HAL
open science

# Etat et dynamique quantique de condensats de Bose-Einstein couplés et de jonctions Josephson multi-connectées

Guillaume Quesnel

## To cite this version:

Guillaume Quesnel. Etat et dynamique quantique de condensats de Bose-Einstein couplés et de jonctions Josephson multi-connectées. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALY015 . tel-03828091

**HAL Id: tel-03828091**

**https://theses.hal.science/tel-03828091v1**

Submitted on 25 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Physique de la Matière Condensée et du Rayonnement

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par


## Guillaume QUESNEL


Thèse dirigée par **Denis FEINBERG**,Chercheur, Université Grenoble Alpes

préparée au sein du **Laboratoire Institut Néel**
dans **l'École Doctorale Physique**

# Etat et dynamique quantique de condensats de Bose-Einstein couplés et de jonctions Josephson multi-connectées

# Quantum state and dynamics of coupled Bose-Einstein condensates and Multi-connected Josephson Junction

Thèse soutenue publiquement le **17 mars 2022**,
devant le jury composé de :

**Monsieur ROMAIN DUBESSY**
Maître de conférences HDR, UNIVERSITE SORBONNE PARIS NORD, Examinateur
**Madame ANNA MINGUZZI**
Directeur de recherche, CNRS DELEGATION ALPES, Examinatrice
**Madame JULIA MEYER**
Professeur des Universités, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES, Présidente
**Madame ROBERTA CITRO**
Professeur, Università degli Studi di Salerno, Rapporteure
**Monsieur THIBAUT JONCKHEERE**
Chargé de recherche HDR, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE, Rapporteur

*"Réfléchir, c'est fléchir deux fois"*
**Alain Damasio**

# Remerciements

J'aurai finalement trainé jusqu'au dernier moment pour écrire ces remerciements. Il faut dire que la buée est épaisse et que deux mois, c'est à peine suffisant pour l'essuyer. Et pourtant j'ai frotté. C'est désormais avec un esprit clair, un coeur serré et une puissance insoupconnée que j'exprime ma reconnaissance.

Envers Denis Feinberg, mon directeur de thèse, pour sa bienveillance jusqu'aux derniers instants. Il a été la personne avec qui j'ai pu le plus échangé durant ces trois ans et ce serait un mensonge affreux d'affirmer que chaque discussion scientifique avec lui n'est pas savoureuse. Ces conversations ont rythmées ma thèse et ma progression scientifique. Elles sont de simples petites impulsions mais elles ont eu une importance fondamentale pendant ces trois ans. De ces conversations, j'ai réussi à soutirer un carnet d'analogies, un guide sur la science et pas que. Merci.

À Roberta Citro et Thibault Jonckheere, rapporteur.es de cette thèse, pour avoir accepté ce rôle. Aux membres du jury : Anna Minguzzi, Romain Dubessy et Julia Meyer. Je me considère chanceux d'avoir pu, pour terminer ce travail, réunir les communautés atomes froids et supraconducteurs. À Anna Minguzzi, Enrico Compagno et Luigi Amico qui m'ont accueilli au LPMMC et acccompagné sur la partie atomes froids de cette thèse.

Aux gens qui écrivent des bons livres.

À Maxime Debertolis, pour sa brillante idée de changer de bureau, augmentant considérablement nos productivités respectives. Merci quand même pour tout le temps qu'on a partagé ensemble (l'idée brillante est effectivement arrivée assez tard), c'était assez exceptionnel de partager ce bureau avec toi.

À Gregory Setnikar, Yann Alexanian, Maria Alfonso-Moro, Tristan Lugan et Loïc Doussoulin, les *collègues*. Vous êtes des amis formidables et avez illuminés ces trois dernières années.

À Loïc Doussoulin, Tristan Lugan et Antoine Bodin pour leur immense et subtil soutient dans cette dernière ligne droite.

À Loïc Bonnevay et Ludovic Maurel, qui sont apparu au moment le plus dur en apportant leur bonne humeur. Longue vie aux moutonnées.

À Valentine Aguiar, Fantille Legay, Bastien Hercé, Maud Bertré, Caroline Le Gouic, Lucie Meslien, Corentin Letessier, Jolan Garry, Léo Haran, Juliette Gouet, Marc Villette, Jérémy Pinguet, Thomas Dubé, Antoine Bodin et Axel Vaumoron. Vous êtes précieux. Je sais pas comment on arrive tous à rester dans la vie de chacun en se voyant si peu mais continuons, parce-que c'est beau. Je pense que je n'aurai pas fait tout ça si je ne vous avais pas rencontré au lycée, ça a vraiment tout changé. Merci.

À Flavien Le Bailly, qui est la depuis tellement longtemps qu'j'arrive plus à compter, la vérité. On s'est tellement soutenu tout le temps que c'est devenu trop naturel, mais merci quand même, encore.

À Elisa Rajaonarison, qui est dans chacune des lignes de ce manuscript.

À Audrey et Younes Hamadi et mes deux neveux Yassir et Nahil.

À ma soeur, que j'aime et que j'admire.

À mes parents, Sandra et Olivier Quesnel, pour tout votre amour.

# Table des matières

**1 Jonctions de condensats** **16**

1.1 Jonctions bosoniques . . . . . 17

1.1.1 Hamiltonien du gaz de Bose . . . . . 17

1.1.2 Modèle de Bose-Hubbard . . . . . 19

1.1.3 Limite semi-classique et champ moyen . . . . . 19

1.1.4 Application : Jonction triangulaire oscillante . . . . . 22

1.2 Description des jonctions supraconductrices . . . . . 26

1.2.1 Supraconducteur homogène . . . . . 26

1.2.2 Jonctions métalliques . . . . . 28

1.2.3 Etats liés d'Andreev . . . . . 29

1.2.4 Jonction par point quantique et limite de gap infini . . . . . 30

1.2.5 Etats liés d'Andreev dans la limite de gap infini . . . . . 33

1.2.6 Gap infini et Hamiltonien bosonique . . . . . 34

1.2.7 Représentation de Fock . . . . . 35

1.2.8 Topologie et jonction Josephson . . . . . 37

**2 Formation d'états N00N multi-modes** **42**

2.1 Introduction . . . . . 43

2.1.1 Etats N00N et mesure de précision . . . . . 43

2.1.2 Modèle bosonique et régime d'étude . . . . . 45

2.2 Transfert de paires à l'équilibre . . . . . 46

2.3 Méthode numérique . . . . . 47
2.4 Formations d'états N00N dans une jonction bosonique . . . . . 49
2.5 Formation d'états N00N multi-modes dans une tri-jonction bosonique . . . . 49
2.5.1 Observation d'états N00N à trois modes . . . . . 49
2.5.2 Effet d'une asymétrie des couplages tunnels . . . . . 55
2.6 Généralisation à un nombre de modes $M > 3$ . . . . . 55
2.7 Signature des états N00N et de paires corrélées . . . . . 58
2.7.1 Transfert de paires corrélées . . . . . 60
2.7.2 Mesure d'états N00N . . . . . 62
2.8 Développement de Floquet . . . . . 66
2.8.1 Dérivation de l'Hamiltonien effectif . . . . . 66
2.8.2 Limite asymptotique . . . . . 69
2.9 Analyse de la formation d'états N00N par réduction d'échelles . . . . . 71
2.9.1 Limite $\mu \longrightarrow \infty$ . . . . . 72
2.9.2 Perturbation en $\frac{J^2}{\mu}$ . . . . . 74
2.9.3 Restriction de la dynamique au secteur de basse énergie . . . . . 75
2.9.4 Au voisinage des points de CDT . . . . . 78
2.10 Conclusion . . . . . 81

**3 Jonction Josephson sous irradiation micro-ondes 84**
3.1 Introduction . . . . . 85
3.2 Description "Scattering" de la jonction . . . . . 86
3.2.1 Irradiation de la jonction . . . . . 86
3.2.2 Modulation de la phase . . . . . 87
3.2.3 Forme de la fonction d'onde . . . . . 87
3.2.4 Raccordement aux supraconducteurs et terme source . . . . . 89
3.2.5 Equations de scattering . . . . . 91
3.2.6 Formulation à N harmoniques . . . . . 91
3.2.7 Expression du Courant DC . . . . . 93
3.2.8 Dépendance en $\chi_2 - \chi_1$ du courant . . . . . 95
3.3 Méthode numérique . . . . . 96
3.4 Résonances de courant . . . . . 98
3.5 Conclusion . . . . . 100

**4 Jonction Josephson : Analogie sur réseau, Topologie et Interaction 103**

4.1 Introduction . . . . . 104

4.2 Analogie avec un modèle sur réseau . . . . . 105

4.3 Tri-jonction et Graphène - Etats de bords parfaits . . . . . 108

4.3.1 Modèle sur réseau d'une tri-jonction . . . . . 108

4.3.2 Cas de bords parfaits, limitation du nombre de paires . . . . . 109

4.3.3 Exemple de transition topologique dans un double dot . . . . . 110

4.3.4 Symétrie du courant DC . . . . . 115

4.3.5 Note sur la réalisation pratique des bords . . . . . 116

4.4 Jonction avec interactions . . . . . 119

4.4.1 Modèle . . . . . 120

4.4.2 Limite Classique . . . . . 121

4.4.3 Phase de Zak dans la limite V -> 0 . . . . . 123

4.4.4 Résultats numériques à V fini . . . . . 126

4.5 Conclusion et perspectives . . . . . 137

# Table des figures


1.1 Réalisations expérimentales de configuration en anneaux de gaz d'atomes froids 18

1.2 Jonction triangulaire bosonique. Les couplages entre les trois sites oscillent sinusoïdalement avec chacun un déphasage $\chi_i$ donné. . . . . 22

1.3 Courant spectral moyen circulant dans la trijonction . . . . . 26

1.4 Schéma de Scattering d'une bi-jonction Josephson métallique . . . . . 29

1.5 Schéma d'un ensemble de supraconducteurs couplés par un dot . . . . . 31

1.7 Représentation de Fock d'une bi-jonction avec dot . . . . . 36

1.8 Représentation de Fock d'une tri-jonction avec dot dans la limite gap infini . 37

1.9 Phase de Berry et Tri-jonction sous irradiation micro-ondes . . . . . 39

1.10 Spectres des états liés d'Andreev de la tri-jonction . . . . . 40

1.11 Transition topologique de la tri-jonction Josephson . . . . . 41

2.1 Schéma de la tri-jonction bosonique en géométrie circulaire . . . . . 46

2.2 Schéma d'interférence pour le transfert d'une paire non-locale . . . . . 47

2.3 Transfert d'une paire corrélée et oscillation de Rabi . . . . . 48

2.4 Génération d'etats N00N à deux modes . . . . . 50

2.5 Transfert de paires optimal et cartographie d'un état N00N à trois modes . . 52

2.6 Trajectoires et indicateurs de la présence d'états N00N pour N = 2 particules 53

2.7 Etats N00N à trois modes pour N=4,6,10 particules . . . . . 54

2.8 Phase en radians des coefficients des états $|600\rangle$, $|060\rangle$ et $|006\rangle$ pour des états N00N à trois composantes obtenus à différents temps. . . . . 55

2.9 Effet d'une asymétrie des couplages sur les trajectoires des composantes d'un état N00N à trois modes pour N=6 . . . . . 56
2.10 Proposition de différentes géométries à M sites pour l'observation d'états N00N à M composantes . . . . . 57
2.11 Génération d'états N00N à M = 4,5 modes . . . . . 58
2.12 Génération d'états N00N à M = 4,5 modes et deux particules . . . . . 59
2.13 Trajectoire d'un état N00N à 5 modes et 2 particules . . . . . 60
2.14 Schéma de principe d'une expérience de mesure de temps de vol . . . . . 61
2.15 Repère utilisé pour la définition de l'observable $n(\mathbf{k})$ . . . . . 61
2.16 Caractérisation d'un transfert de paire résonnant avec une interaction répulsive statique . . . . . 62
2.17 Corrélations et distribution en moment d'états remarquables . . . . . 64
2.18 Cas idéaux de corrélations en moment . . . . . 65
2.19 Carte de corrélations $n(\mathbf{k})$ pour un état généré dynamiquement en fonction du paramètre de filtrage $\kappa$ . . . . . 66
2.20 Représentation graphique des contributions aux transferts de paires. . . . . 70
2.21 Espace des états à $n_2$ pair, associés à l'Hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{eff}$ . . . . . 72
2.22 Esquisse de la matrice de $\mathcal{H}_{eff}$ dans la limite $\mu \sim \infty$ . . . . . 73
2.23 Tomographie des états de basses énergies . . . . . 76
2.24 Rejet des états de hautes énergie au sein de la dynamique . . . . . 77
2.25 Séparations d'échelles successives au sein du spectre . . . . . 80
2.26 Optimum de l'état N00N au voisinage du CDT . . . . . 81

3.1 Schéma d'une jonction Josephson métallique sous irradiation micro-onde chiral 86
3.2 Schéma des processus de réflection intervenant au sein d'une jonction irradiée 88
3.3 Forme de la matrice des amplitudes de réflexion d'Andreev . . . . . 90
3.4 Energie des états liés d'Andreev pour $M = 1$ harmonique dans la limite $b \longrightarrow 0$ 94
3.5 Probabilité d'injection de quasiparticules pour différentes valeurs de $\Gamma$. . . . 97
3.6 Résonances de courant en fonction de $\omega$ et de $b$ . . . . . 99
3.7 Résonances de courant en fonction de $T$ et de la température . . . . . 100
3.8 Asymétrie de la relation courant phase en présence d'un coefficient de transmission t(E) . . . . . 101
3.9 Courant chiral à phase $\phi = 0, \pi$ en fonction de $\omega$ . . . . . 102

4.1 Configurations de paires singulet au sein du point quantique à deux niveaux 106

4.2 Reseau équivalent d'une tri-jonction à deux niveaux . . . . . 107
4.3 Bi-couche de graphène et modèle de jonction correspondant . . . . . 108
4.4 Réseau équivalent à la tri-jonction simple en présence de bords . . . . . 109
4.5 Spectre de la tri-jonction avec bords, effet du terme de masse et du couplage second voisins . . . . . 110
4.6 Transition topologique et états de bords dans une tri-jonction . . . . . 111
4.7 Schéma d'une tri-jonction avec un dot à deux niveaux . . . . . 112
4.8 Nombre de Chern pour le cas $\Gamma_{12} = 0$ . . . . . 113
4.9 Transition topologique et points de Weyl dans un tri-jonction à deux niveaux 117
4.10 Schéma d'une jonction connectée à deux dot donc un contient M niveaux. . . 118
4.11 Schéma d'un jonction en présence d'interaction . . . . . 120
4.12 Profil d'énergie induit par l'interaction dans le réseau équivalent d'une jonction Josephson en présence d'une interaction entre les supraconducteurs et le point quantique . . . . . 122
4.13 Enveloppe des états liés d'Andreev.(I) . . . . . 124
4.14 Enveloppe des états liés d'Andreev. (II) . . . . . 125
4.15 Perturbation du courant et phase de Zak . . . . . 126
4.16 Représentation de Fock de la jonction Josephson en présence de conditions cycliques . . . . . 127
4.17 Dispersion et probabilité de présence à V=0 . . . . . 129
4.18 Dispersion et états de bords de la chaîne ouverte . . . . . 130
4.19 Energies propres de la chaîne ouverte à $V \neq 0$ . . . . . 131
4.20 Probabilité de présence des états propres sur les états de Fock $|N, \nu\rangle$ . . . . . 132
4.21 Robustesse des états de bords en présence d'interaction . . . . . 133
4.22 Energies propre de la chaîne cyclique en présence d'une interaction V . . . . 135
4.23 Dépendance en $\chi$ du spectre . . . . . 136
4.24 Phase de Berry en présence de l'interaction $V$ . . . . . 138

**These-** "Etat et dynamique quantique de condensats de Bose-Einstein couplés et de jonctions Josephson multi-connectées"

**Résumé**

Les systèmes d'atomes froids et les jonctions supraconductrices sont actuellement deux des principales plateformes proposées pour la réalisation et la simulation quantique de modèles physiques. Dans ce cadre, la mise hors-équilibre de ces systèmes et leur contrôle par des méthodes de type Floquet permet de générer et d'explorer une riche classe de modèles. De plus, là où les interactions sont souvent négligeables dans les jonctions supraconductrices, elles sont inhérentes aux gaz d'atomes froids. Dans ce sens, l'Ingénierie de Floquet des jonctions, bosoniques ou supraconductrices, s'avère être un paradigme idéal du point de vue de l'étude de la topologie, des interactions et de leur coexistence.
Dans cette thèse, j'étudie plusieurs systèmes quantiques soumis à un forçage périodique. Tout d'abord, je rappelle et compare les modèles utilisés pour la description d'un gaz de Bose dans un potentiel périodique et pour une jonction Josephson connectée par un point quantique. Ces systèmes, bien que de natures différentes peuvent en effet partager quelques analogies. L'effet d'un forçage périodique brisant la symétrie par renversement du temps est alors analysé à la fois dans le cas de la tri-jonction supraconductrice et de la jonction triangulaire bosonique. Je présente ensuite une première étude, centrée sur le modèle de Bose-Hubbard de 2 à 5 sites. Dans ce modèle l'interaction entre les atomes est forcée périodiquement et placée dans une condition de résonance par rapport à une configuration de potentiels chimiques donnée. Je montre alors que dans ces systèmes il est possible de générer dynamiquement des états N00N multi-modes. L'apparition de ces états à un temps donné est expliqué par un schéma de renormalisation décrit par un Hamiltonien effectif dérivé à partir de la théorie de Floquet. Dans un second temps j'analyse l'effet d'un rayonnement micro-ondes chiral, décrit par une dépendance sinusoïdale déphasée des potentiels, sur une jonction métallique. L'analyse par une méthode de scattering permet de confirmer l'apparition d'un courant chiral, résultat déjà prédit dans le cadre d'une jonction par point quantique. En dernière partie je discute plus en profondeur l'analogie entre une jonction Josephson et un modèle de liaisons fortes. Cette représentation d'une jonction sous forme de réseau permet d'interpréter les transitions topologiques lorsque la jonction est soumise à un rayonnement micro-onde. Dans le contexte de cette analogie je discute alors la notion de bords et la difficulté à réaliser ceux-ci en pratique. Pour conclure, je montre comment une interaction entre le point quantique et les supraconducteurs permet à la fois de sonder la topologie du système sans interaction et d'induire des effets topologiques.

**These -** "Quantum state and dynamics of coupled Bose-Einstein condensates and multi-connected Josephson junctions"

**Abstract**

Cold atom systems and superconducting junctions are currently two of the main platforms proposed for the realization and quantum simulation of physical models. In this framework, the out-of-equilibrium control of these systems by Floquet-type methods allows to generate and explore a rich class of models. Moreover, the interaction is often negligible in superconducting junctions while it is inherent to cold atomic gases. In this sense, the Floquet Engineering of junctions, bosonic or superconducting, prove to be an ideal paradigm from the point of view of studying the topology, interactions and their coexistence. In this thesis, I study several quantum systems subjected to periodic forcing. First, I recall and compare the models used for the description of a Bose gas in a periodic potential and for a Josephson junction connected by a quantum dot. These systems, although of different natures, can indeed share some analogies. The effect of a periodic forcing breaking the symmetry by time reversal is then analyzed both in the case of the superconducting tri-junction and the bosonic triangular junction. I then present a first study, centered on the Bose-Hubbard model of 2 to 5 sites. In this model the interaction between the atoms is forced periodically and placed in a resonance condition with respect to a given chemical potential configuration. I then show that in these systems it is possible to dynamically generate multi-mode N00N states. The appearance of these states at a given time is explained by a renormalization scheme described by an effective Hamiltonian derived from Floquet theory. In a second step I analyze the effect of chiral microwave radiation, described by a sinusoidal out-of-phase dependence of the potentials, on a metallic junction. The analysis by a scattering method allows to confirm the appearance of a chiral current, result already predicted in the framework of a quantum dot junction. In the last part I discuss in more depth the analogy between a Josephson junction and a tight-binding model. This representation of a junction as a lattice allows to interpret the topological transitions when the junction is subjected to microwave radiation. In the context of this analogy I then discuss the notion of edges and the difficulty to realize them in practice. To conclude, I show how an interaction between the quantum dot and the superconductors allows both to probe the topology of the system without interaction and to induce topological effects.

# Introduction

Les systèmes d'atomes froids et les jonctions supraconductrices sont actuellement deux des principales plateformes proposées pour la réalisation et la simulation quantique de modèles physiques. Dans ce cadre, la mise hors-équilibre de ces systèmes et leur contrôle par des méthodes de type Floquet permet de générer et d'explorer une riche classe de modèles. De plus, là où les interactions sont souvent négligeables dans les jonctions supraconductrices, elle sont inhérentes aux gaz d'atomes froids. Dans ce sens, l'Ingénierie de Floquet des jonctions, bosoniques ou supraconductrices, s'avère être un paradigme idéal du point de vue de l'étude de la topologie, des interactions et de leur coexistence. Dans cette thèse, j'étudie plusieurs systèmes quantiques soumis à un forçage périodique. En particulier :

Le chapitre I de cette thèse introduit les différents modèles physiques utilisés pour la description d'une part des gaz bosoniques d'atomes froids et d'autre part des jonctions supraconductrices. Il vise également à pointer les analogies qui existent entre ces deux types de systèmes de natures différentes. Ce chapitre est séparé en deux parties. Dans la première, j'introduis le modèle de Bose-Hubbard qui permet de décrire un ensemble de bosons sur sites, en interaction et couplés par des termes tunnels. Je rappelle ensuite la dérivation des équations de la dynamique dans le cadre de l'approximation de champ moyen. La discrétisation de ces équations permet de relier cette approximation à la limite de champ moyen du modèle de Bose-Hubbard. Je rappelle ensuite le cas connu de la jonction bosonique et l'effet de "self-trapping", pour lequel un ensemble de bosons restent piégés d'un coté de la jonction lorsque la différence de population est initiale est suffisamment élevée. Afin de conclure cette première partie et d'illustrer un problème de bosons sur sites en présence d'un forçage périodique je présente un calcul de courant dans une jonction triangulaire bosonique. Je montre alors qu'un courant est pompé au sein du système lorsque les couplages tunnels sont forcés périodiquement et de manière déphasée les uns par rapport aux autres. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux jonctions supraconductrices. Après avoir rappelé la description BCS d'un supraconducteur, je décrit qualitativement les processus intervenant à l'interface entre un métal normal et un supraconducteur. Dans un second temps, je me focalise sur les jonctions multi-terminaux connectés par un point quantique. Après avoir dérivé la limite de gap infini qui m'intéressera au dernier chapitre, je discute l'analogie existante entre cette

limite et un modèle de liaisons fortes sur réseau. Je considère par la suite une tri-jonction sous un forçage périodique similaire à celui présenté en partie I. Sous-tendue par l'analogie entre le modèle à gap infini de cette jonction et un réseau de graphène, je montre comment par le biais d'un forçage périodique une transition topologique a lieu dans cette jonction.

Dans le chapitre II, je considère plusieurs configurations remarquables de bosons sur sites. Je montre comment dans ces configurations, il est possible de générer des états quantiques $|N00N\rangle$ à M modes de la forme $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}\left(|N00...\rangle + |0N0...\rangle + ... + |...00N\rangle\right)$ en laissant le système évoluer à partir d'un état initial $|0...0N0...0\rangle$. Les configurations prennent la forme suivante : Les potentiels chimiques d'un ensemble de sites prennent alternativement les valeurs $+\mu$ et $-\mu$ par rapport à un site de référence dont le potentiel est 0. Cette énergie de site $\mu$ est supposée très grande en valeur absolue devant les autres échelles d'énergie du système. L'interaction est alors forçée périodiquement et de manière résonnante. Dans un premier temps, le modèle de Bose-Hubbard dépendant du temps est diagonalisé numériquement. L'étude numérique conduit à un ensemble riche d'observations d'états N00N générés dynamiquement pour des nombre de sites allant de 2 à 5 et des nombre de particules allant de 2 à 10.
Dans un second temps, la formation de ces états est analysé semi-analytiquement dans le cas particulier de la jonction triangulaire. Pour ce faire j'introduire un modèle effectif, dérivé d'après la théorie de Floquet. La limite asymptotique $K_0 \gg 1$ de cet Hamiltonien montre que les bon états N00N sont obtenus lorsque le paramètre d'interaction $K_0$ est proche des valeurs $K_0 = \frac{n\pi}{2}$, pour lesquelles la dynamique est complètement bloquée dans l'état initial. J'explique ce fait par l'émergence au sein du système d'un schéma de renormalisation, la partie du spectre explorée par le système se réduisant ainsi successivement par réduction d'échelle.

Dans le chapitre III, je considère une jonction Josephson supraconductrice à deux terminaux soumise à un rayonnement micro-onde. Ce rayonnement est analogue à celui considéré au chapitre I en ce sens que je suppose qu'il induit aux bornes de la jonction deux potentiels périodiques dans le temps et déphasés d'une phase $\chi_2 - \chi_1$. Ce rayonnement a pour premier effet de supprimer le courant pour certaines valeurs de phases déterminée par des conditions de résonances entre les états d'Andreev du système. Dans un système similaire constitué d'un dot, il a aussi été montré qu'un courant non-nul pouvait circuler à phase $\phi = \pi, 0$. Je montre ici par une méthode de scattering que lorsque le métal normal est décrit par une matrice de transmission dépendant de l'énergie il est également possible de générer au sein de la jonction un courant, dénommé chiral, qui est non-nul aux points $\phi = \pi, 0$.

Dans le chapitre IV, je m'intéresse à l'analogie introduite au chapitre I, entre une jonction supraconductrice et un modèle sur réseau. Afin d'approfondir cette analogie, je propose quelques configurations de jonction et leur réseau analogue correspondant. En particulier, je montre comment construire l'analogue d'une bi-couche de graphène dans un cas particulier. Dans le réseau fictif, les variables de nombre de paires $N_i$ jouent le rôle de coordonnées. Cette analogie me permet ensuite de discuter l'effet des bords, donc d'une limitation d'une variable "nombre de paires" dans d'une jonction. Je montre dans un premier temps comment en limitant de manière abrupte le nombre de paires $N_3$ d'une tri-jonction simple on retrouve les états de bords du graphène. Cette jonction est ensuite irradiée, et j'analyse la transition topologique décrite au chapitre I en terme d'états de bords, dispersifs ou non. Dans un

second temps, je traite le cas d'une tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux et soumise au même type d'irradiation micro-onde. En raison de la séparation des paires entre deux niveaux cette jonction fait apparaître des nouveaux termes intéressants du point de vue de la symétrie du problème. J'analyse alors la transition topologique associée en identifiant les points de Weyl présents dans le système. Cette configuration de jonction particulière permet par la suite de proposer une piste pour la réalisation effective de bords. En dernière partie de ce chapitre, je considère une jonction simple avec point quantique en présence d'interaction capacitive entre le point quantique et les terminaux. Après avoir étudié la limite classique de ce modèle et identifié les types de trajectoires je me concentre sur l'effet de l'interaction dans le cas quantique et son lien avec la topologie du système. Premièrement, je montre que lorsque l'interaction peut être traitée en perturbation, la correction au courant est proportionnelle à la phase de Zak du système sans interaction. Finalement, je conclus sur l'effet de l'interaction et son lien avec la phase de Zak par une étude numérique de la jonction avec une limitation abrupte du nombre total de paires de la jonction.

# 1

# Jonctions de condensats

*Les gaz de Bosons ultra-froids peuvent dans de nombreux cas être décris par le modèle de Bose-Hubbard. Les modèles de jonctions supraconductrices sont analogues, lorsque le gap est suffisamment grand devant les énergies considérées, aux modèles de bosons sur réseau. Ces deux types de description sont discutés ici. L'effet d'un forçage périodique est illustré sur les deux types de système. Dans le cas des bosons en géométrie circulaire le forçage induit le pompage d'un courant au sein de l'anneau. Dans une tri-jonction Josephson, le même type de forçage induit une transition topologique analogue à celle du graphène.*

## Sommaire

**1.1 Jonctions bosoniques** . . . . . **17**
1.1.1 Hamiltonien du gaz de Bose . . . . . 17
1.1.2 Modèle de Bose-Hubbard . . . . . 19
1.1.3 Limite semi-classique et champ moyen . . . . . 19
1.1.4 Application : Jonction triangulaire oscillante . . . . . 22
**1.2 Description des jonctions supraconductrices** . . . . . **26**
1.2.1 Supraconducteur homogène . . . . . 26
1.2.2 Jonctions métalliques . . . . . 28
1.2.3 Etats liés d'Andreev . . . . . 29
1.2.4 Jonction par point quantique et limite de gap infini . . . . . 30
1.2.5 Etats liés d'Andreev dans la limite de gap infini . . . . . 33
1.2.6 Gap infini et Hamiltonien bosonique . . . . . 34
1.2.7 Représentation de Fock . . . . . 35
1.2.8 Topologie et jonction Josephson . . . . . 37

# 1.1 Jonctions bosoniques

## 1.1.1 Hamiltonien du gaz de Bose

La première observation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein en 1995 [1] a ouvert la voie d'un rapprochement entre la physique des atomes froids et celle de la matière condensée. Cette transition de phase quantique apparaît lorsque la longueur d'onde thermique des constituants du gaz devient de l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre les particules. Dans les gaz dilués, il est donc nécessaire de descendre à très basse température. Pour réaliser cette condition, les gaz sont piégés à l'aide de lasers afin d'être isolés de toute paroi solide. Les systèmes expérimentaux utilisés aujourd'hui permettent de refroidir les atomes jusqu'au nano-kelvin en utilisant principalement deux techniques : le ralentissement laser et l'évaporation. Ce refroidissement a pour conséquence la perte d'un grand nombre d'atomes. On trouve en général un nombre d'atomes de l'ordre de $10^6$, contrairement aux supraconducteurs ou le nombre de paires est plutôt de l'ordre du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$. Cette différence peut s'avérer cruciale, par exemple dans le cas de la jonction Josephson bosonique ou le rapport $\frac{N_1-N_2}{\mathcal{N}}$ n'est pas négligeable devant 1 et conduit au phénomène de Self-Trapping [2]. Néanmoins, les systèmes d'atomes froids sont d'excellentes plateformes de simulation quantique. Par exemple, là où en matière condensée le modèle de Hubbard est utilisé comme approximation, il est possible de le réaliser parfaitement avec des atomes froids. De plus, il est possible de contrôler très précisément la géométrie du piège atomique et de former différents types de réseaux ( [3], [4], [5] ). Des paramètres comme l'amplitude tunnel ou le coefficient d'interaction sont également contrôlables, de manière statique ou dynamique.

Récemment la mise au point de pièges en forme d'anneaux et de nouvelles techniques de manipulation des pièges à très petites échelles offrent des perspectives sur la diversité des systèmes d'atomes froids effectivement réalisables.

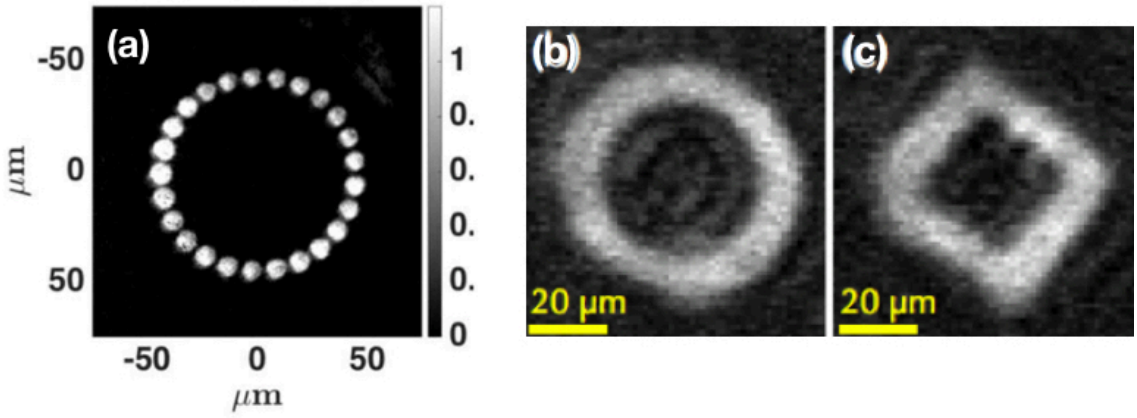



Figure 1.1: Réalisations expérimentales de configuration en anneaux de gaz d'atomes froids. (a) [6] (b) [7] (c) [7]

Je m'intéresserai dans cette thèse à quelques géométries simples que l'on peut désormais réaliser aussi bien avec des atomes froids qu'avec des supraconducteurs. Une différence importante entre ces deux types de systèmes est l'origine des interactions entre les particules. Du fait de l'écrantage métallique, on considère en général que les paires de Cooper d'un supraconducteur n'interagissent pas ensemble. Néanmoins, lorsque les îlots supraconducteurs deviennent de plus en plus petits, il est nécessaire de prendre en compte la capacitance associée. Dans les gaz dilués à basse température, il est possible de décrire les interactions inter-atomiques en remplaçant le potentiel d'interaction par un simple potentiel de contact $\mathcal{U}(r-r') = g\delta(r-r')$. Cette interaction peut être controlée, à l'aide de résonance de Feshbach ( [8] , [9]) de sorte à prendre différentes valeurs positives ou même négatives. Cette propriété, peu commune dans les systèmes supraconducteurs, sera exploitée au chapitre II pour forcer la génération d'états intriqués.

En seconde quantification, l'Hamiltonien d'un gaz dilués d'atomes froids en présence d'interaction s'écrit alors :

**Hamiltonien d'un gaz dilué d'atomes froids**

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r} \left\{ \psi^\dagger(\mathbf{r})\hat{\mathcal{T}}\psi(\mathbf{r}) - g\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right\} \tag{1.1}$$

$$\hat{\mathcal{T}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\Delta} + \hat{\mathscr{U}}(\mathbf{r}) \tag{1.2}$$

### 1.1.2 Modèle de Bose-Hubbard

Pour décrire un gaz de bosons soumis à un potentiel périodique, il est d'usage d'utiliser l'Hamiltonien de Bose-Hubbard [10]. Ce modèle, bien que reposant sur un ensemble d'hypothèses assez radicales, a été réalisé dans les systèmes d'atomes froids ou la transition de Mott a pu être observée [11].
Supposant que le potentiel $\mathscr{U}(r)$ est périodique, on définit les fonctions de Wannier, transformées de Fourier des fonctions de Bloch.

$$\mathscr{W}_{n,j} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} e^{-i\mathbf{q}.\mathbf{r_j}} \Psi_{n,\mathbf{q}} \tag{1.3}$$

Où a est la période du réseau. La dérivation de l'Hamiltonien de Bose-Hubbard consiste à développer l'opérateur champ du système sur la base des fonctions de Wannier, puis de simplifier le résultat à partir des hypothèses suivantes :

- Le réseau est suffisamment profond pour que l'on puisse se restreindre à la bande fondamentale. Soit $\hat{\psi}(r) = \sum_i \mathscr{W}_{0,j} \hat{b}_i$ .
- Seuls les sites plus proches voisins entre eux peuvent s'échanger des particules.
- Les particules interagissent entre elles uniquement si elles sont sur le même site du réseau.

Sous ces hypothèses et en injectant la forme de l'opérateur champ dans l'Hamiltonien (1.2), on obtient :

**Hamiltonien de Bose Hubbard**

$$\mathcal{H}_{BH} = \sum_{\langle i,j \rangle} \mathcal{K}_{ij} \left( b_i^\dagger b_j + \text{h.c} \right) + \sum_j \mathcal{U}_j \hat{n}_j \left( \hat{n}_j - 1 \right) + \sum_j \mu_j \hat{n}_j \tag{1.4}$$

### 1.1.3 Limite semi-classique et champ moyen

Dans les gaz dilués d'atomes froids, les interactions entre atomes sont relativement faibles. Pour traiter l'effet des interactions sur le condensat, on utilise l'équation de Gross-Pitaevskii. Elle permet en effet d'obtenir des équations relativement simples sur les différents systèmes étudiés, au prix de la précision du champ moyen. C'est une méthode variationnelle dans laquelle on suppose que la fonction d'onde à N particules de Bose s'écrit comme un produit symétrisé de fonctions d'ondes à une particule.

Supposons que la plupart des bosons occupent un mode, que l'on décrira par l'opérateur $a_0^\dagger$. On décompose l'opérateur champ du système :

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) a_0^\dagger + \psi_p^\dagger(\mathbf{r}) \tag{1.5}$$

On a alors

$$\int \mathrm{d}r\phi(\mathbf{r})\psi_p^\dagger(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.6}$$

et l'opérateur $\psi_p^\dagger(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ correspondant aux modes orthogonaux au mode fondamental. A basse température, si le gaz est condensé alors la majeure partie des atomes est, au moins en première approximation, dans l'état fondamental. Si bien qu'à l'ordre zéro, nous supposerons que l'opérateur champ du système complet est essentiellement donné par le premier terme de l'équation (1.5). Introduisant la contrainte de normalisation de la probabilité, on trouve la fonctionnelle suivante à minimiser :

$$E[\phi(\mathbf{r}), \phi^*(\mathbf{r})] = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r} \left\{ \phi^*(\mathbf{r})\hat{\mathcal{T}}\phi(\mathbf{r})a_0^\dagger a_0 - \frac{g}{2}\phi^*(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 - N\mu\phi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})a_0^\dagger a_0 \right\} \tag{1.7}$$

$$\frac{\delta E}{\delta\phi(\mathbf{r})} = 0 \tag{1.8}$$

Soit

$$\left(\hat{\mathcal{T}} - g(N-1)|\phi(\mathbf{r})|^2\right)\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi \tag{1.9}$$

Dans le cas dépendant du temps, il suffit de faire la substitution suivante :

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}} \tag{1.10}$$

De telle sorte que :

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mu\phi \tag{1.11}$$

En introduisant le paramètre d'ordre $\psi$ définit par

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\mathcal{N}}\phi(\mathbf{r}, t) \tag{1.12}$$

et en négligeant 1 devant $\mathcal{N}$, l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\hat{\mathcal{T}} - g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2\right)\psi(\mathbf{r}, t) \tag{1.13}$$

Cette équation est intimement liée avec le modèle de Bose-Hubbard dérivé précédemment. Pour le montrer, supposons que le système que l'on étudie soit constitué de N condensats bien séparés spatialement. Autrement dit, le gaz de bosons est soumis a un potentiel périodique profond. On peut alors approcher la fonction d'onde par la forme suivante :

$$\psi(r, t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(r)\psi_i(t) \tag{1.14}$$

Avec la condition :

$$\int \phi_i(r)\phi_j(r) = \delta_{ij} \tag{1.15}$$

En injectant la fonction d'onde (1.14) dans l'équation de Gross-Pitaevskii, pour une configuration cyclique, on trouve l'ensemble d'équations suivant :

$$\partial_t\psi_1(t) = (\epsilon_1 + \mathcal{U}|\psi_1|^2)\psi_1(t) - \mathcal{K}\psi_2(t) - \mathcal{K}\psi_M \tag{1.16}$$
$$\partial_t\psi_2(t) = (\epsilon_2 + \mathcal{U}|\psi_2|^2)\psi_2(t) - \mathcal{K}\psi_1(t) - \mathcal{K}\psi_3 \tag{1.17}$$
$$. \tag{1.18}$$
$$. \tag{1.19}$$
$$. \tag{1.20}$$
$$\partial_t\psi_M(t) = (\epsilon_M + \mathcal{U}|\psi_M|^2)\psi_M(t) - \mathcal{K}\psi_{M-1}(t) - \mathcal{K}\psi_1 \tag{1.21}$$

Or comme $\psi_i = \sqrt{n_i}e^{i\theta_i}$, les équations sont fonctions des différences de phases et non des phases individuelles. Le système s'écrit alors à partir du Hamiltonien suivant.

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{U}}{2}\sum_{j=1}^{M} n_j^2 + \sum_{j=1}^{M}\epsilon_j n_j - \mathcal{K}\sum_{j=1}^{M}\sqrt{n_{j+1}n_j}\cos\left(\theta_{j+1} - \theta_j\right) \tag{1.22}$$

Ou j est défini modulo M et les variables conjugués $\theta_j$ et $n_j$ solutions des équations d'Hamilton. Notons que si l'on effectue la substitution $b_j \longrightarrow \sqrt{n_j}e^{i\phi_j}$ dans l'Hamiltonien (1.4), on parvient au même Hamiltonien de champ moyen. Autrement dit, il y a une correspondance entre la limite de **champ moyen** du modèle de Bose-Hubbard et la **discrétisation** de l'équation de Gross-Pitaevskii.

Cette limite, bien qu'excluant les fluctuations quantiques du système, a permis de prédire l'effet de Self-Trapping dans la jonction tunnel bosonique ( [12]). La jonction tunnel bosonique est réalisé par le piégeage d'un gaz de bosons dans un double puits de potentiel. Si le puits est suffisamment profond, cette jonction se représente par deux réservoirs de bosons, couplés par un terme tunnel. Comme il a été montré dans [12], les différents régimes dynamiques de cette jonction sont bien capturés par les équations de champ moyen. En imposant la contrainte de conservation du nombre de bosons, l'Hamiltonien (1.22) conduit aux équations de la dynamique suivantes :

$$\frac{dz}{d\tau} = -\sqrt{1-z^2}\sin\theta \tag{1.23}$$
$$\frac{d\theta}{d\tau} = \Delta\epsilon + \Lambda z + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta \tag{1.24}$$
$$\tag{1.25}$$

avec $z = \frac{n_1 - n_2}{\mathcal{N}}$, $\theta = \theta_2 - \theta_1$ et $\tau = 2\mathcal{K}t$. Lorsque la différence de population $z$ est assez faible ($|z| \ll 1$), un courant $I = I_0 \sin\left(\theta_0 + \Delta\epsilon.t\right)$ analogue à celui qui circule dans une jonction Josephson supraconductrice circule, à conditions que $\Delta\epsilon$ soit suffisamment grand.
La non-linéarité présente dans la dynamique du système introduit cependant des régimes différents de ceux observés dans ces jonctions. Pour un paramètre d'interaction $\Lambda$ donné les régimes diffèrent suivant la différence initiale de population ou de phase. En particulier pour de faibles différences initiales de population, $\theta$ et $z$ oscillent de manière harmonique autour de zéro (a). Lorsque $z(0)$ augmente ces oscillations prennent de l'amplitude et leur forme devient non harmonique à cause des non-linéarités (b). Pour $z(0) > z_c$, la différence de phase n'oscille plus et augmente de manière continue avec le temps alors que la différence de population

continue à osciller mais autour d'une valeur non nulle. Ce régime est appelé *Self-trapping* (c) : $z$ oscille mais en moyenne les bosons restent piégés dans la configuration initiale. Ce phénomène a été observé expérimentalement en 2005 [2] et illustre une différence fondamentale avec les jonctions tunnel supraconductrices. Dans la jonction bosonique le nombre d'atomes piégés est de l'ordre de $10^3 - 10^6$, qui peut être de l'ordre du nombre d'atomes échangés à travers la jonction. La non-linéarité en $z$ disparaît pour des jonctions supraconductrices ou l'on considère en général que les réservoirs de paires sont infinis. Afin d'illustrer la physique de ce modèle de champ moyen dans une situation en présence d'une dépendance en temps sinusoïdale je présente dans la section suivante un calcul, réalisé préliminairement à cette thèse, dans lequel je montre que l'on peut générer un courant dans une jonction bosonique à trois sites, en géométrie circulaire (jonction triangulaire) et hors-équilibre.

### 1.1.4 Application : Jonction triangulaire oscillante

Dans cette section , on considère une jonction en triangle dans le régime de champ moyen (1.22). Le terme tunnel transférant des électrons d'un site vers un autre est supposé dépendre du temps de manière sinusoïdale $\mathcal{K}_i(t) = \mathcal{K}_i(1+a_i \sin(\omega t + \chi_i))$, ce qui en pratique correspond à faire osciller la hauteur de la barrière de potentiel séparant chaque site. Les déphasages $\chi_i$ sont introduits de sorte que le système perde son invariance par renversement du temps. La conservation du nombre de bosons et l'invariance de jauge associée permettent de réduire le système à un ensemble de 4 équations couplées.

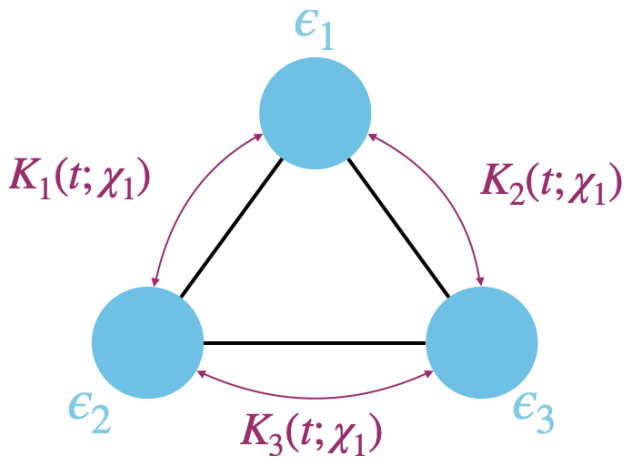



Figure 1.2: Jonction triangulaire bosonique. Les couplages entre les trois sites oscillent sinusoïdalement avec chacun un déphasage $\chi_i$ donné.

$$\dot{z} = -\sqrt{2}\mathcal{K}_3(t)\sqrt{(1+z)(2-z+3y)}\sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right) - \sqrt{2}\mathcal{K}_2(t)\sqrt{(1+z)(2-z-3y)}\sin\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)$$
$$\dot{y} = -\frac{2\mathcal{K}_1}{3}\sqrt{(2-z)^2-9y^2}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}_3}{3}\sqrt{(1+z)(2-z+3y)}\sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}_2}{3}\sqrt{(1+z)(2-z-3y)}\sin\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)$$
$$\dot{\theta} = \Delta^y\epsilon + \Lambda y + \frac{6\mathcal{K}_1 y}{\sqrt{(2-z)^2-9y^2}}\cos\theta + \sqrt{2}\mathcal{K}_2\sqrt{\frac{1+z}{2-z-3y}}\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)$$
$$- \sqrt{2}\mathcal{K}_3\sqrt{\frac{1+z}{2-z+3y}}\cos\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)$$
$$\dot{\phi} = \Delta^z\epsilon + \Lambda z + \frac{2\mathcal{K}_1(2-z)}{\sqrt{(2-z)^2-9y^2}}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}_2(2z+3y-1)}{\sqrt{(1+z)(2-z-3y)}}\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}_3(2z-3y-1)}{\sqrt{(1+z)(2-z+3y)}}\cos\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)$$

Avec les variables suivantes :

$$z = \frac{2n_1 - n_2 - n_3}{N} \tag{1.26}$$
$$y = \frac{n_2 - n_3}{N} \tag{1.27}$$
$$\phi = \theta_2 + \theta_3 - 2\theta_1 \tag{1.28}$$
$$\theta = \theta_3 - \theta_2 \tag{1.29}$$

On souhaite calculer dans ce système, le courant induit par les oscillations des couplages tunnels. La jonction étant hors-équilibre il n'est *a priori* pas aisé d'obtenir une expression analytique. Néanmoins, dans les systèmes forcés périodiquement il est en général possible d'obtenir des descriptions analytiques, effectives dans la limite de haute fréquence. La raison principale étant que si la fréquence est suffisamment élevée et que le forçage est suffisamment faible, la dynamique peut être séparée en plusieurs contributions associées à deux échelles de temps. Pour des équations de dynamique classique, Hamiltonienne, la manière d'effectuer cette approximation s'appelle **Méthode de Kapitza** en référence à l'effet de stabilisation du pendule de Kapitza [13] [14].
Pour calculer le courant à haute fréquence dans notre cas, on étend cette méthode qui a déjà été appliquée dans le cas de la jonction bosonique simple [12]. La dynamique est décrite ici par un système de quatre équations du premier ordre. En notant $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) = (z, y, \theta, \phi)$ le système d'équations précédent peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$X_k = f_{X_k}(X_1, X_2, X_3, X_4) + g_{X_k}(X_1, X_2, X_3, X_4, t) \tag{1.30}$$

Si la fréquence caractéristique $\omega$ de l'excitation est très grande devant au moins les premières pulsations caractéristiques du système libre, et que la force de l'excitation n'est pas trop importante le mouvement de chaque composante peut *a priori* être décomposé en un

mouvement rapide ($\tau = \frac{2\pi}{\omega}$) et un mouvement lent. On pose donc pour chaque variable l'hypothèse suivante :

$$X_k(t) = X_k^0(t) + \eta_k(t) \tag{1.31}$$

Avec $\langle \eta_k \rangle_\tau = 0$. En développant en puissances de $\eta$, il vient au premier ordre :

$$\dot{X}_k^0 + \dot{\eta_k} = f_{X_k}(X^0) + g_{X_k}(X^0, t) + \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial f_{X_k}}{\partial X_i}(X^0) + \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial g_{X_k}}{\partial X_i}(X^0, t) \tag{1.32}$$

En identifiant à l'ordre le plus bas les termes d'échelle $\tau$ et en moyennant l'équation complète sur cette même échelle, on obtient le système d'équations suivant :

$$\dot{X}_k^0 = f_{X_k}(X^0) + \sum_{i=1}^{4} \langle \eta_i \frac{\partial g_{X_k}}{\partial X_i}(X^0, t) \rangle_\tau \tag{1.33}$$

$$\dot{\eta_k} = g_{X_k}(X^0, t) \tag{1.34}$$

Le mouvement moyen est alors décrit par une équation effective indépendante (explicitement) du temps. On obtient la trajectoire totale à haute fréquence en ajoutant au mouvement moyen la perturbation à variations rapides. Nous supposons ici $z, y \ll 1$. A l'ordre zéro en z et y, le système d'équations gouvernant le mouvement moyen s'écrit explicitement :

$$\dot{z}_0 = -2\left\{\mathcal{K}_3 \sin\left(\frac{\phi_0 - \theta_0}{2}\right) + \mathcal{K}_2 \sin\left(\frac{\phi + \theta_0}{2}\right)\right\} + \langle \vec{\eta}.\nabla_{\vec{X}} g_z \rangle_\tau \tag{1.35}$$

$$\dot{y}_0 = -\frac{4\mathcal{K}_1}{3}\sin\theta_0 + \frac{2\mathcal{K}_3}{3}\sin\left(\frac{\phi_0 - \theta_0}{2}\right) - \frac{2\mathcal{K}_2}{3}\sin\left(\frac{\phi_0 + \theta_0}{2}\right) + \langle \vec{\eta}.\nabla_{\vec{X}} g_y \rangle_\tau \tag{1.36}$$

$$\dot{\theta}_0 = \Delta^y \epsilon + \Lambda y + \mathcal{K}_2 \cos\left(\frac{\phi_0 + \theta_0}{2}\right) - \mathcal{K}_3 \cos\left(\frac{\phi_0 - \theta_0}{2}\right) + \langle \vec{\eta}.\nabla_{\vec{X}} g_\theta \rangle_\tau \tag{1.37}$$

$$\dot{\phi}_0 = \Delta^z \epsilon + \Lambda z + 2\mathcal{K}_1 \cos\theta_0 - \mathcal{K}_2 \cos\left(\frac{\phi_0 + \theta_0}{2}\right) - \mathcal{K}_3 \cos\left(\frac{\phi_0 - \theta_0}{2}\right) + \langle \vec{\eta}.\nabla_{\vec{X}} g_\phi \rangle_\tau \tag{1.38}$$

Lorsque $\phi, \theta \ll 1$, le système d'équations se met sous la forme suivante :

$$\dot{X} = AX + B \tag{1.39}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{K}_3 - \mathcal{K}_2 & -(\mathcal{K}_3 + \mathcal{K}_2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(4\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3) & \frac{1}{3}(\mathcal{K}_3 - \mathcal{K}_2) \\ 0 & \Lambda & A_{33} & A_{34} \\ \Lambda & 0 & A_{43} & -A_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

Le courant circulant dans l'anneau étant défini en moyenne, les points de quasi-équilibre ($\langle \dot{X}_k(t) \rangle_\tau = 0, \forall k$) du système permettent d'obtenir quelques informations sur celui-ci. Plaçons nous dans le cas symétrique : $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}$,

$$X_{eq}^0 = -A^{-1}B = -\frac{1}{2K\Lambda}\begin{pmatrix} -A_{33}b_1 + A_{43}b_2 + 2\mathcal{K}b_4 \\ A_{34}b_1 + A_{33}b_2 + 2\mathcal{K}b_3 \\ -\Lambda b_2 \\ -\Lambda b_1 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

Dans la limite traitée ici, $z, y \ll 1$, les courants dépendent uniquement des variables de phase. Les phases à l'équilibre s'écrivent explicitement :

$$\theta^0_{eq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{K}}{3\omega}\right)(2a_2a_3\phi_{32} - a_1a_2\phi_{21} + a_1a_3\phi_{31}) \tag{1.42}$$

$$\phi^0_{eq} = \frac{\mathcal{K}}{2\omega}(a_1a_3\phi_{31} + a_1a_2\phi_{21}) \tag{1.43}$$

Avec $\phi_{ij} = \sin(\chi_i - \chi_j)$. Le courant circulant entre les condensats 2 et 3 est défini par :

$$\mathscr{I}_{23}(\theta, t) \simeq -\frac{2\mathcal{K}}{3}(1 + a_1 \sin(\omega t + \chi_1)) \sin\theta \tag{1.44}$$

Définissons le courant moyen comme le courant moyenné par rapport aux variables rapides et calculé lorsque les variables de phases sont égales à leur valeur de quasi-équilibre.

$$\mathscr{I}_{23} = \langle \mathscr{I}_{23}(\theta^0_{eq}, t)\rangle_\tau \tag{1.45}$$

En séparant de l'équation (3.43) les variables lentes et rapides et en moyennant sur l'échelle de temps la plus courte $\tau$, on trouve :

$$\langle \mathscr{I}_{23}(\theta^0, t)\rangle_\tau = -\frac{2\mathcal{K}}{3}\theta^0 - \frac{2\mathcal{K}a_1}{3}\langle \eta_\theta \sin(\omega t + \chi_1)\rangle_\tau \tag{1.46}$$

Le calcul des trois valeurs $\mathscr{I}_{ij}$ donne des résultats identiques. On a donc :

$$\mathscr{I}_{23} = \mathscr{I}_{12} = \mathscr{I}_{31} \tag{1.47}$$

Et un courant :

**Courant induit par les oscillations $\mathcal{K}_i(t)$**

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}_{ij} = \pm\frac{2\mathcal{K}^2}{9\omega}(a_2a_3\sin(\chi_3 - \chi_2) + a_1a_2\sin(\chi_2 - \chi_1) + a_1a_3\sin(\chi_1 - \chi_3)) \tag{1.48}$$

Si deux $a_i$ sont nuls alors il n'y a pas de courant généré. Si au moins deux barrières oscillent alors un courant est généré, d'amplitude $|\mathscr{I}| \sim \frac{\mathcal{K}a^2}{\omega}$. De plus, l'expression ci-dessus du courant montre que dans le cas particulier ou tous les $a_i$ sont égaux et $\chi_1 = 0$ le courant maximal en valeur absolue est obtenu lorsque $\chi_2 = \frac{2\pi}{3}$ et $\chi_3 = \frac{4\pi}{3}$ ou $\chi_2 = \frac{4\pi}{3}$ et $\chi_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Le calcul numérique du courant (Figure 1.3) confirme le résultat analytique à haute fréquence ou l'on voit que pour différents paramètres d'interaction le courant tend vers la même limite $\sim 10^{-2}$. A plus basses fréquences, on trouve des courants résonants pour certains rapports $\frac{\omega}{\omega_0(\Lambda)}$. Ce calcul témoigne à la fois de la complexité du modèle, hors équilibre, ou même en champ moyen la dynamique est très riche. C'est également un exemple important ou l'introduction d'une dépendance en temps dans le système permet d'imposer un état physique, ici la circulation d'un courant. Le forçage périodique, en brisant la symétrie par renversement du temps de la jonction pompe (classiquement) un courant au sein du système. Le comportement à haute fréquence développé ici, pour lequel le système peine à suivre l'excitation extérieure, est réminiscent de l'approximation haute fréquence du formalisme

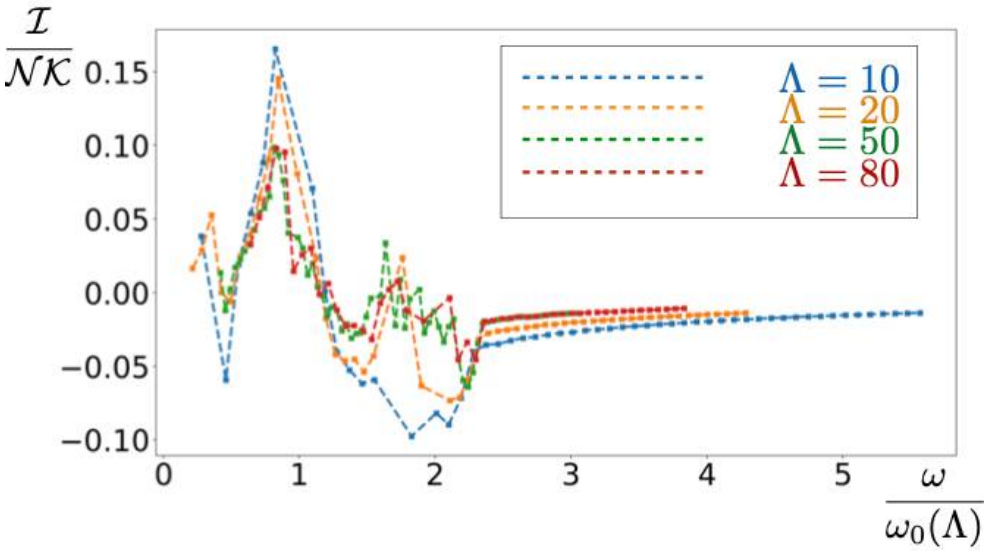



Figure 1.3: Courant spectral moyen circulant dans la jonction triangulair, calculé en résolvant numériquement les équations de la dynamique pour différentes valeurs du paramètre d'interaction $\Lambda$

de Floquet en mécanique quantique. Le pompage est ici dit classique par opposition au pompage quantique qui lui est associé à des invariants topologiques et permet d'induire du transport quantifié de particules [15]. Dans cette thèse, ce type d'approche sera appliqué à la fois aux jonctions bosoniques et aux jonctions supraconductrices afin de générer des états quantiques intriqués (Chapitre II), du pompage quantique (Chapitre III) ou encore des effets topologiques (Chapitre IV).

## 1.2 Description des jonctions supraconductrices

### 1.2.1 Supraconducteur homogène

Je rappelle dans cette section les éléments de base de la description d'un supraconducteur homogène. Le formalisme de Nambu est introduit de sorte à faire apparaître l'Hamiltonien de Bogolubov-deGennes à partir duquel la nature des excitations électroniques est explicitée. On considère donc un supraconducteur BCS, homogène et de type S.

$$H_{BCS} = \sum_{k,\sigma,j} \xi_k c^\dagger_{k,\sigma} c_{k,\sigma} + \Delta \sum_{k,j} e^{i\phi_j} c^\dagger_{k,\uparrow} c^\dagger_{-k,\downarrow} + \text{h.c} \tag{1.49}$$

En définissant le spineur de Nambu $\Psi^\dagger_k = (c^\dagger_{k,\uparrow}, c_{k,\downarrow})$, cet Hamiltonien peut se réécrire

sous la forme suivante :

$$H_{\mathrm{BCS}} = \sum_k \Psi_k^\dagger \mathcal{H}_{BdG}(k) \Psi_k \tag{1.50}$$

$$\mathcal{H}_{BdG}(k) = \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

$\mathcal{H}_{BdG}(k)$ est appelé Hamiltonien de Bogolubov - de Gennes. Cet Hamiltonien se diagonalise aisément par une transformation de Bogolubov. On définit une nouvelle base d'opérateurs $\Gamma_k = (\gamma_{+,k}^\dagger, \gamma_{-,k})$ , de sorte que $\left\{\gamma_{k,\sigma}^\dagger, \gamma_{\tilde{k},\kappa}\right\} = \left\{c_{k,\sigma}, c_{\tilde{k},\kappa}^\dagger\right\}$ et que $\mathcal{H}_{BdG}(k)$ soit diagonal dans cette nouvelle base. Si les opérateurs sont bosoniques, la diagonalisation de $\mathcal{H}$ par la transformation de Bogolubov n'est pas toujours possible [16]. Lorsqu'elle l'est, il est nécessaire d'introduire une matrice para-unitaire afin de conserver des relations de commutations bosoniques.

**Transformation de Bogolubov -** Dans le cas BCS, cette transformation prend la forme suivante :

$$\Gamma_k = \mathcal{R}_k \Psi_k \tag{1.52}$$

$$\mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ v_k^* & u_k \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

$$u_k = e^{i\phi}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}}\right)} \quad , \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}}\right)} \tag{1.54}$$

L'Hamiltonien devient, quant à lui, diagonal. Ses énergies propres se regroupent par paires de signe opposé.

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_k E_{k,+}\left(\gamma_{+,k}^\dagger \gamma_{+,k} - \gamma_{-,k}^\dagger \gamma_{-,k}\right) \tag{1.55}$$

$$E_{k,\pm} = \pm\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} \tag{1.56}$$

Suivant [17], définissons l'état vide comme :

$$|V\rangle = \prod_k c_{-k,\downarrow}^\dagger |0\rangle \tag{1.57}$$

On a en effet :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{k,-} \\ \gamma_{k,+} \end{pmatrix} |V\rangle = 0 \tag{1.58}$$

L'état fondamental est obtenu en remplissant tous les niveaux de quasiparticules d'énergie négative. Soit $|GS\rangle = \prod_k \gamma_{k,-}^\dagger |V\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow})$.

### 1.2.2 Jonctions métalliques

La description physique d'un supraconducteur homogène fait apparaître une quantité appelée phase supraconductrice. Elle est définie comme la phase complexe de la fonction d'onde macroscopique $\psi = |\psi| \, \mathrm{e}^{i\phi}$ associé au supraconducteur. En tant que phase globale, elle n'est pas observable en soi. Néanmoins, l'existence de cette phase peut être révélée lorsque l'on couple plusieurs supraconducteurs ensemble. En effet, si ces deux supraconducteurs sont séparés par un mince couche isolante (jonction tunnel) il circule un courant de paires $I \propto \sin(\phi_1 - \phi_2)$ à travers la jonction. Ce phénomène est appelé effet Josephon ( [18]) et a été confirmé pour la première fois expérimentalement en 1963 [19]. La différence de phase entre les supraconducteurs est relié à la différence de potentiel $V$ appliquée aux bornes de la jonction.

$$\dot{\phi} = \frac{2e}{\hbar} V \tag{1.59}$$

Avec une différence de potentiel constante, le courant traversant la jonction oscille à la fréquence $\omega = \frac{2e}{\hbar} V$ et permet de remonter au quantum de conductance $\frac{2e}{\hbar}$. Cette fréquence d'oscillation s'exprime uniquement en fonction des constantes fondamentales e et $\hbar$. Cette extrême précision qui en découle à donné lieu à de nombreuses applications comme la ré-définition du standard de tension. Il a même été proposé récemment, de refermer triangle métrologique uniquement à l'aide de jonctions Josephson en s'appuyant sur les propriétés topologiques d'un circuit construit à partir de jonction tunnel ( [20]). La jonction Josephson est également utilisée comme élément de base pour créer des circuits supraconducteurs générant des Qbits.
Bien qu'après la découverte de l'effet Josephson les efforts expérimentaux se soient concentrés sur la réalisation de jonctions tunnel, ce phénomène n'est pas cantonné a un type de jonction. De manière général, tout lien couplant des supraconducteurs entre eux peut engendrer ce type d'effet. Par exemple, on peut obtenir une jonction de plus grande transmission en remplaçant la couche isolante par un métal normal. Des jonctions existent également avec des matériaux ferromagnétiques, des isolants topologiques ou encore en créant une micro-constriction au sein d'un métal supraconducteur. Les avancées technologiques en sciences des matériaux influencent fortement les progrès en physique des jonctions Josephson. Notamment, la possibilité de forger des systèmes à l'échelle nanométrique, pour lesquels la longueur d'onde de Fermi devient typiquement du même ordre de grandeur que la taille de l'échantillon, force un changement de perspective sur la description de ces jonctions. Un exemple important de ces progrès expérimentaux est la réalisation de jonctions Josephson à point quantique (dot) qui sont des systèmes de dimension inférieure au micro-mètre dans lesquels le faible nombre d'électrons peut être précisément contrôlé. On regroupe sous l'appellation de jonction à dot différents types de jonctions dont la description est celle d'un point quantique constitué d'un petit nombre de niveaux électroniques couplés à un ensemble de supraconducteurs. Les jonctions à base de nanotubes de carbone ou encore dont le lien est une unique molécule de $C^{60}$ [21] [22] constituent de tels systèmes. Remarquablement, il se trouve que ce type de jonctions permettrait d'observer des transitions topologiques similaires à celles qu'on observe dans des systèmes sur réseau comme dans le modèle de Haldane tout en offrant la possibilité de contrôler des paramètres qui ne sont pas accessibles habituellement [23].
Il a été montré ( [24] [25] [26]) que la physique des jonctions Josephson, si variée soit elle, peut

être interprétée à l'aide d'un processus de réflexion propre aux jonctions supraconductrices : la réflexion d'Andreev.

