



**HAL**  
open science

# Méthode des rayons complexes pour la propagation infrasonore. Application au bang sonique d'un météoroïde

Annie Zelias

► **To cite this version:**

Annie Zelias. Méthode des rayons complexes pour la propagation infrasonore. Application au bang sonique d'un météoroïde. Acoustique [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2022. Français. NNT : 2022SORUS201 . tel-03828809

**HAL Id: tel-03828809**

**<https://theses.hal.science/tel-03828809>**

Submitted on 25 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SORBONNE UNIVERSITÉ

École doctorale Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique

## THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Acoustique

### Méthode des rayons complexes pour la propagation infrasonore. Application au bang sonique d'un météoroïde

Par

**Annie Zelias**

Sous la direction de **François Coulouvrat**

Soutenue le 21 avril 2022

Devant le jury composé de:

<b>Véronique Farra</b>	Physicienne IPGP	Rapporteuse
<b>Raphaël F. Garcia</b>	Professeur ISAE-SUPAERO	Rapporteur
<b>Jean-Marc Conoir</b>	Directeur de Recherche CNRS	Examineur
<b>Didier Dragna</b>	Maître de Conférence ECL	Examineur
<b>Jean Virieux</b>	Professeur Émérite UGA	Examineur
<b>Daniel Bouche</b>	Directeur de Recherche CEA, DAM, DIF	Invité
<b>François Coulouvrat</b>	Directeur de Recherche CNRS	Directeur de thèse
<b>Olaf Gainville</b>	Ingénieur CEA, DAM, DIF	Co-encadrant de thèse



---

# Résumé

La plupart des phénomènes atmosphériques de forte énergie, qu'ils soient naturels (météoroïdes, séismes, volcans,...) ou anthropiques (avions, explosions chimiques ou nucléaires, ...) émettent des ondes de fréquence inférieure à 20 Hz, appelées infrasons. Ces ondes peuvent se propager sur des milliers de kilomètres en bénéficiant de leur faible atténuation et de la structure de l'atmosphère qui guide leur propagation. La propagation longue distance des infrasons permet l'observation de l'information acoustique à tout instant et en tout point de la Terre. Ainsi, les infrasons constituent une des technologies mise en œuvre dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (TICE).

La simulation de la propagation des ondes infrasonores a fait l'objet de nombreuses études notamment par les méthodes paraboliques, les méthodes aux différences finies, la sommation de modes ou par des méthodes asymptotiques, comme le tracé de rayons. Ce dernier est adapté à la propagation très longue distance des infrasons en milieu inhomogène et advecté, en trois dimensions, pour un faible coût numérique. Cette méthode reste néanmoins limitée par la présence de caustiques et de zones d'ombre pour lesquelles la méthode est singulière. Dans le but de prédire les paramètres géométriques et les signatures dans ces zones, et afin de garder l'efficacité et la rapidité de calcul, nous avons adapté la méthode de tracé de rayons complexes à la propagation atmosphérique des infrasons.

Dans une première étape, la méthode des rayons usuelle est rappelée et son extension dans le plan complexe est présentée. Un cas d'application analytique est traité, correspondant à une caustique pli horizontale au-dessus du sol, pouvant être formée par un vol supersonique à faible Mach. Ce cas met en évidence en fonction de la distance à la caustique, l'influence des rayons complexes réfléchis au sol. Dans une deuxième étape, nous avons développé une méthode numérique en deux dimensions permettant de calculer les rayons propres (rayons reliant directement la source aux différents récepteurs) dans tout le domaine et pour toutes les arrivées formées par les guides d'onde atmosphériques. Ce calcul est nécessaire afin de déterminer toutes les arrivées à une station d'observation. Une étude détaillée sur le cas d'une source ponctuelle, analogue à une explosion, avec un profil atmosphérique de référence en présence d'un vent horizontal, a permis de valider l'algorithme de recherche de rayons propres développé, par une comparaison à une méthode d'approximation parabolique. L'application a été étendue au cas d'une météorologie variant également dans la direction horizontale. Le voisinage des caustiques est traité par une approche asymptotique uniforme (Théorie Uniforme de la Diffraction). Une méthodologie d'ajustement de données de vitesse du son et du vent par des fonctions analytiques a été mise en place, afin de permettre l'utilisation de profils atmosphériques réalistes adaptés à la méthode des rayons complexes. Cela a donné lieu à l'application à un cas simplifié de météorite (inspiré de la météorite de Carancas observée le 15 septembre 2007 au Pérou), dont les signatures ont été enregistrées par une station infrasonore localisée en zone d'ombre. Ce cas nous a permis de montrer que la méthode des rayons complexes est efficace pour déterminer les paramètres géométriques en zone d'ombre.



---

# Abstract

Most of high-energy atmospheric phenomena, either natural (meteoroids, earthquakes, volcanoes, etc.) or anthropogenic (aircraft, chemical or nuclear explosions, etc.) emit acoustic waves of frequencies lower than 20 Hz, called infrasound. These waves can spread over thousands of kilometers thanks to their low attenuation and to the atmosphere stratification that guides their propagation. These long distances allow observation of acoustic information at any time and any point of the Earth. Thus, infrasound constitutes one of the detection technologies used within the framework of the Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty (CTBT).

Simulation of the infrasonic propagation is the topic of many studies, in particular by parabolic approaches, finite difference models, eigen modes summations or by asymptotic methods such as ray tracing. This last one is suitable at a low numerical cost for very long distances in an inhomogeneous and advected medium, in three dimensions and for nonlinear effects. However, this method remains limited by the presence of caustics and shadow zones for which it is singular. In order to predict the geometrical parameters and the pressure signatures in these zones, while keeping its efficiency, we adapt the complex ray tracing method to the atmospheric propagation of infrasound.

In a first step, the usual ray method is recalled and its extension to the complex plane is presented. An analytical application is treated, corresponding to a fold horizontal caustic above the ground which can be formed by a supersonic flight at low Mach. This case highlights the influence of complex rays reflection on the ground, depending on the caustic altitude. In a second step, we develop a two-dimensional numerical algorithm computing eigenrays (rays directly connecting the source to the receivers) in the whole domain and for all arrivals formed by the atmospheric waveguides. A detailed study of the point source case, representative for an explosion, with a reference atmospheric profile complemented by a horizontal wind, allows us to validate the developed eigenray research algorithm, by comparison to the parabolic approximation. The application is extended to the case of a range dependent profile. The neighborhood of caustics is treated by the asymptotic Uniform Theory of Diffraction. For realistic atmospheric profiles, sound speed and wind datas have to be fitted by analytical functions; various ways of fitting are proposed and compared to one another. This is then applied to a simplified case, inspired by the Carancas meteorite observed on September 15, 2007 in Peru. The outputs of the complex ray theory are compared to the recorded datas at one infrasound station located in the shadow zone. This shows that the complex ray method is effective in determining the geometrical parameters in the shadow zones.



---

# Remerciements

Cette thèse a été faite dans le cadre du LRC LETMA, qui est une collaboration entre plusieurs organismes notamment le CEA et Sorbonne Université. Ainsi, je tiens à remercier l'ensemble de ces organismes et leurs membres de m'avoir permis d'accomplir ce travail dans de bonnes conditions.

Je remercie tout particulièrement François et Olaf sans qui rien n'aurait été possible. Tout d'abord un grand merci à François, merci de m'avoir proposé cette thèse lors de cet oral de master. Un grand merci à Olaf, pour ton aide et ton soutien quotidien. Merci pour votre accueil et votre bienveillance tout au long de ces trois ans et demi. Vous m'avez toujours prodigué les meilleurs conseils et vous êtes rendus disponibles quand j'en avais besoin.

Je souhaite remercier Véronique Farra et Raphaël Garcia pour le temps consacré à rapporter ce manuscrit de thèse avec minutie. Merci également aux autres membres du jury, Jean-Marc Conoir, Didier Dragna et Jean Virieux. Je suis très reconnaissante que vous ayez tous accepté d'assister à ma soutenance, merci pour vos questions et remarques qui ont débouché sur des pistes de réflexion intéressantes. Je remercie tout particulièrement Jean-Marc Conoir et Daniel Bouche pour votre implication dans ma thèse à travers le comité de suivi.

Merci aux membres des deux laboratoires du cea et de l'institut jean le rond d'alembert, pour votre accueil. J'ai également une pensée pour Caroline et Isabelle qui ont toujours été d'une aide précieuse et pour avoir facilité toutes mes démarches administratives. Un grand merci aux doctorants et tout particulièrement Roxanne et Vincent, devenus amis, sans qui ces trois ans ne seraient pas pareil. Merci à Jeanne, d'être une si bonne amie, merci pour ton soutien dans les moments de stress intense et de doutes.

Merci à mes parents qui m'ont toujours soutenue et encouragé dans tous mes choix et qui m'ont toujours poussé à faire le maximum.

Finalement, merci à l'une des personnes les plus importantes dans ma vie, mon bae devenu mon mari. Merci Christian de m'avoir soutenue dans les moments difficiles. Merci de me supporter et de m'encourager dans toutes mes décisions.





---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction à la propagation des infrasons</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Sources d'infrasons . . . . .	14
1.3 Milieu de propagation . . . . .	16
1.3.1 Profils de vitesse du son . . . . .	17
1.3.2 Vents . . . . .	18
1.3.3 Pression et masse volumique . . . . .	19
1.4 Description de la propagation . . . . .	20
1.4.1 Stratification de l'atmosphère . . . . .	21
Réfraction des ondes . . . . .	21
Phases thermosphériques . . . . .	22
Phases stratosphériques . . . . .	23
Phases troposphériques . . . . .	24
1.4.2 Caustiques et zones d'ombre . . . . .	25
1.4.3 Rayons rampants . . . . .	27
1.4.4 Absorption atmosphérique . . . . .	28
1.4.5 Non-linéarités . . . . .	28
1.5 Méthodes de simulation de la propagation infrasonore . . . . .	29
1.5.1 Résolution directe des équations de la mécanique des fluides . . . . .	29
1.5.2 Approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde . . . . .	30
1.5.3 Modes normaux . . . . .	32
1.5.4 Acoustique géométrique . . . . .	32
1.5.5 Acoustique géométrique complexe . . . . .	33
1.6 Objectifs de la thèse et structure du manuscrit . . . . .	34
<b>2 Acoustique Géométrique Complexe</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Tracé de rayons . . . . .	38
2.2.1 Équation eikonale . . . . .	38
Équations d'Euler . . . . .	39
Formulations perturbatives des équations d'Euler . . . . .	39
Développement asymptotique au premier ordre . . . . .	40
2.2.2 Espace vectoriel pour les rayons complexes . . . . .	41
2.2.3 Équations des rayons . . . . .	42
Équations des rayons dépendant du paramètre curviligne $\tau$ , en milieu stationnaire . . . . .	42

	Équations des rayons dépendant du temps $t_a$ . . . . .	43
2.2.4	Conditions initiales des rayons . . . . .	43
2.2.5	Rayons complexes . . . . .	47
	Autres chemins d'intégration . . . . .	48
2.3	Amplitude du champ . . . . .	50
2.3.1	Conservation de l'action de l'onde . . . . .	50
2.3.2	Solution complexe du champ de pression . . . . .	51
2.3.3	Section du tube de rayon et caustiques . . . . .	52
2.3.4	Champ de pression à la source . . . . .	53
2.3.5	Amplitude dans la zone d'ombre . . . . .	54
2.3.6	Théorie Uniforme de la Diffraction à la caustique . . . . .	56
2.4	Réflexion des rayons complexes . . . . .	57
2.5	Conclusion du chapitre . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Validation analytique de la méthode</b> . . . . .	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Onde plane . . . . .	60
3.2.1	Définition de la source et du profil de vitesse du son . . . . .	60
3.2.2	Solutions analytiques des trajectoires des rayons . . . . .	61
	Rayons réels . . . . .	62
	Rayons complexes directs . . . . .	64
	Rayons complexes réfléchis . . . . .	68
3.2.3	Section du tube de rayon et amplitude de l'onde . . . . .	72
3.3	Solution de l'équation de Helmholtz . . . . .	73
3.4	Comparaison . . . . .	77
3.4.1	Champ de pression . . . . .	77
3.4.2	Formes d'ondes . . . . .	80
3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Algorithme de recherche de rayons propres complexes et application à une source ponctuelle</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Algorithmes pour les rayons complexes . . . . .	86
4.2.1	Intégration numérique des rayons complexes . . . . .	86
4.2.2	Algorithme d'optimisation . . . . .	87
	Algorithme de Levenberg-Marquardt . . . . .	87
	Illustration sur le cas de la caustique pli . . . . .	88
4.2.3	Méthode de recherche des rayons propres pour la propagation des infrasons . . . . .	93
	Etape 1 : lancer de rayons . . . . .	93
	Etape 2 : identification des rayons propres . . . . .	96
	Etape 3 : optimisation des rayons propres . . . . .	99
4.3	Propagation des infrasons pour une source ponctuelle fixe . . . . .	100
4.3.1	Rayons propres . . . . .	100
4.3.2	Autres chemins d'intégration dans le plan complexe . . . . .	102
4.3.3	Paramètres géométriques . . . . .	104
4.3.4	Amplitudes et signatures . . . . .	106
4.3.5	Exemple d'application pour un profil météorologique verticalement stratifié et horizontalement dépendant . . . . .	108
4.4	Comparaison avec l'approximation parabolique pour une source ponctuelle . . . . .	110
4.4.1	Profil météorologique constant . . . . .	111
4.4.2	Profil météorologique dépendant de la distance . . . . .	115

4.5	Conclusion du chapitre . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Approximation de données météorologiques et application à la météorite de Carancas</b>	<b>119</b>
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Synthèse des travaux sur la météorite de Carancas . . . . .	120
5.2.1	Mesures et observations . . . . .	120
5.2.2	Résultats de l'analyse de la propagation du bang sonique . . . . .	124
5.2.3	Signatures acoustiques . . . . .	128
5.3	Modélisation de l'atmosphère . . . . .	130
5.3.1	Approximation des données de vitesse du son . . . . .	131
	Fonction rationnelle . . . . .	131
	Fonction polynomiale . . . . .	133
5.3.2	Approximation des données de vent . . . . .	134
	Fonction polynomiale . . . . .	134
	Somme de Gaussiennes . . . . .	135
5.3.3	Validation et limites de l'approximation des données . . . . .	137
	Propagation dans la direction de BBOK . . . . .	137
	Rayons complexes et approximation par Gaussiennes . . . . .	139
5.4	Météorite de Carancas : propagation en zone d'ombre . . . . .	140
5.4.1	Trajectoire simplifiée en deux dimensions . . . . .	141
5.4.2	Propagation pour le profil météorologique de Carancas . . . . .	142
	Rayons . . . . .	142
	Paramètres géométriques . . . . .	143
	Analyse des signatures acoustiques . . . . .	145
5.4.3	Propagation en zone d'ombre après le passage de plusieurs caustiques . . . . .	149
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
6.1	Résultats théoriques et analytiques . . . . .	155
6.2	Résultats numériques . . . . .	156
6.3	Perspectives . . . . .	157
<b>A</b>	<b>Caustique cuspidée et rayons complexes</b>	<b>159</b>
<b>B</b>	<b>Éléments pour le développement asymptotique</b>	<b>163</b>
B.1	Développement asymptotique au 2ème ordre . . . . .	163
B.2	Relations utiles . . . . .	165
<b>C</b>	<b>Théorie Uniforme de la Diffraction</b>	<b>167</b>
C.1	Théorie uniforme de la diffraction . . . . .	168
C.1.1	Solution des rayons au voisinage de la caustique . . . . .	168
C.1.2	L'UTD dans la zone insonifiée . . . . .	168
C.1.3	L'UTD dans la zone d'ombre . . . . .	169
C.1.4	Continuité de l'UTD à la caustique . . . . .	169
C.2	Relations utiles . . . . .	170
	Liste des figures	173
	Liste des tableaux	181



---

# Chapitre 1

## Introduction à la propagation des infrasons

### 1.1 Introduction

Que ce soit pour la parole, la musique ou la perception d'un danger, les ondes sonores ont eu une importance considérable depuis l'origine de l'Humanité. Les premières études sur les phénomènes acoustiques remontent au VI<sup>ème</sup> siècle avant J-C (Britannica, 2012). Ce n'est qu'en 1660 que Robert Boyle a démontré que l'air est un milieu nécessaire pour la propagation du son (Rossing, 2014).

Physiquement, le son est une onde qui provient de la compression et de la détente du milieu dans lequel il se propage. C'est, par définition, un phénomène d'oscillation autour d'un état d'équilibre.

La plupart des phénomènes naturels atmosphériques de fortes énergies (météorites, séismes, volcans, etc) émettent des ondes acoustiques (Le Pichon et al., 2010). Certaines de ces ondes sont émises sous le seuil du domaine audible, à des fréquences inférieures à 20 Hz, correspondant aux ondes infrasonores (ou infrasons). Ces ondes peuvent également être issues de l'activité humaine (avion supersonique, explosion nucléaire ou chimique). Une fois émises, elles peuvent se propager sur des milliers de kilomètres en bénéficiant de leur faible atténuation (car leur fréquence est très en-deçà de la fréquence de relaxation des molécules d'azote) et de la structure verticale de l'atmosphère, qui modifie leur trajectoire tout au long de la propagation notamment par réfraction et crée différents guides d'ondes. Grâce à cette propagation longue distance, les infrasons peuvent être observés à tout instant et en tout point de la Terre.

Afin de mesurer les infrasons générés par les explosions nucléaires, l'Organisation du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (OTICE) a mis en place un Système de Surveillance Internationale (SSI) composé de cinquante trois stations certifiées, une installée, une en construction et cinq supplémentaires prévues,<sup>1</sup> réparties sur le globe et représentées sur la FIGURE 1.1. Grâce à ce réseau, des études sur l'atmosphère ont pu être réalisées (Le Pichon et al., 2002; Campus et Christie, 2010; Lalande et al., 2012; Le Pichon et al., 2012; Vanderbecken et al., 2019).

La modélisation de la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère a fait l'objet de nombreuses études (voir la section 1.5 pour plus de détails). Certaines approches telles que les méthodes paraboliques, les méthodes aux différences finies, le tracé de rayons ou encore la sommation de modes sont communément utilisées. Cependant, la simulation de la propagation à très grande distance dans un milieu inhomogène et advecté reste une tâche délicate, en particulier pour des problèmes en trois dimensions. Le tracé de rayons est une

---

1. voir <https://www.ctbto.org/map/#mode=ims> (visité en février 2022)

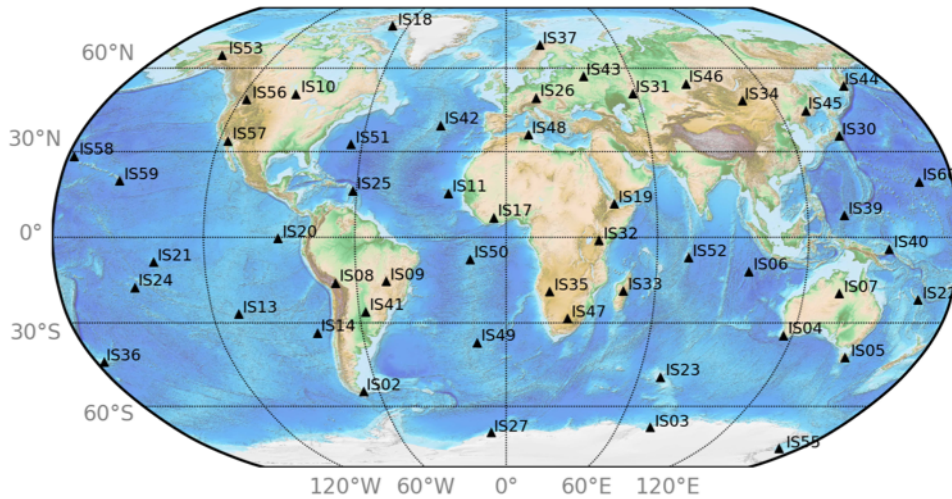


FIGURE 1.1 – Stations infrasonores du Système de Surveillance Internationale.

méthode qui permet d'étudier la propagation longue distance des infrasons pour des faibles coûts numériques. Néanmoins, cette méthode mène à la présence de caustiques et de zones d'ombre, pour lesquelles la méthode est singulière (amplitude infinie aux caustiques et champ de pression nul dans les zones d'ombre).

Les événements pour lesquels les stations infrasonores comme celles du SSI sont localisées en zone d'ombre sont fréquents (Blixt et al., 2019; de Groot-Hedlin et al., 2010; Evers et al., 2012; Farges et al., 2021; Gainville et al., 2017; Green et al., 2018; Le Pichon et al., 2010; Sabatini et al., 2019a). Dans le but de prédire les signaux dans ces zones, plusieurs méthodes géométriques ont été proposées : la sommation de Maslov (Kendall et Thomson, 1993; Kravtsov et Zhu, 2010; Piserchia, 1998; Thomson et Chapman, 1985), la théorie uniforme de la diffraction (UTD) (Ludwig, 1966; White et Pedersen, 1981), les rayons gaussiens (ou faisceaux gaussiens) (Porter et Bucker, 1987) et le tracé de rayons complexes (Keller, 1962; Kravtsov et Berczynski, 2004; Kravtsov et al., 1999; Kravtsov et Orlov, 1983; Kravtsov et Zhu, 2010; Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Chapman et al., 1999; Thomson et Chapman, 1985; Wu et al., 2021; Stone et al., 2018). C'est cette dernière méthode que nous allons étudier plus précisément dans cette thèse.

Dans ce chapitre nous présentons les principales sources d'infrasons, ainsi que les caractéristiques de l'atmosphère. Nous décrivons ensuite les phénomènes majeurs influençant la propagation infrasonore dans l'atmosphère. Nous présentons ensuite les différentes méthodes qui permettent de modéliser cette propagation et, pour finir, nous discutons des objectifs de la thèse.

## 1.2 Sources d'infrasons

De nombreux phénomènes de forte énergie, naturels ou anthropiques, sont source d'infrasons. Une revue de la majorité des sources connues d'ondes infrasonores est disponible dans les ouvrages de McKisic (1997) et Campus et Christie (2010). A titre illustratif, les sources les plus étudiées dans la littérature sont reportées sur la FIGURE 1.2 avec les fréquences associées. Les sources naturelles sont indiquées en blanc et les sources anthropiques en jaune. Les ondes peuvent être générées par des sources impulsives, c'est-à-dire explosives, ou des sources plus entretenues dans le temps (termes soulignés). Les sources explosives émettent des signaux impulsionnels de courte durée et de forte amplitude, qui se propagent à grandes distances (jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres), étant peu affectés par l'absorption atmosphérique. Le spectre d'une source explosive est assez large bande et peut s'étendre dans le domaine

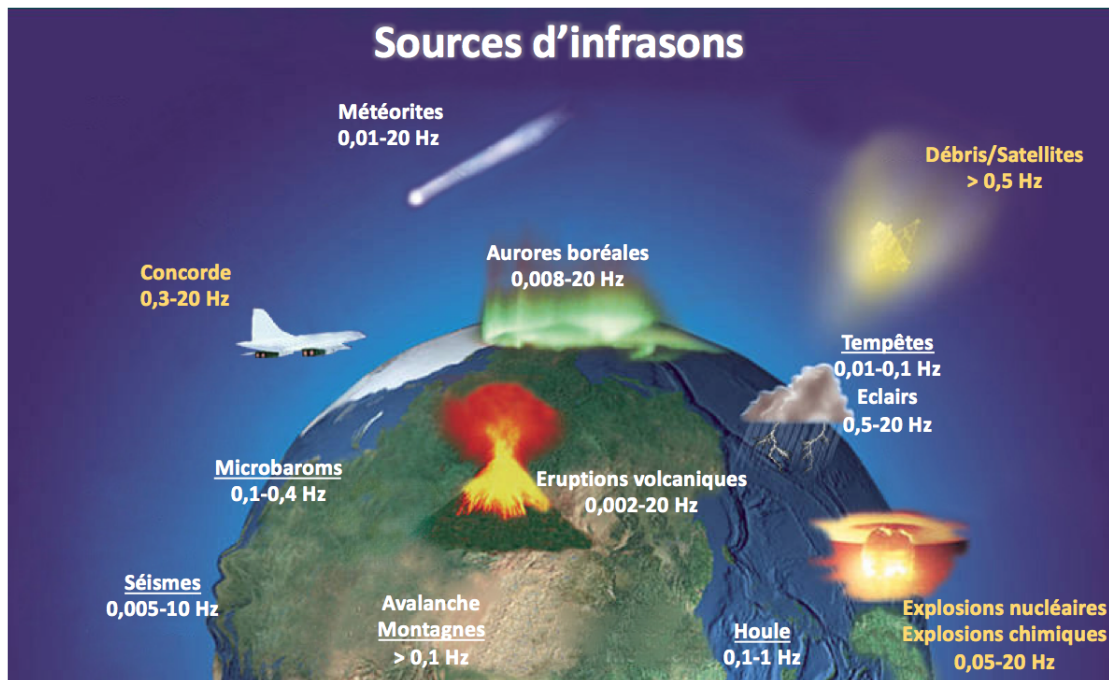


FIGURE 1.2 – Principales sources d'infrasons ainsi que leur gamme de fréquences (Hz). Les sources d'origine anthropique sont indiquées en jaune et les sources d'origine naturelle en blanc. Celles soulignées correspondent aux sources entretenues et les autres aux sources impulsionnelles<sup>2</sup>.

audible.

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement aux sources impulsionnelles comme les explosions (Chapitre 4), puis celles associées aux météoroïdes (Chapitre 5), dans les deux cas dans la gamme des fréquences situées autour de 1 Hz.

### Les explosions

L'étude des infrasons émis par des sources ponctuelles s'inscrit parfaitement dans le cadre du TICE puisqu'elles représentent bien des explosions nucléaires. Ce sont des sources relativement simples pour l'étude des infrasons car elles sont généralement bien identifiées en position et en temps. Afin de les étudier, une explosion chimique été étudiée : l'expérience Misty Picture (Gainville et al., 2010; Millet et al., 2007). Des explosions accidentelles (par exemple celle ayant eu lieu au dépôt pétrolier de Buncefield (Ceranna et al., 2009; Ottemöller et Evers, 2008; Green et al., 2010), ou celle du port de Beyrouth (Pilger et al., 2021)) permettent aussi d'étudier la propagation infrasonore des ondes émises par ce type de source.

### Les météoroïdes

Reprenons pour commencer la terminologie de l'Union Astronomique Internationale (UAI).

- Un **météoroïde** désigne tout objet solide naturel de taille comprise entre environ 30 micromètres et 1 mètre, se déplaçant dans ou venant de l'espace interplanétaire.
- Un **météore** désigne tout phénomène physique (lumière le plus fréquemment, mais aussi chaleur, onde de choc ou ionisation) résultant de l'entrée à haute vitesse d'un objet solide depuis l'espace interplanétaire dans une atmosphère gazeuse (ici seule l'atmosphère terrestre sera considérée).
- Une **météorite** désigne tout objet solide naturel, qui a survécu à sa phase de météore sans être entièrement vaporisé et ablaté.

Les tailles délimitant les météoroïdes sont indicatives et ne correspondent pas à des limites physiques. En-deçà de 30 micromètres, les objets en général ne se vaporisent pas. Ceux de taille



supérieure à un mètre sont le plus souvent des débris d'astéroïdes. Toujours selon l'UAI, dans le contexte des observations de météores, tout objet causant un météore peut être dénommé météoroïde, quelle que soit sa taille.

Nous nous intéresserons ici à un cas particulier de météore, à savoir le bang sonique ou onde de choc résultant de l'entrée dans l'atmosphère terrestre à vitesse hypersonique d'un objet naturel depuis l'espace interplanétaire. Conformément à la dénomination de l'UAI, cet objet sera donc appelé météoroïde. Sa vitesse d'entrée dans les couches atmosphériques supérieures est nécessairement comprise entre 11,2 km/s (vitesse de libération de la gravité terrestre) et 17 km/s pour tout météoroïde dont l'aphélie n'est pas au-delà de l'orbite de la planète Jupiter (Brown et al., 2008).

L'étude du bang sonique des météoroïdes est importante dans le cadre du TICE, car les signaux résultants enregistrés aux stations infrasonores sont potentiellement semblables (en terme de fréquence, de nombre d'arrivées, de durées et d'amplitudes) à ceux des explosions nucléaires. Ainsi, l'un des objectifs est de pouvoir différencier ces deux événements. Dans ce cadre, nous nous intéressons ici principalement au bang sonique des objets relativement gros (de l'ordre de la taille du mètre ou plus) produisant des amplitudes de pression relativement élevées.

A titre d'exemple nous donnons quatre phénomènes de gros météoroïdes récemment observés : la météorite de Carancas, tombée le 15 septembre 2009 au Pérou, avec une masse de 9 t, la météorite 2008 TC3 tombée le 7 octobre 2008 au Soudan, avec une masse de 83 t une météorite tombée de 8 octobre 2009 en Indonésie, avec une masse de 600 t et la météorite de Chelyabinsk, tombée de 15 février 2013 en Russie, avec une masse de 10 kt (Gainville et al., 2017). Les signaux infrasonores d'objets plus petits sont étudiés notamment par Silber et Brown (2019).

Un météoroïde produit des infrasons par le biais de trois phénomènes : le bang sonique ou choc dû à sa vitesse hypersonique, la fragmentation due à la différence de pression exercée sur le bolide pendant sa pénétration atmosphérique et, pour le cas des météorites, son impact au sol. Afin d'étudier le bang sonique des météoroïdes, la météorite dite *de Carancas*, est d'un grand intérêt car on considère qu'elle n'a probablement pas fragmenté (Brown et al., 2008; Kenkmann et al., 2009; Gainville et al., 2017). L'étude précise du bang sonique émis par cette météorite est également possible car elle est tombée à proximité de cinq stations sismiques et d'une station infrasonore (I08BO) du TICE, situées à des distances comprises entre 80 et 125 km du cratère. La trajectoire la plus récemment proposée dans la littérature par Gainville et al. (2017) implique que la station I08BO, la seule calibrée pour la mesure quantitative des infrasons (azimut, vitesse apparente, forme d'onde, spectre et amplitude), se trouve en zone d'ombre géométrique. Ainsi, dans le chapitre 5 nous utilisons la méthode des rayons complexes pour obtenir des simulations dans les zones d'ombre, et donc à la station I08BO.

### 1.3 Milieu de propagation

La propagation des infrasons à grande distance est fortement liée à la structure de l'atmosphère. C'est un milieu inhomogène (variations de température donc de vitesse du son et de masse volumique) et advecté par le vent (principalement horizontal). Ces variations de l'atmosphère modifient la trajectoire suivie par les ondes tout au long de leur propagation, notamment par réfraction. La température de l'atmosphère (et/ou la vitesse des vents dans la direction de propagation) croît en fonction de l'altitude. Dans ce cas, l'atmosphère réfracte la trajectoire des ondes vers le sol qui se retrouvent alors piégées dans ce guide d'onde formé par l'atmosphère.

---

2. Ce schéma est inspiré de <https://soundinteractionspring2012.wordpress.com/terence/> (visité en février 2022), traduit en français, en y ajoutant les informations du type de source et de fréquence associée.

$N_i$ ( $\text{km}^{-i}$ )	1,0	-4,708	$1,250 \times 10^3$	$-1,519 \times 10^4$	$6,581 \times 10^4$
$D_i$ ( $\text{km}^{-i}$ )	1,0	-2,722	$4,247 \times 10^2$	$-3,958 \times 10^3$	$1,729 \times 10^4$

TABLEAU 1.1 – Paramètres de numérateur  $N_i$  et dénominateur  $D_i$  obtenus par Lingeitch et al. (1999) pour une approximation des données de vitesse de son.

Dans le cadre de cette thèse, pour la bonne application de la méthode des rayons complexes, les grandeurs caractéristiques de la météorologie seront définies de manière analytique. Ces fonctions se basent cependant sur les données extraites de différentes bases de données. Au vu des altitudes considérées dans le cadre de la propagation infrasonore, entre 0 et 180 km, les données en dessous de 65 km sont celles fournies par le centre européen ECMWF (*European Centre for Medium-range Weather Forecasts*) (Molteni et al., 1996). La température, les vitesses de vent et la pression de l’atmosphère sont mesurées quotidiennement, au sol par les stations météorologiques, jusqu’à quelques dizaines de kilomètres par les ballons sondes et les avions, et par satellites dans la haute atmosphère. Les données fournies par le centre ECMWF ne sont pas les données brutes mesurées, mais correspondent aux données assimilées dans des modèles météorologiques. Au-dessus de 65 km les données du centre ECMWF sont complétées par le modèle empirique HMW93 de vent horizontaux (Hedin et al., 1996), et le modèle MSIS de température (Hedin, 1991).

### 1.3.1 Profils de vitesse du son

La structure verticale de l’atmosphère terrestre favorise naturellement la formation de guides d’onde. Par ailleurs, la température de l’atmosphère est contrôlée par l’absorption du rayonnement solaire terrestre. En guise d’illustration, nous présentons le profil de vitesse du son obtenu à partir d’une fonction rationnelle et introduit par Lingeitch et al. (1999), définissant la température  $T$  en fonction de l’altitude  $z$ , par :

$$T(z) = T(0) \frac{\sum_{i=0}^4 N_i z^i}{\sum_{i=0}^4 D_i z^i}. \quad (1.1)$$

avec  $T(0) = 288,2 \text{ K}$  et où  $N_i$  et  $D_i$  sont récapitulés dans le tableau 1.1. Ces coefficients ont été obtenus à partir d’une optimisation par la méthode des moindres carrés du modèle d’atmosphère standard (*U.S. Standard Atmosphere*) (Atmosphere, 1976). Celle-ci était utilisée depuis 1976 comme atmosphère de référence, notamment en aéronautique (pour l’étalonnage des altimètres), et correspond à un profil moyen sur l’année.

Le profil de vitesse du son associé est calculé à partir de l’hypothèse de gaz parfait :

$$c_0(z) = \sqrt{\gamma_{\text{air}} R T(z) / M_{\text{air}}} \quad (1.2)$$

avec  $R = 8,31446 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits,  $M_{\text{air}} = 0,028966 \text{ kg.mol}^{-1}$  la masse molaire de l’air (composé à 78% d’azote diatomique  $N_2$ , 21 % d’oxygène diatomique  $O_2$  et 1 % d’argon  $Ar$ , les autres constituants, vapeur d’eau, dioxyde de carbone... étant à l’état de trace), et enfin  $\gamma_{\text{air}} = 1,4$  le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants.

Ces deux profils de vitesse du son et de température sont représentés sur la FIGURE 1.3. Ils ont par ailleurs souvent été utilisés dans des applications de propagation infrasonore (Waxler et Gilbert, 2006; Norris et al., 2010; Waxler et al., 2015).

L’atmosphère est divisée en quatre couches distinctes suivant l’altitude  $z$ , indiquées en couleur sur la FIGURE 1.3. Suivant l’Organisation Météorologique Mondiale (OMM), elles ont pour suffixe *sphère* et leurs limites supérieures ont pour suffixe *pause*.

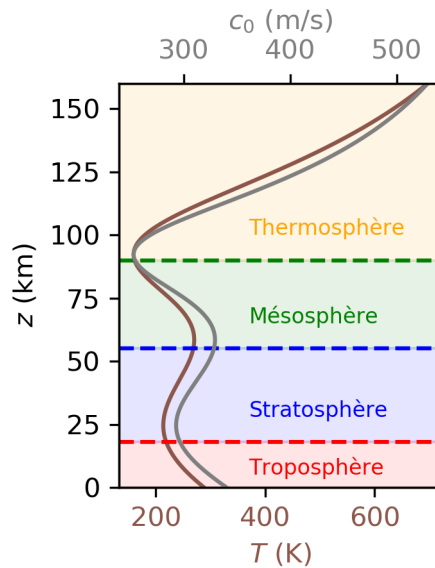


FIGURE 1.3 – Profil de température  $T$  défini par l'équation (1.1) et profil de vitesse du son  $c_0$  correspondant, calculés à partir de l'équation (1.2) ainsi que les différentes couches de l'atmosphère, séparés par la tropopause (—•—), la stratopause (—•—) et la mésopause (—•—).

**Troposphère** : c'est la couche en contact avec la surface de la Terre qui s'étend jusqu'à des altitudes entre 9 km aux pôles et 18 km à l'équateur. Cette couche est le lieu de phénomènes météorologiques principaux puisqu'elle contient environ 80% de la masse de l'atmosphère. Dans cette couche, la température décroît depuis le sol ( $15^\circ\text{C}$ ) avec l'altitude avec un gradient d'environ  $-6,5 \text{ K.km}^{-1}$  jusqu'à la tropopause (indiquée en pointillés rouges).

**Stratosphère** : cette couche se situe entre la tropopause et la stratopause (pointillés bleus) à 55 km d'altitude. Dans cette couche quasiment aucun phénomène météorologique n'a lieu. Elle contient la couche d'ozone ( $\text{O}_3$ ), qui absorbe une partie du rayonnement solaire (rayonnement UltraViolet). Cette conversion en chaleur implique une augmentation de la température avec l'altitude. Des maxima de l'ordre de  $0^\circ\text{C}$  peuvent dès lors être atteints au niveau de la stratopause.

**Mésosphère** : cette couche s'étend de la stratopause jusqu'à la mésopause (pointillés verts) à environ 90 km. La diminution de  $\text{O}_3$  dans cette couche implique une diminution de la température jusqu'à la limite haute, avec des température pouvant atteindre  $-100^\circ\text{C}$ . C'est la couche la plus froide de l'atmosphère.

**Thermosphère** : cette couche commence à la mésopause et s'étend au-delà. Sous l'effet de l'absorption du rayonnement solaire très haute fréquence par des atomes d'azote et d'oxygène ionisé, la température y croît en fonction de l'altitude, pouvant même atteindre  $1500^\circ\text{C}$  vers 300 km. La thermopause se situe entre 350 et 800 km. Au-dessus de cette limite se situe l'exosphère qui est la couche externe de l'atmosphère.

Le profil de température dépend aussi de la latitude en raison des différents niveaux d'ensoleillement entre les régions du monde. Le profil donné ici correspond à des latitudes moyennes de l'hémisphère nord, autour de  $45^\circ$ .

### 1.3.2 Vents

L'atmosphère est essentiellement brassée par les vents horizontaux, dont le vecteur est noté  $\mathbf{v}_0$ . Ceux-ci se décomposent en une composante zonale correspondant à la projection du vent sur l'axe ouest-est  $v_{0\text{OE}}$  et une composante méridienne, correspondant à la projection sur l'axe sud-nord  $v_{0\text{SN}}$ . Si l'on note  $\gamma$ , l'azimut (angle par rapport au nord dans le sens des aiguilles d'une montre) de la direction du vent, les composantes du vent s'exprime sous la

forme :

$$v_{0\text{OE}} = v_0 \sin \gamma \quad (1.3a)$$

$$v_{0\text{SN}} = v_0 \cos \gamma, \quad (1.3b)$$

avec  $v_0$  la norme du vecteur vent.

Des courants troposphériques et stratosphériques très puissants, appelés *jet-streams*, sont souvent observés dans la direction ouest-est. Ils peuvent atteindre des vitesses de l'ordre de  $40 \pm 20$  m/s et 100 m/s, respectivement. A titre d'illustration, nous présentons sur la FIGURE 1.4a les composantes zonale et méridienne, à partir des données ECMWF, au cratère de la météorite de Carancas, le jour de l'impact à 15h18.

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons un profil de vent analytique défini par une fonction gaussienne, utilisée par (Blom, 2019) :

$$\mathbf{v}_0 = v_w e^{-\frac{(z-z_w)^2}{\sigma_w^2}} \mathbf{e}_x, \quad (1.4)$$

avec un maximum de vitesse du vent  $v_w = 50$  m/s imposé à l'altitude  $z_w = 60$  km et une largeur de la Gaussienne à mi-hauteur  $\sigma_w = 17,5$  km. Ce profil de vent est représenté sur la FIGURE 1.4b.

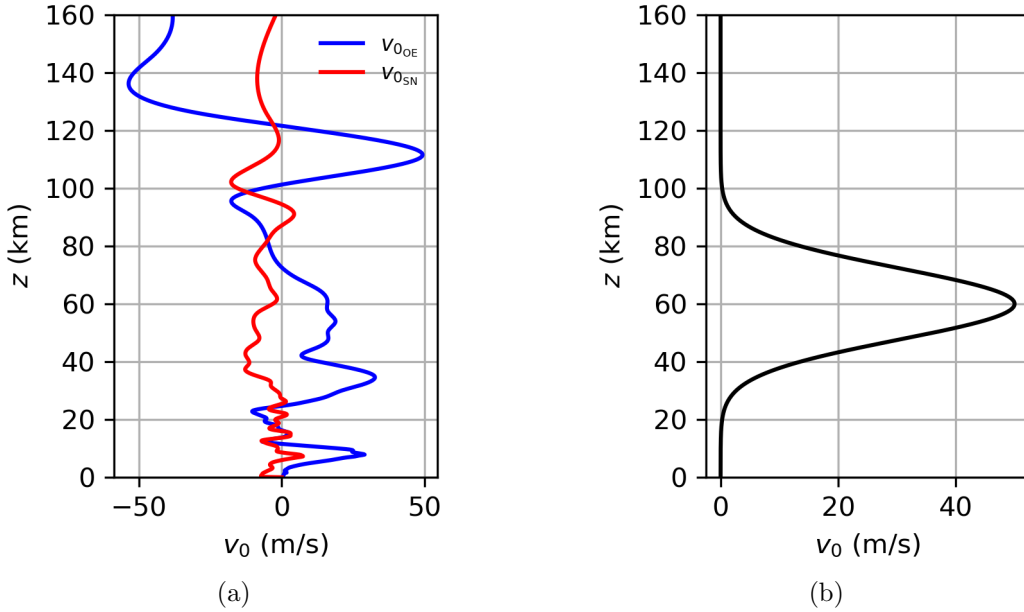


FIGURE 1.4 – (a) Profils de vitesse du vent zonal  $v_{0\text{OE}}$  et méridien  $v_{0\text{SN}}$  réassimilés pour le cas de la météorite de Carancas. (b) Profil de vitesse du vent  $v_0$  sous forme de fonction Gaussienne calculé à partir de l'équation (1.4) avec le maximum de vitesse  $v_w = 50$  m/s en  $z_w = 60$  km. La largeur de la Gaussienne à mi-hauteur est  $\sigma_w = 17,5$  km.

### 1.3.3 Pression et masse volumique

En ne regardant que l'échelle synoptique (c'est-à-dire la dimension des phénomènes météorologiques, soit plusieurs centaines de kilomètres), l'atmosphère est considérée comme un milieu essentiellement stratifié (suivant la coordonnée  $z$ ) et à l'équilibre hydrostatique. Cela veut dire que le poids de l'air est compensé par le gradient de la pression atmosphérique et que, dans cet équilibre vertical, la force de Coriolis (dans la direction orthogonale à la surface de la Terre), les vents verticaux et les contraintes visqueuses sont négligeables. La force de

gravité implique une décroissance exponentielle de la pression  $p_0$  et de la masse volumique  $\rho_0$ .

En l'absence de vent, l'équation d'équilibre hydrostatique de la colonne d'air s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} + g = 0 \quad (1.5)$$

qui s'écrit avec la loi des gaz parfaits  $p_0 = \rho_0 RT(z)/M_{air}$

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{M_{air}g}{RT(z)}, \quad (1.6)$$

où  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur. L'intégration de cette équation d'équilibre permet de déterminer les profils de pression et de masse volumique :

$$p_0(z) = p_0(0) \exp^{-\int_0^z dz/h(z)}, \quad (1.7)$$

où  $p_0(0) = 1013,25 \text{ hPa}$  est la pression au sol et  $h(z) = \frac{RT(z)}{M_{air}g}$  est la hauteur d'échelle, égale à environ 8 km (calculée en  $z = 0$ ). La masse volumique est déduite de la loi d'état des gaz parfaits. Ainsi, on voit que, pour une hauteur d'échelle constante, ces deux quantités décroissent exponentiellement en fonction de l'altitude, avec une diminution de la masse volumique d'un facteur deux tous les 5 km (voir FIGURE 1.5). Un profil de température stratifié comme celui montré plus haut (de même que la variation de  $g$  avec l'altitude) conduit à un comportement très similaire.

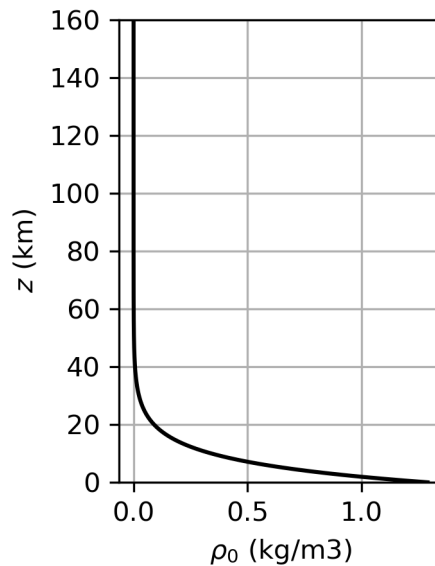


FIGURE 1.5 – Masse volumique  $\rho_0(z)$  définie par l'équation (1.7) pour une hauteur d'échelle constante  $h = 8 \text{ km}$  et  $\rho_0(0) = 1,33 \text{ kg/m}^{-3}$ .

## 1.4 Description de la propagation

Dans cette section, nous décrivons les phénomènes principaux influençant la propagation des infrasons. Cette propagation est liée à la structure de l'atmosphère, dont la stratification et l'advection piègent les ondes infrasonores qui peuvent alors se propager sur de grandes distances. Le tracé de rayons, issu de l'acoustique géométrique (section 1.5.4), représente bien les trajectoires suivies par l'énergie acoustique d'une onde pendant sa propagation. En guise d'illustration, nous présentons le cas d'une source ponctuelle au sol, localisée en  $(0,0)$ ,

avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et le profil gaussien de vitesse du vent représenté par l'équation (1.4). La propagation en deux dimensions par tracé de rayons est représentée sur la FIGURE 1.6 pour des angles d'émission variant entre 0 et 90°. Le code couleur indique l'évolution de cet angle d'émission.

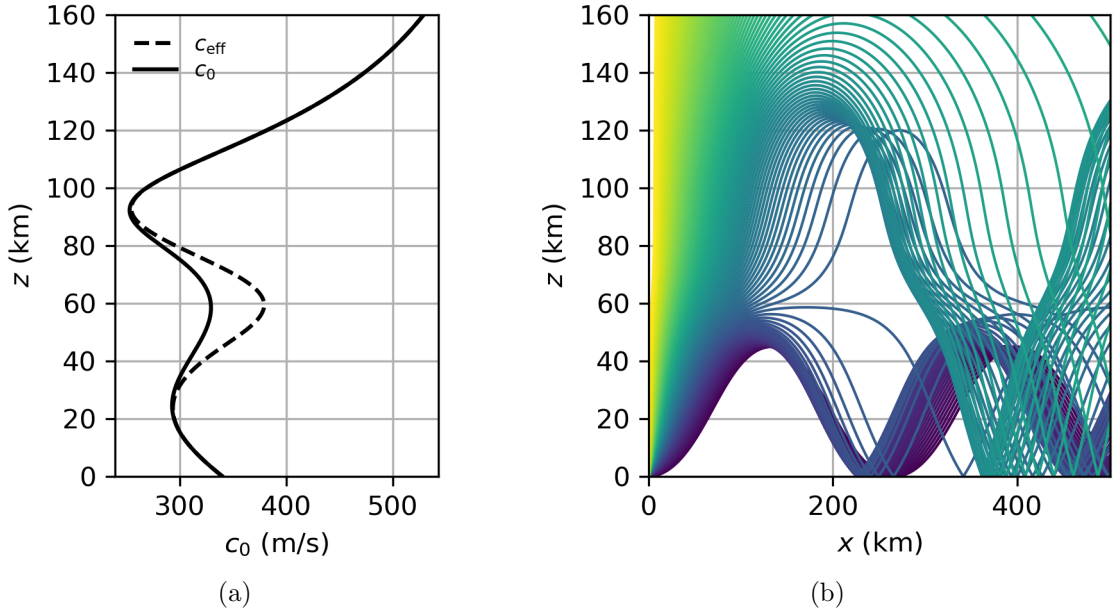


FIGURE 1.6 – (a) Profil de vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$  défini à partir des profils FIGURE 1.3 et FIGURE 1.4. (b) Tracé de rayons d'une source ponctuelle localisée en  $(0,0)$  avec un angle d'émission  $\phi$  variant de 0 à 90°. Le code couleur indique la valeur de l'angle d'émission : bleu pour 0° et jaune pour 90°.

Dans la suite du manuscrit, pour plus de clarté sur les figures, nous ne représentons pas la réflexion au sol.

### 1.4.1 Stratification de l'atmosphère

#### Réfraction des ondes

La propagation des ondes infrasonores est principalement dirigée par les gradients verticaux de vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$ , définie comme la somme de la vitesse du son et du vent. Suivant la loi de Snell-Descartes, l'angle local du rayon  $\theta(z)$  par rapport à la verticale est donné par  $\sin(\theta(z)) = (c_{\text{eff}}(z)/c_{\text{eff}}(z_g)) \sin(\theta(z_g))$  où  $z_g$  est l'altitude de la source (supposée au sol dans cette partie). Lorsque la vitesse du son effective diminue avec l'altitude, cet angle diminue aussi, le rayon se rapproche de la verticale, il est dévié vers le haut : on parle d'atmosphère réfractante vers le haut. À l'inverse si la vitesse du son effective augmente avec l'altitude, le rayon est dévié vers le bas, l'atmosphère est réfractante vers le bas. À une altitude  $z$  où la vitesse du son effective est supérieure à celle à la source, les rayons émis avec un angle inférieur à  $\theta(z_g) = \arcsin(c_{\text{eff}}(z_g)/c_{\text{eff}}(z))$  ne peuvent pénétrer, et sont donc réfractés vers le bas. Ces zones de forte vitesse du son effective induisent donc des guides d'ondes. Ces stratifications peuvent donc piéger l'énergie acoustique entre la surface de la Terre et la thermosphère jusqu'à environ 120 km. Trois guides d'onde sont généralement observés, appelés troposphérique, stratosphérique et thermosphérique (Drob et al., 2003) selon la couche de l'atmosphère dans laquelle l'altitude des rayons est maximale. Ces trois guides le plus souvent observés donnent lieu à des arrivées du même nom (aussi appelées *phases*) : les phases thermosphériques, les phases stratosphériques et les phases troposphériques. D'autres phases existent notamment dues à des phénomènes de diffusion (scattering) notamment sur

les petites échelles de l'atmosphère.

Nous présentons ci-après la nomenclature des différentes phases infrasonores illustrées sur le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son  $c_0$  présenté sur la FIGURE 1.3, et différentes configurations de vent permettant de mettre en évidence ces phases. Il est important de remarquer que dans des cas réalistes, certaines phases ne sont observées que dans certaines directions de propagation. L'ensemble des phases observées pour une source à la surface du sol est donné par Kulichkov (2004).

### Phases thermosphériques

Ces phases, notées  $It$ , sont réfractées à une altitude supérieure à 100 km en raison des valeurs élevées de la température et donc de la vitesse du son dans cette zone. Dans le cas d'une source localisée à la surface du sol, les arrivées  $It$  présentent deux phases distinctes, notées  $It_f$  et  $It_s$ , pour *fast* et *slow* (voir FIGURE 1.7). Les phases  $It_f$  (en noir) correspondent aux arrivées directes, dites rapides, qui se réfractent dans la haute atmosphère (sur la figure au-dessus de 130 km). Elles sont très atténuées par le long chemin parcouru et la masse volumique élevée des couches supérieures de l'atmosphère. Les phases  $It_s$  (en gris) correspondent aux arrivées ayant tangé une caustique, dites lentes, qui se réfractent à une altitude plus basse que les phases  $It_f$  et sont donc moins atténuées. Ces phases étant atténuées, elles ne sont jamais observées au delà de 1000 km.

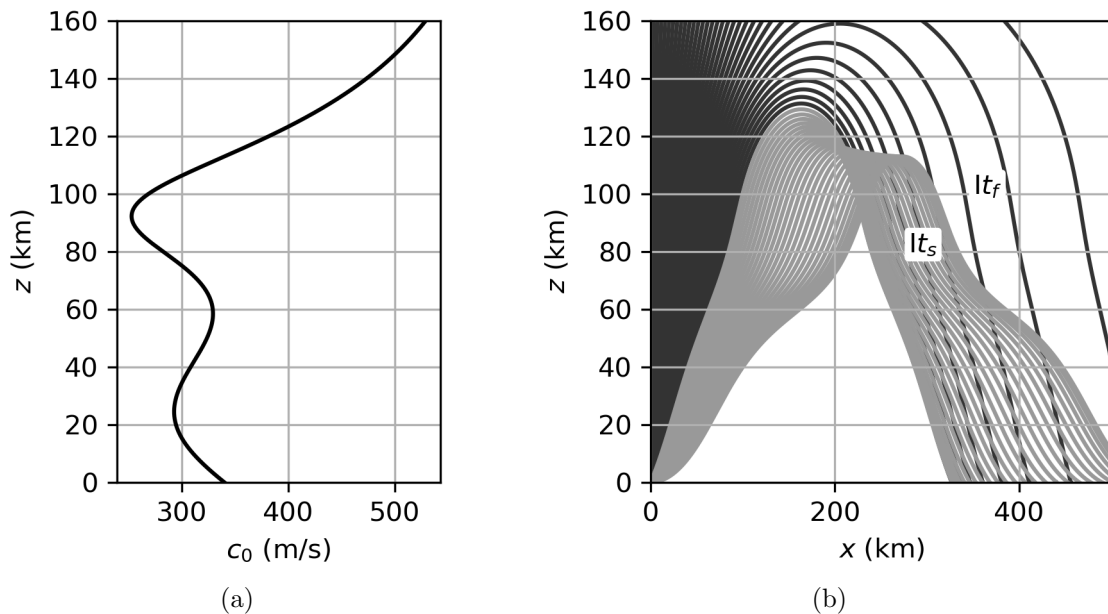


FIGURE 1.7 – (a) Profil de vitesse du son  $c_0$  de Lingeitch et al. (1999) sans vent. (b) Rayons correspondants lancés, directs (—) et réfractés (—) formant les arrivées thermosphériques  $It_f$  et  $It_s$ .

