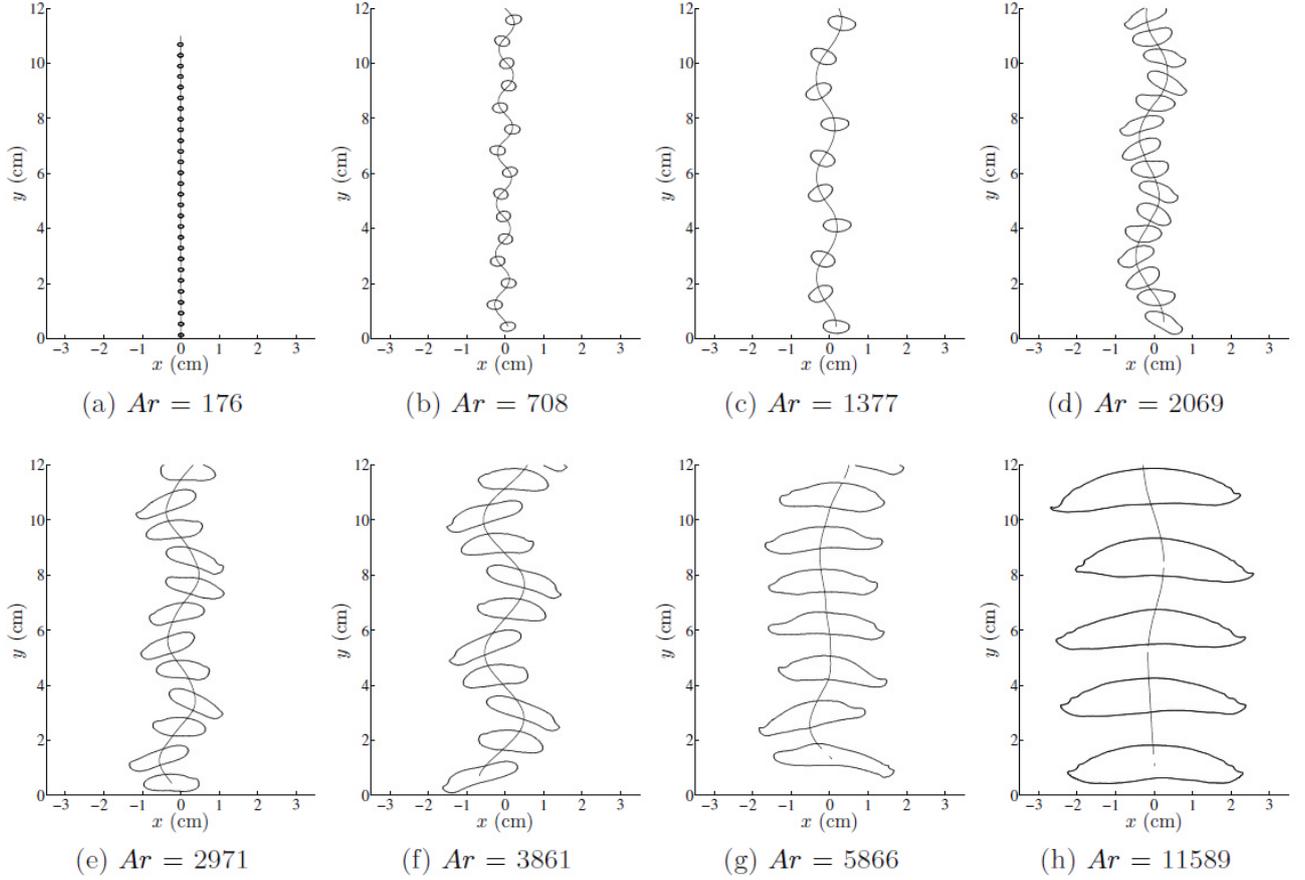


FIGURE I.6 - **Formes et trajectoires de bulles confinées dans une cellule de Hele-Shaw.** [$h = 3.08$ mm, liquide : eau] Le nombre de Reynolds Re , défini par l'équation (I.13), varie entre 80 et 1200. Le nombre d'Archimède Ar est égal au nombre de Galilée (I.3). Figure issue de [Filella, 2015, Filella et al., 2015].

La forme et la trajectoire des bulles sont contrôlées par leur taille, ce qui modifie la valeur du nombre d'Archimède. Celles-ci remontent verticalement à faible diamètre, mais une oscillation autour de l'axe z apparaît dès $Ar = 708$, due à la formation de tourbillons en aval de la bulle. On constate aussi un aplatissement de la bulle ($a/b < 1$). Pour de grands diamètres de bulles, les tourbillons sont de plus en plus importants ainsi que l'allongement des bulles perpendiculairement à \mathbf{v}_b . On retrouve donc des trajectoires et formes de bulles communes à ce que nous avons décrit dans des environnements tridimensionnels (zone III sur la figure I.2). La vitesse moyenne d'ascension des bulles est donnée par la relation

$$v_{b,\infty} \approx 0.75 \left(\frac{h}{d_b} \right)^{1/6} \sqrt{gd_b}, \quad (\text{I.14})$$

dans la gamme de Reynolds et Archimède/Galilée considérés, proche de la relation (I.7).

Intéressons-nous maintenant à la dynamique à faible nombre de Reynolds afin de voir si l'on retrouve par exemple des comportements similaires aux remontées dans des environnements tridimensionnels.

1.2.2 Mise en équation théorique

On se place en régime stationnaire, et on introduit la pression hydrostatique P_h , équivalente au gradient de pression hydrostatique associé à la force volumique de gravité telle que $P_h = -\rho_f g z$, la direction de z étant indiquée sur la figure I.5-a). L'équation (I.10) s'écrit

$$-\nabla \Pi_f + \eta_f \Delta \mathbf{v}_f = \rho_f (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f, \quad (\text{I.15})$$

avec $\Pi_f = P + P_h$ la pression résultante de l'écoulement. Cette équation est appelée équation de Stokes [Happel and Brenner, 2012].

Le raisonnement peut aussi s'effectuer dans la bulle d'air, et l'équation de Stokes est alors valable dans chacune des deux phases (avec une viscosité η_b pour la bulle). La résolution de l'équation requiert d'explicitier les conditions aux limites au niveau des différentes interfaces en jeu : les parois solides que sont les plaques de verre, et l'interface liquide-gaz.

- Au niveau des plaques de verre, la vitesse du liquide est égale à celle de la paroi (donc nulle).
- Au niveau de l'interface liquide-gaz, il y a continuité de la vitesse, mais aussi continuité des composantes tangentielle et normale des contraintes visqueuses.

Nous reviendrons sur ces conditions limites tout au long du développement.

Approximation de lubrification

La géométrie particulière de la cellule de Hele-Shaw va nous permettre d'effectuer une simplification des équations grâce à **l'approximation de lubrification**. On note le champ de vitesses du liquide $\mathbf{v}_f = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z$, les axes étant définis sur la figure I.5-a).

On effectue une adimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes. On note L l'échelle de longueur associée aux directions x et z de l'écoulement (ce sera ici la taille de la bulle), et h l'échelle de longueur associée à la direction y (épaisseur de la cellule). On introduit les quantités adimensionnées suivantes :

$$\bar{x} \equiv \frac{x}{L}, \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{L}, \quad \bar{y} \equiv \frac{y}{h}. \quad (\text{I.16})$$

La vitesse typique de l'écoulement parallèlement aux plaques est V . Les vitesses normalisées sont donc définies par

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{V}, \quad \bar{w} \equiv \frac{w}{V}. \quad (\text{I.17})$$

Pour trouver la forme adimensionnée associée à la composante transverse de la vitesse qui est nécessairement différente de u et w à cause de la géométrie confinée, on écrit la relation d'incompressibilité du liquide :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{V/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{V_y/h} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{V/L} = 0 \Rightarrow \frac{V_y}{h} \sim \frac{V}{L} \Rightarrow V_y \sim \left(\frac{h}{L}\right) V. \quad (\text{I.18})$$

La vitesse transverse adimensionnée s'écrit donc :

$$\bar{v} \equiv \frac{v}{V_y} = \left(\frac{L}{h}\right) \frac{v}{V}. \quad (\text{I.19})$$

En utilisant les relations précédentes, on peut réécrire l'expression du laplacien du champ de vitesses :

$$\Delta \mathbf{v}_f = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & = \frac{V}{h^2} \left[\left(\frac{h}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} & = \frac{V}{h^2} \left[\left(\frac{h}{L}\right)^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \left(\frac{h}{L}\right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} & = \frac{V}{h^2} \left[\left(\frac{h}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right] \end{cases}. \quad (\text{I.20})$$

De même, on peut adimensionner $(\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f$:

$$(\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f = \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} & = \frac{V^2}{L} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} & = V^2 \left(\frac{h}{L}\right) \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right] \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} & = \frac{V^2}{L} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right] \end{cases}. \quad (\text{I.21})$$

Nous supposons maintenant que la bulle est de grande taille devant l'épaisseur h ce qui signifie que $L = d_b \gg h$. L'échelle typique de l'écoulement est $V = \|\mathbf{v}_b\|$. En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en $\epsilon = (h/d_b)$, seuls les termes en rouge restent. On peut maintenant comparer l'importance relative des termes inertiels et visqueux :

$$\frac{\|\rho_f (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f\|}{\|\eta_f \Delta \mathbf{v}_f\|} = \frac{\rho_f \|\mathbf{v}_b\|^2}{\eta_f \|\mathbf{v}_b\|} = \text{Re}_{d_b} \left(\frac{h}{d_b}\right)^2 \equiv \text{Re}. \quad (\text{I.22})$$

On retrouve bien le nombre de Reynolds associé à la géométrie de Hele-Shaw. L'équation (I.15) s'écrit finalement, avec $d_b \gg h$ et $\text{Re} \ll 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_f}{\partial x} & = \eta_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \Pi_f}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \Pi_f}{\partial z} & = \eta_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases}. \quad (\text{I.23})$$

Approximation de lubrification

Pour une bulle de diamètre d_b très grand devant l'épaisseur h et un nombre de Reynolds Re très petit devant 1, l'écoulement du liquide est régi par la relation (I.23). Cette simplification de l'équation de Navier-Stokes sous les conditions $d_b \gg h$ et $\text{Re} \ll 1$ se nomme **l'approximation de lubrification**.

La pression Π_f joue alors un rôle fondamental car elle est l'unique champ scalaire influençant le champ de vitesses.

Solutions

D'après l'équation (I.23), la pression de l'écoulement ne dépend pas de la variable y d'où $\Pi_f = \Pi_f(x, z)$. En intégrant deux fois (I.23) selon e_x , on obtient

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\eta_f} \frac{\partial \Pi_f}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \alpha(x, z)y + \beta(x, z). \quad (\text{I.24})$$

La condition de non-pénétrabilité du liquide aux bords des plaques permet de déterminer α et β . On effectue le même processus sur l'équation (I.23) selon e_z pour déterminer totalement le champ de vitesses, d'où l'expression

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\eta_f} \frac{\partial \Pi_f}{\partial x} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right], \quad w(x, y, z) = -\frac{1}{2\eta_f} \frac{\partial \Pi_f}{\partial z} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right], \quad v(x, y, z) = 0. \quad (\text{I.25})$$

On peut réécrire ces équations sous la forme

$$\boxed{\mathbf{v}_f = -\frac{1}{2\eta_f} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \nabla \Pi_f(x, z)}. \quad (\text{I.26})$$

En chaque point (x, z) , l'écoulement du liquide est alors identique à un Poiseuille plan selon la direction du gradient de champ de pression Π_f .

Champ de vitesses moyenné

Dans ce type de géométrie, une méthode classique pour déterminer l'hydrodynamique consiste à étudier la dynamique du champ moyenné sur l'épaisseur, défini par

$$\widetilde{\mathbf{v}}_f \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{v}_f(x, y, z) dy. \quad (\text{I.27})$$

En utilisant (I.26), on obtient ainsi :

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{v}}_f = \frac{-h^2}{12\eta_f} \nabla \Pi_f}. \quad (\text{I.28})$$

La vitesse moyennée d'un fluide est d'autant plus grande que les gradients de pression sont élevés et que sa viscosité est faible. Cette équation est équivalente à une loi de Darcy [Darcy, 1856], et est très importante pour l'étude des écoulements dans un milieu poreux ou dans un milieu granulaire. Le champ de vitesses moyenné est mathématiquement le même que celui pour un écoulement potentiel. Cette géométrie permet donc de visualiser expérimentalement les lignes de courant d'un fluide parfait en 2D [Hele-Shaw, 1898].

Le champ moyenné est irrotationnel d'après (I.28). Ceci va nous permettre d'utiliser la théorie des écoulements potentiels pour déterminer le champ de pression $\Pi_f = P + P_h$.

1.2.3 Équation de Laplace et résolution

L'écoulement étant irrotationnel, $\widetilde{\mathbf{v}}_f$ dérive d'un potentiel φ_f . D'après (I.28), la relation entre φ_f et Π_f s'écrit

$$\widetilde{\mathbf{v}}_f = \nabla \left(\frac{-h^2}{12\eta_f} \Pi_f \right) \Rightarrow \widetilde{\mathbf{v}}_f = \nabla \varphi_f, \text{ où } \varphi_f = \frac{-h^2}{12\eta_f} \Pi_f + C_f. \quad (\text{I.29})$$

Notons que cette relation amène une différence profonde avec le cas de l'écoulement d'un fluide parfait, pour lequel l'équation de Bernoulli donnerait $\Pi_f + \rho_f \varphi^2 / 2 = \text{Cste}$ le long d'une ligne de courant [Crowdy, 2000]. Le liquide étant visqueux, la dissipation d'énergie est présente en tout point et donc il n'est pas possible d'appliquer Bernoulli ici. En utilisant l'équation d'incompressibilité (I.11), aussi valable pour $\widetilde{\mathbf{v}}_f$, le potentiel des vitesses φ satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta \varphi_f = 0 \quad (\text{I.30})$$

Cette équation différentielle du second ordre est appelée **équation de Laplace bidimensionnelle**. Notons que tout le raisonnement que nous venons d'effectuer jusqu'ici est valable quelque soit le type de perturbation dans la cellule de Hele-Shaw, tant que l'approximation de lubrification est vérifiée et que le régime est stationnaire. La résolution de l'équation de Laplace étant totalement déterminée par les conditions limites dues à la présence de la bulle, c'est cette dernière qui impose tout l'écoulement du liquide dans la cellule de Hele-Shaw.

Pour résoudre de manière analytique et simple l'équation (I.30), on suppose que la bulle d'air est circulaire ($a/b = 1$) de diamètre d_b , comme présenté sur la figure I.7. On suppose de plus que la vitesse de la bulle \mathbf{v}_b est dirigée selon z^\dagger . On se place en coordonnées polaires et on note le champ de vitesses moyenné de l'écoulement $\widetilde{\mathbf{v}}_f = \widetilde{v}_r \mathbf{e}_r + \widetilde{v}_\theta \mathbf{e}_\theta$. En effectuant une résolution par séparation des variables r et θ , on obtient [Guyon et al., 2001] :

$$\varphi_f(r, \theta) = \alpha_0 \ln(r) + \beta_0 + \sum_{n \geq 1} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}). \quad (\text{I.31})$$

La bulle remontant verticalement, l'écoulement induit par la bulle est axisymétrique. Cela signifie que le problème est invariant par transformation $\theta \rightarrow \pi - \theta$, donc que $\varphi_f(r, \theta) = \varphi_f(r, \pi - \theta)$, ce qui implique que $\alpha_n = 0 \forall n \geq 1$. De plus, le liquide est au repos pour $r \rightarrow +\infty$ donc α_0, β_0 et γ_n sont nuls.

Les conditions de non-pénétration de la bulle à sa surface s'écrivent

$$\widetilde{v}_r(d_b/2, \theta) = v_b \sin(\theta) = \left. \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} \right|_{r=d_b/2}. \quad (\text{I.32})$$

Cette relation est valable $\forall \theta$ donc $n = 1$. En dérivant l'équation (I.31), la relation précédente s'écrit donc

†. Dans le cas où la vitesse est dirigée selon un vecteur unitaire quelconque, on peut définir un référentiel cartésien associé à ce vecteur et effectuer les mêmes calculs.

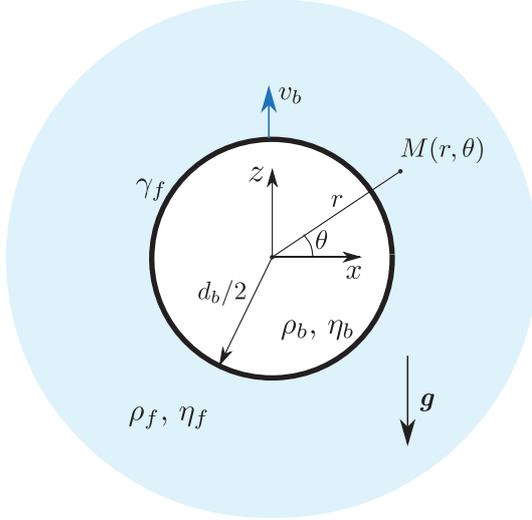


FIGURE I.7 - **Paramétrisation du problème de remontée de la bulle.** La bulle de diamètre d_b est confinée entre les deux plaques de verre. L'étude s'effectue dans le référentiel (x, y, z) ou (r, θ, y) avec $x = r \cos(\theta)$ et $z = r \sin(\theta)$ ($d_b \gg h$).

$$v_b = \beta_1(-1)\frac{4}{d_b^2} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{v_b d_b^2}{4}. \quad (\text{I.33})$$

Finalement, les différentes conditions limites imposées par la bulle permettent d'écrire le potentiel des vitesses sous la forme

$$\varphi_f(r, \theta) = -\frac{v_b d_b^2}{4r} \sin(\theta) \quad \forall r > d_b/2. \quad (\text{I.34})$$

On peut déterminer l'écoulement moyenné $\widetilde{\mathbf{v}}_f$ du liquide, d'après l'équation (I.29) :

$$\widetilde{v}_r = -\frac{\partial \varphi_f}{\partial r} \Rightarrow \widetilde{v}_r = \frac{v_b d_b^2}{4r^2} \sin(\theta) \quad (\text{I.35})$$

$$\widetilde{v}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \theta} \Rightarrow \widetilde{v}_\theta = -\frac{v_b d_b^2}{4r^2} \cos(\theta). \quad (\text{I.36})$$

Le champ de pression quant à lui se détermine aussi par l'équation (I.29) :

$$\varphi_f = \frac{-h^2}{12\eta_f} \Pi_f + C_f \Rightarrow \Pi_f(r, \theta) = \frac{12\eta_f}{h^2} \left(\frac{d_b}{2}\right)^2 \frac{v_b \sin(\theta)}{r} + C_f, \quad (\text{I.37})$$

avec C_f une constante. Finalement, le champ de vitesses non moyenné du liquide \mathbf{v}_f dans toute la cellule vaut, en utilisant l'équation (I.28) :

$$\mathbf{v}_f = \frac{3v_b}{2} \left(\frac{d_b/2}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right] (\sin(\theta)\mathbf{e}_r - \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta) \quad \forall r > d_b/2. \quad (\text{I.38})$$

Le même raisonnement peut s'effectuer pour la bulle : l'équation de Stokes réduite (I.15) reste valable avec $\Pi_b = P - \rho_b g z$ et $\eta_f \rightarrow \eta_b$. Un développement similaire donne que

$$\varphi_b = -v_b r \sin(\theta) = \frac{-h^2}{12\eta_b} \Pi_b + C_b \Rightarrow \boxed{\Pi_b = \frac{12\eta_b}{h^2} r \sin(\theta) + C_b}. \quad (\text{I.39})$$

avec C_b une constante. Le champ de vitesses dans la bulle vaut alors $v_b \mathbf{e}_z \forall r < d_b/2$. La bulle remonte donc comme un solide sans écoulement secondaire à l'intérieur de celle-ci.

Il reste maintenant à déterminer la vitesse de remontée de la bulle, seule inconnue restante.

1.2.4 Vitesse de remontée de la bulle

Nous proposons de déterminer la vitesse de remontée de la bulle grâce à deux méthodes différentes.

Équilibre de pression

On rappelle que $\Pi_i = P - \rho_i g z$ et $z = r \sin(\theta)$. On soustrait l'équation (I.39) et (I.37) appliquées sur le contour de la bulle défini par $r = r_b$. On obtient [Taylor and Saffman, 1959] :

$$\frac{12\Delta\eta}{h^2} \frac{v_b d_b}{2} \sin(\theta) - \Delta\rho g \frac{d_b}{2} \sin(\theta) = P(r = d_b/2^+, \theta) - P(r = d_b/2^-, \theta) + C, \quad (\text{I.40})$$

avec $\Delta\eta = \eta_f - \eta_b$ et $\Delta\rho = \rho_f - \rho_b$. La partie de droite de l'équation (I.40) est nulle car indépendante de θ . On obtient directement que

$$\boxed{v_b = \frac{\Delta\rho g h^2}{12\Delta\eta} = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_f}}, \quad (\text{I.41})$$

car $\rho_b \ll \rho_f$ et $\eta_b \ll \eta_f$.

Puissance injectée et dissipée par le système

Ce calcul est repris de [Maxworthy, 1986]. La remontée de la bulle est une compétition entre la gravité et la résistance du liquide. La puissance injectée à la bulle est celle associée à la poussée d'Archimède :

$$\mathcal{P}_B^0 = \Delta\rho g \left(\frac{\pi d_b^2 h}{4} \right) v_b. \quad (\text{I.42})$$

La puissance dissipée par le liquide dans toute la cellule vaut, dans le cas où la bulle occupe tout l'espace entre les plaques (donc pour $d_b \gg h$),

$$\mathcal{P}_\eta^0 = \iiint_{\text{cellule}} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial y} \right|^2 d\tau \quad (\text{I.43})$$

$$= \int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f(r, \theta, y)}{\partial y} \right|^2 r dr d\theta dy. \quad (\text{I.44})$$

En utilisant (I.38), l'expression devient :

$$\mathcal{P}_\eta^0 = \frac{3\pi\eta_f v_b^2 d_b^2}{h}. \quad (\text{I.45})$$

L'équilibre entre puissance dissipée et injectée permet donc d'obtenir la vitesse de la bulle :

$$v_b = \frac{\Delta\rho g h^2}{12\eta_f}. \quad (\text{I.46})$$

Les deux méthodes produisent le même résultat. Il est important de noter que la dissipation dans la couche de lubrification n'est pas prise en compte dans le calcul de la puissance dissipée. On peut montrer qu'elle est négligeable devant la dissipation visqueuse dans la cellule car la bulle glisse sur le film donc le champ de vitesses y est quasi-nul [Filella et al., 2015, Keiser et al., 2018].

L'équation (I.46) peut aussi se réécrire sous la forme $\frac{v_b^2}{g d_b} = \frac{1}{12} \text{Re}$. Dans notre cas $\text{Re} \ll 1$, d'où $v_b \ll \sqrt{g d_b}$, en contraste avec l'étude réalisée à haut Reynolds par [Filella et al., 2015] où $v_b \sim \sqrt{g d_b}$ avec l'équation (I.14).

Dynamique du liquide et champ de pression ($d_b \gg h$)

La vitesse de la bulle ayant été déterminée, le champ de pression généré par l'écoulement de la bulle au sein de la cellule de Hele-Shaw est alors connu. La constante C_f peut s'obtenir avec l'équilibre de pression à la surface libre de la cellule, et le terme $C_f + \rho_f g z$ correspond au champ de pression hydrostatique sans la présence de la bulle. Le champ de pression généré par la bulle vaut donc :

$$\Pi_f(r, \theta) = \Delta\rho g \left(\frac{d_b}{2}\right)^2 \frac{\sin(\theta)}{r}. \quad (\text{I.47})$$

Π_f est positive au dessus de la bulle donc provoque une surpression en amont de la bulle ($\theta > 0$). De même, il y a une dépression dans la région derrière la bulle ($\theta < 0$).

On peut également obtenir le champ de vitesses \mathbf{v}_f d'après (I.38) :

$$\mathbf{v}_f = \frac{\Delta\rho g h^2}{8\eta_f} \left(\frac{d_b/2}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right] (\sin(\theta)\mathbf{e}_r - \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta). \quad (\text{I.48})$$

La bulle perturbe l'écoulement à faible distance (dépendance en $1/r^2$).

Cas d'une bulle elliptique

Il est possible d'effectuer les mêmes calculs précédents pour une bulle elliptique remontant verticalement. L'écoulement potentiel d'un liquide autour d'une ellipse s'obtient à partir de celui pour un cercle en utilisant une transformation de Kutta-Joukowski. Nous ne détaillerons pas le calcul qui est proposé dans [Toupoint et al., 2021]. Pour une bulle elliptique d'axes a et b^\dagger , de diamètre équivalent $d_b = 2\sqrt{ab}$, axisymétrique, remontant verticalement, et tel que $d_b \gg h$, la vitesse terminale ascensionnelle des bulles est donnée par :

†. On rappelle que a est selon \mathbf{v}_b et b est perpendiculaire à \mathbf{v}_b .

$$v_b = v_0^* \equiv \frac{\Delta\rho gh^2}{12\eta_f} \left(\frac{a}{b}\right). \quad (\text{I.49})$$

Cette vitesse v_0^* est alors appelée **vitesse de Maxworthy**, et sera un des paramètres importants de cette thèse.

En conclusion, la bulle remonte dans une cellule de Hele-Shaw remplie de liquide due à une compétition entre les forces de dissipation visqueuses et la gravité. Dans le cadre de l'approximation de lubrification, la vitesse de remontée de la bulle est donnée par la vitesse de Maxworthy v_0^* . Nous présentons alors les expériences validant ce résultat important.

1.2.5 Vérification expérimentale

Les premiers travaux d'étude théorique de bulles d'air remontant dans un liquide confiné en cellule de Hele-Shaw remontent en 1959 [Taylor and Saffman, 1959]. Maxworthy propose en 1986 une interprétation de la théorie précédemment introduite par Saffman et Taylor par les considérations de puissance injectée et dissipée décrites ci-dessus et effectue les premières expériences de remontée de bulles. La figure I.8 présente les résultats obtenus dans un liquide de viscosité cinématique $\nu_f \equiv \eta_f/\rho_f = 77.8 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ (soit environ 70 fois plus visqueux que l'eau).

Vitesse des bulles

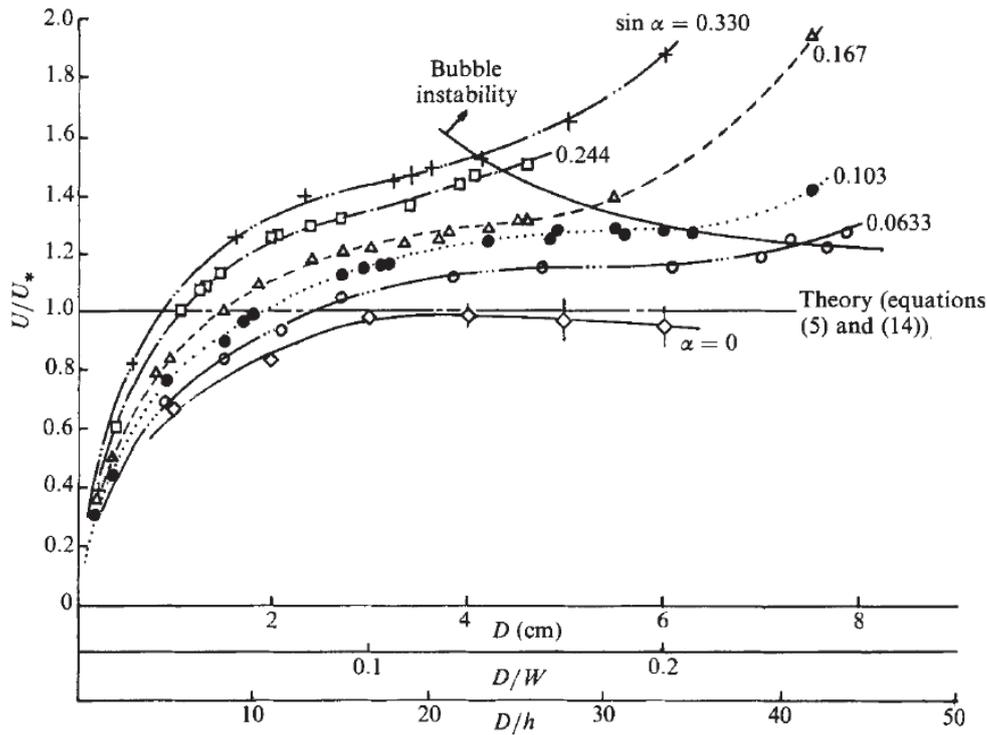


FIGURE I.8 - **Évolution de la vitesse des bulles remontant dans une cellule de Hele-Shaw.** [$h = 1.8 \text{ mm}$] U représente la vitesse de remontée des bulles v_b , U_* est la vitesse terminale des bulles v_0^* et D le diamètre d_b des bulles. Les différentes courbes sont obtenues en inclinant la cellule de Hele-Shaw d'un angle α . Le nombre de Reynolds Re , donné par l'équation (I.13), est inférieur à l'unité dans les expériences. Figure issue de [Maxworthy, 1986].

Les différentes courbes obtenues correspondent à des remontées de bulles pour une cellule inclinée. En effet, la théorie développée suppose que $Re \ll 1$. Afin de diminuer la vitesse des bulles (et donc

le nombre de Reynolds), la cellule est inclinée pour travailler avec une gravité effective plus petite $g \rightarrow g \sin(\alpha)$. La comparaison avec la théorie s'obtient en interpolant la vitesse pour $\alpha \rightarrow 0$. Ici, seule la première courbe telle que $\alpha = 0$ nous intéresse. La trajectoire des bulles est rectiligne et sans oscillation. La vitesse des bulles varie d'environ 5 à 34 mm.s⁻¹ et le diamètre de 1 à 6 cm. On remarque que la vitesse de la bulle augmente avec le diamètre, jusqu'à atteindre le plateau $v_b = v_0^*$ vers $d_b \approx 15h$. En comparaison, la vitesse de remontée dans le même liquide et pour un diamètre de 34 mm dans un environnement tridimensionnel donnerait une vitesse de remontée de 40 cm.s⁻¹ !

Forme des bulles

La forme des bulles est elliptique, avec des rapports d'aspect a/b supérieurs à l'unité, comme présenté sur la figure I.9 [Maxworthy, 1986]. Elles s'allongent de plus en plus selon la direction de la vitesse de la bulle lorsque leur diamètre équivalent augmente, en contraste avec le cas $Ga \gg 1$ [Filella et al., 2015] pour lequel $a/b < 1$.

Il n'existe pas de consensus clair sur la relation entre le rapport d'aspect et les paramètres de la bulle (d_b, v_b) ainsi que ceux du liquide environnant.

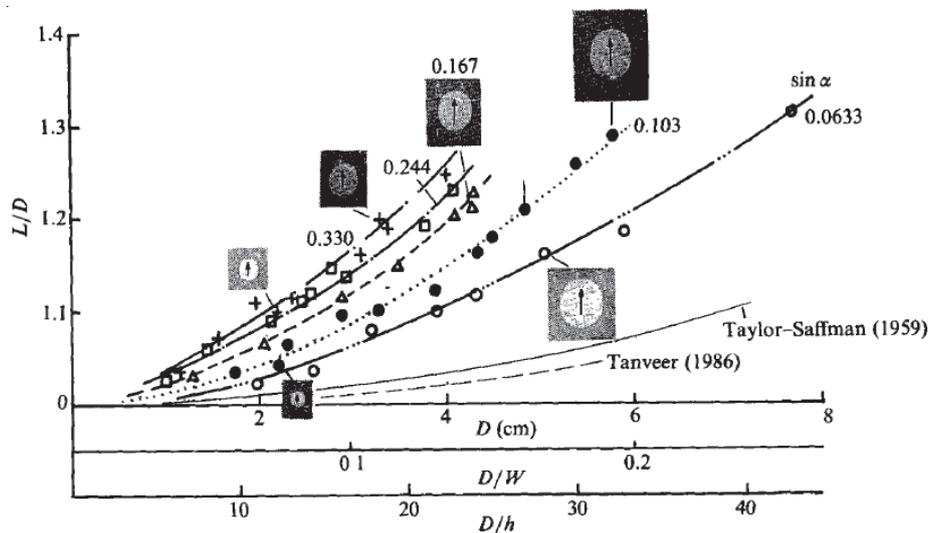


FIGURE I.9 - **Forme des bulles remontant dans une cellule de Hele-Shaw.** [$h = 1.8$ mm] L/D représente le rapport d'aspect a/b . Figure issue de [Maxworthy, 1986].

Résumé

La dynamique de remontée d'une bulle d'air dans un liquide Newtonien est caractérisée par la compétition entre des effets capillaires, gravitationnels, visqueux, inertiels et proximités des parois.

En fonction de l'importance relative de ces phénomènes, caractérisés par différents nombres adimensionnés, la forme et la vitesse de remontée des bulles diffèrent. Loin des parois, une bulle isolée remonte verticalement en régime visqueux dominé par les effets capillaires, et la vitesse de remontée v_b , dite vitesse de Stokes, est proportionnelle à d_b^2 . En régime inertiel et dominé par les effets gravitationnels, la forme de la bulle s'allonge, des tourbillons peuvent se créer, et la bulle remonte verticalement en oscillant sur le plan horizontal. Le rapport d'aspect d'une bulle, défini par a/b avec a le axe suivant la direction de la vitesse de la bulle et b l'axe perpendiculaire à a , est alors un paramètre important pour caractériser la forme d'une bulle. Il est bien établi que la vitesse terminale de la bulle est une fonction non-monotone du diamètre d_b ainsi que du nombre de Morton.

Une cellule de Hele-Shaw permet d'étudier la remontée d'une bulle dans un environnement quasi-bidimensionnel en présence d'un confinement latéral. Il s'agit de deux plaques de verre espacées d'une très faible distance h appelée gap entre lesquelles il y a une bulle d'air de diamètre $d_b \gg h$ remontant dans un liquide Newtonien. La dynamique de remontée a été étudiée dans deux régimes caractérisés par le nombre de Reynolds Re tel que

$$Re \equiv Re_{d_b} \left(\frac{h}{d_b} \right)^2, \quad Re_{d_b} = \frac{\rho_f v_b d_b}{\eta_f}.$$

Dans le régime inertiel $Re \gg 1$, les bulles oscillent légèrement autour de leur trajectoire verticale, et ont une forme allongée avec un rapport d'aspect $a/b < 1$. La vitesse de remontée est alors proportionnelle à la vitesse gravitationnelle $\sqrt{gd_b}$:

$$v_b \approx 0.75 \left(\frac{h}{d_b} \right)^{1/6} \sqrt{gd_b}.$$

Dans le régime visqueux $Re \ll 1$, il est possible de résoudre analytiquement l'écoulement induit par la présence de la bulle, si le rôle du film de lubrification est négligeable devant la dissipation visqueuse de l'écoulement. L'écoulement du liquide moyenné sur l'épaisseur h est régi par une loi de Darcy et le potentiel du champ de vitesses associé est régi par l'équation de Laplace. En supposant la bulle **axisymétrique**, remontant **verticalement** et $d_b \gg h$, les conditions limites appliquées sur la bulle permettent alors de déterminer sa vitesse terminale de remontée, appelée vitesse de Maxworthy v_0^* , telle que

$$v_0^* \equiv \frac{\rho_f g h^2}{12 \eta_f} \left(\frac{a}{b} \right).$$

Expérimentalement, la vitesse est bien régie par v_0^* et la forme des bulles est allongée selon la verticale, avec un rapport d'aspect supérieur de l'ordre de 1.1 à 1.3, augmentant avec d_b .

Questions

- La vitesse ascensionnelle d'une bulle isolée en cellule de Hele-Shaw a été déterminée dans deux conditions particulières : $Re \ll 1$, $d_b \gg h$ [Taylor and Saffman, 1959, Maxworthy, 1986], puis $Re \gg 1$ [Filella et al., 2015]. **Quel est le diagramme de vitesse comme dans le cas tridimensionnel pour une bulle dans une cellule de Hele-Shaw ?**
- Le diagramme (Bo, Ga) permet de prévoir la forme d'une bulle dans un environnement tridimensionnel [Tripathi et al., 2015]. **Quel est le lien entre la forme d'une bulle isolée en cellule de Hele-Shaw et les paramètres du système ?**
- Une bulle d'air n'évolue souvent jamais seule dans un environnement [Ikeda and Maxworthy, 1990, Gaillard et al., 2021]. **Comment la présence d'une autre bulle modifie la dynamique ?**

Dynamique et rhéologie des suspensions

Dans ce chapitre, nous allons décrire la dynamique générale des suspensions. Nous commencerons par l'étude d'une particule isolée évoluant dans un liquide Newtonien, afin de comprendre les phénomènes physiques entre la particule et le liquide qui sont en jeu, et introduire des nombres adimensionnés qui permettront de comparer leur importance dans la dynamique. Nous nous intéresserons ensuite au modèle collectif d'une suspension, c'est-à-dire lorsque les particules interagissent entre elles au sein de la suspension. Enfin, nous étudierons les suspensions dans des milieux confinés et expliquerons les phénomènes physiques importants issus de la rétroaction entre le confinement et la dynamique du liquide et des particules.

2.1 Dynamique d'une particule dans un liquide

2.1.1 Mise en équation

Dynamique du liquide : équation de Navier-Stokes

On s'intéresse ici à l'écoulement d'une particule indéformable de masse volumique ρ_p dans un liquide incompressible et Newtonien de masse volumique ρ_f et de viscosité dynamique η_f . La particule est supposée sphérique de diamètre d_p , de rugosité nulle[†]. On suppose que le récipient contenant le liquide est fixe et infini afin de négliger les effets de bords et que la seule force extérieure s'appliquant sur le système est le poids.

On se place dans un référentiel galiléen lié au récipient. \mathbf{v}_f représente le champ de vitesses du liquide et \mathbf{v}_p la vitesse de la particule. La dynamique du liquide est encore régie par l'équation de Navier-Stokes (I.10) qui traduit le bilan de quantité de mouvement, à laquelle on ajoute la relation d'incompressibilité du liquide, que nous rappelons ici :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right] = -\nabla P + \rho_f \mathbf{g} + \eta_f \Delta \mathbf{v}_f + \mathbf{f}_{\text{particule} \rightarrow \text{liquide}}, \quad (\text{I.50})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0. \quad (\text{I.51})$$

La présence d'une particule induit un terme supplémentaire dans (I.50) : $\mathbf{f}_{\text{particule} \rightarrow \text{liquide}}$, la résultante des forces volumiques appliquées par la particule sur le liquide, modélisant les contraintes et conditions aux limites dues à la présence de la particule.

[†]. La rugosité est définie par la hauteur moyenne des aspérités à la surface de la particule. Quand les rugosités sont négligeables devant la taille de la particule, on dit que la particule est lisse.

2.1. Dynamique d'une particule dans un liquide

Pour trouver le nombre de Reynolds associé au problème posé, on peut effectuer une simple analogie avec l'écoulement d'un fluide à travers une sphère. La vitesse du fluide environnant est de l'ordre de $\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f\|$ et l'échelle caractéristique des variations des phénomènes est de l'ordre du diamètre de la sphère d_p . On définit alors le nombre de Reynolds particulaire associé à la taille de la particule

$$\text{Re}_{d_p} \equiv \frac{\rho_f \|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f\| d_p}{\eta_f}. \quad (\text{I.52})$$

Nous nous intéressons à partir de maintenant à des nombres de Reynolds inférieurs à l'unité, pour lesquels les effets visqueux sont prépondérants[†]. Cela correspond physiquement à un fluide qui se met aisément en mouvement lors d'une perturbation quelconque, dans notre cas le mouvement de la particule, sans création de structures tourbillonnaires dans le sillage [Guyon et al., 2001].

Pour compléter les équations classiques de l'hydrodynamique, il nous faut décrire l'équation régissant le mouvement de la particule.

Dynamique de la particule : Équation de Maxey-Riley-Gatignol

L'équation de Maxey-Riley [Maxey and Riley, 1983], premièrement formulée par Boussinesq, Basset et Oseen [Boussinesq, 1885, Basset, 1888, Oseen, 1927] décrit le mouvement d'une sphère de taille d_p finie et de masse volumique ρ_p à travers un liquide sous les conditions précédemment énoncées en appliquant le principe fondamental de la dynamique sur une particule [Kleinstreuer and Feng, 2013] :

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = & \underbrace{-\rho_f \frac{\pi d_p^3}{12} \left(\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} - \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right)}_{\mathbf{F}_{\text{MA}}} \underbrace{- 3\pi\eta_f d_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}_{\mathbf{F}_P} + \underbrace{\frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt}}_{\mathbf{F}_f} + \underbrace{\frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g}}_{\mathbf{F}_g} \\ & + \underbrace{\frac{3}{2} \rho_f \sqrt{\pi\eta_f \rho_p} d_p^2 \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)}{d\tau}}_{\mathbf{F}_B} + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_S + \mathbf{f}_a, \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

avec \mathbf{F}_{MA} la force de masse ajoutée, \mathbf{F}_P la force de traînée, \mathbf{F}_f la force liée à l'accélération du liquide, \mathbf{F}_g la force de gravité, \mathbf{F}_B la force de Basset, \mathbf{F}_R la force de Rubinow, \mathbf{F}_S la force de Saffman et \mathbf{f}_a une force aléatoire due aux effets thermiques à l'échelle microscopique. L'opérateur D/Dt est défini comme la dérivée particulaire telle que

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla), \quad (\text{I.54})$$

se divisant en une partie dérivée temporelle et un terme convectif fonction de \mathbf{v}_f . L'annexe A décrit les phénomènes physiques associés à chaque terme dans cette équation.

La dynamique d'une particule dans un liquide est donc très complexe avec des échelles différentes à la fois temporellement (la force de Basset sur toute l'histoire du liquide, l'agitation thermique sur des échelles de temps typiquement de 10^{-8} s, etc.) et spatialement (la particule met en mouvement le liquide sur quelques diamètres d_p , les interactions avec les molécules sont de l'ordre de la taille de ces dernières, etc.). La vitesse du liquide environnant intervient dans la majorité des termes, preuve de l'interaction très importante du liquide sur la particule. Résoudre complètement numériquement cette équation est alors compliqué et coûteux en temps de calcul. Il est possible de la simplifier avec quelques hypothèses simples (voir Annexe A), notamment $\text{Re}_{d_p} \ll 1$. L'équation de Maxey-Riley peut alors s'écrire

[†]. Le terme inertiel est alors négligé.

$$\left(\rho_p + \frac{\rho_f}{2}\right) \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}{dt} = 3\pi\eta_f d_p (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) + \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} + \mathbf{f}_a. \quad (\text{I.55})$$

2.1.2 Régimes d'évolution : nombre de Stokes et de Péclet

Inertie des particules : nombre de Stokes

On considère ici que le terme d'agitation thermique \mathbf{f}_a est nul. L'équation (I.55) peut se réécrire

$$\frac{d(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}{dt} + \frac{\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f}{\tau_{\text{visqueux}}} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \rho_f/2} \mathbf{g}, \quad (\text{I.56})$$

avec

$$\tau_{\text{visqueux}} = \left(1 + \frac{\rho_f}{2\rho_p}\right) \frac{\rho_p d_p^2}{18\eta_f}. \quad (\text{I.57})$$

Le temps τ_{visqueux} représente la durée caractéristique de décroissance de la vitesse d'une particule soumise uniquement à un frottement visqueux, c'est-à-dire le temps de réponse caractéristique d'une particule à une variation de vitesse au sein d'un fluide. Une autre échelle temporelle de variation est celle associée à l'inertie de la particule, τ_{inertie} . Pour une particule entraînée par le fluide, elle parcourt une distance égale à son diamètre en un temps

$$\tau_{\text{inertie}} = \frac{d_p}{\|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p\|}. \quad (\text{I.58})$$

Le nombre de Stokes définit alors l'importance relative de ces deux interactions au sein du fluide. Il est défini par[†]

$$\text{St} \equiv \left(1 + \frac{\rho_f}{2\rho_p}\right) \frac{\rho_p d_p \|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p\|}{18\eta_f}. \quad (\text{I.59})$$

On distingue deux régimes :

- Dans le régime dit visqueux ($\text{St} \ll 1$), le temps de réponse de la particule est faible devant son temps d'inertie. La particule suit donc en tout temps les lignes de courant du fluide, comme un bout de bois dans un courant d'eau.
- Dans le régime inertiel ($\text{St} \gg 1$), les particules se détachent facilement d'un écoulement dès qu'il est soumis à une variation brusque de vitesse, et le mouvement de la particule ne suit que peu le mouvement du fluide (roche dans un courant d'eau).

Remarquons que le nombre de Stokes est proportionnel au nombre de Reynolds particulaire avec un facteur de forme : il est associé à l'écoulement hydrodynamique à l'échelle de la particule d_p . C'est pour cette raison que l'on confond souvent ces deux nombres qui ont une signification commune dans le cas de l'interaction particule-fluide lorsque $\text{Re}_{d_p} \ll 1$.

[†]. Il est important de noter que cette définition n'est plus valable lorsque $\text{Re}_{d_p} \gg 1$. En effet, la force de frottement fluide n'est alors plus donnée par la relation $F_P = 3\pi\eta_f d_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)$ et τ_{visqueux} possède une forme beaucoup plus complexe [Israel and Rosner, 1982].

2.1. Dynamique d'une particule dans un liquide

On s'intéressera maintenant à des dynamiques Stokésiennes[†] pour lesquelles $St \ll 1$. Par la suite, on utilisera plutôt le terme de **dynamique visqueuse**, mieux adapté ici. Dans la relation (I.56), cela revient à considérer que l'écoulement du liquide et de la particule s'adapte instantanément à toute perturbation, et que le régime d'évolution est toujours permanent. On obtient donc :

$$\frac{\pi d_p^3}{6}(\rho_p - \rho_f)\mathbf{g} = 3\pi\eta d_p(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)_\infty. \quad (\text{I.60})$$

Dans le cas où le liquide est au repos, cette équation donne la vitesse limite de chute (ou de remontée) verticale d'une particule, qu'on nomme **vitesse de Stokes** $v_{p,St}$

$$v_{p,\infty} \equiv v_{p,St} = \frac{1}{18} \frac{d_p^2 |\rho_f - \rho_p| g}{\eta_f}. \quad (\text{I.61})$$

On retrouve alors exactement l'équation (I.5) qui régit la vitesse de remontée d'une bulle d'air, avec $\rho_p \longleftrightarrow \rho_b$ et $\eta_p \longleftrightarrow \eta_b$, car sous les conditions précédemment énoncées, la remontée d'une bulle d'air et la dynamique d'une particule sont régies par les mêmes phénomènes physiques.

Agitation thermique : mouvement Brownien

L'agitation thermique peut induire un mouvement sur les particules. Les molécules du fluide environnant, soumises à l'agitation thermique, interagissent avec la particule par des collisions, laquelle se met en mouvement. Cette force aléatoire, notée \mathbf{f}_a dans l'équation de Maxey-Riley (I.53) peut influencer sur la dynamique de la particule. On peut la comparer aux effets hydrodynamiques induits par la particule : sur une distance de l'ordre de leur diamètre, le temps caractéristique de convection de la particule par l'écoulement, c'est-à-dire le temps mis pour parcourir une distance d_p à une vitesse $\|\mathbf{v}_p - \mathbf{b}_f\| \approx \dot{\gamma} d_p$ ($\dot{\gamma}$ étant le taux de cisaillement moyen autour de la particule) vaut

$$\tau_C = \frac{1}{\dot{\gamma}}. \quad (\text{I.62})$$

L'agitation thermique, due aux mouvements des molécules, est un processus diffusif caractérisé par le coefficient de diffusion d'Einstein [Einstein, 1911] $D = k_B T / 3\pi\eta_f d_p$, avec T la température du milieu, k_B la constante de Boltzmann et η_f la viscosité du fluide. Le temps caractéristique de diffusion s'écrit donc

$$\tau_D = \frac{d_p^2}{D} = \frac{3\pi\eta_f d_p^3}{k_B T}. \quad (\text{I.63})$$

Le nombre de Péclet noté Pe compare ces deux effets :

$$Pe \equiv \frac{\tau_D}{\tau_C} = \frac{3\pi\eta_f \dot{\gamma} d_p^3}{k_B T}. \quad (\text{I.64})$$

L'agitation thermique joue donc un rôle important dans les écoulements à nombre de Péclet très faible, et inversement un rôle négligeable pour $Pe \gg 1$. On considère que les effets thermiques sont présents lorsque le diamètre de la particule est inférieure à $1 - 10 \mu\text{m}$, et majoritaires en dessous de cette limite, nécessitant la prise en compte de la force aléatoire \mathbf{f}_a dans les équations précédentes.

[†]. Stokesian dynamics en anglais. Ce terme est couramment utilisé pour parler de simulations numériques de suspensions granulaires.

champ de vitesses autour d'une particule

Maintenant que nous avons déterminé la dynamique d'une particule, nous pouvons nous intéresser à celle du liquide environnant. Comme décrit dans la partie 2.1.2, la dynamique que nous étudions est ici identiquement la même à celle de la remontée de bulles (3D avec $Re_{d_p} < 1$ ou $Re_{d_b} < 1$). Dans le régime visqueux et stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes (I.15)[†] sans les termes inertiels. Il est bien connu [Stokes et al., 1851] que le champ de vitesses autour d'une particule, dans un environnement tridimensionnel, varie de manière algébrique avec une décroissance en $1/r$ avec r la distance radiale à la particule. On considère que la particule modifie localement l'écoulement du liquide sur une distance de quelques diamètres de particule. Au delà, les variations du champ de vitesses sont faibles devant la vitesse de la particule et le liquide reste alors au repos.

En ce qui concerne les suspensions granulaires, il faut aborder l'interaction entre le liquide et plusieurs particules ainsi que celles des particules entre elles. La figure I.10 illustre les interactions supplémentaires possibles par rapport au cas liquide avec une particule. Pour chaque particule ajoutée, il y a des équations supplémentaires régissant le mouvement propre de la particule (Maxey-Riley) ainsi que des forces qui s'ajoutent dans les équations déjà existantes : l'équation de Navier-Stokes (I.50) doit prendre en compte les forces qu'exercent toutes les particules sur le liquide. Des contraintes supplémentaires sont aussi présentes entre les particules, rendant l'étude théorique difficile. Dans la suite, nous allons discuter les interactions possibles et leur influence sur la dynamique.

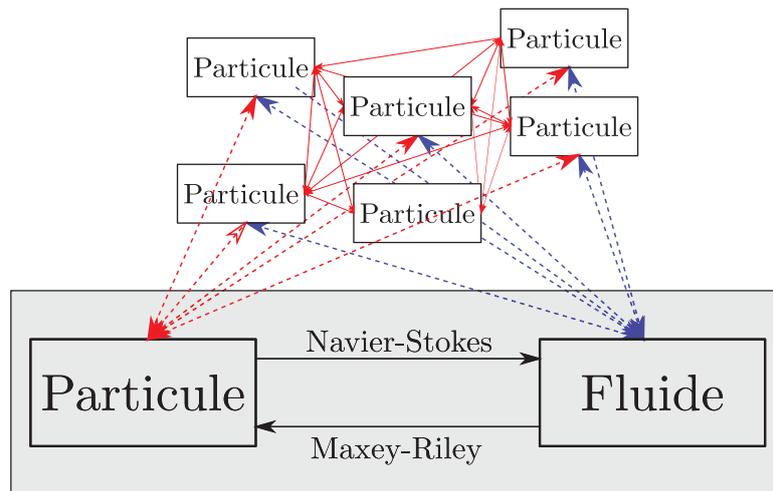


FIGURE I.10 - **Illustration des différentes interactions possibles dans un mélange fluide - particules.** Les interactions supplémentaires induites par la présence de plus d'une particule sont indiquées en couleur : rouge pour les interactions particule-particule, bleu pour les interactions particule-liquide. Le nombre d'équations et d'interactions à prendre en compte, explicitées dans la partie 2.2.4, augmente très rapidement lorsque le nombre de particules est grand.

2.2 Modèle collectif d'une suspension

Le modèle collectif commence dès lors que l'on introduit une deuxième particule dans le système précédemment décrit. Nous cherchons tout d'abord à quantifier la présence de particules dans un liquide (par la fraction volumique) et comprendre les interactions possibles supplémentaires par rapport au cas d'une simple particule dans un liquide, afin de caractériser la dynamique de la suspension.

[†]. La force exercée par la particule sur le liquide (I.50) n'est alors plus présente et remplacée par des conditions aux limites imposées par la particule (imperméabilité).

2.2. Modèle collectif d'une suspension

2.2.1 Fraction volumique

Lorsque l'on rajoute de plus en plus de grains dans un liquide, le comportement de la suspension ainsi obtenue change, comme nous l'avons décrit dans l'introduction générale. La proportion de grains dans le liquide est un paramètre important, que l'on définit grâce à la fraction volumique ϕ_0 , rapport entre le volume des grains et le volume total de la suspension :

$$\phi_0 \equiv \frac{\text{volume grains}}{\text{volume total suspension}} = \frac{V_g}{V_g + V_l}, \quad (\text{I.65})$$

avec V_g le volume occupé par les grains et V_l le volume occupé par le liquide. La mesure de cette grandeur est simple car il suffit de connaître le volume initial de chaque phase avant mélange. Cependant, cette définition étant globale, elle ne rend pas compte d'éventuels déficits ou excédents locaux en grains dans une suspension, responsables du caractère inhomogène et non-isotrope de celle-ci. On peut alors définir une fraction volumique locale χ , reliée à la fraction volumique moyennée par :

$$\phi_0 = \frac{1}{V} \iiint_V dV \chi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.66})$$

avec V le volume d'étude de la suspension et χ la fonction indicatrice qui vaut 1 s'il y a une particule, 0 sinon. La connaissance de $\chi(\mathbf{r}, t)$ permet de caractériser complètement la composition de la suspension, mais la mesure de cette grandeur est très compliquée car elle nécessite une précision de l'ordre de la taille de la particule. Il convient alors de définir une fraction volumique à l'échelle mésoscopique :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{volume grains dans } V_c}{V_c}, \quad (\text{I.67})$$

avec V_c un volume de contrôle autour de \mathbf{r} . Si $V_c = V_{tot}$, on retrouve la définition macroscopique de la fraction volumique. De même, $\phi(\mathbf{r}, t) = \chi$ si le volume de contrôle est infiniment petit. Dans notre étude, V_c correspondra à un volume contenant quelques particules. On définit ainsi une "particule fluide" de suspension comme en hydrodynamique classique, assez petite pour prendre en compte les variations locales de la fraction volumique mais suffisamment grande pour effectuer une approximation des milieux continus [Oswald, 2005]. Par la suite, la fraction volumique à l'échelle mésoscopique sera appelée fraction volumique locale.

La proportion en grains peut également être quantifiée par la fraction massique en grains, ω_0 :

$$\omega_0 \equiv \frac{\text{masse des grains}}{\text{masse totale suspension}} = \frac{m_g}{m_g + m_l}. \quad (\text{I.68})$$

Dans le cas où la masse volumique des grains est égale à celle du liquide[†], ce qui sera le cas dans notre étude, $\omega_0 = \phi_0$.

2.2.2 Régime dilué, semi-dilué, concentré

La distance moyenne entre les particules évolue en fonction de la fraction volumique globale. Cela a aussi un impact direct sur les interactions particules-particules et donc, sur le comportement d'une suspensions. La distance caractéristique L_p entre particules, si la suspension est homogène, peut s'approcher par la formule [Coussot, 2012, Torquato, 2005] :

[†]. On parle alors de suspension isodense.

$$\frac{L_p}{d_p} \approx \left(\frac{\phi_{\max}}{\phi} \right)^{1/3} - 1, \quad (\text{I.69})$$

avec $\phi_{\max} \approx 0.64$, une fraction volumique dite «random close packing», reliée à la manière la plus compacte d'empiler aléatoirement des sphères dures et parfaites [Scott and Kilgour, 1969]. Cela signifie qu'environ 64% du volume est occupé par les sphères. Lorsque les particules sont des sphères dures monodisperses, l'expression (I.69) est exacte, et indiquée figure I.11. La distance interparticulaire est de l'ordre de plusieurs diamètres de particules pour des fractions volumiques inférieures à 3% et diminue progressivement jusqu'à atteindre 0 à ϕ_{\max} .

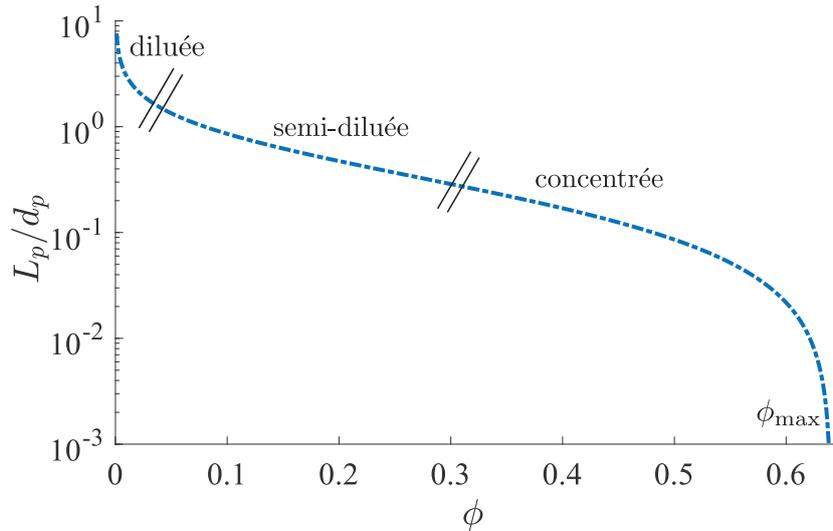


FIGURE I.11 - **Distance moyenne entre les particules dans une suspension.** Rapport entre la distance interparticulaire moyenne L_p et le diamètre d'une particule d_p lorsque la fraction volumique change. Ce rapport diminue très vite à 1 pour de faibles fractions volumiques. Les particules sont alors déjà très proches pour $\phi > 0.1$. La distance tend vers 0 pour une fraction volumique maximale ϕ_{\max} qui vaut ici 0.64 (ce choix est arbitraire), correspondant à l'arrangement aléatoire maximal de sphères dures.

En fonction de la distance moyenne entre les particules, on peut séparer le comportement d'une suspension selon trois critères :

- Pour des systèmes où la distance entre les particules est supérieure à 3-4 fois le rayon d'une particule, la suspension peut être qualifiée de **diluée** : les particules n'interagissent pas entre elles car le champ de vitesses induit par la particule sur le liquide (voir partie 2.1.2) apporte une contribution négligeable sur les autres particules et on peut alors les considérer comme indépendantes entre elles. La fraction volumique associée est alors inférieure à quelques %.
- Il existe une zone où la suspension est dite **semi-diluée**, lorsque les interactions particule-fluide sont dominantes.
- Lorsque les interactions particule-particule et particule-fluide jouent un rôle important dans la dynamique de la suspension, on parle de suspension **concentrée**.

Il est important de noter que ces séparations sont vagues et dépendantes des domaines de la physique où la suspension est étudiée et des interactions que l'on souhaite négliger ou non (voir partie 2.2.4).

2.2.3 Exemple introductif : la sédimentation

Nous avons montré précédemment qu'une particule évoluant dans un liquide subit une force de Stokes, et que sa vitesse de chute ou remontée, en régime stationnaire, est donnée par l'équation (I.61). Cette

2.2. Modèle collectif d'une suspension

vitesse de chute est très dépendante de la géométrie du système, comme nous l'avons décrit dans le cas de la remontée de bulles dans un environnement confiné (partie 1.2 du chapitre 1). De nombreuses corrections en fonction de la géométrie étudiée existent dans la littérature [Goldman et al., 1967]. Comme dans le cas de la bulle, la vitesse de la particule augmente par rapport à la vitesse de Stokes en présence de parois. Si l'interaction avec de quelconques obstacles ou parois peut influencer sur $v_{p,St}$, il en est alors de même de l'interaction avec d'autres particules. De la même manière que deux bulles proches remontent plus vite, deux particules proches identiques sédimentent plus vite que pour une particule unique [Happel and Brenner, 2012], à cause de la réduction du coefficient de traînée du corps double. Cependant, pour une collection de particules, la vitesse de Stokes diminue par rapport au cas sans grains.

Des corrélations empiriques existent en fonction de la fraction volumique ϕ , notamment celle de [Richardson and Zaki, 1954], qui ont établi expérimentalement une relation entre ϕ et $v_{p,St}$, valable pour $\phi < 53\%$:

$$v_{p,St}(\phi) = v_{p,St}(\phi = 0)(1 - \phi)^n, \quad (\text{I.70})$$

avec $n \in [4, 5]$ et $v_{p,St}(\phi = 0)$ donné par la relation (I.61). Cette valeur dépend du nombre de Reynolds particulaire et du rapport d'aspect entre la taille des particules et la plus petite longueur géométrique du système (par exemple le diamètre d'un tube). Cette équation indique alors que les particules sédimentent moins vite lorsque ϕ augmente.

Les interactions entre les particules, sont à l'origine de possibles changements importants sur la dynamique d'une suspension, en comparaison avec la dynamique d'une particule dans un liquide. Par exemple, la vitesse de sédimentation est réduite de 93% pour $\phi = 0.4$!

2.2.4 Interactions dans les suspensions

L'équation de Navier-Stokes (I.50) et de Maxey-Riley simplifiée (I.55) lorsque $Re_{d_p} \ll 1$, s'écrivent, en présence de particules :

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right] &= -\nabla P + \rho_f \mathbf{g} + \eta_f \Delta \mathbf{v}_f + \underbrace{\sum_j^{N_p} \mathbf{f}_{p,j \rightarrow f}}_I, \\ \left(\rho_p + \frac{\rho_f}{2} \right) \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d(\mathbf{v}_{p,i} - \mathbf{v}_f)}{dt} &= 3\pi\eta d_p \underbrace{\xi(\{d_j, \mathbf{r}_j\}_{j \neq i})}_{II} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{p,i}) + \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^{N_p} \mathbf{f}_{p,j \rightarrow p,i}}_{III} + \mathbf{f}_a, \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

avec N_p le nombre de particules. Les différences fondamentales avec la dynamique d'une particule sont indiquées par les termes I, II et III. En règle générale, il y a trois types majeurs d'interactions (nous décrivons plus en détail ces interactions dans l'annexe B) :

- **Interactions hydrodynamiques** à longue portée : les particules modifient le champ de vitesses et les forces de frottement sur le terme II.
- **Contacts lubrifiés** : lorsque les particules sont très proches, le liquide compris entre les deux surfaces des particules doit être évacué et le liquide exerce alors une surpression associée à une force de lubrification, s'opposant au rapprochement des particules. (terme I et II)

- **Contact frictionnels et collisionnels** : lors du contact entre deux particules, ces dernières peuvent transmettre de la quantité de mouvement pendant le choc. Des frottements peuvent aussi apparaître lors de ce contact. (terme I, III)

De plus, nous avons vu dans la partie 2.1.2 comment une particule peut être influencée par l'agitation thermique due aux molécules composant le fluide, introduisant une force aléatoire. L'agitation thermique est très dépendante de la taille de la particule ($\propto d_p^3$) et agit aux mêmes échelles spatiales que les interactions physico-chimiques. Il est usuel de regrouper ces deux phénomènes au sein du nombre de Péclet. On distingue alors deux types de suspensions :

- les suspensions Browniennes, pour lesquelles $Pe \ll 1$, la suspension est dite **colloïdale** ;
- les suspensions macroscopiques ou **non-Browniennes**, pour lesquelles $Pe \gg 1$ et les effets thermiques et interactions physico-chimiques sont négligeables.

La taille typique d'une particule pour laquelle $Pe = 1$ est de l'ordre du μm dans les conditions standard ($\eta_f = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\dot{\gamma} = 1 \text{ s}^{-1}$, $T = 25 \text{ }^\circ$). Cette frontière délimite deux domaines très importants de la physique des suspensions. Par la suite, on s'intéressera uniquement à des suspensions visqueuses non-Browniennes.

Si l'on souhaite décrire complètement une suspension, il faut pouvoir relier toutes les contraintes appliquées par le liquide et les particules aux équations régissant leur mouvement afin de connaître le champ de vitesses. Cela requiert de résoudre au moins $3N$ équations issues de Maxey-Riley avec N le nombre de particules, les 4 équations issues de Navier-Stokes avec l'incompressibilité et les conditions limites associées au système. Cette vision microscopique requiert la connaissance en tout point des propriétés et interactions de la suspension pour déterminer toutes les forces en jeu.

2.3 Rhéologie globale des suspensions non-Browniennes

Il est possible d'effectuer une approche mésoscopique de la suspension, à plus grande échelle, afin de pouvoir effectuer une modélisation plus simple, ce qui correspond à étudier sa rhéologie.

2.3.1 Introduction à la rhéologie

La rhéologie s'intéresse à l'étude des phénomènes qui conditionnent l'écoulement et la déformation de la matière, ici les liquides ou les suspensions. Elle est essentielle afin de mieux comprendre leur comportement sous contrainte : la relation constitutive qui relie le tenseur des contraintes au taux de déformation $\dot{\gamma}$ (ou taux de cisaillement) via les propriétés physiques du milieu. Par exemple, pour un liquide Newtonien, cette relation, pour la contrainte de cisaillement, s'écrit :

$$\tau = \eta_f \dot{\gamma}, \quad (\text{I.72})$$

avec η_f qui ne dépend pas du taux de cisaillement pour un liquide Newtonien. On peut donc se demander ce que devient cette relation pour une suspension.

Le modèle le plus simple serait donc de considérer la suspensions comme un fluide effectif, que l'on caractérise par sa masse volumique effective ρ_s et sa viscosité effective η_s (l'indice s référant à suspension). En considérant le milieu continu [Oswald, 2005], on peut appliquer le bilan de quantité de mouvement dans un élément de fluide effectif, ce qui donne :

$$\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \rho_s \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^e, \quad (\text{I.73})$$

avec \mathbf{v}_s le champ de vitesses de la suspension, \mathbf{f} les forces volumiques extérieures en présence (par exemple la gravité), et $\underline{\underline{\Sigma}}^e$ le tenseur des contraintes du fluide effectif. L'autre relation associée est l'équation de conservation qui s'écrit

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0. \quad (\text{I.74})$$

Pour des liquides Newtoniens, le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par la relation constitutive (I.72), ce qui permet de caractériser complètement l'équation (I.73) en explicitant la forme de $\underline{\underline{\Sigma}}^e$.

2.3.2 Relation constitutive

Plusieurs articles [Krieger, 1963, Jomha et al., 1991, Stickel and Powell, 2005] étudient de manière dimensionnelle la dynamique des suspensions. Nous nous proposons de faire un développement analogue. Nous cherchons ici à déterminer comment décrire le plus simplement possible une suspension. Nous pouvons d'ores et déjà effectuer une analyse dimensionnelle pour trouver les relations de fermeture nécessaires à la caractérisation du problème.

Analyse dimensionnelle

Considérons un liquide Newtonien composé de particules sphériques, évoluant dans un système de longueurs typiques L_i et dans un état **stationnaire**[†]. On supposera que les sphères ne sédimentent pas, c'est-à-dire que leur masse volumique est égale à celle du liquide $\rho_p = \rho_f = \rho$. On parlera alors de suspension dite **isodense**. Par conséquent, les effets de gravité sont totalement négligés. De plus, le mélange {liquide + particules} est décrit par un fluide effectif comme explicité partie 2.3.1. Nous ignorons donc pour l'instant tout phénomène physique microscopique associé aux contacts entre particules ou aux interactions hydrodynamiques précédemment étudiés que l'on suppose totalement décrits par la viscosité effective η_s .

Les différents paramètres qui interviennent dans la physique de la suspension à l'échelle **macroscopique** sont alors les paramètres suivants :

- liquide : viscosité η_f , masse volumique $\rho_f = \rho_s = \rho_p = \rho$;
- particules : nombre de particules par unité de volume n , diamètre d_p ;
- variables d'état du système : taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, échelle thermique $k_B T$, échelles du système L_i (on supposera ici qu'il n'y a qu'une échelle du système, notée L) ;
- fluide effectif : contrainte de cisaillement τ .

La liste des paramètres présentés est non-exhaustive. Certains manquent comme la rugosité des particules, leur distribution en taille, leur forme, mais nous considérerons que les particules sont mono-disperses, sphériques et lisses. Dans les conditions de notre étude, l'écoulement est incompressible, et on néglige tout effet de diffusion thermique au sein du liquide.

D'après le théorème de Vashy-Buckingham, il existe une relation entre tous ces paramètres physiques que l'on peut écrire sous la forme

$$\Pi(\eta_f, \rho, n, d_p, \dot{\gamma}, k_B T, L, \tau) = 0. \quad (\text{I.75})$$

Cette relation peut aussi s'établir en termes de nombres adimensionnés. La relation relie 8 variables physiques, dépendant de 3 unités fondamentales de longueur, masse et temps. Il existe ainsi une équation équivalente mettant en jeu 5 variables indépendantes sans dimension construites à partir des

[†]. Le temps t n'est alors pas une variable du problème.

variables originelles. On supposera que ce sont les nombres adimensionnés précédemment énoncés qui permettent de décrire le système † :

- la densité de la suspension, appelée fraction volumique $\phi = \frac{\pi d_p^3}{6} n$;
- le nombre de Péclet $Pe = \frac{3\pi\eta_f\dot{\gamma}d_p^3}{k_B T}$;
- le nombre de Stokes $St = \frac{\rho d_p^2 \dot{\gamma}}{12\eta_f}$;
- le rapport des longueurs mises en jeu, ici $\hat{L} \equiv d_p/L$;
- la contrainte adimensionnée $\hat{\tau} \equiv \frac{\tau}{\eta_f \dot{\gamma}}$.

On peut alors réécrire la relation ci-dessus :

$$\Pi(\phi, Pe, St, \hat{L}, \hat{\tau}) = 0. \quad (\text{I.76})$$

Nous nous intéresserons à des **suspensions isodenses, visqueuses et non-Browniennes**, pour lesquelles $Pe \gg 1$, $St \ll 1$, et nous négligerons toute influence des rapports d'aspects géométriques soit $\hat{L} \ll 1$. La relation précédente peut se simplifier, dans cette limite asymptotique, sous la forme

$$\Pi(\phi, \hat{\tau}) = 0 \Rightarrow \tau = \eta_f \dot{\gamma} g(\phi). \quad (\text{I.77})$$

La relation constitutive que nous cherchons est du type $\tau = \eta_s \dot{\gamma}$, où η_s est la viscosité effective de la suspension. On obtient finalement que

$$\boxed{\eta_s = \eta_f g(\phi)} \quad (\text{I.78})$$

Relation constitutive

Pour une suspension isodense, visqueuse, non-Brownienne, avec des particules rigides sphériques, en considérant le système {liquide+particules} comme un seul fluide effectif, la viscosité effective η_s est une fonction de la fraction volumique en grains ϕ .

En résumé simple, le fluide effectif peut être vu comme un liquide Newtonien dont la viscosité varie avec ϕ .

On peut d'ores et déjà déterminer qualitativement l'évolution de la contrainte de cisaillement d'une suspension qu'il faut exercer pour déplacer l'ensemble {liquide+particules} en fonction de ϕ . Or, plus l'on ajoute de particules dans l'ensemble, plus il y a d'interactions entre les particules (voir partie 2.2), ce créant ainsi plus de phénomènes dissipatifs et par conséquent, augmentant la viscosité du mélange. Les modèles théoriques, expérimentaux, empiriques mettent alors en évidence la relation entre la proportion de grains et viscosité.

†. Notons que si la masse volumique des composants est différente, deux paramètres physiques en plus sont à prendre en compte et deux nombres adimensionnés supplémentaires associés apparaissent (le nombre de Galilée $Ga \equiv (\rho_f - \rho_p)\sqrt{g d_p} / \eta_f$ et le rapport des masses volumiques ρ_f / ρ_p).

2.3.3 Modèles théoriques

Les premiers travaux pour obtenir une expression de la viscosité de la suspension η_s en fonction de la fraction volumique en grains ϕ datent de 1906. Einstein a effectué le calcul de la déformation du champ de vitesses due à une particule, puis sommé sur le nombre de particules, tout en négligeant leur interaction mutuelle. La relation théorique pour η_s obtenue est [Einstein, 1906, Einstein, 1911]

$$\eta_s(\phi) = \eta_f(1 + 2,5\phi). \quad (\text{I.79})$$

Ce résultat n'est valable que lorsque les particules sont assez éloignées pour ne pas interagir entre elles, c'est-à-dire que le champ de vitesses induit par la particule n'influe pas sur une autre particule voisine. Le champ de vitesses induit par une particule étant négligeable à une distance d'environ $4 \times d_p$ autour d'elle (voir partie 2.1.2), la distance particulaire doit être environ de cet ordre de grandeur pour pouvoir négliger les interactions hydrodynamiques, ce qui donne $\phi \lesssim 2\%$ d'après la figure I.11. Expérimentalement, ceci est effectivement bien vérifié pour des suspensions dont la fraction volumique est inférieure à 2 - 3% [Cheng and Schachman, 1955].

Un modèle plus raffiné proposé par Batchelor et Green, utilisant des paires de particules interagissant entre elles, amène à une viscosité[†] [de Bruijn, 1942, Saito, 1952, Batchelor, 1977] :

$$\eta_s(\phi) = \eta_f(1 + 2,5\phi + 5\phi^2). \quad (\text{I.80})$$

Ce modèle théorique est vérifié expérimentalement pour des fractions volumiques inférieures à 10% [Guazzelli and Pouliquen, 2018].

Lorsque $\phi > 0.1$, aucun modèle théorique actuel ne permet d'avoir une forme analytique de la viscosité en fonction de la fraction volumique pour toute valeur de ϕ . L'organisation spatiale des particules, autrement appelée microstructure, couplée avec les interactions hydrodynamiques et les contacts à plusieurs particules rendent les calculs théoriques complexes. Des lois phénoménologiques ou empiriques sont nécessaires afin de décrire la rhéologie des suspensions, ainsi que des mesures rhéologiques pour valider ces lois.

2.3.4 Modèles empiriques

Le détail d'obtention des modèles ci-dessous dépasse le cadre de cette thèse, mais nous allons effectuer une énumération non-exhaustive des lois de viscosité que nous utiliserons par la suite. Il faut garder en tête que les équations phénoménologiques modélisant l'équation (I.78) sont associées à des expériences ou modélisations précises, définissant alors un domaine de validité des équations limité.

La figure I.12, issue de [Guazzelli and Pouliquen, 2018], présente une collection de données expérimentales et numériques recueillies par une multitude d'articles afin de décrire la rhéologie des suspensions. On pourra se reporter à cet article pour la condition de réalisation des différentes mesures.

On constate que les modèles théoriques (I.79) et (I.80) ne peuvent pas être extrapolés à grande fraction volumique, car on observe une divergence de la viscosité effective pour différentes simulations expérimentales et numériques, à une fraction volumique finie $\phi = \phi_c$.

Plusieurs lois phénoménologiques sont présentées sur la figure I.12. La première d'entre elles est la viscosité provenant de Krieger [Krieger and Dougherty, 1959] :

[†]. On peut trouver des termes différents en facteur de ϕ^2 , dépendant des conditions expérimentales, notamment de l'importance relative du mouvement Brownien.

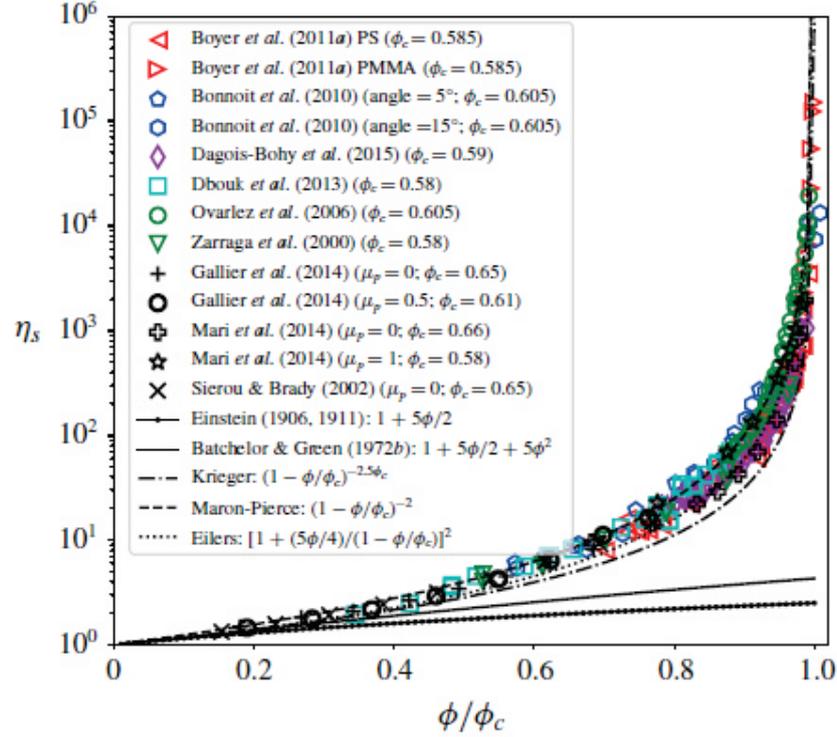


FIGURE I.12 - **Comportement rhéologique des suspensions granulaires.** Évolution de la viscosité effective $\hat{\eta}_s$ (noté η_s sur le graphe) en fonction du paramètre réduit ϕ/ϕ_c . Données issues de différentes expériences et simulations numériques, indiquant la valeur du paramètre libre ϕ_c choisi. Les lois théoriques d'Einstein (I.79) et Batchelor (I.80) y sont indiquées ainsi que les modèles empiriques de Krieger, (I.81), Maron-Pierce (I.82) et Eilers (I.83). Figure issue de [Guazzelli and Pouliquen, 2018].

$$\hat{\eta}_s \equiv \frac{\eta_s}{\eta_f} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right)^{-2,5\phi_c}. \quad (\text{I.81})$$

La forme de l'équation rappelle les lois de puissance et les exposants critiques lors de transitions de phase. La puissance dépend de ϕ_c afin de pouvoir retrouver le développement limité à faible fraction volumique de la relation (I.79). Cette équation n'est pas en accord parfait avec les données expérimentales et numériques à forte ϕ car il est observé expérimentalement que η_s présente une divergence en $(\phi_c - \phi)^{-2}$. De plus, la relation surestime $\hat{\eta}_s$ pour toute valeur de ϕ .

La relation de Maron-Pierce s'écrit [Maron and Pierce, 1956] :

$$\hat{\eta}_s = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right)^{-2}. \quad (\text{I.82})$$

Elle recouvre mieux les données à fort ϕ mais ne recolle pas avec la relation d'Einstein à faible ϕ . Cette loi de viscosité est alors utilisée lors d'études à très forte fraction volumique. Afin de regrouper les deux comportements, la relation d'Eilers [Stickel and Powell, 2005] :

$$\hat{\eta}_s = \left(1 + \frac{5}{4} \frac{\phi}{1 - \frac{\phi}{\phi_c}}\right)^2 \quad (\text{I.83})$$

2.4. Au delà du modèle du fluide effectif

permet de retrouver le comportement à faible et forte fraction volumique, mais est moins précise entre ces deux extrêmes.

En conclusion, ces lois empiriques permettent de décrire la relation constitutive (I.78), et de pouvoir considérer la suspension comme un liquide Newtonien de viscosité variant avec ϕ . Cependant, ces lois dépendent toutes du paramètre ϕ_c , qui dépend de la distribution de taille et de forme des particules, qui influent sur la disposition que peuvent avoir les particules, et des interactions frictionnelles/collisionnelles entre elles.

Peu d'études abordent avec précision la dépendance de η_s et ϕ_c avec la taille et la forme des particules [Konijn et al., 2014]. Le paramètre ϕ_c est donc considéré comme un paramètre libre permettant d'ajuster au mieux les données expérimentales ou numériques que l'on considère et qui se rajoute dans l'équation (I.78). Les valeurs de ϕ_c obtenues sont assez diverses, mais un comportement commun apparaît lorsque l'on renormalise les données par la fraction volumique réduite ϕ/ϕ_c .

2.4 Au delà du modèle du fluide effectif

2.4.1 Contraintes normales

Pour un liquide Newtonien, lorsqu'un écoulement est cisailé de manière uniforme, il n'existe pas de contraintes normales autres que la pression hydrostatique P . Les propriétés mécaniques du liquide sont isotropes, c'est-à-dire qu'il possède le même comportement dans toutes les directions. Pour les suspensions, on peut se demander si ce comportement est toujours présent.