### 1.2.3 Etats liés d'Andreev

A la traversée d'une interface entre un métal et un supraconducteur, les électrons, d'énergie proche du niveau de Fermi peuvent être réfléchis en trous. Si l'énergie de l'électron incident est inférieure au gap supraconducteur alors il n'y a pas d'états électroniques à disposition et seule une paire peut traverser l'interface. Lors de ce processus, appelé Réflexion d'Andreev ( [27] , [28]), le trou réfléchi acquiert la phase locale associée au supraconducteur. Dans une jonction Josephson, cette succession de processus donne lieu à des états liés, localisés à l'intérieur de la jonction et appelés **Etats liés d'Andreev**. L'énergie de ces états dépend de la différence de phase entre les deux supraconducteurs.
Pour décrire ces états dans le cadre d'une méthode de scattering, on sépare le système en différentes régions : deux régions supraconductrices sont chacunes connectées à une région métallique différente. Les deux régions métalliques sont connectés entre elles par un potentiel de diffusion, décrit par une matrice de transmission. La forme de la fonction d'onde de chaque région est déterminée à partir de l'équation de Bogolubov-deGennes. La limite $\Delta \longrightarrow 0$ de cette équation permet en effet de retrouver les solutions classiques d'un métal normal et donc de décrire l'inhomogénéité du système. Comme les quasiparticules associées aux régions supraconductrices possèdent une composante trou et une composante électronique, les fonctions d'ondes des régions métalliques prennent également une forme spinorielle. Le raccordement aux différentes interfaces permet de déterminer complètement la forme de la fonction d'onde. Notons qu'afin d'inclure tous les processus physiques en jeu dans le système décrit il est nécessaire de considérer, pour la fonction d'onde, un ansatz suffisamment général.

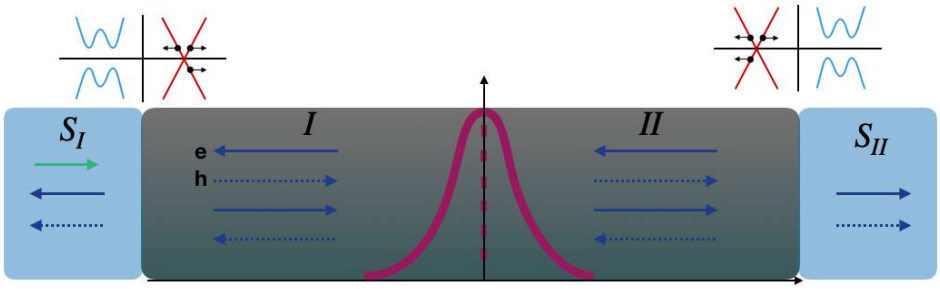



Figure 1.4: Schéma de Scattering d'une jonction Josephson métallique. La jonction est séparée en 4 régions : Le supraconducteur $\mathcal{S}_1$, les régions métalliques I et II séparées par un potentiel de diffusion et le supraconducteur $\mathcal{S}_2$.

Les fonctions d'onde associées aux différentes sous-parties du système sont solution de l'équation de Bogolubov-de-Gennes. Lorsque $\Delta \longrightarrow 0$, ces solutions se classent en deux familles selon que le vecteur d'onde est supérieur ou inférieur à $k_F$. Ce sont les solutions "électrons" et "trous" d'un métal normal. On peut garder cette classification à $\Delta \neq 0$ en définissant $k_{e,h} = k_F \left(1 + \eta_{e,h}\mathrm{sgn}(E)\sqrt{\frac{E^2-\Delta^2}{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}$. De la même manière, on définit $v_{e,h} = v_{k=k_{e,h}}$ et $u_{e,h} = u_{k=k_{e,h}}$ ou $u_k$ et $v_k$ sont les coefficients des états propres de l'Hamiltonien

BdG (Eq I.54). La fonction d'onde de ce système s'écrit de manière générale :

$$\Psi_{\mathcal{S}_I}(x) = e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\left\{a_1\begin{pmatrix} u_h \\ v_h \end{pmatrix} e^{-ik_h x} + b_1\begin{pmatrix} u_e \\ v_e \end{pmatrix} e^{ik_e x}\right\}$$
$$\Phi_I(x) = \left\{\begin{pmatrix} A_e \\ A_h \end{pmatrix} e^{-ikx} + \begin{pmatrix} B_e \\ B_h \end{pmatrix} e^{ikx}\right\}$$
$$\Psi_{\mathcal{S}_{II}}(x) = e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\left\{a_2\begin{pmatrix} u_h \\ v_h \end{pmatrix} e^{ik_h x} + b_2\begin{pmatrix} u_e \\ v_e \end{pmatrix} e^{-ik_e x}\right\}$$
$$\Phi_{II}(x) = \left\{\begin{pmatrix} C_e \\ C_h \end{pmatrix} e^{-ikx} + \begin{pmatrix} D_e \\ D_h \end{pmatrix} e^{ikx}\right\}$$

Nous nous plaçons ici dans la limite de jonction courte $L \ll \xi$. On supposera de plus que $k_{e,h} \simeq k_F \simeq k_{e,h}(\Delta \to 0)$ lorsque ces vecteurs d'onde sont en facteurs au sein d'une équation (approximation d'Andreev).Le raccordement des fonctions d'ondes à l'interface $\mathcal{S}_{I,II} - N_{I,II}$ est alors caractérisé par l'amplitude de réflexion d'Andreev $a(E) = \frac{1}{\Delta}(E - i\sqrt{\Delta^2 - E})$ tandis que l'interface $N_I - N_{II}$ est décrite par la matrice de transmission $\mathscr{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{r}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ . Soit,

$$\begin{pmatrix} A_{e,h} \\ B_{e,h} \end{pmatrix} = \mathscr{T}\begin{pmatrix} C_{e,h} \\ D_{e,h} \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

et

$$\begin{pmatrix} C_e \\ D_e \end{pmatrix} = e^{-i\phi_1}\mathcal{U}\begin{pmatrix} C_h \\ D_h \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix} = e^{i\phi_2}\mathcal{U}\begin{pmatrix} A_e \\ B_e \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

Ce système d'équations implique l'existence d'une paire d'états liés au sein de la jonction.

**Energie des états liés d'une jonction SNS**

$$\det\left(\mathbb{I}_2 - e^{i\phi}\mathscr{T}\mathcal{U}\mathscr{T}^{-1}\mathcal{U}\right) = 0 \tag{1.62}$$

$$E = \pm\Delta\sqrt{1 - \tau\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \tag{1.63}$$

Lorsque $\tau = 1$ (limite balistique), les deux états se croisent à phase $\phi = \pi$ et les deux canaux sont découplés. A l'inverse, lorsque $\tau \ll 1$ on retrouve le résultat de la jonction tunnel $I \propto \partial_\phi E \propto \sin(\phi)$.

### 1.2.4 Jonction par point quantique et limite de gap infini

Au sein d'une jonction constituée d'un point quantique se forment également des états liés d'Andreev. Contrairement au cas d'une jonction métallique, ces états ne sont pas collés au gap lorsque la phase $\phi = 0[2\pi]$. Cette propriété permet, lorsque le gap est suffisamment grand devant les autres échelles d'énergie, de définir un modèle de basse énergie analogue aux modèles de jonctions bosoniques.

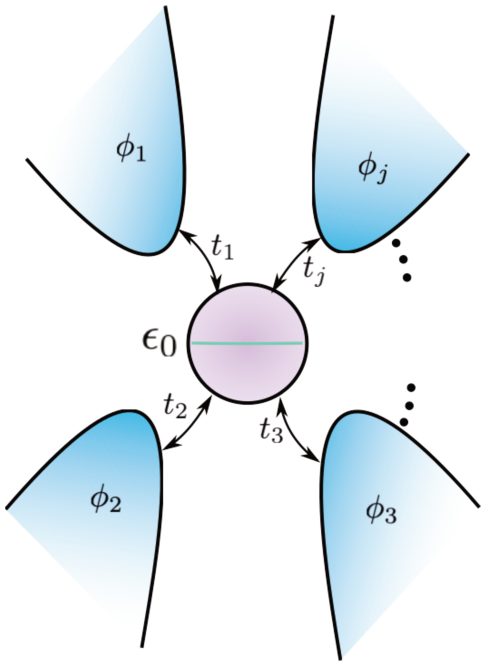



Figure 1.5: Schéma d'un ensemble de supraconducteurs couplés par un dot. A chaque supraconducteur $\mathcal{S}_i$ est associée une phase $\phi_i$ et un couplage au dot $t_i$. L'énergie du dot est notée $\epsilon_0$.

Considérons un ensemble de $d+1$ supraconducteurs BCS couplés via un dot métallique sans interaction (1.5).
L'Hamiltonien du système est le suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{k,\sigma,j} \xi_k c^\dagger_{k,j,\sigma} c_{k,j,\sigma} + \Delta \sum_{k,j} e^{i\phi_j} c^\dagger_{k,j,\uparrow} c^\dagger_{-k,j,\downarrow} + \text{h.c} + \sum_{k,j,\sigma} t_j c^\dagger_{k,j,\sigma} d_\sigma + \text{h.c} + \epsilon_0 (d^\dagger_\uparrow d_\uparrow + d^\dagger_\downarrow d_\downarrow) \tag{1.64}$$

$$\equiv \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{S-d} + \mathcal{H}_d \tag{1.65}$$

où $\epsilon_0$ est l'énergie de l'état du point quantique et $t_j$ l'amplitude tunnel pour le transfert d'un électron entre les supraconducteurs et le dot.

Lorsque le gap $\Delta$ est grand devant toutes les échelles d'énergie du système, soit $\Delta \gg \xi_k, t_j, \epsilon_0$, il devient très coûteux énergétiquement de transférer des électrons uniques à travers la jonction. Dans ce cas, l'espace des états du dot contenant un nombre pair d'électrons est découplé de l'espace des états à nombre impair d'électrons et on peut obtenir une description, de basse énergie, dans laquelle le système est limité au sous-espace pair. Cette limite s'obtient de manière transparente si l'on élimine ( [29] [30] [31]) les degrés de liberté associés aux supraconducteurs dans un Hamiltonien effectif décrivant le dot et ses couplages. En utilisant la définition suivante de la fonction de Green en temps imaginaire associée à deux opérateurs A et B :

$$G_{AB}(\tau) = -\langle \mathcal{T}_\tau \{A(\tau)B\} \rangle \tag{1.66}$$

Et sa transformée de Fourier :

$$\tilde{G}_{AB}(i\omega_n) = \int_0^\beta e^{i\omega_n} G_{AB}(\tau) \tag{1.67}$$

Pour déterminer les équations du mouvement associée au système dot + supraconducteurs , on utilise l'équation suivante (obtenue en dérivant l'équation I.6) :

$$\partial_\tau G_{AB}(i\omega_n) = -\left[A(\tau), B\right]_{B,F} \delta(\tau) + \langle \mathcal{T}_\tau \left\{[H, A]_\tau, B\right\}\rangle \tag{1.68}$$

On définit, dans le formalisme de Nambu :

$$\hat{\mathcal{G}}_{dd}(\tau) = \begin{pmatrix} -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{d_\uparrow(\tau) d_\uparrow^\dagger\right\}\rangle & -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{d_\uparrow(\tau) d_\downarrow\right\}\rangle \\ -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{d_\downarrow^\dagger(\tau) d_\uparrow^\dagger\right\}\rangle & -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{d_\downarrow^\dagger(\tau) d_\downarrow\right\}\rangle \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

$$\hat{\mathcal{G}}^{(j)}_{Sd,k}(\tau) = \begin{pmatrix} -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{c_{j,k\uparrow}(\tau) d_\uparrow^\dagger\right\}\rangle & -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{c_{j,k\uparrow}(\tau) d_\downarrow\right\}\rangle \\ -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{c^\dagger_{j,-k\downarrow}(\tau) d_\uparrow^\dagger\right\}\rangle & -\langle \mathcal{T}_\tau \left\{c^\dagger_{j,-k\downarrow}(\tau) d_\downarrow\right\}\rangle \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

Pour chaque composante de la matrice $\hat{\mathcal{G}}_{Sd}$ ($\hat{\mathcal{G}}_{dd}$), on obtient une équation couplant cette composante avec d'autres composantes appartenant à $\hat{\mathcal{G}}_{Sd}$ ($\hat{\mathcal{G}}_{dd}$) et $\hat{\mathcal{G}}_{dd}(\hat{\mathcal{G}}_{Sd})$. L'application de (1.68) conduit donc à un ensemble de 8 équations couplés. Ces équations sont fermées et il est possible de déterminer explicitement $\hat{\mathcal{G}}_{dd}$. Il est alors plus simple de passer dans l'espace de Fourier pour résoudre ces équations. Le calcul de ces équations fait intervenir les commutateurs suivants :

$$[d_\uparrow, \mathcal{H}] = \epsilon_0 d_\uparrow + t \sum_{j,k} c_{j,k,\uparrow} \tag{1.71}$$

$$\left[d_\downarrow^\dagger, \mathcal{H}\right] = -\epsilon_0 d_\downarrow^\dagger - t \sum_{j,k} c^\dagger_{j,-k,\downarrow} \tag{1.72}$$

$$[c_{j,k,\uparrow}, \mathcal{H}] = t d_\uparrow + \Delta e^{i\phi_j} c^\dagger_{j,-k,\downarrow} + \xi_k c_{j,k,\uparrow} \tag{1.73}$$

$$\left[c^\dagger_{j,-k,\downarrow}, \mathcal{H}\right] = -t d_\downarrow^\dagger + \Delta e^{-i\phi_j} c_{j,k,\uparrow} + \xi_k c^\dagger_{j,-k,\downarrow} \tag{1.74}$$

En passant dans l'espace de Fourier, on trouve les relations suivantes :

$$\omega \tilde{\mathcal{G}}_{dd}(\omega) = -\epsilon_0 \sigma_z \tilde{\mathcal{G}}_{dd}(\omega) - t\sigma_z \sum_{j,k} \tilde{\mathcal{G}}^{(j)}_{Sd,k}(\omega) \tag{1.75}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(j)}_{Sd,k}(\omega) = -t\hat{\sigma}_z \tilde{g}^{(j)}_{SS,k}(\omega) \tilde{\mathcal{G}}^{(j)}_{dd}(\omega) \tag{1.76}$$

$$\tilde{g}^{(j)}_{SS,k}(\omega) = \frac{\omega - \xi_k \hat{\sigma_z} + \Delta e^{i\phi_j \hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_x}{\omega^2 - \xi_k^2 - \Delta^2} \tag{1.77}$$

En combinant (1.75) et (1.76), on obtient une équation fermée sur $\tilde{G}_{dd}$.

$$\left(\omega + \epsilon_0 \sigma_z - t^2 \sum_{j,k} \tilde{g}^{(j)}_{SS,k}(\omega)\right) \tilde{\mathcal{G}}_{dd}(\omega) = \mathbb{I} \tag{1.78}$$

Il est intéressant de noter que la somme sur k de l'équation (1.78) reste finie dans la limite ou le gap est infini. Cette somme s'exprime simplement après transformation de la somme sur k en intégrale sur l'énergie. On a $\lim_{\Delta\to+\infty} \sum_{j,k} \tilde{g}^{(j)}_{SS,k}(\omega) = -\pi\rho(0)e^{i\phi_j\hat{\sigma_z}}\hat{\sigma}_x$, avec $\rho(0)$ la densité d'état dans l'état normal, à l'énergie de Fermi.

Ce terme fait entrer en jeu les éléments hors-diagonaux de $\tilde{\mathcal{G}}_{dd}$, c'est à dire des corrélations de paires. Le couplage hors diagonal peut être interprêté comme un gap effectif induit par la présence de ces supraconducteurs. A partir de (1.78), définissons l'Hamiltonien effectif du dot, dans la limite $\Delta \to +\infty$, $\mathcal{H}_\infty = \omega - (\tilde{\mathcal{G}}_{dd}(\omega))^{-1}$.

**Hamiltonien effectif dans la limite de gap infini**

$$\mathcal{H}_\infty = \epsilon_0\hat{\sigma_z} + \sum_j \Gamma_j e^{i\phi_j\hat{\sigma_z}}\hat{\sigma_x} \tag{1.79}$$

Où l'on a définit $\Gamma_j = \pi\rho(0)t_j^2$ le couplage effectif et $\sigma_{x,y,z}$ les matrices de Pauli.

### 1.2.5 Etats liés d'Andreev dans la limite de gap infini

Calculons explicitement ces caractéristiques pour le cas d'une jonction à deux terminaux, dans la limite de gap infini. Explicitement, on a :

$$\mathcal{H}_\infty = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \gamma_1 e^{-i\phi_1} + \gamma_2 e^{-i\phi_2} \\ \gamma_1 e^{i\phi_1} + \gamma_2 e^{i\phi_2} & -\epsilon_0 \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

Les énergies sont données par $E_\pm = \pm\sqrt{\epsilon_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1^2\gamma_2^2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$ et les états propres, à un choix de jauge près : $|\Psi_+\rangle = \begin{pmatrix} u \\ ve^{i\theta} \end{pmatrix}$ et $|\Psi_-\rangle = \begin{pmatrix} ve^{i\theta} \\ -u \end{pmatrix}$. Avec $u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{E_+}\right)}$ et $u^2 + v^2 = 1$.

Dans le cas symétrique (en bleu sur la figure 1.6 ), les énergies associées aux deux états d'Andreev se croisent lorsque $\phi = \pi$. Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (vert) ou $\epsilon_0 \neq 0$, les niveaux s'hybrident et un gap apparaît. On note que sous la transformation $\phi \longrightarrow -\phi$ et $\epsilon_0 \longrightarrow -\epsilon_0$, $E \longrightarrow -E$ et $\mathcal{I} \longrightarrow -\mathcal{I}$ . Les deux états donnent lieu à des courants opposés.

$$\mathcal{I}_+ = \frac{\mathrm{d}E_+}{\mathrm{d}\phi} = -\mathcal{I}_- = -\frac{\gamma_1\gamma_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\sqrt{\epsilon_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1^2\gamma_2^2\cos(\phi_2 - \phi_1)}} \tag{1.81}$$

Dans la limite ou $\epsilon_0 \gg \gamma_1, \gamma_2$, les états propres $|\psi\pm\rangle$ tendent vers les états propres de $\sigma_z$. Les états à zéro et une paire sont découplés et la dispersion est de plus en plus plate à mesure que $\frac{\gamma}{\epsilon_0} \longrightarrow 0$.
La forme des états propres présente une forte analogie avec celle des états propres de $\mathcal{H}_{BCS}$. Supposons en effet qu'il n'existe qu'un mode k et qu'on ne puisse avoir qu'un nombre pair

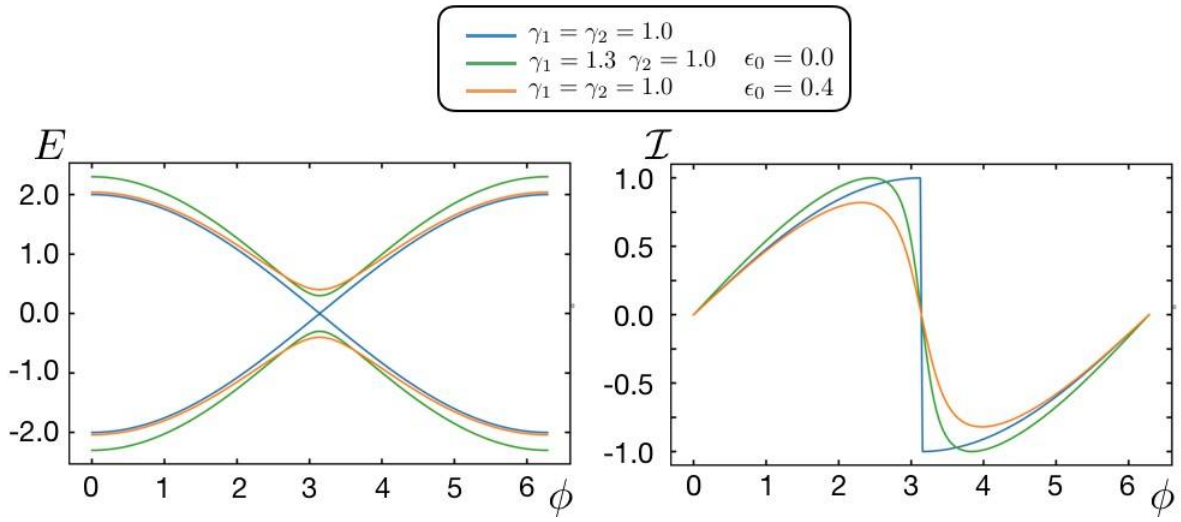



Figure 1.6: (a) Energie des états d'Andreev (b) Courant associé aux états d'énergie négative

d'électrons. Si le vide de quasiparticules est un état à une particule (Cf partie I), les états propres sont construits en appliquant un nombre impair d'excitation de Boglubov $|\Psi_+\rangle = \gamma^\dagger_{k,+}|\mathcal{V}\rangle = u_k|0\rangle - v_k|\uparrow\downarrow\rangle$ et $|\Psi_-\rangle = \gamma^\dagger_{k,-}|\mathcal{V}\rangle = v^*_k|0\rangle + u_k|\uparrow\downarrow\rangle$.

Dans le cas d'une jonction à d + 1 terminaux, les états liés d'Andreev donnent lieu à deux surfaces d'énergie opposées à d dimensions.

### 1.2.6 Gap infini et Hamiltonien bosonique

Comme le gap $\Delta$ est très grand devant toutes les énergies du problème, il n'est pas possible, dans cette limite, de créer des excitations de quasiparticules dans le système. Autrement dit, le dot ne peut contenir qu'un nombre pair (0 ou 2) d'électrons. Les paires d'électrons sont donc insécables et par conséquent se comportent à la manière de bosons, composites, qui ne peuvent cependant qu'être dans un état sur le dot .

On peut illustrer ce fait en notant que (1.79) peut s'exprimer en terme d'un opérateur $b^\dagger_0$, tel que $b^\dagger_0|0\rangle = |1\rangle$, $b_0|1\rangle = |0\rangle$, $b_0|0\rangle = 0$ et $(b^\dagger_0)^2|0\rangle = 0$. Où les états $|1\rangle, |0\rangle$ sont les états propres de $\sigma_z$. On a alors

$$\mathcal{H}_\infty = \epsilon_0(2b^\dagger_0 b_0 - 1) + \sum_j \Gamma_j e^{i\phi_j} b^\dagger_0 + \text{h.c} \tag{1.82}$$

Remarquons que comme les reservoirs supraconducteurs ont été intégrés dans la description physique de la jonction, le nombre de paires n'est plus conservé. Les supraconducteurs interviennent seulement dans les termes hors-diagonaux en tant que sources de paires d'électrons. Il est intéressant de noter que l'on peut retrouver cet Hamiltonien (dans la limite de gap infini) en considérant que : les supraconducteurs sont des réservoirs de bosons, qu'il sont couplés au dot par des termes $\Gamma_j$ et que le nombre de paires contenues dans chaque réservoirs

est infini. Un tel Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_j \Gamma_j b_j^\dagger b_0 + \text{h.c} + \epsilon_0(2b_0^\dagger b_0 - 1) \tag{1.83}$$

### 1.2.7 Représentation de Fock

Les états de base de ce système, pour un nombre de paires fixé, sont de la forme $|\Psi\rangle = |\{N_i\}_{i=1,d+1}, \nu\rangle$. Où $N_i$ est le nombre de paires dans le supraconducteur $i$ et varie de 0 à $\mathcal{N}$. Le paramètre $\nu$ varie de 0 à 1 et compte le nombre de paires au sein du point quantique. Comme le nombre de paires total est supposé conservé, ces états peuvent être paramétrisés par d variables. Les états de base d'une jonction Josephson à point quantique de d + 1 supraconducteurs peuvent être représentés par un réseau bipartite (degré de liberté $\nu$ du dot) de dimension d. Cette analogie a été suggérée pour la première fois par Ferrell et Prange [32] dans le cas plus simple d'une jonction tunnel. Les liens de ce réseau étant alors associés aux différents amplitude de probabilité de saut d'une paire entre le point quantique et un supraconducteur quelconque. Dans la construction de cette analogie, il est éclairant de réécrire l'Hamiltonien 1.83 sous une forme développée. Les couplages apparaissent explicitement et la correspondance avec le réseau de Fock devient explicite. Dans le cas d'une jonction à trois terminaux, l'Hamiltonien s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \epsilon_0(2b_0^\dagger b_0 - 1) \\ &+ \sum_{N,N_3} \Big[\Gamma_1 e^{i\phi_1} |N, N_3, \nu = 1\rangle \langle N-1, N_3, \nu = 0| + \mathbf{h.c} \\ &+ \Gamma_2 e^{i\phi_2} |N, N_3, \nu = 1\rangle \langle N+1, N_3, \nu = 0| + \mathbf{h.c} \\ &+ \Gamma_3 e^{i\phi_3} |N, N_3, \nu = 1\rangle \langle N, N_3+1, \nu = 0| + \mathbf{h.c}\Big]\end{aligned} \tag{1.84}$$

Je m'intéresserai ici aux cas à deux et trois terminaux.
Dans le premier cas, d = 1. En définissant

$$\hat{N} = \hat{N}_2 - \hat{N}_1 \tag{1.85}$$

la différence de nombre de paires entre les deux supraconducteurs, la jonction peut se représenter par une chaine bipartite d'axe $\hat{N}$.

Dans le second cas, une dimension supplémentaire est ajoutée et le réseau est de type 2d bipartite. On le représentera sous forme d'un réseau nid d'abeille, avec le choix de variables suivant :

$$\hat{N} = \hat{N}_2 - \hat{N}_1 \tag{1.86}$$

$$\hat{M} = 2\hat{N}_3 - \hat{N}_2 - \hat{N}_1 \tag{1.87}$$

Considérons le cas à une dimension. Si le nombre de paires est infini, la jonction est représentée par une chaîne bipartite infinie. La symétrie de translation étant complète, les états propres prennent la forme d'états de Bloch de la forme :

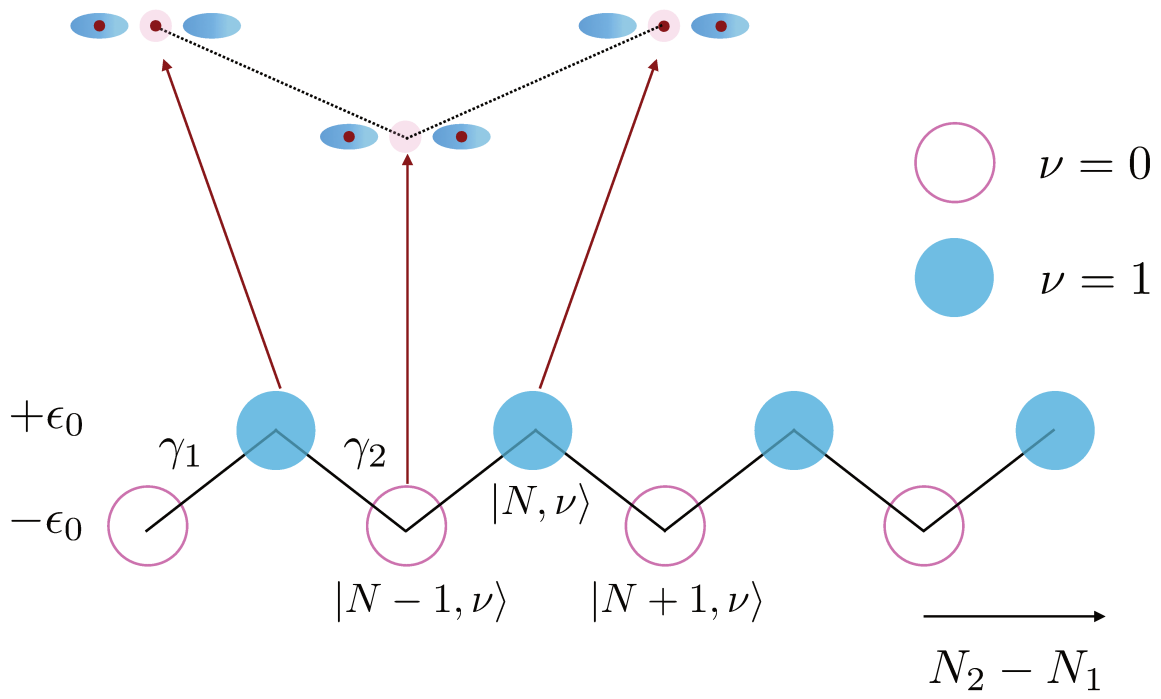



Figure 1.7: Représentation de Fock d'une jonction avec dot.

**Etat propre de la chaîne infinie**

$$|\Psi(\{\phi\}_i)\rangle = \sum_N e^{i\phi\frac{N}{2}} \Big\{ a(\phi)\,|N, \nu = 0\rangle + b(\phi)\,|N, \nu = 1\rangle \Big\} \tag{1.88}$$

On reconnaît là une forme bien connue des modèles de liaisons fortes. Avec l'analogie suivante :

$$\hat{N} \equiv \text{position } x_n \tag{1.89}$$

$$\phi \equiv \text{vecteur d'onde } \vec{k} \tag{1.90}$$

( [33], [34]) Avec une jonction tunnel, le couplage entre les deux supraconducteurs est direct. Les paires passent d'un supraconducteur à l'autre sans intermédiaire. Cette jonction se représente par une chaîne simple dans l'espace de Fock. Avec la forme de fonction d'onde établie en (1.88), on peut montrer que l'énergie des ces états propres est donnée par $E(\phi) = 2\gamma\cos(\phi)$, soit un courant Josephson $I \propto \sin(\phi)$. Cette analogie avec des modèles sur réseau suggère la possibilité d'explorer ces jonctions Josephson sous l'angle de la topologie.

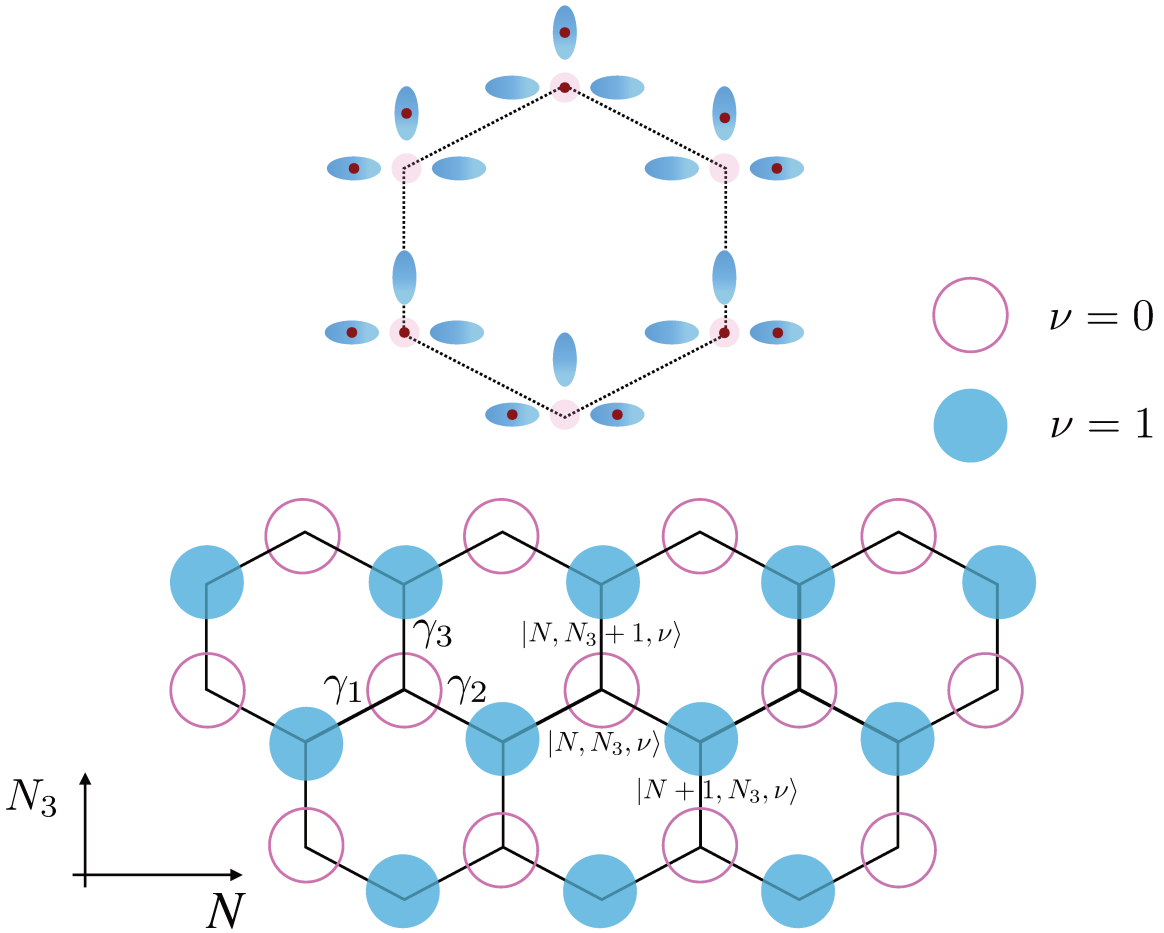



Figure 1.8: Représentation de Fock d'une tri-jonction avec dot dans la limite gap infini. Le réseau, bipartite de coordination 3 est analogue à celui du graphène.

### 1.2.8 Topologie et jonction Josephson

La notion de phase géométrique ( [35]), introduite initalement dans un contexte d'évolution quantique adiabatique, a depuis été appliquée dans de nombreux domaines de la physique. On trouve des applications en matière condensée, en physique moléculaire mais également en physique classique avec l'exemple du pendule de Foucault. Lorsqu'un système quantique évolue adiabatiquement d'un instant $t = 0$ à un instant $t = T$, sa fonction d'onde reste la même à une phase près $\Psi(T) = e^{i\theta}\Psi(0)$. Cette phase $\theta$ peut être séparée en deux phases de nature distinctes. La première, appelée *phase dynamique*, est la phase usuelle due à l'energie de l'état propre que la fonction d'onde accumule au cours du temps. Elle s'obtient en intégrant l'énergie $E(t)$ sur le temps d'évolution. La phase géométrique quant à elle dépend uniquement du chemin suivi dans l'espace des paramètres. Si le chemin parcouru est cyclique, cette phase est donné par :

$$\theta_{Berry} = i \oint_{\mathcal{C}} \langle \Psi | \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\lambda} \rangle \mathrm{d}\lambda \tag{1.91}$$

L'intégrand de cette expression s'appelle la connexion de Berry. Lorsque la dimension de l'espace est supérieure ou égale à deux, l'intégrale peut être exprimée en utilisant le théorème

de Stokes.

$$\theta_{Berry} = \int\int_{\mathcal{S}} \Omega_\lambda \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{1.92}$$

La quantité $\Omega_\lambda$ qui apparait ici est la courbure de Berry. Elle est invariante de jauge et peut être observée expérimentalement [36]. Tout comme la connexion de Berry, cette quantité est purement géométrique. Le cas d'un système à deux niveaux permet d'illustrer ce fait.
Soit $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$, l'espace de Hilbert associé à ce système. Les fonctions d'ondes sont de la forme $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Comme les observables physiques ne dépendent pas de la phase globale de l'état quantique, il suffit de deux paramètres réels pour caractériser un état. Il est d'usage de représenter l'ensemble des vecteurs d'état du système sur une sphère appelée sphère de Bloch [37]. Sur cette sphère, chaque point est associé à un état $|\psi\rangle$ à une phase près. En coordonnées sphériques, on associe donc un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ de module 1 à un état quelconque du système. En particulier, les deux états propres d'un Hamiltonien de la forme 1.79 prennent la forme suivante : $|\psi_-\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ et $|\psi_+\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$. Comme l'illustre la figure 1.10, la phase de Berry est donc la phase acquise par la fonction d'onde lorsqu'elle est transportée parallèlement le long d'un chemin fermé $\Gamma$. Sur la sphère de Bloch, cette phase s'interprète comme l'angle solide associé à la surface $\mathcal{S}$ sur laquelle s'appuie ce chemin.

Dans les systèmes solides, un tel modèle représente un réseau infini bipartite. Dans ce cas, la périodicité du réseau impose que les fonctions d'onde soit des fonctions de Bloch, caractérisés par la quasi-impulsion $\vec{k} \in \mathcal{ZB}$. Il est alors possible de définir un invariant topologique.

$$\mathcal{C} = \int\int_{\mathcal{ZB}} \Omega_\lambda \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{1.93}$$

Ce nombre topologique, appelé Nombre de Chern, s'exprime en fonction de la courbure de Berry qui est une quantité définie localement. Lorsque le vecteur d'onde $\vec{k}$ parcours la zone de Brillouin, le vecteur $\vec{h}$ et par conséquent l'état propre $|\psi\rangle$ couvre une zone de la sphère de Bloch. Si cette zone est une partie de la sphère, elle peut être continuement déformée pour se réduire à un point. Le nombre de Chern est nul. Si la sphère de Bloch est totalement recouverte, le nombre de Chern est égal à 1.
La transition d'une phase $\mathcal{C} = 0$ à $\mathcal{C} = 1$ est intimement lié à la présence de dégénérescences dans le spectre de $\mathcal{H}$. En effet, en présence d'une dégénérescence il n'est plus possible de définir un espace propre associé à un état donné. On trouve un exemple de cette situation dans le cas du graphène où pour les points $K$ et $K'$ les deux bandes se touchent. Ces points portent le nom de points de Dirac. Cette notion se généralise en dimension supérieure et ces dégénérescences sont appelées points de Weyl. Le cas d'une dimension d'espace égale à 1 est un cas un peu particulier. Dans ce cas on ne peut définir de nombre de Chern comme 1.93 mais il est toujours possible d'observer des transitions topologiques caractérisées par la valeur de la phase de Zak.

Récemment, les jonctions Josephson à plusieurs terminaux ont été proposées comme système dans lequel il est possible d'observer des transitions topologiques [38] [39] [40]. Il a en effet été montré que des points de Weyl [41] peuvent apparaître dans le spectre d'Andreev de ces jonctions. Dans cette vision, les phases des supraconducteurs jouent le rôle de

quasimoment et le spectre des états d'Andreev devient l'analogue de la structure de bande d'un solide classique. En raison de l'invariance de jauge propre à ces systèmes, une jonction à d + 1 terminaux engendre une structure de bande à d dimension. De plus, la possibilité de contrôler expérimentalement les phases supraconductrices permet d'étudier ces systèmes topologiques sous un angle différent, inaccessible dans les système solides. La topologie de ces jonctions peut être sondée en transport par la mesure d'une transconductance.

Dans une jonction avec dot, la limite de gap infini permet d'illustrer simplement comment une transition topologique peut avoir lieu. Tout d'abord, notons que l'Hamiltonien effectif dans la limite de gap infini peut être écrit comme suit :

$$\mathcal{H}_\infty = \vec{h}.\vec{\sigma} \tag{1.94}$$

Avec $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et $\vec{h} = \left(\sum_j \gamma_j \cos(\phi_j), \sum_j \gamma_j \sin(\phi_j), \epsilon_0\right)$
Les points de Weyl sont observés pour des jonctions à $d > 3$ terminaux. Je prend comme exemple ici le cas un peu différent d'une jonction à trois terminaux aux bornes de laquelle on applique un rayonnement micro-onde déphasé de $\chi$.

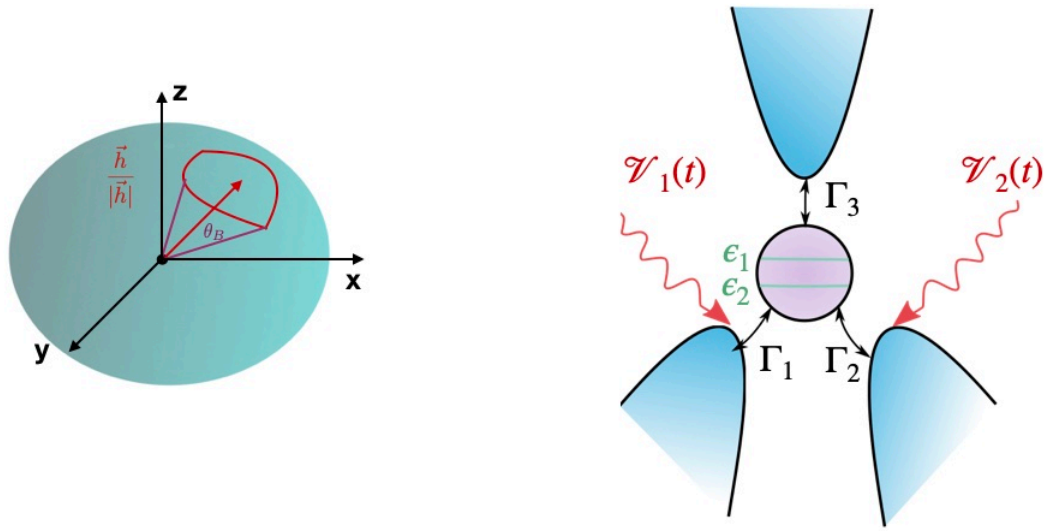



Figure 1.9: (a) La phase de Berry vue comme l'angle solide associé à la surface sur laquelle s'appuie la trajectoire du vecteur $\vec{h}$ (b) Schéma de la trijonction avec dot sous irradiation micro-onde

Il a été montré [23] que ce système pouvait réaliser le modèle de Haldane. Le déphasage $\chi$ jouera le rôle d'une troisième variable de phase. Le rayonnement micro-onde est décrit classiquement par deux potentiels périodiques $V_1(t) = V_1 \sin(\omega t + \chi_1)$ et $V_2(t) = V_2 \sin(\omega t + \chi_2)$. La relation Josephson [18] implique que les phases associées aux terminaux 1 et 2 oscillent également à la fréquence $\omega$. En raison de l'invariance de jauge, on posera $\phi_3 = 0$.

En utilisant le développement à haute fréquence de la théorie de Floquet sur l'Hamiltonien $\mathcal{H}_\infty(t)$ ( [42]), on obtient un Hamiltonien effectif qui s'écrit :

**Hamiltonien effectif à haute fréquence**

$$\mathcal{H}_\infty = \vec{\tilde{h}}.\vec{\sigma} \tag{1.95}$$

$$\vec{\tilde{h}} = \left( \sum_j \gamma_j \cos(\phi_j), \sum_j \gamma_j \sin(\phi_j), \epsilon_0 + \frac{\gamma_1\gamma_2 b_1 b_2}{\omega} \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\chi) \right) \tag{1.96}$$

Le terme en plus dans $h_z$, qui dépend maintenant des phases $\phi_1$ et $\phi_2$ est analogue à ce qu'on obtient en ajoutant un couplage entre second voisins sur un réseau de graphène [23]. La structure de bande à deux dimensions de la jonction peut présenter des points singuliers, de Dirac, pour lesquels les deux bandes se croisent et autour desquels se concentre la courbure du Berry associé à ces bandes. Comme les énergies propres de ce système sont données par $E_\pm = \pm\sqrt{\epsilon_0^2 + |\Gamma|^2}$, les bandes se croisent dès lors que $\epsilon_0 = 0$ et $|\Gamma| = |\gamma_1 e^{i\phi_1} + \gamma_2 e^{i\phi_2} + \gamma_3| = 0$. Supposant $\epsilon_0 = 0$, la deuxième égalité montre qu'il ne peut exister de points de Dirac que si les points $z_1 = \gamma_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = \gamma_2 e^{i\phi_2}$ et $z_3 = \gamma_3$ forment un triangle dans le plan complexe. Ceci impose la contrainte suivante :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_3} - 1 < \frac{\gamma_2}{\gamma_3} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + 1 \tag{1.97}$$

Ces points sont obtenus pour $\phi_1 = -\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ dans le cas symétrique $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$. Ici, les phases $\phi_1$ et $\phi_2$ ou toute paire de combinaison linéaire de ces variables jouent le rôle des deux vecteurs d'onde $k_x$ et $k_y$.

La zone de Brillouin est parcourue lorsque chaque variable de phase parcourt un intervalle

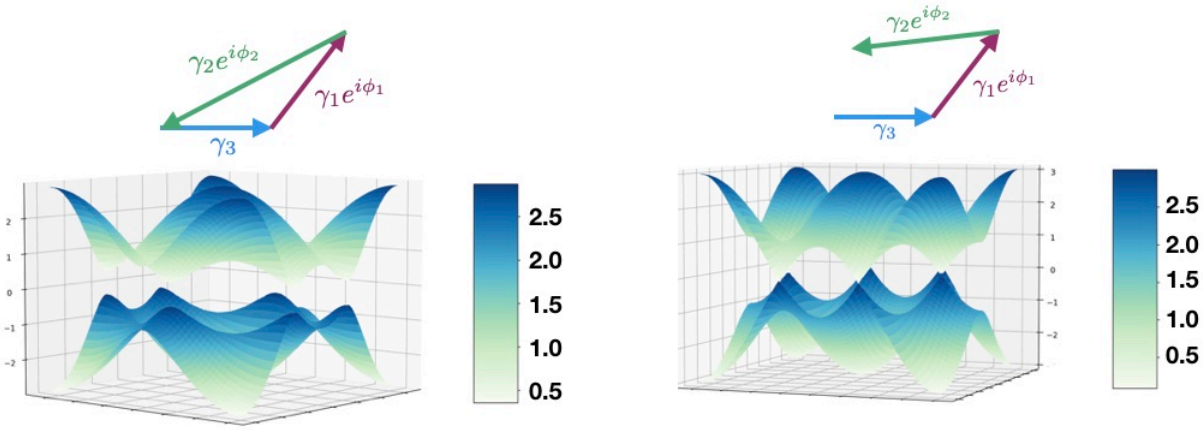



Figure 1.10: (a) Spectre des états liés d'Andreev dans la plan $\{\phi_1 - \phi_2, \phi_1 + \phi_2\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$ (b) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$

de $2\pi$. La dépendance en $\phi_2 - \phi_1$ de $h_z$ implique que lorsque la zone de Brillouin est parcourue

entièrement, le signe de la composante $h_z$ ( qui correspond à un paramètre $\epsilon_0$ effectif ) peut changer. Ceci se produit dès que :

$$\epsilon_0 < \frac{\gamma_1\gamma_2 b_1 b_2}{\omega} \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\chi) \tag{1.98}$$

On sait que le gap ne peut se fermer qu'aux points $\phi^*_\pm = \pm\frac{2\pi}{3}$. Or , $\sin(\phi^*_\pm) = \pm\sin(\phi^*_\pm)$. Le gap ne peut donc se fermer qu'à un seul des points $\phi^*$ à la fois. Dès lors que le critère (1.98) est satisfait, alors un gap se ferme en parcourant la zone de Brillouin et $h_z$ change de signe. Ce changement de signe se traduit par une couverture complète de la sphère de Bloch que l'on peut caractériser par le nombre de Chern.

$$\mathcal{C} = \int\int \Im\left\{\langle\partial_{\phi_1}\Psi|\partial_{\phi_1}\Psi\rangle\right\} \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_2 \tag{1.99}$$

A $b$ et $\omega$ fixés, on observe que l'un des gap se referme puis s'ouvre lorsque $\chi$ varie. Le nombre

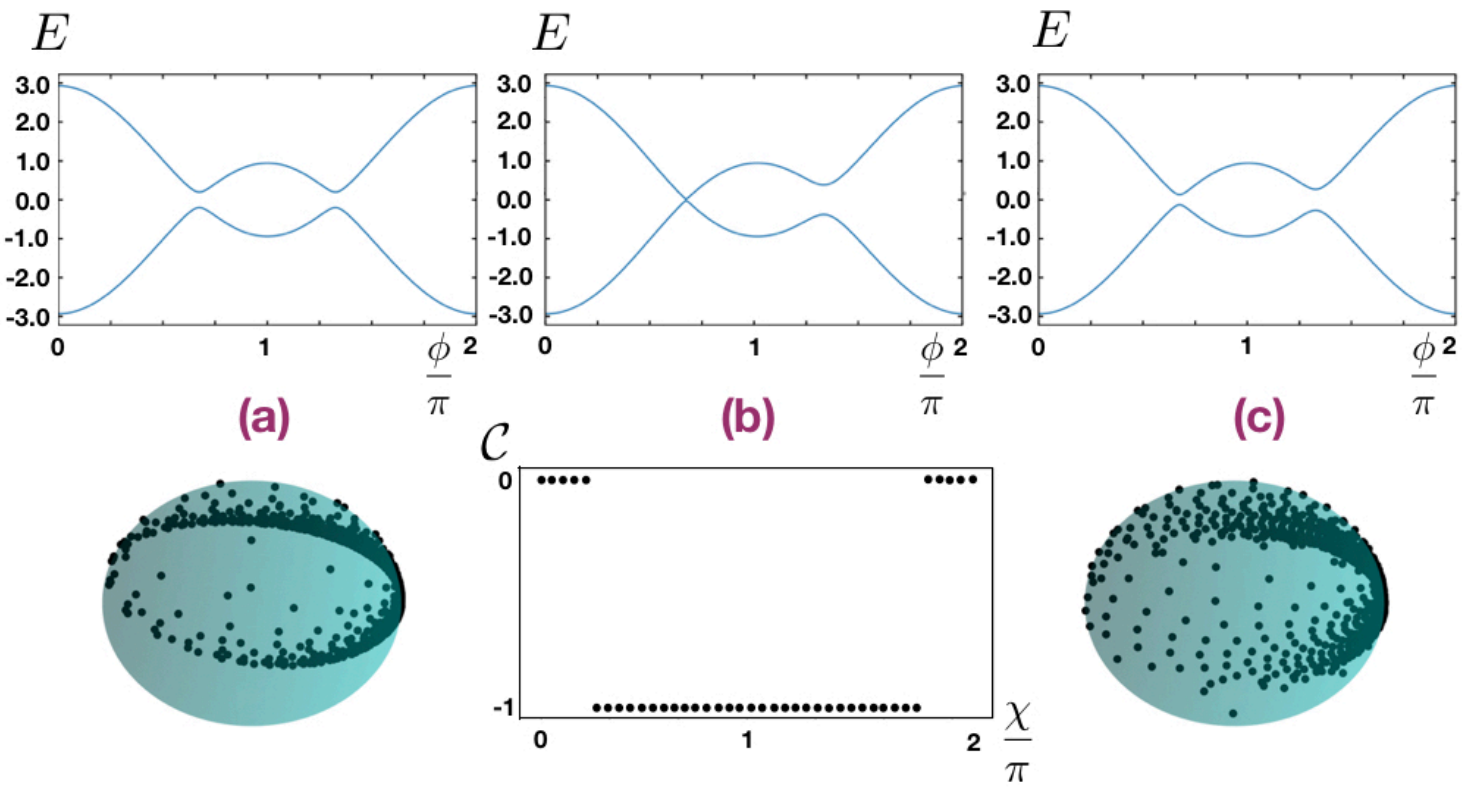


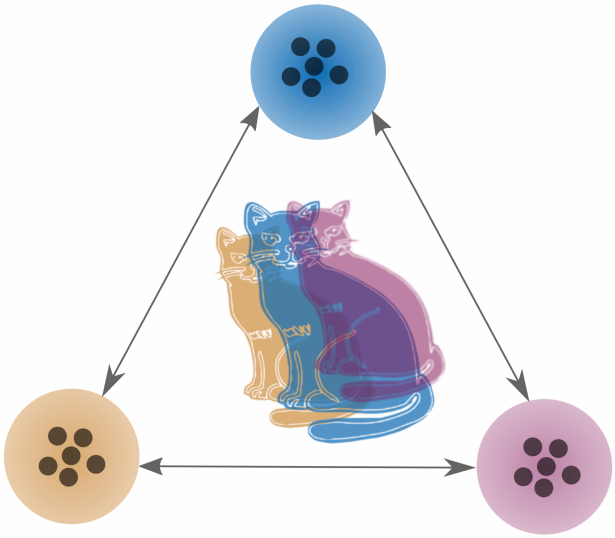

Figure 1.11: Haut : Spectre d'Andreev sur la ligne $\phi_1 = -\phi_2$, Bas : Sphère de Bloch et Nombre de Chern en fonction de la phase $\chi$. (a) $\chi = 0.0$, Seul un hémisphère de la sphère est recouvert (b) $\chi \simeq 0.3\pi$ (c) $\chi = 0.45\pi$, La sphère de Bloch est couverte.
Les paramètres fixes sont : $\omega = 0.6$, $\epsilon_0 = 0.2$ , $b = 0.4$ , $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.0$

de Chern passe de 0 à -1 au point critique de cette transition.

# 2

# Formation d'états N00N multi-modes

*Les systèmes de bosons sur réseau permettent le contrôle précis d'un ensemble de paramètres parmis lesquels se trouve l'interaction. Je considère ici différentes géométries à 2 , 3 , 4 et 5 sites. En se plaçant dans une configuration des potentiels chimiques particulière et en forçant périodiquement l'interaction à résonance, les systèmes décrit exhibent dynamiquement des états N00N à 2 , 3 , 4 et 5 modes. L'apparition de ces états résulte d'un ensemble de séparation d'échelles successives au sein du spectre causé d'une part par le forçage périodique et d'autre part par le choix des paramètres du système.*



## Sommaire

**2.1 Introduction** . . . . . **43**
2.1.1 Etats N00N et mesure de précision . . . . . 43
2.1.2 Modèle bosonique et régime d'étude . . . . . 45
**2.2 Transfert de paires à l'équilibre** . . . . . **46**
**2.3 Méthode numérique** . . . . . **47**
**2.4 Formations d'états N00N dans une jonction bosonique** . . . . **49**
**2.5 Formation d'états N00N multi-modes dans une tri-jonction bosonique** . . . . . **49**
2.5.1 Observation d'états N00N à trois modes . . . . . 49
2.5.2 Effet d'une asymétrie des couplages tunnels . . . . . 55
**2.6 Généralisation à un nombre de modes $M > 3$** . . . . . **55**
**2.7 Signature des états N00N et de paires corrélées** . . . . . **58**
2.7.1 Transfert de paires corrélées . . . . . 60
2.7.2 Mesure d'états N00N . . . . . 62
**2.8 Développement de Floquet** . . . . . **66**
2.8.1 Dérivation de l'Hamiltonien effectif . . . . . 66
2.8.2 Limite asymptotique . . . . . 69
**2.9 Analyse de la formation d'états N00N par réduction d'échelles** **71**
2.9.1 Limite $\mu \longrightarrow \infty$ . . . . . 72
2.9.2 Perturbation en $\frac{J^2}{\mu}$ . . . . . 74
2.9.3 Restriction de la dynamique au secteur de basse énergie . . . . . 75
2.9.4 Au voisinage des points de CDT . . . . . 78
**2.10 Conclusion** . . . . . **81**

# 2.1 Introduction

## 2.1.1 Etats N00N et mesure de précision

La précision d'une mesure physique est fondamentalement limitée par les lois quantiques sous-jacentes. Ce fait peut être appréhendé simplement en analysant ce qu'il se passe dans un interféromètre. Dans le schéma typique d'une expérience d'interférométrie, on cherche à mesurer une différence de phase entre deux signaux. Néanmoins, les fluctuations du nombre de bosons $\Delta n$ et de la phase $\Delta\phi$ sont liés par la relation d'incertitude d'Heisenberg. La précision de la mesure est alors limitée par les propriétés de l'état source utilisé et notamment les fluctuations $\Delta n$ qui lui sont associées. Il existe deux états quantiques pour lesquels cette conjugaison entre $n$ et $\phi$ apparaît clairement.

- L'état de Fock. Soit $b^\dagger$ l'opérateur de création associé à un mode bosonique, un état de Fock $|n\rangle$est définit comme étant l'état propre de l'opérateur $\hat{n} = b^\dagger b$. Le nombre n de bosons dans un état de Fock est fixé et sa phase est complètement indéterminée. En Optique, cet ensemble d'états constitue les états propres du champ libre et n désigne le nombre de photons de chaque mode. Dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard, les états $|n\rangle$ sont états propres de $\mathcal{H}$ dans la limite $U \longrightarrow \infty$

$$|n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{2.1}$$

- L'état cohérent. C'est un état à phase fixée pour lequel la relation d'incertitude d'Heisenberg atteint son minimum. C'est typiquement le type d'état qui permet de décrire un laser. C'est également l'état fondamental du modèle de Bose-Hubbard dans la limite $U \longrightarrow 0$.

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha b^\dagger + \alpha^* b} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{2.2}$$

Dans les expériences d'optique classique, l'état quantique associé au laser est un état cohérent de la forme (Eq. 2.2). On peut montrer que pour ce type d'état, les fluctuations du nombre de bosons sont données par $\Delta n = \sqrt{n}$, ce qui limite la précision en phase à $\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ce maximum de précision est usuellement appelé la limite quantique standard (SQL). Cette limite est liée uniquement au type d'état utilisé pour sonder le système. En utilisant des états pour lesquels les différents bosons ne sont pas complètement indépendants, il est possible de réduire les fluctuations de phase en changeant les fluctuations $\Delta n$. Il a été montré ( [43]) que pour une mesure de phase, la limite absolue est $\Delta\phi = \frac{1}{N}$, avec N le nombre moyen de bosons. Cette limite, appelée **Limite d'Heisenberg** est atteinte pour l'état N00N ( [44]), de la forme suivante :

$$|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N0\rangle + |0N\rangle) \tag{2.3}$$

L'amélioration de la précision en phase résulte du fait que lorsque cet état est transporté d'une valeur de phase $\phi$ sur une des branches de l'interféromètre, l'état de sortie prend la forme : $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|N0\rangle + e^{iN\phi} |0N\rangle\right)$. L'intensité de sortie oscille alors avec une période $\frac{1}{N}$ fois plus petite que lorsque l'état initial est un état cohérent. Que ce soit sans des interféromètres atomiques ou à base de photons, l'utilisation de ces états quantiques intriqués [45] [46] permet d'aller au-delà de la limite quantique standard. Pour des problèmes multi-paramétriques, il est nécessaire de généraliser ce type d'états. La généralisation la plus simple consiste à construire une superposition à M modes de N bosons corrélés. Soit un état de la forme suivante :

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|N000...\rangle + |0N00...\rangle + |00N0...\rangle + |000N...\rangle) \tag{2.4}$$

Ce type d'état peut en principe permettre de mesurer $d-1$ phases. Même s'il n'est a priori pas évident qu'il soit possible d'atteindre la limite d'Heisenberg pour chaque variable de phase ( [47]) mesurée, ces états sont particulièrements intéressants pour des problèmes multi-paramétriques.
Avec des photons, plusieurs méthodes ont été proposés pour réaliser ce type d'états [48] [49],

utilisant des élements d'Optique non-linéaire.

Dans les gaz de bosons ultra-froids, la non-linéarité naturellement présente en raison des interactions entre les atomes est un atout pour préparer le système dans des états intriqués [50]. En particulier, la jonction bosonique a été proposée comme plateforme permettant de préparer des états N00N [51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58]. Parmi les protocoles de préparation des états, on peut distinguer deux cas :

- La phase associée à l'état du système est contrôlée et réglée de sorte à prendre la valeur $\pi$. Pour cette valeur de phase, le système est dans une phase instable qui, correspond à la séparatrice dans l'espace des phases classique. En laissant ensuite le système évoluer, l'état tend vers une superposition de type N00N.( [59])

- Des paramètres du système sont modulés dans le temps et ceci donne lieu à des états N00N de manière périodique.

La première méthode à été généralisée pour des jonctions à M sites et pour préparer des états N00N à multiples composantes. Néanmoins, ce type de protocole nécessite un contrôle très précis des phases induites et est en pratique difficile à réaliser .
Dans le second type de méthode, pour atteindre l'état N00N le système doit passer par de plus en plus d'états à mesure que N croît ( [60], [61]). On s'attend alors à ce que le temps de récurrence de l'état N00N augmente exponentiellement avec le nombre de bosons.

En considérant un système de N bosons répartis sur M sites, je propose dans ce chapitre de générer des états de la forme 2.4 par une méthode permettant de réduire drastiquement l'espace des états auxquels le système peut dynamiquement accéder. Dans ce protocole, les énergies de sites sont supposées très grandes devant les couplages tunnels. La combinaison de cette grande différence d'énergie avec une modulation résonnante de l'interaction permet de générer une séparation d'échelles au sein du système. Après avoir observé numériquement la formation de ce type d'états dans des modèles à 2, 3, 4 et 5 sites avec un nombre de bosons variant de 2 à 10, je montrerai comment cette séparation d'échelles permet de contraindre la dynamique du système à rester confinée dans un sous-espace d'états contenant les états cibles composant l'état N00N à M modes.

### 2.1.2 Modèle bosonique et régime d'étude

Le système de bosons sera décrit à l'approximation de Bose-Hubbard dans différentes géométries pour $M \geq 2$. Les énergies de sites sont fixées à $\pm\mu$ par rapport à une énergie de référence, celle du site *source*. En particulier, on se place dans le régime $\mu \gg J_{ij}$ ou $J_{ij}$ est l'amplitude de saut entre les sites i et j. Après avoir décrit comment cette configuration à $U$ statique permet d'engendrer des transferts de paires corrélées dans le système, je me concentre sur le cas de la jonction triangulaire ou il sera démontré la possibilité de préparer des états N00N multi-modes. La dynamique de cette jonction dans la limite classique et

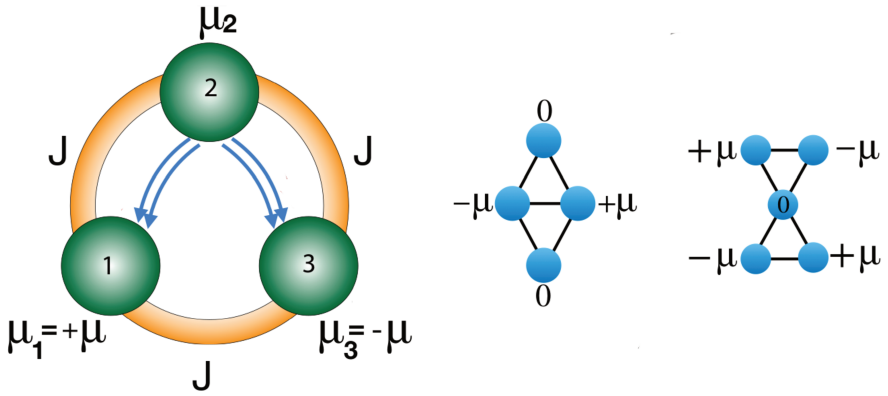



Figure 2.1: Schéma de la jonction triangulaire. J est l'amplitude tunnel. $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 0$ et $\mu_3 = -\mu$ sont les potentiels chimiques des sites 1, 2 et 3. Les flèches bleues représentent le mouvement de paires de bosons induit par le forçage périodique. Insert : Géométrie à 4 et 5 sites avec les configurations de potentiel utilisées pour générer des états N00N.

quantique a déjà été étudiée sous divers aspects [62] [63] [64] [65].

Pour générer les états N00N, l'interaction sera forcée périodiquement à la fréquence $\hbar\omega = 2\mu$. Cette condition de résonance engendre également une dynamique de paires au sein de la jonction. La généralisation de cet effet à différentes géométries sera montrée pour 4 et 5 sites. L'Hamiltonien du système s'écrit :

$$\begin{aligned} H(t) &= -\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{M} \left( J_{ij}\, a_j^\dagger\, a_i + H.c. \right) + \\ &+ \left( U_0 + \frac{U_1}{2}\sin(\omega t) \right) \sum_{i=1}^{M} \hat{n}_i\,(\hat{n}_i - 1) - \sum_{i=1}^{M} \mu_i\, \hat{n}_i \ , \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $a_i^\dagger$ l'opérateur de création d'un boson au site i et $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$. $U_0$ est la valeur moyenne de l'interaction. $U_1$ est l'amplitude du forçage et les $\mu_i$ sont les potentiels chimiques des sites bosoniques.