Même si le profil de température est primordial pour expliquer ces phases thermosphériques, les forts courants atmosphériques (vitesses de l'ordre de 50 m/s) présents à ces altitudes et leur forte variabilité, saisonnière voire quotidienne à très haute altitude, influent fortement leur caractéristique et leur variabilité. Les altitudes comprises entre 55 et 110 km sont inaccessibles aux observations aussi bien depuis le sol que par satellite. Les infrasons de sources volcaniques permanentes permettent d'envisager de quantifier la circulation atmosphérique à ces hautes altitudes (Le Pichon et al., 2005a; Vanderbecken et al., 2019).

### Phases stratosphériques

Dans la stratosphère, l'augmentation de la température liée à l'absorption des UV par la couche d'ozone est en général insuffisante pour conduire à des températures supérieures à celle du sol (sauf dans les zones polaires). En revanche, la présence des courants atmosphériques augmente sensiblement la vitesse du son effective lorsqu'ils sont orientés dans le même sens que la propagation, et la diminue dans la direction opposée. Dans le premier cas, on observe alors des arrivées stratosphériques notées  $Is$ . Une illustration est donnée sur la FIGURE 1.8 où le profil de vitesse du son a été complété par le profil gaussien de vent centré autour de 60 km d'altitude, ce qui fait apparaître des phases stratosphériques. Comme dans le cas des phases thermosphériques, deux arrivées distinctes sont observées pour une source localisée à la surface du sol : les arrivées directes (rapides)  $Is_f$  (en noir) et les arrivées ayant tangenté une caustique (lentes)  $Is_s$  (en gris). En fonction du profil de vitesse du son effective, ce couple de phases  $Is_f$  et  $Is_s$  n'est pas toujours observé (Sabatini, 2017, Fig 1.6(c)(d)).

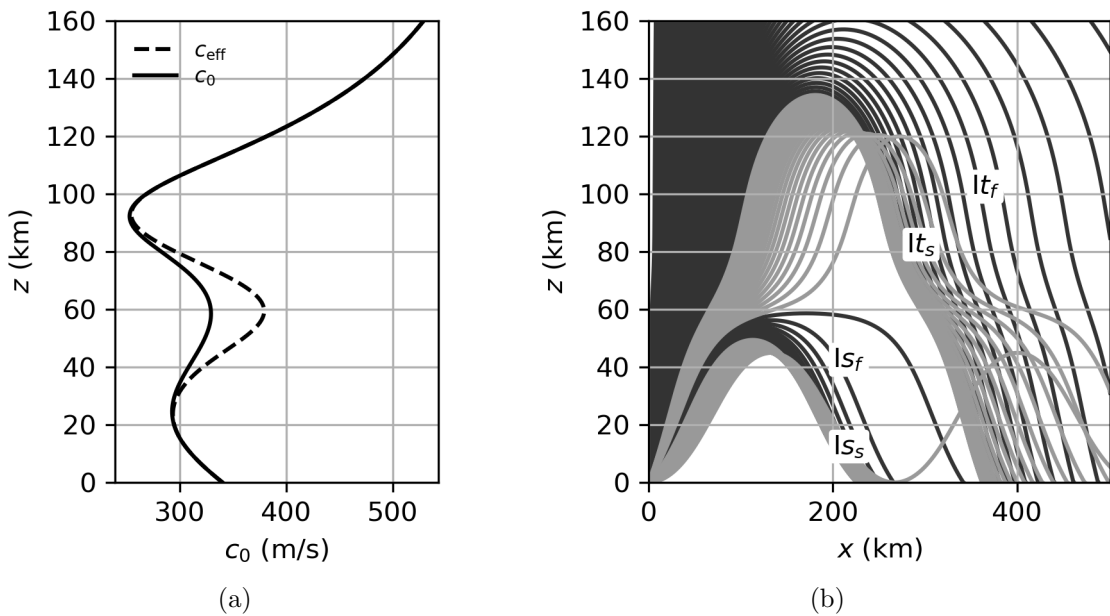


FIGURE 1.8 – (a) Profil de vitesse du son  $c_0$  de Lingeitch et al. (1999) avec prise en compte du vent sous forme de fonction Gaussienne représentées sur la FIGURE 1.4. (b) Rayons correspondants lancés, directs (rapides) (—) et ceux ayant tangenté une caustique (lents) (—) formant les arrivées stratosphériques  $Is_f$ ,  $Is_s$  et thermosphériques  $It_f$ ,  $It_s$ .

La circulation stratosphérique est saisonnière, orientée essentiellement dans la direction ouest vers est en hiver, et est vers ouest en été. Pour une source et une station de réception fixées, les arrivées stratosphériques s'avèrent donc également saisonnières, avec des observations d'arrivées stratosphériques principalement hivernales pour une station située à l'est de la source, et principalement estivales pour une station à l'ouest dans l'hémisphère Nord. Pour le premier cas, on peut citer par exemple le cas du bang sonique secondaire de Concorde volant de New-York vers Londres et Paris et mesuré à la station de Flers (Le Pichon et al., 2002), et pour le second cas des éruptions de l'Etna enregistrées à la station CTBT IS48 (Tunisie) et à l'Observatoire de Haute Provence (Marchetti et al., 2019). Les périodes des équinoxes, pour lesquels les vents stratosphériques sont plus faibles et de direction variable, sont associées au contraire à des arrivées beaucoup moins nombreuses (Drob et al., 2003). Même si les arrivées stratosphériques sont moins systématiques que les thermosphériques, du fait de leur parcours plus court et à plus faible altitude, elles sont d'amplitude beaucoup plus importante. Etant également moins atténuées, elles se propagent plus loin et peuvent être observées à plusieurs milliers de kilomètres (Pilger et al., 2021)



### Phases troposphériques

Ces phases, notées  $Iw$ , sont réfractées en dessous de la tropopause. Elles existent seulement en présence d'un vent fort troposphérique orienté dans le sens de la propagation. Une inversion de température au-dessus du sol peut également conduire à ce phénomène, notamment la nuit dans la couche limite atmosphérique nocturne lorsque, en absence de rayonnement solaire, la surface de la Terre et les couches les plus basses de l'atmosphère se refroidissent plus vite. Un exemple en est donné par Fee et Garcés (2007) dans le cas d'une station infrasonore située à 12,5 km d'un volcan à Hawaii.

Nous donnons en exemple un profil de vent avec un maximum de vitesse à 18 km d'altitude (FIGURE 1.9), analogue à un *jet stream* troposphérique qui peut avoir lieu entre 8 et 18 km d'altitude avec une vitesse de  $40 \pm 20$  m/s (de Groot-Hedlin et al., 2010). Comme pour les phases thermosphériques et stratosphériques, en fonction de la vitesse de vent les phases rapides ( $f$ ) et lentes ( $s$ ) peuvent apparaître.

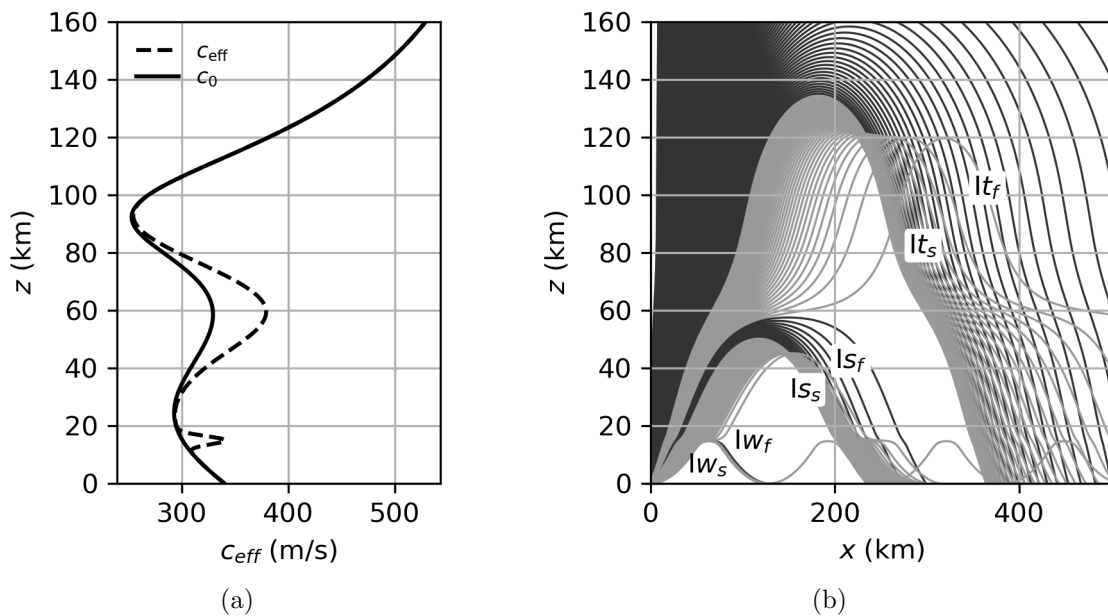


FIGURE 1.9 – (a) Profil de vitesse du son  $c_0$  de Lingeitch et al. (1999) avec prise en compte du vent sous forme de fonction Gaussienne représentées sur la FIGURE 1.4 et ajout d'un jet stream en  $z = 10$  km. (b) Rayons correspondants lancés, directs (rapides) (—) et ceux ayant tangenté une caustiques (lents) (---) formant les arrivées troposphériques  $Iw_f$ ,  $Iw_s$  stratosphériques  $Is_f$ ,  $Is_s$  et thermosphériques  $It_f$ ,  $It_s$ .

Il est possible de distinguer d'autres phases comme les réflexions partielles dues aux hétérogénéités locales de vitesse du son et de vent, notamment dans la troposphère, ainsi que les phases diffractées qui seront décrites dans le paragraphe 1.4.2. Il est à noter toutefois, notamment dans la couche limite atmosphérique turbulente au-dessus du sol, que des turbulences de « petite échelle » peuvent artificiellement apparaître dans un modèle 1D d'atmosphère stratifiée (obtenu par exemple par radiosondage), comme des couches de stratification, conduisant à des guides d'onde surestimant l'amplitude et donnant de moins bons résultats qu'un modèle d'atmosphère homogène (Kim et al., 2018). L'impact de la turbulence atmosphérique a été particulièrement étudié dans le cas du bang sonique des avions supersoniques, car elle en modifie significativement le niveau sonore, voir par exemple Averiyarov et al. (2011).

Il est important de souligner également, que chaque phase a son propre temps d'arrivée à une station donnée. Ainsi la signature infrasonore enregistrée au niveau de cette station pourra présenter plusieurs arrivées.

Cette description simplifiée suppose un profil de température et de vent stratifié mais indépendant de la distance horizontale, ce qui est évidemment une approximation, en particulier lorsque l'on considère des propagations longues sur plusieurs centaines de kilomètres. Dans le cas d'un profil dépendant également de la direction horizontale, les conditions de formation d'un guide d'onde peuvent se modifier. Une onde infrasonore peut par exemple être initialement piégée dans un guide stratosphérique, puis celui-ci disparaissant par suite de l'évolution de la vitesse effective, finalement passer à une phase thermosphérique (Vergoz et al., 2019).

Il est important de souligner que la rotondité de la Terre et le relief influencent également la propagation des ondes infrasonores (McKenna et al., 2012; Lacanna et al., 2014). Celle-ci ne sera pas prise en compte dans le cadre des rayons complexes.

### 1.4.2 Caustiques et zones d'ombre

La propagation infrasonore dans l'atmosphère est qualifiée d'anormale (Pierce, 1994, p. 393) à cause de l'existence de caustiques et de zones d'ombres.

Les caustiques sont des singularités de l'acoustique géométrique, qui ont lieu lorsque l'aire du tube de rayon s'annule et que l'amplitude prédite par l'acoustique géométrique devient infinie, ce qui est non physique. Leur description entre dans le cadre de la théorie des catastrophes (Berry, 1981; Thom, 1983), qui classe les caustiques structurellement stables. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limitons au cas de la caustique la plus simple du point de vue géométrique : la caustique *pli*, qui est une surface régulière. Cette caustique porte aussi le nom de caustique d'Airy, car le champ d'onde est décrit en son voisinage et dans le cas linéaire par la fonction d'Airy, introduite précisément par Airy et al. (1838). Plusieurs applications au cours de ce manuscrit mettront en évidence des cas de caustiques dites *cuspidées* (deuxième dans la théorie des catastrophes). Néanmoins, nous considérerons par simplification que, suffisamment loin du point de rebroussement de la caustique cuspidée, ses branches peuvent être décrites comme des caustiques pli.

Les caustiques ont lieu lorsque les rayons acoustiques convergent (se focalisent) en raison de la courbure de la source, de la réfraction du milieu (Salomons, 2001) ou du mouvement d'une source mobile (Marchiano, 2003).

Dans le cas de la propagation atmosphérique des infrasons, nous reprenons la caustique précédente de la source ponctuelle au sol. La stratification en température et en vitesse fait apparaître les phases stratosphérique et thermosphérique par le biais de la réfraction (cf. FIGURE 1.8). Ces réfractions impliquent une focalisation des rayons pour des altitudes d'environ 50 et 120 km jusqu'au sol, formant donc les caustiques stratosphérique et thermosphérique représentées en orange sur la FIGURE 1.10. Ces caustiques ont la forme de caustiques cuspidées en altitude, avec une des deux branches qui touche la surface du sol. Ainsi, le phénomène de diffraction à la caustique aura lieu au niveau du sol aussi, et ne pourra être négligé.

Une onde arrivant sur la caustique peut être appelée incidente, directe ou même rapide. Les rayons correspondant sont tracés en noir sur la FIGURE 1.10. Une onde ayant tangenté une caustique peut être appelée réfléchie, réfractée ou lente, les rayons correspondant étant tracés en gris sur la FIGURE 1.10. En régime linéaire, le profil temporel de l'onde ayant tangenté la caustique est la transformée de Hilbert de celui de l'onde directe (Pierce, 1994; Rosales et Tabak, 1998; Scott et al., 2017; Marchiano, 2003). Dans le domaine fréquentiel, ceci correspond à un déphasage de  $\pi/2$ . La théorie uniforme de la diffraction (UTD) (Ludwig, 1966) permet de raccorder les fonctions d'Airy décrivant localement le comportement du champ autour des caustiques pli avec l'acoustique géométrique.

Un cas particulier est celui des signaux présentant un (ou plusieurs) choc(s), comme par exemple ceux avec une forme d'onde incidente en N. Ces chocs peuvent résulter d'effets non linéaires au cours de la propagation (Hamilton et al., 1998; Marchiano et al., 2003b).

Dans le cas du bang sonique, ils sont présents dès la source, voir par exemple la théorie de

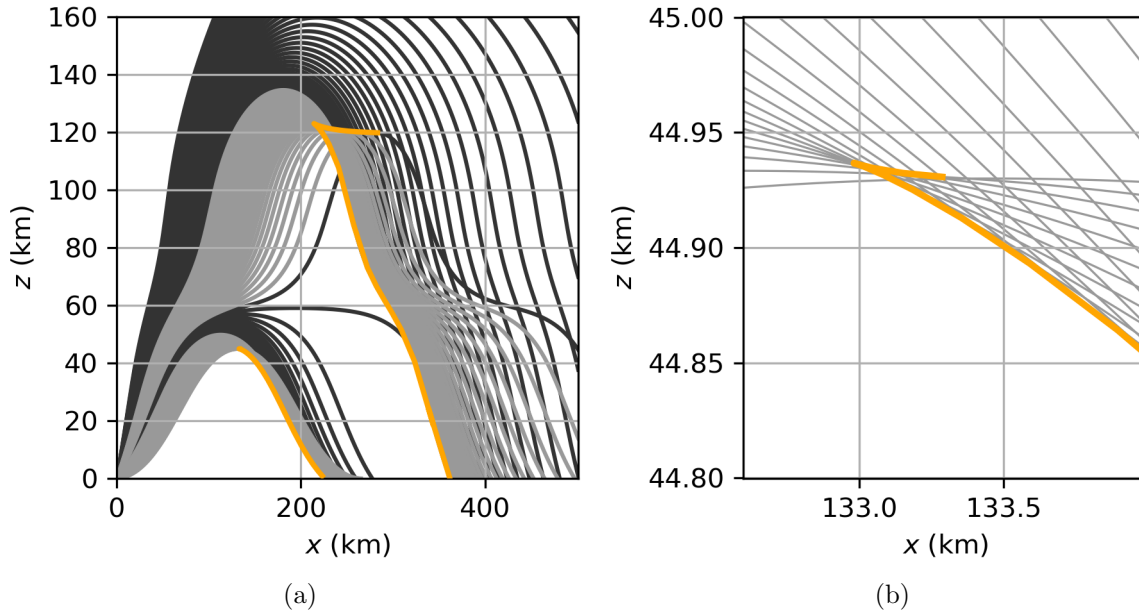


FIGURE 1.10 – (a) Caustiques stratosphérique et thermosphérique indiquées en orange (—) du cas FIGURE 1.8. (b) Zoom sur la caustique stratosphérique.

Whitham pour le bang des avions supersoniques (Whitham, 1952), et les simulations numériques du champ acoustique rayonné par une météorite (Henneton et al., 2015). Au voisinage d'une caustique, via la transformée de Hilbert, l'onde en N se transforme en une onde en U, chacun des deux chocs du N donnant lieu à une singularité logarithmique du profil temporel (Rogers et Gardner, 1980; Pierce, 1994; Marchiano et al., 2003a) (voir FIGURE 1.11). Sur la caustique elle-même la singularité est plus élevée (en puissance  $-1/6$ ). Celle-ci doit alors être levée en introduisant les non-linéarités localement au voisinage de la caustique. Le champ est alors décrit par une équation de Tricomi non linéaire Guiraud (1965) résolue numériquement par Auger et Coulouvrat (2002) et Marchiano et al. (2003a). Les effets d'absorption atmosphérique peuvent être inclus dans le processus (Salamone III et al., 2013). Le cas d'ondes de choc faibles incidentes sur des caustiques cuspidées est modélisé par Coulouvrat (2000) et simulé numériquement par Marchiano et al. (2005). C'est alors la fonction de Pearcey qui décrit localement le comportement linéaire du champ en généralisant la fonction d'Airy (Pearcey, 1993). Pour des chocs plus forts, la théorie géométrique de la dynamique des chocs (en anglais, Geometrical Shock Dynamics) proposée par Whitham (1956), introduit des rayons associés aux chocs, dépendant de leur amplitude, si bien que, au voisinage d'une caustique, ceux-ci sont de plus en plus déviés ce qui empêche le point de focalisation de se former. Pour une revue récente de cette théorie, voir Ridoux et al. (2018, 2020).

Les caustiques délimitent d'une part des zones dites *insonifiées* (ou *illuminées*) et d'autre part des zones de silence ou zones d'ombre. L'équation de Tricomi de type mixte, assure ainsi la transition entre ces deux zones avec son caractère hyperbolique du côté insonifiée, et elliptique du côté silence. La fonction d'Airy traduit celui-ci dans le domaine fréquentiel, avec sa forme oscillante ou au contraire exponentiellement décroissante. Contrairement à la zone insonifiée où arrivent les rayons directs et réfractés, dans la zone d'ombre aucun rayon acoustique ne pénètre. Les zones d'ombre ont néanmoins une réalité physique puisque l'énergie acoustique y est présente même si elle y est plus faible. Dans la réalité complexe de la propagation infrasonore, plusieurs types de zones d'ombre existent : zone d'ombre totale où aucune arrivée n'est observée (par exemple la zone d'ombre stratosphérique sur la FIGURE 1.10), ou zone d'ombre partielle, où d'autres phases peuvent arriver (par exemple sur la même figure la zone d'ombre thermosphérique où les arrivées stratosphériques  $I_{s_f}$  sont néanmoins présentes).

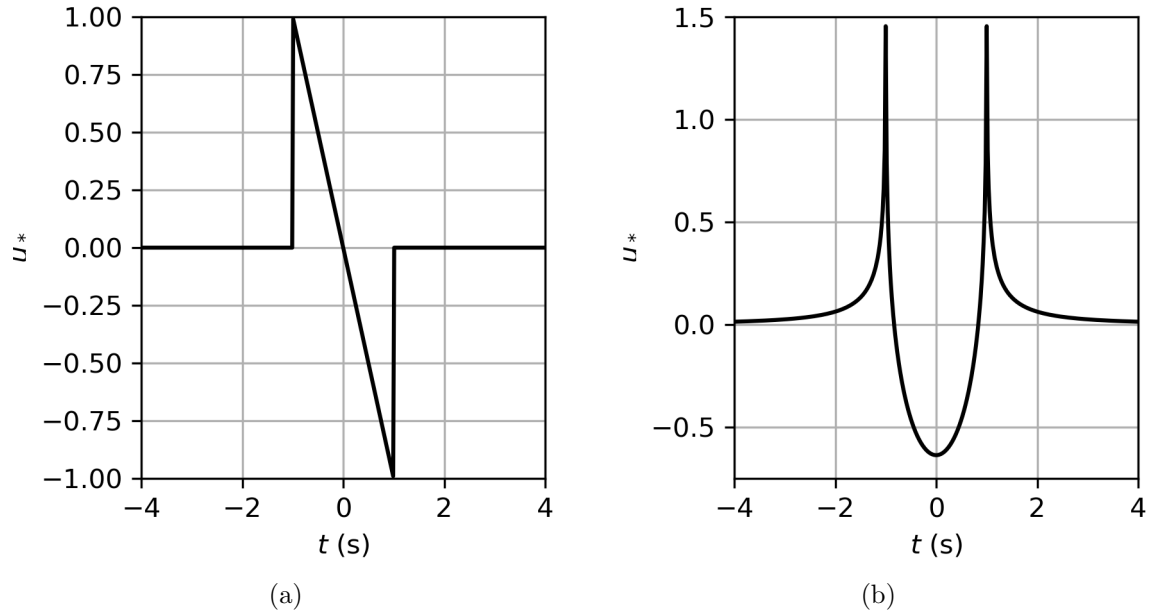


FIGURE 1.11 – (a) Onde en N d’amplitude 1 Pa et de 1 s de durée de phase positive et (b) sa transformée de Hilbert.

Ainsi, pour une station localisée au sol en zone d’ombre, il sera important de prendre en compte la contribution de type diffraction de la caustique correspondante touchant la surface du sol, ainsi que la contribution d’autres phases pouvant arriver dans cette zone d’ombre.

La diffraction aux caustiques n’est pas le seul phénomène observé dans les zones d’ombre. L’énergie acoustique peut également y être diffusée dans les zones d’ombre par les hétérogénéités dues aux petites échelles de l’atmosphère générées par la turbulence atmosphérique dans la troposphère ou les ondes de gravité internes dans la haute atmosphère (Daigle et al., 1986; Kulichkov, 2004; Chunchuzov et al., 2011, 2013, 2014, 2015).

### 1.4.3 Rayons rampants

Un autre type de zone d’ombre au niveau du sol est formée, dans le cas d’une atmosphère réfractante vers le haut, par un rayon limite ayant tangenté la surface du sol (ou étant émis à l’horizontal à partir de la source au sol). Les rayons rampants naissent au point de contact de ce rayon limite avec le sol, et se propagent le long de celui-ci, pénétrant dans la zone d’ombre en émettant des rayons diffractés au-dessus du sol (Coulouvrat, 2002). Toutefois, ce processus de diffraction « pompe » de l’énergie aux ondes rampantes, qui s’affaiblissent au fur et à mesure qu’elles pénètrent dans la zone de silence. Ces ondes ont été étudiées dans le cas linéaire par Pierce (1994). Le processus est analogue à la diffraction d’une onde en milieu homogène par un obstacle régulier, une sphère par exemple (Raspet et al., 1991; Berry et Daigle, 1988), courbure des rayons et courbure de l’obstacle jouant un rôle similaire. Les rayons rampants vérifient par ailleurs le principe de Fermat, minimisant le temps de propagation de l’acoustique géométrique. La nature du sol joue également un rôle important en amplifiant généralement l’atténuation de ces ondes (Raspet et Franke, 1988). Leur application au cas d’une onde en N est proposée pour le bang sonique par (Coulouvrat, 2002).

Nous illustrons sur la FIGURE 1.12, le phénomène de rayons rampants sur le même cas de source ponctuelle au sol. Le rayon limite correspond alors au rayon émis horizontalement. En dehors de celui-ci, aucun point de la zone d’ombre n’est atteint par un rayon direct car ceux-ci sont réfractés vers le haut, formant une zone d’ombre. Le champ résulte alors de la diffraction du rayon rampant. Il est à noter toutefois que, dans ce type de situation, on peut également avoir pénétration dans la zone d’ombre par diffusion, par exemple par les hétérogénéités liées

à la turbulence (Daigle et al., 1986). Un exemple de simulation de ce phénomène dans le cas du bang sonique est proposé récemment par Luquet et al. (2019).

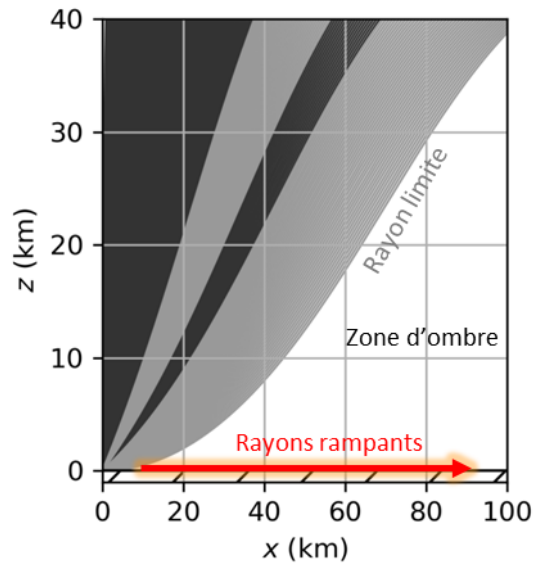


FIGURE 1.12 – Zoom au niveau de la source de la FIGURE 1.8 et représentation de la propagation des rayons rampants le long du sol.

#### 1.4.4 Absorption atmosphérique

L'absorption atmosphérique est un phénomène qui intervient lors de la propagation atmosphérique, diminuant l'énergie des ondes infrasonores et modifiant leur forme d'onde car elle dépend de la fréquence. Les mécanismes à l'origine de ces modifications sont (Pierce, 1994) : l'absorption classique (viscosité de cisaillement, diffusion thermique et moléculaire), l'absorption rotationnelle (déséquilibre de la répartition d'énergie entre les mouvements de rotation et de translation des molécules) et la relaxation moléculaire (déséquilibre entre les états excités ou non des molécules). Dans la troposphère, aux basses fréquences, l'absorption est dominée par la relaxation moléculaire des molécules d'azote  $N_2$  et contrôlée par la tenue en vapeur d'eau qui joue le rôle de catalyseur sur la réaction chimique de retour à l'équilibre (Evans et al., 1972). En haute atmosphère en revanche, c'est l'absorption visqueuse qui domine (Sutherland et Bass, 2004). L'atmosphère étant stratifiée, l'absorption atmosphérique dépend non seulement de la fréquence de l'onde mais aussi du chemin parcouru par le signal (de Groot-Hedlin, 2008). En effet, l'absorption thermovisqueuse (classique) augmente avec l'altitude car la masse volumique moyenne de l'atmosphère diminue exponentiellement (Sutherland et Bass, 2004) (voir partie 1.3.3). Enfin, dans les nuages, les effets de vaporisation/condensation des gouttelettes d'eau sous l'action des cycles de compression/détente acoustiques amplifient fortement l'absorption des infrasons (Baudoin et al., 2011).

#### 1.4.5 Non-linéarités

Les effets non linéaires apparaissent, d'une part à la source lorsqu'elle est très puissante et génère des perturbations acoustiques de grande énergie, d'autre part au niveau des caustiques car la focalisation des ondes y augmente localement l'amplitude des ondes. Les effets à la source sont dépendants de la nature de celle-ci. Pour les météoroïdes, la vitesse d'entrée hypersonique dans l'atmosphère crée des chocs très forts, décrits en première approximation par un modèle d'onde cylindrique (Lin, 1954; Plooster, 1970) qui peut être raccordée avec l'acoustique géométrique (ReVelle, 1976; Edwards, 2010) Plus récemment, des simulations

directes de l'écoulement hypersonique autour d'une sphère ont été menées jusqu'à capturer le régime de choc faible à très grande distance du météoroïde (Henneton et al., 2015) en incluant les effets de dissociation et d'ionisation des molécules d'azote et d'oxygène dans l'estimation de l'écoulement.

Par ailleurs, même pour une source ne présentant pas de choc, les effets non linéaires cumulatifs au cours de la propagation déforment la signature des ondes, formant généralement une onde dite en N (Pierce, 1994; Hamilton et al., 1998). Dans le cadre de l'acoustique géométrique, l'évolution de la signature de l'onde suit une équation de Burgers généralisée, introduite par Whitham (1956) puis généralisée par Hayes (1969) au cas d'une atmosphère stratifiée avec vent. Pour des applications plus récentes, nous renvoyons le lecteur aux publications (Gainville, 2008; Scott et al., 2017; Blackstock, 1985; Pierce, 1994; Loubeau et Coulouvrat, 2009; Blumrich et al., 2005). Cette équation de Burgers modifie l'équation de transport de l'acoustique géométrique décrivant les effets géométriques de convergence ou divergence du front d'onde, en y incluant les effets non linéaires quadratiques (vitesse du son dépendant de l'amplitude) et l'absorption atmosphérique classique, par relaxation moléculaire (Cleveland et al., 1996) voire par les nuages (Baudoin et al., 2011).

Pour des sources ponctuelles (explosions, volcans...), la décroissance rapide du champ (en  $1/r$  dans le cas d'une atmosphère homogène) limite fortement les effets non linéaires mais ceux-ci restent non négligeables car ils sont cumulatifs (croissance cumulée très lente en milieu homogène comme  $\ln(r)$ ). Au contraire, pour une source linéique produite par une source mobile (avion super- ou hyper-sonique, météoroïde), la décroissance plus lente du champ (en  $1/\sqrt{r}$  dans le cas homogène) conduit à des effets non linéaires beaucoup plus significatifs (croissance cumulée comme  $\sqrt{r}$ ). En conséquence, les effets non linéaires ont été observés sans ambiguïté sur la propagation des ondes émises par les météoroïdes (Gainville et al., 2017; de Groot-Hedlin et al., 2011; Kulichkov et al., 2018; Coulouvrat, 2012; Henneton et al., 2012; Henneton, 2013; Henneton et al., 2015; Haynes et Millet, 2013), et les avions super- ou hyper-soniques (voir les références déjà citées sur le sujet) et expliquent la forme en N des signatures aux sol. Toutefois, la raréfaction de l'air dans les hautes couches atmosphériques conduit également à une amplification relative de l'onde, et donc à la nécessité de leur prise en compte notamment pour les phases thermosphériques des explosions (Sabatini et al., 2016b; Coulouvrat, 2012; Sabatini et al., 2015, 2019a,b, 2016a; Gainville et al., 2006; Drobzheva et Krasnov, 2003).

Citons enfin, parmi les phénomènes influençant la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère, la rugosité (à petite échelle) ou la topographie (à plus grande échelle) de la surface de la Terre pouvant aussi avoir un impact sur les enregistrements, particulièrement près de la source (Lacanna et Ripepe, 2013; de Groot-Hedlin, 2017) ou en amplifiant le signal par des effets géométriques (Emmanuelli et al., 2021).

## 1.5 Méthodes de simulation de la propagation infrasonore

L'objectif de cette section est de présenter les différentes méthodes permettant de simuler la propagation des ondes infrasonores à grande distance.

### 1.5.1 Résolution directe des équations de la mécanique des fluides

La résolution directe des équations de la mécanique des fluides (équations d'Euler en fluide parfait, Navier-Stokes en fluide visqueux conducteur de la chaleur, ou en fluide avec relaxation) peut se faire avec les méthodes classiques déployées dans d'autres disciplines : éléments finis, volumes finis, Galerkin discontinu... Toutefois, en raison de leur facilité d'implémentation

et notamment de parallélisation, leur caractère explicite (sans matrice à inverser), le contrôle de leur relation de dispersion associée, le couplage potentiel avec des ondes sismiques..., les schémas aux différences finies en temps et en espace sont fréquemment utilisés. Ils sont dits FDTD pour Finite Difference Time Domain.

Parmi les schémas FDTD, le schéma de Virieux (1986) développé pour les ondes sismiques a connu une extraordinaire postérité dans la communauté géophysique dans son ensemble. Il s'agit d'un schéma à l'ordre 2 en temps et en espace, écrit sur des grilles de maillage décalées, où les différentes inconnues (vitesses et contraintes) sont calculées en des points de maillage différents. Pour les applications aux infrasons utilisant ce type de schéma, citons les généralisations ou applications suivantes :

- ondes acoustiques dans un fluide en mouvement (Ostashev et al., 2005)
- infrasons dans un fluide absorbant à 2D (de Groot-Hedlin, 2008)
- conversion entre ondes sismiques et acoustiques (Matoza et al., 2009)
- infrasons émis par un bolide (de Groot-Hedlin et al., 2011)
- effets de topographie sur la propagation autour d'un volcan (Lacanna et Ripepe, 2013)
- propagation infrasonore dans un guide d'onde troposphérique ou une zone d'ombre (de Groot-Hedlin, 2017)
- arrivées thermosphériques avec prise en compte d'effets non linéaires (de Groot-Hedlin, 2016)
- rayonnement acoustique d'un conduit magmatique (Lacanna et Ripepe, 2020).

A l'exception de cette dernière, tous ces cas sont traités à deux dimensions. En effet l'ordre 2 des schémas de type Virieux implique une discrétisation très fine de l'espace, et par conséquent un pas temporel également très petit en raison de la condition de stabilité. Ceci rend les applications tri-dimensionnelles très volumineuses numériquement. Un schéma de type Arakawa a été appliqué avec succès à 3D à la propagation atmosphérique avec vent et topographie (Blumrich et Heimann, 2002) ainsi qu'un schéma entièrement d'ordre 4 (Brisaud et al., 2016). Ce dernier a notamment été appliqué aux infrasons résultant de l'impact de météorites à la surface de la planète Mars (Garcia et al., 2017). Une voix prometteuse est d'utiliser des schémas d'ordre encore plus élevé, visant à minimiser la dispersion et la dissipation numérique, afin d'obtenir des méthodes plus performantes pour simuler la propagation sur des grandes distances, parfois plusieurs milliers de longueurs d'onde. Ces méthodes viennent de l'aéro-acoustique, où là aussi une haute précision est requise (Tam et Webb, 1993). Pour les infrasons, la première application est proposée par Del Pino et al. (2009). Pour les méthodes FDTD stricto sensu, plusieurs publications à deux (Sabatini et al., 2016b) puis trois dimensions (Sabatini et al., 2019a) résolvent directement les équations de Navier-Stokes pour simuler la propagation infrasonore, incluant advection, réfraction, absorption et non-linéarités, notamment au niveau des caustiques thermosphériques. Dans ce cas les schémas utilisés sont à 11 points pour minimiser la dispersion numérique (Berland et al., 2007) et utilisent un filtre adapté pour traiter les ondes de choc associées aux non-linéarités (Bogey et al., 2009; Sabatini et al., 2019a).

Des progrès dans cette voie sont certainement à attendre avec l'amélioration des schémas, la parallélisation massive et l'augmentation de la puissance de calcul des machines. Néanmoins, pour des applications 3D opérationnelles rapides, ou nécessitant de multiples calculs par exemple pour des problèmes inverses ou une approche stochastique, des méthodes plus économes en temps de calcul et en espace mémoire restent toujours indispensables.

### 1.5.2 Approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde

La résolution directe des équations de la mécanique des fluides (éventuellement linéarisées) est numériquement coûteuse en raison de la nature hyperbolique de celles-ci, qui nécessite

de mailler l'espace à l'échelle d'une fraction de la plus petite longueur d'onde considérée, et le temps à l'échelle d'une fraction de la période correspondante. Des méthodes approchées permettent de réduire ce coût numérique. Dans les cas de propagation acoustique sur de grandes distances, le trajet du son est essentiellement dirigé dans une direction privilégiée, correspondant la plupart du temps à la direction reliant la source au récepteur. Ainsi, pour la propagation atmosphérique, la direction globale des ondes est parallèle au sol, et la variation du champ dans cette direction à l'échelle de la longueur d'onde peut être intégrée analytiquement. Historiquement, ce type d'approximation paraxiale a été introduite notamment en acoustique non linéaire (Zabolotskaya, 1969), en acoustique sous marine (Tappert, 1977), puis en géophysique pour une approximation d'ordre plus élevé (Claerbout, 1976).

De très nombreuses formulations ont été proposées. Une étude récente (Ostashev et al., 2020) distingue les approximations NAPE (Narrow Angle Parabolic Equation), WAPE (Wide Angle Parabolic Equation), EWAPE (Extra Wide Angle Parabolic Equation) suivant l'approximation de type Padé d'un opérateur de type  $\sqrt{k_0^2 + \partial^2/\partial y^2}$  où  $k_0$  est le nombre d'onde et  $y$  la (ou les directions) perpendiculaire(s) à la direction principale. Pour les applications infrasonores, il est nécessaire de prendre en compte le mouvement de l'atmosphère (le vent) et sa stratification. Différentes approximations peuvent être faites sur ces termes, notamment sur le nombre de Mach (supposé faible ou non), sur les composantes de la vitesse du vent (prendre en compte toutes les composantes ou uniquement celle dans la direction principale ou encore considérer seulement une vitesse du son effective). Nous renvoyons le lecteur à cette référence et à sa bibliographie pour une étude détaillée des différentes approximations. Notons que, dans tous les cas, les approximations utilisées sont toutes de type « one-way » (unidirectionnelle), à savoir que seule la propagation dans le sens de la source vers l'observateur est prise en compte, et le champ rétro-diffusé est négligé. Les différentes approximations décrivent alors avec une bonne précision des propagations s'écartant approximativement de  $\pm 20^\circ$  par rapport à la direction principale pour les approximations de type NAPE,  $\pm 40^\circ$  pour WAPE et jusqu'à  $\pm 90^\circ$  pour EWAPE (Ostashev et al., 2019). Parmi de nombreuses applications aux infrasons atmosphériques, citons :

- la propagation en milieu avec turbulence scalaire ou vectorielle (Dallois et Blanc-Benon, 2001; Blanc-Benon et al., 2001),
- l'estimation des vents à très haute altitude par des sources volcaniques (Le Pichon et al., 2005b),
- la modélisation de la propagation très grande distance de sources explosives (Gainville et al., 2010; Green et al., 2011),
- la diffusion des infrasons par les hétérogénéités anisotropes de l'atmosphère résultant des ondes de gravité (Chunchuzov et al., 2011),
- l'évaluation de l'atténuation globale des infrasons sur de très grandes distances, notamment pour quantifier les performances du réseau OTICE (Le Pichon et al., 2012),
- la propagation du bruit rayonné par des éoliennes (Cotté, 2018),
- la propagation au-dessus d'un sol non plat (Khodr, 2020).

Notons enfin que plusieurs modèles ont été proposés pour tenir compte des effets non linéaires pour la propagation atmosphérique avec vent, à petit (Aver'yanov et al., 2006) ou très grand angle (Gallin et al., 2014; Luquet et al., 2019).

Dans la présente étude, afin d'illustrer l'approximation parabolique, nous présentons sur la FIGURE 1.13 le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son FIGURE 1.3 et le profil de vitesse de vent FIGURE 1.4b, simulé numériquement avec un code parabolique grand angle WAPE prenant en compte un ordre de Padé égal à 4 et le vent sous forme de vitesse du son effective (Nguyen-Dinh et al., 2018). A la différence de la méthode des rayons, l'approximation parabolique permet de prendre en compte les effets de diffraction dans la



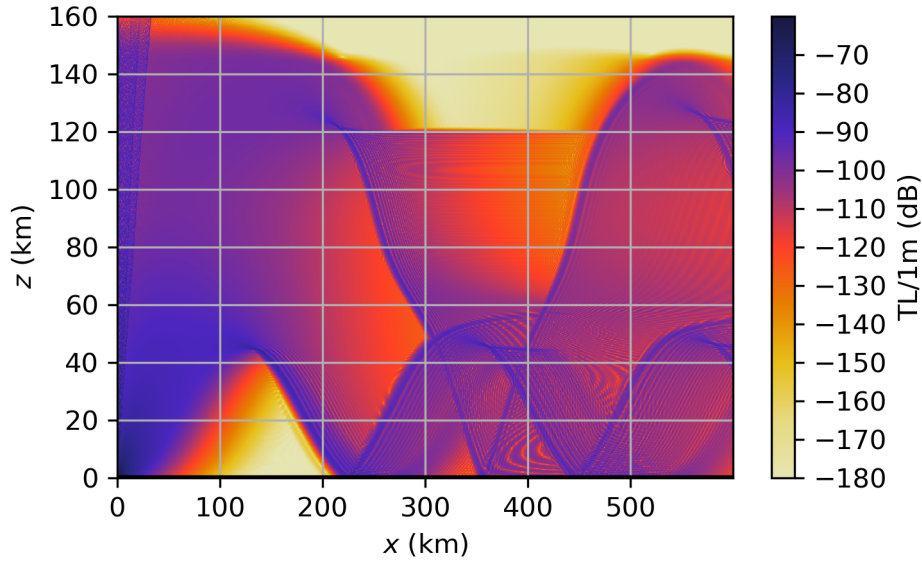


FIGURE 1.13 – Cas de la FIGURE 1.8 : pertes par transmission (TL) par rapport au niveau à 1 m de la source en dB en niveau de couleurs avec un code parabolique WAPE.

zone d'ombre. Toutefois, l'amplitude est très faible à l'intérieur de celle-ci, surtout dans la première zone d'ombre, car le champ alors émane de la propagation des ondes rampantes, exponentiellement atténuées. Seul le voisinage de la source, puis de la caustique où règne un fort phénomène de diffraction, présentent des amplitudes plus importantes.

### 1.5.3 Modes normaux

Selon cette approche, l'équation des ondes ou ses généralisations à une atmosphère en mouvement sont résolues dans le domaine fréquentiel par la méthode de séparation des variables dans le cas d'une stratification verticale (Brekhovskikh et Godin, 2013). Dans la direction verticale, la base des modes normaux est déterminée par résolution d'un problème unidimensionnel aux valeurs propres (Millet et al., 2007; Bertin et al., 2014; Lalande et Waxler, 2016; Assink et al., 2017). Formellement, la méthode des modes normaux ne s'applique qu'aux milieux stratifiés verticalement. Dans le cas des infrasons issus des météoroïdes, Ens et al. (2012) ont montré que les distances de propagation sont trop longues pour que l'hypothèse d'atmosphère invariante horizontalement soit satisfaisante. L'extension à des milieux variant suivant deux dimensions, par le biais des modes couplés (Jensen et al., 1995) est possible, mais implique un important surcoût numérique. Par ailleurs, toujours pour un météoroïde, le signal à la source présente un choc (ReVelle, 1976; Henneton et al., 2015) et les effets non linéaires ne peuvent être négligés lors de la propagation. Des généralisations de la notion de modes normaux pour la propagation non linéaire ont été proposées (voir par exemple (Fernando et al., 2011)) mais n'ont pas été appliquées à notre connaissance aux infrasons.

### 1.5.4 Acoustique géométrique

Historiquement, l'acoustique géométrique, ou théorie des rayons, provient de l'optique géométrique et de la loi de Snell-Descartes (Pierce, 1994). Dès la première guerre mondiale Esclangon (1925) et Milne (1921) au Royaume-Uni ont établi indépendamment les équations des rayons en atmosphère avec vent, pour la localisation acoustique des pièces d'artillerie ou des avions. Cette théorie des rayons repose sur une approximation haute fréquence des équations de la mécanique des fluides, selon laquelle les plus petites échelles spatiales et temporelles du milieu de propagation sont beaucoup plus grandes que les échelles caractéristiques

de l'onde acoustique (longueur d'onde et période) (Whitham et Fowler, 1975; Candel, 1977; Pierce, 1994). Au premier ordre, l'approximation haute fréquence donne l'équation dite *eikonale* gouvernant la phase de l'onde. Au deuxième ordre, l'équation de transport de l'action de l'onde (Scott et al., 2017) détermine son amplitude. L'équation eikonale est une équation hyperbolique non linéaire, qui peut être résolue par la méthode des caractéristiques, les courbes caractéristiques étant appelées rayons acoustiques. Ils correspondent aux chemins empruntés préférentiellement par le signal acoustique lors de sa propagation dans l'atmosphère, car rendant le temps de parcours le long du rayon extrémal (en général minimal) selon le principe de Fermat. Pour une démonstration du principe de Fermat en atmosphère avec vent, voir par exemple (Auger et Coulouvrat, 2002). L'intégration de l'équation de transport permet quant à elle d'obtenir l'invariant de Blokhintzev (Blokhintsev, 1956; Hayes, 1968), et par là l'amplitude du champ de pression acoustique. Notons ici que la théorie des rayons peut également s'exprimer selon une formulation Hamiltonienne, permettant son application au cas de milieux élastiques anisotropes pour des problèmes de sismiques (Červený, 1972). Dans ce cas, l'amplitude du champ peut être déterminée par la méthode des rayons paraxiaux, ou rayons voisins d'un rayon central, résolue analytiquement localement dans un domaine discrétisé par éléments finis (Farra, 1989, 1990), ce qui permet aussi la prise en compte d'interfaces dans le milieu (Farra et al., 1989).

L'acoustique géométrique est cependant limitée par la présence de caustiques et de zones d'ombre, qui sont deux singularités de la théorie des rayons (zones d'amplitude infinie pour les premières, non atteintes par les rayons pour les secondes) car elle néglige les effets de la diffraction, mécanisme prédominant dans ces zones. Elle ne permet pas non plus de prendre en compte la diffusion due aux petites inhomogénéités, pour lesquelles l'approximation haute fréquence se trouve en défaut. Un autre aspect délicat dans la mise en oeuvre de la théorie de l'acoustique géométrique est la recherche de l'ensemble des *rayons propres*, c'est-à-dire l'ensemble des rayons reliant la source à un récepteur donné (Blom et Waxler, 2017; Schäfer et Vorländer, 2021). Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.4.1, différentes phases atmosphériques peuvent arriver à une position donnée, il est donc nécessaire de connaître tous les rayons propres afin de calculer le signal à la station.

Malgré ses limitations, l'acoustique géométrique est extrêmement répandue dans le domaine de la propagation acoustique longue distance où on peut la qualifier de méthode de référence utilisée en recherche aussi bien qu'en opérationnel (Gainville, 2008; Hennenon, 2013; Scott et al., 2017; Ostashev et Wilson, 2015; Pierce, 1994; Blom, 2019; Ceranna et al., 2009; Waxler et al., 2015; Vanderbecken et al., 2019). L'utilisation de cette méthode est justifiée notamment par son faible coût numérique permettant des calculs en trois dimensions, prenant en compte des sources mobiles, des milieux variables et le relief de la surface de la Terre (Gainville, 2008). Elle autorise également une interprétation physique simple, en identifiant le chemin suivi par les différentes arrivées, leur nature... Par ailleurs, elle se généralise aisément au cas de la propagation non linéaire d'ondes de choc faibles, se ramenant à la résolution d'une équation de Burgers modifiée le long de chaque rayon. C'est le cas notamment pour le bang des avions supersoniques, voir par exemple les travaux pionniers de Whitham (1956) et Hayes (1969), et leurs applications plus récentes (Plotkin, 2002; Cleveland et al., 1996; Loubeau et Coulouvrat, 2009; Rallabhandi, 2011). Le bang des météoroïdes est estimé de façon similaire par la théorie des rayons, voir par exemple (Silber et Brown, 2014; Edwards, 2010; Gainville et al., 2017). La méthode des rayons est enfin un outil de référence pour des problèmes d'inversion, comme la localisation de la source (Gainville et al., 2017; Blom, 2019) ou le sondage atmosphérique (Vanderbecken et al., 2019).

### 1.5.5 Acoustique géométrique complexe

Cette méthode généralise l'acoustique géométrique précédemment décrite en recherchant des solutions complexes de l'équation eikonale et en obtenant ainsi de nouveaux rayons com-

plexes atteignant les points en zone d'ombre. Le calcul complexe de l'amplitude permet également d'y obtenir le champ de pression des ondes diffractées.

Le tracé de rayons complexes a fortement été utilisé en optique géométrique afin d'étudier la diffraction des ondes électromagnétiques (Keller, 1962; Kravtsov, 1967; Keller et Streifer, 1971; Montrosset et Orta, 1983; Felsen, 1984; Chapman et al., 1999, 2001; Berczyński et al., 2006; Kravtsov et Berczynski, 2007; Berczyński et al., 2008; Harvey et al., 2015; Colaïtis et al., 2019), ainsi qu'en sismologie (Thomson, 1997; Zhu et Chun, 1994; Li et al., 2020). En mécanique des fluides incompressibles, on peut mentionner une étude sur la stabilité de couches limites et la formation de caustiques (Gréa et al., 2005). Pour la propagation aérienne, les applications sont beaucoup plus rares, citons essentiellement en aéroacoustique les travaux récents de Stone et al. (2018) étudiant le champ d'une source sonore dans un jet parallèle ou divergent par des rayons complexes, avec présence de caustiques, zones d'ombre ou arrivées multiples. Comme illustré plus haut, cette typologie de situations est similaire à celle observée quasi systématiquement en propagation infrasonore, et justifie donc l'intérêt d'approfondir l'emploi de la méthode des rayons complexes pour la propagation infrasonore qui nous intéresse ici. Cette application nouvelle de l'approche des rayons complexes dans le domaine infrasonore est l'objet de la présente thèse.

Dans la littérature, la méthode est principalement utilisée dans le cas de solutions analytiques pour les rayons. Or même en atmosphère simplement stratifiée, les profils réalistes de température et plus encore de vent ne permettent pas d'espérer de telles solutions analytiques, et la méthode des rayons complexes doit donc faire appel à une approche numérique qui constitue l'une des originalités de ce travail. En effet, jusqu'à présent, peu de méthodes numériques spécifiques pour les rayons complexes ont vu le jour. Citons Egorchenkov et Kravtsov (2001) qui furent les premiers à décrire un algorithme d'intégration des rayons complexes, ainsi qu'une méthode d'optimisation permettant d'atteindre un point réel. Ils n'ont cependant pas résolu la problématique liée aux arrivées multiples de rayons, et leur algorithme est développé en optique, donc sans les effets d'advection par le vent spécifiques à l'acoustique aérienne. Toujours dans le cadre de l'équation de Helmholtz sans advection, Amodei et al. (2006) ont développé un algorithme qui permet d'obtenir les solutions aux récepteurs en optimisant les solutions *de proche en proche* à partir des solutions réelles, en utilisant la méthode de Newton. Ils précisent cependant que leur algorithme est limité par la distance à la caustique, alors que l'on a vu plus haut qu'il existe dans le domaine infrasonore de nombreux cas d'application où il est nécessaire d'aller loin dans la zone d'ombre. Soulignons également que leur algorithme ne fonctionne pas lorsqu'un rayon tangente plusieurs caustiques et qu'il est lent à leur voisinage. Un des objectifs principaux de cette thèse est de généraliser ce type d'algorithme pour dépasser ces limitations dans le cadre de la propagation infrasonore.

D'autres méthodes asymptotiques existent afin d'étudier le voisinage de la caustique et les zones d'ombre telles que la sommation de Maslov (Maslov, 1965; Ziolkowski et Deschamps, 1984; Thomson et Chapman, 1985; Piserchia, 1998), ou encore la Théorie Uniforme de la Diffraction (Ludwig, 1966; Holford, 1974; White et Pedersen, 1981) qui sera appliquée dans le chapitre 4. A notre connaissance ces méthodes n'ont jamais été utilisées dans le cadre de la propagation des ondes onfrasonores.

## 1.6 Objectifs de la thèse et structure du manuscrit

Jusqu'ici, un travail considérable a été effectué afin de modéliser la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère. Chaque méthode développée a ses avantages et inconvénients. Malgré ses limites, la méthode de tracé de rayons reste un bon compromis entre d'une part la possibilité de calcul en trois dimensions dans des situations complexes (atmosphère variable dans les 3 directions, prise en compte du vent, de l'absorption, des non-linéarités, de la topographie) et d'autre part son faible coût numérique qui en fait une méthode opérationnelle,

également adaptée aux problèmes inverses. Dans le cas du bang sonique des météoroïdes, c'est à notre connaissance la méthode essentiellement utilisée, les méthodes plus haute fidélité (différences finies, approximation parabolique) étant très pénalisées par leur coût et la complexité du problème : source mobile en général mal connue et donc requérant des inversions, et propagation fortement non linéaire. Cette méthode reste néanmoins incomplète par l'absence d'information qu'elle fournit au voisinage des caustiques et dans les zones d'ombre, où les phénomènes de diffraction ne peuvent être négligés. L'extension aux rayons complexes apparaît donc comme un compromis raisonnable permettant de garder l'efficacité des rayons tout en étendant leur domaine de validité. Toutefois, la comparaison avec les enregistrements aux stations infrasonores nécessite la détermination de toutes les arrivées liées aux différentes phases atmosphériques, ce qui, jusqu'à présent, reste un aspect délicat techniquement notamment pour les rayons complexes.

L'objectif de cette thèse est donc de développer une méthodologie numérique rapide et efficace, basée sur la méthode de tracé de rayons, permettant d'obtenir toutes les arrivées aux stations quelle que soit leur position. Cela permettra de prendre en compte toutes les phases atmosphériques, y compris les phases diffractées aux caustiques par la prolongation complexe dans les zones d'ombre associées.

Dans le chapitre 2, nous introduisons l'acoustique géométrique complexe. Nous présentons les équations des rayons, correspondant aux chemins empruntés par le signal acoustique entre la source et un potentiel récepteur, ainsi que l'équation de conservation de l'action de l'onde qui elle permet d'obtenir le champ de pression acoustique. Nous décrivons la géométrie d'un rayon complexe ainsi que les conditions d'obtention de solution dans une zone d'ombre.

Afin de justifier l'utilisation de la méthode des rayons complexes, et d'analyser le comportement de ceux-ci, notamment au voisinage de caustique, nous présentons dans le chapitre 3, un cas analytique d'onde plane, dont la solution des rayons est comparée à la solution analytique de l'équation de Helmholtz.