La figure I.13 présente une expérience où une suspension non-Brownienne visqueuse isodense est mise en mouvement par une tige tournante dans une géométrie cylindrique [Boyer et al., 2011b]. En dessous de $\phi = 0.25$, la surface libre de la suspension reste plane. Au delà, par exemple pour $\phi = 0.4$ sur la figure I.13-a), la surface libre plonge au voisinage de la tige tournante. Le profil de la hauteur en fonction de la distance à la tige est alors affiché figure I.13-b). Contrairement au cas Newtonien où une telle expérience ne crée aucune déviation de la surface libre, l'application d'un cisaillement orthoradial crée une contrainte verticale. Ce phénomène est appelé effet anti-Weissenberg †. On note donc ici une perte d'isotropie de la suspension.

Dans la modélisation en terme de fluide effectif, l'hypothèse principale est de considérer que particules et liquide interstitiel se meuvent dans un écoulement de manière identique, comme s'ils ne formaient qu'un seul fluide. En pratique, le liquide et les particules peuvent avoir une dynamique différente, notamment à cause de la contrainte particulaire (collisions, frictions et contacts lubrifiés), de la géométrie de l'écoulement et/ou des conditions aux limites imposées à l'écoulement. La figure I.14 présente un des exemples de dynamique distincte entre particules et liquide : une suspension, initialement à une fraction volumique constante et uniforme, s'écoule dans un conduit cylindrique de type Poiseuille. Lorsque le régime stationnaire est atteint, on constate qu'il y a un nombre de particules beaucoup plus élevé au centre du conduit qu'aux bords, phénomène que l'on appelle la migration de particules [Nott and Brady, 1994, Hampton et al., 1997, Lyon and Leal, 1998]. De la même manière, lorsqu'une suspension de particules isodenses s'écoule sur un plan incliné, la concentration des particules n'est pas uniforme. Il existe un maximum de concentration au niveau de la surface libre [Timberlake and Morris, 2005]. Ces exemples montrent clairement que les particules et le liquide ont une dynamique différente et qu'il faut les considérer séparément.

On peut déjà tenter de comprendre ce comportement : dans un écoulement de Poiseuille cylindrique, le cisaillement (lié au gradient de vitesse) est plus important sur les bords qu'au centre du conduit. La disposition microscopique des particules se fait de telle sorte que l'énergie d'interaction entre elles soit la plus faible possible, pour que l'écoulement se fasse avec le moins de pertes énergétiques. Or, dans les zones de fort cisaillement, les particules interagissent beaucoup plus facilement entre elles,

†. L'effet Weissenberg représente l'effet contraire : certains fluides complexes remontent contre la tige.

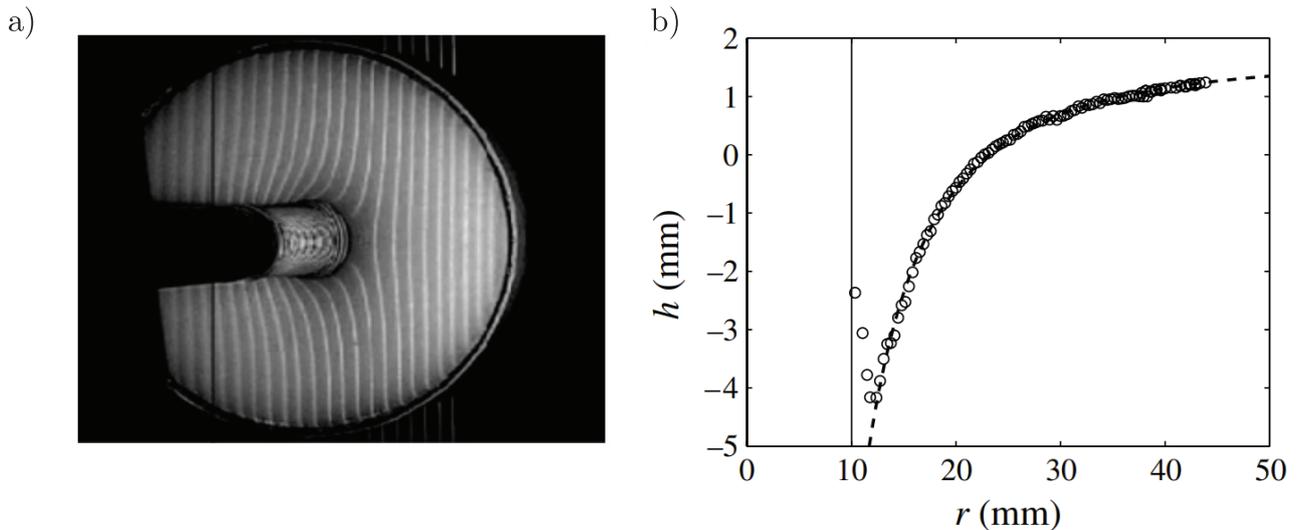


FIGURE I.13 - **Illustration de l'effet anti-Weissenberg dans une suspension.** a) Photographie d'une suspension cisailée par une tige tournante (au centre). b) Profil de la hauteur de la surface libre obtenue par méthode optique. Figure issue de [Boyer et al., 2011b].

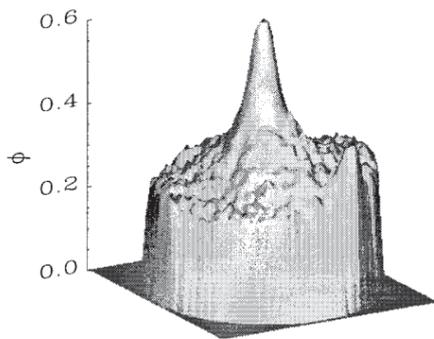


FIGURE I.14 - **Non-uniformité de la fraction volumique dans un écoulement circulaire.** Évolution radiale de la fraction volumique d'une suspension dans un écoulement de type Poiseuille cylindrique (écoulement imposé par un gradient de pression). À l'état initial, la fraction volumique est sensiblement la même dans le conduit et égale à 30%. Figure issue de [Hampton et al., 1997].

que ce soit par de la friction ou des collisions (voir partie 2.2.4), donc elles vont migrer dans les zones où le cisaillement est plus faible, là où l'interaction est moindre. À l'équilibre, la fraction volumique est donc inhomogène au sein de la suspension.

2.4.2 Pression particulaire

Considérons une suspension soumise à un taux de cisaillement variable. Les particules n'ont pas la même dynamique de mise en mouvement en fonction de l'endroit où elles se trouvent, le cisaillement local variant. Des collisions sont possibles entre elles, ce qui crée de la transmission de quantité de mouvement de proche en proche lors d'un contact. Lorsque le nombre de particules devient très grand, ces chocs se produisent partout dans la suspension, et induisent de la dissipation par les chocs. On peut faire une analogie simple avec la théorie cinétique des gaz : les particules de gaz se meuvent et peuvent créer des chocs (contre des parois) comme les particules d'une suspension. On définit alors, de même qu'en théorie cinétique des gaz, une pression dite particulaire notée P^p qui est due aux chocs entre particules : la force surfacique exercée par un volume élémentaire de suspension sur celles voisines en considérant une paroi fictive entre les deux. Qualitativement, cette pression dépend de plusieurs grandeurs physiques :

2.4. Au delà du modèle du fluide effectif

- plus le cisaillement est fort (que ce soit positivement ou négativement), plus les gradients de vitesse sont importants, favorisant les contacts entre particules, donc P^p augmente avec $|\dot{\gamma}|$;
- plus le système contient de particules, plus les collisions et ré-arrangements de particules sont importants, donc P^p augmente avec ϕ .

Il est alors possible de montrer par une analyse dimensionnelle similaire à celle effectuée partie 2.3.2 que la pression particulaire peut s'écrire sous la forme

$$P^p \sim \widehat{\eta}_n(\phi)\eta_f|\dot{\gamma}| = \eta_n(\phi)|\dot{\gamma}|, \quad (\text{I.84})$$

avec $\eta_n(\phi)$ nommée viscosité normale et $\widehat{\eta}_n(\phi) \equiv \eta_n(\phi)/\eta_f$ la viscosité normale effective. Cette équation est similaire à l'équation (I.72) avec un facteur de forme $\eta_n(\phi)$, que nous allons tenter d'expliciter par la suite.

Relations constitutives

En conclusion, deux équations constitutives importantes sont maintenant à considérer pour caractériser la suspension :

$$\tau = \widehat{\eta}_s(\phi)\eta_f\dot{\gamma}, \quad P^p = \widehat{\eta}_n(\phi)\eta_f|\dot{\gamma}| \quad (\text{I.85})$$

Tout se passe comme si la suspension se comporte comme un fluide de viscosité effective η_s , avec un paramètre supplémentaire qui prend en compte les interactions particulaires η_n . En conclusion, par rapport au cas d'un liquide simple, la connaissance des contraintes appliquées passe donc par la connaissance de η_s et η_n .

Détermination de la viscosité normale

Pour mesurer $\eta_n(\phi)$, il faut imposer P^p et $\dot{\gamma}$, ce qui est possible avec un rhéomètre qui, au lieu d'être à volume constant impose une pression constante à la suspension. Il s'agit d'un Couette plan où la plaque supérieure permet le passage du liquide mais pas celui des particules, comme indiqué figure I.15 [Boyer et al., 2011a, Dagois-Bohy et al., 2015]. La plaque supérieure impose une pression constante sur la suspension et est déplacée de manière rotative pour créer un cisaillement, mais peut se déplacer librement verticalement, s'ajustant aux éventuelles contraintes exercées par la suspension pour garder la force totale constante.

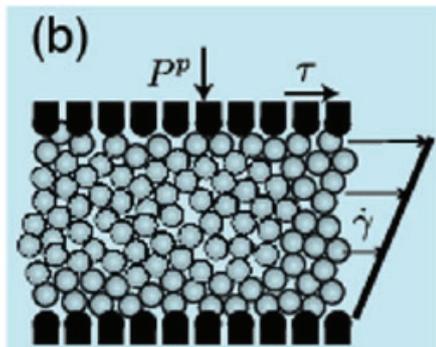


FIGURE I.15 - **Rhéomètre Couette-plan à pression imposée.** La suspension est confinée entre deux plaques dont l'une peut se déplacer verticalement. La plaque supérieure impose une pression P^p à la suspension et un cisaillement $\dot{\gamma}$. Figure issue de [Boyer et al., 2011a].

La figure I.16 présente les résultats expérimentaux de la mesure de la viscosité effective et normale pour une fraction volumique ϕ variant de 0.47 à 0.58.

Il a été montré que la viscosité η_n issue de la mesure de P^p présente la même divergence que η_s en $(\phi_c - \phi)^{-2}$ [Morris and Boulay, 1999], et que η_n croît proportionnellement à ϕ^2 lorsque $\phi \rightarrow 0$ [Brady

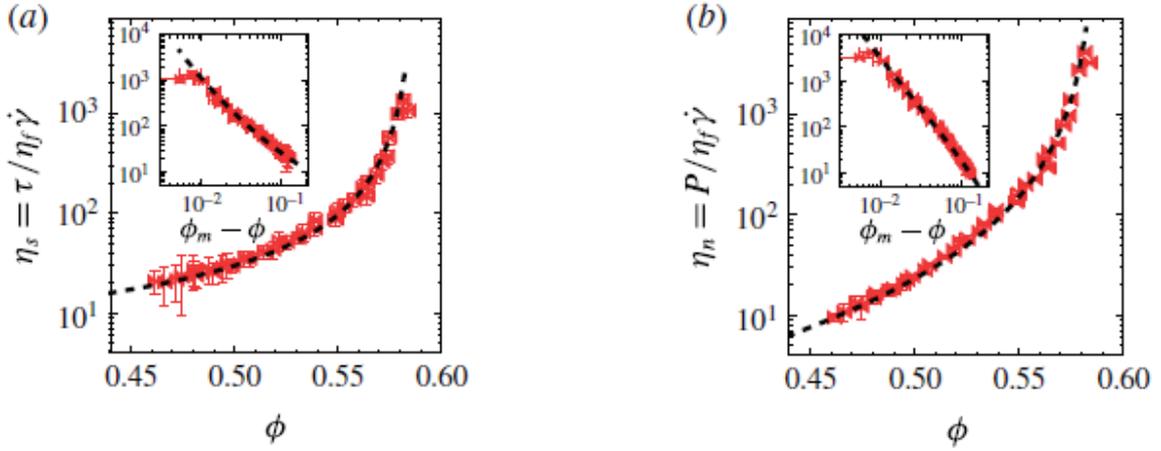


FIGURE I.16 - **Caractérisation rhéologique de suspensions denses.** Mesures expérimentales de $\widehat{\eta}_s$ (a) et $\widehat{\eta}_n$ (b) en fonction de la fraction volumique ϕ effectuées sur un rhéomètre à pression imposée. Les traits pointillés correspondant à la relation (I.86) pour le graphe (b). Figure issue de [Dagois-Bohy et al., 2015].

and Morris, 1997]. Plusieurs lois empiriques, décrites à partir de données expérimentales et respectant les limites asymptotiques, sont proposées pour décrire $\eta_n(\phi)$:

- la loi rhéologique proposée par Morris & Boulay (1999) :

$$\widehat{\eta}_n(\phi) = K_n \left(\frac{\phi}{\phi_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-2}, \quad (\text{I.86})$$

où $K_n = 0.75$, associée avec la loi $\widehat{\eta}_s(\phi)$ qu'ils proposent :

$$\widehat{\eta}_s(\phi) = 1 + \frac{5\phi}{2} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-1} + K_s \left(\frac{\phi}{\phi_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-2}, \quad (\text{I.87})$$

où $K_s=0,1$.

- Le modèle rhéologique proposé par Boyer et al. (2011) :

$$\widehat{\eta}_n(\phi) = \left(\frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2, \quad (\text{I.88})$$

à associer avec la loi

$$\widehat{\eta}_s(\phi) = 1 + \frac{5}{2}\phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-1} + \mu^c(\phi) \left(\frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2, \quad \mu^c(\phi) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0\phi^2(\phi_c - \phi)^2}. \quad (\text{I.89})$$

Les deux premiers termes sont un raccordement de la loi d'Einstein (I.79) et partiellement de la loi de Batchelor (I.80) en ϕ^2 . Le terme $\mu^c(\phi)$ correspond à un terme de friction macroscopique faisant un lien entre les suspensions granulaires immergées et secs (voir [Boyer et al., 2011a, Garagash and Lecampion, 2014] pour plus de détails). Les différents paramètres ont pour valeur $\mu_1 = 0.32$, $\mu = 0.7$, $I_0 = 0.005$ [Snook et al., 2016]. Nous utiliserons alors cette quatrième loi conjointement avec celle d'Eilers, Maron-Pierce et Krieger durant cette thèse, toujours avec ϕ_c paramètre libre variant de 0.55 à 0.625.

Ces deux lois respectent les comportements observés à faible et forte fraction volumique. La figure I.16 indique justement les données expérimentales effectuées sur un rhéomètre comme celui présenté figure I.15 ainsi que l'ajustement rhéologique pour $\widehat{\eta}_n(\phi)$ donné par l'équation (I.86).

Maintenant que nous avons explicité l'origine microscopique et la forme phénoménologique de η_n qui entre en compte dans la dynamique d'une suspension à l'échelle mésoscopique, nous allons établir mathématiquement son comportement.

2.4.3 Migration induite par cisaillement

On considère une suspension contenant un liquide suspendant Newtonien de viscosité η_f et masse volumique ρ_f . Les particules en suspension sont non-colloïdales, sphériques, rigides, de masse volumique ρ_p et de diamètre d_p . En tout point $M(\mathbf{r}, t)$ de l'espace, on suppose que l'on peut définir une fraction volumique locale $\phi(\mathbf{r}, t)$, ainsi qu'une vitesse particulaire \mathbf{v}_p et vitesse du liquide \mathbf{v}_f †. Toutes les grandeurs sont dépendantes de l'espace et du temps, notamment la fraction volumique locale $\phi(\mathbf{r}, t)$. On note $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \phi\mathbf{v}_p(\mathbf{r}, t) + (1 - \phi)\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t)$, la vitesse moyennée de la suspension sur les volumes de contrôle V_c (il ne s'agit donc pas de la vitesse moyennée sur toute la suspension). Par simplicité, nous omettrons de rajouter la dépendance en \mathbf{r} et t pendant le développement des équations.

En l'absence d'inertie ($St \ll 1$), l'équation de bilan de quantité de mouvement pour les particules s'écrivent

[Nott and Brady, 1994, Morris and Boulay, 1999, Snook et al., 2016, Guazzelli and Pouliquen, 2018] :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{pp} + n \langle \mathbf{F}_H \rangle^p + \phi \rho_p \mathbf{g} = 0. \quad (\text{I.90})$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{pp}$ est le tenseur des contraintes interparticulaires, qui ne prend en compte que les interactions entre particules, n est la densité de particules, F_H la force exercée par le fluide sur une particule et $\langle \cdot \rangle^p$ représente une moyenne d'ensemble. Plus précisément, $n \langle F_H \rangle^p$ représente l'ensemble des contributions moyennées exercées par le fluide sur les particules dans le volume de fluide de contrôle. Elle se décompose en :

- La force de traînée subie par les particules relative à la vitesse moyennée de la suspension qui s'obtient avec la force volumique de frottement visqueux $\mathbf{F}_P/V_p = [18\eta_f/d_p^3] \phi(\mathbf{v}_p - \mathbf{U})$ avec V_p le volume d'une particule (la viscosité prise ici est η_f car on étudie la force de traînée due au liquide et non à la suspension). Cette force est couplée avec le facteur de Richardson & Zaki (I.70) pour $n = 5$ qui permet de modéliser la modification de la force de traînée à cause de la proximité des grains, et vaut

$$n \langle \mathbf{F}_P \rangle^p = -18 \frac{\eta_f}{d_p^2} \frac{\phi}{f(\phi)} (\mathbf{v}_p - \mathbf{U}), \quad f(\phi) = (1 - \phi)^5. \quad (\text{I.91})$$

- Une force d'interaction hydrodynamique entre les particules (autre que la force de traînée) comme la force de lubrification (voir annexe B). Il est alors possible de montrer [Lhuillier, 2009, Nott et al., 2011, Guazzelli and Pouliquen, 2018] que la force volumique supplémentaire peut s'écrire comme la divergence d'un tenseur hydrodynamique, noté $\underline{\underline{\sigma}}^{hp}$.
- La poussée d'Archimède qui s'écrit sous la forme $\mathbf{F}_g = -\rho_f \phi \mathbf{g}$.

On peut donc écrire $n \langle \mathbf{F}_H \rangle^p$ sous la forme

$$n \langle \mathbf{F}_H \rangle^p = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{hp} + n \langle \mathbf{F}_P \rangle^p + \mathbf{F}_g. \quad (\text{I.92})$$

En injectant cette relation dans l'équation (I.90), on obtient que

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^p + n \langle \mathbf{F}_P \rangle^p + \phi(\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} = 0, \quad (\text{I.93})$$

†. Ces paramètres sont définis par une moyenne spatiale sur une particule fluide de volume V_c , de longueur caractéristique grande devant la taille d'une particule, mais petite devant l'échelle des fluctuations des différents gradients - de vitesse, de concentration de particules.

où $\underline{\underline{\Sigma}}^p = \underline{\underline{\sigma}}^{pp} + \underline{\underline{\sigma}}^{hp}$ est défini comme étant le tenseur des contraintes particulières[†]. À l'aide de l'équation (I.91), pour une suspension isodense, on obtient :

$$\phi(\mathbf{v}_p - \mathbf{U}) = \frac{d_p^2 f(\phi)}{18\eta_f} \nabla \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^p. \quad (\text{I.94})$$

Le terme de droite représente le flux de densité des particules par rapport au mouvement global de la suspension et modélise donc le comportement des particules seules.

L'équation de conservation de la masse pour les particules s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}_p) = 0. \quad (\text{I.95})$$

On couple cette équation avec l'incompressibilité de la suspension $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, où $\mathbf{U} = \phi \mathbf{v}_p + (1 - \phi) \mathbf{v}_f$, ce qui donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = -\nabla \cdot \phi(\mathbf{v}_p - \mathbf{U}), \quad (\text{I.96})$$

où on remarque que le terme de droite est donné par l'équation (I.94), ce qui donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = -\frac{d_p^2}{18\eta_f} \nabla \cdot (f(\phi) \nabla \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^p). \quad (\text{I.97})$$

La fonction $f(\phi)$ est contenue dans la divergence car ϕ dépend des variables de position. Cette relation est analogue à une équation de diffusion. Comme expliqué partie 2.4.1, les contraintes particulières tendent à s'équilibrer en changeant la distribution en grains $f(\phi)$ pour limiter le nombre de grains dans les zones de forte pression particulière (relié aux régions de fort cisaillement) et augmenter ce nombre dans les zones de faible pression particulière (faible cisaillement). Les particules s'organisent alors suivant l'équation (I.97), modélisant alors la migration des particules. Le modèle que nous venons de décrire s'appelle le Suspension Balance Model [Nott and Brady, 1994, Nott et al., 2011, Guazzelli and Pouliquen, 2018].

2.4.4 Migration dans un Poiseuille plan

Dans les exemples où nous avons illustré un comportement non-Newtonien, la naissance des inhomogénéités était toujours due au caractère non uniforme du cisaillement, et la suspension évoluait dans une géométrie spécifique (canal cylindrique). Nous nous proposons alors d'explicitier les relations précédentes dans un exemple proche de celui cylindrique et qui sera d'intérêt dans le cadre de cette thèse : l'écoulement d'un Poiseuille dans un canal rectangulaire de largeur H , comme indiqué figure I.17.

L'écoulement est dirigé selon \mathbf{e}_x et la composante normale est dirigée selon \mathbf{e}_y . On observe dans le canal rectangulaire que la fraction volumique ϕ varie selon y . On la note $\phi(y, t)$. La vitesse de la suspension est dirigée selon \mathbf{e}_x soit $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$, et on suppose que l'écoulement global reste proche d'un Poiseuille plan, donc que \mathbf{U} ne dépend que de y et t . Le terme d'advection $\mathbf{U} \cdot \nabla$ est alors nul. De plus, le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}^p$ se réduit simplement à sa composante Σ_{yy}^p . En utilisant alors la relation (I.97), ainsi que la version tenseurielle des contraintes particulières, explicitée équation (V.24) dans l'annexe C, on obtient que

[†]. Voir [Jackson, 1997, Nott et al., 2011, Guazzelli and Pouliquen, 2018] pour plus de détails sur cette approximation importante.

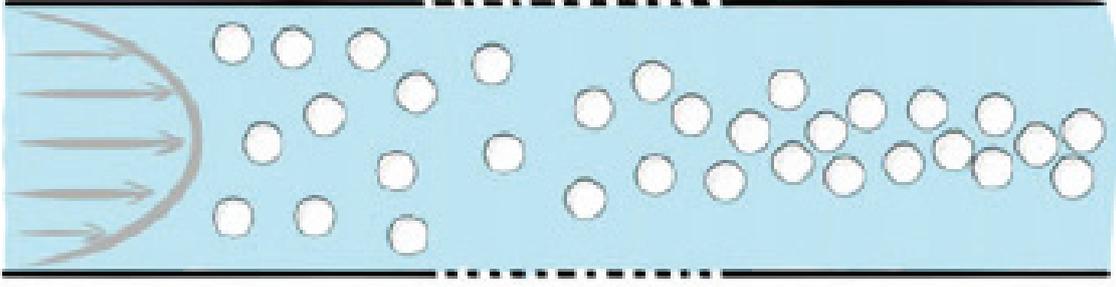


FIGURE I.17 - **Migration de particules dans un canal rectangulaire.** Écoulement plan de type Poiseuille d'une suspension dans un canal rectangulaire. Figure issue de [Guazzelli and Pouliquen, 2018].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\lambda_2 d_p^2}{18 \eta_f} \frac{\partial}{\partial y} \left[f(\phi) \frac{\partial(\eta_n(\phi) \dot{\gamma}(y))}{\partial y} \right]. \quad (\text{I.98})$$

La connaissance de Σ_{22}^p , donc de la viscosité normale $\eta_n(\phi)$, permet alors d'accéder aux variations temporelles et spatiales de $\phi(y, t)$. Les inconnues ici sont ϕ et $\dot{\gamma}$, en supposant que l'on connaît $\eta_n(\phi)$. Il nous manque une équation pour décrire la dynamique. L'écoulement moyen de la suspension est régi, à faible nombre de Stokes, par l'équation de Stokes :

$$\nabla P = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s(y, t) \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (\text{I.99})$$

avec P la pression dans l'écoulement. Une preuve de cette expression est donnée en Annexe B. Ici la viscosité $\eta_s(\phi)$ dépend de y et t car la fraction volumique dépend aussi de ces paramètres. Le taux de cisaillement étant le gradient de vitesse selon y , on a $|\dot{\gamma}| = |\partial U / \partial y|$. En projetant l'équation selon x , on obtient donc que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial [\eta_s(\phi(y, t)) |\dot{\gamma}|]}{\partial y}, \quad (\text{I.100})$$

le gradient de pression étant constant (imposé pour créer l'écoulement).

Solutions du système

En régime stationnaire, l'équation (I.98) devient :

$$\frac{\partial \Sigma_{22}^p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial [\widehat{\eta}_n(\phi(y)) \eta_f |\dot{\gamma}|]}{\partial y} = 0 \Rightarrow \widehat{\eta}_n(\phi) |\dot{\gamma}| = \text{Cste}, \quad (\text{I.101})$$

en utilisant (V.23) associé avec la forme de Q donnée par (V.24). Cela signifie que les variations de $\eta_n(\phi)$, donc celles de $\phi(y)$, compensent les variations de $\dot{\gamma}$: autrement dit, lorsque le taux de cisaillement augmente, la fraction volumique diminue comme observé expérimentalement.

Il est donc possible de résoudre le système (I.100) et (I.101) pour déterminer $\dot{\gamma}$ et $\phi(y)$ en supposant les formes de $\eta_s(\phi)$ et $\eta_n(\phi)$ connues. De même, il est possible de résoudre temporellement (I.98). Remarquons que la solution stationnaire ne dépend pas de la taille des particules, contrairement à celle instationnaire. En effet, les particules influent sur le flux de densité des particules \mathbf{j}_\perp et modifient alors la durée du régime transitoire.

Fraction volumique locale

La figure I.18 résume ce que nous venons d'étudier. L'évolution de la fraction volumique locale dans un canal rectangulaire de taille H y est présenté pour plusieurs tailles de particules (modélisé par le rapport H/d avec $D \leftrightarrow d_p$) et plusieurs fractions volumiques initiales ϕ_0 . Des données expérimentales mais aussi numériques y sont affichées. La première observation est une modification du profil de fraction volumique locale, comme observée sur la figure I.14, avec une concentration plus élevée des particules au centre du canal. Les données expérimentales de [Lyon and Leal, 1998] et [Snook et al., 2016] sont en bon accord avec les simulations numériques issues du modèle SBM.

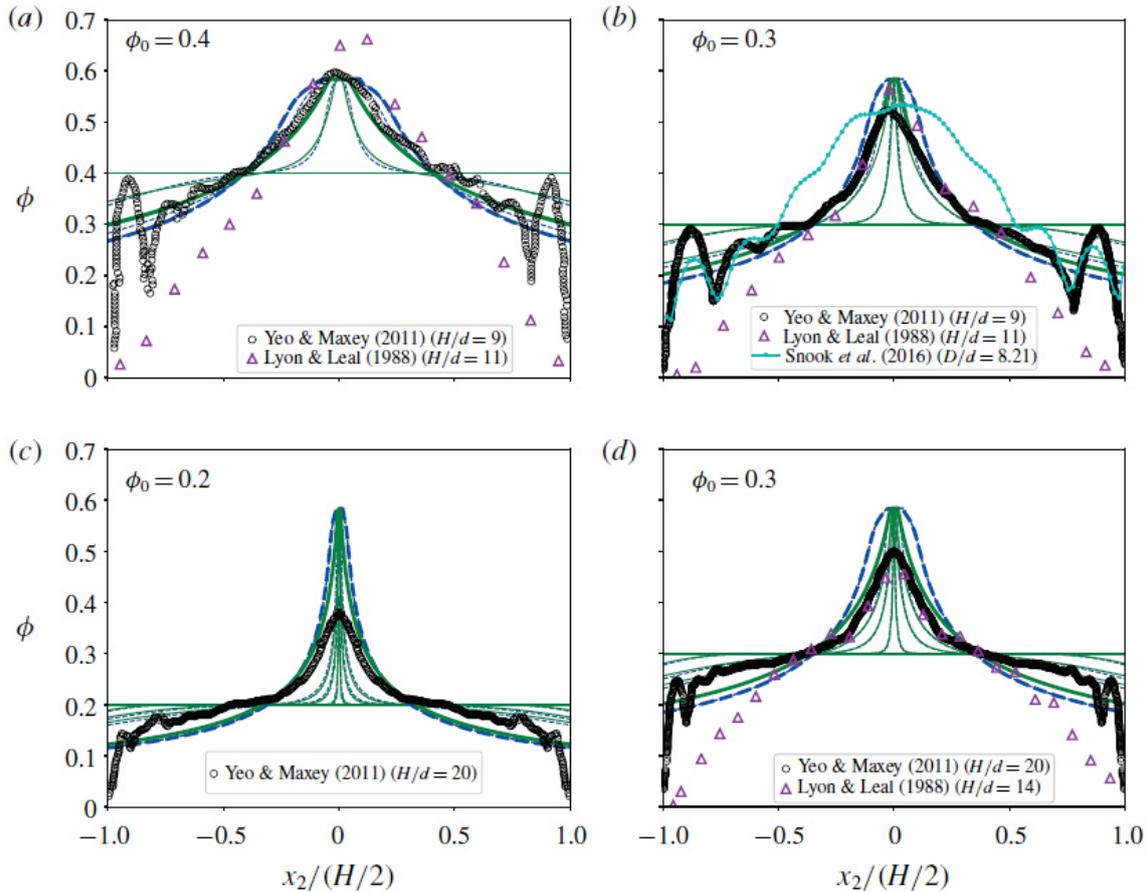


FIGURE I.18 - **Illustration de la migration induite par cisaillement dans le cas d'un écoulement de type Poiseuille plan.** Évolution de la fraction volumique locale lorsque le rapport entre la largeur H du canal et $d = d_p$ le diamètre des particules vaut (a)-(b) $H/d = 11$ et (c)-(d) $H/d = 20$, avec $\phi_c = 0.585$ et pour différentes fractions volumiques ϕ_0 . Différentes données expérimentales et numériques sont indiquées (se référer à [Guazzelli and Pouliquen, 2018], article dont est issue la figure, pour plus de détails).

On observe aussi que

- la dynamique du régime variable dépend du rapport H/d_p . Le régime stationnaire est atteint plus rapidement pour un rapport $H/d = 11$ (figure I.18-a)-b)) que pour le rapport $H/d_p = 20$ (figure I.18-c)-d)). Ceci est relié au flux de particules proportionnel à $(d_p/H)^2$ donc une migration plus rapide lorsque d_p/H est élevé ;
- si théoriquement la taille des particules n'influe pas sur la forme de ϕ locale, expérimentalement des différences ont été mesurées pour les deux valeurs de H/d_p .

Notons que l'apparition du facteur H/d_p est en accord avec l'analyse dimensionnelle présentée 2.3.2, et il devrait intervenir dans les équations dès lors qu'il n'est pas négligeable.

Résumé

La physique des suspensions est très riche et diverse. Dans un premier temps, d'un point de vue simple, la **fraction volumique** ϕ et le **taux de cisaillement** $\dot{\gamma}$ appliqué sont des paramètres essentiels pour une suspension, influençant l'importance des nombreux phénomènes physiques agissant aux différentes échelles spatiales et temporelles : interactions hydrodynamiques et contacts lubrifiés à faible fraction volumique, contacts frictionnels collisionnels entre particules pour des plus grandes fractions volumiques. Nous avons alors considéré des suspensions **non-Browniennes** ($Pe \gg 1$), **visqueuses** ($St \ll 1$) et **isodenses** ($\rho_f = \rho_p$).

Les équations régissant le comportement d'une suspension est complexe à résoudre numériquement, ce qui amène à la décrire de manière simplifiée comme un fluide effectif ou comme un système diphasique. Nous avons ainsi mis en évidence, dans ces deux approches, la présence de différents paramètres qui permettent de décrire la dynamique à l'échelle mésoscopique d'une suspension :

- La **viscosité effective** η_s , qui régit, de manière analogue à la viscosité d'un liquide Newtonien, la manière dont la suspension s'écoule pour une contrainte tangentielle de cisaillement. Il est dépendant de la fraction volumique ϕ de la suspension ainsi que d'un paramètre libre ϕ_c , valeur pour laquelle la viscosité effective diverge.
- La **viscosité effective normale** η_n , dépendant de ces mêmes paramètres, qui est reliée au comportement des particules au sein de la suspension pour une contrainte normale appliquée. Ces derniers peuvent se mouvoir au sein du liquide interstitiel résultant en la variation de la fraction volumique locale.

Lorsque la suspension est confinée, les particules et le liquide se meuvent différemment. Les particules se réorganisent pour minimiser leurs interactions. Dans les zones de fort cisaillement, les particules interagissent beaucoup entre elles, donc migrent dans les zones de faible cisaillement, où cette interaction est moindre. Dans un canal rectangulaire de type Poiseuille plan, la concentration en particules est maximale au centre et diminue en s'éloignant. Le **Suspension Balance Model** nous permet alors de décrire, à partir de η_s et η_n , cette migration de particules.

Questions

- La rhéologie des suspensions granulaires est désormais très bien établie pour des écoulements simples. On peut utiliser ces connaissances de rhéologie pour aborder des phénomènes plus complexes tels que la remontée de bulles dans une suspension. **Comment caractériser la dynamique de remontée de bulles au sein d'une suspension granulaire ?**
- Dans les systèmes triphasiques, les interfaces entre les différentes phases en présence jouent souvent un rôle important. **Quel est l'effet des interfaces sur la dynamique des particules ?**
- En général, une suspension contient souvent une distribution de particules de tailles différentes. Dans ce cas, il est normal de se demander ce que devient la dynamique des particules du au cisaillement appliqué par un rhéomètre ou alors une bulle qui remonte au sein de la suspension. **Que se passe t-il pour une suspension polydisperse ?**

Suspensions et interfaces

Nous avons présenté séparément dans les deux chapitres précédents deux aspects importants présents au cours de cette thèse : le comportement d'une bulle d'air remontant dans un liquide Newtonien en environnement tridimensionnel et en cellule de Hele-Shaw, mais aussi le comportement général d'une suspension. Au cours de ma thèse, ces deux aspects sont présents de manière simultanée et s'influencent mutuellement. Afin d'introduire l'état de l'art sur l'étude des remontées de bulles dans des suspensions, nous étudierons par la suite les différentes dynamiques par la présence de particules sur les interfaces.

Dans ce chapitre, toutes les suspensions dans les expériences présentées sont isodenses, visqueuses et non-Browniennes.

3.1 Bulle évoluant dans une suspension tridimensionnelle

Il existe peu d'études sur la physique de bulles en présence d'une suspension [Luo et al., 1997, Liang-Shih and Tsuchiya, 2013]. L'expérience menée par [Hooshyar et al., 2013] en environnement tridimensionnel est celle qui se rapproche le plus de notre étude. Ils étudient la remontée de bulles dans une suspension isodense (dont le fluide est de viscosité $\eta_f = 2.2$ mPa.s et la fraction volumique des grains ϕ_0 est comprise entre 0 et 0.2) avec différentes tailles de particules, en utilisant une visualisation aux rayons X ou par des fibres optiques. La vitesse des bulles sont de l'ordre de 30 cm.s^{-1} et une seule taille de bulle (3 mm) est utilisée dans toute l'étude. Cela implique que $\text{Ga} \sim 10^2$ et $\text{Bo} \sim 0.3$.

L'objectif de leur étude consiste à analyser le rôle du nombre de Stokes associé à la bulle, défini par le temps de relaxation d'une particule sur le temps caractéristique de remontée d'une bulle soit

$$\text{St}_b = \frac{\rho_p d_p^2 v_b}{18 d_b \eta_f}. \quad (\text{I.102})$$

Pour cela, le rapport entre diamètre de bulle d_b et de particules d_p est varié lors de leurs expériences pour changer St_b . Lorsque $\text{St}_b \ll 1$, la forme de la bulle est ellipsoïdale comme pour le cas d'une bulle dans un liquide Newtonien à $\text{Ga} \gg 1$ et $\text{Bo} \lesssim 10$ (voir figure I.2) et qu'elle n'interagit pas avec la suspension. Quant à sa vitesse de remontée, elle est indépendante de la taille des particules mais elle dépend de la viscosité effective de la suspension (voir figure I.20). Alors, ils proposent que v_b soit simplement le résultat d'un équilibre entre la force de traînée (à $\text{Ga} \gg 1$) et la poussée d'Archimède.

La vitesse est alors donnée par la relation

3.1. Bulle évoluant dans une suspension tridimensionnelle

FIGURE I.19 - **Remontée d'une bulle d'air dans un mélange eau-glycérol-polystyrène.** [$\phi_0 = 0.05$] a) et b) domaine $St_b \ll 1$, c) et d) domaine $St_b \gg 1$. Le diamètre des particules est noté d_s sur les photographies et font office d'échelle. La bulle est indiquée en noir et les particules en rouge et/ou bleu. Figure issue de [Hooshyar et al., 2013].

$$v_b = \sqrt{\frac{2(\rho_f - \rho_p)\mathcal{V}_b g}{C_D A_{\perp} \rho_f}}, \quad (\text{I.103})$$

avec \mathcal{V}_b le volume de la bulle, C_D le coefficient de traînée, A_{\perp} la surface projetée suivant la trajectoire du fluide sur un plan perpendiculaire à cette trajectoire. Le coefficient de traînée C_D est calculé en utilisant les résultats empiriques obtenus pour des bulles d'air en environnement tridimensionnel sans grains [Tomiyama et al., 2002]*. Nous notons ainsi que tout se passe comme si la suspension se comporte comme un liquide Newtonien : $v_b = \Psi(\text{Re}_{d_b}, \text{Bo})\sqrt{gd_b}$ où le rôle des particules n'interviendrait que dans $\eta_s(\phi_0)$.

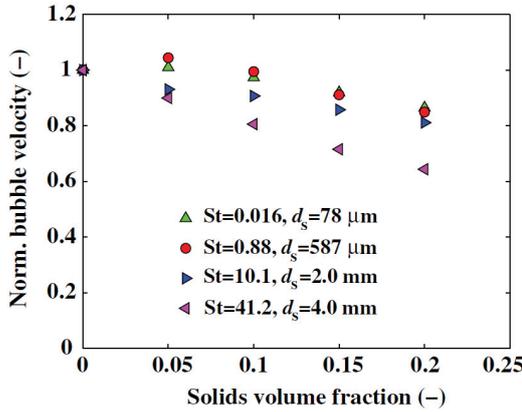


FIGURE I.20 - **Influence du nombre de Stokes.** Évolution de la vitesse de remontée des bulles normalisée par la vitesse de remontée obtenue dans un liquide pur en fonction de la fraction volumique en grains.

Pour $St_b \gg 1$, l'inertie de la particule induit des collisions avec la bulle, visibles sur la figure I.19-c) et d). La remontée n'est alors plus verticale et dépendante de l'organisation spatiale et temporelle des particules. Par ailleurs, lorsque la fraction volumique en grains augmente, tout autre paramètre constant, la vitesse de remontée de la bulle diminue, comme indiqué sur la figure I.20. De plus, [Hooshyar et al., 2013] observent que v_b dépend de la taille des particules à $St_b \gg 1$ et ils proposent alors de modéliser l'équation du mouvement à $St_b \gg 1$ en y ajoutant une perte d'énergie cinétique de la bulle, introduite de manière empirique, à chaque collision.

En conclusion, nous remarquons que la dynamique de la bulle v_b est identique ($St_b \ll 1$), ou plus lente ($St_b \gg 1$), que celle dans un liquide Newtonien de même viscosité dynamique effective. Toutefois, les auteurs ne proposent pas de modèle pour la baisse d'énergie cinétique de la bulle après collision. Par ailleurs, la gamme de variation de viscosité de la suspension (1 à 2 fois η_f) et fraction volumique ($\phi_0 < 0.2$) ne permet pas d'étendre facilement leurs résultats aux suspensions denses où la contrainte normale induite par cisaillement serait importante. Nous notons également que $v_b \sim 10 - 30 \text{ cm.s}^{-1}$ dans ces expériences pour une bulle de diamètre $d_b = 3 \text{ mm}$ correspondent au régime d'instabilité zig-zag (voir figure I.4) dans un liquide contaminé. Ces raisons motivent davantage à étudier le comportement d'une bulle dans le régime de bas Reynolds et dans une cellule de Hele-Shaw pour mieux visualiser la bulle unique ainsi que les particules composant la suspension.

*. $C_D = \max\left(\frac{24}{\text{Re}_{d_b}}(1 + 0.15\text{Re}_{d_b}^{0.687}), \frac{8}{3} \frac{\text{Bo}}{1 + \text{Bo}}\right)$, où $\eta_s(\phi_0) = \eta_s \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right)^{-2.5\phi_c}$.

3.2 Particules et interfaces

Lorsque nous étudierons la remontée de bulles dans une suspension confinée, la bulle peut être en contact avec les particules de deux façons : autour de la bulle (interface radiale) et dans la couche de lubrification du liquide (interface transverse). Nous proposons de présenter des expériences récentes en lien avec ces deux cas.

3.2.1 Déstabilisation de l'interface suspension - gaz

Lorsque un fluide est en mouvement par rapport à un autre fluide, il est possible d'observer le phénomène de digitation visqueuse[†] issue de la loi de Darcy dans des cellules de Hele-Shaw [Saffman, 1986]. Pour des fluides, le moteur de l'instabilité de Saffman-Taylor est relié au gradient de pression : si une petite perturbation naît, le gradient de pression, proportionnel à la vitesse, augmente, et favorise alors d'autant plus la perturbation, en compétition avec les forces capillaires qui tendent à limiter la déstabilisation des interfaces.

Ce même phénomène a été étudié en remplaçant le fluide par une suspension et en étudiant la propagation radiale de l'interface entre deux fluides non miscibles dans une cellule de Hele-Shaw [Tang et al., 2000, Xu et al., 2016]. La figure I.21 est extraite d'un de ces articles et présente une expérience de digitation de suspensions. La suspension est injectée dans une cellule de Hele-Shaw horizontale à un débit constant et le fluide se déplace radialement. Le débit est assez faible pour ne pas créer de digitation dans le cas sans grains. Les particules étant des billes fluorescentes, leur concentration est reliée à l'intensité reçue. On constate que la fraction volumique est uniforme jusqu'à $\phi_0 = 0.3$ dans toute la suspension. Au delà, l'interface se déforme et on observe l'apparition de clusters où la fraction volumique locale en particules est beaucoup plus élevée.

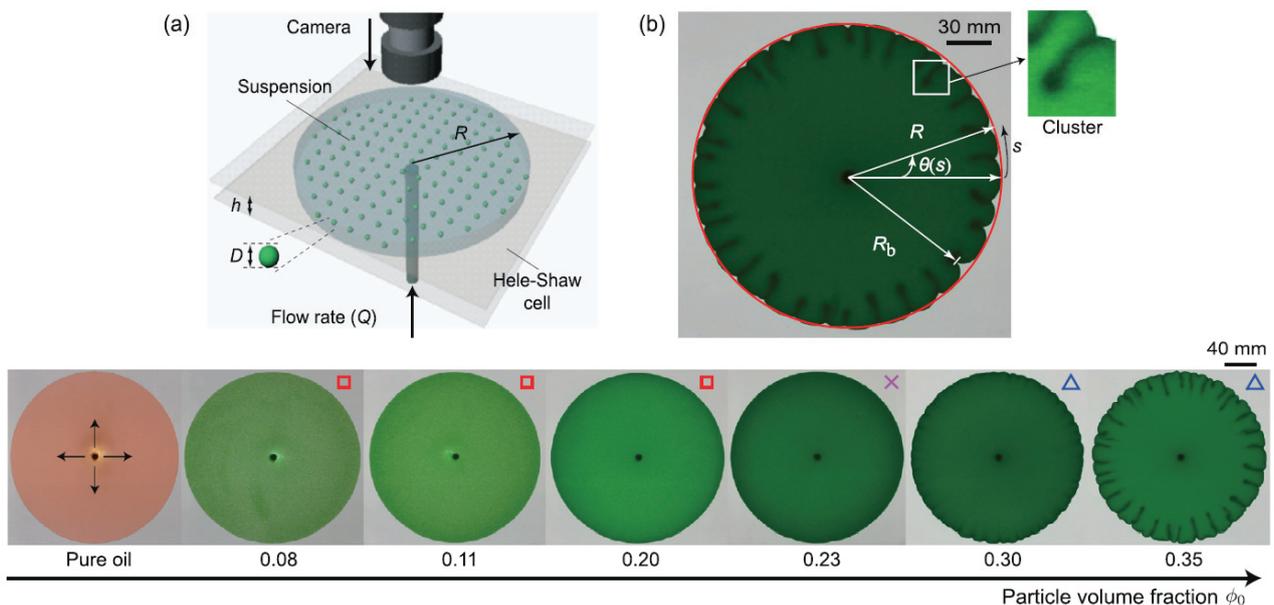


FIGURE I.21 - **Illustration de la digitation visqueuse dans les suspensions.** a) Schéma expérimental de l'expérience. b) Photographie d'une suspension pour $\phi = 0.35$ et c) influence de la fraction volumique ϕ_0 sur le contour d'une suspension (huile silicone + particules isodenses) pour différentes fractions volumiques ϕ_0 . La suspension est injectée dans une cellule de Hele-Shaw horizontale par un capillaire et le fluide s'étend selon toutes les directions indiquées par les flèches noires. Figure issue de [Xu et al., 2016].

La déformation de l'interface est causée par la présence des clusters, pour lesquels la viscosité η_s

[†]. Viscous fingering en anglais.

est plus élevée localement et qui sont donc plus difficiles à déplacer car la dissipation visqueuse y est plus importante sur la figure I.21-b). Les zones d'accumulation quant à elles s'expliquent par deux phénomènes. Tout d'abord, la migration de particules explicitée précédemment : les particules s'accumulent au centre du canal comme l'exemple de la figure. I.17. Cette accumulation réduit la vitesse de déplacement de l'interface et les particules s'y accumulent. Or, vu que l'injection de suspension est continue, des particules continuent d'arriver au bord de l'interface, appelé «fountain flow» [Karnis and Mason, 1967]. Ceux-ci vont alors déplacer les particules présentes de manière orthoradiale et créer une recirculation locale des particules à l'origine de l'accumulation des particules. Là encore, il est important de considérer l'écoulement des particules séparément du fluide. Notons que l'observation de la digitation à partir de $\phi_0 \approx 0.3$ est en accord avec la migration de particules qui est observée pour des fractions volumiques de ce même ordre de grandeur.

3.2.2 Particules et films liquide/gaz

Nous présentons ici deux problématiques communes associées aux phénomènes présents aux interfaces liquide-gaz en présence de particules.

Problème de Landau-Levich-Derjaguin en présence des particules

Cette problématique est reliée à l'entraînement d'un film sur une paroi verticale, sortant d'un bain liquide infiniment grand [Landau and Levich, 1942, Deryaguin, 1943]. La taille du film liquide, lorsque le nombre de Reynolds associé à la taille du film est petit, est gouverné par un équilibre entre les forces de tension de surface et les forces visqueuses, dont l'importance relative est contrôlée par le nombre Capillaire Ca . Il est défini par

$$Ca \equiv \frac{\eta_f U}{\gamma_f}, \quad (\text{I.104})$$

avec U la vitesse caractéristique de l'écoulement (ici la vitesse d'entraînement de la paroi), η_f la viscosité du liquide et γ_f la tension de surface liquide-gaz. D'une part, lorsque $Ca \ll 1$, la taille du film δ_f est donnée par la relation

$$\frac{\delta_f}{\lambda_c} = 0.946Ca^{2/3} + \mathcal{O}(Ca), \quad (\text{I.105})$$

avec λ_c égal à la longueur capillaire. D'autre part, lorsque $Ca \gg 1$,

$$\frac{\delta_f}{\lambda_c} \approx 0.56Ca^{1/2}. \quad (\text{I.106})$$

Dans ce contexte, [Palma and Lhuissier, 2019] aborde une problématique similaire à Landau-Levich-Derjaguin en présence de grains, présentée sur la figure I.22. Une plaque verticale est placée dans une suspension dense et entraînée à l'extérieur de cette dernière par un moteur à la vitesse U . On étudie alors la taille du film fluide h composé de la suspension comme affiché sur la figure I.22-a) et de sa composition (fraction volumique locale ϕ_{film}).

Sur la figure I.22-c), les résultats de la taille du film en fonction de la vitesse d'entraînement de la plaque sont présentés. On constate qu'il existe trois régimes différents pour la taille du film : le film n'est pas entraîné [zone (i)], puis le film est de la taille des particules [zone (ii)] et enfin, la taille du film augmente pour des grandes vitesses d'entraînement [zone (iii)]. Cela signifie que la taille des particules est importante dans la dynamique du film. De plus, la fraction volumique dans le film d'entraînement reste à peu près égale à celle de la suspension $\phi_0 \approx \phi_{\text{film}}$.

La différence principale avec le cas sans particules vient de la présence de la zone (ii) où la taille du film reste constante. Dans la zone (iii), on retrouve un comportement régi par (I.105) avec $\eta_f \rightarrow \eta_s(\phi_0)$ pour le nombre Capillaire. Cela signifie que dans cette zone, les effets capillaires dus à la suspension sont similaires aux effets capillaires dus à un liquide pur de même viscosité. Autrement dit, les contraintes interfaciales subies par une suspension sont du même ordre de grandeur que la pression de Laplace subie par un liquide pur.

Problème de Bretherton en présence des particules

Nous considérons maintenant le cas d'une bulle d'air qui chasse un liquide contenu dans un tube (figure I.23 sans grains). On note U la vitesse de déplacement du front de la bulle d'air, $2R$ le rayon du tube, et δ_f l'épaisseur du film restant. Ceci est une problématique classique introduite par [Taylor, 1961,

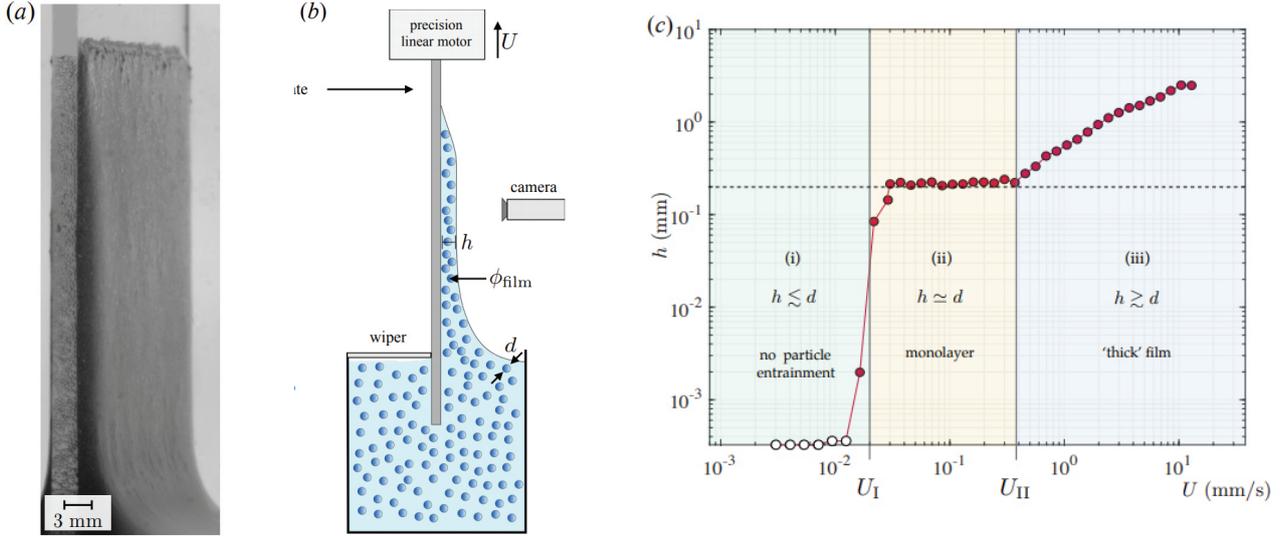


FIGURE I.22 - **Entraînement d'une suspension par une plaque.** a) Photographie de l'expérience. La suspension est composée de particules de diamètre $d = 145 \mu\text{m}$ et d'un liquide de viscosité $100 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. b) Dispositif expérimental d'entraînement. Le moteur tire sur la plaque immergée dans la suspension à une vitesse U . c) Taille du film fluide h en fonction de la vitesse du moteur pour $\phi_0 = 0.4$. Figure issue de [Palma and Lhuissier, 2019].

Bretherton, 1961]. La première estimation de la taille du film de lubrification δ_f est due à [Bretherton, 1961], reliant δ_f à Ca par la relation

$$\frac{\delta_f}{R} = 1.34\text{Ca}^{2/3}, \quad (\text{I.107})$$

valide lorsque $\text{Ca} \ll 1$. Une régression plus précise effectuée par [Taylor and Saffman, 1959] relie δ_f à R par la relation :

$$\frac{\delta_f}{R} = \frac{a_1\text{Ca}^{2/3}}{1 + a_2\text{Ca}^{2/3}}, \quad (\text{I.108})$$

où $a_1 = 1.34$ et $a_2 = 3.35$ [Aussillous and Quéré, 2000]. Cette loi est valable pour le cas d'une bulle d'air évoluant dans deux plaques de verre séparées par une épaisseur h [Gaillard et al., 2021], avec $a_1 = 1.29$ et $a_2 = 4.17$. Un travail très récent [Jeong et al., 2020] a étudié la même problématique, mais avec un liquide contenant des particules rigides. La figure I.23 présente une expérience où une suspension diluée, initialement dans un tube capillaire, est aspirée par une seringue. La propagation de l'interface air-fluide se fait à une vitesse U et on étudie le film entre l'air et le tube pour des particules de taille comparable à l'épaisseur du film de lubrification [Jeong et al., 2020].

On observe sur la figure I.23-b) qu'une particule arrivant à l'interface air-liquide déforme cette dernière est entraînée dans le film de lubrification. Sans particules, la taille typique du film de lubrification δ_f est donnée par la relation (I.108), avec les mêmes valeurs de a_1 et a_2 que [Aussillous and Quéré, 2000]. Par ailleurs, on constate que l'entraînement d'une particule est possible même lorsque son diamètre est légèrement plus grand que δ_f d'un facteur α , expérimentalement de l'ordre de 1.15. La particule dans le film de lubrification déforme fortement l'interface et ne se déplace plus une fois présente dans le film. La dynamique de dépôt de la particule dans le film est régie par une compétition entre les forces capillaires, visqueuses et une force de friction de la particule sur le tube.

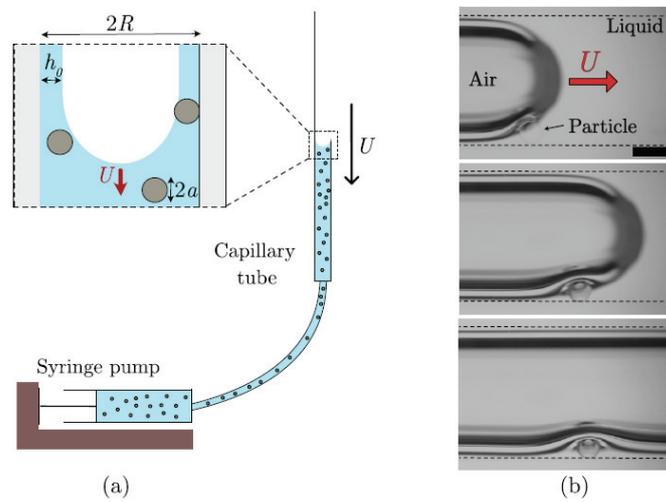


FIGURE I.23 - **Déposition d'une particule dans un film de lubrification.** a) Schéma du dispositif : la suspension diluée ($\phi \sim 0.35 - 1\%$, $d_p = 2a = 125 \mu\text{m}$), présente dans un tube capillaire vertical, est aspirée par une seringue. On étudie la déposition ou non des particules dans le film de lubrification contre le tube. h_0 représente la taille du film de lubrification, notée δ_f dans le texte. b) Images de déposition d'une particule dans le film liquide. Figure issue de [Jeong et al., 2020].

Résumé

La remontée de bulles d'air dans une suspension tridimensionnelle est un sujet de recherche complexe assez actif de nos jours. La compréhension fondamentale de ce sujet est important pour aller plus loin sur les mécanismes d'écoulements multiphasiques. Des expériences montrent qu'une bulle d'air remontant dans une suspension non-Brownienne isodense peut éventuellement interagir avec des particules. Le nombre de Stokes associé à la bulle, défini par

$$St_b = \frac{\rho_p d_p^2 v_b}{18 d_b \eta_f},$$

contrôlé par exemple par la taille des particules, permet de caractériser la dynamique. Lorsque $St_b \ll 1$ (bulle de taille beaucoup plus élevée que les particules), ces dernières n'interagissent pas avec la bulle d'air, et la remontée est équivalente à celle d'un fluide Newtonien (forme de bulle ellipsoïde).

Lorsque l'on étudie le comportement d'une suspension au voisinage de parois ou d'interfaces liquide - gaz, on constate l'apparition de différents phénomènes :

- Pour des suspensions denses en mouvement dans un environnement confiné, l'interface du front de la suspension se déstabilise. Un phénomène similaire à la digitation visqueuse apparaît, avec des zones de front dont la fraction volumique locale est plus élevée et qui se déplace moins vite que des zones de front ayant une déplétion en grains. La migration de particules joue alors un rôle important dans cette dynamique.
- Des particules isolées peuvent interagir avec le film de lubrification entre une bulle d'air et une paroi. Celles-ci peuvent pénétrer dans le film lorsque leur diamètre d_p est inférieur à $\alpha \delta_f$, avec $\alpha \sim 1.15$. Une fois dans le film de lubrification, les particules ne bougent plus.
- Des suspensions denses peuvent être entraînées par une paroi solide comme pour des liquides purs. La taille du film entraîné dépend alors de la vitesse d'entraînement de la paroi et du diamètre des particules. Pour des faibles vitesses, la taille du film est égale à la taille des particules. Pour des vitesses plus élevées, on constate que la taille du film de lubrification est similaire à celui d'un liquide pur de même viscosité.

Ces observations conduisent à penser que contrairement au cas tridimensionnel, la présence de parois va fortement influencer le comportement d'une bulle d'air qui remonte au sein d'une suspension.

Questions

- Les études récentes montrent que des particules peuvent se retrouver dans le film de lubrification entre une bulle et une paroi. Une question ouverte est alors **le rôle de ces particules sur la remontée d'une bulle.**
- La présence de particules peut amener à des phénomènes de déstabilisation de l'interface entre la bulle et la suspension pouvant résulter à de la digitation, fragmentation et percolation.
- **Comment les contraintes associées à la présence de particules aux interfaces se couplent aux contraintes appliquées aux particules dans le volume de la suspension ?**

Deuxième partie

Moyens expérimentaux

4	Matériel et méthodes	64
4.1	Description du dispositif expérimental: cellule de Hele-Shaw	64
4.1.1	Contraintes expérimentales	64
4.1.2	Cellule de Hele-Shaw	65
4.1.3	Caractérisation de l'entrefer de la cellule	66
4.2	Propriétés des liquides et des particules	67
4.2.1	Particules	67
4.2.2	Liquide suspendant	69
4.2.3	Mise en suspension	71
4.3	Mesures rhéologiques expérimentales à volume constant	72
4.3.1	Principe de mesure et géométries utilisées	72
4.3.2	Rhéologie des liquides	72
4.3.3	Rhéologie des suspensions	74
4.4	Analyse des bulles	77
4.4.1	Acquisition des images	77
4.4.2	Traitement des images	78
4.4.3	Détection et mouvement des bulles	81

Matériel et méthodes

L'introduction nous a permis de comprendre comment caractériser la dynamique des suspensions, les nombres adimensionnés pertinents et le cadre choisi lors de notre étude : la remontée de bulles dans une cellule confinée contenant une suspension non-Brownienne isodense visqueuse. Cette partie présente le dispositif expérimental utilisé au cours de cette thèse. Dans un premier temps, nous motiverons le choix d'utiliser une cellule de Hele-Shaw et décrirons le dispositif utilisé ainsi que les méthodes de production des bulles. Dans un deuxième temps, nous allons établir un cahier des charges permettant d'obtenir une suspension à partir d'un liquide et de grains qui respecte les contraintes et les choix que nous avons effectués. Ensuite, nous nous intéresserons aux mesures rhéologiques expérimentales associées aux suspensions et liquides obtenus, en présentant les différentes méthodes de mesure et en motivant le choix du rhéomètre. Nous présenterons finalement par quels moyens l'analyse des bulles est effectuée après l'acquisition de ces dernières par une caméra.

4.1 Description du dispositif expérimental : cellule de Hele-Shaw

4.1.1 Contraintes expérimentales

L'étude de la dynamique de remontée d'une bulle d'air isolée dans une suspension dans un environnement **tridimensionnel** est techniquement difficile. L'une des contraintes principales vient du fait qu'il faut pouvoir observer la bulle d'air évoluer dans la suspension. En règle générale, les indices optiques des grains et du liquide sont différents, ce qui empêche d'effectuer des mesures par observation directe : la suspension réduit grandement l'intensité reçue à cause de l'absorbance des grains car elle est opaque. Plusieurs solutions sont possibles (nous ne donnons qu'une liste non-exhaustive des possibilités) :

- Utiliser des suspensions **iso-indice**, dont l'indice optique des particules est très proche de celui du liquide à une température donnée. Des techniques d'ajustement d'indice optique du liquide permettent alors d'obtenir une suspension claire [Krishnan et al., 1996, Gamonpilas et al., 2015, Sarabian et al., 2019]. Des techniques d'imagerie avancées (stéréoscopie 3D, segmentations,...) sont nécessaires pour différencier la bulle d'air (elle aussi non-opaque) de la suspension [Dijksman et al., 2012].
- Effectuer des mesures de phase et/ou de vitesse dans la suspension en utilisant des fibres optiques, qui sont des mesures intrusives [Hooshyar et al., 2013], ou utiliser des méthodes de visualisation comme des scanners tomographiques aux rayons X [Mudde, 2010, Hooshyar et al., 2013], compliquées et chères à mettre en oeuvre, en plus de contraintes élevées sur les résolutions spatiales et temporelles.

Nous avons alors opté pour une autre solution en utilisant une cellule de Hele-Shaw qui permet de s'affranchir du problème d'opacité de la suspension : en effet, l'atténuation d'intensité due à la

présence de la couche de suspension qui entoure la bulle est très limitée de part sa finesse (voir partie 4.4.1). Cependant, la géométrie particulière de cette cellule va induire des résultats profondément différents par rapport à une étude tridimensionnelle. Comme souligné dans l'introduction, les aspects de confinement sur les interactions bulles-suspensions amènent des questions fondamentales intéressantes qui seront au cœur de notre étude.

4.1.2 Cellule de Hele-Shaw

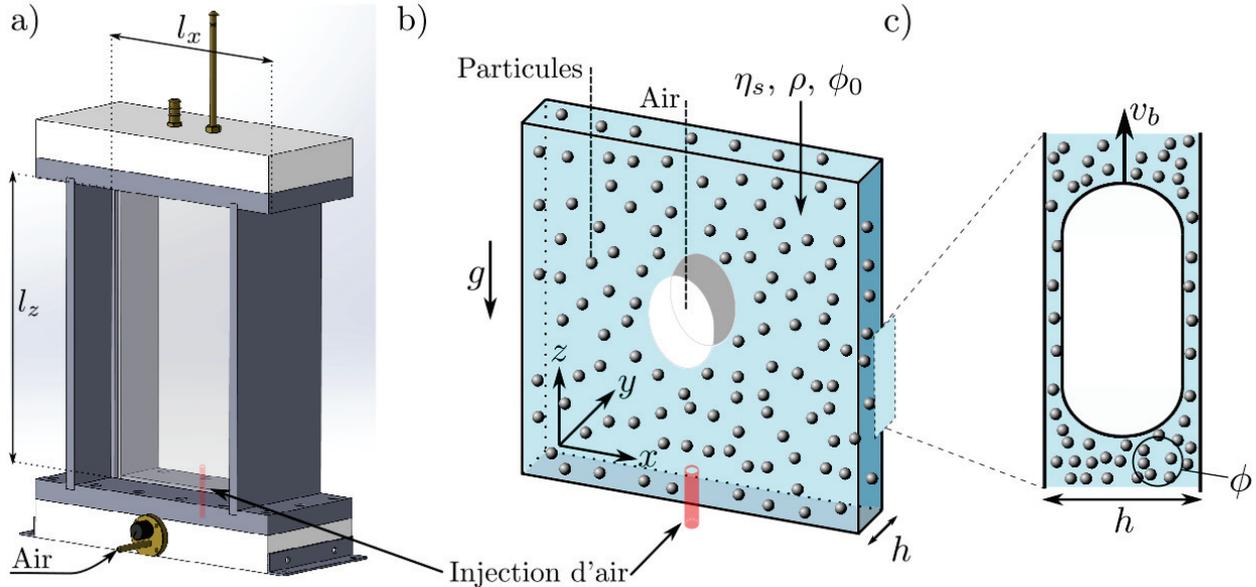


FIGURE II.1 - **Dispositif expérimental élaboré au cours de la thèse.** a) Représentation géométrique du dispositif expérimental. b) Vue de face et c) Vue de côté d'une bulle d'air remontrant à la vitesse v_b dans une suspension de densité ρ , de viscosité effective η_s et de fraction volumique moyenne ϕ_0 . La bulle d'air est confinée entre les plaques de verre. On note ϕ la fraction volumique locale.

La cellule de Hele-Shaw expérimentale est schématisée sur la figure II.1. Elle est constituée de deux plaques verticales en verre, ayant chacune une hauteur l_z de 30 cm, une largeur l_x de 20 cm. L'épaisseur des plaques de verre de 5 mm a été choisie afin de limiter le plus possible leur flexion à cause de la force exercée par le liquide suspendant sur les plaques. Ces plaques sont maintenues à une distance h de valeurs $\{2.0, 2.3, 2.7, 5\}$ mm, appelée *gap*, par un cadre en PVC. Cette distance h caractéristique confère à la cellule son aspect quasi-bidimensionnel ($h \ll l_x, l_z$). La cellule ainsi constituée repose sur un réservoir interchangeable. Deux réservoirs ont été utilisés : l'un contenant en son centre un capillaire vertical de diamètre 1 mm, disposé à la base de la cellule comme indiqué figure II.1-b), relié au tuyau extérieur et permettant l'injection d'air, et l'autre contenant en sa base quatre capillaires, espacés chacun de 4 cm. Nous utiliserons le premier réservoir pour l'étude de remontée d'une bulle unique (partie III) et les deux pour la remontée de bulles multiples (partie IV). Les deux réservoirs peuvent solidement s'attacher à la cellule par 16 vis serrant un joint torique permettant d'éviter les fuites. Le choix d'un dispositif démontable permet de facilement le nettoyer lorsque l'on change de suspension, notamment au niveau des capillaires se bouchant facilement avec les grains. La cellule ainsi que le réservoir sont remplis du liquide suspendant, et disposés dans une salle climatisée afin de limiter les variations de température, et donc de viscosité. La surface libre du liquide en haut de la cellule est à pression atmosphérique.

Le capillaire est relié à l'extérieur du système par un tuyau de diamètre 5 mm. Entre les deux, un adaptateur de raccord est utilisé. Deux types d'injection ont été utilisés :

- une seringue en plastique de capacité 50 mL, directement reliée au tuyau extérieur à la cellule, qui permet d'injecter l'air par pression manuelle avec la main ;

4.1. Description du dispositif expérimental : cellule de Hele-Shaw

- un débitmètre commandé par ordinateur, qui laisse passer de manière continue plus ou moins d'air dans le tuyau extérieur.

Dans les deux cas, le volume d'air injecté n'est pas contrôlé de manière précise mais peut-être estimé *a posteriori* en visualisant les bulles remonter. Les deux choix sont complémentaires car les grains peuvent boucher les capillaires et une grande pression est parfois nécessaire pour créer une bulle d'air, nécessitant alors d'utiliser la seringue, qui peut, par une pression forte et brève, évacuer les grains du capillaire et permettre l'injection d'air de manière adéquate. Les expériences effectuées utilisent conjointement ces deux systèmes d'injection, sans effet notable sur les résultats obtenus.

La cellule est rétroéclairée par un panneau de diodes électroluminescentes blanches LED plus larges que la cellule, situé à 10 cm derrière la cellule, et qui éclaire celle-ci de manière uniforme. L'éclairage permet d'avoir un bon contraste et une très bonne homogénéité lumineuse pour visualiser les bulles d'air. Notons que le panneau LED fonctionne à l'aide d'une alimentation continue stabilisée pour éviter le scintillement à 50 Hz dû à la fréquence secteur. Enfin, la dynamique est filmée par une caméra Basler ac-0400 enregistrant des images de 2048 x 2048 pixels en noir et blanc, associée à une focale de 16 mm et placée à 40 cm de la cellule.

4.1.3 Caractérisation de l'entrefer de la cellule

Les variations de h sont typiques des cellules de Hele-Shaw [Filella, 2015, Toupoint, 2018] et dues à la pression qu'exerce le liquide sur les plaques de verres. L'écartement de la cellule est contrôlé par le cadre en PVC tout autour des plaques de verre. Cependant, lorsque la cellule est remplie, le liquide exerce une pression sur les plaques de verre, ce qui les déforme légèrement et les plie vers l'extérieur de la cellule. Par conséquent, l'épaisseur est légèrement plus importante au centre de la cellule. Cela signifie que la mesure de h doit s'effectuer à charge, c'est-à-dire en présence du liquide, pour mesurer cette déviation.

La mesure de la distance entre les plaques a été effectuée grâce à un capteur de distance chromatique (CL4-MG35 Still Sensors) appelé crayon optique. Le principe, schématisé sur la figure II.2, est le suivant : un faisceau lumineux polychromatique est créé grâce à une source elle aussi polychromatique éclairant une lentille. De part les aberrations de cette dernière, chaque longueur d'onde λ_i se focalise en sortie de la lentille à une distance différente, le tout sur une distance de 5 mm. Sur la surface locale d'un objet, celui-ci ne va alors renvoyer qu'une seule longueur d'onde qui correspond à la position de la surface éclairée par cette longueur d'onde. L'onde réfléchi est ainsi analysée par un spectromètre.

Pour mesurer h , il faut donc déterminer la distance entre la première interface verre-liquide et la deuxième interface air-liquide. À ces deux interfaces correspondent alors un coefficient de réflexion en intensité et une longueur d'onde λ_i . En disposant le crayon optique perpendiculairement aux plaques, et à une distance telle que le faisceau converge entre les plaques (quelques mm), le programme détecte les deux réflexions et associe chaque réflexion à l'interface correspondante, permettant ainsi de connaître la distance entre les deux interfaces, donc l'interstice h .

De même, pour déterminer la taille du film de lubrification δ_f , il suffit d'indiquer les interfaces en jeu : verre/liquide et liquide/gaz, et d'effectuer la mesure. Nous avons effectué quelques mesures rapides sur quelques bulles, donnant des ordres de grandeur compatibles avec la loi empirique de Taylor (I.108).

Nous avons donc constamment utilisé cette méthode pour déterminer l'épaisseur de la cellule entre chaque série d'expériences. L'incertitude sur chaque épaisseur déterminée est associée aux données constructeurs et aussi aux fluctuations lors de la mesure. L'épaisseur est alors constante sur les bords avec une faible augmentation au centre de l'ordre de 0.03 à 0.05 mm[†], comme expliqué précédemment. Au total 5 épaisseurs sont étudiées dans cette thèse : $h = 2.02 \pm 0.03$ mm, $h = 2.08 \pm 0.03$ mm, $h = 2.30 \pm 0.04$ mm, $h = 2.70 \pm 0.05$ mm et $h = 5.00 \pm 0.04$ mm.

†. La cartographie complète de la cellule n'était pas réalisable au sein du laboratoire au cours de ma thèse.

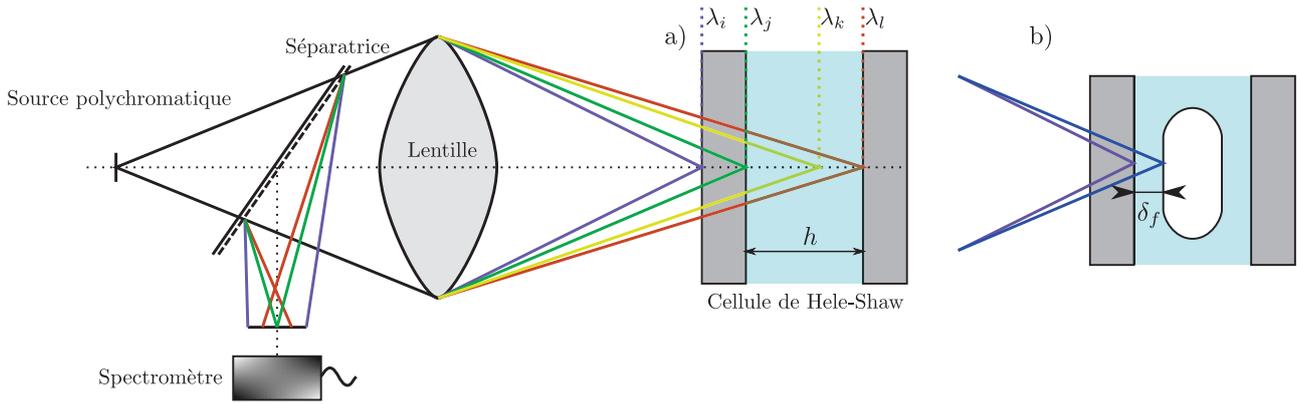


FIGURE II.2 - **Principe de la mesure confocale chromatique.** Schéma du crayon optique produisant un faisceau polychromatique sur a) la cellule de Hele-Shaw pour déterminer l'interstice h , b) la cellule contenant un liquide suspendant et une bulle qui remonte afin de déterminer la taille du film de lubrification δ_f .

4.2 Propriétés des liquides et des particules

Intéressons-nous maintenant à la suspension que nous allons introduire dans la cellule, et particulièrement aux propriétés de la suspension qui permettent de satisfaire les conditions énoncées en introduction.

4.2.1 Particules

Pour obtenir une suspension visqueuse non-Brownienne, nous avons choisi des particules

- quasi-monodisperses, sphériques, lisses, rigides ;
- non-colloïdales ($Pe \ll 1$) : $d_p > 10 \mu\text{m}$;
- de masse volumique proche de celle du liquide suspendant pour obtenir l'isodensité ;
- permettant une dynamique visqueuse $St, Re \ll 1$ et n'interagissant pas avec la bulle $St_b \ll 1$.

Nous n'avons pas imposé de contraintes sur la valeur de d_p , mais en pratique nous avons constaté qu'au delà de $h/d_p \approx 4$, l'écoulement était bloqué car les particules peuvent facilement former des ponts stables entre les deux plaques de verre. Le choix des particules est alors limité par la frontière de blocage hydrodynamique et le nombre de Péclet, soit $d_p \in \sim [10 \ 500] \mu\text{m}$.

Nous avons donc utilisé des particules de polystyrène de la marque Dynoseed (Microbeads), dont les diamètres indiqués par le constructeur sont de 20, 80 et 230 μm . La table II.2 résume les propriétés des particules. La forme et la distribution des particules ont été mesurées par analyse d'images prises au microscope Wild Makroskop M429 1.25x associée à un objectif Makrozoom Leica 15 (voir figure II.3). Les contours des grains sont détectés par Matlab, formant ainsi la fonction de densité de probabilité (simplifiée par PDF) des diamètres apparents détectés. Pour les grains quasi-monodisperses, des tamisages sont effectués pour tronquer la fonction de densité et obtenir un faible écart de diamètres[†]. La figure II.3 présente ainsi la PDF des différentes particules utilisées. Le diamètre moyen d'une particule, d_p , est défini par la moyenne de la fonction de densité en l'approximant par une distribution gaussienne. L'incertitude est quant à elle définie par la largeur à mi-hauteur, telle que

$$\text{PDF}(d_p) \propto \exp \left[- \left(\frac{d - \bar{d}}{\sigma_p} \right)^2 \right] \Rightarrow d_p \equiv \bar{d} \pm \sigma_p. \quad (\text{II.1})$$

Les valeurs obtenues sont affichées sur la table II.2.

[†]. Il est conseillé de porter un masque filtrant pour éviter d'inhaler la poussière résiduelle des grains.

4.2. Propriétés des liquides et des particules

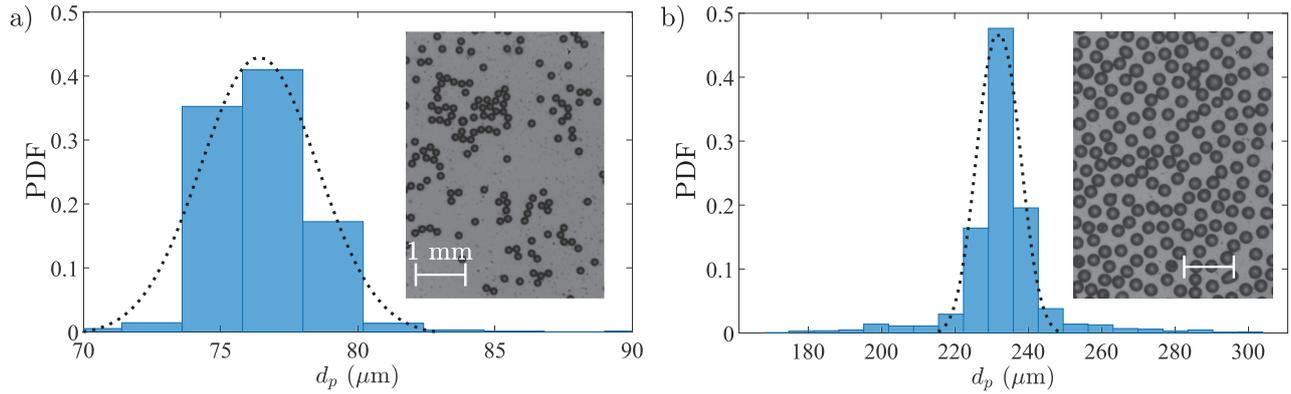


FIGURE II.3 - **Répartition de la taille des particules.** a) Fonction de densité de probabilité (PDF) des diamètres détectés pour a) les particules d_{80} et b) les particules d_{230} . Pour chaque graphe, la distribution gaussienne issue de l'équation (II.1) a été superposée aux données. Les images des particules issues au microscope sont affichées, mettant en évidence leurs propriétés (taille, sphéricité). La règle blanche représente 1 mm sur les deux images.

Nom	Forme	Distribution	Tamissage utilisé	diamètre d_p
Multi-column				
bla	bla			
d_{20}	Sphérique	Monodisperse	11 et 23 μm	20 μm
d_{80}	Sphérique	Monodisperse	50 et 115 μm	$77 \pm 3 \mu\text{m}$
d_{230}	Sphérique	Monodisperse	200 et 250 μm	$230 \pm 5 \mu\text{m}$
p_{NS}	Non-sphérique	Polydisperse		

TABLE II.1 - **Propriétés des particules utilisées.** Leur masse volumique mesurée par la méthode de la burette est égale à $1057 \pm 3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour les 4 types de particules. La mesure au microscope n'a pas été effectuée pour les particules de diamètre 20 μm , le diamètre moyen est alors donné par la documentation constructeur. Par abus de langage, les grains de diamètre moyen 77 μm seront nommés d_{80} par simplification.

	Total	Promoter	Intergenic	Intragenic	
ORI					
	Sphérique	Monodisperse	11 et 23 μm	20 μm	
d_{80}	Sphérique	Monodisperse	50 et 115 μm	az	az
d_{230}	Sphérique	Monodisperse	200 et 250 μm	$230 \pm 5 \mu\text{m}$	
p_{NS}	Non-sphérique	Polydisperse			

TABLE II.2 - **Propriétés des particules utilisées.** Leur masse volumique mesurée par la méthode de la burette est égale à $1057 \pm 3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour les 4 types de particules. La mesure au microscope n'a pas été effectuée pour les particules de diamètre 20 μm , le diamètre moyen est alors donné par la documentation constructeur. Par abus de langage, les grains de diamètre moyen 77 μm seront nommés d_{80} par simplification.

		Total	Promoter	Intergenic	Intragenic	ORI	
						Strong	All
Human	Methylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	Unmethylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Dog	Methylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	Unmethylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Chicken	Methylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	Unmethylated	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

Notons finalement que nous avons effectué des expériences sur des particules sphériques de diamètre 20 μm et des particules non-sphériques polydisperses que nous présenterons dans le chapitre 6, partie 6.6.2.