## 2.2 Transfert de paires à l'équilibre

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas ou l'interaction est indépendante du temps $\mathcal{U}_1 = 0$. En raison de la configuration des potentiels chimiques, les états $|n_1, n_2, n_3\rangle$ et $|n_1+1, n_2-2, n_3+1\rangle$ sont dégénérés pour une interaction $U_0 = 0$. En imposant la contrainte $\mu \gg J_{ij}, \mathcal{U}_0$, il est possible de générer des oscillations de Rabi quasi-parfaites entre ces deux états. On réalise ainsi un transfert de paires du site 2 vers les 1 et 3. Les oscillations de Rabi obtenues sont quasi-parfaites au sens ou il est nécessaire d'ajuster très finement le potentiel chimique $\mu_2$ pour régler la dégénérescence et atteindre une fidélité $F$ égale à 1. Considérons le transfert d'une paire de boson de l'état initial $|\Psi_i\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle$ à l'état final $|\psi_f\rangle = |n_1+1, n_2-2, n_3+1\rangle$. Le passage de $|\Psi_i\rangle$ à $|\Psi_f\rangle$ est un processus du second ordre faisant intervenir les états virtuels

suivants : $|\psi_{l_1}\rangle = |n_1+1, n_2-1, n_3\rangle$ et $|\psi_{l_2}\rangle = |n_1, n_2-1, n_3+1\rangle$. En traitant les termes de saut en perturbation au second ordre en $\frac{J^2}{\mu}$ on trouve finalement :

$$J_{\text{eff}}^{II} = -\frac{J^2 U_0 \left(\mu^2 + \mu_2^2 + 2U_0^2 + 3\mu_2 U_0\right)}{\left(-\mu+\mu_2+U_0\right)\left(-\mu+\mu_2+2U_0\right)\left(\mu+\mu_2+U_0\right)\left(\mu+\mu_2+2U_0\right)} \tag{2.6}$$

Pour $\mu_2 = 0$ et une interaction $U_0$ faible, on a $J_{\text{eff}}^{II} \simeq -J^2U_0/\mu^2$. De manière générale l'expression 2.6 montre que l'amplitude effective de saut de paires s'annule dès lors que $U_0 = 0$. L'optimum de la résonance entre les deux états qui diffèrent d'une paire d'atomes

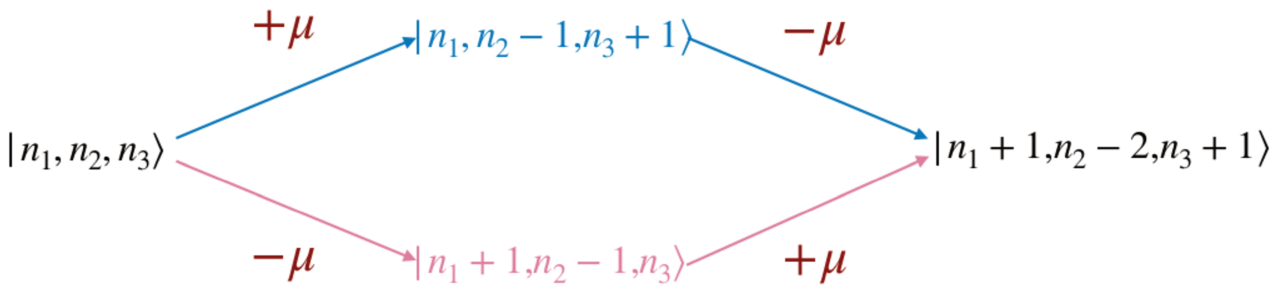



Figure 2.2: Schéma d'interférence pour le transfert d'une paire non-locale, du site 2 vers les sites 1 et 3.

est obtenu au niveau des anti-croisements du spectre. Au voisinage de ces anti-croisements, les états diffèrent légèrement des états $|0, N, 0\rangle$ and $|1, N-2, 1\rangle$. On observe ainsi sur longues échelles de temps des oscillations de Rabi de fidélité très proche de 1.

Dans ce régime, il est important de remarquer que l'interaction doit être très grande devant l'amplitude effective $J_{\text{eff}}^{II}$. Cette condition limite le nombre de paires transférées. Il n'est donc pas possible de construire de transfert cohérent d'un grand nombre de paires corrélées de cette manière. Nous verrons en section 2.7.2 comment détecter la présence de cette superposition d'états. Néanmoins, ce calcul donne un indice sur la procédure à suivre. Etonnamment, nous avons vu que le terme d'interaction était nécessaire pour générer un transfert de paires dans ce système. Cette même interaction limite également le nombre de paires transférables. Dans la section suivante, nous verrons comment un forçage périodique de l'interaction permet de générer des transferts de paires multiples dans cette jonction et d'atteindre des superpositions quantiques remarquables.

## 2.3 Méthode numérique

Dans ce chapitre, les systèmes de bosons seront étudiés numériquement sous deux angles différents.

- La dynamique de la fonction d'onde à partir de l'état initial $|0N0\rangle$ dictée par l'Hamiltonien complet dépendant du temps.
- La diagonalisation d'un Hamiltonien effectif, indépendant du temps, obtenu par la théorie de Floquet et décrivant la dynamique lente du système.

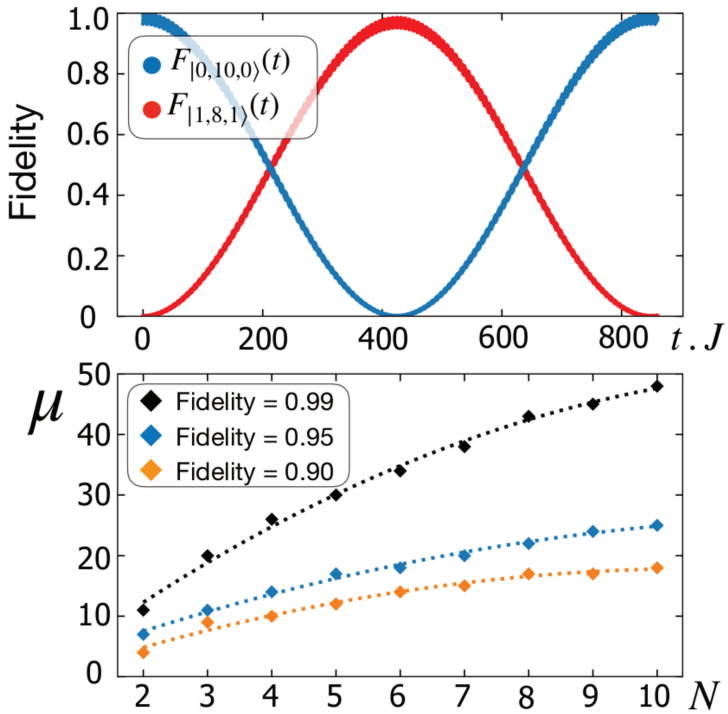



Figure 2.3: Haut : Oscillation de Rabi de la fidélité $F_{|1,8,1\rangle} = |\langle 1,8,1|e^{-iHt}|0,10,0\rangle|^2$ et $F_{|0,10,0\rangle} = |\langle 0,10,0|e^{-iHt}|0,10,0\rangle|^2$. Les anti-croisements du spectre d'énergie font apparaître une échelle de temps longue à laquelle se superpose une échelle plus courte associée aux processus à une particule. Les paramètres sont : $\mu = 48$ , $U_0 = 0.9$, $\mu_2 = 7.635$ (en unité de $J$). Bas : Les lignes en pointillés indiquent le potentiel chimique $\mu(N)$ requis pour atteindre une fidélité donnée après optimisation de $\mu_2$.

Dans les deux cas, l'Hamiltonien bosonique est construit en utilisant les méthodes standard ( [66] [67] [68]) de représentation numérique d'états de Fock. En revanche, l'évolution de la fonction d'onde requiert un peu plus de précaution dans le cas d'un Hamiltonien dépendant du temps. Pour ce faire l'évolution est décomposée en un ensemble de $N$ pas de temps discrets $\Delta t$, soit $U(t,0) = U(t,t_N)U(t_N,t_{N-1})...U(t_1,0)$ avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. L'Hamiltonien $\mathcal{H}(t)$ sera approché par une simple fonction en escalier, prenant les valeurs $\mathcal{H}(j\Delta t)$ aux temps $t_j = j\Delta t$ avec $\Delta t = 0.01$. Chaque opérateur d'évolution est ensuite décomposé en utilisant la formule de Trotter dépendente du temps [69], soit :

$$\mathcal{T}\exp\left(-i\int_t^{t+\Delta t}(H_1(\tau)+H_2(\tau))\mathrm{d}\tau\right) \simeq \mathcal{T}\exp\left(-i\int_t^{t+\Delta t}H_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathcal{T}\exp\left(-i\int_t^{t+\Delta t}H_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{2.7}$$

## 2.4 Formations d'états N00N dans une jonction bosonique

La formation d'états N00N dans une jonction bosonique a déjà été proposé dans [58] et [60]. Je considère dans cette section le même type de jonction à deux sites. Les potentiels chimiques des deux sites sont par contre supposés statiques. Ils sont de signes opposés et égaux en valeur absolue à $\mu$. Je me place dans le cas $U_0 = 0, U_1 \neq 0$, $\mu_{1,2} = \mu, -\mu$. L'interaction est modulée avec la condition suivante : $\omega \gg \frac{J}{\hbar}$. Dans cette configuration, la différence de potentiel $\mu$ entre les deux sites est supposée très grande devant les autres échelles d'énergie du système ( $\mu \gg J \gg \mathcal{U}_1$). Le forçage périodique et résonnant de l'interaction permet de générer des transferts de paires de bosons et de former des états N00N pour certaines valeurs du paramètre $K_0 = \frac{U_1}{\hbar\omega}$.

Sur la figure 2.4 (haut), on représente pour $N = 10$ particules le produit $4F_{|N0\rangle}F_{|0N\rangle}$ des fidélités associées aux deux composantes de l'état N00N en fonction du temps et du paramètre $K_0$. Cette quantité vaut 1 lorsque les poids de composantes $|0N\rangle$ et $|N0\rangle$ sont égaux. On observe sur cette figure que pour un certain nombre d'intervalles de $K_0$, la dynamique du système conduit à la formation d'états N00N de manière **quasi-périodique**. Sur la partie basse de la figure on trace une de ces trajectoires pour $K_0 = 2.81$. On peut observer l'émergence du premier état N00N pour $t \simeq 500\frac{\hbar}{J}$ avec une période d'environ $T \simeq 1000\frac{\hbar}{J}$. Comme je le montrerai, ce temps de récurrence est gouverné par les petites échelles d'énergies émergentes autour des paramètres pour lesquels on trouve des états N00N. Contrairement à d'autres protocoles ( [60] , [59]), l'efficacité du processus tire partie du fait que l'espace de Hilbert des états dynamiquement accessibles est considérablement réduit. Cette sélection d'états s'opère à plusieurs niveaux. Il sera montré en section 2.9, dans le cas plus complexe d'une jonction triangulaire, que plusieurs séparations d'échelles entre différentes parties du spectre effectif apparaissent. Une première séparation apparaît dues aux échelles d'énergie $J$ et $\frac{J^2}{\mu}$ , séparant le spectre en deux blocs. Un troisième bloc de très basse énergie, contenant les états cibles, apparaît autour de certaines valeurs précises de $K_0$ générant une échelle d'énergie $\frac{J^2}{\mu}\frac{\delta}{K_0}$ très petite devant $\frac{J^2}{\mu}$. Cette dernière échelle permet d'estimer le temps de récurrence de l'état N00N généré.

## 2.5 Formation d'états N00N multi-modes dans une tri-jonction bosonique

### 2.5.1 Observation d'états N00N à trois modes

Je considère ici le cas de la jonction triangulaire soumise à une modulation périodique de l'interaction. L'introduction d'un telle dépendance en temps dans le système conduit à une dynamique riche. Parmi cette dynamique, je distinguerai trois cas remarquables.

1. Pour certaines valeurs très précises du rapport $\frac{U_1}{\hbar\omega}$ le système réalise à un temps donné

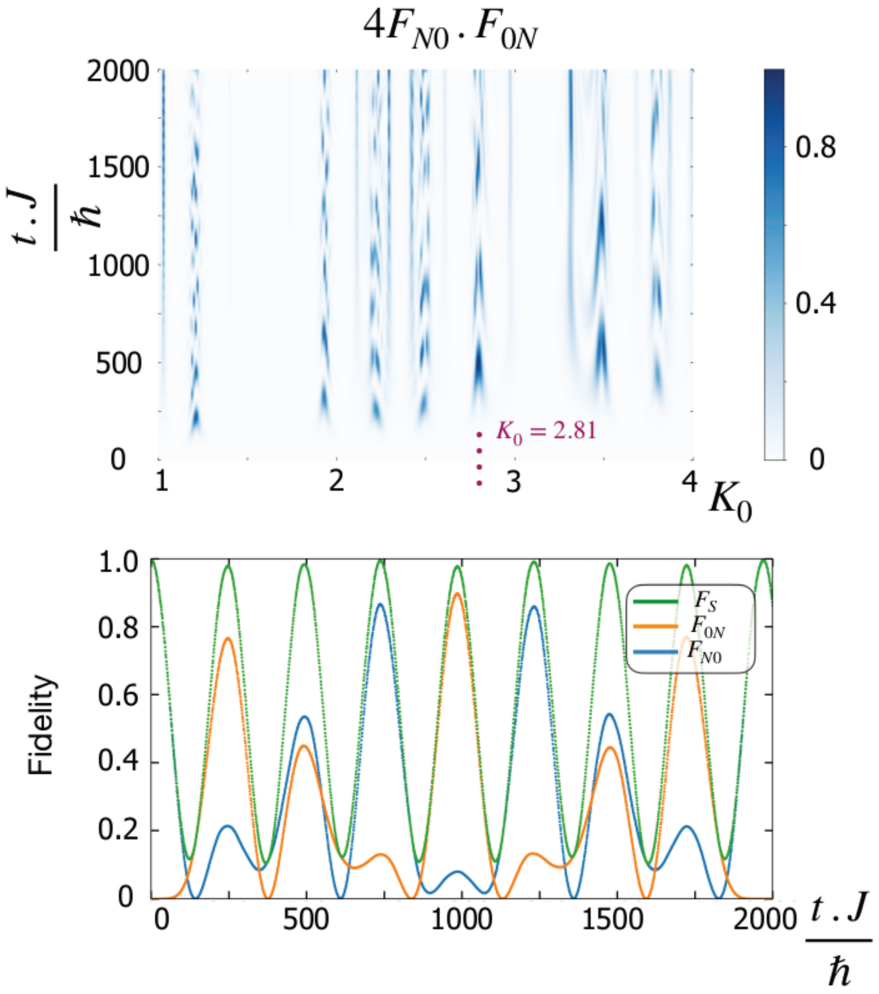



Figure 2.4: Generation d'états N00N à deux modes. Haut : Carte de l'indicateur $4F_{|N0\rangle}F_{|0N\rangle}$ en fonction du paramètre d'interaction $K_0$ et du temps. Bas : Variation temporelle de la fidélité d'un état N00N ($F_s = F_{|0N\rangle} + F_{|0N\rangle}$). N = 10 particules, $\mu = 15J$ et $K_0 = 2.81$.

un transfert de N bosons du site 1 vers le site 2 ou 3. Ce transfert cohérent est remarquable mais nécessite d'accorder avec une grande précision les paramètres du système.

2. Le système exhibe un comportement analogue au Coherent Destruction of Tunneling ( [70] [71] [72] [73]) : partant d'un état initial $|0N0\rangle$, l'ensemble des bosons restent piégés dans le site 2 et la dynamique est complètement bloquée.

3. Pour certaines régions de l'espace des paramètres, l'évolution du système à partir de l'état $|0N0\rangle$ conduit à la formation d'états N00N à trois modes de manière périodique. Je m'intéresserai principalement à ce dernier comportement et je montrerai comment l'apparition de celui-ci peut-être mis en relation avec les régions de CDT.

Je montre ici comment la procédure initiée dans la jonction bosonique simple peut se généraliser au cas d'une jonction triangulaire et conduire à la formation d'états N00N généralisés. Pour ce faire, je me place dans le cas $U_0 = 0, U_1 \neq 0$, $\mu_{1,2,3} = \mu, 0, -\mu$. L'interaction

est modulée avec la condition suivante : $\omega \gg \frac{J}{\hbar}$.

Comme l'indique le développement perturbatif de l'Hamiltonien de Floquet 2.8, la quantité $K_0 = \frac{U_1}{\hbar\omega}$ joue également un rôle très important dans la dynamique de ce système. La configuration du système laisse apparaître deux fréquences Josephson $\omega_J^0 = \frac{\mu}{\hbar}$ et $\omega_J^1 = \frac{2\mu}{\hbar}$ associées respectivement aux transferts de bosons du sites 2 vers les sites 1/3 et entre les sites 1 et 3. En fixant la fréquence du forçage à résonance $\omega = 2\mu$, on s'attend à voir apparaître des transferts effectifs de paires.
Dans toute la suite, que ce soit à partir de l'Hamiltonien de départ ou de l'Hamiltonien effectif, on étudie la dynamique du système en partant d'un état initial $|\Psi_i\rangle = |0N0\rangle$.
Pour simplifier l'analyse, on considère en premier lieu une jonction triangulaire symétrique $J_1 = J_2 = J_3$.

Posons $|\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_W(t)\rangle + |\Psi_{W\perp}(t)\rangle$ avec :

$$|\Psi_W(t)\rangle = a_1(t)\,|N,0,0\rangle + a_2(t)\,|0,N,0\rangle + a_3(t)\,|0,0,N\rangle \tag{2.8}$$

avec $|\Psi_{W\perp}(t)\rangle$ un vecteur orthogonal à $|\Psi_W(t)\rangle$.
On définit alors la fidélité sur cet état comme :

$$F_W(t) = |a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 + |a_3(t)|^2 \tag{2.9}$$

La figure 2.5 montre la dynamique de la fidélité $F_{|N00\rangle} = |\langle N00|\Psi(t)\rangle|^2$ en fonction de l'interaction et son maximum pris sur un grand intervalle de temps. La correspondance entre la dynamique exacte et celle obtenue à partir de l'Hamiltonien effectif est remarquable. Dans ce régime, bien qu'il ne contienne que l'information sur la dynamique lente, l'Hamiltonien obtenu à partir du développement de Floquet constitue une très bonne approximation du système. A partir de cette figure, il est possible de déduire au moins en partie les comportements 1, 2 et 3 cités précédemment.

**Transfert cohérent (1) -** On observe que pour certaines valeurs de $K_0$ on obtient des pics étroits du maximum de fidélité qui peut atteindre des valeurs très proches de 1. Pour ces paramètres, le forçage périodique induit un transfert cohérent de N bosons du site 2 vers les sites 1 ou 3 à un temps t fixé. Pour atteindre un tel état, il est néanmoins nécessaire de pouvoir régler très finement le paramètre d'interaction $K_0$.

**Coherent Destruction of Tunneling (2) -** On observe également que pour certaines valeurs de $K_0$, la fidélité reste constante et égale à 1 au cours du temps. Ces valeurs de $K_0$ sont clairement repérées sur la figure par les lignes bleu fonçé qui apparaissent espacées de manière relativement régulière. Sur la figure 2.5 (centre), ces valeurs sont identifiées en repérant les $K_0$ pour lesquels à la fois $F_{|400\rangle}$ s'annule et $F_{|\Psi_s\rangle} = 1$ pour tout temps t. Il apparaît qu'au cours de cette dynamique, le système reste piégé dans son état initial $|0N0\rangle$. Ce phénomène est réminiscent du **Coherent Destruction of Tunneling** (CDT) . Je montrerai en section 2.8.2 pourquoi ces points semblent coïncider avec les zéros de la fonction $\mathrm{sinc}(2K_0)$, soit $K_{0,n} \sim \frac{n\pi}{2}$ .

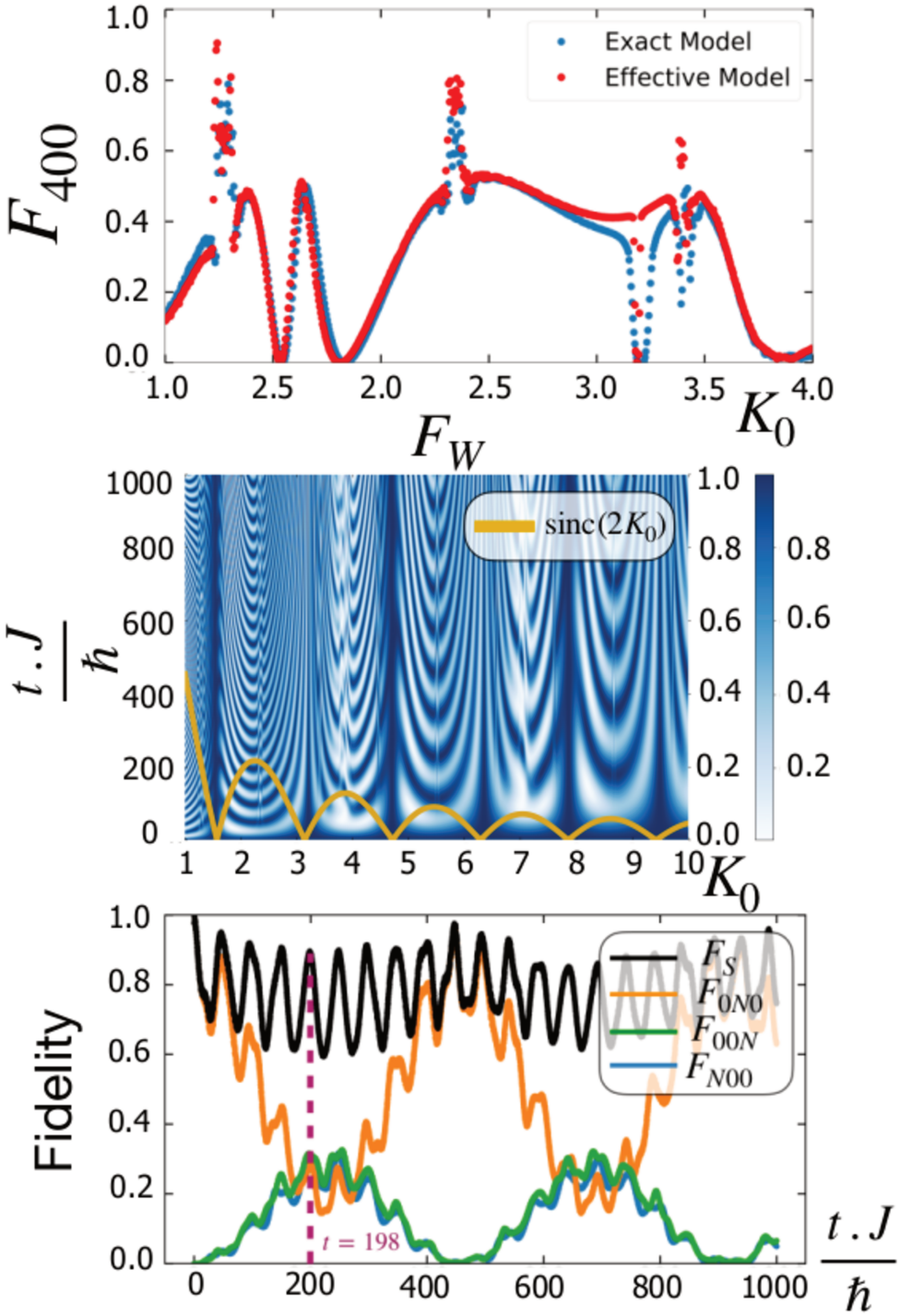



Figure 2.5: Transfert de paires optimal et états N00N à trois composantes. Haut : Comparaison de la fidélité (maximisée sur un intervalle de temps $t = 2000\frac{\hbar}{J}$) associée à un transfert de l'état $|040\rangle$ à l'état $|400\rangle$, calculé à partir de la dynamique exacte (bleu) et du développement de Floquet (rouge). Centre : Carte de la fidélité d'un état N00N à trois composantes en fonction du temps et du paramètre d'interaction. Bas : Evolution des fidélités $F_{|\Psi_s\rangle}$, $F_{|0N0\rangle}$, $F_{|N00\rangle}$, $F_{|00N\rangle}$ pour N=8, $K_0 = 2.59$ et $\mu = 17J$ $F_S$ correspond ici au $F_W$ défini dans le texte.

**Formation d'états N00N (3) -** Comme nous le verrons en dernière partie, il est possible de cibler des états quantiques du type N00N à trois composantes en se plaçant au voisinage de ces points.
En ce qui concerne les états N00N à trois modes, pour toutes les valeurs explorées du nombre total de bosons $2 \leq N \leq 10$, on trouve des maxima de fidélité proches de 1 et de manière quasipériodique. En particulier pour certains intervalles de $K_0$, l'état $|\Psi_W\rangle$ obtenu est quasi-symétrique au sens ou $|a_1| \simeq |a_2| \simeq |a_3|$.

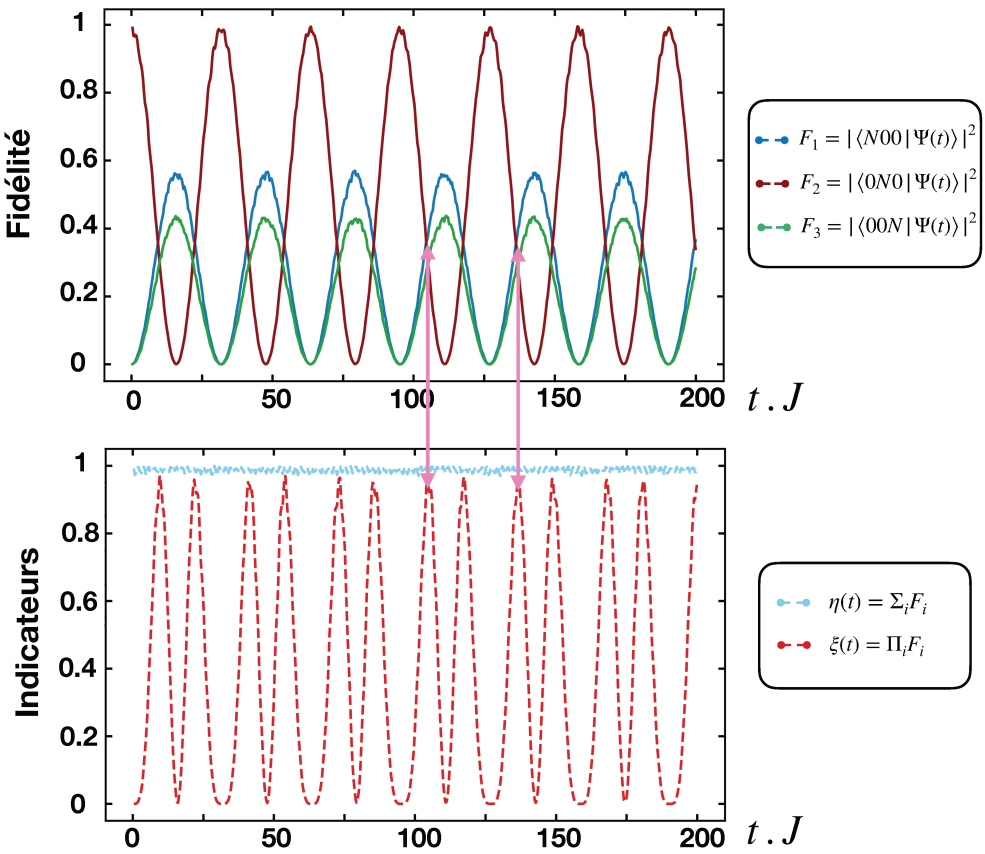



Figure 2.6: Trajectoires et indicateurs de la présence d'états N00N pour N = 2 particules, $K_0 = 2.0$ , $\mu = 15$. (Haut) : Fidélité $F_i = |a_i(t)|^2$ pour chaque composantes de l'état N00N à trois modes. (Bas) : Somme des probabilités associées à chaque composante et produit des amplitudes.

Sur la figure 2.6 (bas), on observe que pour N = 2 la somme des fidélités associées à chaque composante de l'état N00N à trois modes reste très proche de 1 pour tout temps $t$. Ceci indique que dans ce régime, la dynamique du système reste presque uniquement dans le sous-espace des trois états composant l'état N00N. De plus, le produit des amplitudes présente des pics réguliers très proches de 1. Comme on peut le voir sur la partie haute de la figure 2.6, ces pics correspondent aux temps pour lesquels les courbes des fidélités associées à chaque composantes se croisent. On obtient à ces temps des états N00N à trois modes.
Ces états N00N peuvent être générés pour des N plus grands. Comme on peut le voir sur

la figure 2.5 (bas), on observe la formation d'un état N00N à trois modes pour $N = 8$, $K_0 = 2.59$ et $\mu = 17J$. Cet état N00N se forme de manière quasipériodique avec une période $T \simeq 700$. Je montre également sur la figure ci-dessous comment pour $N = 4, 6, 8$ il est possible d'observer la formation de ce type d'état. Sur cette figure, on peut observer également un élément important de ce processus : **Le temps de récurrence de l'état N00N ne semble pas croître avec N**.

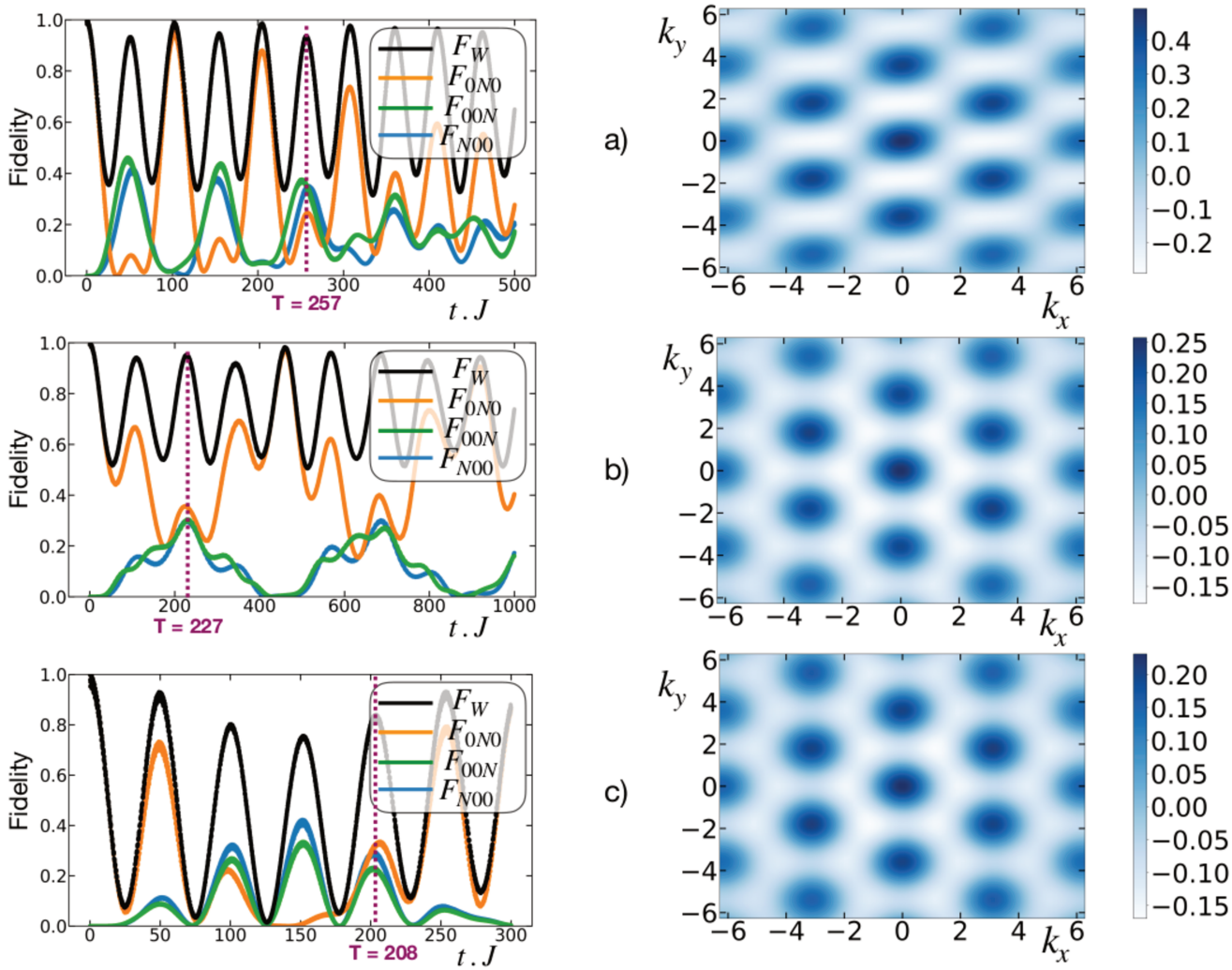



Figure 2.7: Trajectoires et cartes $\sigma(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ pour (du haut vers le bas) - $N = 4$, $K_0 = 2.4$, $\mu = 15$ ; $N = 6$, $K_0 = 2.7$, $\mu = 19$ ; et $N = 10$, $K_0 = 1.16$, $\mu = 11.7$, partant à $t = 0$ d'un état $|0N0\rangle$ : Gauche : Fidélité sur les états $|N00\rangle$ , $|0N0\rangle$, $|00N\rangle$ et leur somme $F_W$. Droite : Corrélations à deux corps pour un état N00N à 3 composantes généré au temps indiqué par la ligne pointillées verticale sur les panneaux de gauche.

Sur le tableau 2.8, on répertorie les phases des amplitudes complexes associées à chaque composante de l'état N00N généré avec $N = 6$ particules. Pour un état N00N donné les phases des coefficients sont de manière générales **décorrélées** d'une occurence de l'état N00N à l'autre. Cette propriété est une conséquence de la complexité de la dynamique hors équilibre.

| | T=228.5 t.J | T=684 t.J | T=1143 t.J | T=1600 t.J |
|---|---|---|---|---|
| Phase - \|006> | 1,007 | 2,018 | -0,657 | 2,784 |
| Phase - \|060> | -2,744 | 0,850 | -2,334 | -1,187 |
| Phase - \|600> | 0,023 | 0,320 | -3,092 | 2,207 |

Figure 2.8: Phase en radians des coefficients des états $|600\rangle$, $|060\rangle$ et $|006\rangle$ pour des états N00N à trois composantes obtenus à différents temps.

### 2.5.2 Effet d'une asymétrie des couplages tunnels

En pratique, il peut être difficile de préparer une jonction avec des couplages proches voisins parfaitement égaux. Pour tester l'effet d'une différence entre les termes de sauts, on part d'un état N00N généré dynamiquement puis l'on recalcule cet état avec des termes de saut modifiés. L'effet d'une asymétrie de la jonction peut se diviser en deux cas :

- Les couplages au site source $J_{12}$ et $J_{23}$ sont différents. Pour une asymétrie $\frac{|J_{21}-J_{23}|}{J_{21}+J_{23}}$ modérée, on retrouve une très bonne fidélité au prix d'un réajustement des paramètres.

- La variation du couplage $J_{13}$ a un effet beaucoup plus important. Notamment, pour $J_{13} = 0$, on ne peut plus préparer d'états N00N à trois branches. Subsistent néanmoins des états N00N à deux composantes entre les sites 2-1 et 2-3. La géométrie en anneau apparaît comme étant un élément essentiel dans la génération d'états N00N à plusieurs composantes.

Supposons que l'asymétrie des couplages soit assez faible pour qu'il soit possible d'observer un état N00N avec une bonne fidélité. La procédure décrite ci-dessus requiert la préparation d'un état initial $|0N0\rangle$ avec N pair. Le nombre de bosons doit alors pouvoir être contrôlé précisément et en particulier ce nombre doit être maintenu constant durant un intervalle de temps $\Delta t$ avec $\Delta t = |t_{i+1} - t_i|$. Le temps caractéristique d'évaporation des bosons hors du piège doit donc vérifier $\tau_{ev} > \Delta t$.
Pour observer la formation d'états N00N, nous avons également fixé la condition de résonance $\omega = 2\frac{\mu}{\hbar}$. Si la pulsation appliquée diffère légèrement de cette résonance, disons $\omega_{app} = \omega = \frac{2\mu}{\hbar} + \delta\omega$, on observe des états N00N tant que $t \ll \frac{1}{\delta\omega}$. Il faut donc que le système vérifie la condition $\delta\omega \ll \frac{1}{\Delta t}$. En pratique, cette condition limite la valeur de l'énergie de site $\mu$.

## 2.6 Généralisation à un nombre de modes $M > 3$

Le protocole proposé pour générer des états N00N à 2 ou 3 modes se généralise à $M > 3$. Je montre ici des superpositions obtenues pour des géométries à 4 et 5 sites. La géométrie à

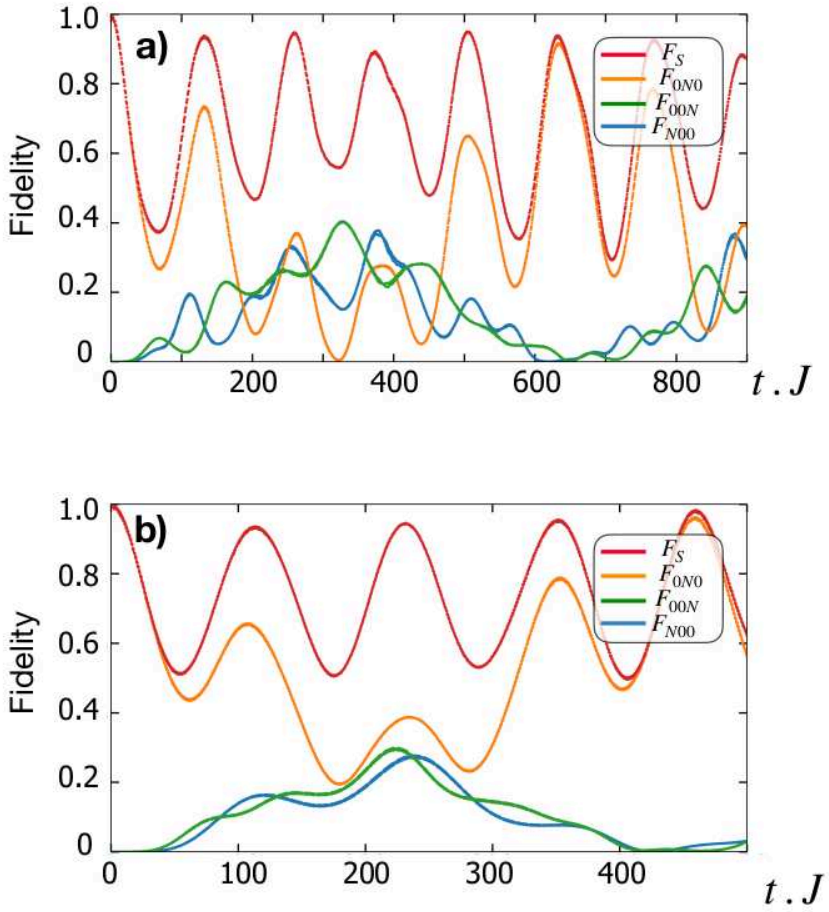



Figure 2.9: Trajectoires pour une jonction asymétrique. Haut : $N = 6$, $\mu = 17$, $K_0 = 2.65$, $J_{12} = 0.9$, $J_{23} = 1.1$, $J_{13} = 1$ ; Bas : $N = 6$, $\mu = 17$, $K_0 = 2.7$, $J_{12} = J_{13} = 1$, $J_{13} = 0.9$. $F_S$ correspond au $F_W$ défini dans le corps du texte

5 sites rappelle la jonction triangulaire dans sa configuration des potentiels chimiques et est facilement généralisable pour tout M impair.

Sur la figure 2.11 est représentée la dynamique temporelle des projections de la fonction d'onde sur les composantes des états N00N pour deux états N00N obtenus respectivement dans les configurations (a) et (b) de la figure 2.10. Le premier état à 4 modes présente une fidélité très proche de 1 et est obtenu pour $K_0 = 3.08$ et 4 particules. Pour obtenir cet état, on note qu'il est nécessaire d'avoir des couplages non-nuls mais non-nécessairement égaux entre les différents sites. L'état à 5 modes et 4 particules exhibé sur la figure du bas montre une fidélité qui monte à 0.8 . L'évolution du maximum de fidélité semble indiquer qu'il est de plus en plus difficile de restreindre la dynamique du système aux états composant l'état N00N à mesure que le nombre de sites augmente.

Sur la figure 2.12, on peut observer la formation de deux types d'états N00N. Les trajectoires sont tracées pour la géométrie en losange représentée sur la figure 2.10. Sur le panneau du haut, on observe la formation d'un état N00N à quatres modes avec une quasi-périodicité

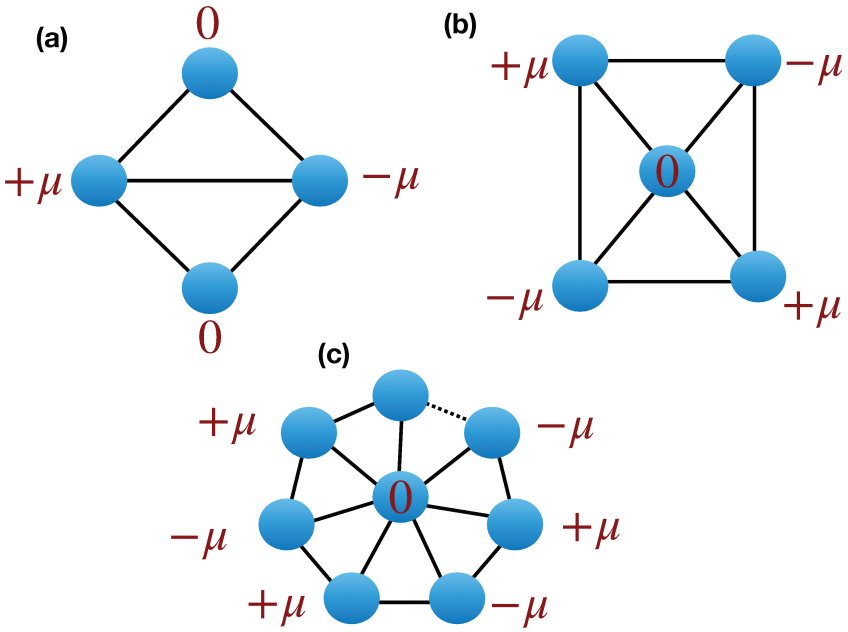



Figure 2.10: Proposition de différentes géométries à M sites pour l'observation d'états N00N à M composantes (a) 4 sites (b) 5 sites (c)généralisation de la géométrie à 5 sites pour tout M impair.

de l'ordre de $100\frac{\hbar}{J}$. En ajustant le paramètre $K_0$ on observe également la formation d'un état N00N à deux composantes, de quasi-période $T \sim 600\frac{\hbar}{J}$, entre les états d'énergie de site nulle. Les fidélités associées aux deux autres composantes oscillent quant à elles autour de 0.05 avec une amplitude constante. Pour $t \sim 300\frac{\hbar}{J}$ la fidélité est extrêmement proche de 1.

La figure 2.13 montre la possibilité d'observer un état N00N à 5 modes et 2 particules dans la géométrie à 5 sites. La fidélité observée est de l'ordre de 0.9 et la quasi-période d'environ $200\frac{\hbar}{J}$.

Le protocole proposé pour une jonction en triangle, à savoir des énergies de site $\pm\mu$ très grandes devant le couplage tunnel et une interaction forcée à résonance $\omega = 2\mu$, se généralise pour un nombre de sites plus grand. Pour une valeur de $K_0$ donnée, la quasi-période (ou temps de récurrence) de l'état ne semble ni croître avec le nombre de bosons ou le nombre de sites. De plus, un état N00N à M composantes peut également se former même si $N < M$. Pour un nombre de sites M donné, on observe que des états N00N avec un nombre de modes plus petit que M peuvent se former.
Cependant, pour N atomes répartis dans M sites, l'espace de Hilbert est de taille $\mathcal{N}(N, M) = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1!)}$. Par exemple, $\mathcal{N}(4, 3) = 15$, $\mathcal{N}(10, 3) = 66$, $\mathcal{N}(4, 5) = 70$. Pour atteindre avec une fidélité proche de 1 les états N00N exhibés précédemment il est nécessaire de régler $K_0$ à environ 1% près. Ce réglage doit être de plus en plus précis à mesure que le nombre de bosons croît, néanmoins le temps moyen séparant les apparitions de l'état cible reste constant. Pour les valeurs de $\mu$ utilisée dans cette étude, le temps de récurrence est de l'ordre de $t_r \sim 100\frac{\hbar}{J}$ . Comme le montre l'analyse du modèle effectif, ce temps augmente proportionnellement au

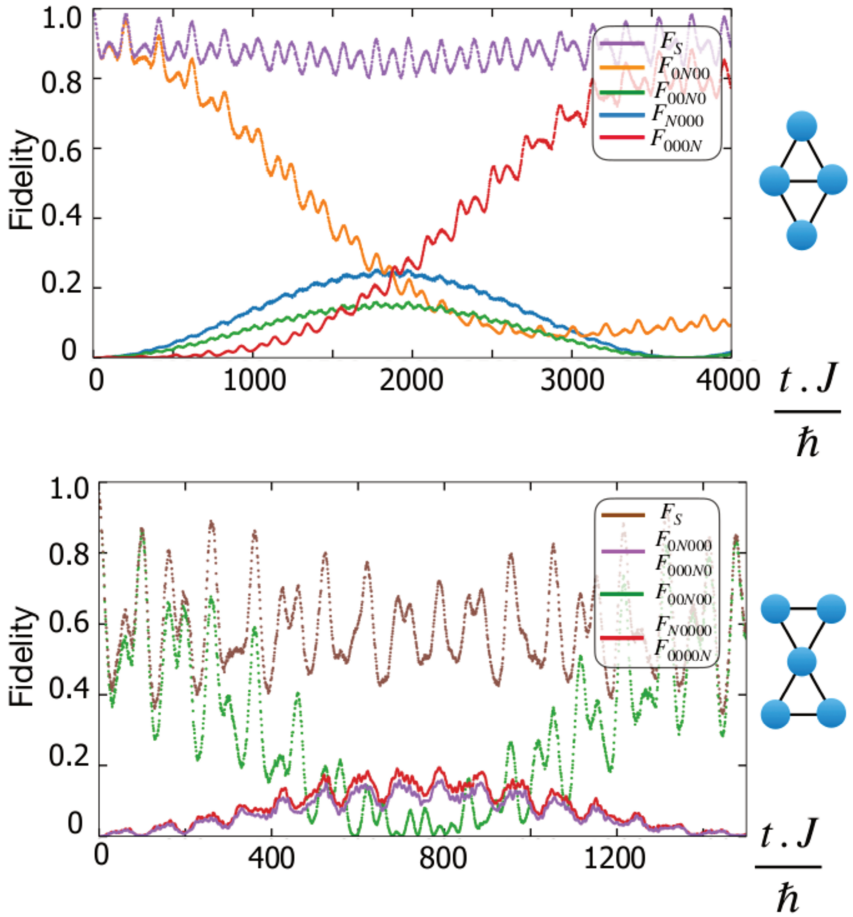



Figure 2.11: Génération d'états N00N à M modes. Haut : Configuration à 4 sites,$K_0 = 3.08$, $\mu = 20$, $N = 4$ ; Bas : 5 sites, $K_0 = 1.57$, $\mu = 15$, $N = 4$. La fidélité totale se généralise pour M modes.

rapport $\frac{\mu}{J^2}$.

Je montre dans le section suivante comment ce type d'état peut être détecté expérimentalement.

## 2.7 Signature des états N00N et de paires corrélées

L'état quantique des systèmes d'atomes froids, que ce soit d'un condensat simple ou d'un gaz sur réseau, peut être caractérisé en réalisant une expérience de temps de vol (Time of Flight) ( [74] [75] [76] [77] [78]). Dans ce type d'expérience, le gaz piégé optiquement est soudainement relâché. Le nuage atomique s'étend alors et au bout d'un temps suffisamment long la densité atomique dans l'espace réel devient proportionnelle à la densité dans l'espace des moments. La densité dans l'espace réel est alors mesurée par absorption. Par exemple, dans un gaz bosonique piégé au dessous de la température de condensation la distribution atomique est piquée autour d'un moment $p^*$. La mesure d'absorption après expansion du gaz

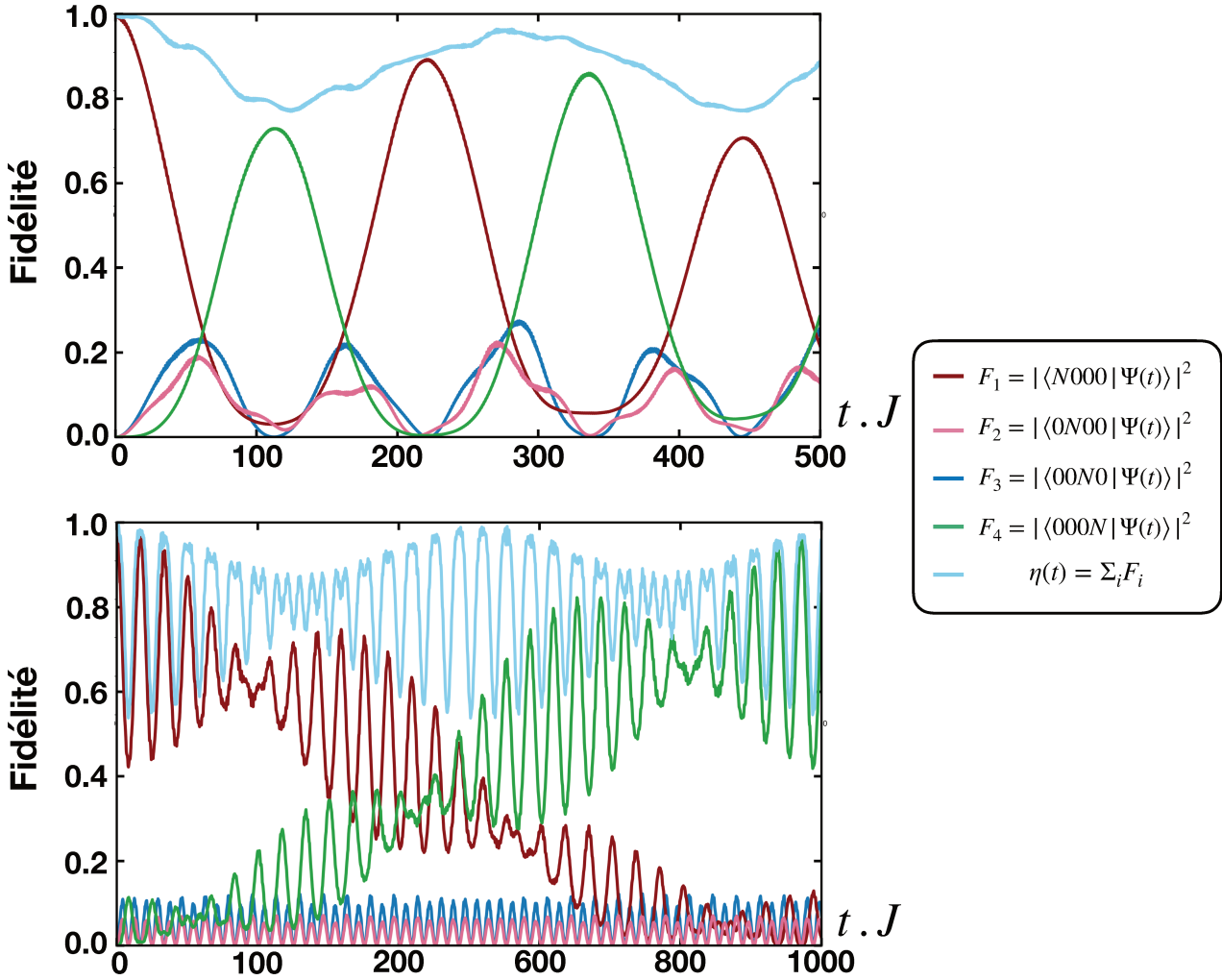



Figure 2.12: Fidélité des composantes de l'états N00N à quatre modes pour $N = 2$ (Haut) : $\mu = 20$ , $K_0 = 4.0$ (Bas) : $\mu = 20$ , $K_0 = 1.2$

conduit au pic caractéristique de la condensation de Bose-Einstein. La densité en moment (Equation 2.11) ne permet cependant pas de mesurer uniquement la cohérence à une particule.

Nous avons observé précédemment qu'un forçage périodique peut dynamiquement générer des états N00N à plusieurs modes. Comme les différents modes d'un tel état sont connectés uniquement par des transferts à N particules, l'observable usuelle $n(\mathbf{k})$ est uniforme dans le plan $(k_x, k_y)$ et semblable à celle obtenue pour un simple état de Fock. Il est néanmoins possible de détecter ce type d'états en calculant la corrélation associée à $n(\mathbf{k})$ pour un temps $t^*$ fixé, qui fait apparaître certains motifs dûs à des transitions virtuelles. On définit l'observable suivante :

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \bar{t}) \;=\; \langle \Psi_S(\bar{t})|\, \hat{n}(\mathbf{k})\, \hat{n}(\mathbf{k}')\, |\Psi_S(\bar{t})\rangle \;-\; n(\mathbf{k}, \bar{t})\, n(\mathbf{k}', \bar{t}) \tag{2.10}$$

Avec ,

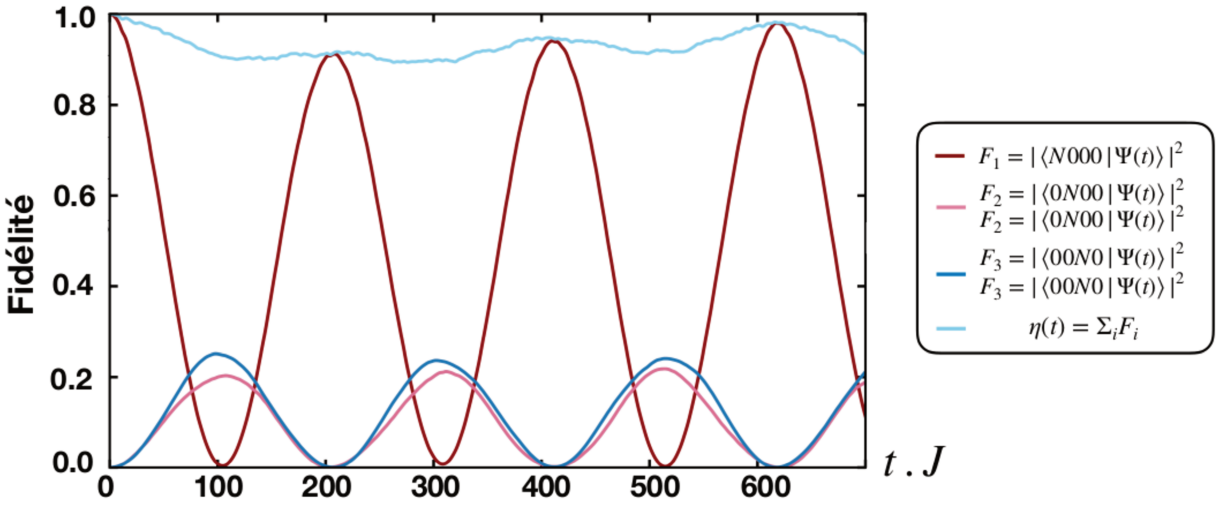



Figure 2.13: Fidelité des composantes de l'états N00N à cinq modes pour $N = 2$, $K_0 = 3.9$, $\mu = 20$. Les fidélités des états $|N0000\rangle$ et $|000N0\rangle$ sont égales et tracées en rose. De même pour les états $|0N000\rangle$ et $|0000N\rangle$, tracés en bleu.

$$\hat{n}(\mathbf{k}) = \sum_{i,j} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R_i}-\mathbf{R_j})} a_i^\dagger a_j, \quad n(\mathbf{k},\bar{t}) = \langle\Psi(\bar{t})|\,\hat{n}(\mathbf{k})\,|\Psi(\bar{t})\rangle \tag{2.11}$$

ou le vecteur $\mathbf{R_i}$ définit la position du site i. Les sites sont représentés comme étant les trois sommets d'un triangle équilatéral. L'origine est choisie au centre de ce triangle.

### 2.7.1 Transfert de paires corrélées

Pour un transfert de paires corrélées du site 2 vers les sites 1 et 3 simultanément, le cas particulier $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ permet de caractériser l'état généré. Considérons en effet un état de la forme $|\Psi_{pair}\rangle = \alpha|0, N, 0\rangle + \beta|1, N-2, 1\rangle$. C'est le type de superposition proposée dans la section 2.2. Les deux états sont connectés par des opérateurs de la forme $b_1^\dagger b_2 b_3^\dagger b_2$ ou $b_2^\dagger b_1 b_2^\dagger b_3$ de sorte que la phase acquise est $e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x_{21}}-\mathbf{x_{23}})} = e^{i\sqrt{3}\mathbf{k_y}}$. Finalement,

$$\sigma_{\Psi_{pair}}(\mathbf{k}, +\mathbf{k}) = |w(\mathbf{k})|^4 \Big[\frac{2}{N} + \frac{4\sqrt{N(N-1)}}{N^2}|\alpha||\beta|\cos\left(\sqrt{3}k_y + \phi_\alpha - \phi_\beta\right)\Big] \tag{2.12}$$

Où $\phi_\alpha, \phi_\beta$ sont les phases des coefficients $\alpha, \beta$.

On remarque que la carte résultante 2.16 est faites de bandes modulées dans la direction $\mathbf{k_y}$ avec une périodicité $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (2.16). De plus, comme les deux états $|0, N, 0\rangle$ et $|1, N-2, 1\rangle$ sont connectés par un seul transfert de boson, $\sigma_{\Psi_{paire}}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ dépend également de la différence de phase entre les coefficients $\alpha$ et $\beta$. Cette observable permet donc non seulement de détecter la superposition des états $|0, N, 0\rangle$ et $|1, N-2, 1\rangle$ qui diffèrent d'un transfert de paires corrélées mais également de sonder la cohérence de cet état.

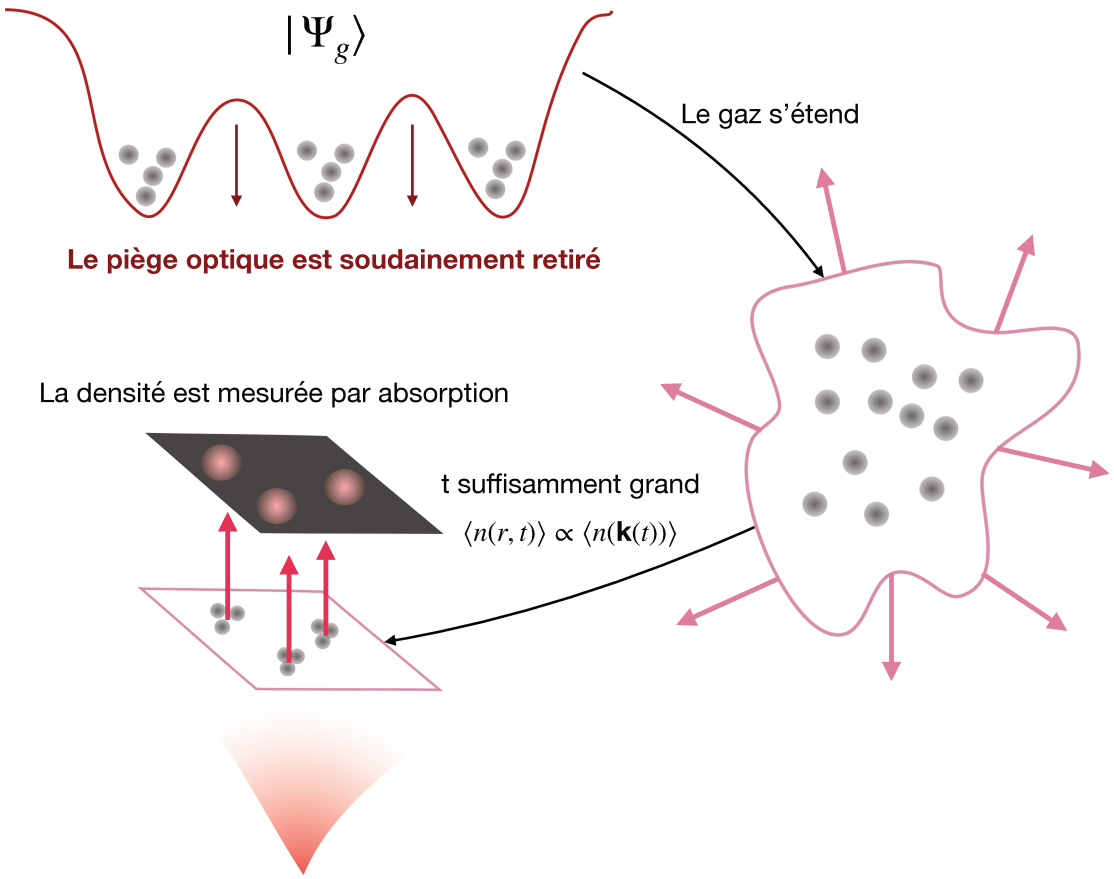



Figure 2.14: Illustration du principe d'une expérience de Time of Flight (ToF) avec un gaz d'atomes froids. Le piège est d'abord retiré puis le gaz s'étend librement. La densité dans l'espace réel est alors mesurée par absorption.

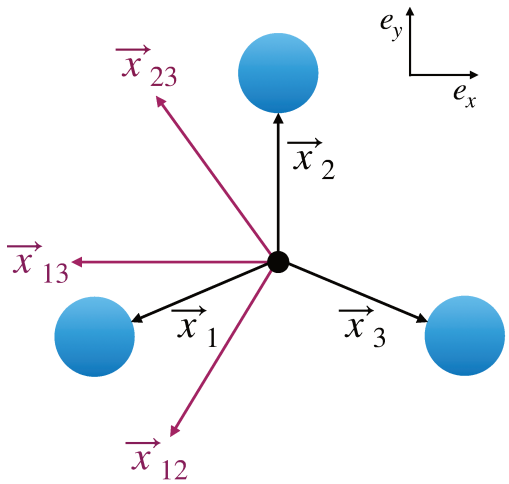



Figure 2.15: Repère utilisé pour la définition de l'observable $n(\mathbf{k})$ - Les vecteurs en noir représentent les positions des différents sites alors que les vecteurs rouges sont les différences de vecteurs $\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}$ qui apparaissent en facteurs de phase dans les transfert de bosons entre les sites i et j.

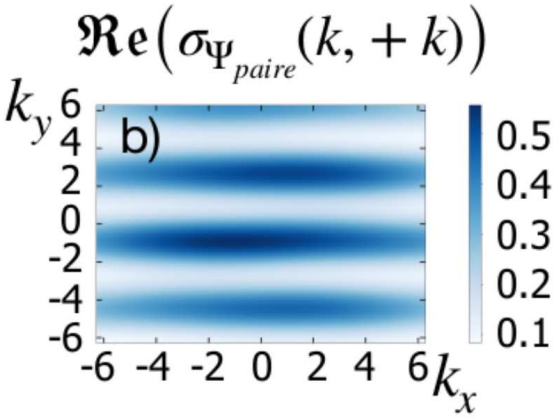



Figure 2.16: Caractérisation d'un transfert de paire résonnant avec une interaction répulsive statique (Configuration de la section 2.2). Les paramètres sont : $\mu = 20$, $\mu_2 = 5.781$ et $U_0 = 0.9$.

### 2.7.2 Mesure d'états N00N

Pour un état $|\Psi_W\rangle$ parfait, il y a une seule contribution à $\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ qui conduit à une dépendance en $\mathbf{k}$ de l'observable. Celle-ci correspond à des processus virtuels pour lesquels un boson passe d'un site i à un site j pour finalement revenir. Le boson acquiert dans ce processus une phase $(\mathbf{k} - \mathbf{k}').\mathbf{x_{ij}}$. Dans le cas ou $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\big(\sigma_{\Psi_W}(\mathbf{k}, -\mathbf{k})\big) = & \frac{|w(\mathbf{k})|^4}{N}\Big[(|\alpha|^2 + |\beta|^2).\cos\big(k_x + \sqrt{3}k_y\big) + (|\alpha|^2 + |\gamma|^2).\cos\big(2k_x\big) \\ + & (|\beta|^2 + |\gamma|^2).\cos\big(k_x - \sqrt{3}k_y\big)\Big] \quad (2.13)\end{aligned}$$

Comme les états $|N00\rangle$ , $|0N0\rangle$, $|00N\rangle$ ne sont pas connectés par des termes de saut d'ordre 2 (transfert de paire), nous pouvons écrire :

$$\sigma_{\Psi_S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sigma_{|N00\rangle}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \sigma_{|0N0\rangle}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \sigma_{|00N\rangle}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (2.14)$$

avec,

$$\mathfrak{Re}\Big[\sigma_{|0N0\rangle}(k, -k)\Big] = \frac{|w(k)|^4}{N}|\beta|^2\Big(\cos\big(k_x + \sqrt{3}k_y\big) + \cos\big(k_x - \sqrt{3}k_y\big)\Big) \quad (2.15)$$

$$\mathfrak{Re}\Big[\sigma_{|0N0\rangle}(k, -k)\Big] = \frac{|w(k)|^4}{N}|\alpha|^2\Big(\cos\big(k_x + \sqrt{3}k_y\big) + \cos\big(2k_x\big)\Big) \quad (2.16)$$

$$\mathfrak{Re}\Big[\sigma_{|0N0\rangle}(k, -k)\Big] = \frac{|w(k)|^4}{N}|\gamma|^2\Big(\cos\big(k_x - \sqrt{3}k_y\big) + \cos\big(2k_x\big)\Big) \quad (2.17)$$

De cette manière, on peut remonter aux probabilités associées à chaque composante de l'état $|W\rangle$.