Dans le chapitre 4, nous présentons la méthodologie numérique permettant de déterminer les rayons propres réels et complexes, liés aux différentes phases atmosphériques, arrivant aux récepteurs. La présentation de l'algorithme est faite sur un cas de source ponctuelle avec le profil météorologique de référence présenté dans le chapitre 1. Une comparaison avec l'approximation parabolique permet alors de valider la méthode développée.

Afin d'appliquer la méthode, nous présentons dans le chapitre 5 une méthode d'ajustement des données réelles de profils atmosphériques, adaptée à la méthode des rayons complexes. Une application du cas de la météorite de Carancas dont le bang sonique a généré deux arrivées à une station infrasonore localisée en zone d'ombre est présentée.

Pour finir, dans le chapitre 6, nous concluons les travaux présentés et exposons quelques perspectives.



---

## Chapitre 2

# Acoustique Géométrique Complexe

### 2.1 Introduction

L'acoustique géométrique, c'est-à-dire la théorie des rayons, est une méthode classique qui permet d'étudier la propagation des ondes acoustiques sur de grandes distances, comme par exemple les infrasons dans l'atmosphère. C'est une méthode asymptotique simplifiée, basée sur l'approximation haute fréquence (Whitham, 1956; Pierce, 1994; Ostashev et Wilson, 2015) qui, appliquée aux équations de la mécanique des fluides linéarisées, permet de modéliser la propagation des (infra)sons suivant des chemins appelés *rayons acoustiques*. Les méthodes asymptotiques sont souvent utilisées pour les ondes dans les milieux hétérogènes. Leurs avantages sont d'être plus rapides et physiquement plus intuitives que les méthodes numériques directes, telle que les différences finies (Sabatini et al., 2016b, 2019a,b). La méthode de tracé de rayons permet donc un calcul rapide de la propagation en prenant en compte des sources tridimensionnelles, des données atmosphériques complexes (3 composantes du vent, stratification, dépendance horizontale...) et le relief de la surface de la Terre (Gainville, 2008). Toutefois, comme présenté dans le chapitre 1, cette méthode mène à la présence de caustiques et de zones d'ombre, pour lesquelles le champ prédit est soit infini, soit nul et dans tous les cas, non physique. Au vu des avantages que présente la méthode de tracé de rayons, nous avons choisi de résoudre la problématique d'absence de rayons dans la zone d'ombre par l'utilisation du tracé de rayons complexes. Fortement utilisée en optique géométrique afin d'étudier la diffraction des ondes électromagnétiques (Keller, 1962; Kravtsov, 1967; Keller et Streifer, 1971; Montrosset et Orta, 1983; Felsen, 1984; Chapman et al., 1999, 2001; Berczyński et al., 2006; Kravtsov et Berczynski, 2007; Berczyński et al., 2008; Harvey et al., 2015; Colaïtis et al., 2019), en sismologie (Thomson, 1997; Zhu et Chun, 1994; Li et al., 2020) et plus rarement en mécanique des fluides (étude d'instabilités de couches limites) (Gréa et al., 2005) et en aéroacoustique (Stone et al., 2018), cette méthode n'a encore jamais été utilisée à notre connaissance pour la propagation des infrasons.

La notion de rayons complexes a été introduite par Keller (1962) dans le cadre de la Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD). On lui doit l'idée originale du prolongement des lois de l'optique géométrique à des phénomènes de diffraction. Kouyoumjian et Pathak (1986) ont contribué ensuite à la mise en forme rigoureuse et l'élaboration de formulations uniformes pour décrire le champ diffracté.

Dans les années 60-70, de nombreuses méthodes asymptotiques ont été développées afin d'étudier la répartition d'un champ électromagnétique. En particulier, une importante catégorie d'entre elles portait sur la généralisation de l'optique géométrique réelle suivant laquelle le champ s'exprime sous la forme :

$$u(\mathbf{x}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{x})e^{i\Phi(\mathbf{x})}, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  et  $\Phi(\mathbf{x})$  sont les fonctions amplitudes et phases réelles. Dans un premier temps a

été introduite la composante imaginaire dans les fonctions d’amplitude et de phase, connu sous le nom “*Evanescence Wave Tracking*” (Choudhary et Felsen, 1973). Les ondes évanescentes décrivent un champ près de la source mais négligeable loin de celle-ci. D’autre part un prolongement analytique des fonctions d’amplitude et de phase a été proposé dans l’espace complexe, on l’appelle alors “*Complex Ray Tracing*”, pour *tracé de rayons complexes* (Kravtsov, 1967; Keller et Streifer, 1971). Par la suite, la méthode de tracé de rayons complexes a très souvent été utilisée par Kravtsov dans des applications d’optique et principalement pour l’étude de la diffraction des faisceaux Gaussiens (Kravtsov, 1967; Kravtsov et Orlov, 1983; Kravtsov et al., 1999; Kravtsov et Berczynski, 2004; Kravtsov et Zhu, 2010). (Egorchenkov et Kravtsov, 2001) ont d’ailleurs été les premiers à décrire un algorithme numérique d’intégration des rayons complexes pour les applications d’optique géométrique et ont souligné la nécessité de supprimer les rayons complexes non-physiques, afin d’obtenir des résultats physiquement acceptables. Chapman et al. (1999) ont appliqué cette théorie pour diverses géométries de caustiques dans les cas de propagation d’ondes monochromatiques haute fréquence. La sismologie est un autre domaine d’application qui utilise les rayons complexes afin de propager les ondes dans des milieux viscoélastiques et anisotropes (Hearn et Krebes, 1990; Zhu et Chun, 1994; Thomson, 1997; Wu et al., 2021). Récemment la théorie des rayons complexes a été appliquée en aéroacoustique afin de prédire les effets haute fréquence de la propagation acoustique d’une source ponctuelle dans un écoulement de jet subsonique (Stone et al., 2018). On remarque aussi dans la littérature que la théorie des rayons complexes a été principalement appliquée à des sources ponctuelles. Nous présenterons dans les chapitres suivants des résultats pour différents types de sources. Ainsi notre objectif est d’adapter la théorie des rayons complexes pour des applications de propagation infrasonore et, particulièrement, le bang sonique de météoroïdes.

Le présent chapitre est organisé en trois parties : dans la première partie nous présentons le tracé de rayons et plus précisément les équations des rayons, obtenues à partir de différentes approches. Ces équations des rayons permettent d’introduire la notion de rayon complexe et d’en donner une interprétation physique. La deuxième partie est consacrée à la description du calcul du champ de pression, que ce soit dans la zone insonifiée ou dans la zone d’ombre. Afin de résoudre la problématique de singularité à la caustique, nous présentons notamment dans cette partie, la théorie uniforme de la diffraction à la caustique. Pour finir, nous traitons de la réflexion des rayons complexes, qui sera utilisée dans un cadre analytique dans le chapitre 3.

## 2.2 Tracé de rayons

Dans cette partie, nous présentons une approche qui permet d’obtenir les équations des rayons. Elle consiste en une analyse multi-échelle à partir des équations d’Euler linéarisées, qui permet au premier ordre de retrouver l’équation eikonale, et au second ordre l’équation de transport.

### 2.2.1 Équation eikonale

La propagation des ondes infrasonores impulsionnelles dans une atmosphère inhomogène advectée, peut être décrite par l’acoustique géométrique linéaire. Les hypothèses de l’acoustique géométrique se basent sur le fait que les propriétés spatiales du milieu varient lentement par rapport aux propriétés spatiales de l’onde : c’est l’hypothèse haute fréquence. Ainsi, le front d’onde défini implicitement par  $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$  évolue spatialement avec le temps  $t$  suivant l’équation eikonale.

L’approche, que nous présentons ici, est d’utiliser les équations d’Euler linéarisées. Ces équations permettent de modéliser l’ensemble des phénomènes physiques influençant la propagation des ondes infrasonores. Ainsi, en reprenant les travaux de Scott et al. (2017), nous

détaillerons cette approche afin d'obtenir l'équation eikonale. Une autre approche existe, basée sur l'ansatz WKB (des initiales de Wentzel, Kramers, Brillouin), qui appliquée à l'équation de Helmholtz, donne à l'ordre du nombre d'onde  $k_0$ , l'équation eikonale. Toutefois, l'équation de Helmholtz reste limitée à un milieu sans écoulement, et il n'en existe pas de généralisation exacte en présence d'un écoulement non uniforme (sauf s'il est stratifié), comme le vent pour les applications qui nous intéressent.

Ainsi, nous rappelons tout d'abord les équations de la mécanique des fluides pour un fluide parfait compressible, non visqueux et non conducteur de la chaleur, qui permettent de simuler la propagation des ondes infrasonores. A partir de ces équations, en suivant l'analyse proposée par Scott et al. (2017) un développement asymptotique est fait, dont le premier terme permet d'aboutir à l'équation eikonale. Le second ordre conduit à l'équation gouvernant l'amplitude de l'onde.

Pour les infrasons, les effets de relaxation sont négligeables (Sabatini, 2017), bien que ce soit le mécanisme qui domine aux basses altitudes. Les effets de viscosité et de conduction thermique sont importants en haute altitude, principalement à partir de 80 km. Les phases d'arrivées considérées sont réfractées à moins de 80 km, ces effets sont donc négligés par la suite. Pour intégrer tous ces phénomènes, il faudrait comme dans Pierce (1994) écrire les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux, le développement de ces équations est détaillé dans Scott et al. (2017). Dans ce cas, l'équation eikonale reste inchangée, seule l'équation de transport est modifiée.

### Équations d'Euler

Pour un fluide parfait, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (2.2c)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du milieu,  $\rho$  la masse volumique,  $p$  la pression,  $s$  l'entropie et  $t$  le temps.  $\mathbf{g}$  est l'accélération gravitationnelle. Afin de fermer le système nous ajoutons une équation d'état :

$$p = p(s, \rho), \quad (2.3)$$

qui pour l'air, en négligeant la relaxation moléculaire, est la loi des gaz parfaits :

$$p = \frac{\rho R T}{M}, \quad (2.4)$$

avec  $T$  la température,  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits et  $M$  la masse molaire totale ( $M_{\text{air}} = 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour l'air au sol, mais est variable en fonction de la composition de l'air et donc de l'altitude).

### Formulations perturbatives des équations d'Euler

Les ondes acoustiques sont des perturbations du milieu autour de son état d'équilibre, ainsi les différentes variables décrivant ce milieu peuvent être décomposées en deux parties. La partie indicée par  $_0$  représente le milieu ambiant à l'état non perturbé par le champ acoustique défini par les variables  $\mathbf{v}_0, \rho_0, p_0 \dots$  où l'on fait l'hypothèse qu'elles vérifient l'ensemble des équations du mouvement (2.2). La deuxième partie (notée par  $'$ ) représente les perturbations,



résultant d'un champ de faible amplitude du à la source acoustique, définies par  $\mathbf{v}'$ ,  $\rho'$ ,  $p'$ . On peut donc écrire le champ total :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad s = s_0 + s'. \quad (2.5)$$

En remplaçant (2.5) dans les équations (2.2) et en soustrayant les équations à l'état d'équilibre, nous obtenons les équations sous forme perturbée :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{v}' \cdot \nabla \rho_0 - \rho' \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \quad (2.6a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \nabla p' = -\rho_0 (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \rho' \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s' = -\mathbf{v}' \cdot \nabla s_0. \quad (2.6c)$$

Dans ces équations, les termes de gauche sont linéaires par rapport à la perturbation acoustique et contiennent les dérivées temporelles ou spatiales de la perturbation. Ces termes vont donc être d'ordre  $Af$  où  $A$  est l'amplitude du champ acoustique et  $f$  sa fréquence. Au second membre, on trouve des termes non linéaires, proportionnels à  $A^2$ , ou bien des termes sans dérivées du champ acoustique, donc proportionnels à  $A$ . Sous l'hypothèse de petite perturbation («  $A$  petit ») et de haute fréquence («  $f$  grand ») seuls les termes du membre de gauche vont contribuer au premier ordre à l'analyse asymptotique ci-après.

Enfin, l'équation d'état  $p_0 + p' = p(s_0 + s', \rho_0 + \rho')$ , après linéarisation devient :

$$p_0 + p' = p_0 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 s' + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho'. \quad (2.7)$$

### Développement asymptotique au premier ordre

Les développements asymptotiques utilisés pour décrire la perturbation acoustique sont une généralisation de la méthode WKBJ. Cette analyse asymptotique est basée sur l'existence de différentes échelles caractéristiques pour les ondes acoustiques. Ainsi, l'échelle temporelle de référence est la période de l'onde et l'échelle spatiale de référence est la longueur d'onde. Ce sont ces échelles dites « rapides » qui caractérisent les perturbations du milieu dues à la source acoustique et sont donc liées aux caractéristiques de la source. La période de la source et sa longueur d'onde acoustique sont supposées très inférieures aux échelles de variation spatiale et temporelle des propriétés de l'atmosphère. Un exemple de source est le cas d'un météoroïde dont la fréquence varie entre 0,01 et 20 Hz (cf. FIGURE 1.2), ainsi sa longueur d'onde  $\lambda$  varie entre 34 km et 17 m et sa période entre 100 et 0,05 s.

Cet écart entre les échelles est exprimé par un petit paramètre  $\epsilon$ . La présence d'échelles distinctes suggère une approche multi-échelle avec une variable  $\eta = \Phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon$  représentant la distance du front d'onde dimensionnée en fonction de la perturbation acoustique. La quantité  $\Phi$  représente la phase de l'onde acoustique, qui est une fonction de deux variables lentes :  $\mathbf{x}$  la position et  $t$  le temps. Le développement asymptotique se fait donc suivant le paramètre  $\epsilon$  et s'écrit :

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{v}'_1(\eta, \mathbf{x}, t) + \epsilon^2 \mathbf{v}'_2(\eta, \mathbf{x}, t) + \dots, \quad (2.8a)$$

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \epsilon \rho'_1(\eta, \mathbf{x}, t) + \epsilon^2 \rho'_2(\eta, \mathbf{x}, t) + \dots, \quad (2.8b)$$

$$p'(\mathbf{x}, t) = \epsilon p'_1(\eta, \mathbf{x}, t) + \epsilon^2 p'_2(\eta, \mathbf{x}, t) + \dots, \quad (2.8c)$$

$$s'(\mathbf{x}, t) = \epsilon s'_1(\eta, \mathbf{x}, t) + \epsilon^2 s'_2(\eta, \mathbf{x}, t) + \dots \quad (2.8d)$$

L'approche multi-échelle implique que  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta}$  et  $\nabla = \nabla + \epsilon^{-1} \nabla \Phi \frac{\partial}{\partial \eta}$  dans les équations (2.6). Au premier ordre ces équations deviennent :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \rho_0 \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial \eta} + \nabla \Phi \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} = 0. \quad (2.9b)$$

Ce système nécessite une équation de fermeture pour  $p'_1$ . Au premier ordre l'équation de bilan d'énergie donne

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \frac{\partial s'_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.10)$$

qui conduit à  $s'_1 = 0$ , si bien que l'équation d'état (2.7) donne  $p'_1 = c_0^2 \rho'_1$  où  $c_0 = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_0}$  est la vitesse du son du milieu. En cherchant les solutions non nulles du déterminant du système (2.9) nous obtenons l'équation eikonale :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right)^2 = c_0^2 \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi, \quad (2.11)$$

L'équation eikonale possède deux solutions correspondant à deux modes acoustiques qui se propagent dans deux directions opposées (Pierce, 1994). Ainsi, nous faisons le choix du signe associé à la direction de propagation du front d'onde suivant  $\nabla \Phi$  ( $\Phi$  croissant le long de la propagation) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{w}$  correspond à la vitesse de groupe  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_0 + c_0 \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  étant le vecteur unitaire normal au front défini tel que  $\mathbf{n} = \nabla \Phi / \sqrt{\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi}$ . Cette équation eikonale (2.12) implique que la surface du front d'onde définie par  $\Phi = \text{Cste}$  se déplace à la vitesse de groupe  $\mathbf{w}$ . La pulsation locale et le vecteur d'onde local, par analogie à l'onde plane, s'expriment sous la forme  $\omega(\mathbf{x}, t) = -\partial \Phi / \partial t$  et  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi$ . Ainsi, en considérant ces expressions, on peut réécrire l'équation eikonale sous la forme de l'équation de dispersion :

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

Nous considérons les solutions réelles et complexes de l'équation eikonale (2.12). Les solutions réelles sont associées à l'acoustique géométrique classique dans la zone illuminée, alors que les solutions complexes sont associées aux ondes diffractées dans les zones d'ombre (Kravtsov et Zhu, 2010). Pour les solutions complexes,  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$  et  $t$  sont des paramètres complexes. Le profil de vitesse du son  $c_0(\mathbf{x}, t)$  ainsi que le vent  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t)$  sont étendus dans le plan complexe et doivent être définis par des fonctions holomorphes (Kravtsov, 1967; Thomson, 1997; Chapman et al., 1999).

### 2.2.2 Espace vectoriel pour les rayons complexes

Lorsque l'on s'intéresse aux solutions complexes, il faut faire attention à la définition du produit scalaire ainsi que celle de la norme dans le plan complexe. L'équation eikonale (2.11) et (2.12) introduit un produit scalaire entre deux vecteurs qui peuvent être complexes. Le produit scalaire entre deux vecteurs complexes dans tout espace préhilbertien complexe (espace muni d'un produit scalaire) est défini par le produit scalaire Hermitien, faisant intervenir le complexe conjugué d'un vecteur. Il vérifie ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité triangulaire et sa norme est définie réelle et positive. Néanmoins, la définition de ce produit scalaire (ainsi que celle du produit vectoriel entre deux vecteurs) n'est pas holomorphe, condition indispensable pour l'intégration des rayons. Ainsi, afin de garder les caractéristiques d'une

fonction holomorphe dans le plan complexe et en suivant les travaux de Kravtsov (1967), nous utiliserons le produit scalaire Euclidien défini tel que :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_k a_k b_k, \quad (2.14)$$

avec  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  des vecteurs réels ou complexes de composantes  $a_k$  et  $b_k$  pour  $k = (1, 2, 3)$ . Le produit scalaire défini comme tel implique un espace vectoriel complexe non-normé.

Citons Hasanov (2004) qui considère que l'espace de Minkowski à trois dimensions, qui est un variant de l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions de la théorie de la relativité, est un espace plus adapté dans le cadre des rayons réels et complexes. Cependant la méthodologie proposée n'est valable que pour des milieux homogènes, et la généralisation aux milieux inhomogènes impliquerait l'utilisation d'espaces pseudo-Riemanniens dont les géométries présentent des aspects non intuitifs et où la norme d'un vecteur n'est pas définie. Ainsi, afin de faciliter le problème, par la suite nous utiliserons l'espace Euclidien.

### 2.2.3 Équations des rayons

Après avoir défini le produit scalaire présent dans l'équation eikonale (2.12), nous cherchons les solutions de celle-ci afin d'obtenir les équations des rayons.

#### Équations des rayons dépendant du paramètre curviligne $\tau$ , en milieu stationnaire

L'équation eikonale (2.12) peut être résolue en utilisant la méthode des caractéristiques de Hamilton Jacobi (Courant et Hilbert, 2008). Les rayons sont les caractéristiques de l'équation eikonale (et les bicaractéristiques de l'équation des ondes). Les rayons correspondent aux chemins de propagation de la signature acoustique. Un rayon est défini par sa position  $\mathbf{X}$  et son vecteur d'onde  $\mathbf{K}$ . Ainsi, les caractéristiques de l'équation eikonale (2.12) sous forme Hamiltonienne s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \omega \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}}, \quad (2.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.15b)$$

avec  $\tau$  (en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) la coordonnée curviligne le long des rayons et  $\mathcal{H}$  l'opérateur Hamiltonien. Pour un cas sans advection de l'atmosphère ( $\mathbf{v}_0 = 0$  dans l'équation (2.12)), l'Hamiltonien est défini par  $\mathcal{H} = 1/2(\mathbf{k}^2/\omega^2 - 1/c_0^2)$  (Kravtsov et Zhu, 2010) et satisfait  $\mathcal{H} = 0$ . Nous obtenons donc les équations des rayons en fonction de  $\tau$  sans prise en compte du vent :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \frac{\mathbf{K}}{\omega}, \quad (2.16a)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = \frac{\omega}{2} \nabla \left( \frac{1}{c_0^2} \right). \quad (2.16b)$$

Pour une atmosphère advectée, l'Hamiltonien prend en compte la vitesse du vent, et est défini par  $\mathcal{H} = 1/2(\mathbf{k}^2/\omega^2 - 1/c_0^2(1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0/\omega)^2)$  (Virieux et al., 2004). Ainsi les équations des rayons dépendant du vent s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \frac{\mathbf{K}}{\omega} + \frac{\mathbf{v}_0}{c_0^2} \left( 1 - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} \right), \quad (2.17a)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = \frac{\omega}{2} \nabla \left( \frac{1}{c_0^2} \right) \left( 1 - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{c_0^2} \left( 1 - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} \right) \mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 \quad (2.17b)$$

Ce système correspond donc aux équations des rayons dans un milieu indépendant du temps, où la pulsation  $\omega$  est constante le long des rayons (Candel, 1977). Cette formulation dépendant

du paramètre curviligne  $\tau$  sera utilisée dans le Chapitre 3, sur un cas de source plane, car elle permet une intégration analytique des rayons. Pour la suite de ce chapitre nous nous intéresserons aux équations des rayons dépendant du temps  $t$  décrites ci-après. Notons que, l'abscisse curviligne  $\tau$  est reliée au temps  $t$  par la relation :

$$t_a = t_s + \int_{\tau_s}^{\tau} \frac{d\tau}{(c_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0)^2}. \quad (2.18)$$

Ainsi, en l'absence de vent cette relation se réduit à

$$t_a = t_s + \int_{\tau_s}^{\tau} \frac{d\tau}{c_0^2}. \quad (2.19)$$

### Équations des rayons dépendant du temps $t_a$

Les solutions de l'équation eikonale peuvent être obtenues par application du principe de Fermat, qui est valable aussi bien pour les rayons réels que complexes (Keller, 1962). Le principe de Fermat indique 1) que la fonction eikonale est égale au temps de parcours entre la source et le récepteur suivant un rayon ; et 2) que ce rayon quant à lui, correspond, parmi tous les chemins possibles entre ces deux points, à celui qui rend ce temps de parcours extrémal (en général minimal). Pour une atmosphère advectée avec vent  $\mathbf{v}_0$ , la vitesse de propagation des ondes est égale à la vitesse de groupe  $\mathbf{w} = c_0 \mathbf{n} + \mathbf{v}_0$  (Pierce, 1994), soit :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt_a} = c_0 \mathbf{n} + \mathbf{v}_0. \quad (2.20)$$

Ici,  $t_a$  est le temps de parcours le long du rayon et joue le rôle de paramètre d'intégration curviligne.

En prenant le gradient de l'équation (2.12) et en considérant  $\mathbf{K} = \nabla \Phi$  le long des rayons, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt_a} = -K \nabla c_0 - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{K}. \quad (2.21)$$

Ces deux équations (2.20) et (2.21) forment un système fermé avec  $\mathbf{n} = \mathbf{K}/K$  et  $K = \sqrt{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}}$ . La positivité de  $K$  définit la direction de propagation en accord avec le choix du signe pour l'équation eikonale.

Contrairement à la formulation Hamiltonienne des équations des rayons où la pulsation  $\omega$  est une constante, ici elle peut varier et vérifie la relation de dispersion (2.13). Ainsi, ce système d'équations est valide pour une atmosphère hétérogène et/ou instationnaire, donc dépendante du temps et/ou de l'espace, et en trois dimensions.

Il est important enfin de souligner que ces équations des rayons restent inchangées dans le cas complexe (Stone et al., 2018).

#### 2.2.4 Conditions initiales des rayons

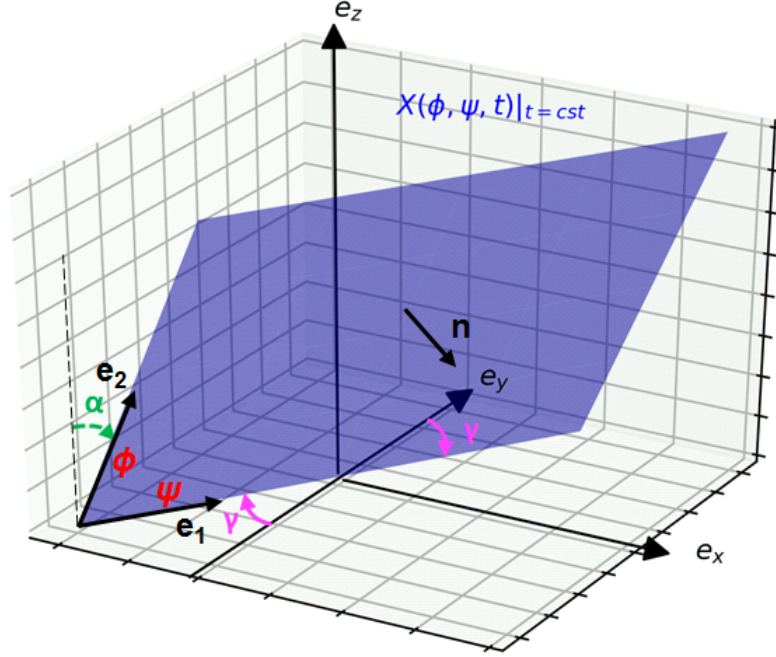
D'une manière générale, les rayons sont initialisés par 1) la position initiale du front d'onde  $\mathbf{x}_s$  et par 2) le vecteur d'onde initial  $\mathbf{k}_s$ . Le vecteur d'onde initial est généralement défini à partir du vecteur normal au front d'onde à la source  $\mathbf{n}_s$  et de la pulsation  $\omega$ , cette dernière n'ayant pas d'influence sur la trajectoire des rayons. Ainsi, à la source :

$$\mathbf{X}(\phi, \psi, t_s) = \mathbf{x}_s, \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{K}(\phi, \psi, t_s) = k_s \mathbf{n}_s(\phi, \psi), \quad (2.22b)$$

avec

$$k_s = \frac{\omega}{c_0(\mathbf{x}_s, t_s) + \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_s, t_s)}. \quad (2.23)$$


 FIGURE 2.1 – Conditions initiales pour une onde plane paramétrée par les distances  $\phi$  et  $\psi$ .

Les paramètres  $\phi$  et  $\psi$  sont les paramètres d'émission des rayons et définissent généralement la géométrie initiale du front d'onde (surface courbe). A trois dimensions ils sont au nombre de 2, définissant ainsi une surface. A deux dimensions il n'y a qu'un seul paramètre d'émission (noté  $\phi$ ) définissant une ligne. En général, ces paramètres sont spécifiques à la source considérée.

Ces paramètres d'émission  $\phi$  et  $\psi$  permettent de définir les éléments géodésiques  $\mathbf{X}_\phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi}$  et  $\mathbf{K}_\phi = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \phi}$  (idem suivant  $\psi$ ), qui vérifient les équations suivantes (Scott et al., 2017) :

$$\frac{dX_{\phi_i}}{dt_a} = \left( \frac{\partial c_0}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial v_{0_i}}{\partial x_j} \right) X_{\phi_j} + c_0 (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{K_{\phi_j}}{K}, \quad (2.24a)$$

$$\frac{dK_{\phi_i}}{dt_a} = - \left( \frac{\partial c_0}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial v_{0_j}}{\partial x_i} \right) K_{\phi_j} - \left( \frac{\partial^2 c_0}{\partial x_i \partial x_k} n_j + \frac{\partial^2 v_{0_j}}{\partial x_i \partial x_k} \right) K_j X_{\phi_k}. \quad (2.24b)$$

Le paramètre  $\psi$  vérifie ces mêmes équations. Les équations des géodésiques (2.24) sont intégrées avec les équations des rayons (2.20), (2.21) et nécessitent la connaissance des conditions initiales. Par ailleurs, l'intégration des éléments géodésiques est nécessaire afin de pouvoir calculer la section du tube de rayons (partie 2.3.3).

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les paramètres d'émission et les conditions initiales pour quelques types de sources qui seront étudiées dans les chapitres suivants.

### Source plane

Le front d'onde de ce type de source est un plan. L'orientation du plan est caractérisée par sa normale  $\mathbf{n}$ , soit par deux angles : l'angle d'inclinaison  $\alpha$  par rapport à l'axe vertical  $\mathbf{e}_z$  et l'azimut  $\gamma$  mesurant sa direction par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_y$  dans le plan horizontal ( $x, y$ ) (voir FIGURE 2.1).

La position d'un point d'émission dans ce plan est paramétré (par exemple) par les deux coordonnées  $\phi$  et  $\psi$  sur le plan, selon deux directions orthogonales. Si l'on note  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  les deux vecteurs unitaires orthogonaux dans le plan du front d'onde, la position d'émission est alors :

$$\mathbf{X}_s(\phi, \psi) = \psi \mathbf{e}_1 + \phi \mathbf{e}_2, \quad (2.25)$$

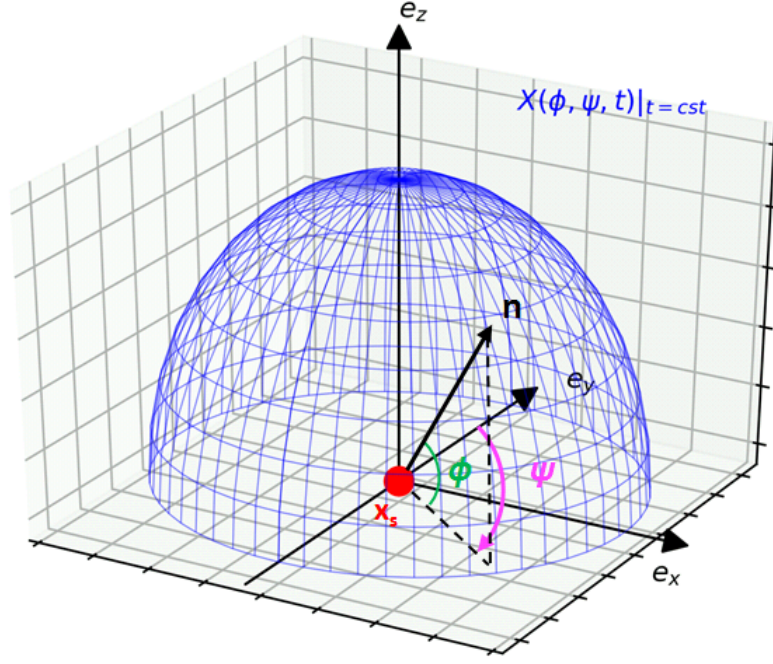


FIGURE 2.2 – Conditions initiales pour une source ponctuelle paramétrée par l'angle d'élévation  $\phi$  et l'azimut  $\psi$ .

avec :

$$\mathbf{e}_1 = \sin \gamma \mathbf{e}_x + \cos \gamma \mathbf{e}_y, \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin \alpha \cos \gamma \mathbf{e}_x - \sin \alpha \sin \gamma \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z. \quad (2.26b)$$

Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques s'en déduisent :

$$\mathbf{X}(\phi, \psi, t_s) = \psi \mathbf{e}_1 + \phi \mathbf{e}_2, \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{K}(\phi, \psi, t_s) = k_s (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2), \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{X}_\phi(\phi, \psi, t_s) = \mathbf{e}_2, \quad (2.27c)$$

$$\mathbf{K}_\phi(\phi, \psi, t_s) = 0, \quad (2.27d)$$

$$\mathbf{X}_\psi(\phi, \psi, t_s) = \mathbf{e}_1, \quad (2.27e)$$

$$\mathbf{K}_\psi(\phi, \psi, t_s) = 0. \quad (2.27f)$$

En deux dimensions, nous considérerons une projection dans le plan  $(x, z)$  avec  $\gamma = 0$ . Ainsi, seule la distance  $\phi$  est utilisée et  $\mathbf{X}_\psi = \mathbf{e}_y$ . Dans le cas d'une onde plane ce sont les coordonnées d'émission  $\phi$ , et éventuellement  $\psi$  qui deviendront complexes. Ainsi  $\mathbf{X}$  sera complexe et par conséquent la norme de  $\mathbf{K}$  aussi via la relation (2.21). Les angles  $\alpha$  et  $\gamma$  restent quant à eux fixes et réels, ainsi que les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ .

### Source ponctuelle fixe

Le front d'onde généré par une source ponctuelle est une sphère paramétrée par deux angles, qui sont les paramètres d'émission  $\phi$  et  $\psi$ , ainsi que par le temps à la source  $t_s$ . On choisit ici  $\phi$  comme l'angle d'élévation par rapport à l'horizontale et  $\psi$  comme l'azimut, ou angle dans le plan horizontal par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_y$  (voir FIGURE 2.2). Le point source est repéré par sa position  $\mathbf{x}_s$ . Le front d'onde est défini par la normale au front qui dépend des angles

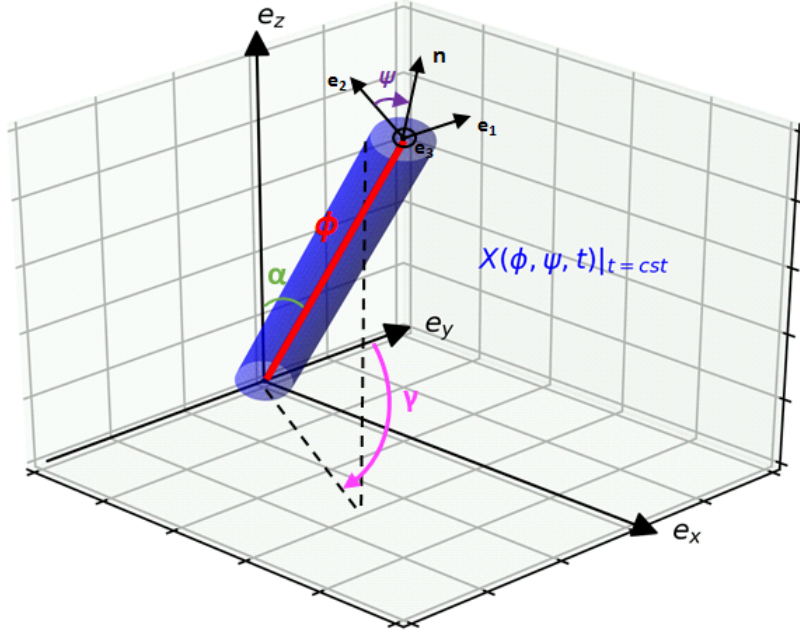


FIGURE 2.3 – Conditions initiales pour une source cylindrique paramétrée par la position d'émission  $\phi$  et l'angle d'émission  $\psi$ .

d'émission  $\phi$  et  $\psi$ . Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques sont :

$$\mathbf{X}(\phi, \psi, t_s) = \mathbf{x}_s, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{K}(\phi, \psi, t_s) = k_s(\cos \phi \sin \psi \mathbf{e}_x - \cos \phi \cos \psi \mathbf{e}_y + \sin \phi \mathbf{e}_z), \quad (2.28b)$$

$$\mathbf{X}_\phi(\phi, \psi, t_s) = 0, \quad (2.28c)$$

$$\mathbf{K}_\phi(\phi, \psi, t_s) = k_s(-\sin \phi \sin \psi \mathbf{e}_x + \sin \phi \cos \psi \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_z), \quad (2.28d)$$

$$\mathbf{X}_\psi(\phi, \psi, t_s) = 0, \quad (2.28e)$$

$$\mathbf{K}_\psi(\phi, \psi, t_s) = k_s \cos \phi (\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y), \quad (2.28f)$$

où l'on considère  $k_s = 1$  dans la suite car ce terme n'intervient pas dans le calcul de l'amplitude.

En deux dimensions, nous considérerons une projection dans le plan  $(x, z)$  avec  $\psi = \pi/2$ . Ainsi, il ne restera que le paramètre  $\phi$ . Les paramètres variables dans le cas d'une source ponctuelle sont les angles d'émission  $\phi$  et  $\psi$  qui deviendront complexes.  $\mathbf{X}$  reste réel puisqu'il est constant et  $\mathbf{K}$  sera complexe.

### Source cylindrique

Une source hypersonique, telle qu'une météoroïde, génère un bang supersonique (choc aérodynamique) localisé sur un cône, appelé cône de Mach (Pierce, 1994). Ce cône forme donc le front d'onde sur lequel les propriétés du choc évoluent lentement, ainsi il s'apparente à une onde localement plane. Le bang sonique est émis le long de la trajectoire dans la direction normale au cône de Mach (Whitham et Fowler, 1975; Coulouvrat, 2002). L'équation eikonale (2.12) et l'équation du front  $\Phi(\mathbf{x}_s, t_s) = 0$  impliquent que la direction de l'émission satisfait localement la relation du cône de Mach  $(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}_s = c_0$  avec  $\mathbf{v}_s = d\mathbf{x}_s/dt$  la vitesse de la source. L'angle entre la direction de la source et le cône de Mach est égal à  $\arcsin(1/M)$ ,  $M$  étant le nombre de Mach. Afin de simplifier le problème, nous considérons que la source a une vitesse infinie. Les vitesses d'entrée des météoroïdes dans l'atmosphère sont en effet très grandes, entre 11,2 et 17 km/s soit des Mach de l'ordre de 40 et le météoroïde ne décélère que

dans les basses couches suffisamment denses de l'atmosphère. L'angle du cône de Mach est alors quasi nul (inférieur à  $1,5^\circ$ ). Ainsi, la source s'apparente à une source cylindrique définie par deux angles :  $\alpha$ , l'angle de la trajectoire par rapport à la verticale et  $\gamma$ , l'azimut de la trajectoire par rapport à l'axe  $y$ . Le point d'émission le long de la trajectoire, supposée rectiligne, est repéré par le paramètre  $\phi$ . L'émission se fait suivant le vecteur normal au cylindre défini par l'angle  $\psi$  dans le repère local  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  (voir FIGURE 2.3) :

$$\mathbf{n}_s(\psi) = \sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 \quad (2.29)$$

avec :

$$\mathbf{e}_1 = -\cos \gamma \mathbf{e}_x + \sin \gamma \mathbf{e}_y, \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{e}_2 = -\cos \alpha \sin \gamma \mathbf{e}_x - \cos \alpha \cos \gamma \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z, \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \alpha \sin \gamma \mathbf{e}_x + \sin \alpha \cos \gamma \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z. \quad (2.30c)$$

Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques sont alors :

$$\mathbf{X}(\phi, \psi, t_s) = \phi \mathbf{e}_3, \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{K}(\phi, \psi, t_s) = k_s(\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2), \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{X}_\phi(\phi, \psi, t_s) = \mathbf{e}_3, \quad (2.31c)$$

$$\mathbf{K}_\phi(\phi, \psi, t_s) = 0, \quad (2.31d)$$

$$\mathbf{X}_\psi(\phi, \psi, t_s) = 0, \quad (2.31e)$$

$$\mathbf{K}_\psi(\phi, \psi, t_s) = k_s(\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2), \quad (2.31f)$$

avec  $t_s$  constant. Par ailleurs,  $\phi$  peut aussi définir le temps d'émission à la source  $t_s(\phi)$  dans le cas d'une source mobile.

Les paramètres variables dans le cas d'une source cylindrique sont la position d'émission le long du cylindre et l'angle d'émission autour du cylindre, ce sont donc ces paramètres  $\phi$  et  $\psi$  qui deviendront complexes. Ainsi  $\mathbf{X}_s$  et  $\mathbf{K}_s$  seront tout deux complexes.

Les conditions initiales décrites ci-dessus, pour les trois type de sources, restent les mêmes dans le cadre complexe. Par ailleurs, les rayons complexes prennent leurs valeurs dans un espace à six dimensions et sont paramétrés dans un espace complexe de même dimension défini par :  $\phi = \text{Re}(\phi) + i\text{Im}(\phi)$ ,  $\psi = \text{Re}(\psi) + i\text{Im}(\psi)$ ,  $t = \text{Re}(t) + i\text{Im}(t)$  (Felsen, 1984).

### 2.2.5 Rayons complexes

L'intégration des équations des rayons à partir des conditions initiales permet d'obtenir les rayons réels et complexes. Nous illustrons dans cette section les rayons complexes avec un cas analytique simplifié d'une source ponctuelle en présence d'un gradient de vitesse du son positif (atmosphère réfractante vers le haut). Ce cas induit des rayons réels réfractés et une caustique pli représentés sur la FIGURE 2.4. Les rayons sont calculés analytiquement à partir des équations (2.16). Les rayons réels sont obtenus en faisant varier l'angle d'émission  $\phi$  entre  $0$  et  $90^\circ$ . Le rayon complexe est obtenu en fixant la valeur  $\text{Re}(\phi)$  de l'angle d'émission et en y ajoutant une partie imaginaire  $\text{Im}(\phi)$  variable. Le Chapitre 3 sera consacré à la présentation d'un cas analytique qui permettra de comprendre comment est obtenue cette perturbation complexe.

Dans un espace complexe à deux (respectivement trois) dimensions  $\mathbf{x} = (x, z)$  (resp.  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ), la variété associée est de dimension quatre (resp. six). Les rayons complexes sont des hyperplans, de dimension deux (resp. quatre), de cet espace complexe décrits par les coordonnées  $\mathbf{X}(\phi, t_a)|_\phi$  (resp.  $\mathbf{X}(\phi, \psi, t_a)|_{\phi, \psi}$ ), où  $t_a$  est le temps à valeurs complexes. Un exemple de rayon complexe est représenté en couleur sur la FIGURE 2.4b, projeté dans le plan réel  $(x, z)$ . Les fronts d'ondes complexes sont quant à eux des hypersurfaces définies par



$\mathbf{X}(\phi, t_a)|_{t_a} = \text{Cste}$  (resp.  $\mathbf{X}(\phi, \psi, t_a)|_{t_a} = \text{Cste}$ ). Il est important de préciser que pour les rayons complexes, seules les positions réelles le long des rayons sont physiques, contrairement aux rayons réels où tous les points sont réels. Cette position réelle est atteinte par ce que l'on appelle un *sous-rayon complexe* appartenant au rayon complexe (surface), sous-rayon complexe dont la projection dans le plan réel est représentée en noir sur la FIGURE 2.4b. Nous verrons dans le Chapitre 4 que ce sous-rayon est en réalité le chemin d'intégration entre la source et le point réel (ou observateur) dans la zone d'ombre. Cependant, comme analysé dans la partie 2.2.5 ci-après, nous pouvons dire que n'importe quel sous-rayon appartenant à la surface et reliant ces deux points, est un chemin d'intégration possible. Dans un souci de simplification, nous appellerons par abus de langage **rayon complexe** tout sous-rayon reliant la source à un récepteur.

La difficulté principale de la méthode du tracé de rayons complexes est ainsi de déterminer pour un point physique, considéré comme récepteur de position réelle  $\mathbf{x}_r$ , le rayon complexe (c'est-à-dire le sous-rayon complexe) issu de la source et atteignant exactement ce récepteur. Un exemple en est donné sur la FIGURE 2.4b où le point « d'arrivée » du sous-rayon dans la zone d'ombre est réel :  $\text{Im}(\mathbf{x}_r) = 0$ . La détermination des paramètres d'émission des rayons  $(\phi, t)$  associés à un récepteur réel est un *problème aux conditions limites* (Press et al., 1996; Stone et al., 2018). Ce problème est résolu de manière analytique dans le Chapitre 3 et de manière numérique dans le Chapitre 4.

Par ailleurs, en un récepteur réel (par exemple dans une zone d'ombre), il y a toujours deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. Une seule de ces deux solutions est retenue afin de garantir la décroissance exponentielle du champ de pression dans la zone d'ombre (Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Kravtsov et Orlov, 1983).

Dans cette section, un cas de caustique pli a été illustré. Cependant, il est possible d'obtenir des rayons complexes pour n'importe quelle géométrie de la caustique. Un cas de front parabolique, impliquant une caustique cuspidée est illustré en Annexe A.

La connaissance du point réel dans la zone d'ombre permet à partir des rayons d'obtenir le temps d'arrivée de l'onde ainsi que sa vitesse apparente. La seule connaissance du rayon ne permet cependant pas de calculer l'amplitude du champ de pression. Pour cela il faut s'intéresser au second ordre du développement multi-échelles présenté dans la partie suivante.

### Autres chemins d'intégration

Afin de présenter l'intégration par d'autres chemin dans le plan complexe, nous considérons cette même source ponctuelle. Le chemin d'intégration choisi est présenté en noir sur la FIGURE 2.5. Il s'agit de la diagonale parcourant le plan  $(\text{Im}(t_a), \text{Re}(t_a))$  entre la source en  $t_s = 0\text{s}$  et le récepteur  $t_r = 5 + i3,2\text{s}$ . Nous présentons ici, trois autres chemins d'intégration parmi une infinité d'autres chemins d'intégration possibles sur la surface entre la source et le récepteur. Ces chemins sont définis par deux parties et paramétrés par  $\sigma$  allant 0 à la source et 1 au récepteur.

Bleu :

$$t_a(\sigma) = \begin{cases} t_s + 2\sigma\text{Re}(t_r - t_s) & \sigma \in [0, 1/2], \\ t_s + \text{Re}(t_r - t_s) + i(2\sigma - 1)\text{Im}(t_r - t_s) & \sigma \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (2.32)$$

Rouge :

$$t_a(\sigma) = \begin{cases} t_s + 2i\sigma\text{Im}(t_r - t_s) & \sigma \in [0, 1/2], \\ t_s + i\text{Im}(t_r - t_s) + (2\sigma - 1)\text{Re}(t_r - t_s) & \sigma \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (2.33)$$

Jaune :

$$t_a(\sigma) = \begin{cases} t_s + 2\sigma[\text{Re}(t_r - t_s)/2 + i\text{Im}(t_r - t_s)] & \sigma \in [0, 1/2], \\ t_s + \text{Re}(t_r - t_s)/2 + i\text{Im}(t_r - t_s) + (\sigma - 1/2)\text{Re}(t_r - t_s) & \sigma \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (2.34)$$

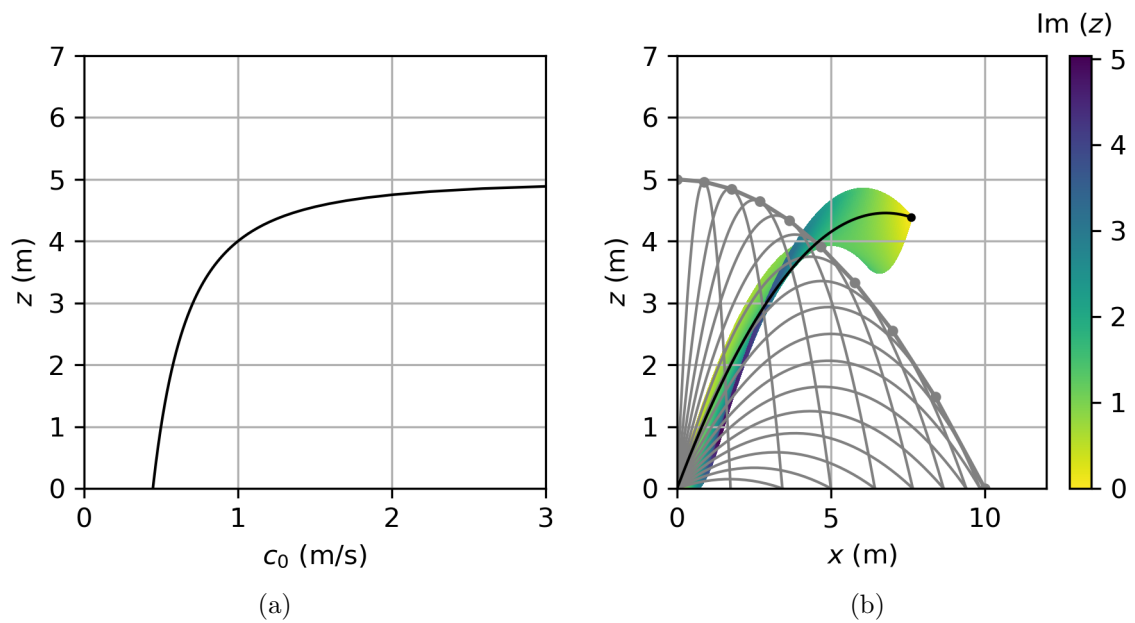


FIGURE 2.4 – (a) Vitesse du son analytique  $c_0(z) = \frac{1}{\sqrt{5-z}}$  avec un gradient positif qui implique (b) pour un cas de source ponctuelle au sol une caustique pli (points gris) formée par les rayons réels (—). L'ensemble des lignes en couleur représente la projection dans le plan réel d'un seul rayon complexe pénétrant en zone d'ombre. La courbe noire est la projection dans le plan réel du sous-rayon complexe atteignant le récepteur réel (point noir) dans la zone d'ombre

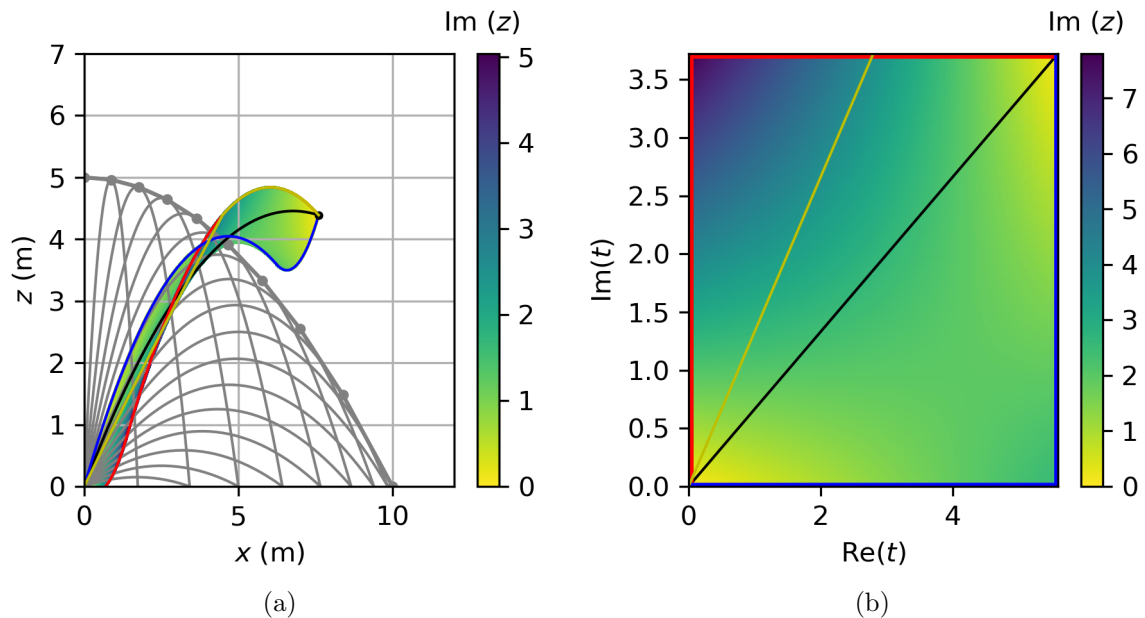


FIGURE 2.5 – (a) Cas identique à celui de la FIGURE 2.4 avec différents chemins d'intégration représenté sur la figure (b) dans le plan de  $t$ . Voir le texte pour la définition précise des chemins d'intégration de différentes couleurs.

et respectent la condition  $t_a(1) = t_r$ . Ainsi, peu importe le chemin emprunté, nous arrivons au point récepteur voulu dans la zone d'ombre. Nous présenterons l'intégration numérique suivant différents chemins d'intégration pour un cas de profil atmosphérique plus compliqué dans la partie 4.3.2.

## 2.3 Amplitude du champ

Après avoir défini les équations des rayons 2.20 et 2.21 ainsi que les équations des géodésiques (2.24), nous pouvons nous intéresser au calcul de l'amplitude du champ de pression dans tout le domaine. Pour cela nous commençons par définir la conservation de l'action d'onde qui permet ensuite d'aboutir à la détermination de l'amplitude du champ de pression.

### 2.3.1 Conservation de l'action de l'onde

Comme pour l'équation eikonale il existe deux approches qui permettent d'aboutir à l'équation de transport (ou équation de conservation de l'action de l'onde). A partir de l'ansatz WKB appliqué à l'équation de Helmholtz, qui en ordre  $k_0$  donne l'équation de transport ou en utilisant les équations d'Euler linéarisées. Le développement asymptotique au deuxième ordre permet d'établir une équation décrivant le comportement de la perturbation de masse volumique. Ainsi, nous partons des équations sous forme perturbative (2.6) et nous utilisons le développement asymptotique (2.8).

#### Développement asymptotique au 2ème ordre

L'analyse multi-échelle au deuxième ordre permet d'obtenir une équation qui décrit le comportement de la perturbation de la masse volumique  $\rho'_1$ . Ainsi en substituant les développements (2.8) dans les équations (2.6) nous obtenons le système suivant pour le deuxième ordre :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \rho_0 |\nabla \Phi| \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'_2}{\partial \eta} = B_1, \quad (2.35a)$$

$$\left( \frac{\rho_0}{c_0} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'_2}{\partial \eta} + c_0 |\nabla \Phi| \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} = B_2, \quad (2.35b)$$

avec  $B_1$  et  $B_2$  :

$$B_1 = -\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho'_1 - \rho_0 \nabla \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \right) - \left( \frac{c_0}{\rho_0} \mathbf{n} \cdot \nabla \rho_0 + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right) \rho'_1, \quad (2.36a)$$

$$B_2 = -\left( \frac{\rho_0}{c_0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) - \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla (c_0^2 \rho'_1)}{c_0} - \rho'_1 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla p_0}{\rho_0 c_0} \rho'_1. \quad (2.36b)$$

Les relations de polarisation telles que :

$$\begin{aligned} p'_1 &= c_0^2 \rho'_1, \\ \mathbf{v}'_1 &= \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \end{aligned}$$

ont été utilisées afin de déterminer les équations en fonction de  $\rho'_1$  seulement.