En résumé, les particules d_{80} et d_{230} sont quasi-monodisperses ($d_p/\Delta d_p < 3\%$). et peu rugueuses. Le constructeur indique que le module d'Young est de l'ordre de 3 GPa, on supposera alors les particules rigides pour les forces mises en jeu dans l'étude. L'objectif étant de réaliser une suspension isodense, il est important d'avoir une mesure précise de la masse volumique

Masse volumique

La mesure de masse volumique se fait de la manière suivante : on introduit un volume V_1 (prenons 40 mL) de liquide moins dense que les particules dans une burette reposant sur une balance de précision. On note m_1 la masse de liquide. On rajoute des grains jusqu'à atteindre une graduation souhaitée V_2 (prenons 50 mL). La lecture de cette graduation se fait facilement grâce au ménisque du liquide. Il faut seulement prendre garde à ne pas avoir de particules qui peuvent quand même rester par effet capillaire sur la surface libre (dans ce cas on les enlève simplement). On note alors la masse m_2 affichée sur la balance, et on en déduit la masse volumique des particules $\rho_p = (m_2 - m_1)/(V_2 - V_1)$. Cette mesure est répétée 3 fois afin de réduire l'incertitude de mesure de la masse volumique.

4.2.2 Liquide suspensé

Une suspension étant un mélange liquide-grains, nous nous intéressons maintenant au liquide environnant. Le cahier des charges que nous avons choisi est le suivant :

- liquide Newtonien, visqueux et vérifiant la condition sur le nombre de Reynolds associé à la géométrie de Hele-Shaw ($\text{Re} \ll 1$, $\text{St} \ll 1$) ;
- de même masse volumique que les particules pour obtenir l'isodensité ;
- avec un bon contraste pour pouvoir visualiser la remontée de bulle (voir partie 4.4).

Nous avons aussi cherché à avoir un liquide dont la viscosité peut être modifiée, sans en changer profondément la nature moléculaire, afin de pouvoir faire varier la gamme de nombres de Reynolds Re étudiée et regarder directement l'influence de la viscosité du liquide sur la remontée des bulles. Ceci est possible en mélangeant un liquide très visqueux et un liquide peu visqueux, dans la condition de totale miscibilité et s'il n'y a pas de réaction chimique entre les deux.

Toutes ces contraintes ont amené à utiliser un mélange eau distillée/huile, l'huile étant du UCON pur (DOW, UCON, Lubricant 75-H-90,000, $\rho_{\text{UCON}} = 1088 \text{ kg.m}^{-3}$). C'est un lubrifiant industriel très visqueux ($\eta_{\text{UCON}} \approx 44 \text{ Pa.s}$), avec l'avantage d'être soluble dans l'eau. Les propriétés des liquides et des mélanges sont indiquées sur la table II.3. Pour caractériser le rapport entre eau et UCON, on utilisera la fraction massique w :

$$w_{\text{eau}} = \frac{\text{Masse en eau}}{\text{Masse totale}} = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{eau}} + m_{\text{UCON}}}. \quad (\text{II.2})$$

4.2. Propriétés des liquides et des particules

Le contraste s'obtient en rajoutant du colorant alimentaire bleu, à raison de 5 gouttes de colorant par litre de solution, ce qui permet toujours de visualiser la texture de grains dans la solution (voir la figure II.9). Rappelons que si l'on souhaite créer une suspension isodense à partir d'un liquide, il faut que la sédimentation vers le haut ou le bas soit très lente devant le temps de l'expérience. Concrètement, la masse volumique du liquide doit être proche de celle des particules, légèrement supérieure ou inférieure d'environ 10%. Si ρ_f est inférieur à ρ_p en dehors de cet intervalle, on peut rajouter du chlorure de sodium, qui se dissout facilement dans le mélange et n'influe que de manière négligeable sur les propriétés autres que la masse volumique du mélange, afin d'obtenir un liquide de masse volumique égale à celle des particules. Ainsi, la masse volumique du mélange, sauf indication contraire[†], sera $\rho_f = 1057 \pm 2 \text{ kg.m}^{-3} = \rho_p$. Nous utiliserons majoritairement le liquide A_{200} (voir Table II.3) pour les études de remontée de bulle d'air dans une suspension pour s'affranchir d'éventuels problèmes inhérents dus à l'ajout de sel même si nous n'avons pas vu d'effets dans notre étude lorsqu'il y en avait^{††}. Les autres liquides sont alors principalement utilisés pour l'étude de remontée de bulles sans grains.

Nom	η_f (mPa.s)	ρ_f (kg.m ⁻³)	ω_{eau}	$10^4 \nu_f$ (m ² .s ⁻¹)
A_{150}	152 ± 2	1051 ± 1	~ 0.64	1.44 ± 0.02
A_{180}	180 ± 2	1055 ± 1	~ 0.62	1.70 ± 0.02
A_{200}	200 ± 2	1057 ± 1	~ 0.61	1.90 ± 0.02
A_{250}	253 ± 2	1063 ± 1	~ 0.59	2.38 ± 0.02
A_{620}	620 ± 2	1066 ± 1	~ 0.53	5.83 ± 0.03
A_{930}	930 ± 2	1068 ± 1	~ 0.50	8.71 ± 0.03
A_{2790}	2790 ± 4	1078 ± 1	~ 0.40	25.9 ± 0.62
UCON pur	44 000	1088 ± 2	0	4.0×10^{-4}

TABLE II.3 - **Valeurs des masses volumiques et viscosité des principaux liquides utilisés.** La mesure des propriétés des liquides a été effectuée à 22°C. A_X signifie un mélange eau/UCON de viscosité dynamique X mPa.s. La méthode de mesure de viscosité est présentée partie 4.3.2. Les données du UCON proviennent du constructeur, la mesure au rhéomètre et au densimètre étant impossibles compte tenu de la trop grande viscosité du UCON.

Mesure de la masse volumique du liquide

La masse volumique est mesurée avec un densimètre électronique de marque Anton Paar. Son principe de fonctionnement est basé sur le maintien en oscillation d'un tube en U généralement en verre borosilicate (volume environ 1 ml) dont la mesure de la fréquence résultante est directement proportionnelle à la masse volumique du liquide injecté. La mesure ne marche que pour les liquides simples, les suspensions bouchant le tube et empêchant la mesure. Aussi, la finesse du tube ne permet pas la mesure de liquides trop visqueux (> 3 Pa.s).

Mesure de la tension de surface

La tension superficielle du mélange eau/UCON a été mesurée par une technique de goutte pendante [Stauffer, 1965]. À l'aide d'un tensiomètre, une goutte pendante du mélange est créée dans de l'air sec au repos. La goutte est éclairée pour que le contour soit bien détecté par un programme informatique, comme affiché sur la figure II.4-a). Ce dernier ajuste alors les paramètres issus de l'équation théorique de Young-Laplace [Gassin, 2014] en fonction du contour. L'un des paramètres ajustés donne accès à la tension de surface expérimentale.

†. Les expériences sans grains sont effectuées à masse volumique variable, *i.e* sans ajouter de sel au mélange.

††. Nous ne précisons alors pas les mélanges pour lesquels du sel a été rajouté

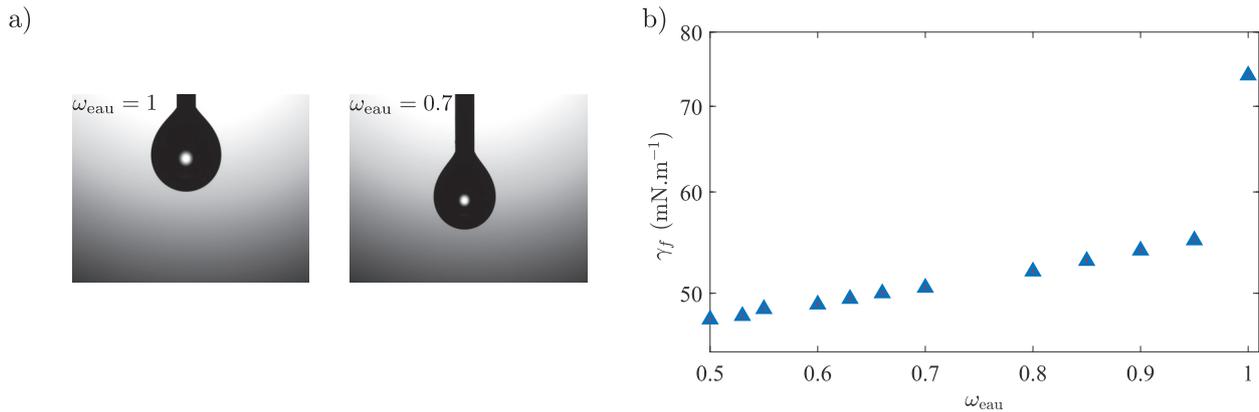


FIGURE II.4 - **Principe de la mesure de la tension de surface par la méthode de la goutte pendante** a) Forme de deux gouttes d'eau/UCON pour deux fractions massiques en eau différentes. b) Courbe d'évolution de la tension de surface γ_f en fonction de la fraction massique en eau ω_{eau} .

La figure II.4-b) présente les valeurs obtenues pour la tension de surface du mélange eau/UCON γ_f pour différentes fractions massiques en eau ω_{eau} . Dès lors que l'on rajoute un peu de UCON, γ_f diminue très rapidement, ce que l'on observe communément pour des mélanges de polymères et d'eau. γ_f diminue ensuite de manière linéaire lorsque ω_{eau} diminue. Les mélanges utilisés étant constitués à $\sim 60\%$ d'eau, la valeur de la tension de surface est d'environ 50 mN.m^{-1} . Notons finalement que la présence des gouttes de colorant ne change pas la tension de surface mesurée (aux incertitudes près).

4.2.3 Mise en suspension

Pour obtenir une suspension d'une fraction volumique en grains voulue ϕ_0 pour un litre de suspension, il faut d'abord peser $10^3 \times \phi_0$ grammes de particules et $10^3 \times (1 - \phi_0)$ de liquide. Ensuite, il faut mélanger le liquide et les particules dans un même récipient. L'opération est délicate dans la mesure où il faut obtenir une suspension homogène et sans corps étrangers, notamment sans bulles d'air qui peuvent facilement se piéger lors du mélange (le fait de transvaser un liquide visqueux d'un récipient à un autre provoque toujours le piégeage de bulles d'air par exemple) ou qui sont initialement présentes dans le liquide sous forme dissoute. Les bulles d'air piégées sont typiquement de très petite taille (inférieurs à $500 \mu\text{m}$ de diamètre), et il faudrait attendre un temps souvent très long pour qu'elles remontent à la surface, typiquement plusieurs jours. Afin de s'affranchir de ce problème, il convient donc d'utiliser un bain à ultrasons, qui fait implorer les micro-bulles d'air par cavitation et fait remonter les bulles un peu plus grosses. Ce processus est alors utilisé après avoir mélangé l'eau et le UCON, et une deuxième fois après avoir introduit les particules dans le mélange.

Après avoir éliminé les bulles d'air de la suspension, si on laisse le contenant au repos, les particules vont inévitablement sédimenter car l'isodensité n'est pas parfaite (typiquement les particules sédimenter en quelques jours). De plus, le bain à ultrasons favorise cette sédimentation. On utilise aussi un rouleau pour tube analogique Stuart (Cole-Palmer) qui permet de mixer la suspension tout en gardant l'homogénéité des particules. On peut ainsi utiliser la suspension à un moment ultérieur.

En résumé, la préparation d'une suspension est longue et doit-être effectuée précautionneusement. Les étapes de préparation d'une suspension sont :

- Préparer le liquide suspensif en mélangeant l'eau et le UCON à la proportion voulue. Rajouter la bonne quantité de chlorure de sodium pour atteindre l'iso-densité si nécessaire, ainsi que le colorant pour un bon contraste. Évacuer les bulles d'air au bain à ultrasons.

4.3. Mesures rhéologiques expérimentales à volume constant

- Tamiser les particules et peser la quantité voulue de grains.
- Les mélanger vigoureusement dans un contenant que l'on peut fermer afin de répartir les grains de manière homogène dans le liquide.
- Placer le contenant dans un bain à ultrasons entre 10 minutes et quelques dizaines d'heures[†] pour évacuer les bulles d'air dues au mélange.
- Disposer le contenant sur un plateau tournant lorsque toutes les bulles d'air ont été évacuées jusqu'à son utilisation.

Après obtention des différents échantillons, nous pouvons analyser leurs propriétés rhéologiques.

4.3 Mesures rhéologiques expérimentales à volume constant

La caractérisation des propriétés rhéologiques des liquides et suspensions utilisées durant cette thèse est effectuée grâce à un rhéomètre Kinexus Ultra+ (Malvern), contrôlable en température grâce à un module Peltier. Plusieurs géométries différentes ont été utilisées et comparées afin de trouver la meilleure méthode de mesure en fonction de la nature du liquide ou de la suspension. Ces géométries fonctionnent à volume constant, c'est-à-dire que le volume de l'échantillon testé est constant.

4.3.1 Principe de mesure et géométries utilisées

Le principe du rhéomètre que nous avons utilisé est d'appliquer un cisaillement à l'échantillon et d'étudier l'écoulement du liquide en réponse à ce cisaillement, en fonction de la géométrie utilisée. Plus précisément, le cisaillement est obtenu en mettant en mouvement un rotor à une vitesse angulaire $\dot{\gamma}$, qui exerce un couple Γ au liquide déposé sur un stator, fixe. On peut contrôler la vitesse de rotation du rotor, l'appareil mesurant la contrainte de cisaillement τ après atteinte d'un régime stationnaire[†] et indiquant ainsi le rapport entre τ et $\dot{\gamma}$, ce qui donne η_f avec la relation (I.72) $\tau = \eta_f \dot{\gamma}$.

Les trois géométries schématisées figure II.5 sont :

- La **géométrie cône-plan** : le rotor est un cône d'angle à la base α_c et de rayon R_c dont la base touche le stator plan. Le liquide est compris entre le rotor et le stator. Le cône est très légèrement biseauté à sa base. Il suffit d'environ un mL de liquide pour la mesure.
- La **géométrie plan-plan** : le rotor est un disque éloigné du stator d'une distance e appelée *gap*. Le liquide se situe entre les deux parties. Il faut environ 4 à 6 mL de liquide pour remplir le gap entre les deux plans.
- La **géométrie Couette cylindrique** : le rotor est un cylindre de rayon R_1 tandis que le stator est un cylindre de rayon R_2 . Le liquide emplit tout l'espace entre les deux cylindres. Il faut environ 15 mL de liquide pour remplir l'interstice entre les cylindres.

L'intérêt d'utiliser différentes géométries est de pouvoir comparer les résultats obtenus dans chacune d'entre elles, notamment lorsque l'on utilise des suspensions. Nous ne détaillerons pas les fonctionnements et calculs associés à chaque géométrie qui sont explicités [Oswald, 2005], le rhéomètre effectuant les calculs automatiquement et fournissant directement les valeurs de viscosité.

4.3.2 Rhéologie des liquides

Pour un liquide Newtonien, la mesure de la viscosité donne des valeurs quasi identiques selon les différentes géométries. Nous utiliserons la géométrie cône-plan pour ce type de mesure, la quantité de liquide à utiliser étant très faible. Comme indiqué précédemment, il est possible de faire varier la viscosité du mélange utilisé en changeant la proportion en eau ou en UCON. La figure II.6 indique la

[†]. notamment pour des petites tailles de grains, typiquement $d_p < 80 \mu\text{m}$.

[†]. Le régime stationnaire est atteint en quelques secondes, sauf lorsque la fraction volumique est trop élevée.

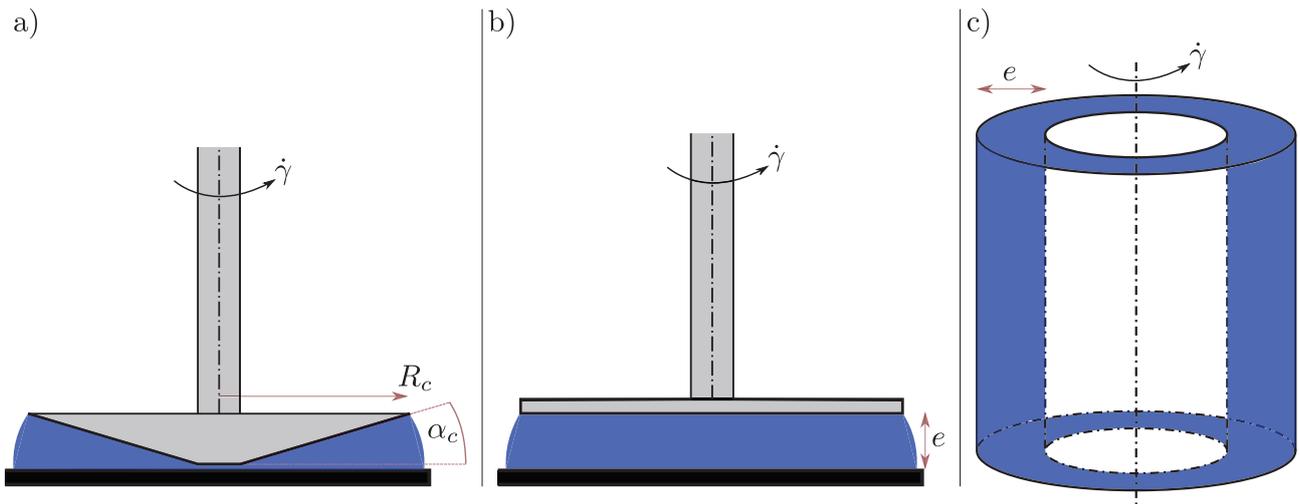


FIGURE II.5 - **Principe des différentes géométries utilisées pour les mesures rhéologiques.**

a) Géométrie cône-plan, caractérisée par un cône de rayon R_c et d'angle α_c et d'un léger biseautage de son sommet. b) Géométrie plan-plan, dont l'interstice e entre le rotor et le stator peut être modifié. c) Géométrie Couette cylindrique, composé de deux cylindres concentriques, créant un espace e permettant d'y déposer le liquide étudié. Seul le cylindre intérieur est mis en rotation.

variation de viscosité mesurée en fonction de la fraction massique en eau dans le mélange. La viscosité suit très fidèlement une loi exponentielle pour $w_{\text{eau}} > 0.3$ telle que

$$\eta_f = \eta_0 \exp(-12.95\omega_{\text{eau}}), \quad \eta_0 = 569.1 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad (\text{II.3})$$

Cette relation permet de fabriquer facilement un mélange eau/UCON de viscosité donnée. La gamme de viscosité sur 3 ordres de grandeurs va alors potentiellement permettre d'explorer une grande gamme de Reynolds, et d'étudier l'influence de ce paramètre sur nos mesures.

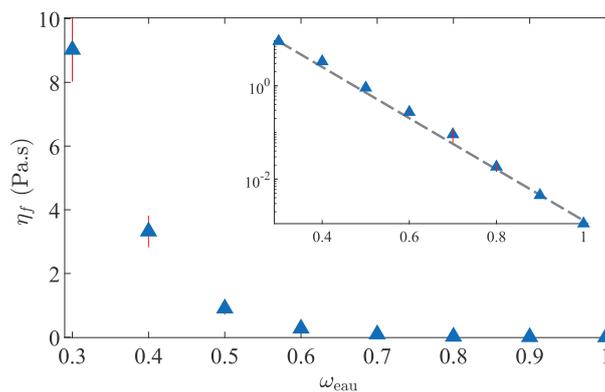


FIGURE II.6 - **Caractérisation des propriétés rhéologie du mélange eau/UCON.** Viscosité dynamique η_f en fonction de la fraction massique en eau du mélange. L'insert correspond aux mêmes données sur un graphe semilog. L'ajustement affine correspond à l'équation II.3. Les mesures ont été effectuées avec la géométrie plan-plan ($e = 2 \text{ mm}$) à 22°C avec un taux de cisaillement variant de 0.01 à 100 s^{-1} .

4.3.3 Rhéologie des suspensions

Pour une suspension, les difficultés de mesure de la viscosité effective η_s sont multiples. Par exemple, dans une géométrie plan-plan, le gradient de cisaillement n'est pas le même dans l'entrefer. Comme pour le phénomène de migration induite par cisaillement détaillé en introduction [Leighton and Acrivos, 1987], les particules vont migrer dans les zones de plus faible cisaillement et fausser en partie la mesure globale de viscosité par le rhéomètre. De plus, la présence d'une surface libre aux extrémités peut entraîner des effets de bords, notamment des effets capillaires faussant la mesure. La géométrie cône-plan est plus adaptée car elle impose un gradient de cisaillement uniforme, mais la taille du gap formé par le biseautage est de l'ordre de la taille des particules, pouvant ainsi les bloquer. Nous n'utiliserons donc jamais cette géométrie pour des suspensions. La géométrie Couette cylindrique impose un cisaillement qui dépend de l'espacement entre le cylindre intérieur. Plus celui-ci est faible par rapport aux valeurs des rayons des cylindres, plus le cisaillement varie faiblement entre le bord intérieur et extérieur du rhéomètre [Sarabian et al., 2019]. Il n'y a pas de problème de surface celle-ci étant positionnée au dessus des cylindres.

Pour comparer les mesures dans les deux géométries, la figure II.7 donne un exemple de mesure de la viscosité apparente d'une suspension (mesurée par le rhéomètre) composée d'un mélange eau-UCON pour une fraction volumique de 30%, en fonction du taux de cisaillement, pour la géométrie plan-plan et différentes valeurs de gap e , et la géométrie Couette cylindrique. Le taux de cisaillement choisi est celui typiquement observé dans nos expériences, de 0,1 à 10 s⁻¹. Les mesures donnent, aux erreurs expérimentales près, des valeurs de viscosité communes pour les deux géométries et les différents gaps, les difficultés de mesure précédemment décrites n'influençant ainsi que faiblement la rhéologie.

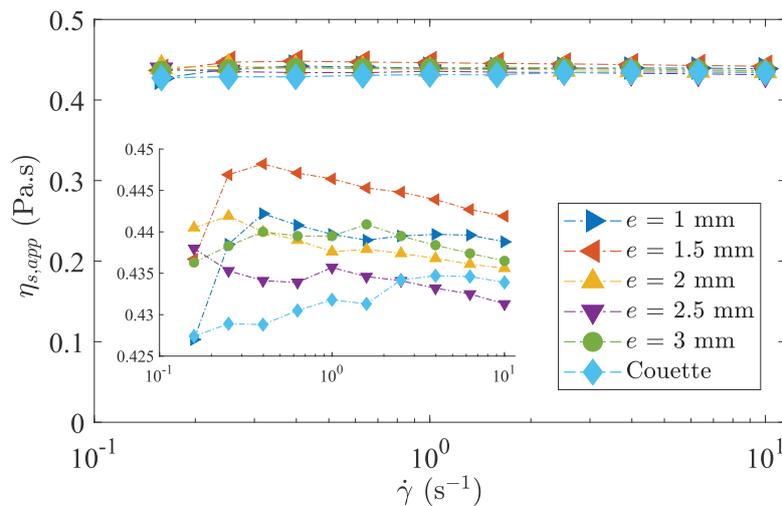


FIGURE II.7 - **Mesure des propriétés rhéologiques d'une même suspension pour différentes géométries.** Evolution de la viscosité d'une suspension eau/UCON avec une fraction volumique $\phi_0 = 0.3$ et une taille de grains de $230 \mu\text{m}$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour deux géométries : plan-plan en utilisant différentes valeurs du gap e et Couette cylindrique. Inset : même graphe agrandi sur la plage $\eta_{s,app} \in [0.425, 0.45]$ Pa.s. Les mesures ont été effectuées à 22°C .

Pour tester la gamme limite de fractions volumiques sur laquelle le rhéomètre effectue une mesure fidèle de la viscosité effective, c'est-à-dire dont les valeurs sont proches des lois empiriques décrites, nous avons effectué des mesures de $\eta_{s,app}$ pour différentes fractions volumiques ϕ_0 .

Si on réitère une opération de mesure sur un échantillon déjà étudié pour $\phi \geq 0.40$, on remarque que la viscosité effective mesurée par le rhéomètre change de l'ordre de 2-3 %, ceci étant du à une modification supplémentaire de l'arrangement des grains par migration et relié au phénomène de thixotropie [Bricker and Butler, 2007]. De même, au delà d'une fraction volumique de 40–45 %, les effets non-Newtoniens multiples rendent difficile la mesure de $\eta_{s,app}$ à fraction volumique constante

(donc à volume constant)[†]. En conclusion, les problèmes de mesure sur les deux géométries plan-plan et Couette Cylindrique peuvent être négligés jusqu'à des fractions volumiques d'environ 40% et la valeur mesurée par le rhéomètre est proche des lois empiriques, donc $\eta_{s,app} = \eta_s$. De plus, la mesure de la viscosité se fera à des taux de cisaillement compris entre 0.1 et 10 s⁻¹ qui sont de l'ordre de grandeur du cisaillement observé lors de nos expériences^{††}. On définit donc la mesure et l'incertitude de $\eta_s(\phi_0)$ comme la moyenne et l'écart-type des $\eta_{s,app}(\phi_0)$ mesurés sur la gamme de taux de cisaillement.

Mesures rhéologiques

Nous nous intéressons ici aux propriétés rhéologiques de suspensions contenant des particules sphériques d_{80} et d_{230} . Nous avons d'abord mesuré la viscosité de différentes suspensions à une même fraction volumique $\phi_0 = 0.3$ ($d_p = 230 \mu\text{m}$) pour différents mélanges eau/UCON initiaux de viscosité η_f variant de 50 mPa.s à 200 mPa.s. La viscosité effective $\hat{\eta}_s \equiv \eta_s(\phi_0)/\eta_f$ est restée constante, égale à 3.81 ± 0.05 . La viscosité effective ne dépend pas du liquide initial, comme prévu.

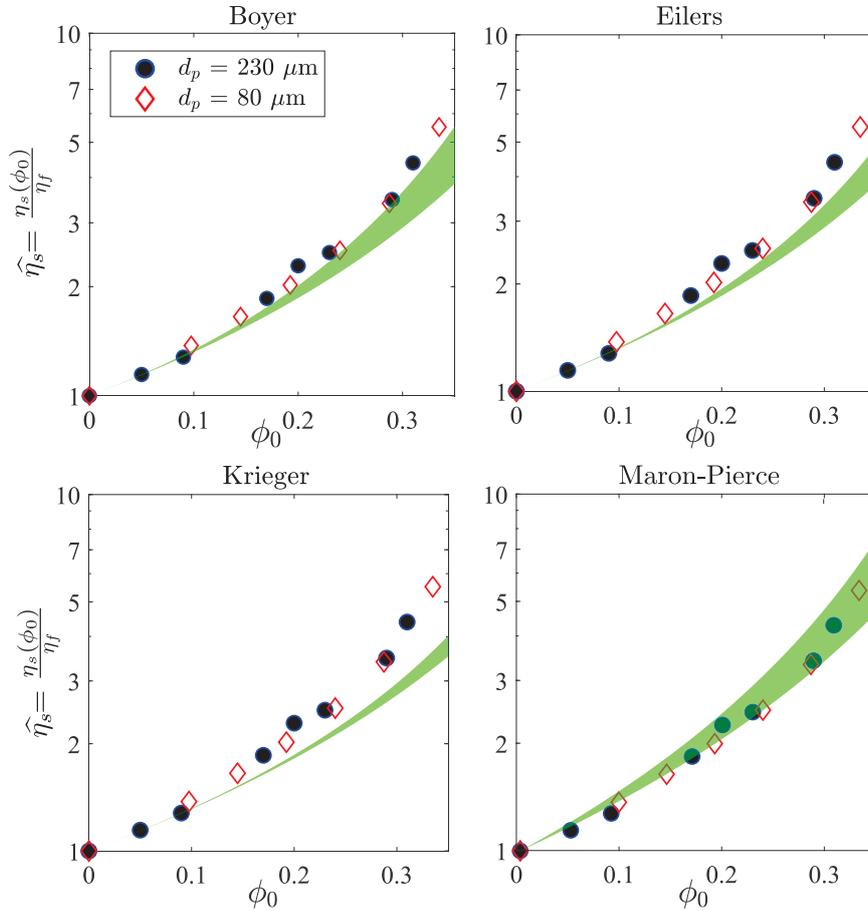


FIGURE II.8 - **Caractérisation des propriétés rhéologiques des suspensions.** Évolution de la viscosité normalisée $\hat{\eta}_s$ pour différentes valeurs de ϕ_0 et les deux diamètres de particules utilisés. L'aire en vert pour chaque graphe représente les lois empiriques présentées en introduction et associées à chaque graphe pour $\phi_c \in [0.55 0.625]$. Les barres d'erreurs sont inférieures à la taille des points.

La figure II.8 regroupe les mesures rhéologiques effectuées sur différentes suspensions. Pour les deux jeux de données différents, le liquide initial est différent : mélange eau/UCON avec $\omega_{\text{eau}} = 0.3$ (resp. $\omega_{\text{eau}} = 0.4$) pour les particules de 80 microns (resp. 230 microns). Chaque point est obtenu en étudiant

[†]. Le rhéomètre à pression imposée conçu par le groupe de l'IUSTI Marseille, explicité dans l'introduction partie 2.4 permet d'aller à des fractions volumiques beaucoup plus élevées [Boyer et al., 2011a].

^{††}. L'ordre de grandeur du cisaillement peut s'estimer par $\|\mathbf{v}_b\|/h$, qui sera au maximum de 10 s⁻¹ dans nos expériences.

4.3. Mesures rhéologiques expérimentales à volume constant

la courbe $\eta_{s,app}$ en fonction de $\dot{\gamma}$ de 0.1 à 10 s^{-1} en utilisant la géométrie Couette cylindrique, puis en effectuant une moyenne des points obtenus. Les barres d'erreurs étant plus petites que la taille des points (en moyenne de 2%), elles ne sont pas affichées sur les graphes. On remarque alors que la viscosité effective ne dépend pas de la taille des particules car les deux jeux de données suivent la même tendance, comme prévu par la littérature dans cette gamme de taille de particules utilisée.

En superposant les quatre lois empiriques évoquées en introduction aux données expérimentales, avec comme paramètre ajustable la fraction volumique ϕ_c , on constate qu'elles sont en accord avec ces dernières. On remarque que la loi de Maron-Pierce semble la plus proche de nos données dans la gamme de fraction volumique étudiée. Ceci n'est pas généralisable car il n'existe pas encore de loi unique reliant $\hat{\eta}_s$ et ϕ_0 . C'est pour cette raison que nous utiliserons quand même les quatre lois, notamment sur le chapitre 6.

4.4 Analyse des bulles

Nous détaillons dans cette partie le protocole d'acquisition et d'analyse des images, qui a été effectué sous Matlab.

4.4.1 Acquisition des images

L'observation de la remontée d'une bulle d'air repose sur la méthode d'ombroscopie : en éclairant de manière uniforme la cellule avec le panneau de diodes LED, on obtient une image de la cellule qui permet d'étudier les bulles. En effet, on observe que le contour de la bulle est net et bien défini : les rayons lumineux passant par le bord de la bulle, donc de courbure non nulle, sont déviés et font apparaître une zone d'ombre, qui se voit distinguer nettement figure II.9-(a). Les autres rayons rencontrent des surfaces planes, car la surface de la bulle en contact avec le film de lubrification est plane. La présence du film de lubrification ne diminue que légèrement la luminosité, ce qui fait que l'intérieur de la bulle est très lumineux par rapport aux rayons traversant uniquement la suspension sur les images II.9-(b-d). On observe la présence de grains dans le film de lubrification pour les bulles évoluant dans une suspension, ce que nous aborderons dans le cadre de notre étude.

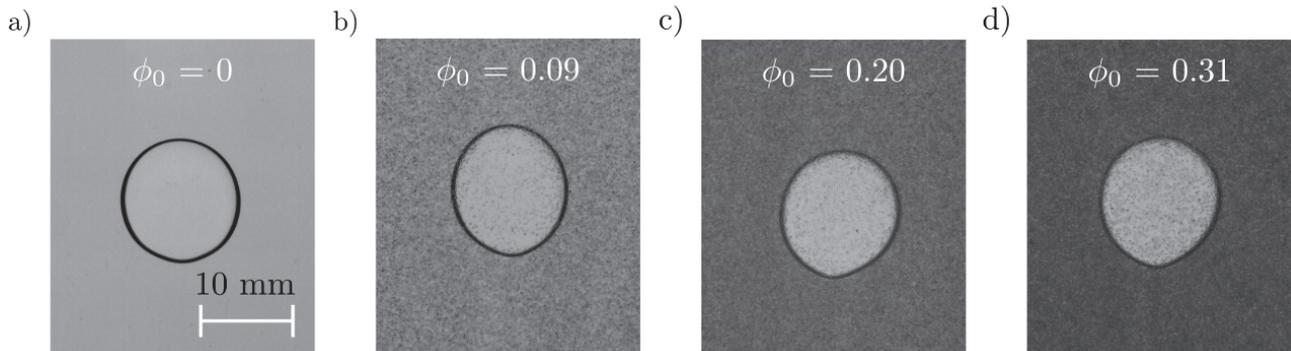


FIGURE II.9 - **Photographies de quatre bulles dans différentes suspensions.** Images brutes capturées par la caméra de la remontée d'une bulle d'air dans une suspension pour différentes fractions volumiques ϕ_0 . Les particules ont un diamètre $d_p = 230 \mu\text{m}$. Le diamètre d_b des bulles est sensiblement égal pour toutes les images $d_b = 12.5 \pm 0.2 \text{ mm}$. Le calcul et l'incertitude pour d_b sont présentés dans le chapitre 5. On constate bien une diminution de l'intensité lorsque la fraction volumique augmente. Le temps d'exposition est identique, de valeur $300 \mu\text{s}$ pour les images afin de mieux se rendre compte de l'absorbance de la solution. L'échelle est identique pour toutes les images.

Les images brutes obtenues par la caméra correspondent à une image de $2048 \times 2048 \text{ pixel}^2$. À chaque pixel est associé un profil de niveaux de gris codé sur 2^8 bits (de 0 à 255), associé à l'intensité lumineuse reçue par chaque pixel du capteur CCD de la caméra. Le temps d'exposition peut être modifié lors des acquisitions de 200 à $1000 \mu\text{s}$ car entre chaque série d'expériences, la fraction volumique en grains est modifiable ainsi que la quantité de colorant introduite dans la solution, modifiant alors l'absorbance et l'intensité. La lumière extérieure pouvant aussi changer l'intensité, les expériences se font dans une grande cage avec des draps noirs protégeant ainsi le système complet de toute lumière parasite.

Le programme Matlab récupère pour chaque image une matrice 2048×2048 notée \mathcal{M} contenant l'intensité lumineuse de chaque pixel codée sur 8 bits, ainsi que le temps à laquelle l'image a été prise, ce qui va nous permettre d'effectuer un traitement des images et étudier le mouvement et la forme des bulles au cours du temps.

4.4.2 Traitement des images

Le traitement des images permet d'accéder à la cinématique des bulles (trajectoire, forme, vitesse, tailles typiques). Le champ de mesure est de l'ordre de la taille de la cellule de Hele-Shaw pour acquérir tous les mouvements possibles (suspension et bulle d'air). La mise en place du traitement d'images est décrite ci-dessous et est volontairement détaillée au vu de son importance fondamentale au cours de cette thèse. Cette rigueur permet d'étudier la remontée de bulles avec très peu d'incertitudes comme nous le verrons par la suite.

Après acquisition des images, on rogne celles-ci afin de réduire grandement le temps de calcul, et de s'intéresser uniquement aux zones où la bulle remonte. Par la suite, nous utiliserons constamment des images rognées.

Étalonnages

Les étalonnages associés à l'acquisition permettent de s'affranchir de la majorité des aberrations optiques, afin d'obtenir la matrice de passage \mathcal{L} entre l'image acquise par la caméra et les distances réelles en jeu dans notre étude expérimentale. Deux types d'étalonnages (ou *calibrations*) sont effectués sur les images, comme présenté sur la figure II.10.

Le premier étalonnage est relié aux paramètres intrinsèques de la caméra, comme sa distance focale, les facteurs d'agrandissement de l'image, le centre optique, et les paramètres extrinsèques associés à la position de la caméra dans l'espace 3D : le programme *Cameracalibration* issu de Matlab permet, à partir d'une vingtaine d'images où l'on photographie une grille sous plusieurs angles et distances, d'estimer les paramètres du capteur d'image de la caméra. Cela permet de corriger la distorsion de l'objectif, qu'elle soit radiale ou tangentielle [Zhang, 2000] en appliquant la matrice caméra \mathcal{L}_{cam} , déterminée grâce à l'algorithme, et contenant les coefficients de distorsion aux images brutes. Matlab indique aussi la matrice erreur sur ces coefficients et estime l'incertitude corrigée de distance sur chaque pixel comme indiqué sur la figure II.10-a). Cet étalonnage est à refaire à chaque fois que la caméra change, ou qu'un autre objectif associé à la caméra est utilisé.

Le deuxième étalonnage de l'image est dû à l'expérience : les images acquises par la caméra sont en 2D et ne contiennent pas d'information sur la distance réelle entre les pixels. On utilise donc une mire de calibration, placée entre les deux plaques de verre. Le principe est le suivant : chaque pixel d'une image est repéré par sa position «image» (X_c, Z_c) dans l'image. Il faut associer chaque pixel à leur position réelle «monde» (x, z) . Pour cela, il faut trouver la matrice transformation grâce à la grille de calibration. En connaissant la vraie position (x_m, z_m) des points de la mire dont on a préalablement vérifié la verticalité (en utilisant un fil pendant ou avec un niveau), on peut trouver la matrice de passage entre les deux repères grâce à l'algorithme *fitgeotrans* issu de Matlab. Le nombre de points de la mire étant significativement plus faible que le nombre de pixels (dans notre cas, environ 200 points sont utilisés pour calibrer au maximum quatre millions de pixels), il faut indiquer à l'algorithme quel est le type de transformation qu'il faut appliquer pour passer d'un repère à l'autre. Dans notre cas, la cellule étant sur une simple table non nivelée et la caméra n'étant pas parfaitement horizontale, nous avons effectué une transformation projective à l'image : on suppose que chaque pixel du repère «image» ne diffère de leur position «monde» que par une rotation et une mise à l'échelle donnée par l'alignement et l'écart entre chaque point de la mire. L'étalonnage avec *fitgeotrans* donne la matrice de passage $\mathcal{L}_{\text{monde}}$ qui aligne la mire et les pixels. En connaissant l'écart en mm entre deux points de la mire, on a accès au rapport pixel \iff mm. On peut appliquer cette matrice à toutes les images, et ainsi déterminer les distances réelles mises en jeu. Cet étalonnage doit être changé dès lors que la cellule est déplacée.

On obtient alors l'image finale \mathcal{M}' en appliquant les deux matrices de correction :

$$\mathcal{M}' = \mathcal{L}_{\text{monde}} \mathcal{L}_{\text{cam}} \mathcal{M} \tag{II.4}$$

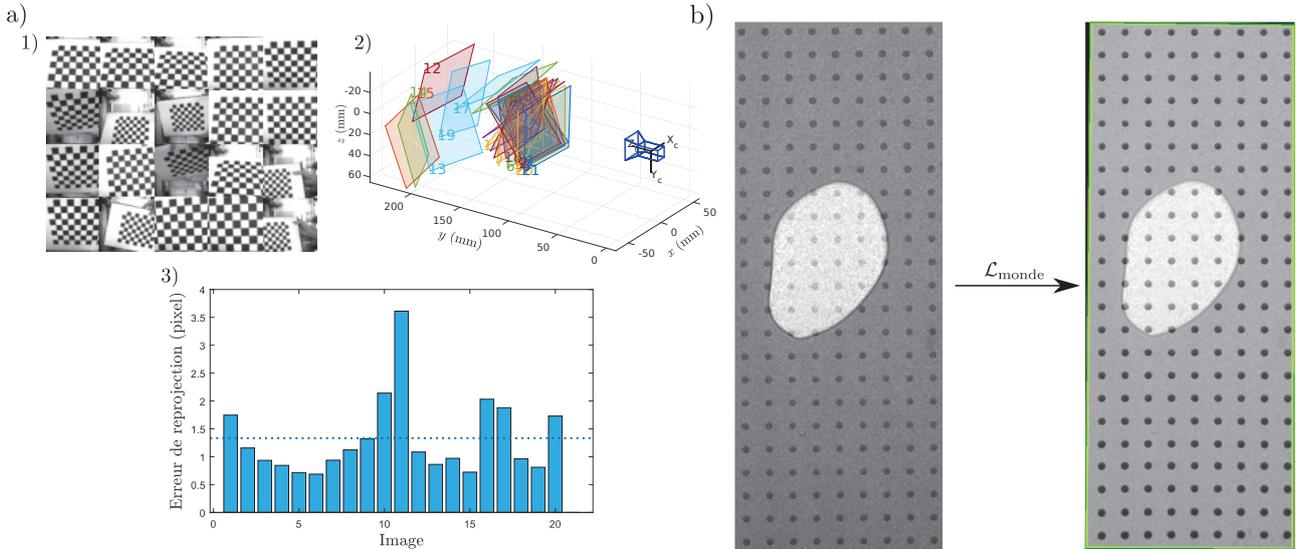


FIGURE II.10 - **Méthode d'étalonnage des images.** a) - 1) Exemple de photographies de grilles utilisées, 2) agencement spatial des grilles calculé par l'algorithme *CameraCalibration* et 3) erreur de reprojection corrigée pour chaque image. b) Image d'une bulle associée à la mire avant puis après correction par l'algorithme *fitgeotrans*. Le contour vert représente les bords corrigés de l'image, issus d'une mise à l'échelle et d'une rotation des bords de l'image initiale. L'écart entre chaque point est de 5 mm.

Une image typique \mathcal{M}' est indiquée sur la figure II.10-b). La première correction due à \mathcal{L}_{cam} n'est pas affichée car chaque pixel est en moyenne décalé de 1.5 pixel par rapport à sa position initiale, ce qui correspond à une correction de 200 μm en moyenne sur les distances, ce qui est imperceptible. Cette correction \mathcal{L}_{cam} n'est pas obligatoire car souvent négligeable sur d'autres incertitudes de mesures que nous verrons par la suite.

En ce qui concerne la deuxième correction, on constate que l'image traitée est inclinée d'environ 2-3 degrés par rapport à l'image originale comme présenté sur la figure II.10-b) et que l'étalonnage a permis de remettre droit l'image. Lors d'une remontée de bulle, cela correspond à une erreur corrigée de 1 à 15 pixels, correspondant à un décalage maximal de 1.5 mm. Notons finalement que les images devant rester des matrices rectangulaires, les pixels non alloués par l'algorithme deviennent noirs.

Maintenant que les images sont étalonnées, nous pouvons extraire les bulles qui y sont contenues par segmentation.

Segmentation d'images

Afin d'extraire les propriétés associées à la bulle d'air remontant, il faut pouvoir l'isoler correctement de l'image. La différence d'intensité entre suspension et bulle d'air permet d'utiliser la segmentation d'image pour extraire les informations de la bulle.

Le programme Matlab effectue tout d'abord un histogramme sur le seuillage. Le principe de cet histogramme est le suivant : la caméra 8 bits associe chaque pixel à une valeur de gris. Matlab convertit l'image en niveaux de gris à une image binaire grâce à la fonction *imbinarize*, qui prend comme variable d'entrée un seuil, nommé \mathcal{S} compris entre 0 et 255. Ainsi chaque pixel de luminosité supérieure (resp. inférieure) à ce rapport est transformé en blanc (resp. noir). On définit l'intensité \mathcal{I} de l'image résultante comme étant le nombre de pixels blancs. On normalise \mathcal{I} et \mathcal{S} par

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{\# \text{ pixels blancs}}{\# \text{ pixels total}}, \quad \hat{\mathcal{S}} = \frac{\mathcal{S}}{255}. \quad (\text{II.5})$$

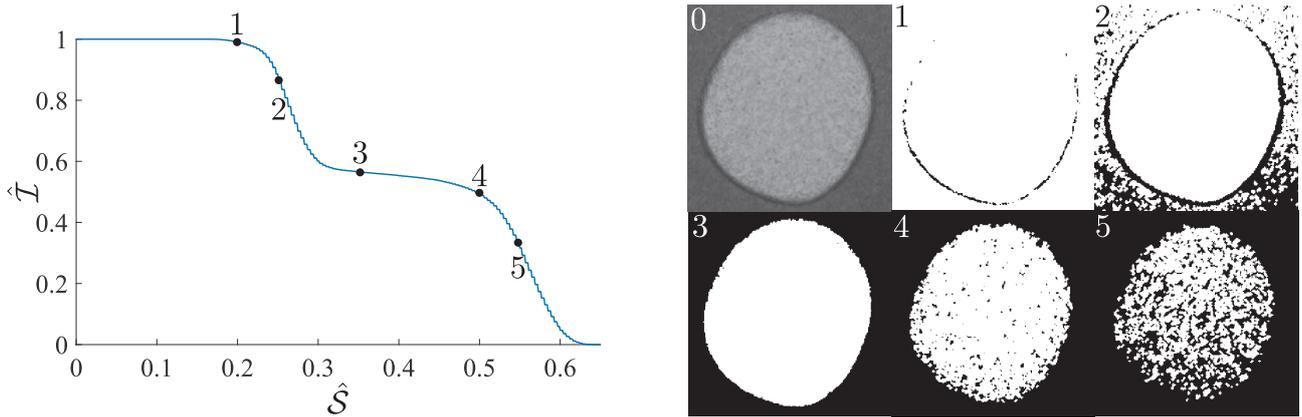


FIGURE II.11 - **Principe de la segmentation sur une bulle d'air de 18.4 mm dans une suspension $\phi_0 = 0.3$.** À gauche : évolution de l'intensité normalisée \hat{I} de l'image 0 en fonction du seuil normalisé \hat{S} . Pour $\hat{S} > 0.62$, l'image segmentée est totalement noire. À droite : image binarisée résultante de l'application de la segmentation [(1)- $\hat{S}=0.20$, (2)- $\hat{S}=0.25$, (3)- $\hat{S}=0.35$, (4)- $\hat{S}=0.50$, (5)- $\hat{S}=0.55$].

La figure II.11 montre l'évolution de l'intensité normalisée pour différents seuils. On peut alors obtenir différentes images segmentées. Le contour de la bulle est très bien dessiné pour $\hat{S} = 0.35$, et les grains n'influent pas sur le contour ni l'intérieur de la bulle.

Cette méthode n'est pas automatique : en fonction des potentielles lumières parasites, de la quantité de colorant dans la solution, de la fraction volumique, la courbe de la figure II.11 n'est pas unique. Il faut alors manuellement choisir la valeur de \hat{S} à chaque acquisition pour bien isoler la bulle.

Opérations morphologiques

Les images binaires peuvent contenir de nombreuses imperfections dues à la présence des grains ou à du bruit. Le seuil \hat{S} n'étant choisi que pour la première image de l'acquisition, il est possible que du bruit ou la texture de grains fassent apparaître des tâches noires comme celles observées sur la figure II.11-4, ou que des micro-bulles autour de la bulle créent des tâches blanches. Afin d'éviter de choisir manuellement le seuil pour chaque image, on peut utiliser des opérations morphologiques afin de corriger automatiquement les défauts.

Le traitement morphologique des images a pour but de supprimer ces imperfections en tenant compte de la forme et de la structure de l'image. Le traitement morphologique des images est un ensemble d'opérations non linéaires liées à la forme des éléments d'une image. Les techniques morphologiques permettent de sonder une image avec une petite forme ou un petit gabarit appelé élément structurant. L'élément structurant est positionné sur chaque pixel de l'image et il est comparé avec le voisinage correspondant des pixels. Certaines opérations vérifient si l'élément «s'inscrit» dans le voisinage, tandis que d'autres vérifient s'il «touche» ou coupe le voisinage. Dans notre étude, on utilisera

- une opération de dilatation par un cercle de rayon r pixels : on dépose le cercle sur chaque pixel de l'image. Si la majorité des pixels de l'image inscrits dans le cercle sont noirs (resp. blancs), le pixel sur lequel est déposé le cercle devient noir (resp. blanc) ;
- une opération d'érosion : cette fois-ci, si la majorité des pixels de l'image inscrits dans le cercle sont noirs (resp. blancs), le pixel sur lequel est déposé le cercle devient blanc (resp. noir). Si la totalité des pixels est d'une seule couleur, l'érosion ne change pas la couleur du pixel.

Pour l'exemple d'une micro-bulle, en prenant un cercle de rayon r pixels supérieur au rayon typique d'une micro-bulle, l'opération de dilatation fera disparaître les bulles et ainsi uniformisera la texture.

Ces deux opérations vont aussi servir lors de l'étude de remontée des bulles doubles. Lorsque deux bulles doubles sont collées, il y a une fine interface liquide entre les deux. Nous chercherons à étudier

la dynamique séparée de chaque bulle mais aussi de l'ensemble {bulle 1, bulle 2} comme étant une bulle unique. Il faut choisir le rayon r de telle manière à laisser intègre cette interface (dans ce cas le rayon r est inférieur à 3 pixels) ou pour la supprimer (et r est de l'ordre de 4-5 pixels). Dans le deuxième cas, on utilise alors une dilatation puis une érosion comme affiché sur la figure II.12. On obtient finalement une bulle unique, dont on pourra étudier la forme et le mouvement.

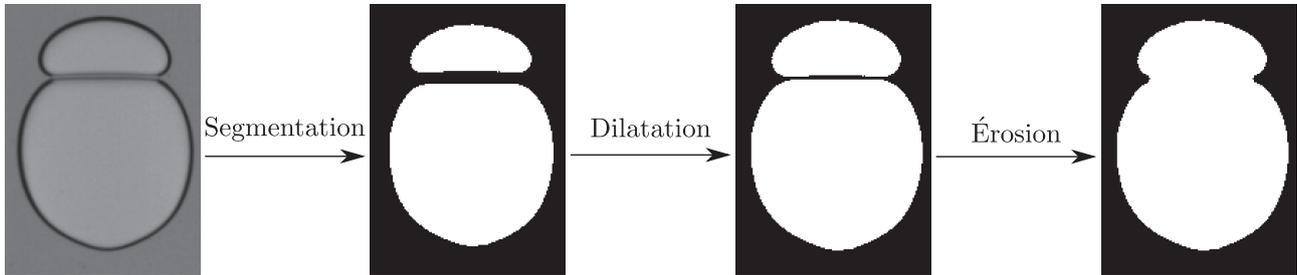


FIGURE II.12 - **Principe des opérations morphologiques sur une bulle double.** Traitements morphologiques effectués sur une bulle double.

A la fin de la segmentation, les images brutes sont devenues des images en noir et blanc où la bulle est bien définie. On peut en extraire la forme et le mouvement.

4.4.3 Détection et mouvement des bulles

Détection

Les images segmentées sont composées de régions blanches et noires. Les régions blanches isolées correspondant à des bulles, on peut extraire les propriétés associées à chaque région grâce à la fonction *regionprops* de Matlab :

- la position du centre (x_b, z_b) de la zone blanche, représentant alors le centre de la bulle ;
- l'aire \mathcal{A} de la bulle, égale au nombre de pixels blancs ;
- le diamètre équivalent de la bulle d_b , défini par $d_b = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}_b}{\pi}}$
- le grand axe et petit axe, en approximant la région par une ellipse, et l'orientation Ψ de l'ellipse par rapport à la verticale, c'est-à-dire l'angle entre le grand axe et la verticale. Il est compté positivement dans le sens trigonométrique ;
- les pixels délimitant le contour de la bulle.

Toutes ces distances sont définies soit en pixels, soit en mm grâce au facteur pixel \iff mm. Le grand axe et petit axe sont assimilables à l'axe a et b parallèle à \mathbf{v}_b et perpendiculaires à \mathbf{v}_b comme nous le montrerons par la suite.

Dans Matlab, les propriétés des bulles sur chaque image sont enregistrées, et on peut trier les bulles pour obtenir leur dynamique au cours du temps.

Dynamique de remontée

Vu que les images peuvent contenir plusieurs bulles, il faut les trier pour avoir la dynamique de chaque bulle séparément. Pour cela, on effectue le tri suivant :

- Sur la première image, Matlab détecte une bulle.
- Sur la deuxième image, on recherche sur une zone autour de la bulle détectée précédemment pour trouver la position de la même bulle dans cette image.
- On effectue ce processus jusqu'à ce que aucune bulle ne soit détectée (lorsque celle-ci disparaît de la zone d'étude, où quand on arrive à l'image finale).

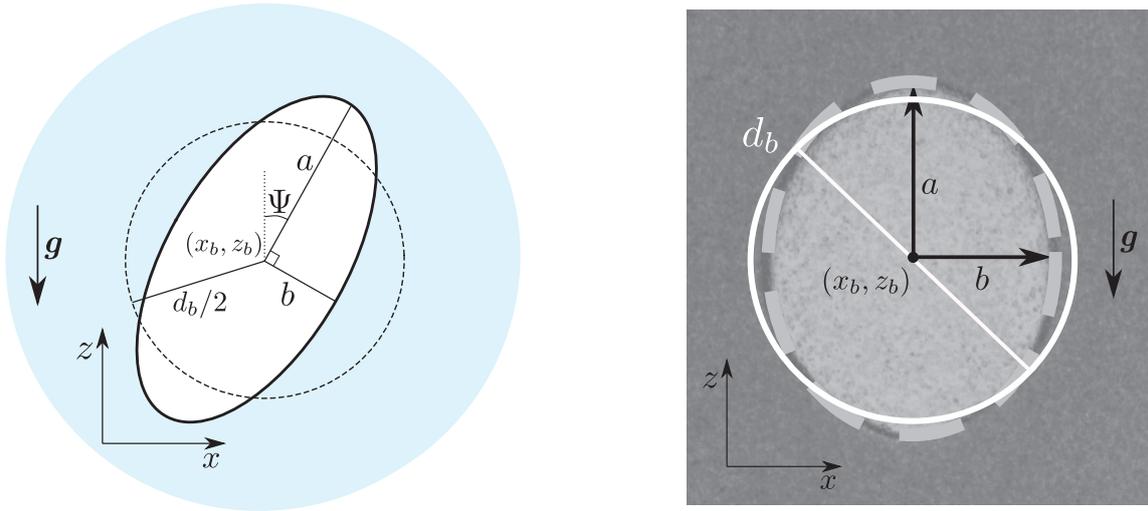


FIGURE II.13 - **Paramètres décrivant la forme et position des bulles.** a) Schéma explicatif. L'angle Ψ est négatif ici. b) Exemple sur une bulle dans une suspension (l'angle Ψ est quasi nul). L'axe a (resp. b) est alors confondu avec la verticale (resp. l'horizontale).

- On extrait alors les paramètres de la bulle, et on recommence le processus sur une autre bulle (ou une autre image si toutes les bulles de l'image ont été étudiées).

Ce processus sera important pour l'étude de la remontée des bulles multiples. La zone de recherche ne doit pas être trop large pour ne pas contenir plusieurs centres de bulles qui peuvent être collées mais pas trop petite pour pouvoir détecter la bulle sur l'image suivante. En moyenne, la taille de la boîte de recherche est de 25 pixels autour du centre de chaque bulle.

Résumé

Une cellule de Hele-Shaw consiste en deux grandes plaques de verre d'axe x,z très rapprochées l'une de l'autre d'une longueur h (axe y) très inférieure aux dimensions des plaques de verre. Dans cette géométrie, qualifiée de quasi-bidimensionnelle, nous allons étudier la remontée de bulles dans une suspension. Les liquides et particules utilisés ont été soigneusement choisis afin de vérifier les hypothèses formulées dans l'introduction ($Re < 1$, $d_p/h \ll 1$, $Pe \gg 1$, $St \ll 1$, particules monodisperses, sphériques, et isodenses avec le liquide) :

- le liquide est un mélange entre du UCON, une huile très visqueuse, et de l'eau, dont la miscibilité avec le UCON est totale, et permettant de mélanger les deux pour faire varier la viscosité du liquide. La masse volumique du mélange peut être modifiée avec l'ajout éventuel de sel ;
- des particules de polystyrène de diamètre entre 20 et 230 μm , de masse volumique $1057 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

La taille des particules est mesurée au microscope pour vérifier les hypothèses de monodispersité et sphéricité.

Un protocole strict permet d'avoir des liquides et suspensions granulaires homogènes grâce à l'utilisation de bains à ultrasons et d'un plateau tournant, pour s'affranchir des petites bulles pouvant rester bloquées et empêcher la sédimentation des grains :

- Préparer le liquide suspendant en mélangeant l'eau et le UCON à la proportion voulue. Rajouter la bonne quantité de chlorure de sodium pour atteindre l'iso-densité si nécessaire, ainsi que le colorant pour un bon contraste. Évacuer les bulles d'air au bain à ultrasons.
- Tamiser les particules et peser la quantité voulue de grains.
- Les mélanger vigoureusement dans un contenant que l'on peut fermer afin de répartir les grains de manière homogène dans le liquide.
- Placer le contenant dans un bain à ultrasons entre 10 minutes et quelques dizaines d'heures pour évacuer les bulles d'air dues au mélange.
- Disposer le contenant sur un plateau tournant lorsque toutes les bulles d'air ont été évacuées jusqu'à son utilisation.

Les propriétés rhéologiques des liquides et suspensions sont mesurées grâce à un rhéomètre en utilisant deux géométries : le plan-plan et le Couette cylindrique. Les limites de mesure rhéologiques nous obligent à ne pas dépasser une fraction volumique ϕ_0 de 35%. La masse volumique des liquides est quant à elle mesurée au densimètre, pour réaliser, si nécessaire, l'isodensité.

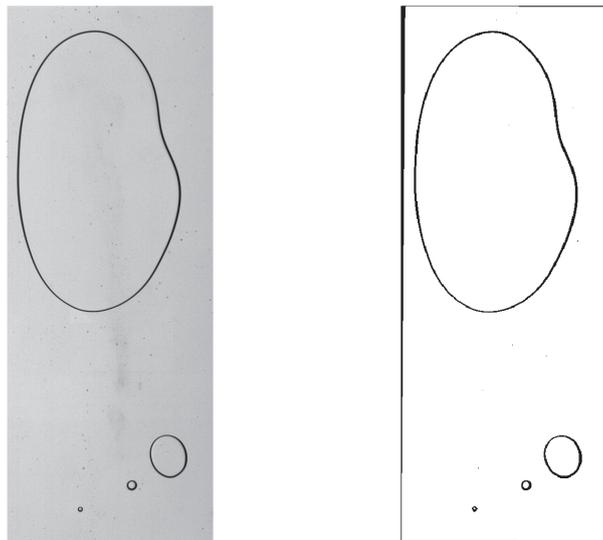
Les acquisitions de remontée de bulles sont enregistrées par une caméra, et différents programmes Matlab permettent de corriger les distorsions de l'image, d'étalonner les distances grâce à une calibration, puis d'extraire les propriétés des bulles grâce à une segmentation d'images.

Troisième partie

Remontée d'une bulle unique

5	Remontée d'une bulle d'air dans un liquide Newtonien	87
5.1	Expérience typique de remontée d'une bulle d'air	89
5.2	Forme et trajectoire des bulles : quelques généralités	92
5.2.1	Comparaison des paramètres instantanés	92
5.2.2	Influence du diamètre sur la remontée d'une bulle	94
5.2.3	Influence de la viscosité	94
5.2.4	Influence du rapport d'aspect	96
5.3	Modèle de Taylor-Maxworthy	96
6	Remontée d'une bulle d'air dans une suspension	101
6.1	Expérience typique de remontée d'une bulle d'air	102
6.2	Forme et trajectoire des bulles	104
6.2.1	Exemples	104
6.2.2	Trajectoire des bulles : quelques généralités	107
6.2.3	Forme des bulles : cas général	110
6.2.4	Inhomogénéités de la fraction volumique	112
6.3	Vitesse de remontée moyenne	116
6.3.1	Comparaison avec un environnement sans grains	117
6.3.2	Vitesse de Maxworthy modifiée et renormalisation	118
6.4	Hydrodynamique de la suspension	120
6.4.1	Champ moyenné et texture des grains	120
6.4.2	Velocimétrie par Image de Particule	121
6.5	Modélisation théorique de la remontée de bulles	125
6.5.1	Loi de Darcy	125
6.5.2	Modèle de Maxworthy appliqué aux suspensions granulaires	126
6.5.3	Fraction volumique locale entre les plaques	128
6.5.4	Hydrodynamique de la suspension : résolution	131
6.5.5	Conclusion	133
6.6	Étude de l'influence de divers paramètres sur la dynamique	135
6.6.1	Influence de l'épaisseur	135
6.6.2	Suspension polydisperse	136

Remontée d'une bulle d'air dans un liquide Newtonien



Bulles bien pensantes

Nous avons présenté, dans l'introduction générale de cette thèse, l'étude théorique et expérimentale menée par Maxworthy sur la remontée d'une bulle unique dans un liquide Newtonien visqueux, le tout dans une géométrie bidimensionnelle. L'objectif de ce chapitre est d'apporter une description plus complète de cette même expérience, qui nous servira d'outil de comparaison avec la remontée de bulles uniques dans une suspension, présentée dans le chapitre suivant.

Dans un premier temps, nous allons décrire qualitativement les expériences de remontée de bulles uniques au sein de notre dispositif expérimental. Pour cela, nous présenterons les observations sur une expérience typique, puis les formes et trajectoires générales des bulles à travers l'influence de divers paramètres comme le diamètre des bulles et la viscosité du liquide.

Dans un second temps, nous comparerons les courbes de remontée avec les résultats de Taylor et Maxworthy. Nous rappelons que dans une cellule de Hele-Shaw, le nombre de Reynolds Re est défini par

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho_f d_b v_b}{\eta_f} \left(\frac{h}{d_b} \right)^2. \quad (\text{III.1})$$

Notre but est de vérifier le modèle présenté dans le chapitre 1 : une bulle d'air **axisymétrique** de diamètre d_b et de vitesse v_b remontant **verticalement** dans un liquide confiné entre deux plaques, à bas nombre de Reynolds Re , a une vitesse de remontée qui croît avec son diamètre. De plus, il existe un seuil $d_b \gg h$, pour lequel la vitesse terminale ascensionnelle de la bulle v_0^* est donnée par [Maxworthy, 1986]

$$v_0^* = \frac{gh^2}{12\nu_f} \left(\frac{a}{b} \right), \quad (\text{III.2})$$

avec ν_f la viscosité cinématique du liquide, h le gap, a l'axe de la bulle parallèle à \mathbf{v}_b et b l'axe perpendiculaire à \mathbf{v}_b . La vérification expérimentale de cette loi permettra de valider le protocole expérimental et le processus d'analyse des bulles décrits dans le chapitre précédent.

Différents mélanges eau-UCON (sans grains) dont les propriétés sont indiquées dans la table II.3 seront utilisés dans ce chapitre. L'intérêt est d'avoir une variation de viscosité dynamique sur trois ordres de grandeur. La table III.1 présente quant à elle l'échelle des variations des différents nombres adimensionnés présentés dans l'introduction.

v_b (mm.s ⁻¹)	d_b (mm)	ν_f (mm ² .s ⁻¹)	Ga	Bo	Re	Ca
1 – 40	1 – 40	144 – 2592	10^{-2} – 50	0.2 – 80	10^{-5} – 1	10^{-2} – 10^{-1}

TABLE III.1 - **Ordres de grandeur des paramètres et nombres adimensionnés.**

5.1 Expérience typique de remontée d'une bulle d'air

Nous rappelons sur la figure III.1 les différents paramètres pertinents décrivant la cinématique d'une bulle, qui sont extraits à chaque image enregistrée par la caméra.

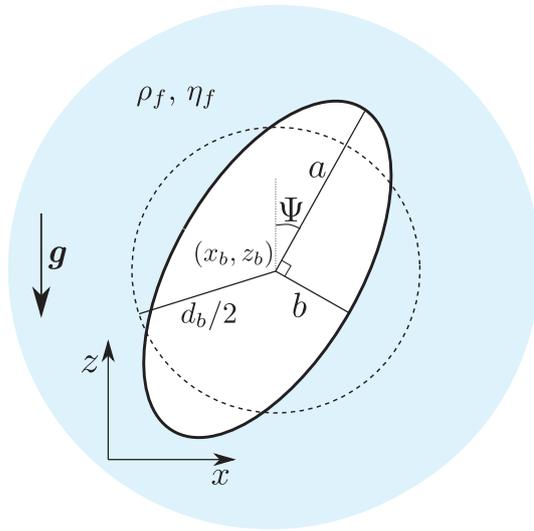


FIGURE III.1 - **Illustration des paramètres décrivant la trajectoire d'une bulle.** La bulle et le liquide interstitiel sont confinés entre les deux plaques de verre espacées de h . On note \mathcal{A}_b (resp. \mathcal{V}_b) l'aire (resp. le volume) d'une bulle. L'angle Ψ est orienté selon le sens trigonométrique (il est négatif sur l'exemple).

La figure III.2 présente l'évolution typique d'une bulle qui remonte dans le liquide A_{150} (voir table II.3). Le temps d'acquisition est de 3 secondes pour un nombre d'images par seconde de 70.

Forme de la bulle

Intéressons-nous d'abord à la forme de la bulle avant de regarder sa dynamique : elle est quasiment circulaire et sa forme évolue peu au cours du temps. Pour obtenir les valeurs moyennes de forme de la bulle, nous définissons l'opérateur $\langle \cdot \rangle_S$, effectuant une moyenne temporelle d'un paramètre X dont les mesures X_k sont effectuées sur chaque image k :

$$\langle X \rangle_S \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k, \quad (\text{III.3})$$

avec N le nombre d'images enregistrées pendant l'acquisition. L'incertitude sur $\langle X \rangle_S$ est alors donnée par l'écart-type de X mais aussi par l'incertitude sur chaque X_k . Le diamètre moyen de la bulle est $d_b = 17.1$ mm, mais varie au cours de la remontée comme observé sur la figure III.2-a). On obtient finalement que $\langle d_b \rangle_S = 17.1 \pm 0.4$ mm : soit une variation de 2.3%.

On peut tout d'abord comparer cette variation aux incertitudes liées au programme Matlab : le contour détecté par Matlab diffère en moyenne de 1 pixel du contour de la bulle de l'image initiale, et ce quelque soit la taille du diamètre. Cela correspond à une erreur du diamètre de l'ordre de 2 pixels. En connaissant le rapport pixel \iff mm, qui est de l'ordre de $0.1 \text{ mm} \cdot \text{pixel}^{-1}$ dans toutes nos expériences, on a donc une incertitude liée au programme de 0.2 mm

Deux effets supplémentaires interviennent sur les variations du diamètre d_b . La pression hydrostatique P_h diminue au cours de la remontée de la bulle de l'ordre de $\Delta P_h \sim -\rho_f g \Delta z_b$, ce qui provoque, par la loi de Laplace, une variation de la pression dans la bulle[†] $\Delta P_b \sim \Delta P_h$. Dans la bulle, le produit $P_b \mathcal{V}_b$ étant constant, on a

[†]. La variation du terme γ/r_{local} est négligeable dans cette variation de pression, ce qui fait que la variation de pression hydrostatique se répercute directement en variation de pression dans la bulle P_b

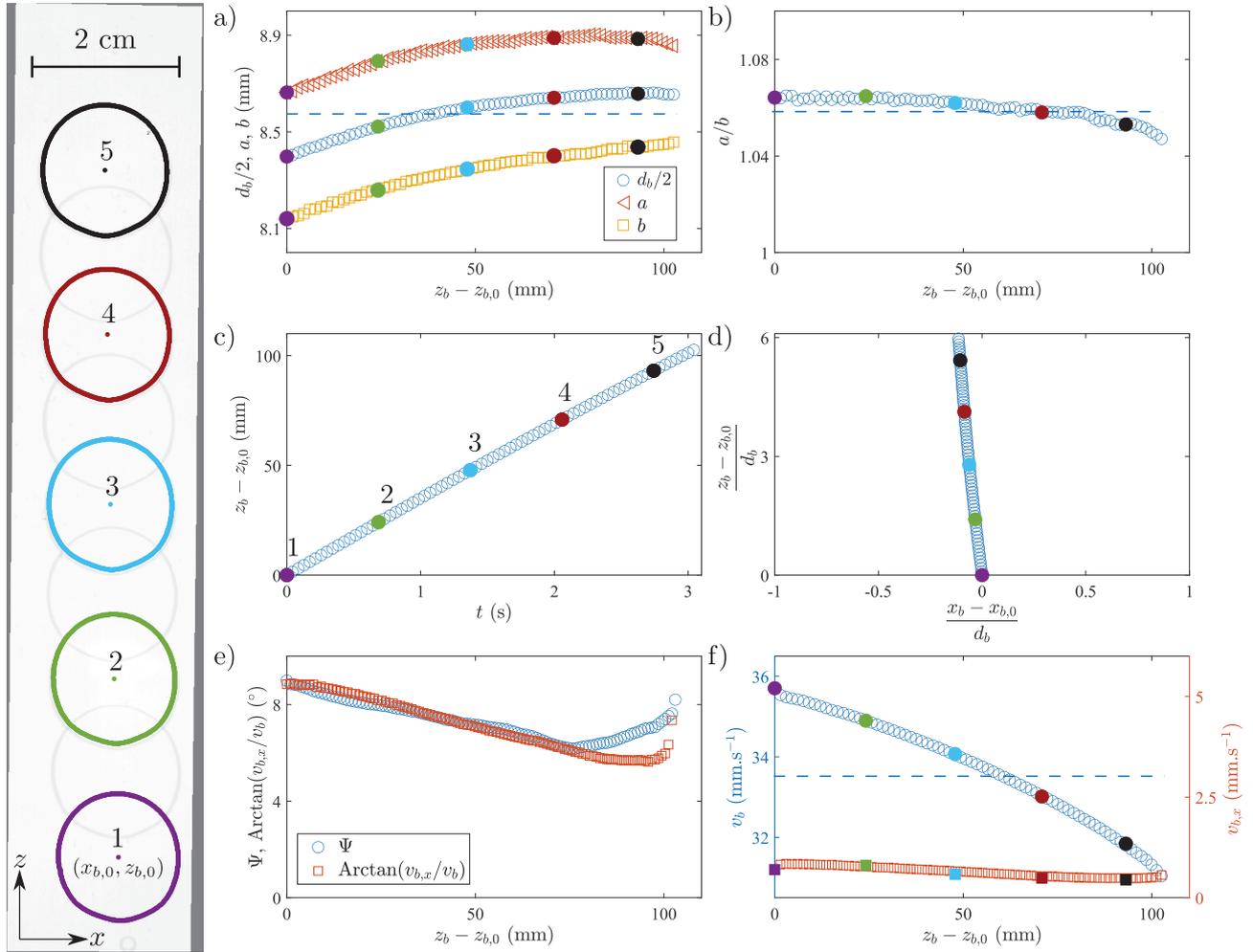


FIGURE III.2 - **Photographies et graphes associés à la remontée d'une bulle d'air dans un liquide Newtonien.** [$h = 2.7$ mm. Liquide A_{150} : $\eta_f = 150$ mPa.s, $\rho_f = 1051 \pm 1$ kg.m $^{-3}$, $\nu_f = 1.44 \times 10^{-4}$ m 2 .s $^{-1}$] A gauche : photographies de la bulle dans la cellule. Les bulles colorées font partie de photographies prises toutes les 0.7 secondes et associées aux points de même couleur sur les graphes. Les bulles en gris clair correspondent aux temps intermédiaires. Le temps est pris nul au début de l'acquisition et l'on note $(x_{b,0}, z_{b,0})$ (resp. $d_{b,0}$) la position initiale (resp. le diamètre initial) de la bulle. À droite : grandeurs pertinentes de la bulle, telles que a) diamètre d_b , grand axe a et petit axe b en fonction de $z_b - z_{b,0}$, b) rapport d'aspect a/b de la bulle en fonction de $z_b - z_{b,0}$, c) variation verticale du centre de la bulle $z_b - z_{b,0}$ en fonction du temps t pris nul au début de l'acquisition, d) décalage vertical $z_b - z_{b,0}$ en fonction du décalage horizontal $x_b - x_{b,0}$ tous deux normalisés par le diamètre de la bulle à l'instant initial $d_{b,0}$, e) orientation de la bulle Ψ et angle formé entre la verticale et le vecteur vitesse v_b en fonction de $z_b - z_{b,0}$ et f) vitesse verticale v_b et horizontale $v_{b,x}$ en fonction de $z_b - z_{b,0}$. Chaque point des graphes correspond aux données issues d'une image. Le nombre de points (originellement de 280 correspondant au nombre d'images enregistrées) sur certains graphes a été diminué pour plus de lisibilité. Les lignes tiretées correspondent aux moyennes des valeurs a) $d_b/2$, b) a/b et c) v_b en utilisant la relation (III.3).

$$\frac{\Delta P_h}{P_h} + \frac{\Delta \mathcal{V}_b}{\mathcal{V}_b} = 0 \Rightarrow \Delta d_b = \frac{d_b \rho_f g \Delta z_b}{2P_h}, \quad (\text{III.4})$$

en considérant l'épaisseur constante. L'évolution théorique du diamètre est donc de l'ordre de 3 % pour une variation $\Delta z_b = 10 \text{ cm}$ [†]. Notons finalement que la variation de l'épaisseur induit aussi une variation du diamètre, cette fois-ci $\Delta d_b/d_b = -1/2\delta h/h$, soit environ 1 à 2 % de variation du diamètre. La variation de diamètre est donc vraisemblablement due à une combinaison de la variation d'épaisseur et de pression hydrostatique au sein de la cellule.

Toujours sur la figure III.2-a), on remarque que l'axe a , mesuré par Matlab, est légèrement plus grand que l'axe b . De plus, l'augmentation du diamètre s'accompagne d'un accroissement du grand axe a et petit axe b du même ordre de grandeur. Lorsque le rayon de la bulle augmente, l'augmentation du rayon est identique en tout point du contour, donc a et b évoluent identiquement à d_b . Ces observations sont confirmées par la figure III.2-b) : le rapport d'aspect est légèrement supérieur à l'unité, mais ne varie pas : la valeur moyenne du rapport d'aspect vaut ici $\langle a/b \rangle_S = 1.06 \pm 0.01$. Cela se remarque sur les photographies : le contour de la bulle reste identique au cours de la remontée.

Ces observations sont constamment présentes sur toutes les bulles étudiées et du même ordre de grandeur.

Trajectoire et vitesse de remontée

En s'intéressant à la trajectoire de la bulle, la variation verticale $z_b - z_{b,0}$ en fonction du temps est présentée figure III.2-c). La position $z_{b,0}$ correspond à une hauteur initiale de bulle de 5 cm par rapport au capillaire (on rappelle que la cellule fait 30 cm de hauteur). L'évolution de la bulle est donc étudiée à partir du bas de la cellule jusqu'à 15 cm avant la surface libre. Ce sera généralement le cas pour les bulles étudiées (on se place après l'injection et loin de la surface libre pour négliger leurs interactions avec la bulle). On constate que la trajectoire verticale est rectiligne et uniforme sans zig-zag : la bulle parcourt une distance verticale équivalente à six fois son diamètre initial sur la figure III.2-d). La variation horizontale $x_b - x_{b,0}$ est de l'ordre de 2.5 mm en fin de remontée, ce qui correspond à un déplacement de 5% de la taille de la bulle, donc négligeable par rapport à la trajectoire verticale. Notons finalement que ce léger décalage se répercute sur l'orientation de la bulle, présentée sur le graphe III.2-e), d'environ 7° vers la gauche.

La trajectoire étant quasiment verticale, nous utiliserons principalement la vitesse verticale pour décrire la dynamique des bulles, définie par

$$v_b = \frac{dz_b}{dt}. \quad (\text{III.5})$$

Ici, v_b est une vitesse instantanée, définie à chaque pas de temps de l'acquisition (toutes les 1/70 seconde ici). La dynamique de la bulle est présentée sur la figure III.2-f). La vitesse horizontale^{††} n'est affichée qu'à titre de comparaison, et bien négligeable devant v_b . On peut donc calculer l'angle entre la verticale et le vecteur vitesse $\mathbf{v}_b = v_{b,x}\mathbf{e}_x + v_b\mathbf{e}_z$, pour le comparer à l'angle d'orientation de la bulle par rapport à la verticale Ψ sur le graphe III.2-e). On remarque que l'angle Ψ suit fidèlement l'angle entre \mathbf{v}_b et la verticale. Par conséquent, la définition donnée pour les axes a et b est cohérente dans le cadre de la remontée de bulles uniques : le grand axe de l'ellipse est parallèle à \mathbf{v}_b et le petit axe perpendiculaire à ce même vecteur.

Lorsque l'on regarde les variations de vitesse, on constate une tendance commune : la vitesse de la bulle diminue de l'ordre de 5 à 10% au cours de la remontée. Une hypothèse pour expliquer ce comportement

[†]. On rappelle que la cellule fait 30 cm de hauteur.

^{††}. définie par $v_{b,x} = \frac{dx_b}{dt}$.

5.2. Forme et trajectoire des bulles : quelques généralités

vient de la variation de l'épaisseur de la cellule. En supposant que v_b est proportionnel à h^2 , au moins vrai pour les grands diamètres avec l'équation (III.2), la variation de vitesse est reliée à celle de h par

$$\frac{\Delta v_b}{v_b} = -2 \frac{\Delta h}{h}. \quad (\text{III.6})$$

Une variation de 5% de v_b implique alors que la variation de h est de 2.5% soit une augmentation de l'ordre de 0.05 mm pour $h = 2.3$ mm, ce qui est effectivement l'ordre de grandeur des variations mesurées au profilomètre. Cette hypothèse est renforcée par le fait que l'acquisition de la bulle démarre à partir du bas de la cellule. En effet, la vitesse diminue au début de la remontée, ce qui impliquerait d'après notre hypothèse que l'épaisseur augmente, à cause de la pression exercée par le liquide sur la paroi et qui tend à augmenter h au centre de la cellule. On considérera donc cette variation comme une incertitude de mesure. L'autre incertitude, due au traitement d'images, est négligeable car de l'ordre de 0.2% sur la vitesse (la remontée se fait généralement sur 1000 pixels associée à une incertitude de 2 pixels). Elle est donc insignifiante par rapport à la variation due à h et ne sera pas prise en compte dans la suite. On définit la vitesse moyenne de remontée $\langle v_b \rangle_S$ comme la moyenne de v_b instantanée et l'incertitude associée à l'écart-type. Ici, $\langle v_b \rangle_S = 33.7 \pm 1.7 \text{ mm.s}^{-1}$.

Valeurs moyennes

Par la suite, les paramètres associés à la forme et au mouvement des bulles étudiées seront confondus avec leurs moyennes effectuées sur toute la durée de l'acquisition lorsque celles-ci sont indiquées avec des barres d'erreur, et les incertitudes associées sont reliées aux variations expérimentales et aux erreurs de mesure du programme de détection. Nous omettrons donc d'utiliser l'opérateur $\langle \cdot \rangle_S$.

5.2 Forme et trajectoire des bulles : quelques généralités

Nous avons montré qu'une bulle typique remonte quasiment verticalement, avec des variations légères de vitesse et de diamètre (entre 2 et 5%), et qu'elle possède une forme légèrement elliptique, allongée selon la verticale. Nous avons également caractérisé l'importance de certains phénomènes comme la modification de la pression hydrostatique ou encore de l'épaisseur. Nous allons maintenant généraliser ces observations sur les différentes bulles étudiées.

Durant cette thèse, nous avons enregistré des remontées de bulle dans plusieurs liquides de viscosité dynamique variant de $144 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ à $2592 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ ainsi que pour trois épaisseurs de cellule : 2.0, 2.3 et 2.7 mm. Le diamètre des bulles étudiées varie de 1 à 50 mm.

5.2.1 Comparaison des paramètres instantanés

Variations de trajectoire et de vitesse

La figure III.3-a) généralise les observations de la figure III.2-d) en présentant les variations de trajectoire par rapport à leur position initiale de l'ensemble des bulles étudiées dans ce chapitre. On observe que le décalage horizontal pour les bulles remontant dans un liquide Newtonien est de l'ordre de 0 à 20% de la taille des bulles, sans distinction de direction (gauche/droite), et négligeable devant les variations verticales de l'ordre de 5 à 10 fois le diamètre des bulles. En moyenne, les bulles remontent donc verticalement et le choix d'utiliser uniquement la vitesse verticale v_b est donc justifié.

Les variations de vitesse sont affichées sur la figure III.3-b). Là encore, on constate une faible déviation de la vitesse par rapport à l'instant initial au cours de la remontée de la bulle. La variation de vitesse de toutes les données, par rapport à leur valeur en début d'acquisition, est en moyenne de l'ordre de -5%, principalement due aux variations d'épaisseur de la cellule.