**Expression des probabilités des états $|N00\rangle$ , $|0N0\rangle$, $|00N\rangle$ en fonction de l'observable $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$**

$$|\alpha|^2 = -\frac{N}{2|w(\frac{\pi}{2},-\frac{\sqrt{2}\pi}{2})|^4}\mathfrak{Re}\Big[\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k}))\Big]_{\mathbf{k}=(\frac{\pi}{2},-\frac{\sqrt{2}\pi}{2})} \tag{2.18}$$

$$|\beta|^2 = -\frac{N}{2|w(\pi,0)|^4}\mathfrak{Re}\Big[\sigma\big(\mathbf{k},-\mathbf{k}\big)\Big]_{\mathbf{k}=(\pi,0)} \tag{2.19}$$

$$|\gamma|^2 = -\frac{N}{2|w(\frac{\pi}{2},+\frac{\sqrt{2}\pi}{2})|^4}\mathfrak{Re}\Big[\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})\Big]_{\mathbf{k}=(\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}\pi}{2})} \tag{2.20}$$

$$1 = -\frac{N}{2}\mathfrak{Re}\Big[\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})\Big]_{\mathbf{k}=(0,0)} \tag{2.21}$$

Comme on peut le voir sur la figure 2.18, le $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ des trois états de Fock qui composent l'état $|W\rangle$ a la même forme pour chaque état mais est orienté différemment. Pour un état $|W\rangle$ parfait $\alpha = \beta = \gamma$, l'observable a une symétrie hexagonale et une amplitude asymétrique par rapport à 0. Pour un état N00N à deux modes ( $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$ ) ou une superposition asymétrique, le schéma est déformé dans différentes directions en fonction des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Je montre ici les résultats obtenus en utilisant des états $|W\rangle$ générés dynamiquement pour $N = 8$. Partant de l'état $|0N0\rangle$, on le laisse évoluer jusqu'au temps $t = 198\frac{\hbar}{J}$ pour lequel le système est dans un bon état superposé. A ce temps, la fidélité d'un tel état est 0.9. La fonction d'onde a donc des composantes non négligeables sur un ensemble d'états différents de $|N00\rangle$ , $|0N0\rangle$, $|00N\rangle$. Pour caractériser l'importance des ces états *parasites*, il suffit de regarder l'observable $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k})$. En effet, celle ci est complètement plate pour une superposition parfaite. Ceci peut se comprendre de la manière suivante.

Premièrement, comme les états composant une superposition parfaite sont différents d'un nombre N de particules, le second terme donne des valeurs non-nulles uniquement pour les transitions $a_i^\dagger a_j$ avec $i = j$. Pour ces transitions, il n'y a pas de transfert de bosons, ce qui se traduit par aucune modulation dans l'espace des k. La variation ne peut donc provenir que du premier terme. Celui-ci fait intervenir des transitions de la forme $a_i^\dagger a_j a_l^\dagger a_m$ avec une phase $e^{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R_i}-\mathbf{R_j}+\mathbf{R_l}-\mathbf{R_m})}$ . Pour $N > 2$, les seules contributions sont virtuelles et correspondent au transfert puis au retour d'un boson entre deux sites quelconques, par exemple du site 2 vers le site 1 puis du site 1 vers le site 2. Ce type de transfert se traduit par la condition $i = j$ , $j = l$.

En résumé, tous les processus susceptibles d'induire une dépendance en (**k** , **k'**) de l'observable $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k'})$ pour une superposition parfaite sont des processus virtuels de la forme $a_m^\dagger a_l a_l^\dagger a_m$. Lorsque **k** = **k'**, ce processus se décompose en :

- Un premier transfert du site $m$ vers le site $l$ avec la phase $e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{R}_l-\mathbf{R}_m)}$
- Un second transfert du site $l$ vers le site $m$ avec la phase $e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{R}_m-\mathbf{R}_l)}$

Le $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k})$ résultant est alors **sans** modulation pour une **superposition parfaite**.

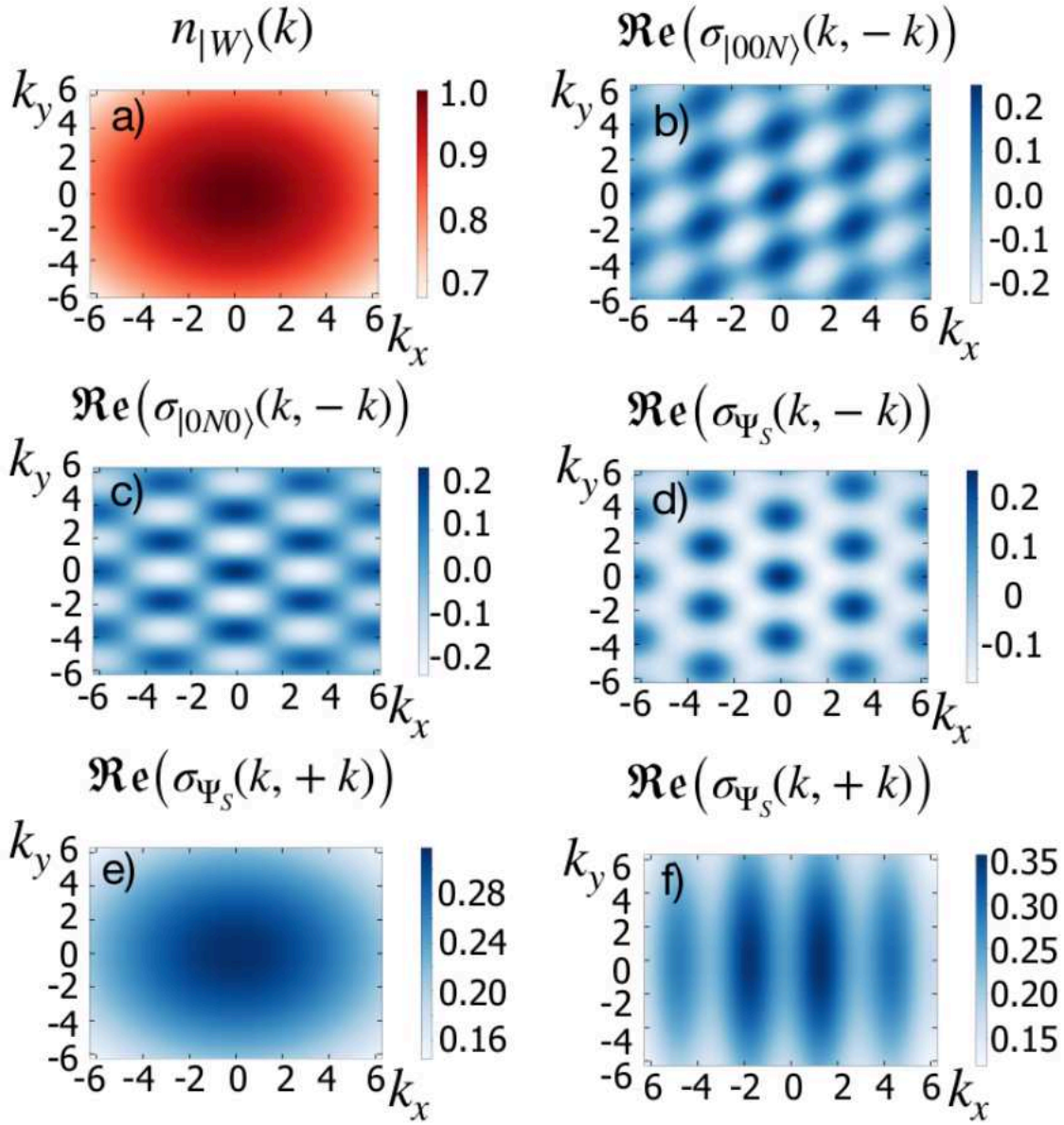



Figure 2.17: (a) $n(\mathbf{k})$ d'un état $|W\rangle$ (b) $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ pour un état $|0,0,N\rangle$ (c) $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ pour un état $|0,N,0\rangle$ (d) $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ pour un état W non parfait (e)

Pour voir l'effet de ces états parasites, je supprime de la fonction d'onde tous les états $|p\rangle$ pour lesquels le coefficient $|C_p|^2 < \kappa$ puis je trace les quantités $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k})$ et $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ pour différentes valeurs de $\kappa$ (2.19). Pour $\kappa = 0.0$ tous les états sont présents dans la fonction d'onde, pour $\kappa = 0.1$ il reste une petite fraction d'états parasites et pour $\kappa = 0.2$ seuls les états $|N,0,0\rangle$, $|0,N,0\rangle$ et $|0,0,N\rangle$ sont présents. Dans le cas ou $\kappa = 0.1$, il y a seulement deux états parasites : $|N-2,0,2\rangle$ et $|2,0,N-2\rangle$. La contribution des ces états a $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k})$ provient des termes qui transfèrent deux particules entre les sites 1 et 3, dans la même direction de sorte que la résultante est une oscillation dans la direction $k_x$ et de période $\pi$ (2.19). Considé-

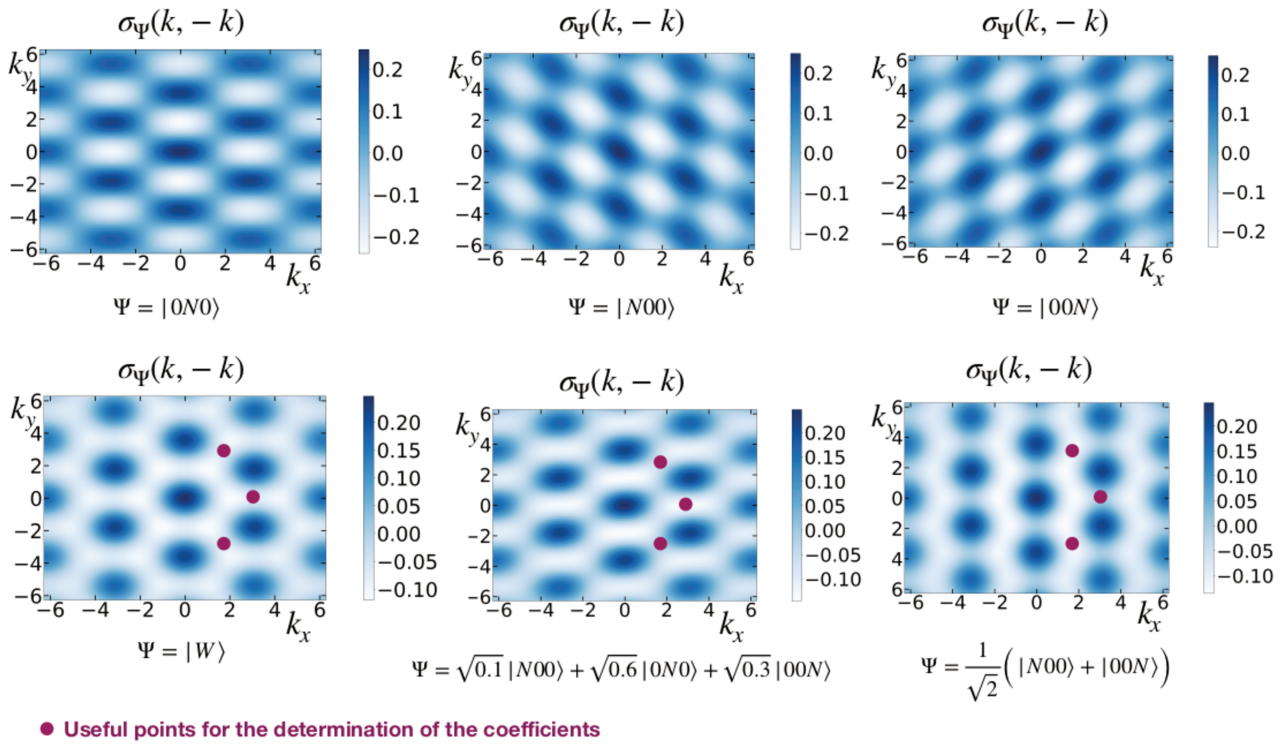



Figure 2.18: Corrélations $n(\mathbf{k})$ pour des cas idéaux. Haut : Etats complètements localisé (Fock), Bas : Etat $|W\rangle$ parfait, état $|W\rangle$ asymétrique et état N00N. Les points rouges correspondent aux points utiles pour déterminer les poids des composantes de l'état $|W\rangle$ détecté

rons en effet un état de la forme $|\Psi\rangle = |\Psi_W\rangle + \epsilon\big(|N-2,0,2\rangle + |2,0,N-2\rangle\big)$. A l'ordre $\epsilon$ la seule contribution s'obtient lorsque l'opérateur $b_i^\dagger b_j b_l^\dagger b_k$ connecte l'état $|N-2,0,2\rangle + |2,0,N-2\rangle$ avec $|\Psi_S\rangle$. Il y a seulement deux termes et on obtient :

$$\sigma_\Psi(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \sigma_{\Psi_W}(\mathbf{k},\mathbf{k}') + 2\epsilon\frac{\sqrt{2N(N-1)}}{N^2}\big(e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}').\mathbf{x}_{13}} + e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}').\mathbf{x}_{31}}\big) \tag{2.22}$$

Donc dans le cas $k = k'$, on caractérise les états parasites par :

$$\sigma_\Psi(\mathbf{k},+\mathbf{k}) = \sigma_{\Psi_W}(\mathbf{k},+\mathbf{k}) + 4\epsilon|w(\mathbf{k})|^4\frac{\sqrt{2N(N-1)}}{N^2}\cos(2k_x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.23}$$

On peut de cette manière détecter la présence d'une bonne superposition et caractériser la quantité d'états parasites, les deux quantités $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ et $\sigma(\mathbf{k},\mathbf{k})$ étant en ce sens complémentaires. Néanmoins, ces états parasites modifient également les valeurs de $\sigma(\mathbf{k},-\mathbf{k})$ de sorte qu'il est difficile de retrouver exactement la composition de l'état $|\Psi_S\rangle$.

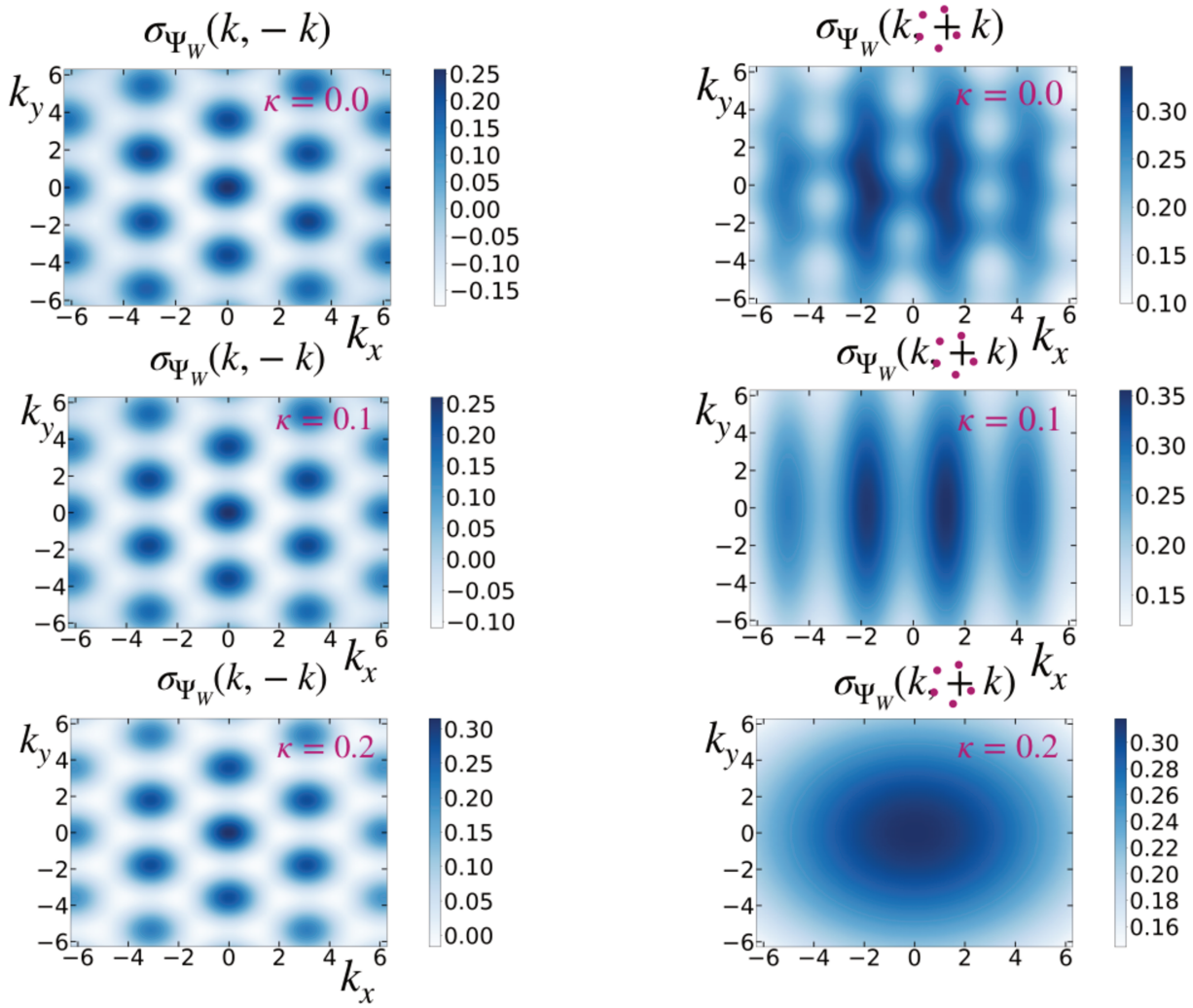



Figure 2.19: Carte de corrélations $n(\mathbf{k})$ pour un état généré dynamiquement pour différentes valeurs du paramètre de filtrage $\kappa$. Gauche : $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ légèrement modifiées par la présence des états parasites , Droite : $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ empreinte directe des états parasites.

## 2.8 Développement de Floquet

### 2.8.1 Dérivation de l'Hamiltonien effectif

Dans les systèmes quantiques forcés périodiquement, il est d'usage de décrire la dynamique en utilisant le formalisme de Floquet ( [79] [42] [80] [81] [82]). Si la fréquence du forçage est suffisamment élevée et d'intensité suffisamment faible, de sorte que le temps caractéristique $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ d'évolution du système libre soit grand devant $\frac{2\pi}{\omega}$, il est possible d'approcher le système par un Hamiltonien indépendant du temps. Dans le problème considéré ici, la condition $\omega = 2\mu$ empêche d'opérer le développement classique à haute fréquence de l'Hamiltonien de Floquet puisque certains termes divergent lorsque $\omega \to \infty$. Pour contourner cette difficulté, on utilise la procédure proposée par N.Goldman et J.Dalibard [83]. Tout d'abord, éliminons le terme divergent par une transformation unitaire dépendante du temps.

Dans la nouvelle base, l'Hamiltonien prend la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{R}^\dagger(t)\mathcal{H}(t)\mathcal{R}^\dagger(t) - i\mathcal{R}^\dagger(t)\partial_t\mathcal{R}^\dagger(t) \tag{2.24}$$

Avec :

$$\mathcal{R}(t) = -\exp\left(i\int_0^t \mathcal{O}(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{2.25}$$

$$\mathcal{O}(t) = \mu(\hat{n_1} - \hat{n_3}) + \frac{\mathcal{U}_1}{2}\sin(\omega t)\sum_j \hat{n_j}(\hat{n_j} - 1) \tag{2.26}$$

Dans ce référentiel tournant, les termes divergents ne sont plus présents dans l'Hamiltonien. Ce nouvel Hamiltonien sert de point de départ pour le développement de Floquet.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(t) = -J\Big(&a_2^\dagger \exp\left[iK_0\left(\hat{n}_2 - \hat{n}_1\right)\sin\omega t - i\frac{\omega}{2}t\right]a_1 + a_2^\dagger \exp\left[iK_0\left(\hat{n}_2 - \hat{n}_3\right)\sin\omega t + i\frac{\omega}{2}t\right]a_3 \\ &+ a_1^\dagger \exp\left[iK_0\left(\hat{n}_1 - \hat{n}_3\right)\sin\omega t + i\omega t\right]a_3\Big) + \mathbf{h.c.} \\ &= \tilde{H}^{(21)}(t) + \tilde{H}^{(23)}(t) + \tilde{H}^{(13)}(t)\end{aligned}$$

Au premier ordre du développement perturbatif, l'Hamiltonien effectif est donné par la moyenne sur une période de l'Hamiltonien dépendant du temps. A noter que la périodicité de l'Hamiltonien dans le référentiel tournant est de $\frac{2\pi}{\mu} = \frac{4\pi}{\omega}$. On a donc :

$$\mathcal{H}_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}} \tilde{\mathcal{H}}(t)\mathrm{d}t \tag{2.27}$$

Comme $\tilde{H}$ peut s'écrire comme la somme de trois termes couplant respectivement les sites 1-2 , 2-3 et 1-3 on obtient trois contributions différentes. On peut néanmoins distinguer deux cas. En effet, entre les sites 1-2 et 2-3 la différence d'énergie est $\pm\mu$. Dans le référentiel tournant, cette différence d'énergie se traduit par des termes oscillants $\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{2}t}$. La moyenne de ces termes donne alors une contribution nulle. Quand au terme $\tilde{H}^{(13)}(t)$ oscillant à la fréquence $\omega$, il donne la contribution suivante :

$$\mathcal{H}_{eff}^{(1)} = -J\left[a_1^\dagger\ \mathscr{J}_1(\mathcal{K}_0\hat{n}_{13})\ a_3 + \mathbf{h.c}\right] \tag{2.28}$$

Pour obtenir la description effective des couplages entre les sites 2 et 1, 3 il est nécessaire de pousser le développement perturbatif à l'ordre deux. A cet ordre, nous prenons en compte les transitions doubles d'une harmonique $p$ à $-p$.

$$\mathcal{H}_{eff}^{(2)} = \sum_{p>0}\frac{1}{p\mu}\left[\tilde{\mathcal{H}}_{12}^p + \tilde{\mathcal{H}}_{23}^p\ ,\ \tilde{\mathcal{H}}_{12}^{-p} + \tilde{\mathcal{H}}_{23}^{-p}\right] \tag{2.29}$$

ou $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}^p$ désigne l'harmonique $p$ de $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}(t)$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{12}^{p} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\frac{\mathcal{T}}{1}} \tilde{\mathcal{H}}_{12}(t) e^{-ip\mu t} \mathrm{d}t \\
&= -J \left[ a_1^\dagger \, \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} e^{+i\mathcal{K}_0 \sin(\omega t)\hat{n}_{12} - i(p+1)\frac{\omega t}{2}} \mathrm{d}t \; a_2 + a_2^\dagger \, \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} e^{+i\mathcal{K}_0 \sin(\omega t)\hat{n}_{21} - i(p-1)\frac{\omega t}{2}} \mathrm{d}t \; a_1 \right] \\
&= -J \left[ a_1^\dagger \, \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} z_1(t) \mathrm{d}t \; a_2 + a_2^\dagger \, \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} z_2(t) \mathrm{d}t \; a_1 \right]
\end{aligned}
$$

Sous la transformation $t \to t + \frac{2\pi}{\omega}$ , les intégrands se transforment comme suit :

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &\longrightarrow z_1(t) e^{-i(p+1)\pi} \\
z_2(t) &\longrightarrow z_2(t) e^{-i(p-1)\pi}
\end{aligned}
$$

Si p est impair alors $z_{1,2}(t)$ sont transformés en leurs opposés et le résultat est nul. Ne subsistent alors que les termes avec p impair pour lesquels l'intégrale donne deux fois la même contribution. Le même raisonnement vaut pour $\tilde{\mathcal{H}}_{12}^{p}$. En exprimant les intégrands en terme de fonctions de Bessel, on obtient les expressions suivantes :

$$
\tilde{\mathcal{H}}_{12}^{p} = -J \left[ a_1^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{p+1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{12}) \; a_2 + a_2^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{p-1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{21}) \; a_1 \right] \tag{2.30}
$$

$$
\tilde{\mathcal{H}}_{23}^{p} = -J \left[ a_2^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{p+1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{23}) \; a_3 + a_3^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{p-1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{32}) \; a_2 \right] \tag{2.31}
$$

$$
\tilde{\mathcal{H}}_{12}^{-p} = -J \left[ a_1^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{-p+1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{23}) \; a_2 + a_2^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{-(p+1)}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{32}) \; a_1 \right] \tag{2.32}
$$

$$
\tilde{\mathcal{H}}_{23}^{-p} = -J \left[ a_2^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{-p+1}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{23}) \; a_3 + a_3^\dagger \; \mathscr{J}_{\frac{-(p+1)}{2}}(\mathcal{K}_0 \hat{n}_{32}) \; a_2 \right] \tag{2.33}
$$

$$
\tag{2.34}
$$

En insérant ces expressions dans l'équation (2.29), on obtient 16 commutateurs donnant lieu à des termes quartiques en opérateur $a_i$. Finalement, l'Hamiltonien effectif se réduit à la forme suivante :

**Hamiltonien effectif** $\omega \to +\infty$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} \;=\; & -J \left[ \mathscr{J}_1[K_0(\hat{n}_1 - \hat{n}_3 - 1)] \, a_1^\dagger \, a_3 \; + \; \mathbf{h.c.} \right] \; + \; \frac{J^2}{\mu} \Big[ \mathcal{L}(K_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2) \, (a_1^\dagger a_2)^2 \\
& + \mathcal{L}(K_0, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \, (a_2^\dagger \, a_3)^2 \; + \; \mathcal{M}(K_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \, a_1^\dagger \, a_3^\dagger \, (a_2)^2 \\
& + \mathcal{N}(K_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \, a_1^\dagger \, a_3 \; + \; \mathbf{h.c.} \Big] + \frac{J^2}{\mu} \Big[ \hat{n}_2(\hat{n}_1 + 1) \, \mathcal{P}(K_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2) \\
& - \hat{n}_1(\hat{n}_2 + 1) \, \mathcal{P}(K_0, \hat{n}_2, \hat{n}_1) \hat{n}_2(\hat{n}_3 + 1) \, \mathcal{P}(K_0, \hat{n}_2, \hat{n}_3) - \hat{n}_3(\hat{n}_2 + 1) \, \mathcal{P}(K_0, \hat{n}_3, \hat{n}_2) \Big]
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Avec $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ , $\mathcal{N}$ , $\mathcal{P}$ des séries infinies de fonctions de Bessel.

$$\mathcal{L}(K_0,\hat{n},\hat{n}') = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)}\left\{\Gamma_{m+1,-m}(n-n'-1,n-n'-3)-\Gamma_{-m,m+1}(n-n'-1,n-n'-3)\right\}$$

$$\mathcal{M}(K_0,\hat{n}_{i=1,2,3}) = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)}\left\{\Gamma_{m,-m}(\hat{n}_1-\hat{n}_2-1,\hat{n}_2-\hat{n}_3-2)-\Gamma_{m,-m}(\hat{n}_2-\hat{n}_1-2,\hat{n}_2-\hat{n}_3-1)\right.$$
$$+\Gamma_{m+1,-(m+1)}(\hat{n}_1-\hat{n}_2-1,\hat{n}_3-\hat{n}_2-2)-\Gamma_{m+1,-(m+1)}(\hat{n}_1-\hat{n}_2-2,\hat{n}_3-\hat{n}_2-1)$$

$$\mathcal{N}(K_0,\hat{n}_{i=1,2,3}) = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)}\left\{\Gamma_{m+1,-m}(\hat{n}_1-\hat{n}_2-1,\hat{n}_2-\hat{n}_3)-\Gamma_{-m,m+1}(\hat{n}_1-\hat{n}_2,\hat{n}_2-\hat{n}_3+1)(\hat{n}_2+\right.$$
$$+\Gamma_{-m,m+1}(\hat{n}_1-\hat{n}_2+1,\hat{n}_2-\hat{n}_3)-\Gamma_{m+1,-m}(\hat{n}_1-\hat{n}_2,\hat{n}_2-\hat{n}_3-1)\hat{n}_2$$

$$\mathcal{P}(K_0,\hat{n},\hat{n}') = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)}\left\{\Gamma_{m,m}(n-n'-1,n-n'-1)-\Gamma_{m+1,m+1}(n-n'-1,n-n'-1)\right\}$$

Avec $\Gamma_{k,l}(x,y) = \mathscr{J}_k(K_0x)\,\mathscr{J}_l(K_0y)$.

A fréquence de forçage suffisamment élevée, la dynamique effective du système est gouvernée par :

- Un terme dominant, de transfert à un seul boson entre les sites 1 et 3
- Des transferts de paires de bosons du site 2 vers le sites 1 ($\mathcal{L}$), 3 ($\mathcal{L}$) ou 1 et 3 simultanément ($\mathcal{M}$)
- Une interaction effective, non locale et d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$

Cet Hamiltonien effectif fait apparaître une distinction claire dans la dynamique du système. On a en effet un premier terme, associé à la moyenne directe du couplage entre les sites 1-3, qui est d'ordre J et décrit des transferts effectifs à un boson entre ces sites. Les autres termes de saut sont d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$ et traduisent des transferts de paires de bosons. Il est intéressant de noter que dans le cas ou $\hat{n}_1 = \hat{n}_3$ la fonction $\mathcal{M}$ s'annule par interférence (somme de fonctions de Bessel) de deux chemins associés au passage à une harmonique p puis -p ou inversement. Le transfert de paires non-locales est alors supprimé. Ce type d'interférence rappelle le cas statique ou à interaction nulle le transfert d'une paire non-locale était supprimé par interférence. Ici, l'interaction est nulle en moyenne.

Notons également que puisque il n'existe de terme de saut à une particule qu'entre les sites 1 et 3 les sous-espaces d'états $|n_1,n_2,n_3\rangle$ avec soit $n_2$ pair ou impair sont découplés. Comme nous étudions ici la dynamique du système après avoir fixé l'état inital $|\Psi_i\rangle = |0N0\rangle$ avec N pair, le nombre d'états accessible est réduit. Pour une jonction triangulaire constituée de N bosons, la dimension de l'espace est dim$\mathscr{H} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$. La dimension de l'espace à $n_2$ pair est quant à elle dim $\mathscr{H}_{pair} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} N+1-2k = (\frac{N}{2}+1)^2$ ,soit nettement plus petite.

### 2.8.2 Limite asymptotique

Lorsque le paramètre $K_0$ est suffisamment grand devant 1, les sommes de fonctions de Bessel $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ , $\mathcal{N}$ , $\mathcal{P}$ peuvent être simplifiées. En effet, pour de grand arguments (ici $\mathcal{K}_0 \gg 1$)

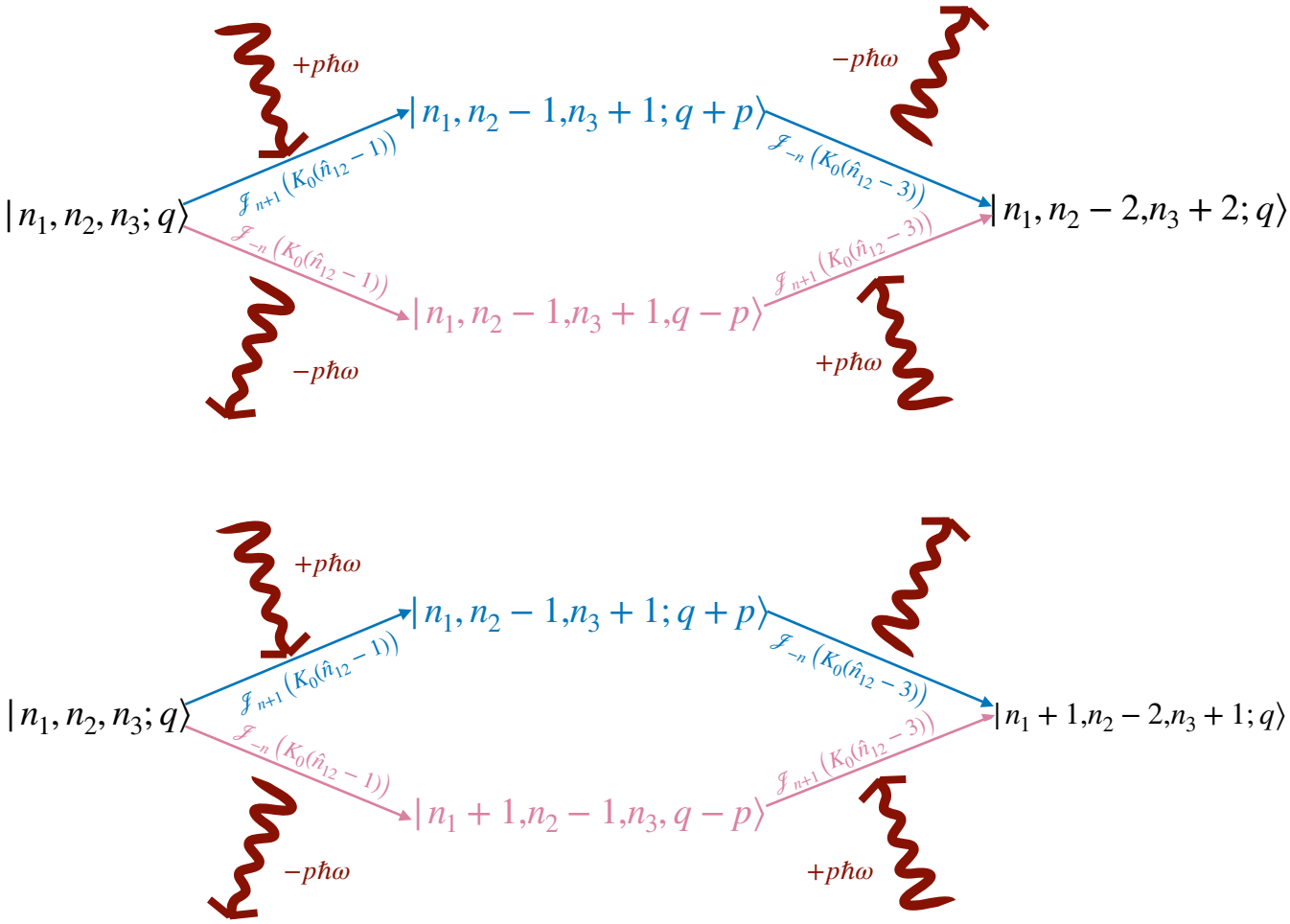



Figure 2.20: Représentation graphique des contributions aux transferts de paires. Pour chaque transfert il y a deux chemins, selon que le système absorbe ou émet en premier un paquet d'énergie $\hbar\omega$ (Haut) : Transfert de paires locales. (Bas) : Transfert de paires correlées.

la fonction de Bessel $\mathcal{J}_n(x)$ prend la forme asymptotique suivante :

$$\mathcal{J}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.36}$$

Par exemple, si l'on injecte l'expression (2.36) dans les sommes $\mathcal{P}(K_0, n_i, n_j)$ associées aux termes potentiels de l'Hamiltonien effectif on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{pot}^{(123)} = \sum_n \frac{4}{\pi}(-1)^n \left[\operatorname{sinc}\left(2\mathcal{K}_0(\hat{n}_{21} - 1)\right) - \operatorname{sinc}\left(2\mathcal{K}_0(\hat{n}_{21} + 1)\right)\right. \\ \left. + \operatorname{sinc}\left(2\mathcal{K}_0(\hat{n}_{32} - 1)\right) - \operatorname{sinc}\left(2\mathcal{K}_0(\hat{n}_{32} + 1)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin(x)}{x} \tag{2.38}$$

Les fonctions de Bessel prennent ici en arguments les différences d'opérateurs $n_{ij}$ et les différents termes du développement doivent être traités séparément en fonction des valeurs

$n_{ij}$. En fixant les bonnes conditions pour le développement asymptotique et en utilisant le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on obtient la limite suivante :

$$H_{eff}^{Asympt,(2)} = \left[\mathcal{H}^{(12)}(a_1^\dagger\, a_2)^2 + \mathcal{H}^{(23)}(a_2^\dagger\, a_3)^2 + \mathcal{H}^{(123)}(a_2^\dagger)^2\, a_1\, a_3\right] + H.c. + \mathcal{H}_{pot}^{(123)} \quad (2.39)$$

Avec,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{12} &= \frac{J^2}{2K_0\mu}\left[\delta_{\hat{n}_{12},2}\cos(2K_0) + (1-\delta_{\hat{n}_{12},1})(1-\delta_{\hat{n}_{12},2})(1-\delta_{\hat{n}_{12},3})\sin(2K_0)\right]\frac{1}{\sqrt{|\hat{n}_{12}-1||\hat{n}_{12}-3|}} \\
&+ \frac{J^2}{\mu}\left[\delta_{\hat{n}_{12},1}+\delta_{\hat{n}_{12},3}\right]\mathcal{J}_1(2K_0) \\
\mathcal{H}^{23} &= \frac{J^2}{2K_0\mu}\left[\delta_{\hat{n}_{23},2}\cos(2K_0) + (1-\delta_{\hat{n}_{23},1})(1-\delta_{\hat{n}_{23},2})(1-\delta_{\hat{n}_{23},3})\sin(2K_0)\right]\frac{1}{\sqrt{|\hat{n}_{23}-1||\hat{n}_{23}-3|}} \\
&+ \frac{J^2}{\mu}\left[\delta_{\hat{n}_{23},1}+\delta_{\hat{n}_{23},3}\right]\mathcal{J}_1(2K_0) \\
\mathcal{H}^{123} &= \frac{J^2}{2K_0\mu}\left[\frac{(1-\delta_{\hat{n}_{32},1})(1-\delta_{\hat{n}_{12},2})}{\sqrt{|\hat{n}_{12}-1||\hat{n}_{32}-2|}}\cos\left(K_0(\hat{n}_{13}-1)\right) - \frac{(1-\delta_{\hat{n}_{32},2})(1-\delta_{\hat{n}_{12},1})}{\sqrt{|\hat{n}_{12}-2||\hat{n}_{32}-1|}}\cos\left(K_0(\hat{n}_{13}+1)\right)\right] \\
&+ \left[\delta_{\hat{n}_{12},2}\mathcal{J}_0\left(K_0(\hat{n}_{32}-1)\right) + \delta_{\hat{n}_{32},1}\mathcal{J}_0\left(K_0(\hat{n}_{12}-2)\right) - \delta_{\hat{n}_{12},1}\mathcal{J}_0\left(K_0(\hat{n}_{32}-2)\right) - \delta_{\hat{n}_{32},2}\mathcal{J}_0\left(K_0(\hat{n}_{12}\right.\right. \\
\mathcal{H}_{pot}^{123} &= \frac{J^2}{2\mu}\left[\mathrm{sinc}(2K_0(\hat{n}_{21}-1))\,\hat{n}_1\,(\hat{n}_2+1) - \mathrm{sinc}(2K_0(\hat{n}_{21}+1))\,\hat{n}_2\,(\hat{n}_1+1)\right. \\
&+ \left.\mathrm{sinc}(2K_0(\hat{n}_{32}-1))\,\hat{n}_2\,(\hat{n}_3+1) - \mathrm{sinc}(2K_0(\hat{n}_{32}+1))\,\hat{n}_3\,(\hat{n}_2+1)\right]
\end{aligned}$$

Dans cette limite asymptotique, les transferts de paires de bosons vers le même site 1 ou 3 sont inhibés pour $K_0 = K_{0,n} = \frac{n\pi}{2}$, tant que $n_{23} \neq 2$ et $n_{12} \neq 2$. De plus, par symétrie le terme de transfert de paires non-local est nul dès lors que $n_1 = n_3$. Si le système évolue à partir de l'état initial $|0N0\rangle$ pour $K_0 = K_{0,n}$, il reste alors bloqué dans cet état. Ce phénomène est réminescent du Coherent Destruction of Tunneling (CDT) (2.5).

## 2.9 Analyse de la formation d'états N00N par réduction d'échelles

Nous avons vu précédemment que le forçage périodique à résonance en présence d'une différence de potentiel $\mu$ grande devant les autres échelles d'énergies induit dans le système une dynamique de paires. En particulier, l'Hamiltonien effectif obtenu à partir du développement de Floquet fait apparaître deux échelles d'énergie : $J$ et $\frac{J^2}{\mu}$. Cet Hamiltonien montre également comment l'espace de Hilbert accessible est réduit en raison du découplage entre les sous-espaces à $n_2$ pair et impair. Je montre ici comment par séparations successives du spectre la dynamique du système se trouve confinée dans un sous-espace d'états contenant les états cibles composant l'état N00N. Dans un premier temps, la limite $\mu \sim \infty$ est étudiée et permet de dégager de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ un ensemble réduit d'états dégénérés contenant en particulier l'état $|0N0\rangle$ et les états $|N00\rangle$ et $|00N\rangle$. La première séparation

d'échelle au sein du spectre apparaît lors de la dérivation de l'hamiltonien effectif. Cette dérivation élimine en effet l'échelle d'énergie $\mu$. La seconde séparation intervient lorsque l'on traite les termes d'ordres $\frac{J^2}{\mu}$ en perturbation par rapport à la limite $\mu \sim \infty$. Je montre alors que la dynamique du système reste confinée dans un sous-espace d'états d'énergie $\sim \frac{J^2}{\mu}$ . Une troisième séparation d'échelle d'ultra basse énergie émerge lorsque l'on se place autour des points $K_{0,n}$ de CDT. Autour de ces points, je montre qu'un ensemble de couplages sont d'ordre $\frac{J^2}{\mu}\frac{\delta K_0}{K_0}$ tandis que d'autres restent d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$. Le même type de démarche perturbative permet de montrer que la dynamique du système est réduite à un sous-espace d'ultra-basse énergie définissant alors le temps de récurrence $t_{N00N} = \frac{\mu}{J^2}(\frac{K_0}{\delta K_0})^2$ des états N00N observés.

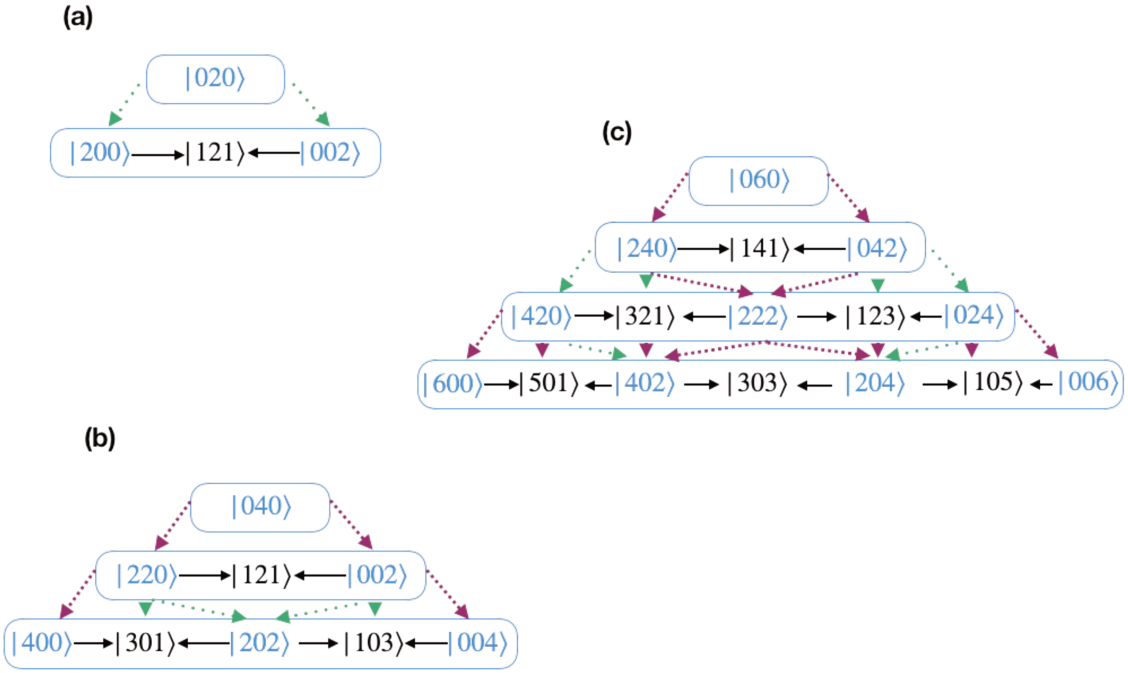



Figure 2.21: Espace des états à $n_2$ pair, associés à l'Hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{eff}$. Les couplages représentés par des pointillés verts sont d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$ au voisinage des points de CDT. Les blocs sont complètement découplés dans la limite $\mu \longrightarrow \infty$. Les couplages en pointillés rouges sont d'ordre $\frac{J^2}{\mu}\frac{\delta K_0}{K_0}$ au voisinage du CDT. Les flèches pleines en noir représentent le couplage à une particule entre les sites 1 et 3. (a) N = 2 - Aucun couplage ne s'annule au CDT. (b) N = 4 (c)N = 6

### 2.9.1 Limite $\mu \longrightarrow \infty$

Pour commencer, plaçons-nous dans la limite $\mu \to \infty$. Si l'on néglige donc les termes d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$, l'Hamiltonien effectif se décompose en $(\frac{N}{2}+1)$ blocs à $n_2$ fixé (en bleu sur la figure 2.21). Les états composant ces blocs sont connectés entre eux par le terme de saut à une particule, d'ordre J et connectant les sites 1 et 3. Chaque sous-espace est alors représenté par

une matrice tridiagonale dont les éléments $T_{n,1}$, $T_{n,2}$, ..., $T_{n,2n}$ vérifient $T_{n,m} = -T_{n,2n-m+1}$ en raison de la symétrie de $\mathscr{J}_1$ sous l'inversion $n_{13}$. Chaque bloc n de dimension $2n+1$ est constitué de 2n valeurs propres d'ordre J et d'un unique état à énergie nulle. Pour le montrer, considérons d'abord quelques cas simples. Pour $N = 2$, le sous-espace à $n_2$ pair est engendré par l'ensemble d'états suivant : $\mathcal{B}_2 := \{|020\rangle, |200\rangle, |101\rangle, |002\rangle\}$. La partie associée au sous-espace $n_2 = 0$ de l'Hamiltonien effectif à $\mu \to \infty$ s'écrit :

$$\mathcal{H}_{eff}^{N=2} = \begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & -T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

L'état à énergie nulle est donné par $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|200\rangle + |002\rangle)$. Le spectre de $\mathcal{H}_{eff}$ contient donc deux états dégénérés à énergie nulle donnés par $|020\rangle$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|200\rangle + |002\rangle)$.

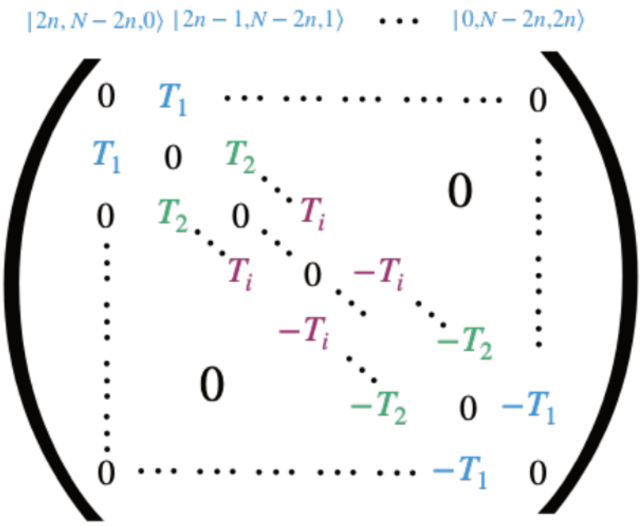



Figure 2.22: Esquisse de la matrice de $\mathcal{H}_{eff}$ dans la limite $\mu \sim \infty$. Pour qu'un vecteur soit vecteur propre de cette matrice à énergie nulle, les coefficients associés a un état sur deux doivent être nuls.

Dans le cas général, pour chaque bloc n on trouve un état unique à énergie nulle. On représente sur la figure 2.22 la matrice associée à un bloc d'indice n. Si l'on cherche à déterminer un état propre à énergie nulle de cette matrice, on remarque que le coefficient de l'état de base $|2n-1, N-2n, 1\rangle$ doit être nul. Comme esquissé sur la figure 2.22, tous les coefficients d'indice impair sont nuls par récurrence. Or comme les états sont ici classés par valeurs croissante de $n_{13}$ avec $\max(n_{13}) = 2n$, l'état à énergie nulle contient uniquement des composantes sur l'ensemble des états à $n_1$ ou $n_3$ pair. Dans la limite $\mu$ infini, le spectre de $\mathcal{H}_{eff}$ est donc composé d'un ensemble de $\frac{N}{2} + 1$ états à énergies nulles et pour lesquels les nombres de bosons de chaque sites sont pairs. Les états d'occupation impaire quant à eux sont rejetés à haute énergie $\sim J$.

### 2.9.2 Perturbation en $\frac{J^2}{\mu}$

Les termes en $\frac{J^2}{\mu}$ transférant des paires de bosons peuvent être traités en perturbation dans la limite ou $\mu \gg J$ avec $\mu$ fini. Comme les états propres à $\mu$ infini sont séparés en deux blocs de basse (L) et de haute (H) énergie avec le bloc (L) qui contient $\frac{N}{2}+1$ états dégénérés, la perturbation a pour effet principal de lever la dégénérescence du bloc (L). Le bloc de basse énergie se retrouve constitué d'un ensemble d'états séparés par des énergie de l'ordre de $\frac{J^2}{\mu}$. Les énergies des états du secteur (H) restent de l'ordre de J à une correction d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$ près.

Analysons explicitement le cas N = 4. Dans la limite $\mu \simeq \infty$, on vérifie que l'on obtient 3 états de basse énergie. Ces états prennent la forme suivante :

$$|\Psi_1^{(L)}\rangle = |040\rangle \tag{2.42}$$

$$|\Psi_2^{(L)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|220\rangle + |022\rangle\right) \tag{2.43}$$

$$|\Psi_3^{(L)}\rangle = \cos(\chi)\,|\Psi_N^{1,3}\rangle - \sin(\chi)\,|202\rangle \tag{2.44}$$

$$\tag{2.45}$$

On définit en outre l'état N00N à deux modes :

$$|\Psi_N^{1,3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|400\rangle + |004\rangle\,\Big) \tag{2.46}$$

Les états avec des nombres de bosons $n_2$ et $n_3$ impairs sont éliminés et n'apparaissent effectivement pas dans les états à énergie nulle dans la limite $\mu \sim \infty$. De plus, il est très important de noter que l'état initial $|040\rangle$ fait partie de cet ensemble d'états d'énergie nulle et ce peu importe le nombre total de bosons puisque l'état $|0N0\rangle$ est le seul état de son bloc $n_2 = N$. L'état à énergie nulle associé au dernier bloc contient lui la superposition $|\Psi_N^{1,3}\rangle$, la combinaison $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|400\rangle - |004\rangle\right)$ étant rejetée à haute énergie.

Si l'on perturbe ce système en considérant cette fois $\mu$ fini avec $\mu \ll J$, on peut montrer que la dégénerescence est complètement levée et qu'on obtient un ensemble d'états d'énergies de l'ordre de $\frac{J^2}{\mu}$. Pour ce faire, calculons simplement la correction au premier ordre à l'énergie pour le secteur dégénéré. Cette correction s'obtient en diagonalisant la restriction de l'Hamiltonien de perturbation au sous-espace dégénéré. On note $\mathscr{H}_D$ le sous-espace engendré par les états $\left\{|\Psi_1^{(L)}\rangle, |\Psi_2^{(L)}\rangle, |\Psi_3^{(L)}\rangle\right\}$ et $\mathcal{W}_D$ l'Hamiltonien de perturbation restreint au sous-espace $\mathscr{H}_D$. Cet Hamiltonien peut être décomposé en une somme de deux termes $\mathcal{W}_D = \mathcal{W}_D^K + \mathcal{W}_D^U$ associés respectivement au transfert de paires de bosons et à l'interaction effective.

Remarquons que la partie interaction de cet Hamiltonien est :

- Non-locale entre les sites 2-3 et 2-1 : Les termes sont proportionnels à $n_i(n_j+1)$ de sorte qu'ils sont nuls si $n_i$ et $n_j = 0$.

- Antisymétrique sous la substitution $n_1 \longrightarrow n_2$ , $n_2 \longrightarrow n_3$

Pour l'ensemble d'états considérés, le terme d'interaction est donc nul. On obtient donc la matrice suivante :

$$\mathcal{W}_D = \frac{J^2}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

On trouve aisément que cette matrice conserve un état propre d'énergie nulle et deux états d'énergie $E_{\pm}^{(1)} = \frac{J^2}{\mu}\sqrt{a^2+b^2}$. En particulier, l'état d'énergie nulle est donné par la superposition

$$\tilde{\Psi}_1^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi_1^{(L)}\rangle - |\Psi_3^{(L)}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|040\rangle - \cos(\chi)\,|\Psi_N^{1,3}\rangle + \sin(\chi)\,|202\rangle\right) \tag{2.48}$$

Cet état comporte notamment une superposition des états cibles $|N00\rangle$, $|0N0\rangle$ et $|00N\rangle$.

La figure 2.23 illustre le schéma de perturbation exposé précédemment pour N = 4. Sur le panneau (a), on observe la levée de dégénérescence linéaire associée à la finitude de $\mu$. Les panneaux (b), (c) et (d) montrent comment pour $\mu$ suffisamment élevé les états impairs sont éliminés des états de basse énergie. On remarque également que l'état qui reste à énergie nulle après la levée de dégénerescence contient principalement les états cibles.

### 2.9.3 Restriction de la dynamique au secteur de basse énergie

Dans la suite, on suppose que l'espace propre de l'Hamiltonien effectif peut se décomposer en une partie de basse $(\mathscr{H}_L, |\Psi^{(L)}\rangle)$ et de haute $(\mathscr{H}_H, |\Psi^{(H)}\rangle)$ énergie. En choisissant de faire évoluer le système à partir de l'état inital $|0N0\rangle$ on contraint la dynamique à rester principalement dans ce secteur de basse énergie. En effet, dans la limite $\mu \sim \infty$ l'état initial $|0N0\rangle$ est un état propre du système et, comme montré précédemment, appartient également au secteur de basse énergie. Néanmoins, en levant la dégénérescence entre les états d'énergie nulle, la perturbation d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$ couple également ces états au secteur de haute énergie (H). On peut cependant montrer que la dynamique reste tout de même contenue en majeure partie dans le secteur de basse énergie. Intuitivement, l'état $|0N0\rangle$ peut alors se décomposer sur les états propres de $\mathcal{H}_{eff}$ de la manière suivante :

$$|0N0\rangle = \sum_{\eta} a_\eta\,|\Psi_\eta^{(L)}\rangle + \sum_{\kappa} b_\kappa\,|\Psi_\kappa^{(H)}\rangle \tag{2.49}$$

Ou les $b_\kappa \ll a_\eta$ avec $a_\eta \sim o(1)$ et $a_\eta \sim o(\frac{J}{\mu})$.

Pour N = 4, la figure 2.24 (haut), montre la valeur absolue du poids de l'état $|040\rangle$ sur les différents états propres de $\mathcal{H}_{eff}$. Les coefficients tracés en bleu sont les poids de l'état $|040\rangle$ sur le secteur $\mathscr{H}_L$ et ceux en rouge correspondent au secteur $\mathscr{H}_H$. Pour $\mu$ suffisamment grand ($> 5$), les coefficients bleus prennent des valeurs autour de 0.6 tandis que les coefficients rouges tendent vers 0. L'état $|040\rangle$ se décompose donc essentiellement sur le secteur de basse énergie et ce tant que la séparation d'échelle est présente, confirmant ainsi l'équation

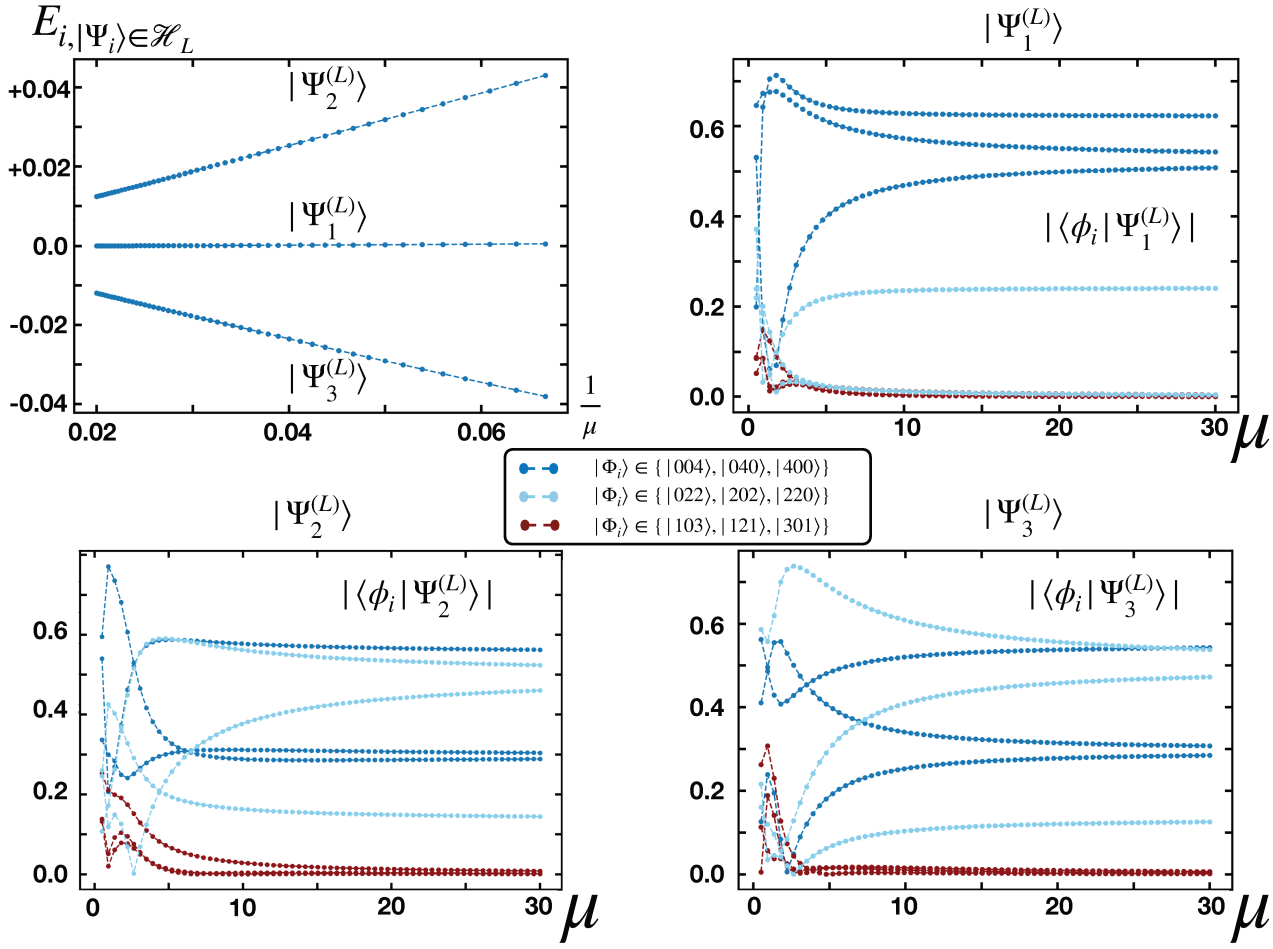



Figure 2.23: $N = 4$ (a) Levée de dégénerescence due aux termes d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$. On trace les énergies propres des états de plus basse énergie en fonction de l'inverse de $\mu$. (b,c,d) Projection des états $|\Psi_1^{(L)}\rangle$, $|\Psi_2^{(L)}\rangle$ et $|\Psi_3^{(L)}\rangle$ sur la base d'états de Fock à $n_2$ pair en fonction de $\mu$. Les états de Fock sont séparés en trois groupes : En bleu foncé les états de Fock extrêmes qui composent l'état N00N à trois modes. En bleu clair, les autres états pour lesquels $n_1$, $n_2$ et $n_3$ sont pairs. En rouge, les états impairs, qui sont entièrement rejetés à haute énergie dans la limite $\mu \sim \infty$.

(2.49).

La décomposition de l'état $|\Psi_N^{1,3}\rangle$ (Eq (2.45)) (figure 2.24, bas) diffère légèrement de ce schéma. En effet, la majorité des projections sur les états de haute énergie tendent vers 0 mais il subsiste tout de même quelques coefficients du même ordre de grandeur que les projections sur le secteur de basse énergie. La courbe en rose montre d'ailleurs que $\sum_{i\in\mathscr{H}_D} |\langle 040|\Psi_i^L\rangle|^2 \simeq 0.85$. Cette différence est due au fait que l'état $|\Psi_N^{1,3}\rangle$ n'est pas état propre dans la limite $\mu \sim \infty$ puisque l'état $|202\rangle$ entre également en jeu. Cette décomposition imparfaite contribue à réduire la fidélité totale de l'état cible.

On voit néanmoins que l'amplitude de probabilité d'atteindre l'état $|\Psi_N^{1,3}\rangle$ à partir de

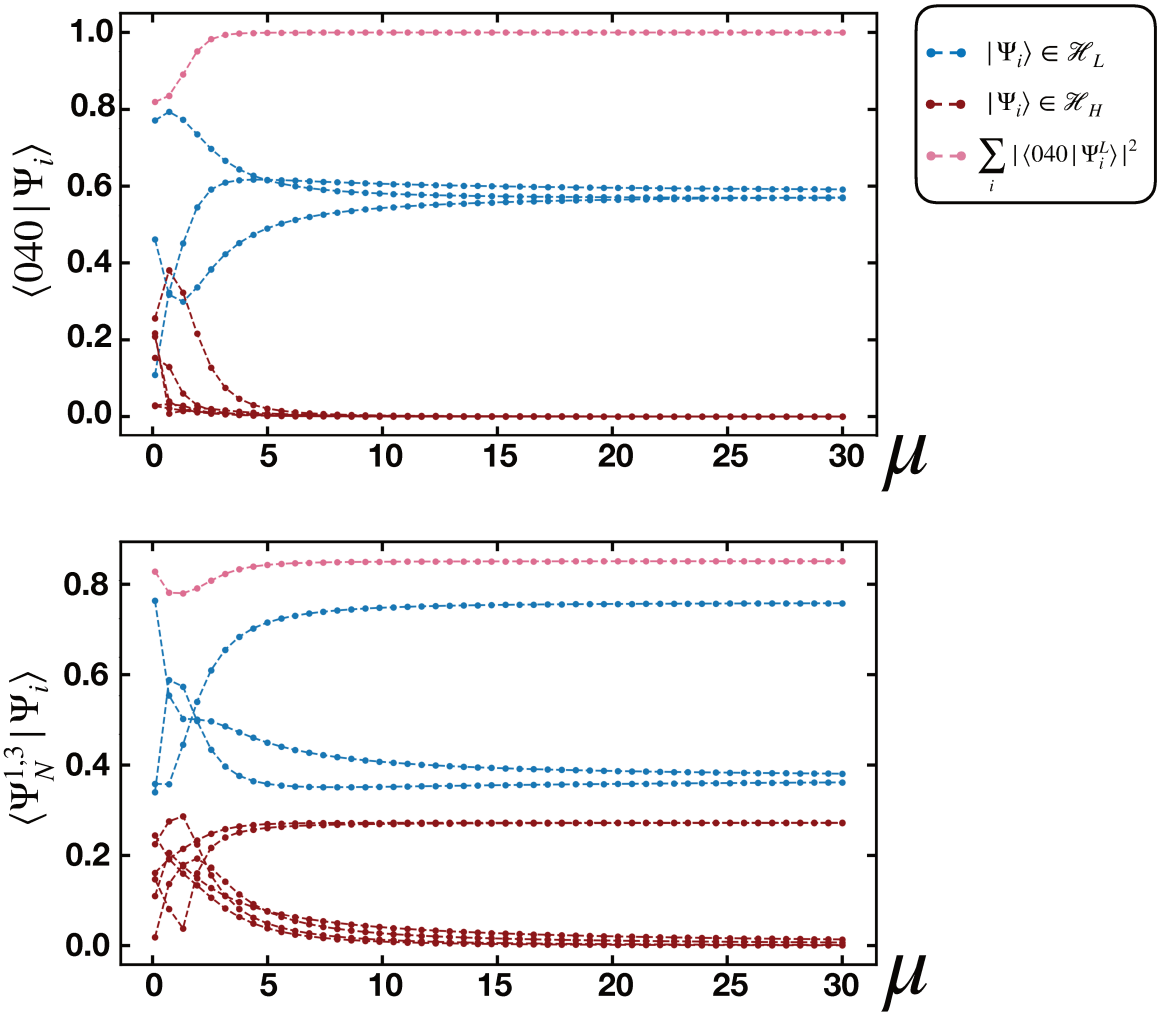



Figure 2.24: Projection d'un état sur l'ensemble des états propres de $\mathcal{H}_{eff}$. Les projections sont calculées pour $K_0 = 2.7$. En rouge sont tracées les projections sur l'ensemble des états de hautes énergies. En bleu les projections sur les états de basse énergie. La somme des probabilités associé au secteur de basse énergie est tracées en rose, indiquant à quel point la partie à haute énergie est présente au sein d'un état donné. (Haut) : Projection de l'état $|040\rangle$ (Bas) : Projection de l'état $|\Psi_N^{1,3}\rangle$

l'état initial $|040\rangle$ prend la forme suivante :

$$\langle \Psi_N^{1,3}|e^{-i\mathcal{H}_{eff}t}|040\rangle = \sum_\eta \tilde{a}_\eta^* a_\eta e^{i\epsilon_\eta t} + \sum_\kappa \tilde{b}_\kappa^* b_\kappa e^{i\mathcal{E}_\kappa t} \tag{2.50}$$

Dans cette équation, $\epsilon_\eta \sim o(\frac{J^2}{\mu})$ et $\mathcal{E}_\kappa \sim o(J)$ sont respectivement les énergies des états propres de basses et de hautes énergies. Les coefficients $a_\eta$ et $\tilde{a}_\eta^*$ sont d'ordre 1 tandis que les coefficients $b_\kappa$ sont d'ordre $\frac{J}{\mu}$ et les coefficients $\tilde{b}_\kappa^*$ d'ordre 1 au maximum avec la majeure partie d'ordre $\frac{J}{\mu}$. L'amplitude de probabilité se décompose donc en deux termes provenant des secteurs de basse et de haute énergie. Le terme provenant du secteur (H) est d'amplitude négligeable devant le terme (L) et oscille beaucoup plus rapidement.