En prenant la somme des équations (2.35a) et (2.35b) on obtient :

$$c_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi \right) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'_2}{\partial \eta} = B_1 + B_2, \quad (2.38)$$

avec les termes entre parenthèse du membre de gauche égaux à l'équation eikonale (2.12) donc nuls. Cela implique la condition suivante pour les termes de droite :

$$B_1 + B_2 = 0. \quad (2.39)$$

Cette condition permet de déduire la relation suivante (voir Annexe B) :

$$\left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^{1/2} \frac{d}{dt} \left( \left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \rho_1' \right) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{w}) \rho_1' = 0. \quad (2.40)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation de conservation de l'action de l'onde :

$$\frac{dA}{dt} + A \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (2.41)$$

avec

$$A = \frac{p_1'^2}{K c_0^3 \rho_0}. \quad (2.42)$$

En suivant la démarche de l'annexe C de Scott et al. (2017) on montre que

$$\frac{K}{\nu} \frac{d}{dt} \left( \frac{\nu}{k} \right) = \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (2.43)$$

qui permet de déduire

$$\frac{d}{dt} \left( A \frac{\nu}{K} \right) = 0. \quad (2.44)$$

Cette équation traduit le fait que le produit de l'action de l'onde  $A$  par le volume convecté  $\nu/K$  se conserve le long des rayons. Le paramètre  $A \frac{\nu}{K}$  correspond à l'invariant de Blokhintzev (Blokhintzev, 1946).

### 2.3.2 Solution complexe du champ de pression

Le long d'un rayon, à la position  $\mathbf{X}(t_a)$ , la surpression acoustique est définie à partir de (2.40), telle que :

$$p'(\mathbf{X}(t_a), t) = K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{\nu} \right)^{1/2} u(\Phi(\mathbf{X}(t_a), t), t_a), \quad (2.45)$$

où nous rappelons que  $K$  est le nombre d'onde et  $\nu$  la section du tube de rayon. Les quantités  $K$  et  $\nu$  sont évaluées le long des rayons au temps  $t_a$  et  $c_0$  et  $\rho_0$  à la position correspondante  $\mathbf{X}(t_a)$  le long du rayon. On peut montrer que l'équation (2.46), définit la section infinitésimale du tube de rayon  $\nu$  :

$$\nu = (\mathbf{X}_\phi \wedge \mathbf{X}_\psi) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.46)$$

où  $\mathbf{X}_\phi$  et  $\mathbf{X}_\psi$  sont les géodésiques calculées à partir des équations (2.24).

Étant en propagation linéaire en milieu non-absorbant, nous considérons que la forme d'onde normalisée  $u(\xi, t_a)$  est conservée le long des rayons :

$$\frac{\partial u}{\partial t_a}(\xi, t_a) = 0, \quad (2.47)$$

où  $\xi = \Phi(\mathbf{x}, t)$  est la distance au front d'onde qui est donc nulle sur le front d'onde à la position  $\mathbf{X}(t_a)$  et au temps  $t_a$ , le front d'onde étant défini par l'équation  $\Phi(\mathbf{X}(t_a), t_a) = 0$ . Le développement de Taylor de  $\Phi$  en  $t_a$  nous permet d'obtenir la distance au front d'onde :

$$\xi = \Phi(\mathbf{X}(t_a), t) \approx \Phi(\mathbf{X}(t_a), t_a) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t - t_a) + O((t - t_a)^2) = \omega(t_a - t) + \dots,$$

avec la pulsation  $\omega = \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}$ .

Il est important de souligner que pour un rayon complexe arrivant en un point  $\mathbf{X}(t_a)$  situé en zone d'ombre,  $t_a$  est à valeur complexe. Nous avons donc  $\xi$  qui se décompose en une partie réelle et une partie imaginaire  $\xi = \text{Re}(\xi) + i\text{Im}(\xi)$  avec  $\text{Re}(\xi) = \text{Re}(\omega(t_a - t))$  et

$\text{Im}(\xi) = \text{Im}(\omega t_a)$ ,  $t$  est le temps absolu, réel et positif. En substituant cette approximation de  $\xi$  dans l'équation (2.45) et en considérant la conservation de  $u$  le long des rayons (2.47), il vient :

$$p'(\mathbf{X}(t_a), t) = K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{\nu} \right)^{1/2} u(\xi). \quad (2.48)$$

La forme d'onde  $u(\xi)$  est prise sous forme d'une transformée de Fourier :

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(q) e^{iq\xi} dq. \quad (2.49)$$

On étend  $u(\xi)$  aux valeurs complexes de la phase  $\xi$  au moyen de la transformée suivante :

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(q) e^{iq\text{Re}(\xi)} e^{-|q|\text{Im}(\xi)} dq, \quad (2.50)$$

où la fonction  $\tilde{u}(q)$  est obtenue à partir de la transformée de Fourier inverse :

$$\tilde{u}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) e^{-iq\xi} d\xi. \quad (2.51)$$

On note  $\tilde{\omega} = q\omega/2\pi$ , la fréquence physique et  $k = Kq$  la longueur d'onde physique. Nous remarquons que pour préserver la décroissance exponentielle du champ acoustique dans la zone d'ombre lorsque  $q < 0$  dans l'équation (2.50), nous devons prendre en compte les complexes conjugués de chaque paramètre  $t$ ,  $\xi$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\nu$ , ce qui revient à sélectionner le rayon complexe conjugué. Pour les rayons réels, c'est à dire lorsque  $\xi$  est réel, nous retrouvons la transformée de Fourier classique (2.49) de  $\tilde{u}(q)$ . Il est important de remarquer que la symétrie Hermitienne ( $u(-\xi) = u(\xi)^*$ ) de l'argument  $\tilde{u}(q) e^{-|q|\text{Im}(\xi)}$  implique que la forme d'onde  $u(\xi)$  reste réelle.

Finalement, en prenant en compte la transformée de Fourier dans l'équation (2.48), nous obtenons la surpression acoustique pour chaque rayon :

$$p'(\mathbf{X}(t_a), t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{\nu} \right)^{1/2} \tilde{u}(q) e^{iq\text{Re}(\xi)} e^{-|q|\text{Im}(\xi)} dq. \quad (2.52)$$

avec  $\tilde{u}(q)$  calculé à la source.

### 2.3.3 Section du tube de rayon et caustiques

Dans l'équation (2.52) définissant la surpression acoustique, la quantité  $\sqrt{\nu}$  doit être analysée dans le cas des rayons réels ou complexes. Suivant les rayons réels, une caustique a lieu lorsque  $\nu = 0$  impliquant une amplitude infinie et un changement de signe de  $\nu$  (Pierce, 1994; Jensen et al., 1995). Afin de comprendre au mieux le comportement de  $\nu$  nous utilisons la notation complexe suivante :

$$\nu = |\nu| e^{i\theta}, \quad (2.53)$$

avec  $\theta = \arg(\nu)$ . Dans le cas des rayons réels il existe deux configurations à la source : 1) la section du tube de rayon est positive et 2) la section du tube de rayon est négative. Ainsi  $\theta(t_s) = 0$  ou  $\pi$ . Cette valeur à la source est notée  $\theta_e$ . Afin de compter le nombre de caustiques tangentées depuis la source le long d'un rayon, on définit ce nombre de caustiques, noté  $\text{kmah}$  (du nom de Keller, Maslov, Arnold et Hormander), tel que :

$$\text{kmah}\pi = \theta - \theta_e, \quad (2.54)$$

où l'on soustrait donc à  $\theta$ , le déphasage à l'émission, s'il existe. Il reste maintenant à choisir le signe de  $\theta$ . Nous avons vu dans le chapitre 1, qu'en régime linéaire, la forme d'onde ayant

tangenté une caustique  $\tilde{u}_{\text{out}}(q)$  est la transformée de Hilbert de celle de l'onde directe  $\tilde{u}_{\text{in}}(q)$ , tel que (Kravtsov et Orlov, 1983) :

$$\tilde{u}_{\text{out}}(q) = -i \operatorname{sgn}(q) \tilde{u}_{\text{in}}(q). \quad (2.55)$$

La présence de  $-i$  impose donc le signe de  $\theta$  positif à chaque passage de caustique.

En suivant les rayons complexes, la notion de caustique n'existe pas et  $\operatorname{Re}(\nu)$  ne change pas de signe. En revanche, sa partie imaginaire évolue dans le plan complexe menant donc à un angle de déphasage  $\theta$ , qui n'évolue pas par « palier » de  $\pi$  comme le long des rayons réels, mais de manière continue (un exemple de plusieurs caustiques sera présenté dans le chapitre 5, avec l'évolution de l'angle  $\theta$  le long des rayons visible sur la FIGURE 5.27).

En utilisant donc ces notations complexes, avec  $\nu$  au dénominateur dans la relation (2.52), nous obtenons pour les rayons réels un déphasage de  $-\pi/2$  au passage de chaque caustique, en accord avec le résultat attendu (Scott et al., 2017). Notons que dans le cas de la réflexion au sol des rayons,  $\operatorname{Re}(\nu)$  change de signe mais il n'y a pas de déphasage associé (Jensen et al., 1995).

Ainsi, l'équation définissant la surpression acoustique (2.52) peut être réécrite sous la forme :

$$p'(\mathbf{X}(t_a), t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{|\nu|} \right)^{1/2} \tilde{u}(q) e^{-i \operatorname{sgn}(q) \theta / 2} e^{-|q| \operatorname{Im}(\omega t_a)} e^{iq \operatorname{Re}(\omega(t_a - t))} dq. \quad (2.56)$$

Il est important de noter que le choix du signe de  $\theta$  est fait en fonction du choix du signe de  $q$ , dû au terme  $\exp(-i \operatorname{sgn}(q) \theta / 2)$  en respectant la relation (2.55). Pour les milieux indépendants du temps  $\omega$  est constant, on retrouve donc un comportement classique dans la zone d'ombre avec l'argument  $\tilde{u}(q) e^{-|q| \operatorname{Im}(\omega t_a)}$ .

Si plusieurs rayons arrivent en un récepteur, toutes les contributions des rayons s'additionnent. Il est possible qu'en un récepteur, des rayons réels ainsi que des rayons complexes arrivent, par exemple au voisinage d'une caustique cuspidée ou en présence de rayons complexes réfléchis (voir chapitre 3).

En milieu indépendant du temps,  $\omega$  est réelle et constante. Dans le domaine fréquentiel  $q\omega$  est alors remplacée par la fréquence physique  $\tilde{\omega}$  dans l'équation (2.56). Ainsi, la surpression acoustique totale en un récepteur  $\mathbf{x}_r$  est :

$$\tilde{p}'(\mathbf{x}_r, \tilde{\omega}) = \sum_j K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{|\nu_j|} \right)^{1/2} \tilde{u} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right) e^{-i \operatorname{sgn}(\tilde{\omega}) \theta_j / 2} e^{-|\tilde{\omega}| \operatorname{Im}(t_{a_j})} e^{i \tilde{\omega} \operatorname{Re}(t_{a_j} - t)}, \quad (2.57)$$

avec  $j$  indiquant chaque rayon arrivant au récepteur considéré.

Afin d'étudier le voisinage de la caustique, lorsque  $\nu \rightarrow 0$ , la méthode des rayons complexes peut être enrichie avec la méthode de Maslov (Kravtsov et Zhu, 2010) ou avec la théorie uniforme asymptotique au niveau de la caustique qui nécessite la connaissance de la géométrie de la caustique (Ludwig, 1966) et qui sera décrite dans la section 2.3.6.

### 2.3.4 Champ de pression à la source

A la source, au temps  $t_s$ , la section du tube de rayon  $\nu(t_a = t_s)$  peut être nulle. C'est le cas par exemple pour les sources ponctuelles ou cylindriques. L'équation de conservation de l'action de l'onde le long d'un rayon donné doit donc être initialisée à un temps d'émission  $t_e$  légèrement décalé par rapport à la source afin d'éviter cette singularité. Ainsi, pour chaque rayon la forme d'onde normalisée  $u(\xi, t_e)$  et la section du tube de rayon  $\nu_e$  sont définies au temps d'émission  $t_e$  suffisamment proche de la source pour pouvoir supposer une propagation en milieu homogène pendant le court intervalle de temps  $t_e - t_s$  entre la source et l'émission. Au temps d'émission  $t_e$ ,  $\nu$  n'est pas nul et  $p'(\mathbf{X}(t_e), t)$  est supposé connu, donné par un

modèle en milieu homogène sans vent. Ainsi,  $\nu$  à la source utilisé pour normaliser  $u$  proche de la source est celui homogène sans vent.

### Onde sphérique

La section du tube de rayon obtenue en milieu homogène pour une source sphérique est  $\nu(t_a) = (c_0 t_a)^2 \cos \phi$ . Cela implique que  $u$  est normalisé par

$$u_\star(t_a) = \frac{c_0 t_a}{K^2} \left( \frac{1}{\rho_0 c_0^3} \right)^{1/2} p'_\star. \quad (2.58)$$

Pour une onde sphérique, l'initialisation peut se faire à 1 mètre de la source tel que  $c_0 t_a = 1$  m et  $p'_\star(1 \text{ m}, t_a) = 1$  Pa .

### Onde cylindrique

Pour une onde cylindrique, l'initialisation se fait à une distance égale à  $5R_0$  où  $R_0 = \sqrt{E_0/p_0}$  est le rayon caractéristique de l'onde de souffle générée par la source (Gainville et al., 2017).  $E_0$  (J/m) est l'énergie de la source (linéique dans le cas de l'onde cylindrique). La condition initiale est donc définie au temps d'émission  $t_a = 5R_0/c_0(\mathbf{x}_s, t_s)$ . La section du tube de rayon obtenue en milieu homogène pour une source cylindrique est  $\nu(t_a) = c_0 t_a / K$ . Cela implique que  $u$  est normalisé par

$$u_\star(t_a) = \frac{p'_\star}{K} \left( \frac{t_a}{K \rho_0 c_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.59)$$

## 2.3.5 Amplitude dans la zone d'ombre

Afin d'illustrer le calcul de l'amplitude dans la zone d'ombre nous considérons le cas de la source ponctuelle présentée sur la FIGURE 2.4. C'est un cas analytique qui ne représente aucun cas réaliste et l'amplitude à la source est choisie de manière arbitraire. Pour le calcul de l'amplitude nous choisissons un rayon réel (représenté en bleu sur la FIGURE 2.6a) pour un angle d'émission  $\phi = 60^\circ$ . Ce rayon est ensuite « prolongé » dans la zone d'ombre. Ce prolongement est fait en ajoutant une perturbation complexe à cet angle. Plus cette perturbation complexe est élevée, plus le rayon pénétrera profondément dans la zone d'ombre. Dans la figure, nous avons représenté en noir les rayons complexes obtenus de la sorte, projetés dans le plan réel et atteignant des récepteurs réels (dernier point de chaque sous rayon) de plus en plus loin. L'ensemble des arrivées dans la zone d'ombre pour  $\text{Re}(\phi) = 60^\circ$  sont représentées en rouge. Tous les points sur la courbe rouge sont physiquement admissibles, et l'on peut donc y calculer l'amplitude du champ de pression. Ainsi, l'amplitude pour  $\text{Re}(\phi) = 60^\circ$  est calculée (FIGURE 2.6b) le long du rayon réel (en bleu) dans la zone illuminée, et est calculée (en rouge) à chaque point d'arrivée réel dans la zone d'ombre par le biais du rayon complexe atteignant ce point. Les amplitudes, représentées en noir dans la même figure, le long des rayons complexes n'ont aucun sens physique, mais permettent de voir le lien entre la source et le dernier point (réel). Ce calcul de l'amplitude dans les deux zones montre la limitation de la méthode du tracé de rayons : l'amplitude diverge en se rapprochant de la caustique (ici localisée en  $x = 5,8$  m) dans les deux zones. Cependant, cette singularité à la caustique peut être supprimée en considérant la théorie uniforme à la caustique (White et Pedersen, 1981). Cet exemple montre également que, pour les rayons complexes, la méthode de lancer de rayons n'est pas adaptée car un seul point est potentiellement admissible pour chaque rayon. Il est donc indispensable, pour un récepteur réel donné, de rechercher les rayons propres complexes qui le lient à la source. Ce problème numérique sera abordé dans le chapitre 4.

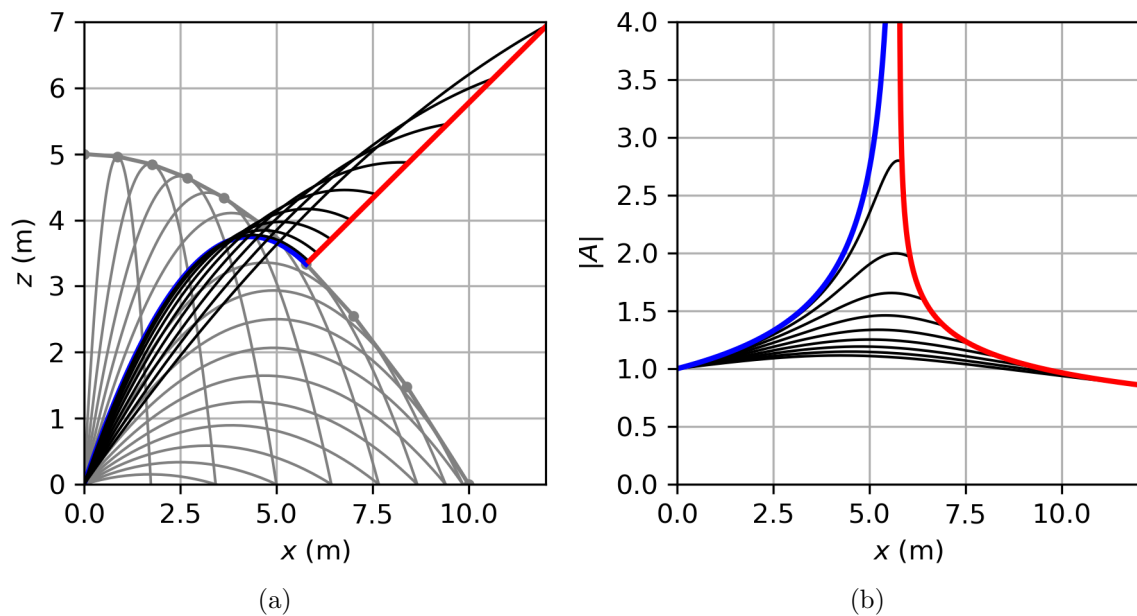


FIGURE 2.6 – (a) Cas de la source ponctuelle de la FIGURE 2.4 avec en bleu le rayon réel pour un angle d'émission  $\phi = 60^\circ$ , en rouge la solution réelle dans la zone d'ombre pour  $\text{Re}(\phi) = 60^\circ$  et en noir quelques rayons complexes arrivant aux points réels de la courbe rouge. (b) Amplitudes le long des rayons bleu, noirs et rouge, où  $|A|$  représente la norme de la surpression acoustique totale  $p'$ .



### 2.3.6 Théorie Uniforme de la Diffraction à la caustique

Dans cette partie nous présentons la théorie uniforme de la diffraction (UTD) à la caustique. Elle permet, à partir des rayons arrivant au voisinage de la caustique, d'y obtenir le champ de pression dépendant de la fréquence. Par ailleurs, loins de la caustique elle se raccorde de manière asymptotique à la théorie des rayons complexes (White et Pedersen, 1981).

En suivant les travaux de (White et Pedersen, 1981), nous présentons le champ de pression dans la zone insonifiée et la zone d'ombre ainsi qu'au voisinage de la caustique (voir Annexe C). Dans la zone insonifiée le champ de pression est approché par

$$p'_c(\mathbf{x}_r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda \text{Ai}(\zeta) + i \text{sgn}(q) \Lambda' \text{Ai}'(\zeta)] \exp \left[ -i \text{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{\text{fa}}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + iq \left( \frac{\omega_{\text{fa}} t_{\text{fa}} + \omega_{\text{sl}} t_{\text{sl}}}{2} - \frac{\omega_{\text{fa}} + \omega_{\text{sl}}}{2} t \right) \right] dq, \quad (2.60)$$

avec  $\zeta = -(\frac{3}{2}|q|\tau)^{2/3}$  où  $\tau = \frac{\omega_{\text{sl}} + \omega_{\text{fa}}}{4}(t_{\text{sl}} - t_{\text{fa}})$ , et

$$\Lambda = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{\text{sl}}}{|\nu_{\text{sl}}|^{\frac{1}{2}}} + \frac{U_{\text{fa}}}{|\nu_{\text{fa}}|^{\frac{1}{2}}} \right) (-\zeta)^{\frac{1}{4}} \quad (2.61)$$

$$\Lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{\text{sl}}}{|\nu_{\text{sl}}|^{\frac{1}{2}}} - \frac{U_{\text{fa}}}{|\nu_{\text{fa}}|^{\frac{1}{2}}} \right) (-\zeta)^{-\frac{1}{4}} \quad (2.62)$$

dépendant du paramètre d'amplitude

$$U_i(q) = K_i \tilde{u}_i(q) (\rho_{0i} c_{0i}^3)^{1/2}, \quad (2.63)$$

où  $i = \text{fa}/\text{sl}$ . L'indice fa correspond au rayon rapide incident à la caustique et sl indique le rayon réfracté par la caustique.

Loin de la caustique, lorsque  $\zeta \rightarrow -\infty$ , l'équation (2.60) correspond parfaitement à la solution obtenue par l'acoustique géométrique en considérant la somme des rayons dans l'équations (2.57).

Dans la zone d'ombre, la surpression acoustique est approchée par

$$p'_c(\mathbf{x}_r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda \text{Ai}(\zeta) + i \text{sgn}(q) \Lambda' \text{Ai}'(\zeta)] \exp \left[ -i \text{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{\text{fa}}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + iq \text{Re}(\omega(t_d - t)) \right] dq, \quad (2.64)$$

avec  $\zeta = (\frac{3}{2}|q|\text{Im}(\omega t_d))^{2/3}$ , et

$$\Lambda = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2U_d}{|\nu_d|^{\frac{1}{2}}} \cos \left( \frac{\theta_d - \theta_{\text{fa}}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) (\zeta)^{\frac{1}{4}} \quad (2.65)$$

$$\Lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2U}{|\nu_d|^{\frac{1}{2}}} \sin \left( \frac{\theta_d - \theta_{\text{fa}}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) (\zeta)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.66)$$

Loin de la caustique dans la zone d'ombre, lorsque  $\zeta \rightarrow \infty$ , l'équation (2.64) correspond à la solution obtenue par l'acoustique géométrique à partir de l'équation (2.57).

À la caustique, lorsque  $\zeta \rightarrow 0$ , les équations (2.60) et (2.64) tendent vers la même limite sans singularité (cf. Annexe C). Lorsqu'il y a d'autres arrivées dans la zone d'ombre, n'étant pas connectées à la caustique (voir par exemple la source ponctuelle dans le chapitre 1 avec le cas des arrivées stratosphériques dans la zone d'ombre thermosphérique), leurs contributions s'additionnent indépendamment à la solution UTD, comme dans l'équation (2.57).

Dans le chapitre 4 nous présentons les résultats de l'UTD pour les caustiques dans le cas de la source ponctuelle introduite dans le chapitre 1.

## 2.4 Réflexion des rayons complexes

Les ondes infrasonores peuvent se propager dans l'atmosphère sur de très grandes distances en raison des guides d'onde formés par la réfraction stratosphérique ou thermosphérique et la réflexion sur la surface de la Terre. Pour la propagation infrasonore, donc à basses fréquences, la réflexion sur la surface du sol peut être supposée spéculaire sur une surface rigide (Scott et al., 2017), c'est-à-dire que le rayon est réfléchi suivant les lois de Snell-Descartes et le champ conserve son amplitude.

On suppose que la réflexion des rayons complexes se fait aussi de manière spéculaire, suivant les lois de Snell-Descartes étendues dans le plan complexe (Vavrycuk, 2010).

Afin de simplifier le problème, nous considérons tout au long de ce manuscrit que la topographie de la Terre est plate et définie par la fonction holomorphe :

$$z_g = 0. \quad (2.67)$$

L'acoustique géométrique permet de déterminer les rayons réfléchis en fonctions des rayons incidents (Gainville et al., 2006) :

$$\mathbf{X}^R = \mathbf{X} \quad (2.68a)$$

$$\mathbf{K}^R = \mathbf{K} - 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (2.68b)$$

$$\mathbf{X}_\phi^R = \mathbf{X}_\phi - 2(\mathbf{X}_\phi \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (2.68c)$$

$$K_{\phi i}^R = K_{\phi i} - 2\mathbf{K}_\phi \cdot \mathbf{N} N_i - \frac{2\mathbf{X}_\phi \cdot \mathbf{N}}{c_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}} \left( \left( \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} K_j + K \frac{\partial c_0}{\partial x_k} \right) N_k N_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} N_k \right). \quad (2.68d)$$

Ici  $\mathbf{N}$  est le vecteur normal à la surface réfléchissante. L'exposant R indique les quantités associées aux rayons réfléchis (au membre de gauche), définies en fonction de celles associées aux rayons incidents (au membre de droite). Ces équations restent inchangées pour les rayons complexes. La vitesse de vent a été supposée nulle à la surface de la Terre, mais un gradient non nul peut exister. Après réflexion on suppose que les amplitudes et les formes d'onde restent inchangées, mais un coefficient de réflexion pourrait être introduit dépendant de la fréquence et/ou de l'angle d'incidence. Ce coefficient permettrait ainsi d'introduire l'absorption par une surface d'impédance finie.

## 2.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes approches qui permettent d'obtenir l'équation eikonale ainsi que l'équation de transport. La première est basée sur l'ansatz WKB appliqué à l'équation de Helmholtz. La seconde, développée dans la section 2.2, considère les formulations perturbatives des équations d'Euler. Un développement asymptotique multi-échelles, basé sur l'existence de différentes grandeurs caractéristiques pour les ondes acoustiques, est mené. Il repose sur l'hypothèse haute fréquence fondamentale, selon laquelle la longueur d'onde acoustique reste suffisamment petite par rapport aux variations du milieu. Ceci reste vrai même pour les infrasons dans l'atmosphère : les longueurs d'onde des fréquences autour du Hz sont de l'ordre de quelques centaines de mètres, alors que les variations significatives (estimées par exemple par  $c_0/dc_0/dz$ ) sont de l'ordre de la dizaine de kilomètres dans la direction verticale, plus dans la direction horizontale. De même les variations temporelles du milieu sont estimées négligeables sur la durée caractéristique de l'onde (ici la seconde). Ces hypothèses peuvent néanmoins se trouver en défaut à très basse fréquence, ou dans certaines zones de variations rapides localisées. Le développement asymptotique permet de déduire au premier ordre l'équation eikonale gouvernant la phase de l'onde, et au second ordre l'équation de conservation de l'action de l'onde déterminant son amplitude. Les solutions réelles et complexes de l'équation eikonale permettent d'introduire les rayons réels et complexes.

Les équations des rayons paramétrées par l'abscisse curviligne  $\tau$  seront illustrées dans le chapitre 3 par des solutions analytiques simples afin d'analyser et comprendre le comportement des rayons complexes. Les équations des rayons dépendantes du temps sont les équations qui seront intégrées lors des applications numériques. L'intégration de ces rayons fournit donc les coordonnées des points d'observation, mais aussi des paramètres physiques fréquemment mesurés dans les stations infrasonores (par exemple celles du réseau du SSI), tels que les temps d'arrivée et les vitesses apparentes aux points d'intérêt. Le point important décrit dans ce chapitre est que les rayons complexes sont des surfaces dans le plan complexe. Un « sous-rayon » complexe en est un élément permettant d'atteindre un récepteur réel, physiquement admissible, notamment dans les zones d'ombre. On a vu qu'il sera essentiel d'un point de vue applicatif de définir une méthodologie déterminant les rayons propres complexes pour atteindre un récepteur donné (une station de mesure). Cette méthodologie sera présentée dans le chapitre 4. Par ailleurs, le tracé de rayon ne fournit aucune information sur l'amplitude de la surpression acoustique qui est déterminée en résolvant l'équation de conservation de l'action d'onde présentée dans la section 2.3. Au point réel (par exemple en zone d'ombre) situé le long du rayon complexe, cette méthode permettra donc d'obtenir le dernier élément physique mesurable, à savoir le champ de pression temporel avec son amplitude.

La théorie présentée dans ce chapitre est la base des travaux de ce manuscrit. L'objectif est donc de l'utiliser de manière analytique dans un premier temps (chapitre 3), de développer une méthodologie numérique de recherche de rayons propres ensuite (chapitre 4) et de l'appliquer enfin sur un cas réaliste (chapitre 5).

---

## Chapitre 3

# Validation analytique de la méthode

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Sources d'infrasons</b>	<b>14</b>
<b>1.3</b>	<b>Milieu de propagation</b>	<b>16</b>
1.3.1	Profils de vitesse du son	17
1.3.2	Vents	18
1.3.3	Pression et masse volumique	19
<b>1.4</b>	<b>Description de la propagation</b>	<b>20</b>
1.4.1	Stratification de l'atmosphère	21
1.4.2	Caustiques et zones d'ombre	25
1.4.3	Rayons rampants	27
1.4.4	Absorption atmosphérique	28
1.4.5	Non-linéarités	28
<b>1.5</b>	<b>Méthodes de simulation de la propagation infrasonore</b>	<b>29</b>
1.5.1	Résolution directe des équations de la mécanique des fluides	29
1.5.2	Approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde	30
1.5.3	Modes normaux	32
1.5.4	Acoustique géométrique	32
1.5.5	Acoustique géométrique complexe	33
<b>1.6</b>	<b>Objectifs de la thèse et structure du manuscrit</b>	<b>34</b>

---

### 3.1 Introduction

La méthode de tracé de rayons complexes présentée dans le Chapitre 2 nécessite, dans un premier temps, une validation analytique afin de justifier l'utilisation de cette méthode dans le cadre de la propagation infrasonore. Pour cette validation, nous considérons une onde plane, ainsi qu'un profil de vitesse du son analytique, qui permet d'obtenir les solutions explicites des équations des rayons paramétrées par l'abscisse  $\tau$  et présentées dans le Chapitre 2 (équations (2.16)).

Plusieurs études sur les rayons complexes dans la littérature résolvent les équations des rayons analytiquement. Cependant, à notre connaissance aucune étude n'a comparé la solution des rayons complexes avec la solution exacte de l'équation de Helmholtz. De même, la réflexion au sol de rayons complexes n'a jusque-là jamais été considérée dans la littérature.

Ce chapitre s'organise comme suit : dans une première partie, nous présentons le cas de l'onde plane ainsi que le profil de vitesse du son. Le calcul des solutions analytiques des rayons permet d'illustrer les rayons complexes et de présenter les différents paramètres

géométriques. La détermination de la section du tube de rayon permet d'obtenir l'amplitude du champ de pression. Ce champ, ainsi que les formes d'ondes obtenues à partir de celui-ci, sont ensuite comparés à la solution exacte de l'équation de Helmholtz. Ce cas de référence permet également de quantifier les erreurs possibles dues à l'approximation haute fréquence des rayons.

## 3.2 Onde plane

### 3.2.1 Définition de la source et du profil de vitesse du son

La source choisie est celle d'un front d'onde plan émis à une altitude notée  $z_s$  et se propageant suivant la direction  $x$  positif. Cet exemple illustre bien le cas d'un avion supersonique qui volerait à altitude d'émission constante  $z_s$  égale à 17 km, valeur cohérente avec une altitude de vol d'un avion supersonique, tel que le Concorde en vol croisière entre 16 et 18 km (Ziegler, 1976). La vitesse de la source est supposée constante. Elle émet des fronts d'onde vers le sol avec un angle d'émission constant,  $\alpha < 0$  par rapport à l'horizontale. La position d'émission du front, et donc des rayons, est notée  $\phi$ , et correspond au paramètre variable d'émission qui deviendra complexe dans le formalisme étudié. La géométrie du problème est représentée sur la FIGURE 3.1, avec l'onde plane initiale en jaune et les différentes positions d'émission  $\phi$  aux temps d'émission  $t_s$ .

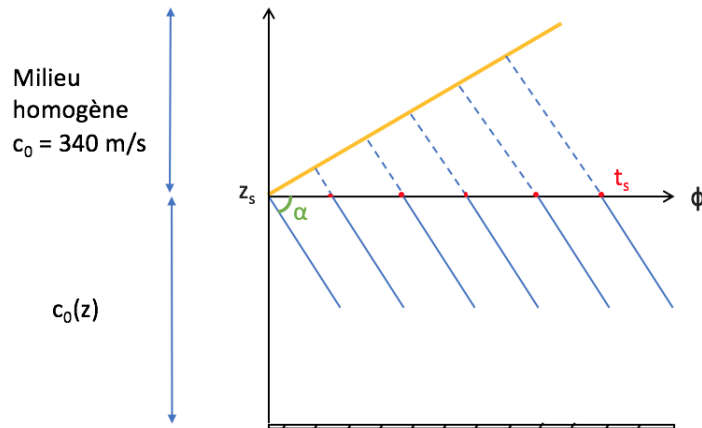


FIGURE 3.1 – Géométrie du problème.

Les conditions initiales des rayons sont celles présentées dans la section 2.2.4 pour une onde plane en deux dimensions :

$$\mathbf{x}_s = \phi \mathbf{e}_x + z_s \mathbf{e}_z, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{k}_s = \frac{\omega}{c_0(z_s)} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z), \quad (3.1b)$$

$$t_s = \frac{\phi}{c_0(z_s)} \cos \alpha, \quad (3.1c)$$

Au vu de la géométrie du problème présentée sur la FIGURE 3.1, l'angle  $\alpha$  est tel que l'angle du demi-cône de Mach est  $\beta = \pi/2 - \alpha$ . Ces deux angles sont reliés au nombre de Mach  $M$  de la source mobile supersonique par la relation :

$$M = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (3.2)$$

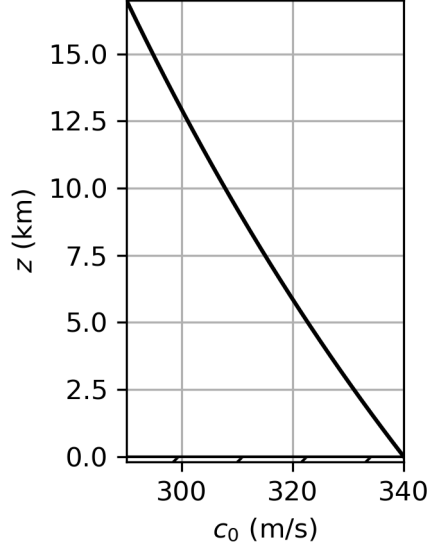


FIGURE 3.2 – Profil de vitesse du son *bilinéaire* défini par l'équation (3.3) entre 0 et 17 km d'altitude, avec  $b = 2,2 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$  et  $c_{\text{ref}} = 340 \text{ m/s}$ .

Le profil de stratification  $c_0(z)$  de la vitesse du son (où  $z$  est l'altitude), souvent utilisé dans la littérature (Pierce, 1994; Jensen et al., 1995; Thomson, 1997) car il conduit à une solution analytique pour le calcul de rayons, est dit *bilinéaire* :

$$c_0(z) = \frac{c_{\text{ref}}}{\sqrt{1 + bz}}, \quad (3.3)$$

avec  $c_{\text{ref}} = 340 \text{ m/s}$  la vitesse du son au sol  $z_g = 0$ . Ce profil est supposé indépendant du temps. La variable  $b$  est choisie pour donner un profil de vitesse du son réaliste entre 0 et 17 km d'altitude. Ainsi, pour  $b = 2,2 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ , nous avons un gradient de température variant de  $-6,3^\circ\text{C/km}$  près du sol à  $-3,5^\circ\text{C/km}$  près de la source, cohérent avec le gradient thermique adiabatique dans la troposphère qui est de  $-6,5^\circ\text{C/km}$ . Au dessus de 17 km,  $c_0$  est supposé constant. Le profil de  $c_0$  est représenté sur la FIGURE 3.2.

### 3.2.2 Solutions analytiques des trajectoires des rayons

Nous nous intéressons ici au calcul de rayons pour une onde plane définie par les conditions initiales (3.1), plongée dans un profil de vitesse du son  $c_0$  donné par l'équation (3.3). L'atmosphère est ici considérée sans vent. Nous utilisons les équations des rayons dépendant de l'abscisse curviligne  $\tau$  et définies par les relations (2.16). A partir de l'équation (2.17b) et des conditions initiales (3.1), nous obtenons l'équation du vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  à partir du gradient de  $1/c_0^2$  :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \frac{\omega b}{2c_{\text{ref}}^2} \tau \mathbf{e}_z = \omega \left[ \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)} \mathbf{e}_x + \left( \frac{\sin \alpha}{c_0(z_s)} + \frac{b}{2c_{\text{ref}}^2} \tau \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (3.4)$$

En injectant cette équation dans l'équation (2.17a), il vient les coordonnées le long des rayons en fixant  $\omega = 1$  :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_s + \int_0^\tau \frac{\mathbf{K}}{\omega} d\tau' = \left( \phi + \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)} \tau \right) \mathbf{e}_x + \left( z_s + \frac{\sin \alpha}{c_0(z_s)} \tau + \frac{b}{4c_{\text{ref}}^2} \tau^2 \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.5)$$

Ainsi, pour n'importe quelle position  $(x, z)$ , les équations des rayons donnent une équation permettant de calculer  $\tau$ , et une équation permettant de déduire la position d'émission  $\phi$

correspondante :

$$\frac{b}{4c_{\text{ref}}^2}\tau^2 + \frac{\sin \alpha}{c_0(z_s)}\tau + z_s - z = 0, \quad (3.6a)$$

$$\phi + \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)}\tau - x = 0. \quad (3.6b)$$

La première équation (3.6a) de ce système correspond à l'équation de la théorie des catastrophes de Thom pour une caustique pli (Thom, 1975; Wright, 1980). Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\tau_{\pm}(z) = \frac{2c_{\text{ref}}}{b} \left( -c_{\text{ref}} \frac{\sin \alpha}{c_0(z_s)} \pm \sqrt{b(z - z_s) + c_{\text{ref}}^2 \frac{\sin^2 \alpha}{c_0(z_s)^2}} \right). \quad (3.7)$$

En introduisant l'altitude  $z_c$  de la caustique :

$$z_c = \frac{(1 + bz_s) \cos^2 \alpha - 1}{b}, \quad (3.8)$$

et en rappelant que le profil bilinéaire est tel que  $c_{\text{ref}}/c_0(z_s) = \sqrt{1 + bz_s}$ , les solutions  $\tau_{\pm}$  peuvent être réécrites sous la forme :

$$\tau_{\pm}(z) = \frac{2c_{\text{ref}}}{b} \left( -\sin \alpha \sqrt{1 + bz_s} \pm \sqrt{b(z - z_c)} \right), \quad (3.9)$$

où  $z_c$  ne dépend que de l'angle d'émission des rayons  $\alpha$ . La position d'émission  $\phi_{\pm}$  peut donc être obtenue en substituant les solutions  $\tau_{\pm}$  dans l'équation (3.6b). L'équation des rayons définissant le vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  (3.4) peut aussi être réécrite à partir de  $\tau_{\pm}$  sous la forme :

$$\mathbf{K}_{\pm} = \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)} \mathbf{e}_x \pm \frac{\sqrt{b(z - z_c)}}{c_{\text{ref}}} \mathbf{e}_z. \quad (3.10)$$

Le temps d'arrivée est obtenu en utilisant la relation d'intégration (2.19) en substituant  $z(\tau)$  dans  $c_0(z)$  :

$$t_{\pm}(\tau_{\pm}, \phi) = \frac{1}{c_{\text{ref}}^2} \left( (1 + bz_s)\tau_{\pm} + \frac{b \sin \alpha}{2c_0(z_s)}\tau_{\pm}^2 + \frac{b^2}{12c_{\text{ref}}^2}\tau_{\pm}^3 \right) + t_s, \quad (3.11)$$

avec  $t_s$  défini par la condition initiale (3.1). Le paramètre  $t_{\pm}$  se simplifie en :

$$t_{\pm}(\tau_{\pm}, \phi) = t_c(\phi) \pm \frac{2b^{1/2}(z - z_c)^{3/2}}{3c_{\text{ref}}}, \quad (3.12)$$

avec  $t_c$  le temps à la caustique. Ainsi,  $\phi$  et  $t$  forment l'ensemble des paramètres d'émission nécessaires pour le calcul des rayons.

### Rayons réels

Nous commençons par présenter les solutions réelles des équations des rayons (3.6) vues précédemment. Pour cela on considère un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$  et des récepteurs situés en  $x = 100$  km. Cet angle d'émission indique que le nombre de Mach de la source est  $M = 1,1$  à partir de la relation (3.2). Les récepteurs sont placés en altitude au dessus du sol  $z_g = 0$ . Les solutions réelles des équations des rayons sont représentées sur la FIGURE 3.3, arrivant aux récepteurs symbolisés par des triangles noirs. Pour chaque position de récepteur  $\mathbf{x}_r$ , il existe deux solutions  $\tau_+$  et  $\tau_-$  correspondant aux deux positions d'émission  $\phi_+$  et  $\phi_-$ . Dans les figures qui suivent nous représentons le temps d'arrivée des rayons  $t$  calculé à partir de  $\tau$  par

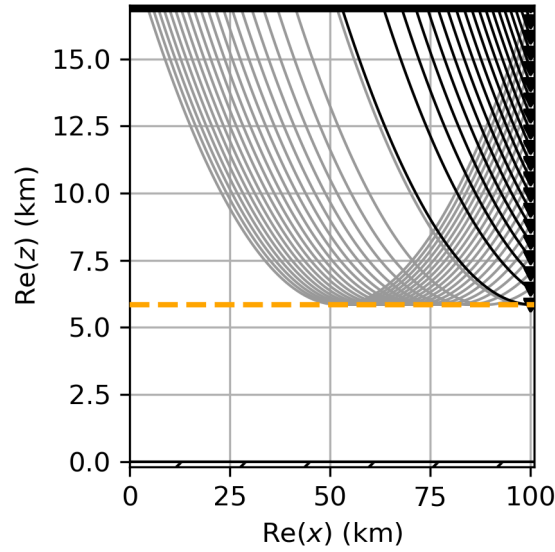


FIGURE 3.3 – Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (---), émis par une onde plane en  $z_s = 17$  km avec un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ , définis par les équations (3.4) et (3.5) et représentés dans le plan réel  $(x, z)$ . Ces rayons arrivent aux récepteurs ( $\blacktriangledown$ ) situés à la position horizontale  $x = 100$  km et en altitude dans la zone illuminée au-dessus de la caustique. La réfraction forme une caustique (—) en  $z_c = 5,98$  km.

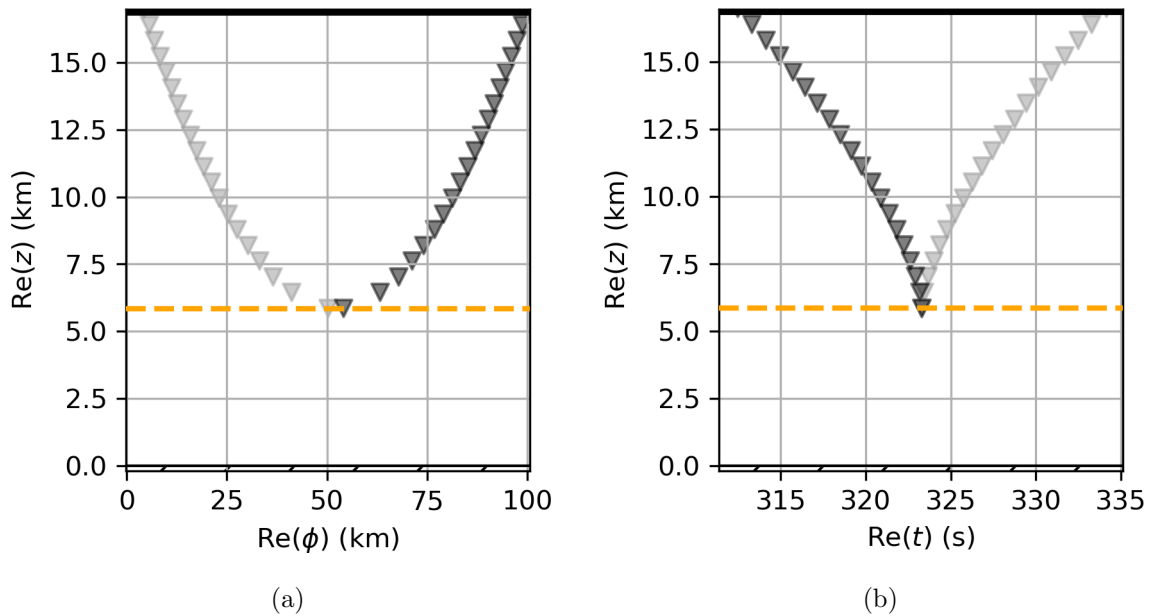


FIGURE 3.4 – Paramètres géométriques pour le cas de l'onde plane définie par les équations (3.1). (a) Positions d'émission  $\phi$  (km) et (b) temps d'arrivées  $t$  (s) pour les rayons directs ( $\blacktriangledown$ ) et réfractés ( $\blacktriangledown$ ) en fonction de l'altitude des récepteurs cités à la distance horizontale  $x = 100$  km. La caustique (—) se situe en  $z_c = 5,98$  km.



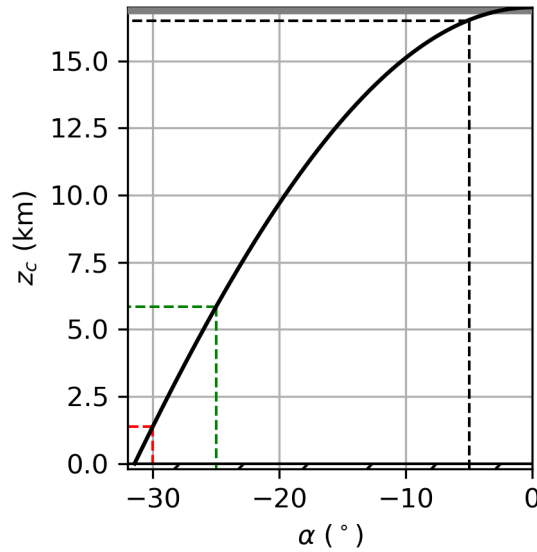


FIGURE 3.5 – Altitude de la caustique  $z_c$  définie par l'équation (3.8) en fonction de l'angle d'émission des rayons  $\alpha$ .

la relation d'intégration (3.11). Les solutions  $\tau_-/\phi_-$  correspondent aux rayons dits *directs* - en noirs sur les figures 3.3 et 3.4. Les solutions  $\tau_+/\phi_+$  correspondent aux rayons dits *réfractés* - en gris sur la FIGURE 3.4, qui ont subi une réfraction due au profil météorologique. L'altitude de réfraction est constante, créant une caustique pli située à l'altitude  $z_c = 5,98$  km, indiquée en orange sur les figures 3.3 et 3.4. Pour  $z < z_c$  nous avons donc une zone d'ombre où il n'existe pas de solution réelle.

Les paramètres d'émission  $\phi$  et  $t$  représentés sur la FIGURE 3.4 forment une bifurcation à partir de la caustique, avec une position d'émission qui varie entre 5 et 52 km et un temps d'arrivée qui varie entre 323,5 et 334,0s pour les rayons réfractés. La position d'émission varie entre 52 et 99 km et le temps d'arrivée entre 312,0 et 323,5s pour les rayons directs. La valeur à la bifurcation de 52 km pour  $\phi$  et de 323,5 s pour  $t$  correspond au rayon qui arrive tangentiellement à la caustique. Comme nous le verrons par la suite, et tout particulièrement sur la FIGURE 3.14a, le point de caustique forme une singularité car  $\text{Re}(\nu)$  est nul sur la caustique et donc l'amplitude du champ de pression infinie selon l'acoustique géométrique.

L'altitude de la caustique est définie par la relation (3.8). Elle dépend donc de l'angle d'émission  $\alpha$  des rayons. Plus l'angle d'émission est élevé par rapport à l'horizontale, plus l'altitude de la caustique  $z_c$  sera proche du sol (voir FIGURE 3.5). Pour un angle d'émission nul, la source serait singulière car l'altitude de la source serait celle de la caustique. Nous verrons par la suite, lors du calcul de l'amplitude du champ de pression 3.2.3, que le voisinage très proche de la caustique est lui aussi singulier. En considérant donc un voisinage de la caustique de l'ordre de 500 m, l'angle d'émission doit être plus élevé que  $-5^\circ$  (pointillés noirs sur (3.8)). Les pointillés verts représentent le cas de la caustique à  $z_c = 5,98$  km pour un angle d'émission à  $-25^\circ$  de la FIGURE 3.3 et les pointillés rouges représentent le cas d'un angle d'émission  $-30^\circ$  qui sera traité dans la partie 3.4.

### Rayons complexes directs

En considérant maintenant des récepteurs dans la zone d'ombre pour  $z < z_c$ , les équations des rayons (3.6) donnent des solutions complexes. Pour chaque récepteur, comme dans le cas des rayons réels, il existe deux solutions. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2, une seule solution est retenue telle que  $\text{Im}(t) > 0$ , ce qui permet d'assurer la décroissance exponentielle du champ dans la zone d'ombre. Les solutions complexes qui nous intéressent forment donc

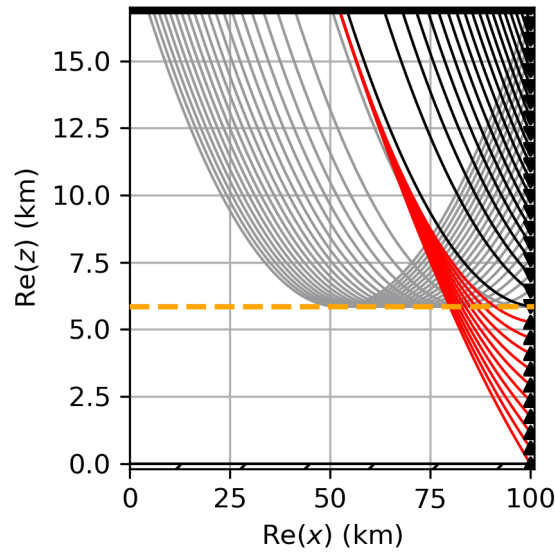


FIGURE 3.6 – Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (—), et rayons complexes directs (—) atteignant la position horizontale  $x = 100$  km émis par une onde plane en  $z_s = 17$  km avec un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ , définis par les équations (3.4) et (3.5) et projetés dans le plan réel  $(\text{Re}(x), \text{Re}(z))$ . Les rayons réels arrivent aux récepteurs (▼) dans la zone illuminée et les rayons complexes arrivent aux récepteurs (▲) dans la zone d'ombre. La caustique (—) se situe à l'altitude  $z_c = 5,98$  km.

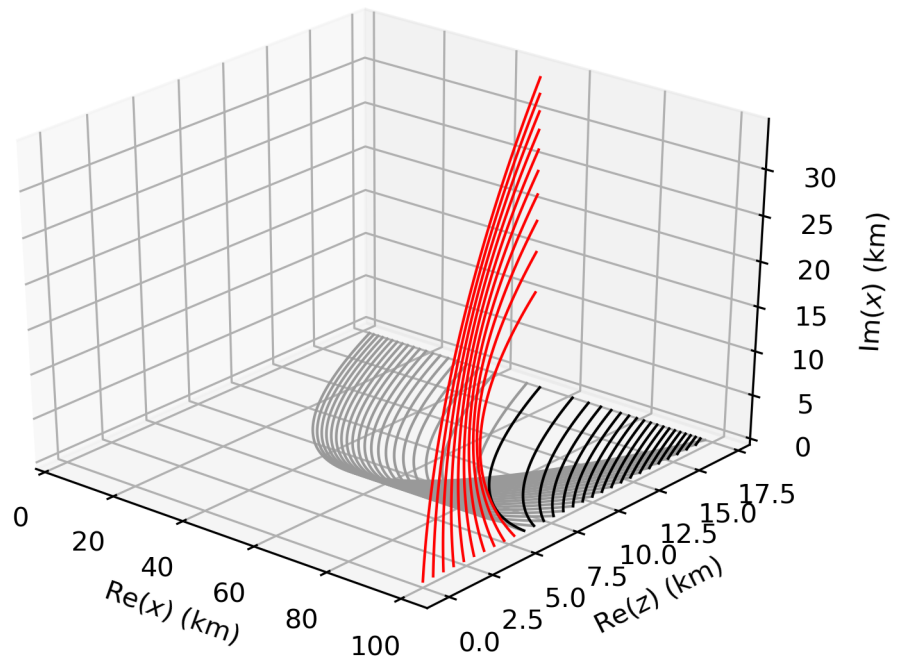


FIGURE 3.7 – Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes (—) que sur la FIGURE 3.6 projetés dans le plan  $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(x))$

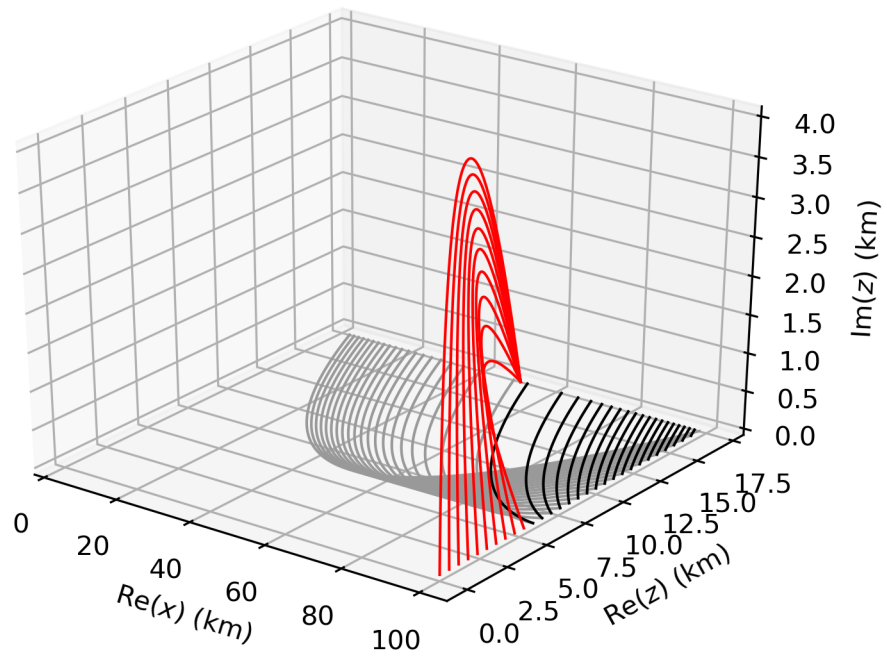


FIGURE 3.8 – Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes (—) que sur la FIGURE 3.6 projetés dans le plan  $(Re(x), Re(z), Im(z))$

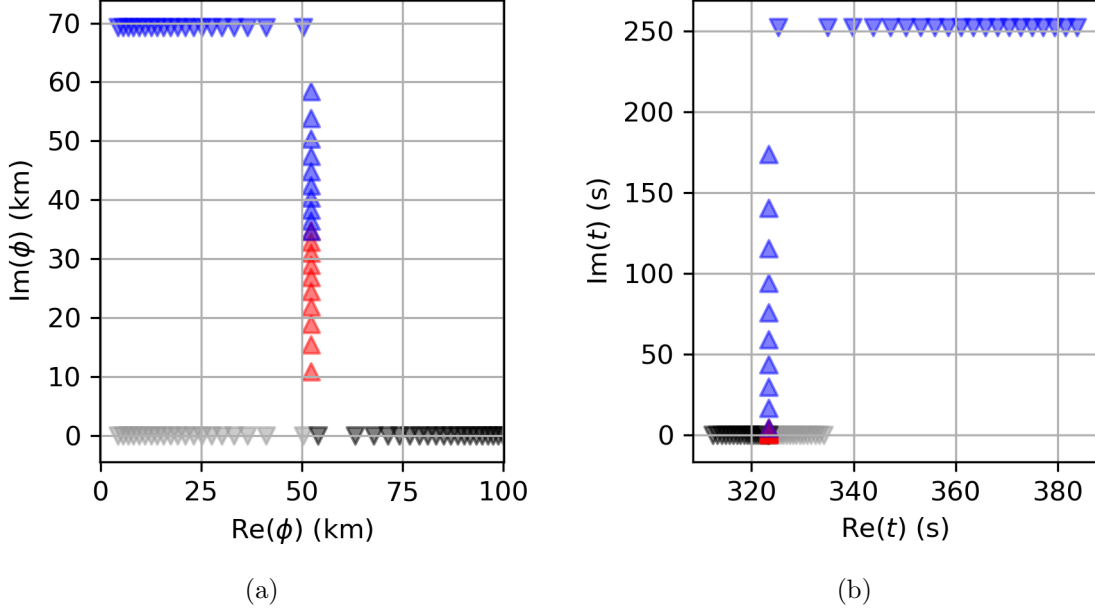


FIGURE 3.9 – Paramètres géométriques pour le cas de l’onde plane définie par les équations (3.1). (a) Parties imaginaires et parties réelles des positions d’émission  $\phi$  (km) ainsi que (b) parties imaginaires et parties réelles des temps d’arrivées  $t$  (s) pour les rayons réels directs ( $\blacktriangledown$ ), réels réfractés ( $\blacktriangledown$ ), complexes directs ( $\blacktriangle$ ) et complexes réfléchis ( $\blacktriangle$  /  $\blacktriangledown$ ) en fonction de l’altitude des récepteurs en  $x = 100$  km.

les rayons complexes représentés en rouge sur la FIGURE 3.6. Ainsi, les paramètres d’émission  $\phi$  et  $\tau$  (c’est-à-dire  $t$ ) sont complexes et sont représentés sur la FIGURE 3.9 en rouge.