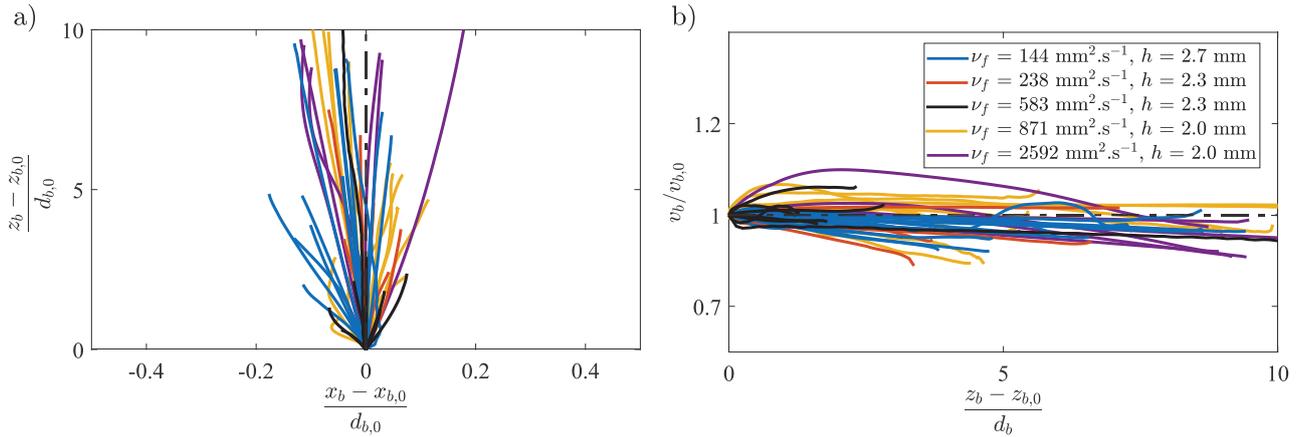


FIGURE III.3 - **Variations de trajectoire et de vitesse des bulles remontant dans un liquide Newtonien.** a) Décalage vertical $z_b - z_{b,0}$ par rapport au décalage horizontal normalisé par le diamètre à l'instant initial $\frac{x_b - x_{b,0}}{d_{b,0}}$. La ligne verticale représente un déplacement horizontal nul. b) Vitesse verticale normalisée par la vitesse à l'instant initial en fonction de $z_b - z_{b,0}$ des bulles dans différents liquides. La ligne horizontale représente une variation de vitesse nulle.

Rapport d'aspect

Sur toutes les données collectées, le rapport d'aspect des bulles varie faiblement au cours de la remontée, comme pour l'exemple de la bulle présentée figure III.2-b). La figure III.3-a) présente donc l'évolution du rapport d'aspect moyenné a/b en fonction des diamètres moyennés d_b .

On peut séparer les observations selon deux régimes :

- Pour des diamètres de bulles inférieurs à 25-30 mm, soit $d_b \lesssim 10h$, les bulles ont un rapport d'aspect qui est constant et compris entre 1.05 et 1.25. Une tendance apparaît légèrement en fonction de l'épaisseur h : pour les données $h = 2.7 \text{ mm}$, le rapport d'aspect est légèrement plus faible que pour les autres données. La viscosité ne semble pas jouer un rôle important car pour $h = 2.0 \text{ mm}$, une différence en viscosité d'un facteur 3 ne semble pas influencer de manière systématique sur le rapport d'aspect.
- Pour des diamètres supérieurs à 30 mm, on constate que le rapport d'aspect augmente. Cependant, le nombre de données n'est pas suffisant pour établir un comportement moyen mais cette augmentation semble être linéaire.

Des photographies de certaines bulles sont présentées figure III.3-b)-c)-d). On constate que ces bulles sont quasi-axisymétriques, même pour des diamètres très élevés. Sur la figure III.3-d), on observe des variations locales de courbure de la bulle. En règle générale, toutes les bulles étudiées sont axisymétriques, en accord avec les hypothèses formulées par Taylor et Maxworthy pour l'étude théorique de remontée de bulles.

En conclusion, les hypothèses de bulle axisymétrique remontant verticalement sont vérifiées. Les axes a et b , mesurés par Matlab sont assimilables aux axes a et b respectivement parallèle et perpendiculaire à \mathbf{v}_b . Afin de comparer nos expériences avec la théorie établie, nous allons étudier la relation entre vitesse de remontée et diamètre de bulle. Deux paramètres seront modifiés : le diamètre d_b et la viscosité cinématique ν_f .

5.2. Forme et trajectoire des bulles : quelques généralités

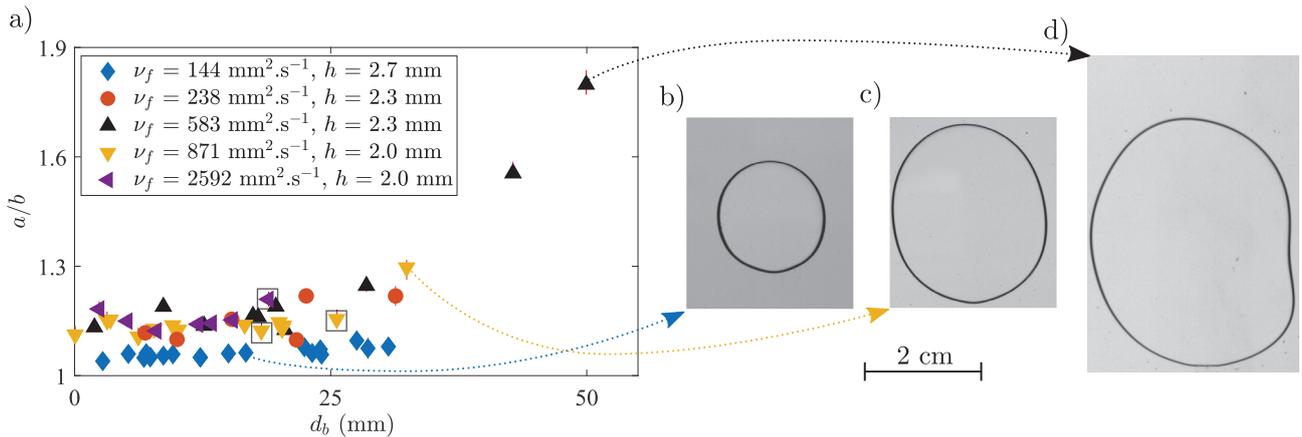


FIGURE III.4 - **Morphologie des bulles dans différents liquides.** a) Évolution du rapport d'aspect des bulles dans différents liquides. Les barres d'erreur sont plus petites que la taille des points lorsqu'elles ne sont pas visibles. Les points encadrés sont ceux étudiés dans les chronophotographies III.5. b), c) et d) photographies de différentes bulles. L'échelle de distance est valable pour les trois bulles.

5.2.2 Influence du diamètre sur la remontée d'une bulle

La figure III.5-a) présente des photographies prises à différents instants de trois bulles dans trois conditions opératoires différentes (ici le diamètre d_b change) dans une cellule de gap $h = 2.0$ mm. Le rapport d'aspect des bulles est sensiblement le même ($a/b \sim 1.1$, voir figure III.4-a)). Tous les paramètres sauf d_b et v_b sont donc fixés. On constate une augmentation de la vitesse de remontée lorsque d_b augmente.

En répétant l'expérience de remontée pour différents diamètres, on obtient alors la relation $v_b = f(d_b)$ présentée sur la figure III.5-b). On peut alors estimer le nombre de Reynolds défini par l'équation (III.1) qui est de l'ordre de 10^{-5} ici. L'hypothèse d'un régime visqueux est alors vérifiée.

5.2.3 Influence de la viscosité

La figure III.6-a) présente deux chronophotographies de deux bulles de diamètre (~ 18.5 mm) et rapport d'aspect (~ 1.2) proches, afin de n'étudier maintenant que l'influence de la viscosité cinématique sur la dynamique.

On remarque que la vitesse de remontée est bien plus faible dans le liquide plus visqueux : il y a un facteur 3 sur la viscosité cinématique entre les deux liquides, et aussi ce même facteur sur la vitesse de remontée. La figure III.6-b) regroupe les données sur différents diamètres qui confirment l'observation. La vitesse de Maxworthy v_0^* étant inversement proportionnel à ν_f , le produit $v_b \times \nu_f$ est affiché dans l'insert, et remarquablement les données se regroupent sur une seule courbe, confirmant ainsi la dépendance entre v_b et ν_f .

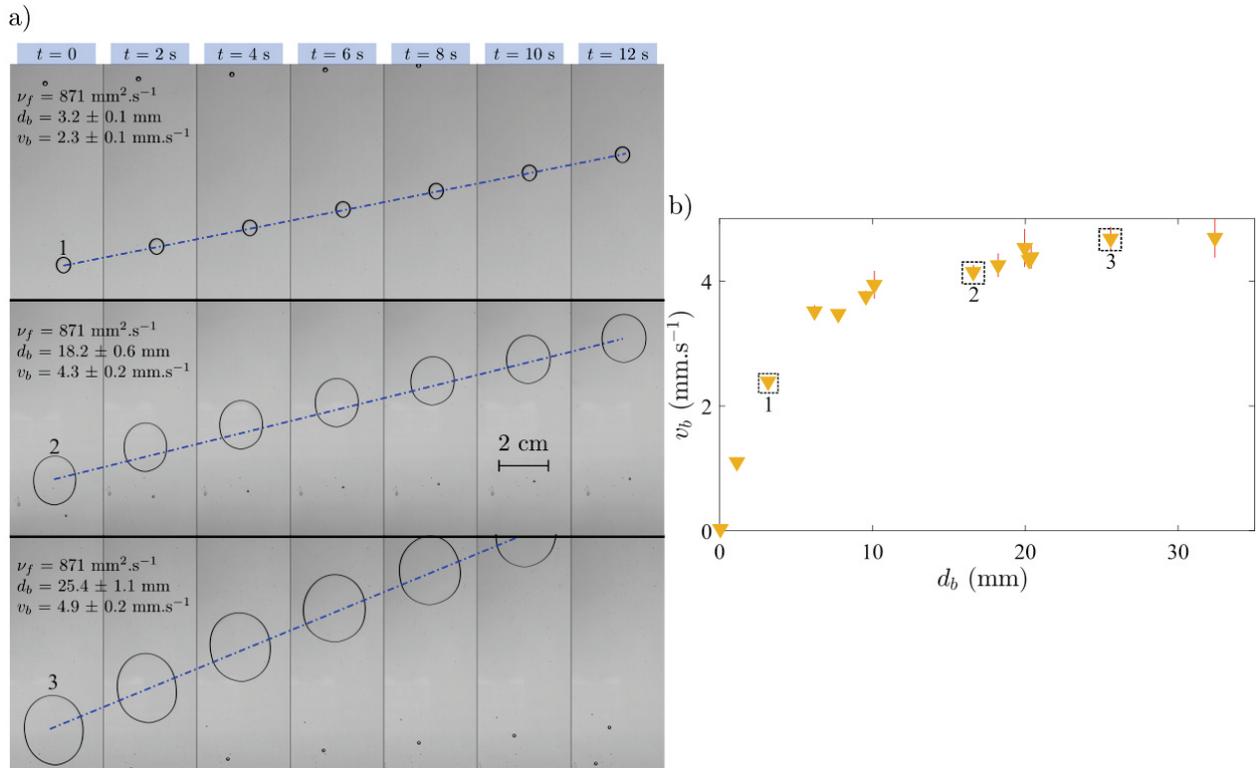


FIGURE III.5 - **Remontée de trois bulles dans un même liquide pur à différents instants de la remontée.** [$h = 2.0 \text{ mm}$, liquide A_{790}] a) Photographies de trois bulles de taille différente dans le même liquide. Les paramètres des bulles sont indiqués pour chaque exemple. Les images ont été enregistrées à une fréquence de 20 images par seconde et l'échelle est la même pour toutes les bulles. On décèle la présence de micro-bulles, mais celles-ci n'influent pas sur la dynamique étudiée. b) Évolution de la vitesse moyenne v_b en fonction du diamètre moyen d_b . Les points encadrés représentent les bulles des chronophotographies associées.

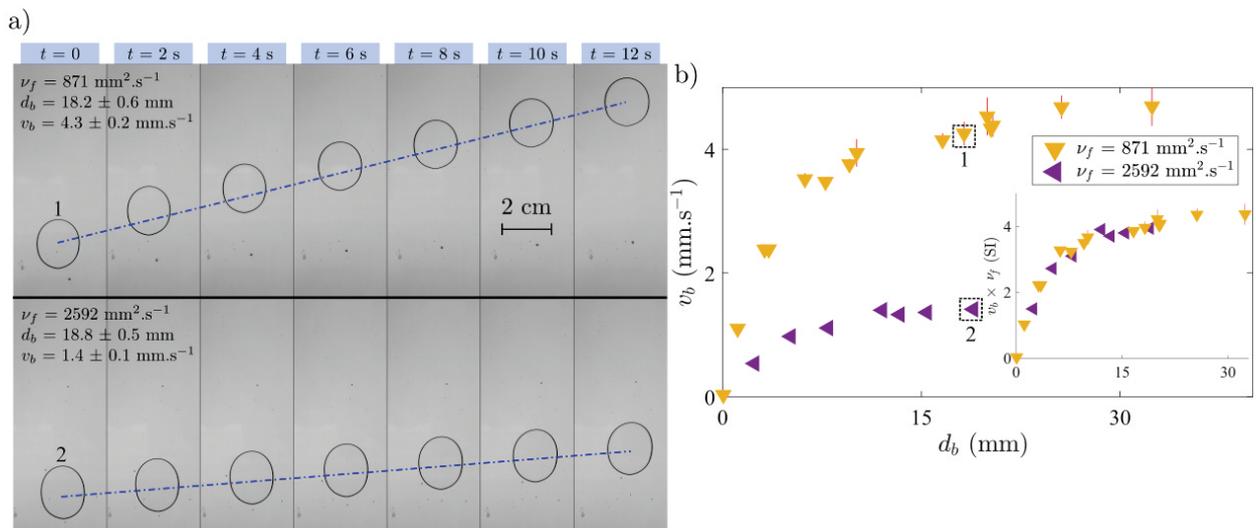


FIGURE III.6 - **Remontée de bulles dans deux liquides purs.** [$h = 2.0 \text{ mm}$, bulle du dessus : liquide A_{790} , bulle du dessous : liquide A_{2790}] a) Photographies de deux bulles de taille similaire dans deux liquides différents. Les paramètres des bulles sont indiqués pour chaque exemple. Les images ont été enregistrées à une fréquence de 20 images par seconde et l'échelle est la même pour toutes les bulles. b) Évolution de la vitesse moyenne v_b en fonction du diamètre moyen d_b . Les points encadrés représentent les bulles des chronophotographies associées. Insert : produit $v_b \times \nu_f$ en fonction de d_b .

5.2.4 Influence du rapport d'aspect

Le dernier paramètre important dans v_0^* est le rapport d'aspect a/b que nous nous proposons d'étudier. La figure III.7-a) présente l'évolution de la vitesse des bulles évoluant dans le liquide A_{620} en fonction de leur diamètre. Ces données sont choisies car on y observe une variation conséquente du rapport d'aspect.

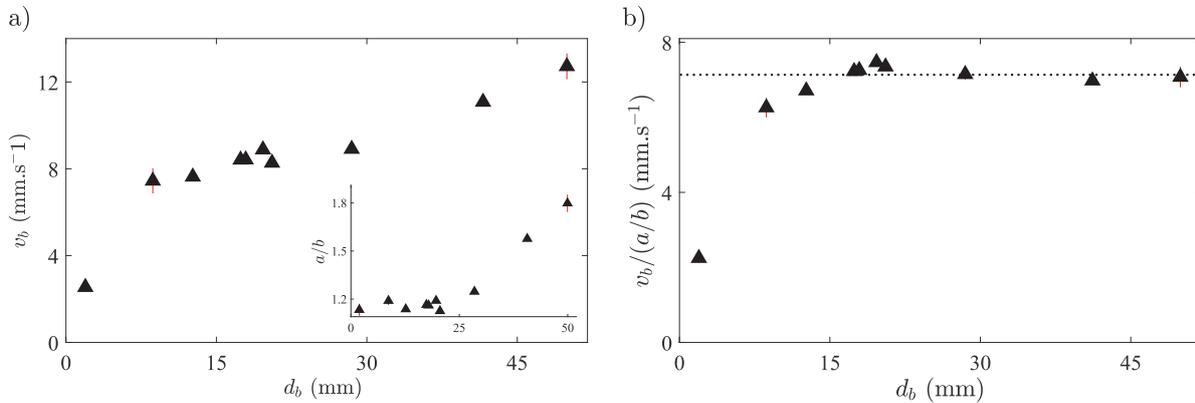


FIGURE III.7 - **Variations de trajectoire et de vitesse des bulles remontant dans un liquide Newtonien.** [$h = 2.3$ mm, $\nu_f = 583$ mm².s⁻¹] a) Vitesse verticale v_b en fonction du diamètre d_b et Insert : rapport d'aspect a/b en fonction du diamètre. b) Vitesse verticale normalisée par le rapport d'aspect en fonction du diamètre. La ligne horizontale pointillée correspond à $v_b/(a/b) = 7$ mm.s⁻¹.

On observe que la vitesse de la bulle augmente en fonction du diamètre, et ce sans créer de potentiel plateau de vitesse. Ceci est en fait en accord avec la théorie de Taylor et Maxworthy, car la vitesse v_b et le rapport d'aspect a/b sont reliés par la relation

$$v_b \times \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{gh^2}{12\nu_f} = 7.1 \pm 0.4 \text{ mm.s}^{-1} \quad (\text{III.7})$$

lorsque $d_b \gg h$. La figure III.4-b) présente alors l'évolution de $v_b/(a/b)$. On constate effectivement que lorsque $d_b \gtrsim 16 - 17$ mm, soit $d_b \gtrsim 7h$, un plateau se forme à une valeur de 7 mm.s⁻¹. Ceci correspond bien, aux incertitudes près, à la valeur de la constante dans l'équation (III.7).

Cela met en évidence qu'une bulle évoluant dans une cellule de Hele-Shaw ne possède alors *a priori* de vitesse limite : lorsque $d_b \gg h$, le rapport d'aspect augmente donc la vitesse augmente alors aussi de ce même facteur. Nous retrouvons aussi le résultat issu de la théorie.

5.3 Modèle de Taylor-Maxworthy

Nous allons alors pouvoir effectuer une normalisation de nos données pour confirmer la littérature dans la gamme de viscosités étudiée. En accord avec les observations, nous utilisons donc v_0^* comme renormalisation de v_b , et h comme renormalisation de d_b .

Afin de normaliser v_b par v_0^* , il convient de bien le définir : en effet, la valeur de v_0^* dépend de chaque bulle à cause du rapport d'aspect. De plus, le rapport d'aspect et v_b peuvent changer au cours de la remontée, donc la valeur de v_0^* et v_b varient au cours du temps et de chaque bulle. Par la suite, nous choisissons de définir v_b/v_0^* en effectuant une moyenne, pour une acquisition donnée, des valeurs instantanées du rapport $v_b/(a/b)$, multiplié par le préfacteur $12\nu_f/gh^2$. L'incertitude associée à v_b/v_0^* prend donc en compte l'incertitude associée aux variations de $v_b/(a/b)$.

La figure III.8-b) présente ainsi le résultat de la renormalisation de la figure III.8-a) avec v_0^* et h . Les incertitudes non visibles sont inférieures à la taille du point.

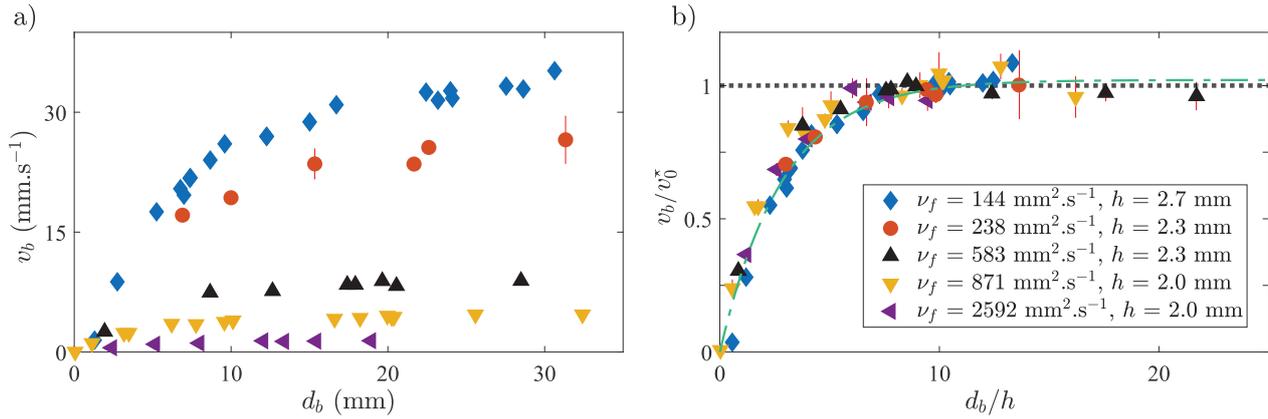


FIGURE III.8 - **Comparaison de la remontée de bulles pour différentes viscosités.** a) Vitesse verticale v_b des bulles en fonction de leur diamètre. b) Même graphe normalisé par v_0^* et h . La ligne tiretée représente la régression empirique de l'équation (III.8).

Remarquablement, les courbes se superposent toutes sur une courbe maîtresse unique, quelque soit la viscosité du mélange. Cette courbe tend vers l'unité lorsque $d_b/h > 8$ en accord avec la théorie proposée par Taylor et Maxworthy, indiquant que v_0^* est bien la vitesse maximale des bulles. Ceci nous permet aussi de valider le dispositif expérimental mis en place ainsi que les méthodes d'analyse décrites dans le chapitre précédent et d'aborder avec confiance l'étude de remontée de bulles uniques en présence de suspension dans le chapitre suivant. Notons également que cette courbe maîtresse est aussi valide à faible diamètre, ce qui n'est pas prédit dans la littérature. Cela signifie donc que :

Dynamique de remontée

La dynamique de remontée verticale et axisymétrique d'une bulle unique de diamètre d_b , de grand axe a et petit axe b , confinée dans une cellule de Hele-Shaw de gap h contenant un liquide de viscosité cinématique ν_f et tel que $\text{Re} < 1^a$ est entièrement déterminée par la courbe $v_b/v_0^* = f(d_b/h)$ et ce, pour tout diamètre. Ce régime est valable pour $\text{Ca} \ll 1$.

a. ce qui équivaut à $v_b < \sqrt{gd_b}/12$.

Autrement dit, la connaissance de la forme de la bulle, des propriétés du liquide et du gap permettent de déterminer sa vitesse de remontée.

Détermination de la courbe maîtresse

L'étude que nous avons effectuée a permis de comparer les vitesses à un modèle théorique asymptotique. Afin de pouvoir effectuer une étude plus complète de la remontée de bulles dans une suspension, il sera utile de comparer l'évolution complète de v_b/v_0^* en fonction de d_b/h . Nous proposons une régression empirique avec 2 paramètres ajustables. Nous avons simplement choisi d'utiliser une régression exponentielle des données de la forme $y = \mu_1(1 - \exp(-\mu_2 x))$ avec un intervalle de confiance de 95%. Nous obtenons donc, pour un liquide Newtonien, que

$$\frac{v_b}{v_0^*} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \times d_b/h} \right), \quad \mu_1 = 1.02 \pm 0.03, \quad \mu_2 = 0.37 \pm 0.04. \quad (\text{III.8})$$

Cette loi est présentée sur la figure III.8-b), avec le pré-facteur μ_1 étant bien égal à 1 aux incertitudes près. Le paramètre ajustable μ_2 quant à lui représente la pente à l'origine de la courbe maîtresse et indique la distance du régime transitoire de l'ordre de $3 \times \mu_2$, soit $\sim 10 \times d_b/h$.

Résumé

Dans cette partie, nous avons étudié la remontée de bulles uniques dans un liquide Newtonien, en utilisant notre dispositif expérimental, associé aux méthodes de mesure présentées dans le chapitre précédent. En observant la remontée de bulles dans différents mélanges eau/UCON, plusieurs comportements apparaissent : la remontée des bulles est quasi-verticale, et leur vitesse v_b constante au cours de la remontée. Des imperfections sur l'épaisseur de la cellule et des variations mineures de la pression hydrostatique sont à l'origine de faibles variations de diamètre d_b et vitesse de bulles, prises en compte dans les barres d'erreur des valeurs moyennées. Leur forme est très légèrement allongée ($a/b \sim 1.1 - 1.2$) selon la verticale pour $d_b \lesssim 7h$, et le rapport d'aspect semble augmenter linéairement avec d_b au delà

En faisant varier le diamètre des bulles, et la viscosité du liquide utilisé, nous avons étudié quantitativement la dynamique des bulles :

- la vitesse de remontée des bulles v_b augmente avec le diamètre d_b ;
- v_b est inversement proportionnelle à la viscosité dynamique η_f ;
- le produit entre v_b et le rapport d'aspect a/b est constant lorsque $d_b \gg h$. Notamment, vu que le rapport d'aspect augmente à fort diamètre, la vitesse v_b augmente également sans limite observée expérimentalement.

Ces observations corroborent la littérature et le modèle de Taylor-Maxworthy. En normalisant les vitesses de remontée par

$$v_0^* = \frac{\rho_f g h^2}{12 \eta_f} \left(\frac{a}{b} \right).$$

Nous constatons que les jeux de données de 5 viscosités différentes sur une gamme de Reynolds de 10^{-5} à 1 ainsi que 3 épaisseurs différentes (2, 2.3 et 2.7 mm) se regroupent sur une unique courbe maîtresse $v_b/v_0^* = f(d_b/h)$ telle que

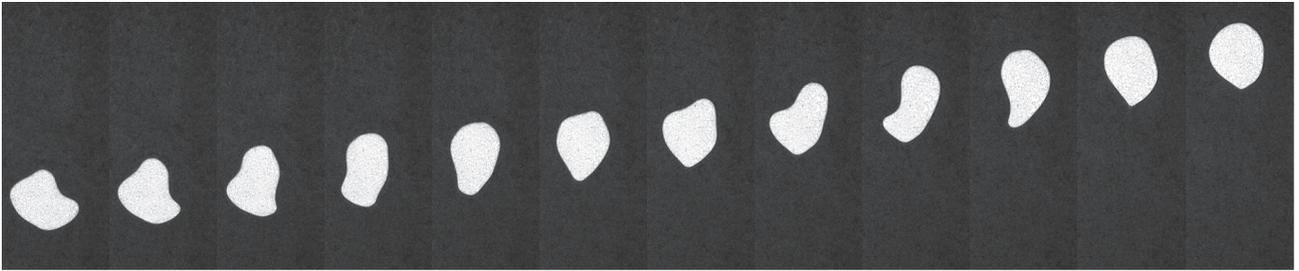
$$\frac{v_b}{v_0^*} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \times d_b/h} \right), \quad \mu_1 = 1.02 \pm 0.03, \quad \mu_2 = 0.37 \pm 0.04,$$

décrivant totalement la dynamique de remontée de bulle dans un liquide Newtonien. Le facteur μ_1 est très proche de 1, et confirme que v_0^* représente la vitesse ascensionnelle terminale des bulles en cellule de Hele-Shaw ($Re \ll 1$).

Ceci permet de valider le dispositif expérimental ainsi que les méthodes de mesure mises en oeuvre au cours de cette thèse.

Chapitre 6

Remontée d'une bulle d'air dans une suspension



Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié en Aout 2020 dans *Physical Review Letters* : *Puzzling Bubble Rise Speed Increase in Dense Granular Suspensions* [Madec et al., 2020].

Ce chapitre est consacré à la description des trajectoires des bulles d'air remontant dans une suspension visqueuse en cellule de Hele-Shaw, ainsi qu'à l'analyse de la rétroaction entre la remontée de la bulle et la dynamique de la suspension. En s'appuyant sur la théorie développée par Taylor et Maxworthy et résumée dans le chapitre 1 pour un liquide Newtonien et sur les expériences décrites lors du chapitre précédent, nous tenterons de comprendre les différences fondamentales qu'apportent la présence des grains dans un liquide Newtonien à la dynamique de remontée d'une bulle d'air.

Dans ce chapitre, les suspensions sont composées d'un mélange eau/UCON dont la viscosité initiale η_f est variable, et de particules de polystyrène, caractérisé par la fraction volumique globale ϕ_0 . Nous ferons varier le diamètre équivalent des bulles d_b de 1 mm jusqu'à 50 mm, soit jusqu'à 20 fois l'épaisseur h de la cellule. Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéressons particulièrement à la forme et à la vitesse de remontée de bulles ayant un diamètre très grand devant l'épaisseur h . La fraction volumique globale de la suspension ϕ_0 sera comprise principalement entre 0 et 0.40. Nous utiliserons principalement deux diamètres de particules, $d_p = \{80, 230\} \mu\text{m}$, et également des suspensions de particules polydisperses dans la partie 6.6.2. Comme indiqué au chapitre 4, la fraction volumique influe en accroissant la viscosité effective $\eta_s(\phi_0)$ et donc la viscosité relative $\hat{\eta}_s \equiv \eta_s(\phi_0)/\eta_f$, avec η_f la viscosité du fluide interstitiel.

v_b (mm.s ⁻¹)	d_b (mm)	η_f (mPa.s)	Ga	Bo	Re
1 - 40	1 - 50	50 - 200	$10^{-2} - 10^2$	$10^{-2} - 10^2$	$10^{-5} - 1$
ϕ_0	$\eta_s(\phi_0)$ (mPa.s)	d_p (μm)	Pe	St	St _b
0 - 40	180 - \sim 1500	{80, 230}	$10^7 - 10^{10}$	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-7} - 10^{-6}$

TABLE III.2 - **Ordres de grandeur des paramètres et nombres adimensionnés.**

6.1 Expérience typique de remontée d'une bulle d'air

Nous abordons principalement dans cette partie les suspensions pour lesquelles le diamètre des particules de polystyrène d_p est égal à $230 \mu\text{m}$.

La figure III.9 présente des photographies d'une bulle dont l'acquisition commence 10 cm après la sortie du capillaire jusqu'à quelques cm en dessous de la surface comme au chapitre précédent, dans une suspension dont le liquide suspendant est le mélange A_{200} (table II.3, $\omega_{\text{eau}} \sim 0.60$) et une fraction volumique moyenne en grains $\phi_0 = 0.30$. La viscosité mesurée au rhéomètre Couette cylindrique de la suspension vaut $\eta_s = 740 \pm 12 \text{ mPa.s}$, soit 3.5 fois celle du liquide suspendant. L'expérience est réalisée pour un entrefer $h = 2.3 \text{ mm}$.

Tout d'abord, on remarque sur la figure III.9-a) que le diamètre de la bulle augmente au cours de la remontée. Cette augmentation est quantitativement du même ordre de grandeur que celle observée pour les bulles évoluant dans un liquide sans grains et présente dans toutes les données issues de suspensions. Alors, la variation due à la pression hydrostatique et/ou la variation d'épaisseur, comme expliqué au chapitre 5 est toujours présente sur les bulles dans des suspensions. Là encore, le diamètre moyen est défini par la moyenne et l'écart-type des diamètres instantanés, soit ici $d_b = 19.6 \pm 0.3 \text{ mm}$.

Sur les photographies prises à différents instants de la bulle, on constate qu'elle change de forme tout au long de l'acquisition. Elle passe d'un stade quasi circulaire à l'instant initial (1) à un peu aplatie (2) pendant la remontée avec de surcroît des points où la bulle est localement concave, à des instants où la bulle est même très allongée (4 et 5), à mettre en contraste avec les bulles dans les liquides Newtoniens qui ont une forme légèrement allongée selon la verticale mais identique au cours de la remontée. Ces observations sont confirmées par le graphe III.9-a) : il y a des fluctuations marquées au niveau du grand axe a et du petit axe b . Ces axes varient de façon symétrique car une augmentation de a implique une diminution de b (le volume de la bulle \mathcal{V}_b étant à peu près constant, aux variations hydrostatiques et d'épaisseur près). En regardant le rapport d'aspect sur le graphe III.9-b), des oscillations associées à des compressions et dilations de la bulle sont présentes. Cette observation est l'une des principales différences avec les bulles dans des liquides Newtoniens et une étude plus poussée de ce phénomène sera effectuée dans la partie 6.2.4[†].

La trajectoire de la bulle dévie légèrement de la verticale sur la photographie. Sur le graphe III.9-c), la variation verticale reste identique au cas sans grains, alors que la variation horizontale du centre de la bulle, affichée sur le graphe III.9-e), atteint 30% de sa taille, à comparer aux variations de maximum 6% dans un liquide Newtonien. Ce décalage reste néanmoins très faible devant la distance verticale parcourue par la bulle (8 diamètres parcourus verticalement pendant la remontée et une variation horizontale de $0.3 \times d_{b,0}$ au maximum). Le déplacement horizontal s'observe également par l'orientation Ψ sur le graphe III.9-f) : lorsque la bulle se déplace vers la droite (resp. la gauche), l'angle Ψ est négatif (resp. positif).

Nous avons donc superposé la vitesse selon z , toujours notée v_b , avec celle selon x , notée $v_{b,x}$ sur la figure III.9-d). Remarquablement, la vitesse de la bulle oscille, et plus précisément de manière très corrélée au rapport a/b . Nous avons déjà montré dans le chapitre 5 que la vitesse est proportionnelle à a/b en régime stationnaire. Or, cette relation entre les deux semble valable même pour les valeurs instantanées de v_b et a/b . On constate de même que l'orientation Ψ suit fidèlement les variations de $v_{b,x}$. Dans le chapitre 5, nous avons montré que l'orientation Ψ , définie par l'orientation de l'ellipse (obtenue par Matlab) qui ajuste au mieux la forme de la bulle, était exactement l'angle entre le vecteur vitesse et la verticale, définis par les variations instantanées du centre de la bulle.

[†]. Même lorsque $St_b \ll 1$, on remarque que la dynamique de la forme de la bulle est très différente que dans un liquide pur. Cela est aussi fondamentalement différent de [Hooshyar et al., 2013] pour des bulles isolées évoluant dans une suspension granulaire non confinée.

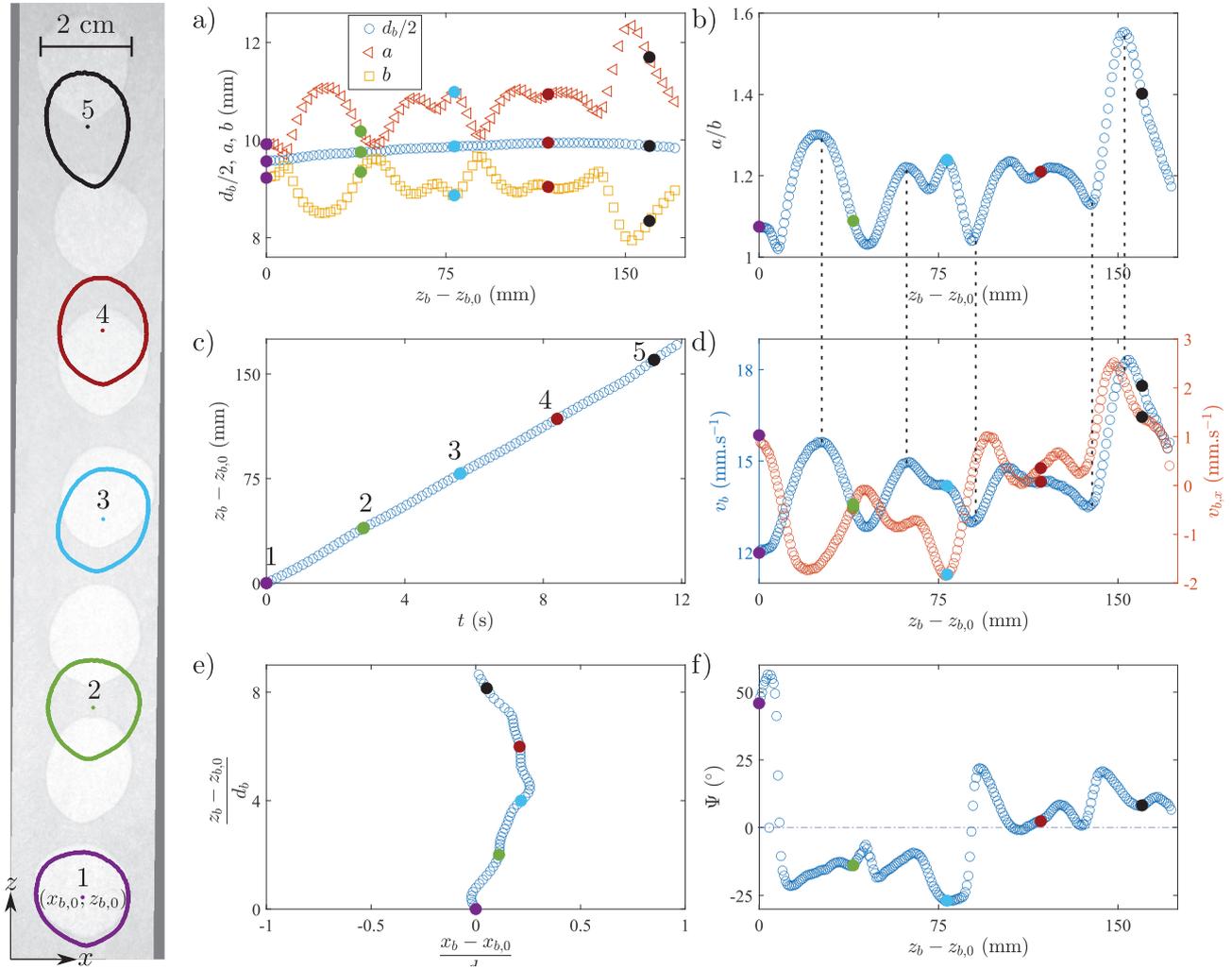


FIGURE III.9 - **Photographies et graphes associés à la remontée d'une bulle d'air dans une suspension.** [$\phi_0 = 0.30$, $\eta_s = 740 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, $h = 2.3 \text{ mm}$, $d_b = 19.6 \pm 0.3 \text{ mm}$, $v_b = 14.1 \pm 2.2 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$] A gauche : photographies de la bulle dans la cellule. Les bulles colorées font partie de photographies prises toutes les 2.8 secondes et associées aux points de même couleur sur les graphes. Les bulles en gris clair correspondent à des photographies aux temps intermédiaires. À droite : grandeurs pertinentes de la bulle tels que a) diamètre d_b , axes a et b en fonction de $z_b - z_{b,0}$, b) rapport d'aspect a/b de la bulle en fonction de $z_b - z_{b,0}$, c) variation verticale du centre de la bulle $z_b - z_{b,0}$ en fonction du temps t pris nul au début de l'acquisition, d) vitesse verticale v_b et horizontale $v_{b,x}$ en fonction de $z_b - z_{b,0}$, e) décalage vertical $z_b - z_{b,0}$ en fonction du décalage horizontal $x_b - x_{b,0}$ tous deux normalisés par le diamètre de la bulle à l'instant initial $d_{b,0}$ et f) orientation de la bulle Ψ en fonction de $z_b - z_{b,0}$. Le nombre de points affichés a été diminué en a), c) et d) pour plus de lisibilité. Les lignes pointillées verticales entre le graphe b) et e) indiquent les corrélations entre les variations de a/b et v_b .

6.2. Forme et trajectoire des bulles

Nous pouvons vérifier si c'est encore le cas pour les suspensions. La figure III.10 présente l'évolution du paramètre $\text{Arctan}(v_{b,x}/v_b)$ donnant l'angle de \mathbf{v}_b avec la verticale, comparé avec l'orientation entre le grand axe a de la bulle et la verticale Ψ obtenue par Matlab. On constate que ces deux grandeurs sont très proches et corrélées, avec de faibles différences lorsque la forme de la bulle s'éloigne trop d'une ellipse. En conclusion, l'angle Ψ est bien l'angle entre la verticale et le vecteur vitesse de la bulle, et les axes a et b mesurés par Matlab sont respectivement parallèle et perpendiculaire à \mathbf{v}_b .

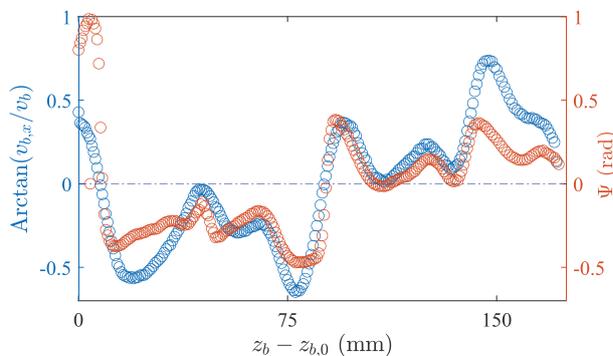


FIGURE III.10 - **Orientation et direction du vecteur vitesse.** Comparaison entre l'angle formé par \mathbf{v}_b avec la verticale et l'orientation Ψ obtenue par Matlab en fonction de la variation verticale du centre de la bulle $z_b - z_{b,0}$.

Nous allons maintenant effectuer une étude systématique de la remontée des bulles pour comprendre les mécanismes liés aux phénomènes observés, en variant le diamètre d_b des bulles et la fraction volumique ϕ_0 .

6.2 Forme et trajectoire des bulles

6.2.1 Exemples

Faibles diamètre de bulles

Toujours avec le même dispositif expérimental, nous avons filmé la remontée de bulles pour différentes suspensions. Pour regarder l'influence de la fraction volumique à faible diamètre, nous comparons sur la figure III.11 la remontée de bulles de diamètre proche (variant de 11.5 à 12.7 mm) dans des suspensions et dans un mélange eau/UCON sans grains (A_{180} , voir Table II.3). Les suspensions sont constituées de particules de diamètre 230 μm , de fraction volumique ϕ_0 variable dans le mélange suspendant eau/UCON A_{180} . La viscosité du liquide suspendant est ainsi la même pour toutes les bulles ($\eta_f = 180 \text{ mPa.s}$).

On constate que la remontée des bulles est quasi verticale pour les quatre bulles, même lorsque la fraction volumique devient élevée ($\phi_0 = 0.31$). Pour cette dernière, on constate une légère variation horizontale en milieu de remontée et des faibles variations de forme, en lien avec les observations sur l'exemple de la bulle typique de la figure III.9. On constate aussi que lorsque ϕ_0 augmente à η_f constant, la remontée des bulles est plus lente. Tout autre paramètre inchangé et à faible diamètre, l'augmentation de la quantité de grains semble donc amener plusieurs effets : un ralentissement de la remontée des bulles, une déformation légère du contour de la bulle et une augmentation du déplacement horizontal. La forme de la bulle reste quasiment circulaire pour toute fraction volumique.

Nous présentons maintenant les photographies de ces mêmes bulles sur la figure III.12. Le temps d'exposition étant le même pour ces acquisitions (300 μs), la présence de grains réduit l'intensité lumineuse. Tout d'abord, on constate que la suspension environnante reste homogène avant et après passage de la bulle, la texture des grains étant à peu près la même tout autour de la bulle et pendant l'acquisition. Ceci est visuellement le cas pour toutes les bulles remontant dans les suspensions. De plus, la suspension se déplace autour de la bulle lorsque cette dernière remonte : les grains bougent de part et d'autre de la bulle et reviennent à leur position initiale après passage de la bulle. On observe l'apparition d'une texture à l'intérieur de la bulle, qui signifie des grains sont présents dans la couche de lubrification, entre la bulle et la paroi. La taille du film de lubrification sans grains peut-être estimé

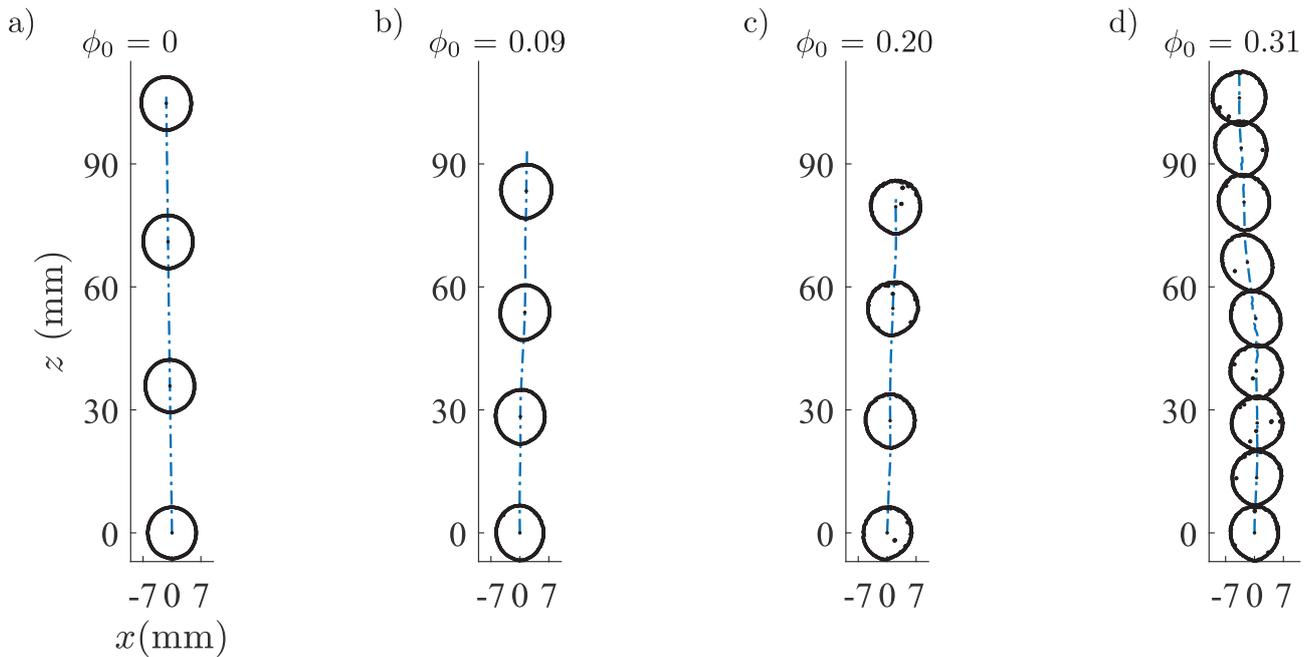


FIGURE III.11 - **Illustration de l'évolution de la forme et des trajectoires pour différentes suspensions.** [$d_p = 230 \mu\text{m}$, $h = 2.7 \text{ mm}$] Le liquide initial est le même pour les quatre remontées (mélange eau/UCON A_{180} , $\eta_f = 180 \text{ mPa}\cdot\text{s}$), et la taille des bulles est sensiblement identique ($d_b \approx 12.3 \text{ mm}$). Seule la fraction volumique change, variant de 0 à 0.31. Les contours des bulles (en noir) sont affichés toutes les 1.2 secondes pour toutes les bulles. Les lignes tiretées représentent les trajectoires du centre des bulles. Des images brutes dont sont extraites les trajectoires sont présentées sur la figure III.12.

par la formule (I.108) et vaut ici $\delta_f \sim 250 \mu\text{m}^\dagger$, et est donc plus grande que la taille des particules. La présence de ces dernières dans le film confirme les observations de [Jeong et al., 2020] présentées dans le chapitre 3. De plus, leur quantité augmente avec la fraction volumique ϕ_0 , ce qui peut être mis en relation avec l'expérience effectuée par [Palma and Lhuissier, 2019] pour laquelle la fraction volumique du film fluide entraîné par une plaque était égale à la fraction volumique de la suspension.

L'évolution du diamètre des bulles est présentée sur la figure III.13 et confirme qu'elles ont un diamètre proche compris entre 11.6 et 12.7 mm pour pouvoir analyser uniquement l'influence de la viscosité effective de la suspension. Pour comparer les dynamiques instantanées, la figure III.13-b) présente l'évolution de la vitesse des bulles. La vitesse de remontée des bulles diminue bien lorsque la fraction volumique augmente, comme observé sur la chronophotographie III.12. Vu que la viscosité effective de la suspension $\eta_s(\phi_0)$ augmente avec la fraction volumique ϕ_0 , on observe le même comportement qualitatif entre vitesse de remontée et viscosité d'un liquide : la vitesse de remontée semble décroître avec la viscosité effective de la suspension.

[†]. On rappelle que $\text{Ca} = \eta_f v_b / \gamma_f$, et les paramètres valent ici $h = 2.7 \text{ mm}$, $\gamma_f = 50 \times 10^{-3} \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$, $\eta_f = 180 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ et $v_b = 30 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le cas sans grains (voir figure III.13) ce qui donne $\text{Ca} = 0.1$.

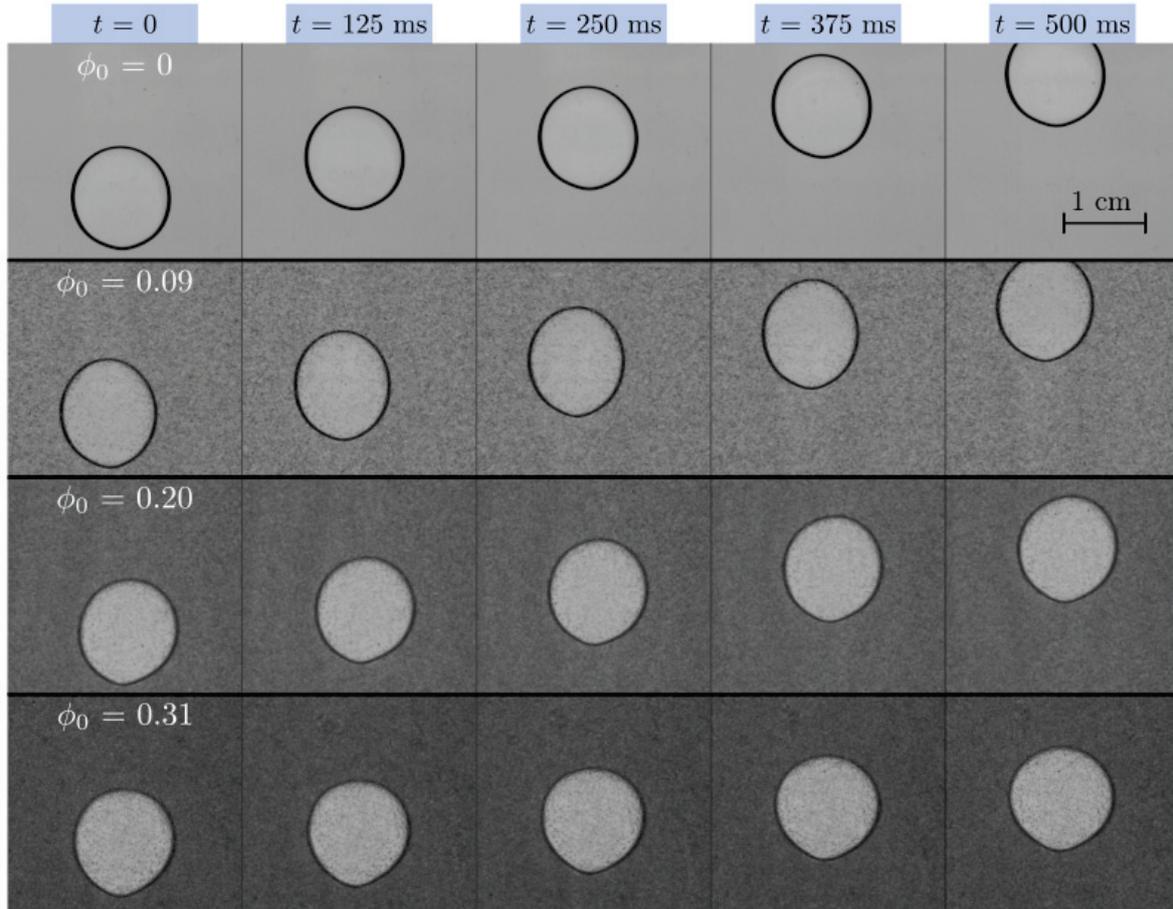


FIGURE III.12 - **Photographies de bulles de diamètre similaire remontant dans différentes suspensions visqueuses.** [$d_p = 230 \mu\text{m}$, $h = 2.3 \text{ mm}$] Le liquide initial est le même pour les quatre remontées (mélange eau/UCON $\eta_f = 200 \text{ mPa.s}$), et la taille des bulles est sensiblement la même ($d_b \approx 12.3 \text{ mm}$). La forme et trajectoire des bulles sont présentées sur la figure III.11 et l'évolution du diamètre et de la vitesse verticale des bulles sont présentées sur la figure III.13. Le temps d'acquisition des images est le même pour tous les jeux de données et égal à $300 \mu\text{s}$.

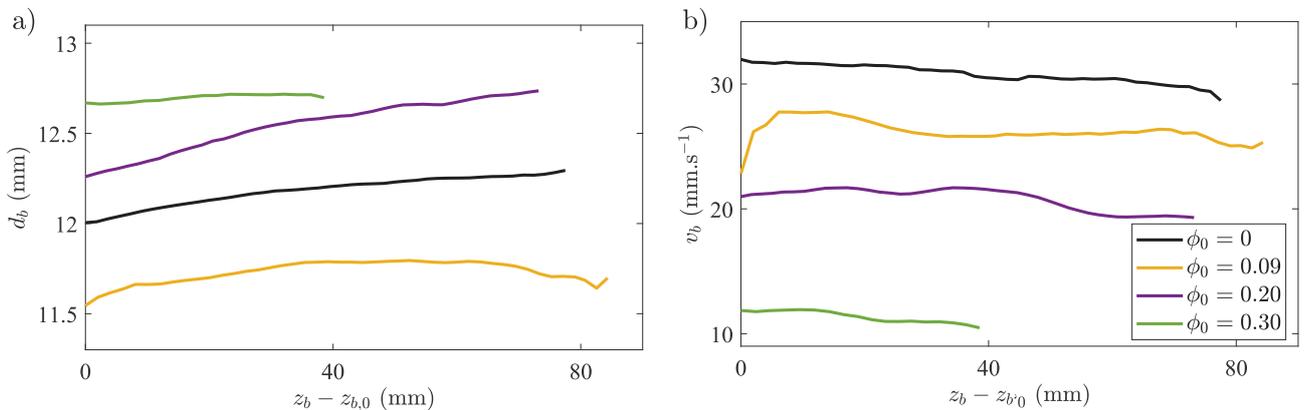


FIGURE III.13 - **Comparaison de remontée de bulles dans différentes suspensions.** [$d_p = 230 \mu\text{m}$, $h = 2.7 \text{ mm}$] Les bulles correspondent à celles présentées figure III.11 et à la chronophotographie figure III.12. a) Évolution du diamètre d_b en fonction de $z_b - z_{b,0}$ et b) vitesse verticale v_b en fonction de $z_b - z_{b,0}$. Le rapport d'aspect des bulles est sensiblement le même et de l'ordre de 1.10. Les paramètres n'évoluent pas jusqu'à la même valeur en z car la distance d'acquisition diffère pour chaque jeu de données.

Grands diamètres de bulle

Nous nous intéressons pour l'instant uniquement à la forme et trajectoire des grosses bulles. Les graphes de la figure III.14 présentent la remontée de bulles de taille plus élevée et dans des fractions volumiques variables. Premièrement, lorsque la taille de bulle augmente pour une même suspension telle que $\phi_0 = 0.25$, figure III.14-a)-b), on remarque que la remontée reste globalement verticale, mais que les variations horizontales sont plus importantes.

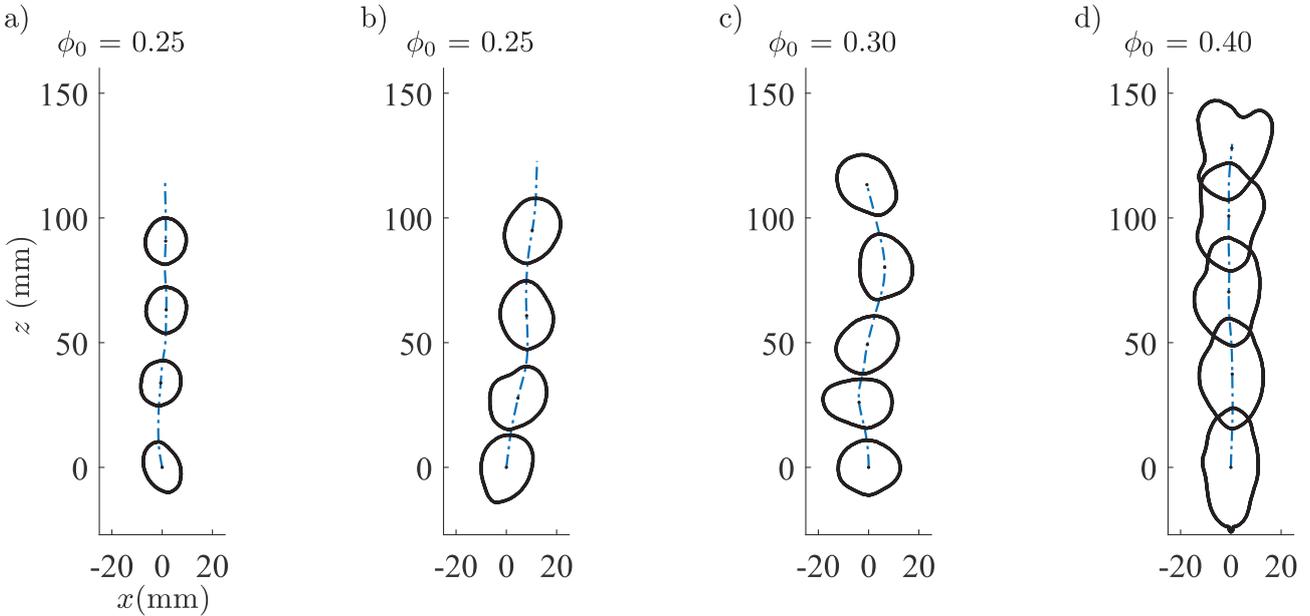


FIGURE III.14 - **Illustration de l'évolution de la forme et des trajectoires pour différentes suspensions.** [$d_p = 230 \mu\text{m}$, $h = 2.3 \text{ mm}$. a) $d_b = 20 \text{ mm}$, $\eta_s = 598 \text{ mPa.s}$. b) $d_b = 24.5 \text{ mm}$, $\eta_s = 598 \text{ mPa.s}$. c) $d_b = 25.0 \text{ mm}$, $\eta_s = 450 \text{ mPa.s}$. d) $d_b = 32.6 \text{ mm}$, $\eta_s = 940 \text{ mPa.s}$] Les liquides interstitiels ne sont pas identiques pour chaque jeu de données. Les contours des bulles sont affichés à différents instants de la remontée (non égaux en fonction des bulles). Les lignes tiretées représentent les trajectoires du centre des bulles.

On constate de surcroît que la forme de la bulle s'allonge mais s'éloigne d'une forme elliptique avec un contour qui devient localement concave. Si l'on augmente la fraction volumique à diamètre constant, figure III.14-c), les oscillations horizontales s'accroissent et la bulle semble changer de forme de manière beaucoup plus erratique. A très fort ϕ_0 et d_b (figure III.14-d)), la bulle remonte étonnamment sans variation horizontale de son centre mais avec une très grande déformation du périmètre de la bulle, montrant que les déplacements horizontaux ne semblent pas universels en fonction de la fraction volumique.

Les précédentes observations montrent donc des comportements différents sur la forme et la trajectoire des bulles en fonction du diamètre des bulles d_b et de la fraction volumique ϕ_0 .

6.2.2 Trajectoire des bulles : quelques généralités

Nous commençons par étudier quantitativement la trajectoire des bulles. La première colonne de la figure III.15 présente les variations des trajectoires par rapport à leur position initiale de l'ensemble des bulles étudiées dans ce chapitre, et ce pour différentes fractions volumiques ϕ_0 et les deux tailles de particules $d_p = \{80, 230\} \mu\text{m}$, ce qui représente environ 150 bulles étudiées. En particulier, le premier graphe correspond exactement à la figure III.3-a). Ces graphes sont à la même échelle sauf pour $\phi_0 = 0.3$ et $\phi_0 = 0.4$, où l'échelle horizontale est deux fois plus grande.

6.2. Forme et trajectoire des bulles

Tout d'abord, dès que l'on introduit des particules dans les suspensions, les trajectoires des bulles ne sont plus constamment rectilignes comme pour bulles dans des liquides purs. Elles restent globalement dirigées vers le haut de la cellule, avec des excursions horizontales. Lorsque ϕ_0 augmente, l'étendue des variations horizontales devient de plus en plus élevée : les déplacements sont au maximum de 15% du diamètre des bulles pour ϕ_0 à 20-30% pour $\phi_0 = 0.2$, puis jusqu'à 80% de la taille d'une bulle pour $\phi_0 = 0.4$. On remarque aussi que dans tous les jeux de données il y a des bulles remontant uniquement verticalement. Toutefois, ces variations restent globalement très faibles par rapport à la distance verticale parcourue par les bulles qui sont au minimum de l'ordre de 10 diamètres de bulle. Enfin, ces variations sont indépendantes de d_p , les excursions horizontales étant présentes aussi bien pour les particules de 230 que 80 μm , et étant du même ordre de grandeur à ϕ_0 fixé.

Les mouvements horizontaux des bulles semblent donc erratiques : les bulles restent en moyenne centrées sur une trajectoire verticale, mais peuvent passer individuellement par des trajectoires horizontales de plus en plus éloignées au cours de la remontée, ce phénomène étant accentué lorsque la fraction volumique augmente. Ces observations s'apparentent à une marche aléatoire des bulles. Pour quantifier les excursions horizontales, nous proposons d'étudier les variations typiques de vitesse horizontale et verticale (ce qui est identique à regarder les variations de trajectoire).

Sur la deuxième colonne de la figure III.15, nous présentons les fonctions de densité de probabilité (PDF) de l'écart moyen normalisé des grandeurs $v_{b,x}$ et $v_{b,z} = v_b$. La construction de ces graphes est la suivante : pour chaque bulle, on extrait un tableau de la taille du nombre d'images associées à la dynamique de la bulle, qui contient les écarts moyens $v_{b,x} - \langle v_{b,x} \rangle_S$ et $v_{b,z} - \langle v_{b,z} \rangle_S$, tous deux normalisés par la vitesse moyenne de la bulle. On réitère cette opération pour chaque bulle, et on regroupe les données en fonction de la fraction volumique. Autrement dit, on mesure la dispersion des valeurs instantanées des vitesses normalisées horizontales et verticales autour de leur moyenne pour chaque bulle.

On s'intéresse à la deuxième colonne. Notons tout d'abord que la moyenne des vitesses horizontales pour chaque fraction volumique est nulle : la trajectoire moyenne des bulles est bien verticale en moyenne $\forall \phi_0$. Les PDF sont toutes globalement symétriques par rapport à l'origine, ce qui signifie que les bulles vont autant à gauche qu'à droite par rapport à leur trajectoire moyenne. Enfin, on constate que les distributions sont de plus en plus dispersées autour de zéro lorsque la fraction volumique augmente.

Ces observations sont quantifiées par l'ajustement des données avec une loi normale d'espérance nulle et d'écart-type σ donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \quad (\text{III.9})$$

On note $\sigma_{v_{b,x}}(\phi_0)$ et $\sigma_{v_{b,z}}(\phi_0)$ les paramètres qui ajustent au mieux l'équation (III.9) pour chaque graphe de la figure III.15. Remarquablement, les PDF sont très bien décrites par l'équation (III.9). On en conclut donc que $(v_{b,x} - \langle v_{b,x} \rangle_S)$ et $(v_{b,z} - \langle v_{b,z} \rangle_S)$ sont des variables aléatoires suivant chacune une loi normale réduite, prouvant le caractère aléatoire des fluctuations autour de la trajectoire verticale et horizontale.

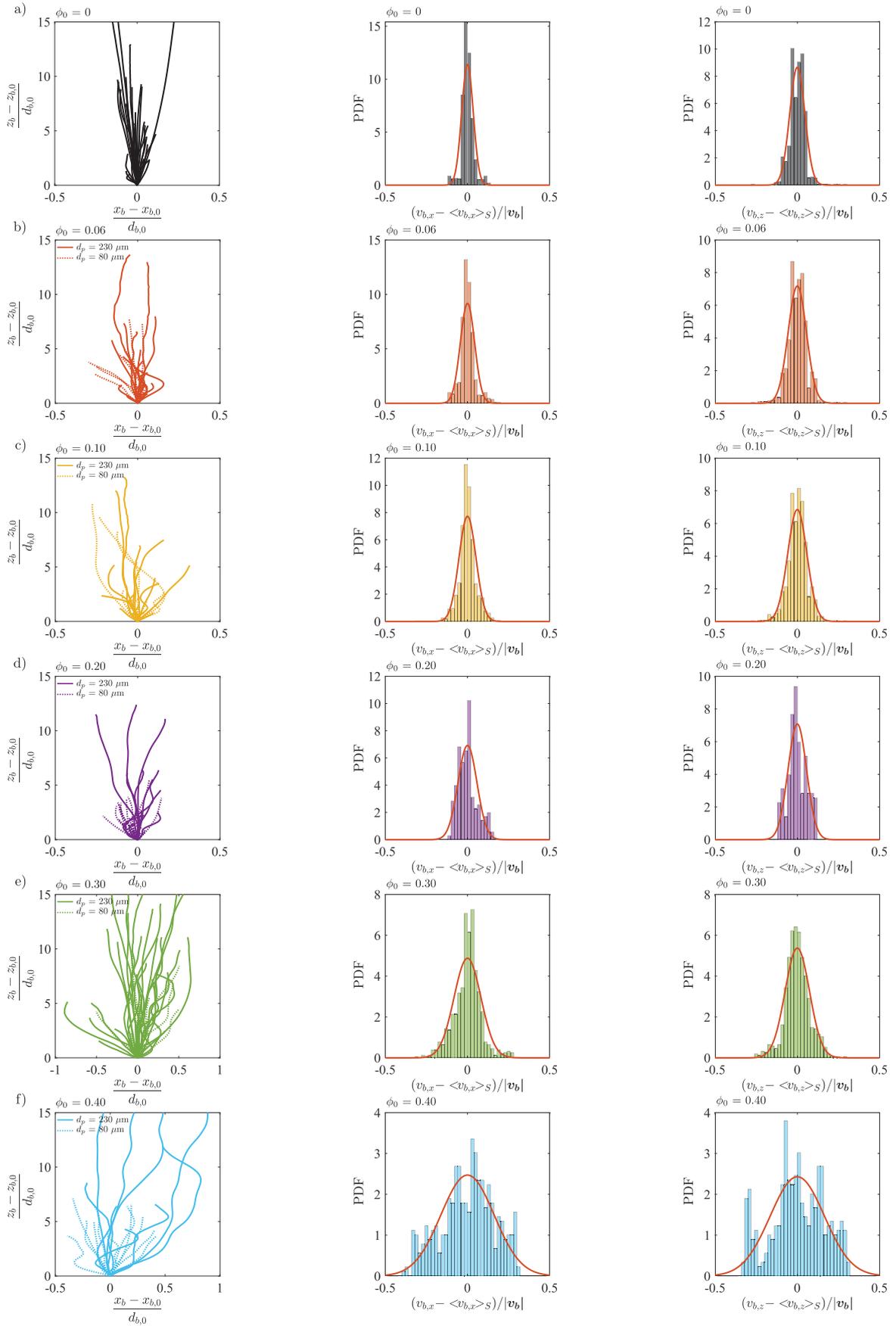


FIGURE III.15 - Voir page suivante pour la légende.

FIGURE III.15 - **Mesures de l'étendue des trajectoires des bulles.** Première colonne : Décalage vertical $z_b - z_{b,0}$ par rapport au décalage horizontal $x_b - x_{b,0}$ des bulles, normalisés par le diamètre à l'instant initial $d_{b,0}$ pour différentes fractions volumiques ϕ_0 et diamètres de particules d_p . Deuxième colonne : fonction de densité de probabilité (PDF) de l'écart-moyen de la vitesse horizontale des bulles $v_{b,x} - \langle v_{b,x} \rangle_S$ normalisé par la norme du vecteur vitesse des bulles. Troisième colonne : même chose pour la vitesse verticale. Les courbes en traits pleins rouge correspondent à un ajustement avec une loi normale centrée donnée par l'équation (III.9). Les bulles évoluent dans des suspensions dont la viscosité du liquide suspendant est variable (entre 50 et 200 mPa.s).

6.2.3 Forme des bulles : cas général

On effectue le même raisonnement sur les variations moyennées du rapport d'aspect $\langle a/b \rangle_S^\dagger$ en fonction de la taille des bulles, présenté sur la figure III.16-a). On observe que

- conjointement avec les observations sur la figure III.11, le rapport d'aspect reste légèrement supérieur à 1 pour des diamètres normalisés de 0 à $\sim 8d_b/h$;
- le rapport d'aspect augmente à partir de cette valeur en suivant une courbe maîtresse unique et qui semble indépendante de la fraction volumique ;
- les barres d'erreur associées aux rapports d'aspect sont de plus en plus importantes avec d_b , indiquant des variations instantanées élevées de a/b , comme observé sur les photographies figure III.14-c)-d).

Nous proposons donc de modéliser la courbe maîtresse $a/b = f(d_b/h)$ par une fonction affine par morceaux, dont les régressions empiriques donnent :

$$a/b = \begin{cases} \lambda_1, & \lambda_1 = 1.15 \pm 0.04 & 0 \leq d_b/h \leq 8 \\ \lambda_2 \frac{d_b}{h} + \lambda_3, & \lambda_2 = (5.7 \pm 0.7) \times 10^{-2}, \lambda_3 = 0.69 \pm 0.07 & d_b/h \geq 8 \end{cases}. \quad (\text{III.10})$$

Pour les fonctions de densité des rapports d'aspects, les observations sont les mêmes que pour la vitesse : les PDF sont symétriques par rapport à l'origine, et la loi normale (III.9) ajuste très bien les données expérimentales, l'écart-type augmentant avec ϕ_0 .

En conclusion, la figure III.17 présente les écart-types mesurés par l'ajustement des données avec la loi normale (III.9) pour les différentes fonctions de densité en fonction de la fraction volumique.

On observe une augmentation de la dispersion de la vitesse horizontale, verticale, et rapport d'aspect moyennés lorsque ϕ_0 augmente. Nous allons tenter de comprendre et caractériser la manière dont la présence de particules agit sur la vitesse et le rapport d'aspect. Il est important de noter que nous avons effectué les mêmes calculs, mais en étudiant que les bulles de faible taille ($\lesssim 7h$). Pour ces bulles, quelque soit la fraction volumique, l'écart-type des grandeurs a/b , $v_{b,x}$ et $v_{b,z}$ restent faibles et de l'ordre de ceux mesurés pour $\phi_0 = 0$. Ceci est en accord avec l'observation sur la figure III.11-a), où les bulles de faible taille ont une trajectoire et une forme ne variant quasiment pas si ϕ_0 augmente.

†. La moyenne (resp. l'écart-type) de a/b est prise comme étant la moyenne (resp. écart type) des valeurs instantanées de a/b au cours de la remontée.

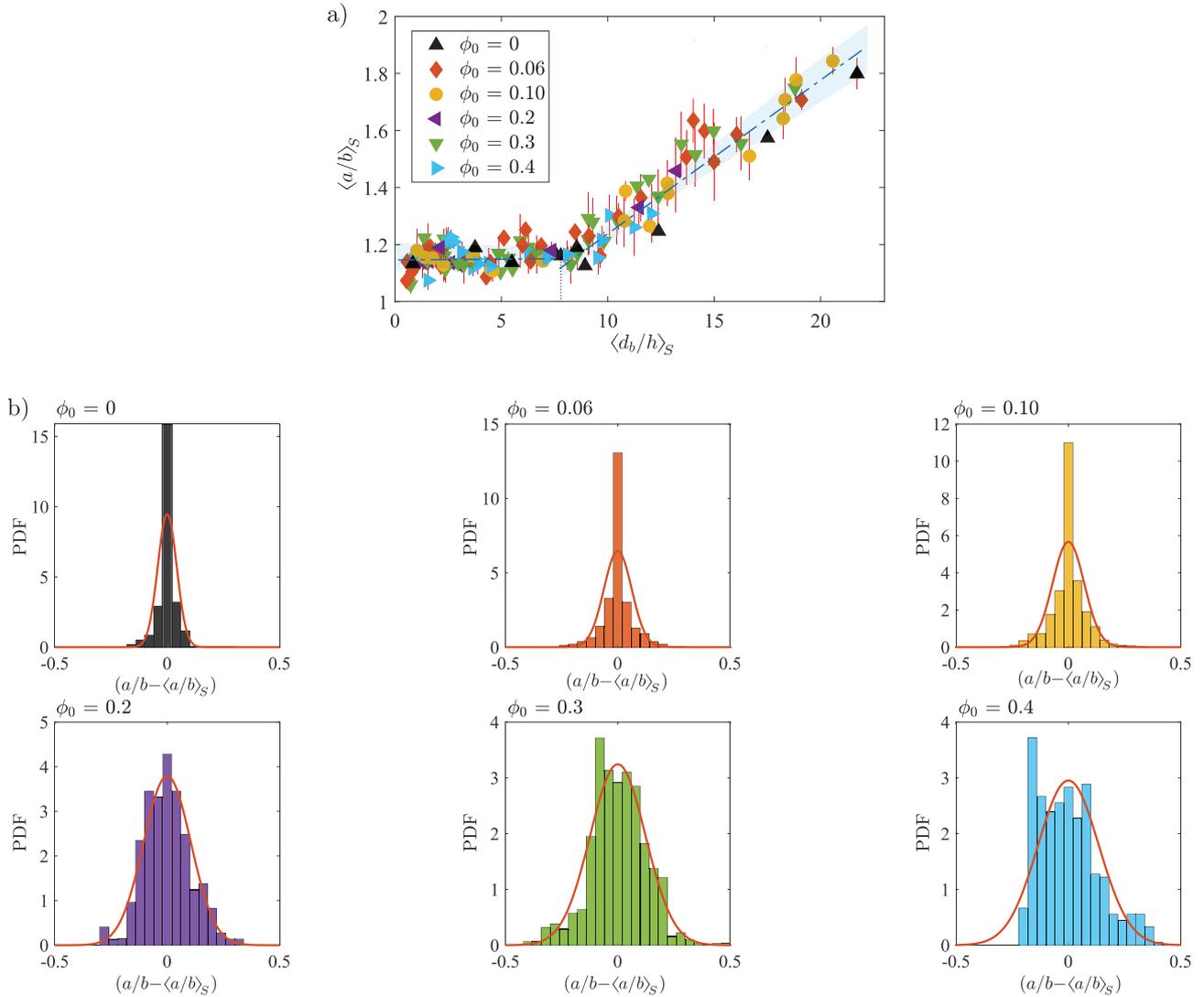


FIGURE III.16 - **Variations de forme des bulles remontant dans une suspension.** a) Rapport d'aspect moyen $\langle a/b \rangle_S$ en fonction du diamètre moyen des bulles $\langle d_b \rangle_S$ dans différentes suspensions. Les deux ajustements expérimentaux sont donnés par l'équation (III.10). b) fonction de densité (PDF) de l'écart-moyen du rapport d'aspect des bulles $a/b - \langle a/b \rangle_S$ pour différentes fractions volumiques. Les courbes en traits pleins rouge correspondent à un ajustement avec une loi normale centrée donnée par l'équation (III.9). Les jeux de données sont obtenus pour différentes fractions volumiques ϕ_0 et diamètres de particules d_p . Certaines données n'ont pas été ajoutées sur le graphe a) pour ne pas alourdir sa lecture, mais sont présents dans les PDF.

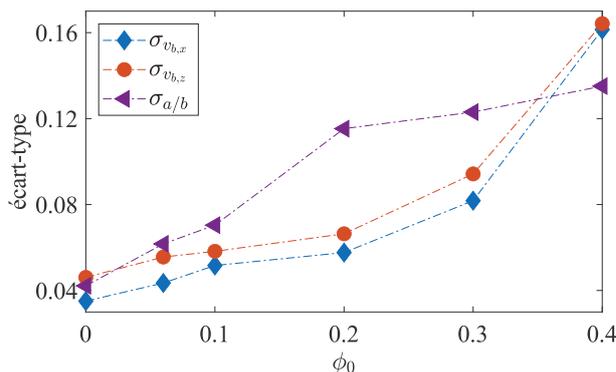


FIGURE III.17 - **Dispersion des vitesses et rapport d'aspect.** Évolution des écart-types mesurés par les différentes lois normales présentées sur les figures III.15 et III.16 en fonction de la fraction volumique ϕ_0 .

6.2.4 Inhomogénéités de la fraction volumique

Un phénomène qui permettrait d'interpréter toutes les observations de forme et de trajectoire serait la présence d'hétérogénéités de la fraction volumique au sein de la suspension, autrement dit une variation de la fraction volumique locale ϕ dans le plan (x,z) autour de ϕ_0 , notée $\delta\phi$. Ces déplétions (si $\delta\phi < 0$) ou réplétions (si $\delta\phi > 0$) sont parfois distinguables à l'oeil nu mais difficilement visibles sur les images obtenues par la caméra. En tentant d'étudier l'intensité reçue par la caméra en fonction de la fraction volumique, nous avons constaté qu'il faut une variation $\delta\phi \approx 2 - 3\%$ pour que l'intensité change de manière à être perçue par la caméra. Ces hétérogénéités vont influencer sur la trajectoire de la bulle : celle-ci va emprunter préférentiellement des chemins qui imposent moins de résistance donc moins visqueux. On comprend donc que la bulle, cherchant à se déplacer dans les zones de faible fraction volumique, peut éventuellement se déplacer horizontalement : par exemple, la présence d'une déplétion à gauche de la bulle peut l'amener à se déplacer sur celle-ci, donc à gauche.

Si $|\delta\phi|$ est de l'ordre de 1% (choix arbitraire), on peut quantifier l'importance de ces déplacements en fonction de la fraction volumique du milieu : prenons par exemple la loi empirique de Maron-Pierce[†] [Maron and Pierce, 1956]. La variation $\delta\eta_s$ de viscosité est reliée à $\delta\phi$ par :

$$\frac{\delta\eta_s}{\eta_s(\phi_0)} = 2 \frac{\delta\phi}{\phi_c - \phi_0} \quad (\text{III.11})$$

Si les hétérogénéités sont d'environ $\delta\phi \sim 0.01$, on a une variation de viscosité η_s de 4.7% lorsque $\phi_0 = 0.2$ et une variation de 8.9% si $\phi_0 = 0.4$. Cela signifie que

- pour des faibles fractions volumiques, s'il y a une déplétion locale $\delta\phi$ ne va induire que des faibles variations de η_s . La bulle ne sera pas sensible à ces variations et ne s'engouffrera pas dans cette déplétion ;
- si la fraction volumique augmente et qu'il y a toujours la même déplétion locale, la variation de η_s sera beaucoup plus élevée, et la bulle va préférentiellement passer dans la zone de déplétion locale.

Si l'on considère que les déplétions sont réparties aléatoirement et dans toute la suspension, cela signifie que, à grande fraction volumique, les déplacements de la bulle vont être possiblement plus importants. Cela explique donc l'amplitude des fluctuations autour du comportement moyen pour les vitesses horizontales et verticales sur une plus grande échelle lorsque ϕ_0 augmente comme observé sur la figure III.15 et sur le graphe III.17. De même, la taille de la bulle joue un rôle dans ce phénomène : si elle est petite, elle ne verra pas, ou peu, la présence de déplétions donc n'aura pas une variation horizontale élevée, et si elle est de grande taille, elle rencontrera beaucoup plus de déplétions, et aura plus tendance à se déplacer horizontalement, là encore en accord avec les observations précédentes. L'hypothèse d'une répartition aléatoire est renforcée par le caractère aléatoire Gaussien des PDF de $v_{b,x} - \langle v_{b,x} \rangle_S$ et $v_{b,z} - \langle v_{b,z} \rangle_S$.

Enfin, l'hétérogénéité de fraction volumique explique les variations de forme de la bulle : lorsque la bulle s'engouffre dans une déplétion, sa forme va s'adapter à la taille de la déplétion. Si une bulle rencontre une réplétion devant elle, elle va «s'aplatir» car elle fait face à un endroit où localement la résistance est plus élevée. De même, pour les grosses bulles, s'il y a une déplétion de taille plus petite que la bulle, l'interface présente localement autour de la déplétion va changer de forme, ce qui peut amener à la présence de concavités locales observées précédemment. Ces observations sont en lien avec les déformations accentuées de l'interface air-suspension sur l'expérience menée par [Xu et al., 2016] dues à la présence des particules. Là encore, nous n'avons pas assez de jeux de données pour pouvoir effectuer une analyse quantitative et conclure de manière univoque sur ce phénomène, mais cette interprétation est validée par toutes nos observations. Une plus grande résolution et un contraste élevé permettraient de remarquer des variations locales d'intensité plus faibles. Plus généralement,

[†]. Cette loi sert à titre d'exemple, mais toute autre loi rhéologique donnerait des résultats similaires.

il faudrait effectuer une cartographie complète à tout instant de la fraction volumique locale et les comparer aux variations de forme et trajectoire observés.