Finalement, la dynamique du système reste pratiquement contenue dans un sous-espace $\mathscr{H}_L$ de dimension $\frac{N}{2}+1$ associé à chaque bloc à $n_2$ fixé et pair. Notons que l'espace des états d'une jonction à deux sites et N bosons est de dimension $N+1$. Il apparaît ici que du système initial à **trois modes**, modulé à la résonance entre les sites 1 et 3, ne sont essentiels que le même nombre d'états que l'on obtiendrait pour une jonction à **deux modes** constituée de **paires** de bosons.

Néanmoins, on observe (Figure 2.25) que même pour le cas N = 2 cette séparation d'échelle au sein du spectre n'est pas valable pour tout $K_0$. Ceci peut se comprendre en notant que dans $\mathcal{H}_{eff}$, le terme de transfert à une particule est en fait d'ordre $\mathscr{J}_1(K_0(n_{13}-1))$. Pour $N = 2$, on voit que les pincements du spectre correspondent aux zéros de la fonction $\mathscr{J}_1(K_0)$. Lorsque cette fonction approche 0, les amplitudes de saut de paires deviennent de l'ordre de grandeur des amplitude de saut de boson unique et la séparation d'échelles n'a alors plus lieu. Plus N est grand, plus il y a de modes $\mathscr{J}_1(K_0)$, $\mathscr{J}_1(2K0)$, $\mathscr{J}_1(3K_0)$ , ... , $\mathscr{J}_1(m.K_0)$ qui contribuent au spectre. De fait, les régions pour lesquels cette séparation d'énergie est observable sont de plus en plus étroites en $K_0$.

Afin d'observer des états N00N pour des N suffisamment grands (N > 4), il faut alors se placer au voisinage des points $K_{0,n}$ pour lesquels le système est en état de CDT. Autour de ces points, le système génère en effet une séparation d'échelle supplémentaire permettant d'isoler les bons états.

### 2.9.4 Au voisinage des points de CDT

Nous avons remarqué numériquement en section 1.5 que de très bons états N00N se formaient pour $N > 4$ au voisinage des points de CDT $K_{0,n} = \frac{n\pi}{2}$. L'analyse de l'Hamiltonien asymptotique montre qu'au niveau de ces points, une séparation d'échelles entre différents couplages s'opère. La forme asymptotique de l'Hamiltonien effectif montre que les couplages qui ne s'annulent pas correspondent au cas ou $n_{12} = 2$ et $n_{23} = 2$. Proche du point de CDT, posons $K_0 = K_{0,n} + \delta K_0$. En développant les amplitudes de saut de l'Hamiltonien asymptotique, on trouve que l'état initial $|0N0\rangle$ et les états $|N00\rangle$ et $|00N\rangle$ sont connectés par un ensemble de couplages d'ordre $(\frac{J^2}{\mu})(\frac{\delta K_0}{K_0})$ et quelques couplages d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$. En effet comme on peut le voir sur la figure 2.21 dans le cas $N = 6$, dans la chaîne de couplage connectant l'état initial $|0N0\rangle$ aux états $|N00\rangle$ et $|00N\rangle$ certains s'annulent parfaitement au CDT tandis que d'autres restent d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$. Dans la base des états de basse énergie, l'Hamiltonien effectif prend la forme :

$$\mathcal{H}_{eff}^{CDT} = \begin{pmatrix} U_{eff}^1 & a & 0 & 0 \\ a & U_{eff}^2 & b & 0 \\ 0 & b & U_{eff}^3 & c \\ 0 & 0 & c & U_{eff}^4 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

avec $U^i_{eff}$ et $b$ d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$ et $a, c$ d'ordre $(\frac{J^2}{\mu})(\frac{\delta K_0}{K_0})$ au voisinage du CDT. Dès lors, nous nous retrouvons dans une situation similaire à celle rencontrée précédemment. Il suffit alors pour dégager la structure du spectre de diagonaliser $\mathcal{H}_{eff}$ au point de CDT puis de traiter en perturbation l'ensemble des couplages d'ordre $\frac{J^2}{\mu}\frac{\delta K_0}{K_0}$. Au point de CDT, on voit que les couplages $a$ et $c$ sont nuls. On a alors les deux états de bout de chaîne qui sont états propres de $\mathcal{H}^{CDT}_{eff}$. Ces états contiennent l'état initial $|060\rangle$ et les états $|600\rangle$ et $|006\rangle$. Il reste alors à diagonaliser une matrice 2x2. On trouve alors deux états avec des énergies de l'ordre de $\frac{J^2}{\mu}$. Le spectre est alors une nouvelle fois séparé en deux secteurs de basse (L) et ultra-basse énergie (UL) . Le secteur d'ultra-basse énergie contient les états cibles.

On voit effectivement sur le panneau (c) de la figure (2.25) qu'autour de $K_0 \simeq 7.85$, soit proche de $\frac{5\pi}{2}$ une première séparation d'échelle s'opère avec un ensemble d'états d'énergie de l'ordre de 1, un ensemble de basse énergie d'ordre $10^{-2}$ correspondant à l'échelle $\frac{J^2}{\mu}$ et un dernier ensemble d'ultra-basse énergie de l'ordre de $10^{-4}$.

La figure 2.26 permet d'illustrer le comportement du système au voisinage du CDT. On trace autour du point de CDT $K_{0,5}$ les projections des états de Fock à 6 particules sur les deux états d'ultra-basse énergie. Les projections sont triées par secteurs d'états (voir légende). On voit qu'au point de CDT on ne trouve plus de composantes que sur l'état $|060\rangle$, ce qui est cohérent avec l'évolution $|\Psi(t)\rangle$ observé numériquement en section 2.5.1 . Autour du CDT, on voit que les deux états d'ultra-basse énergie ont des composantes principalement sur les états $|060\rangle$, $|600\rangle$, $|006\rangle$ et les états $|204\rangle$ et $|402\rangle$. Les états impairs et les états du centre dont les couplages ne s'annulent pas au CDT sont quant à eux rejetés à plus haute énergie. On trouve l'optimum de fidélité pour l'état N00N (2.26 , (b)) en cherchant le $K_0$ proche du CDT pour lequel les amplitudes des états $|060\rangle$, $|600\rangle$, $|006\rangle$ sont maximales.

Reprenant le même raisonnement que dans la section précédente, on peut décomposer la dynamique du système en plusieurs blocs correspondants chacun à une des échelles d'énergie rencontrées. On obtient trois blocs, d'énergie $\sim J$ (H), d'énergie $\sim \frac{J^2}{\mu}$ (L) et d'énergie $\sim \frac{J^2}{\mu}\frac{\delta K_0}{K_0}$ (UL). La dynamique restant alors essentiellement contenue dans le secteur (UL) d'ultra-basse énergie.

$$|0N0\rangle = \sum_{\xi} c_\xi \, |\Psi^{(UL)}_\xi\rangle + \sum_{\eta} a_\eta \, |\Psi^{(L)}_\eta\rangle + \sum_{\kappa} b_\kappa \, |\Psi^{(H)}_\kappa\rangle \tag{2.52}$$

Le couplage effectif entre les différentes composantes de l'état N00N de l'ordre de $(\frac{J^2}{\mu})(\frac{\delta K_0}{K_0})^2$ fixe alors le temps caractéristique de récurrence d'un état N00N. La valeur précise du paramètre $K_0$ est difficile à prédire analytiquement mais il existe au voisinage de chaque $K_{0,n}$ un $K_0$ optimum pour lequel les états parasites, c'est à dire différents des états $|N00\rangle$, $|0N0\rangle$ et $|00N\rangle$ ont leur proportion réduite au maximum. La fidélité de l'état N00N est alors maximale.

Finalement, dans ce protocole les états N00N parviennent à se former en raison d'une réduction drastique de l'espace des états accessibles. Au sein du système, cette réduction

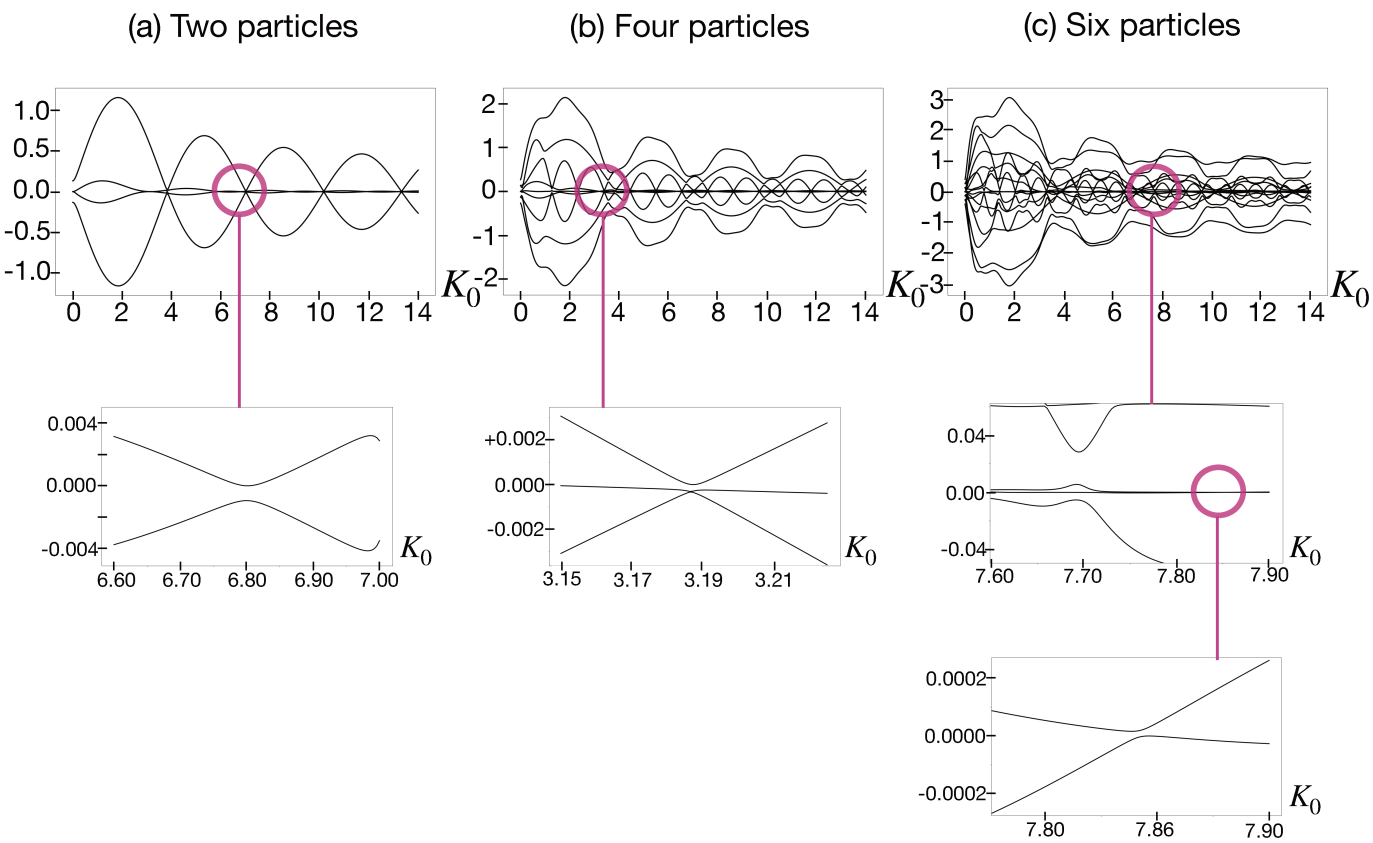



Figure 2.25: Spectre de l'Hamiltonien effectif pour (a) N =2, (b) N = 4, (c) N = 6 à différentes échelles. Les états de basse énergie émergent par zooms successifs : deux états à N = 2, 3 états pour N = 4, 4 pour N = 6 dont deux états sont réellement séparés à ultra-basse énergie proche du point de CDT.

s'explique par deux étapes d'un processus s'apparentant à une renormalisation. Premièrement le système est diagonalisé dans un cas limite, puis par perturbation un ensemble d'états de hautes énergies se trouve éliminé de la dynamique. Le temps de récurrence de l'état N00N généré est alors de l'ordre de grandeur de l'inverse des différences d'énergie entre les états propres du dernier secteur d'ultra-basse énergie. Cet ensemble de processus fait émerger au sein du système une hiérarchie entre les différents couplages effectifs.

**Hierarchie des échelles d'énergie**

$$\mu \gg J \gg \frac{J^2}{\mu} \gg \frac{J^2}{\mu}(\frac{\delta K_0}{K_0}) \gg \omega_{N00N} = \frac{J^2}{\mu}(\frac{\delta K_0}{K_0})^2 \tag{2.53}$$

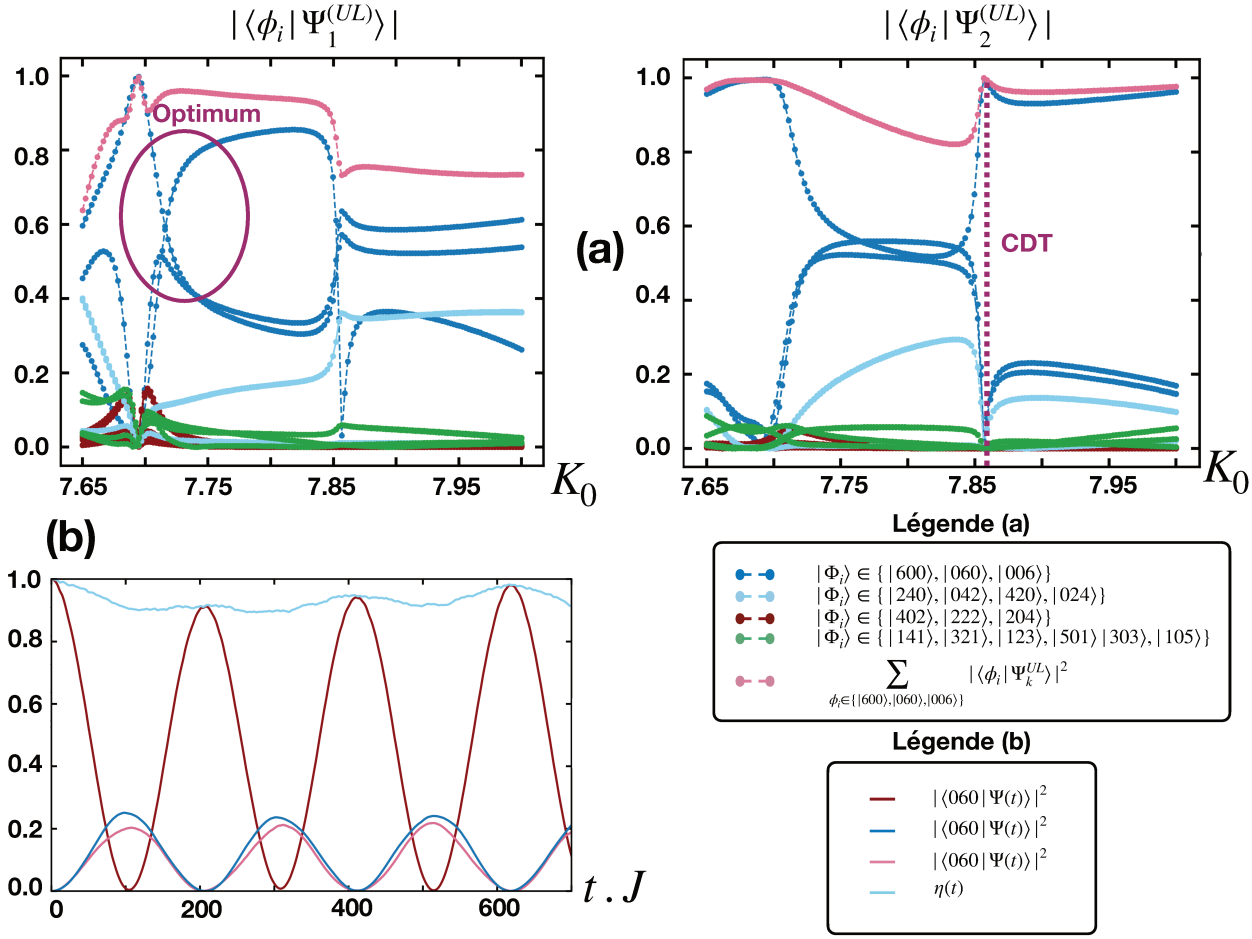



FIGURE 2.26: $N = 6$. Optimum de l'état N00N au voisinage du CDT - (a) et (c) : Projection des deux états d'ultra-basse énergie sur les états de base. (b) : Etat N00N correspondant à l'optimum déterminé à l'aide des projections

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai étudié dans différentes géométries la dynamique au sein d'un modèle de Bose-Hubbard à M sites, M allant de 2 à 5. Afin d'étudier plus en détail les phénomènes physiques entrant en jeu, je me suis concentré sur le cas d'une jonction triangulaire. Dans cette jonction les énergies $\pm\mu$ des sites 1 et 3 , définies par rapport l'énergie du site 2 sont supposées très grandes devant les couplages tunnel entre les sites.

J'ai montré dans un premier temps comment en introduisant une interaction statique entre les bosons il est possible de déclencher un transfert de paires de bosons corrélés, partant du site 2 et allant vers les sites 1 et 3. Ce transfert se manifeste par des oscillations de Rabi quasi-parfaite entre les états $|n_1, n_2, n_3\rangle$ et $|n_1 + 1, n_2 - 2, n_3 + 1\rangle$. Néanmoins, nous avons vu que l'interaction est d'une part nécessaire pour engendrer ce processus mais qu'elle limite également le nombre de paires transférables.

Dans un second temps, j'ai considéré une interaction modulée périodiquement dans le temps. Le réglage de la fréquence d'oscillation à la condition de résonance $\omega = 2\mu$ implique alors qu'une dynamique de paires se met en place dans le système. J'ai alors observé numériquement avec un nombre de particules allant de 2 à 10 que plusieurs dynamiques intéressantes apparaissaient. Premièrement, j'observe que l'on peut trouver des points $K_0$ pour lesquels le système reste complètement piégé dans l'état initial (CDT). Ensuite, j'observe que pour certaines valeurs de $K_0$ la dynamique du système se restreint presque exclusivement aux états $|N00\rangle$, $|0N0\rangle$ et $|00N\rangle$. Ainsi, on peut trouver à certains temps d'évolution le système dans une superposition équilibrée de ces trois états. Ce type d'état, appelé état N00N multi-modes (trois ici), présente un grand intérêt métrologique. Je montre alors par la suite l'observation de très bon états N00N, avec le même protocole, dans des systèmes de 2 à 5 sites avec un nombre de bosons allant jusqu'à 10.

Dans une dernière partie, je propose une explication à la formation des états N00N. Partant toujours du cas de la jonction triangulaire, je dérive dans le cadre de la théorie de Floquet un Hamiltonien effectif indépendant du temps, qui décrit la dynamique du système aux échelles de temps $\tau \ll \frac{\hbar}{\mu}$. Au sein de cet Hamiltonien, la dynamique de paires apparaît de manière limpide. Dans la limite ou $K_0 \gg 1$, je montre que l'Hamiltonien peut être approché par une forme asymptotique plus simple et à partir de laquelle on peut comprendre et prédire les points pour lesquels le système se trouve dans un état de CDT. Ceux-ci correspondent aux points $K_{0,n} = \frac{n\pi}{2}$ pour lesquels le termes de transfert de paires locales s'annule.

Par une procédure de renormalisation à la main en deux étapes je montre comment la dynamique de la jonction triangulaire est restreinte peu à peu à un sous-espace d'états de plus en plus petit. Premièrement, la limite $\mu \sim \infty$ de cet Hamiltonien permet de dégager un ensemble de $(\frac{N}{2} + 1)$ états dégénérés à énergie nulle. Ces états ne contenant que des composantes sur les états à $n_i$ pairs. Les états restants sont quant à eux rejetés à haute énergie $\sim \prime(J)$. En traitant les termes d'ordres $\frac{J^2}{\mu}$ en perturbation je montre que la décomposition du spectre en un ensemble de basse et de haute énergie est conservée. La dégénérescence entre les états de basse énergie est levée lorsque $\mu$ est fini et les deux échelles d'énergie $J$ et $\frac{J^2}{\mu}$ séparent le spectre en deux sous-secteurs. A l'aide d'un argument analytico-numérique on montre que l'évolution de l'état initial $|0N0\rangle$ doit rester confinée en majeure partie dans le sous-espace de basse énergie.

Finalement, je montre que pour les points de CDT $K_{0,n}$ un ensemble de couplages s'annule tandis que d'autres restent d'ordre $\frac{J^2}{\mu}$. Cette situation vaut principalement pour $N > 4$ puisque l'annulation des couplages dépend des différences $n_1 - n_2$ et $n_2 - n_3$. L'annulation de certains couplages permet d'effectuer le même type d'opération que dans le cas précédent. L'Hamiltonien est alors diagonalisé au CDT puis traité en perturbation à son voisinage. Un sous-ensemble d'ultra-basse énergie $\sim \frac{J^2}{\mu}\frac{\delta K_0}{K_0}$ contenant les états $|N00\rangle$, $|0N0\rangle$ et $|00N\rangle$ émerge alors. La dynamique du système reste alors confinée dans ce sous-ensemble d'états et fixe le temps de récurrence de l'état N00N multi-mode atteint.

L'analyse du modèle effectif montre également deux faits importants :

- Le temps de récurrence de l'état N00N dépend peu du nombre particules
- L'augmentation de la taille de l'espace de Hilbert, soit en augmentant le nombre de sites ou de particules rend de plus en plus difficile la visibilité d'une séparation d'échelle au sein du spectre. En pratique, c'est ce problème qui limite le nombre de bosons $N$.

# 3

# Jonction Josephson sous irradiation micro-ondes

*Lorsqu'une jonction supraconductrice est soumise à un rayonnement micro-onde, des effets de résonance entre les états liés d'Andreev peuvent modifier la relation courant-phase de la jonction. Il a été montré que dans une jonction avec un point quantique la combinaison de deux sources micro-ondes déphasées et d'une brisure de la symétrie électron-trou permet de générer un courant chiral, non-nul aux points $\phi = 0, \pi$. Ce résultat est ici revisité pour une jonction métallique à l'aide d'une description de type Scattering.*

## Sommaire

**3.1 Introduction** . . . . . **85**
**3.2 Description "Scattering" de la jonction** . . . . . **86**
3.2.1 Irradiation de la jonction . . . . . 86
3.2.2 Modulation de la phase . . . . . 87
3.2.3 Forme de la fonction d'onde . . . . . 87
3.2.4 Raccordement aux supraconducteurs et terme source . . . . . 89
3.2.5 Equations de scattering . . . . . 91
3.2.6 Formulation à N harmoniques . . . . . 91
3.2.7 Expression du Courant DC . . . . . 93
3.2.8 Dépendance en $\chi_2 - \chi_1$ du courant . . . . . 95
**3.3 Méthode numérique** . . . . . **96**
**3.4 Résonances de courant** . . . . . **98**
**3.5 Conclusion** . . . . . **100**

# 3.1 Introduction

Récemment, il a été montré [84] que du pompage quantique de courant dans un régime non-adiabatique peut être réalisé dans une jonction Josephson sous irradiation micro-onde. Dans cette article, les auteurs traitent le cas d'une jonction par point quantique et font l'hypothèse que le rayonnement micro-onde impose des potentiels $V_1(t) = \sin(\omega t + \chi_1)$ et $V_2(t) = \sin(\omega t + \chi_2)$ aux bornes de la jonction. Ils montrent que pour un tel potentiel le courant circulant à travers la jonction peut, dans certaines conditions, être non-nul pour des différence de phases supraconductrices égales à 0 ou $\pi$. L'existence de cette propriété, robuste vis à vis des transitions avec le continuum d'état et également de la température repose principalement sur un argument de symétrie.
En premier lieu, la différence de phase $\chi_2 - \chi_1$ introduite par le rayonnement brise la symétrie par renversement du temps. La seconde symétrie importante est directement liée au point quantique. L'introduction d'une énergie non-nulle décrivant le niveau associé au point quantique permet en effet de disymmétriser le rôle des électrons et des trous au sein de la jonction. Lorsque ces deux symétries sont brisées, un courant est pompé dans le système. En particulier, lorsque la phase vaut $0, \pi$ le courant total provient exclusivement du pompage quantique. Ce courant est dénommé **courant chiral**.

Bien que supposant le maintien d'une différence de phase entre deux sources de rayonnement micro-onde séparées d'une distance de l'ordre du $\mu$m, l'expérience semble en pratique réalisable avec les technologies accessibles actuellement. L'argument de symétrie sur lequel

repose le pompage du courant chiral suggère la possibilité d'observer ce courant dans différents types de jonction Josephson, pourvu qu'il soit possible de contrôler la symétrie du système. Dans ce contexte, je propose dans ce chapitre de traiter le cas d'une jonction métallique soumis au même type de rayonnement micro-onde. Dans le but de se rapprocher le plus possible des conditions expérimentales réelles, je propose de traiter ce problème en utilisant le formalisme de la matrice de diffusion ( [85] , [86]). Ce formalisme est en effet couramment utilisé pour la description d'expériences de transport dans les jonctions Josephson (Contacts ponctuels, jonction SNS)( [87] , [88]). Je considèrerai néanmoins une jonction constituée d'un unique canal. Afin d'obtenir les bonnes conditions de symétrie je considérerai le cas d'un coefficient de transmission dépendant de l'énergie. Je montrerai dans un premier temps comment avec cette méthode on peut retrouver les suppressions de courant dues aux résonances entre les états liés d'Andreev ( [89] , [90]) puis je caractériserai dans un second temps le courant chiral associé à la brisure de la symétrie électron-trou.

## 3.2 Description "Scattering" de la jonction

### 3.2.1 Irradiation de la jonction

Je considère ici une jonction Josephson métallique à deux terminaux irradiée par rayonnement micro-onde. On fait ici l'hypothèse que l'effet du rayonnement micro-onde est de générer un potentiel sinusoïdal. Je suppose également que le rayonnement micro-onde appliqué est tel qu'il existe une différence de phase $\chi_2 - \chi_1$ entre les potentiels associés aux deux régions supraconductrices. Le rayonnement micro-onde est alors décrit par les potentiels suivants :

$$V_1(t) = \mathcal{V}_1 \cos(\omega t + \chi_1) \tag{3.1}$$

$$V_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \chi_2) \tag{3.2}$$

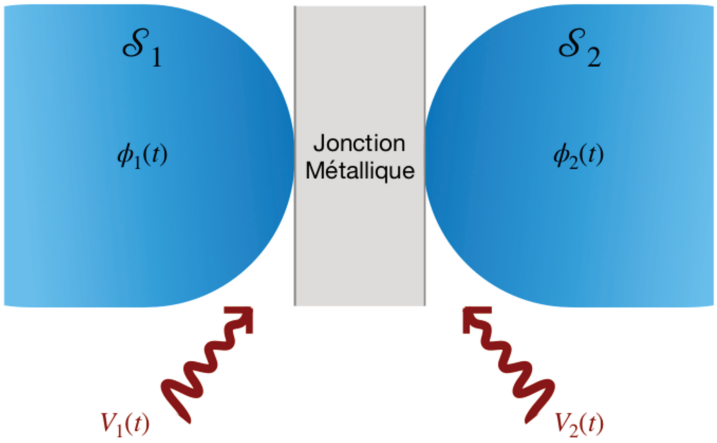



Figure 3.1: Schéma d'une jonction Josephson métallique sous irradiation micro-onde chirale

La difficulté principale d'un tel dispositif expérimental réside dans la mise en place du type de rayonnement décrit par l'équation (3.2). Des expériences mettant en jeu des jonctions

irradiées par micro-ondes ont déjà été réalisées en pratique [91] [92]. Dans ces expériences l'ensemble de la jonction est irradié par un seul rayonnement cohérent. Ici, pour réaliser l'hypothèse 3.2 il faut mettre en place deux sources de rayonnement cohérentes, déphasées l'une par rapport à l'autre d'une phase $\chi_2 - \chi_1$ et ce en deux régions de l'espace séparées d'une distance allant du $\mu m$ au $nm$. Or la longueur d'onde typique d'un rayonnement micro-onde est de l'ordre du centimètre. Il est probablement possible de résoudre ce problème en utilisant des guides d'ondes avec une ligne à retard de phase.

### 3.2.2 Modulation de la phase

Suivant l'approche usuelle de scattering [85] [93] [94] [95] [96] [97], les fonctions d'ondes de chaque région de la jonction Josephson sont déterminées à l'aide de l'équation de Bogolubov-de-Gennes. Considérons sa version dépendante du temps en présence d'un potentiel $V(t)$.

$$i\hbar\partial_t\hat{\Psi(t)} = \mathcal{H}_{BdG}(t)\hat{\Psi(t)} \tag{3.3}$$

Effectuons sur $\Psi$ une transformation de jauge, dépendante du temps $\Psi = \mathcal{U}(t)\tilde{\Psi}$. L'équation 3.3 devient alors :

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi}(t) = \mathcal{U}^\dagger\mathcal{H}_{BdG}(t)\mathcal{U}\tilde{\Psi}(t) - i\hbar\mathcal{U}^\dagger\partial_t\mathcal{U}\tilde{\Psi}(t) \tag{3.4}$$

Il suffit alors de faire le choix : $\mathcal{U}(t) = e^{-i\frac{eV_1}{\hbar\omega}\sin(\omega t+\chi)}$ pour éliminer la dépendance en temps des termes diagonaux de $\mathcal{H}_{BdG}$. Néanmoins, dans le cas ou V n'est pas constant il n'est pas possible d'éliminer complètement la dépendance en temps. Sous la transformation de jauge, la dépendance en temps est transférée vers le paramètre d'ordre. On peut résumer ceci en écrivant que $\tilde{\Psi}$ est solution de l'équation de Bogoliubov-de-Gennes avec un paramètre d'ordre $\Delta = |\Delta|e^{i\phi(t)}$, $\phi(t) = \phi^0 + \frac{2eV}{\hbar\omega}\sin(\omega t + \chi)$. Le rayonnement micro-onde peut alors être pris en compte dans les fonctions d'onde en considérant des phases dépendantes du temps :

$$\phi_1(t) = \phi_1^0 + \frac{2eV_1}{\hbar\omega}\sin(\omega t + \chi_1) \tag{3.5}$$

$$\phi_2(t) = \phi_2^0 + \frac{2eV_2}{\hbar\omega}\sin(\omega t + \chi_2) \tag{3.6}$$

### 3.2.3 Forme de la fonction d'onde

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, $\tilde{\mathcal{H}}_{BdG}$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Dans les régions normales $\Delta = 0$, les parties électrons et trous de la fonction d'onde sont découplées. Il existe alors deux types de solutions pour chaque région.

Avec le potentiel $\mathcal{V}_1$ définit par l'équation (3.2), on a par exemple pour la partie électron

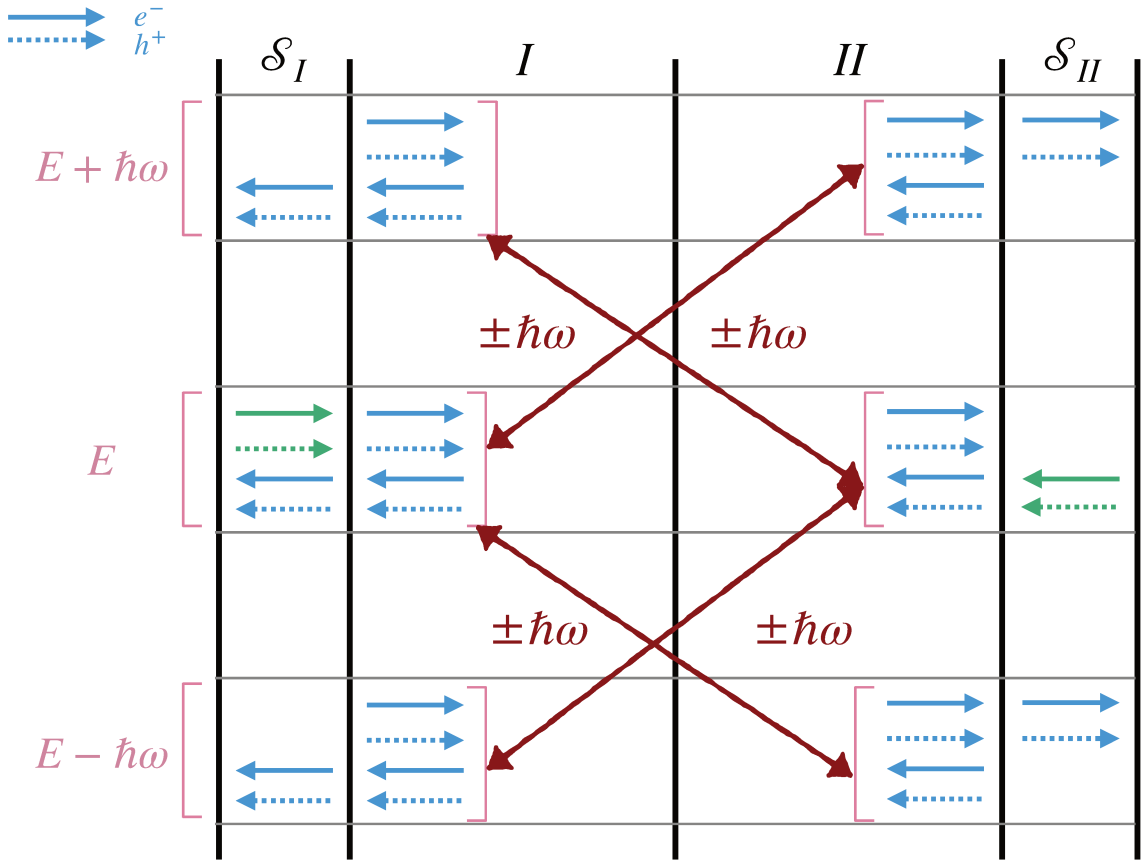



Figure 3.2: Schéma des processus intervenant dans la jonction hors-équilibre. Les électrons sont indiqués par des flèches pleines et les trous par des flèches en pointillés. Les flèches vertes indiquent les différentes sources possibles. Chaque bloc de processus est séparé de $\pm n\hbar\omega$, représentant les différents modes de la fonction d'onde. L'injection de source dans le bloc 0 peut conduire à l'injection de quasiparticules au sein des supraconducteurs à des énergies $E_n = \pm n\hbar\omega$.

de la région I :

$$\begin{aligned}
\Psi_I^e(E) &= \sum_n e^{-iE_n t} e^{-ie\int_0^t \mathcal{V}_1(t')} \Phi_{n,e}^I(x) \\
&= \sum_n e^{-iE_n t} e^{-i\frac{e\mathcal{V}_1}{\omega}\sin(\omega t+\chi_1)} e^{i\frac{\phi_1}{2}} \Phi_{n,e}^I(x) \\
&= \sum_{n,m} e^{-iE_n t} e^{i\frac{\phi_1}{2}} e^{im(\omega t+\chi_1)} \mathscr{J}_m(-b_1)\Phi_{n,e}^I(x) \\
&= \sum_p e^{-iE_n t} e^{i\frac{\phi_1}{2}} \left[\sum_m e^{im\chi_1} \mathscr{J}_m(-b_1)\Phi_{p+m,e}^I(x)\right]
\end{aligned}$$

De la même manière on obtient :

**Fonctions d'ondes dans les régions normales**

$$\Psi_I^e(E) = \sum_p e^{-iE_n t} e^{i\frac{\phi_1}{2}} \left[ \sum_m e^{im\chi_1} \mathscr{J}_m(-b_1) \Phi_{p+m,e}^I(x) \right]$$

$$\Psi_I^h(E) = \sum_p e^{-iE_n t} e^{-i\frac{\phi_1}{2}} \left[ \sum_m e^{im\chi_1} \mathscr{J}_m(b_1) \Phi_{p+m,h}^I(x) \right]$$

$$\Psi_{II}^e(E) = \sum_p e^{-iE_n t} e^{i\frac{\phi_2}{2}} \left[ \sum_m e^{im\chi_2} \mathscr{J}_m(-b_2) \Phi_{p+m,e}^{II}(x) \right]$$

$$\Psi_{II}^h(E) = \sum_p e^{-iE_n t} e^{-i\frac{\phi_2}{2}} \left[ \sum_m e^{im\chi_2} \mathscr{J}_m(b_2) \Phi_{p+m,h}^{II}(x) \right]$$

$$\Phi_{n,e}^I(x) = A_{n,e} e^{ik_n^e x} + B_{n,e} e^{-ik_n^e x} \tag{3.7}$$

$$\Phi_{n,h}^I(x) = A_{n,h} e^{ik_n^h x} + B_{n,h} e^{-ik_n^h x} \tag{3.8}$$

$$\Phi_{n,e}^{II}(x) = C_{n,e} e^{ik_n^e x} + D_{n,e} e^{-ik_n^e x} \tag{3.9}$$

$$\Phi_{n,h}^{II}(x) = C_{n,h} e^{ik_n^h x} + D_{n,h} e^{-ik_n^h x} \tag{3.10}$$

$$\tag{3.11}$$

### 3.2.4 Raccordement aux supraconducteurs et terme source

Le courant injecté dans la jonction peut provenir de plusieurs types de source. La quasiparticule incidente est de type électron ou trou et provient de la région I ou II. En fonction du type de source, le raccordement à l'interface N-S donne lieu à différents termes.

Dans le point de vue adopté ici, la phase supraconductrice est également portée par la fonction d'onde de la région normale. Autrement dit, la différence de phase entre les supraconducteurs est prise en compte à l'interface entre les régions I et II. Puisque l'on suppose les phases égales entre les régions supraconductrices et les régions normales, on s'attend à ce que le raccordement entre ces deux régions soit relativement simple et similaire au cas ou le potentiel $V$ ne dépend pas du temps.

Prenons l'exemple d'une quasiparticule de type électron provenant de la région I. Comme l'illustre la figure 3.2, la fonction d'onde du côté supraconducteur doit prendre en compte toutes les harmoniques possibles du problème. On a donc en $x = 0$ :

$$\Psi_{\mathcal{S}_1}(x=0) = \sum_p e^{-i\frac{E_p t}{\hbar}} e^{-ib_1 \sin(\omega t+\chi_1)\hat{\sigma}_z} e^{i\frac{\phi_1}{2}\hat{\sigma}_z} \phi_p(x=0) \tag{3.12}$$

$$\phi_p(x) = \begin{pmatrix} u_{n,e} \\ v_{n,e} \end{pmatrix} \delta_{p,0} e^{ik_{n,e}x} + a_n^1 \begin{pmatrix} u_{n,e} \\ v_{n,e} \end{pmatrix} e^{-ik_{n,e}x} + b_n^1 \begin{pmatrix} u_{n,e} \\ v_{n,e} \end{pmatrix} e^{ik_{n,h}x} \tag{3.13}$$

$$u_{n,e/h}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \eta_{e/h}\sqrt{1-(\frac{\Delta}{E})^2}\right\} \tag{3.14}$$

$$v_{n,e/h}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \eta_{e/h}\sqrt{1-(\frac{\Delta}{E})^2}\right\} \tag{3.15}$$

La fonction $a(E)$ définit l'amplitude de probabilité de réflexion d'Andreev. On peut remarquer ici que lorsque la fonction d'onde peut se décomposer en une somme d'harmoniques, l'amplitude de probabilité $a(E)$ intervient alors pour toutes les énergie $E = \pm\hbar\omega$. Pour simplifier la notation, on note $\mathcal{U}(E)$ la matrice qui prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a(E_{-M}) & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a(E_0) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & a(E_{+M}) & & & \\ & & & & & a(E_{-M})^{-1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & a(E_0)^{-1} \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & a(E_{+M})^{-1} \end{pmatrix}$$

Figure 3.3: Forme de la matrice des amplitudes de réflection d'Andreev

Dans le cas général, on peut montrer que les conditions de continuité aux deux interfaces N-S imposent les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \vec{A}_h \\ \vec{B}_h \end{pmatrix} = \mathcal{U}(E) \begin{pmatrix} \vec{A}_e \\ \vec{B}_e \end{pmatrix} + \vec{J}_1 \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{C}_e \\ \vec{D}_e \end{pmatrix} = \mathcal{U}(E) \begin{pmatrix} \vec{C}_h \\ \vec{D}_h \end{pmatrix} + \vec{J}_2 \tag{3.17}$$

En posant $u(E) = u_e(E)$, les termes sources s'écrivent :

$$\vec{J_1} = \delta_{s,I}\left[\delta_{\nu,h}\mathcal{P}(E)\vec{v}_\uparrow - \delta_{\nu,e}\mathrm{sgn}(E)\frac{\mathcal{P}(E)}{a(E)}\vec{v}_\downarrow\right] \tag{3.18}$$

$$\vec{J_2} = \delta_{s,II}\left[\delta_{\nu,e}\mathrm{sgn}(E)\mathcal{P}(E)\vec{v}_\uparrow - \delta_{\nu,h}\frac{\mathcal{P}(E)}{a(E)}\vec{v}_\downarrow\right] \tag{3.19}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{u^2(E) - v^2(E)}{u(E)} \tag{3.20}$$

$$a(E) = \frac{E - i\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{\Delta} \tag{3.21}$$

### 3.2.5 Equations de scattering

La continuité de la fonction d'onde totale implique que les coefficients (A , B) et (C , D) ne sont pas indépendants. Ils sont reliés par la matrice de transmission.

$$\mathcal{T}(E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t(E)} & \frac{r(E)}{t(E)} \\ \frac{r(E)}{t(E)} & \frac{1}{t(E)} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

On obtient alors les équations de scattering suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sum_m e^{im\chi_1}\mathscr{J}_m(-b_1)A^e_{p+m} \\ \sum_m e^{im\chi_1}\mathscr{J}_m(-b_1)B^e_{p+m} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi}{2}}\mathcal{T}_e(E_p)\begin{pmatrix} \sum_m e^{im\chi_2}\mathscr{J}_m(-b_2)C^e_{p+m} \\ \sum_m e^{im\chi_2}\mathscr{J}_m(-b_2)D^e_{p+m} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_m e^{im\chi_1}\mathscr{J}_m(b_1)A^h_{p+m} \\ \sum_m e^{im\chi_1}\mathscr{J}_m(b_1)B^h_{p+m} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\phi}{2}}\mathcal{T}_h(E_p)\begin{pmatrix} \sum_m e^{im\chi_2}\mathscr{J}_m(b_2)C^h_{p+m} \\ \sum_m e^{im\chi_2}\mathscr{J}_m(b_2)D^h_{p+m} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

### 3.2.6 Formulation à N harmoniques

Pour calculer numériquement l'observable courant, il est nécessaire en pratique de tronquer le nombre d'harmoniques de la fonction d'onde. Je montre ici la forme que prennent les équations de Scattering dans le cas on l'on conserve uniquement M harmoniques. Posons $I_M := \{-M, -(M-1), ..., 0, ..., M-1, M\}$. La troncature est alors définit de la manière suivante :

$$A_k, B_k, C_k, D_k = 0, \qquad \forall k \notin I_M \tag{3.25}$$

Cette condition permet alors d'avoir un système d'équations fermé. En posant $\alpha^{1,2}_{k,e/h} = \mathscr{J}_k(-\eta_{e/h}b_{1,2})e^{ik\chi_{1,2}}$, on peut exprimer la relation de scattering à l'interface entre les régions I et II comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sum_{m\in I_M}\alpha^1_{m,e/h}A_{p+m,e/h} \\ \sum_{m\in I_M}\alpha^1_{m,e/h}B_{p+m,e/h} \end{pmatrix} = e^{i\eta_{e/h}\frac{\phi}{2}}\mathcal{T}(\eta_{e/h}E_p)\begin{pmatrix} \sum_{m\in I_M}\alpha^2_{m,e/h}C_{p+m,e/h} \\ \sum_{m\in I_M}\alpha^2_{m,e/h}D_{p+m,e/h} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Ce système d'équations peut s'exprimer sous forme matricielle. Pour cela, définissons d'abord

les vecteurs suivants :

$$\vec{A}_{e/h} = \big(A_{-M,e/h}, A_{-(M-1),e/h}, ..., A_{0,e/h}, ..., A_{M-1,e/h}, A_{M,e/h}\big) \tag{3.27}$$
$$\vec{B}_{e/h} = \big(B_{-M,e/h}, B_{-(M-1),e/h}, ..., B_{0,e/h}, ..., B_{M-1,e/h}, B_{M,e/h}\big) \tag{3.28}$$
$$\vec{C}_{e/h} = \big(C_{-M,e/h}, C_{-(M-1),e/h}, ..., C_{0,e/h}, ..., C_{M-1,e/h}, C_{M,e/h}\big) \tag{3.29}$$
$$\vec{D}_{e/h} = \big(D_{-M,e/h}, D_{-(M-1),e/h}, ..., D_{0,e/h}, ..., D_{M-1,e/h}, D_{M,e/h}\big) \tag{3.30}$$
$$\tag{3.31}$$

Considérons la somme des coefficients A de l'équation 3.26. En redéfinissant l'indice de sommation $m \longrightarrow \tilde{m} = m + p$, cette somme prend la forme suivante :

$$\sum_{\tilde{m}\in I_p} \alpha^1_{\tilde{m}-p,e/h} A_{\tilde{m},e/h} = (\mathcal{K}^1_{e/h}\vec{A}_{e/h})_p, \tag{3.32}$$

avec $(\mathcal{K}^1_{e/h})_{p,\tilde{m}} = \alpha^1_{\tilde{m}-p,e/h}$.

Explicitement, la matrice $\mathcal{K}$ prend la forme suivante :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_M \\ \alpha_{-1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ \alpha_{-M} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_{-M}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{t_0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{t_M} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

En utilisant ces définitions, l'équation de raccordement 3.26 prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \vec{A}_{e/h} \\ \vec{B}_{e/h} \end{pmatrix} = e^{i\eta_{e/h}\frac{\phi}{2}} \mathcal{M}^{-1}_{e/h}(\chi_1)\mathcal{T}(\eta_{e/h}E_p)\mathcal{M}_{e/h}(\chi_2) \begin{pmatrix} \vec{C}_{e/h} \\ \vec{D}_{e/h} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Avec $\mathcal{M}_{e/h}(\chi_j) = \mathbb{I}_2 \otimes \mathcal{K}_{e/h}(\chi_j)$.

En combinant les différentes équations de raccordement (entre les régions normales et supraconductrices et entre les deux régions normales) on obtient un système linéaire sur les coefficients de la fonction d'onde. Lorsqu'il n'y a pas de source, le second membre de ce système est nul et les états liés de la jonction sont déterminés par l'équation suivante :

$$\det\Big\{\mathbb{I}_{2(2M+1)} - e^{i\phi}\mathcal{T}^{eff}_e(E_p,\chi_1,\chi_2)\mathcal{U}(E_p)(\mathcal{T}^{eff}_h)^{-1}(-E_p,\chi_1,\chi_2)\Big\} = 0 \tag{3.36}$$
$$\mathcal{T}^{eff}_{e,h}(E_p,\chi_1,\chi_2) = \mathcal{M}^{-1}_{e/h}(\chi_1)\mathcal{T}(\eta_{e/h}E_p)\mathcal{M}_{e/h} \tag{3.37}$$

Où l'on a définit la matrice $\mathcal{T}_{e,h}^{eff}(E_p, \chi_1, \chi_2)$ qui représente une matrice de transmission effective dans laquelle les couplages entre les états séparés par des énergies $\pm m\hbar\omega$ sont pris en compte.

Dans le cas ou l'amplitude de la modulation est nulle, on peut montrer à partir de ces équations que l'on retrouve la forme simple des états liés du cas statique. On trouve cependant $2M+1$ paires d'états. La première paire est centrée en $E=0$ et correspond à la dispersion du cas statique. Ces énergies sont répliquées tous les multiples de $\pm\hbar\omega$. Cette description est en fait réminiscente du formalisme de Floquet. Comme $b=0$, les différentes paires d'états ne sont pas couplées et on peut simplement se restreindre à la paire centrée à énergie nulle.
En effet, si $b=0$ la dépendance en $\chi$ disparaît des équations puisque toutes les fonctions de Bessel d'ordre différent de 0 s'annulent. Le calcul du déterminant de la matrice $\mathscr{F}$ donne le résultat suivant :

$$\mathrm{F} = \prod_n \left\{1 - e^{i\alpha} e^{i \arccos(\frac{E_p}{\Delta})}\right\} \left\{1 + e^{i\alpha} e^{i \arccos(\frac{E_p}{\Delta})}\right\} \tag{3.38}$$

Je trace sur la figure 3.5 les états liés obtenus pour $b=0$ lorsque l'on tronque le système à une harmonique. On observe sur cette figure que les paires d'états se croisent pour certaines valeurs bien définies de la phase. Par exemple, l'énergie $-$ de la réplique $n=+1$ croise la bande $+$ de la réplique $n=0$ pour $\phi \simeq 0.8\pi$. Les répliques $n=\pm 1$ se croisent quant à elles autour de $\phi \simeq 0.6$. Si l'on augmente légèrement le paramètre $b$ les différentes bandes vont commencer à se coupler au niveau des croisements. Si $b$ est suffisamment petit, on s'attend à voir des effets observables pour des valeurs de phases proches de celles pour lesquels on observe des anti-croisements à $b=0$.

Je montrerai dans la section suivante comment ces couplages induisent une suppression du courant traversant la jonction.

### 3.2.7 Expression du Courant DC

On définit [94] le courant total circulant à travers la jonction comme suit :

$$\mathcal{I} = \frac{e}{\hbar k_F} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(E) f(E) \mathfrak{Im}\{i\Psi^\dagger \partial_x \Psi\} \tag{3.39}$$

Avec $\rho(E)$ la densité d'état et $f(E)$ la distribution de Fermi. Nous verrons par la suite qu'il est nécessaire de prêter attention aux détails de cette définition lors du calcul numérique de cette intégrale. Dans ce problème, il existe en effet une partie non-dissipative dans le courant due à la présence de l'harmonique 0. Une partie du courant provient donc des énergies $|E| < \Delta$ des états liés. Les singularités associées à ces états doivent alors être traitées avec précaution.

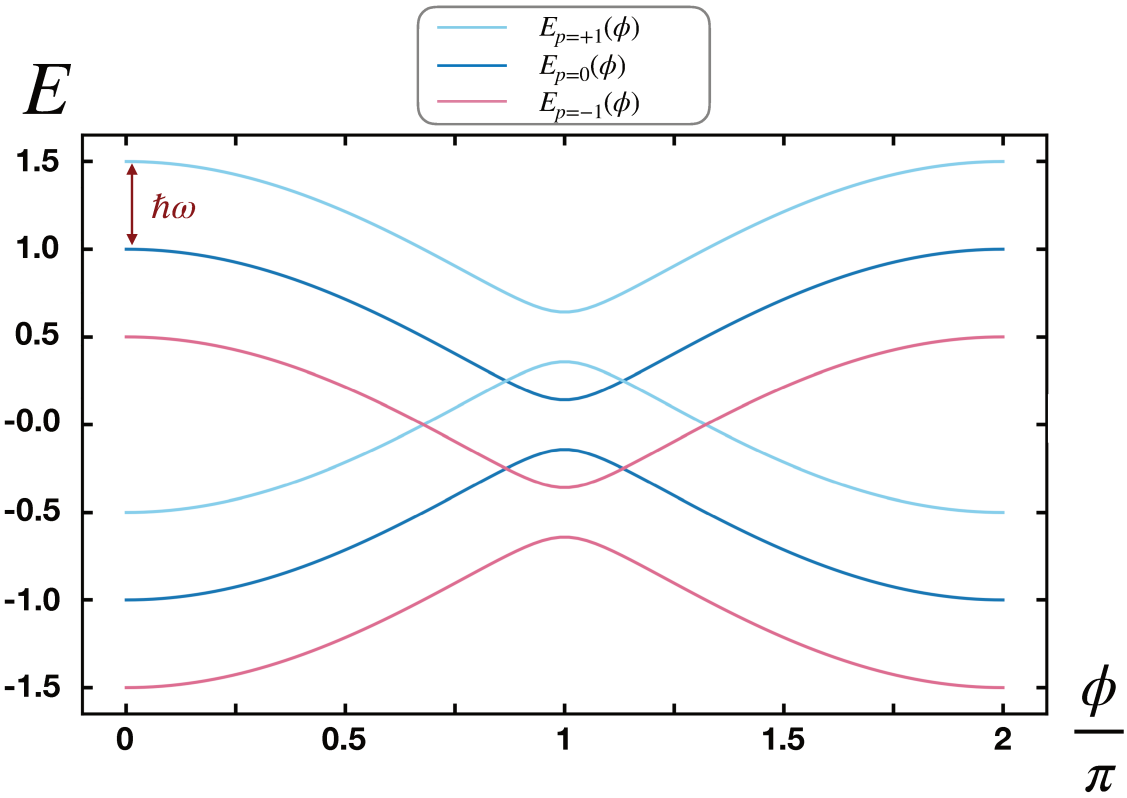



Figure 3.4: Energie des états liés d'Andreev pour $M = 1$ harmonique dans la limite $b \longrightarrow 0$. En bleu foncé on représente la paire d'harmonique 0 qui correspond aux énergies en l'absence de rayonnement. En bleu clair et rose, les répliques de la paire d'énergies initiales espacées de $\pm\hbar\omega$. Ce schéma est réminiscent de la théorie de Floquet du formalisme hamiltonien.

Dans le problème statique, le courant est calculé à une position quelconque du système car celui-ci est conservé. Pour simplifier, on calculera ici le courant en $x = 0$. Examinons la forme que prend l'expression (3.39) avec les fonctions d'onde (3.7). Cette expression fait intervenir le produit suivant :

$$\phi_1^\dagger(x=0)\partial_x\phi_1|_{x=0} = \sum_{p_1,p_2,m_1,m_2} e^{i(p_1-p_2)\frac{\omega t}{\hbar}}\alpha_{m_1}^*\alpha_{m_2}.\begin{pmatrix} A_{p_1+m_1,e} + B_{p_1+m_1,e} \\ A_{p_1+m_1,h} + B_{p_1+m_1,h}\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} A_{p_2+m_2,e} - B_{p_2+m_2,e} \\ A_{p_2+m_2,h} - B_{p_2+m_2,h}\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Ce produit fait intervenir deux contributions provenant soit des parties "électron" ou "trou" de la fonction d'onde. On peut obtenir la seconde contribution en effectuant la substitution $b \longrightarrow -b$. De plus, je m'intéresse ici uniquement à la partie DC du courant. On posera donc $p_1 = p_2$. La partie "électrons" du courant DC s'écrit explicitement comme suit :

$$\mathcal{J}_e^{DC}(E) = \mathfrak{Im}\left[i\sum_{m_1,m_2}\alpha_{m_1}\left\{(A_e^*A_e)_{m_1,m_2} - (B_e^*B_e)_{m_1,m_2} - (A_e^*B_e)_{m_1,m_2} + (B_e^*A_e)_{m_1,m_2}\right\}\right] \tag{3.41}$$

Notons qu'en écrivant explicitement les termes croisés dans (3.41) on peut montrer qu'ils donnent une contribution nulle au courant.

Comme le courant peut être généré par des sources de type électron ou trou provenant des régions I et II, le courant total s'obtient en sommant toutes les possibilités. Posons $\mathcal{J}^{DC}_{\nu,s}(E)$ la densité de courant obtenue avec comme source une particule $\nu$ (e/h) provenant du supraconducteur $s$ (I/II) et $\mathscr{C}^{e/h}_{\nu,s}$ la matrice des coefficients obtenues à partir du terme source $\vec{\mathcal{S}}_{\nu,s}$. Le courant total prend alors la forme suivante :

**Expression du courant DC en fonction des coefficients de Scattering**

$$\mathcal{I}^{DC} = \frac{e}{h} \sum_{s=I,II} \sum_{\nu=e,h} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E \rho(E) f(E) \mathcal{J}^{DC}_{\nu,s}(E) \tag{3.42}$$

$$\mathcal{J}^{DC}_{\nu,s}(E) = \mathfrak{Im}\left\{ i\vec{\alpha}_e^\dagger \mathscr{C}^e_{\nu,s} \vec{\alpha}_e \right\} + \mathfrak{Im}\left\{ i\vec{\alpha}_h^\dagger \mathscr{C}^h_{\nu,s} \vec{\alpha}_h \right\} \tag{3.43}$$

### 3.2.8 Dépendance en $\chi_2 - \chi_1$ du courant

Je montre ici explicitement que l'observable courant définie ci-dessus dépend uniquement de la différence entre $\chi_1$ et $\chi_2$.

Notons tout d'abord que dans le point de vue développé précédemment la dépendance en $\chi_1$ et $\chi_2$ intervient uniquement au niveau du raccordement entre les régions I et II par l'intermédiaire de la matrice $\mathcal{M}(\chi)$. La matrice $\mathcal{M}$ a une forme diagonale par blocs qui peut s'exprimer à partir des matrices $\mathcal{K}(\chi)$. On a :

$$(\mathcal{K}\vec{A})_p = \sum_{m \in \mathcal{I}_M} \alpha^1_{m,e} A_{p+m,e} \tag{3.44}$$

$$= \sum_{\tilde{m} \in Ip} \alpha^1_{\tilde{m}-p,e} A_{\tilde{m},e} \tag{3.45}$$

$$= e^{-ip\chi_1} \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{I}_p} \mathscr{J}_{\tilde{m}-p}(-b_1) \tilde{A}_{\tilde{m},e} \tag{3.46}$$

Soit, en définissant $(\mathcal{P}(\chi))_{k,l} = e^{-ik\chi}\delta_{kl}$ le raccordement à l'interface entre les régions I et II peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{A}}_e \\ \tilde{\vec{B}}_e \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi}{2}} (\tilde{\mathcal{K}}(b_1))^{-1} \mathcal{P}^\dagger(\chi_1) \mathcal{T}(E_p) \mathcal{P}(\chi_2) \tilde{\mathcal{K}}(b_2) \begin{pmatrix} \tilde{\vec{C}}_e \\ \tilde{\vec{D}}_e \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

Or,

$$[T(E), P(\chi)] = \begin{pmatrix} [\frac{1}{T}, P] & [\frac{R}{T}, P] \\ [\frac{R}{T}, P] & [\frac{1}{T}, P] \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

$$[T(E), P(\chi)]_{k,l} = 0 \tag{3.49}$$

De plus, on peut montrer que $\mathcal{P}^\dagger(\chi_1)\mathcal{P}(\chi_2) = \mathcal{P}(\chi_2 - \chi_1)$. L'équation (3.47) et par extension les coefficients de scattering ne dépendent alors que de la différence de phase $\chi_2 - \chi_1$. Par ailleurs, l'observable courant est une somme de termes de la forme :

$$\sum_{p,m_1,m_2} \mathscr{J}_{m_1}(-b_1)\mathscr{J}_{m_2}(-b_1)e^{i(m_1-m_2)\chi_1}A^*_{p+m_1}A_{p+m_2} = \tag{3.50}$$

$$\sum_{p,m_1,m_2} \mathscr{J}_{m_1}(-b_1)\mathscr{J}_{m_2}(-b_1)e^{i(m_1-m_2)\chi_1}\tilde{A}^*_{p+m_1}(\chi)\tilde{A}_{p+m_2}(\chi) \tag{3.51}$$

Autrement dit, les facteurs de phase des coefficients de scattering se compensent et n'apparaissent pas dans l'expression finale du courant. En multipliant les coefficients de scattering par les phases appropriées on montre alors que l'équation qui détermine ces coefficients ne fait intervenir que la différence entre les phases $\chi_2$ et $\chi_1$. On a donc la relation importante suivante :

**Dépendance en phases du courant DC**

$$\mathcal{I}(\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2, b_1, b_2) = \mathcal{I}(\phi_2 - \phi_1, \chi_2 - \chi_1, b_1, b_2) \tag{3.52}$$

## 3.3 Méthode numérique

L'introduction de termes source dans les fonctions d'onde fait apparaître un second membre dans les équations de scattering. ce second membre est toujours proportionnel à la quantité $\mathcal{P}(E)$ définie ci-dessus. Cette quantité représente une amplitude de probabilité d'injection d'une particule source au sein du métal. Le calcul du courant fait apparaître le module au carré de cette quantité. Pour une énergie E donné, la probabilité d'injection totale doit être multipliée par la densité d'état à cette même énergie. On prendra en compte ces deux contributions en multipliant l'expression de la densité de courant par l'amplitude de probabilité d'injection d'une source donnée.

$$\mathcal{J}(E) = \sqrt{1 - |a(E)|^2} \tag{3.53}$$

Cette quantité est nulle sous le gap puisque la probabilité de réflection d'Andreev dans cette région est égale à l'unité. Dans cette région, le courant est transporté uniquement par les états liés d'Andreev définis pour des énergies données. Afin d'intégrer la contribution des états liés on introduit un petit paramètre $\Gamma$ via la transformation $E \longrightarrow E + i\Gamma$, appelé paramètre de Dynes [98]. Ce petit paramètre a pour effet de lisser la densité d'états et traduit

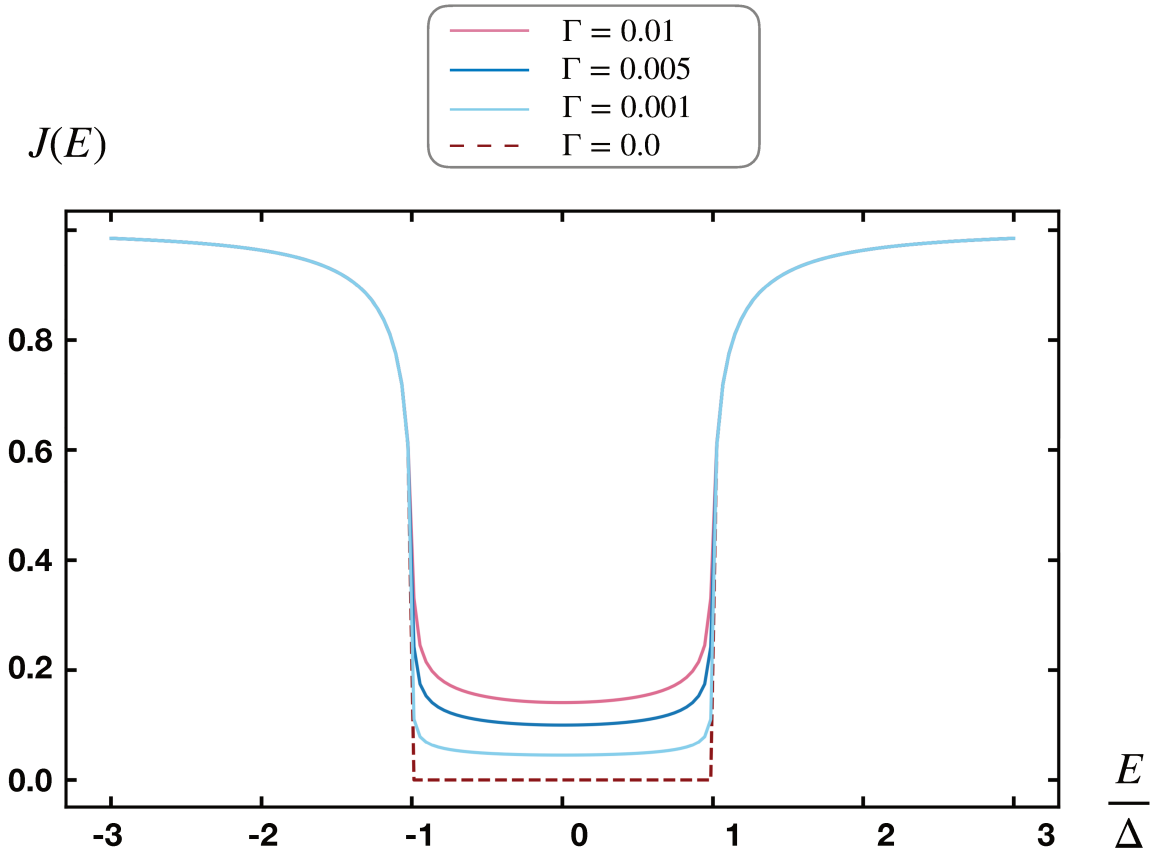



Figure 3.5: Probabilité d'injection de quasiparticules pour différentes valeurs de $\Gamma$. En pointillés rouge, on indique la référence $\Gamma = 0$ pour laquelle la probabilité est nulle au sein du gap.

la relaxation des quasiparticules. En particulier, il génère une densité d'état très petite mais non nulle à l'intérieur du gap 3.5.