Nous précisons que les paramètres sont représentés par des triangles orientés vers le bas pour les paramètres de la zone illuminée et par des triangles orientés vers le haut pour les paramètres de la zone d’ombre.

Dans la zone d’ombre  $\text{Re}(\phi)$  et  $\text{Re}(t)$  sont constants et égaux à la position d’émission et au temps d’arrivée d’un potentiel rayon arrivant à la caustique. Ceci est dû au fait que la caustique pli est plane, ainsi seules les parties imaginaires de  $\phi$  et de  $t$  évoluent. Ces paramètres d’émission complexes impliquent que les positions  $\mathbf{x}$  le long des rayons sont complexes, à l’exception de la position du récepteur qui doit rester réelle et physique. La partie imaginaire de la position d’émission  $\text{Im}(\phi)$  varie entre 0 (à la caustique) et 35 km. C’est par ailleurs ce que l’on observe sur la FIGURE 3.7 sur laquelle est représentée en trois dimensions la partie imaginaire de  $x$  pour chaque  $\text{Re}(x)$  et  $\text{Re}(z)$ . On y retrouve les rayons réels en noir et gris dont la partie imaginaire est nulle. Pour les rayons complexes arrivant en zone d’ombre,  $\text{Re}(\phi)$  est constant et  $\text{Im}(\phi)$  évolue. En effet, le seul paramètre variable à la source est la position d’émission suivant  $x$ , ce qui explique son évolution dans le plan complexe. Plus le récepteur est situé loin dans la zone d’ombre, plus la partie imaginaire du paramètre d’émission doit être élevée. La partie imaginaire de  $z$ , est représentée de la même manière que  $\text{Im}(x)$  sur la FIGURE 3.8. Sa valeur est nulle à la source. L’altitude de la source étant constante le long de la propagation, sa partie imaginaire n’évolue pas pour les rayons complexes. Cependant, ces deux figures montrent que les rayons complexes évoluent dans le plan complexe avant d’atteindre la position réelle d’un récepteur en zone d’ombre en  $x = 100$  km, pour laquelle  $\text{Im}(x) = \text{Im}(z) = 0$ .

Nous rappelons ici que les rayons complexes représentés sur toutes ces figures correspondent aux chemins d’intégration entre la source et le récepteur dans le plan complexe. Le rayon complexe est quant à lui un hyperplan de l’espace complexe. Nous rappelons aussi que les représentations que nous ferons des rayons complexes dans la suite du manuscrit, sont ces chemins d’intégration projetés dans le plan réel.

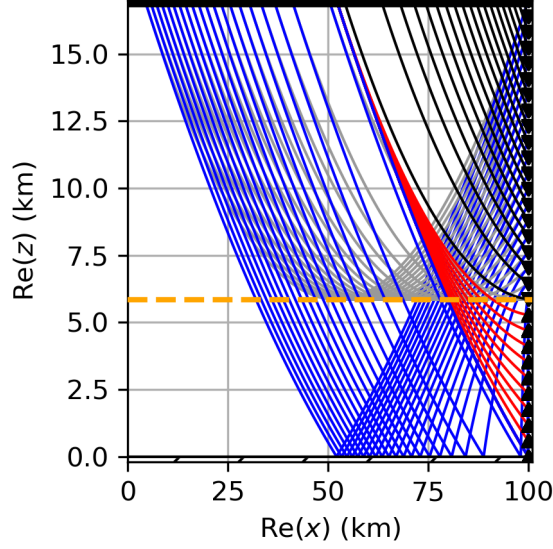


FIGURE 3.10 – Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (—), ainsi que les rayons complexes directs (—) émis par une onde plane en  $z_s = 17$  km avec un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ . Les rayons réels arrivent aux récepteurs (▼) dans la zone illuminée et les rayons complexes arrivent aux récepteurs (▲) dans la zone d'ombre. Les rayons complexes (—) se réfléchissent au sol en  $z_g = 0$ . Les rayons sont représentés dans le plan réel  $(x, z)$ . La caustique (—) se situe en  $z_c = 5,98$  km.

### Rayons complexes réfléchis

Le sol  $z_g = 0$  étant situé en zone d'ombre, nous traitons également dans notre exemple de la réflexion des rayons complexes, définie dans la partie 2.4. Elle est spéculaire et suit les lois de Snell-Descartes dans le plan complexe comme pour les rayons réels. Nous adaptons ici ces équations pour le cas analytique d'une onde plane. La condition de réflexion est la condition holomorphe  $z_g = 0$ . Pour pouvoir intégrer ces rayons, on considère donc un temps d'intégration  $\tau_g$  intermédiaire, correspondant au temps nécessaire pour atteindre la surface de réflexion en  $z_g = 0$ , avant d'intégrer ensuite le rayon entre le sol et le récepteur. La solution en  $\tau$  prise pour ces rayons incidents au sol est la solution des rayons directs  $\tau_-$  de l'équation (3.7), où le paramètre  $z$  n'indique pas le récepteur mais la position du sol. Il en est de même pour  $\phi_-$  et  $\mathbf{K}_-$ . Ainsi, le vecteur d'onde après la réflexion pris en  $z = z_g$  vaut :

$$\mathbf{K}^R(z_g) = \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{b(z_g - z_c)}}{c_{\text{ref}}} \mathbf{e}_z, \quad (3.13)$$

où seule la composante suivant  $\mathbf{e}_z$  a suivie un changement de signe par rapport à la solution  $\mathbf{K}_-$  en prenant en compte les conditions de réflexion (2.68). A partir de cette condition de réflexion, nous pouvons définir les équations des rayons valables après réflexion :

$$x^R = \phi + \frac{\cos \alpha}{c_0(z_s)} \tau, \quad (3.14a)$$

$$z^R = z_g + \frac{\sqrt{b(z_g - z_c)}}{c_{\text{ref}}} (\tau - \tau_g) + \frac{b}{4c_{\text{ref}}^2} (\tau - \tau_g)^2. \quad (3.14b)$$

Notons que l'équation de la composante  $x$  reste inchangée après réflexion. Le paramètre  $\tau_g$  est donné par la solution  $\tau_-$  en  $z_g$  :

$$\tau_g = \frac{2c_{\text{ref}}}{b} \left( -\sin \alpha \sqrt{1 + bz_s} - \sqrt{b(z_g - z_c)} \right). \quad (3.15)$$

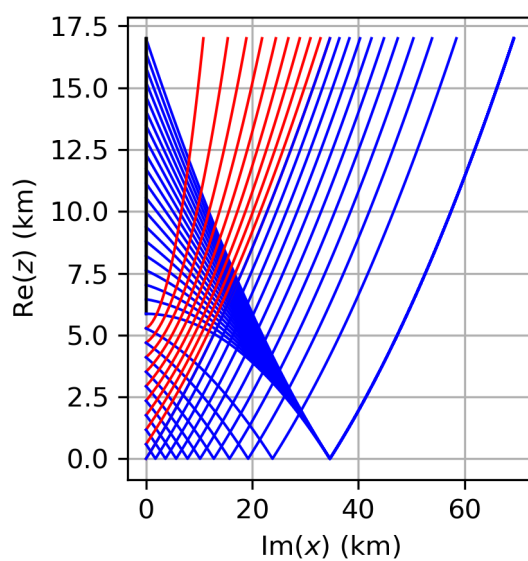


FIGURE 3.11 – Les rayons réels (—)/(—) et complexes (—)/(—) de la FIGURE 3.10 projetés dans le plan  $(\text{Im}(x), \text{Re}(z))$

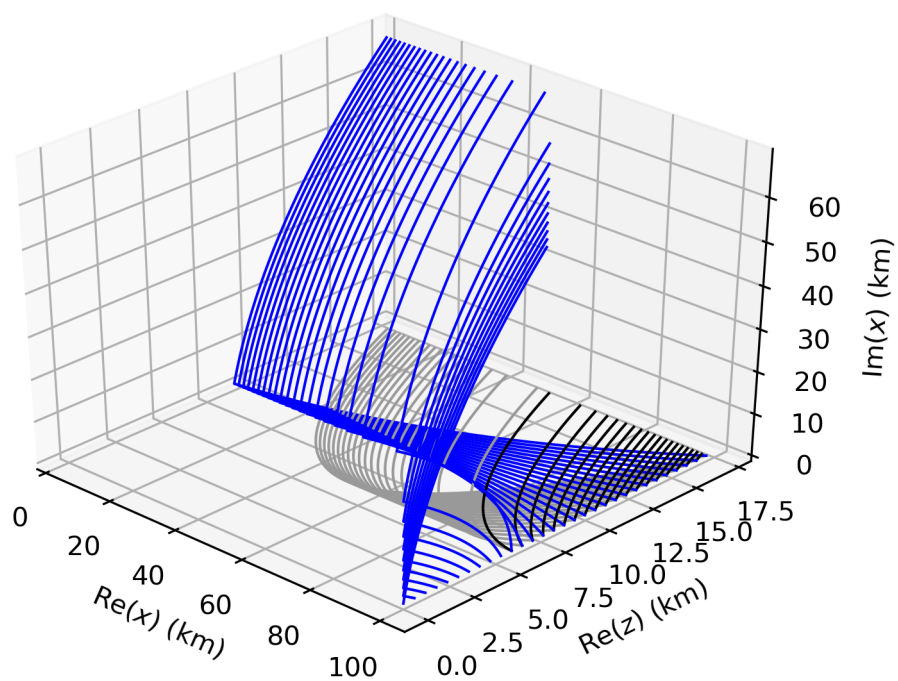


FIGURE 3.12 – Les rayons réels (—)/(—) et complexes réfléchis (—) de la FIGURE 3.10 projetés dans le plan  $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(x))$ .

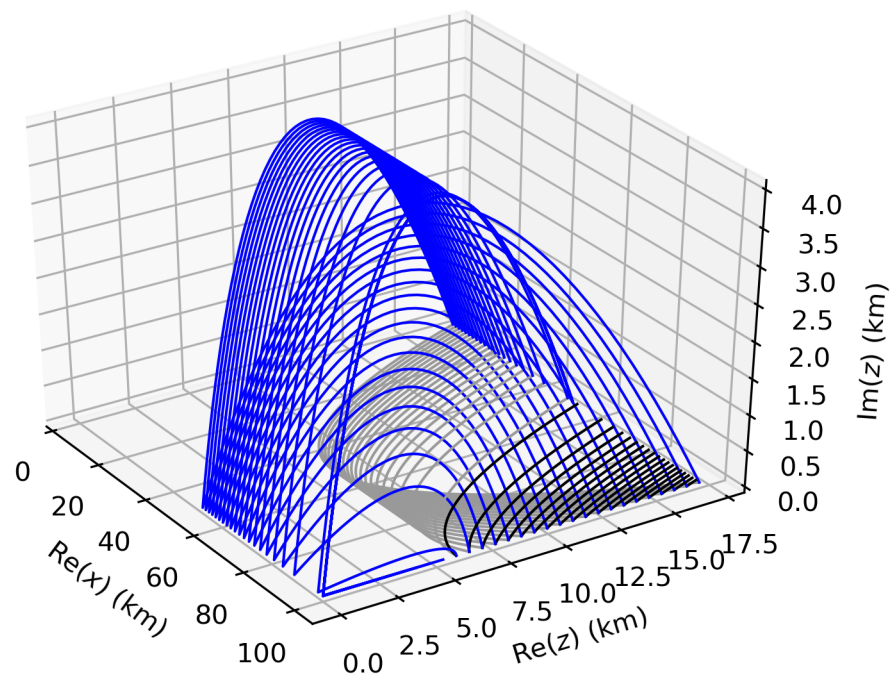


FIGURE 3.13 – Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes réfléchis (—) que sur la FIGURE 3.10 projetés dans le plan  $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(z))$ .

Les solutions  $\tau$  de l'équation (3.14b) permettant d'arriver au récepteur après réflexion sont :

$$\tau = \frac{2c_{\text{ref}}}{b} \left( -\sin \alpha \sqrt{1 + bz_s} - 2\sqrt{b(z_g - z_c)} + \sqrt{b(z - z_c)} \right). \quad (3.16)$$

A partir du paramètre d'intégration  $\tau$ , nous pouvons déduire le temps d'arrivée total au récepteur en prenant en compte la réflexion des rayons :

$$t(\tau, \phi) = \frac{1}{c_{\text{ref}}^2} \left( (1 + bz_s)(\tau - \tau_g) + \frac{b\sqrt{b(z_g - z_c)}}{2c_{\text{ref}}} (\tau - \tau_g)^2 + \frac{b^2}{12c_{\text{ref}}^2} (\tau - \tau_g)^3 \right) + t_g, \quad (3.17)$$

où  $t_g$  est obtenu à partir de la relation  $t_-(\tau_g, \phi_-)$  (3.11).

Les solutions (3.14) sont représentés sur la FIGURE 3.10 pour des récepteurs en  $x = 100$  km pour  $z > z_c$  et  $z < z_c$ . On y retrouve les solutions réelles en noir et gris ainsi que les rayons complexes directs en rouge. Les rayons complexes réfléchis sont représentés en bleu. Chaque récepteur, qu'il soit en zone illuminée ou en zone d'ombre, est atteint par un rayon complexe réfléchi. Pour chaque rayon réfléchi arrivant en zone illuminée, la position d'émission  $\text{Re}(\phi)$  varie entre 0 et 50 km avec une partie imaginaire  $\text{Im}(\phi)$  constante égale à 68 km (FIGURE 3.9). La réflexion de ces rayons arrivant dans la zone illuminée se fait en  $\text{Im}(z) = 0$  (FIGURE 3.13), imposé par la condition de réflexion mais décalé en  $\text{Im}(x) = 25$  km (FIGURE 3.12), ce qui permet de rester dans le plan complexe et d'atteindre les récepteurs réels après réflexion. Les rayons réfléchis arrivant dans la zone d'ombre ont la même position d'émission  $\text{Re}(\phi)$  que celle des rayons complexes directs  $\text{Re}(\phi) = 52$  km. La partie imaginaire de  $\phi$  varie quant à elle, entre 35 et 58 km (FIGURE 3.9). La partie imaginaire est d'autant plus élevée que le récepteur est loin du sol. Par ailleurs, la réflexion pour les récepteurs en zone d'ombre se fait au même point  $\text{Re}(x) = 100$ . La projection dans le plan  $(\text{Re}(z), \text{Im}(x))$  montre que le décalage de la réflexion au sol se fait seulement sur la partie imaginaire de  $x$  (FIGURE 3.11). La partie imaginaire de  $z$  est fixée en raison de la condition de réflexion (FIGURE 3.13). La réflexion spéculaire des rayons dans le plan complexe est par ailleurs visible sur la FIGURE 3.11 et FIGURE 3.12.

Les paramètres géométriques des rayons  $\text{Re}(\phi)$  et  $\text{Re}(t)$  des rayons réfléchis arrivant dans la zone d'ombre (triangles bleus orientés vers le haut sur la FIGURE 3.9), restent constants égaux à celui de la caustique et à ceux des rayons directs complexes. Par rapport à ceux-ci, les valeurs des parties imaginaires des rayons réfléchis sont plus élevées, car ils parcourent un trajet plus long dans la zone d'ombre. Pour les rayons arrivant dans la zone illuminée, la position d'émission  $\text{Re}(\phi)$  varie exactement de la même manière que  $\text{Re}(\phi)$  des rayons réels réfractés (triangles gris). Ces rayons sont donc un "prolongement" de ces rayons réfractés jusqu'au sol qui arrivent à passer la caustique par la "perturbation" dans le plan complexe :  $\text{Im}(\phi) = 70$  km. Ce contournement dans le plan complexe est visible sur la FIGURE 3.13. De façon similaire à  $\text{Im}(\phi)$ ,  $\text{Im}(t)$ , est constant et égal à 251 s pour les rayons réfléchis arrivant dans la zone illuminée. Le temps d'arrivée évolue jusqu'à 385 s pour le rayon dont le parcours est le plus long, c'est à dire le rayon arrivant au récepteur le plus proche de la trajectoire.

Ainsi, pour conclure cette partie sur les paramètres géométriques des rayons complexes et des rayons complexes réfléchis, nous avons vu que pour le cas d'une caustique pli plane, un prolongement dans le plan complexe de ces paramètres est nécessaire. Le fait que la caustique soit de forme plane implique que les parties réelles (et donc physiques) de  $\phi$  et  $t$  pour les rayons complexes arrivant en zone d'ombre sont égales aux paramètres à la caustique du rayon réel tangent à la celle-ci. Cela nous donne donc une idée de la connaissance du comportement de  $\text{Re}(\phi)$  et  $\text{Re}(t)$  dans la zone d'ombre à partir de la zone illuminée, où la partie réelle apparaît donc comme un prolongement de la valeur à la caustique. Cela implique donc que ces paramètres sont constants pour une telle forme de caustique. La partie imaginaire, quant à elle, indique le « degré » de pénétration dans la zone d'ombre. Plus un récepteur est loin



dans la zone d'ombre (c'est-à-dire, plus le parcours du rayon dans le plan complexe est long), plus elle sera élevée. Cela nous indique bien que plus une station sera loin d'une caustique, plus le signal sera atténué, en raison de la quantité  $\text{Im}(t)$  qui varie de manière exponentielle.

### 3.2.3 Section du tube de rayon et amplitude de l'onde

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, afin de calculer l'amplitude de l'onde nous devons calculer la section du tube de rayon infinitésimal définie en trois dimension par l'équation (2.46). Pour notre cas d'onde plane en deux dimensions la section du tube de rayon est calculée à partir de la relation suivante :

$$\nu = (\mathbf{X}_\phi \wedge \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.18)$$

Ceci donne dans le plan  $(x, z)$ , en deux dimension  $\nu = (X_{\phi_x} K_z - X_{\phi_z} K_x)/K$ . Le long des rayons, on déduit rapidement à partir des équations des rayons  $\mathbf{X}_\phi = \mathbf{e}_x$ , donc  $\nu = \pm K_z/K$ . Sans prendre en compte la réflexion des rayons, la composante en  $\mathbf{e}_z$  de  $\mathbf{K}$  est définie par (3.4), et la norme de  $\mathbf{K}$  est telle que  $K = 1/c_0(z)$ . A partir de l'équation du profil bilinéaire (3.3), on calcule la section du tube des rayons directs et réfractés :

$$\nu_\pm = \pm \sqrt{\frac{b(z - z_c)}{1 + bz}}. \quad (3.19)$$

Cette section du tube de rayon est donc réelle pour tout  $z > z_c$  et complexe dans la zone d'ombre pour tout  $z < z_c$ . A la caustique en  $z = z_c$ ,  $\nu$  est nul, ce qui implique une amplitude infinie. La quantité  $\nu$  calculée avec le signe moins (-) est associée à la section du tube de rayon des rayons directs réels ou complexes, et celle avec le signe plus (+) est associée aux rayons réfractés. Ainsi comme représenté à la FIGURE 3.14, les rayons directs arrivant en zone illuminée ont une valeur de  $\text{Re}(\nu)$  négative variant entre -0,42 jusqu'à 0 à la caustique (noir), et symétriquement par rapport à 0 les rayons réfractés ont une valeur de  $\text{Re}(\nu)$  positive variant entre 0 et 0,42 (gris). Naturellement  $\text{Im}(\nu) = 0$  pour ces rayons réels (FIGURE 3.14). Dans la zone d'ombre,  $\nu$  évolue suivant la forme  $\nu_-$  associée aux rayons directs avec une partie réelle  $\text{Re}(\nu) = 0$  et une partie imaginaire décroissante.

A la réflexion au sol, la composante selon  $z$  du vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  ainsi que  $\nu$  changent de signe. Ceci implique que pour les rayons complexes réfléchis, en prenant en compte la solution des rayons directs, l'aire  $\nu$  reste inchangée et est égale à  $\nu_-$ . On voit donc sur la FIGURE 3.14 que les valeurs des rayons réfléchis (en bleu) se superposent aux solutions des rayons directs (en rouge dans la zone d'ombre et en noir dans la zone illuminée).

Connaissant la section du tube de rayon  $\nu$ , nous pouvons calculer le champ de pression  $\tilde{p}$  au niveau des récepteurs, à partir de l'équation (2.57). Le calcul de  $\tilde{p}$  nécessite la connaissance de  $\nu_e$ , la section du tube de rayon à l'émission. En considérant la relation (3.19) en  $z = z_s$  et en remplaçant  $z_c$  par (3.8) nous obtenons :

$$\nu_e = \sin(\alpha), \quad (3.20)$$

avec  $\alpha$  négatif afin de ne considérer que les rayons émis vers le sol par rapport à l'horizontale, donc  $\nu_e < 0$ . Pour un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ ,  $|\nu_e| = 0,42$  (voir FIGURE 3.14a pour un récepteur situé à la position de la source en  $z_s = 17$  km).

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, lorsque la section du tube de rayon à l'émission  $\nu_e$  est négative, il est important de bien prendre en compte l'argument de  $\nu_e$ , noté  $\theta_e$  afin de considérer le déphasage présent dès la source. Ainsi  $\tilde{p}$  est calculé à partir de la relation dans le domaine fréquentiel (2.57) :

$$\tilde{p}'(\tilde{\omega}) = \tilde{p}_s(\tilde{\omega}) \sum_j \left( \frac{c_0 |\sin \alpha|}{c_0(z_s) |\nu_j|} \right)^{1/2} e^{-i(\theta_j - \theta_e)/2} e^{i\tilde{\omega}(\text{Re}(t_{aj}) + i\text{Im}(t_{aj}))}, \quad (3.21)$$

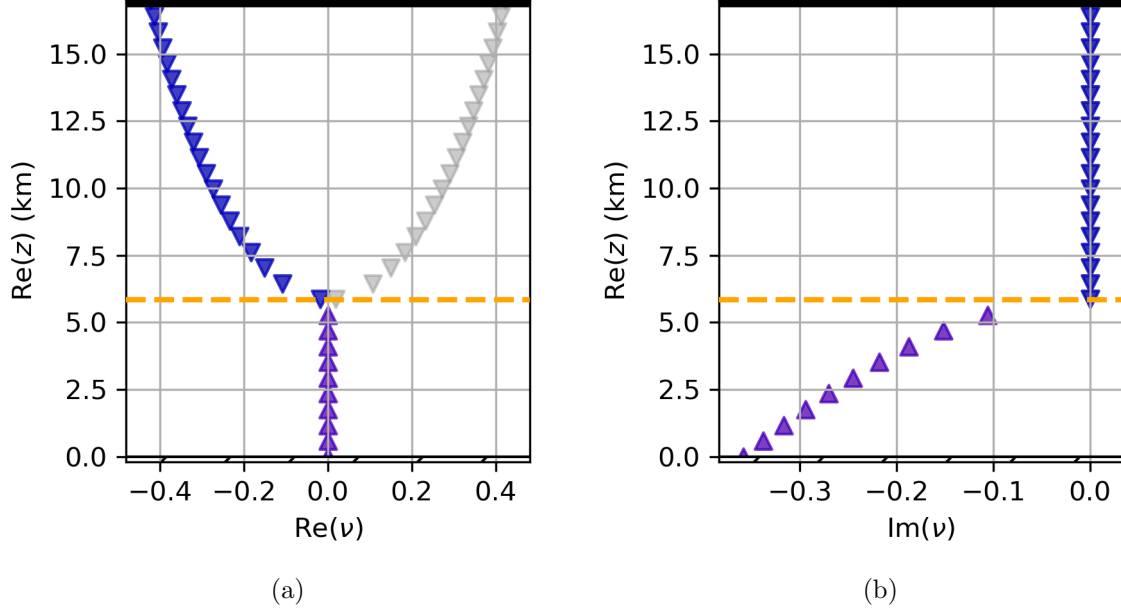


FIGURE 3.14 – Section du tube de rayons  $\nu$  aux récepteurs en  $x = 100$  km (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires pour les rayons réels directs (▼), réels réfractés (▽), complexes directs (▲) et complexes réfléchis (▲/▼) en fonction de l'altitude des récepteurs.

où les contributions de chaque type de rayons (direct, réfracté et réfléchi), sont sommées pour chaque récepteur. Comme  $\nu_e$  est négatif à la source, on choisit  $\theta_e = \pi$ . La pulsation réelle est définie par  $\tilde{\omega} = 2\pi f$ , avec  $f$  la fréquence réelle positive et la masse volumique  $\rho_0$  présente dans la relation (2.57) simplifiée égale à 1. Le terme  $(\theta_j - \pi)/\pi$ , indique le nombre de caustiques tangentées par le rayon, il est donc égal à 0 pour les rayons directs et 1 pour les rayons réfractés qui subissent un déphasage de  $\pi/2$ , en accord avec la théorie des rayons (présentée dans la section 2.3.3). Pour les rayons complexes ce nombre n'est pas un entier car  $\nu$  est à valeur complexe, ce qui impliquera donc la diffraction dans la zone d'ombre. Pour les rayons réels  $\text{Im}(t_{aj}) = 0$ , on retrouve donc une formulation standard du champ de pression (Scott et al., 2017), alors que pour les rayons complexes nous retrouvons le terme en  $\exp(-i\text{Im}(t_{aj}))$  impliquant la décroissance exponentielle du champ de pression dans la zone d'ombre. Ce phénomène sera détaillé dans la partie 3.4.

### 3.3 Solution de l'équation de Helmholtz

L'objectif de cette partie est d'établir la solution analytique de l'équation de Helmholtz pour le cas de l'onde plane définie dans la section 3.2.1.

Les équations d'Euler pour un milieu stationnaire, une densité homogène et en négligeant les effets de gravité se réduisent à l'équation de Helmholtz pour une vitesse du son  $c_0(z)$  non uniforme, soit à deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}'}{\partial z^2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{c_0^2(z)} \tilde{p}' = 0. \quad (3.22)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2, la méthode des rayons complexes provient de l'approximation haute fréquence de l'équation de Helmholtz (Gréa et al., 2005).

Etant donné que le profil bilinéaire défini par l'équation (3.3) ne dépend que de la variable  $z$ , nous pouvons rechercher la solution de l'équation de Helmholtz sous la forme d'une onde plane progressive par séparation des variables :

$$\tilde{p}'(\mathbf{x}, \tilde{\omega}) = \psi(z) e^{-ik_r x}, \quad (3.23)$$

avec  $k_r = k_s \cos \alpha = \tilde{\omega}/c_0(z_s) \cos \alpha$  qui permet de satisfaire la condition d'onde plane :

$$\tilde{p}'(\mathbf{x}_s, \tilde{\omega}) = e^{-ik_s \cos \alpha x_s}. \quad (3.24)$$

En remplaçant cette solution dans l'équation de Helmholtz (3.22) avec le profil bilinéaire (3.3) ainsi que la relation  $k_0 = \tilde{\omega}/c_{\text{ref}}$ , on obtient que la fonction  $\psi$  satisfait :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \psi \left( k_0^2(1+bz) - k_r^2 \right) = 0. \quad (3.25)$$

Cette équation est mise sous la forme d'une équation d'Airy :

$$\frac{d^2\psi}{d\bar{z}^2} - \bar{z}\psi = 0, \quad (3.26)$$

à partir du changement de variables suivant :

$$\bar{z} = -(k_0^2 b)^{-2/3} (k_0^2 - k_r^2 + k_0^2 bz). \quad (3.27)$$

En utilisant l'équation du profil bilinéaire (3.3) et l'équation de la caustique (3.8),  $\bar{z}$  est réécrit sous la forme :

$$\bar{z} = -(k_0^2 b)^{1/3} (z - z_c). \quad (3.28)$$

Cette formulation permet de constater que la caustique en  $z = z_c$  correspond à  $\bar{z} = 0$ . L'argument  $\bar{z}$  correspond donc à la distance normalisée à la caustique, normalisée par l'épaisseur de la couche limite de diffraction  $(k_0^2 b)^{-1/3}$ .

La solution de l'équation d'Airy (3.26) est de la forme (Coulouvrat, 1997; Pierce, 1994) :

$$\psi = a_s(\text{Ai}(\bar{z}) + a_g \text{Bi}(\bar{z})) \quad (3.29)$$

où  $\text{Ai}(\bar{z})$  et  $\text{Bi}(\bar{z})$  sont les fonctions d'Airy de première et deuxième espèce. Les coefficients  $a_s$  et  $a_g$  sont obtenus en considérant la condition initiale en  $z = z_s$  et la condition au sol en  $z_g = 0$  :

$$\frac{d\psi}{d\bar{z}}(\bar{z}_g) = 0, \quad (3.30a)$$

$$\tilde{p}'(\mathbf{x}_s, \tilde{\omega}) = e^{-ik_s \cos \alpha x_s}. \quad (3.30b)$$

La première condition implique :

$$a_g = -\frac{\text{Ai}'(\bar{z}_g)}{\text{Bi}'(\bar{z}_g)}. \quad (3.31)$$

La seconde condition mène à  $a_s = 1/(\text{Ai}(\bar{z}_s) + a_g \text{Bi}(\bar{z}_s))$ . Afin de prendre en compte les bonnes expressions des fonctions Ai et Bi à la source, nous devons considérer les formulations asymptotiques de celles-ci :

$$\tilde{\text{Ai}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) \approx \frac{\sin\left(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}}, \quad (3.32a)$$

$$\tilde{\text{Bi}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) \approx \frac{\cos\left(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}}, \quad (3.32b)$$

$$\tilde{\text{Ai}}(\bar{z} \rightarrow +\infty) \approx \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\bar{z}^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi}\bar{z}^{1/4}}, \quad (3.32c)$$

$$\tilde{\text{Bi}}(\bar{z} \rightarrow +\infty) \approx \frac{\exp\left(\frac{2}{3}\bar{z}^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi}\bar{z}^{1/4}}. \quad (3.32d)$$

Les fonctions Ai et Bi ainsi que leurs expressions asymptotiques  $\tilde{\text{Ai}}$  et  $\tilde{\text{Bi}}$ , sont représentées sur la FIGURE 3.15. En  $\bar{z} = 0$  les solutions asymptotiques divergent, contrairement aux fonctions Ai et Bis. La source se situe en  $\bar{z} < 0$ , ainsi on ne considère que les expressions (3.32a) et (3.32b). Ces expressions se composent de deux ondes :

$$\tilde{\text{Ai}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}} \left[ e^{i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} - \frac{\pi}{4})} \right], \quad (3.33a)$$

$$\tilde{\text{Bi}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}} \left[ e^{i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} + \frac{\pi}{4})} \right], \quad (3.33b)$$

avec le premier terme du membre de droite correspondant à une propagation vers les  $\bar{z}$  croissants, et le second terme du membre de droite correspondant à une propagation vers les  $\bar{z}$  décroissants. La composante qui nous intéresse est l'onde se propageant vers la caustique, donc dans le sens de  $\bar{z}$  croissant, notée incidente. Ainsi :

$$\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) = \frac{e^{i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} - \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}}, \quad (3.34a)$$

$$\tilde{\text{Bi}}_{\text{inc}}(\bar{z} \rightarrow -\infty) = \frac{e^{i(\frac{2}{3}(-\bar{z})^{3/2} + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi}(-\bar{z})^{1/4}}. \quad (3.34b)$$

Le paramètre  $a_s$  se met alors sous la forme :

$$a_s = \frac{1}{\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s) + a_g \tilde{\text{Bi}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)}. \quad (3.35)$$

Ainsi, le champ de pression vaut :

$$\tilde{p}'(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\text{Ai}(\bar{z})\text{Bi}'(\bar{z}_g) - \text{Bi}(\bar{z})\text{Ai}'(\bar{z}_g)}{\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)\text{Bi}'(\bar{z}_g) - \tilde{\text{Bi}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)\text{Ai}'(\bar{z}_g)} e^{-ik_s \cos \alpha x}. \quad (3.36)$$

Pour la formulation asymptotique notée  $\tilde{p}'_{ass}(\omega, \mathbf{x})$ , les fonctions Ai et Bi sont simplement remplacées par leurs expressions asymptotiques  $\tilde{\text{Ai}}$  et  $\tilde{\text{Bi}}$ .

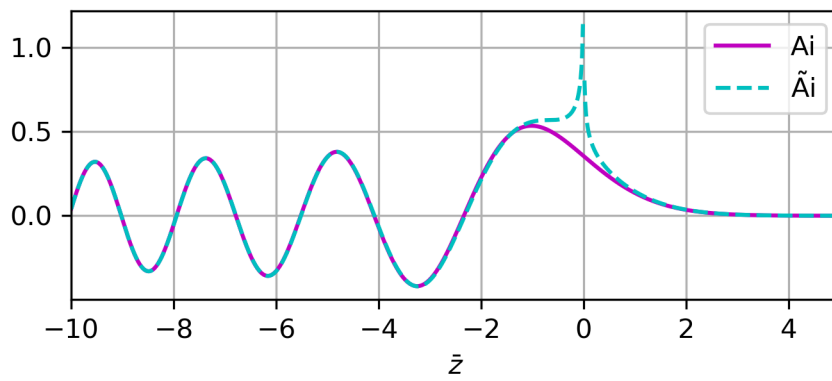
Sans la présence du sol,  $a_g = 0$ , il est très facile de déduire le champ de pression correspondant à la somme des ondes incidentes et réfractées :

$$\tilde{p}'_{ir}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\text{Ai}(\bar{z})}{\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)} e^{-ik_s \cos \alpha x}. \quad (3.37)$$

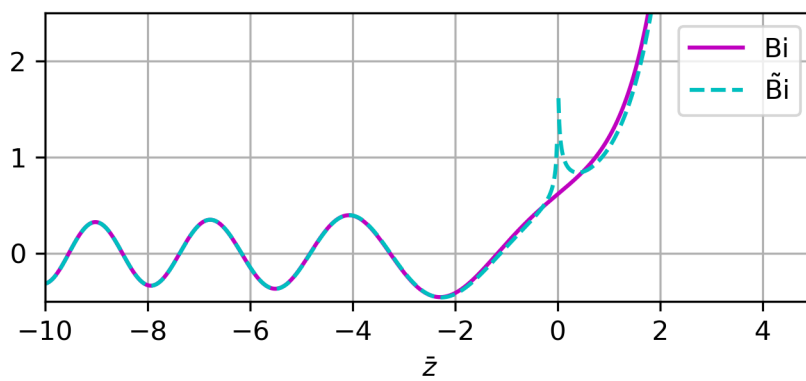
Ainsi, la composante du champ de pression des ondes réfléchies se déduit en soustrayant l'équation (3.37) de l'équation (3.36) :

$$\tilde{p}'_r(\omega, \mathbf{x}) = \tilde{\text{Ai}}(\bar{z}_g) \frac{\text{Ai}(\bar{z})a_r - \text{Bi}(\bar{z})}{\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)\text{Bi}'(\bar{z}_g) - \tilde{\text{Bi}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)\text{Ai}'(\bar{z}_g)} e^{-ik_s \cos \alpha x}, \quad (3.38)$$

avec  $a_r = \tilde{\text{Bi}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)/\tilde{\text{Ai}}_{\text{inc}}(\bar{z}_s)$ .



(a)



(b)

FIGURE 3.15 – Fonctions d’Airy de (a) première et (b) seconde espèce sous forme exacte  $Ai/Bi$  et sous forme asymptotique  $\tilde{A}i/\tilde{B}i$ .

## 3.4 Comparaison

L'objectif de cette section est de comparer le champ de pression calculé par le biais de la méthode des rayons complexes et décrit par l'équations (3.21), à d'une part la solution analytique de l'équation de Helmholtz (3.36) et d'autre part à sa formulation asymptotique. Cette comparaison est faite directement sur le champ de pression mais aussi sur les différentes formes d'ondes arrivant aux récepteurs en  $x = 100$  km, pour la même source et le même profil bilinéaire que précédemment.

### 3.4.1 Champ de pression

Le champ de pression est calculé pour deux angles d'émission,  $\alpha = -25^\circ$  (FIGURE 3.16a) et  $\alpha = -30^\circ$  (FIGURE 3.16b). Ce deuxième angle d'émission implique  $M = 1,2$  à partir de la relation (3.2). La fréquence choisie pour la comparaison est égale à 0,1 Hz (soit une longueur d'onde de 3400 m) et la pulsation  $\tilde{\omega} = 2\pi f$ . Dans l'expression (3.21), l'amplitude à la source est  $\tilde{p}_s(\tilde{\omega}) = 1$  Pa.

La norme du champ de pression de toutes les contributions des ondes (directes, réfractées et réfléchies)  $|\tilde{p}'|$  est représentée pour ces deux angles d'émission sur la FIGURE 3.16 suivant l'altitude entre le sol  $z_g = 0$  et la source à 17 km. Les solutions en amplitude sont représentées en points noirs pour la solution rayons, en bleu pour la solution de l'équation de Helmholtz, en rouge pour la solution asymptotique de l'équation de Helmholtz. L'amplitude des solutions rayons et asymptotiques est infinie à la caustique en  $z = 5,98$  pour  $\alpha = -25^\circ$ , et en  $z = 1,39$  km pour  $\alpha = -30^\circ$ . Ces deux altitudes sont indiquées respectivement en vert et rouge sur la FIGURE 3.5 en fonction des angles d'émission choisis. Ce comportement d'amplitude infinie à la caustique est en accord avec l'approximation haute fréquence de l'acoustique géométrique (cf partie 2.3).

Au-dessus de la caustique, les oscillations du champ sont associées aux interférences entre les trois types d'ondes : incidente, réfractée et réfléchie illustrées sur la FIGURE 3.16. A l'altitude de 17 km, l'amplitude de  $|\tilde{p}'|$  est de 1,7 Pa résultant d'une interférence constructive entre l'onde incidente (avec une amplitude de 1 Pa et une phase  $\omega t = 196$ ), l'onde réfractée (avec une amplitude de 1 Pa et une phase  $\omega t = 209 - \pi/2$ ), et l'onde réfléchie (avec une amplitude de 1 Pa et une phase  $\omega t = 209 + i5$ ).

En dessous de la caustique, dans la zone d'ombre, l'amplitude décroît de manière exponentielle suivant  $\exp(-|\tilde{\omega}|\text{Im}(t_a)) \approx \exp(-|\tilde{\omega}|\frac{2b^{1/2}}{3c_{\text{ref}}}(z - z_c)^{3/2})$ , comportement asymptotique de l'amplitude des ondes diffractées par une caustique pli (Rosales et Tabak, 1998). Au sol en  $z_g = 0$ , l'amplitude totale est de 0,17 Pa et est égale au double de l'amplitude des rayons complexes incidents au sol (qui ont une amplitude de  $0,83 - i0,82$  Pa et une phase  $\omega t = 203 - i2,58$ ).

Pour  $\alpha = -25^\circ$  (FIGURE 3.16a) la solution des rayons (rouge) suit la solution exacte de l'équation de Helmholtz (bleue) loin de la caustique et correspond à son approximation asymptotique sur tout le domaine. Dans cette configuration, la méthode des rayons complexes donne donc la solution attendue, sauf au voisinage de la caustique sur une distance de 4.7 km.

Pour  $\alpha = -30^\circ$  (FIGURE 3.16b), la caustique est plus près du sol  $z_c = 1,39$  km, correspondant à une distance plus petite que la longueur d'onde. Dans ce cas, la solution obtenue par méthode des rayons complexes s'écarte de la solution de l'équation de Helmholtz sur tout le domaine. On voit là la limite de l'approximation haute fréquence, qui n'est ici plus satisfaite en raison de la trop grande proximité de la caustique avec le sol.

Afin de voir l'influence des différents types d'ondes sur la solution, nous présentons séparément les solutions : ondes incidente et réfractée sur la FIGURE 3.17a et onde réfléchie sur la FIGURE 3.17b. La somme de l'onde incidente et réfractée est facilement obtenue pour la solution rayon à partir de l'équation (3.21) ainsi que pour les rayons réfléchis. Pour la solution de l'équation de Helmholtz, la somme de l'onde incidente et de l'onde réfractée est obtenue

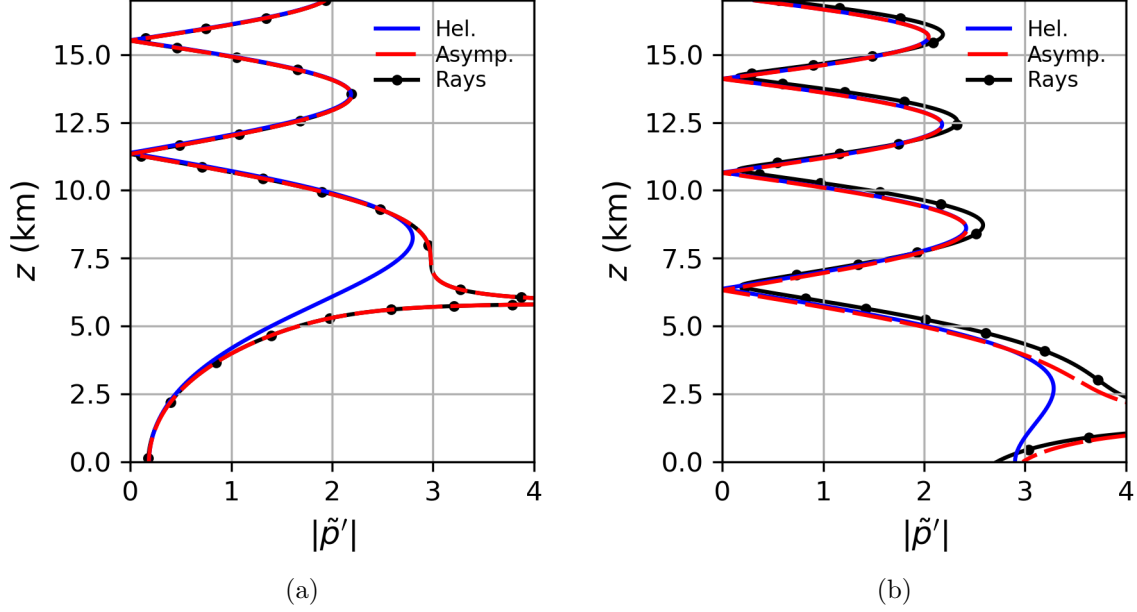


FIGURE 3.16 – Surpression acoustique totale  $\tilde{p}'$  (Pa) pour une onde plane en  $z_s = 17$  km avec un angle d'émission (a)  $\alpha = -25^\circ$  et (b)  $\alpha = -30^\circ$  en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire. La fréquence est égale à 0,1 Hz. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l'équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont présentées en fonction de l'altitude.

à partir de l'équation (3.37) et la solution de l'onde réfléchie est obtenue à partir de l'équation (3.38). La solution asymptotique est obtenue à partir des formulation asymptotique de ces deux équations. On constate que c'est uniquement la solution des rayons réfléchis qui induit un écart significatif entre l'approximation rayons complexes et la solution exacte. Cette différence est due à l'approximation de l'amplitude à la réflexion des rayons au sol, multipliée par un facteur 2 (coefficient de réflexion égal à 1), alors que le coefficient de réflexion associé à la solution de l'équation de Helmholtz  $a_g$  est égal à 2,2 (coefficient de réflexion égal à 1.2).

L'hypothèse de réflexion d'onde plane n'est donc pas valide lorsque la caustique est trop près du sol car l'approximation haute fréquence n'y est pas satisfaite. En revanche, à la fréquence considérée, l'approximation haute fréquence reste bien satisfaite sur les termes de propagation : la longueur d'onde acoustique, 3,4 km reste petite devant l'échelle de stratification  $c_0/(dc_0/dz) \approx 90$  km.

L'erreur due aux rayons complexes réfléchis peut être évaluée en fonction de l'argument de la fonction d'Airy  $\bar{z}_g$  au sol en  $z_g = 0$  (voir FIGURE 3.18). Nous rappelons que  $\bar{z}_g = (k_0^2 b)^{1/3} z_c$ , avec  $z_c$  défini par la relation (3.8). Pour différents angles d'émission  $\alpha$  (c'est-à-dire différents nombres de Mach), donc différentes altitudes de caustique et différentes fréquences nous calculons les erreurs entre les deux solutions en fonction de  $\bar{z}_g$ . En acceptant une erreur maximale de l'ordre de  $10^{-3}$  on trouve la limite  $\bar{z}_g = 2,54$  en dessous de laquelle l'erreur due aux rayons réfléchis est trop élevée. Cette limite est représentée en noir sur la FIGURE 3.18.

La solution des rayons complexes pourrait être améliorée au-delà de l'approximation haute fréquence en utilisant la théorie uniforme à la caustique (Keller, 1962; Ludwig, 1966; Babich et Buldyrev, 1991), décrite dans la section 2.3.6. Pour un gradient de vitesse du son constant, la solution des rayons peut être raccordée à la solution de Helmholtz en connaissant le coefficient de réflexion exact. Pour d'autres profils de vitesse du son, la solution de l'équation de Helmholtz doit être résolue numériquement.

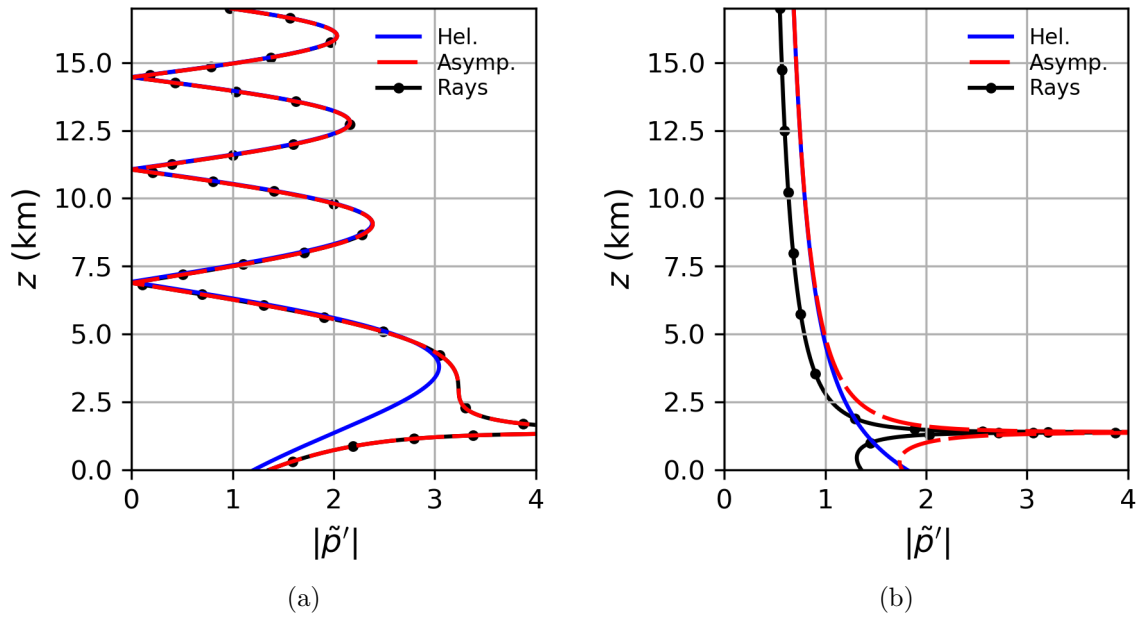


FIGURE 3.17 – Surpression acoustique  $\tilde{p}'$  (Pa) pour une onde plane en  $z_s = 17$  km avec un angle d'émission  $\alpha = -30^\circ$  en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire (a) sans prendre en compte de la réflexion en  $z_g = 0$  et (b) en ne considérant que les ondes réfléchies. La fréquence est égale à 0,1 Hz. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l'équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont présentées en fonction de l'altitude.

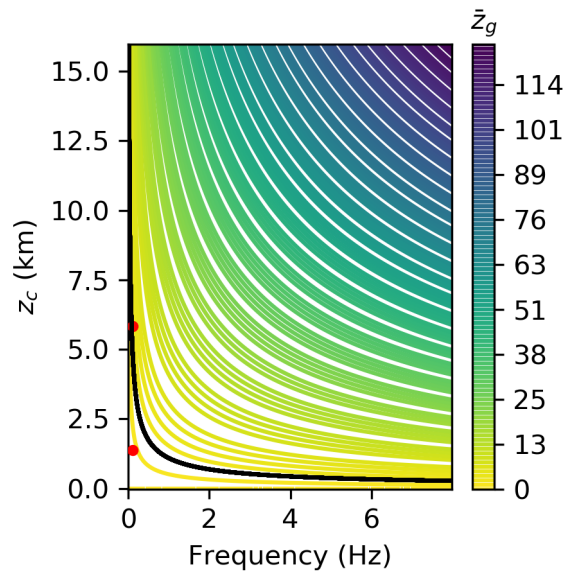


FIGURE 3.18 – Argument de la fonction d'Airy  $\bar{z}_g$  en  $z_g = 0$  pour différentes altitudes de la caustique  $z_c$  et différentes fréquences avec la limite  $\bar{z}_g = 2,54$  (—). Les points rouges correspondent aux angles  $\alpha = -25^\circ$  et  $\alpha = -30^\circ$ .



### 3.4.2 Formes d'ondes

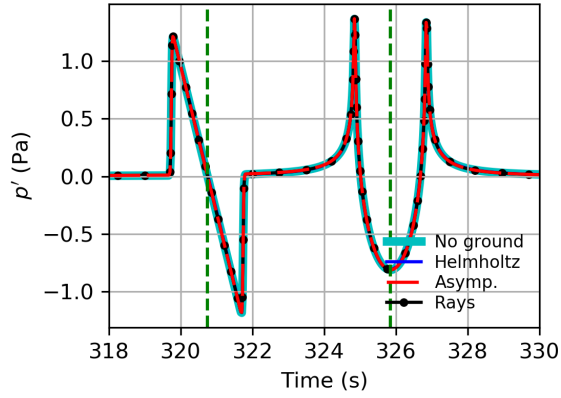
Dans cette section nous allons comparer les formes d'onde dans le cas de l'onde plane avec le profil bilinéaire de vitesse du son pour un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ . Le signal émis à la source,  $p'(\mathbf{x}_s, t) = s_\delta(\frac{t-t_s}{t_d})$  est une onde en N d'amplitude 1 Pa et de durée de phase positive  $t_d = 1$  s :

$$s_\delta(t') = -\frac{t'}{2} \left( \tanh\left(\frac{t'+1}{\delta}\right) - \tanh\left(\frac{t'-1}{\delta}\right) \right), \quad (3.39)$$

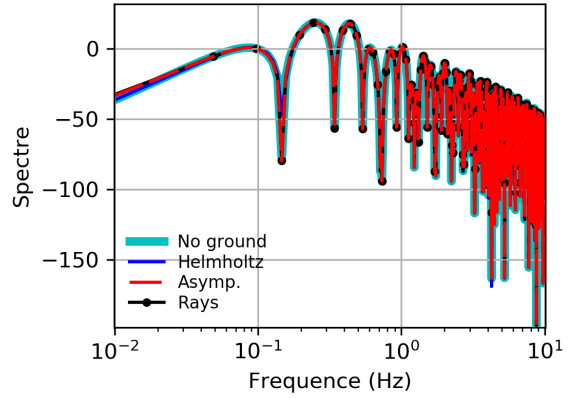
avec  $\delta = 0,02$  s, le temps de montée du choc. La tangente hyperbolique dans cette définition de forme d'onde est utilisée pour fenêtrer le signal. Le temps de montée fini permet d'avoir un signal d'amplitude finie pour les rayons réfractés après avoir tangenté la caustique (Plotkin, 2002). En effet, après avoir tangenté une caustique, une onde en N se transforme en une onde en U, par une transformée de Hilbert (cf. equation (2.55)) d'amplitude infinie (Pierce, 1994). Ainsi, le maximum d'amplitude d'une onde en U après refraction est égal à 1,9 fois l'amplitude de l'onde en N, et le temps d'arrivée d'une onde en U est décalé de  $\pm 1,001$  s. Le pic du spectre (maximum du spectre) associé à cette signature est autour de 0,8 Hz et le temps de montée filtre rapidement celui-ci au-delà de 50 Hz.