Modèle simple et mise en équation

Nous nous proposons d'effectuer un raisonnement simple pour mettre en équation ce phénomène. On peut effectuer un bilan des forces sur la bulle, lorsque $d_b \gg h$. En négligeant les phénomènes de tension de surface, il y a trois forces en présence, représentées sur la figure III.18 :

- La force de gravité \mathbf{F}_g , compétition entre la pesanteur et la poussée d'Archimède, dirigée selon z et qui tend à faire remonter la bulle. Cette force ne dépend que du volume de la bulle, et est indépendante de ϕ_0 .
- Une force exercée par la suspension sur le fluide. Cette force peut se décomposer en deux forces :
 1. Une force dite moyenne $-\beta_s \mathbf{v}$, qui ne prend pas en compte les variations de fraction volumique locale autour de la bulle, correspondant à une force typique exercée par un fluide Newtonien sur un corps en mouvement. β_s dépend de la suspension donc de η_f et ϕ_0 (nous le notons avec un indice s comme suspension).
 2. Une force exercée par les variations de fraction volumique locale sur le fluide, prenant en compte les hétérogénéités locales, $\mathbf{F}_{\delta\phi}$.

En prenant en compte la force de masse ajoutée dont le calcul est effectué en Annexe A, le bilan des forces appliqué à la bulle, s'écrit sous une forme similaire à l'équation (I.55), soit

$$\left(\rho_b + \frac{\rho_f}{2}\right) \mathcal{V}_b \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\delta\phi} - \beta_s \mathbf{v}, \quad (\text{III.12})$$

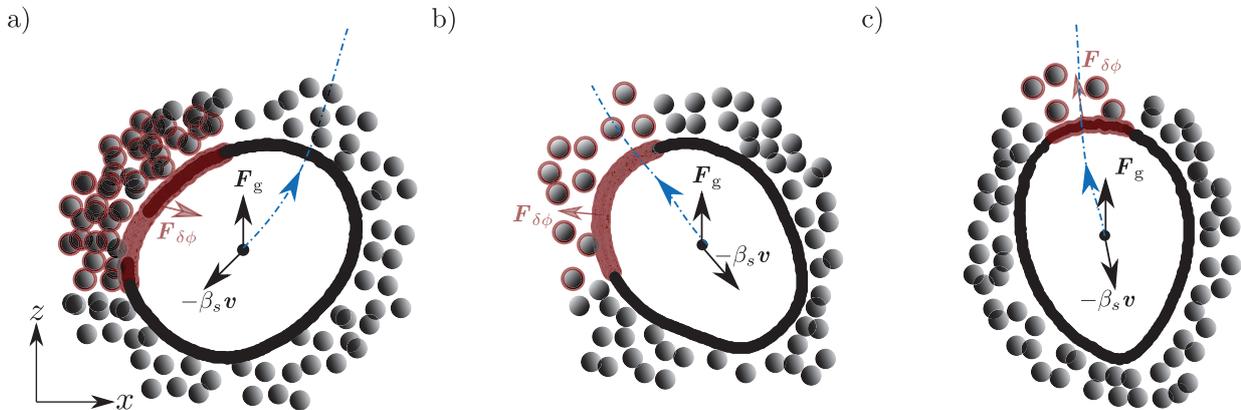


FIGURE III.18 - **Bilan des forces sur une bulle en présence de déplétions/réplétions.** a) Cas d'une réplétion à gauche de la bulle. b) Déplétion à gauche de la bulle. c) Déplétion au dessus de la bulle. La ligne tiretée représente la trajectoire de la bulle. Les grains entourés en rouge représentent les zones de déficit ou de surplus en grains. La taille des vecteurs n'est pas représentative de leur amplitude.

avec m_b la masse de la bulle. La détermination de $\mathbf{F}_{\delta\phi}$ étant compliquée et sortant du cadre de cette étude, nous nous limiterons à des arguments basiques pour comprendre et simplifier cette équation.

Remontée dans un fluide Newtonien

Le raisonnement que nous venons d'effectuer s'applique aussi au cas sans grains, avec $\mathbf{F}_{\delta\phi} = 0$. En se plaçant en régime stationnaire et pour $d_b \gg h$, la vitesse de la bulle est donnée par la vitesse

6.2. Forme et trajectoire des bulles

de Maxworthy v_0^* soit, d'après (III.12) et en notant β_f le coefficient de frottement dans un fluide Newtonien :

$$\beta_f v_0^* = \Delta\rho g \mathcal{V}_b \Rightarrow \beta_f = \frac{\Delta\rho g \pi a b h}{v_0^*} = \frac{12\eta_f \pi d_b^2}{h} \left(\frac{b}{a}\right), \quad (\text{III.13})$$

avec $\Delta\rho = \rho_f - \rho_b$. En revenant sur l'équation instationnaire (III.12), on a

$$\frac{dv_b}{dt} + \frac{v_b}{\tau} = \frac{F_g}{\left(\rho_b + \frac{\rho_f}{2}\right) \mathcal{V}_b}, \quad \text{avec } \tau = \frac{\left(\rho_b + \frac{\rho_f}{2}\right) \mathcal{V}_b}{\beta_f} = \left(\rho_b + \frac{\rho_f}{2}\right) \frac{h^2}{48\eta_f} \left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow v_b = v_0^* \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (\text{III.14})$$

en prenant par exemple comme condition initiale que $v_b(t=0) = 0$. On peut interpréter ce temps caractéristique comme un temps de relaxation de la bulle lors d'une perturbation quelconque du système. L'ordre de grandeur de τ est compris entre 10^{-5} et 10^{-3} s dans les expériences sans grains, qui est très faible devant les temps typiques rencontrés dans notre étude (voir figure III.9). Ceci constitue l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire (ARQS) dans lequel on se placera dans la suite. Ainsi, il est légitime de prendre la valeur de la vitesse de Maxworthy v_0^* à tout instant car la bulle s'adapte «instantanément» aux perturbations, notamment celles dues aux changements de rapport d'aspect de la bulle.

Pour le cas des suspensions, nous admettons que

- β_s est de la même forme que son homologue β_f : sans hétérogénéité, on peut supposer que la suspension possède un comportement de type fluide Newtonien et on se retrouve dans le cas précédent, avec $\eta_f \rightarrow \eta_s$.
- On se place dans l'ARQS afin de négliger la dérivée temporelle dans l'équation (III.12).

Au premier ordre en ϕ_0 , c'est-à-dire en négligeant les hétérogénéités, on retrouve l'équation (III.14) stationnaire, avec un facteur β_s . En utilisant les deux hypothèses précédentes, et dans le cas $v_b \gg h$, on a alors que

$$\beta_s \propto \frac{12\eta_s \pi d_b^2}{h} \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow v_b \propto \frac{\rho g h^2}{12\eta_s} \left(\frac{a}{b}\right). \quad (\text{III.15})$$

Notamment, la quantité $v_b/(a/b)$ est constante, ce qui fait écho aux observations sur la figure III.9 : les variations de v_b et a/b sont corrélées. La figure III.19-a) présente l'évolution du rapport $v_b/(a/b)$ dans le cadre de la bulle présentée en début de chapitre.

On remarque que la quantité $v_b/(a/b)$ est constante en dehors des rectangles grisés, et proche de la valeur moyennée sur la distance d'acquisition, $\langle v_b/(a/b) \rangle_S$. Ceci est en accord avec le résultat précédent dans le cas où il n'y a pas de déplétions. On peut supposer que dans ces zones d'évolution de la bulle, aucune déplétion importante n'est présente.

Nous avons affiché l'orientation Ψ de la bulle sur la figure III.19-b)]. Dans les deux premières zones grisées, on constate une brusque variation de l'orientation de la bulle, mais pas dans la troisième. On peut relier ces observations à la présence d'hétérogénéités locales :

- Dans la zone 1, la bulle rencontre par exemple une réplétion à gauche (ou une déplétion à droite). La force $\mathbf{F}_{\delta\phi}$ dirigée vers la droite va apparaître et modifier l'équilibre entre gravité et résistance moyenne du fluide. $v_b/(a/b)$ n'est donc plus une constante. L'orientation de la bulle change en réponse à la force $\mathbf{F}_{\delta\phi}$. Cette interaction est schématisée sur la figure III.18-a).

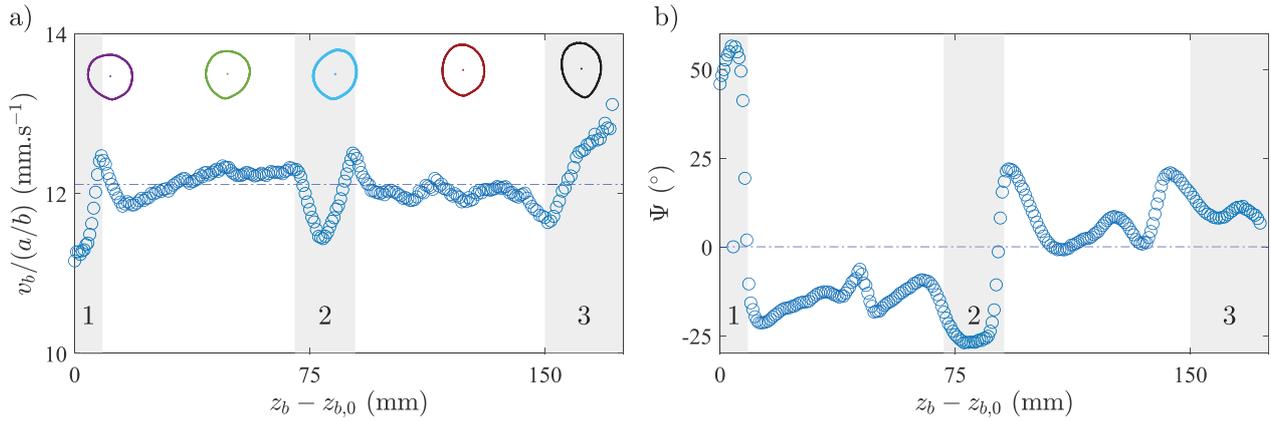


FIGURE III.19 - **Graphes associés à la remontée de la bulle présentée figure III.9.** a) Évolution instantanée de la vitesse verticale de remontée v_b divisée par le rapport d'aspect a/b en fonction de $z_b - z_{b,0}$. La ligne tiretée représente la moyenne $v_b/(a/b)$ pendant la remontée, notée $\langle v_b/(a/b) \rangle_S$. Les contours de bulles aux altitudes correspondantes sont présentés. b) Orientation de la bulle Ψ en fonction de $z_b - z_{b,0}$. La ligne tiretée représente l'angle $\Psi = 0$. Les zones rectangulaires grisées représentent des zones de présence d'hétérogénéité locale de grains (voir texte).

- Dans la zone 2, c'est le contraire : la bulle rencontre par exemple une déplétion à gauche, entraînant une force $\mathbf{F}_{\delta\phi}$ vers la gauche, changeant ainsi l'orientation de la bulle et son mouvement, comme affiché sur le schéma b) de la figure III.18.
- Enfin dans la zone 3, on remarque que l'orientation de la bulle ne varie pas mais que le rapport $v_b/(a/b)$ n'est pas constant. Cette fois-ci, la déplétion se trouve juste au dessus de la bulle et la force F_d est dirigée selon z s'ajoute à la force de gravité, comme affiché sur la figure III.18-c). La bulle emprunte ce chemin moins visqueux, et l'orientation ne change pas car la bulle n'est pas déviée horizontalement.

Ces déplacements ont été observés lors d'expériences préliminaires effectuées sur des suspensions non mélangées, ici une suspension avec des particules de $500 \mu\text{m}$ (non étudiées au cours de cette thèse). La figure III.20 présente des photographies d'une bulle qui se déforme et contourne un réplétion locale de grains, mettant en évidence le comportement que nous venons de décrire avec le modèle. Le nombre de Stokes associé à la bulle St_b vaut 0.01 dans cet exemple, pourtant il y a une interaction forte entre les grains et la bulle, contrairement à [Hooshyar et al., 2013].

En conclusion, nous remarquons que les variations de différents paramètres sur la figure III.9, telles que la forme, trajectoire et vitesse de la bulle, sont reliées à la présence d'hétérogénéités de fraction volumique des grains, afin que la bulle emprunte des chemins moins visqueux. Ceci implique une modification de la trajectoire (x_b, z_b) ainsi que de la vitesse et donc l'angle Ψ par rapport à une remontée qui serait verticale en absence d'inhomogénéités de grains dans la suspension.

Moyenne des grandeurs d'intérêt

Concernant les bulles dans un liquide, nous avons utilisé les grandeurs moyennées sur la distance d'acquisition pour comparer les dynamiques de bulles. Dans le cas des suspensions, la force $\mathbf{F}_{\delta\phi}$ étant aléatoire dans l'espace (dirigée dans toutes les directions), si la distance spatiale sur laquelle la moyenne de $\mathbf{F}_{\delta\phi}$ est calculée est beaucoup plus grande que l'échelle spatiale des variations typiques de $\mathbf{F}_{\delta\phi}$, alors cette moyenne est nulle. C'est ce que l'on va supposer par la suite. Il est important de noter que ceci n'est pas vérifié pour toutes les bulles : sur la figure III.16-a), les déplacements horizontaux, qui sont créés par les déplétions ne sont pas nuls en moyenne sur la remontée. Cependant, sur l'ensemble d'un jeu de données pour une fraction volumique, les déplacements horizontaux se compensent.

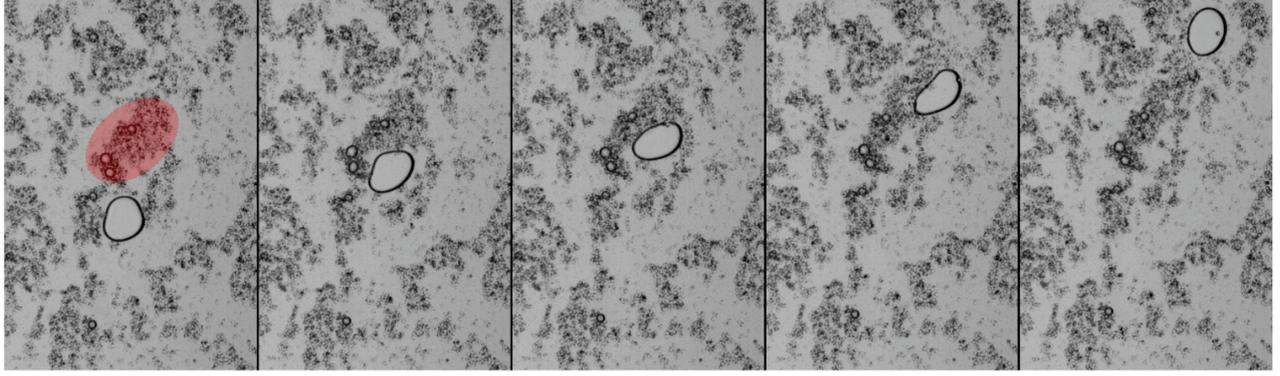


FIGURE III.20 - **Déplacement d'une bulle dans une suspensions inhomogène.** [$h = 2.3$ mm] Photographies successives d'une bulle de taille 10 mm qui se déplace dans une suspension hétérogène de particules de 500 μm . La zone en rouge représente la présence d'un amas de particules. La bulle contourne cette réplétion locale en privilégiant les chemins sans particules et se déforme. La fraction volumique de la suspension n'est pas connue.

On a donc que $\langle \mathbf{F}_{\delta\phi} \rangle_S \approx 0$. En appliquant la moyenne spatiale sur l'équation (III.12) en régime stationnaire, on obtient :

$$\langle \beta_s \mathbf{v} \rangle_S = \mathbf{F}_g, \quad (\text{III.16})$$

la force de gravité étant constante sur la remontée. Cela signifie donc que la vitesse moyennée aura pour seule composante d'intérêt celle dirigée selon z . On s'intéressera donc par la suite qu'à la dynamique exclusivement verticale de la bulle. On obtient finalement, en utilisant la forme empirique pour β_s , que

$$\left\langle v_b \left(\frac{b}{a} \right) \right\rangle_S \propto \frac{\rho g h^2}{12 \eta_s(\phi_0)}. \quad (\text{III.17})$$

Cette équation est ainsi très semblable à l'équation de Maxworthy sans grains en régime stationnaire, avec $\eta_f \rightarrow \eta_s(\phi_0)$. Cela signifie donc théoriquement qu'il existe aussi une vitesse terminale des bulles lorsque $d_b \gg h$. L'objectif est donc de vérifier si l'équation (III.17), dont les membres de gauche et droite sont strictement égaux dans le cas sans grains reste valable, et si oui, sous quelles conditions lorsque l'on étudie la dynamique avec particules.

6.3 Vitesse de remontée moyenne

Nous venons de voir que nous pouvons encore considérer le mouvement moyen des bulles afin de s'affranchir du phénomène des déplétions et réplétions locales. De ce fait, nous allons faire comme dans le chapitre précédent et étudier les vitesses moyennes de remontée verticale des bulles, en fonction des diamètres moyennés. Par la suite, nous omettrons d'utiliser l'opérateur moyenne $\langle \cdot \rangle_S$ pour plus de simplicité de lecture.

Afin d'analyser la comparaison entre suspension et fluide Newtonien de manière quantitative, nous avons étudié l'évolution de la vitesse en fonction du diamètre pour différentes fractions volumiques ϕ_0 et donc viscosités effectives $\eta_s(\phi_0)$ pour un même liquide lorsque ϕ_0 augmente de 0 à 0.3. La figure III.21 regroupe les variations de la vitesse verticale moyennée en fonction du diamètre des bulles pour différentes suspensions pour lesquels le liquide interstitiel est le même ($\eta_f = 180$ mPa.s).

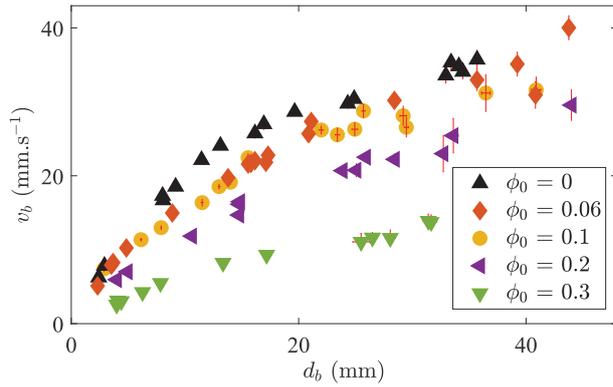


FIGURE III.21 - **Comparaison de remontées de bulles.** [$d_p = 230 \mu\text{m}$, $h = 2.7 \text{ mm}$] Évolution de la vitesse moyenne des bulles v_b en fonction de leur diamètre moyen d_b pour différentes fractions volumiques ϕ_0 . Le liquide initial est le même pour toutes les données (mélange eau/UCON $\eta_f = 180 \text{ mPa.s}$).

On rappelle que chaque point du graphe est une moyenne spatiale des valeurs instantanées défini par l'équation (III.3) dont les incertitudes sont associées aux fluctuations de ces valeurs. Nous omettons encore d'utiliser l'opérateur $\langle \cdot \rangle_S$ par la suite. La vitesse v_b augmente avec le diamètre d_b et diminue avec la fraction volumique ϕ_0 , les courbes d'évolution étant semblables entre un liquide Newtonien et une suspension granulaire. On constate de plus que les barres d'erreur associées aux vitesses v_b des bulles deviennent élevées pour des grands diamètres et des grandes fractions volumiques. Cette observation est en lien avec les variations de v_b dues à la présence d'hétérogénéités au sein de la suspension.

6.3.1 Comparaison avec un environnement sans grains

Afin de comparer la dynamique de remontée de bulles dans un liquide Newtonien avec celle dans une suspension, nous avons étudié la remontée de bulles dans un liquide sans grains de viscosité dynamique $\eta_f = 620 \text{ mPa.s}$ (liquide A_{620}) et une suspension de fraction volumique $\phi_0 = 0.30$ ($d_p = 230 \mu\text{m}$) de même viscosité cinématique. La viscosité cinématique vaut $\nu_f = 5.83 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ pour le fluide et $\nu_s = 5.87 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ pour la suspension soit un écart relatif de 0.6%. Si la suspension peut être totalement décrite comme un fluide Newtonien équivalent, les courbes d'évolution devraient se superposer. En étudiant l'évolution des vitesses des bulles v_b en fonction du diamètre d_b sur la figure III.22-a), on observe que v_b augmente avec d_b dans les deux cas, avec une croissance plus élevée pour le cas avec grains. Comme nous venons de le voir dans l'équation (III.17) et dans le cas Newtonien (chapitre 5, partie 5.2.4), la variable adaptée à l'étude est bien la quantité moyennée $v_b/(a/b)$. La figure III.22-b) présente l'évolution de $v_b/(a/b)$ en fonction de d_b .

On remarque l'existence d'un plateau de vitesse lorsque $d_b \gtrsim 15 - 20 \text{ mm}$, soit $d_b/h \gtrsim 7 - 8$, indiquant une valeur asymptotique de la quantité $\langle v_b/(a/b) \rangle_S$ ($\sim 7.5 \text{ mm.s}^{-1}$ dans le cas sans grains, et $\sim 13 \text{ mm.s}^{-1}$ pour la suspension), qui est en accord avec (III.17) pour les deux jeux de données. Dans le cas sans grains, la valeur asymptotique est donnée par l'égalité stricte de l'équation (III.17), tandis que pour le cas de la suspension, il semble que la relation est valide à un coefficient de proportionnalité très supérieur à l'unité.

Cela signifie donc qu'une bulle d'air remonte plus rapidement dans une suspension de viscosité η_s que dans un liquide pur de même viscosité $\eta_f = \eta_s$! En reprenant l'équation (III.17), il existe un pré-facteur α , dont les paramètres de dépendance restent à déterminer et valant environ 1.7 dans notre exemple, tel que

$$\left\langle v_b \left(\frac{b}{a} \right) \right\rangle_S = \alpha \frac{\rho g h^2}{12 \eta_s(\phi_0)}. \quad (\text{III.18})$$

La différence entre les deux jeux de données étant la présence de grains, on peut par exemple supposer qu'il existe une fonction $\alpha(\phi_0)$ telle que la bonne vitesse soit $v_s^* \times \alpha(\phi_0)$. On définit donc une vitesse

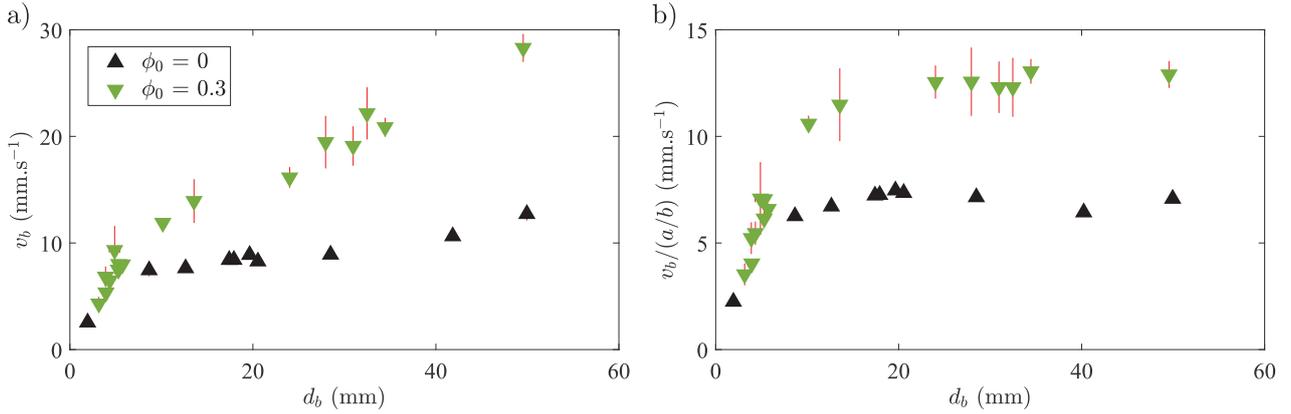


FIGURE III.22 - **Dynamique de bulles dans un liquide et dans une suspension de même viscosité.** [$\eta_f = \eta_s(\phi_0) = 620$ mPa.s, $h = 2.3$ mm] a) Vitesse moyenne des bulles v_b en fonction de leur diamètre moyen d_b . b) Vitesse divisée par le rapport d'aspect a/b des bulles en fonction du diamètre d_b . Le liquide pur est le mélange A_{620} . Les données associées au liquide sans grains sont les mêmes que celles de la figure III.7.

asymptotique v_s^* , l'indice s référant à la suspension, par analogie avec le cas Newtonien et en accord avec l'équation (III.17), qui va servir de normalisation de nos données, reliée à la vitesse de Maxworthy par

$$v_s^* \equiv v_0^*[\eta_s(\phi_0)] = \frac{\rho g h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \left(\frac{a}{b}\right). \quad (\text{III.19})$$

D'après l'observation précédente, cette vitesse asymptotique n'est pas exactement adaptée pour décrire la dynamique pour les grands diamètres due au pré-facteur α . Le but est de comprendre le ou les phénomènes physiques qui sont les moteurs de cette différence fondamentale entre liquide pur et suspension, afin de déterminer α et ses paramètres d'influence.

6.3.2 Vitesse de Maxworthy modifiée et renormalisation

Afin de mettre en évidence que la présence de grains modifie la dynamique de remontée des bulles d'une manière non-triviale, on étudie ici quantitativement la dynamique de remontée de bulles en fonction de ϕ_0 pour des suspensions granulaires. Nous avons collecté les mesures effectuées sur les différentes suspensions de liquides interstitiels initiaux, tailles de particules et fractions volumiques différentes. Par exemple les données pour $\phi_0 = 0.30$ et $d_p = 230$ μm sont issues de deux jeux de données différents pour lesquels la viscosité du mélange eau/UCON initial est de 180 mPa.s et 50 mPa.s, qui contient du sel afin d'égaliser la masse volumique du mélange eau/UCON avec celle des particules. Les graphes de la figure III.23-a)-b) présentent donc les courbes $v_b = f(d_b)$ normalisées par v_s^* pour la vitesse et h pour le diamètre.

On obtient, de manière similaire à un environnement sans grains, une augmentation de v_b/v_s^* , et ce jusqu'à un seuil qui semble légèrement varier en fonction des fractions volumiques, mais qui est globalement compris entre 8 et 12 d_b/h . Au delà, un plateau se forme pour toutes les fractions volumiques étudiées. Pour $\phi_0 = 0$, on retrouve le cas des liquides Newtoniens pour lequel $\alpha(0) = 1$. Cependant, les données ne se regroupent pas sur une courbe maîtresse. Le maximum de la courbe v_b/v_s^* augmente avec la fraction volumique, la vitesse des bulles pouvant atteindre $\sim 1.8v_s^*$ lorsque $\phi_0 = 0.30$ avec des grains de 230 microns et $\sim 1.4v_s^*$ avec des grains de 80 microns. Autrement dit, dans un liquide avec des particules de 230 microns et une fraction volumique de 30%, les grosses bulles de même rapport d'aspect remontent quasiment 2 fois plus vite que dans un même liquide, sans grains,

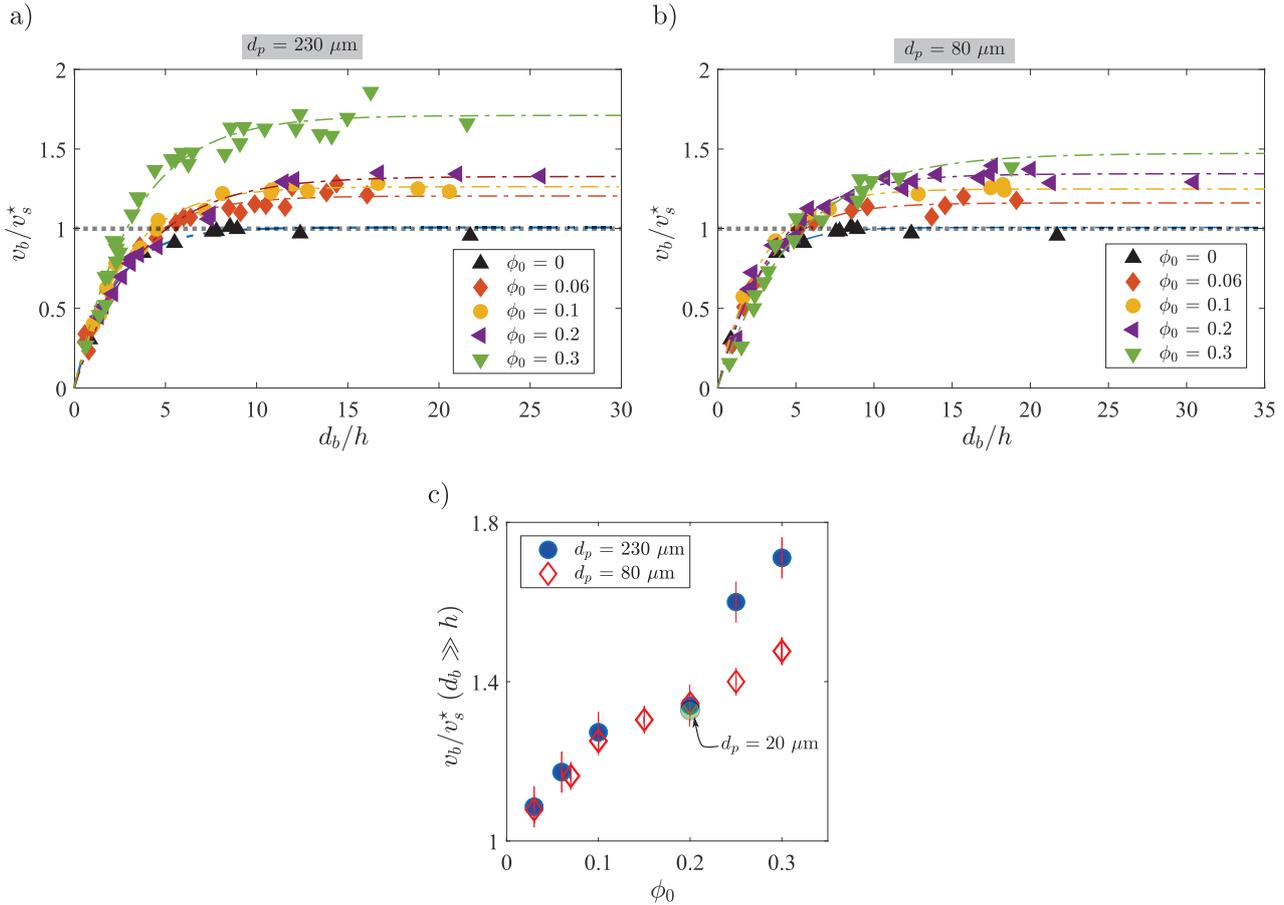


FIGURE III.23 - **Surplus de vitesse des bulles dans des suspensions.** [$h = 2.3 \text{ mm}$ pour tous les jeux de données] a) Évolution de la vitesse normalisée v_b/v_s^* en fonction du diamètre normalisé d_b/h pour des suspensions avec des particules de diamètre $d_p = 230 \mu\text{m}$. b) Même graphe mais pour les particules $d_p = 80 \mu\text{m}$. Les lignes tiretées représentent les régressions empiriques de l'équation (III.20). c) valeur de v_b/v_s^* issue de la régression empirique (III.20) lorsque $d_b \gg h$. Une expérience supplémentaire pour des particules de diamètre $20 \mu\text{m}$ a été effectuée pour $\phi_0 = 0.2$ et le point correspondant à α vaut 1.35 en vert. Les barres d'erreur ne sont pas affichées en a) et b) par souci de lisibilité. Le liquide pour lequel $\phi_0 = 0$ est A_{620} . Les différentes suspensions n'ont pour la plupart pas le même liquide initial.

de même viscosité.

Afin d'accéder à la valeur de v_b/v_s^* lorsque $d_b \gg h$, qui n'est autre que le pré-facteur α , nous utilisons la loi empirique exponentielle (III.8) pour modéliser les courbes que nous rappelons ici :

$$\frac{v_b}{v_s^*} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \times d_b/h} \right), \quad (\text{III.20})$$

le facteur μ_1 donnant la valeur de α . En effet, toutes les courbes ont la même tendance d'une exponentielle décroissante et la régression nous permettra d'avoir une valeur de $(v_b/v_s^*)_\infty$ avec la barre d'erreur donnée par l'intervalle de confiance à 95% de la régression, donc de α . On constate que la loi empirique suit très fidèlement les différents jeux de données. La figure III.23-c) présente ce surplus de vitesse en fonction de la fraction volumique pour les deux tailles de particules.

Le surplus de vitesse est présent pour des fractions volumiques même très faible (3%), avec $v_b \sim 1.06v_s^*$. Ce surplus augmente lorsque ϕ_0 augmente pour les deux tailles de particules et est indépendant de cette dernière jusqu'à $\phi_0 = 0.2$. Au delà, l'augmentation de vitesse est plus grande pour les particules

6.4. Hydrodynamique de la suspension

de 230 microns. Nous avons aussi effectué une remontée de bulles dans une suspension granulaire de fraction volumique $\phi_0 = 0.2$ pour laquelle $d_p = 20 \mu\text{m}$. La valeur asymptotique de v_b/v_s^* est identique à celle obtenue pour les particules de 80 et 230 microns, en accord avec une possible indépendance du facteur α avec le diamètre des particules jusqu'à $\phi_0 = 0.2$

Afin de comprendre cette différence importante qu'induit la présence de particules sur la remontée de bulles, nous allons étudier le mouvement des grains autour des bulles lorsque ces dernières remontent.

6.4 Hydrodynamique de la suspension

On se place dans la suite en coordonnées cartésiennes (x, z) et coordonnées polaires (r, θ) définies sur la figure III.24, ayant toutes deux pour origine le centre de la bulle.

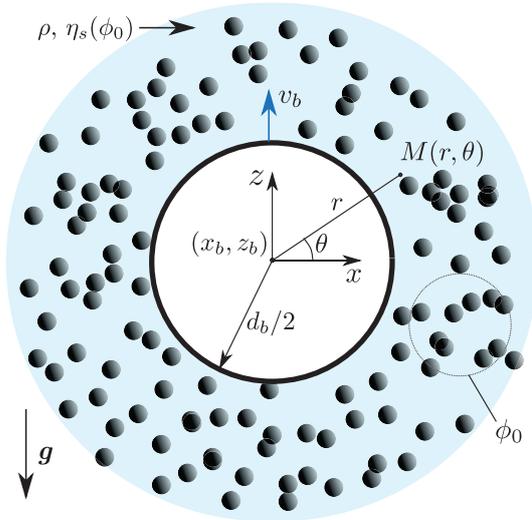


FIGURE III.24 - **Paramétrisation PIV.** L'étude s'effectue dans le référentiel (x, z) ou (r, θ) avec $x = r \cos(\theta)$ et $z = r \sin(\theta)$.

6.4.1 Champ moyenné et texture des grains

Dans le développement théorique présenté dans le chapitre 1 partie 1.2.3, nous avons déterminé que l'écoulement moyenné dans le plan (x, z) d'un liquide Newtonien évoluant dans une cellule de Hele-Shaw était potentiel : en appliquant la théorie des écoulements potentiels, le champ moyenné sur l'épaisseur $\dagger \widetilde{\mathbf{v}}_f$ induit par la présence de la bulle est dipolaire. Le potentiel dont le champ de vitesses dérive s'écrit sous la forme

$$\phi_f(r, \theta) = -\frac{v_b d_b^2}{4r} \sin(\theta) \quad \forall r > d_b/2. \quad (\text{III.21})$$

Le champ de vitesses moyenné est donc de la forme

$$\widetilde{\mathbf{v}}_f = \frac{v_b}{4} \left(\frac{d_b}{r} \right)^2 [\sin(\theta) \mathbf{e}_r - \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta]. \quad (\text{III.22})$$

Nous cherchons à savoir ce que devient cette relation en présence de grains. On note \mathbf{v}_s le champ de vitesses de la suspension en tout point (x, y, z) de la cellule et $\widetilde{\mathbf{v}}_s = \widetilde{v}_r \mathbf{e}_r + \widetilde{v}_\theta \mathbf{e}_\theta$ le champ moyenné sur l'épaisseur.

†. On rappelle que $\widetilde{\mathbf{v}}_f = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{v}_f dy$.

La mesure de l'hydrodynamique de la suspension se fait expérimentalement de la manière suivante : lorsque la caméra enregistre une image, elle mesure l'intensité transmise par la lumière incidente au travers de la suspension. On mesure donc le déplacement de l'intensité lumineuse comme étant une mesure du champ de vitesses de la suspension. Cependant, comme l'éclairage est en transmission, la lumière reçue par la caméra est en réalité issue de diffusions multiples sur toute l'épaisseur de la cellule et influencée par les variations spatiales et temporelles aléatoires d'indice de réfraction. La texture finale est une image de tavelures[†]. La mesure de l'hydrodynamique de la suspension est en réalité une mesure du champ de déplacement de cette texture. Nous faisons l'hypothèse que cela donne quand même le champ de vitesses de la suspension. Pour effectuer des mesures plus précises, il faudrait regarder à des échelles spatiales plus petites en utilisant par exemple un faisceau laser focalisé fortement pour pouvoir sonder à l'intérieur de la suspension [Shinohara et al., 2004, Tropea et al., 2007].

Une condition pour pouvoir associer le champ mesuré au champ réel de la texture des grains est de négliger le phénomène de sédimentation : il faut que la vitesse de sédimentation des particules soit négligeable devant les vitesses typiques mesurées (qui sont au plus de l'ordre de v_b) pour capturer uniquement le déplacement de la suspension et non de la sédimentation. La sédimentation est quantifiée par la vitesse de Stokes (I.70) prenant en compte les effets collectifs des particules qui est au maximum de l'ordre de 10^{-4} mm.s⁻¹, négligeable devant la vitesse des bulles.

6.4.2 Velocimétrie par Image de Particule

Le champ de vitesses moyenné sur l'épaisseur ($\widetilde{v}_x, \widetilde{v}_z$) est mesuré par PIV. Un algorithme open-source de corrélation croisée [Fincham and Delerce, 2012], UVMAT^{††}, est utilisé et est exécuté sur les différentes images contenant les bulles, avec des fenêtres de taille typique 13 x 13 pixels avec un chevauchement de 20%. La grille finale est d'approximativement 0.5 à 1 mm, c'est-à-dire que l'algorithme mesure le champ de déplacement sur chaque carré de côté 0.5 à 1 mm. Les vecteurs ayant une corrélation inférieure à 0.3 sont enlevés de l'étude.

Exemple de champ obtenu

La figure III.25 présente le champ de vitesses typique ($\widetilde{v}_x, \widetilde{v}_z$) obtenu par l'algorithme sur une bulle remontant dans une suspension de fraction volumique $\phi_0 = 0.3$. Certaines zones n'ont pas de vecteurs vitesse associés car la non-présence de grains empêche à l'algorithme de fonctionner, ce qui est le cas notamment sur le contour de la bulle. On constate aussi que la mesure du champ de vitesses est effectuée dans la bulle. En effet, nous avons mis en exergue la présence de grains dans le film de lubrification. Ces derniers peuvent être utilisés pour caractériser le champ de vitesses dans le film. On généralise donc le champ \widetilde{v}_s à tout l'espace (bulle y compris).

On constate que la suspension se déplace quand la bulle remonte : par exemple, en haut de la bulle, celle-ci pousse la suspension qui avance de façon verticale. En bas de la bulle, la suspension vient « reprendre » la place anciennement occupée par la bulle. Le champ de vitesses est axisymétrique selon l'axe vertical centré sur le centre de la bulle et est de plus en plus faible en norme en s'éloignant de la bulle.

A l'intérieur de la bulle, les grains dans le film de lubrification semblent ne pas se déplacer. Nous avons vu que dans le cas de la remontée de bulle pour un liquide Newtonien[‡], le champ de vitesses dans le film de lubrification est négligeable devant la vitesse de remontée de la bulle [Keiser et al., 2018]. On peut donc supposer que la bulle continue encore de glisser sur ce film constitué des particules et du liquide.

†. Speckle en anglais.

††. <http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-uvmat>

‡. voir chapitre 1 partie 1.2.4.

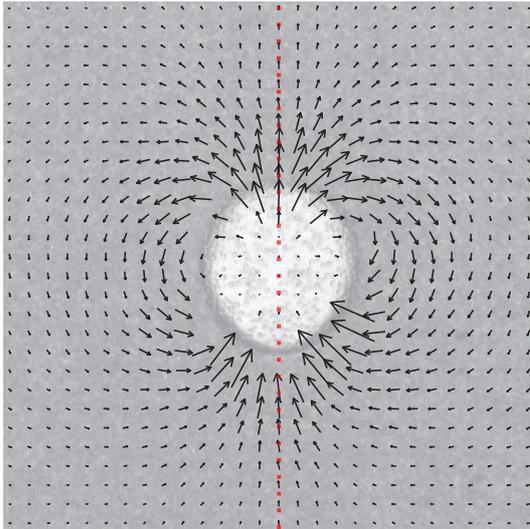


FIGURE III.25 - **champ de vitesses de la suspension autour d'une bulle.** champ de vitesses \tilde{v}_s superposé à une bulle de diamètre 21 mm évoluant dans une suspension $\phi_0 = 0.30$ ($\eta_f = 610$ mPa.s). L'image de la bulle a été légèrement opacifiée pour mieux visualiser le champ PIV. La droite verticale en pointillés rouge représente l'axe vertical passant par le centre de la bulle.

Le champ \tilde{v}_s est de la même forme qu'un dipôle hydrodynamique [Guyon et al., 2001]. L'hypothèse d'un écoulement moyenné potentiel serait ainsi toujours valable avec une suspension. Pour le vérifier, nous allons l'étudier quantitativement.

Étude quantitative

La figure III.26-a) présente la variation du champ de vitesses radial de \tilde{v}_s sur l'axe vertical passant par le centre de la bulle de la figure III.25 (droite verticale rouge sur la figure). Ces données sont obtenues en moyennant les données issues de 50 images : on mesure \tilde{v}_s sur chaque image et on effectue une moyenne sur les jeux de données obtenus de \tilde{v}_s . Les barres d'erreur représentent les déviations temporelles de \tilde{v}_s au cours de la remontée. Cela permet notamment d'avoir une meilleure résolution et de s'affranchir d'éventuels problèmes de convergence de l'algorithme pour certains points. La figure III.26-b) présente les mêmes données mais cette fois-ci normalisées par les valeurs instantanées de v_b et d_b mesurés par le traitement d'images.

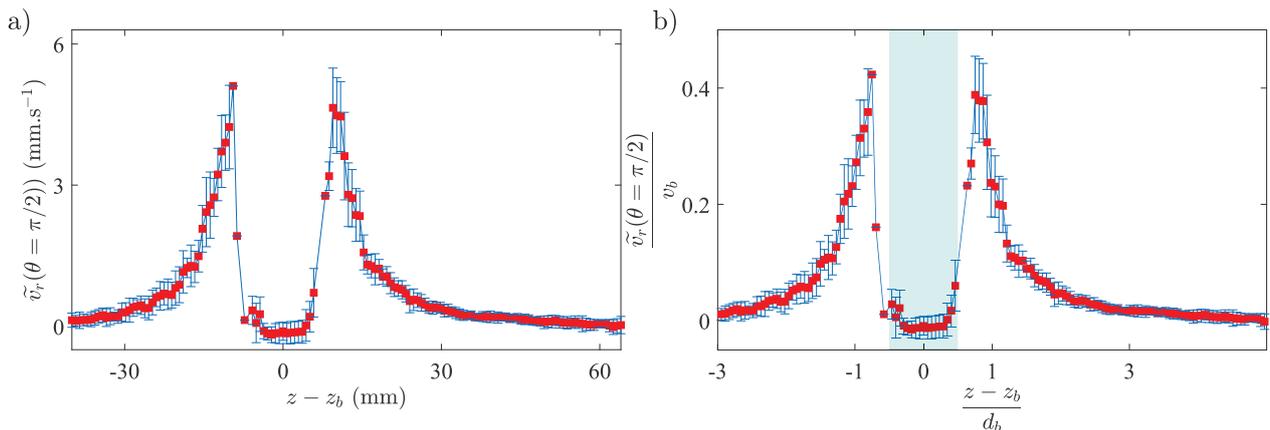


FIGURE III.26 - **Exemple de champ de vitesses mesuré par PIV.** [$h = 2.3$ mm] a) champ de vitesses radial \tilde{v}_r en $\theta = \pi/2$ de la bulle présentée sur la figure III.25 en fonction de la distance au centre de la bulle $z - z_b$. b) Même graphe mais normalisé par la vitesse verticale de la bulle v_b et le diamètre d_b . L'aire colorée représente la position théorique d'une bulle comprise entre $-d_b/2$ et $d_b/2$.

Comme observé qualitativement, le champ de vitesses dans la bulle est négligeable devant celui en dehors de la bulle. Les courbes sont toutes symétriques, ce qui implique par exemple que le comportement en dessous et au dessus de la bulle est identique : les grains reprennent place directement après

le passage de la bulle et il n'y a pas de déplétion visible de grains dans le sillage de la bulle.

On peut effectuer cette étude pour différentes fractions volumiques. La figure III.27 présente l'évolution de $|\widetilde{\mathbf{v}}_s|/v_b$ en fonction de r/d_b pour 3 bulles d'environ 25 mm évoluant dans différentes suspensions. Le principe de construction de la courbe est le suivant : pour chaque point r/d_b , on trace un cercle de ce rayon et on effectue la moyenne de la norme de tous les vecteurs $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ intersectant ce cercle. Enfin, on normalise par v_b et on effectue une moyenne sur 50 images pour réduire le bruit. La barre d'erreur est donnée par la dispersion des données.

Les courbes se superposent toutes et suivent, pour $r/d_b > 0.7$, la fonction $0.25x^{-2}$, ce qui correspond à

$$|\widetilde{\mathbf{v}}_s| = \frac{v_b}{4} \left(\frac{d_b}{r} \right)^2. \quad (\text{III.23})$$

Dans la zone $r/d_b \in [0.5 \ 0.7]$, les résultats obtenus sont à prendre avec prudence : proche du contour, le nombre de grains est plus faible et l'interpolation PIV est perturbée, ce qui se remarque aux barres d'erreur plus élevées dans cette zone. On supposera que l'équation (III.23) reste valable dans cette zone. On retrouve ainsi exactement la norme du champ de vitesses $\widetilde{\mathbf{v}}_f$ (III.22), et ce pour toutes les fractions volumiques étudiées. De même, pour tous les diamètres de bulles étudiés, on observe le même comportement.

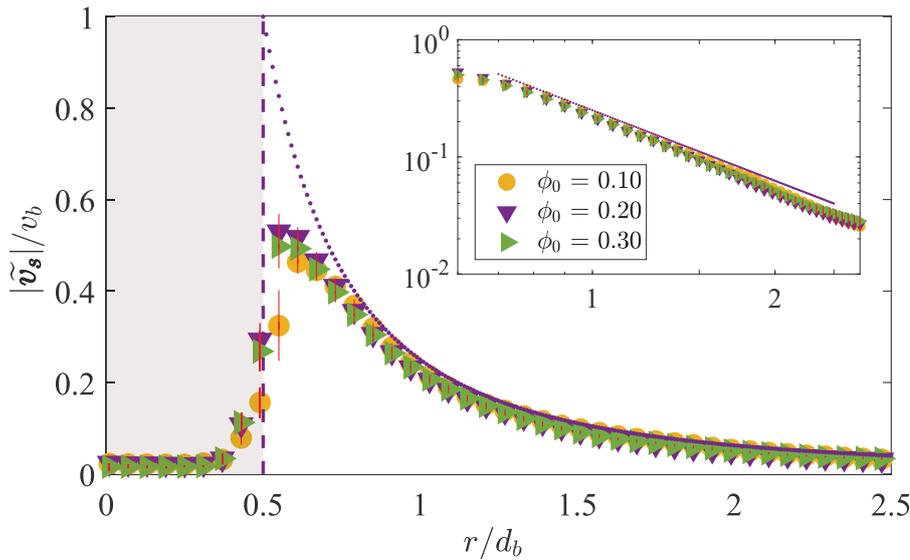


FIGURE III.27 - **Norme du champ mesuré par PIV.** [$h = 2.3$ mm] Évolution du champ de vitesses $|\widetilde{\mathbf{v}}_s|$ normalisé par v_b en fonction du rayon normalisé pour d_b pour trois bulles de même diamètre $d_b \approx 25$ mm évoluant dans trois fractions volumiques différentes. Insert : même graphe à l'échelle logarithmique. Les traits pointillés représentent la fonction $1/4x^2$.

Pour vérifier si la dépendance de $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ en θ est la même que $\widetilde{\mathbf{v}}_f$, nous avons tracé sur la figure III.28 l'évolution du champ mesuré par PIV \widetilde{v}_r et \widetilde{v}_θ tous deux normalisés par $|\widetilde{\mathbf{v}}_s|$ pour trois valeurs de r .

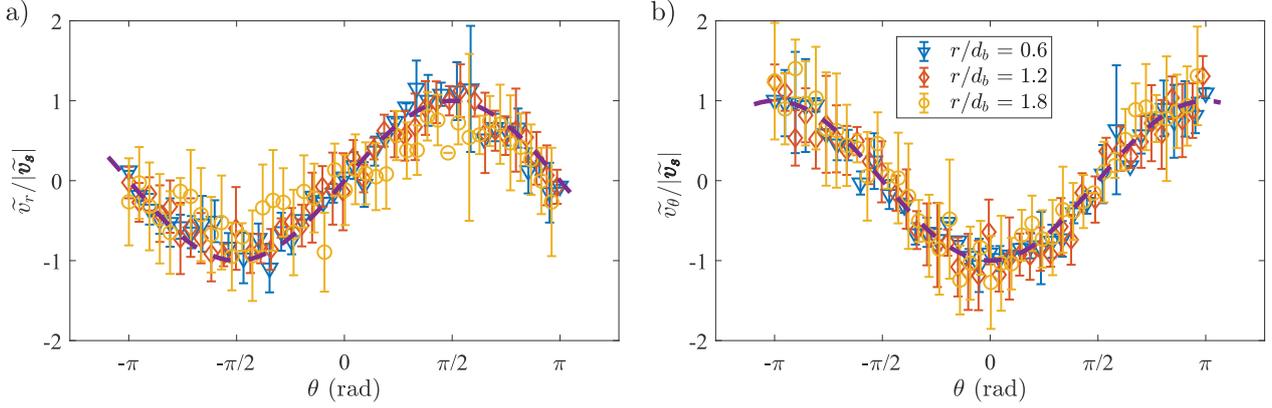


FIGURE III.28 - **Champ radial et orthoradial mesurés par PIV.** [$h = 2.3$ mm, $\phi_0 = 0.3$] a) Évolution du champ radial \tilde{v}_r normalisé par la norme du champ total $|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ en fonction de θ pour différentes valeurs de r/d_b . La courbe tiretée correspond à l'équation $y = \sin(x)$. b) Évolution du champ orthoradial \tilde{v}_θ normalisé par la norme du champ total $|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ en fonction de θ pour différentes valeurs de r/d_b . La courbe tiretée correspond à l'équation $y = -\cos(x)$. Les données sont issues du champ mesuré sur la figure III.25.

On constate que les données de $\tilde{v}_r/|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ se superposent pour les trois valeurs de r/d_b à la courbe $y = \sin(x)$. De même, $\tilde{v}_\theta/|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ se superpose à $y = -\cos(x)$. Cela signifie que

$$\tilde{v}_r = |\tilde{\mathbf{v}}_s| \sin(\theta), \quad \tilde{v}_\theta = -|\tilde{\mathbf{v}}_s| \cos(\theta). \quad (\text{III.24})$$

Cette relation est aussi valable pour tous les diamètres de bulles étudiés et toutes les fractions volumiques. On a donc finalement

$$\tilde{\mathbf{v}}_s = \frac{v_b}{4} \left(\frac{d_b}{r} \right)^2 [\sin(\theta) \mathbf{e}_r - \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta] = \tilde{\mathbf{v}}_f \quad \forall \phi, \forall d_b. \quad (\text{III.25})$$

Écoulement moyenné d'une suspension

Pour tout diamètre de bulle d_b et pour toute fraction volumique ϕ_0 , l'écoulement moyenné de la suspension reste potentiel (et incompressible). La suspension agit comme un fluide Newtonien pour l'écoulement moyenné.

Notons que pour des grandes bulles elliptiques, on retrouve aussi le même comportement en normalisant le champ moyenné horizontal par b et le champ moyenné vertical par a .

Néanmoins, ce résultat ne permet pas de comprendre le surplus de vitesse observé dans les suspensions. Cependant, si on a bien $\tilde{\mathbf{v}}_f = \tilde{\mathbf{v}}_s$, le champ de vitesses non moyenné \mathbf{v}_s n'a aucune raison d'être identique de \mathbf{v}_f (identique à un Poiseuille plan). Cela amène donc à penser que le mécanisme responsable a lieu dans la direction transverse entre les plaques, c'est à dire dans l'écoulement entre les plaques. De plus, nous avons vu dans l'introduction qu'un écoulement de particules dans un canal rectangulaire était sensible au phénomène de migrations de grains [Xu et al., 2016, Snook et al., 2016] (et qu'il est nécessaire de regarder séparément le fluide et les particules). Nous allons donc voir comment revisiter la dérivation de la vitesse de Maxworthy tout en prenant en compte ce phénomène.

6.5 Modélisation théorique de la remontée de bulles

Dans le chapitre 2 partie 2.4.4, nous avons mis en évidence la phénomène de migration de particules, qui change localement la distribution des particules lorsque la suspension est confinée. On se place toujours dans une cellule de Hele-Shaw d'épaisseur h . On note \mathbf{v}_s le champ de vitesses de la suspension, et P la pression. On considère une bulle circulaire de diamètre $d_b/2$ axisymétrique et remontant verticalement. On suppose que $d_b \gg h$ pour appliquer l'approximation de lubrification ce qui implique que la pression ne dépend pas de y et que la composante transverse du champ \mathbf{v}_s est nulle. Vu que la texture des grains est globalement homogène dans le plan des plaques (aux déplétions/réplétions près), on suppose que la fraction volumique locale ϕ ne dépend que de la variable y . On note donc la dépendance $\phi(y)$ et $\eta_s(y)$.

6.5.1 Loi de Darcy

L'équation de Navier-Stokes dans la cellule de Hele-Shaw à viscosité variable s'écrit sous la forme (voir Annexe D)

$$\nabla \Pi_s(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s(y) \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial y} \right), \quad (\text{III.26})$$

avec $\Pi_s = P - \rho_f g z$. Pour obtenir une expression pour \mathbf{v}_s , on intègre la relation précédente : l'écoulement étant symétrique en $y = 0$, la dérivée $\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial y} = \mathbf{0}$ en $y = 0$, d'où

$$\eta_s(y) \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial y} = y \nabla \Pi_s(r, \theta). \quad (\text{III.27})$$

Puis, par une seconde intégration et en utilisant que $\mathbf{v}_s(-h/2) = \mathbf{0}$, on obtient que

$$\mathbf{v}_s(r, \theta, y) = \nabla \Pi_s(r, \theta) \int_{-h/2}^y \frac{y_1}{\eta_s(y_1)} dy_1. \quad (\text{III.28})$$

Comme pour le développement du champ de vitesses en cellule de Hele-Shaw, on fait apparaître le champ de vitesses moyenné $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ en intégrant la relation précédente entre $y = -h/2$ et $y = h/2$, ce qui donne que

$$\widetilde{\mathbf{v}}_s(r, \theta) = \frac{\nabla \Pi_s(r, \theta)}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^y \frac{y_1}{\eta_s(y_1)} dy_1 dy. \quad (\text{III.29})$$

Cette relation montre que l'écoulement moyen autour de la bulle est toujours régi par une loi de Darcy, la vitesse moyenne étant proportionnelle au gradient de pression. Cependant, une première différence importante apparaît : le facteur de forme dans la loi de Darcy est différent entre le cas Newtonien (équation (I.28) du chapitre 1) et avec grains. On retrouve exactement les mêmes équations si $\eta_s(y) = \text{Cste} = \eta_f$.

On simplifie (III.29) en utilisant une intégration par parties :

$$\widetilde{\mathbf{v}}_s(r, \theta) = -\frac{\nabla \Pi_s(r, \theta)}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2}{\eta_s(y)} dy. \quad (\text{III.30})$$

6.5. Modélisation théorique de la remontée de bulles

Rappelons ici que l'expression n'est vérifiée que dans le cadre de grosses bulles ($d_b \gg h$) pour se placer dans l'approximation de lubrification. L'expression de $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ étant connue, on peut déterminer en tout point le gradient de pression grâce à $\eta_s(\phi(y))$.

6.5.2 Modèle de Maxworthy appliqué aux suspensions granulaires

Afin de remonter à la vitesse de remontée de la bulle v_b , nous utilisons la méthode énergétique présentée chapitre 1 partie 1.2.4, initialement inspirée de [Maxworthy, 1986]. La puissance dissipée dans la cellule due aux effets visqueux \mathcal{P}_η s'écrit

$$\mathcal{P}_\eta = \int_{\text{cellule}} \eta_s(y) \left| \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial y} \right|^2 d\tau \quad (\text{III.31})$$

$$= \int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \eta_s(y) \left| \frac{\partial \mathbf{v}_s(r, \theta, y)}{\partial y} \right|^2 r dr d\theta dy. \quad (\text{III.32})$$

Nous avons montré que le champ $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ était nul dans le film de lubrification au niveau dans la bulle lors de l'étude PIV (partie 6.4.2), ce qui justifie qu'on ne prenne pas en compte la dissipation dans cette partie de la cellule. En utilisant une intégration par parties sur l'intégrale entre les deux plaques et la condition $\mathbf{v}_s(y = \pm h/2) = \mathbf{0}$ aux bords, on obtient

$$\mathcal{P}_\eta = - \int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{v}_s(r, \theta, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s(y) \frac{\partial \mathbf{v}_s(r, \theta, y)}{\partial y} \right) r dr d\theta dy. \quad (\text{III.33})$$

Ici, \cdot représente l'opérateur produit scalaire. On reconnaît l'équation (III.26) dans la parenthèse. En utilisant l'équation (III.30) pour s'affranchir du gradient de pression, la puissance dissipée se réécrit

$$\mathcal{P}_\eta = - \int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{v}_s(r, \theta, y) \cdot \left(\frac{-h}{\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2}{\eta_s(y)} dy} \widetilde{\mathbf{v}}_s(r, \theta) \right) r dr d\theta dy. \quad (\text{III.34})$$

Comme le terme entre parenthèses est indépendant de y , l'intégrale selon y fait apparaître la moyenne de \mathbf{v}_s sur l'épaisseur. On peut donc grandement simplifier l'équation qui s'écrit sous la forme

$$\mathcal{P}_\eta = h^2 \frac{\int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{\mathbf{v}}_s(r, \theta)|^2 r dr d\theta}{\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2}{\eta_s(y)} dy}. \quad (\text{III.35})$$

L'expression de la norme du champ $\widetilde{\mathbf{v}}_s$ étant donnée par (III.23), le numérateur se simplifie en

$$\int_{d_b/2}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{\mathbf{v}}_s(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \frac{\pi v_b^2 d_b^2}{4}. \quad (\text{III.36})$$

La puissance dissipée s'écrit donc :

$$\mathcal{P}_\eta = \frac{\pi\eta_f v_b^2 d_b^2 h^2}{4 \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2}{\widehat{\eta}_s(\phi(y))} dy}, \quad (\text{III.37})$$

avec $\widehat{\eta}_s(\phi(y)) \equiv \eta_s(\phi(y))/\eta_f$, et $\phi(y)$ la fraction volumique locale entre les plaques. On peut calculer la dissipation dans le cas d'une fraction volumique constante au sein de la suspension ($\phi(y) = \phi_0$), notée \mathcal{P}_η^0 :

$$\mathcal{P}_\eta^0 = \frac{3\pi\eta_s(\phi_0)v_b^2 d_b^2}{h}. \quad (\text{III.38})$$

Cette équation est identique à la puissance dissipée dans le cas d'un liquide Newtonien de viscosité $\eta_f = \eta_s(\phi_0)$. On normalise donc la puissance dissipée par \mathcal{P}_η^0 : en combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$\mathcal{P}_\eta = \frac{\mathcal{P}_\eta^0}{\alpha(\phi_0)} = \frac{3\pi d_b^2 \eta_s(\phi_0) v_b^2 / h}{\alpha(\phi_0)}, \quad (\text{III.39})$$

$$\alpha(\phi_0) \equiv \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \widehat{y}^2 \frac{\widehat{\eta}_s(\phi_0)}{\widehat{\eta}_s(\phi(h/2\widehat{y}))} d\widehat{y}, \quad (\text{III.40})$$

avec $\widehat{y} = 2y/h$. De même, la puissance reçue par la bulle s'exprime par la force d'Archimède, qui ne change pas que l'on soit dans un liquide ou une suspension :

$$\mathcal{P}_B = \rho_f g \left(\frac{\pi d_b^2 h}{4} \right) v_b \quad (\text{III.41})$$

En régime stationnaire, lorsque $d_b \gg h$, ces deux puissances sont égales d'où

$$\rho_f g \left(\frac{\pi d_b^2 h}{4} \right) v_b = \frac{3\pi d_b^2 \eta_s(\phi_0) v_b^2 / h}{\alpha(\phi_0)} \Rightarrow v_b = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \alpha(\phi_0). \quad (\text{III.42})$$

Un calcul similaire pour une bulle elliptique d'axes a parallèle à \mathbf{v}_b et b perpendiculaire à \mathbf{v}_b permet d'obtenir que

$$v_b = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \left(\frac{a}{b} \right) \alpha(\phi_0). \quad (\text{III.43})$$

On reconnaît ici la vitesse de Maxworthy modifiée v_s^* . Par conséquent, la vitesse de remontée d'une bulle dans une suspension, lorsque $d_b \gg h$, vaut

$$v_b = v_s^* \alpha(\phi_0), \quad v_s^* = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \left(\frac{a}{b} \right), \quad \alpha(\phi_0) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \widehat{y}^2 \frac{\widehat{\eta}_s(\phi_0)}{\widehat{\eta}_s(\phi(\widehat{y}))} d\widehat{y}. \quad (\text{III.44})$$

Cette équation nous indique que la connaissance $\alpha(\phi_0)$ permet de remonter à la vitesse de remontée d'une bulle dans une suspension. Le coefficient $\alpha(\phi_0)$, que nous appelons **coefficient d'atténuation**, est minimum et égal à 1 pour un fluide Newtonien sans présence de ($\phi(\widehat{y}) = \phi_0 = 0$) ou lorsque le profil de fraction volumique locale est constant entre les plaques ($\phi(\widehat{y}) = \phi_0 \neq 0$). Cela implique bien que dans le cas d'une fraction volumique non uniforme entre les plaques, la vitesse d'une bulle dans une

6.5. Modélisation théorique de la remontée de bulles

suspension sera bien supérieure à la vitesse d'une même bulle mais dans un liquide de même viscosité et que α est précisément la mesure de cette augmentation.

Il nous faut maintenant déterminer le profil de viscosité pour connaître l'expression finale de α . Pour cela, nous allons utiliser les résultats du chapitre 2 sur les suspensions confinées afin de déterminer le profil de la fraction volumique $\phi(y)$.

6.5.3 Fraction volumique locale entre les plaques

Équation de migration stationnaire

Nous avons vu dans le chapitre 2, la nécessité de considérer la dynamique des particules et du fluide séparément. Le développement effectué dans la partie 2.4.4 afin de mettre en équation ce comportement distinct entre les deux phases a mené à l'équation de migration induite par cisaillement (I.98), que nous rappelons ici :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\lambda_2 d_p^2}{18 \eta_f} \frac{\partial}{\partial y} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial y} (\eta_n(\phi) \dot{\gamma}_s) \right], f(\phi) = [1 - \phi(y)]^5, \quad (\text{III.45})$$

avec λ_2 une constante rhéologique, $\dot{\gamma}_s$ le taux de cisaillement appliqué par la suspension et $\eta_n(\phi)$ la viscosité normale responsable des contraintes normales à la direction du cisaillement. Dans le cas où le régime est stationnaire, l'équation se simplifie en

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial y} (\eta_n(\phi) \dot{\gamma}_s) \right] = 0. \quad (\text{III.46})$$

En supposant la forme de η_n connue, les deux inconnues de cette équation sont $\dot{\gamma}_s$ et ϕ . On peut déterminer $\dot{\gamma}_s$ par la relation (III.27) projetée selon la direction du vecteur vitesse \mathbf{v}_s que l'on nomme x_s , ce qui donne que

$$\frac{\partial |\mathbf{v}_s|}{\partial y} = \dot{\gamma}_s = \frac{|y|}{\eta_s(\phi)} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_s}. \quad (\text{III.47})$$

En combinant les deux équations précédentes, on s'affranchit de l'inconnue $\dot{\gamma}_s$. On obtient donc que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\eta_n(\phi)}{\eta_s(\phi)} |y| \right) \right] = 0. \quad (\text{III.48})$$

Le gradient de pression se simplifie car il est indépendant de y et non nul. En supposant $\eta_n(\phi)$ et $\eta_s(\phi)$ connues, la seule inconnue de l'équation est $\phi(y)$. Les conditions limites/initiales sont les suivantes :

- I L'écoulement étant symétrique en $y = 0$, la fraction volumique locale l'est aussi et le gradient de vitesse est nul, soit $\dot{\gamma}(y = 0) = 0$.
- II L'intégration numérique ou analytique des équations amènent des problèmes de divergence de la fraction volumique locale en $y = 0$. On impose que $\max(\phi(y)) = \phi_c$.
- III Pour une suspension de fraction volumique ϕ_0 , la quantité moyenne de particules doit rester la même d'où $\tilde{\phi}(y) = \phi_0$.

En intégrant l'équation (III.48) avec la condition (I), on obtient donc

$$\boxed{\frac{\eta_n(\phi)}{\eta_s(\phi)} = \frac{\beta}{|y|}}, \quad (\text{III.49})$$

avec β une constante. Pour résoudre cette équation, il faut maintenant utiliser les formes empiriques déterminées pour η_n et η_s . Les différentes études menées pour déterminer la viscosité normale [Morris and Boulay, 1999, Boyer et al., 2011a] proposent la forme suivante pour $\eta_n(\phi)$:

$$\eta_n(\phi) = \eta_f K_n \left(\frac{\phi}{\phi_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-2}, \quad (\text{III.50})$$

avec $K_n = 0.75$ pour Morris & Boulay et $K_n = 1$ pour Boyer. La constante n'est pas d'intérêt ici car elle s'intègre dans la constante β de l'équation (III.49), on la prendra égale à 1. Pour la loi de viscosité effective, nous allons d'abord utiliser celle de Maron-Pierce (I.82). Nous comparerons également les résultats avec des intégrations numériques pour les autres lois présentées en introduction.

Solution analytique : Loi de Maron-Pierce.

On rappelle que la loi de Maron-Pierce s'écrit [Maron and Pierce, 1956]

$$\eta_s(\phi) = \eta_f \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right)^{-2}. \quad (\text{III.51})$$

L'équation (III.49) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\phi(y)^2}{\phi_c^2} = \frac{\beta}{|\hat{y}|}. \quad (\text{III.52})$$

Ici, on a normalisé y en posant $\hat{y} = y/(h/2)$ et en intégrant le facteur $h/2$ dans la constante β . La fraction volumique ne peut pas dépasser ϕ_c avec la condition (II) ce qui correspond à une valeur de $|\hat{y}| \geq \beta$. Pour des valeurs de $|\hat{y}|$ inférieures à β , il faut imposer $\phi = \phi_c$. La fraction volumique locale entre les plaques vaut donc

$$\boxed{\phi(\hat{y}) = \begin{cases} \phi_c & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \phi_c \sqrt{\frac{\beta}{|\hat{y}|}} & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}}, \quad (\text{III.53})$$

avec $\sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{1 - \phi_0/\phi_c}$ avec la condition (III). La condition (I) de symétrie est bien respectée grâce à la valeur absolue. La figure III.29 présente la forme de la fraction volumique locale entre les plaques. On remarque effectivement que les particules s'accablent au centre de la cellule, en accord avec les phénomènes observés dans l'introduction sur les suspensions (voir figure I.18).

En intégrant l'équation (III.44) et en utilisant la loi de Maron-Pierce (III.51) associé à la forme analytique pour $\phi(y)$ (III.53), on obtient le coefficient d'atténuation $\alpha(\phi_0)$:

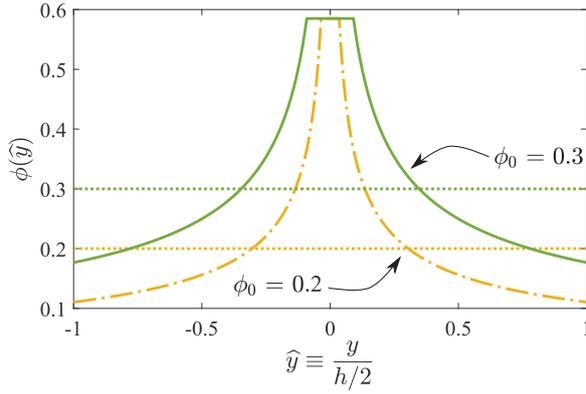


FIGURE III.29 - **Distribution des particules entre les plaques.** Fraction volumique locale $\phi(\hat{y})$ en fonction de $\hat{y} \equiv h/2y$ pour deux fractions volumiques moyennes $\phi_0 = 0.3$ et $\phi_0 = 0.1$. Les courbes en traits pleins correspondent à l'équation (III.53) et les lignes tiretées représentent la fraction volumique sans effet de migration de particules. Pour cet exemple, la fraction volumique maximale est choisie telle que $\phi_c = 0.585$.

$$\alpha(\phi_0, \phi_c) = \frac{1}{(1 - \sqrt{\beta})^4} \left(1 - \frac{12}{5} \sqrt{\beta} + \frac{3}{2} \beta - \frac{1}{10} \beta^3 \right), \quad \beta = \left(1 - \sqrt{1 - \phi_0/\phi_c} \right)^2. \quad (\text{III.54})$$

On compare maintenant la forme théorique de α aux résultats expérimentaux présentés précédemment. La figure III.30-a) présente la superposition des données expérimentales issues de la figure III.23-c), ainsi que l'équation théorique (III.54), avec ϕ_c paramètre libre compris entre 0.55 et 0.625.

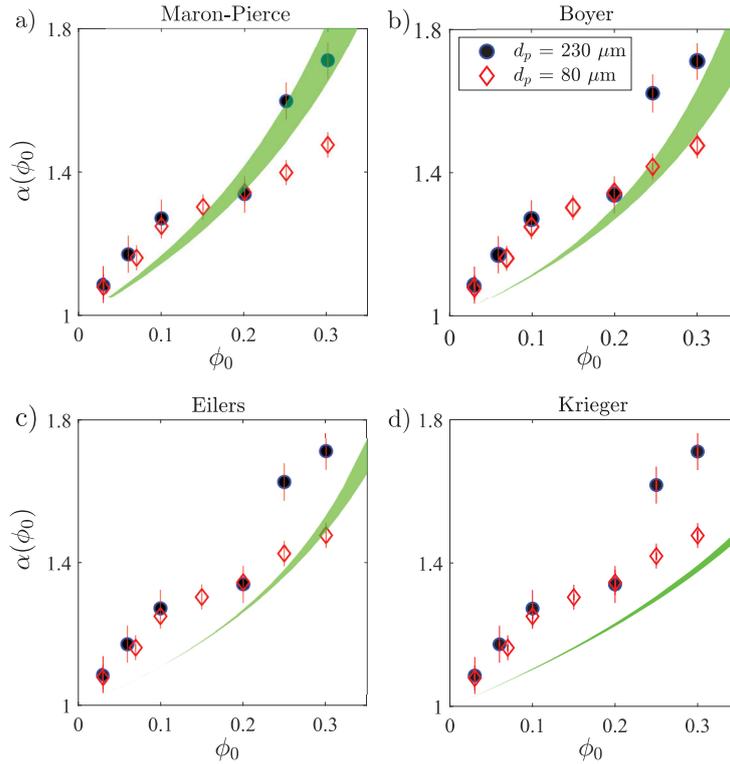


FIGURE III.30 - **Coefficient d'atténuation.** Comparaison entre $\alpha(\phi_0)$ mesuré expérimentalement et numériquement. Les régions vertes correspondent à la résolution numérique de α pour différentes lois empiriques indiquées en titre des graphes et pour $\phi_c \in [0.55, 0.625]$. Pour le graphe représentant la loi de Maron-Pierce, la région verte est donnée par l'équation (III.54).

Les graphes montrent une bonne corrélation entre le coefficient d'atténuation issu du modèle SBM et nos données expérimentales. Cela confirme que la migration de particules est le mécanisme sous-jacent au surplus de vitesse des bulles observé. Il est aussi possible d'obtenir la valeur du coefficient

granulaire à partir des autres lois rhéologiques (Boyer, Eilers, Krieger). Pour cela, nous avons résolu numériquement (III.49) en prenant comme expression de $\hat{\eta}_n(\phi)$ celle donnée par (III.50) avec $K_n = 1$. Cela permet d'obtenir la fraction volumique locale $\phi(y)$ donc $\eta_s(y)$ et enfin le coefficient d'atténuation $\alpha(\phi_0)$. La figure III.30-b)-c)-d) présente la comparaison entre les valeurs expérimentales de α et celles obtenues numériquement ou analytiquement, en laissant le paramètre ϕ_c libre (entre 0.55 et 0.625).

Nous proposons maintenant de déterminer complètement l'écoulement dans la suspension, et de comparer l'hydrodynamique avec le cas de la remontée d'une bulle dans un liquide Newtonien afin de comprendre et de mettre en évidence les effets physiques justifiant ces différences.

6.5.4 Hydrodynamique de la suspension : résolution

On peut déterminer analytiquement l'écoulement total dans le fluide. Le taux de cisaillement s'obtient depuis l'équation (III.48) :

$$\dot{\gamma}_s = \frac{y}{\eta_s(\phi)} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_s} \Rightarrow \dot{\gamma}_s = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \frac{h|\hat{y}|}{2\eta_f} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x} \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{|\hat{y}|}}\right)^2 & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{III.55})$$

On obtient la norme de la vitesse \mathbf{v}_s en intégrant la relation précédente :

$$|\mathbf{v}_s|(\hat{y}) = \begin{cases} \frac{-h^2}{8\eta_f} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_s} \left(1 - \frac{8}{3}\sqrt{\beta} + 2\beta - \frac{\beta^2}{3}\right) & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \frac{-h^2}{8\eta_f} \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_s} \left[(1 - \hat{y}^2) + \frac{8\sqrt{\beta}}{3} (|\hat{y}|^{3/2} - 1) + 2\beta(1 - \hat{y}) \right] & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}, \quad (\text{III.56})$$

et en utilisant que $|\mathbf{v}_s|(\hat{y} = 1) = 0$.

Comparaison avec un liquide pur

On souhaite comparer la dynamique d'une bulle dans une suspension de viscosité moyenne $\eta_s(\phi_0)$ et dans un liquide Newtonien de même viscosité $\eta_s(\phi_0)$. D'après l'équation (I.26) :

$$\widetilde{\mathbf{v}}_f = \frac{-h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \nabla \Pi_f. \quad (\text{III.57})$$

Or, $\widetilde{\mathbf{v}}_f = \widetilde{\mathbf{v}}_s$, donc, d'après l'équation (III.30) :

$$\frac{-h^2}{12\eta_s(\phi_0)} \nabla \Pi_f = -\frac{\nabla \Pi_s(r, \theta)}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2}{\eta_s(y)} dy. \quad (\text{III.58})$$

On obtient directement que

$$\Pi_f(r, \theta) = \Pi_s(r, \theta) \alpha(\phi_0). \quad (\text{III.59})$$

Dans une suspension, le champ de pression autour de la bulle est plus faible que celui généré par une bulle de même taille dans un liquide pur de même viscosité. En utilisant la relation (I.26) pour le liquide Newtonien, on obtient donc, en projetant selon x_s † :

†. On peut effectuer tout le raisonnement depuis le début de cette partie en projetant sur un vecteur quelconque dans le plan (r, θ) sans perte de généralités.

$$v_f = -\frac{\alpha(\phi_0)h^2}{8\eta_s(\phi_0)} (1 - \hat{y}^2) \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_s}. \quad (\text{III.60})$$

Pour comparer la dynamique dans les deux cas, on normalise alors par le pré-facteur dans le cas Newtonien, correspondant au maximum de la fonction. Les grandeurs normalisées sont alors :

$$\hat{v}_f \equiv \frac{v_f}{\max(v_f)} = 1 - \hat{y}^2. \quad (\text{III.61})$$

On définit alors $|\hat{v}_s|(\hat{y})$ (simplifié en \hat{v}_s) en divisant par le même facteur, ce qui donne, d'après la relation (III.56) :

$$\hat{v}_s = \frac{\left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_c}\right)^{-2}}{\alpha(\phi_0)} \begin{cases} 1 - \frac{8}{3}\sqrt{\beta} + 2\beta - \frac{\beta^2}{3} & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \left(1 - \hat{y}^2\right) + \frac{8\sqrt{\beta}}{3} \left(|\hat{y}|^{3/2} - 1\right) + 2\beta(1 - \hat{y}) & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{III.62})$$

De même, on peut déterminer le taux de cisaillement dans les deux cas :

$$\hat{\gamma}_f \equiv \frac{\dot{\gamma}_f}{\max(\dot{\gamma}_f)} = |\hat{y}|, \quad \hat{\gamma}_s = \frac{\left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_c}\right)^{-2}}{\alpha(\phi_0)} \begin{cases} 0 & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ |\hat{y}| \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{|\hat{y}|}}\right)^2 & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{III.63})$$

Enfin, la dissipation locale due aux effets visqueux $\mathcal{D}_s(y) = \eta_s(\phi(y))\dot{\gamma}_s^2$, qui devient :

$$\hat{\mathcal{D}}_f \equiv \frac{\mathcal{D}_f}{\max(\mathcal{D}_f)} = \hat{y}^2, \quad \hat{\mathcal{D}}_s = \frac{\left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_c}\right)^{-2}}{\alpha(\phi_0)^2} \begin{cases} 0 & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \hat{y}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{|\hat{y}|}}\right)^2 & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{III.64})$$

Notons que les grandeurs normalisées pour les suspensions sont égales aux grandeurs normalisées pour les fluides avec $\phi_0 = 0$. La figure III.31 présente les différences d'écoulement du fluide pour différentes fractions volumiques ($\phi_0 = 0$ correspondant à un liquide Newtonien).

La non-uniformité de la fraction volumique se répercute sur les différentes données : les forts gradients de vitesse, représentés par des valeurs élevées de $\dot{\gamma}_s$, sont localisés dans les zones où ϕ est plus faible, et ils sont plus importants que dans le cas d'un liquide Newtonien de même viscosité $\eta_s(\phi_0)$. De même, l'écoulement s'apparente à un écoulement dit bouchon/piston[†] au centre. Toutes ces modifications importantes de l'écoulement se répercutent par une baisse globale de la dissipation dans toute l'épaisseur de la cellule, ce qui est à l'origine de la vitesse de remontée plus élevée des bulles comparativement au cas d'un liquide Newtonien. Plus la fraction volumique augmente, plus la dissipation est faible, d'où la croissance de α avec ϕ_0 .

Ces résultats numériques peuvent être comparés à la littérature : plusieurs articles étudient la distribution de fraction volumique ou le champ de vitesses [Lyon and Leal, 1998, Yeo and Maxey, 2011, Snook

†. Plug flow en anglais.