Dans le problème étudié ici, on trouve un ensemble d'états liés dus à la présence dans le système de l'harmonique 0. Pour calculer numériquement le courant 3.43, il est alors nécessaire d'utiliser un $\Gamma$ non-nul. On utilisera pour la plupart des résultats la valeur $\Gamma = 0.001$. L'architecture du calcul numérique est ensuite très simple puisque comme nous l'avons vu précédemment, le problème de la détermination des coefficients de la fonction d'onde est en fait un système linéaire.

$$\mathscr{F}\vec{X} = \vec{\mathscr{S}} \tag{3.54}$$

Le schéma numérique peut se décomposer en trois étapes.

- On construit l'ensemble des matrices nécessaires à la construction du système linéaire à résoudre, pour un nombre d'harmoniques M donné.
- Pour chaque valeur d'énergie E, on détermine les coefficients $A, B, C, D$.
- On construit à partir de ces coefficients la densité de courant qu'on intègre ensuite de $-E_{max}$ à $+E_{max}$.

La résolution du système linéaire est effectuée en utilisant la routine *numpy.linalg.solve*. L'intégration quant à elle est réalisée par la routine *scipy.integrate.quad* avec une précision relative fixée à $10^{-11}$. En pratique, pour les calculs le nombre d'harmoniques prises en compte sera fixé à $M = 4$.

## 3.4 Résonances de courant

Cette section contient l'étude numérique de la jonction sous irradiation micro-onde. Elle est séparée en deux parties. Dans un premier temps, je considère que les deux sources micro-onde sont en phase de sorte à avoir le même potentiel à travers la jonction. Je montre alors les différents comportements du courant DC en fonction de la fréquence de la source, de l'amplitude micro-onde, du coefficient de transmission et de la température. Dans la seconde partie, je traite le calcul du courant en présence d'une chiralité, à savoir à la fois deux sources micro-ondes déphasées et un coefficient de transmission dépendant de l'énergie.

Sur la figure (3.6), le courant est tracé pour $b = 0.05$ et pour différentes valeurs de $\omega$. On peut observer que le courant présente certaines résonances pour lesquelles sa valeur diminue fortement jusqu'à tomber à 0 pour certaines valeurs de phases. Comme je l'ai discuté précédemment, cette suppression de courant résulte des couplages entre les différentes répliques des états d'Andreev aux fréquences $\pm n\hbar\omega$. Ici, on remarque que ces pics de résonance s'éloignent de $\pi$ au fur et à mesure que la fréquence de l'oscillation augmente. En effet, lorsque l'on s'éloigne de $\pi$, l'écart entre les états d'Andreev devient de plus en plus élevé et la fréquence de résonance entre les états augmente. Dans la limite ou le coefficient de transmission $T = 1$ les états se touchent en $\phi = \pi$. On remarque également que pour une fréquence donnée, les pics de résonances s'élargissent lorsque b augmente. Si b augmente suffisamment, la courbe est de plus en plus déformée et le courant peut même changer de signe.

On observe des effets similaires lorsque $T$ varie. Comme on peut le voir sur la figure (3.7) les pics de résonance se déplacent au fur et à mesure que $T$ augmente. Lorsque T diminue, la fréquence minimale de résonance qui correspond à l'écart entre les énergies des deux états d'Andreev à phase $\phi = \pi$ augmente. A fréquence fixée, la phase $\phi$ pour laquelle on observe une suppression de courant se décale alors. Si $\omega$ n'est pas suffisamment élevé ces résonances disparaissent lorsque $T < T_{critique}$. C'est ce qu'on observe ici où les pics disparaissent pour $T = 0.6$.

Je considère ici une phase $\chi = \frac{\pi}{2}$. Le coefficient de transmission est supposé être dépendant de l'énergie. On prendra une dépendance linéaire de la forme :

$$t(E) = t_0 + \alpha E \tag{3.55}$$

Sur la figure (3.8) je montre le calcul de la relation courant-phase pour $b = 0.1$ et $\omega = 0.4$. Remarquablement, on voit que le courant n'est pas symétrique par rapport à $\pi$. De plus, en $\phi = 0, \pi, 2\pi$ on observe que le courant est non-nul. Au niveau de ces points, le courant est donc essentiellement dû à la chiralité de la jonction irradiée. Je trace ci-dessous (figure 3.9)

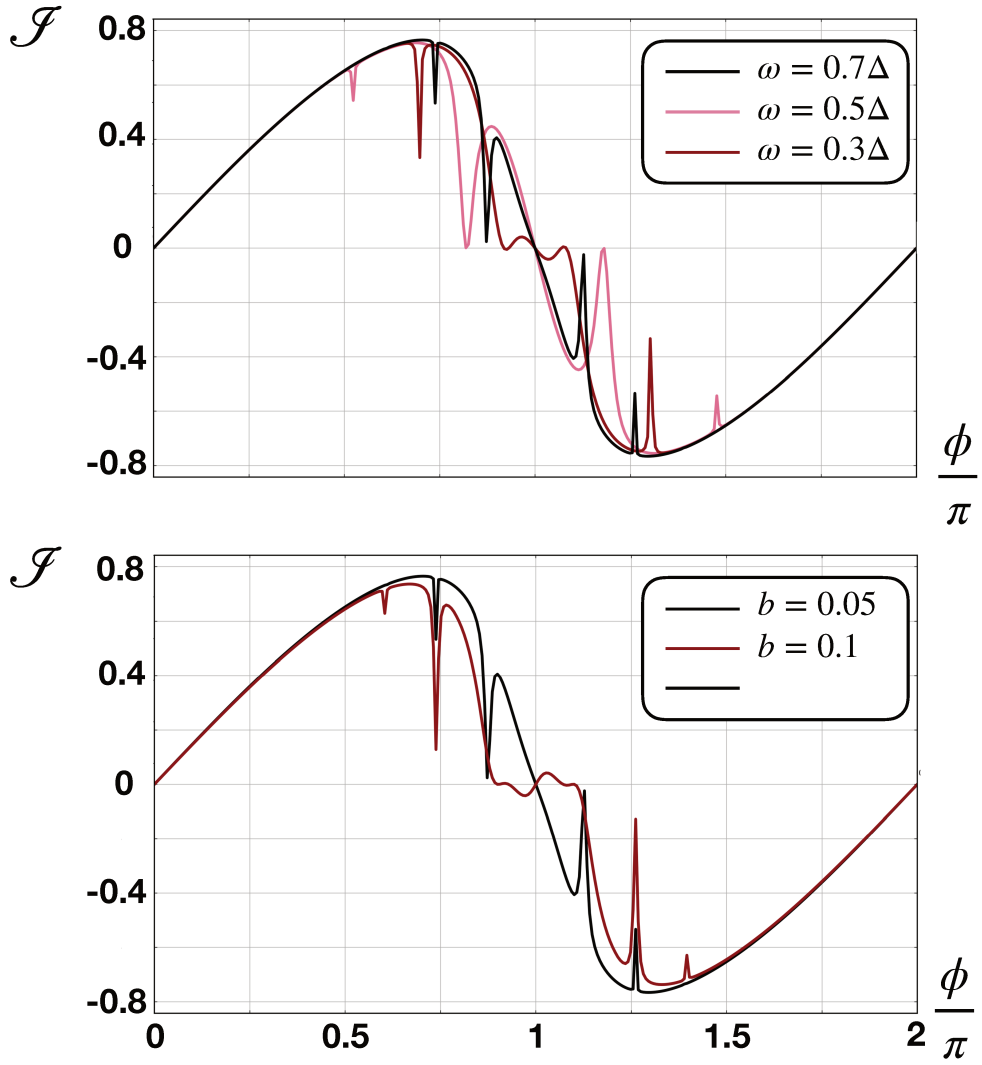



Figure 3.6: Relation courant phase en présence d'un rayonnement micro-onde et en l'absence de chiralité. (Haut) : Effet de la fréquence d'excitation. $b = 0.05$ ; $T = 0.95$ ; $\beta = 20\Delta^{-1}$ (Bas) : Effet de l'amplitude du micro-onde. $\omega = 0.7\Delta$ ; T $= 0.95$ ; $\beta = 20\Delta^{-1}$

la variation de ces courants avec la fréquence $\omega$.

Sur cette figure, on observe le comportement des courants chiraux, à phase $\phi = 0, \pi$,

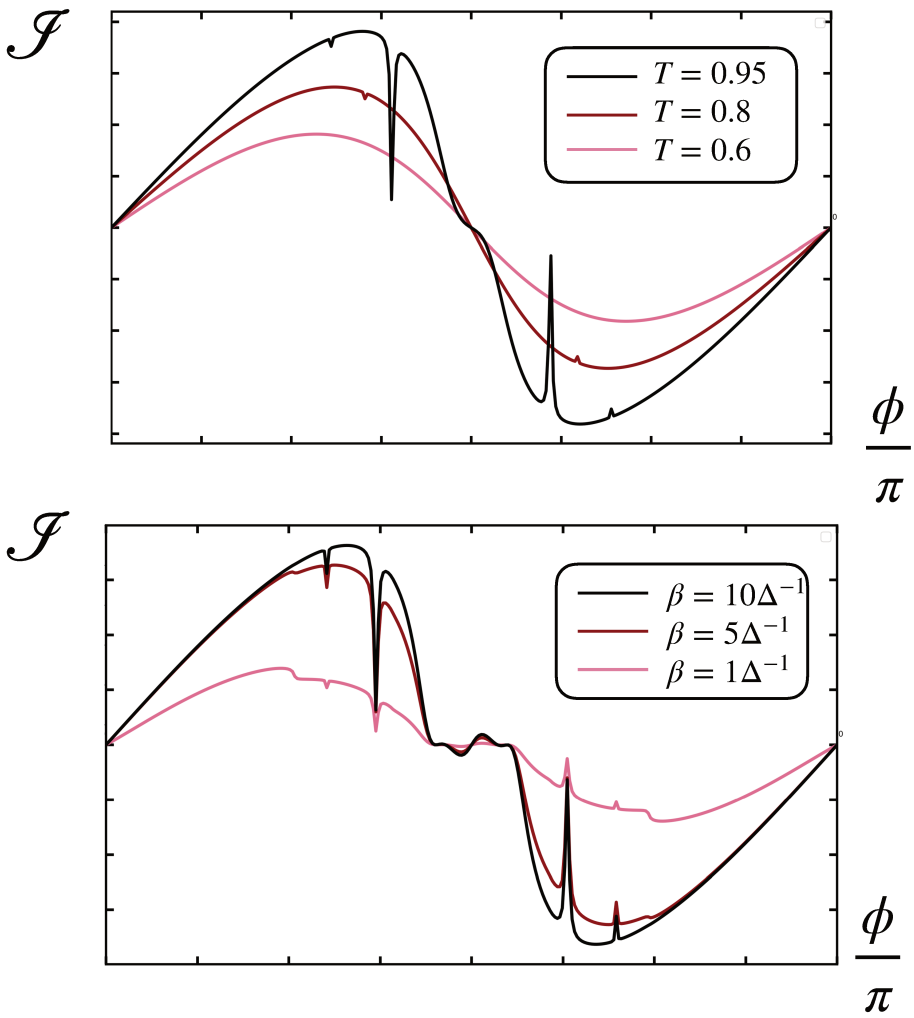



Figure 3.7: Relation courant phase en présence d'un rayonnement micro-onde et en l'absence de chiralité. (Haut) : Effet du coefficient de transmission. $\omega = 0.7\Delta$ ; $b = 0.05$ ; $\beta = 20\Delta^{-1}$ (Bas) : Effet de la température. $\omega = 0.7\Delta$ ; $b = 0.05$ ; $T = 0.95$

lorsque la fréquence d'excitation $\omega$ varie. A phase $\pi$, on observe des pics de résonance à $\omega \simeq 0.24$ et $\omega \simeq 1.5$ et pour lesquels l'amplitude du courant change rapidement avec la fréquence d'excitation.

## 3.5 Conclusion

J'ai considéré dans ce chapitre une jonction métallique à deux terminaux irradiée par un rayonnement micro-onde. Dans la lignée de l'article [84], j'ai supposé que le rayonnement micro-onde provenait de deux sources séparées spatialement et qu'il était possible d'induire un déphasage $\chi$ entre ces deux sources. Après avoir discuté la faisabilité de cette configuration, je propose d'utiliser le formalisme de diffusion pour calculer les propriétés de ce système. L'utilisation de ce formalisme est proposée dans le but de se rapprocher des descriptions conventionnelles de ce type de jonction.

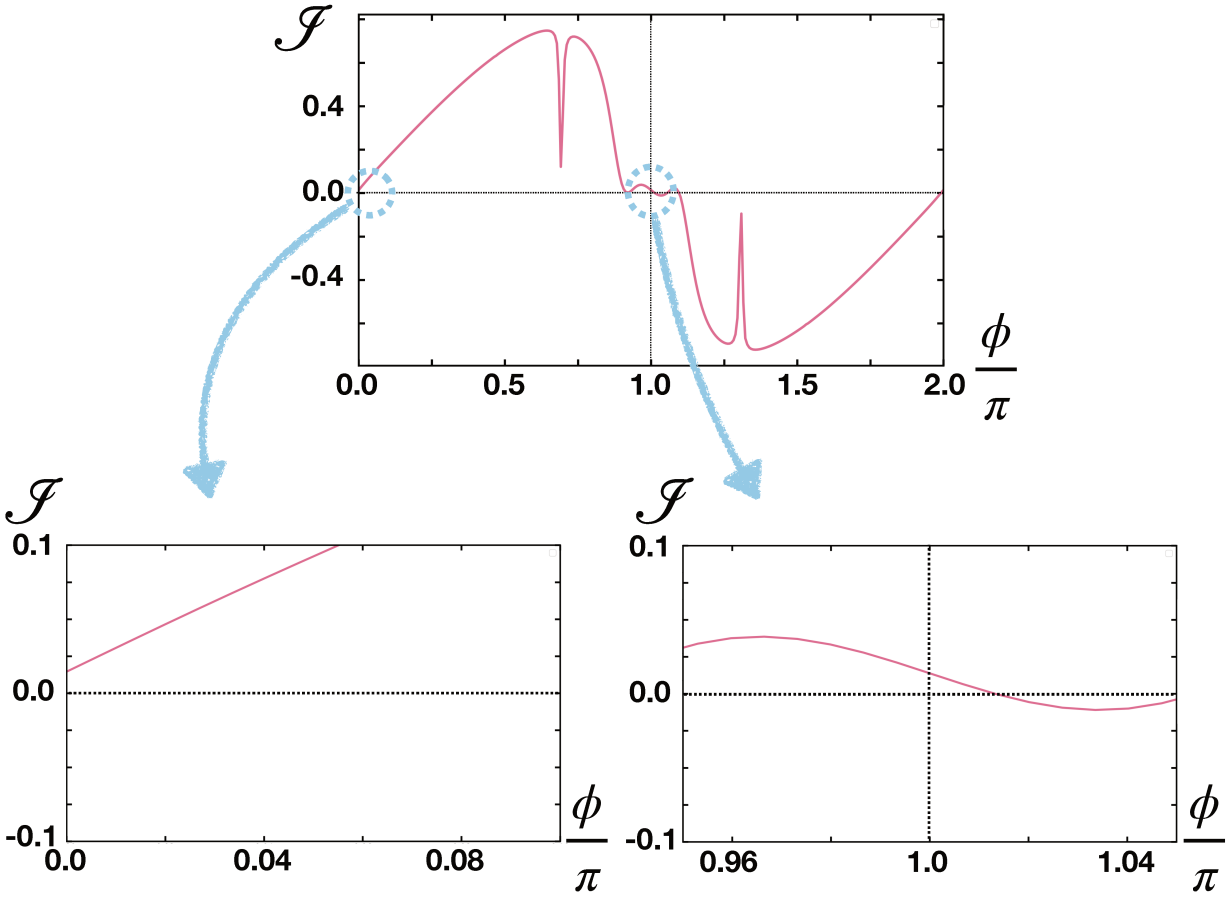



Figure 3.8: Relation courant-phase en présence d'une brisure à la fois de la symétrie électron-trou et de la symétrie par renversement du temps. Sur les panneaux (b) et (c), on observe la valeur finie du courant pour les valeurs respectives $\phi = 0$ et $\phi = \pi$. $b = 0.1$ ; $T = 0.95$ ; $\beta = 20\Delta^{-1}$ ; $\omega = 0.7$.

Dans un premier temps, je calcule le courant dans la jonction lorsque le coefficient de transmission est indépendant de l'énergie. Je montre qu'avec ce formalisme on retrouve les diminutions de courant déjà prédites dans ( [89] , [90]). Ces diminutions de courant s'interprètent comme des résonances entre les états d'Andreev et peuvent être identifiées en déterminant les croisements entre les répliques, aux énergies $\pm\hbar\omega$, du spectre d'Andreev. Leur comportement en fonction de l'amplitude d'excitation, de la fréquence, du coefficient de transmission et de la température est étudié numériquement.
Je considère ensuite le cas d'un coefficient de transmission dépendant de l'énergie. Ceci permet d'obtenir une brisure de la symétrie électron-trou, analogue de la brisure de symétrie induite par l'énergie non-nulle du point quantique dans l'article [84]. Je montre alors par le même type de calcul que la symétrie $\phi \longrightarrow -\phi$ du spectre est brisée et qu'en conséquence un courant peut circuler dans la jonction même lorsque la phase $\phi = 0, \pi$. Les caractéristiques de ce courant, nommé **courant chiral**, sont étudiées et je montre que lorsque la fréquence varie, on obtient des pics de résonance pour ces valeurs de phase. Sur ces intervalles de fré-

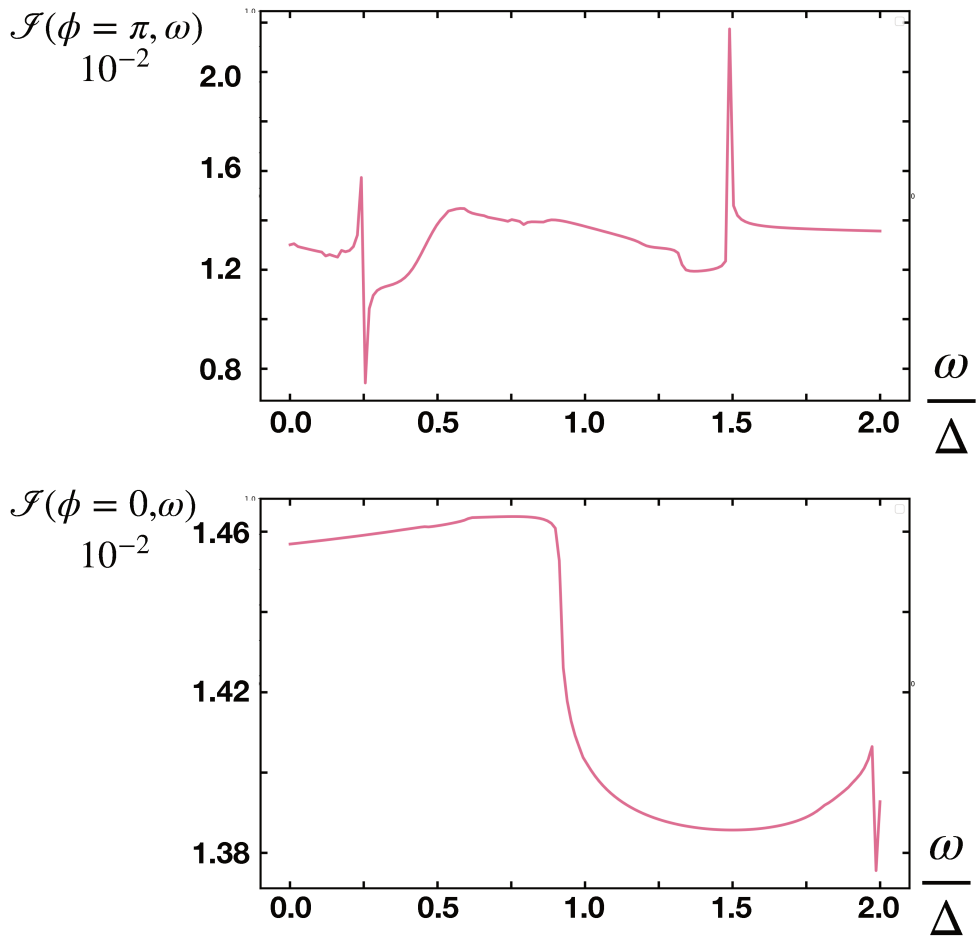


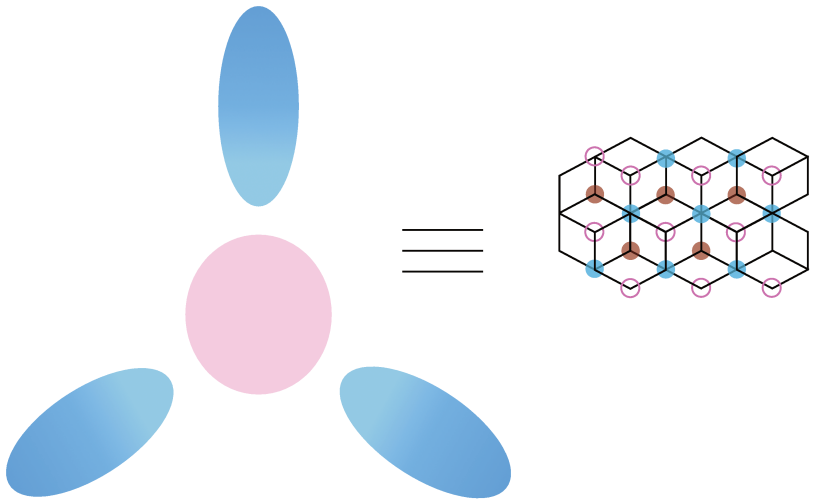

Figure 3.9: Résonance du courant chiral en fonction de $\omega$ . $b = 0.1$ ; $T = 0.95$ ; $\beta = 20\Delta^{-1}$. (Haut) : $\phi = \pi$ (Bas) : $\phi = 0$

quence le courant chiral prend sa valeur maximale. L'apparition d'un courant chiral dépend donc essentiellement des propriétés de symétrie du système et peut être réalisée aussi bien dans une jonction avec point quantique que dans une jonction métallique classique.

# 4

# Jonction Josephson : Analogie sur réseau, Topologie et Interaction

*Dans la limite de gap infini, les jonctions Josephson à plusieurs terminaux ont pour analogue un réseau infini dans l'espace des nombre de paires de Cooper (Espace de Fock). Cette analogie est développée pour quelques systèmes remarquables dont le réseau équivalent s'apparente à celui du graphène. Ces systèmes sont soumis à un rayonnement micro-onde et étudiés du point de vue topologique. L'analogie développée permet de questionner la notion d'états de bords dans les jonctions Josephson. Il apparaît qu'un contrôle précis du nombre de paires transférables est nécessaire. Pour terminer, l'effet d'une interaction coulombienne entre le point quantique et les supraconducteurs est discutée.*



## Sommaire

**4.1 Introduction** . . . . . **104**
**4.2 Analogie avec un modèle sur réseau** . . . . . **105**
**4.3 Tri-jonction et Graphène - Etats de bords parfaits** . . . . . **108**
4.3.1 Modèle sur réseau d'une tri-jonction . . . . . 108
4.3.2 Cas de bords parfaits, limitation du nombre de paires . . . . . 109
4.3.3 Exemple de transition topologique dans un double dot . . . . . 110
4.3.4 Symétrie du courant DC . . . . . 115
4.3.5 Note sur la réalisation pratique des bords . . . . . 116
**4.4 Jonction avec interactions** . . . . . **119**
4.4.1 Modèle . . . . . 120
4.4.2 Limite Classique . . . . . 121
4.4.3 Phase de Zak dans la limite V -> 0 . . . . . 123
4.4.4 Résultats numériques à V fini . . . . . 126
**4.5 Conclusion et perspectives** . . . . . **137**

# 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, je développe l'analogie entre une jonction Josephson par point quantique et un modèle de liaisons fortes en proposant d'étudier quelques configurations remarquables. Parmis elles, la représentation d'une jonction à deux niveaux fait apparaître un réseau tout à fait remarquable tandis que l'ajout de deux points quantiques à un niveau dans une tri-jonction permet de construire l'analogue d'une bi-couche de graphène. En premier lieu, l'analyse de la transition topologique dans une tri-jonction irradiée est étendue pour une tri-jonction dans laquelle un des terminaux voit le nombre de paires qu'il peut contenir limité. Cette contrainte drastique (mais questionnable d'un point de vue pratique) permet d'identifier cette jonction avec un ruban de graphène dans le régime de liaison fortes. On identifie alors, dans le langage des jonctions supraconductrices, l'apparition d'états de bords dispersifs correlés avec la transition topologique de coeur décrite au chapitre I. Dans un deuxième temps, j'étudie une trijonction connectée par un point quantique à deux niveaux, sans limitation du nombre de paires. En raison des paires qui peuvent être cette fois partagées entre deux niveaux il apparaît une nouvelle source de chiralité. Je montre alors par un argument de symétrie que sous irradiation micro-ondes il est toujours nécessaire d'avoir des énergies de sites non-nulles pour observer une transition topologique. Les transitions topologiques et les points de Weyl associés à ce système sont ensuite caractérisés. Partant ensuite de cette géométrie, je propose alors une piste permettant de réaliser en pratique dans la tri-jonction l'analogue des bords du réseau correspondant. Cette configuration permet de questionner la limite de notre analogie et la complexité pratique propre à la réalisation de ces bords fictifs.

Pour conclure, je présente une première étude sur l'effet de l'interaction dans une jonction simple connectée par un point quantique à un niveau. Le problème est d'abord étudié dans l'approximation classique. La caractérisation des orbites permet d'identifier les régimes intéressants et de situer ce problème par rapport à d'autres configurations connues comme la jonction tunnel en présence d'interaction de type capacitive. Dans une seconde partie, je me focalise sur l'effet d'une interaction non-locale et non-symétrique entre les deux supraconducteurs et le point quantique. Dans l'Hamiltonien, cette interaction à pour principal conséquence que l'énergie du point quantique $\epsilon_0$ dépend cette fois de la différence entre le nombre de paires du supraconducteur 1 et du supraconducteur 2. Je montre alors, par un argument perturbatif que la perturbation au courant au sein de cette jonction est proportionnelle à la phase de Zak à interaction nulle. Par un calcul numérique sur une chaîne finie dans l'espace de Fock, je montre que cette interaction tend à localiser la fonction d'onde des états d'Andreev. Pour conclure, j'étudie l'effet de cette interaction sur la phase de Berry dans le cas d'une jonction avec un nombre total de paires fini.

## 4.2 Analogie avec un modèle sur réseau

Comme décrit au chapitre I, pour construire l'analogie on représente chaque état $|\{N_i\}, \nu\rangle$ par un noeud du réseau. Les noeuds sont alors connectés par des liens représentant les couplages, c'est à dire des transfert de paires entre les supraconducteurs et le point quantique. Pour illustrer cette analogie je propose deux configurations de jonction remarquables : une tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux et une tri-jonction connectée à deux point quantiques séparés.

#### Cas du point quantique à deux niveaux

Dans une jonction avec un point quantique contenant non pas un mais plusieurs niveaux les paires peuvent se former soit sur un seul niveau, soit entre deux niveaux différents. L'ensemble des configurations donne 16 états possibles. En effet, on peut former sur le point quantique à deux niveaux :

- 5 états de paires en configuration de singulet (incluant l'état vide).
- 3 états triplets
- 4 états à 1 électron
- 4 état à 3 électron

Dans la limite de gap infini considérée ici, les états à 1 électrons sont rejetés à haute énergie et n'interviennent pas. Les trois états triplets quant à eux ne sont pas considérés puisqu'ils ne vérifient pas la symétrie initiale de singulet des paires provenant des supraconducteurs. Pour construire l'analogie sur réseau de ce système, il reste donc 5 états singulets à considérer.

On trouve une configuration intéressante lorsqu'il n'y a qu'un seul état à une paire. Partant de l'état vide, l'état à une paire le plus général consiste en une superposition des trois états $|\uparrow\downarrow\rangle_\alpha$, $|\uparrow\downarrow\rangle_\beta$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_\alpha|\downarrow\rangle_\beta - |\downarrow\rangle_\alpha|\uparrow\rangle_\alpha\Big)$.

$$|0\rangle \longrightarrow \frac{\gamma_\alpha b_\alpha^\dagger + \gamma_\beta b_\beta^\dagger + \gamma_\delta b_\delta^\dagger}{\sqrt{\gamma_\alpha^2 + \gamma_\beta^2 + \gamma_\delta^2}} \tag{4.1}$$

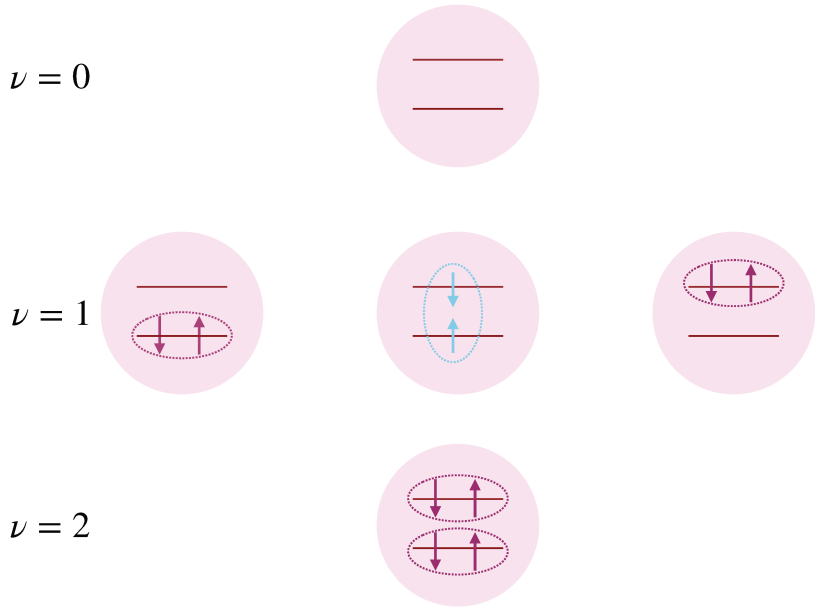



Figure 4.1: Configurations de paires singulet au sein du point quantique à deux niveaux

L'état à une paire est obtenu en appliquant l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ sur l'état vide. On obtient donc 3 type d'états internes suivant que le nombre d'occupation est 0, 1 ou 2. Au sein de ce réseau, les états à nombre d'occupation $\nu = 1$ sont chacun connectés à trois sites d'occupation $\nu = 0$ et trois sites d'occupation $\nu = 2$. Le réseau de Fock équivalent est alors construit en superposant deux réseaux hexagonaux (Fig.4.4).

**Jonction équivalente d'un réseau de type "Bi-couche de graphène"**

Pour obtenir un réseau de Fock équivalent à celui d'une bi-couche de graphène, on peut généraliser la configuration de la jonction de la manière suivante : Supposons d'abord que la jonction reste constituée de trois terminaux. C'est un ingrédient essentiel puisque comme nous l'avons vu au chapitre I la présence des trois supraconducteurs implique qu'il n'y a que deux variables indépendantes à considérer. Supposons ensuite que ces trois supraconducteurs sont ensuite chacun connectés à deux points quantiques à un niveau (fig.4.4). Chaque ensemble constitué des trois supraconducteurs et du point quantique 1 ou 2 est alors représenté par un réseau de type graphène dans l'espace de Fock. Dans ce cas, pour $N$ et $N_3$ fixé on peut séparer les états en deux ensembles. On notera $\nu$ et $\nu'$ le nombre d'occupation de chaque

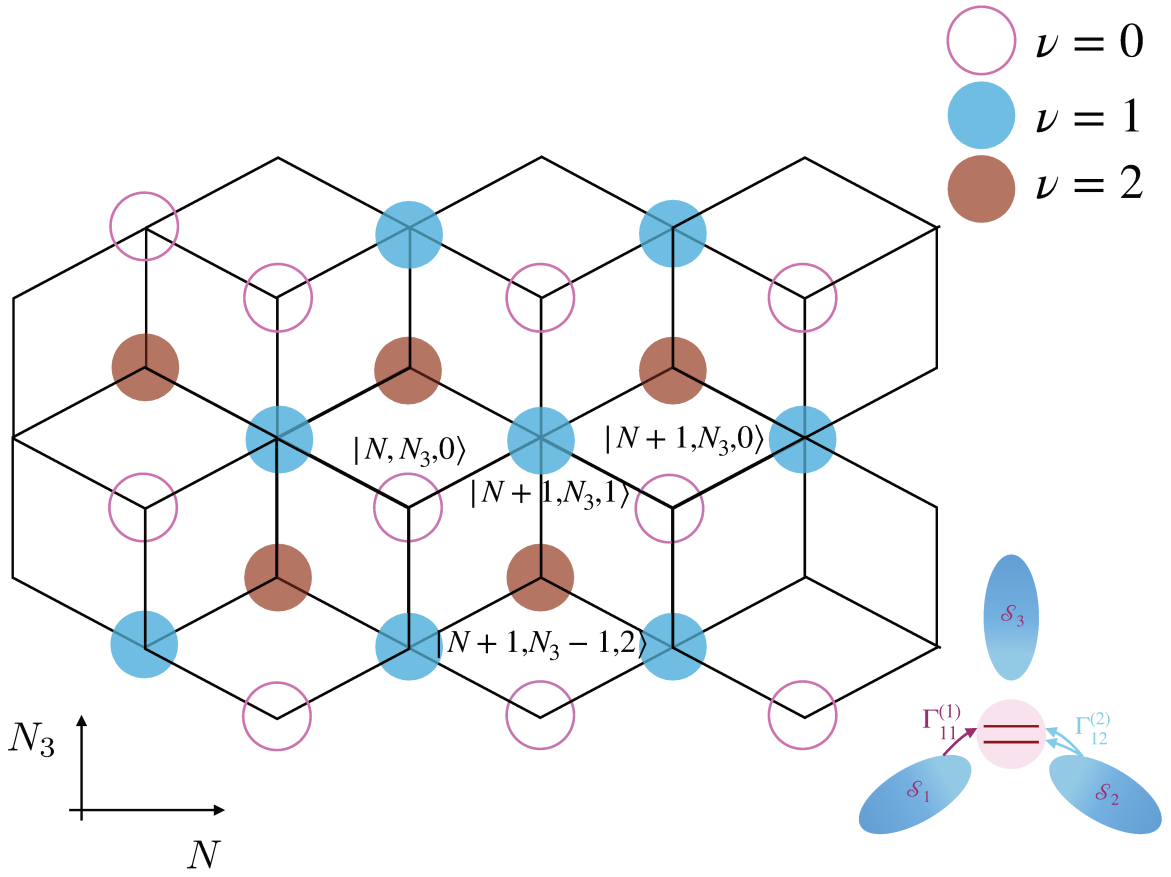



Figure 4.2: Reseau équivalent dans l'espace de Fock d'une tri-jonction à deux niveaux

état. On a alors les états suivants :

$$
\begin{aligned}
|\nu, \nu'\rangle_A &= |0,0\rangle_{1,2} \\
|\nu, \nu'\rangle_B &= |1,0\rangle_{1,2} \\
|\nu, \nu'\rangle_{A'} &= |0,1\rangle_{1,2} \\
|\nu, \nu'\rangle_{B'} &= |1,1\rangle_{1,2}
\end{aligned}
$$

On voit alors que l'état $|0,0\rangle$ est connecté aux états $|1,0\rangle$ et $|0,1\rangle$ par un terme de saut de paire. Ces états sont eux mêmes connectés à l'état $|1,1\rangle$. La jonction peut donc être représentée par deux réseaux de type graphène dont les sites A sont connectés avec les sites A' (l'état $|0,0\rangle$ est connecté à l'état $|0,1\rangle$ par le transfert d'une paire vers l'état 2) et les sites B avec les sites B' (l'état $|1,0\rangle$ est connecté à l'état $|1,1\rangle$ par le transfert d'une paire vers l'état 2). Il est intéressant de noter qu'un couplage entre les deux points quantiques introduirait un lien supplémentaire entre les sites A' et B.

Dans les systèmes solides, lorsqu'une transition topologique a lieu elle a généralement ( [99] , [100]) pour conséquence l'apparition d'états de bords. L'analogie entre les jonctions et nos réseaux fictifs montre que pour observer des états de bords il est nécessaire de limiter abruptement les nombres maximum de paires transférées entre les supraconducteurs.

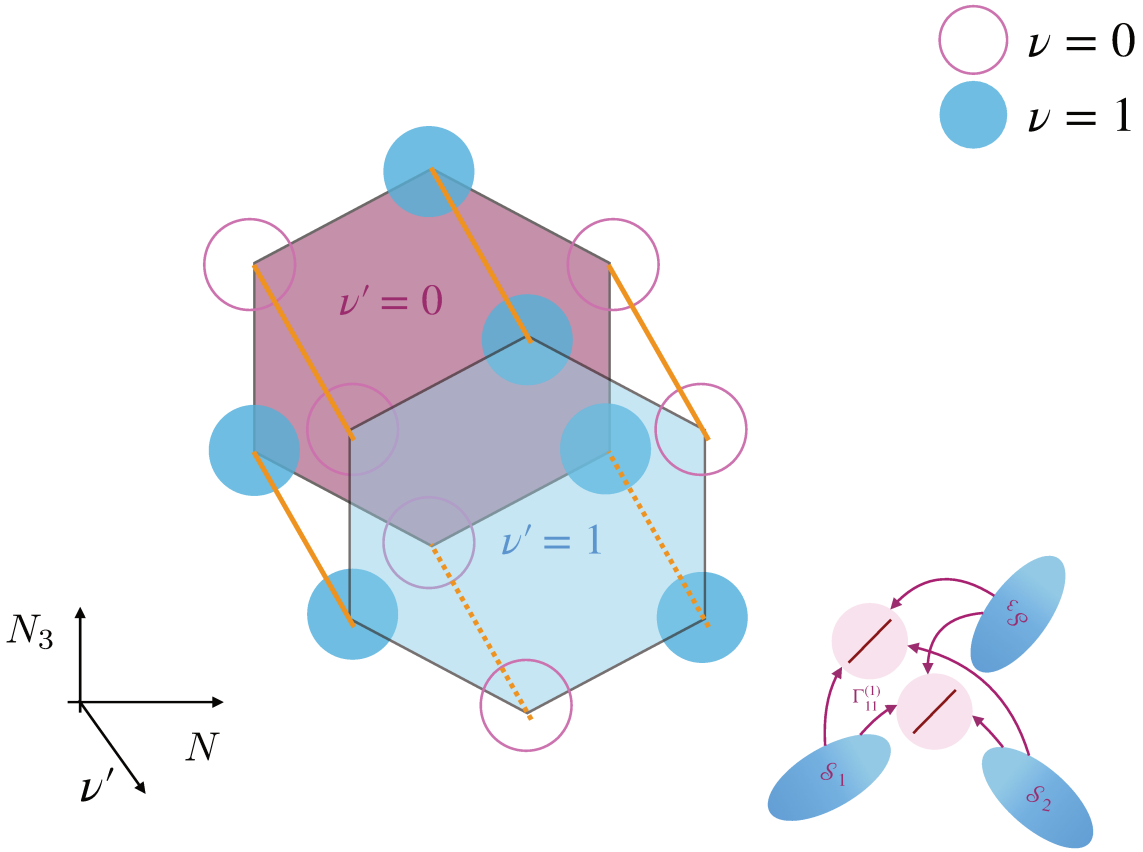



Figure 4.3: Bi-couche de graphène et modèle de jonction correspondant

## 4.3 Tri-jonction et Graphène - Etats de bords parfaits

### 4.3.1 Modèle sur réseau d'une tri-jonction

Nous avons vu au chapitre I comment l'espace des états d'une tri-jonction Josephson peut être représenté par un réseau de topologie analogue à celle du graphène. Je rappelle et complète ici l'analogie afin de pouvoir par la suite formuler le problème d'un réseau fini dans le langage des jonctions Josephson.

Les états sont donc caractérisés par trois variables $|N, N_3, \nu\rangle$. Chaque noeud du réseau correspondant à un état, on représente l'espace des états dans l'espace $\{N, N_3\}$. La variable $\nu$ quant à elle est analogue à l'indice interne d'une maille. Autrement dit, la maille élementaire de ce réseau contient deux états repérés par $\nu$. Dans cette analogie, la phase joue le rôle de quasi-moment tandis que les variables N jouent le rôle de variables d'espace. Pour formuler une analogie complète avec un problème de liaison fortes à deux dimensions, il faut identifier les indices de maille. En effet, au sein d'une maille donné l'indice $N_2 - N_1$ varie de 1. Comme on peut le voir sur la figure 4.4, le passage d'une maille à l'autre dans la direction $N$ donne lieu a des facteurs $e^{\pm i\phi}$.

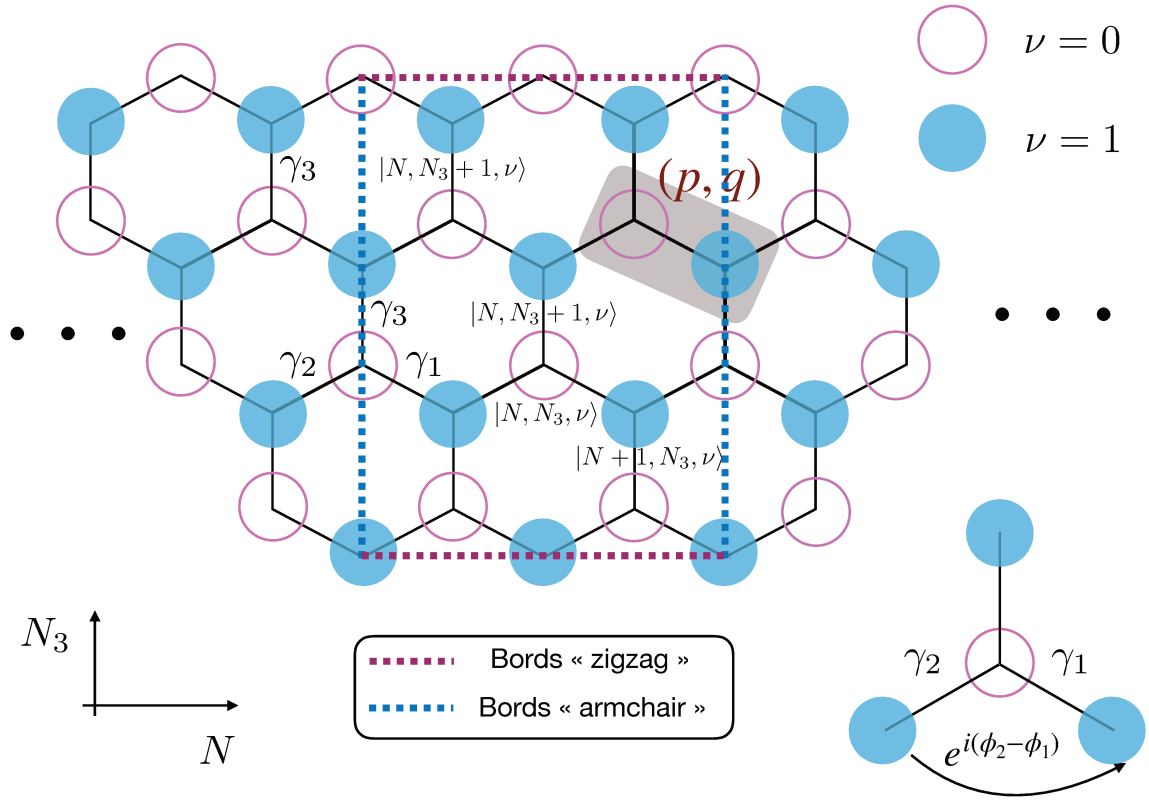



Figure 4.4: Réseau équivalent à la tri-jonction simple en présence de bords

### 4.3.2 Cas de bords parfaits, limitation du nombre de paires

D'après la représentation développée en section 4.1, on voit que pour créer des bords *zig-zag* au sein du réseau fictif il suffit de limiter le nombre de paires $N_3$. On peut également choisir de réaliser des bords de type *armchair* en limitant plutôt $N$.

En présence d'une irradiation micro-ondes, la tri-jonction présente une transition topologique. En limitant le nombre de paires dans le terminal 3, on s'attend à observer l'apparition d'états de bords chiraux. En choisissant de limiter $N_3$, les équations de liaisons fortes s'écrivent :

$$\begin{aligned} E\Psi_q^{\nu=0}(\phi) &= \left[(\gamma_1 e^{-i\phi} + \gamma_2)\Psi_q^{\nu=1}(\phi) + \gamma_3 e^{-i\phi}\Psi_{q+1}^{\nu=1}(\phi)\right] \\ &+\tilde{\gamma}(\chi)\left[\Psi_{q+1}^{\nu=0}(\phi) + e^{i\phi}\Psi_{q-1}^{\nu=0}(\phi) + e^{-i\phi}\Psi_q^{\nu=0}(\phi)\right] - \epsilon_0\Psi_q^{\nu=0}(\phi) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} E\Psi_q^{\nu=1}(\phi) &= \left[(\gamma_1 e^{i\phi} + \gamma_2)\Psi_q^{\nu=0}(\phi) + \gamma_3 e^{i\phi}\Psi_{q-1}^{\nu=0}(\phi)\right] \\ &+\tilde{\gamma}(\chi)\left[\Psi_{q+1}^{\nu=1}(\phi) + e^{i\phi}\Psi_{q-1}^{\nu=1}(\phi) + e^{-i\phi}\Psi_q^{\nu=1}(\phi)\right] + \epsilon_1\Psi_q^{\nu=0}(\phi) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ce système d'équations est diagonalisé numériquement pour un nombre de paires $N_3$ allant de 0 à $M$. Sur la figure 4.6, je trace l'ensemble des énergies propres du système pour

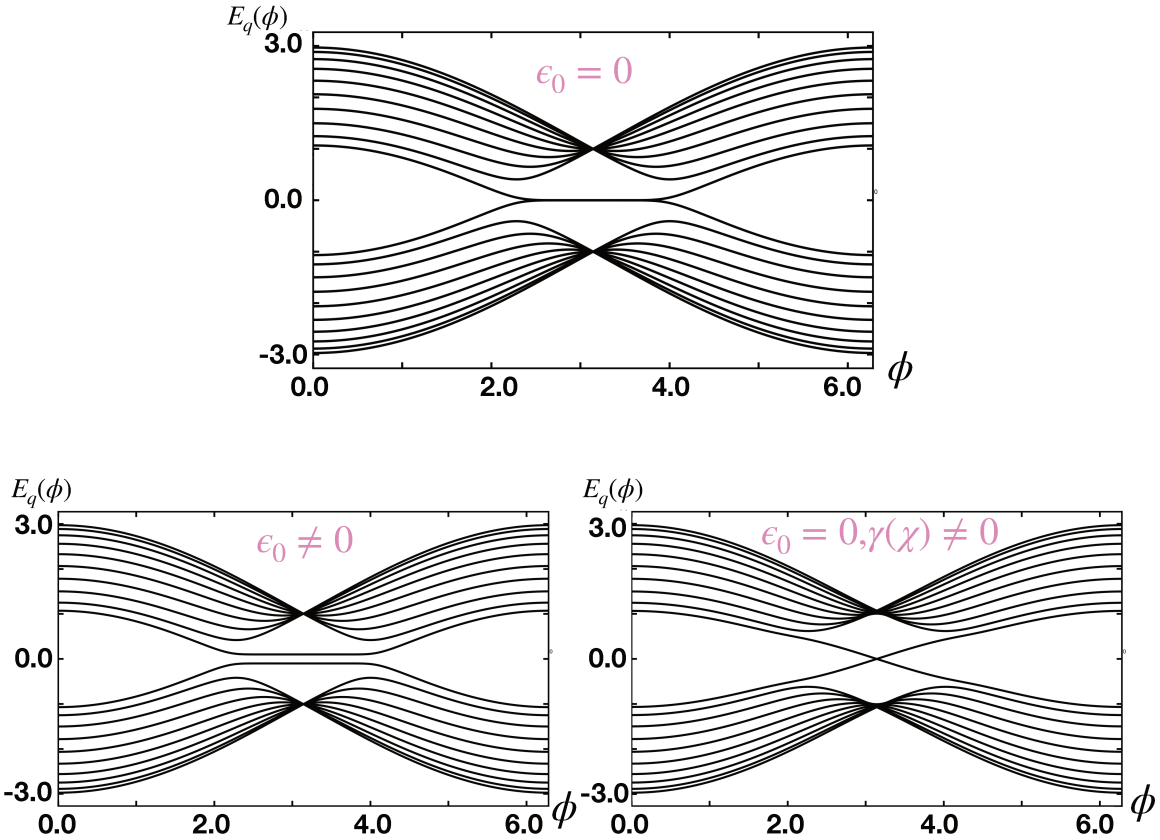



Figure 4.5: Spectre de la tri-jonction avec bords, effet du terme de masse et du couplage second voisins

$M = 10$. On observe tout d'abord que la forme globale de l'ensemble des énergies s'apparente aux spectres calculés pour un réseau infini. Dans la limite ou $M \longrightarrow +\infty$ le spectre s'identifie à la projection dans le plan $(E, \phi)$ du spectre $E(\phi_1, \phi_2)$. Néanmoins, on voit sur le panneau du haut que deux états ne correspondent pas à cette assertion. Ce sont, autour de $\phi = \pi$ les états à énergie nulle. Ces états sont propres au caractère fini du système étudié. Ce sont des états de bords, qui reste localisés aux extrémités du ruban considéré. On voit sur le panneau (b) que l'introduction d'une énergie $\epsilon_0 \neq 0$ ouvre un gap autour de $\phi = \pi$. Le couplage second voisins (c) modifie ces états de bords. Lorsque celui-ci est non-nul, les états de bords acquierent une dispersion non-nulle et transportent alors un courant. Ces dispersions sont celles que l'on obtient dans le cas du graphène [101] [102].

### 4.3.3 Exemple de transition topologique dans un double dot

Je considère dans cette section une tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux. Ce modèle s'avère être très intéressant pour plusieurs raisons. Premièrement, il offre la possibilité d'étudier une transition topologique dans une jonction dont le réseau analogue

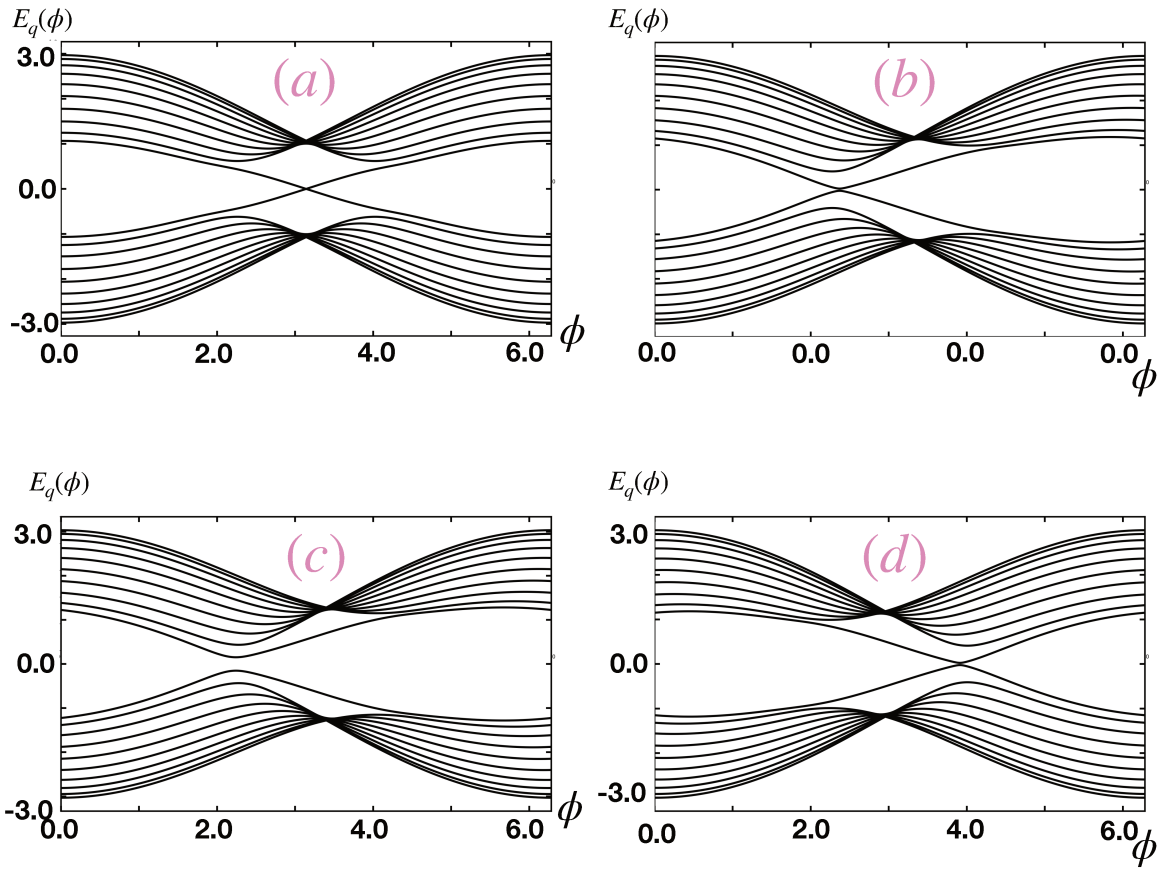



Figure 4.6: Transition topologique et états de bords dans une tri-jonction

est plus complexe que le graphène. C'est un témoin supplémentaire de l'utilité d'une telle analogie. Lorsque la jonction est irradiée, le modèle effectif associé fait apparaître une source de chiralité supplémentaire. L'origine de cette chiralité provient du fait qu'une paire peut être transférée sur deux niveaux distincts. Elle est caractérisée en général par la non-commutation des matrices de transfert de paires $\Gamma_1, \Gamma_2$. Se pose alors la question de l'effet de ce type de termes. Enfin, il existe en germe au sein de ce modèle une configuration qui questionne de manière remarquable l'observation d'états de bords dans une jonction réelle. Cet aspect permet également de questionner les limites de l'analogie développée précédemment.

La jonction non-irradiée est décrite par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha,\beta=1,2} \epsilon_{\alpha,\beta} d^\dagger_{\alpha,\beta} d_{\alpha,\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1,2} \Gamma_{\alpha,\beta} d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow} + \Gamma^*_{\alpha,\beta} d_{\beta,\downarrow} d_{\alpha,\uparrow} \tag{4.4}$$

Etudions d'abord le cas $\Gamma_{12} = 0$. Dans ce cas, les deux niveaux sont indépendants. L'énergie des états propres s'écrit :

$$E_i = \pm\sqrt{\epsilon_i^2 + |\Gamma_{ii}|^2} \tag{4.5}$$

La condition d'existence de points de Dirac déterminée au chapitre I se généralise :

$$1 - \frac{\Gamma^{II}_{ii}}{\Gamma^{III}_{ii}} \leq \frac{\Gamma^{I}_{ii}}{\Gamma^{III}_{ii}} \leq 1 + \frac{\Gamma^{II}_{ii}}{\Gamma^{III}_{ii}} \tag{4.6}$$

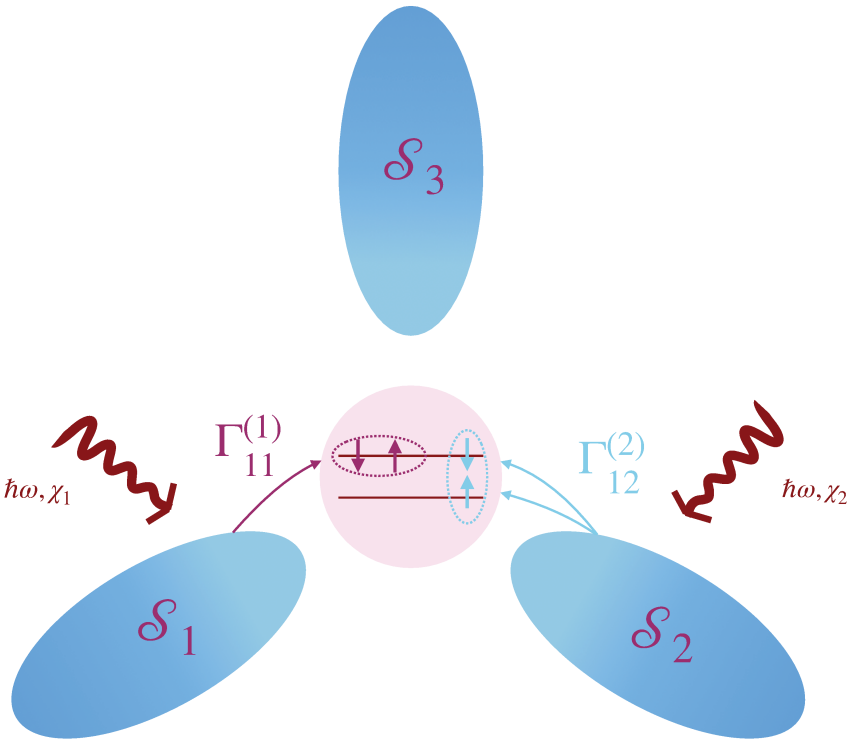



Figure 4.7: Tri-jonction connecté par un point quantique à deux niveaux.

Dans le cas symétrique $\Gamma_{ii}^{I} = \Gamma_{ii}^{II} = \Gamma_{ii}^{III}$ les amplitudes de transition sont données ($\chi = \frac{\pi}{2}$) par $b_c^i = \frac{1}{\Gamma_i}\sqrt{\frac{\omega\epsilon_i}{|\sin(2\phi_1^*)|}}$ . Soit,

$$\frac{b_c^1}{b_c^2} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \tag{4.7}$$

Si les $\Gamma_i, \epsilon_i$ sont égaux, le nombre de Chern passe alors directement de 0 à 2, les deux bandes étant de même chiralité. Dans le cas général on observe deux transitions successives aux deux points critiques. C'est un exemple d'un propriété plus générale démontrée dans [38] par une méthode de scattering.

**Remarque** - Si $\Gamma_{12}$ n'est pas nul mais que la jonction est supposée symétrique, il existe alors des points de Dirac pour les valeurs de phase $\phi_1 = -\phi_2 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Sauf si $\Gamma_{12} = \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}$ auquel cas un des états est à énergie nulle pour toutes valeurs de phases. Ce point remarquable sera discuté plus en détail par la suite.

Comme nous l'avons vu précédemment, l'irradiation d'une jonction par un rayonnement brisant la symétrie par renversement du temps peut dans certains cas induire une transition topologique. Je montre ici comment l'introduction de ce type de rayonnement permet d'induire des transitions multiples lorsque le dot est constitué de plusieurs niveaux. J'analyse cette transition à partir d'un Hamiltonien effectif dérivé à partir du formalisme de Floquet. L'irradiation de la jonction est prise en compte via la dépendance en temps des phases

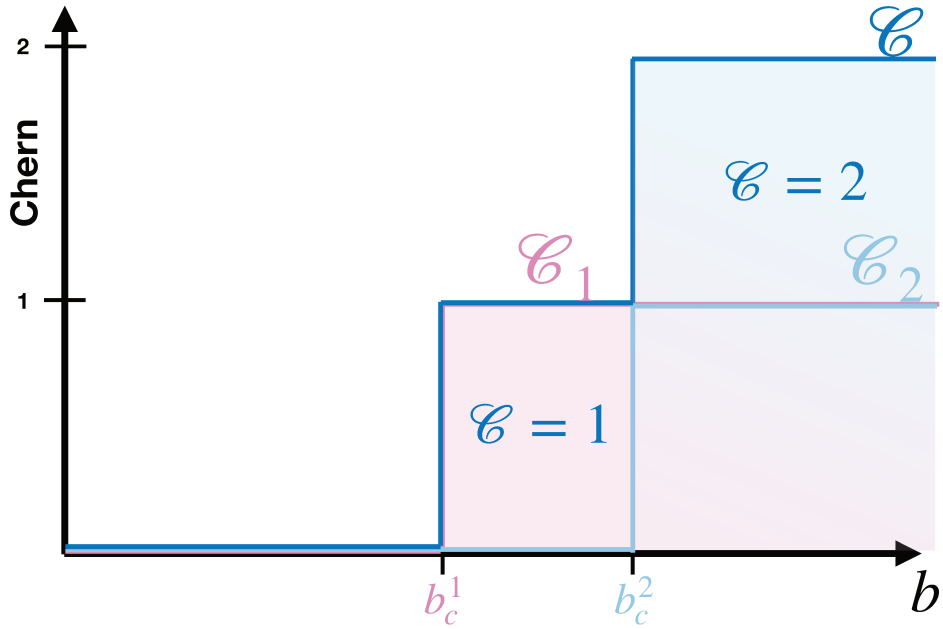



Figure 4.8: Nombre de Chern pour le cas $\Gamma_{12} = 0$

suivantes :

$$\phi_1 = \frac{\phi}{2} + b_1 \cos(\omega t + \frac{\chi}{2}) \tag{4.8}$$

$$\phi_2 = -\frac{\phi}{2} + b_2 \cos(\omega t - \frac{\chi}{2}) \tag{4.9}$$

Seule la partie $\Gamma d^\dagger d^\dagger$ du Hamiltonien dépend du temps. Développons cette partie en série de Fourier.