Sur la FIGURE 3.19 nous présentons les signatures en pression ainsi que leurs spectres pour cinq récepteurs en  $x = 100$  km pour les altitudes  $z = 10, 6,7, 6, 3,4, 0$  km. Les solutions présentées sont celle obtenues par méthode des rayons complexes en noir, la solution de l'équation de Helmholtz en bleu, sa formulation asymptotique en rouge et la solution sans la prise en compte du sol en cyan. Les traits en pointillés verts indiquent les temps d'arrivée des formes d'onde associées à l'acoustique géométrique. Nous présentons trois signatures et spectres associés au-dessus de la caustique pour visualiser leur évolution au fur et à mesure que l'on s'approche de la caustique, (figures 3.19a - 3.19f), puis deux signatures et spectres associés au-delà (figures 3.19g - 3.19j) illustrant la pénétration en zone d'ombre. Dans la zone illuminée en  $z = 10$  km (FIGURE 3.19a), le rayon incident direct transporte une onde en N et le rayon réfracté une onde en U (onde en N ayant subi un déphasage de  $\pi/2$  au passage de la caustique). L'amplitude de l'onde en N est de 1,2 Pa avec un temps d'arrivée de 321 s. L'amplitude de l'onde en U est de 1,3 Pa ( $1,2 \times 1,09$ ) et le temps d'arrivée est de 324 s. A cette altitude, les quatre solutions présentées donnent les mêmes résultats, le récepteur se trouvant suffisamment loin de la caustique et du sol. Les spectres correspondant sont eux aussi identiques, avec leur forme en arches successives caractéristiques d'une onde en N. En s'approchant de la caustique, en  $z = 6,7$  km (FIGURE 3.19b) l'onde en N et l'onde en U, de moins en moins séparées temporellement, fusionnent petit à petit, avec un temps d'arrivée de 323 s pour l'onde en N et 323,5 s pour l'onde en U. L'amplitude quant à elle augmente, passant à 2 Pa pour l'onde en N et 2,2 Pa pour l'onde en U. A cette altitude aussi les quatre solutions donnent le même résultat temporellement ou fréquentiellement. A partir d'une altitude de  $z = 6$  km (FIGURE 3.19e), à environ 20 cm de la caustique, les deux ondes N+U ont totalement fusionné, avec un temps d'arrivée de 323,2 s et une amplitude de 5,5 Pa (qui devient infinie en  $z = 5,98$  km). À une telle proximité de la caustique la solution des rayons ne se superpose plus qu'à la solution asymptotique de l'équation de Helmholtz, et un écart conséquent apparaît avec la solution exacte. À cette altitude éloignée du sol, la réflexion sur celui-ci est sans impact. Ayant passé la caustique, nous nous retrouvons dans la zone d'ombre où la somme des deux ondes directes et réfractées et transportées par le rayon complexe, est diffractée. L'amplitude y décroît de manière exponentielle : à 2,5 km de la caustique ( $z = 3,4$  km FIGURE 3.19g), l'amplitude n'est plus que de 0,007 Pa. A cette altitude la solution rayons se superpose parfaitement à la solution asymptotique de l'équation de Helmholtz, mais diffère très légèrement de la solution exacte. Étant plus proche du sol, la solution sans la contribution des rayons réfléchis montre une différence avec les autres solutions. Le spectre associée à cette forme d'onde diffractée décroît de manière exponentielle.

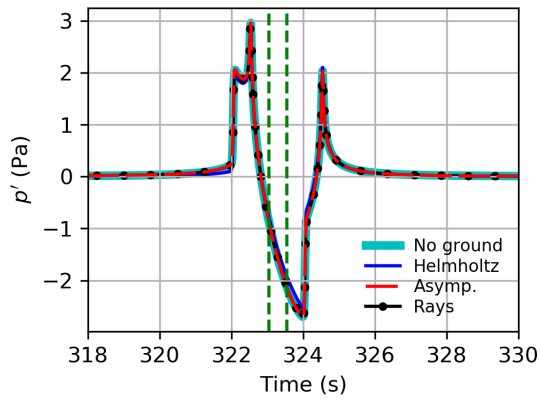
Au sol en  $z = 0$  km l'amplitude de la solution rayon est de  $1 \times 10^{-2}$  Pa contre  $1,15 \times 10^{-2}$  pour les deux solutions de l'équation de Helmholtz, différence une nouvelle fois causée par la différence entre les coefficients de réflexion entre les deux méthodes. La décroissance beaucoup plus rapide des hautes fréquences FIGURE 3.19j conduit à une forte augmentation de la durée du signal, ici d'environ 30 s au sol. Le temps d'arrivée de l'onde diffractée est constant, égal à 323,2 s dans toute la zone d'ombre. Il est égal au temps d'arrivée à la caustique comme nous l'avons vu dans la section 3.2.3. Seule la partie imaginaire du temps d'arrivée augmente en pénétrant plus avant dans la caustique, ce qui implique l'augmentation des effets de la diffraction.



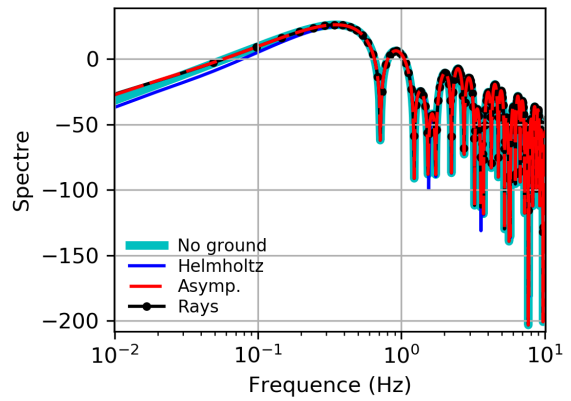
(a)  $z = 10$  km



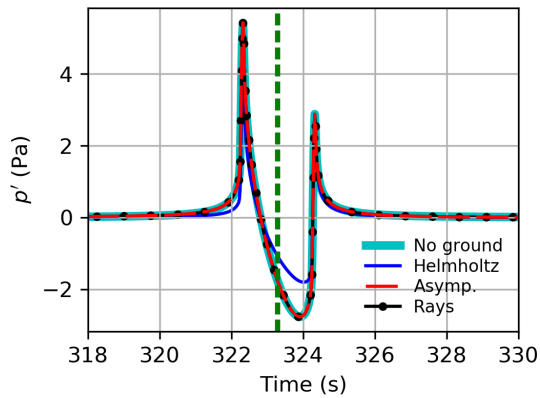
(b)  $z = 10$  km



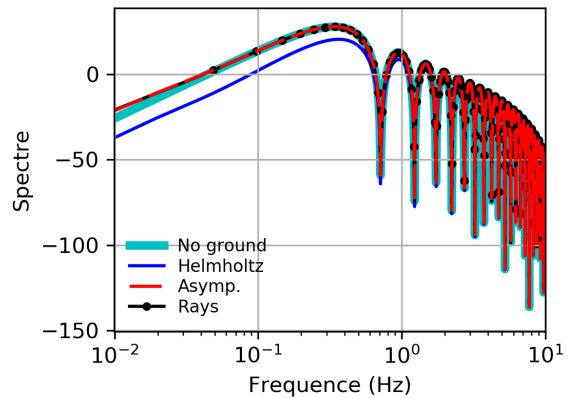
(c)  $z = 6,7$  km



(d)  $z = 6,7$  km



(e)  $z = 6$  km



(f)  $z = 6$  km

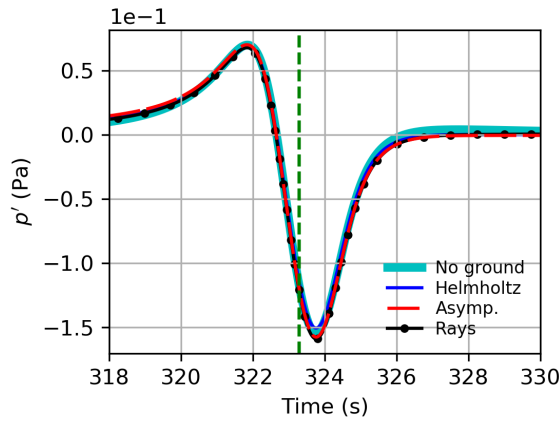
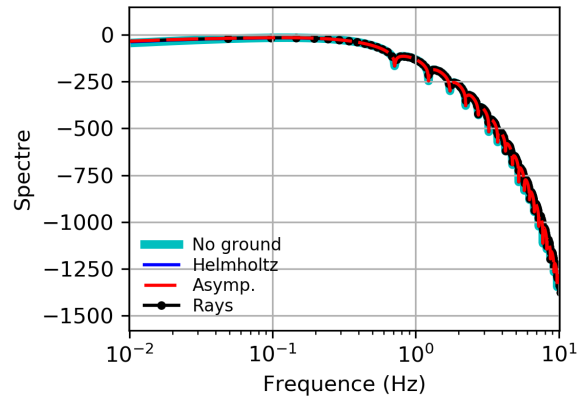
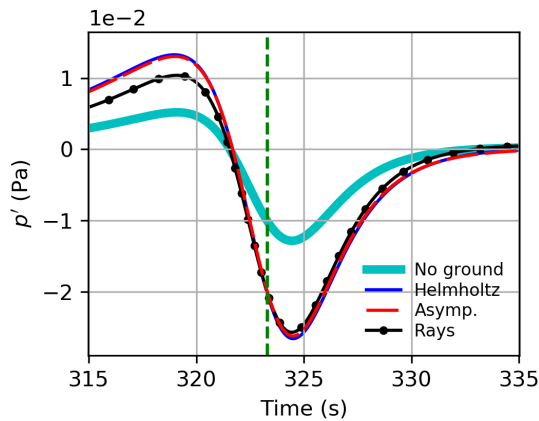
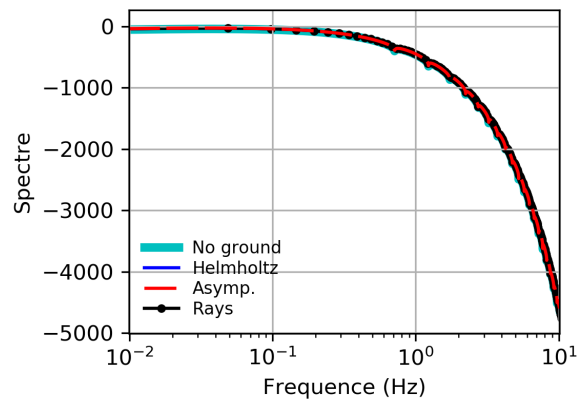

 (g)  $z = 3,4$  km

 (h)  $z = 3,4$  km

 (i)  $z = 0$  km

 (j)  $z = 0$  km

FIGURE 3.19 – Formes d’ondes  $p'$  (Pa) et spectres associés pour une onde en N émise en  $z_s = 17$  km avec un angle d’émission  $\alpha = -25^\circ$  en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l’équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont comparées en pour différentes altitudes de récepteurs dans la zone illuminée  $z = 10, 6, 7, 6$  km et dans la zone d’ombre  $z = 3, 4, 0$  km.

### 3.5 Conclusion du chapitre

L'objectif de ce chapitre était la validation analytique de la méthode des rayons complexes présentée dans le chapitre 2. Le cas analytique d'un front d'onde plan associé au profil de vitesse du son dit *bilinéaire* a permis d'illustrer les rayons complexes, ainsi que les paramètres géométriques en résultant. Les rayons complexes ont des paramètres d'émission complexes, ce qui leur permet de contourner la singularité à la caustique. Les coordonnées le long d'un rayon complexe donné sont donc à valeur complexe et n'ont pas de sens physique. Seuls sont à considérer les points d'arrivée purement réels, correspondant alors à un récepteur avec une signification physique. Les paramètres géométriques tels que le temps d'arrivée, obtenus en ces mêmes points récepteurs, sont quant à eux à valeurs complexes, la partie imaginaire mesurant les effets de diffraction de l'onde en zone d'ombre et qui traduit son atténuation. Par ailleurs, l'obtention analytique des paramètres d'émission dans la zone illuminée et dans la zone d'ombre donne une idée de leur comportement local au voisinage d'une caustique. Ceci facilitera notre démarche pour l'intégration numérique des rayons propres qui sera faite dans le chapitre 4. Ainsi par exemple, on voit que les parties réelles des paramètres d'émission en zone d'ombre d'une caustique peuvent être choisis en première estimation constantes, proche de leur valeur à la caustique (déterminée par un rayon réel).

La comparaison des amplitudes et des formes d'onde entre les rayons complexes et la solution de l'équation de Helmholtz permet de valider la méthode des rayons complexes et donc son utilisation dans le but de simuler la diffraction d'onde à la caustique. La principale limitation est la présence d'une réflexion au sol, lorsque la caustique est distante de celui-ci de moins d'une longueur d'onde environ.

---

## Chapitre 4

# Algorithme de recherche de rayons propres complexes et application à une source ponctuelle

*Ce Chapitre est inspiré de l'article soumis suivant :*

A. Zelias, O. Gainville, F. Coulouvrat. "Complex eigenrays algorithm for infrasound propagation in a windy range dependent atmosphere", submitted to *Journal of the Acoustical Society of America* on 12/23/2021.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Tracé de rayons</b>	<b>38</b>
2.2.1	Équation eikonale	38
2.2.2	Espace vectoriel pour les rayons complexes	41
2.2.3	Équations des rayons	42
2.2.4	Conditions initiales des rayons	43
2.2.5	Rayons complexes	47
<b>2.3</b>	<b>Amplitude du champ</b>	<b>50</b>
2.3.1	Conservation de l'action de l'onde	50
2.3.2	Solution complexe du champ de pression	51
2.3.3	Section du tube de rayon et caustiques	52
2.3.4	Champ de pression à la source	53
2.3.5	Amplitude dans la zone d'ombre	54
2.3.6	Théorie Uniforme de la Diffraction à la caustique	56
<b>2.4</b>	<b>Réflexion des rayons complexes</b>	<b>57</b>
<b>2.5</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>57</b>

---

## 4.1 Introduction

Nous avons présenté la méthode classique de tracé de rayons dans le chapitre 1. Cette méthode est très fréquemment utilisée en acoustique infrasonore car elle permet la prise en compte des sources tridimensionnelles, des données atmosphériques, et du relief de la surface de la Terre pour un faible coût numérique (Gainville, 2008). C'est par ailleurs un outil de référence pour les problèmes d'inversion, tels que la localisation de la source (Gainville et al., 2017; Blom, 2019) ou le sondage atmosphérique (Vanderbecken et al., 2019). Sa limitation liée à la présence de zones d'ombre formées par les caustiques est résolue en utilisant sa

généralisation aux rayons complexes, présentée dans le chapitre 2 et validée analytiquement dans le chapitre 3.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un algorithme, adapté à la méthode des rayons complexes, prenant en compte les caractéristiques principales de la propagation infrasonore qui sont : des sources impulsionnelles, la stratification de la vitesse du son, l'advection par le vent lui-même stratifié, et les arrivées multiples dues aux guides d'onde. L'algorithme numérique est illustré sur le cas d'une source ponctuelle fixe au sol avec un profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) auquel on ajoute un vent défini par une fonction Gaussienne (Blom, 2019), profils d'ores et déjà présentés dans le chapitre 1.

Ce chapitre s'organise comme suit : dans une première partie nous présentons les différentes étapes de notre algorithme pour les rayons complexes. Cette partie contient une section sur le tracé de rayons permettant d'introduire les méthodes numériques d'intégration des rayons et de présenter la problématique de la caustique d'un point de vue numérique (cas du chapitre 3). L'utilisation de l'algorithme permet dans un second temps de présenter les résultats de propagation des infrasons pour le cas d'intérêt choisi (source ponctuelle fixe au sol). Finalement, une comparaison de ces résultats avec l'approximation parabolique permet de valider notre algorithme de recherche des rayons propres complexes et de calcul du champ par cette méthode.

## 4.2 Algorithmes pour les rayons complexes

Nous débutons cette section par la présentation de l'intégration numérique des rayons complexes, puis une présentation de l'algorithme d'optimisation des rayons propres. Ces parties seront illustrées par le cas de l'onde plane associée à un profil bilinéaire présentant une caustique pli en altitude, étudiée dans le chapitre 3.

Nous décrivons ensuite, pour une configuration réelle de source ponctuelle avec un profil météorologique réaliste présenté dans le chapitre 1, la méthode de recherche de rayons propres que nous avons développée. Celle-ci se fait en trois étapes :

- le lancer de rayons, nécessitant l'algorithme d'intégration,
- la recherche de paramètres initiaux pour les rayons propres, à partir du lancer de rayons,
- l'optimisation des rayons propres, nécessitant l'algorithme d'optimisation.

### 4.2.1 Intégration numérique des rayons complexes

Les équations des rayons (2.20) (2.21) et les équations des géodésiques (2.24) forment un système d'équations différentielles ordinaires inhomogène (dépendant du temps  $t_a$ ) dont la variable d'intégration est complexe. Ce système s'exprime sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt_a} = \mathbf{R}(\mathbf{F}, t_a), \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{R}(\mathbf{F}, t_a)$  une fonction non linéaire du vecteur  $\mathbf{F}$  de taille 18 pour des cas d'étude en trois dimensions et de taille 8 pour des cas d'étude en deux dimensions. Le vecteur de conditions initiales  $\mathbf{F}(t_s)$  est connu à la source. Ce système d'équations est intégré entre le temps d'émission complexe  $t_s$  et le temps final complexe  $t_a$  suivant un chemin d'intégration noté  $t_\sigma(\sigma)$  dans le plan complexe. La variable  $\sigma$  est la variable curvilinéaire telle que  $t_\sigma(0) = t_s$  et  $t_\sigma(1) = t_a$  (Hille, 1997). Ainsi, le système d'équations (4.1) peut être reformulé sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{F}(t_\sigma(\sigma))}{d\sigma} = \frac{dt_\sigma}{d\sigma} \mathbf{R}(\mathbf{F}, t_\sigma(\sigma)). \quad (4.2)$$

Ce système peut être résolu numériquement en utilisant un schéma numérique symplectique qui permet d'assurer que l'équation de dispersion est satisfaite le long des rayons calculés (Hairer et al., 2006). Le choix de la méthode d'intégration se fait principalement sur la précision,

critère d'autant plus important que la distance de propagation est grande. La méthode exploitée dans le cadre du tracé de rayons est généralement basée sur l'algorithme de Runge et Kutta d'ordre 4 (Gainville et al., 2006; Drob et al., 2003; Brown et Garcés, 2008; Press et al., 1996), utilisé ici par le biais de l'intégrateur *dopri5* de la librairie SciPy (Hairer et al., 1993). Une autre méthode d'intégration est la méthode implicite Adams-Moulton, utilisée par le biais de l'intégrateur *zvode* (Hairer et al., 1993).

L'intégration du système (4.2) permet d'avoir simultanément les rayons acoustiques et les éléments géodésiques. L'intégration requiert un pas de temps initial et les conditions initiales pour chaque équation. L'intégration des rayons requiert aussi le calcul des différents gradients de vitesse du son et de vent qui sont évalués de manière analytique grâce aux profils météorologiques holomorphes nécessaires pour les rayons complexes. Dans ce chapitre, nous utilisons un profil analytique de la littérature défini par Lingeitch et al. (1999) et utilisé par Blom (2019) avec une composante de vent. La problématique liée à l'interpolation de profils de vitesse du son et de vent quelconques sera abordée dans la partie 5.3.1, du chapitre 5.

Dans nos cas d'étude, le chemin d'intégration est défini tel que :

$$t_\sigma(\sigma) = t_s + \sigma(t_a - t_s), \quad \frac{dt_\sigma}{d\sigma} = t_a - t_s, \quad (4.3)$$

qui correspond au chemin le plus court entre la source et le récepteur dans le plan  $(\text{Re}(t), \text{Im}(t))$ . L'utilisation de ce chemin d'intégration dans le cadre de l'optique géométrique ou de la sismologie est courante dans la littérature (Thomson, 1997; Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Amodei et al., 2006; Kravtsov et Zhu, 2010). Nous verrons dans la partie 4.3.2 que d'autres chemins d'intégration dans le plan complexe sont possibles.

Considérer le cas de l'onde plane avec le profil bilinéaire dont on connaît la solution analytique (cf. chapitre 3), permet de comparer la précision de l'intégration numérique relativement à l'intégration analytique des rayons. Pour cela nous considérons un rayon avec un angle d'émission  $\alpha = -25^\circ$ , avec une position d'émission  $\phi = 52,16 + 28i,09 \text{ km}$  et un temps maximal d'intégration  $t = 160,32 + 85i,57 \text{ s}$ . Ces paramètres sont obtenus analytiquement pour un rayon arrivant en zone d'ombre au point  $(100, 2)$ . L'intégration analytique (en rouge) et l'intégration numérique (en noir) de ce rayon sont représentées sur la FIGURE 4.1, avec la caustique indiquée en orange et la zone d'ombre se situant sous la caustique. Sur la FIGURE 4.1b, nous indiquons l'erreur absolue (en mètres) sur la variable altitude  $\text{Re}(z)$  à chaque position d'intégration entre la solution analytique et le calcul numérique, en faisant varier les tolérances de convergence absolue et relative fixées égales et notées *tol*. Afin d'avoir une erreur minimale lors de l'intégration numérique, la tolérance doit être choisie inférieure à  $10^{-8}$ . L'erreur absolue calculée est effectivement égale à moins d'un mètre pour 100 km de propagation.

## 4.2.2 Algorithme d'optimisation

Afin de pouvoir atteindre un récepteur localisé à une position précise, sans connaître la solution analytique des rayons, il est indispensable d'optimiser les rayons propres. Pour cela nous utilisons l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

### Algorithme de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt (noté dans la suite LMA) est un algorithme itératif standard pour des problèmes d'optimisation (Marquardt, 1963; Levenberg, 1994). C'est une combinaison de deux méthodes de minimisation : la descente de gradient et l'algorithme de Gauss-Newton (Moré, 1978). Pour la descente de gradient, la somme des erreurs quadratiques est diminuée en actualisant les paramètres recherchés dans la direction de la pente la plus raide. Pour l'algorithme de Gauss-Newton, la somme des erreurs quadratiques est diminuée en



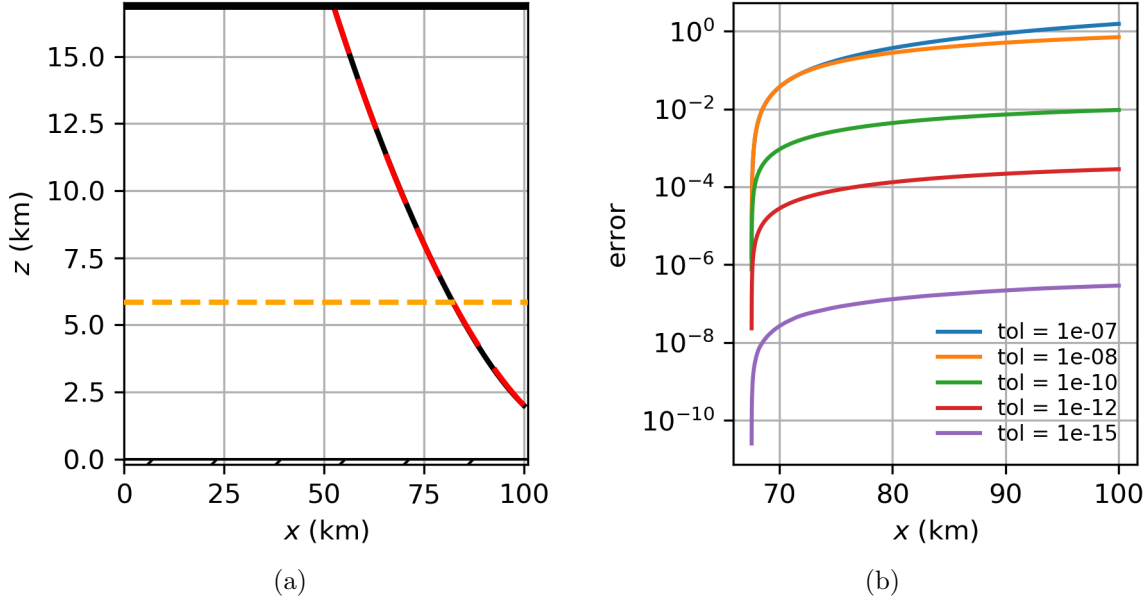


FIGURE 4.1 – (a) Comparaison entre l’intégration analytique (—) et l’intégration numérique (—) pour un rayon complexe projeté dans le plan réel, arrivant en zone d’ombre située sous la caustique (—). (b) Erreurs absolues (m) entre les positions en  $\text{Re}(z)$  en fonction de la partie réelle de  $x$  le long du rayon, calculées à chaque pas d’intégration entre l’intégration analytique et l’intégration numérique, pour différentes tolérances de convergence  $tol$ .

supposant que la fonction des moindres carrés est localement quadratique et en trouvant alors le minimum.

Ainsi le LMA se comporte plutôt comme une méthode de descente de gradient lorsque les estimations sont loin de l’optimum, et plutôt comme un algorithme de Gauss-Newton lorsque les paramètres s’en rapprochent. Dans cet algorithme, la pondération entre les deux méthodes se fait par le biais du paramètre d’amortissement qui est actualisé à chaque itération et permet d’assurer une diminution de l’erreur de la solution (Lourakis et al., 2005). Le LMA est particulièrement efficace au voisinage des caustiques où la Jacobienne devient singulière (Lampton, 1997).

### Illustration sur le cas de la caustique pli

Afin de mettre en évidence la problématique liée à la singularité présente à la caustique lors de l’intégration et de l’optimisation numérique des rayons propres, nous reprenons le cas de l’onde plane incidente, avec le profil de vitesse du son bilinéaire présenté dans le Chapitre 3. La source se situe à 17 km d’altitude et la caustique à 5,98 km pour un angle d’émission  $\alpha = -25^\circ$ . Nous considérons un rayon propre se propageant entre la source  $\mathbf{x}_s$  et un point récepteur  $\mathbf{x}_r$  à 2 km d’altitude, situé dans la zone d’ombre. Ces points (la source et le récepteur) forment un problème aux valeurs limites à deux points. Pour pouvoir intégrer ce rayon, il est nécessaire de trouver les paramètres  $\phi$  et  $\tau$  permettant d’atteindre le récepteur dans la zone d’ombre. Trouver ces paramètres revient à résoudre un problème d’optimisation qui vise à minimiser la fonction coût

$$d(\phi, \tau) = |\mathbf{X}(\phi, \tau) - \mathbf{x}_r|, \quad (4.4)$$

en utilisant l’algorithme LMA décrit dans la partie 4.2.2. Pour ce faire, il est nécessaire de définir un point initial  $\mathbf{X}(\phi, \tau)$ , qui sera optimisé. Nous choisissons le point  $\tau = 0$  représenté par un carré sur les FIGURES 4.2, 4.4, 4.6. L’objectif est alors d’optimiser ce paramètre afin d’atteindre les paramètres du rayon propre qui relie le point récepteur en zone d’ombre. Ce

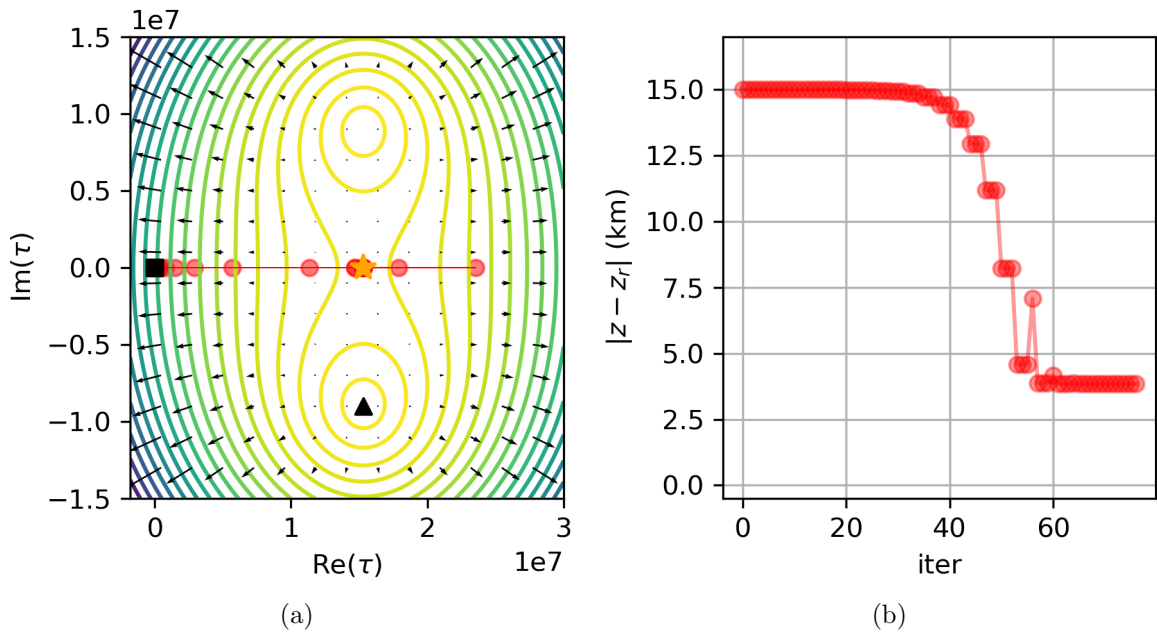


FIGURE 4.2 – (a) Contours de la fonction coût  $d$ , dans le plan  $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d’une onde plane et d’un profil bilinéaire, défini dans le Chapitre 3. Optimisation d’un rayon à partir de paramètres réels (■) jusqu’à un récepteur dans la zone d’ombre (▲) avec les différentes itérations de l’optimisation (●). La caustique est indiquée en orange (★). (b) Erreur absolue en  $z$  pour chaque itération de l’algorithme d’optimisation.

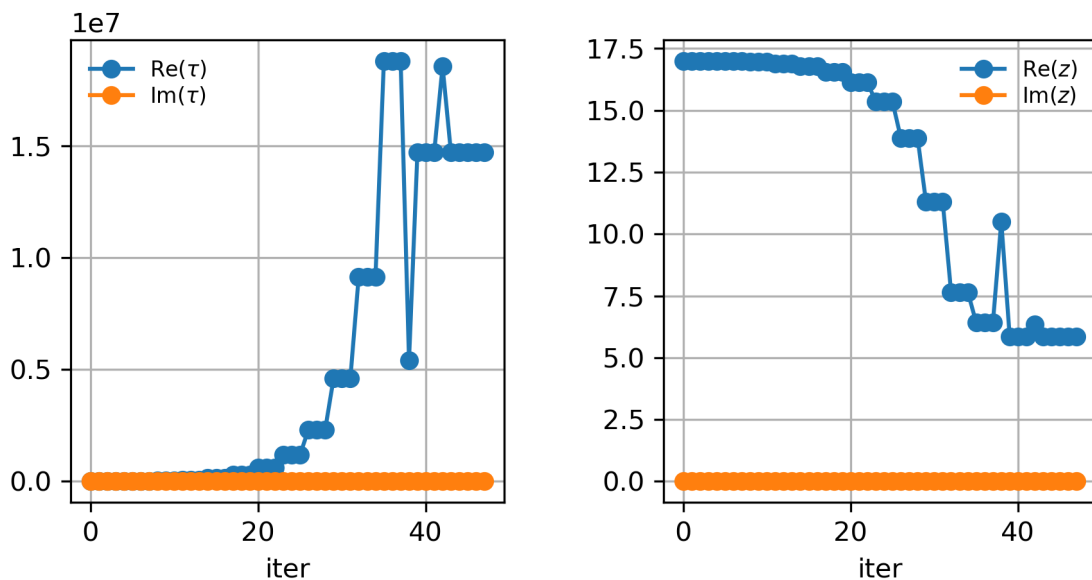


FIGURE 4.3 – Comportement de  $\tau$  et  $z$  pour chaque itération de l’algorithme d’optimisation pour le cas de la FIGURE 4.2.

paramètre nous est connu analytiquement par les équations (3.6) et est représenté par un triangle sur la FIGURE 4.2.

Les contours de la fonction coût (4.4), ainsi que la direction du gradient, calculés à partir de la matrice Jacobienne, sont représentés sur les FIGURES 4.2, 4.4, 4.6 dans le plan  $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ . Les minima de cette fonction coût correspondent aux solutions du problème de minimisation. Ainsi il y a deux solutions symétriques par rapport à l'axe  $\text{Im}(\tau) = 0$ , correspondant aux deux solutions complexes conjuguées, seule celle où  $\text{Im}(\tau) < 0$  finalement retenue (cf. chapitre 3) étant représentée par le triangle noir.

Le vecteur position  $\mathbf{X}$  est évalué à partir des solutions analytiques connues définies par les équations (3.5) avec les paramètres  $\phi$  et  $\tau$  calculés à chaque itération. Le paramètre  $\tau$  à chaque itération numérique de l'optimisation est représenté par les points rouges sur ces mêmes figures.

Lorsque les paramètres initiaux sont réels, l'algorithme reste sur l'axe réel de  $\tau$  et n'atteint pas le récepteur. Les quantités  $\text{Re}(\tau)$  et  $\text{Re}(z)$  varient en fonction des itérations de l'algorithme d'optimisation, contrairement aux parties imaginaires qui restent nulles (FIGURE 4.3). L'algorithme est arrêté lorsque la valeur minimale de la fonction coût est atteinte. La solution en  $z$  optimale dans ce cas est proche de l'altitude de la caustique ( $z_c = 5,98$  km), soit la position de l'axe réel la plus proche du récepteur. L'algorithme trouve bien un minimum au bout d'environ 60 itérations de l'algorithme, mais ce minimum est contraint à rester sur l'axe réel.

Afin d'atteindre la zone d'ombre, nous ajoutons une petite perturbation complexe au paramètre initial  $\tau$ . Nous fixons la perturbation arbitrairement égale à  $\text{Im}(\tau) = -100$  et négative afin de respecter la condition  $\text{Im}(t) > 0$  (cf. chapitre 1). La position initiale indiquée par un carré noir sur la FIGURE 4.4 est décalée de -100 en  $\text{Im}(\tau)$ , ce qui représente une petite valeur par rapport à l'ordre de grandeur de  $\tau$ .

L'optimisation par LMA faite à partir de ce paramètre initial permet bien d'atteindre le récepteur situé en zone d'ombre et dont la solution connue est symbolisée par un triangle noir. Les différentes itérations de l'algorithme d'optimisation sont indiquées par des points rouges sur la FIGURE 4.4. Ainsi, une perturbation complexe des paramètres initiaux permet d'éviter la singularité à la caustique car l'algorithme LMA ne peut sortir de l'axe réel par lui même. Cette perturbation permet donc d'éviter la matrice Jacobienne singulière lors de l'optimisation du rayon, qui est nulle à la caustique si l'on reste sur l'axe réel.

Cette perturbation implique une évolution des parties réelles mais aussi des parties imaginaires de  $\tau$  et  $z$  en fonction des différentes itérations de l'algorithme, avant d'atteindre la convergence au point voulu à l'altitude  $z = 2$  km (voir FIGURE 4.5), en respectant le choix du signe de la partie imaginaire de  $\tau$ . Nous observons sur la FIGURE 4.5 qu'au moment d'atteindre l'altitude de la caustique en  $\text{Re}(z) = 5,98$  km, les paramètres s'éloignent des solutions, avant de poursuivre leur évolution. Le minima de la fonction coût  $d$  est atteint pour un nombre d'itérations égal à 38.

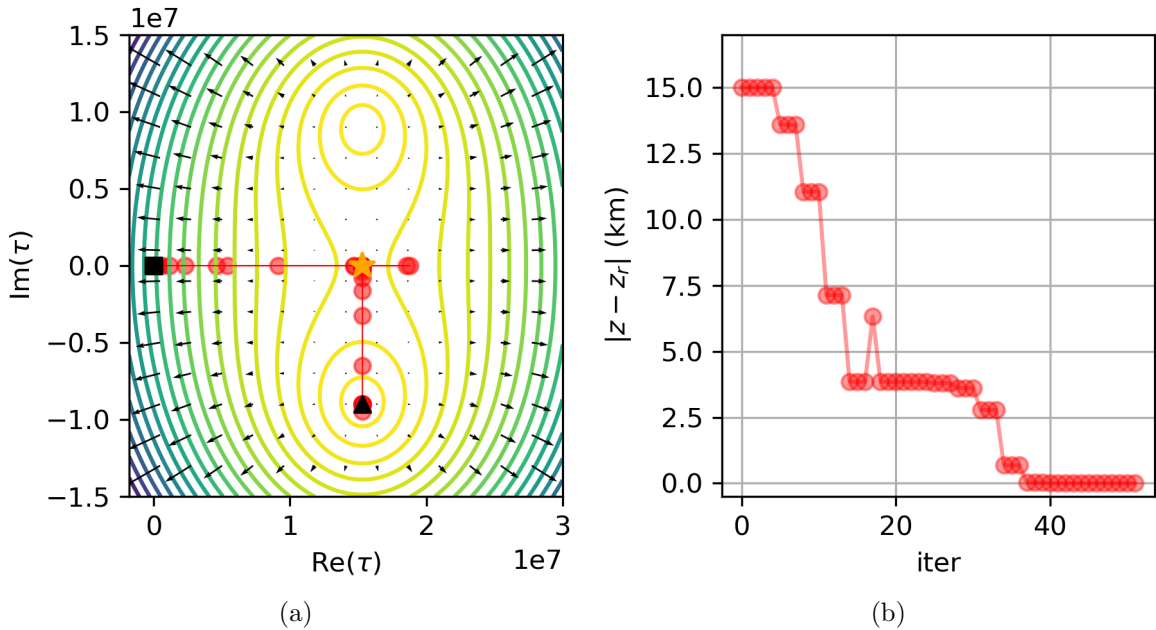


FIGURE 4.4 – (a) Contours de la fonction coût  $d$  dans le plan  $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d’une onde plane et d’un profil bilinéaire défini dans le chapitre 3. Optimisation d’un rayon entre le point complexe (■), où une petite perturbation de la partie imaginaire a été ajoutée à  $\tau$ , jusqu’à un récepteur dans la zone d’ombre (▲) avec les différentes itérations d’intégration (●). La caustique est indiquée en orange (★). (b) Erreur absolue en  $z$  pour chaque itération de l’algorithme l’optimisation.

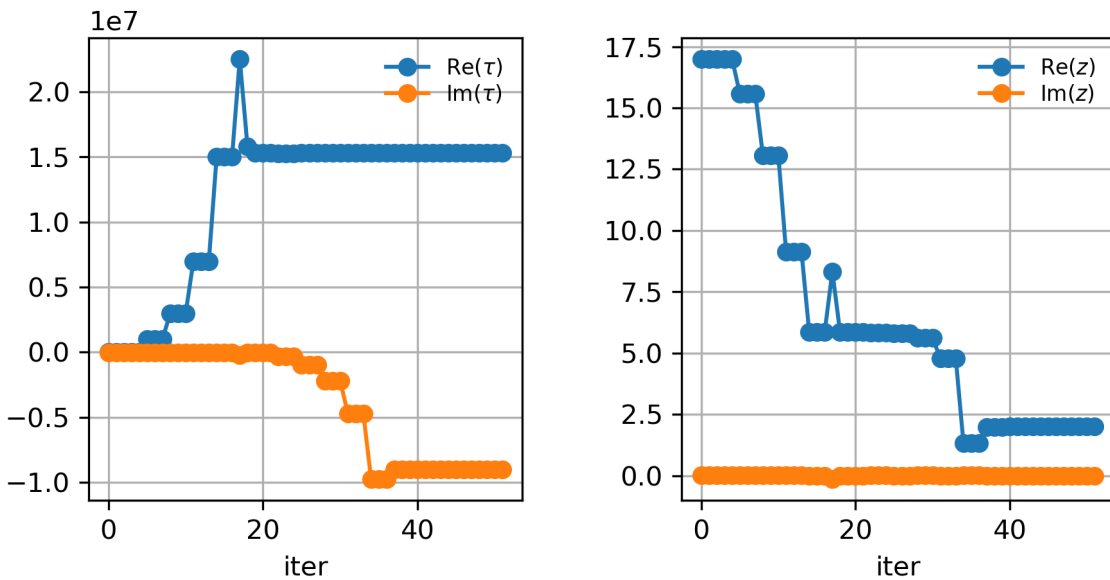


FIGURE 4.5 – Comportement de  $\tau$  et  $z$  pour chaque itération du rayon intégré entre la source et le récepteur pour le cas de la FIGURE 4.4.

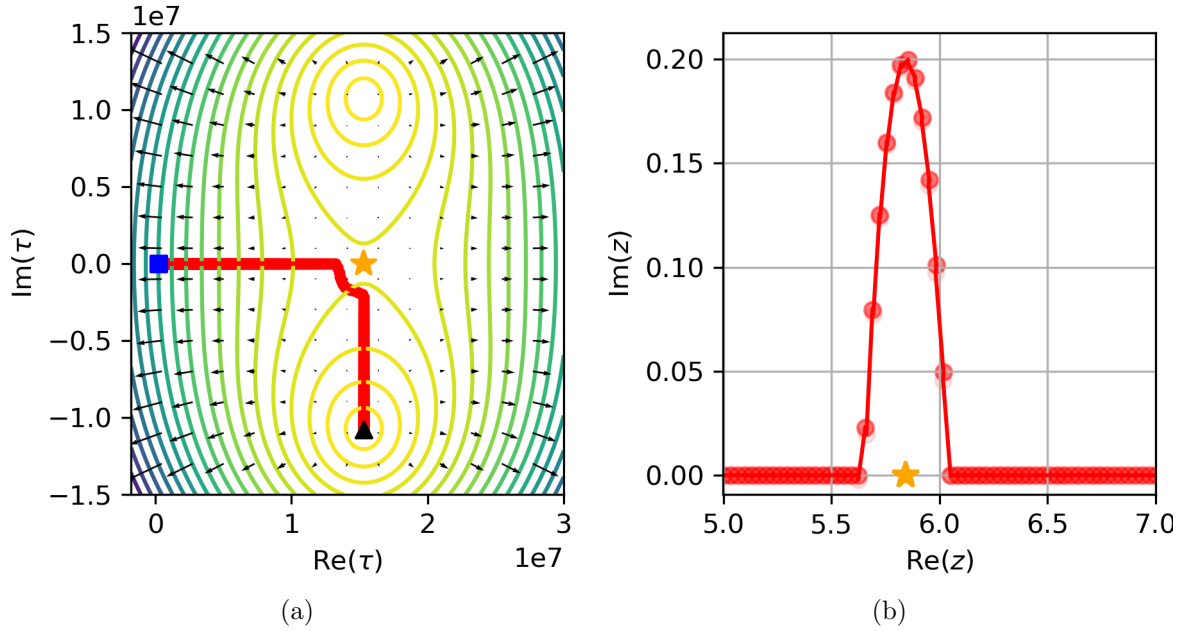


FIGURE 4.6 – (a) Contours de la fonction coût  $d$  dans le plan  $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d’une onde plane et d’un profil bilinéaire défini dans le chapitre 3. Optimisation d’un rayon entre le point complexe (■) et un récepteur dans la zone d’ombre (▲) suivant un chemin défini dans le plan  $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$  (b), qui permet de contourner la caustique. L’intégration se fait de proche en proche entre les points du chemin (●). La caustique est indiquée en orange (★).

Une autre possibilité d’atteindre un récepteur dans la zone d’ombre est de pré-définir un chemin d’optimisation des rayons complexes de proche en proche depuis le plan réel (Stone et al., 2018). Ce chemin est constitué d’une succession de récepteurs qui forcent l’optimisation de proche en proche entre chaque récepteur complexe suivant un chemin défini dans le plan complexe. Le chemin choisi permet à l’algorithme d’avancer suivant l’axe  $\text{Im}(\tau) = 0$  jusqu’à une distance proche de la caustique, puis de contourner celle-ci en passant par le plan complexe. Ce chemin est piloté par le paramètre  $z$  et est représenté sur la FIGURE 4.6 dans le plan  $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$  et le plan  $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ . Les points rouges indiquent les différents récepteurs successifs qui déterminent le trajet. Le choix de cette méthode de contournement de la caustique permet de maintenir une position  $z$  réelle dans la zone réelle et dans la zone d’ombre, sauf au niveau de la caustique où le contournement se fait dans le plan complexe avec une distance maximale de la partie imaginaire de  $z$  égale à 0,2 km, choisie ici arbitrairement. Cependant, des tests de convergence pour ce cas analytique montrent que cette amplitude doit être supérieure à 1 m pour que le minima de la fonction coût  $d$  soit obtenu entre chaque point. Ainsi, en optimisant de proche en proche suivant le chemin de contournement choisi, nous parvenons à atteindre le point récepteur dans la zone d’ombre. Afin de pouvoir utiliser cette méthode, nous devons connaître la position de la caustique. Ici, elle est obtenue de manière analytique, mais peut être obtenue numériquement en cherchant le point où le déterminant de la jacobienne  $J$  est nul au lancer de rayons réels (Stone et al., 2018, Sec. 7.1).

Ces cas d’optimisation directe (FIGURE 4.2), avec ajout d’une perturbation dans le plan complexe (FIGURE 4.4) et par contournement de la caustique (FIGURE 4.6) montrent l’importance de « forcer » le passage dans le plan complexe afin d’atteindre un récepteur situé en zone d’ombre et ainsi avoir ses paramètres d’émission. Nous développons dans les parties qui suivent une méthode systématique qui permet d’obtenir ces paramètres d’émission des rayons complexes à partir d’une estimation initiale. Numériquement, la seconde difficulté de la méthode des rayons complexes est la détermination de tous les rayons propres arrivant en un récepteur donné  $\mathbf{x}_r$ , c’est-à-dire calculer tous les ensembles de paramètres d’émission

des rayons  $(\phi, t)$  qui satisfont l'équation  $\mathbf{X}(\phi, t) = \mathbf{x}_r$  où  $\mathbf{x}_r$  est un vecteur entièrement réel. Ce problème multivalué correspond alors à un problème aux valeurs limites (Press et al., 1992; Stone et al., 2018) avec quatre inconnues :  $\text{Re}(\phi), \text{Im}(\phi), \text{Re}(t), \text{Im}(t)$  pour les cas en deux dimensions (six inconnues  $\text{Re}(\phi), \text{Im}(\phi), \text{Re}(\psi), \text{Im}(\psi), \text{Re}(t), \text{Im}(t)$  pour les cas en trois dimensions). Ces quatre paramètres génèrent un espace trop grand pour être exploré numériquement à des coûts de calcul raisonnables afin de trouver tous les rayons propres. De plus, toutes les solutions complexes ne sont pas toujours physiquement acceptables. Par conséquent, on restreint le problème aux rayons propres complexes qui seront connectés aux rayons réels par le biais d'une caustique. De ce fait, il est nécessaire d'identifier les positions de toutes les caustiques, mais aussi les positions des limites de guides d'onde.

### 4.2.3 Méthode de recherche des rayons propres pour la propagation des infrasons

Afin de pouvoir obtenir les rayons propres en tout point de l'espace, nous avons développé un algorithme qui utilise une interpolation ou une extrapolation réelle pour les solutions réelles, et une extrapolation dans le plan complexe pour les solutions complexes dans la zone d'ombre. La méthode comporte trois étapes : premièrement, le lancer de rayons réels, deuxièmement, l'estimation de paramètres initiaux pour les rayons propres, troisièmement, l'optimisation des rayons propres. Cet algorithme sera illustré sur le cas d'une source ponctuelle située en  $(0,0)$  dans une atmosphère stratifiée avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent. Les récepteurs considérés dans ce cas sont localisés au sol en  $z_g = 0$ .

#### Etape 1 : lancer de rayons

La première étape de la méthode des rayons complexes est un lancer de rayons réels avec un paramètre d'émission  $\phi$  discrétisé avec un pas régulier. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, en deux dimensions, pour une source ponctuelle, le paramètre d'émission  $\phi$  correspond à l'angle d'émission des rayons. Nous obtenons alors, pour le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et le profil gaussien pour la vitesse de vent représenté sur la FIGURE 4.7, les rayons lancés correspondants. L'angle d'émission varie entre 0 et 60°, discrétisé sur 120 émissions (ce choix sera justifié par la suite). Ainsi, nous avons 120 rayons intégrés à partir de la source en  $\mathbf{x}_s = (0,0)$ , au temps d'émission  $t_s = 0$  s. L'intégration des rayons s'arrête lorsque l'on atteint une distance ou un temps de propagation maximal. Nous rappelons ici que nous ne considérons pas les rayons réfléchis à la surface du sol, ainsi les rayons représentés s'arrêtent au sol.

Les rayons représentés en noirs correspondent aux rayons directs, et les rayons représentés en gris correspondent aux rayons ayant tangenté une caustique. Les rayons obtenus se divisent également en des arrivées stratosphériques, réfractées à une altitude entre 40 et 60 km, et des arrivées thermosphériques réfractées au-dessus de 120 km. Ces phénomènes de réfraction forment deux caustiques, l'une stratosphérique et l'autre thermosphérique représentées en orange. Ce sont, en altitude, des caustiques cuspidées dont une seule des deux branches descend jusqu'au sol en  $z_g = 0$ . Ainsi, localement au sol, ces caustiques forment des caustiques plis qui impliquent la présence de deux zones d'ombre, une pour chaque caustique. La zone d'ombre stratosphérique se situe entre la première caustique en  $x_{cs} = 225,7$  km et la source, et la zone d'ombre thermosphérique se situe entre la deuxième caustique en  $x_{ct} = 361,8$  km et la source.

Pour des récepteurs au sol, nous extrayons les points d'intersection des rayons avec le sol. L'intégration des rayons se faisant par pas de temps fixe et égal à 0,1 s, il est indispensable de faire une interpolation de la position des points le long des rayons autour de  $z_g$  pour déterminer la position exacte au sol le long du rayon. Ainsi, nous obtenons des positions au

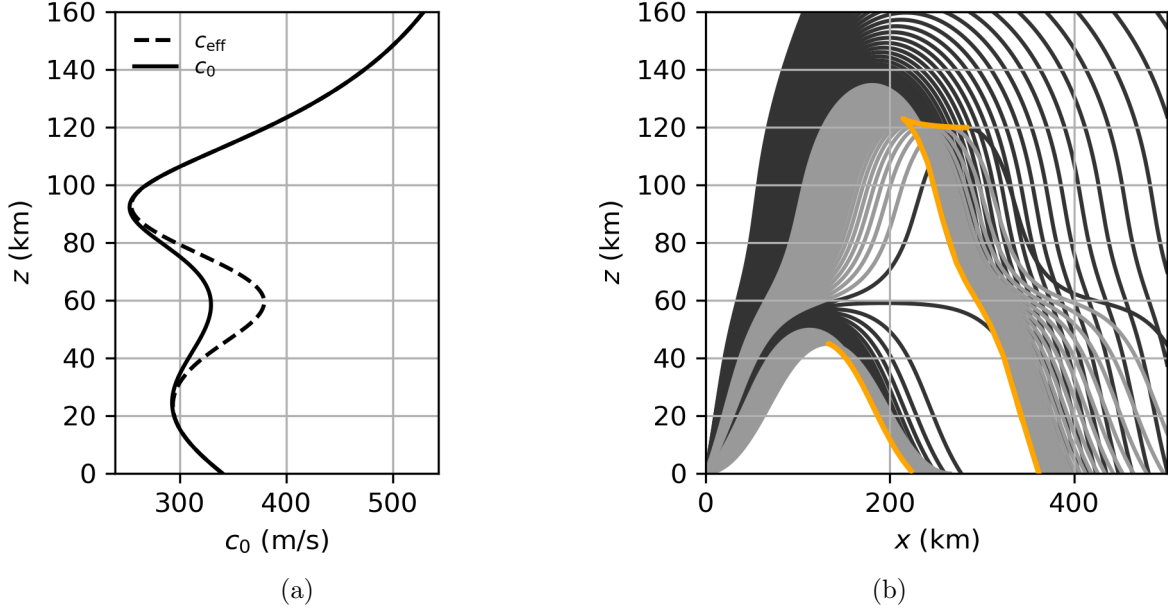


FIGURE 4.7 – (a) Profil de vitesse du son  $c_0$  défini par une fonction rationnelle de polynômes (Lingevitch et al., 1999) et vitesse du son effective  $c_{\text{eff}} = c_0 + v_0$ , avec le vent  $v_0$  défini par une fonction Gaussienne (Blom, 2019). (b) Rayons correspondants lancés, directs (—) et réfractés (---) pour une source ponctuelle située en  $(0,0)$ . Les caustiques sont indiquées en orange (—).

sol discrétisées  $x_i$  pour chaque rayon lancé avec un angle  $\phi_i$  (FIGURE 4.8). Les arrivées au sol forment alors deux phases : les arrivées stratosphériques pour  $\phi$  variant de 0 à 0,45 rad et  $t_a$  variant de 755 s à 1100 s ainsi que les arrivées thermosphériques pour  $\phi$  variant de 0,48 à 0,87 rad et  $t_a$  variant de 1375 s à 1745 s. Les parties imaginaires de ces paramètres sont naturellement nulles. Pour des positions au-delà de 500 km les angles d'émission et les temps d'arrivée ne sont pas calculés. Nous retrouvons aussi les branches des rayons directs (points noirs) et des rayons ayant tangenté une caustique (points gris) pour les deux phases.

Les caustiques et les limites de guide d'onde sont toutes les deux caractérisées par un changement de signe de la dérivée de  $x$  par rapport au paramètre d'émission  $\phi$ ,  $dx/d\phi|_{z=0}$ . Pour les caustiques,  $dx/d\phi$  passe par 0 alors que pour les limites de guide d'onde, il y a un saut de  $-\infty$  à  $+\infty$  ou inversement (Chapman, 2004, Sec. 2.4). Numériquement, ces changements sont déterminés en cherchant les changements de signe de la quantité  $D_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\phi_{i+1} - \phi_i}$  (voir FIGURE 4.9a). Afin d'identifier les caustiques et les limites de guide d'onde nous introduisons l'indice  $k$  qui indique le point où le signe de  $D_k$  change par rapport à  $D_{k-1}$ . Nous comparons la valeur absolue  $(|D_{k-1}| + |D_k|)/2$  avec la médiane calculée à partir de toutes les valeurs  $D_i$ . Ainsi, si la valeur moyenne est plus petite que la médiane, nous supposons que le point est proche d'une caustique, sinon, le point est proche d'une limite de guide d'onde (voir FIGURE 4.9b).