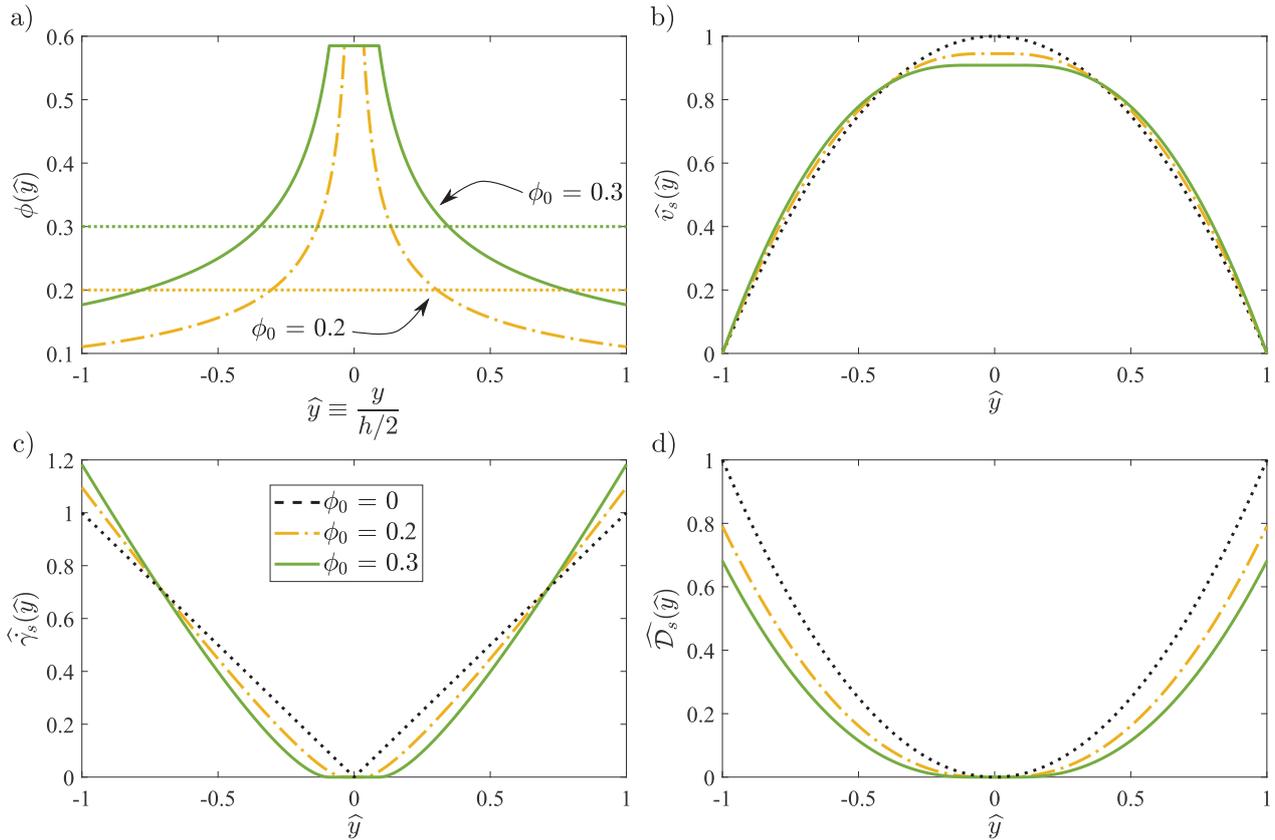


FIGURE III.31 - **Hydrodynamique de la suspension entre les plaques de verre.** a) Fraction volumique (III.53), b) champ de vitesses (III.62), c) taux de cisaillement (III.63) et d) dissipation locale (III.64) dans la direction transverse aux plaques de verre \hat{y} pour trois configurations : liquide pur (ligne pointillée), suspension de fraction volumique moyenne $\phi_0 = 0.2$ (ligne tiretée) et $\phi_0 = 0.3$ (ligne continue). La fraction volumique maximale est fixée à $\phi_c = 0.585$.

et al., 2016] et [Guazzelli and Pouliquen, 2018]. Tout d'abord, nous avons présenté l'évolution de la fraction volumique dans une même géométrie sur la figure I.18, dont les données expérimentales et numériques sont en très bon accord avec notre résolution proposée en régime stationnaire. Toutefois, la résolution numérique impose ϕ_c au centre de la cellule, ce qui est éloigné de la réalité.

Des expériences ont aussi été effectuées pour mesurer le champ de vitesses transverse. Nous effectuons ici une comparaison avec les données de [Lyon and Leal, 1998]. La figure III.32 présente le champ de vitesses expérimentalement obtenu avec une suspension de fraction volumique $\phi_0 = 0.3$, dans une géométrie similaire à la notre. Dans leur expérience, l'écoulement est imposé par des seringues, mais la comparaison est identique à la remontée de bulles.

Là encore, l'accord est très bon entre les données expérimentales et notre résolution numérique, la forme et le maximum de la courbe étant très similaires.

6.5.5 Conclusion

L'étude théorique de la remontée de bulles a été présentée. En utilisant les résultats expérimentaux issus des études PIV, de la théorie des écoulements en cellule de Hele-Shaw et de la théorie de migration de particules dans un canal confiné, nous avons explicité le mécanisme responsable du surplus de vitesse pour une bulle : la non-uniformité de la fraction volumique locale entre les plaques de verre. Les particules s'agencent préférentiellement au centre du canal, modifiant l'hydrodynamique de la suspension autour de la bulle, ce qui a pour conséquence de diminuer la dissipation au sein de la

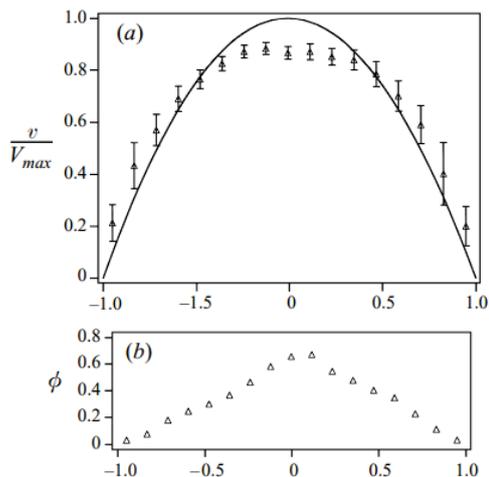


FIGURE III.32 - **Champ de vitesses transverse.** a) Champ de vitesses v/V_{max} représenté dans notre cas par \hat{v}_s . Le maximum de la courbe est environ égal à 0.86. b) fraction volumique locale ϕ . Figure issue de [Lyon and Leal, 1998].

cellule : la bulle remonte plus vite. Ces résultats sont en accord avec les études expérimentales et numériques de l'écoulement dans une suspension, et renforcent l'hypothèse formulée.

Plusieurs points importants sont à soulever : tout d'abord, on observe que le surplus de vitesse est présent même pour des très faibles fractions volumiques ($\phi_0 = 3\%$). Cela impliquerait donc que la migration de particules serait également présente à 3%. Cependant, il n'y a pas encore de consensus sur la fraction volumique minimale pour laquelle la migration de particules est présente, surtout en dessous de 10%. De même, il n'est pas clair que le profil de fraction volumique soit valable pour toute fraction volumique. Il convient à rappeler que η_s et η_n mesurés par [Dagois-Bohy et al., 2015] (voir figure I.16) proviennent de lois empiriques pour 30% – 58%. De même, les mesures de contrainte normale de cisaillement, ou bien la migration induite par cisaillement s'avèrent très difficiles en dessous de 20% [Deboeuf et al., 2009, Metzger and Butler, 2012, Snook et al., 2016, Sarabian et al., 2019]. Comme nous l'avons remarqué précédemment, la fraction volumique n'est dans la réalité pas maximale au centre, de même que la fraction volumique aux parois, à cause de l'interaction possible entre la paroi et les particules [Yeo and Maxey, 2011] (les simulations numériques montrent que la fraction volumique décroît moins rapidement sur les bords). De manière plus fondamentale, nous avons supposé une limite continue de la suspension par le concept de particule fluide. Pour une cellule d'épaisseur $h = 2.3$ mm, il ne peut y avoir que 10 particules maximum entre les plaques, et cette hypothèse est loin d'être valable.

Les calculs précédents ont été effectués dans l'hypothèse d'un état stationnaire, pour lequel aucune dépendance avec la taille des particules n'intervient. Dans la résolution instationnaire, le flux de densité des particules associé à l'équation (III.45) dépend de leur taille, et par conséquent le profil de fraction volumique locale aussi. L'influence de la taille des particules nécessite donc une étude plus approfondie

Les autres pistes de réflexion quant à la présence du surplus de vitesse de la bulle sont liées au film de lubrification : il semble clair que les particules ne se déplacent pas dans le film de lubrification, mais l'interaction paroi-bulle-particules-film reste à analyser. Notamment, il est possible que les particules roulent sans glisser, facilitant d'autant plus le passage de la bulle au travers du film de lubrification.

Pour aller plus loin dans l'expérience de remontée de bulle d'air dans une suspension, il faudrait être capable d'avoir une meilleure résolution sur la fraction volumique en grains à l'échelle locale et entre les plaques, ce qui permettrait d'avoir une idée plus précise des mécanismes en jeu.

Maintenant que nous avons mis en évidence les phénomènes principaux issus de la remontée d'une bulle d'air dans une suspension, nous proposons d'étudier des configurations expérimentales éloignées de ce que nous avons proposé jusqu'ici.

6.6 Étude de l'influence de divers paramètres sur la dynamique

Nous étudions dans cette partie l'influence de deux paramètres : l'épaisseur de la cellule h , en étudiant la remontée de bulle dans une cellule d'entrefer $h = 5$ mm, et la monodispersité des particules, en utilisant une suspension composée de particules polydisperses.

6.6.1 Influence de l'épaisseur

Pour étudier l'influence de l'épaisseur h sur la dynamique de remontée de bulle, nous avons utilisé une cellule semblable à celle présentée sur la figure II.1 et d'épaisseur $h = 5$ mm, que nous comparons à la cellule d'épaisseur $h = 2.3$ mm. Nous avons effectué des remontées de bulles sur les deux cellules avec une suspension identique composée du liquide A_{200} et des particules de taille $230 \mu\text{m}$ pour une fraction volumique $\phi_0 = 0.3$. La figure III.33 présente ainsi les données brutes et normalisées des vitesses et diamètres de bulles.

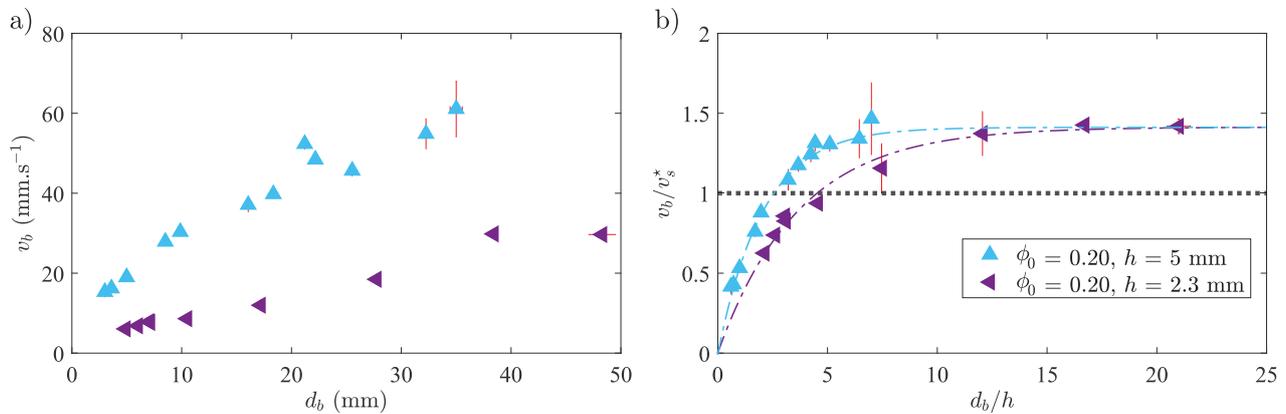


FIGURE III.33 - **Influence de l'épaisseur de la cellule sur la dynamique de remontée.** a) Évolution de la vitesse des bulles en fonction de leur diamètre d_b . b) Vitesse normalisée v_b/v_s^* en fonction du diamètre normalisé d_b/h . Les lignes tiretées représentent les régressions empiriques de l'équation (III.20). Les valeurs de la regression sont données dans le texte.

Comme attendu, à diamètre égal, les bulles remontent plus vite dans la cellule de 5 mm (voir figure III.33-a)). En effectuant la normalisation des données sur la figure III.33-b), et en les comparant à la régression empirique (III.20), on constate que

- lorsque $d_b/h \gg 1$, Les deux courbes ont une valeur de α identique et égale à 1.42. La vitesse v_s^* est bien la bonne vitesse de normalisation.
- lorsque $d_b/h < 8$, les données ne se superposent pas contrairement à ce qui était observé sur la figure III.23. La valeur de μ_2 issue de la régression empirique est de 0.27 pour $h = 2.3$ mm et $\mu_2 = 0.48$ pour $h = 5$ mm.

Ce résultat semble indiquer que le facteur μ_2 est d'une part dépendant de l'épaisseur, mais aussi implicitement de la forme que la bulle prend dans l'entrefer. En effet, le ménisque entre les deux plaques formé par la bulle est beaucoup plus allongé dans la cellule de 5 mm que dans une cellule de plus petite épaisseur. Cela se répercute sur la pression de Laplace qui diffère dans les deux cas. Dans le cas général, nous pensons que le facteur μ_2 dépend d'effets capillaires. Une expérience à mener pour vérifier cette hypothèse serait d'effectuer une remontée de bulles pour deux tensions de surface très différentes, en utilisant par exemple des surfactants pour abaisser grandement γ_f .

6.6.2 Suspension polydisperse

Nous avons effectué des expériences dans des suspensions polydisperses afin d'observer si des différences fondamentales apparaissent comparé au cas de particules sphériques, monodisperses et lisses. La figure III.34-a) présente des images de ces particules qui ont été observées au microscope, et la fonction de densité de probabilité des particules associée. Les particules sont de taille et de forme multiple. La rugosité est difficile à déterminer au vu de la forme très aléatoire des particules. Le diamètre d_p utilisé dans la PDF est défini par le diamètre équivalent si la particule était une sphère.

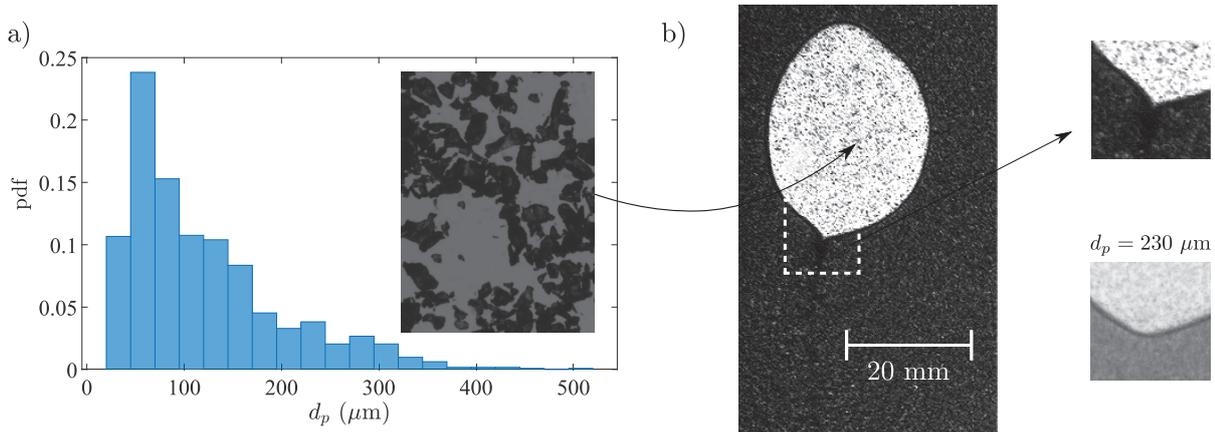


FIGURE III.34 - **Présentation de l'expérience sur une suspension polydisperse.** a) Fonction de densité de probabilité (PDF) des diamètres équivalents des particules détectées associée à une image obtenue au microscope. b) Photographie d'une bulle de taille $d_b = 27$ mm évoluant dans une suspension polydisperse de fraction volumique $\phi_0 = 0.2$ et une cellule d'épaisseur $h = 2.3$ mm. Un zoom est effectué pour montrer le point anguleux sur la queue de la bulle, et est comparé au cas d'une bulle évoluant dans une suspension de même fraction volumique de taille de particules $d_p = 230 \mu\text{m}$ (le temps d'exposition est différent).

Une photographie typique de bulle dans une suspension polydisperse $\phi_0 = 0.2$ est présentée dans la figure III.34-b). On constate un aspect beaucoup plus granuleux et légèrement moins homogène de la suspension comparé aux particules de $230 \mu\text{m}$. Dans le film de lubrification, on constate la présence des particules de différentes tailles en accord avec l'observation au macromètre. Lorsque la bulle remonte, on observe l'apparition d'une zone plus sombre sur le trajet du centre de la bulle. Il semble donc que la fraction volumique locale soit plus élevée en aval de la bulle. Cette réplétion reste présente tant que l'écoulement n'est pas imposé par la remontée d'une autre bulle. Enfin, on observe un point anguleux à l'arrière de la bulle, non présent sur les expériences avec des suspensions sphériques.

Une interprétation possible pour la présence d'une réplétion sur le trajet de la bulle est liée aux hétérogénéités des tailles de particules. Lorsque la suspension est préparée, les particules sont mélangées de manière aléatoire et dans toutes les directions, donc l'arrangement spatial de ces dernières est aléatoire. Lors du passage d'une bulle, la suspension doit se replacer en aval de la suspension et reprendre la place anciennement occupée par la bulle. Le ré-arrangement spatial n'est pas forcément aléatoire, et les particules vont s'organiser en fonction des autres, ce qui peut amener à avoir plus de particules localement. Ce phénomène, relié au comportement dit de ségrégation des particules [Forterre and Pouliquen, 2008], pourrait expliquer la présence d'un point anguleux en aval de la bulle à cause d'une modification locale importante de la fraction volumique. L'influence du film de lubrification est aussi à considérer : l'expérience de [Jeong et al., 2020] a montré que des particules n'étaient pas forcément entraînées dans le film de lubrification si leur taille était trop grande par rapport au film. L'expression (I.108) donne un ordre de grandeur du film liquide sans grains, qui serait ici d'environ 50 à 100 μm , ce qui couperait la distribution de particules.

La viscosité de la suspension pour $\phi_0 = 0.2$ a été mesurée au rhéomètre. La valeur mesurée, égale à $\eta_s = 1.00 \pm 0.01$ Pa.s, est stable sur toute la gamme de cisaillement. L'étude systématique de la remontée de bulles est présentée sur la figure III.35-a).

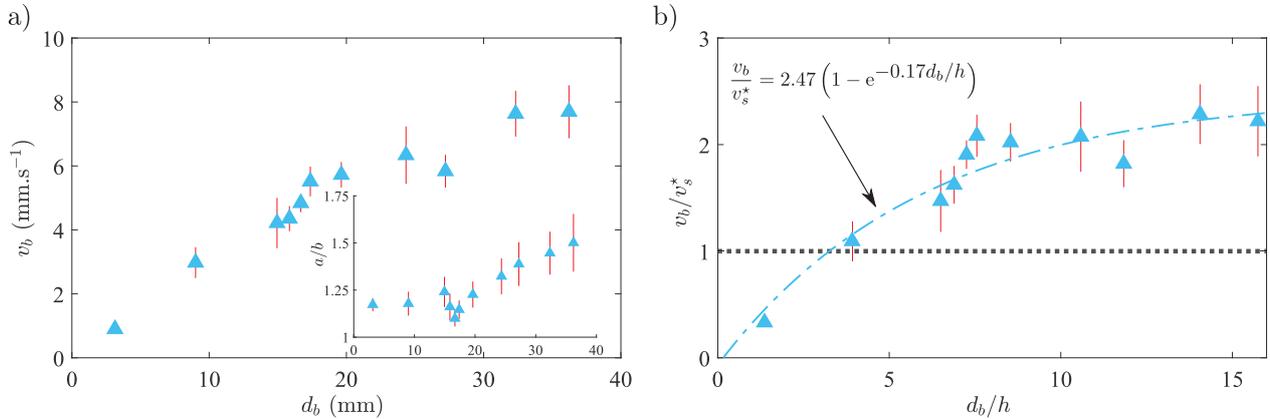


FIGURE III.35 - **Influence de l'épaisseur de la cellule sur la dynamique de remontée.** a) Évolution de la vitesse des bulles en fonction de leur diamètre d_b . Insert : rapport d'aspect a/b des bulles. b) Vitesse normalisée v_b/v_s^* en fonction du diamètre normalisé d_b/h . Les lignes tiretées représentent les régressions empiriques de l'équation (III.20).

Le rapport d'aspect des bulles est constant jusqu'à $d_b \approx 7-8h$ et augmente après sur la figure III.35-a), ce qui est similaire aux observations pour les suspensions sphériques. La régression empirique (III.10) est en accord avec les données présentées ici. La vitesse des bulles augmente avec le diamètre, et on constate qu'il y a de grandes barres d'erreurs sur la vitesse et la forme des bulles. Elles sont dues à la présence de beaucoup plus de réplétions et déplétions locales comparativement au cas $d_p = 230 \mu\text{m}$, qui sont visibles par la caméra, amenant à beaucoup plus de variations de v_b et a/b .

Lorsque l'on normalise les données par v_s^* et h , le graphe de la figure III.35-a), le surplus de vitesse des bulles par rapport à la vitesse de Maxworthy pour un fluide Newtonien est de nouveau observée. La régression empirique donne $\alpha = 2.47$, mais le modèle exponentiel proposé ne permet pas de bien décrire la forme de la courbe, des données manquant à faible diamètre. Pour $d_b/h > 10$, on constate que les bulles remontent au moins 2 fois plus vite pour une suspension polydisperse comparé au cas sans grains. Ces données ayant été obtenues sur un seul jeu de données, et les barres d'erreurs étant élevées, il est difficile de conclure quant à la valeur précise de α .

De même que pour une suspension sphérique, nous avons étudié l'hydrodynamique des grains par méthode PIV, ce que nous présentons sur la figure III.36.

Le champ moyenné reste encore régi par un champ dipolaire. La résolution PIV ne permet cependant pas de mettre en évidence la présence de déficit. Cette expérience ouvre la possibilité à l'étude plus systématique de suspensions polydisperses, par exemple un mélange composé de deux tailles de particules sphériques, afin d'étudier les interactions supplémentaires induites.

6.6. Étude de l'influence de divers paramètres sur la dynamique

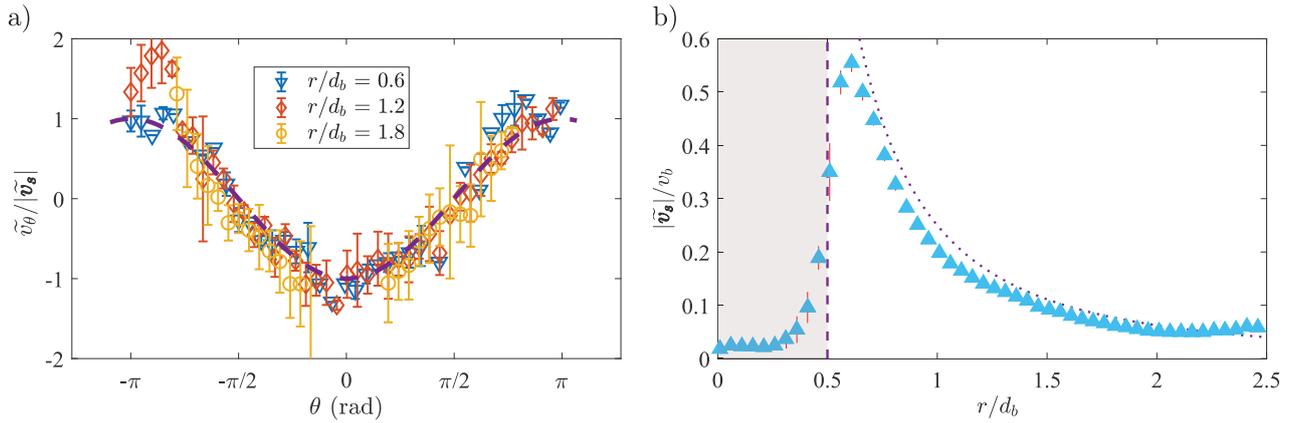


FIGURE III.36 - **Mesures PIV sur une suspension polydisperse.** [$h = 2.3$ mm] Les mesures ont été effectuées sur la bulle figure III.34-b) et moyennées sur 30 données. a) Évolution du champ orthoradial \tilde{v}_θ normalisé par la norme du champ total $|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ en fonction de θ pour différentes valeurs de r/d_b . La courbe tiretée correspond à l'équation $y = -\cos(x)$. b) Évolution du champ de vitesses $|\tilde{\mathbf{v}}_s|$ normalisé par v_b en fonction du rayon normalisé. Les traits pointillés représentent la fonction $1/4x^2$.

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié la remontée de bulles uniques dans une suspension granulaire. Nous avons observé que :

- Les bulles remontent en moyenne de manière verticale, mais peuvent passer individuellement par des excursions horizontales autour de leur trajectoire moyenne. De même, la forme moyenne des bulles est identique au cas des liquides purs, avec des variations instantanées de leur forme. Les hétérogénéités de la fraction volumique au sein de la suspension modifient localement la viscosité effective, et les bulles empruntent préférentiellement des chemins moins visqueux, ce qui crée ces variations de forme et de trajectoire.
- La vitesse moyenne de remontée des bulles a été ensuite étudiée. Nous avons montré qu'**une bulle d'air remonte plus rapidement dans une suspension de viscosité $\eta_s(\phi_0)$ que dans un liquide pur de même viscosité $\eta_f = \eta_s$** . Ce surplus de vitesse α appelé **coefficient d'atténuation**, augmente avec la fraction volumique ϕ_0 et est présent pour des suspensions de 20, 80 et 230 microns.

L'étude de l'hydrodynamique de la suspension par PIV a permis de montrer que le champ de vitesses de la suspension moyenné sur l'épaisseur \mathbf{v}_s reste potentiel et que la suspension agit comme un fluide Newtonien pour l'écoulement moyenné.

Enfin, nous avons mis en équation le phénomène de migration de particules induite par cisaillement présenté dans l'introduction, et ainsi mis en évidence que le coefficient d'atténuation est relié à la fraction volumique locale ϕ entre les plaques. Nous avons déterminé ϕ analytiquement en utilisant la loi de Maron-Pierce :

$$\phi(\hat{y}) = \begin{cases} \phi_c & 0 \leq |\hat{y}| \leq \beta \\ \phi_c \sqrt{\frac{\beta}{|\hat{y}|}} & \beta \leq |\hat{y}| \leq 1 \end{cases},$$

avec $\sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{1 - \phi_0/\phi_c}$. La distribution de particules réduit la dissipation visqueuse dans toute la cellule et est responsable de l'accélération des bulles. Le coefficient α théorique associé a ainsi pu être déterminé :

$$\alpha(\phi_0, \phi_c) = \frac{1}{(1 - \sqrt{\beta})^4} \left(1 - \frac{12}{5} \sqrt{\beta} + \frac{3}{2} \beta - \frac{1}{10} \beta^3 \right).$$

La forme théorique du coefficient d'atténuation est en excellent accord avec les données expérimentales, qui laissent fortement à penser que la migration de particules est bien responsable du surplus de vitesse observé.

Quatrième partie

Bulles multiples dans un liquide Newtonien

7	Remontée de bulles multiples : une introduction	145
7.0.1	Chronophotographie	145
7.0.2	Dynamique de type bulle unique (Zone I)	148
7.0.3	Interaction mutuelle et contact (Zone II)	148
7.0.4	Bulle double collée (zone III)	150
8	Dynamiques d'interaction de plusieurs bulles	153
8.1	Mécanismes d'interaction de deux bulles	154
8.1.1	Modification de la forme des bulles	154
8.1.2	Vitesse de deux bulles en interaction	157
8.2	Interactions de bulles multiples	161
8.2.1	Premier exemple : interaction de 3 bulles	161
8.2.2	Deuxième exemple : interactions de 5 bulles	163
9	Dynamique de bulles multiples : train de bulles	167
9.1	Étude de la dynamique de deux bulles collées	167
9.1.1	Dynamique générale	167
9.1.2	Interface entre deux bulles	169
9.1.3	Bulles de type Maxworthy	170
9.2	Dynamique des trains de bulles	170
9.2.1	Morphologie des trains de bulles	170
9.2.2	Dynamique des trains de bulles : un exemple	171
9.2.3	Réorganisation d'un train de bulle	172
9.2.4	Dynamique générale de remontée	174

Introduction

Une bulle évolue rarement seule dans la nature. L'interaction de deux voire plusieurs bulles est donc un phénomène très important à étudier. Grâce au dispositif expérimental ainsi qu'aux méthodes de mesure mises en place pour l'étude de la remontée d'une bulle unique dans une cellule de Hele-Shaw, nous sommes également en mesure d'étudier le comportement de la remontée de plusieurs bulles. En effet, C'est ce à quoi nous nous sommes attelés dans cette partie.

Cette partie se compose de trois chapitres. Afin de comprendre quels phénomènes sont en jeu dans la remontée de plusieurs bulles, nous étudions dans le chapitre 7 un cas très simple d'interaction entre deux bulles. Nous mettons en évidence deux comportements distincts :

- I **La dynamique de rapprochement des bulles** - Dans le chapitre 8, nous commençons par l'étude la dynamique d'approche entre deux bulles, et différents modèles empiriques sont présentés afin de comprendre les mécanismes sous-jacents à l'accélération observée entre les bulles. Nous généralisons les comportements pour plusieurs bulles
- II **La dynamique des trains de bulles** - Dans le chapitre 9, nous étudions la dynamique qui suit l'interaction en nous intéressant aux bulles collées, autrement appelées trains de bulles. Nous commençons là encore avec le cas de deux bulles, puis un nombre de bulles supérieur ou égal à 3, en comparant les dynamiques au résultat théorique de Taylor et Maxworthy [Taylor and Saffman, 1959, Maxworthy, 1986] pour la vitesse de remontée d'une bulle unique dont la dérivation est donnée au chapitre 1.

Remontée de bulles multiples : une introduction

Dans ce court chapitre, nous proposons d'étudier un exemple typique de remontée de deux bulles dans un liquide Newtonien (A_{200} , voir table II.3) afin de mettre en évidence les différents phénomènes qui interviennent dans la dynamique de remontée de bulles en interaction. Pour simplifier, nous considérons uniquement le cas où les bulles sont injectées à partir du même capillaire et remontent alors en ligne selon le même axe vertical.

7.0.1 Chronophotographie

La figure IV.1 présente des photographies prises à différents instants de deux bulles en interaction.

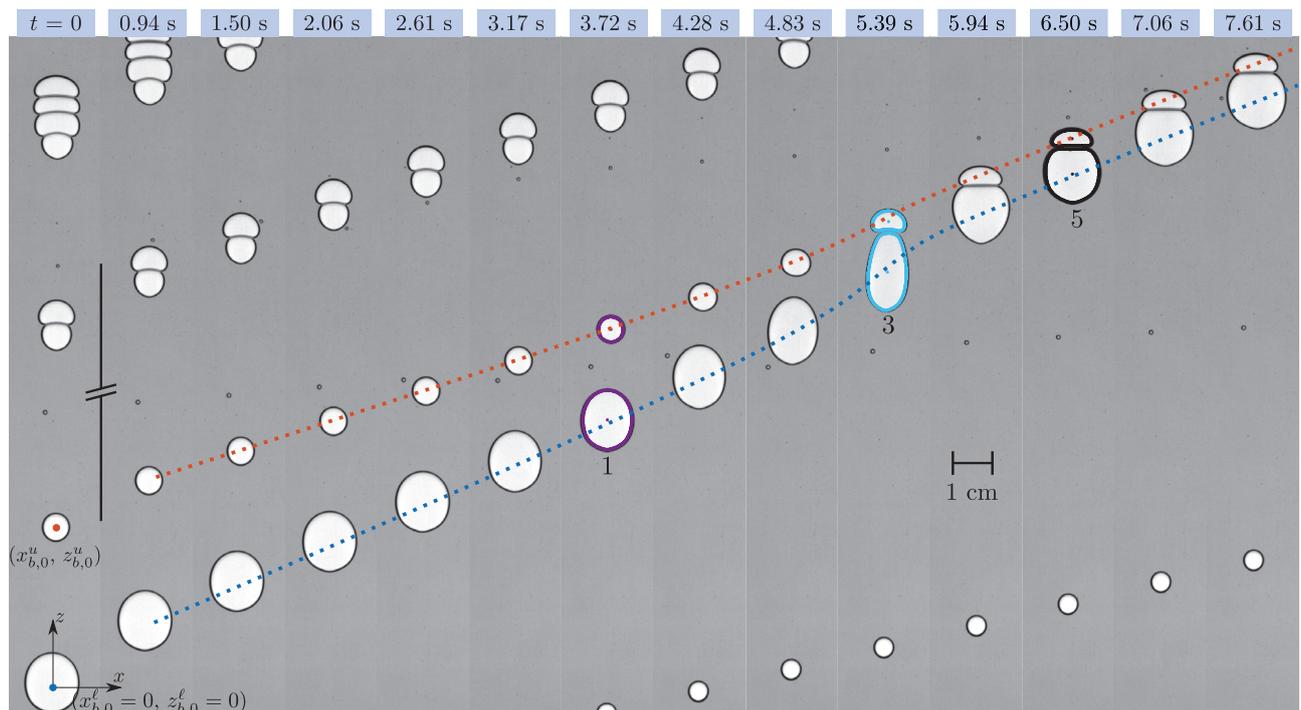


FIGURE IV.1 - **Approche et interaction de deux bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Photographies de deux bulles en interaction dans un liquide Newtonien. Les autres bulles présentes sont assez éloignées et n'influencent pas la dynamique des bulles. Les traits pointillés représentent la trajectoire du centre des bulles. Les bulles colorées et indiquées par un nombre sont associées aux points de même couleur/nombre sur les graphes de la figure IV.2. Le temps d'acquisition est de 18 images par seconde. Les positions des centres des bulles sont indiquées sur le schéma et définies par rapport au centre de la bulle du dessous à $t = 0$.

Dans cet exemple, la bulle du dessous est de plus grande taille que celle du dessus et remonte plus rapidement, ce qui amène à une interaction entre les deux bulles à partir de $t \approx 4$ s. On peut d'ores et déjà séparer la dynamique des bulles en trois zones :

- Zone I ($t \lesssim 4$ s) : il ne semble pas y avoir d'interactions entre les bulles, celles-ci remontent indépendamment entre elles et verticalement.
- Zone II ($t \in [\sim 4 \sim 6]$ s) : les bulles interagissent entre elles. Plus précisément, la bulle du dessous se déforme fortement jusqu'à se coller à la bulle du dessus. Cette dernière se déforme aussi lors de l'interaction ;
- Zone III ($t \gtrsim 6$ s) : les bulles sont collées et le film entre les bulles est stable. Les bulles remontent verticalement.

Paramétrisation de la dynamique de deux bulles

On note avec un exposant u (u pour upper) les paramètres associés à la bulle au dessus et $^\ell$ ceux associés à la bulle du dessous (ℓ pour lower). On se place dans le référentiel coïncidant avec le centre de la bulle du dessous à $t = 0$ et fixe durant l'expérience.

Afin de quantifier le passage de la dynamique indépendante (zone I) à celle mutuelle (zone II et III), on introduit la distance entre les bulles l_b qui nous servira par la suite. l_b est définie comme étant la différence des positions des centres des bulles, ici $l_b = z_b^u - z_b^\ell$. Pour comparer le rapprochement au cas où les bulles évolueraient de manière indépendante, on définit $l_{b,0}$ comme étant :

$$l_{b,0} = (z_{b,0}^u - z_{b,0}^\ell) + (v_{b,0}^u - v_{b,0}^\ell) \times t. \quad (\text{IV.1})$$

La grandeur $l_{b,0}$ représente alors la distance théorique entre les bulles au cours du temps si elles gardent leur vitesse initiale. Le critère arbitraire de transition dans la zone II est défini par un écart de 1% entre l_b et $l_{b,0}$ soit à partir de $t_1 = 3.00$ s. Les bulles sont éloignées de 40 mm initialement et de 28 mm à $t = 3$ s soit deux fois le diamètre de la plus grosse bulle (celle qui modifie l'écoulement à plus grande échelle). A cette distance, la norme du champ de vitesses créé par une bulle ne vaut plus que 6% de la vitesse de cette même bulle (voir figure III.27). Le critère d'indépendance se résume alors par :

Dynamique indépendante des bulles

Deux bulles évoluent indépendamment l'une de l'autre lorsque leur écart $l_b > 2 \times \max(d_b^u, d_b^\ell)$. La zone I d'indépendance des bulles est définie par cette condition.

La création de bulles doubles étant délicate (il y a quasiment toujours d'autres bulles qui sont créées en amont ou aval des bulles doubles que l'on souhaite étudier) on pourra alors s'affranchir de l'influence de celles-ci si le critère ci dessus est vérifié. Ce paramètre quantitatif justifie alors de négliger l'écoulement des autres bulles observées sur la figure IV.1.

Par la suite, nous utiliserons préférentiellement la grandeur l_b lors de la comparaison des différentes grandeurs en jeu pendant l'approche. On définit la grandeur normalisée \hat{l}_b par :

$$\hat{l}_b \equiv \frac{l_b}{\max(d_b^u, d_b^\ell)}. \quad (\text{IV.2})$$

La figure IV.2 présente alors l'évolution temporelle des paramètres typiques des bulles (forme et dynamique). Nous présentons les résultats obtenus suivant les trois zones.

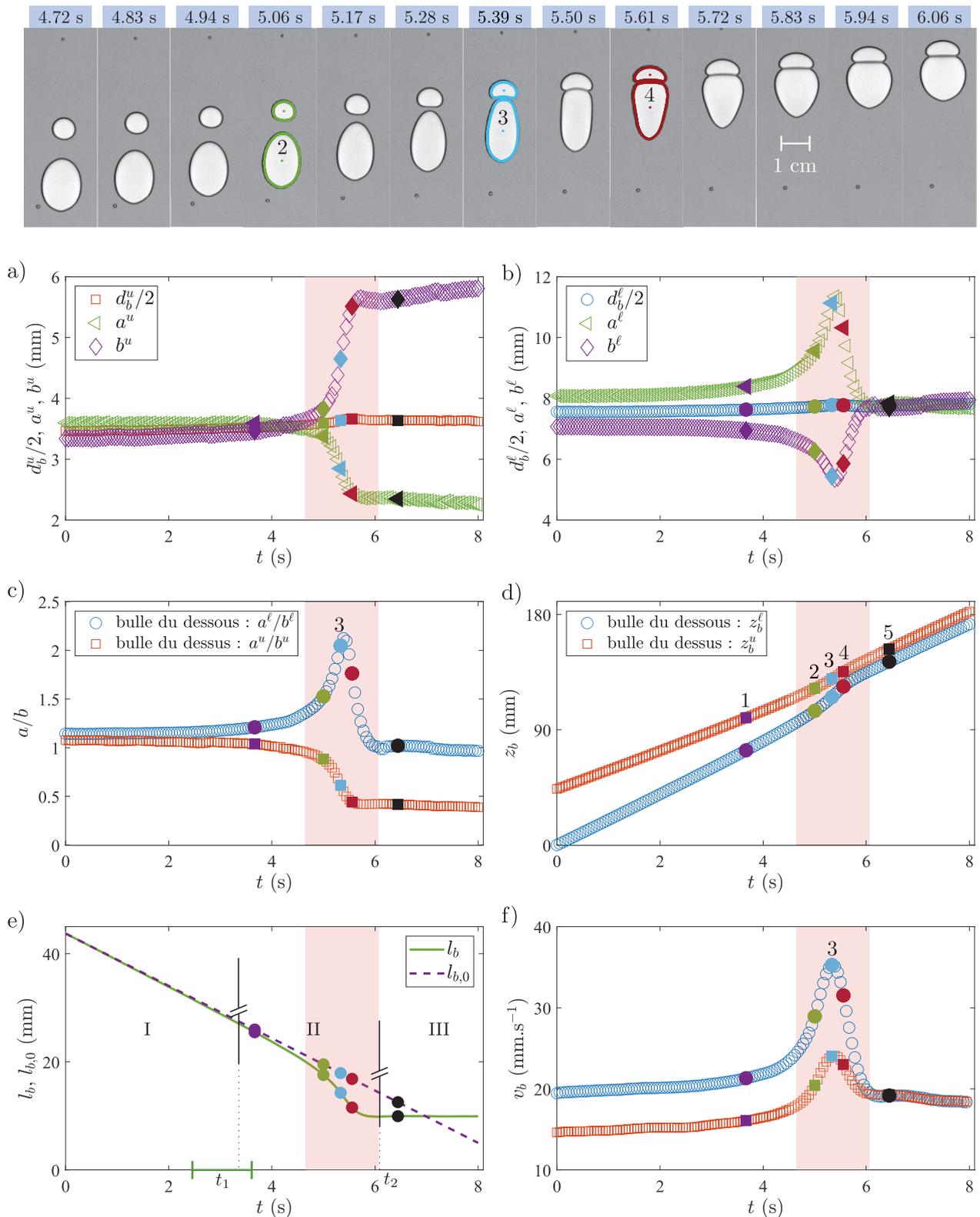


FIGURE IV.2 - **Photographies et graphes associés à la remontée d'une bulle double.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Au dessus : Photographies des deux bulles prises toutes les 111 ms entre 4.72 et 6.06 secondes correspondant à l'intervalle de temps indiqué par des rectangles sur les graphes. Les bulles colorées et indiqués par un nombre représentent les points de même couleur et nombre sur les graphes. Le point bleu numéroté 3 correspond au contact des deux bulles. Voir page suivante pour la suite de la légende.

FIGURE IV.2 - En dessous : grandeurs pertinentes instantanées des bulles en fonction du temps t dont l'origine correspond au début de l'acquisition, telles que a) diamètre d_b^u , grand axe a^u , petit axe b^u , b) mêmes données pour la bulle du dessous, c) variation verticale du centre des bulles par rapport à la position verticale initiale de la bulle du dessous z_b , d) distance entre la position verticale des centres des bulles l_b et distance entre les centres verticaux théoriques des bulles dans le cas où leur vitesse verticale est constante et égale à celle initiale $l_{b,0}$, e) rapport d'aspect a/b et f) vitesse verticale v_b . Les barres noires sur le graphe e) séparent les zones d'étude de la dynamique et on note t_1 (resp. t_2) le temps pour lequel on effectue une transition vers la zone II (resp. III).

7.0.2 Dynamique de type bulle unique (Zone I)

Sur la figure IV.2-a)-b)-c), les paramètres de forme des bulles sont constants jusqu'à $t_1 \approx 2 - 3$ s. La remontée des bulles est verticale et stationnaire, et la vitesse v_b constante jusqu'à ce même temps t_1 . On retrouve alors tous les ingrédients d'une remontée indépendante étudiée dans le chapitre III. On peut alors vérifier que la vitesse des bulles est bien cohérente avec nos résultats expérimentaux précédents. La relation entre vitesse et diamètre est donnée par la relation empirique (III.8) déterminée dans le chapitre 5 :

$$v_{b,\text{theo}} = \underbrace{\frac{\rho_f g h^2}{12 \eta_f} \left(\frac{a}{b} \right)}_{v_0^*} \left[\mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \times d_b/h} \right) \right], \quad \mu_1 = 1.02 \pm 0.03, \quad \mu_2 = 0.37 \pm 0.04. \quad (\text{IV.3})$$

Pour la bulle du dessus à $t < t_1$ ($a^u/b^u = 1.08$, $d_b = 6.92$ mm), on obtient une vitesse théorique $v_{b,\text{theo}}^u = 14.5$ mm.s⁻¹, très proche de $v_b^u = 14.6$ mm.s⁻¹. Le calcul est aussi en accord avec la vitesse de la bulle du bas confirmant une remontée sans interaction.

7.0.3 Interaction mutuelle et contact (Zone II)

Lorsque $\hat{l}_b < 2$, donc pour $t > t_1 = 3$ s, l'interaction entre les deux bulles provoque une variation de leur forme, trajectoire et donc vitesse.

Tout d'abord, on remarque deux comportements opposés sur l'évolution de la forme des bulles : la bulle du dessus s'aplatit lors de l'approche de la bulle du dessous alors que cette dernière s'allonge (voir figure IV.2-a)-b) et chronophotographie). Le mécanisme d'approche est le suivant : la bulle du dessous s'engouffre dans le sillage de celle du dessus (figure IV.2 à $t > 5.06$ s sur la chronophotographie) ce qui provoque la variation rapide de son rapport d'aspect (jusqu'à atteindre 2). Dans le même temps, la bulle du dessus s'aplatit fortement. Une possible explication de ce phénomène est liée à la présence du liquide entre les deux bulles et qui doit s'échapper. Le film liquide fait alors pression sur la bulle du dessus et la comprime, le rapport d'aspect diminuant jusqu'à 0.5 avant contact. Contrairement à ce que nous avons observé pour l'ensemble des paramètres de cette étude (mélange eau-UCON avec $Re < 1$ en cellule de Hele-Shaw), pour lesquels le rapport d'aspect des bulles est toujours supérieur à 1, c'est la première observation de l'allongement d'une bulle perpendiculairement à la vitesse de la bulle ($a^u/b^u < 1$) pour les paramètres de cette étude. Les bulles s'éloignent alors fortement de leur forme quasi-circulaire de départ (à diamètre constant).

Nous étudions maintenant la dynamique des bulles : les deux bulles accélèrent comme indiqué sur la figure IV.2-f) jusqu'au contact des bulles. Autrement dit, la vitesse du centre de masse accélère et atteint un maximum. Ce résultat semble surprenant dans la mesure où l'on s'attendrait à ce que seule la vitesse de la bulle du dessous augmente comme observé lors de l'interaction mutuelle de deux dipôles attractifs, et associé à la ralentissement de la bulle du dessus. Par ailleurs, l'augmentation de vitesse, quantifiée par l'accélération des bulles, représentée sur la figure IV.3-a), n'est pas identique

pour les deux bulles. La bulle du dessous accélère beaucoup plus que celle du dessus. De même, la décélération est très brusque et trois fois plus importante que la bulle du dessus.

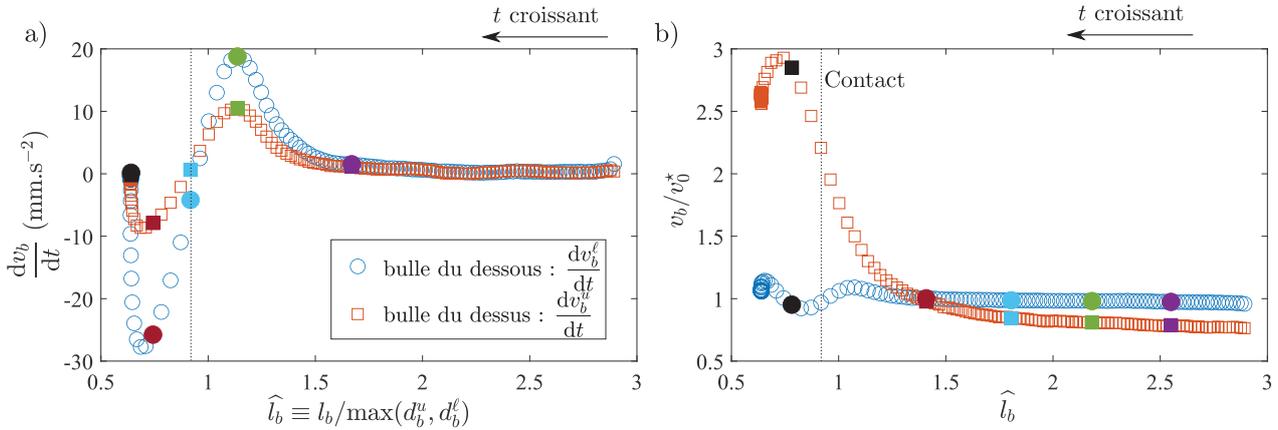


FIGURE IV.3 - **Interaction entre deux bulles.** [$h = 2.08 \text{ mm}$, $\nu_f = 190 \text{ mm}^2\cdot\text{s}^{-1}$] a) Accélération instantanée des bulles $a_b = dv_b/dt$ en fonction de la distance entre les bulles normalisée \hat{l}_b et b) vitesse v_b normalisée par v_0^* en fonction de \hat{l}_b . Le temps augmente dans le sens de \hat{l}_b décroissant. Les lignes pointillées verticales correspondent au contact entre les deux bulles.

Nous avons vu dans le chapitre 6 que le rapport d'aspect et la vitesse de remontée sont intimement liés par la vitesse de Maxworthy que nous rappelons ici : pour une bulle telle que $d_b \gtrsim 8h$, la vitesse de la bulle est donnée par la formule

$$v_b = v_0^* = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_f} \left(\frac{a}{b} \right). \quad (\text{IV.4})$$

Nous présentons alors l'évolution de v_b/v_0^* sur la figure IV.3-b) pour comparer au cas des bulles uniques. Au cours de l'interaction on constate que :

- Pour la bulle du haut, sa vitesse normalisée dépasse très fortement 1.
- Pour la bulle du bas, sa vitesse normalisée reste constante jusqu'à 400 ms avant le contact entre les deux bulles.

Ce résultat montre que la dynamique d'approche des deux bulles est différente : pour la bulle du dessous, sa vitesse augmente identiquement avec le rapport d'aspect, tel que v_b/v_0^* reste constant. Cette dynamique étant une signature de la remontée d'une bulle unique, il est étonnant de l'observer ici. On peut tenter de donner une explication à ce phénomène. Nous avons supposé que les bulles peuvent être considérées indépendantes entre elles si $\hat{l}_b > 2$. Cela signifie que la bulle du dessus, plus petite, va commencer à ressentir les variations du champ de vitesses due à la bulle du dessous lorsque $l_b \lesssim 2d_b^l$, la bulle du dessous étant la plus grande. Toutefois, les bulles ayant des tailles différentes, elles influent sur l'écoulement environnant à une distance différente (de l'ordre de 2 fois leur diamètre, soit une influence sur 14 mm pour la bulle du dessus et 30 mm pour la bulle du dessous). Donc, pour $l_b \approx 2d_b^l$, la bulle du dessous reste encore loin du champ dipolaire créé par la bulle du dessus. Dans ces conditions, on peut alors faire l'hypothèse que la bulle du dessous évolue comme si elle était seule. Ceci semble alors validé par le fait que v_b/v_0^* reste constant.

Cette explication amène cependant une question importante : si le champ de vitesses de la bulle du dessus n'influe sur la bulle 1 qu'à très courte distance ($\hat{l}_b < 1$ ici) et que l'on pourrait alors considérer que la bulle du dessous ne « voit pas » celle du dessus et évolue indépendamment d'elle, comment expliquer que la forme de la bulle du dessous varie bien au delà de la zone d'influence de la bulle du dessus ($\hat{l}_b < 2$ ici)? La forme est due à un équilibre mécanique et donc à la pression dans le fluide. Comme nous avons vu au chapitre 1, la pression possède une décroissance algébrique en $1/r$ avec la

relation (I.47). Cette différence de l'exposant entre la décroissance du champ de pression et du champ de vitesses (en $1/r^2$) peut être la raison pour laquelle la forme évolue à une distance plus élevée que la vitesse. Ce sera la base de la modélisation théorique du chapitre 8. L'objet de celui-ci sera de répondre aux questions générales suivantes :

Dynamique(s) d'approche

- Comment la vitesse et la forme des bulles est modifiée par la présence d'une autre bulle lorsqu'elles interagissent entre elles ?
- Que se passe-t-il lorsque le nombre de bulles est plus grand que 2 ?

Contact entre les bulles

Les bulles entrent en contact à $t = t_c \approx 5.39$ s. La barre d'erreur sur le temps t_c est définie par le temps entre l'image précédent et suivant l'observation du contact, soit $t_c = 5.39 \pm 0.11$ s. Le contact correspond à un point d'inflexion sur la courbe d'évolution de l_b en fonction du temps et correspond à $\hat{l}_b = 0.92 \pm 0.03$. Cela coïncide aussi avec le maximum de v_b et de a^l/b^l aux incertitudes de mesure près. On remarque alors sur la figure IV.2-e) que les bulles arrivent au contact défini par le point bleu numéroté 3. Si les bulles n'avaient eu aucune interaction entre elles et avaient gardé leur dynamique initiale, le contact théorique aurait été 1.5 secondes plus tard (caractérisé par l'intersection entre l_b et $l_{b,0}$).

L'interface formée entre les deux bulles est très fine : elle représente environ 5-6 pixels, soit une longueur d'au plus $500 \mu\text{m}$. L'intensité mesurée par la caméra entre les deux bulles est égale à l'intensité environnante du liquide et semble alors indiquer la présence d'un film liquide entre les deux bulles. Aux extrémités de l'interface, on constate que le contour extérieur est localement modifié. On nomme ces coins de l'interface des **singularités** (il y en a donc deux pour la bulle double étudiée).

Juste après le contact, la bulle du dessus garde sa forme aplatie tandis que la forme de la bulle du dessous devient quasi-circulaire avec un rapport d'aspect égal à 1. Les paramètres caractéristiques des bulles mettent alors un temps d'environ 0.7 s à devenir constants et indépendants du temps. Ce temps τ est alors appelé temps de relaxation des deux bulles.

7.0.4 Bulle double collée (zone III)

A partir de $t = t_c + \tau \approx 6$ s, on retrouve alors une dynamique stationnaire, la forme et vitesse des bulles ne varie plus. Afin d'étudier la dynamique, nous considérons la bulle double collée comme étant une bulle unique issue du regroupement des deux bulles. La méthode de traitement d'images de ces bulles est détaillée partie 4.4.2 du chapitre 4 et un exemple de bulle obtenue par segmentation d'images puis par opérations morphologiques est présenté figure IV.4. On définit alors la vitesse, diamètre, axes de la bulle comme pour une bulle unique. Ces paramètres sont alors indiqués sur la figure IV.4.

La bulle résultante est elliptique de rapport d'aspect $a/b = 1.39 \pm 0.04$ et de diamètre équivalent $d_b = 9.1 \pm 0.1$ mm (voir figure IV.4-a)). Les incertitudes prennent en compte la surestimation de la taille de la bulle car l'interface est prise en compte dans le calcul de ces paramètres. La vitesse de la bulle est $v_b = 18.9 \pm 0.3$ mm.s⁻¹ comme indiqué sur la figure IV.4-b) et est inférieure à la vitesse initiale de la bulle qui était de quasiment 20 mm.s⁻¹. Enfin, lorsque l'on normalise la vitesse par celle de Maxworthy, on obtient $v_b/v_0^* = 0.625 \pm 0.004$. Pour comparer cette vitesse au cas d'une bulle simple, on peut utiliser la relation empirique (IV.3) qui donnerait $(v_b/v_0^*)_{\text{theo}} \sim 0.94$ pour une bulle de forme identique. La bulle remonte beaucoup plus lentement qu'une même bulle unique dans les mêmes conditions (même diamètre, rapport d'aspect, épaisseur et viscosité cinématique). Il convient alors de comprendre et étudier les phénomènes en jeu dans cette configuration, qui sont peut-être reliés à la présence d'une interface entre les deux bulles ou des singularités, et qui sera l'objet du chapitre 9.

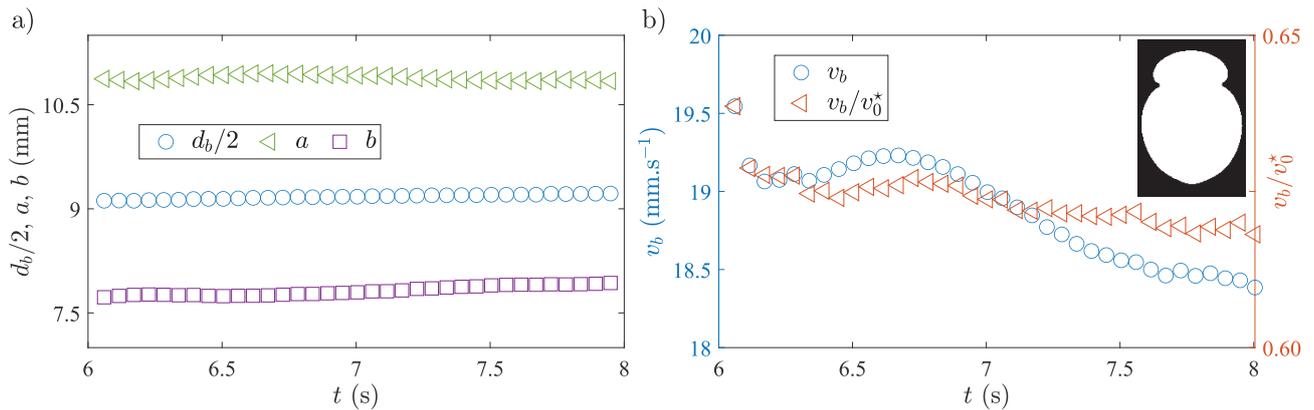


FIGURE IV.4 - **Dynamique de remontée de deux bulles collées.** [$h = 2.08$ mm, $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] a) Évolution du demi-diamètre $d_b/2$, des axes a et b de la bulle double collée issue de la figure IV.1 après contact entre les deux bulles $t > 6$ s. b) Vitesse verticale de remontée v_b ainsi que sa normalisation par la vitesse de Maxworthy instantanée v_b/v_0^* au cours du temps. Insert : image typique obtenue par segmentation d'images de la bulle double collée sur Matlab et servant à l'obtention des paramètres présentés.

Résumé et questions

La remontée de deux bulles décalées verticalement a été présentée dans ce chapitre. Nous avons mis en évidence l'existence de trois zones distinctes :

- I Deux bulles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre ont des dynamiques indépendantes l'une de l'autre et similaires à celle d'une bulle unique. Les résultats du chapitre 5 s'appliquent.
- II Lorsque les bulles se rapprochent, on observe des variations de forme et de vitesse des bulles : la bulle du haut s'aplatit tandis que celle du dessous s'allonge. Les deux bulles accélèrent lors de l'approche mais de manière différente.
- III Lors du contact, les bulles se collent et le restent, sans coalescence. La remontée est verticale et s'effectue à vitesse constante, mais on observe un écart à la vitesse théorique de la bulle unique formée (la remontée est plus lente). Il y a deux différences par rapport au cas bulle unique : la présence d'une interface entre les deux bulles et les singularités sur le contour local des bulles aux extrémités de l'interface.

La généralisation et l'interprétation de ces observations amènent plusieurs questions :

- **Comment la taille et la disposition initiale des bulles influence la dynamique d'approche et celle où elles sont collées ?**
- **Quelles sont les différences fondamentales entre des bulles collées et uniques ?**

Dynamiques d'interaction de plusieurs bulles

Ce chapitre se concentre sur l'étude de l'interaction mutuelle entre deux et plusieurs bulles avant contact, que nous avons défini comme étant la zone II dans le chapitre précédent.

Nous allons dans un premier temps proposer deux mécanismes pour expliquer les observations issues de l'interaction entre deux bulles, en relation avec le champ de vitesses et de pression induit par la présence d'une bulle. Enfin, nous généraliserons l'étude menée dans le chapitre précédent avec l'interaction à un nombre de bulles plus élevé.

Pour simplifier le problème, nous nous limiterons à des bulles évoluant sur un seul et même axe vertical passant par le centre de toutes les bulles en interaction comme indiqué sur la figure IV.5. Nous négligeons donc tout écart horizontal des bulles par rapport à cet axe.

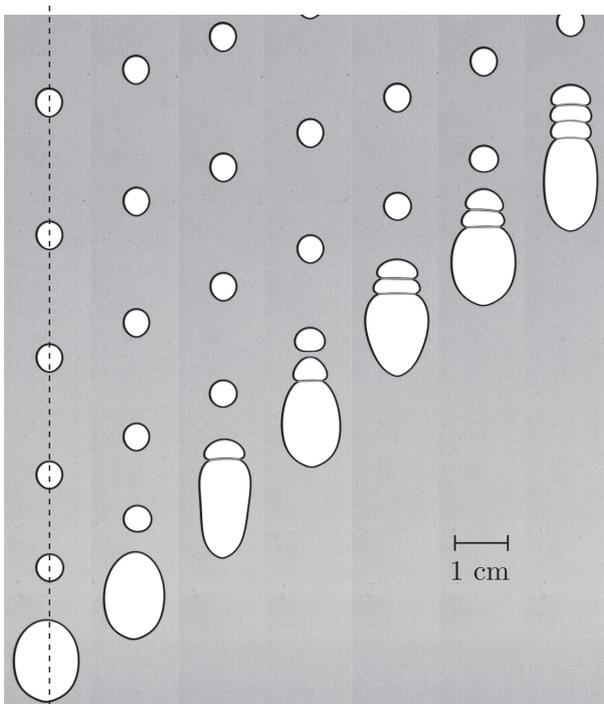


FIGURE IV.5 - **Exemple d'interaction à plusieurs bulles.** La ligne verticale sur la première colonne passe par le centre des bulles.

8.1 Mécanismes d'interaction de deux bulles

Nous avons effectué le développement théorique de l'hydrodynamique des fluides en cellule de Hele-Shaw dans le chapitre 1. Nous avons notamment montré que le champ de vitesses moyenné sur l'épaisseur du liquide dérive d'un potentiel ϕ_f et qu'il vérifie l'équation de Laplace (I.30) $\Delta\phi_f = 0$. Il est donc possible, que ce soit analytiquement ou numériquement, de résoudre l'équation de Laplace. Les conditions aux limites sont alors imposées par la présence des deux bulles, et rendent la résolution très compliquée et hors de propos ici [Vasconcelos, 1994, Crowdy, 2009, Green et al., 2017]. Nous nous proposons alors de comprendre les mécanismes d'interaction par des considérations physiques simples, pour effectuer des comparaisons qualitatives entre théories et expériences.

Nous divisons l'étude en deux étapes : nous nous intéressons au mécanisme responsable de la forme des bulles puis nous tenterons d'étudier pourquoi la vitesse des bulles augmente lors de l'interaction.

8.1.1 Modification de la forme des bulles

Lorsqu'une seule bulle évolue dans la cellule de Hele-Shaw, elle impose le champ de vitesses dans toute la cellule mais aussi son champ de pression (qui s'ajoute à celui due à la gravité). Nous avons montré dans le chapitre 1 que le champ de pression induit par la bulle Π_f est donné par la relation (I.37), dans le cas $d_b \gg h$ (et pour une bulle circulaire) :

$$\Pi_f(r, \theta) = \frac{12\eta_f v_b}{h^2} \left(\frac{d_b}{2}\right)^2 \frac{z}{x^2 + z^2} + C_f = \beta \frac{z}{x^2 + z^2} + C_f. \quad (\text{IV.5})$$

Le champ de pression total dans le fluide, peut se déterminer en supposant que la bulle se trouve à une distance $z_h \gg d_b$ de la surface, et que la pression à la surface libre vaut P_0 . On obtient alors le champ de pression P en utilisant que $P = \Pi_f + \rho_f g z$:

$$\square. \quad (\text{IV.6})$$

On place maintenant une bulle de volume \mathcal{V}^u dans ce champ de pression P , qui n'influe ni sur le champ de vitesses ni sur le champ de pression établi (la bulle est dite passive). On suppose la bulle déformable, de tension de surface γ_f et de pression interne constante P_b . En tout point de l'interface de la bulle fictive, on peut écrire la loi de Laplace, en notant $P_{\text{interface}} \equiv P_{\partial C_b}$ le champ de pression dans le liquide à l'interface gaz-liquide :

$$P_{\text{interface}} - P_b \approx \frac{\gamma_f}{R_{\text{local}}} + \frac{\gamma_f}{h}, \quad (\text{IV.7})$$

avec R_{local} le rayon de courbure local de la bulle passive. Si la bulle s'adapte instantanément à ce champ de pression pour que les contraintes normales soient conservées, alors d'après la loi de Laplace, le rayon de courbure local va s'adapter au champ de pression dans le liquide $P_{\text{interface}}$, et la bulle va alors se déformer. C'est ce que l'on cherche à quantifier ici.

On considère d'abord deux bulles en interaction comme présenté sur la figure IV.6-a). On suppose que le champ de pression P dans la cellule est uniquement créé par la bulle du dessus, et on place en dessous une bulle passive de diamètre initial d_b^ℓ , à une distance verticale l_b . On cherche à connaître la forme que va prendre cette bulle, a^ℓ et b^ℓ sont alors inconnues. Le rayon de courbure de la bulle passive est donné par l'équation paramétrique :

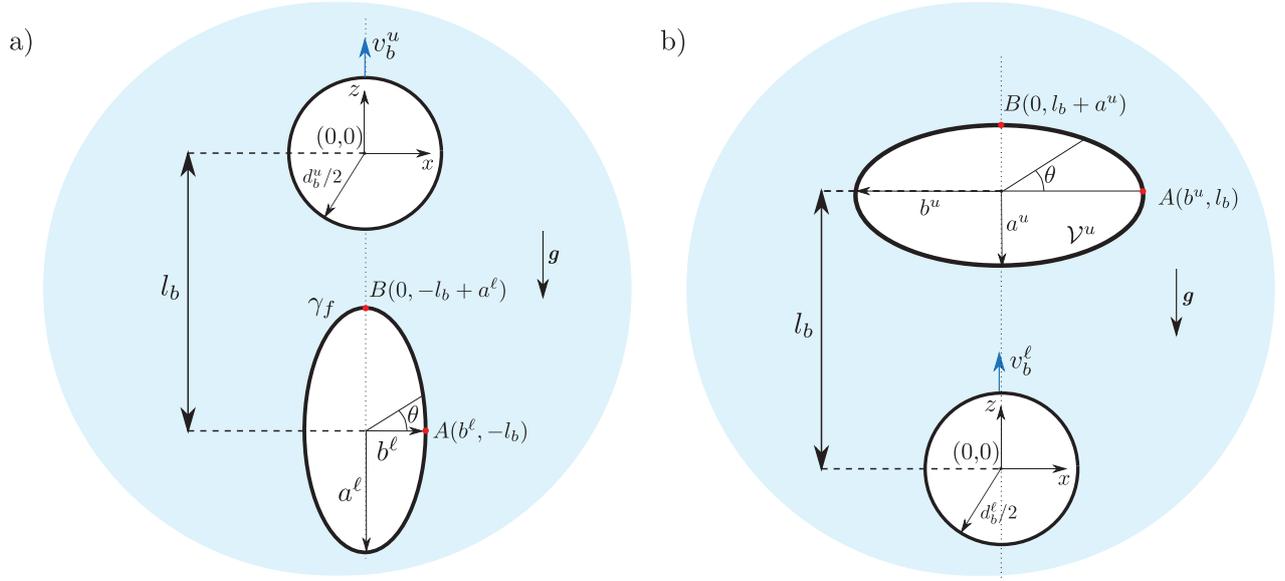


FIGURE IV.6 - **Paramétrisation du problème de la forme de deux bulles.** a) La bulle du dessus (resp. du dessous) est elliptique, de vitesse v_b^u (resp. v_b^l), d'axe parallèle au vecteur vitesse de la bulle a^u (resp. a^{ell}) et perpendiculaire b^u (resp. b^l). Les deux bulles sont séparées d'une distance verticale l_b et horizontale nulle. L'étude s'effectue dans le référentiel (x, z) . On note γ_f la tension de surface liquide/gaz.

$$R^\ell(\theta) = \frac{(b^\ell)^2}{a^\ell} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{a^\ell}{b^\ell} \right)^2 \right) \cos(\theta) \right]^{3/2}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (\text{IV.8})$$

Notamment, aux points $A(b^\ell, l_b)$ et $B(0, -l_b + a^u)$, le rayon de courbure vaut :

$$R^\ell(A) = R^\ell(\theta = 0) = \frac{(a^\ell)^2}{b^\ell}, \quad R^\ell(B) = R^\ell(\theta = \pi/2) = \frac{(b^\ell)^2}{a^\ell}. \quad (\text{IV.9})$$

On note P^ℓ la pression dans la bulle. La loi de Laplace appliquée au point $A(b^\ell, l_b)$ donne que

$$P(b^\ell, -l_b) - P^\ell = \frac{\gamma_f}{R(\theta = 0)} + \frac{\gamma_f}{h} \Rightarrow P(b^\ell, l_b) - P^\ell = \gamma_f \frac{b^\ell}{(a^\ell)^2} + \frac{\gamma_f}{h}. \quad (\text{IV.10})$$

De même, en appliquant la loi de Laplace au point $B(0, -l_b + a^u)$, on obtient

$$P(0, -l_b + a^\ell) - P^\ell = \frac{\gamma_f}{R(\theta = 0)} + \frac{\gamma_f}{h} \Rightarrow P(0, -l_b + a^\ell) - P^\ell = \gamma_f \frac{a^\ell}{(b^\ell)^2} + \frac{\gamma_f}{h}. \quad (\text{IV.11})$$

Le volume de la bulle est constant, par conséquent l'aire de l'ellipse l'est aussi, ce qui donne que

$$S^\ell = \pi a^\ell b^\ell = \pi (d_b^\ell)^2 / 4 \Rightarrow b^\ell = \frac{(d_b^\ell / 2)^2}{a^\ell}. \quad (\text{IV.12})$$

8.1. Mécanismes d'interaction de deux bulles

En soustrayant l'équation (IV.10) et (IV.11), le terme de pression hydrostatique, la pression dans la bulle et le terme γ_f/h relié à la courbure de l'interface selon la direction transverse aux plaques se simplifient. On obtient finalement l'équation suivante :

$$\rho_f g a^\ell + \frac{\xi}{a^\ell - l_b} + \frac{\xi l_b}{l_b^2 + (b^\ell)^2} = \gamma_f \left(\frac{a^\ell}{(b^\ell)^2} - \frac{b^\ell}{(a^\ell)^2} \right) \text{ avec } \xi = \frac{12\eta_f v_b^u}{h^2} \left(\frac{d_b^u}{2} \right)^2. \quad (\text{IV.13})$$

Les équations (IV.13) et (IV.12) forment alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre numériquement. On peut effectuer les mêmes calculs pour déterminer la forme de la bulle du dessus lorsque la bulle du dessous impose son champ de pression sur l'autre[†] en utilisant les paramètres indiqués sur la figure IV.6-b). La résolution donne :

$$\rho_f g a^u + \frac{\xi}{a^u - l_b} + \frac{\xi l_b}{l_b^2 + (b^u)^2} = \gamma_f \left(\frac{b^u}{(a^u)^2} - \frac{a^u}{(b^u)^2} \right) \text{ avec } \xi = \frac{12\eta_f v_b^\ell}{h^2} \left(\frac{d_b^\ell}{2} \right)^2. \quad (\text{IV.14})$$

L'autre équation est donnée par (IV.12) appliquée pour la bulle du dessus.

Vérification expérimentale

La figure IV.7 présente l'évolution des rapports d'aspects de la bulle présentée dans le chapitre introductif 7, superposées avec la résolution des équations (IV.13) et (IV.12) pour le graphe b) et (IV.14) pour le graphe a).

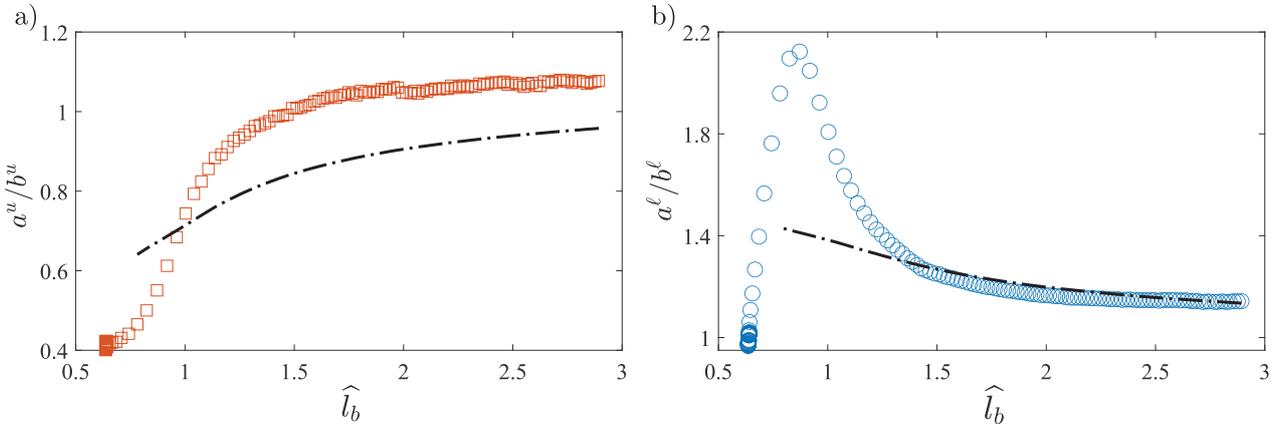


FIGURE IV.7 - **Dynamique d'approche des bulles- Forme** [$h = 2.08 \text{ mm}$, $\nu_f = 190 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
a) Rapport d'aspect de la bulle du dessus a^u/b^u , présentée en figure IV.2, en fonction de la distance normalisée entre les bulles \hat{l}_b . b) Même graphe pour la bulle du dessous. Les résolutions empiriques des équations (IV.13) et (IV.12) pour les deux bulles sont indiquées par les lignes tiretées.

La forme empirique du rapport d'aspect est en plutôt bon accord avec les résultats expérimentaux. On remarque tout d'abord que le modèle théorique prédit que lorsque la bulle passive est en dessous de la bulle imposant le champ de pression, celle-ci s'allonge verticalement^{††}. Cela s'explique par le champ Π_f , en ne prenant pas en compte la constante C_f : il est impair selon z , ce qui signifie qu'il

†. Il faut faire attention à bien définir a et b dans l'équation du rayon de courbure, qui sont les grand et petit axes, contrairement à notre étude où a et b sont les axes parallèle et perpendiculaire à \mathbf{v}_b . Il suffit alors juste de permuter a et b dans l'équation paramétrique IV.8 dans le cas où la bulle passive est au dessus.

††. Sur la figure IV.6, les ellipses sont déjà schématisées allongées et aplaties, mais si nous l'avions schématisé dans l'autre sens, le résultat aurait été identique.

y a une dépression en dessous de la bulle et une surpression au dessus de la bulle. La bulle passive cherchant à subir le moins de contraintes de pression, elle va préférentiellement se déformer vers les zones de faible pression, ce qui est cohérent avec les résultats empiriques et expérimentaux.

Pour la bulle du dessous, l'expérience est en meilleur accord avec la théorie pour des grandes valeurs de \widehat{l}_b et permet d'expliquer que la forme de la bulle du dessous varie bien au delà de la zone d'influence du champ de vitesses de la bulle du dessus. En effet, le champ de pression décroît en $1/r$ d'après (IV.5), donc une bulle peut influencer sur la forme d'une autre bulle à grande distance.

Le modèle présente cependant beaucoup de limites : par exemple, le rapport d'aspect des bulles est de 1 à très grande distance, ce qui n'est pas le cas expérimentalement. De plus, il faut prendre en compte le champ de pression créé par l'autre bulle. La déformabilité de l'interface rend les calculs numériques et/ou théoriques beaucoup plus compliqués que dans le cas où les corps sont indéformables.

8.1.2 Vitesse de deux bulles en interaction

On considère deux bulles en interaction comme présenté sur la figure IV.8. Nous allons d'abord traiter le cas où les bulles sont circulaires sur le graphe a). Le raisonnement qualitatif est le suivant : la bulle du dessus remonte à une certaine vitesse v_b^u . On place une bulle passive en dessous de cette bulle. Le champ de vitesses étant nul à l'intérieur de cette bulle fictive, alors la dissipation visqueuse subie par la bulle du dessus est plus faible (il y a un "trou" de dissipation), et celle-ci remonte alors plus vite car la puissance injectée due à la poussée d'Archimède reste la même.

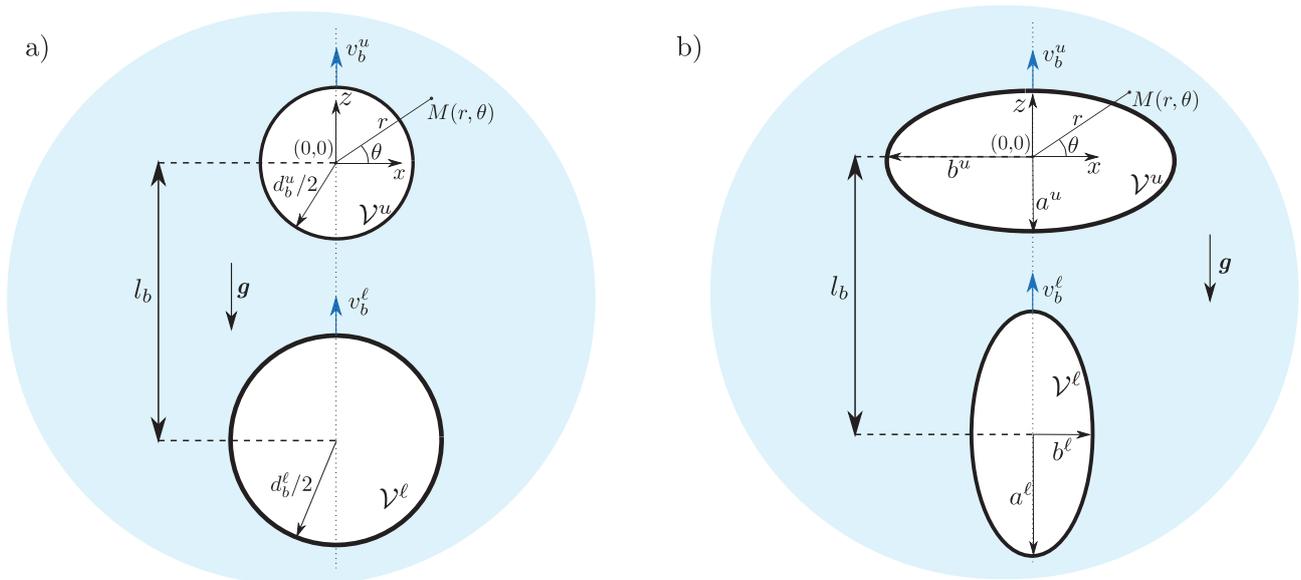


FIGURE IV.8 - **Paramétrisation du problème d'interaction des deux bulles.** a) Cas où les deux bulles sont circulaires. La bulle du dessus (resp. du dessous) est circulaire de diamètre d_b^u (resp. d_b^ℓ), de vitesse v_b^u (resp. v_b^ℓ), d'axe parallèle au vecteur vitesse de la bulle a^u (resp. a^ℓ) et perpendiculaire b^u (resp. b^ℓ). Les deux bulles sont séparées d'une distance verticale l_b et horizontale nulle. L'étude s'effectue dans le référentiel (x, z) et (r, θ) . On note \mathcal{V}^u et \mathcal{V}^ℓ le volume des bulles. b) Cas où les deux bulles sont elliptiques.

On suppose que l'écoulement du fluide \mathbf{v}_f est uniquement imposé par la présence de la bulle du dessus et que $d_b^u, d_b^\ell \gg h$. Sans présence de la bulle du dessous, la puissance dissipée par le fluide $\mathcal{P}_\eta^{u,0}$ est donnée par la relation (I.45) réécrite ici :

$$\mathcal{P}_\eta^{u,0} = \frac{3\pi\eta_f(v_b^u)^2(d_b^u)^2}{h}, \quad (\text{IV.15})$$

8.1. Mécanismes d'interaction de deux bulles

et la bulle remonte à la vitesse v_0^* . En présence de la bulle du dessous, on peut écrire la nouvelle puissance dissipée \mathcal{P}_η^u sous la forme

$$\mathcal{P}_\eta^u = \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}^\ell} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial y} \right|^2 d\tau = \mathcal{P}_\eta^{u,0} - \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}^\ell} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial y} \right|^2 d\tau}_{\mathcal{P}'_\eta}, \quad (\text{IV.16})$$

l'écoulement étant nul dans la bulle. Intéressons-nous au dernier terme de cette équation. On peut la simplifier par une intégration par parties en utilisant le même raisonnement effectué pour la relation (III.35) :

$$\mathcal{P}'_\eta = \frac{12\eta_f}{h} \iint_{S^\ell} |\widetilde{\mathbf{v}}_f(r)|^2 dS, \quad (\text{IV.17})$$

avec $\widetilde{\mathbf{v}}_f(r)$ le champ de vitesses moyenné du fluide, déterminé en introduction par la relation (I.35). Les bornes de l'intégrale sont définies par les points (x, z) à l'intérieur du cercle de rayon $d_b^\ell/2$ et de centre $(0, -l_b)$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\mathcal{P}'_\eta = \frac{12\eta_f}{h} \iint_{x^2 + (z+l_b)^2 \leq (d_b^\ell)^2/4} \left[v_b^u \left(\frac{d_b^u/2}{r} \right)^2 \right]^2 dS. \quad (\text{IV.18})$$

En coordonnées cartésiennes, $r^2 = x^2 + z^2$. Le changement de variable $Z = z + l_b$ permet de simplifier les bornes d'intégration :

$$\mathcal{P}'_\eta = \frac{3(v_b^u)^2 (d_b^u)^4 \eta_f}{4h} \iint_{x^2 + z^2 \leq (d_b^\ell)^2/4} \frac{1}{(x^2 + (z - l_b)^2)^2} dx dz. \quad (\text{IV.19})$$

En coordonnées polaires, les bornes de l'intégrale sont définies par $r \in [0, d_b^\ell/2]$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. En utilisant que $x = r \cos(\theta)$ et $z = r \sin(\theta)$, et en posant $\mathcal{P}'_\eta = \mathcal{P}_\eta^{u,0} \Lambda(l_b, d_b^\ell, d_b^u)$, on obtient :

$$\Lambda(l_b, d_b^\ell, d_b^u) = \frac{d_b^u}{4\pi} \int_0^{d_b^\ell/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{(r^2 + l_b^2 - 2r \sin(\theta)l_b)^2} dr d\theta. \quad (\text{IV.20})$$

On peut alors réinjecter cette relation dans (IV.16) :

$$\mathcal{P}_\eta^u = \mathcal{P}_\eta^{u,0} (1 - \Lambda). \quad (\text{IV.21})$$

La puissance injectée \mathcal{P}_B^u est donnée par la relation (I.42). En équilibrant puissance injectée et dissipée, on a alors

$$\rho g \left(\frac{\pi (d_b^u)^2 h}{4} \right) v_b = \frac{3\pi \eta_f (v_b^u)^2 (d_b^u)^2}{h} (1 - \Lambda). \quad (\text{IV.22})$$

Le rapport entre $\mathcal{P}_\eta^{u,0}$ et \mathcal{P}_B^u fait apparaître la vitesse de Maxworthy v_0^* (avec $a^u/b^u = 1$). Finalement, la vitesse de remontée de la bulle du dessus vaut :

$$v_b^u = \frac{v_0^*}{1 - \Lambda} \text{ avec } \Lambda = \frac{(d_b^u)^2}{4\pi} \int_0^{d_b^u/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{(r^2 + l_b^2 - 2r \sin(\theta)l_b)^2} dr d\theta. \quad (\text{IV.23})$$

Connaissant le diamètre des deux bulles, on peut numériquement résoudre cette équation avec l_b comme paramètre libre. L'intégrale Λ étant positive, la vitesse de remontée de la bulle du dessus est alors plus élevée que v_0^* . Remarquons que cette relation n'est valide que lorsque les bulles ne se pénètrent pas ($\mathcal{V}^\ell \setminus \mathcal{V}^u = \emptyset$).