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \Gamma^1_{\alpha,\beta} e^{i\phi_1(t)} + \Gamma^2_{\alpha,\beta} e^{i\phi_2(t)} \tag{4.10}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}^{(m)}_{\alpha,\beta} e^{im\omega t} \tag{4.11}$$

L'harmonique m de l'Hamiltonien dépendant du temps s'écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{H}}_{(m)} = i^m \sum_{\alpha,\beta} \left[ \Gamma^1_{\alpha,\beta} \mathscr{J}_m(b_1) e^{im\frac{\chi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} + \Gamma^2_{\alpha,\beta} \mathscr{J}_m(b_2) e^{-im\frac{\chi}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}} \right] d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow} + \text{h.c} \tag{4.12}$$

Dans la limite $\omega \longrightarrow \infty$, $\mathcal{H}$ est approché par l'Hamiltonien effectif suivant :

$$\mathcal{H}_{eff} = \tilde{\mathcal{H}}_{(0)} + \sum_{m>0}^{+\infty} \frac{1}{m\omega} \left[ \tilde{\mathcal{H}}_{(m)}, \tilde{\mathcal{H}}_{(-m)} \right] \tag{4.13}$$

De plus, lorsque $b \ll 1$, on peut ne garder que les premiers termes du développement car

$\mathscr{J}_m(b) \underset{b\to 0}{\sim} b^m$. Calculons les premières harmoniques.

$$\frac{1}{\omega}\left[\tilde{\mathcal{H}}_{(1)}, \tilde{\mathcal{H}}_{(-1)}\right] = \frac{1}{\omega}\sum_{\alpha,\beta,\sigma,\xi}\left[\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\alpha,\beta} d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow} + \tilde{\Gamma}^{(1)}_{\alpha,\beta}{}^{*} d_{\beta,\downarrow} d_{\alpha,\uparrow}\ ,\ \tilde{\Gamma}^{(-1)}_{\sigma,\xi} d^\dagger_{\sigma,\uparrow} d^\dagger_{\xi,\downarrow} + \tilde{\Gamma}^{(-1)*}_{\sigma,\xi} d_{\xi,\downarrow} d_{\sigma,\uparrow}\right] \tag{4.14}$$

$$= \frac{1}{\omega}\sum_{\alpha,\beta,\sigma,\xi}\left(\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\alpha,\beta}\tilde{\Gamma}^{(-1)*}_{\sigma,\xi} - \tilde{\Gamma}^{(-1)}_{\alpha,\beta}\tilde{\Gamma}^{(1)*}_{\sigma,\xi}\right)\left[d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow}\ ,\ d_{\xi,\downarrow} d_{\sigma,\uparrow}\right] \tag{4.15}$$

$$\left[d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow}\ ,\ d_{\xi,\downarrow} d_{\sigma,\uparrow}\right] = -\delta_{\xi,\beta}\delta\alpha,\sigma + \delta_{\xi,\beta} d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d_{\sigma,\uparrow} + \delta_{\alpha,\sigma} d^\dagger_{\beta,\downarrow} d_{\xi,\downarrow} \tag{4.16}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\alpha,\beta}\tilde{\Gamma}^{(-1)*}_{\sigma,\xi} - \tilde{\Gamma}^{(-1)}_{\alpha,\beta}\tilde{\Gamma}^{(1)*}_{\sigma,\xi} = 2i\,\mathscr{J}_1(b_1)\,\mathscr{J}_1(b_2)\sin(\chi)\left[\Gamma^1_{\alpha,\beta}\Gamma^2_{\sigma,\xi}e^{i\phi} - \Gamma^2_{\alpha,\beta}\Gamma^1_{\sigma,\xi}e^{-i\phi}\right] \tag{4.17}$$

Posons,

$$t_{\alpha,\sigma}(b_1,b_2,\phi,\chi) = \frac{1}{\omega}\sum_{\beta} 2i\,\mathscr{J}_1(b_1)\,\mathscr{J}_1(b_2)\sin(\chi)\left[\Gamma^1_{\alpha,\beta}\Gamma^2_{\beta,\sigma}e^{i\phi} - \Gamma^2_{\alpha,\beta}\Gamma^1_{\beta,\sigma}e^{-i\phi}\right] \tag{4.18}$$

$$= \frac{2\,\mathscr{J}_1(b_1)\,\mathscr{J}_1(b_2)\sin(\chi)}{\omega}\left([\Gamma^1,\Gamma^2]_{\alpha,\sigma}\sin(\phi) - i\{\Gamma^1,\Gamma^2\}_{\sigma,\alpha}\cos(\phi)\right) \tag{4.19}$$

Finalement,

$$\frac{1}{\omega}\left[\tilde{\mathcal{H}}_{(1)}, \tilde{\mathcal{H}}_{(-1)}\right] = \sum_{\alpha} t_{\alpha,\alpha}(b_1,b_2,\phi,\chi)(1-\hat{n}_\alpha) + \sum_{\alpha\neq\sigma} t_{\alpha,\sigma}(b_1,b_2,\phi,\chi)\left[d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d_{\sigma,\uparrow} + d^\dagger_{\alpha,\downarrow} d_{\sigma,\downarrow}\right] \tag{4.20}$$

**Hamiltonien effectif de la tri-jonction dot à deux niveaux**

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha,\beta} d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d^\dagger_{\beta,\downarrow} + \Gamma^*_{\alpha,\beta} d_{\beta,\downarrow} d_{\alpha,\uparrow} + \sum_{\alpha\neq\beta} t_{\alpha,\beta}(b_1,b_2,\phi,\chi)\left[d^\dagger_{\alpha,\uparrow} d_{\beta,\uparrow} + d^\dagger_{\alpha,\downarrow} d_{\beta,\downarrow}\right] \tag{4.21}$$

$$+ \sum_{\alpha}\epsilon_\alpha\hat{n}_\alpha + t_{\alpha,\alpha}(b_1,b_2,\phi,\chi)(1-\hat{n}_\alpha) \tag{4.22}$$

$$= \mathcal{H}_\Gamma + \mathcal{H}_t + \mathcal{H}_\epsilon \tag{4.23}$$

Ce modèle effectif présente quelques différences par rapport au cas d'un point quantique à un niveau. Premièrement, comme des paires d'électrons peuvent être séparés sur deux niveaux différents, on obtient un terme effectif de transfert à une particule entre les deux niveaux du point quantique. De plus ce terme est constitué d'une partie $\propto \sin(\phi)$ que l'on retrouve également dans le modèle à un niveau mais également d'un terme $\propto \cos(\phi)$ jusque là absent. Il est intéressant de noter que ce type de termes est également présent dans l'article [103]. Dans cet article, l'apparition d'un courant chiral est gouvernée par la commutation ou non des matrice $\Gamma$. La question qu'il advient de se poser est alors la suivante : Dans ce système, peut-on observer un courant chiral à $\epsilon_i = 0$ ?

### 4.3.4 Symétrie du courant DC

Dans le cas d'une jonction connectée par un point quantique à un niveau et soumise à un rayonnement micro-onde chiral, il a été montré ( [84]) par une analyse des symétries du courant que celui-ci ne peut prendre une valeur non-nulle à phase $\phi = \pi$ que si l'énergie de site $\epsilon_0$ est non-nulle. Ici, je reprend cet argument et je l'applique au cas du point quantique à deux niveaux. Afin de caractériser la symétrie du courant DC en présence d'un rayonnement micro-onde, j'analyse la transformation de l'Hamiltonien effectif sous l'action des opérateurs de renversement du temps $\mathcal{T}$ et de conjugaison de charge $\mathcal{C}$. On s'attend en effet à ce que le premier opérateur joue un rôle sur la variable $\phi$ (qui est ici l'analogue d'un quasi-moment) tandis que l'opérateur de conjugaison de charge transforme le paramètre $\epsilon_0$. On définit ces opérateurs comme suit :

$$\mathcal{T} d_{k,\sigma} \mathcal{T}^{-1} = -\sigma d_{-k,-\sigma} \tag{4.24}$$
$$\mathcal{C} d_{k,\sigma} \mathcal{C}^{-1} = d_{k,\sigma} \tag{4.25}$$

Déterminons la façon dont l'Hamiltonien effectif se transforme sous l'action de ces opérateurs. On fixe $b_1$ et $b_2$.

Le nouvel Hamiltonien, dans la base transformée s'exprime comme suit :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{T}^{-1} \tag{4.26}$$
$$= \mathcal{T}\mathcal{H}_\Gamma\mathcal{T}^{-1} + \mathcal{T}\mathcal{H}_t\mathcal{T}^{-1} + \mathcal{T}\mathcal{H}_\epsilon\mathcal{T}^{-1} \tag{4.27}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{T}$ est anti-unitaire, la matrice $\Gamma$ est symétrique et que $t^*_{\alpha,\sigma}(\phi,\chi) = t_{\alpha,\sigma}(-\phi,-\chi)$ on obtient le résultat suivant :

$$\mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{H}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\}) \tag{4.28}$$

On définit le courant :

$$\mathcal{I}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\}) = \langle\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})|\,\hat{\mathcal{J}}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})\,|\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})\rangle \tag{4.29}$$
$$\hat{\mathcal{J}}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\}) = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\}) \tag{4.30}$$

En exprimant $\mathcal{H}$ en fonction de $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})$, on peut réécrire le courant comme :

$$\mathcal{I}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\}) = \langle\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})|\,\frac{2e}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{T}^\dagger\mathcal{H}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})\mathcal{T}}{\partial\phi}\,|\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})\rangle \tag{4.31}$$
$$= -\langle\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})|\,\mathcal{T}^\dagger\frac{2e}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{H}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})}{\partial(-\phi)}\mathcal{T}\,|\psi(\phi,\chi,\{\epsilon_i\})\rangle \tag{4.32}$$
$$= -\langle\psi(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})|\,\frac{2e}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})\,|\psi(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})\rangle \tag{4.33}$$
$$= -\langle\psi(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})|\,\hat{\mathcal{J}}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})\,|\psi(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\})\rangle \tag{4.34}$$

Soit,

$$\mathcal{I}(\phi,\chi,\{\epsilon_i\}) = -\mathcal{I}(-\phi,-\chi,\{\epsilon_i\}) \tag{4.35}$$

De manière analogue, la conjugaison de charge donne :

$$\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{H}(-\phi, \chi, \{-\epsilon_i\}) + \mathrm{C}^{ste} \tag{4.36}$$
$$\mathcal{C}\,|\psi(\phi, \chi, \{\epsilon_i\})\rangle = |\psi(-\phi, \chi, \{-\epsilon_i\})\rangle \tag{4.37}$$

Finalement, on obtient les relations de symétrie suivantes :

**Symétrie du courant**

$$\mathcal{I}(\phi, \chi, \{\epsilon_i\}) = -\mathcal{I}(-\phi, -\chi, \{\epsilon_i\}) \tag{4.38}$$
$$\mathcal{I}(\phi, \chi, \{\epsilon_i\}) = -\mathcal{I}(-\phi, \chi, \{-\epsilon_i\}) \tag{4.39}$$

Si l'on suppose maintenant que le point quantique n'est constitué que d'un niveau ces relations se réduisent aux relations de symétrie de [84]. Dans ce cas, supposons que l'on se place en $\phi = 0, \pi$, points pour lesquels le courant à l'équilibre est nul. De plus, comme le courant est périodique de période $2\pi$, on a $\mathcal{I}(\phi = 0, \pi) = \mathcal{I}(-\phi)$. Supposons de plus que l'énergie $\epsilon_0$ du niveau quantique est nulle. On peut alors déduire à partir des équations 4.39 que $\mathcal{I}(\phi = 0, \pi, \chi) = -\mathcal{I}(\phi = 0, \pi, \chi)$. Tant que $\epsilon_0 = 0$, le courant chiral est donc nul.

Le même raisonnement s'applique pour le cas à deux niveaux. On voit d'après les relations de symétrie (4.39) que dès lors que tous les $\epsilon_i$ sont tous nuls, la même relation de symétrie apparaît pour le courant chiral. Il est donc nécessaire d'avoir au moins une énergie de site non-nulle au sein du système à deux niveaux pour observer l'apparition d'un courant chiral. Le terme dépendant de la relation de commutation des matrices $\Gamma$ ne change donc pas l'argument de symétrie et l'apparition d'un courant chiral dans la jonction est due à la brisure de la symétrie par renversement du temps et de la symétrie électron-trou.

### 4.3.5 Note sur la réalisation pratique des bords

Pour observer des états de bords au sein de la jonction nous avons, en section 4.3.2, décrit la jonction par un réseau de taille finie. Autrement dit le nombre de paires du supraconducteur 3 est limité. La physique de la jonction s'identifie alors à celle d'un ruban de graphène, avec les états $N_3 = 0$ et $N_3 = N_{max}$ correspondant aux bords. Dans une jonction Josephson, le réseau fictif est infini et réaliser de tels bords en pratique est questionnable. En ce sens, la configuration 4.10 est pertinente. En effet, on peut imaginer que dans un système expérimental dans lequel la jonction est couplée à un dot métallique constitué d'un ensemble de niveaux très proches, de sorte que cet ensemble d'états se situe dans le gap supraconducteur, on obtienne un système analogue à la tri-jonction mais dans lequel le nombre fini de niveaux limite le nombre de paires transférables.

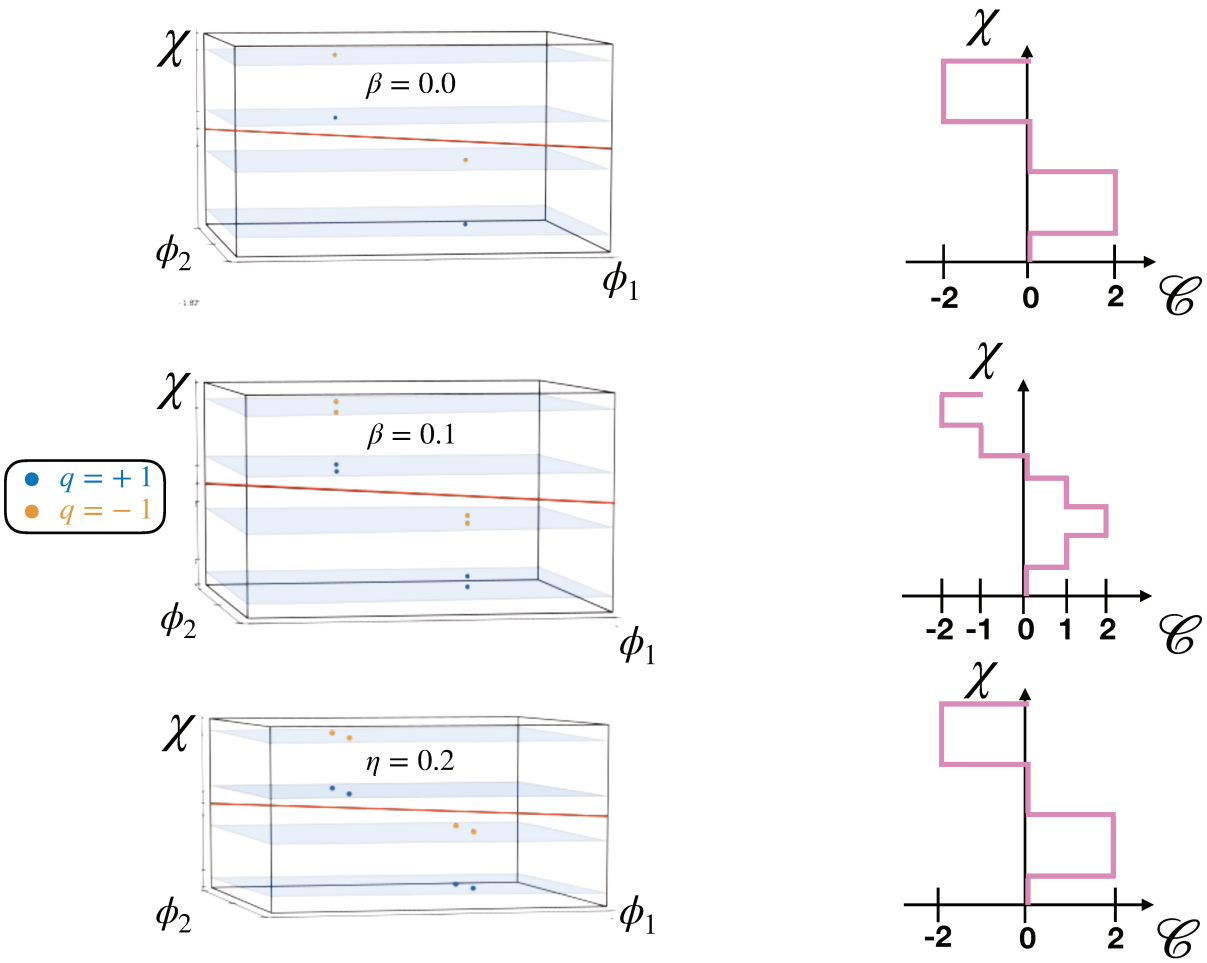



Figure 4.9: Transition topologique et points de Weyl dans un tri-jonction à deux niveaux

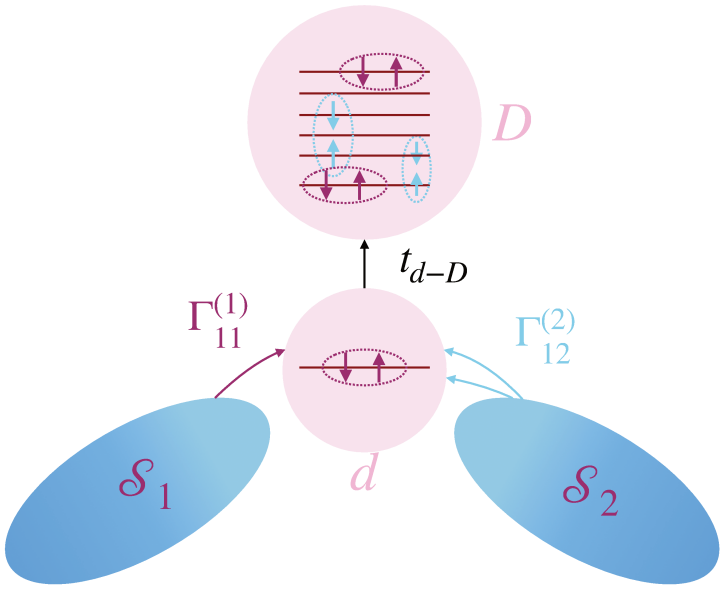



Figure 4.10: Schéma d'une jonction connecté à deux dot donc un contient M niveaux.

Ce système est décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i e^{i\phi_i} d_\uparrow^\dagger d_\downarrow^\dagger + \ \mathbf{h.c} \ + t \sum_{i=1,\sigma}^{M} D_{i,\sigma}^\dagger d_\sigma + \mathbf{h.c} + \epsilon_0 \hat{n}_d + \sum_{i=1}^{M} \epsilon_i \hat{n}_i \tag{4.40}$$

où l'opérateur $D_{i,\sigma}^\dagger$ crée un électron de spin $\sigma$ sur le niveau $i$ de l'îlot D et $d_\sigma^\dagger$ crée un électron de spin $\sigma$ sur le dot d.

Néanmoins, l'introduction nécessaire d'un système de nature non-supraconductrice afin de limiter le nombre de paires $N_3$ impose certaines contraintes. Premièrement, une différence importante avec cette configuration réside dans le fait que les électrons peuvent être transférés un par un. Dès lors, on voit que le réseau fictif correspondant est fondamentalement différent du réseau de type graphène. De plus, pour effectivement être capable de transférer un grand nombre de paires il est nécessaire d'imposer ou bien un ensemble d'énergies $\{\epsilon_i\}$ ou bien des interactions entre paires. Considérons en effet le cas ou le nombre d'états au sein de l'ilôt métallique est égal à 2.

L'amplitude de transition d'un $|\Psi_i\rangle$ vers un état $|\Psi_f\rangle$ peut être calculée en partant du développement de l'opérateur d'évolution suivant :

$$\langle\Psi(t)|\, U(t,0)\, |\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \int_{t_f \geq t_1 \geq \ldots \geq t_n \geq 0} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_1 \, |\Psi_f\rangle \, e^{-i\mathcal{H}_0(t_f - t_1)} \hat{V} e^{-i\mathcal{H}_0(t_1 - t_2)} \hat{V} \ldots \hat{V} e^{-i\mathcal{H}_0 t_n} \, |\Psi_i\rangle \tag{4.41}$$

On cherche ici à calculer lamplitude de transition entre le vide et l'état à 4 électrons au sein de l'îlot métallique. Le calcul en présence d'interaction ou d'énergies de sites différentes conduit respectivement aux amplitudes suivantes :

**Amplitude de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|4\rangle_D$**

$$a_{i\longrightarrow f}^{\{\epsilon_i\}} = 2f(\tau,\tau_1)\sum_{i,\sigma}\langle\Psi_f|\, d_\uparrow^\dagger d_\downarrow^\dagger c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,-\sigma}^\dagger c_{i,\eta}^\dagger c_{i,-\eta}^\dagger\,|0\rangle \left[e^{-i\epsilon_i(\tau_{34}+2\tau_{23}+2\tau_{12})}e^{-i\epsilon_k\tau_{12}} - e^{-i\epsilon_i(\tau_{23}+2\tau_{12})}e^{-i\epsilon_k(\tau_{34}+\tau_{23}+\tau_{12})}\right] \tag{4.42}$$

$$a_{i\longrightarrow f}^{\{\mathcal{U}_{ij}\}} = 2f(\tau,\tau_1)\sum_{i,\sigma}\langle\Psi_f|\, d_\uparrow^\dagger d_\downarrow^\dagger c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,-\sigma}^\dagger c_{i,\eta}^\dagger c_{i,-\eta}^\dagger\,|0\rangle \left[e^{-i\mathcal{U}_{ii}(\tau_{12}+\tau_{23})}e^{-i\mathcal{U}_{ik}\tau_{12}} - e^{-i\mathcal{U}_{ii}\tau_{12}}e^{-i\mathcal{U}_{ik}(\tau_{12}+\tau_{23}+\tau_{23})}\right] \tag{4.43}$$

Il apparaît d'après le calcul des amplitudes de transition qu'il est nécessaire d'imposer ou bien des interactions entre les paires ou bien des différences d'énergies entre les différents niveaux constituant l'îlot métallique. Ce résultat se généralise pour M niveaux. Dès lors, l'analogie entre l'espace des états de ce système et le réseau fictif de type graphène se complexifie. En effet, si l'on pouvait par exemple remplir cet îlot en le considérant constitué d'un ensemble de niveaux quasi-dégénérés, l'analogie serait presque parfaite et ce système permettrait en principe l'observation des états de bords sus-mentionnés. Néanmoins, le système ici est plus complexe et la présence d'un transition topologique associée à des états de bords reste ouverte.

## 4.4 Jonction avec interactions

Comme nous l'avons vu précédemment, la réduction en taille des systèmes supraconducteurs induit des effets capacitifs au sein de la jonction. Ces effets peuvent être pris en compte via l'introduction dans l'Hamiltonien de termes d'interaction, dépendant du nombre de paire $N_i$. Dans cette section je considère une jonction par point quantique dans la limite de gap infini. J'introduit au sein de cette jonction des termes d'interaction au sein d'un supraconducteur donné, entre les deux supraconducteurs et également entre un supraconducteur donné et le point quantique. En couplant les degrés de libertés $N_0$ et $\{N_1, N_2\}$ , ce dernier introduit une dépendance en $N_2 - N_1$ du paramètre effectif caractérisant l'énergie du point quantique. Or, on sait qu'au changement de signe de ce paramètre est associé une transition topologique. Je propose ici de questionner les potentiels effets topologiques associés à cette interaction.

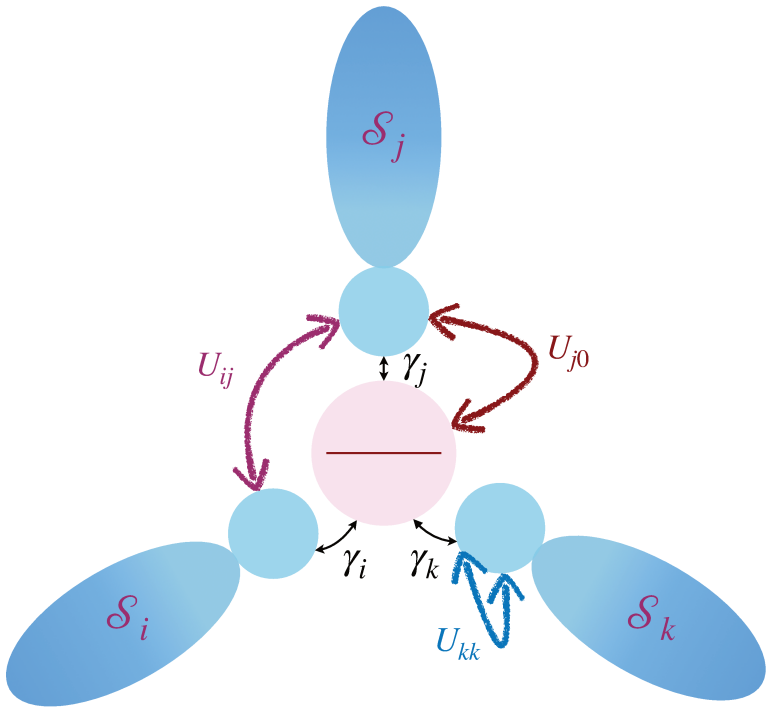



Figure 4.11: Schéma d'une jonction en présence d'interactions. Les îlots dénotés $S_{ii=1,2,3}$ représentent les supraconducteurs de la jonction. Les plus petits îlots circulaire qui les jouxtent représente la capacité finie des supraconducteurs lorsque leur taille est suffisamment petite. Cette capacité est prise en compte par les termes locaux d'interaction $U_{iii=1,2,3}$. Chaque îlot est connecté au dot par les amplitudes de transfert de paire $\gamma_{ii=1,2,3}$. Les doubles flèches rouges représentent l'interaction non-locale entre les paires des supraconducteur et le point quantique.

### 4.4.1 Modèle

On considère une jonction par point quantique en présence d'interactions. Dans la limite gap infini, ce système est décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_i \mu_i \hat{N}_i + \epsilon_0 \hat{N}_0 + \sum_i \gamma_i e^{i\phi_i} b_i^\dagger b_0 + \text{h.c} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{U}_{i,j} \hat{N}_i \hat{N}_j + \sum_j \mathcal{U}_{j,0} \hat{N}_j \hat{N}_0 \tag{4.44}$$

Remarquons que les termes associés aux opérateurs $b_0$ et $b_0^\dagger$ peuvent s'exprimer à l'aide des matrices de Pauli. On a en effet :

$$\epsilon_0 \hat{N}_0 + \sum_j \mathcal{U}_{j,0} \hat{N}_j \hat{N}_0 = \frac{\epsilon_0}{2}(2\hat{N}_0 - 1) + \frac{1}{2}\sum_j \mathcal{U}_{j,0} \hat{N}_j (2\hat{N}_0 - 1) + \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_j \mathcal{U}_{j,0} \hat{N}_j$$

$$2\hat{N}_0 - 1 = \sigma_z$$

$$\mathscr{B} := \{|1\rangle, |0\rangle\}$$

Avec cette convention, le nombre total de paires dans le système s'écrit :

$$\hat{\mathcal{N}} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \frac{1}{2}(1 + \sigma_z) \tag{4.45}$$

On vérifie alors que $\left[\mathcal{H}, \hat{N}\right] = 0$. Comme le nombre total de paires est conservé, on peut réécrire l'Hamiltonien de la jonction en utilisant uniquement deux variables de nombre de particules et deux variables de phase. Définissons :

$$N_+ = \frac{N_1 + N_2}{2} \tag{4.46}$$
$$N = \frac{N_1 - N_2}{2} \tag{4.47}$$
$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \tag{4.48}$$
$$\theta = \phi_1 + \phi_2 \tag{4.49}$$
$$\tag{4.50}$$

Afin de simplifier le problème, je supposerai de plus que :

- L'interaction locale est la même dans chaque supraconducteurs. $\mathcal{U}_{11} = \mathcal{U}_{22} = \mathcal{U}$
- Il n'y a pas d'interaction non-locale entre les deux supraconducteurs : $\mathcal{U}_{12} = 0$
- On pose $V = U_{10} - U_{20}$

En utilisant ces hypothèses, l'Hamiltonien peut se réécrire comme suit :

**Hamiltonien réduit de la jonction Josephson en présence d'interactions**

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \tilde{\mu} N + \tilde{\epsilon}_0(N)\sigma_z + \mathcal{U}N^2 + (\gamma_1 e^{i\frac{\phi}{2}} b_1^\dagger + \gamma_2 e^{-i\frac{\phi}{2}} b_2^\dagger)\sigma_- + \mathbf{h.c} + \text{constantes} \\ \tilde{\epsilon}_0(N) &= \epsilon_0 + VN \end{aligned} \tag{4.51}$$

Remarquablement, la partie proportionnelle à $\hat{\sigma}_z$ prend la même forme qu'en l'absence d'interaction à ceci près que l'énergie "effective" $\tilde{\epsilon}_0$ du point quantique dépend de $N_-$. Pour obtenir cette dépendance j'ai supposé que l'interaction capacitive entre le point quantique et les supraconducteurs est asymétrique, soit $\mathcal{U}_{10} = -\mathcal{U}_{20} = V$.

### 4.4.2 Limite Classique

Nous avons vu dans la section précédente que l'Hamiltonien de la jonction dépend en fait uniquement de deux variables $(\hat{N}, \phi)$. A première vue, notre Hamiltonien présente certaines caractéristiques propres à différents types de jonction. Le terme en $\mathcal{U}N^2$ s'apparente en effet à celui que l'on peut trouver au sein d'une jonction tunnel en interaction. Le terme de saut quant à lui est différent en raison de la présence du dot. L'interaction entre le dot et les supraconducteurs donne également lieu à un $\epsilon_0$ effectif dépendant de $N$. La physique d'une jonction tunnel est en fait analogue à celle d'un pendule [104] [105]. Les Hamiltoniens sont analogues et on trouve les trajectoires classiques (ouvertes et fermés) dans l'espace des phases $(\hat{N}, \phi)$. Afin de situer le problème et d'identifier les régimes intéressants, je propose d'étudier cette jonction dans le régime de champ moyen. En raison de la présence du dot,

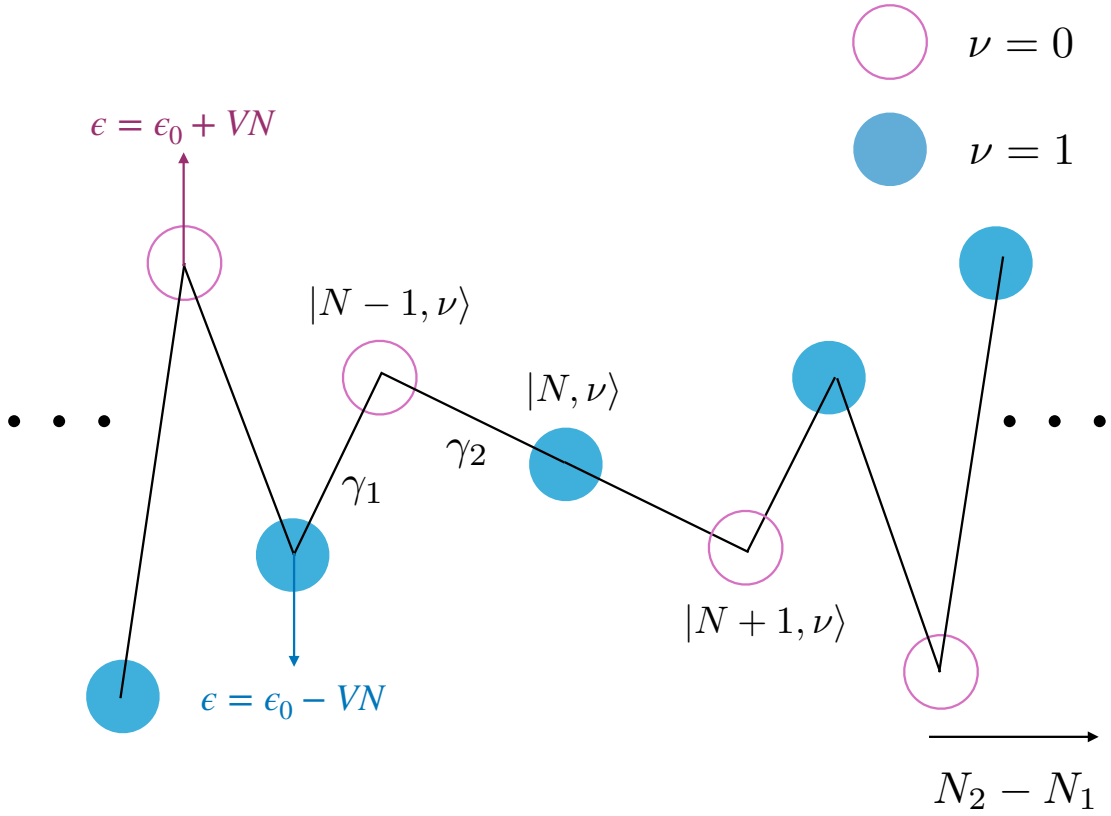



Figure 4.12: Schéma des énergies de site du réseau équivalent d'un jonction Josephson en présence d'une interaction entre les supraconducteurs et le point quantique

l'approximation est effectuée uniquement au sein des supraconducteurs. Les opérateurs $\hat{N}$ et $\phi$ sont alors représentés par des variables classiques, et l'Hamiltonien est diagonalisé dans le sous-espace associé au dot. On considère alors les énergies propres comme classiques, ce qui sous-entend un découplage entre les deux niveaux. Les énergies classiques s'écrivent donc :

**Energies Classiques**

$$\mathcal{H}_\eta = \mu N + \mathcal{U}N^2 + \eta\sqrt{(\tilde{\epsilon}_0(N))^2 + (\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos(\phi)} \tag{4.52}$$

$$\tilde{\epsilon}_0(N) = \epsilon_0 - VN \tag{4.53}$$

Les variables conjugués $N$ et $\phi$ doivent satisfaire les équations d'Hamilton :

$$\dot{\phi}_\eta = -\frac{\partial \mathcal{H}_\eta}{\partial N} = -\mu - 2\mathcal{U}N - \frac{\eta\tilde{\epsilon}_0}{D(N,\phi)}\frac{\partial\tilde{\epsilon}_0}{\partial N} \tag{4.54}$$

$$\dot{N}_\eta = \frac{\partial \mathcal{H}_\eta}{\partial \phi} = -\eta\frac{\gamma_1\gamma_2\sin(\phi)}{D(N,\phi)} \tag{4.55}$$

**Remarque** - L'approximation effectuée ici est similaire à celle qu'on opère dans le modèle de Bose-Hubbard lorsque l'on décrit un système de bosons sur sites en interaction. Dans celle-ci, on obtient les équations classiques en substituant les opérateurs $b_i^\dagger$ par $\sqrt{N_i}$. La présence de ce facteur donne lieu à des termes proportionnels à $\frac{N_2-N_1}{\mathcal{N}}$. Ces termes sont importants et conduisent dans ces systèmes à des effets non-linéaires comme le self-trapping. Dans les jonctions supraconductrices, la différence de population entre les supraconducteurs est la plupart du temps négligeable devant le nombre total de paires et ces termes sont négligés.

**Remarque** - S'il n'y a pas d'interaction dans le système, la fonction $D(N,\phi) = D(\phi)$ est indépendant de $N$. Dans ce cas, l'équation sur la phase se résoud simplement et donne $\phi(t) = \phi_0 - \frac{1}{2}\Delta\mu t$. L'équation sur $N$ s'intègre alors pour donner :

$$N(t;\eta) = \frac{2\eta}{\Delta\mu}\left(D(\phi) - D(\phi_0)\right) \tag{4.56}$$

Ou $D(\phi)$ s'identifie a l'énergie des états d'Andreev sans interaction. Le courant, défini comme $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ est donc donné par $4\eta\frac{\mathrm{d}D(\phi)}{\mathrm{d}\phi}$ et on retrouve le résultat classique.

Pour observer la structure des énergies propres et notamment la présence ou non d'un gap, je trace ci-dessous en fonction de $N$ le maximum et le minimum par rapport à $\phi$ des deux bandes d'énergies. Dans la limite $VN \longrightarrow \infty$ l'équation 4.53 donne des énergies qui deviennent linéaire en $N$. C'est ce qu'on observe sur les figures 4.13 et 4.14 ou pour $N$ suffisamment grand les enveloppes des énergies propres tendent vers les asymptotes $\pm VN$. De plus, lorsque V est non-nul le gap se ferme pour $N = \frac{-\epsilon_0}{V}$. On observe que quelque soit la valeur de $\epsilon_0$, il existe un $N$ tel qu'un gap se ferme, pourvu que le nombre total de cellules soit suffisamment élevé. A $\epsilon_0 = 0$, la seule manière d'ouvrir un gap en $N = 0$ est d'imposer une asymétrie des couplages $\gamma_1$ et $\gamma_2$ (4.14). Pour terminer, on observe sur la figure 4.14 que l'effet du terme d'interaction local est de courber les enveloppes. En un sens, ce terme s'oppose au potentiel $\mu N$. Il tend en effet à imposer des trajectoires fermés dans l'espace des phases tandis qu'en présence uniquement d'un potentiel chimique les trajectoires sont ouvertes. Dans ce système, une première manière de caractériser l'effet du terme d'interaction entre le dot et les supraconducteurs est d'identifier les types de trajectoires qu'impose ce terme.

### 4.4.3 Phase de Zak dans la limite V -> 0

On considère la jonction en présence uniquement de l'interaction non-locale entre le dot et les supraconducteurs. Comme ce terme introduit une dépendance en $\hat{N}$ dans l'energie effective du dot, on s'attend à en observer une manifestation dans l'observable courant. Pour calculer cet effet, traitons le terme d'interaction en perturbation. L'Hamiltonien du problème s'écrit :

$$\mathcal{H} = (\epsilon_0 + V\hat{N}_-)\sigma_z + z(\phi)\sigma_- + \mathbf{h.c} \tag{4.57}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V\hat{N}_-\sigma_z \tag{4.58}$$

$$\left[\phi, \hat{N}_-\right] = i \tag{4.59}$$

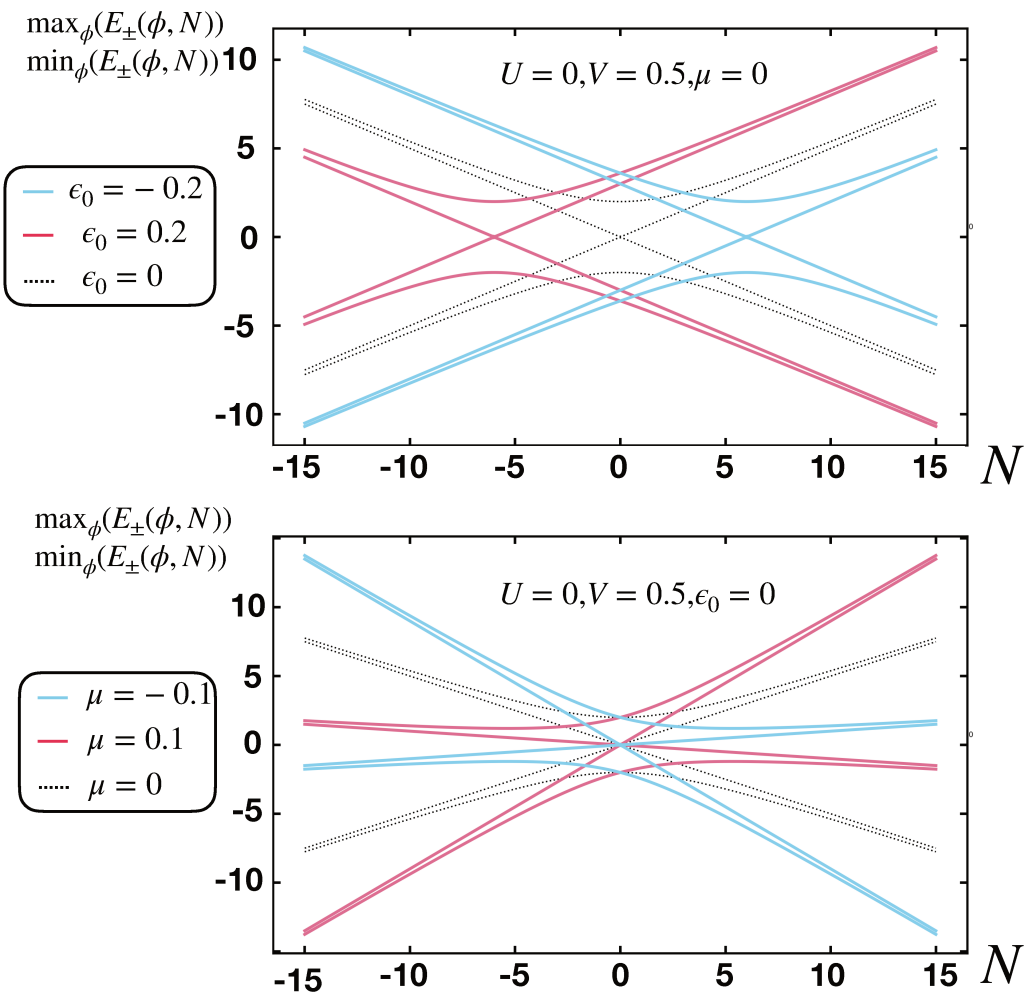



Figure 4.13: Enveloppe des états liés d'Andreev. (Haut) : Effet de $\epsilon_0$. (Bas) : Effet de $\mu$.

Supposant connus les énergies et états propres $(E_0, |\Psi^0\rangle)$ de $\mathcal{H}_0$, on cherche à déterminer les états propres de $\mathcal{H}$. Au premier ordre en $\frac{V}{\gamma}$, on a :

$$|\Psi_\nu\rangle = |\Psi^0_\nu\rangle + \sum_{\eta\neq\nu} \frac{1}{E^0_\nu - E^0_\eta} \langle\Psi^0_\eta| (V\hat{N}\sigma_z) |\Psi^0_\nu\rangle |\Psi^0_\eta\rangle \tag{4.60}$$

Soit, pour l'état $|\Psi_-\rangle$ :

$$|\Psi_-\rangle = |\Psi^0_-\rangle + \frac{V}{E^0_- - E^0_+} \langle\Psi^0_+| \hat{N}\sigma_z |\Psi^0_-\rangle |\Psi^0_+\rangle \tag{4.61}$$

Calculons alors au premier ordre le courant transporté par cet état.

$$\mathcal{I}_- = \langle\Psi_-|\hat{\mathcal{I}}|\Psi_-\rangle \tag{4.62}$$

$$= \left[\langle\Psi^0_-| - \langle\Psi^0_+| (\langle\Psi^0_+| \hat{N}\sigma_z |\Psi^0_-\rangle)^\dagger \frac{V}{E^0_- - E^0_+}\right] \hat{\mathcal{I}} \left[|\Psi^0_-\rangle - \frac{V}{E^0_- - E^0_+}(\langle\Psi^0_+| \hat{N}\sigma_z |\Psi^0_-\rangle) |\Psi^0_+\rangle\right] \tag{4.63}$$

$$= \mathcal{I}^{(0)} + \mathcal{I}^{(1)} \tag{4.64}$$

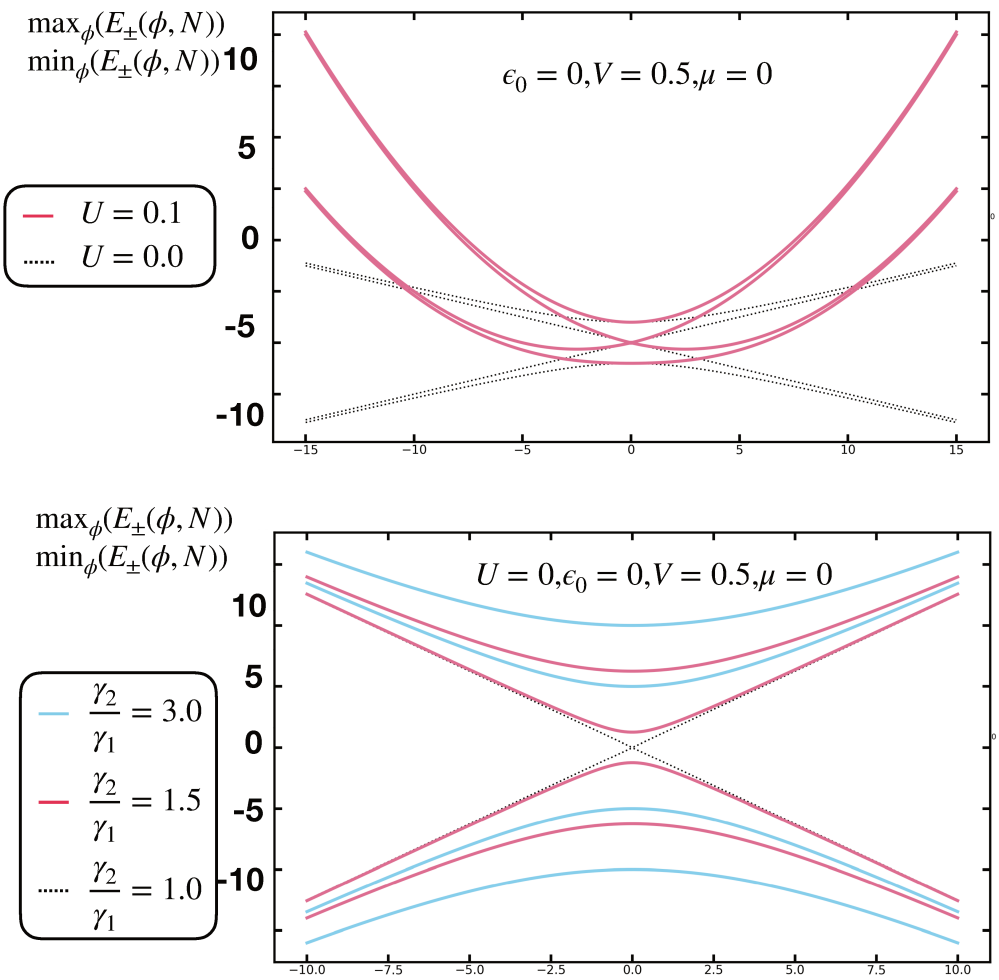



Figure 4.14: Enveloppe des états liés d'Andreev. (Haut) : Effet de $U$. (Bas) : Effet des couplages $\gamma_i$.

En utilisant le fait que $\langle\Psi_+^0|\,\partial_\phi\mathcal{H}\,|\Psi_-^0\rangle = (E_-^{(0)} - E_+^{(0)})\langle\Psi_+^0|\frac{\partial\Psi^0}{\partial_\phi}\rangle$, le courant au premier ordre peut se réécrire :

$$\mathcal{I}^{(1)} = 2V\mathfrak{Im}\left\{\langle\Psi_+^0|\,\partial_\phi\sigma_z\,|\Psi_-^0\rangle\,\langle\Psi_-^0|\,\partial_\phi\,|\Psi_+^0\rangle\right\} \tag{4.65}$$

En réarrangeant les termes, on s'aperçoit que cette expression est proportionnelle au courant $\mathcal{I}^{(0)}$ mais également à $\langle\Psi_-^0|\partial_\phi\Psi_-^0\rangle$. Cette dernière expression correspond à la courbure de Zak associé à l'état non perturbé $|\Psi_-^0\rangle$. On a donc le résultat suivant :

**Courant induit par la perturbation** $\propto V$

$$\frac{\mathcal{I}^{(1)}}{\mathcal{I}^{(0)}} = \frac{-\epsilon_0}{E^2(\phi)}\Omega_{Zak} \tag{4.66}$$

Ce résultat est similaire à celui obtenu dans [38] pour la transconductance comme sonde du nombre de Chern associé à une jonction multiterminale.

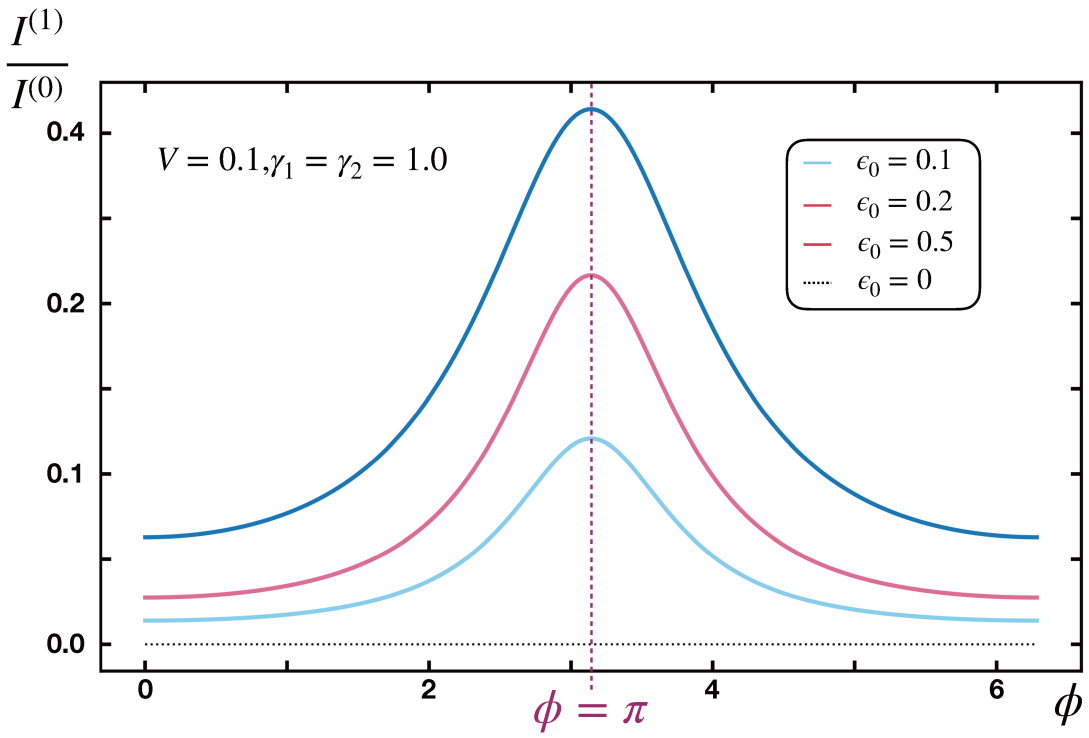



Figure 4.15: Perturbation du courant et phase de Zak

### 4.4.4 Résultats numériques à V fini

Le modèle de chaîne finie, analogue à la jonction Josephson avec dot dans la limite de gap infini est en fait un modèle de type SSH [106]. Ce type de modèle est connu [99] pour être le siège d'une transition topologique lorsque le rapport $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ passe par la valeur critique 1. Lorsque l'on considère une chaîne finie, cette transition se matérialise par l'apparition d'états localisés sur les bords de la chaîne.

Le calcul précédent montre que dans la limite où le terme $V\hat{N}\hat{\sigma}_z$ peut être traité en perturbation, le courant circulant dans la jonction porte une contribution proportionnelle à la phase de Zak du système à $V = 0$. Afin de caractériser le système dans le régime intermédiaire ou $VN$ peut être de l'ordre des $\gamma_i$, il est nécessaire de représenter numériquement cette jonction. Pour ce faire, on utilisera la représentation de Fock définie précédemment.

Fixons le nombre total de cellules $N_c$ . L'indice de maille prend les valeurs $p = 1, 2, ..., N_c$. La jonction est donc représentée par une chaîne cyclique à $2N_c$ sites, les états allant de $|-N_c, 0\rangle$ à $|N_c - 1, 1\rangle$. Je propose d'étudier ce système avec deux conditions de bords différentes :

- La chaîne est ouverte. Dans ce cas le système peut présenter des états de bords sous

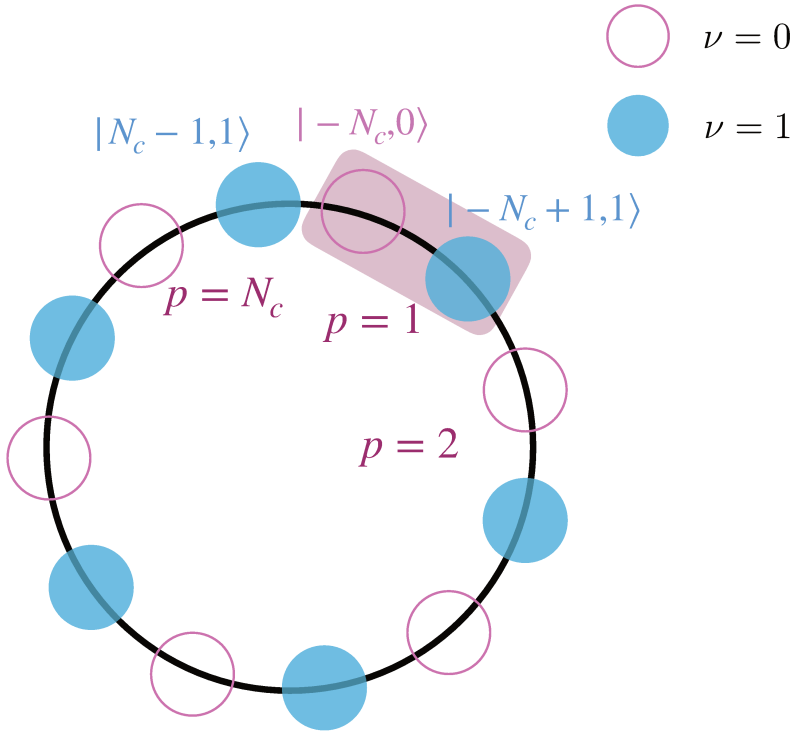



Figure 4.16: Représentation de Fock de la jonction Josephson en présence de conditions cycliques

certaines conditions.

- Le chaîne est cyclique. La phase de Zak du système peut prendre les valeurs 0 ou $\pi$. A $V \neq 0$, nous verrons que cette phase peut prendre des valeurs multiples de $\pi$.

Pour un nombre total de cellules $N_c$ et des conditions aux bords périodiques l'Hamiltonien prend la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} VN_c & \gamma_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_c & \\ \gamma_1 & -V(N_c-1) & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & & \ddots & -V(N_c-2) & \alpha_1 & \\ \gamma_c & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_1 & V(N_c-1) & \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

où $\gamma_c$ désigne le couplage entre les deux états de bouts de chaîne. La condition $\gamma_c = 0$ permet de réduire le système à une chaîne ouverte.

### Propriété de la chaîne ouverte et effet de V

Considérons dans un premier temps le cas de la chaîne ouverte. On pose $\gamma_c = 0$. Définissons la distribution de probabilité en $N$ d'un état quantique $|\Psi\rangle$ comme :

$$P(N) = |\langle\ N, \nu|\Psi\rangle|^2 \tag{4.68}$$

Je trace ci-dessous l'ensemble des énergies propres de la chaîne par ordre croissant pour une interaction $V = 0$, $\epsilon_0 = 0.1$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. On peut également trouver sur les panneaux (b), (c) et (d) de la figure 4.17 les distributions de probabilité en $N$ de plusieurs états propres de la chaîne. Lorsque les énergies propres sont triées par ordre croissant, on obtient une relation de dispersion qui rappelle celle des énergies des états d'Andreev de la jonction Josephson avec dot. Dans la limite d'une chaîne infinie, l'indice numérotant l'état se confond avec le bon nombre quantique de phase. Néanmoins, on remarque qu'il n'y a qu'une branche. Comme je le montrerai par la suite, ceci est dû au fait que la chaîne considérée est ouverte.
Le panneau (b) montre la somme des distributions de probabilité en $N$ des deux états centraux. Sur cette figure, les points roses sont associés aux états à $\nu = 0$ et les points bleus aux états à $\nu = 1$. La distribution des états centraux peut se décomposer en deux parties. Une première partie, de forme gaussienne, oscille avec une large amplitude sur une plage de $N \sim N_c$. La fonction d'onde est alors délocalisée en $N$. L'autre contribution est une oscillation de faible amplitude s'étendant également sur une plage de $N \sim N_c$. Lorsque $\epsilon_0 = 0$ il ne subsiste qu'un état central correspondant à une phase $\phi = \pi$ dans la limite d'une chaîne infinie. Dans ce cas la distribution de probabilité de cet état correspond à l'oscillation de large amplitude.

Les distributions de probabilité des états de bouts de chaîne $n = 0$ et $n = 61$ tracées sur les panneaux (c) et (d) sont également de forme gaussienne et étalées en $N$ sur l'ensemble de la longueur de la chaîne. Ces états correspondent bien aux états auxquels on s'attend pour une jonction classique au sens ou lorsque la longueur de la chaîne tend vers l'infini les fluctuations de $N$ croissent et les fluctuations de phase diminuent.

Sur la figure 4.18, je trace les énergies des états propres de la chaîne dans le cas $V = 0$, $\epsilon_0 = 0$. Le panneau (a) montre la relation de dispersion pour $\frac{\gamma_1}{\gamma 2} = \frac{3}{2}$ et le panneau (b) pour $\frac{\gamma_1}{\gamma 2} = \frac{2}{3}$. On observe sur le panneau (a) que l'asymétrie entre les couplages ouvre un gap au milieu de la dispersion, correspondant au cas ou la phase est égale à $\pi$. Sur le panneau (b), on observe l'apparition de deux états **dégénérés** à $E = 0$ . Les distributions de probabilité de ces deux états sont tracées sur les panneaux (c) et (d). Les états sont donc localisés aux bords de la chaînes et signalent la transition topologique au sein du système. Notons que ces deux distributions de probabilité sont égales. Ceci peut se comprendre en notant que les deux états sont dégénérés. Les vrais états propres sont donc des combinaisons linéaire $\pm$ des états associés aux deux bords. Les distribution de probabilités associées sont alors similaires.

En présence d'une interaction $V$, la relation de dispersion associée à la chaîne ouverte est déformée (figure 4.19). On peut voir sur cette figure l'ensemble des énergies propres pour $V = 0.05$. On peut distinguer plusieurs régions en fonction de la similarité de cette dispersion

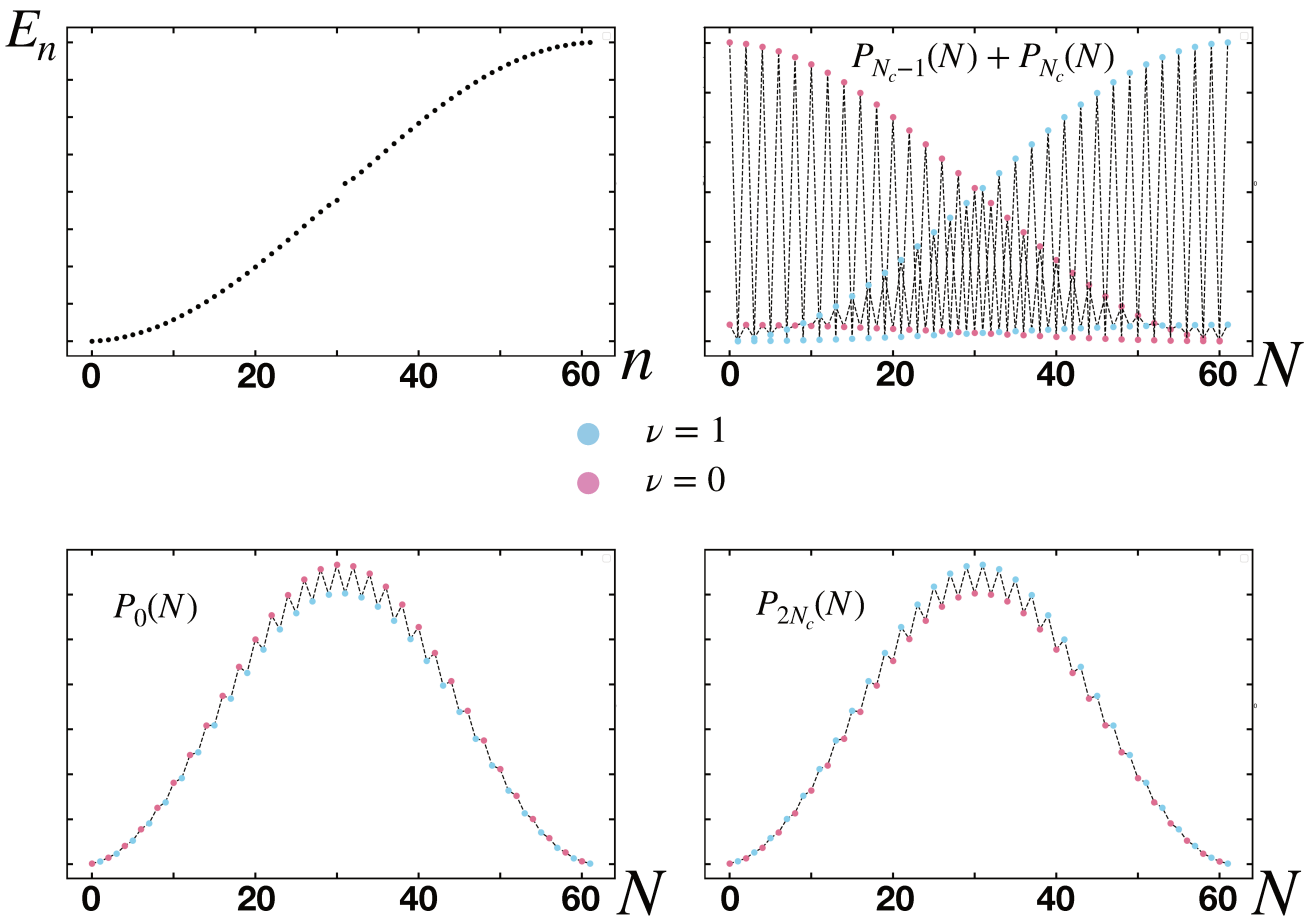



Figure 4.17: Relation de dispersion de la chaîne ouverte à $V = 0.0$ et probabilité de présence des états propres $m = 0, N_c-1, N_c, 2N_c$ dans les états $|N, \nu\rangle$. $\epsilon_0 = 0.1$ ; $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ ; $V = 0.0$ (a) Energie propres (b) Etat propres $N_(c) - 1$ et $N_c$ (c) Etat propre 0 (d) Etat propre $N_c$

avec la dispersion à $V = 0$. Au centre du spectre, on trouve un état à $E = 0$ correspondant à l'état de phase $\phi = \pi$ pour une chaîne infinie et une interaction nulle. La relation de dispersion autour de cet état semble être peu différente de celle à $V = 0$. *A contrario*, la courbe est presque linéaire aux extrémités de la dispersion et pour les valeurs extrêmes $n = 0$ et $n = 2N_c - 1$ la courbe n'est pas plate. On s'attend alors à obtenir des états très différents des états à $V = 0$ dans les régions extrêmes de du spectre.

Je montre sur la figure 4.20 la distribution de probabilité en $N$ (Eq.4.68) pour des états choisis dans ces différentes régions. Les états sont désignés en rouge sur la figure 4.19. On reconnaît sur les panneaux (a) et (b) la forme des états à $V = 0$. Ces distributions de probabilités sont celles des deux états de la régions centrale représentés en rouge. Le panneau (a) correspond à l'état à énergie $E = 0$. La distribution de probabilité en $N$ de cet état est centrée. Sur le panneau (b) est représentée la distribution de probabilité de l'état $n = 30$. Bien que la forme des états soit similaire au cas $V = 0$ la fonction d'onde est moins étendue en $N$. Lorsque $V = 0$, la distribution de l'état central s'étend sur une plage $N \sim 2N_c$ tandis

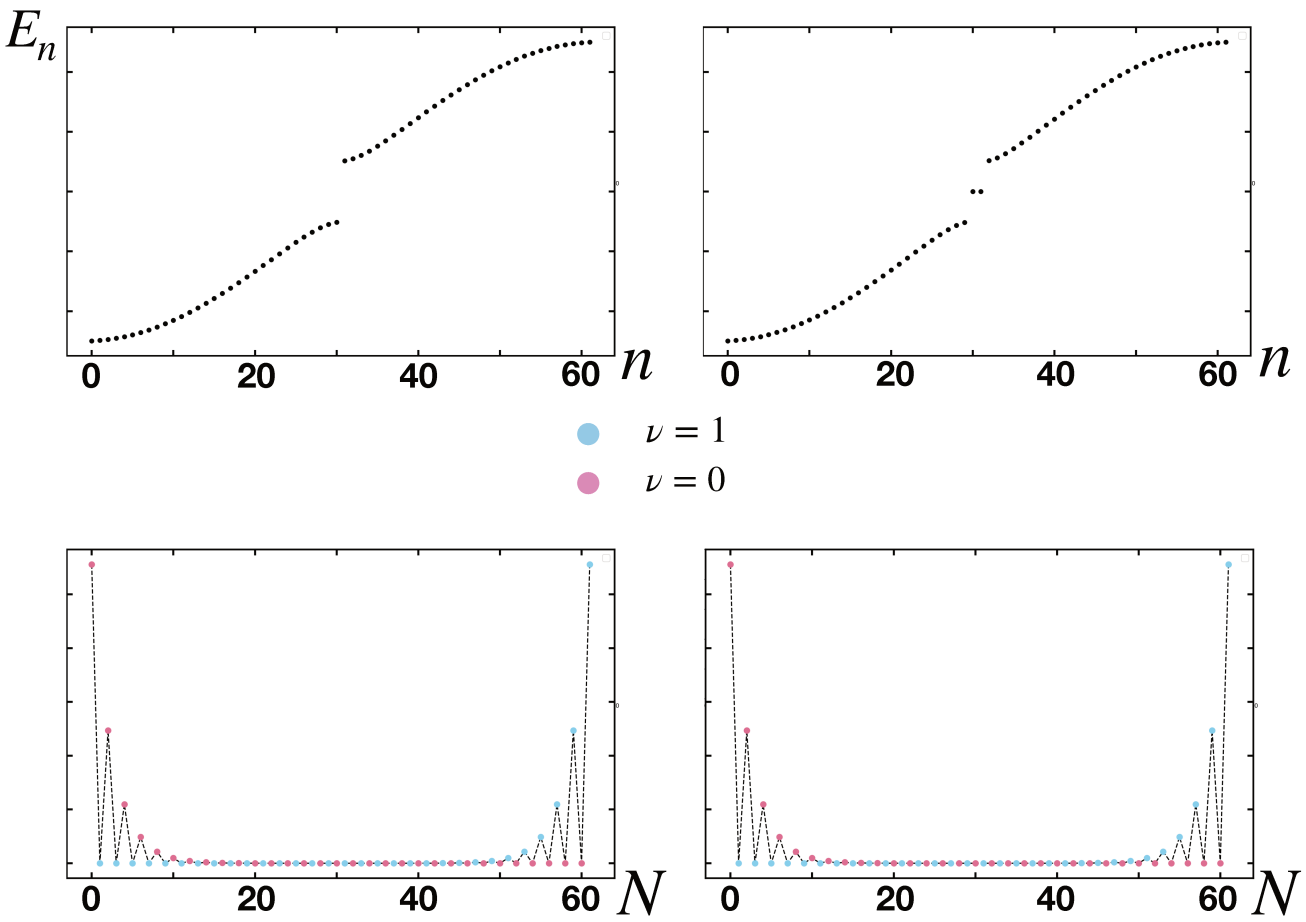



Figure 4.18: (a) Energie propre dans le cas $\gamma_1 > \gamma_2$ (b) Energie propre dans le cas $\gamma_1 < \gamma_2$ (c) Probabilité de présence de l'état de bords 1 (d) Probabilité de présence de l'état de bords 2

qu'ici l'état central s'étend sur $N \sim 20 < N_c$ . C'est une conséquence de la présence de l'interaction $V$ qui tend à localiser la fonction d'onde.

Cet effet est d'autant plus notable lorsque l'on considère les états des régions extrêmes de la dispersion. Sur les panneaux (c), (d), (e) et (f) je trace, respectivement, les distributions de probabilité des états $n = 0, 3, 58, 61$. On voit que pour l'état $n = 0$ et $n = 61$ la fonction d'onde est très localisée sur le bord $N = 61$ de la chaîne. Plus on se rapproche de la région centrale, moins l'état est localisé comment le montrent les dispersions des états $n = 3$ et $n = 58$. En présence d'une interaction $V$, les états des régions extrêmes du spectre sont donc localisés sur les bords. Néanmoins ces états diffèrent des états de bords décris précédemment à $V = 0$ au sens ou ces état sont simplement localisés pour des raisons énergétiques, l'interaction $V$ étant maximale aux extrémités de la chaîne.