La position exacte de la caustique ne peut être obtenue numériquement, mais nous pouvons nous en approcher en augmentant le nombre de rayons lancés. En effet, le calcul de la quantité  $D_i$  est de plus en plus précis en augmentant la discrétisation suivant  $i$ . Cependant, augmenter cette discrétisation ne permet pas d'améliorer la localisation de la position du guide d'onde (qui s'étend suivant  $x$ ).

Nous sommes ici en présence de deux caustiques notées  $x_{cs}$  (stratosphérique) et  $x_{ct}$  (thermosphérique) dues au profil météorologique considéré. Celui-ci implique aussi que la discrétisation des rayons ne se fait pas de la même manière sur les deux branches : il y a moins d'arrivées stratosphériques que thermosphériques. Nous avons donc besoin de lancer au moins 500 rayons afin d'avoir une erreur sur la position  $x$  de la caustique inférieure à 1 m (FIGURE 4.10).

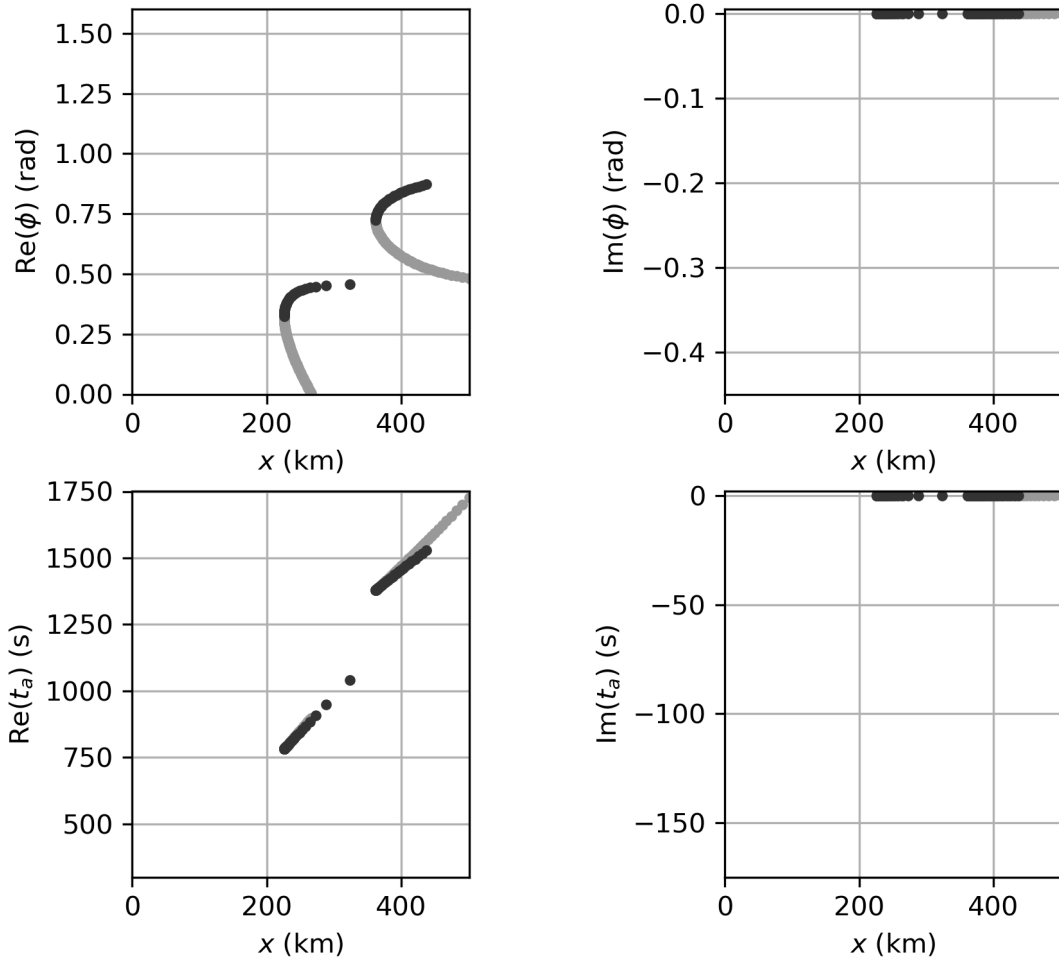


FIGURE 4.8 – Paramètres géométriques  $\phi$  et  $t_a$  au sol  $z_g = 0$  pour le cas de la source ponctuelle et du profil de vitesse du son  $c_0$  représenté sur la FIGURE 4.8.

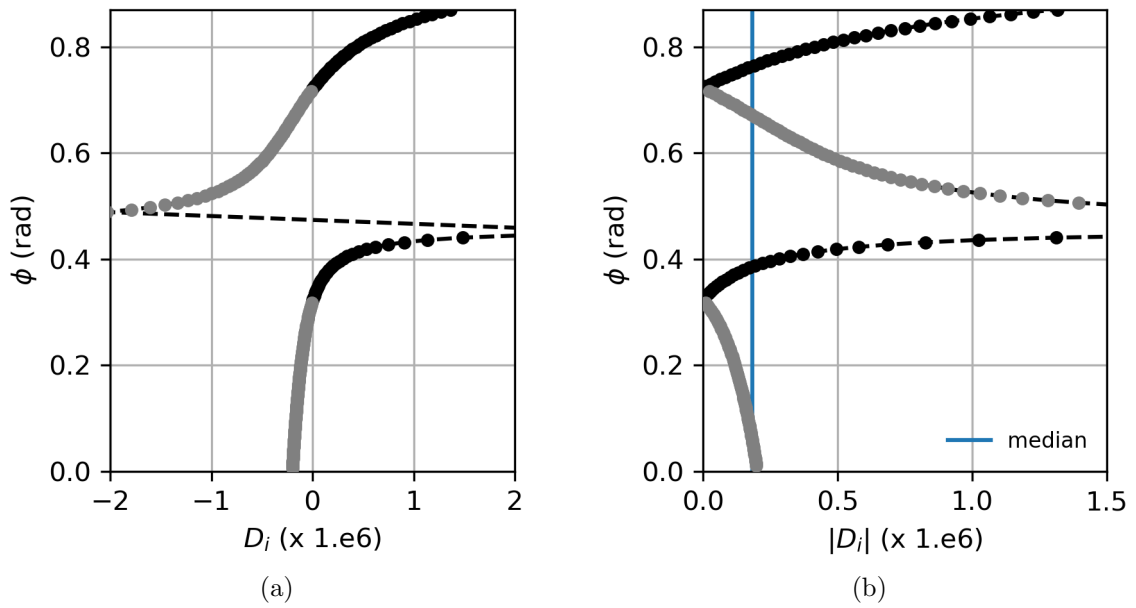


FIGURE 4.9 – Paramètre  $D_i$  (a) et sa valeur absolue (b) en fonction de  $\phi$ .



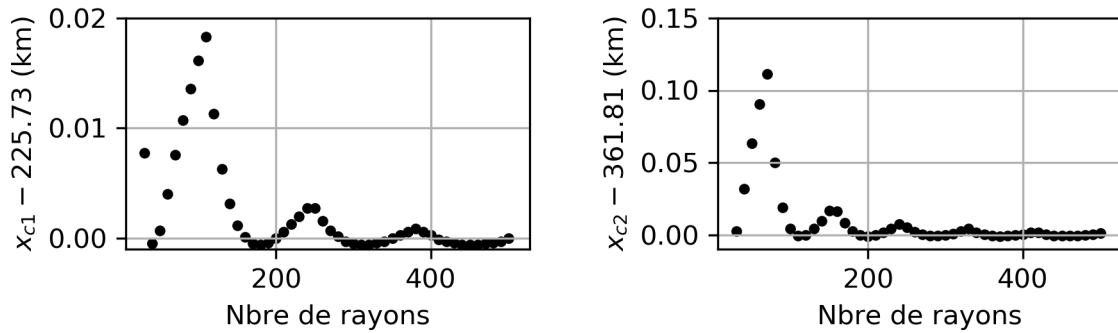


FIGURE 4.10 – Positions des caustiques en fonction du nombre de rayons lancés pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent.

Plus le nombre de rayons augmente, plus la position des caustiques est précise et tend vers  $x_{cs} = 225,73$  km et  $x_{ct} = 361,81$  km. Cependant, il est important de remarquer qu'en utilisant le code d'intégration des rayons en Python, le temps de calcul pour l'intégration de 500 rayons est de 278,4s. Donc, pour un gain de temps numérique, nous avons opté pour un choix du nombre de rayons lancés égal à 120. Ceci implique un écart de 5 m pour  $x_{cs}$  et un écart de 20 m pour  $x_{ct}$  par rapport aux valeurs convergées.

En connaissant les paramètres d'émission  $\phi_i$  et  $t_i$  des arrivées stratosphériques et thermosphériques, la procédure d'intégration des rayons propres permettra d'obtenir  $\phi(x)$  et  $t(x)$ .

## Etape 2 : identification des rayons propres

La seconde étape de notre algorithme pour les rayons complexes consiste à trouver les paramètres initiaux de l'optimisation qui permettront d'obtenir les rayons propres réels et complexes. Cette étape consiste en l'interpolation et l'extrapolation des arrivées réelles dans tout l'espace.

Nous avons vu dans la partie 4.2.2 que pour atteindre des récepteurs localisés en zone d'ombre nous devons considérer des paramètres initiaux complexes pour l'optimisation des rayons propres. Les solutions complexes n'étant pas toujours physiquement acceptables, nous nous intéressons seulement aux rayons propres complexes connectés aux rayons réels. Cela peut-être fait par le point de contact entre les deux zones : la caustique. Afin d'obtenir les solutions dans tout l'espace, nous définissons des positions de récepteurs entre 0 et 500 km, en  $z_g = 0$ , discrétisées régulièrement.

### (□) Rayons réels

Nous commençons cette étape avec les rayons réels. En effet, la première étape de notre méthode permet d'obtenir les solutions réelles par lancer de rayons en fixant les paramètres d'émission sans piloter la position du récepteur. Elle permet aussi d'obtenir les positions (indices) des caustiques et limites de guide d'onde ainsi que les positions des bords du domaine, correspondant au premier et dernier rayons lancés. Les phases d'arrivées en  $\phi$  et  $t_a$  peuvent alors se diviser en branches, séparées par chaque indice  $k$  associé aux rayons lancés délimitant les branches. L'objectif est de connaître les paramètres d'émission en fonction des récepteurs voulus dans la zone illuminée. A cet effet, nous effectuons une interpolation linéaire de chaque branche des solutions réelles  $\phi(x)$  obtenues au lancer de rayons à l'étape 1 (FIGURE 4.8). Le temps  $t_a$  est quant à lui obtenu par une interpolation linéaire de chaque branche  $t_a(\phi)$ . Les solutions résultant de cette interpolation sont indiquées par les carrés verts sur la FIGURE 4.12. Étant dans la zone illuminée, les parties imaginaires sont nulles.

(o) Bords du lancer de rayons

Lorsque l'intervalle d'émission du lancer de rayons de l'étape 1 ne prend pas en compte tout le domaine possible (ici l'émission est limitée à  $\phi < 60^\circ$ ), il est possible que les solutions ne soient pas complètes aux bords du domaine. En connaissant la position (indices) de ces limites, on effectue une extrapolation réelle à partir de trois points (rayons) voisins des bords du domaines  $K = (k, k + 1, k + 2)$  s'il s'agit du premier rayon lancé,  $K = (k - 2, k - 1, k)$  s'il s'agit du dernier rayon lancé. Ces trois points permettent une interpolation linéaire donnant lieu à la fonction  $X_1(\phi)$ . De la même manière une interpolation du paramètre  $t_a$  donne lieu au polynôme  $T_1(\phi)$ . L'extrapolation réelle est faite en recherchant la racine du polynôme (d'ordre 1)  $X_1(\phi) - x_r = 0$ , qui permet ensuite d'obtenir la solution  $t_a$ .

(o) Limites des guides d'onde

Les limites de guides d'onde sont des positions très sensibles à la variation de  $\phi$ . Ainsi, il est important de connaître les variations de  $\phi$  et de déduire le  $t_a$  correspondant afin d'avoir tous les rayons des branches stratosphériques et thermosphériques. L'obtention de ces points se fait par une extrapolation réelle avec un raccord logarithmique tel que :

$$x = -C \log(|\phi - \phi_w|), \quad (4.5)$$

avec  $C = c/2$  si  $\phi_i \leq \phi_w$  et  $C = c$  si  $\phi_i > \phi_w$  (Chapman, 2004, p.42). Le paramètre d'émission associé à la limite de guide d'onde  $\phi_w$  et la constante  $c$  sont calculés de sorte à minimiser la différence entre la fonction théorique (4.5) et les valeurs de  $x_r$  obtenues à partir de cinq rayons de  $\phi_{k-2}$  jusqu'à  $\phi_{k+2}$  (nous rappelons que  $k$  est l'indice du guide d'onde). Le paramètre  $\phi(x)$  est alors obtenu en inversant l'équation (4.5) (FIGURE 4.11). Le paramètre  $t_a$  est quant à lui obtenu à l'aide de deux interpolations linéaires  $t_a(x_r)$  de part et d'autre de  $\phi_w$ . Même si  $x$  est très sensible vis à vis du paramètre d'émission  $\phi_w$ , ce qui peut provoquer de petites erreurs lors de la minimisation entre l'équation (4.5) et les paramètres  $\phi$  et  $t_a$  obtenus au lancer de rayons, l'optimisation qui sera faite à l'étape 3 est suffisamment robuste pour calculer les paramètres d'émission des récepteurs souhaités.

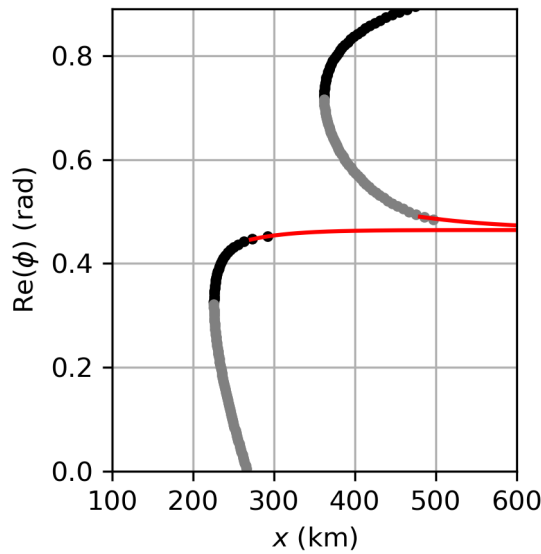


FIGURE 4.11 – Paramètre d'émission  $\phi$  au lancer de rayons avec le même code couleur que les figures précédentes. En rouge : approximation de  $\phi$  au niveau de la limite du guide d'onde à partir de l'équation (4.5).

( $\Delta/\nabla$ ) Caustiques

Pour les rayons complexes, on part de la position de la caustique indiquée par  $k$  obtenue à l'étape 1. Une interpolation réelle est d'abord mise en oeuvre autour de la position de cette caustique, à partir des points voisins  $\Omega_k = (k - 1, k, k + 1)$ , avec un polynôme d'ordre 2 noté  $X_2(\phi)$  avec des coefficients réels. De la même manière, une interpolation du paramètre  $t_a$  est faite, donnant lieu au polynôme noté  $T_2(\phi)$ . La recherche des racines du polynôme  $X_2(\phi) - x_r = 0$  fournit l'extrapolation complexe pour chaque récepteur  $x_r$  dans la zone d'ombre. Comme les deux racines complexes sont des complexes conjugués, le paramètre  $\phi$  est choisi tel que  $\text{Im}(T_2(\phi)) > 0$ , afin de respecter la décroissance exponentielle du champ de pression (cf. chapitre 2). Cette extrapolation est faite sur une distance de 120 km à partir de la caustique. Au-delà de cette limite l'optimisation à l'étape 3 ne converge plus. Nous verrons donc à l'étape suivante comment est résolu ce problème afin de prendre en compte tout l'espace.

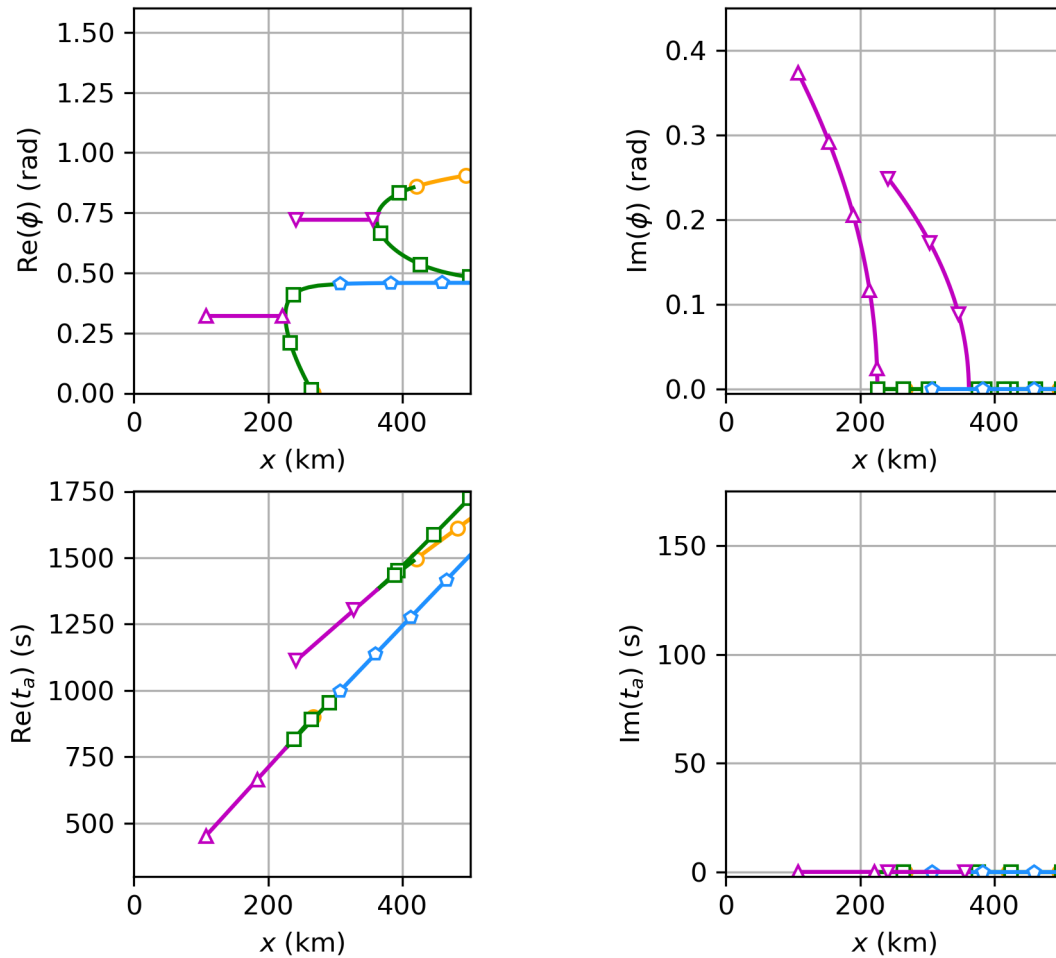


FIGURE 4.12 – Estimation initiale des paramètres  $\phi$  et  $t_a$ , pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent, en considérant des récepteurs au sol  $z_g = 0$ . ( $\square$ ) : interpolation du lancer de rayons réels. ( $\circ$ ) : extrapolation du lancer de rayons réels. ( $\odot$ ) : extrapolation en limite de guide d'onde. ( $\Delta/\nabla$ ) : extrapolation de rayons complexes en zone d'ombre de caustique stratosphérique (triangle vers le haut) et troposphérique (triangle vers le bas).

**Etape 3 : optimisation des rayons propres**

La troisième étape de notre méthode pour les rayons complexes, concerne l'optimisation des rayons propres en calculant les paramètres  $(\phi, t_a)$  réels et complexes, qui minimisent la fonction coût définie par l'équation (4.4). Cela revient à résoudre l'équation  $d(\phi, t_a) = 0$ . Pour cela nous utilisons l'algorithme Levenberg-Marquardt (LMA) présenté dans la partie 4.2.2, avec comme estimation initiale les paramètres déterminés à l'étape 2.

Pour un récepteur situé loin de la caustique (pour une distance supérieure à 120 km choisie au moment du calcul des conditions initiales), les paramètres sont optimisés de proche en proche, avec comme paramètre initial la solution du récepteur précédent. Cette distance est choisie au moment du calcul des conditions initiales mais pourrait être inférieure.

Les solutions de l'optimisation sont illustrées sur la FIGURE 4.13. Les solutions réelles sont indiquées en noir (rayons directs) et gris (rayons ayant tangentié une caustique) et les solutions complexes sont indiquées en bleu pour la première zone d'ombre et en rouge pour la deuxième zone d'ombre. Les rayons correspondants seront présentés dans la partie 4.3.

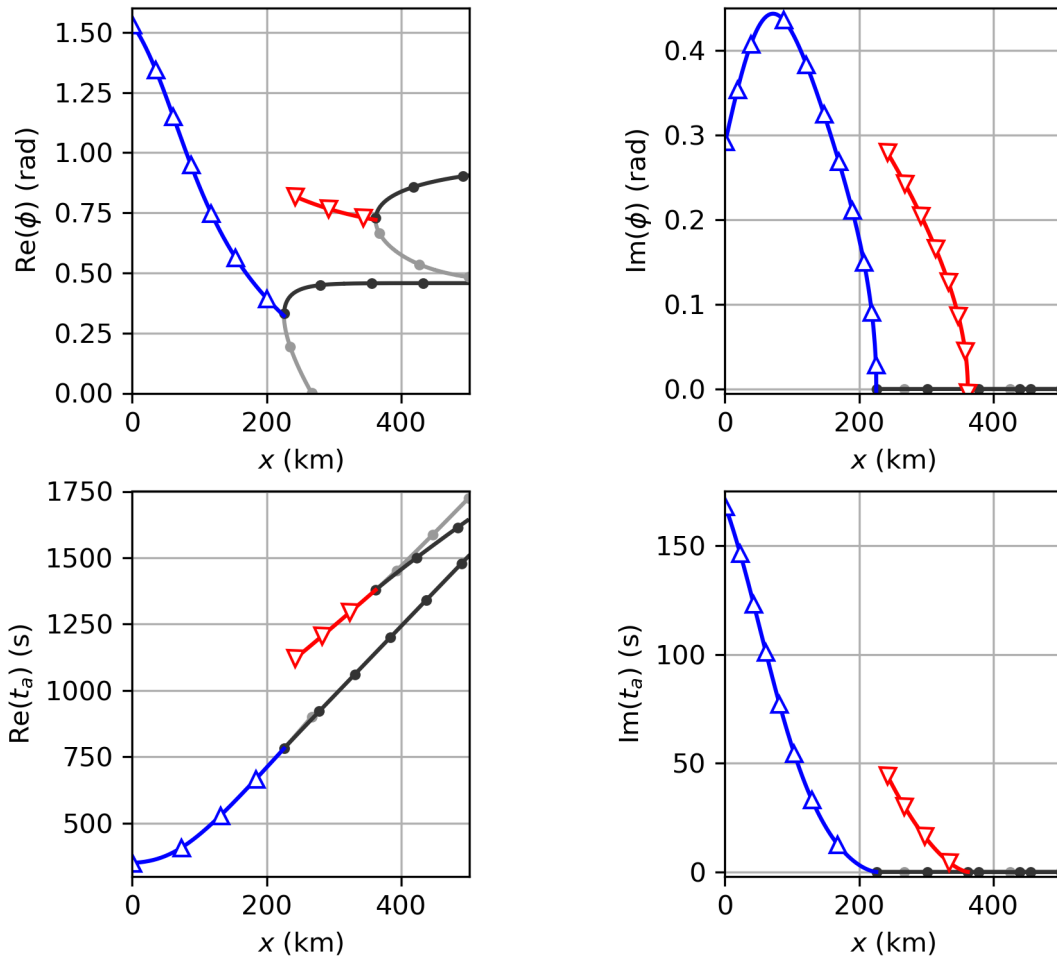


FIGURE 4.13 – Paramètres géométriques  $\phi$  et  $t_a$  optimisés pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent, en considérant des récepteurs au sol  $z_g = 0$ . ( $\bullet$ ) : rayons réels directs. ( $\circ$ ) : rayons réels ayant tangentié une caustique. ( $\Delta/\nabla$ ) : rayons complexes dans la zone d'ombre de la caustique stratosphérique (bleu) et thermosphérique (rouge).

Cette méthode, développée dans le cadre de cette thèse, présente l'avantage de pouvoir facilement et rapidement, trouver les rayons propres pour n'importe quelle position d'un récepteur, que ce soit dans la zone illuminée ou dans la zone d'ombre. Elle permet aussi d'obtenir tous les rayons propres associés aux différentes phase atmosphériques et à la diffraction pour un récepteur donné. Ainsi, cette méthode de détermination des rayons propres complexes est une méthode intuitive, rapide et robuste permettant d'obtenir les rayons dans tout l'espace. D'autres exemples d'application en seront donnés plus loin.

### 4.3 Propagation des infrasons pour une source ponctuelle fixe

Dans cette section nous présentons les résultats pour la source ponctuelle fixe dans une atmosphère advectée. Nous avons considéré des récepteurs au sol en  $z_g = 0$  entre 1 et 500 km de la source située en (0,0). Le profil météorologique considéré est celui de Blom (2019) qui considère une fonction rationnelle de polynôme pour la définition de  $c_0$ , initialement présenté dans Lingeitch et al. (1999), et une fonction Gaussienne pour le profil de vent. Ce profil est présenté sur la FIGURE 4.7 avec les rayons réels lancés correspondants. Après avoir décrit le processus d'optimisation pour la recherche de rayons propres réels et complexes pour une sélection de récepteurs dans la section précédente 4.2, nous présentons maintenant les résultats du calcul de rayons réels ou complexes pour cette source ponctuelle, en traçant les différentes données physiques usuellement mesurables en un point de mesure : temps d'arrivée, vitesse apparente, forme et amplitude des différentes arrivées à un récepteur donné. Le potentiel de la méthode est aussi montré pour le cas plus complexe d'un profil météorologique non seulement stratifié mais aussi dépendant de la position horizontale (en anglais *range dependent*). Pour conclure ce chapitre, une comparaison avec les résultats d'une simulation directe au moyen d'une approximation parabolique est faite dans ces deux mêmes cas afin de valider la méthode des rayons complexes.

#### 4.3.1 Rayons propres

Les paramètres géométriques résultant de l'optimisation (FIGURE 4.13) permettent une intégration des rayons entre la source et le récepteur considéré au sol. Ainsi pour un ensemble de récepteurs discrétisés tous les 10 km au sol (entre 1 et 500 km), nous obtenons les rayons réels et complexes projetés dans le plan ( $\text{Re}(x)$ ,  $\text{Re}(z)$ ) et représentés sur la FIGURE 4.14. Les arrivées au sol dues à la réfraction soit dans la stratosphère soit dans la thermosphère sont indiquées par les labels  $I_s$  et  $I_t$  respectivement. Pour chaque guide d'onde il y a deux arrivées réelles dans les zones illuminées. Les arrivées directes, aussi appelées rapides (*fast*),  $I_{s_f}$  et  $I_{t_f}$  sont indiquées en noir. Les arrivées réfractées qui ont tangenté une caustique, aussi appelées lentes (*slow*),  $I_{s_s}$  et  $I_{t_s}$ , sont indiquées en gris. La présence de ces deux types de rayons était clairement visible sur les branches du paramètre d'émission  $\phi$  obtenues à la FIGURE 4.13. Cependant, la différence entre les temps d'arrivée entre les deux phases lentes et rapides  $I_{s_f}$  et  $I_{s_s}$  est généralement très faible, si bien que ces deux arrivées sont habituellement difficiles à distinguer l'une de l'autre dans les enregistrement infrasonores aux stations. C'est d'ailleurs ce que l'on observe pour  $\text{Re}(t)$  sur la FIGURE 4.13. Dans le cas où le vent stratosphérique est très fort, ces deux arrivées sont alors facilement repérables (Ceranna et al., 2009).

Comme indiqué en orange sur la FIGURE 4.7, le cas étudié (FIGURE 4.14) présente une caustique stratosphérique en  $x_{cs} = 225,7\text{km}$  et une caustique thermosphérique en  $x_{ct} = 361,8\text{km}$ . Dans ces deux zones d'ombre correspondantes, le champ est calculé à l'aide des rayons complexes obtenus à partir des paramètres complexes optimisés. Ces rayons complexes sont représentés sur la FIGURE 4.14, et indiqués en bleu pour les arrivées stratosphériques  $I_{s_d}$ , et en rouge pour les arrivées thermosphériques  $I_{t_d}$ , l'indice  $d$  étant utilisé pour rappeler que ces arrivées sont associées à des phénomènes de diffraction.

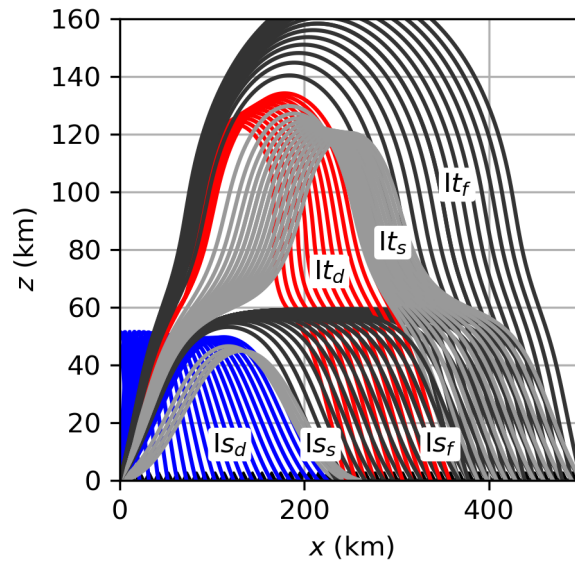


FIGURE 4.14 – Rayons propres optimisés, arrivant aux différents récepteurs  $\blacktriangle$ , obtenus par la méthode de tracé de rayons complexes, pour une source ponctuelle située à l'origine avec les profils de vitesse du son et de vent présentés sur la FIGURE 4.7. Rayons stratosphériques directs  $Is_f$  (—), réfractés  $Is_s$  (—) et complexes en zone d'ombre  $Is_d$  (—). Rayons thermosphériques directs  $It_f$  (—), réfractés  $It_s$  (—) et complexes en zone d'ombre  $It_d$  (—). Les rayons complexes sont projetés dans le plan  $(Re(x), Re(z))$ .

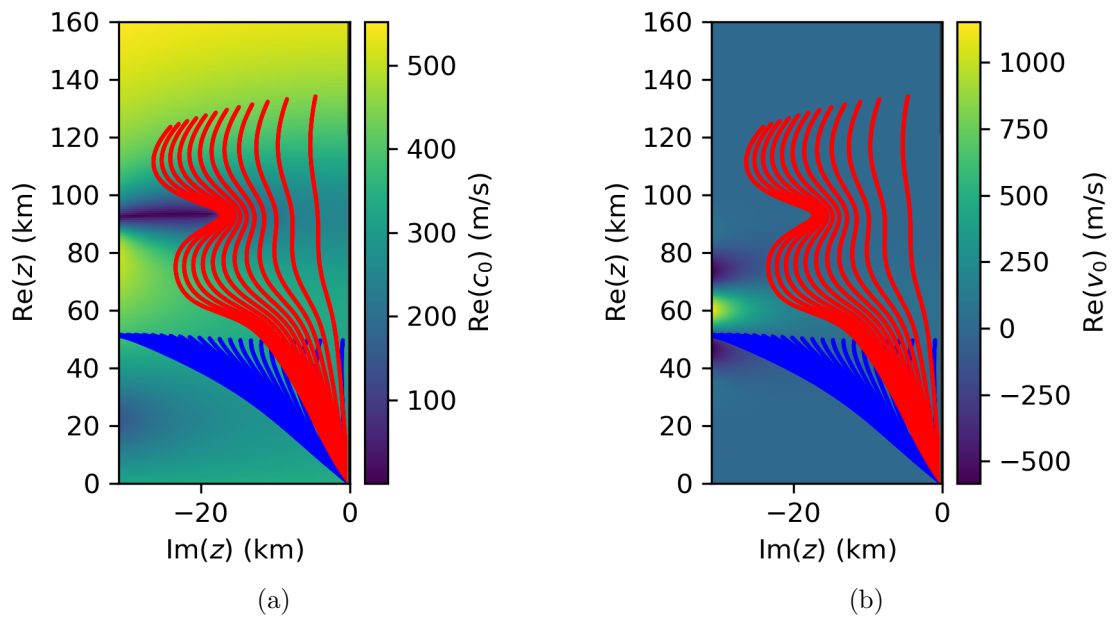


FIGURE 4.15 – Projection des rayons représentés sur la FIGURE 4.14 dans le plan  $(Re(z), Im(z))$  en fonction de la partie réelle de  $c_0$  (a) et de  $v_0$  (b).

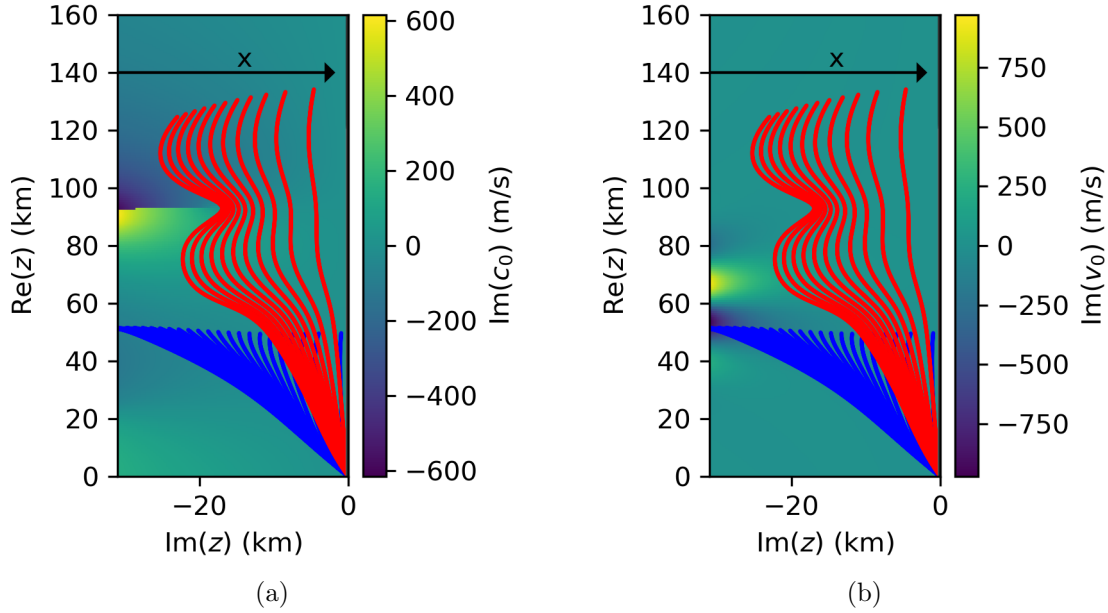


FIGURE 4.16 – Projection des rayons représentés sur la FIGURE 4.14 dans le plan  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$  en fonction de la partie imaginaire de  $c_0$  (a) et de  $v_0$  (b).

Afin de comprendre le comportement des rayons complexes, nous représentons ces mêmes rayons, avec le même code couleur, mais cette fois projetés dans le plan  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$  et superposés sur un fond en couleur quantifiant les parties réelle (FIGURE 4.15) et imaginaire (FIGURE 4.16) de  $c_0(z)$  et de  $v_0(z)$ . Pour chaque rayon réel ou complexe, la partie imaginaire de l'altitude  $\text{Im}(z)$  est la même pour une altitude réelle  $\text{Re}(z)$  donnée. Lorsqu'un rayon complexe atteint le point de réfraction, aussi appelé point tournant (Chapman, 2004), il repart suivant le même trajet vers le sol dans le plan  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ . La partie imaginaire de l'altitude  $z$  croît lorsque la distance des récepteurs à la caustique augmente. Ainsi pour le récepteur le plus éloigné de la caustique,  $\text{Im}(z) = -30$  km pour la caustique stratosphérique et  $\text{Im}(z) = -25$  km pour la caustique thermosphérique. Les rayons complexes thermosphériques présentent une déviation en  $\text{Re}(z) \approx 90$  km, correspondant au minimum de  $\text{Re}(c_0)$ . Cette position correspond en réalité à l'un des pôles du dénominateur de la fonction rationnelle définie par Lingeitch et al. (1999). Ces pôles sont égaux à  $z = 89,1 \pm i37,7$  km et  $z = 25,3 \pm i74,4$  km. La présence de ce pôle empêche l'intégration des rayons complexes thermosphériques arrivant aux récepteurs situés à moins de  $x = 230$  km. Cependant, ces récepteurs se situant très loin à l'intérieur de la zone d'ombre de la caustique thermosphérique, leur contribution au champ de pression est négligeable. Contrairement à la vitesse du son  $c_0$ , la fonction Gaussienne représentant le vent  $v_0$  n'a aucune singularité et n'induit donc aucune limitation dans l'intégration des rayons.

Ainsi, la méthode proposée d'optimisation de rayons réels et complexes permet d'obtenir tous les rayons propres arrivant aux récepteurs. Cependant, les positions complexes des rayons peuvent passer par les singularités des fonctions définissant le profil de vitesse du son et du vent, il est donc important de vérifier si un rayon dont la contribution est importante (arrivant à un récepteur proche de la caustique) n'est pas omis.

### 4.3.2 Autres chemins d'intégration dans le plan complexe

Nous avons vu dans la partie 4.2.1 que le chemin d'intégration généralement utilisé dans la littérature (Thomson, 1997; Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Amodei et al., 2006; Kravtsov et Zhu, 2010) est la diagonale dans le plan de  $t$  représentée en noir sur la FIGURE 4.17a. D'autres chemins d'intégration suivant  $t$  dans le plan complexe peuvent être utilisés pour

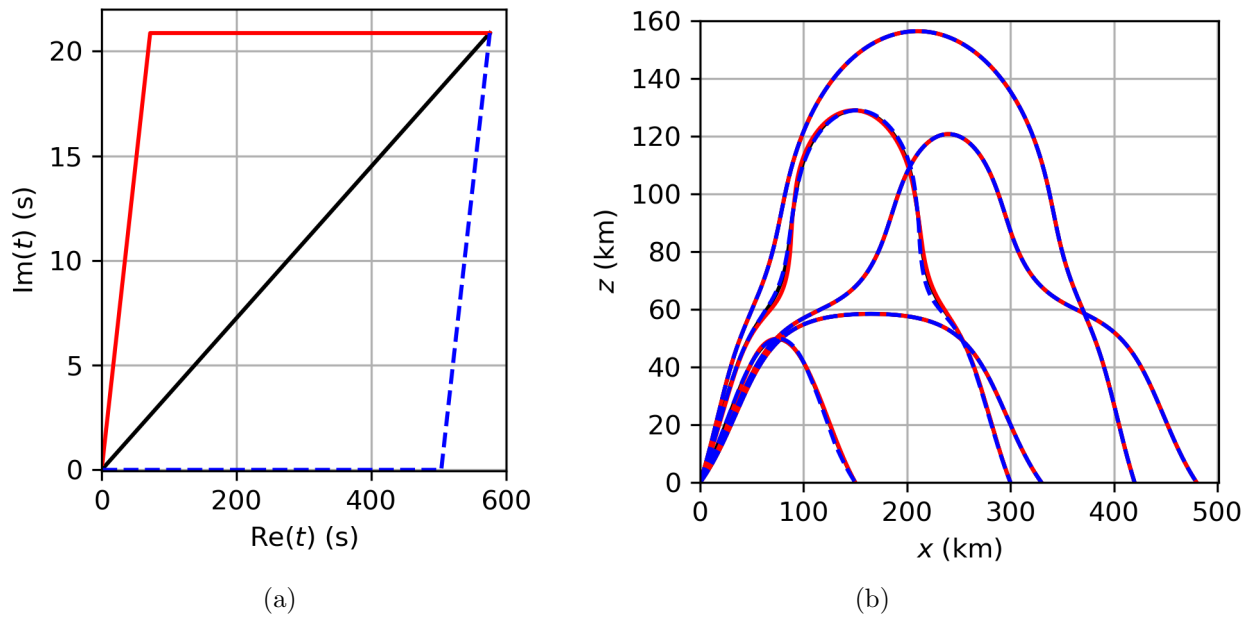


FIGURE 4.17 – (a) Exemple de trois chemins d’intégration dans le plan complexe de  $t$  le long d’un rayon arrivant en zone d’ombre. (b) Exemple de quelques rayons pour chaque phase, intégrés suivant les mêmes chemins que sur la figure (a), avec les couleurs correspondantes.

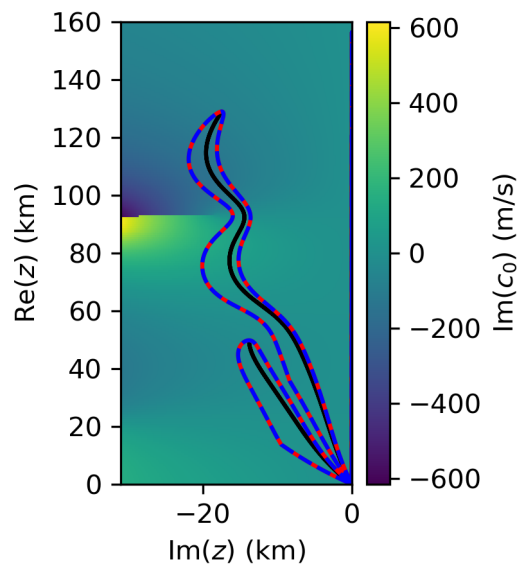


FIGURE 4.18 – Trajets dans le plan  $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$  des rayons de la FIGURE 4.17b, superposé à la partie imaginaire de la vitesse du son (en couleur). Le code couleur des rayons est le même que celui de la FIGURE 4.17



intégrer les rayons. Plusieurs de ces chemins sont représentés sur la FIGURE 4.17a pour un rayon arrivant en zone d'ombre, dans le cas de la source ponctuelle. Nous considérons ensuite un rayon par phase  $Id_s, If_s, Id_t, Is_t$  et  $If_t$ , représentés sur la FIGURE 4.17b. Les rayons sont représentés par la même couleur que la forme du chemin d'intégration. Ainsi, chaque chemin dans le plan  $(\text{Im}(t), \text{Re}(t))$  permet d'obtenir les mêmes rayons, avec une erreur absolue par rapport au rayon intégré suivant la diagonale inférieure à  $10^{-6}$  m pour tous les chemins et toutes les arrivées. Pour les rayons réels, les rayons se superposent car le chemin d'intégration reste suivant  $\text{Re}(t)$ . En revanche, pour les rayons complexes, la projection dans le plan réel  $(x, z)$  (FIGURE 4.17b) de ces rayons fait apparaître une différence de trajet.

Nous représentons ces mêmes rayons calculés suivant les différents chemins sur la FIGURE 4.18, dans le plan  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$  ainsi que la partie imaginaire de  $c_0$ , qui possède un pôle. Nous pouvons voir que contrairement à la diagonale (en noir) qui fait passer le rayon de manière symétrique avant et après l'altitude de réfraction (point tournant), les autres chemins d'intégration font passer le rayon d'un côté du chemin associé à la diagonale pendant la partie ascendante, puis de l'autre pendant la partie descendante. Ainsi, le chemin d'intégration le moins « étalé » dans le plan complexe est celui associé à la diagonale. Il est donc à privilégier afin de rester le plus éloigné qu'il est possible des singularités.

### 4.3.3 Paramètres géométriques

Dans le but de pouvoir comparer les résultats obtenus par la méthode des rayons complexes avec des enregistrements aux stations infrasonores, il est intéressant de calculer les paramètres géométriques. Les paramètres les plus fréquemment utilisés sont le temps d'arrivée  $t_a$  des ondes infrasonores ainsi que la vitesse apparente  $v_a$  (ou vitesses de passage) à une station infrasonore. La vitesse apparente correspond à la vitesse de phase horizontale des ondes à la station. En deux dimensions, elle est définie par la relation :

$$v_a = \frac{\omega}{k_x}. \quad (4.6)$$

La mesure de cette vitesse au sol permet de remonter à l'angle d'élévation  $\theta$  auquel l'onde arrive par rapport au sol par la formule  $\cos \theta = c_0/v_a$ , paramètre essentiel par exemple pour localiser la source. A trois dimensions, un second angle, l'azimut, localisant la direction d'arrivée de l'onde dans le plan horizontal, est également mesuré. Par la mesure de ces deux angles, on peut ainsi lancer un rayon depuis la station dans la direction de la source, et en répétant le processus à partir de plusieurs stations, localiser la source. Dans le cas de sources complexes et étendues comme les éclairs, la connaissance du temps d'émission permet également de reconstruire l'extension géométrique 3D de ces sources (MacGorman et al., 1981; Gallin et al., 2016; Lacroix et al., 2018).

A partir des équations des rayons (2.21), le nombre d'onde horizontal  $k_x$  est constant le long des rayons pour des profils de vitesse du son et de vent stratifiés verticalement, et donc égal à sa valeur à la source. Ainsi, à partir des conditions initiales, nous avons :

$$v_a = \text{Re} \left( \frac{c_0(z_s)}{\cos \phi} + v_0(z_s) \right), \quad (4.7)$$

où nous rappelons que  $\phi$  est l'angle d'émission à la source et  $z_s$  l'altitude de la source, ici égale à 0.

Ces paramètres géométriques sont représentés sur la FIGURE 4.19 avec les mêmes symboles et code couleur que la FIGURE 4.13 et FIGURE 4.14.

Comme  $c_0(z_s)$  et  $v_0(z_s)$  sont constants dans le cas d'une source ponctuelle,  $v_a$  ne dépend que de l'angle d'émission  $\phi$ . Ainsi, l'évolution de la vitesse apparente dans la zone d'ombre n'aurait pas pu être obtenue sans l'utilisation de la méthode des rayons complexes, qui, après optimisation, permet d'avoir  $\phi(x_r)$ . Pour toutes les arrivées réelles, la vitesse apparente  $v_a$

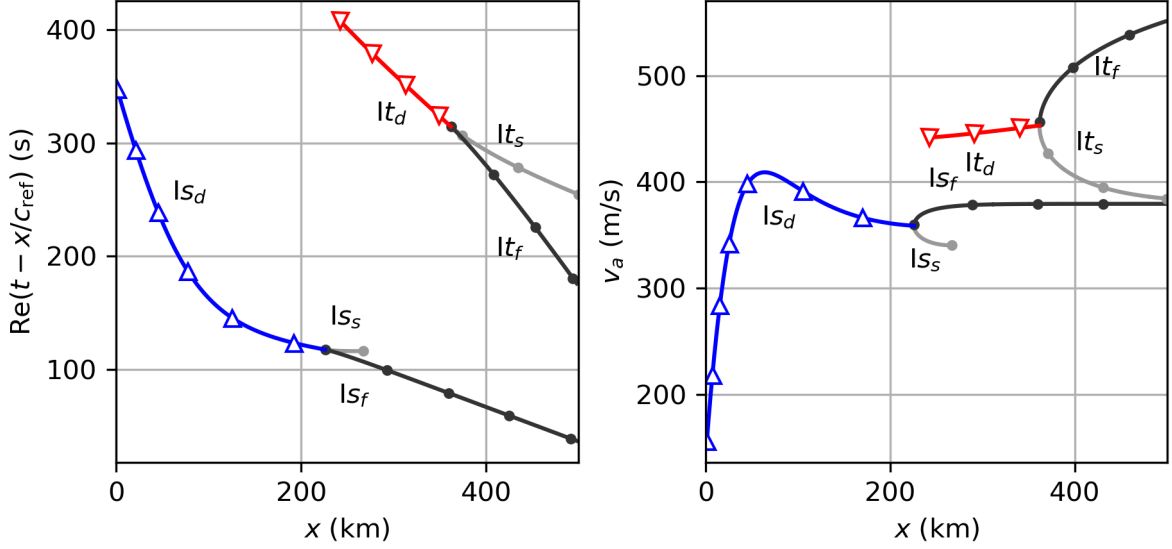


FIGURE 4.19 – Valeurs réelles des paramètres géométriques aux récepteurs au sol  $z_g = 0$  pour la source ponctuelle. (a) Temps réduit  $t_{\text{red}} = t_a - x/c_{\text{ref}}$  avec  $c_{\text{ref}} = 340$  m/s et (b) vitesse apparente  $v_a$  (m/s). Les paramètres des rayons réels sont indiqués par (●) pour les arrivées rapides  $Is_f/It_f$ , (●) pour les arrivées lentes  $Is_s/It_s$  et par (Δ) pour les arrivées complexes stratosphériques  $Is_d$  et (▽) pour les arrivées complexes thermosphériques  $It_d$ .

est comprise entre 340 m/s et 550 m/s. Les valeurs les plus faibles correspondent aux arrivées stratosphériques  $Is_f$  et  $Is_s$  sont de l'ordre de la vitesse du son au sol (340 m/s), tandis que les arrivées thermosphériques  $It_f$  et  $It_s$  ont des valeurs et des variations plus grandes. Aux caustiques,  $v_a \approx 359$  m/s pour la stratosphérique et  $v_a \approx 450$  m/s pour la thermosphérique. Pour les arrivées stratosphériques diffractées  $Is_d$ , la vitesse apparente croît d'abord de 359 m/s à la caustique jusqu'à 409 m/s en  $x = 63$  km, puis décroît fortement lorsque le récepteur s'approche de la source où  $\text{Re}(\phi) \rightarrow \pi/2$ . Dans la seconde zone d'ombre, pour les arrivées  $It_d$ ,  $v_a$  reste à peu près constant, en adéquation avec  $\text{Re}(\phi)$  constant. La partie imaginaire de la vitesse apparente est non nulle dans la zone d'ombre et est due à  $\text{Im}(\phi) \neq 0$ , nécessaire à l'optimisation du rayon propre.  $\text{Im}(v_a)$  n'a donc pas de sens physique.

Pour le temps d'arrivée  $t_a$ , pour mieux mettre en valeur ses variations liées à la propagation, on lui retire la valeur  $x/c_{\text{ref}}$  avec  $c_{\text{ref}} = 340$  m/s qui serait celle d'une onde se propageant dans la direction horizontale. Le temps d'arrivée retardé décroît donc avec la distance  $x$  : plus le récepteur est lointain, plus on s'approche du cas d'une propagation horizontale. Les valeurs thermosphériques sont évidemment plus grandes que les stratosphériques car le chemin parcouru est plus long. Pour les rayons stratosphériques, il n'y a presque pas de différences entre les arrivées  $Is_f$  et  $Is_s$  avec des valeurs comprises entre 110 s et 20 s. Pour les rayons thermosphériques, les valeurs sont plus élevées entre 306 s et 182 s et la différence entre les phases  $It_f$  et  $It_s$  est plus importante car les effets de stratification du profil de vitesse du son et du vent sont plus marqués. Dans les zones d'ombre, au voisinage de la caustique (sur une distance d'environ 100 km), les valeurs réelles des temps d'arrivée correspondent à une extrapolation linéaire de la valeur du temps d'arrivée à la caustique. En se rapprochant de la source, les arrivées stratosphériques dévient toutefois de cette extrapolation et croissent rapidement, correspondant à une arrivée par diffraction en zone d'ombre de caustique qui s'écarte très fortement de la propagation en ligne droite. Ce long chemin de propagation explique aussi la chute de  $v_a$  dans cette zone. La partie imaginaire du temps arrivée permet quant à elle d'assurer la décroissance exponentielle de l'amplitude du champ de pression, caractéristique des ondes diffractées (cf. chapitre 2).

Ainsi, la méthode des rayons complexes permet d'obtenir les paramètres géométriques tels

que les temps d'arrivée et les vitesses apparentes pour des récepteurs localisés dans les zones illuminées mais aussi dans les zones d'ombre. En trois dimension, pour le cas d'une source ponctuelle, l'optimisation permettrait d'avoir également l'azimut d'émission des rayons et de calculer notamment la déviation d'azimut dû au vent transverse à la propagation.

#### 4.3.4 Amplitudes et signatures

Dans cette partie, nous analysons la signature des ondes dans les zones illuminées et les zones d'ombre pour le cas de la source ponctuelle. Le signal émis à 1 m de la source  $p'_s(t) = s(f_c(t - t_s))$  est un signal à bande fréquentielle limitée autour de la fréquence centrale  $f_c = 3\text{ Hz}$  défini par la relation :

$$s(t') = \begin{cases} -0.5 \sin(\pi t') [1 + \cos(\pi t')] & \text{si } t' \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous représentons sur la FIGURE 4.20 les signatures pour les arrivées stratosphériques et thermosphériques obtenues à partir de l'équation (2.56) sommant la contribution de chaque rayon. Les signatures sont représentées pour des récepteurs se situant autour des deux caustiques stratosphérique d'une part ( $x_{cs} = 225,7\text{ km}$ ) et thermosphérique ( $x_{ct} = 361,8\text{ km}$ ) d'autre part, afin d'observer l'évolution des signaux entre les zones illuminées et les zones d'ombre. Les temps d'arrivée retardés sont indiqués avec les mêmes symboles et les mêmes couleurs que sur la FIGURE 4.19. Les maxima de surpression notés  $p_*$ , sont indiqués pour chaque phase à droite avec le même code couleur. Pour une fréquence  $f_s = 3\text{ Hz}$ , les arrivées stratosphériques (FIGURE 4.20a) entre 230 et 250 km ont la même forme et le même temps d'arrivée retardé que dans l'article de Blom (2019, Figure 5).

Les arrivées rapides (en noir) ont des signatures correspondant à la signature initiale  $s(t)$  avec une amplitude variant entre  $10^{-1}$  et  $2,5 \times 10^{-3}\text{ Pa}$ . Les formes d'ondes des arrivées lentes (gris) correspondent aux transformées de Hilbert des arrivées directes (cf. chapitre 2) associées au « tangement » de la caustique. L'amplitude de ces signatures varie entre  $1,8 \times 10^{-3}$  et  $2,3 \times 10^{-3}\text{ Pa}$ . A la caustique, les deux arrivées s'additionnent et ont une amplitude singulière. Nous pouvons obtenir la signature à la caustique avec une amplitude finie en utilisant la théorie uniforme de la diffraction (UTD, voir chapitre 2). Nous présentons par exemple la signature à la première caustique en  $x = 225,72\text{ km}$ , c'est à dire à environ 9 cm de la caustique stratosphérique obtenue de manière numérique, sur la FIGURE 4.21. Le signal obtenu à partir des rayons est représenté en pointillés rouges et présente une amplitude qui tend vers l'infini par rapport à l'amplitude du signal obtenu par UTD représenté en noir. L'amplitude du signal noir est égale à  $3,5 \times 10^{-3}\text{ Pa}$  qui est en cohérence avec les amplitudes des formes d'onde arrivant en 225 et 230 km (FIGURE 4.20a).