Le modèle peut être encore affiné dans le cas où les deux bulles sont elliptiques, et même lorsque les diamètres d_b des bulles sont de l'ordre de h (voir figure IV.8-c), ce qui est proposé dans l'Annexe E :

$$\begin{aligned} \frac{v_b^u}{(v_0^*)^u} &= f\left(\frac{d_b^u}{h}\right) (1 - \Lambda)^{-1}, \quad (v_0^*)^u = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta} \left(\frac{a^u}{b^u}\right), \\ \Lambda &= \frac{a^\ell b^\ell}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{[(b^\ell r \cos(\theta))^2 + (a^\ell r \sin(\theta) - l_b)^2]^2} dr d\theta, \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

avec $f\left(\frac{d_b^u}{h}\right)$ donné par la régression empirique (III.8) appliquée à la bulle du dessus. De même que pour le calcul du champ de pression, on peut étendre ce calcul pour une bulle passive qui est placée au dessus de la bulle initiale à une distance l_b , il suffit juste de permuter $\ell \leftrightarrow u$. Lorsque $l_b \rightarrow \infty$, l'intégrale tend vers 0 et on retrouve bien que la vitesse de la bulle est donnée par la relation empirique (IV.3).

Vérification expérimentale

Reprenons l'exemple des bulles présentées dans le chapitre 7. La figure IV.9 présente l'évolution expérimentale de v_b/v_0^* comparée aux relations empiriques (IV.23) et (IV.24). Un autre exemple de comparaison est présenté sur la figure IV.10 et apporte les mêmes conclusions.

Les relations empiriques sont en bon accord avec les données expérimentales pour la remontée du la bulle du dessous, dont le diamètre est plus élevé que la bulle du dessus, sur toute la gamme de \widehat{l}_b jusqu'à très proche du contact. Pour la bulle du dessous, les relations empiriques prédisent la croissance élevée de la vitesse normalisée proche du contact ($\widehat{l}_b \in [0.92, 1.1]$), mais sont éloignées de la courbe expérimentale lorsque les bulles lorsque $\widehat{l}_b > 1.2$.

Cette différence est due à une asymétrie du problème : comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, les bulles ont une taille différente, donc elles modifient l'écoulement du liquide sur une distance différente. Pour la plus grosse bulle en dessous, lorsque $\widehat{l}_b \approx 2$, elle ne ressent toujours pas l'écoulement modifié par la présence de la bulle au dessus, donc l'hypothèse principale du modèle théorique est vérifiée, d'où une très bonne concordance avec l'expérience. Au contraire, lorsque $\widehat{l}_b \approx 2$ pour la petite bulle du dessus, elle commence directement à subir l'influence de l'écoulement de l'autre bulle, donc l'hypothèse du modèle n'est pas vérifiée.

L'augmentation de vitesse des bulles est donc vraisemblablement due à deux phénomènes :

- Le champ de vitesses de chaque bulle perturbe l'écoulement et donc la vitesse des bulles.
- La présence des bulles crée des trous de dissipation car le liquide est remplacé par une bulle dans laquelle la dissipation visqueuse au sein de la bulle et dans le film de lubrification est négligeable.

8.1. Mécanismes d'interaction de deux bulles

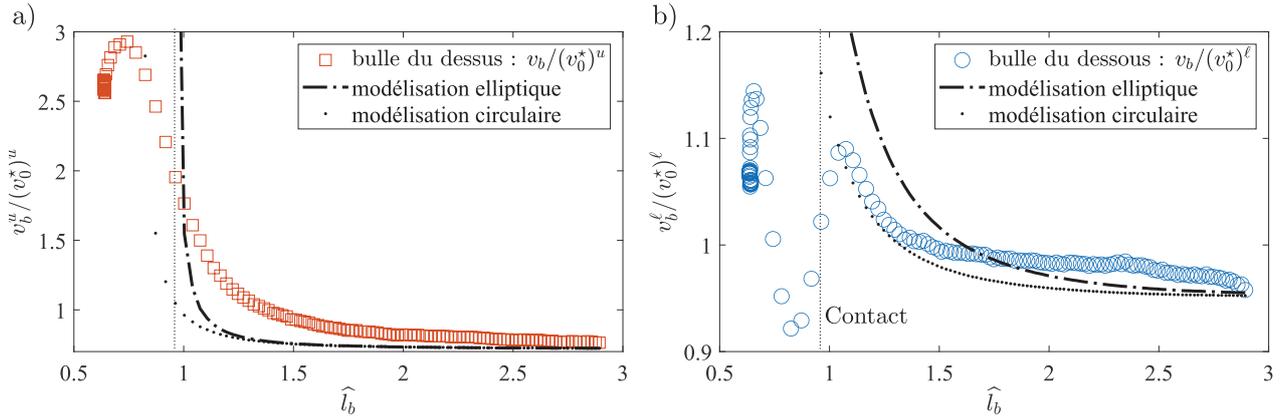


FIGURE IV.9 - **Dynamique d'approche des bulles - Vitesse** [$h = 2.08 \text{ mm}$, $\nu_f = 190 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
 a) Vitesse normalisée de la bulle du dessus $v_b^u / (v_0^*)^u$, présentée en figure IV.2, pour laquelle $d_b^u = 6.92 \text{ mm}$, en fonction de la distance normalisée entre les bulles \hat{l}_b . b) Vitesse normalisée de la bulle du dessous $v_b^l / (v_0^*)^l$ pour laquelle $d_b^l = 15.0 \text{ mm}$, en fonction de la distance normalisée entre les bulles \hat{l}_b . Les modélisations circulaires issues de la relation (IV.23) ont été superposées aux données (courbes pointillées). De même, les modélisations elliptiques issues de (IV.24) sont indiquées par les courbes tiretées.

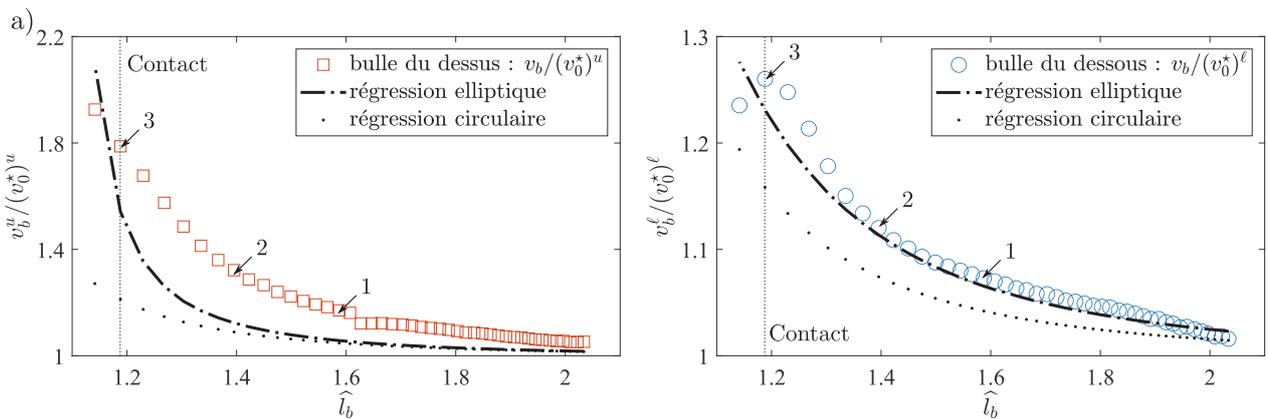
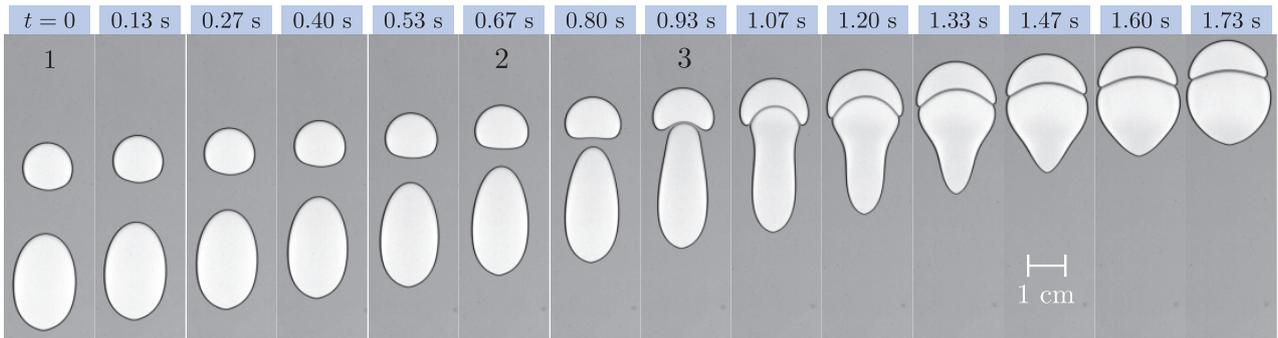


FIGURE IV.10 - **Dynamique d'approche des bulles - Vitesse** [$h = 2.08 \text{ mm}$, $\nu_f = 190 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
 Photographies de l'approche de deux bulles de diamètres $d_b^u = 17.4 \text{ mm}$ et $d_b^l = 28 \text{ mm}$. a) Vitesse normalisée de la bulle du dessus $v_b^u / (v_0^*)^u$ en fonction de la distance normalisée entre les bulles \hat{l}_b . b) Vitesse normalisée de la bulle du dessous $v_b^l / (v_0^*)^l$ en fonction de la distance normalisée entre les bulles \hat{l}_b . Les modélisations circulaires issues de la relation (IV.23) ont été superposées aux données (courbes pointillées). De même, les modélisations elliptiques issues de (IV.24) sont indiquées par les courbes tiretées.

Pour avoir plus de compréhension sur le phénomène, il faudrait étudier le cas opposé d'une bulle du dessus plus grande et du dessous plus petite qui s'attirent verticalement, ce qui est difficile à obtenir expérimentalement.

En conclusion, nous avons tenté de comprendre les phénomènes à l'origine de l'approche de deux bulles. Nous avons proposé deux mécanismes possibles d'interaction. Premièrement, le champ de pression imposé par une bulle dans la cellule peut influencer sur la forme d'une autre bulle placée dans cette même cellule. Cette modification de forme dépend de la position des deux bulles. Deuxièmement, lorsqu'une bulle est placée dans une cellule de Hele-Shaw, le liquide est remplacé par la bulle dans laquelle il n'y a plus aucune dissipation visqueuse. Cela signifie qu'une autre bulle évoluant dans cet environnement va devoir entraîner moins de liquide, et donc remonter plus vite que dans le cas d'une bulle unique.

Maintenant que nous avons mis en évidence ces comportements, nous allons explorer la dynamique d'approche d'un nombre plus élevé de bulles.

8.2 Interactions de bulles multiples

Par la suite, les bulles seront numérotées par ordre croissant de leur hauteur à l'instant initial. Nous commençons par le cas $n = 3$ bulles, puis nous étudierons un deuxième exemple pour $n = 5$ bulles. Nous nous limiterons à des bulles de petite taille (typiquement inférieure à 10 mm). De telles bulles ont été obtenues en automatisant le débitmètre : on peut contrôler la durée d'ouverture du débit et sa valeur pour créer successivement des bulles. Ce processus permet de créer des trains de bulles de taille non contrôlée mais comprise entre 5 et 10 mm.

8.2.1 Premier exemple : interaction de 3 bulles

La figure IV.11 présente la remontée de trois bulles dans un liquide Newtonien.

Première interaction - Bulle 1 et 2

L'interaction entre la bulle 1 et 2 commence dès le début de l'acquisition, leur distance \hat{l}_b étant égale à 1. La bulle 1 s'allonge à l'arrière du sillage de la bulle 2, et la dynamique d'approche des bulles est commune à l'exemple présenté dans le chapitre introductif 7 : augmentation du rapport d'aspect de la bulle 1, diminution de celui de la bulle 2 sur la figure IV.11-b), et un pic de vitesse atteint au contact des bulles vers $t = 1.9$ s sur la figure IV.11-d). La bulle 3, quant à elle, semble remonter de manière indépendante à cette interaction.

Cependant, on observe une variation non négligeable de sa vitesse (augmentation de 10% entre 0 et 2 s), non observée pour la remontée d'une bulle unique, alors que les bulles 1 et 2 sont à une distance de 30 mm, soit 3 fois le diamètre de la bulle 2. On remarque aussi que le diamètre de la bulle 1 diminue brusquement de 3% lors du contact.

Deuxième interaction - Bulle 1+2 et 3

On s'intéresse maintenant à la deuxième interaction. Lors de l'approche de la bulle 1+2 sur la bulle 3, on retrouve encore une fois les mêmes observations :

- Les deux bulles collées s'allongent toutes les deux à partir de $t = 4$ s sur le graphe de la figure IV.11-b) tandis que la bulle 3 s'aplatit. Le schéma qualitatif est alors exactement le même que pour deux bulles simples qui interagissent. La bulle 2 devient plus aplatie lors du collage de la bulle 3 (le rapport d'aspect diminue de 0.7 à 0.6).
- Les deux bulles collées ont la même vitesse et accélèrent toutes deux à l'approche de la bulle 3. La bulle 2 accélère très légèrement en décalé par rapport à la bulle 1.
- De même qu'au premier contact, les diamètres des bulles 1 et 2 chutent brusquement de 3%, et le diamètre de la bulle 3 augmente de 3%.

8.2. Interactions de bulles multiples

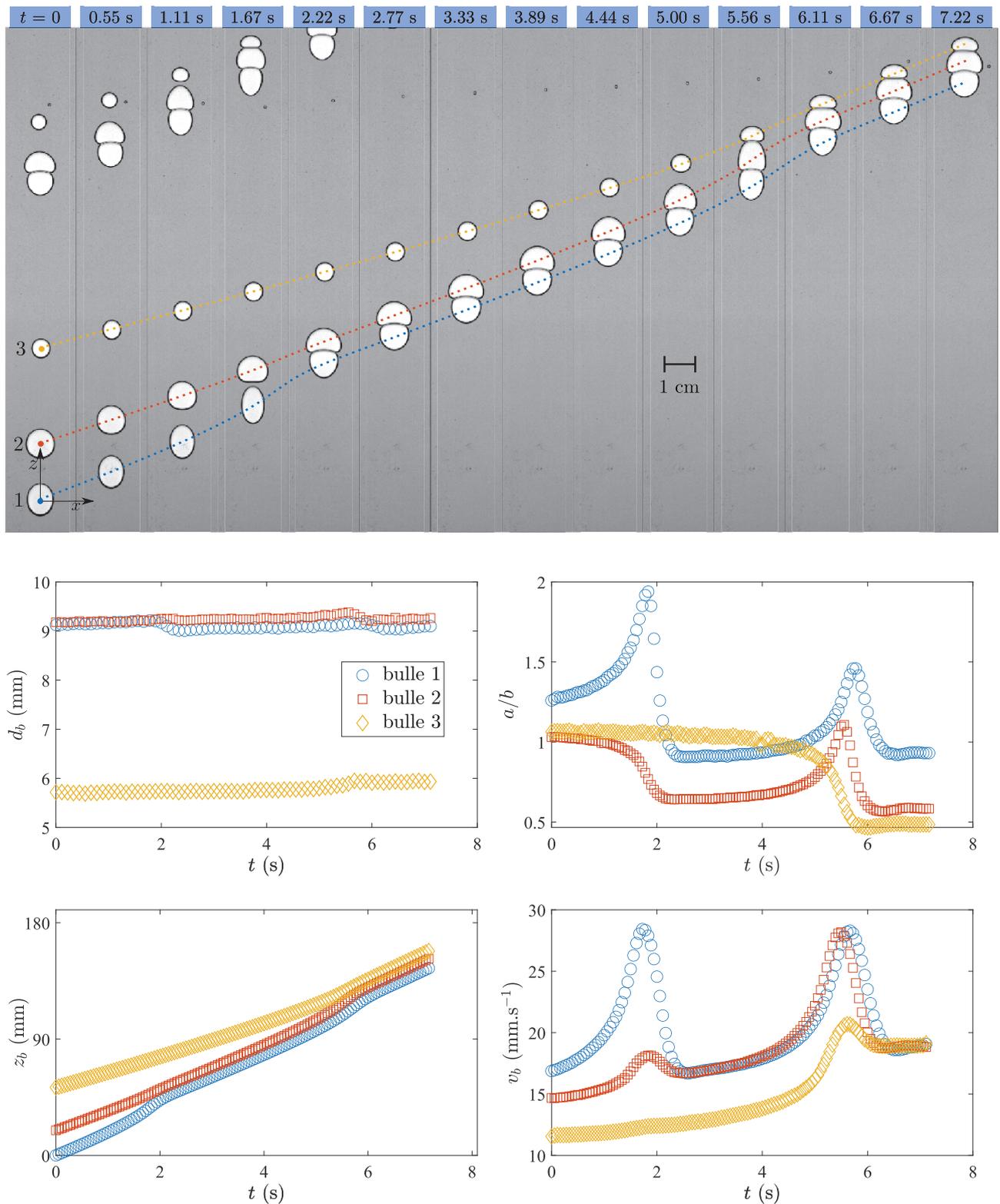


FIGURE IV.11 - **Approche et interaction de trois bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Au dessus : Photographies de trois bulles en interaction dans un liquide Newtonien. Les bulles sont numérotées par hauteur croissante. Les traits pointillés représentent la trajectoire du centre des bulles. Le temps d'acquisition est de 15 images par seconde. Les positions des centres des bulles sont indiquées sur le schéma et définies par rapport au centre de la bulle 1 à $t = 0$. En dessous : grandeurs pertinentes instantanées des bulles en fonction du temps t pris nul au début de l'acquisition telles que a) diamètre d_b , b) rapport d'aspect a/b , c) variation verticale du centre des bulles par rapport à la position verticale initiale de la bulle du dessous (bulle 1) z_b , d) vitesse verticale v_b .

Les variations de diamètre ne sont pas expliquées. Nous n'avons pas la résolution nécessaire pour distinguer si ces variations sont dues au traitement numérique de Matlab ou si elles sont présentes lors des expériences.

Notons finalement que les bulles ne sont pas tout à fait alignées au départ, la bulle 3 est légèrement décalée vers la droite et les bulles 1+2 se décalent toutes deux vers la droite en s'approchant de la bulle 3. Cependant, nous n'avons pas assez de jeux de données pour généraliser ces observations de déplacement lorsque les bulles sont espacées horizontalement.

8.2.2 Deuxième exemple : interactions de 5 bulles

Nous proposons un deuxième exemple avec 5 bulles, présenté sur la figure IV.12. La bulle triple initialement déjà formée (1+2+3) interagit avec une bulle 4 puis une bulle 5.

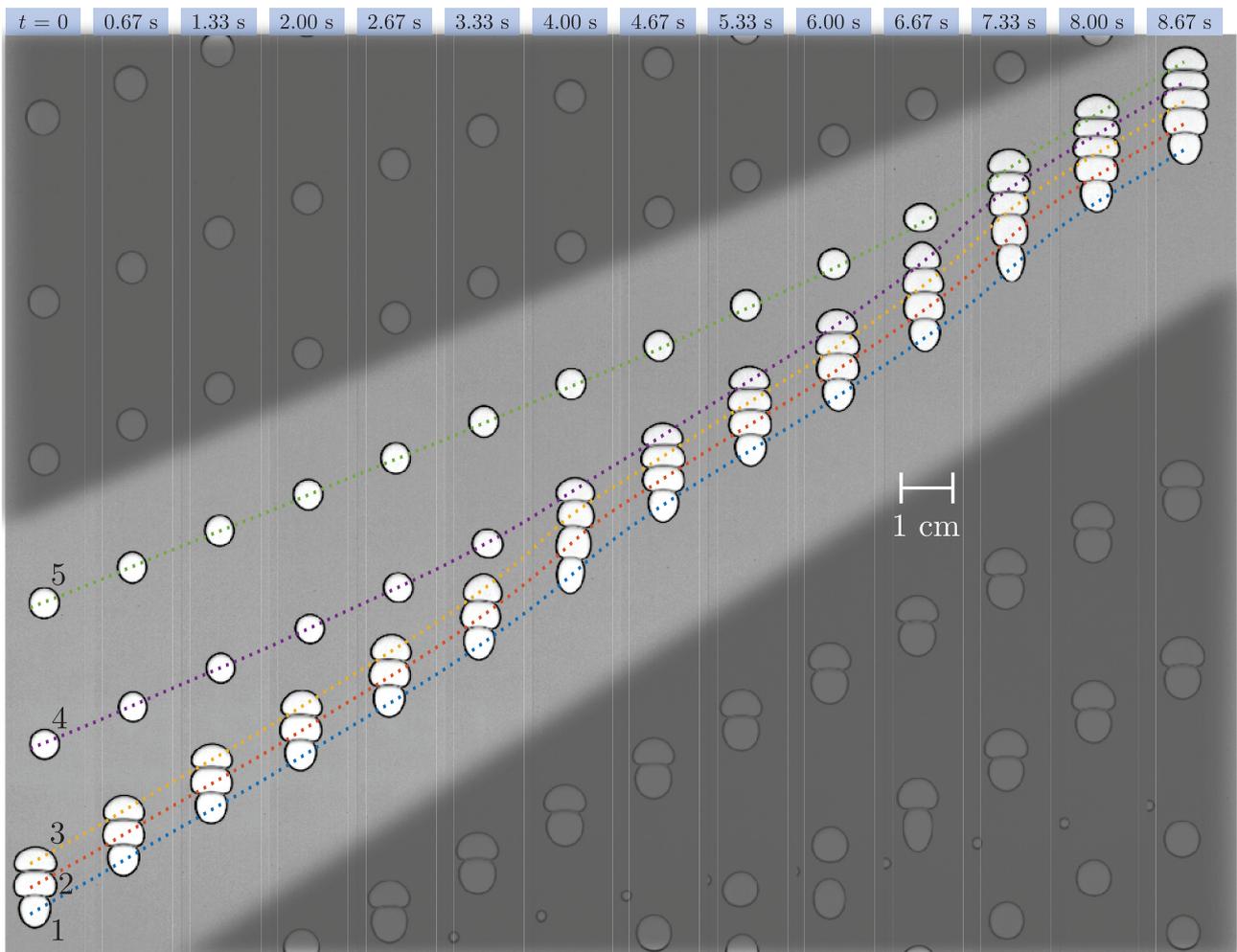


FIGURE IV.12 - **Approche et interaction de cinq bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Photographies de cinq bulles en interaction dans un liquide Newtonien. Les bulles en dehors de celles d'intérêt ont été floutées. Initialement, trois bulles forment une bulle multiple collée. Les bulles sont numérotées par hauteur croissante. Les traits pointillés représentent la trajectoire du centre des bulles. Le temps d'acquisition est de 15 images par seconde. Les positions des centres des bulles sont indiquées sur le schéma et définies par rapport au centre de la bulle 1 à $t = 0$.

Lors des 2 interactions à $t \approx 4$ s et $t \approx 7$ s, on obtient de nouveau des comportements étonnants sur le diamètre des bulles non expliqués par les barres d'erreur dues aux variations de pression hydrostatique et d'épaisseur : lors du premier contact, le diamètre des trois bulles collées 1+2+3 diminue légèrement

8.2. Interactions de bulles multiples

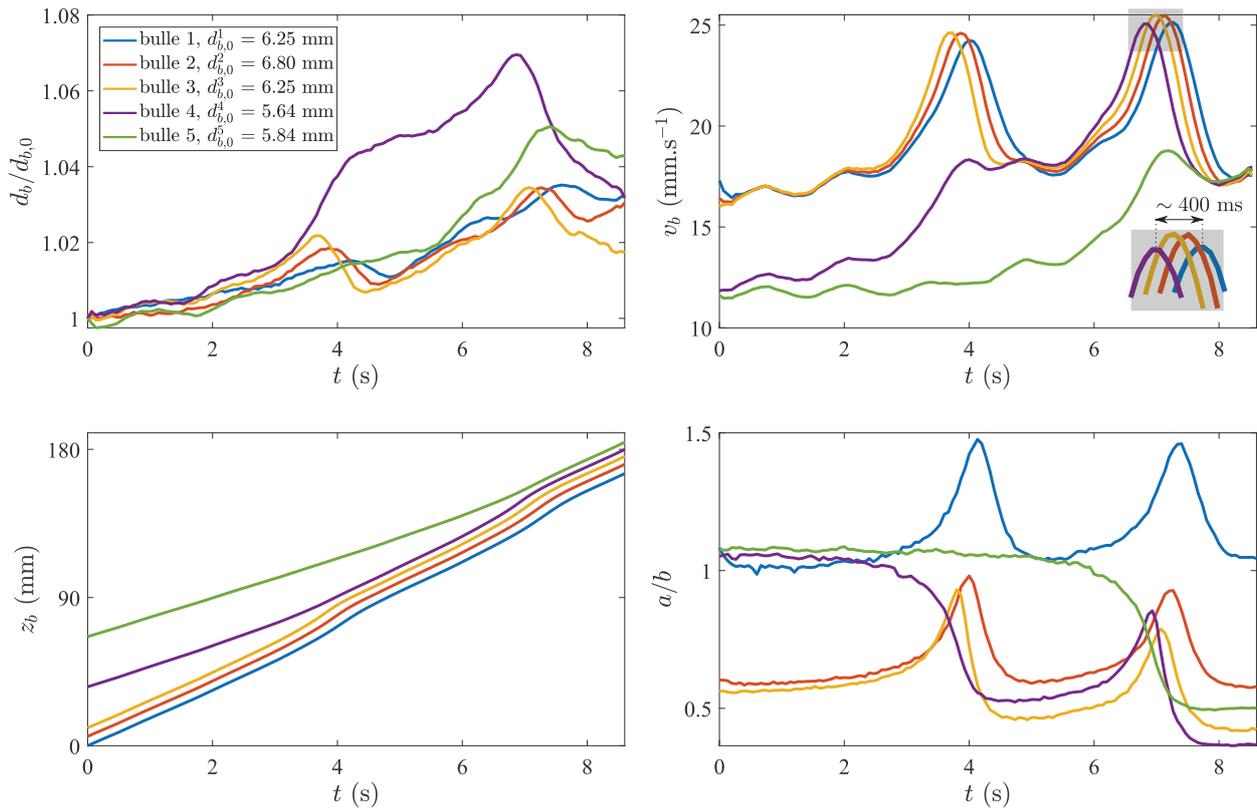


FIGURE IV.13 - **Approche et interaction de cinq bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190 \text{ mm}^2\cdot\text{s}^{-1}$] Grandeurs pertinentes instantanées des bulles en fonction du temps t pris nul au début de l’acquisition telles que a) diamètre d_b , b) rapport d’aspect a/b , c) variation verticale du centre des bulles par rapport à la position verticale initiale de la bulle du dessous (bulle 1) z_b , d) vitesse verticale v_b , avec un zoom sur un pic de vitesse. L’écart entre les maxima locaux entre la bulle 1 et 4 sur ce pic est d’environ 400 ms.

tandis que celui de la bulle 4 augmente sur le graphe sur la figure IV.13-a). Ce comportement se confirme sur la deuxième approche : les bulles composant 1+2+3+4 ont leur diamètre qui diminue légèrement. Ces observations laissent une question ouverte quant aux variations de pression interne au sein des bulles lors des différentes interactions entre elles.

On retrouve le même retard sur les variations des vitesses des bulles collées lorsqu’elles interagissent avec une autre bulle séparée sur la figure IV.13-b), indiquées par un zoom. Le retard d’atteinte de la vitesse maximale est de 400 ms entre la bulle 1 et 4. Ce phénomène est probablement dû à la déformabilité du train de bulles et la dynamique d’approche : lorsque la bulle 4 interagit avec la bulle 5, elle accélère et entraîne la bulle 3 derrière elle. L’interface entre ces deux bulles se déforme, la bulle 3 est entraînée, et ainsi de suite.

Nous avons aussi tenté d’extrapoler les modèles empiriques de vitesse et de pression sur ces bulles. Le comportement qualitatif de forme et de vitesse reste bon, mais est assez éloigné des expériences. Pour le modèle de vitesse, il faudrait prendre en compte les trous de dissipation issus de plusieurs bulles. Le modèle de pression ne marche pas ici car la détermination de la pression sur chaque bulle du train rend les calculs beaucoup plus compliqués.

Enfin, un plateau de vitesse semble se former car la vitesse du train de bulle 1+2+3, puis 1+2+3+4 et enfin avec les 5 bulles collées semble rester identique et de l’ordre de $17 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Résumé

La dynamique d'interaction de plusieurs bulles a été abordée. Nous avons proposé deux mécanismes simples tentant d'expliquer la manière dont deux bulles interagissent :

- **Déformation due à la pression** : une bulle modifie le champ de pression dans la cellule. En plaçant une bulle passive déformable à une distance verticale donnée de la bulle qui impose le champ de pression, on peut estimer la forme de la bulle fictive. Lorsque cette bulle se trouve au dessous, le champ de pression donne une forme allongée à la bulle fictive, et aplatie lorsqu'elle se trouve au dessus de la bulle initiale.
- **Accélération des bulles** : lorsqu'une bulle voisine s'approche d'une autre bulle, cette dernière se voit entrainer moins de liquide. La dissipation visqueuse est donc plus faible, et elle remonte alors plus vite que dans le cas d'une bulle unique.

Si ces modèles sont simplistes et ne prennent pas en compte l'interaction mutuelle des champs de pressions et de vitesse, ils sont en bon accord avec les observations expérimentales.

Nous avons également étudié l'interaction de trois et cinq bulles. Les dynamiques d'approche d'un nombre quelconque de bulles collées sur une bulle isolée sont très similaires qualitativement à l'approche de deux bulles uniques dès lors que l'interaction se décompose en paires de bulles. Nous avons mis en évidence quelques comportements mineurs de retard de vitesse et de faibles changements de diamètre.

Questions

- La **résolution analytique ou numérique de l'équation de Laplace** avec les conditions aux limites données par les deux bulles permettrait de complètement caractériser la dynamique des bulles.
- **Que se passe-t-il lorsque des bulles multiples sont séparées horizontalement ?**
- **Quelle est la dynamique du train de bulles après interaction des bulles ?**

Dynamique de bulles multiples : train de bulles

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la dynamique des bulles collées, appelée trains de bulles, que nous avons défini comme étant la zone III dans le chapitre 7.

Il est important de noter que le phénomène de coalescence de bulles n'a que très rarement été observé dans ces expériences de remontée de bulles multiples, ce qui nous a permis d'obtenir des trains avec un nombre élevé de bulles.

9.1 Étude de la dynamique de deux bulles collées

Nous effectuons une étude systématique de remontée de bulles doubles collées, que l'on nomme ici bulle double, afin de généraliser les observations de l'exemple du chapitre 7. Nous rappelons que nous avons observé une diminution de la vitesse de remontée de la bulle double étudiée par rapport à une même bulle unique de même rapport d'aspect évoluant dans les mêmes conditions (épaisseur et viscosité identiques) et l'apparition d'une interface liquide entre les deux bulles. Les deux extrémités de l'interface modifient localement le contour de la bulle en créant des singularités[†].

9.1.1 Dynamique générale

Les paramètres généraux de forme et vitesse sont présentés sur la figure IV.14. Tout d'abord, on observe que la disposition spatiale de l'interface est différente et fonction de la taille de chacune des deux bulles. En effet, elle est située en amont de la bulle double pour une petite taille de bulle du dessous (bulle 2 et 4), vers le milieu de la bulle double lorsque les bulles initiales sont du même ordre de grandeur (bulle 3) et en aval de la bulle pour des petites tailles de bulles du dessous. L'épaisseur de l'interface semble constante quelque soit la taille des deux bulles, mais nous n'avons pas la résolution nécessaire pour en effectuer une étude quantitative.

Nous avons superposé sur la figure IV.14-a) et b) les données issues de la remontée de bulles doubles dans deux liquides et épaisseurs différentes. Les jeux de données pour $\nu_f = 310 \text{ mm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ont été obtenues lors du stage de Licence 3 de Brivael Collin, que j'ai encadré.

Nous présentons maintenant les résultats liés au rapport d'aspect des bulles, présenté sur la figure IV.14-a). Pour comparer leur forme et dynamique avec les résultats obtenus pour les bulles uniques, nous avons superposé l'évolution empirique du rapport d'aspect, donné par la relation (III.10). De même, la comparaison des vitesses normalisées des bulles v_b/v_0^* est effectuée sur la figure IV.14-b). On y superpose la régression reliant v_b/v_0^* et d_b/h , issu de l'équation (III.8) pour les bulles uniques. Les observations sont les suivantes :

[†]. Nous définissons singularité comme étant une modification locale du contour extérieur due à la présence d'une interface bulle-bulle. Il y en a donc 2 pour une bulle double.

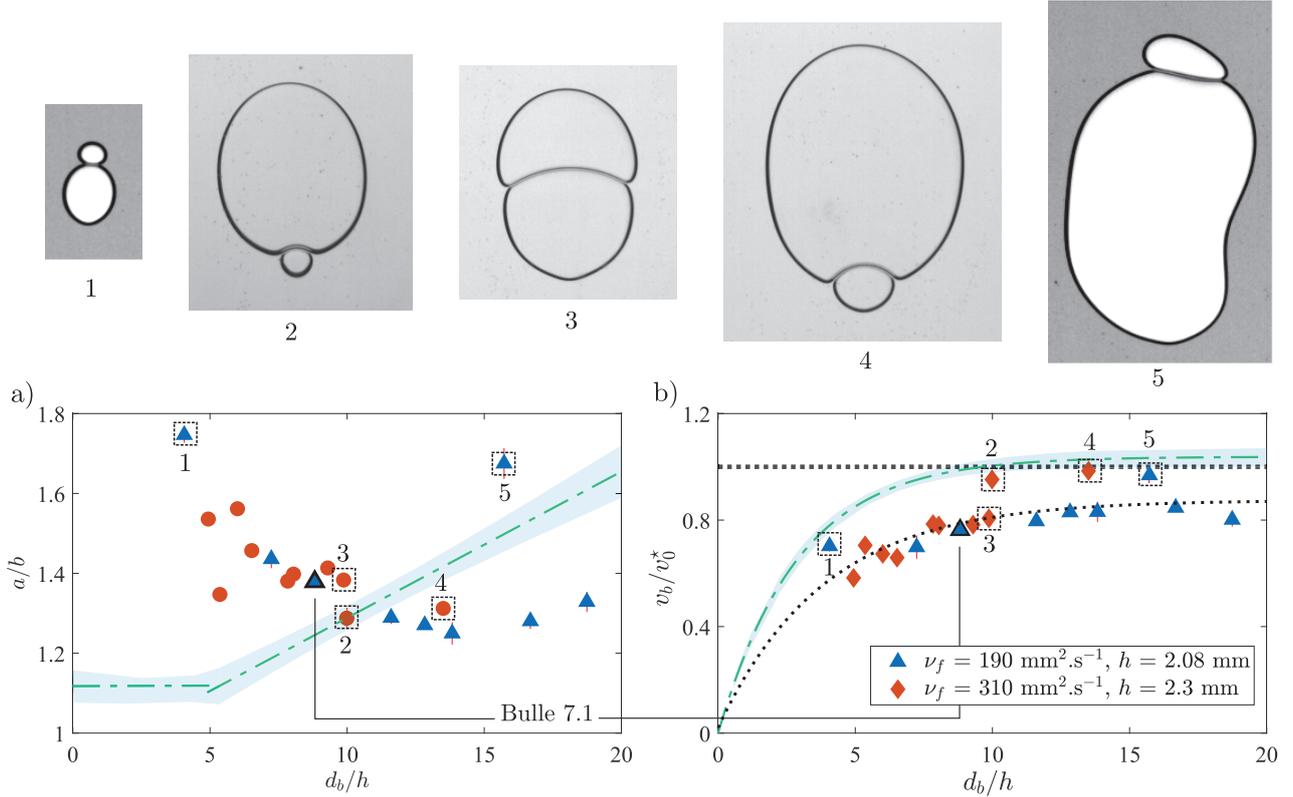


FIGURE IV.14 - **Dynamique de remontée de bulles doubles collées.** En haut : exemples de bulles doubles de tailles différentes (les échelles sont différentes). Les numéros de bulle sont associés aux points de même numérotation sur les graphes. a) Rapport d'aspect a/b de la bulle double en fonction du diamètre normalisé d_b/h . La droite tiretée correspond à la relation empirique (III.8) qui indique la relation entre a/b et d_b/h pour des bulles uniques. b) Vitesse normalisée v_b/v_0^* en fonction de d_b/h . La courbe tiretée correspond à la relation empirique (IV.3) pour des bulles uniques. La courbe pointillée noire correspond à la même relation empirique mais ajustée avec les données issues des bulles doubles, dont les paramètres sont indiqués dans l'équation (IV.25). Les données indiquées par un triangle noir correspondent aux résultats obtenus pour la bulle double étudiée partie dans le chapitre 7.

- Le rapport d'aspect des bulles doubles est très différent de celui des bulles uniques. Pour de faibles diamètres ($d_b < 10h$), il est supérieur (entre 1.4 et 1.8) à ce que l'on obtiendrait pour des bulles uniques (de l'ordre de 1.2), et au delà, les bulles sont de rapport d'aspect plus faible (entre 1.2 et 1.3). On remarque que la bulle numérotée 5 ne suit pas du tout cette tendance avec un rapport d'aspect très élevé de valeur 1.6.
- La vitesse des bulles est de l'ordre de 10 à 25 mm^{-1} pour les deux jeux de données. Toutes les bulles, sauf celles numérotées 1, 3, 4 et 5 remontent moins vite qu'une bulle unique évoluant sous les mêmes conditions opératoires (même diamètre, rapport d'aspect, épaisseur de cellule et viscosité).

L'ajustement des paramètres de l'équation (III.8) sur les données expérimentales des bulles donne alors que

$$\frac{v_b}{v_0^*} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \times d_b/h} \right), \quad \mu_1 = 0.93 \pm 0.11, \quad \mu_2 = 0.17 \pm 0.07. \quad (\text{IV.25})$$

Il est possible qu'à très grand diamètre, le comportement des bulles doubles rejoigne celui des bulles

simples car la valeur de μ_1 contient 1 dans les barres d'erreur. Il nous faudrait alors plus de données pour confirmer ou infirmer cette hypothèse. De plus, le facteur μ_2 est inférieur à celui du cas des bulles simples. On peut supposer que l'interface joue alors un rôle important sur ce paramètre.

Maintenant que nous avons étudié la forme et la dynamique des bulles, nous allons tenter de comprendre les mécanismes physiques à l'origine des changements par rapport à la dynamique des bulles uniques observées.

9.1.2 Interface entre deux bulles

Intéressons-nous aux bulles numérotées 2 et 3. Elles ont le même diamètre équivalent (~ 23 mm), mais la bulle 2 remonte beaucoup plus vite que la 3. La différence notable entre ces deux bulles réside dans la différence des deux diamètres des bulles initiales, ce qui induit alors un positionnement différent de l'interface : pour la bulle 3, les deux bulles ont le même diamètre initial et l'interface est située au milieu de la bulle. Plus généralement, on constate que lorsque la position de l'interface est en amont ou en aval de la bulle, ce qui est équivalent à avoir une bulle beaucoup plus grosse ou petite que l'autre, la bulle double remonte comme si c'était une bulle unique, sa vitesse de remontée normalisée étant très proche de la relation empirique (IV.3).

Nous pouvons quantifier cette observation par la figure IV.15. La construction du graphe est la suivante : on compare la vitesse normalisée de chaque bulle double à la vitesse normalisée que la bulle double aurait si c'était une bulle unique de même taille. On étudie cela en fonction du rapport des diamètres des bulles constituant la bulle double, en prenant au numérateur la bulle de plus petit diamètre et au dénominateur la bulle de plus grand diamètre.

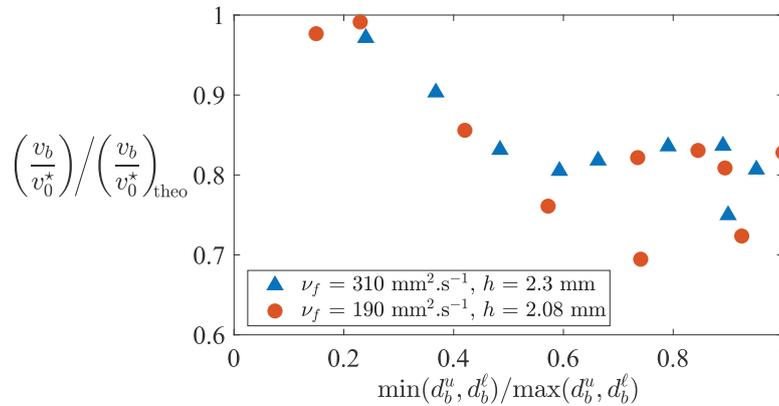


FIGURE IV.15 - **Comparaison des remontées de bulles doubles en fonction du rapport des diamètres.** En ordonnée : vitesse normalisée des bulles doubles v_b/v_0^* divisée par v_b/v_0^* donné par la relation (IV.3). En abscisse : rapport du plus petit diamètre composant la bulle sur le plus grand diamètre composant la bulle double.

On constate alors que plus le rapport des diamètres est éloigné de l'unité, plus la dynamique de la bulle double est proche de la dynamique d'une bulle unique. Lorsque les bulles ont une taille proche, la vitesse normalisée est éloignée de celle pour une bulle unique.

Plusieurs mécanismes pourraient expliquer les observations sur les bulles doubles collées. Le contour de la bulle double possède deux singularités à cause de l'interface entre les deux bulles. Ces singularités peuvent modifier les lignes de courant de l'écoulement créées par la bulle. Lorsque les lignes de courant se resserrent, la dissipation visqueuse est plus importante localement. Une deuxième explication est liée à la taille de l'interface entre les deux bulles qui est plus élevée pour des diamètres de bulles proches. L'interface pourrait amener des phénomènes dissipatifs qui entraîneraient un ralentissement de la bulle. Pour l'instant, nous n'avons pas de critère pour discriminer l'une des deux hypothèses.

9.1.3 Bulles de type Maxworthy

Pour finir, le comportement de la bulle numérotée 5 sur la figure IV.14 a déjà été observé par Maxworthy dans son article de 1986 [Maxworthy, 1986] (figure 4-b), et dans un deuxième article en 1990 [Ikeda and Maxworthy, 1990]. Ils expliquent qu'il existe peut-être un lien entre l'angle formé par la singularité et la dynamique de la bulle. La figure IV.16 présente la forme et trajectoire de la bulle au cours de la remontée.

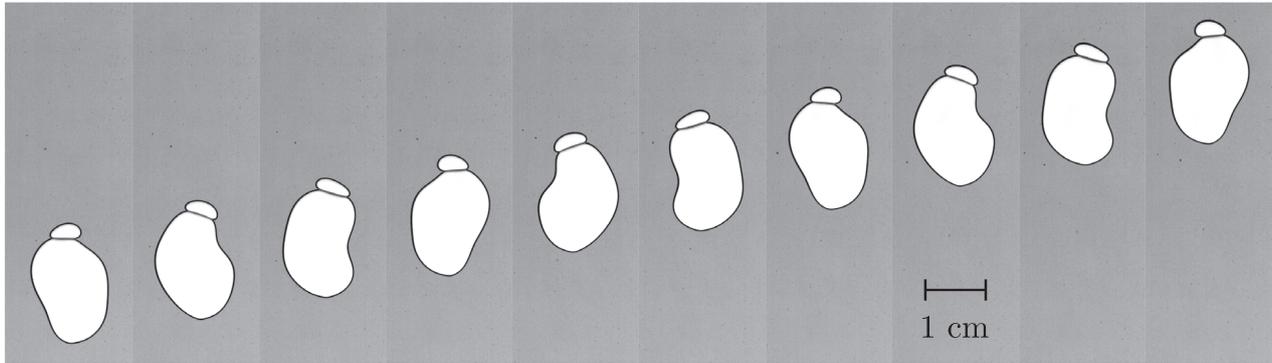


FIGURE IV.16 - **Bulle de type Maxworthy.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹]. Les photographes ont été prises toutes les 277 ms.

On constate des oscillations de la bulle autour de la trajectoire verticale. Une visualisation du champ de vitesses avec notre dispositif expérimental permettrait de comprendre mieux ce phénomène, spécifiquement au niveau des singularités. L'étude de la dynamique des interfaces serait aussi une piste à étudier.

9.2 Dynamique des trains de bulles

Nous avons mis en évidence deux phénomènes possibles modifiant la dynamique d'une bulle double par rapport à une bulle simple : l'interface entre les bulles et les singularités du contour de la bulle, situées de part et d'autre de l'interface. On se propose maintenant d'étudier la dynamique d'un nombre plus élevé de bulles qui sont collées, que l'on appelle un train de bulles.

9.2.1 Morphologie des trains de bulles

La figure IV.17 présente une liste non-exhaustive des trains de bulles (contenant 3 bulles ou pas) étudiés durant cette thèse.

Les trains de petites bulles sont créés par l'automatisation du débitmètre en contrôlant la durée d'ouverture. Les grosses bulles sont créées avec une seringue en appliquant une forte pression créant une grosse bulle ou des faibles pressions pour les plus petites bulles. Ces méthodes ne sont cependant pas reproductibles pour créer des bulles d'une taille donnée.

On remarque alors une grande étendue possible des formes des trains de bulles que l'on peut séparer en plusieurs catégories :

- Les trains de bulles simples (cadres noirs), pour lesquels les bulles sont les unes à la suite des autres. Le rapport d'aspect de ces bulles est souvent très élevé (supérieur à 2).
- Des trains de bulles réorganisés (cadres bleus), dont le rapport d'aspect est compris entre 1.2 et 2.
- Les bulles de type Maxworthy, avec une très petite bulle en amont par rapport à la taille des autres bulles qui donne une forme très allongée à la bulle, de rapport d'aspect supérieur à 2.

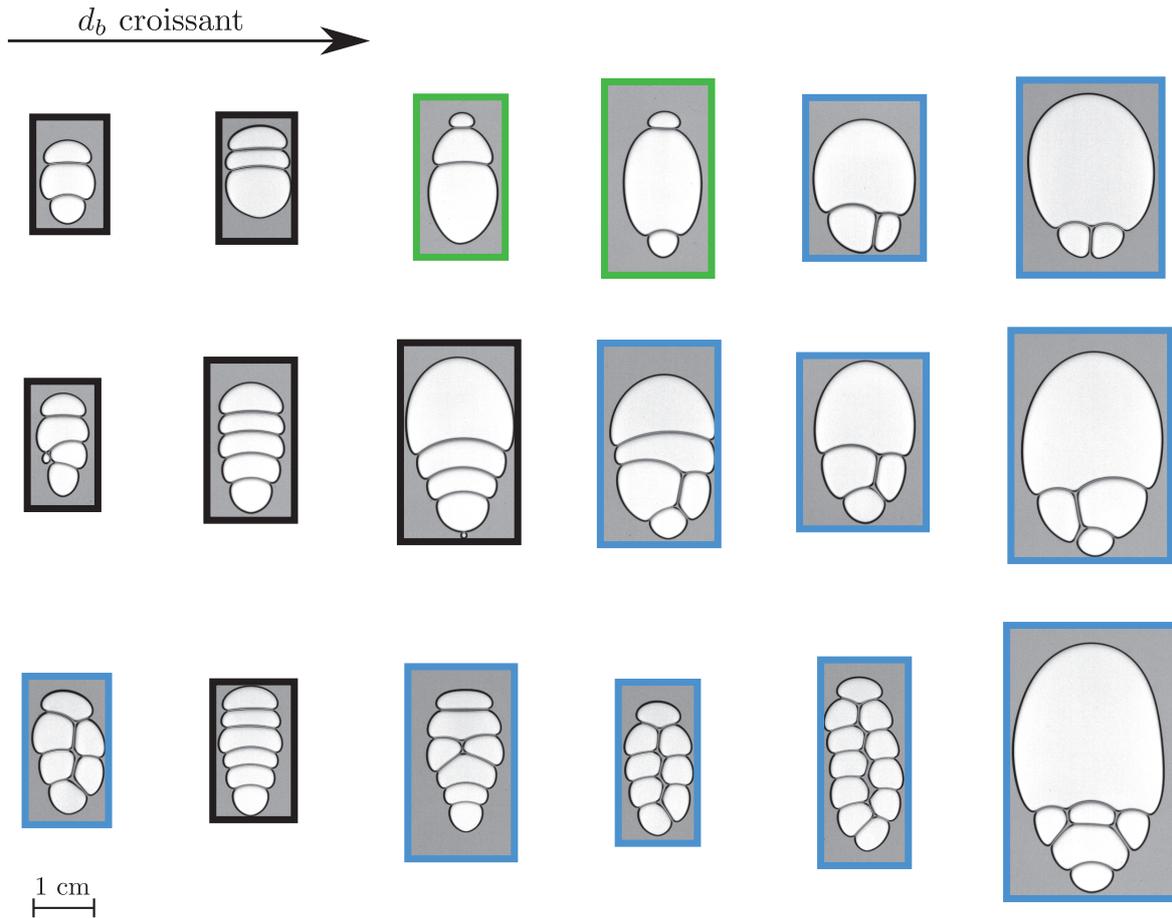


FIGURE IV.17 - **Morphologie des trains de bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹], L'échelle en bas à gauche est valable pour toutes les bulles. Le nombre de bulles étudié varie de 3 à 11, et la taille des bulles entre 8 et 50 mm. La flèche indique que les diamètres des bulles uniques équivalentes augmentent de la gauche vers la droite. Le nombre de bulles augmente en allant vers le bas à droite.

Les trains de bulles simples ne sont souvent présents que pour des bulles avec une taille similaire tandis que les trains qui se réorganisent au cours de la remontée apparaissent souvent lorsque le nombre de bulles n augmente, et sont omniprésents dès que $n > 6$. De même, dès lors qu'il y a des grandes différences de diamètre entre les bulles, ces trains réorganisés apparaissent. Nous allons tenter de quantifier la dynamique des trains de bulles, et l'influence de la réorganisation.

9.2.2 Dynamique des trains de bulles : un exemple

Revenons sur l'expérience d'approche des 5 bulles présentée sur la figure IV.13 du chapitre 8. On peut se demander quelle est la dynamique équivalente des trains de bulles en fonction du nombre de bulles qui les composent, c'est-à-dire en les considérant comme des bulles uniques. La figure IV.18 présente les propriétés de forme (diamètre et rapport d'aspect) des différents trains de bulles (1+2+3, puis 1+2+3+4 et enfin les 5 bulles collées) et leur vitesse normalisée.

Comme observé sur les photographies de la figure IV.13, les bulles s'ajoutent une par une et le train s'allonge verticalement, comme indiqué sur la figure IV.18-b). Or, nous avons vu que les trains avaient une vitesse similaire malgré leur nombre de bulles les constituant, ce qui signifie que le produit $v_b \times a/b$ diminue. La figure IV.18-c) confirme cette observation : la vitesse normalisée des bulles diminue en fonction du nombre de bulles constituant le train. La faible valeur de v_b/v_0^* est en accord avec la

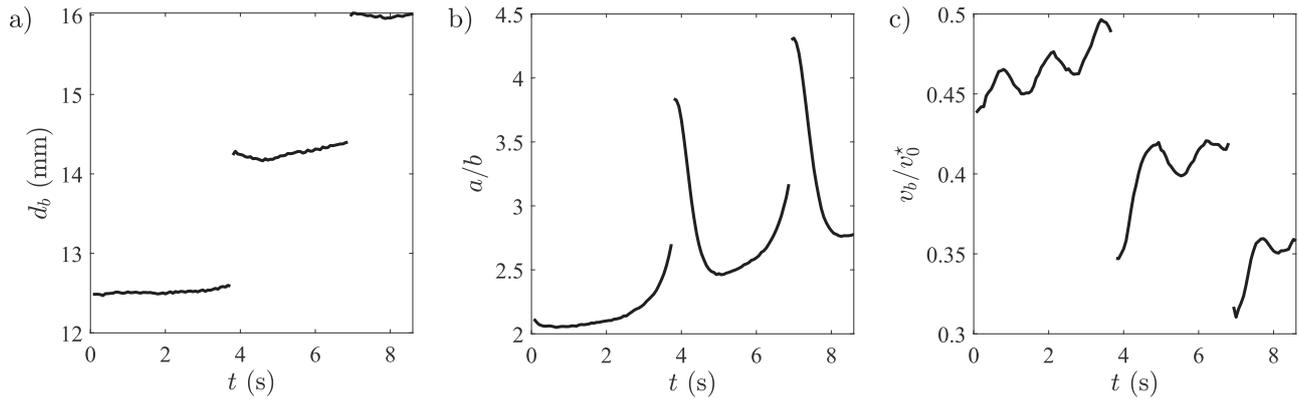


FIGURE IV.18 - **Dynamique des trains de bulles.** a) Évolution du diamètre d_b , b) Rapport d'aspect a/b et c) vitesse normalisée v_b/v_0^* des trois trains de bulles en fonction du temps.

figure IV.4-b) de l'exemple du chapitre 7 : les bulles doubles ou multiples remontent moins vite qu'une bulle unique de même rapport d'aspect.

On peut d'ores et déjà compléter les hypothèses du chapitre 7 sur les possibles raisons de cette diminution : plus le nombre d'interfaces et de singularités composant la bulle multiple sont nombreux, plus la bulle remonte lentement en comparaison avec une bulle unique. Avant de s'intéresser à la dynamique générale des trains de bulles, nous allons comprendre la réorganisation de ces dernières au sein d'un train de bulle.

9.2.3 Réorganisation d'un train de bulle

La figure IV.19 présente l'exemple d'une réorganisation d'un train de bulles simples contenant 8 bulles.

Entre 0.80 et 2.00 s, les bulles se réorganisent au sein du train de bulles. 3 bulles se disposent à droite et 3 autres à gauche, les deux bulles en amont et aval du train restant à la même position, comme indiqué sur la figure IV.19-b). On constate que cette réorganisation se fait par paire ; après la première bulle, la deuxième se met à gauche, puis la troisième à droite, la quatrième à gauche, etc. Ce comportement est généralisable pour d'autres trains de bulles où les bulles sont de taille commune : on observe ce même schéma. La vitesse verticale des bulles fluctue de manière significative pendant le réarrangement : les bulles semblent toutes globalement accélérer. A la fin du réarrangement, la vitesse de la bulle reste de l'ordre de la vitesse avant le réarrangement.

On peut donc se demander comment cette réorganisation affecte la dynamique de la bulle unique composant le train de bulles. La figure IV.20 présente les paramètres de forme et de dynamique de la bulle unique. La vitesse de la bulle équivalente augmente de 24.5 jusqu'à 27 $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ lors de la réorganisation tandis que son rapport d'aspect diminue de quasiment 50% de 2.8 à 1.9. Après la réorganisation, la vitesse et le rapport d'aspect diminuent encore. Toutefois, on constate que la vitesse normalisée de la bulle unique passe de 0.5 à 0.75, avec un régime oscillatoire de quelques secondes. Après, la bulle garde une vitesse normalisée constante. Cette observation très importante se généralise pour toute bulle se réorganisant.

Tentons de comprendre les mécanismes sous-jacents : parmi les deux mécanismes dissipatifs possibles, nous avons évoqué la présence et la disposition des interfaces au sein de la bulle et les singularités locales du contour de la bulle. La figure IV.21 présente deux photographies du train avant et après réorganisation.

Afin de déterminer l'importance de chacun des mécanismes décrits ci dessus, voici une proposition de méthode d'analyse pour les séparer. Pour cela, le contour est coloré en orange, mettant en évidence les

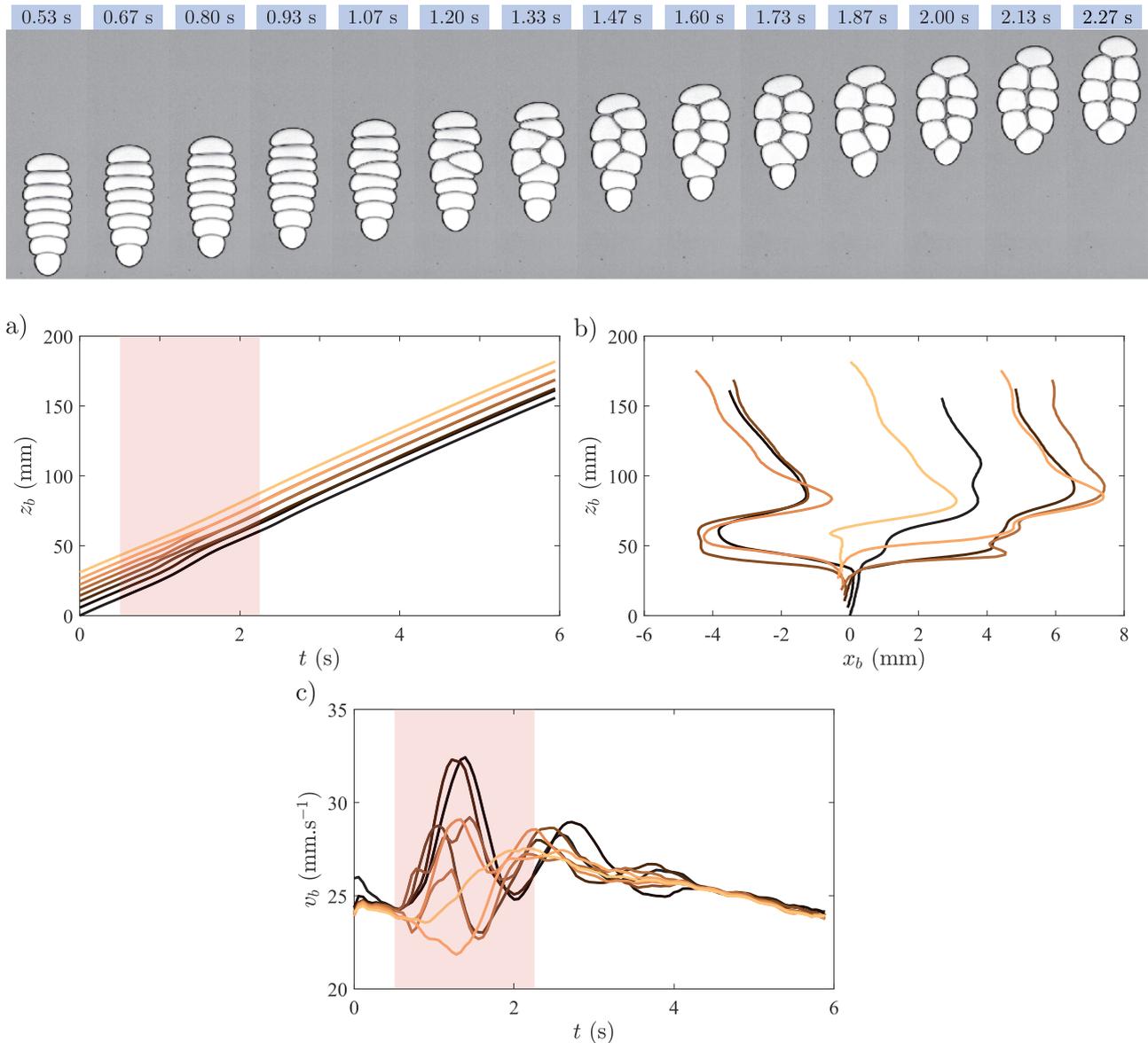


FIGURE IV.19 - **Dynamique de réorganisation d'un train de bulles.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Au dessus : photographies d'un train de 8 bulles qui se réorganisent. La taille des bulles est comprise entre 5.8 et 6.2 mm. En dessous : graphes d'évolution des bulles, avec a) position verticale des bulles par rapport à celle de plus faible altitude à $t = 0$, b) trajectoire des bulles par rapport à la position initiale de la bulle du dessous, c) vitesse des bulles v_b en fonction du temps. La couleur des graphes représentant chaque bulle est de plus en plus claire en fonction de la hauteur des bulles à l'instant initial.

singularités. Le squelette interne représentant les interfaces du train de bulles est coloré en blanc. On observe que le nombre de singularités diminue de 14 à 9. Dans le même temps, l'épaisseur des traits composant le squelette augmente : les interfaces bulle-bulle semblent beaucoup plus fines avant la réorganisation. Il faudrait alors quantifier exactement le rôle des films entre les bulles et des singularités pour caractériser la dynamique.

9.2. Dynamique des trains de bulles

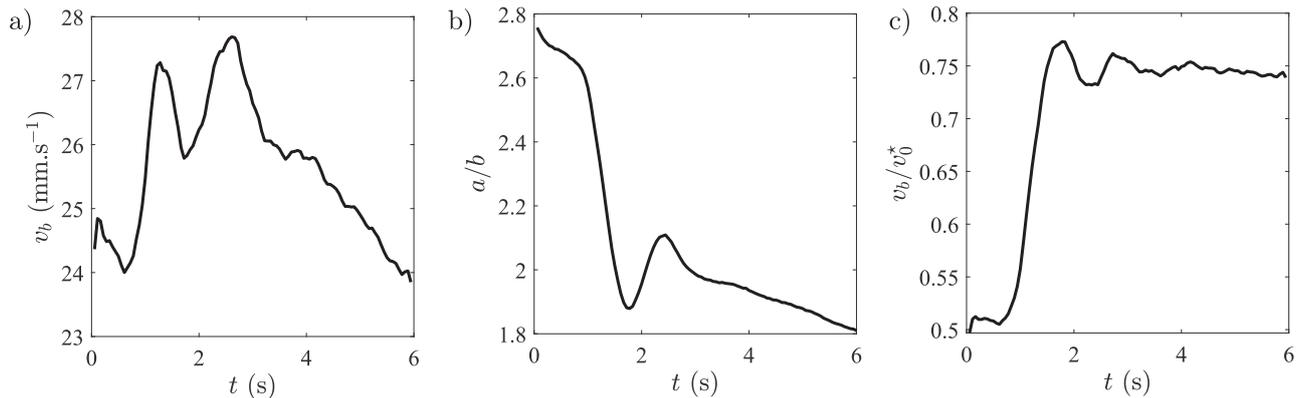


FIGURE IV.20 - **Dynamique de type bulle unique d'un train de bulles se réorganisant.** [$h = 2.08$ mm, liquide A_{200} , $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Paramètres de forme et de vitesse de la bulle unique formée du train de bulles étudié sur la figure IV.19 tels que a) vitesse de remontée v_b , b) rapport d'aspect a/b et c) vitesse normalisée v_b/v_0^* en fonction du temps t .

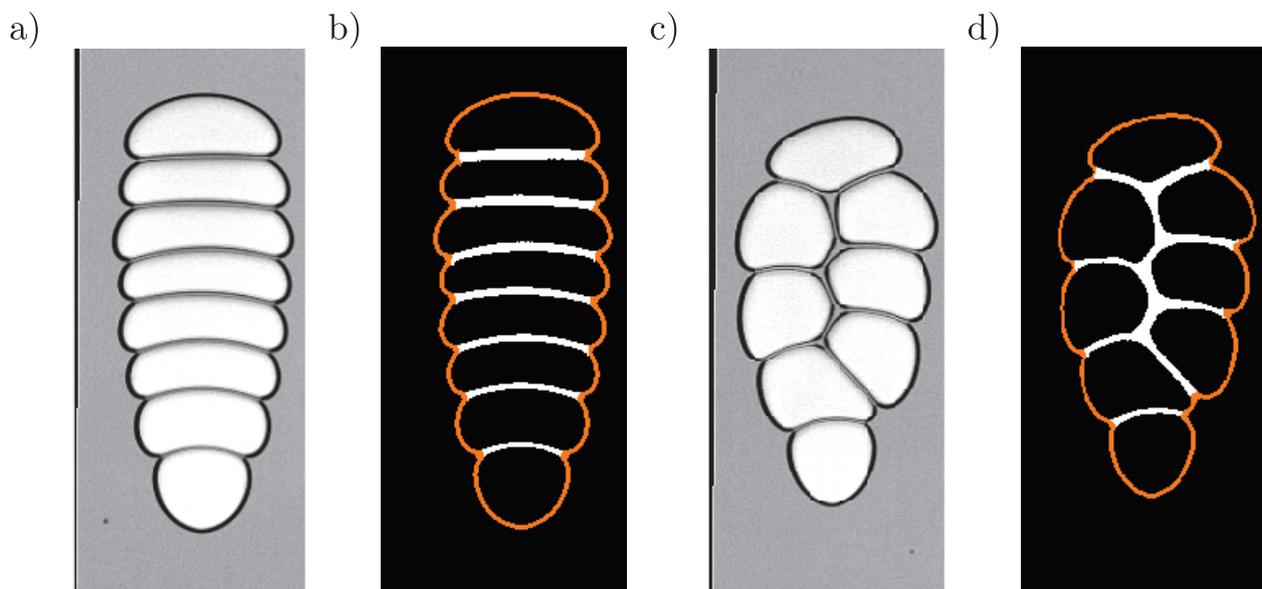


FIGURE IV.21 - **Squelette d'un train de bulle.** [$h = 2.08$ mm, $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] a) Photographie du train de bulle présenté sur la figure IV.19 avant réorganisation et b) image segmentée de ce train. c) Photographie du train de bulle après réorganisation et d) image segmentée de ce train. Le contour orange sur les images segmentées représente le contour de la bulle, et les pixels blancs sont associés aux films liquides entre les bulles.

Par la suite, nous choisissons d'utiliser le nombre de singularités pour caractériser la dynamique des bulles doubles.

9.2.4 Dynamique générale de remontée

Nous nous intéressons maintenant à la dynamique de l'ensemble des trains de bulles. La figure IV.22 présente l'évolution de la vitesse normalisée des trains de bulles en fonction du nombre de singularités composant le train de bulles. Si un train de bulles se réorganise durant sa remontée, on considère le train avant réorganisation comme deux entités différentes. Par exemple, les deux points encadrés sont issus du train de bulle étudié sur la figure IV.19. Les bulles simples, correspondant à un nombre de

singularités nul, ont été obtenus sur ce même liquide afin de vérifier qu'elles se superposaient bien à la relation $v_b/v_0^* = f(d_b/h)$ pour les bulles uniques.

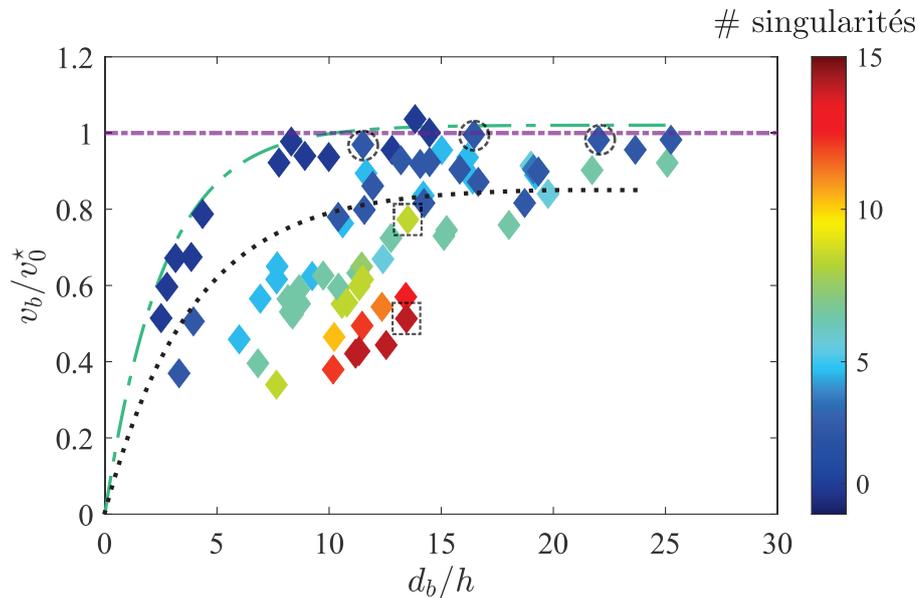


FIGURE IV.22 - **Dynamique de remontée des trains de bulles.** [$h = 2.08$ mm, $\nu_f = 190$ mm².s⁻¹] Évolution de la vitesse normalisée des trains de bulles v_b/v_0^* en fonction de d_b/h . Le nombre de singularités issu de chaque point est donné par la palette de couleurs. La courbe tiretée correspond à la régression empirique (III.8) pour les bulles simples, et la courbe pointillée correspond à la régression empirique (IV.25) pour les bulles doubles. Les points entourés sont des bulles de type Maxworthy et les deux points encadrés correspondent aux données de la bulle IV.19. Nous n'avons pas superposé les données issues de la figure IV.14 pour améliorer la lisibilité du graphe.

On observe, comme pour le cas des bulles doubles collées, que la vitesse normalisée des trains est plus faible que pour le cas des bulles uniques. Cette diminution est d'autant plus accentuée que le nombre de singularités composant la bulle est élevé : les bulles remontent alors jusqu'à 60% moins vite. Au contraire, les bulles de type Maxworthy, bien qu'elles puissent posséder 6 singularités, remontent aussi vite qu'une bulle unique de même forme.

Résumé

La dynamique des bulles doubles et des trains de bulles a été étudiée dans ce chapitre. Pour les bulles doubles, leur forme et dynamique est différente des bulles isolées : leur rapport d'aspect est généralement plus élevé à faible diamètre et plus faible à fort diamètre. De même, la vitesse de remontée des bulles est plus lente. L'interface, qui semble jouer un rôle important dans la dynamique, modifie la vitesse de la bulle double en fonction de sa disposition spatiale : lorsqu'elle est située au milieu de la bulle, la vitesse est réduite d'environ 20 à 25% comparé à une bulle isolée de même forme. Si l'interface est située en amont ou aval de la bulle double, cette réduction de vitesse est quasi nulle.

Les trains de bulles, association de plusieurs bulles collées, peuvent être de différentes formes en fonction de leur taille, du nombre de bulles les composant et de leur taille individuelle. Les bulles se réorganisent parfois au sein d'un même train de bulles. Leur forme est alors moins allongée, et leur vitesse normalisée est plus élevée après réorganisation. En étudiant leur dynamique générale de remontée, on observe que plus le nombre de singularités^a est élevé, plus la vitesse normalisée des bulles v_b/v_0^* est faible.

^a. Nous définissons singularité comme étant une modification locale du contour extérieur due à la présence d'une interface bulle-bulle.

Conclusion générale et Perspectives

L'objectif principal de ma thèse est d'étudier la remontée d'une ou plusieurs bulles d'air en interaction au sein d'un environnement confiné, la cellule de Hele-Shaw, remplie d'un liquide Newtonien ou d'une suspension granulaire. Nous avons séparé l'étude en fonction du nombre de bulles étudiées et du type de fluide considéré dans la cellule.

L'ensemble des résultats expérimentaux ont été obtenus à l'aide d'une visualisation par ombroscopie de la bulle et du liquide ou de la suspension granulaire. Des méthodes de traitement d'images ont ensuite été utilisées afin de déterminer la forme et la dynamique au cours du temps des bulles.

Remontée d'une bulle d'air

- Nous avons utilisé le dispositif expérimental et les méthodes de traitement d'images pour étudier la remontée d'une bulle d'air unique évoluant dans un liquide Newtonien à $Re \ll 1$ [†]. Nous avons observé que les bulles sont allongées verticalement. Nous avons vérifié quantitativement, en comparant nos mesures aux résultats théoriques issus de [Taylor and Saffman, 1959] et [Maxworthy, 1986], que des bulles de diamètre élevé devant l'épaisseur de la cellule possèdent une vitesse terminale ascensionnelle indépendante du diamètre de la bulle v_0^* . Nous avons aussi déterminé qu'il existe une courbe universelle de forme exponentielle reliant la vitesse normalisée v_b/v_0^* et d_b/h .
- À l'aide d'outils expérimentaux, nous nous sommes alors concentrés sur la remontée d'une bulle au sein d'une suspension granulaire, à travers l'influence de la taille des bulles et de la fraction volumique en grains. Nous avons observé que la forme moyenne des bulles était identique que pour un liquide pur : de forme légèrement elliptique pour $d_b \lesssim 7h$, et de rapport d'aspect croissant au delà. Il est apparu que les bulles d'air possèdent aussi une vitesse terminale ascensionnelle, mais qui est plus élevée dans une suspension que dans un liquide pur de même viscosité. Ce surplus de vitesse augmente avec la fraction volumique.

[†]. $Re = \frac{v_b d_b}{\nu_f} \left(\frac{h}{d_b}\right)^2$.

-
- En prenant appui sur les résultats théoriques et expérimentaux précédents sur les suspensions granulaires, nous avons interprété que ce surplus de vitesse est relié au phénomène de migration des particules induite par cisaillement, qui modifie le profil de la fraction volumique locale entre les plaques de verre, réduit la dissipation visqueuse au sein de la cellule et accélère les bulles. La prédiction du surplus de vitesse issue de la modélisation théorique est en excellent accord avec les mesures expérimentales.

Remontée et interaction entre plusieurs bulles

- Nous nous sommes concentrés sur l'étude de la remontée de bulles multiples dans un liquide Newtonien. La première expérience étudiée est l'interaction entre deux bulles. Cette étude préliminaire a permis de caractériser les phénomènes à l'origine du rapprochement entre deux bulles : la bulle en dessous s'allonge fortement dans le sillage de la bulle du dessus, tandis que celle du dessus s'aplatit. Les deux bulles accélèrent jusqu'au contact. Nous avons ensuite observé le comportement des deux bulles collées : la vitesse de remontée de l'ensemble est inférieure à celle d'une bulle unique de même forme.
- Nous avons d'une part étudié la dynamique d'approche par deux modèles théoriques simples : une bulle impose le champ de pression et de vitesses au sein de la cellule. En plaçant une bulle passive au dessus de la bulle initiale, la bulle passive s'aplatit. De même, en la plaçant en dessous, elle va s'allonger. Dans les deux cas, la bulle initiale est alors accélérée car elle doit entraîner moins de liquide. Ces modèles sont en bon accord avec les données expérimentales. L'interaction de bulles multiples montrent que les dynamiques d'approche sont les mêmes que pour deux bulles simples.
- D'autre part, nous avons étudié de manière systématique la dynamique des bulles collées :
 - Pour les bulles doubles, en fonction du rapport entre les diamètres des deux bulles, on mesure un écart de vitesse avec la remontée d'une bulle unique. Cette observation soulève la question de l'importance de l'interface entre les deux bulles et des singularités du contour local en périphérie de l'interface.
 - L'étude systématique des trains de bulles montre que les bulles peuvent se réorganiser, réduisant la puissance dissipée du train. La dissipation supplémentaire en comparaison avec les bulles uniques semble donc dominée par le nombre de singularités au sein d'un train de bulles.

Perspectives

Ces deux études laissent certaines questions en suspens, que ce soit sur l'étude de l'influence du nombre capillaire sur la dynamique des bulles, ou la compréhension des effets dus à la présence d'interfaces liquides entre les bulles.

- Je me suis concentré sur la caractérisation de la remontée de la bulle en faisant principalement varier le nombre de Reynolds associé à la géométrie Re . Toutefois, il semble que le nombre capillaire Ca soit à considérer dans la forme et la dynamique des bulles. Je pense que les effets capillaires modifient principalement deux grandeurs :

- La forme elliptique de la bulle pourrait être expliquée par la force exercée par le liquide sur le haut de la bulle : un corps de très faible tension de surface va avoir tendance à s’allonger très facilement ($a/b \rightarrow \infty$) selon les lignes de courant de l’écoulement. Au contraire, un corps peu déformable garde sa forme initiale. Il est possible que la tension de surface, reliée à la déformabilité de la bulle, joue un rôle important sur le rapport d’aspect a/b , modifiant le diagramme ($a/b, d_b/h$) présenté figure III.5.
- Le diamètre critique pour lequel v_b/v_0^* est quasiment égal à 1, relié au paramètre μ_2 de la régression. Des expériences préliminaires ont été menées par Benjamin Monnet, en stage de Master 2, à l’aide du dispositif expérimental développé au cours de cette thèse. Il a utilisé d’une part des mélanges triton-X100/eau/chlorure de zinc[†] et d’autre part des mélanges eau/glucose. Les premières expériences montrent que le paramètre μ_2 varie, le paramètre μ_1 étant toujours de l’ordre de 1. La courbe reliant v_b/v_0^* et d_b/h serait donc différente à faible diamètre, dont les paramètres de dépendance sont au moins h , car nous avons observé une modification de μ_2 en utilisant une cellule d’épaisseur différence, et γ_f .

Ces pistes de réflexion peuvent s’étudier simplement en étudiant la remontée de bulles en présence de surfactants, faisant varier le nombre capillaire, à nombre de Reynolds constant afin d’effectuer une comparaison avec nos résultats.

- Dans le cadre de cette thèse, je n’ai pas étudié les mécanismes à l’origine de la vitesse de la bulle à faible diamètre. Quelques pistes peuvent être explorées. La différence fondamentale entre une grosse bulle et une petite bulle vient de l’importance du film de lubrification : nous avons vu dans l’introduction que ce dernier est négligeable à fort diamètre, mais à faible diamètre, la dissipation engendrée par le liquide interstitiel entre la bulle et les plaques doit être considérée. La dépendance du facteur μ_2 en h et γ_f serait une possible piste pour comprendre la théorie. Notamment, la loi de Laplace fait apparaître ces deux paramètres.
- L’étude de la transition entre régime visqueux ($Re \ll 1$) et inertiel ($Re \gg 1$), étudié par [Filella, 2015] pour des liquides purs, afin d’établir la relation $v_b = f(d_b)$, pourrait être effectuée, dans des liquides et des suspensions.
- Dans le chapitre 6, nous avons comparé le coefficient d’atténuation α en fonction de la taille des particules d_p . On peut donc se demander s’il est possible de comprendre les différents mécanismes pouvant modifier α avec d_p , en incluant éventuellement une résolution numérique de l’équation de migration instationnaire, dont le flux de particules dépend de d_p .
- Nous avons montré la possibilité d’étudier l’hydrodynamique des grains. L’étape suivante serait d’obtenir la distribution de fraction volumique locale. On pourrait alors prédire le comportement des bulles en fonction des hétérogénéités locales, montrer la réorganisation des particules transversalement aux plaques grâce à des expériences par ultrasons ou par index-matching, que nous sommes actuellement en train de tester avec Benjamin Monnet.
- La suite logique des expériences du chapitre 9 menées sur les trains de bulles serait d’étudier l’écoulement du liquide environnant, par exemple en utilisant des particules de petite taille à faible fraction volumique pour effectuer une étude PIV. L’utilisation d’objectifs macro permettrait d’avoir une meilleure résolution pour comprendre la structure de l’interface entre les bulles.

Afin de conclure les perspectives, je souhaite mettre en lumière des expériences que j’ai débuté ou observé au cours de cette thèse, et qui mériteraient d’être approfondies.

†. Le triton est un surfactant réduisant la tension de surface.

Remontée de bulles multiples dans une suspension

La suite logique aux expériences sur les bulles multiples est d'étudier leur comportement dans une suspension. Nous avons effectué quelques expériences pour une fraction volumique $\phi_0 = 0.15$. Qualitativement, nous avons observé les mêmes mécanismes d'approche des bulles (allongement d'un groupe de bulle en dessous, aplatissement de celui du dessus). Pour les trains de bulles, nous avons aussi observé des réorganisations. La figure V.1 résume ces différents phénomènes.