Examinons alors l'effet de l'interaction V sur les états de bords pour $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{3}{2}$. Je montre

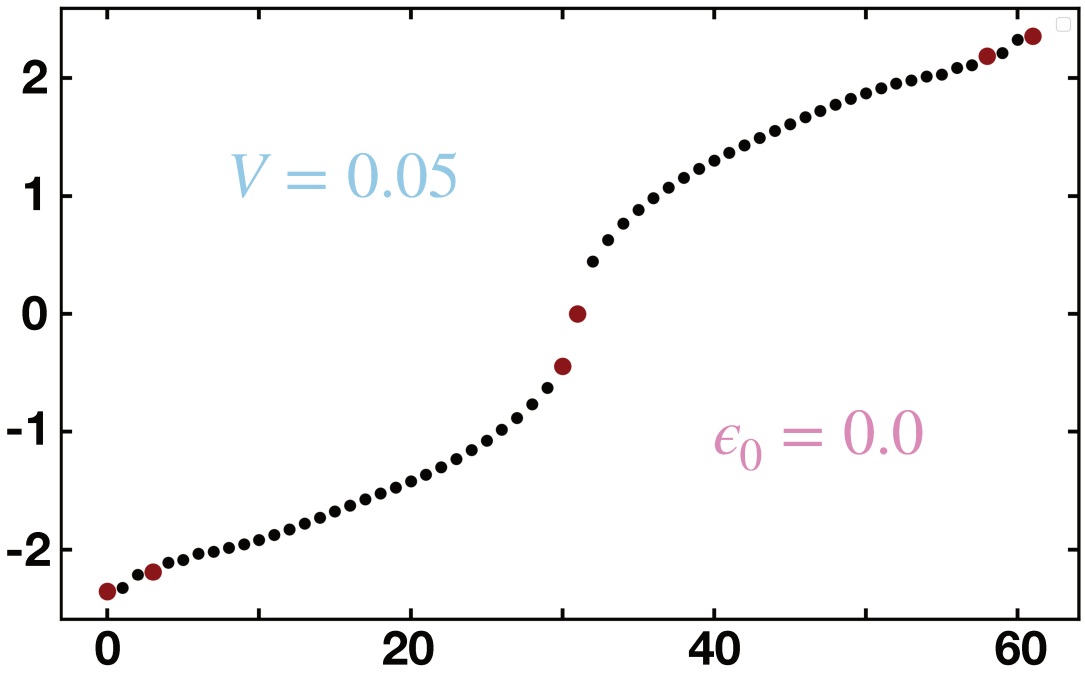



Figure 4.19: Energies propres de la chaîne ouverte. Les points en rouges indiquent les états pour lesquels la distribution de probabilité en $N$ est étudiée ci-dessous. $N_c = 31$ ; $\epsilon_0 = 0.0$ ;$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ ; $V = 0.05$

sur la figure 4.21 la relation de dispersion dans le cas $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{3}{2}$ pour $V = 0.005$ (a) et $V = 0.01$ (b). Les panneaux (c) et (d) représentent la distribution de probabilité en $N$ des deux états de bords centraux dans le cas $V = 0.005$. On remarque tout d'abord que tant que $VN_c$ est suffisamment petit les états de bords persistent. Néanmoins ces deux états deviennent non-dégénérés et ne se situent plus à énergie nulle. Une conséquence de cela est que les distributions de probabilité des deux états sont différentes. L'un est localisé sur le bord $n = 0$ tandis que l'autre est localisé sur le bord $n = 2N_c - 1$. L'un est entièrement distribué sur les états d'occupation $\nu = 0$ tandis que l'autre est distribué sur les états d'occupation $\nu = 1$. Lorsque $V$ continue de croître, l'énergie de ces états diminue et les états de bords disparaissent. Comme on l'a vu précédemment l'interaction $V$ à tendance à localiser en $N$ la fonction d'onde et pour une interaction suffisamment élevée, les états de bords, appartenant à la région centrale ne peuvent plus exister.

### Cas de la chaîne cyclique

Lorsque l'on impose des conditions de bords périodiques à la chaîne, on fait par définition disparaître les bords. Le système est alors analogue à une chaîne cyclique. Néanmoins la

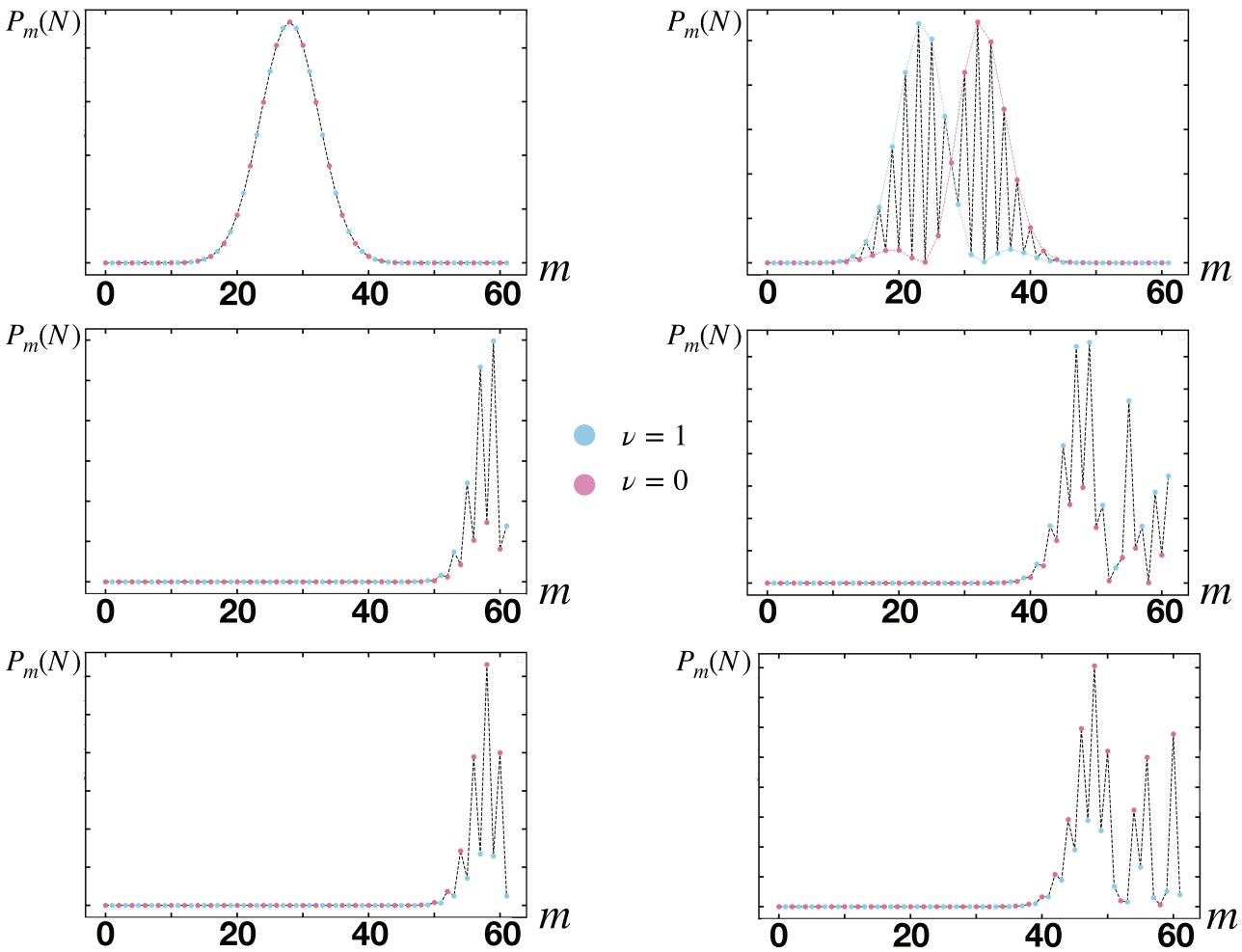



Figure 4.20: Probabilité de présence des états propres sur les états de Fock $|N, \nu\rangle$.(a-b) Probabilité des états centraux $n = 31$ et $n = 30$. (c-d) Probabilité des états du bas de la dispersion $n = 0$ et $n = 3$.(e-f) Probabilité des états du haut de la dispersion $n = 58$ et $n = 61$. $N_c = 31$ ; $\epsilon_0 = 0.0$ ;$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ ; $V = 0.05$

transition topologique au sein du système subsiste mais se manifeste sous une autre forme, celle d'un invariant topologique : la phase de Zak. Je propose dans cette dernière section d'étudier les propriétés de la chaîne en présence de conditions de bords périodiques et de l'interaction V.

Puisque la chaîne est complètement périodique, il est possible de déterminer la forme analytique de la fonction d'onde lorsque $V = 0$. Par analogie avec les calculs de liaisons fortes, le

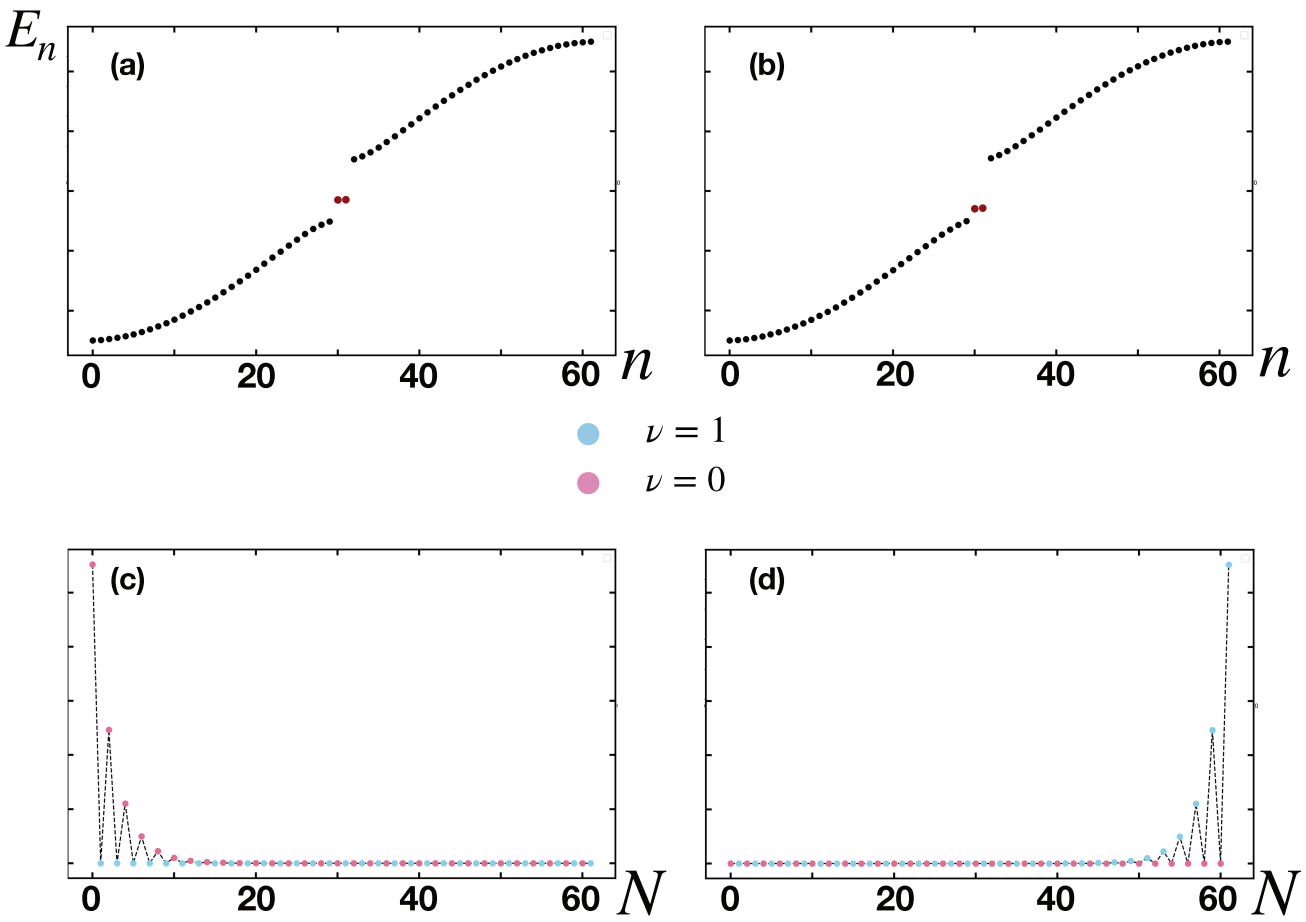



Figure 4.21: Robustesse des états de bords en présence d'interaction - (a-b) Energie propre de la chaîne ouverte pour $V = 0.005$ et $V = 0.01$. Les états de bords, indiqués en rouge sont ceux dont les probabilité sont tracées sur les panneaux (c) et (d). (c-d) Probabilité en $N$ des états de bords indiqué en rouge sur les figures (a) et (b)

théorème de Bloch impose que la fonction d'onde prenne la forme suivante :

$$\begin{aligned} |\Psi(\phi)\rangle &= \sum_p e^{ip\phi}\Big\{a(\phi)\,|p,0\rangle + b(\phi)\,|p,1\rangle\Big\} \\ &= \sum_p e^{ip\phi}\mathcal{T}(\phi)\,|\psi_p\rangle \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$|\psi_p\rangle = \begin{pmatrix} |p,0\rangle \\ |p,1\rangle \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

On peut également définir $|\psi_p\rangle$ en fonction de $|\Psi(\phi)\rangle$ par transformée de Fourier inverse.

$$|\psi_p\rangle = \int \mathrm{d}\phi T^{-1}(\phi)e^{-ip\phi}\,|\psi(\phi)\rangle \tag{4.71}$$

La condition cyclique s'écrit alors $|\psi_{N_c+1}\rangle = |\psi_1\rangle$. Cette condition impose que la variable $\phi$

est quantifiée :

$$\phi_n = \frac{2n\pi}{N_c} \tag{4.72}$$

Je trace ci-dessous le spectre de $\mathcal{H}$ de la chaîne cyclique dans les cas $V = 0$ et $V = 0.05$. Dans le cas $V = 0$, on retrouve la relation de dispersion classique des états d'Andreev de la jonction Josephson. Cette dispersion s'apparente à celle obtenue dans le cas de la chaîne finie (figure 4.17) à ceci près que presque tous les états sont dégénérés deux fois. Cette dégénérescence correspond à la symétrie $\phi \longrightarrow -\phi$. Seuls deux états sont non-dégénérés, ce sont les états extrêmes $n = 0$ et $n = 61$. La dégénérescence est levée lorsque $V \neq 0$ comme on peut le voir sur le panneau du bas. En présence de $V$ la dispersion est similaire à celle obtenue dans le cas de la chaîne ouverte avec une région centrale peu déformée et des régions extrêmes quasi-linéaires. Notons toutefois que l'état central n'est pas à énergie nulle mais à $E \sim 0.1$ et que la dispersion n'est pas complètement symétrique par rapport à ce point. Ce fait s'explique par l'asymétrie introduite par l'interaction. Comme la chaîne est rebouclée sur elle-même, il y a inévitablement un saut de l'interaction à l'endroit où la chaîne se reboucle. Cette dissymétrie du potentiel d'interaction induit une dissymétrie en énergie du spectre.

Lorsque $V = 0$, la dégénérescence des états pose un problème pratique. En effet le calcul numérique des états propres conduit à des superpositions symétrique et anti-symétrique entre ces deux états dégénérés. Les états propres obtenus ne correspondent alors plus aux états propres définis analytiquement. Pour pallier à ce problème, on introduit un paramètre extérieur $\chi_0 \ll 1$ tel que les amplitudes de probabilité d'un état $|N, \nu\rangle$ vers ses état voisins soit multipliées par $e^{iN\chi_0}$. L'introduction d'une telle transformation permet de briser la symétrie du réseau. Les états obtenus ne sont alors plus dégénérés et on obtient les bons états propres de Bloch. Nous verrons que si l'on remplace $\chi_0$ par une phase quelconque $\chi$, cela revient à introduire un flux au sein du système.

Comme je l'ai mentionné précédemment, en l'absence de bords, la transition topologique se caractérise par la valeur de la phase de Zak [107] définie comme suit :

$$\phi_{Zak} = \int_0^{2\pi} \langle\Psi|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\chi}\rangle \mathrm{d}\chi \tag{4.73}$$

Où le paramètre $\chi$ est un paramètre tel $\mathcal{H}(\chi = 0) = \mathcal{H}(\chi = 2\pi)$.
Cette expression fait intervenir la dérivée de la fonction d'onde. Pour la calculer numériquement pour un $\chi$ donné, il est donc nécessaire de diagonaliser la matrice Hamiltonienne pour plusieurs valeurs proches de $\chi$. Or les méthodes de diagonalisation numériques conduisent à un choix non-contrôlable de la phase globale de l'état propre. Pour contourner ce problème, nous utiliserons la méthode proposé par Vanderbilt ( [108] [109]) et utilisée notamment pour les calculs de phase de Berry dans les systèmes moléculaires ( [110] [111] [112] [113] []). Pour ce faire, considérons un ensemble d'états $\{u_i\}_{i=1,...,M}$ correspondant au suivi d'un état propre pour les paramètres $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_M$. On définit alors la phase géométrique discrète suivante :

$$\phi_g = -\mathfrak{Im}\Big\{\ln(\langle u_0|u_1\rangle\langle u_1|u_2\rangle ...\langle u_M|u_0\rangle)\Big\} \tag{4.74}$$

Cette quantité mesure la phase géométrique accumulée lors du transport adiabatique de la fonction d'onde $|u\rangle$ sur le chemin $\chi_1 \longrightarrow \chi_M$. Elle est invariante de jauge puisque chaque

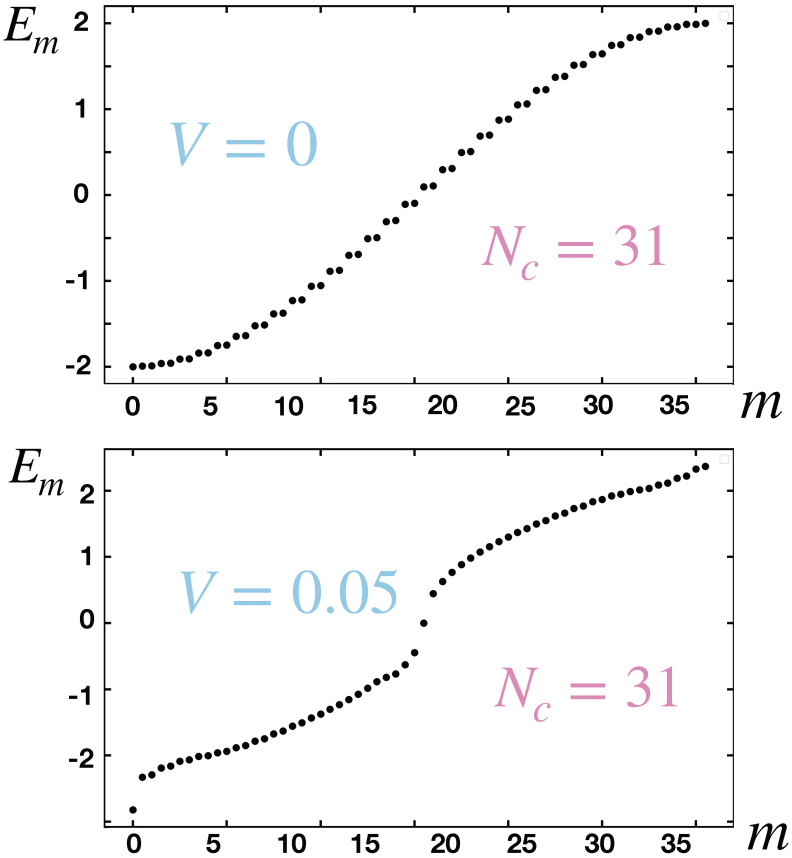



Figure 4.22: Energies propre de la chaîne cyclique en présence d'une interaction V. $N_c = 31$. (Haut) : $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ , $\epsilon_0 = 0.1$ , $V = 0.0$ . (Bas) : $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ , $\epsilon_0 = 0.1$ , $V = 0.05$

état apparaît avec son dual. Cette invariance permet de s'affranchir des problèmes de diagonalisation numérique.

Pour transporter adiabatiquement un état propre donné de la chaîne cyclique, j'introduis un paramètre de contrôle extérieur, analogue à un flux et noté $\chi$. Ce flux est porté par les couplages tunnels via l'action de l'opérateur $e^{i\hat{N}\chi}$. Comme on peut le voir d'après l'expression analytique des fonctions d'onde en l'absence d'interaction, cet opérateur translate les fonctions d'onde $|\Psi(\phi_n)\rangle$ d'une quantité $\chi$. Comme cette transformation n'est une transformation unitaire que si le flux est quantifié en multiple de $\frac{2\pi}{N_c}$, on obtient un spectre d'énergie dépendant de $\chi$ (figure 4.23).

Dans le cas ou l'interaction est nulle (panneau haut), on observe des croisements entre les différents niveaux d'énergies pour $\chi_n = \frac{2n\pi}{N_c}$ , $n \in \mathbb{Z}$. Néanmoins, si l'on souhaite suivre adiabatiquement un état propre il est nécessaire de parcourir un intervalle de $2\pi$ en $\chi$. Je représente en points rouges, un des trajets discrets possible pour calculer la phase de Berry de l'état $n = 0$.
Numériquement, on vérifie que la quantité 4.74 ne dépend pas du chemin choisi et que :

- Pour $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{2}{3}$, la phase de Zak de chaque état prend la valeur $\phi_{Zak} = 0$

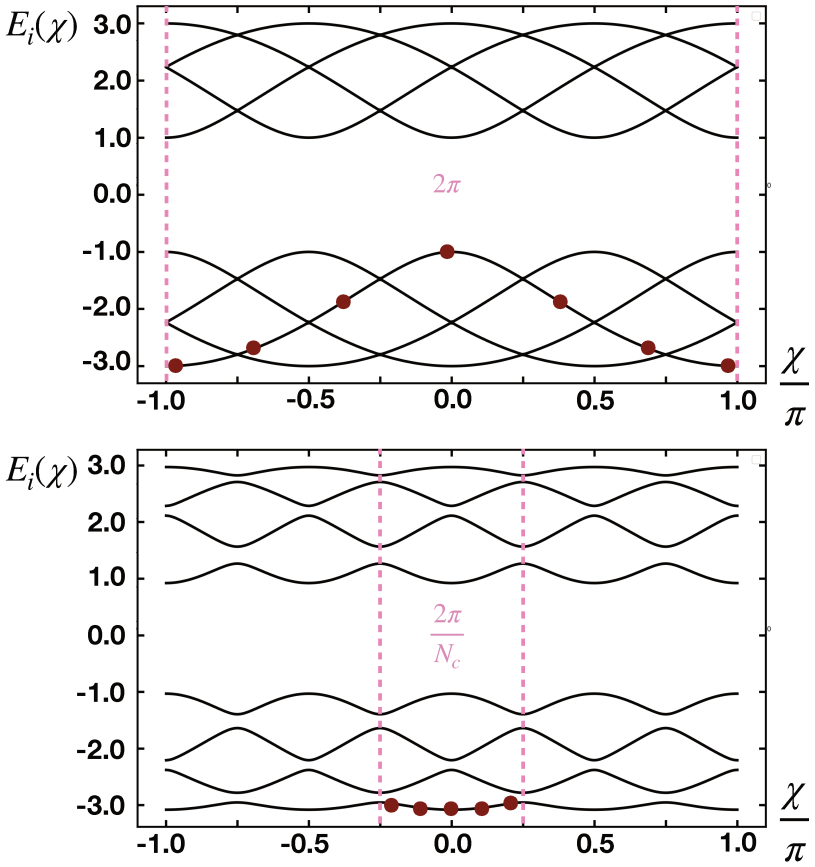



Figure 4.23: Dépendance en $\chi$ du spectre. Les différentes dispersions correspondent à différentes valeurs de la phase $\phi_n$. Les points rouges représente un chemin possible pour le calcul de la phase de Berry. $N_c = 4$. (Haut) : $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2.0$ , $\epsilon_0 = 0.0$ , $V = 0.0$ . (Bas) : $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2.0$ , $\epsilon_0 = 0.0$ , $V = 0.1$

- Pour $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{3}{2}$, la phase de Zak des états $E < 0$ prend la valeur $\phi_{Zak} = \pi$ et celle des états $E > 0$ prend la valeur $\phi_{Zak} = -\pi$

Ce calcul montre un cas particulier de la correspondance coeur-bord dans les système topologiques [99]. En effet, lorsque $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$ la chaîne cyclique peut être caractérisée par une phase de Berry égale à $\pi$. Si l'on coupe la chaîne (chaîne ouverte), cette phase de Berry se manifeste par l'apparition d'états de bords. Inversement, la chaîne ouverte n'exhibe pas d'états de bords dans les conditions telles que la phase de Berry de la chaîne cyclique est égale à zéro. Nous avons vu dans le cas de la chaîne ouverte que l'interaction $V$ brisait la dégénérescence entre ces états de bords mais que ces états persistaient lorsque $V$ reste suffisamment petit. Il est intéressant d'examiner l'effet de cette interaction sur la phase de Berry.

Au niveau des croisements $\chi_n = \frac{2n\pi}{N_c}$ les niveaux se repoussent lorsque le système est soumis à l'interaction $V$. Il en résulte qu'il n'y a plus que des anti-croisements et que la périodicité apparente est divisée par $N_c$. On peut néanmoins définir de la même manière que 4.74 une phase de Berry, pour un état donné. Cette phase, doit *a priori* être calculée sur une période $\frac{2\pi}{N_c}$ (indiqué en rouge sur le panneau du bas, figure 4.23). On vérifie numériquement

que, définie ainsi, la phase de Berry ne dépend ni du chemin suivi ni de l'intervalle sur lequel on choisit de la calculer.

Je trace sur la figure 4.24 les phases de Berry des états propres dans le cas $N_c = 4$ et pour les rapports $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$ et $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$.

Remarquons d'abord, comme le montrent les panneaux (a) et (b), que la phase de Berry définie ainsi peut prendre des valeurs quelconques si $V$ est suffisamment grand. En particulier, même dans le cas $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$ pour lequel il n'existe pas d'états de bords dans la chaîne ouverte on peut trouver une phase de Berry non-nulle pour un état donné. On voit d'ailleurs en (a) que pour certains états cette phase atteint $\pi$ pour des $VN$ relativement élevée ($\sim 1.0$). Cependant, si $V$ est trop élevé ces effets cessent et les phases de Berry de chaque état convergent vers 0.
Remarquablement, on peut retrouver le comportement à $V = 0$ en s'intéressant à la somme de ces phases. Sur les panneaux (c) et (d) de la figure 4.24 je trace séparément la somme des phases de Berry de tous les états à énergie négative $\Sigma_-$ (en rose) et celle des états à énergie positive $\Sigma_+$ (en bleu). On voit que pour des $V$ suffisamment petits et non-nuls (de sorte que la phase de Berry reste définie sur la bonne période), les quantités $\Sigma_-$ et $\Sigma_+$ prennent les valeurs suivantes :

- Cas $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$. Les deux sommes $\Sigma_\pm$ tendent vers 0 lorsque $V \longrightarrow 0$. Ce comportement est analogue à celui de la phase de Berry à $V = 0$ où les deux états portent une phase de Berry nulle.

- Cas $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$. Quand $V \longrightarrow 0$, la somme $\Sigma_-$ tend vers $\pi$ tandis que $\Sigma_+$ tend vers $-\pi$. On retrouve la encore le comportement à $V = 0$ où l'état à énergie positive porte une phase $-\pi$ tandis que l'état à énergie négative porte une phase $\pi$.

Comme le montre cette figure, l'interaction $V$ ne provoque pas de rupture. Le comportement topologique du système sans interaction persiste sur un intervalle fini de $V$. La largeur de cette région peut être corrélée avec la disparition des états de bords dans le cas de la chaîne ouverte. Cette étude montre qu'il est possible de définir cette phase de manière convenable en sommant les contributions de chaque sous-espace $\pm$ du spectre. Alors, bien qu'une interaction trop élevée ait pour conséquence de faire converger la phase de Berry vers 0, celle-ci peut prendre des valeurs quelconques pour des $V$ raisonnables et son comportement reste à élucider.

## 4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, j'ai d'abord développé l'analogie entre une jonction Josephson connectée par un point quantique et un modèle de liaisons fortes sur réseau bipartite en construisant les réseaux équivalents dans l'espace de Fock de deux systèmes : la tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux et la tri-jonction connectée à deux points quantiques simples et indépendants. Suivant cette analogie, il apparaît qu'il est nécessaire de limiter les

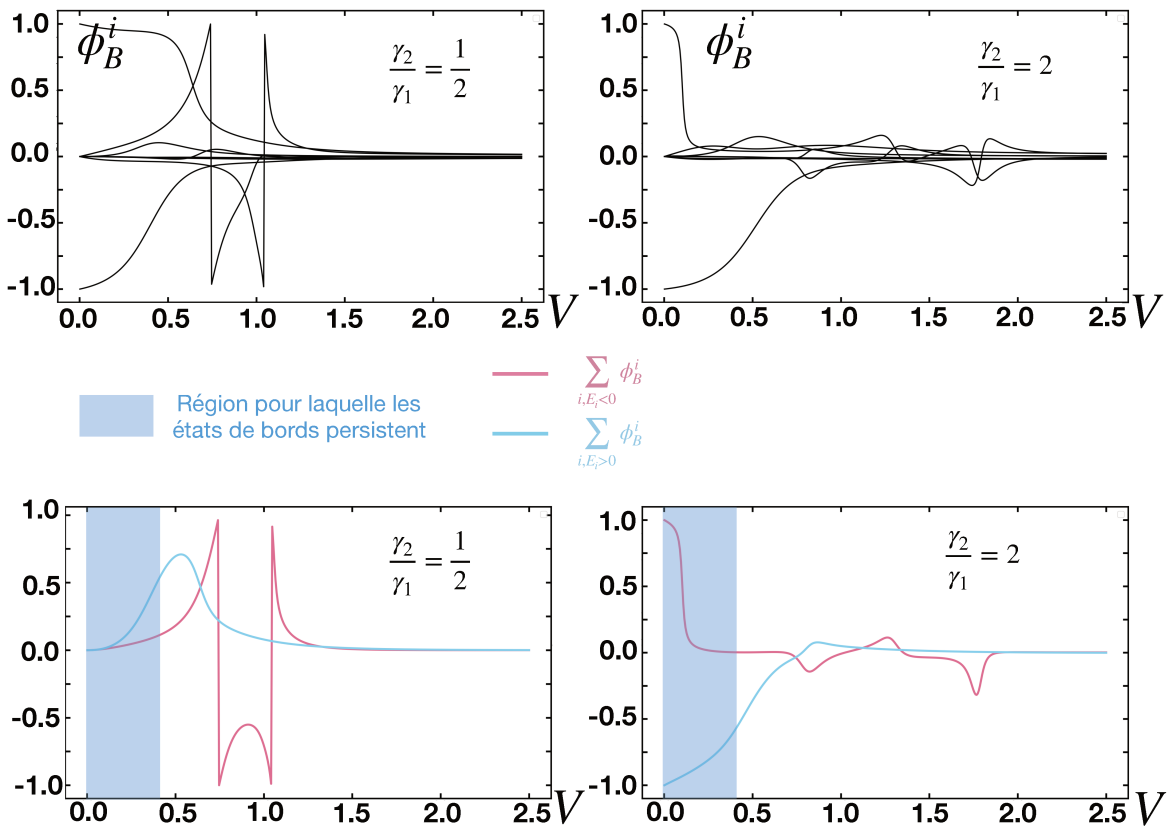



Figure 4.24: Phase de Berry en présence de l'interaction $V$. $N_c = 4$ ; $\epsilon_0 = 0.0$. Les panneaux du haut représentent les phases de Berry de tous les états propres de la chaîne. En bas, la somme des phases de Berry associées aux états d'énergie positive est tracée en bleu et en rose pour les états d'énergies négatives. (a) $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$ (b) $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$ (c) $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$ (d) $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$. Zone bleutée : Intervalle sur lequel persistent les états de bords lorsque la chaîne est ouverte.

variables "nombre de paires" pour que le réseau équivalent de la jonction Josephson soit fini et puisse avoir la possibilité d'exhiber des états de bords. Après avoir montré que lorsqu'on impose une limitation abrupte de $N_2 - N_1$ dans le cas d'une tri-jonction on se ramène à la physique d'un ruban de graphène j'ai montré qu'une irradiation micro-onde chirale permet d'observer l'apparition d'états de bords dispersifs, comme dans le modèle de Haldane. Pour conclure cette discussion sur les effets de bords j'ai montré comment pour une configuration réaliste l'analogie atteint ses limites au sens ou la notion de bords peut devenir complexe à définir.

J'ai ensuite étudié le cas d'une tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux et soumise à une irradiation micro-onde chirale. Comme j'ai pu le montrer au chapitre III, ce type de rayonnement conjugué à une brisure de la symétrie électron-trou engendre le pompage d'un courant à phase $\phi = 0, \pi$. Dans le cas présent, avec un point quantique à deux niveaux, j'ai montré que le modèle effectif à haute fréquence faisait apparaître un terme $\propto [\Gamma_1, \Gamma_2]$ non présent dans le cas ou le point quantique n'est constitué que d'un état. L'analyse de symétrie du courant circulant dans la jonction a permis de montrer que ce

terme n'a pas d'effet sur le courant chiral généré par le rayonnement et qu'il est nécessaire d'imposer des énergies de sites non toutes nulles pour observer ce type de courant.

En dernière partie, je me suis intéressé au cas d'une jonction à deux terminaux, connectés par un point quantique en présence d'une interaction capacitive et asymétrique entre le point quantique et les supraconducteurs.

Une première étude dans l'approximation classique a permis de montrer que les trajectoires classiques à énergie constante restent fermées dans le cas général en présence d'interaction et peuvent être ouvertes uniquement lorsque le potentiel chimique est suffisamment grand.

Dans le cas d'une jonction réelle, de réseau équivalent infini, j'ai montré par un calcul perturbatif que la perturbation au courant est proportionnelle à la phase de Zak du système en l'absence d'interaction.

Pour conclure, j'ai étudié numériquement ce système en le représentant par un réseau fini où la différence $N_2 - N_1$ est limitée. Dans le cas où la chaîne équivalente est supposée ouverte j'ai d'abord montré que l'interaction $V$ tend à localiser les états propres. En particulier, les états du bord du spectre sont complètement localisés aux bords du réseau. De cette manière j'ai montré que pour $V$ fini on peut trouver au centre de la dispersion des états similaires aux états à $V = 0$. J'ai également montré que lorsque $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ est suffisamment grand et que le produit $VN$ est suffisamment petit devant $\gamma_{1,2}$ les états de bords présents à $V = 0$ persistent mais deviennent non-dégénérés. Lorsque $VN$ est suffisamment grand, ces états disparaissent et le système ne présente plus d'états de bords.

Dans le cas ou la chaîne est fermée, j'ai montré qu'on pouvait définir une phase de Berry à $V$ fini de sorte que l'on retrouve le comportement connu à $V = 0$. Cette phase se définit comme la somme des phases de Berry associées aux états d'énergie négative ou positive. Elle se calcule sur un intervalle réduit $\frac{2\pi}{N_c}$ en raison des anti-croisements induits par la présence de $V$. L'étude de cette phase montre qu'elle tend vers 0 lorsque $V$ est suffisamment grand, que pour un certain intervalle de $V$ petit on retrouve le comportement à $V = 0$ avec une phase de Berry qui vaut 0 ou $\pi$ et qu'entre ces deux régimes la phase de Berry prend des valeurs quelconques, non-entières. Je montre pour terminer que le comportement de cette phase à $V = 0$ coïncide avec la persistence des états de bords lorsque la chaine est ouverte.

La question du comportement de cette phase aux valeurs intermédiaires de $V$ reste ouverte. Il serait intéressant dans un premier temps de pouvoir réaliser un calcul analytique perturbatif de la phase de Berry en présence de $V$ pour une chaine cyclique finie. Les états à $V = 0$ sont connus analytiquement mais sont dégénérés, néanmoins les résultats numériques incitent à creuser cette voie. Ce type de calcul peut également être un premier pas pour éclaircir le lien entre le calcul de la phase de Berry pour une chaîne finie et le calcul perturbatif de la section 4.4.3 ou je montre que le courant perturbé est proportionnelle à la

phase de Zak à $V = 0$.
Une autre voie possible est celle initiée par B.Douçot et al. [33] où les auteurs proposent une approche semi-classique pour l'étude des phases de Berry dans les jonction supraconductrices à plusieurs terminaux. Dans notre cas, on pourrait considérer l'interaction $V \longrightarrow 0$ comme le petit paramètre permettant le développement semi-classique. Peut-on appliquer cette approche au cas de la chaîne discrète et caractériser le comportement de la phase de Berry à $V$ petit ?

# Conclusion et perspectives

Les travaux de thèse résumés dans ce manuscript portent sur l'effet d'un forçage périodique au sein de deux types de systèmes : les jonctions de gaz bosonique et les jonctions Josephson supraconductrices. Bien que leur différence de nature implique que les paramètres variables expérimentalement soient totalement différents, l'ajout d'un forçage périodique dans ces systèmes apporte une forme d'unité formelle par le biais de la description à haute fréquence. Plus encore, dans une limite de basse énergie les jonctions Josephson supraconductrice par point quantique ont pour modèle équivalent un modèle de bosons à coeur dur sur réseau. Cette analogie sur réseau et l'effet de forçages périodiques, topologiques ou non, sur de tels système sous-tend en réalité l'intégralité de ce manuscript.

Au premier chapitre, j'ai introduit les modèles physiques permettant de décrire d'une part les systèmes de gaz bosoniques couplés et d'autre part les jonctions supraconductrices. La dérivation de ces différents modèles permet de pointer les analogies qui peuvent se présenter entre les jonctions bosoniques et les jonctions supraconductrices. J'ai montré notamment que pour une jonction supraconductrice, la limite haute fréquence (dite de gap infini) présente une analogie avec le modèle de Bose-Hubbard dans l'approximation de champ moyen. Pour illustrer les comportements pouvant émerger à la suite d'un forçage périodique dans ces types de modèles j'ai présenté deux problèmes physiques. Dans le premier, les couplages tunnels d'une jonction triangulaire bosonique sont forçés périodiquement de manière déphasée. Par une méthode de type Kapitza, où l'on considère que la fréquence du forçage est très grande devant les autres énergies caractéristiques, j'ai montré qu'un courant se mettait à circuler dans l'anneau. De manière analogue j'ai montré que, dans une tri-jonction supraconductrice couplée par un point quantique, l'introduction d'un forçage périodique (irradiation micro-onde) permet de simuler le modèle de Haldane et de faire apparaître une transition topologique.

Au coeur de ce manuscript sont mis en avant deux effets remarquables induits par un forçage périodique.

D'abord, pour une jonction triangulaire constituée de **bosons** j'ai montré que le forçage périodique de l'interaction locale, à résonance par rapport à une configuration particulière

de potentiels chimiques, permettait de générer dynamiquement des états N00N à trois composantes. J'ai montré également que ces états N00N multi-modes apparaissent dans des configurations plus complexes comme la jonction à 4 ou 5 sites. Cette étude numérique est appuyée par une analyse semi-analytique expliquant l'émergence de ces états. Le point clé de cette analyse tiens au fait qu'en raison de la configuration du système et des choix de paramètres il existe des régions du spectre d'énergie pour lesquelles celui-ci est séparé en plusieurs parties associées à différentes échelles d'énergies. En sélectionnant correctement les paramètres, c'est à dire en se plaçant au voisinage d'un point pour lequel on observe une destruction cohérente de l'effet tunnel, l'espace des états accessibles dynamiquement est fortement réduit à un petit ensemble d'états contenant les composantes de l'état cible.

J'ai montré ensuite, sur la base de travaux existants, que si l'on irradie une jonction Josephson métallique à deux terminaux par un rayonnement micro-onde chiral il est possible de pomper un courant dit chiral. L'irradiation ici, par le bias de la relation Josephson, introduit un forçage périodique des phases supraconductrices. Contrairement au cas bosonique, il n'y a pas d'interactions dans ce système. Néanmoins, j'ai montré qu'en brisant à la fois la symétrie électrons-trous par une dépendance en énergie de la matrice de transmission et la symétrie par renversement du temps par un déphasage entre les points d'applications du micro-onde, un courant peut être généré à phase $\phi = 0, \pi$.

Pour ces deux résultats physiques, l'élément de perspective le plus important est celui de la faisabilité expérimentale.

Dans le problème bosonique le modèle utilisé est un modèle de Bose-Hubbard simple avec une orbitale par site et est a priori assez idéalisé par rapport à des conditions expérimentales réelles. La première idée qui pourrait venir à l'esprit est d'utiliser un modèle plus complexe comme celui de Gross-Pitaevskii. Cependant il faut réaliser que les états recherchés ici sont fortements quantiques au sens ou ce sont des états intriqués. Une approche de champ moyen est donc plutôt prompt à faire disparaître les effets recherchés. Une approche possible serait d'utiliser un modèle de Bose-Hubbard multi-modes. Le protocole proposé sur la base d'un modèle de Bose-Hubbard à une bande pose néamoins déjà quelques questions et contraintes expérimentale, notamment sur le choix des échelles de temps d'observation et les contraintes principales sur la précision des paramètres.
Au-delà de la perspective expérimentale, il me semble que cette configuration de fort potentiel chimique avec un forçage résonant et l'émergence de ces états quantiques par une réduction drastique de l'espace des états peut-être explorée encore bien plus qu'elle ne l'est dans ce manuscript. Il peut être intéressant par exemple, dans un premier temps d'étudier l'effet des autres résonances $\omega = \mu, 3\mu, 4\mu, ...$ sur une jonction à un nombre de sites donné, d'étudier l'effet de différentes géométries et de varier la dépendance temporelle de l'interaction.

Dans le problème de la jonction supraconductrice, la question principale qui se pose est : Comment réaliser en pratique cette dépendance en énergie de la matrice de transmission ? J'ai montré en effet que c'est cette dépendance combinée à l'irradiation chirale qui permet de

pomper le courant chiral. Pour ça, on peut par exemple imaginer placer un semi-conducteur en guise de jonction et s'arranger pour contrôler la position de la bande de valence au sein du gap. A priori, cette configuration doit donner lieu à une dépendance en énergie de la transmission. On pourrait également imaginer placer un troisième supraconducteur dont le gap s'entrecroise avec les deux premiers. Dès lors, il serait nécessaire de refaire un calcul de scattering et de s'assurer que l'effet recherché persiste toujours. En ce sens il est rassurant de se rappeler que l'effet repose sur un argument de symétrie.
Une deuxième perspective intéressante est d'étendre ce calcul au cas d'une jonction longue pour plusieurs raisons. D'une part il est nécessaire de faire ce calcul pour se rapprocher des conditions expérimentales et pouvoir caractériser pleinement les différents régimes d'études et d'autre part puisque de nouveaux états d'Andreev entrent en jeu avec une jonction de longueur finie il faut étudier la persistence de l'effet de pompage avec et éventuellement sans la dépendance en énergie de la matrice de transmission.

Dans la dernière partie de ce manuscript, j'ai exploité la limite de basse énergie des jonctions supraconductrices couplées par point quantique et son analogie avec un modèle bosonique.

Dans un premier temps, j'ai illustré l'analogie entre ce type de jonctions et un modèle de liaisons fortes sur réseau en proposant deux exemples : la tri-jonction connectée par un point quantique à deux niveaux et le tri-jonction connectée à deux point quantiques simples et indépendants. J'ai montré qu'on pouvait représenter l'espace de ces états par respectivement deux réseaux nid-d'abeilles imbriqués et par une bi-couche de type graphène. En abordant la notion d'états de bords je discute dans cette partie les limites de cette analogie. Je montre notamment qu'il est difficile de conserver cette représentation lorsque l'on essaie de mettre en évidence pratique les états de bords de celle-ci.

Dans un dernier temps, j'ai proposé une première étude sur un problème physique légèrement différent et qui, selon moi, résume le coeur de cette thèse et présente un fort intérêt théorique. Dans ce problème, j'ai considéré une jonction Josephson à deux terminaux, couplée par un point quantique en présence de deux types d'interactions et dans la limite bosonique. J'ai montré que lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'interaction entre les paires des supraconducteurs et celle du point quantique, ce problème de jonction en présence d'interaction est équivalent à un problème de liaisons fortes dans un réseau bipartite en présence d'un potentiel inhomogène. J'ai alors pu montrer que lorsque l'interaction est suffisamment petite le comportement topologique à interaction nulle est conservé, et que les états de bords persistent.

Un premier travail à réaliser pour avancer sur ce problème serait d'utiliser une approche semi-classique pour étudier de manière complète la limite ou l'interaction tend vers 0 et relier cette physique avec le calcul perturbatif présenté dans cette thèse. Dans un second temps, il faudrait trouver une manière de calculer numériquement les courants à interaction finie et corréler ceux-ci avec la valeur de la phase de Berry.
Une perspective autrement plus ouverte sur ce problème est la suivante :

Nous avons vu que lorsqu'on irradie une tri-jonction Josephson couplée par un point quantique, on observe une transition topologique analogue à celle que l'on peut observer dans le modèle de Haldane. Cette transition topologique est rendue possible par l'apparition d'une dépendance en phase $\phi$ de l'énergie de site $\epsilon$ lorsque la jonction est soumise à un rayonnement micro-onde. Dans le dernier chapitre, j'ai montré que l'interaction introduisait une dépendance en $N$ de cette même énergie de site. Or, ces deux variables $N$ et $\phi$ sont conjugués comme l'illustre bien la représentation en liaisons fortes. Dans la mesure ou l'interaction est suffisamment petite de sorte qu'on puisse considérer ces deux variables comme classiques on s'attend alors à observer une région de transition topologique au sein même du réseau fictif (pour une certaine valeur de N) et potentiellement l'apparition d'états de bords entre ces deux régions. Dans le cas général, les variables N et $\phi$ fluctuent et la question de la topologie dans ce système sous forçage périodique et en présence d'interactions reste ouverte.

# Bibliographie


[1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269 :198–201, 1995.

[2] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction. *Physical Review Letters*, 95 :198–201, 2005.

[3] W H Heathcote, E Nugent, B T Sheard, and C J Foot. A ring trap for ultracold atoms in an RF-dressed state. *New Journal of Physics*, 10 :043012, 2008.

[4] Cecilia Muldoon, Lukas Brandt, Jian Dong, Dustin Stuart, Edouard Brainis, Matthew Himsworth, and Axel Kuhn. Control and manipulation of cold atoms in optical tweezers. *New Journal of Physics*, 14 :073051, 2012.

[5] C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier. Experimental Realization of Josephson Junctions for an Atom SQUID. *Physical Review Letters*, 111 :205301, 2013.

[6] G. Gauthier, I. Lenton, N. McKay Parry, M. Baker, M. J. Davis, H. Rubinsztein-Dunlop, and T. W. Neely. Direct imaging of a digital-micromirror device for configurable microscopic optical potentials. *Optica*, 3 :1136, 2016.

[7] K Henderson, C Ryu, C MacCormick, and M G Boshier. Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose–Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 11 :043030, 2009.

[8] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 392(6672) :151–154, March 1998.

[9] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 82(2) :1225–1286, April 2010.

[10] Anthony J. Leggett. Bose-einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts. *Reviews of Modern Physics*, 73 :307–356, 2001.

[11] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415 :39–44, 2002.

[12] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy. Quantum Coherent Atomic Tunneling between Two Trapped Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 79(25) :4950–4953, December 1997.

[13] Kapitza P. L. Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates. *Soviet Phys. JETP.*, 21 :588–597, 1951.

[14] Kapitza P. L. Pendulum with a vibrating suspension. *Usp. Fiz. Nauk.*, 44 :7–15, 1951.

[15] D. J. Thouless. Quantization of particle transport. *Physical Review B*, 27 :6083–6087, 1983.

[16] J.H.P. Colpa. Diagonalization of the quadratic boson hamiltonian. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 93 :327–353, 1978.

[17] Bagwell Philip F. Datta Supriyo. Can the bogoliubov–de gennes equation be interpreted as a one-particle wave equation ? *Superlattices and Microstructures 25 (5-6) pp. 1233-1250*, 1999.

[18] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7) :251–253, July 1962.

[19] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect. *Physical Review Letters*, 10 :230–232, 1963.

[20] Valla Fatemi, Anton R. Akhmerov, and Landry Bretheau. Weyl Josephson circuits. *Physical Review Research*, 14 :779–815, 2021.

[21] Clemens B. Winkelmann, Nicolas Roch, Wolfgang Wernsdorfer, Vincent Bouchiat, and Franck Balestro. Superconductivity in a single-C60 transistor. *Nature Physics*, 5 :876–879, 2009.

[22] Simon Abay, Daniel Persson, Henrik Nilsson, Fan Wu, H. Q. Xu, Mikael Fogelström, Vitaly Shumeiko, and Per Delsing. Charge transport in InAs nanowire Josephson junctions. *Physical Review B*, 89 :214508, 2014.

[23] Lucila Peralta Gavensky, Gonzalo Usaj, D. Feinberg, and C. A. Balseiro. Berry curvature tomography and realization of topological Haldane model in driven three-terminal Josephson junctions. *Physical Review B*, 97 :220505, 2018.

[24] L. Bretheau, Ç. Ö. Girit, C. Urbina, D. Esteve, and H. Pothier. Supercurrent Spectroscopy of Andreev States. *Physical Review X*, 3 :041034, 2013.

[25] Landry Bretheau, Joel I-Jan Wang, Riccardo Pisoni, Kenji Watanabe, Takashi Taniguchi, and Pablo Jarillo-Herrero. Tunnelling spectroscopy of Andreev states in graphene. *Nature Physics*, 13 :756–760, 2017.

[26] L. Bretheau, Ç. Ö. Girit, H. Pothier, D. Esteve, and C. Urbina. Exciting Andreev pairs in a superconducting atomic contact. *Nature*, 499 :312–315, 2013.

[27] D. Saint-James P.G de Gennes. Elementary excitations in the vicinity of a normal metal-superconducting metal contact. *Physics Letters 42 (5-6) pp. 151-152*, 1963.

[28] A F Andreev. Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.*, 1964.

[29] R.L. Klees, G. Rastelli, J.C. Cuevas, and W. Belzig. Microwave Spectroscopy Reveals the Quantum Geometric Tensor of Topological Josephson Matter. *Physical Review Letters*, 124 :197002, 2020.

[30] Akira Oguri, Yoshihide Tanaka, and A. C. Hewson. Quantum Phase Transition in a Minimal Model for the Kondo Effect in a Josephson Junction. *Journal of the Physical Society of Japan*, 73 :2494–2504, 2004.

[31] C. Benjamin, T. Jonckheere, A. Zazunov, and T. Martin. Controllable junction in a Josephson quantum-dot device with molecular spin. *The European Physical Journal B*, 73 :279–289, 2007.

[32] Richard A. Ferrell and Richard E. Prange. Self-Field Limiting of Josephson Tunneling of Superconducting Electron Pairs. *Physical Review Letters*, 10 :479–481, 1963.

[33] Benoît Douçot, Romain Danneau, Kang Yang, Jean-Guy Caputo, and Régis Mélin. Berry phase in superconducting multiterminal quantum dots. *Physical Review B*, 101 :035411, 2020.

[34] P. W. Anderson. Considerations on the Flow of Superfluid Helium. *Reviews of Modern Physics*, 38(2) :298–310, April 1966.

[35] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802) :45–57, March 1984.

[36] Marcos Atala, Monika Aidelsburger, Julio T. Barreiro, Dmitry Abanin, Takuya Kitagawa, Eugene Demler, and Immanuel Bloch. Direct measurement of the Zak phase in topological Bloch bands. *Nature Physics*, 9 :795–800, 2013.

[37] F. Bloch. Nuclear Induction. *Physical Review*, 70 :460–474, 1946.

[38] Roman-Pascal Riwar, Manuel Houzet, Julia S. Meyer, and Yuli V. Nazarov. Multiterminal Josephson junctions as topological matter. *Nature Communications*, 7 :11167, 2016.

[39] Tomohiro Yokoyama and Yuli V. Nazarov. Singularities in the Andreev spectrum of a multiterminal Josephson junction. *Physical Review B*, 92 :155437, 2015.

[40] L. Peyruchat, J. Griesmar, J.-D. Pillet, and Ç. Ö. Girit. Transconductance quantization in a topological Josephson tunnel junction circuit. *Physical Review Research*, 7 :013289, 2021.

[41] Julia S. Meyer and Manuel Houzet. Nontrivial Chern Numbers in Three-Terminal Josephson Junctions. *Physical Review Letters*, 119 :136807, 2017.

[42] André Eckardt and Egidijus Anisimovas. High-frequency approximation for periodically driven quantum systems from a Floquet-space perspective. *New Journal of Physics*, 17 :093039, 2015.

[43] Z. Y. Ou. Fundamental quantum limit in precision phase measurement. *Physical Review A*, 55 :2598–2609, 1997.

[44] Jonathan P. Dowling. Quantum optical metrology – the lowdown on high-N00N states. *Contemporary Physics*, 49 :125–143, 2008.

[45] Luca Pezzè, Augusto Smerzi, Markus K. Oberthaler, Roman Schmied, and Philipp Treutlein. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles. *Reviews of Modern Physics*, 90 :035005, 2018.

[46] Luigi Amico, Rosario Fazio, Andreas Osterloh, and Vlatko Vedral. Entanglement in many-body systems. *Reviews of Modern Physics*, 80 :517–576, 2008.

[47] Peter C. Humphreys, Marco Barbieri, Animesh Datta, and Ian A. Walmsley. Quantum Enhanced Multiple Phase Estimation. *Physical Review Letters*, 111 :070403, 2013.

[48] Pieter Kok, Hwang Lee, and Jonathan P. Dowling. Creation of large-photon-number path entanglement conditioned on photodetection. *Physical Review A*, 65 :052104, 2002.

[49] Christopher C. Gerry and R. A. Campos. Generation of maximally entangled photonic states with a quantum-optical Fredkin gate. *Physical Review A*, 64 :063814, 2001.

[50] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølmer, and P. Zoller. Quantum superposition states of Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 57 :1208–1218, 1998.

[51] A. A. Bychek, D. N. Maksimov, and A. R. Kolovsky. NOON state of Bose atoms in the double-well potential via an excited-state quantum phase transition. *Physical Review A*, 97 :063624, 2018.

[52] J. A. Dunningham and K. Burnett. Sub-shot-noise-limited measurements with Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 70 :033601, 2004.

[53] O. Garcia, B. Deissler, K. J. Hughes, J. M. Reeves, and C. A. Sackett. Bose-Einstein-condensate interferometer with macroscopic arm separation. *Physical Review A*, 74 :031601, 2006.

[54] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum-Enhanced Measurements : Beating the Standard Quantum Limit. *Science*, 306 :1330–1336, 2004.

[55] David W Hallwood, Adam Stokes, Jessica J Cooper, and Jacob Dunningham. Measuring atomic NOON-states and using them to make precision measurements. *New Journal of Physics*, 11 :103040, 2009.

[56] Juha Javanainen and Misha Yu. Ivanov. Splitting a trap containing a Bose-Einstein condensate : Atom number fluctuations. *Physical Review A*, 60 :2351–2359, 1999.

[57] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhardt. Atom Interferometry with Bose-Einstein Condensates in a Double-Well Potential. *Physical Review Letters*, 92 :050405, 2004.

[58] Kirsten Stiebler, Bettina Gertjerenken, Niklas Teichmann, and Christoph Weiss. Spatial two-particle NOON-states in periodically shaken three-well potentials. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44 :055301, 2011.

[59] Mary Ann Leung, Khan W. Mahmud, and William P. Reinhardt. Dynamical studies of macroscopic superposition states : phase engineering of controlled entangled number states of Bose–Einstein condensates in multiple wells. *Molecular Physics*, 110 :801–815, 2012.

[60] Gentaro Watanabe and Harri Mäkelä. Floquet analysis of the modulated two-mode Bose-Hubbard model. *Physical Review A*, 85 :053624, 2012.

[61] Gentaro Watanabe. Efficient creation of maximally entangled states by modulation of tunneling rates. *Physical Review A*, 81 :021604, 2010.

[62] F. Trimborn, D. Witthaut, and H. J. Korsch. Beyond mean-field dynamics of small Bose-Hubbard systems based on the number-conserving phase-space approach. *Physical Review A*, 79 :013608, 2009.

[63] Thiago F Viscondi and K Furuya. Dynamics of a Bose–Einstein condensate in a symmetric triple-well trap. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44 :175301, 2011.

[64] T. F. Viscondi, K. Furuya, and M. C. de Oliveira. Phase transition, entanglement and squeezing in a triple-well condensate. *EPL (Europhysics Letters)*, 90 :10014, 2010.

[65] S. Mossmann and C. Jung. Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential. *Physical Review A*, 74 :033601, 2006.

[66] J M Zhang and R X Dong. Exact diagonalization : the Bose–Hubbard model as an example. *European Journal of Physics*, 31 :591–602, 2010.

[67] Erik Koch. The Lanczos Method.

[68] David Raventós, Tobias Graß, Maciej Lewenstein, and Bruno Juliá-Díaz. Cold bosons in optical lattices : a tutorial for exact diagonalization. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 50 :113001, 2017.

[69] David Poulin, Angie Qarry, Rolando Somma, and Frank Verstraete. Quantum Simulation of Time-Dependent Hamiltonians and the Convenient Illusion of Hilbert Space. *Physical Review Letters*, 106 :170501, 2011.

[70] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hänggi. Coherent destruction of tunneling. *Physical Review Letters*, 67 :516–519, 1991.

[71] Jiangbin Gong, Luis Morales-Molina, and Peter Hänggi. Many-Body Coherent Destruction of Tunneling. *Physical Review Letters*, 103 :133002, 2009.

[72] André Eckardt, Tharanga Jinasundera, Christoph Weiss, and Martin Holthaus. Analog of Photon-Assisted Tunneling in a Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 95 :200401, 2005.

[73] Milena Grifoni and Peter Hänggi. Driven quantum tunneling. *Physics Reports*, 304 :229–354, 1998.

[74] F. Gerbier, S. Trotzky, S. Fölling, U. Schnorrberger, J. D. Thompson, A. Widera, I. Bloch, L. Pollet, M. Troyer, B. Capogrosso-Sansone, N. V. Prokof'ev, and B. V. Svistunov. Expansion of a Quantum Gas Released from an Optical Lattice. *Physical Review Letters*, 101 :155303, 2008.

[75] Ehud Altman, Eugene Demler, and Mikhail D. Lukin. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Physical Review A*, 70 :013603, 2004.

[76] Tobias Haug, Joel Tan, Mark Theng, Rainer Dumke, Leong-Chuan Kwek, and Luigi Amico. Readout of the atomtronic quantum interference device. *Physical Review A*, 97 :013633, 2018.

[77] Yvan Castin and Jean Dalibard. Relative phase of two Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 55 :4330–4337, 1997.

[78] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 80 :885–964, 2008.

[79] André Eckardt. Colloquium : Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices. *Reviews of Modern Physics*, 89 :011004, 2017.

[80] Hideo Sambe. Steady States and Quasienergies of a Quantum-Mechanical System in an Oscillating Field. *Physical Review A*, 7 :2203–2213, 1973.

[81] Jon H. Shirley. Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time. *Physical Review*, 138 :B979–B987, 1965.

[82] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 12 :47–88, 1883.

[83] N. Goldman, J. Dalibard, M. Aidelsburger, and N. R. Cooper. Periodically driven quantum matter : The case of resonant modulations. *Physical Review A*, 91 :033632, 2015.

[84] B. Venitucci, D. Feinberg, R. Mélin, and B. Douçot. Nonadiabatic Josephson current pumping by chiral microwave irradiation. *Physical Review B*, 97 :195423, 2018.

[85] Philip F. Bagwell. Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity. *Physical Review B*, 46 :12573–12586, 1992.

[86] M. P. Anantram Supriyo Datta, Bagwell Philip F. Scattering theory of transport for mesoscopic superconductors. *ECE Technical Reports*, page 107, 1996.

[87] M. C. Koops, G. V. van Duyneveldt, and R. de Bruyn Ouboter. Direct Observation of the Current-Phase Relation of an Adjustable Superconducting Point Contact. *Physical Review Letters*, 77 :2542–2545, 1996.

[88] Natalia Pankratova, Hanho Lee, Roman Kuzmin, Kaushini Wickramasinghe, William Mayer, Joseph Yuan, Maxim G. Vavilov, Javad Shabani, and Vladimir E. Manucharyan. Multiterminal Josephson Effect. *Physical Review X*, 10 :031051, 2020.

[89] F. S. Bergeret, P. Virtanen, A. Ozaeta, T. T. Heikkilä, and J. C. Cuevas. Supercurrent and Andreev bound state dynamics in superconducting quantum point contacts under microwave irradiation. *Physical Review B*, 84 :054504, 2011.

[90] F. S. Bergeret, P. Virtanen, T. T. Heikkilä, and J. C. Cuevas. Theory of Microwave-Assisted Supercurrent in Quantum Point Contacts. *Physical Review Letters*, 105 :117001, 2010.

[91] Sidney Shapiro. Josephson Currents in Superconducting Tunneling : The Effect of Microwaves and Other Observations. *Physical Review Letters*, 11 :80–82, 1963.

[92] Andre R. Shapiro, Sidneyand Janus and Sandor Holly. Effect of Microwaves on Josephson Currents in Superconducting Tunneling. *Reviews of Modern Physics*, 36 :223–225, 1964.

[93] T.M. Klapwijk, G.E. Blonder, and M. Tinkham. Explanation of subharmonic energy gap structure in superconducting contacts. 109-110 :1657–1664, 1982.

[94] P. Samuelsson, Å. Ingerman, V.S. Shumeiko, and G. Wendin. Nonequilibrium Josephson current in ballistic multiterminal SNS junctions. *Physica C : Superconductivity*, 352 :82–88, 2001.

[95] Magnus Hurd and Göran Wendin. Andreev level spectrum and Josephson current in a superconducting ballistic point contact. *Physical Review B*, 49 :15258–15262, 1994.

[96] D. Averin and A. Bardas. ac Josephson Effect in a Single Quantum Channel. *Physical Review Letters*, 75 :1831–1834, 1995.

[97] M. P. Nowak, M. Wimmer, and A. R. Akhmerov. Supercurrent carried by nonequilibrium quasiparticles in a multiterminal josephson junction. *Physical Review B*, 99 :075416, 2019.

[98] R. C. Dynes, V. Narayanamurti, and J. P. Garno. Direct Measurement of Quasiparticle-Lifetime Broadening in a Strong-Coupled Superconductor. *Physical Review Letters*, 36 :1509–1512, 1978.

[99] P. Delplace, D. Ullmo, and G. Montambaux. Zak phase and the existence of edge states in graphene. *Physical Review B*, 84 :195452, 2011.

[100] Michel Fruchart and David Carpentier. An introduction to topological insulators. *Comptes Rendus Physique*, 14 :779–815, 2013.

[101] M. O. Goerbig. Electronic properties of graphene in a strong magnetic field. *Reviews of Modern Physics*, 83 :1193–1243, 2011.

[102] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, 81 :109–162, 2009.

[103] A. Zazunov, R. Egger, T. Jonckheere, and T. Martin. Anomalous Josephson Current through a Spin-Orbit Coupled Quantum Dot. *Physical Review Letters*, 103 :147004, 2009.

[104] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity.* Dover Publ, 2015.

[105] Francesco Tafuri, editor. *Fundamentals and Frontiers of the Josephson Effect.* Springer, 2019.

[106] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in Polyacetylene. *Physical Review Letters*, 42 :1698–1701, 1979.

[107] J. Zak. Berry's phase for energy bands in solids. *Physical Review Letters*, 62 :2747, 1989.

[108] David Vanderbilt. *Berry Phases in Electronic Structure Theory : Electric Polarization, Orbital Magnetization and Topological Insulators.* Cambridge University Press, 2018.

[109] Ivo Souza, Jorge Íñiguez, and David Vanderbilt. Dynamics of Berry-phase polarization in time-dependent electric fields. *Physical Review B*, 69 :085106, 2004.

[110] Raffaele Resta. Manifestations of Berry's phase in molecules and condensed matter. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 12 :R107–R143, 2000.

[111] R. Resta. Polarization as a Berry Phase. *Europhysics News*, 28 :18–20, 1997.

[112] Raffaele Resta. Why are insulators insulating and metals conducting ? *Journal of Physics : Condensed Matter*, 14 :R107–R143, 2002.

[113] F Wilczek and A Shapere. *Geometric Phases in Physics.* Advanced Series in Mathematical Physics. WORLD SCIENTIFIC, 1989.