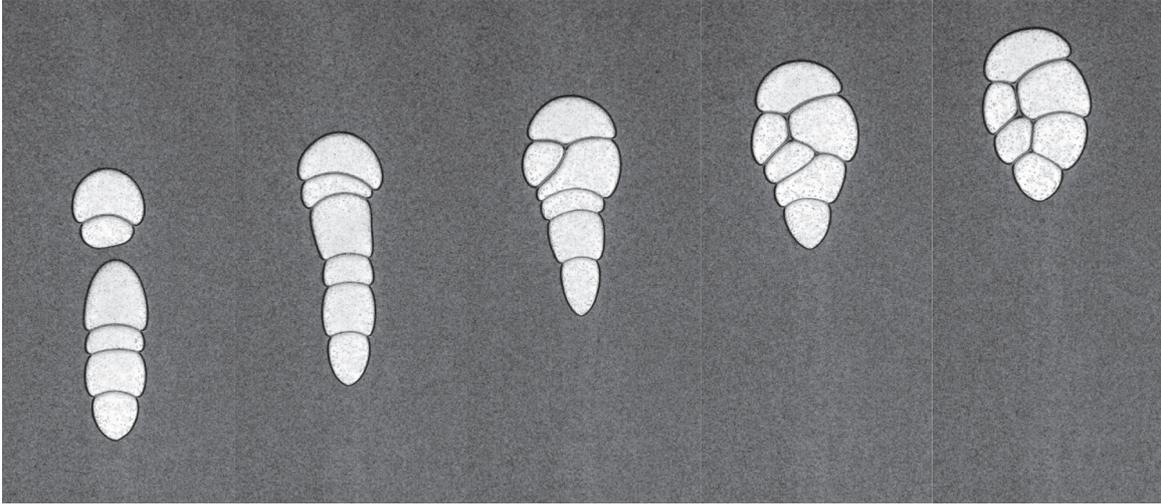
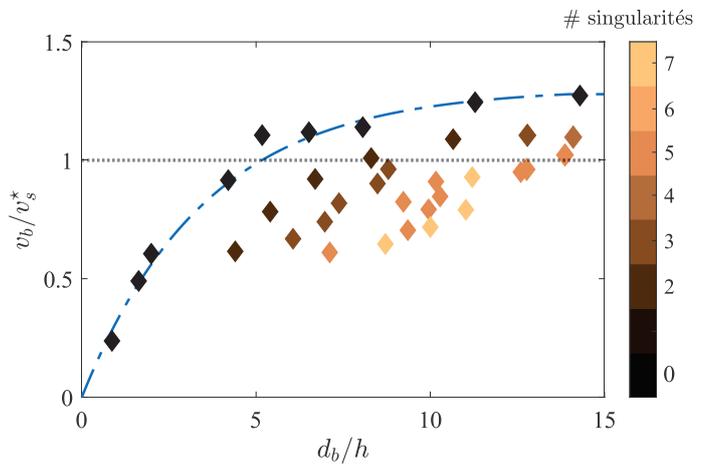


FIGURE V.1 - **Réorganisation de bulles dans une suspension granulaire.** [$h = 2.08$ mm, $\eta_s = 363$ mPa.s, $\phi_0 = 0.15$] Photographies de l'interaction et du réarrangement de bulles dans une suspension.

De même, nous avons pu étudier la vitesse de remontée des trains de bulles en fonction du nombre de singularités du contour local, présenté sur la figure V.2.

FIGURE V.2 - **Dynamique des trains de bulles.** [$h = 2.08$ mm, $\eta_s = 363$ mPa.s, $\phi_0 = 0.15$] Vitesse normalisée v_b/v_s^* en fonction de d_b/h et du nombre de singularités des trains de bulles.



L'allure du graphe est similaire à celle obtenue sur la figure IV.22 pour un liquide pur. On pourrait alors approfondir l'étude systématique de la remontée avec des suspensions de plus en plus denses. L'avantage majeur des suspensions est de pouvoir effectuer des mesures de l'hydrodynamique des suspensions, comme présenté sur la figure V.3, ce qui pourrait amener à une meilleure compréhension des remontées de bulles multiples. Toutefois, on constate que la résolution actuelle du champ PIV obtenu ne suffit pas à étudier les bulles à leur voisinage proche. Un travail supplémentaire est donc nécessaire pour cela.

La compréhension de ces mécanismes est directement liée aux dynamiques de bulles dans les magmas.

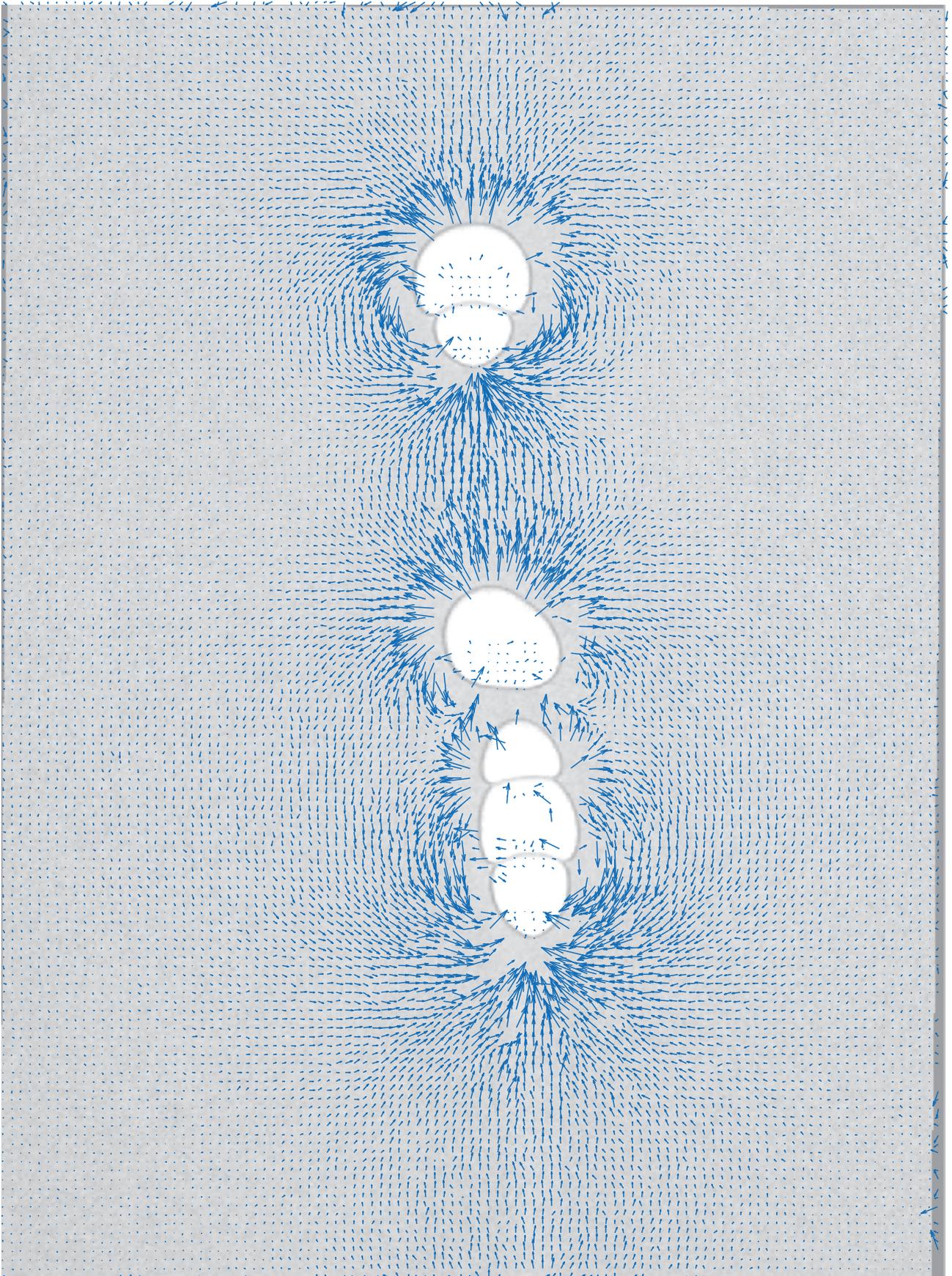


FIGURE V.3 - Hydrodynamique des grains issue de la remontée de bulles multiples.

Coalescence et fragmentation

La coalescence de bulles, reliée aux applications pour les réacteurs à lit fluidisés, a été peu observée avec les liquides que nous avons utilisé. La figure V.4 présente un exemple de rupture du film interfacial entre deux bulles. On remarque la traînée qui semble être alors l'évacuation du film liquide. La compréhension et les conditions de coalescence de bulles en cellule de Hele-Shaw, notamment en fonction de la taille des bulles et de la tension de surface du liquide est un sujet intéressant à étudier.

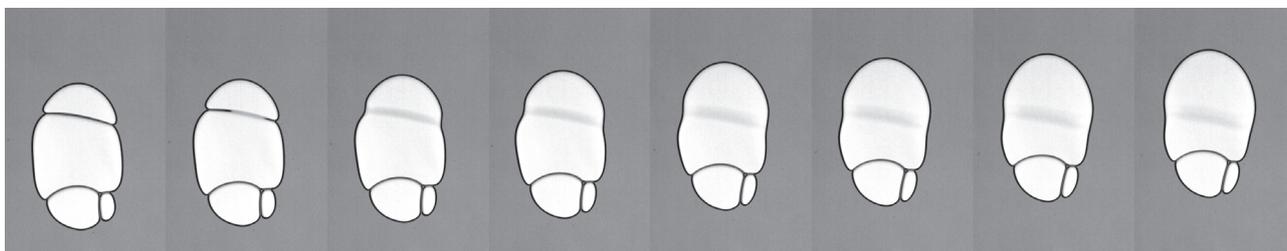


FIGURE V.4 - **Coalescence de bulles.** [$h = 2.08$ mm, $\eta_f = 200$ mPa.s] Photographie image par image d'une coalescence. Le temps entre chaque image est de 0.056 s, pour un temps total de 444 ms.

Au contraire, le phénomène de fragmentation était beaucoup plus présent. Lors de l'étude de bulles uniques de grande taille, typiquement $d_b > 15h$, une bulle sur deux se fragmentait. La figure V.5 présente une bulle unique qui se fragmente deux fois. Nous pensons que le principal moteur de la fragmentation est dû aux hétérogénéités locales dont nous avons quantifié l'importance sur la forme et la trajectoire dans le chapitre 6. En effet, si l'on suppose qu'il y a une réplétion devant la bulle, on peut observer un contournement des contours locaux vers la gauche et la droite (comme ce que l'on observe sur la figure). Si les contraintes sont trop élevées, la bulle se fragmente alors. Il serait intéressant de déterminer la taille critique des bulles en fonction de la fraction volumique pour laquelle la fragmentation intervient de manière systématique. Notons que ces fragmentations de bulles simples ont aussi été observés par [Gaillard et al., 2021] dans des liquides purs en modifiant localement l'épaisseur h . Il faut donc aussi prendre en compte ce paramètre.



FIGURE V.5 - **Double fragmentation d'une bulle unique.** [$h = 2.3$ mm, $\eta_s = 450$ mPa.s, $\phi_0 = 0.30$]

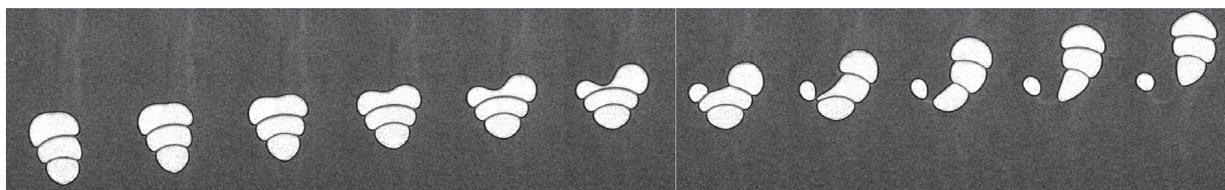


FIGURE V.6 - **Fragmentation d'un train de bulles.** [$h = 2.08$ mm, $\eta_s = 363$ mPa.s, $\phi_0 = 0.15$]

Coalescence et fragmentation

Enfin, le dispositif expérimental permet aussi d'imaginer d'autres expériences. On pourrait par exemple étudier la remontée de bulles entre deux interfaces granulaires, c'est-à-dire avec un saut de fraction volumique. La figure V.7 présente une expérience où une bulle se fragmente à cause du passage vers une suspension plus dense (les fractions volumiques n'ont pas été déterminées). On constate que l'interface est modifiée par le passage de la bulle et que le fluide en dessous est légèrement entraîné par la bulle.

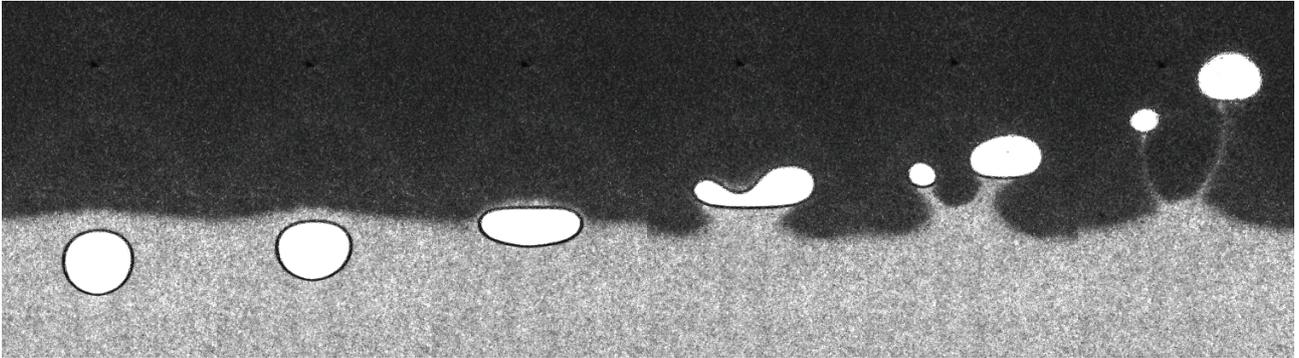


FIGURE V.7 - **Passage d'une bulle à travers une interface granulaire.**

La compréhension du comportement aux interfaces granulaires permettrait de mieux comprendre les dynamiques dans les suspensions stratifiées, ou d'entraînement de bulles lors d'un brusque changement de densité en grains.

Équation de Maxey-Riley

Le mouvement d'une sphère de taille d_p finie et de masse volumique ρ_p à travers un liquide est décrit par l'équation de Maxey-Riley [Boussinesq, 1885, Basset, 1888, Oseen, 1927, Maxey and Riley, 1983, Kleinstreuer and Feng, 2013] :

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = & \underbrace{-\rho_f \frac{\pi d_p^3}{12} \left(\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} - \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right)}_{\mathbf{F}_{MA}} \underbrace{- 3\pi\eta_f d_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}_{\mathbf{F}_P} + \underbrace{\frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt}}_{\mathbf{F}_f} + \underbrace{\frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g}}_{\mathbf{F}_g} \\ & + \underbrace{\frac{3}{2} \rho_f \sqrt{\pi\eta_f \rho} d_p^2 \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)}{d\tau}}_{\mathbf{F}_B} + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_S + \mathbf{f}_a, \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

avec \mathbf{F}_{MA} la force de masse ajoutée, \mathbf{F}_P la force de traînée, \mathbf{F}_f la force liée à l'accélération du liquide, \mathbf{F}_g la force de gravité, \mathbf{F}_B la force de Basset, \mathbf{F}_R la force de Rubinow, \mathbf{F}_S la force de Saffman et \mathbf{f}_a une force aléatoire due aux effets thermiques à l'échelle microscopique. L'opérateur D/Dt est défini comme la dérivée particulaire telle que

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla), \quad (\text{V.2})$$

se divisant en une partie dérivée temporelle et un terme convectif fonction de \mathbf{v}_f . Nous allons caractériser et simplifier les termes de l'équation (V.1).

Force de masse ajoutée \mathbf{F}_{MA}

Considérons une particule de masse m_p immergée dans un fluide supposé initialement au repos. Si le corps est entraîné par une force extérieure \mathbf{F}_{ext} , elle accélère, mais le fluide environnant l'est aussi, donc la force travaille aussi à mettre en mouvement le fluide ainsi que la particule. Par conséquent, l'application du principe fondamental de la dynamique à la particule ne peut se réduire à une relation entre son accélération et la force extérieure appliquée, mais doit prendre en compte la force \mathbf{F}' qui réagit à la mise au mouvement du fluide. Cette force est de sens opposé à l'accélération et peut donc s'écrire par analyse dimensionnelle

$$\mathbf{F}' = -m' \mathbf{a}, \quad (\text{V.3})$$

avec \mathbf{a} l'accélération de la particule, et m' un facteur de conversion homogène à une masse. Le bilan de quantité de mouvement donne alors que

$$m_p \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}' \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{ext}} = (m_p + m') \mathbf{a}. \quad (\text{V.4})$$

Tout se passe alors comme si il faut ajouter une certaine masse m' à la particule afin que la force appliquée puisse mettre en mouvement la particule. On peut montrer [Brennen, 1982] que dans le cas d'une particule sphérique et d'un écoulement potentiel (sans phénomènes rotationnels), la masse ajoutée vaut la moitié de la masse du fluide déplacé. La traînée additionnelle due à cet effet s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{\text{MA}} = -\rho_f \frac{\pi d_p^3}{12} \left(\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} - \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right). \quad (\text{V.5})$$

Dans le cas où le nombre de Reynolds particulaire (I.52) est faible, le terme convectif de la dérivée particulaire est négligeable, ce qui donne finalement que

$$\mathbf{F}_{\text{MA}} = -\rho_f \frac{\pi d_p^3}{12} \frac{d(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}{dt}. \quad (\text{V.6})$$

Force de frottement visqueux : traînée \mathbf{F}_P

Le fluide exerce une force qui s'oppose au mouvement de la particule et qui agit comme un frottement. Elle s'écrit de manière générale

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{2} C_D \rho_f S (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)^2 \frac{\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f\|}, \quad (\text{V.7})$$

avec S la surface où s'applique le frottement, C_D le coefficient de traînée associé à cette surface. Le coefficient de traînée s'exprime en fonction du nombre de Reynolds particulaire (I.52), indiquant le type d'écoulement local autour de la surface de la particule. Dans le cas dit laminaire $\text{Re}_{d_p} \ll 1$ où les effets visqueux dominant, et pour une particule solide sphérique, on a alors que $C_D = \frac{24}{\text{Re}_{d_p}}$, ce qui correspond à l'écoulement dit de Stokes. L'équation (V.7) se simplifie alors :

$$\mathbf{F}_P = 3\pi\eta_f d_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f). \quad (\text{V.8})$$

Il existe une expression pour le coefficient de traînée pour des valeurs de Reynolds plus élevées $C_D = \frac{24}{\text{Re}_{d_p}} (1 + 0,15\text{Re}_{d_p}^{0,687})$ [Schiller and Naumann, 1935] jusqu'à $\text{Re}_{d_p} \approx 10^3$.

Pression exercée par le fluide sur la particule \mathbf{F}_g et \mathbf{F}_f

La contrainte qui s'exerce par le fluide sur la particule s'applique en surface de la particule. La force résultante \mathbf{F} est de la forme [Maxey and Riley, 1983, Kleinstreuer and Feng, 2013] :

$$\mathbf{F} = \iint dS \sigma_{ij} n_j, \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta_f \left(\frac{\partial v_{f,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{f,j}}{\partial x_i} \right), \quad (\text{V.9})$$

avec $U_{f,i}$ les composantes du champ de vitesse du fluide selon x_i et $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes associé au fluide. La force de pesanteur (ou poids apparent) est donnée par la résultante entre le poids de

la particule et la force d'Archimède exercée par le fluide sur la particule, et correspond au terme de pression dans le tenseur des contraintes intégré :

$$\mathbf{F}_g = \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g}. \quad (\text{V.10})$$

De même, on peut montrer [Maxey and Riley, 1983] que le deuxième terme du tenseur des contraintes intégré peut se simplifier, dans le cas d'un nombre de Stokes très inférieur à l'unité, et s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}_f = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt}. \quad (\text{V.11})$$

Ce terme est équivalent à l'accélération d'une particule fluide de la taille de la particule.

Force de Basset-Boussinesq F_B

Pour comprendre la Force de Basset-Boussinesq, considérons deux particules, l'une en mouvement constant et l'autre dans un mouvement accéléré. Dans le premier cas, la couche limite autour de la particule est définie et ne change pas au cours du temps. Dans le second cas, la couche limite visqueuse évolue, ainsi que les frottements associés, mais avec un certain retard temporel, en fonction de comment change la vitesse relative avec le temps. La contrainte de cisaillement sur la particule due à cette couche est alors dépendante de l'histoire de cette particule au sein du fluide. La force prend alors en compte l'accélération relative de la particule au sein du fluide jusqu'au temps t , et s'écrit alors [Vojir and Michaelides, 1994, Legendre et al., 2019] :

$$\mathbf{F}_B = -\frac{3}{2} \rho_f \sqrt{\pi \eta_f \rho_p} d_p^2 \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)}{d\tau}. \quad (\text{V.12})$$

Le temps typique associé à la diffusion de la quantité de mouvement est $\tau_{\text{diff}} = \frac{d_p^2}{\nu_f}$, avec ν_f le coefficient de diffusion de quantité de mouvement du fluide, autrement appelé viscosité dynamique $\nu_f \equiv \frac{\eta_f}{\rho_f}$. Il est à comparer avec le temps typique de parcours d'une particule $\tau_{\text{parcours}} = \frac{d_p}{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f\|}$. Le rapport de ces deux temps donne le nombre de Reynolds particulaire, très inférieur à 1. Dans ce cas, la diffusion de quantité de mouvement, et plus précisément l'effet du retard provoqué par la diffusion visqueuse est négligeable pendant le mouvement d'une particule, donc la force de Basset-Boussinesq peut-être négligée.

Phénomènes rotationnels et non-uniformité du cisaillement

Si la particule est en rotation, des phénomènes supplémentaires peuvent apparaître. Pour un nombre de Stokes très inférieur à l'unité, un couple hydrodynamique s'applique sur la particule, et engendre une force résultante orthogonale à la direction de l'écoulement. Cette force se nomme Force de Rubinow et Keller [Rubinow and Keller, 1961], et s'écrit

$$\mathbf{F}_R = \frac{\pi \rho_f d_p^3}{8} \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f), \quad (\text{V.13})$$

avec $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse de rotation de la particule. Le rapport de cette force avec la force de traînée vaut

$$\left| \frac{\mathbf{F}_R}{\mathbf{F}_P} \right| = \frac{d_p \rho_f}{24 \eta_f} |\boldsymbol{\omega}| \propto \text{Re}_{d_p} |\boldsymbol{\omega}|. \quad (\text{V.14})$$

La force de Rubinow et Keller est alors négligeable pour des faibles vitesses de rotations et $\text{Re}_{d_p} \ll 1$.

Lorsque la vitesse du fluide est non-uniforme autour de la particule, autrement dit qu'il y a un cisaillement non-uniforme localement, la particule subit une force de Saffman. Par exemple, si la vitesse est non-uniforme selon une direction y , la force de Saffman a comme amplitude

$$\mathbf{F}_S = \frac{K d_p^2 \eta_f}{4} |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| \sqrt{\frac{\rho_f}{\eta_f} \left| \frac{\partial(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)}{\partial y} \right|} \frac{\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f\|}, \quad (\text{V.15})$$

avec $K = 1,615$ [Saffman, 1965]. Cette force peut également être négligée devant la force de traînée à faible nombre de Reynolds particulaire.

L'expression des forces précédemment présentées sont également modifiés pour des vitesses non-uniformes et il existe des corrections de Faxen [Faxén, 1922] qui prennent en compte des non-uniformités du cisaillement autour de la particule. Par exemple, La force de traînée (V.8) contient un terme supplémentaire :

$$\mathbf{F}_{\text{Faxen}} = \frac{\pi \eta_f d_p^3}{8} \nabla^2 \mathbf{v}_f. \quad (\text{V.16})$$

Pour un nombre de Reynolds particulaire très faible devant l'unité, les corrections de ces forces sont négligeables devant leurs termes principaux [Kleinstreuer and Feng, 2013]. Ces non-uniformités locales de cisaillement et les phénomènes rotationnels sont alors négligés.

En conclusion, il est possible de simplifier l'équation (V.1) dans le cas $\text{Re}_{d_p} \ll 1$:

$$\boxed{\left(\rho_p + \frac{\rho_f}{2} \right) \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)}{dt} = 3\pi \eta_f d_p (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) + \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} + \mathbf{f}_a}, \quad (\text{V.17})$$

qui est l'équation (I.55) utilisée pour décrire la dynamique de la particule dans la partie (2.1.1) du chapitre 2.

Interactions dans les suspensions

Nous avons décrit de manière claire et concise les différentes interactions majeures présentes au sein d'une suspension dans la partie 2.2.4 du chapitre 2. Nous proposons ici de décrire plus en détail les mécanismes issus des interactions hydrodynamiques, des contacts lubrifiés, frictionnels et collisionnels, ainsi que les phénomènes liés à l'agitation thermique. On rappelle ici l'équation de Navier-Stokes (I.50) et de Maxey-Riley simplifiée (I.55) lorsque $Re_{d_p} \ll 1$, qui s'écrivent, en présence de particules :

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right] &= -\nabla P + \rho_f \mathbf{g} + \eta_f \Delta \mathbf{v}_f + \underbrace{\sum_j^{N_p} \mathbf{f}_{p,j \rightarrow f}}_I, \\ \left(\rho_p + \frac{\rho_f}{2} \right) \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d(\mathbf{v}_{p,i} - \mathbf{v}_f)}{dt} &= 3\pi\eta d_p \underbrace{\xi(\{d_j, \mathbf{r}_j\}_{j \neq i})}_{II} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{p,i}) + \frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^{N_p} \mathbf{f}_{p,j \rightarrow p,i}}_{III} + \mathbf{f}_a, \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

avec N_p le nombre de particules.

Interactions hydrodynamiques

L'interaction la plus intuitive entre les particules lorsque ces dernières sont proches est celle hydrodynamique. Le champ de vitesse autour d'une particule décroît algébriquement en $1/r$ et a donc une influence à longue portée sur quelques diamètres de particule. Quand deux particules sont très proches l'une de l'autre, le champ de vitesse créé par l'une agit sur l'autre, et vice-versa (terme I). Les forces de frottement changent de par la modification du champ de vitesse du liquide, d'où la présence d'un facteur $\xi(\mathbf{r}, d_p)$ (terme II) [Osnes and Vartdal, 2021]. La vitesse des particules est elle aussi modifiée. Ces interactions sont d'autant plus présentes que les particules sont proches et nombreuses, et le facteur ξ dépend de la position des autres particules par rapport à celle considérée.

Contactes lubrifiés

Supposons encore deux particules sphériques identiques qui se rapprochent comme indiqué sur la figure V.8. Le liquide qui est compris entre les deux surfaces doit être évacué pendant le rapprochement. Cela est d'autant plus difficile que l'écart entre les particules L_p est faible. Le liquide exerce alors une surpression, associée à une force dite de lubrification, qui tend à s'opposer au rapprochement des

particules. Elle est donc source de dissipation hydrodynamique. Cette force est au contraire attractive lorsque les particules s'éloignent, car le liquide est aspiré entre les particules, créant ainsi une dépression [Coussot and Ancey, 1999]. Les termes I et II contiennent ces interactions.

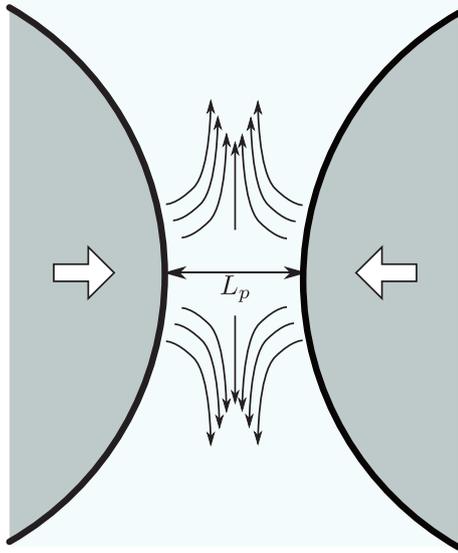


FIGURE V.8 - **Illustration de la force de lubrification.** Les deux particules se rapprochant étirent la couche de lubrification limitrophe aux deux particules. Les flèches blanches représentent des contraintes appliquées sur les particules qui tendent à les rapprocher. Les flèches en noir représentent le liquide interstitiel évacué.

Cette force est proportionnelle à $1/L_p$ et tend vers l'infini si $L_p \rightarrow 0$, ce qui implique que des sphères ne peuvent pas entrer en contact si elles sont parfaitement lisses [Lefebvre-Lepot, 2007]. En pratique, les particules ont une rugosité non nulle, ce qui fait que les particules peuvent quand même être en contact si la distance L_p est de la taille caractéristique des rugosités, phénomène que nous explicitons ci-dessous.

Les distances typiques pour lesquelles la force de lubrification joue un rôle important dans les interactions hydrodynamiques sont de l'ordre de $L_p/d_p \sim 10^{-2}$ [Bossis and Brady, 1984], ce qui correspond à une fraction volumique de l'ordre de 40% sur la figure I.11. Ainsi les forces de lubrification jouent un rôle prépondérant dans les suspensions concentrées. Il est cependant difficile d'établir une forme théorique pour ces forces [Ball and Melrose, 1995].

Lors de l'écoulement d'une suspension, les contacts directs ne peuvent pas se produire car la force de répulsion hydrodynamique à vaincre est beaucoup plus grande que la force s'appliquant sur chaque particule. Si un effort supplémentaire est appliqué aux particules (pesanteur ou pression externe), ou si elles sont rugueuses, elles peuvent effectivement rentrer en contact.

Contactes solides frictionnels et collisionnels

Le contact direct intervient lorsque les éléments solides de chaque particule sont à une distance nulle : les enveloppes externes des particules étant forcément rugueuses à une échelle aussi petite soit-elle, des contacts sont possibles par l'enchevêtrement de ces rugosités. Il existe deux types de contacts solides qui dépendent des gradients de vitesse imposés dans la suspension (donc du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$). Pour de faibles gradients, les particules seront en contact frictionnel, et pour de forts gradients, les contacts entre particules sont plus brefs et le régime sera alors dominé par des collisions. Ces interactions sont principalement prises en compte dans le terme III de l'équation (V.18).

Le passage du régime visqueux, où les interactions hydrodynamiques et contacts lubrifiés sont majoritaires, à un régime de contacts frictionnels, est caractérisé par le nombre de Leighton [Huang et al., 2005] :

$$\text{Le} = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{\sigma}, \quad (\text{V.19})$$

avec $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement imposé et σ une contrainte typique s'appliquant sur les particules, pouvant venir de la gravité, de l'application d'une pression ou d'un confinement des grains. Le régime frictionnel correspond à $Le \ll 1$. Les contacts entre les particules deviennent non négligeables par rapport aux interactions hydrodynamiques lorsque la fraction volumique est supérieure à 25%, et deviennent majoritaires entre 40 et 50% [Gallier et al., 2014]. Lorsque la fraction volumique est proche de la fraction volumique maximale atteignable par la suspension ϕ_{\max} , les particules sont en contact et forment de longues chaînes de contacts entre elles. Dans ce cas, le déplacement local d'une seule particule implique généralement le déplacement d'un grand nombre d'autres particules. Sur le plan rhéologique, ceci entraîne un comportement qui s'apparente à celui des milieux granulaires secs, avec notamment des efforts normaux importants, et des cinétiques de réarrangement. Des frottements apparaissent, pouvant être modélisés par la loi d'Amontons-Coulomb [Popova and Popov, 2015], reliant la contrainte tangentielle σ et la contrainte normale N s'exerçant entre deux particules par $\sigma = \mu_c N$, avec μ_c le coefficient de frottement statique interparticulaire.

Lorsque les cisaillements deviennent très importants, les contacts frictionnels peuvent se transformer en collisions, dues à la transmission de quantité de mouvement entre les particules, l'énergie cinétique de ces dernières étant élevée. En comparant cette énergie cinétique à la dissipation visqueuse liée aux contacts lubrifiés, on obtient le nombre de Bagnold [Bagnold, 1954, Coussot and Ancey, 1999] :

$$\text{Ba} = \frac{\rho_p d_p^2 \left(\frac{d_p}{L_p}\right) \dot{\gamma}}{\eta_f}, \quad (\text{V.20})$$

avec d_p/L_p donné par l'équation (I.69). Pour un Bagnold supérieur à la centaine, généralement obtenu pour de fortes contraintes de cisaillement, le régime est susceptible d'être dominé par les collisions de grains.

La limite entre régimes collisionnels/frictionnels/lubrifiés est dépendante de beaucoup de paramètres externes (pression, gravité, contraintes) et internes (viscosité, fraction volumique) au système, qui agissent souvent à l'échelle de la particule et sont dépendants de la microstructure de la suspension, c'est-à-dire la manière dont les particules s'arrangent relativement à leurs voisines [Guazzelli and Pouliquen, 2018]. Ainsi, il est difficile d'estimer *a priori* sous quelles conditions chaque régime peut être prédominant [Coussot and Ancey, 1999]. De ce fait, ces phénomènes sont beaucoup étudiés numériquement [Gallier et al., 2014, Düring et al., 2016].

Agitation thermique

Les interactions physico-chimiques entre particules sont majoritaires lorsque la taille de ces dernières est comprise entre 1 nm et 1 μm . Les molécules du fluide interstitiel, appelé solvant, peuvent interagir avec les particules. Pour ces dernières, des forces d'interaction ou de répulsion apparaissent [†] [Adair et al., 2001] comme des

- répulsions électrostatiques dues aux charges qui sont localisées en surface des particules ;
- interactions électrostatiques dipôle-dipôle, charge-dipôle, charge-charge en fonction des molécules ionisées ou des molécules portant des charges et formant un dipôle ;
- interactions attractives de Van-der-Waals entre les matériaux polarisables ;
- liaisons hydrogènes, covalentes, et des interactions de non-recouvrement des molécules (forces répulsives de non-interpénétration).

Résumé

La figure V.9 regroupe les différents nombres adimensionnés introduits dans cette partie et permet d'avoir une classification globale des types de suspensions (s'ajoutant à celle décrite figure I.11) et des

[†]. Elles ne sont pas indiquées dans l'Éq. générale (V.18).

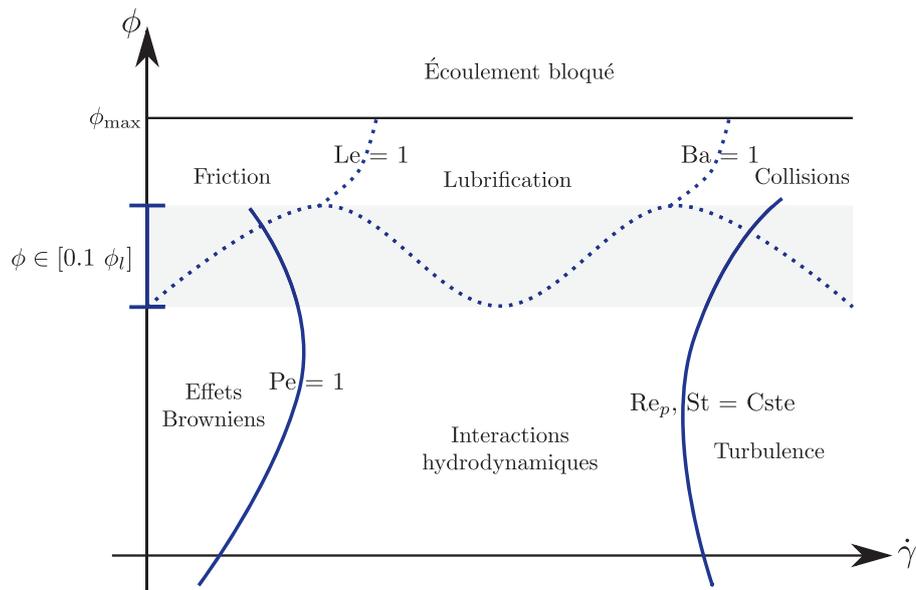


FIGURE V.9 - **Classification qualitative des régimes dominants dans une suspension.** Diagramme $(\dot{\gamma}, \phi)$ des interactions possibles au sein d'une suspension. Les frontières délimitent les domaines d'étude importants des suspensions. Les frontières ne représentent pas de délimitations strictes, mais permettent d'avoir une idée des phénomènes en jeu. La valeur ϕ_l pour laquelle ces effets jouent un rôle critique est étudiée [Onoda and Liniger, 1990] et se situe entre 0,30 et 0,55 [Coussot and Ancy, 1999]. Dans la zone grisée, il est alors difficile de connaître les phénomènes dominants. Figure inspirée de [Coussot and Ancy, 1999].

phénomènes physiques présents :

- Pour de faibles fractions volumiques ($\phi \lesssim 0,1$), deux nombres adimensionnés permettent de séparer le régime d'écoulement d'une suspension : le nombre de Peclet et le nombre de Reynolds particulaire, selon que les effets Browniens, interactions hydrodynamiques ou turbulence sont majoritaires.
- Une zone intermédiaire entre $\phi = 0,1$ et $\phi = \phi_l$, avec ϕ_l de l'ordre de 0,50 [Coussot and Ancy, 1999], où les régimes frictionnels, lubrifiés et collisionnels sont présents. Cependant, il n'existe pas de frontière claire sur la prédominance de ces effets. Cette frontière dépend de paramètres tels que la rugosité (qui peut favoriser la friction), la taille des grains, la géométrie du système (pouvant amener localement à des grands taux de cisaillement favorisant les collisions), des contraintes extérieures, etc.
- Au delà de ϕ_l , les grains sont très proches, et deux nombres adimensionnés permettent de décrire le régime de la suspension, le nombre de Leighton et de Bagnold.

Tenseur des contraintes particulières

On propose dans cette annexe de déterminer la forme du tenseur des contraintes particulières dans le cas tridimensionnel.

Nous avons vu que la présence de particules dans une suspension induit des contraintes supplémentaires, que l'on appellera contraintes particulières. On définit donc un tenseur associé à ces contraintes, $\underline{\underline{\Sigma}}^p$. De même, dans la partie 2.3.1 du chapitre 2, nous avons introduit le tenseur des contraintes effectives $\underline{\underline{\Sigma}}^e$ qui modélise la suspension comme un fluide effectif. Ce dernier peut s'écrire comme une moyenne des contraintes appliquées au système {liquide+particules}, et on peut montrer que [Batchelor, 1977]

$$\underline{\underline{\Sigma}}^e = -(1 - \phi)p^f \mathbf{1} + 2\eta_f \underline{\underline{E}}_\infty + \underline{\underline{\Sigma}}^p, \quad (\text{V.21})$$

avec $\underline{\underline{E}}_\infty$ le tenseur du taux de déformation moyen défini par

$$\underline{\underline{E}}_\infty = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \underline{\underline{E}} dV, \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{V.22})$$

avec V_c le volume de contrôle assez grand pour contenir un nombre suffisant de particules. Les deux premiers termes correspondent au cas du tenseur des contraintes visqueuses lorsque $\phi = 0$. En présence de grains, la quantité de liquide devient $1 - \phi$. Le tenseur du taux de déformation moyen n'est pas affecté par la présence de particules comme elles ne se déforment pas donc son expression reste identique. Le dernier terme de $\underline{\underline{\Sigma}}^e$ est le tenseur des contraintes particulières $\underline{\underline{\Sigma}}^p$, correspondant aux interactions liquide-particule et particule-particule (voir partie 2.2 du chapitre 2 et dans l'annexe B). Dans le modèle proposé par [Morris and Boulay, 1999], le tenseur particulaire s'écrit

$$\underline{\underline{\Sigma}}^p = -\underline{\underline{Q}} + 2\eta_f \eta_r \underline{\underline{E}}_\infty. \quad (\text{V.23})$$

La forme de ce tenseur est similaire à celle d'un liquide Newtonien :

- $-\underline{\underline{Q}}$ est un tenseur associé à la pression particulaire (de même que $-p^f \mathbf{1}$). Il peut s'explicitier à partir de la relation (I.84), étendue à toutes les directions de l'écoulement [Morris and Boulay, 1999, Snook et al., 2016, Guazzelli and Pouliquen, 2018] :

$$\underline{\underline{Q}} = -\eta_n(\phi)\eta_f|\dot{\gamma}| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.24})$$

Cette matrice est écrite dans la base (1,2,3) avec la direction 1 - de la vitesse, 2 - du gradient de vitesse et 3 - de la vorticité de l'écoulement moyen. La forme de ce tenseur est ph nom ologique, la pression particulaire suivant chaque direction de l'écoulement ayant une dépendance différente en ϕ [Dbouk et al., 2013]. C'est donc une forme simplifiée de ce tenseur (la pression particulaire selon chaque composante étant proportionnelle à un facteur λ_2 et λ_3 près) qui est présentée ici mais en bon accord avec les mesures expérimentales décrites ci-dessous [Morris and Boulay, 1999].

- Le deuxième terme du tenseur des contraintes particulières est commun au terme symétrique $2\eta_f\underline{\underline{E}}_\infty$ du liquide simple, avec un facteur η_r représentant un facteur résistif du   la présence des particules ce qui donne, avec la relation (V.21) que

$$\underline{\underline{\Sigma}}^e = -(1 - \phi)p^f \mathbb{1} + 2\eta_f(1 + \eta_r)\underline{\underline{E}}_\infty - \underline{\underline{Q}}. \quad (\text{V.25})$$

On peut montrer que $\eta_s \equiv \eta_f(1 + \eta_r)$.[†] La première partie du tenseur effectif est similaire à celui pour un liquide Newtonien de viscosité η_s .

[†]. On peut montrer alors que pour de très faibles fractions volumiques, $\eta_r = 5/2\phi$, on retrouve alors la loi d'Einstein.

Équation de Navier-Stokes a viscosité variable

On considère que la suspension, formée du liquide et des grains, est un fluide Newtonien de masse volumique constante. On supposera de plus que même si la viscosité peut varier dans l'espace, la suspension reste un fluide Newtonien. Cette approximation est valable si la variation de la viscosité dans chaque particule fluide est très faible par rapport à la viscosité moyenne du fluide, permettant alors de considérer la viscosité constante sur la taille de la particule fluide et d'écrire les équations constitutives.

Equation de Navier-Stokes

Le tenseur des contraintes s'écrit, pour un fluide Newtonien de viscosité η_s et de masse volumique ρ , sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P\mathbf{1}_3 + \underline{\underline{T}} = -P\delta_{ij} - \frac{2\eta_s}{3}D_{kk}\delta_{ij} + 2\eta_s D_{ij}, \quad (\text{V.26})$$

avec $\underline{\underline{D}}$ le tenseur des déformations et $\underline{\underline{T}}$ le tenseur des contraintes visqueuses [Guyon et al., 2001]. L'équation du mouvement pour une particule fluide s'écrit

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{V.27})$$

avec \mathbf{v} le champ de vitesse du fluide. On suppose dans un premier temps que la gravité n'intervient pas dans les équations. En combinant ces deux équations, en projection sur l'axe i , on obtient que

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{2\eta_s}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + 2\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}), \quad (\text{V.28})$$

avec une sommation implicite sur j telle que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}).$$

L'écoulement étant incompressible, on a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. En explicitant le dernier terme dans l'équation précédente :

$$2\frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}) = 2\frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} D_{ij} + \eta_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} D_{ij} + \eta_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right). \quad (\text{V.29})$$

Le dernier terme est nul car $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, d'où :

$$2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}) = 2 \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} D_{ij} + \eta_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \eta_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{V.30})$$

En développant les termes dans la parenthèse :

$$2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta_s D_{ij}) = \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \eta_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_s \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{V.31})$$

On réinjecte ce résultat dans l'équation (V.28), ce qui donne finalement que

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_s \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{V.32})$$

L'équation de Navier-Stokes obtenue diffère de celle pour un fluide de viscosité constante avec le terme qui corrèle les variations des gradients de viscosité avec les gradients de vitesse, et la viscosité qui est contenue dans le dernier terme de Navier-Stokes, qui donnerait $\eta_s \Delta \mathbf{v}$.

Cas d'un canal rectangulaire

On se place dans un canal rectangulaire de hauteur h selon y , de longueur et largeur $l \gg h$ selon x et z . On suppose qu'un écoulement stationnaire non inertiel de type Poiseuille plan est établi dans ce canal. Le champ de vitesses selon la composante transverse est alors nulle, soit :

$$\boxed{v_y = 0}. \quad (\text{V.33})$$

De plus, on suppose que la viscosité ne dépend que de la variable transverse y . L'équation (V.32) se réécrit donc :

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{d\eta_s(y)}{dy} \frac{\partial v_y}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_s \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{V.34})$$

Or, d'après (V.33), $v_y = 0$, donc le terme de corrélation entre gradient de vitesse et gradient de viscosité est nul aussi. Il vient donc que

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_s \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \iff \nabla(P) = \nabla \cdot (\eta_s \nabla) \mathbf{v}}. \quad (\text{V.35})$$

On retrouve alors l'analogie de l'équation de Stokes. On peut finalement développer cette équation et utiliser le caractère bidimensionnel du canal pour simplifier l'équation :

$$\nabla(P) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)}_{\eta_s V / l^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right)}_{\eta_s V / h^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right)}_{\eta_s V / l^2}. \quad (\text{V.36})$$

Au premier ordre en h/l , le deuxième terme est prédominant devant les autres, on a donc que

$$\nabla(P) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right). \quad (\text{V.37})$$

Si la gravité intervient, l'équation (V.38) reste valable en introduisant $\Pi = P + P_h$, avec P_h la pression hydrostatique issue de la force volumique de gravité. L'équation s'écrit alors :

$$\boxed{\nabla(\Pi) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right)}. \quad (\text{V.38})$$

Interaction dipolaire entre deux bulles elliptiques

Nous effectuons dans cette annexe le calcul de la vitesse de remontée d'une bulle elliptique pour laquelle on place en dessous une bulle passive elliptique.

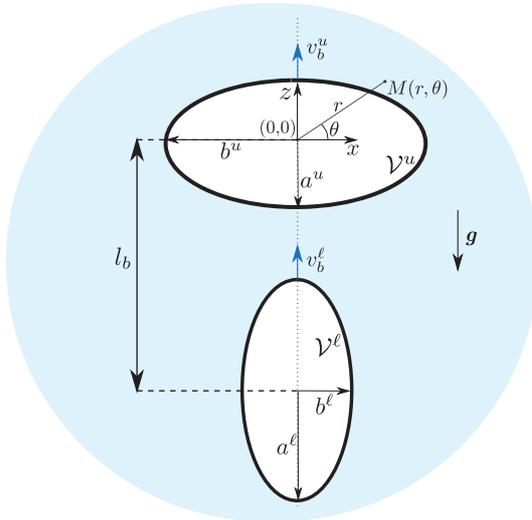


FIGURE V.10 - **Paramétrisation du problème d'interaction des deux bulles.** La bulle du dessus est elliptique d'axes a^u et b^u et de vitesse v_b^u . La bulle du dessous est elliptique d'axes a^l et b^l et de vitesse v_b^l . Les deux bulles sont séparées d'une distance verticale l_b et horizontale nulle. L'étude s'effectue dans le référentiel (x, z) et (r, θ) .

On repart de l'équation (IV.16) :

$$\mathcal{P}_\eta^u = \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}^\ell} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial y} \right|^2 d\tau = \mathcal{P}_\eta^{u,0} - \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}^\ell} \eta_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial y} \right|^2 d\tau}_{\mathcal{P}'_\eta}. \quad (\text{V.39})$$

Intéressons-nous au dernier terme de cette équation. On peut la simplifier par une intégration par parties en utilisant le même raisonnement effectué pour la relation (III.35) :

$$\mathcal{P}'_\eta = \frac{12\eta_f}{h} \iint_{S^\ell} |\widetilde{\mathbf{v}}_f(r)|^2 dS, \quad (\text{V.40})$$

avec $\widetilde{\mathbf{v}}_f(r)$ le champ de vitesse moyenné du fluide, déterminé en introduction par la relation (I.35). Les bornes de l'intégrale sont définies par les points (x, z) à l'intérieur de l'ellipse d'axes a^ℓ et b^ℓ et de centre $(0, -l_b)$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\mathcal{P}'_{\eta} = \frac{12\eta_f}{h} \iint \left(\frac{x}{b^\ell} \right)^2 + \left(\frac{z+l_b}{a^\ell} \right)^2 \leq 1 \left[v_b^u \left(\frac{d_b^u/2}{r} \right)^2 \right]^2 dS. \quad (\text{V.41})$$

En coordonnées cartésiennes, $r^4 = x^2 + z^2$. On effectue le changement de variable $Z = (z + l_b)/a^\ell$ et $X = x/b^\ell$, d'où

$$\mathcal{P}'_{\eta} = \frac{3(v_b^u)^2 (d_b^u)^4 \eta_f}{4h} \iint_{x^2 + z^2 \leq 1} \frac{1}{[(b^\ell x)^2 + (a^\ell z - l_b)^2]^2} dx dz. \quad (\text{V.42})$$

L'inégalité se transforme en se plaçant en coordonnées polaires (r, θ) telles que $x = r \cos(\theta)$ et $z = r \sin(\theta)$. On a alors $r \in [0, 1]$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. La relation précédente s'écrit donc

$$\mathcal{P}'_{\eta} = \mathcal{P}_{\eta}^{u,0} \Lambda, \quad \Lambda(a^\ell, b^\ell, d_b^\ell, d_b^u, l_b) = \frac{a^\ell b^\ell}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{[(b^\ell r \cos(\theta))^2 + (a^\ell r \sin(\theta) - l_b)^2]^2} dr d\theta. \quad (\text{V.43})$$

On peut alors réinjecter cette relation dans (V.39) :

$$\mathcal{P}_{\eta}^u = \mathcal{P}_{\eta}^{u,0} (1 - \Lambda). \quad (\text{V.44})$$

La puissance injectée \mathcal{P}_B^u est donnée par la relation (I.42). En équilibrant puissance injectée et dissipée, on a alors

$$\rho g \left(\frac{\pi (d_b^u)^2 h}{4} \right) v_b^u = \frac{3\pi \eta_f (v_b^u)^2 (d_b^u)^2}{h} (1 - \Lambda). \quad (\text{V.45})$$

Le rapport entre \mathcal{P}_B^u et $\mathcal{P}_{\eta}^{u,0}$ fait apparaître la vitesse de Maxworthy $v_0^* = \rho_f g h^2 / 12\eta_f$ (avec $a/b = 1$). Finalement, la vitesse de remontée de la bulle du dessus vaut :

$$v_b^u = \frac{v_0^*}{1 - \Lambda}. \quad (\text{V.46})$$

La relation (V.46) reste valable si la bulle du dessus est elle aussi elliptique, et si l'on se place dans le cas où les diamètres de la bulle du dessus n'est pas de grande taille par rapport à l'épaisseur h : la relation empirique (III.8), valable pour tout diamètre, s'écrit $v_b^u = (v_0^*)^u \times f(d_b^u/h)$, ce qui donne avec l'équation (V.46) que

$$\begin{aligned} \frac{v_b^u}{(v_0^*)^u} &= f \left(\frac{d_b^u}{h} \right) (1 - \Lambda)^{-1}, \quad (v_0^*)^u = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta} \left(\frac{a^u}{b^u} \right), \\ \Lambda &= \frac{a^\ell b^\ell}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{[(b^\ell r \cos(\theta))^2 + (a^\ell r \sin(\theta) - l_b)^2]^2} dr d\theta, \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

ce qui correspond à l'équation (IV.24).

Bibliographie

- [Adair et al., 2001] Adair, J., Suvaci, E., and Sindel, J. (2001). Surface and colloid chemistry. In Encyclopedia of Materials : Science and Technology, pages 1–10. Elsevier, Oxford.
- [Andreotti et al., 2012] Andreotti, B., Forterre, Y., and Pouliquen, O. (2012). Les milieux granulaires-entre fluide et solide : Entre fluide et solide. EDP sciences.
- [Aussillous and Quéré, 2000] Aussillous, P. and Quéré, D. (2000). Quick deposition of a fluid on the wall of a tube. Physics of Fluids, 12(10) :2367–2371.
- [Bagnold, 1954] Bagnold, R. A. (1954). Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 225 :49 – 63.
- [Ball and Melrose, 1995] Ball, R. and Melrose, J. (1995). Lubrication breakdown in hydrodynamic simulations of concentrated colloids. Advances in Colloid and Interface Science, 59 :19 – 30.
- [Basset, 1888] Basset, A. B. (1888). A treatise on hydrodynamics : with numerous examples, volume 2. Deighton, Bell and Company.
- [Batchelor, 1977] Batchelor, G. K. (1977). The effect of brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. Journal of Fluid Mechanics, 83(1) :97–117.
- [Bossis and Brady, 1984] Bossis, G. and Brady, J. F. (1984). Dynamic simulation of sheared suspensions. i. general method. The Journal of Chemical Physics, 80(10) :5141–5154.
- [Boussinesq, 1885] Boussinesq (1885). Sur la résistance qu’oppose un liquide indéfini en repos. C. R. Acad. Sci., pages 935–937.
- [Boyer et al., 2011a] Boyer, F., Guazzelli, E., and Pouliquen, O. (2011a). Unifying suspension and granular rheology. Physical review letters, 107 :188301.
- [Boyer et al., 2011b] Boyer, F., Pouliquen, O., and Guazzelli, (2011b). Dense suspensions in rotating-rod flows : normal stresses and particle migration. Journal of Fluid Mechanics, 686 :5–25.
- [Brady and Morris, 1997] Brady, J. F. and Morris, J. F. (1997). Microstructure of strongly sheared suspensions and its impact on rheology and diffusion. Journal of Fluid Mechanics, 348 :103–139.
- [Brennen, 1982] Brennen, C. (1982). A review of added mass and fluid inertial forces.
- [Bretherton, 1961] Bretherton, F. P. (1961). The motion of long bubbles in tubes. Journal of Fluid Mechanics, 10(2) :166–188.
- [Bricker and Butler, 2007] Bricker, J. M. and Butler, J. E. (2007). Correlation between stresses and microstructure in concentrated suspensions of non-brownian spheres subject to unsteady shear flows. Journal of Rheology, 51(4) :735–759.
- [Butler, 2014] Butler, J. E. (2014). Suspension dynamics : moving beyond steady. Journal of Fluid Mechanics, 752 :1–4.

- [Cheng and Schachman, 1955] Cheng, P. Y. and Schachman, H. K. (1955). Studies on the validity of the einstein viscosity law and stokes' law of sedimentation. Journal of Polymer Science, 16(81) :19–30.
- [Clift et al., 1978] Clift, R., Grace, J., Weber, M., and Weber, M. (1978). Bubbles, Drops, and Particles. Academic Press.
- [Coussot, 2012] Coussot, P. (2012). Rhéophysique des pâtes et des suspensions. Hors Collection. EDP Sciences.
- [Coussot and Ancey, 1999] Coussot, P. and Ancey, C. (1999). Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. Phys. Rev. E, 59 :4445–4457.
- [Crowdy, 2009] Crowdy, D. (2009). Multiple steady bubbles in a hele-shaw cell. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 465(2102) :421–435.
- [Crowdy, 2000] Crowdy, D. G. (2000). Hele-shaw flows and water waves. Journal of Fluid Mechanics, 409 :223–242.
- [Dagois-Bohy et al., 2015] Dagois-Bohy, S., Hormozi, S., Guazzelli, E., and Pouliquen, O. (2015). Rheology of dense suspensions of non-colloidal spheres in yield-stress fluids. Journal of Fluid Mechanics, 776 :R2.
- [Darcy, 1856] Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont.
- [Dauxois et al., 2021] Dauxois, T., Peacock, T., Bauer, P., Caulfield, C.-c. P., Cenedese, C., Gorké, C., Haller, G., Ivey, G. N., Linden, P. F., Meiburg, E., et al. (2021). Confronting grand challenges in environmental fluid mechanics. Physical review fluids, 6(2) :020501.
- [Dbouk et al., 2013] Dbouk, T., Lemaire, E., Lobry, L., and d, F. M. (2013). Shear-induced particle migration : Predictions from experimental evaluation of the particle stress tensor. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 198 :78–95.
- [de Bruijn, 1942] de Bruijn, H. (1942). The viscosity of suspensions of spherical particles. Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, 61(12) :863–874.
- [Deboeuf et al., 2009] Deboeuf, A., Gauthier, G., Martin, J., Yurkovetsky, Y., and Morris, J. F. (2009). Particle pressure in a sheared suspension : A bridge from osmosis to granular dilatancy. Phys. Rev. Lett., 102 :108301.
- [Deryaguin, 1943] Deryaguin, B. V. (1943). Thickness of liquid layer adhering to walls of vessels on their emptying and the theory of photo-and motion-picture film coating. In Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS, volume 39, pages 13–16.
- [Dijksman et al., 2012] Dijksman, J. A., Rietz, F., Lórinicz, K. A., van Hecke, M., and Losert, W. (2012). Invited article : Refractive index matched scanning of dense granular materials. Review of Scientific Instruments, 83(1) :011301.
- [Dollet et al., 2019] Dollet, B., Marmottant, P., and Garbin, V. (2019). Bubble Dynamics in Soft and Biological Matter. Annual Review of Fluid Mechanics, 51 :331–355.
- [Du Pont, 2003] Du Pont, S. C. (2003). Avalanches granulaires en milieu fluide. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI.
- [Duduković et al., 2007] Duduković, M., Larachi, F., and Mills, P. (2007). Multiphase catalytic reactors : A perspective on current knowledge and future trends. Catalysis Reviews, 44(1) :123–246.
- [Düring et al., 2016] Düring, G., Lerner, E., and Wyart, M. (2016). Effect of particle collisions in dense suspension flows. Physical Review E, 94.
- [Einstein, 1906] Einstein, A. (1906). Eine neue bestimmung der molekuldimensionen. Annalen der Physik, 324(2) :289–306.
- [Einstein, 1911] Einstein, A. (1911). Annalen der Physik, 339(3) :591–592.
- [Faxén, 1922] Faxén, H. (1922). Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist.

- [Filella, 2015] Filella, A. (2015). Mouvement et sillage de bulles isolées ou en interaction confinées entre deux plaques. PhD thesis.
- [Filella et al., 2015] Filella, A., Ern, P., and Véronique, R. (2015). Oscillatory motion and wake of a bubble rising in a thin-gap cell. Journal of Fluid Mechanics, 778 :60–88.
- [Fincham and Delerce, 2012] Fincham, A. and Delerce, G. (2012). Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. Experiments in Fluids, 29 :S013–S022.
- [Forterre and Pouliquen, 2008] Forterre, Y. and Pouliquen, O. (2008). Flows of Dense Granular Media. Annual Review of Fluid Mechanics, 40 :1 – 24.
- [Gaillard et al., 2021] Gaillard, A., Keeler, J. S., Le Lay, G., Lemoult, G., Thompson, A. B., Hazel, A. L., and Juel, A. (2021). The life and fate of a bubble in a geometrically perturbed hele-shaw channel. Journal of Fluid Mechanics, 914 :A34.
- [Gallaire et al., 2014] Gallaire, F., Meliga, P., Laure, P., and Baroud, C. N. (2014). Marangoni induced force on a drop in a Hele-Shaw cell. Phys. Fluids, 26(6) :062105.
- [Gallier et al., 2014] Gallier, S., Lemaire, E., Peters, F., and Lobry, L. (2014). Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. Journal of Fluid Mechanics, 757 :514–549.
- [Gamonpilas et al., 2015] Gamonpilas, C., Morris, J., and Denn, M. (2015). Shear and normal stress measurements in non-brownian monodisperse and bidisperse suspensions. Journal of Rheology, 60.
- [Garagash and Lecampion, 2014] Garagash, D. and Lecampion, B. (2014). Confined flow of suspensions modeled by a frictional rheology. Journal of Fluid Mechanics, 759 :197–235.
- [Gassin, 2014] Gassin, P.-M. (2014). Mesure de la tension superficielle par la technique de la goutte pendante. Bulletin de l’union des physiciens (BUP), 963.
- [Gennes and Brochard-Wyart, 2005] Gennes, D. and Brochard-Wyart, F. (2005). Gouttes, Bulles, Perles Et Ondes.
- [Gogate, 2017] Gogate, M. R. (2017). New paradigms and future critical directions in heterogeneous catalysis and multifunctional reactors. Chemical Engineering Communications, 204(1) :1–27.
- [Goldman et al., 1967] Goldman, A., Cox, R., and Brenner, H. (1967). Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall—i motion through a quiescent fluid. Chemical Engineering Science, 22(4) :637 – 651.
- [Green et al., 2017] Green, C. C., Lustri, C. J., and McCue, S. W. (2017). The effect of surface tension on steadily translating bubbles in an unbounded hele-shaw cell. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 473(2201) :20170050.
- [Guazzelli and Pouliquen, 2018] Guazzelli, E. and Pouliquen, O. (2018). Rheology of dense granular suspensions. Journal of Fluid Mechanics, 852 :P1.
- [Guyon et al., 2001] Guyon, E., Hulin, J., and Petit, L. (2001). Hydrodynamique physique. Savoirs actuels. EDP Sciences.
- [Hampton et al., 1997] Hampton, R. E., Mammoli, A. A., Graham, A. L., Tetlow, N., and Altobelli, S. A. (1997). Migration of particles undergoing pressure-driven flow in a circular conduit. Journal of Rheology, 41(3) :621–640.
- [Happel and Brenner, 2012] Happel, J. and Brenner, H. (2012). Low Reynolds number hydrodynamics : with special applications to particulate media, volume 1.
- [Hele-Shaw, 1898] Hele-Shaw, H. S. (1898). The flow of water. Nature, 58.
- [Homan et al., 2020] Homan, T., Vidal, V., Picard, C., and Joubaud, S. (2020). Fluid-particle suspension by gas release from a granular bed. Physical Review Fluids, 5(10) :104304.
- [Hooshyar et al., 2013] Hooshyar, N., van Ommen, J. R., Hamersma, P. J., Sundaresan, S., and Mudde, R. F. (2013). Dynamics of single rising bubbles in neutrally buoyant liquid-solid suspensions. Phys. Rev. Lett., 110 :244501.

- [Huang et al., 2005] Huang, N., Ovarlez, G., Bertrand, F., Rodts, S., Coussot, P., and Bonn, D. (2005). Flow of wet granular materials. Physical review letters, 94 :028301.
- [Ikeda and Maxworthy, 1990] Ikeda, E. and Maxworthy, T. (1990). Experimental study of the effect of a small bubble at the nose of a larger bubble in a hele-shaw cell. Phys. Rev. A, 41 :4367–4370.
- [Israel and Rosner, 1982] Israel, R. and Rosner, D. E. (1982). Use of a generalized stokes number to determine the aerodynamic capture efficiency of non-stokesian particles from a compressible gas flow. Aerosol Science and Technology, 2(1) :45–51.
- [Jackson, 1997] Jackson, R. (1997). Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a newtonian fluid. Chemical Engineering Science, 52(15) :2457–2469. Mathematical modelling of chemical and biochemical processes.
- [Jeong et al., 2020] Jeong, D.-H., Kvasnickova, A., Boutin, J.-B., Cébron, D., and Sauret, A. (2020). Deposition of a particle-laden film on the inner wall of a tube. Physical Review Fluids, 5(11).
- [Jomha et al., 1991] Jomha, A., Merrington, A., Woodcock, L., Barnes, H., and Lips, A. (1991). Recent developments in dense suspension rheology. Powder Technology, 65(1) :343 – 370. A Special Volume Devoted to the Second Symposium on Advances in Particulate Technology.
- [Karnis and Mason, 1967] Karnis, A. and Mason, S. (1967). The flow of suspensions through tubes vi. meniscus effects. Journal of Colloid and Interface Science, 23(1) :120–133.
- [Keiser et al., 2018] Keiser, L., Jaafar, K., Bico, J., and Reyssat, E. (2018). Dynamics of non-wetting drops confined in a Hele-Shaw cell. Journal of Fluid Mechanics, 845 :245–262.
- [Kleinstreuer and Feng, 2013] Kleinstreuer, C. and Feng, Y. (2013). Computational analysis of non-spherical particle transport and deposition in shear flow. Journal of Biomechanical Engineering, 135.
- [Konijn et al., 2014] Konijn, B., Sanderink, O., and Kruyt, N. (2014). Experimental study of the viscosity of suspensions : Effect of solid fraction, particle size and suspending liquid. Powder Technology, 266 :61–69.
- [Krieger, 1963] Krieger, I. M. (1963). A Dimensional Approach to Colloid Rheology. Journal of Rheology, 7(1) :101–109.
- [Krieger and Dougherty, 1959] Krieger, I. M. and Dougherty, T. J. (1959). A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. Transactions of the Society of Rheology, 3(1) :137–152.
- [Krishnan et al., 1996] Krishnan, G. P., Beimfohr, S., and Leighton, D. T. (1996). Shear-induced radial segregation in bidisperse suspensions. Journal of Fluid Mechanics, 321 :371–393.
- [Kulkarni and Joshi, 2005] Kulkarni, A. and Joshi, J. (2005). Bubble formation and bubble rise velocity in gas liquid systems : A review. Industrial, Engineering Chemistry Research, 44 :5873–5931.
- [Ladenburg, 1907] Ladenburg, R. (1907). Über den einfluß von wänden auf die bewegung einer kugel in einer reibenden flüssigkeit. Annalen der Physik, 328(8) :447–458.
- [Landau and Levich, 1942] Landau, L. and Levich, B. (1942). Dragging of a liquid by a moving plate. Acta Physicochim. URSS, 17 :42.
- [Lefebvre-Lepot, 2007] Lefebvre-Lepot (2007). Modélisation numérique d’écoulements fluide/particules.
- [Legendre et al., 2019] Legendre, D., Rachih, A., Souilliez, C., Charton, S., and Climent, É. (2019). Basset-Boussinesq history force of a fluid sphere. Physical Review Fluids, 4(7) :073603.
- [Leighton and Acrivos, 1987] Leighton, D. and Acrivos, A. (1987). The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. Journal of Fluid Mechanics, 181 :415–439.
- [Lhuillier, 2009] Lhuillier, D. (2009). Migration of rigid particles in non-brownian viscous suspensions. Physics of Fluids, 21(2) :023302.

- [Li and Prakash, 2000] Li, H. and Prakash, A. (2000). Influence of slurry concentrations on bubble population and their rise velocities in a three-phase slurry bubble column. Powder Technology, 113(1) :158–167.
- [Liang-Shih and Tsuchiya, 2013] Liang-Shih, F. and Tsuchiya, K. (2013). Bubble wake dynamics in liquids and liquid-solid suspensions. Butterworth-Heinemann.
- [Luo et al., 1997] Luo, X., Zhang, J., Tsuchiya, K., and Fan, L.-S. (1997). On the rise velocity of bubbles in liquid-solid suspensions at elevated pressure and temperature. Chem. Eng. Sci., 52(21-22) :3693–3699.
- [Lyon and Leal, 1998] Lyon, M. K. and Leal, L. G. (1998). An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. monodisperse systems. Journal of Fluid Mechanics, 363 :25–56.
- [Madec et al., 2020] Madec, C., Collin, B., Jerome, J. J. S., and Joubaud, S. (2020). Puzzling bubble rise speed increase in dense granular suspensions. Physical review letters, 125 7 :078004.
- [Magnaudet, 1997] Magnaudet, J. (1997). The forces acting on bubbles and rigid particles.
- [Magnaudet and Eames, 2000] Magnaudet, J. and Eames, I. (2000). The motion of high-reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows. Annual Review of Fluid Mechanics, 32(1) :659–708.
- [Maron and Pierce, 1956] Maron, S. and Pierce, P. (1956). Application of ree-eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles. Journal of Colloid Science, 11 :80–95.
- [Maxey and Riley, 1983] Maxey, M. R. and Riley, J. J. (1983). Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. The Physics of Fluids, 26(4) :883–889.
- [Maxworthy, 1986] Maxworthy, T. (1986). Bubble formation, motion and interaction in a hele-shaw cell. Journal of Fluid Mechanics, 173 :95–114.
- [Maxworthy et al., 1996] Maxworthy, T., Gnan, C., Kürten, M., and Durst, F. (1996). Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids. Journal of Fluid Mechanics, 321 :421–441.
- [Mendelson, 1967] Mendelson, H. D. (1967). The prediction of bubble terminal velocities from wave theory. AIChE Journal, 13(2) :250–253.
- [Metzger and Butler, 2012] Metzger, B. and Butler, J. E. (2012). Clouds of particles in a periodic shear flow. Physics of Fluids, 24(2) :021703.
- [Morris and Boulay, 1999] Morris, J. F. and Boulay, F. (1999). Curvilinear flows of noncolloidal suspensions : The role of normal stresses. Journal of Rheology, 43(5) :1213–1237.
- [Mudde, 2010] Mudde, R. (2010). Time-resolved x-ray tomography of a fluidized bed. Powder Technology, 199(1) :55 – 59. Special Issue : Recent Advances in Fluid-Particle Systems.
- [Nott and Brady, 1994] Nott, P. R. and Brady, J. F. (1994). Pressure-driven flow of suspensions : simulation and theory. Journal of Fluid Mechanics, 275 :157–199.
- [Nott et al., 2011] Nott, P. R., Guazzelli, E., and Pouliquen, O. (2011). The suspension balance model revisited. Physics of Fluids, 23 :43304 – 43304.
- [Olsen and Skjetne, 2016] Olsen, J. E. and Skjetne, P. (2016). Current understanding of subsea gas release : A review. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 94(2) :209–219.
- [Onoda and Liniger, 1990] Onoda, G. Y. and Liniger, E. G. (1990). Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. Phys. Rev. Lett., 64 :2727–2730.
- [Oppenheimer et al., 2015] Oppenheimer, J., Rust, A., Cashman, K., and Sandnes, B. (2015). Gas migration regimes and outgassing in particle-rich suspensions. Frontiers in Physics, 3 :60.
- [Oseen, 1927] Oseen, C. (1927). Neuere Methoden un d Ergebnisse in der Hydrodynamik. Akad. Verlag-Ges.
- [Osnes and Vartdal, 2021] Osnes, A. N. and Vartdal, M. (2021). Performance of drag force models for shock-accelerated flow in dense particle suspensions. International Journal of Multiphase Flow, 137 :103563.

- [Oswald, 2005] Oswald, P. (2005). Rhéophysique : où comment coule la matière.
- [Palma and Lhuissier, 2019] Palma, S. and Lhuissier, H. (2019). Dip-coating with a particulate suspension. Journal of Fluid Mechanics, 869.
- [Papale, 1999] Papale, P. (1999). Strain-induced magma fragmentation in explosive eruptions. Nature, 397(6718) :425–428.
- [Pinzer et al., 2012] Pinzer, B. R., Medebach, A., Limbach, H. J., Dubois, C., Stampanoni, M., and Schneebeli, M. (2012). 3d-characterization of three-phase systems using x-ray tomography : tracking the microstructural evolution in ice cream. Soft Matter, 8 :4584–4594.
- [Popova and Popov, 2015] Popova, E. and Popov, V. (2015). The research works of coulomb and amontons and generalized laws of friction. Friction, 3 :183–190.
- [Reichert et al., 2018] Reichert, B., Huerre, A., Theodoly, O., Valignat, M.-P., Cantat, I., and Jullien, M.-C. (2018). Topography of the lubrication film under a pancake droplet travelling in a Hele-Shaw cell. J. Fluid Mech., 850 :708–732.
- [Richardson and Zaki, 1954] Richardson, J. and Zaki, W. (1954). The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. Chemical Engineering Science, 3(2) :65 – 73.
- [Roig et al., 2012] Roig, V., Roudet, M., Risso, F., and Billet, A.-M. (2012). Dynamics of a high-reynolds-number bubble rising within a thin gap. Journal of Fluid Mechanics, 707 :444–466.
- [Roudet, 2008] Roudet, M. (2008). Hydrodynamique et transfert de masse autour d’une bulle confinée entre deux plaques. PhD thesis.
- [Rubinow and Keller, 1961] Rubinow, S. I. and Keller, J. B. (1961). The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. Journal of Fluid Mechanics, 11 :447–459.
- [Saffman, 1965] Saffman, P. G. (1965). The lift on a small sphere in a slow shear flow. Journal of Fluid Mechanics, 22 :385–400.
- [Saffman, 1986] Saffman, P. G. (1986). Viscous fingering in hele-shaw cells. Journal of Fluid Mechanics, 173 :73–94.
- [Saito, 1952] Saito, N. (1952). A remark on the hydrodynamical theory of the viscosity of solutions of macromolecules. Journal of the Physical Society of Japan, 7(5) :447–450.
- [Sarabian et al., 2019] Sarabian, M., Firouznia, M., Metzger, B., and Hormozi, S. (2019). Fully developed and transient concentration profiles of particulate suspensions sheared in a cylindrical couette cell. Journal of Fluid Mechanics, 862 :659–671.
- [Schiller and Naumann, 1935] Schiller, L. and Naumann, A. (1935). A drag coefficient correlation. 77 :51–86.
- [Scott and Kilgour, 1969] Scott, G. D. and Kilgour, D. M. (1969). The density of random close packing of spheres. Journal of Physics D : Applied Physics, 2(6) :863–866.
- [Shinohara et al., 2004] Shinohara, K., Sugii, Y., Aota, A., Hibara, A., Tokeshi, M., Kitamori, T., and Okamoto, K. (2004). High-speed micro-piv measurements of transient flow in microfluidic devices. Measurement Science and Technology, 15 :1965.
- [Snook et al., 2016] Snook, B., Butler, J. E., and Guazzelli, E. (2016). Dynamics of shear-induced migration of spherical particles in oscillatory pipe flow. Journal of Fluid Mechanics, 786 :128–153.
- [Stauffer, 1965] Stauffer, C. E. (1965). The measurement of surface tension by the pendant drop technique. The Journal of Physical Chemistry, 69(6) :1933–1938.
- [Stickel and Powell, 2005] Stickel, J. J. and Powell, R. L. (2005). Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. Annual Review of Fluid Mechanics, 37(1) :129–149.
- [Stokes et al., 1851] Stokes, G. G. et al. (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums.
- [Su et al., 2020] Su, W., Shi, X., Wu, Y., Gao, J., and Lan, X. (2020). Simulation on the effect of particle on flow hydrodynamics in a slurry bed. Powder Technology, 361 :1006–1020.

- [Tang et al., 2000] Tang, H., Grivas, W., Homentcovschi, D., Geer, J., and Singler, T. (2000). Stability considerations associated with the meniscoid particle band at advancing interfaces in hele-shaw suspension flows. Phys. Rev. Lett., 85 :2112–2115.
- [Taylor and Saffman, 1959] Taylor, G. and Saffman, P. G. (1959). A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 12(3) :265–279.
- [Taylor, 1961] Taylor, G. I. (1961). Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube. Journal of Fluid Mechanics, 10(2) :161–165.
- [Timberlake and Morris, 2005] Timberlake, B. D. and Morris, J. F. (2005). Particle migration and free-surface topography in inclined plane flow of a suspension. Journal of Fluid Mechanics, 538 :309–342.
- [Tomiyama et al., 2002] Tomiyama, A., Tamai, H., Zun, I., and Hosokawa, S. (2002). Transverse migration of single bubbles in simple shear flows. Chemical Engineering Science, 57 :1849–1858.
- [Torquato, 2005] Torquato, S. (2005). Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York.
- [Toupoint, 2018] Toupoint, C. (2018). Path and wake of cylinders falling in a liquid at rest or in a bubble swarm towards the hydrodynamical modeling of ebullated bed reactors. PhD thesis.
- [Toupoint et al., 2021] Toupoint, C., Joubaud, S., and Sutherland R, B. (2021). Fall and break-up of viscous miscible drops in a hele-shaw cell.
- [Tripathi et al., 2015] Tripathi, M., Sahu, K., and Govindarajan, R. (2015). Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid. Nature communications, 6 :6268.
- [Tropea et al., 2007] Tropea, C., Yarin, A., and Foss, J. (2007). Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics.
- [Vasconcelos, 1994] Vasconcelos, G. L. (1994). Multiple bubbles in a hele-shaw cell. Phys. Rev. E, 50 :R3306–R3309.
- [Vera et al., 2000] Vera, M. U., Saint-Jalmes, A., and Durian, D. J. (2000). Instabilities in a liquid-fluidized bed of gas bubbles. Phys. Rev. Lett., 84 :3001–3004.
- [Vojir and Michaelides, 1994] Vojir, D. and Michaelides, E. (1994). Effect of the history term on the motion of rigid spheres in a viscous fluid. International Journal of Multiphase Flow, 20(3) :547 – 556.
- [Wilson et al., 1980] Wilson, L., Sparks, R. S. J., and Walker, G. P. L. (1980). Explosive volcanic eruptions — IV. The control of magma properties and conduit geometry on eruption column behaviour. Geophysical Journal International, 63(1) :117–148.
- [Xu et al., 2016] Xu, F., Kim, J., and Lee, S. (2016). Particle-induced viscous fingering. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 238 :92–99. Viscoplastic Fluids From Theory to Application 2015 (VPF6).
- [Yeo and Maxey, 2011] Yeo, K. and Maxey, M. R. (2011). Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a poiseuille flow. Journal of Fluid Mechanics, 682 :491–518.
- [Zhang, 2000] Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 22 :1330 – 1334.

Abstract

Multiphase flow involving gas, liquid, and solid particles plays a vital role in catalytic fluidized beds, subsea gas release, and even in avalanches and volcanic eruptions. Bubble rise and interactions is a fundamental ingredient for many such industrial processes and geophysical phenomena. Here, the canonical problem of the rising motion of a single bubble and bubble-bubble interactions is investigated in a Hele-Shaw cell containing a granular suspension through simple experiments and theoretical models.

In a Newtonian liquid, it is shown that the rise velocity v_b of a single bubble of diameter d_b evolving between two plates separated by a thickness h increases with d_b up to a maximum value for $d_b \gg h$, when the Reynolds number $\text{Re} = v_b d_b / \nu_f (h/d_b)^2$ is very small. In the case of a neutrally-buoyant non-Brownian suspension, bubble speed is demonstrated to be faster in suspensions than in particle-less liquids of the same effective viscosity. By carefully measuring this bubble speed increase at various particle volume fraction and via velocity field imaging, this new bubble dynamics is linked to a reduction in the bulk dissipation rate. A good match between our experimental data and computations based on Suspension Balance Model illustrates that the underlying mechanism for this dissipation-rate deficit is related to a non-uniform particle distribution in the direction perpendicular to the channel walls due to shear-induced particle migration.

The second part of this thesis deals with the dynamics of bubble-bubble interactions and bubble chains rising in a Newtonian liquid. When several bubbles interact with each other, they first show a steady approach, they accelerate and undergo sharp shape changes until they come into contact. By considering the neighboring bubble's influence on the pressure field and the reduction in the dissipation, it is possible to qualitatively describe the bubble merging process. After merging, the bubble chain remains intact and their dynamics, when compared to the single bubble rise, is slower. In addition, spatial reorganizations within the same train of bubbles are observed.

These results provide a promising avenue for studying bubble-bubble merging and bubble(s)-particle interaction in the context of complex multiphase flow.

Résumé de la thèse

Les écoulements multiphasiques impliquant des gaz, liquides et particules solides jouent un rôle essentiel dans les réacteurs à lit fluidisés, les dégagements de gaz sous-marins, et même dans les avalanches et les éruptions volcaniques. La remontée de bulles sont des phénomènes fondamentaux pour beaucoup de processus industriels et géophysiques. Dans cette thèse, le problème de la remontée d'une bulle isolée et des interactions de bulles multiples est étudié dans une cellule de Hele-Shaw contenant une suspension granulaire par le biais d'expériences et de modèles théoriques simples.

Dans un liquide Newtonien, il a été montré que la vitesse de remontée v_b d'une bulle isolée de diamètre d_b évoluant entre deux plaques séparées d'une épaisseur h augmente avec d_b jusqu'à une valeur terminale lorsque $d_b \gg h$, pour des nombres de Reynolds $\text{Re} = v_b d_b / \nu_f (h/d_b)^2$ très faibles. Dans le cas d'une suspension granulaire non-Brownienne isodense, nous avons montré que la vitesse de remontée des bulles est plus rapide dans une suspension que dans un liquide pur sans grains de même viscosité effective. En mesurant soigneusement ce surplus de vitesse pour différentes fractions volumiques et par imagerie du champ de vitesses de l'écoulement, cette dynamique est alors reliée à une réduction de la dissipation visqueuse au sein de la cellule. Un bon accord avec nos données expérimentales et des calculs basés sur le Suspension Balance Model illustrent que le mécanisme sous-jacent au déficit du taux de dissipation est lié à une distribution non-uniforme des particules dans la direction perpendiculaire aux plaques de verre en raison de la migration de particules induite par cisaillement.

La seconde partie de cette thèse porte sur la dynamique des interactions bulle-bulle et des trains de bulles remontant dans un liquide Newtonien. Lorsque plusieurs bulles interagissent entre elles, elles accélèrent et subissent de forts changements de forme jusqu'à ce qu'elles entrent en contact. En considérant l'influence d'une bulle voisine sur le champ de pression et la réduction de la dissipation visqueuse, il est alors possible de décrire qualitativement la dynamique d'approche. Après contact, le train de bulle formé reste intact et sa dynamique, comparée à la remontée d'une bulle isolée, est plus lente. De plus, des réorganisations spatiales au sein d'un même train sont observées.

Ces résultats offrent une voie prometteuse pour étudier les interactions de bulles multiples dans les suspensions granulaires.