Notons que les arrivées rapides arrivent plus tôt avec une amplitude plus faible que les arrivées lentes. Dans la zone d'ombre, l'onde diffractée a une amplitude qui décroît exponentiellement avec par exemple  $p_* = 3 \times 10^{-4}\text{ Pa}$  en  $x = 220\text{ km}$ , c'est à dire à une distance de 5,7 km de la caustique. Cette décroissance étant liée à la fréquence, le signal perd son contenu haute fréquence et s'allonge en temps. Il devient également asymétrique du fait du déphasage en  $\pi/4$ .

Pour les arrivées thermosphériques (FIGURE 4.20b), nous observons la même évolution en fonction de la distance  $x$ . Les amplitudes des arrivées lentes (en gris) sont relativement plus faibles que celles des arrivées rapides (en noir). Dans la zone d'ombre, comme pour la phase stratosphérique, l'amplitude décroît de manière exponentielle avec une amplitude de  $5,3 \times 10^{-5}$  en  $x = 355\text{ km}$ , c'est à dire à 6,8 km de la caustique.

Ainsi, la méthode des rayons complexes permet d'obtenir les signatures dans les zones illuminées et les zones d'ombre. Cependant, la singularité à la caustique nécessite l'utilisation de la théorie uniforme de la diffraction pour y recouvrir une amplitude finie.

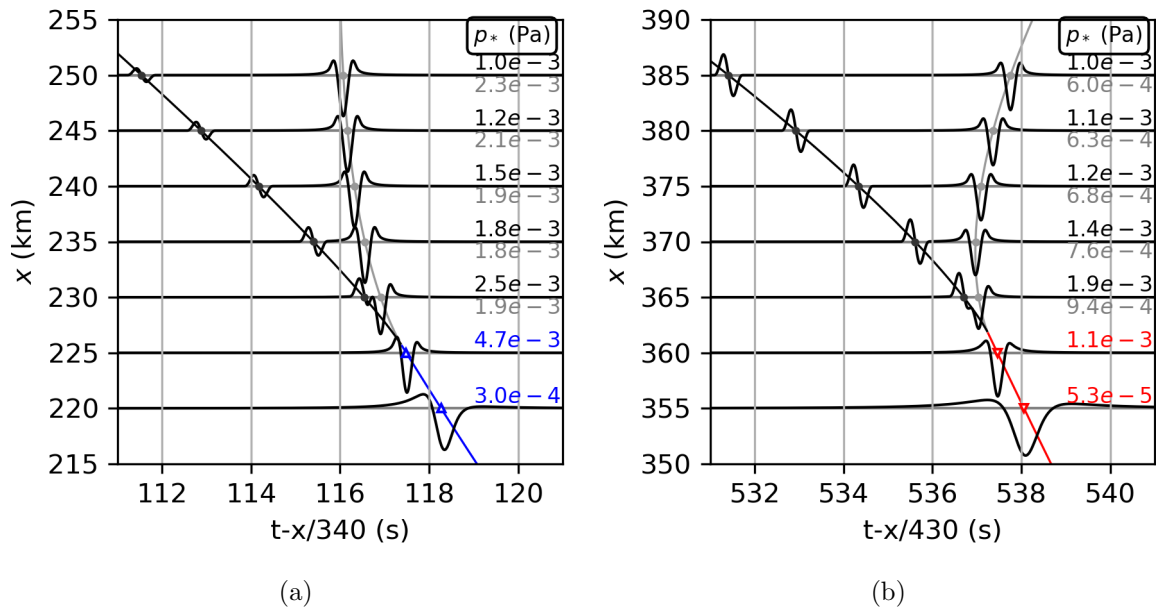


FIGURE 4.20 – Signatures  $p'(t)$  (Pa) pour une source ponctuelle en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.7a. Les signatures sont représentées pour des récepteurs localisés autour des caustiques (a) stratosphérique ( $x_{cs} = 225,7$  km) et (b) thermosphérique ( $x_{ct} = 361,8$  km). Les temps d'arrivée réduits correspondants, pour les arrivées rapides ( $\bullet$ ) lentes ( $\circ$ ) et diffractées ( $\blacktriangle/\blacktriangledown$ ) sont indiqués pour chaque signature. Le maximum de suppression  $p_*$  est indiqué pour chaque arrivée avec la couleur correspondante.

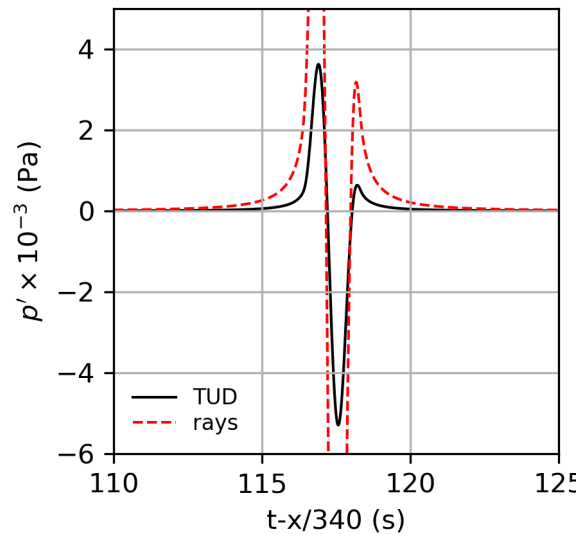


FIGURE 4.21 – Formes d'onde  $p'$  (Pa) obtenues à partir des rayons et à partir de la UTD, localisées en  $x = 225,72$  km, à 9 cm de la caustique stratosphérique.

### 4.3.5 Exemple d'application pour un profil météorologique verticalement stratifié et horizontalement dépendant

Dans cette section, nous testons maintenant la robustesse de la méthode des rayons complexes dans le cas réaliste d'un profil atmosphérique non seulement stratifié mais également dépendant de la distance  $x$ , et ce toujours pour une source ponctuelle au sol. Afin de travailler avec des profils analytiques, et de moduler les arrivées stratosphériques produites par le profil de vent, nous conservons le même profil de vitesse du son  $c_0$  que dans le cas précédent ((Lingevitch et al., 1999)), et le profil de vitesse du vent est toujours défini par une Gaussienne centrée en  $z = 60$  km mais d'amplitude décroissant linéairement avec la distance, de 50 m/s en  $x = 0$  jusqu'à -13 m/s en  $x = 500$  km. Le profil de vitesse du son effective est représenté sur la FIGURE 4.22a, montrant la disparition progressive du guide d'onde stratosphérique. Les rayons stratosphériques ( $Is_f$ ,  $Is_s$ ,  $Is_d$ ) et thermosphériques ( $It_f$ ,  $It_s$ ,  $It_d$ ) correspondants sont représentés sur la FIGURE 4.22b avec le même code couleur que les figures précédentes avec un profil invariant. Comme attendu, en comparant les deux configurations, avec le même nombre de récepteurs au sol, la densité de rayons stratosphériques  $Is_s$  (gris) est beaucoup plus faible pour le cas dépendant de la position que pour le cas indépendant. Par ailleurs, les positions des caustiques au sol sont décalées : la caustique stratosphérique se trouve plus loin de la source (à  $x_{xc} = 258,3$  km) que dans le cas invariant, et la caustique thermosphérique plus près (à  $x_{ct} = 344,9$  km).

Les ordres de grandeurs des paramètres d'émission et de la vitesse apparente sont légèrement différents entre les cas indépendant et dépendant de la distance horizontale. C'est par ailleurs ce que l'on constate sur les temps d'arrivée réduits indiqués sur la FIGURE 4.23. Les signatures obtenues dans le cas de  $c_{\text{eff}}$  dépendant de la distance ont la même forme que dans le cas précédent avec des amplitudes du même ordre de grandeur, que ce soit dans la zone d'ombre ou la zone illuminée.

Dans cette partie, nous avons montré que la méthode des rayons complexes est parfaitement adaptée pour le calcul de rayons ce qui permet d'obtenir les paramètres géométriques, les amplitudes et les signatures pour des atmosphères dépendantes de la distance au cours de la propagation.

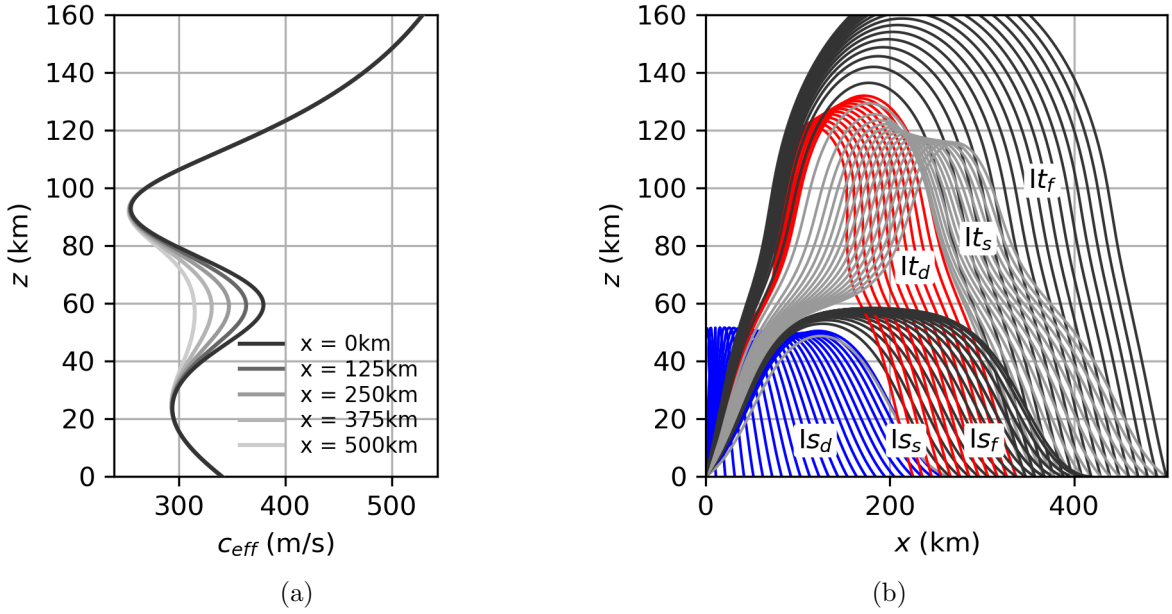


FIGURE 4.22 – (a) Vitesse du son effective  $c_{\text{eff}} = c_0 + v_0$  pour différentes positions suivant  $x$ , avec  $c_0$  la vitesse du son définie par une fonction rationnelle de polynômes (Lingevitch et al., 1999) et le vent  $v_0$  défini par une fonction Gaussienne (Blom, 2019) d’amplitude décroissant linéairement avec la position  $x$ . (b) Rayons propres optimisés correspondants, obtenus par la méthode de tracé de rayons complexe, pour une source ponctuelle située en  $(0,0)$ . Les arrivées réelles rapides  $Is_f/It_f$  (—) et lentes  $Is_s/It_s$  (—) ainsi que les arrivées diffractées  $Is_d$  (—)/  $It_d$  (—), sont projetées dans le plan réel  $(x,z)$ .

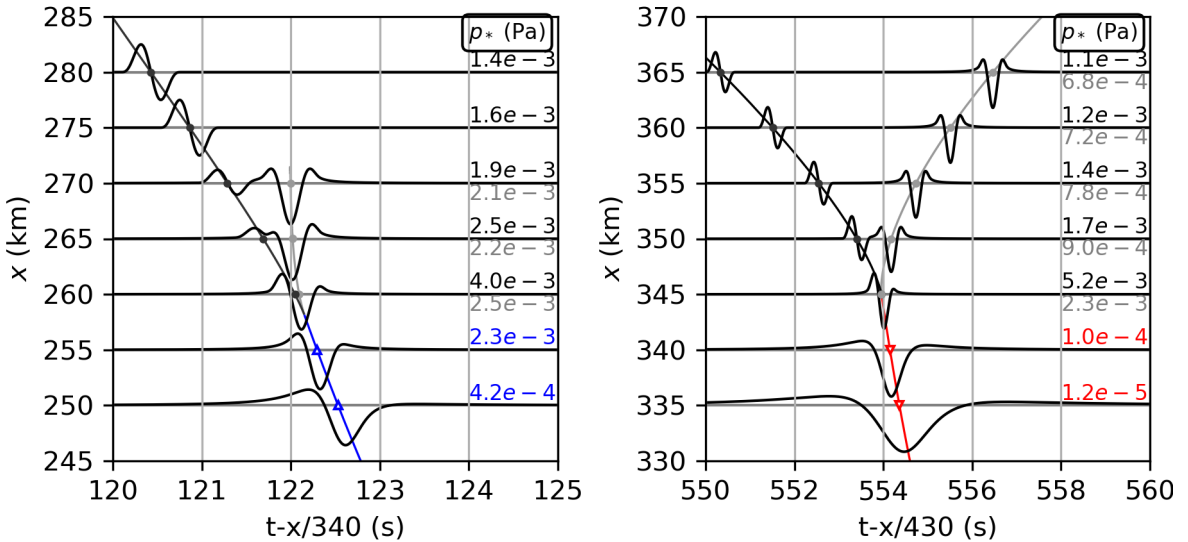


FIGURE 4.23 – Signatures  $p'$  (Pa) pour une onde définie par (4.8), émise par une source ponctuelle en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.22a. Les signatures sont représentées pour des récepteurs localisés autour des caustiques (a) stratosphérique ( $x_{cs} = 258,3$  km) et (b) thermosphérique ( $x_{ct} = 344,9$  km). Les temps d’arrivée réduits correspondants, pour les arrivées rapides (●) lentes (●) et diffractées (▲/▼) sont indiqués pour chaque signature. Le maximum de surpression  $p_*$  est indiqué pour chaque arrivée avec la couleur correspondante.

## 4.4 Comparaison avec l'approximation parabolique pour une source ponctuelle

Afin d'évaluer la méthode des rayons complexes, nous la comparons avec une méthode numérique. La propagation des ondes infrasonores peut être simulée par l'approximation parabolique split-step Padé d'ordre 4 (Collins, 1993; Dragna, 2011; Ostashev et Wilson, 2015; Nguyen-Dinh et al., 2018). Cette méthode est décrite plus en détails dans le Chapitre 1. Comme on l'a vu en introduction, c'est une méthode d'usage fréquent, et relativement rapide pour des simulations longue distance comme la propagation infrasonore. Elle permet de prendre en compte les effets de la diffraction, importants pour nous dans le cadre de cette comparaison, mais reste limitée par l'approximation paraxiale.

Dans cette section, nous considérons la source ponctuelle étudiée dans la section 4.3 avec le profil de vitesse du son et de vent représenté sur la FIGURE 4.7a dans un premier temps, puis dans le cas dépendant de la distance  $x$  de la FIGURE 4.22a dans un second temps. En considérant une source mono-fréquentielle  $f = 1$  Hz, d'amplitude à l'émission  $p_e = 1$  Pa en  $r_{\text{ref}} = 1$  m, nous calculons les pertes par transmission, notées TL (*Transmission Loss*) en dB, pour des récepteurs localisés au sol entre 1 et 400 km de la source :

$$\text{TL}(\mathbf{x}, \tilde{\omega}) = 20 \log_{10} \left( \frac{|\tilde{p}'/p_e|}{\sqrt{r/r_{\text{ref}}}} \right), \quad (4.9)$$

où  $r = x$  est la distance à la source et  $\tilde{p}'$  est défini par l'équation (2.56) pour les rayons complexes. Le terme  $\sqrt{r}$  permet d'adapter l'amplitude de l'onde calculée en deux dimensions au cas tridimensionnel en tenant compte de la divergence axi-symétrique de la propagation à longue distance (Nguyen-Dinh et al., 2018, équation (5)). Pour une source ponctuelle en milieu homogène, la perte par transmission vaut :

$$\text{TL}_{\text{homo}}(\mathbf{x}, \tilde{\omega}) = -20 \log_{10} \left( \frac{r}{r_{\text{ref}}} \right). \quad (4.10)$$

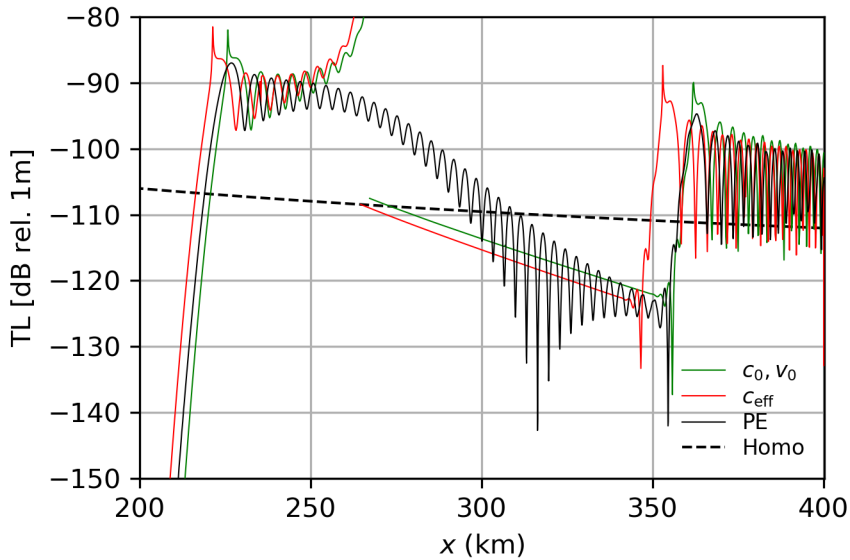


FIGURE 4.24 – Pertes par transmission (TL) au sol  $z_g = 0$  pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) et un vent défini par une fonction Gaussienne. Calculs : (1- en vert) avec les rayons complexes avec cette atmosphère advectée ( $c_0, v_0$ ), (2- en rouge) avec la vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$ , (3- en noir) avec l'approximation parabolique et la vitesse du son effective, (4- en tirets) en milieu homogène.

Contrairement à la méthode des rayons complexes qui prend en compte le vent sous forme vectorielle, l'approximation parabolique considère le profil de vitesse du son effective, représenté en pointillés sur la FIGURE 4.7a et sur la FIGURE 4.22a. En plus de l'approximation parabolique, considérer la vitesse du son effective peut induire quelques erreurs notamment sur la position des caustiques. C'est ce que l'on peut observer sur la FIGURE 4.24 qui représente les pertes par transmission (TL) en dB, calculées d'une part à partir des rayons réels et complexes et pour une atmosphère soit advectée (en vert) soit avec une vitesse du son effective (en rouge) et d'autre part à partir de l'approximation parabolique en considérant une vitesse du son effective (en noir). Nous pouvons constater que considérer le calcul en vitesse du son effective décale nettement les positions des deux caustiques. Ce décalage est plus important pour les caustiques thermosphériques que stratosphériques, et plus important pour l'approximation rayons que pour l'approximation parabolique. C'est par ailleurs ce que l'on retrouve dans Gainville (2008, p. 130). De plus, ce décalage est indépendant de la fréquence. Dans la suite nous ne prendrons en compte que la forme vectorielle du vent pour l'intégration des rayons.

#### 4.4.1 Profil météorologique constant

Dans un premier temps nous nous intéressons au cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son indépendant de la distance  $x$ . Les pertes par transmission TL, obtenues avec la méthode des rayons complexes, sont représentées sur la FIGURE 4.25. Nous représentons sur cette figure les arrivées séparément, avec le même code couleur qu'aux figures de la section 4.3 : les arrivées réelles rapides strato- et thermo-sphériques ( $Is_f$ ,  $It_f$  en noir), les arrivées lentes ( $Is_s$ ,  $It_s$  en gris), et enfin les arrivées complexes, stratosphériques ( $Is_d$  en bleu) et thermosphériques ( $It_d$  en rouge). La somme de la contribution de chaque rayon en chaque position est représentée en vert, et les solutions obtenues à l'aide de la théorie uniforme de la diffraction au voisinage des caustiques sont représentées en pointillés verts. Toutes ces solutions obtenues à partir de la méthode des rayons complexes sont comparées à l'approximation parabolique, indiquée en noir. Rappelons que les différentes arrivées ne peuvent être séparées dans le cas du calcul parabolique. La solution en milieu homogène est quant à elle indiquée par des pointillés noirs.

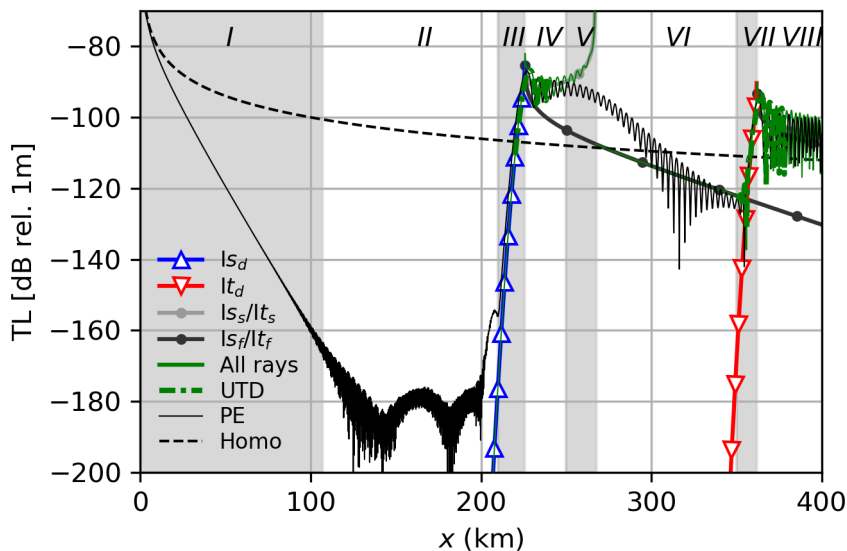


FIGURE 4.25 – Pertes par transmission (TL) au sol  $z_g = 0$  pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.7a. Différentes méthodes de calcul sont présentées avec les codes couleur et symboles correspondant aux figures précédentes.



Les arrivées obtenues permettent de définir huit zones entre 0 et 400 km dans lesquelles nous observons un comportement particulier des solutions : les zones I et II sont associées à une zone d'ombre dite *anormale* (Pierce, 1994), les zones III, IV et V sont associées aux arrivées stratosphériques et les zones VI, VII et VIII sont associées aux arrivées thermosphériques.

#### Zone I

Dans cette zone, l'approximation parabolique retrouve la décroissance exponentielle du champ acoustique associé aux ondes rampantes qui se propagent le long du sol (Pierce, 1994) (cf. chapitre 1). La méthode de tracé de rayons décrite dans ce chapitre ne prend pas en compte la contribution des rayons rampants.

#### Zone II

Cette zone se situe à la fois très loin de la source si bien que la contribution des rayons rampants y est négligeable, et très loin de la caustique si bien que les effets de diffraction y sont aussi négligeables. Ainsi l'amplitude dans cette zone est très faible, de l'ordre de -180 dB. Dans cette zone, l'approximation parabolique atteint sa limite de précision numérique et les résultats obtenus n'ont pas de sens physique.

#### Zones IV et VIII

Ce sont les zones illuminées où le tracé de rayons permet d'obtenir le champ résultant de l'interférence entre les arrivées rapides et lentes :  $Is_f$  et  $Is_s$  pour la phase stratosphérique (zone IV) et  $It_f$  et  $It_s$  pour la phase thermosphérique (zone VIII). L'amplitude du champ total y est oscillante du fait de ces interférences. La solution du tracé de rayons est légèrement décalée en  $x$  comparée à la solution parabolique, mais avec un niveau de pertes par transmission du même ordre de grandeur. La comparaison des oscillations montre que les arrivées obtenues avec l'approximation parabolique arrivent à une distance plus courte que les arrivées obtenues par tracé de rayons. Cette différence est plus importante pour les arrivées stratosphériques 1,9 km (voir FIGURE 4.27a) que thermosphérique 1,5 km (voir FIGURE 4.27b). Cette différence entre les phases stratosphérique et thermosphérique est due à l'approximation parabolique de l'équation de Helmholtz, partiellement compensée par l'utilisation de la vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$ . Ces différences entre la solution rayon et l'approximation parabolique restent les mêmes quelle que soit la fréquence (nous avons testé 0,1, 0,5, 2 et 5 Hz). Lorsque l'on recalcule les solutions en amplitude et en distance (voir FIGURE 4.28), nous constatons que les solutions sont identiques. Ainsi, l'approximation parabolique est une bonne référence pour la validation de la méthode des rayons complexes, particulièrement pour l'amplitude. Comme mentionné tout au long de ce manuscrit, l'amplitude des rayons diverge au voisinage immédiat de la caustique. Cette singularité d'amplitude est corrigée par l'utilisation de la théorie uniforme de la diffraction (UTD) décrite dans le Chapitre 2. Ces solutions sont indiquées en pointillés verts pour les caustiques stratosphériques (FIGURE 4.27a, FIGURE 4.28a) et thermosphériques (FIGURE 4.27b, FIGURE 4.28b). Avec recalage, on voit que l'évolution de la solution UTD permet de reproduire parfaitement l'approximation parabolique à la caustique. Dans ces deux zones illuminées, les solutions des deux méthodes diffèrent seulement de 1,2 dB dans la zone IV et de 1,3 dB dans la zone VIII.

#### Zone V

Cette zone est la continuité de la zone illuminée IV et le champ y est obtenu par l'interférence des arrivées stratosphériques  $Is_f$  et  $Is_s$ . Néanmoins, l'amplitude des  $Is_s$  diverge en  $x = 266,8$  km ce qui implique une divergence du champ total. Cette divergence s'explique comme suit : le rayon émis à la source avec un angle d'émission proche de zero degré, retourne au sol après avoir été réfracté à une altitude d'environ 50 km (voir  $Is_s$  FIGURE 4.7b). Les rayons réels émis quasi-horizontalement à la source ont des sections de tube de rayon  $\nu$  qui varient au cours de la propagation mais qui tendent vers zero en  $x = 266,8$  km. Ce phénomène est illustré sur la FIGURE 4.26 où est représenté  $|\nu|$  le long des rayons pour des rayons émis entre 0 et 15°. Les positions où  $|\nu| = 0$  correspondent aux points de caustique le

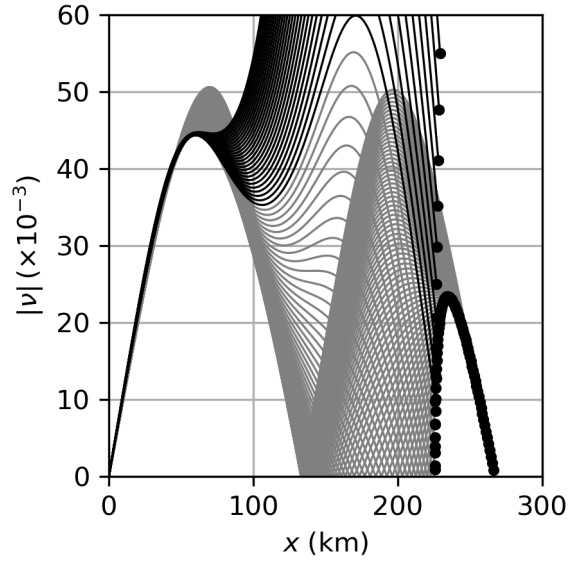


FIGURE 4.26 – Sections du tube de rayon  $|\nu|$  le long des rayons réels pour des angles d'émission  $\phi$  variant entre 0 et  $15^\circ$ . En noir sont représentés ceux pour les rayons rapides, en gris ceux pour les rayons lents. Les points correspondent à la position au sol.

long des rayons et les différents points noirs indiquent la position au sol. Selon la théorie des catastrophes, ce n'est pas une caustique complète et elle n'est pas structurellement stable. On verra ainsi que ce phénomène disparaît dans le cas d'un profil météorologique variable dans les 2 directions. Par ailleurs, c'est un phénomène souvent observé dans la littérature pour le cas d'une source ponctuelle (Gainville et al., 2012, Fig. 3), (Blom, 2019, Fig. 1). Ainsi, la méthode des rayons implique une singularité à cause de cette focalisation au sol qui est réduite en un seul point. La méthode d'identification des caustiques décrite dans la partie 4.2.3 ne permet pas de trouver ce point singulier. Cette singularité génère des ondes diffractées au sol qui vont se propager de manière analogue aux ondes rampantes et qui ne sont donc pas calculées par la méthode des rayons complexes.

#### Zone VI

Au-delà de cette singularité, l'approximation parabolique permet d'obtenir les interférences liées à cette diffraction avec les arrivées rapides  $Is_f$ , alors que le tracé de rayon ne fournit que cette arrivée rapide et donc une évolution lisse du TL.

#### Zones III et VII

Ces zones correspondent aux zones d'ombre stratosphérique  $Is_d$  et thermosphériques  $It_d$ . L'amplitude obtenue par un seul rayon complexe y est exponentiellement décroissante et coïncide parfaitement, avec la même pente, à la solution de l'approximation parabolique. Le même décalage en amplitude et  $x$  est observé que pour les zones illuminées IV et VIII (FIGURE 4.28). Pour les arrivées stratosphériques les résultats coïncident sur environ 16 km entre 210 et 225,7 km et pour les arrivées thermosphériques les résultats coïncident sur environ 7 km entre 355 et 361,8 km. Plus loin dans la zone d'ombre thermosphérique, le champ diffracté  $It_d$  disparaît et le champ de pression est dominé par les arrivées  $Is_f$ .

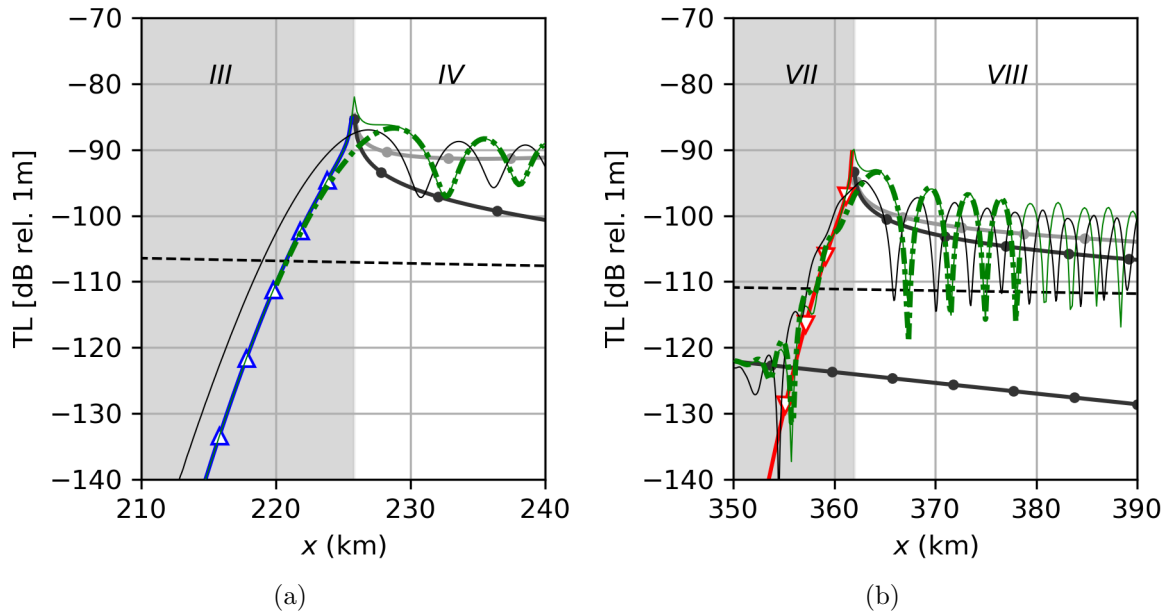


FIGURE 4.27 – Mêmes résultats que sur la FIGURE 4.25 avec zooms autour des caustiques (a) stratosphérique et (b) thermosphérique.

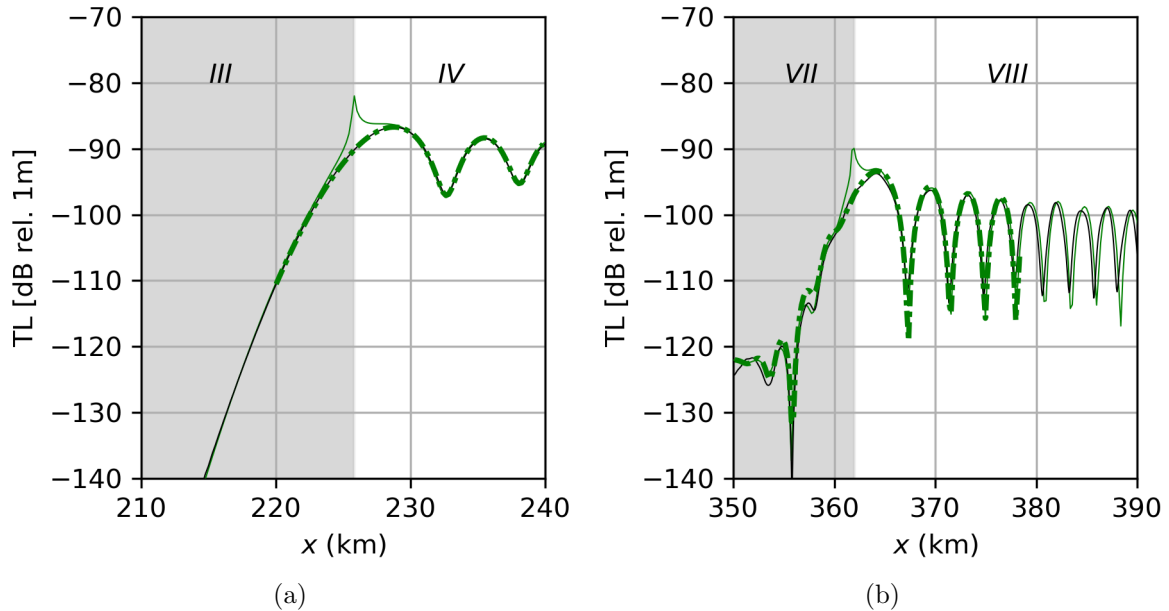


FIGURE 4.28 – Les mêmes zooms que sur la FIGURE 4.27 en ne considérant que les solutions de la somme des rayons, de l'UTD et de l'approximation parabolique, recalées en distance et en amplitude.

#### 4.4.2 Profil météorologique dépendant de la distance

Dans cette partie, nous comparons les résultats de perte en transmission pour une atmosphère variable dans la direction horizontale (FIGURE 4.22a). Dans ce cas, la singularité de la zone V (FIGURE 4.25) du cas précédent n'est plus présente. Comme nous l'avons vu dans la partie 4.3.5, la méthode des rayons complexes est parfaitement adaptée pour simuler la propagation des infrasons pour ce type d'atmosphère. Les pertes par transmission obtenues sont représentées sur la FIGURE 4.29 avec le même code couleur et les mêmes symboles que la FIGURE 4.25.

Nous observons sept zones, similaires à celle du cas précédent, avec les mêmes types d'arrivées. Seule la zone V avec la singularité au sol n'est pas présente car la singularité n'existe plus dans ce cas.

##### Zones IV et VII

Lorsque nous comparons la solution des rayons avec l'approximation parabolique d'un point de vue global, nous pouvons voir que les arrivées prédites par l'approximation parabolique arrivent à une distance plus petite (-1,1 km) pour les stratosphériques et plus grande (+4,4 km) pour les arrivées thermosphériques, par rapport aux arrivées simulées par la méthode des rayons. À part cette différence en distance  $x$ , les oscillations dans les zones illuminées IV et VII ont les mêmes formes, mais les amplitudes diffèrent de 2,6 dB dans la zone IV et de 2,3 dB dans la zone VII.

##### Zones III et VI

Dans la zone d'ombre stratosphérique (zone III) et dans la zone d'ombre thermosphérique (zone VI) la décroissance exponentielle de l'amplitude coïncide parfaitement entre les deux méthodes avec la même pente et le même décalage que pour les zones IV et VII. Les arrivées  $Is_d$  sont les mêmes sur une distance d'environ 21 km entre 236,8 et 258,3 km. Les arrivées  $It_d$  coïncident sur une distance de 8 km entre 336 et 344,9 km.

##### Zone V

Dans cette zone illuminée, la contribution de  $It_d$  disparaît et le champ est dominé par l'arrivée  $Is_f$  seulement. L'absence de la singularité implique un meilleur accord entre la solution rayons et la solution parabolique dans cette zone comparée au cas du profil purement stratifié. Cependant, les oscillations du champ obtenues avec l'approximation parabolique ne sont pas reproduites par la méthode des rayons avec la contribution seule de  $Is_f$ .

De la même manière que pour le cas précédent, la solution de la théorie uniforme de la diffraction est calculée autour des caustiques stratosphérique (FIGURE 4.30a) et thermosphérique (FIGURE 4.30b) et représentée en pointillés verts. L'amplitude finie à la caustique correspond à l'amplitude de l'approximation parabolique. Par ailleurs, les interférences entre  $It_d$  et  $Is_f$  sont bien reproduites par l'UTD.

Cette comparaison permet de valider la méthode et l'algorithme développé dans ce chapitre, pour une application à la propagation des ondes infrasonores dans une atmosphère avec vent stratifié et dépendant de la distance.

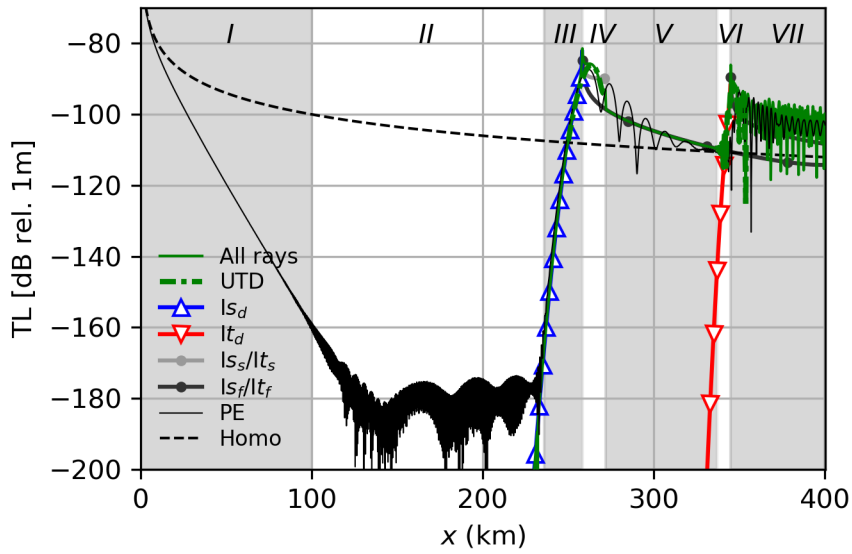


FIGURE 4.29 – Pertes par transmission (TL) au sol  $z_g = 0$  pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.22a. Différentes méthodes de calcul sont présentées avec les codes couleur et symboles correspondant aux figures précédentes.

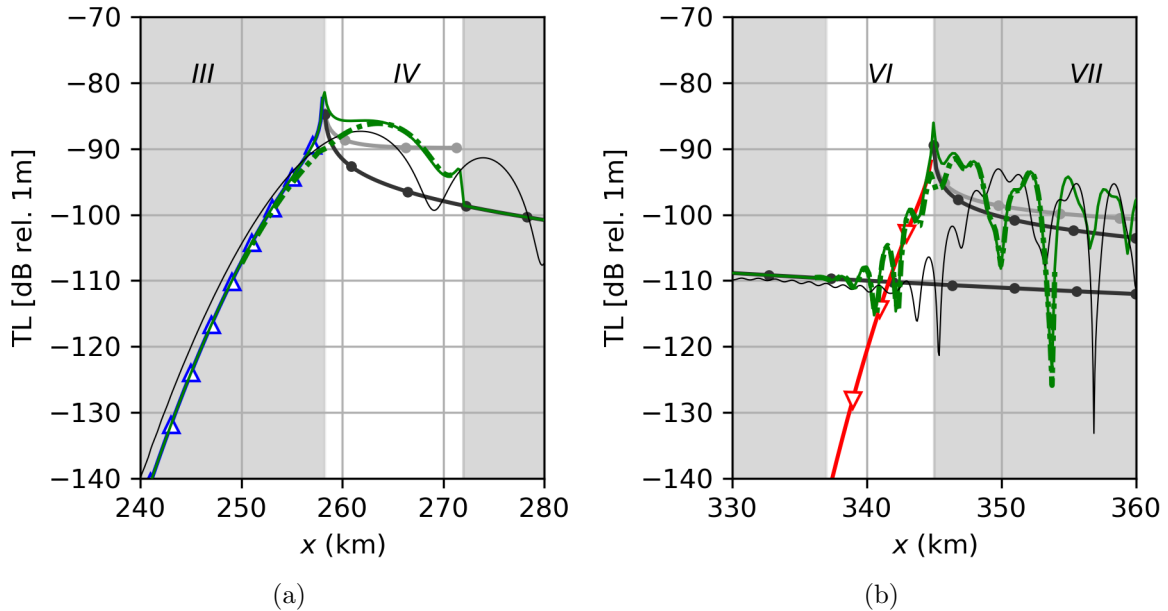


FIGURE 4.30 – Mêmes résultats que sur la FIGURE 4.29 avec zooms autour des caustiques (a) stratosphérique et (b) thermosphérique.

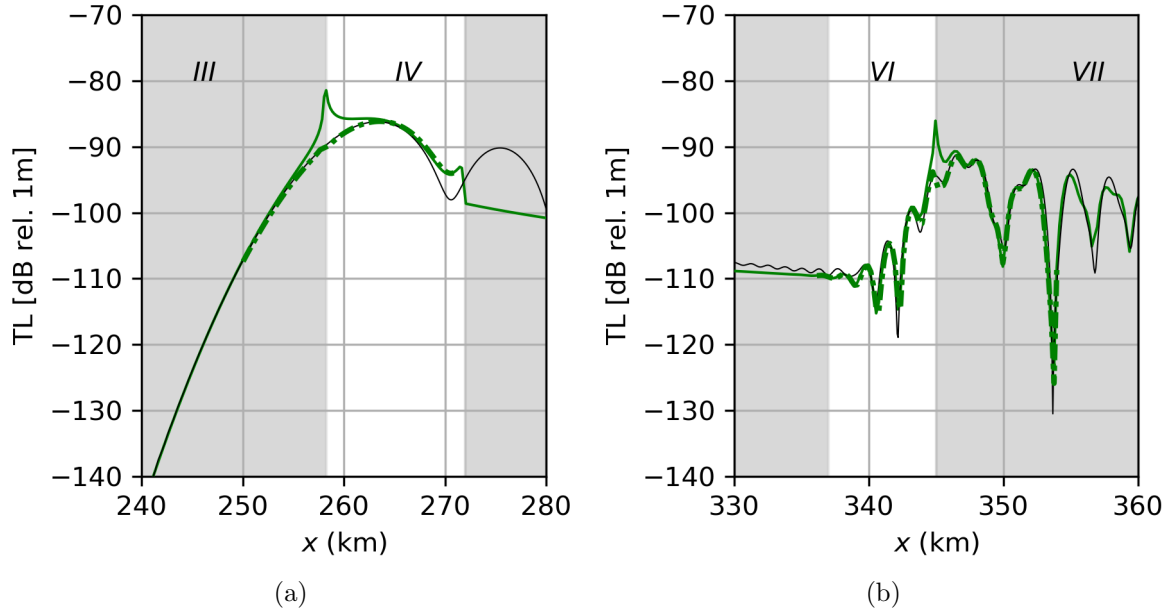


FIGURE 4.31 – Mêmes zooms que sur la FIGURE 4.30 en ne considérant que les solutions rayons, UTD et l’approximation parabolique, recalées en distance et en amplitude.

## 4.5 Conclusion du chapitre

L’objectif de ce chapitre était de présenter l’algorithme de recherche des rayons propres complexes, basé sur la méthode des rayons complexes.

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence, numériquement, la problématique liée à la présence de caustiques lorsque l’on souhaite atteindre une station située dans leur zone d’ombre. Ainsi, une perturbation complexe ou bien un contournement dans le plan complexe (Stone et al., 2018), permettent d’atteindre celle-ci. Malgré l’existence de méthodes numériques pour les rayons complexes dans quelques rares références de la littérature ((Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Amodei et al., 2006; Stone et al., 2018)), aucune application de la méthode à la propagation des infrasons, avec notamment l’advection par le vent atmosphérique, n’a à notre connaissance été réalisée. De plus, les difficultés liées à la présence de guides d’ondes atmosphériques, et donc la possibilité d’observer plusieurs arrivées en un même récepteur n’ont jusque-là jamais été prises en compte. Nous verrons dans le chapitre 5 que notre méthode permet aussi d’obtenir les solutions pour des rayons ayant tangenté plusieurs caustiques, chose qui jusqu’ici n’a pas été présenté dans le cadre de la théorie des rayons complexes.

L’implémentation numérique de notre méthode se base sur un algorithme en trois étapes. La première repose sur un lancer de rayons classique qui permet d’obtenir toutes les informations géométriques dans le plan des récepteurs, et ainsi d’en déduire les positions des caustiques et des guides d’ondes. La seconde étape consiste en la détermination d’une estimation initiale, par interpolation ou extrapolation adaptée, de tous les rayons propres et l’estimation de leurs paramètres pour les récepteurs d’intérêt. Pour les récepteurs en zone d’ombre, une interpolation réelle de la caustique, suivie d’une extrapolation complexe dans la zone d’ombre sont ainsi proposées. La dernière étape consiste en l’optimisation des rayons propres, à partir de ces estimations initiales, par l’algorithme classique de Levenberg-Marquardt.

Les rayons obtenus à la suite de cette troisième étape permettent de déduire les paramètres géométriques tels que les temps d’arrivée aux récepteurs, les vitesses apparentes ainsi que les signatures et leurs amplitudes. L’obtention de ces paramètres d’amplitude nous a permis de comparer les résultats obtenus par la méthode présentée dans ce chapitre à ceux issus

de l'approximation parabolique, et ainsi de valider la méthode. Cependant, la méthode des rayons complexes ne résout pas les singularités aux caustiques. Celles-ci sont alors traitées à l'aide de la théorie uniforme de la diffraction. Néanmoins, afin d'appliquer l'UTD il est nécessaire de connaître toutes les arrivées dans les deux zones et donc d'utiliser l'algorithme présenté ci-dessus (cf. chapitre 2).

L'application de la méthode des rayons complexes au cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingeitch et al. (1999) a mis en évidence une première difficulté liée à la présence éventuelle de pôles dans le plan complexe de  $c_0$ . Une perspective de ce travail est de compléter cette méthode par un algorithme de recherche et de contournement de pôles pouvant être présents dans le plan complexe des profils de vitesse du son ou de vent.

Le calcul de l'amplitude des pertes par transmission (TL) suivant la direction horizontale pour le cas de la source ponctuelle au sol a mis en évidence un phénomène fréquent, pour ce type de source, de singularité liée à une caustique « interrompue » par le sol, dont la géométrie ne permet pas d'utiliser notre algorithme afin d'obtenir les rayons diffractés émanant de cette caustique. Ainsi, une perspective est d'ajouter à notre algorithme une méthode qui permettrait d'extrapoler les paramètres initiaux à partir de cette caustique qui se réduit à un point.

La comparaison des TL avec les résultats de l'approximation parabolique a aussi mis en évidence la présence de rayons rampants qui peuvent également être obtenus à partir des rayons complexes (Choudhary et Felsen, 1973; Chapman et al., 1999) mais qui ne sont pas pris en compte par notre méthode.

Enfin, la perspective principale de ce travail est d'étendre la méthode aux cas d'étude en trois dimensions, ainsi que l'optimisation des performances de calcul de l'algorithme, qui peuvent être améliorées en réécrivant le code dans un langage plus rapide (par exemple en C++) ainsi qu'en en parallélisant les différentes étapes, notamment celle de l'optimisation de chaque rayon.

---

## Chapitre 5

# Approximation de données météorologiques et application à la météorite de Carancas

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>59</b>
<b>3.2</b>	<b>Onde plane</b>	<b>60</b>
3.2.1	Définition de la source et du profil de vitesse du son	60
3.2.2	Solutions analytiques des trajectoires des rayons	61
3.2.3	Section du tube de rayon et amplitude de l'onde	72
<b>3.3</b>	<b>Solution de l'équation de Helmholtz</b>	<b>73</b>
<b>3.4</b>	<b>Comparaison</b>	<b>77</b>
3.4.1	Champ de pression	77
3.4.2	Formes d'ondes	80
<b>3.5</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>84</b>

---

## 5.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la météorite de Carancas introduite dans le chapitre 1. C'est un événement largement étudié dans la littérature (Kenkmann et al., 2008; Pichon et al., 2008; Borovicka et Spurný, 2008; Brown et al., 2008; Rosales et al., 2008; Tancredi et al., 2009; Henneson et al., 2014; Henneson, 2013; Gainville et al., 2017) pour lequel les signatures enregistrées aux stations situées à moins de 150 km de son cratère sont très probablement associées au bang sonique (Brown et al., 2008; Gainville et al., 2017). Selon la trajectoire proposée le plus récemment dans la littérature (Gainville et al., 2017), l'analyse de la propagation des infrasons a montré que la station I08BO du SSI, qui a enregistré deux arrivées, se situe dans la zone d'ombre géométrique. Ainsi, cet événement est un cas de référence pour l'application de la méthode du tracé de rayons complexe et la propagation du bang sonique en zone d'ombre. Une synthèse des travaux associés à la météorite de Carancas est présentée dans une première partie.

Cette méthode nécessite de définir les profils météorologiques réalistes associés à cet événement, mais prolongés de manière analytique dans le plan complexe. La propagation des rayons étant principalement influencée par les gradients de vitesse du son et du vent, il est important de bien les définir afin de prendre en compte au mieux les structures de l'atmosphère. Dans le cas du tracé de rayons complexes, bien que l'intégration des rayons soit numérique, la contrainte de profil analytique doit être respectée. Afin de pouvoir prendre en compte un



profil de vitesse du son et de vent quelconque, nous présentons dans une deuxième partie une méthode d'approximation des données météorologiques. Nous présentons cette méthode sur les données météorologiques associées au cas de la météorite de Carancas.

Finalement, l'application de la méthode des rayons complexes dans le cas de données atmosphériques réalistes pour le cas de la météorite de Carancas simplifié en deux dimensions, fait l'objet de la troisième partie.

## 5.2 Synthèse des travaux sur la météorite de Carancas

Dans cette section, nous présentons le cas de la météorite de Carancas et résumons les principaux résultats de la littérature.

### 5.2.1 Mesures et observations

La météorite est rentrée dans l'atmosphère terrestre le 15 Septembre 2007 et a impacté le sol au Pérou, dans le village de Carancas, à 16:40:14,1 TU<sup>1</sup> (Tancredi et al., 2009), générant un cratère de 13,5 m de diamètre et 2,5 m de profondeur (Kenkmann et al., 2009). Une photo du cratère est représentée sur la FIGURE 5.1. Il est situé à la frontière entre la Bolivie et le Pérou, non loin de stations sismiques boliviennes : BBOD, BBOE, BBOK, BBOB et LPAZ (Le Pichon et al., 2008). L'heure d'impact est déterminée à partir des arrivées sismiques à ces stations. A une distance d'environ 80 km du cratère se situe la station infrasonore I08BO du SSI. Toutes ces stations se situent à une altitude comparables à celle du cratère, vers 3800 m au-dessus du niveau de la mer. Sur la FIGURE 5.2, la carte de la région de Carancas est représentée avec la localisation du cratère et des différentes stations sismiques et infrasonore.

L'analyse du cratère, les observations des témoins et les données sismiques et infrasonores ont permis d'estimer le diamètre de la météorite à environ 1 m, pour une vitesse d'entrée de 12 km/s (Henneton et al., 2015), celle-ci se situant nécessairement entre 11,2 (vitesse de libération de la gravité terrestre) et 17 km/s (orbite en-deça de celle de Jupiter) (Brown et al., 2008). Par ailleurs, l'analyse minéralogique des fragments de la météorite permet de la classer comme une chondrite ordinaire H4-5W0 S3 (Connolly Jr et al., 2008) de masse volumique proche de 3300 kg/m<sup>3</sup>.

Il est admis que la météorite de Carancas n'a pas fragmenté lors de son entrée atmosphérique (Brown et al., 2008; Kenkmann et al., 2008; Gainville et al., 2017; Kocherov et al., 2020). L'analyse du cratère (Kenkmann et al., 2008), l'absence d'autres impacts identifiés et la possibilité d'expliquer l'ensemble des arrivées infrasonores avec le bang sonique uniquement (Gainville et al., 2017) sont des arguments favorables à cette hypothèse. Pourtant, les météorites de grande taille sont pratiquement toujours fracturées avant que leurs fragments

1. Temps Universel

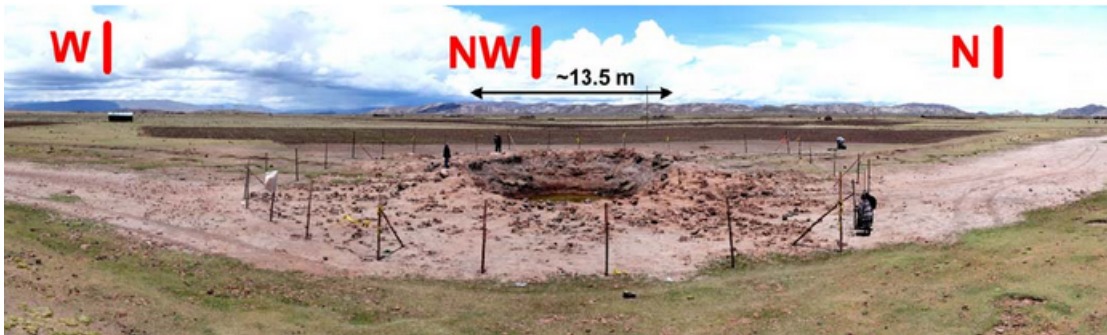


FIGURE 5.1 – Photographie du cratère de la météorite de Carancas. L'image est extraite de (Tancredi et al., 2009).

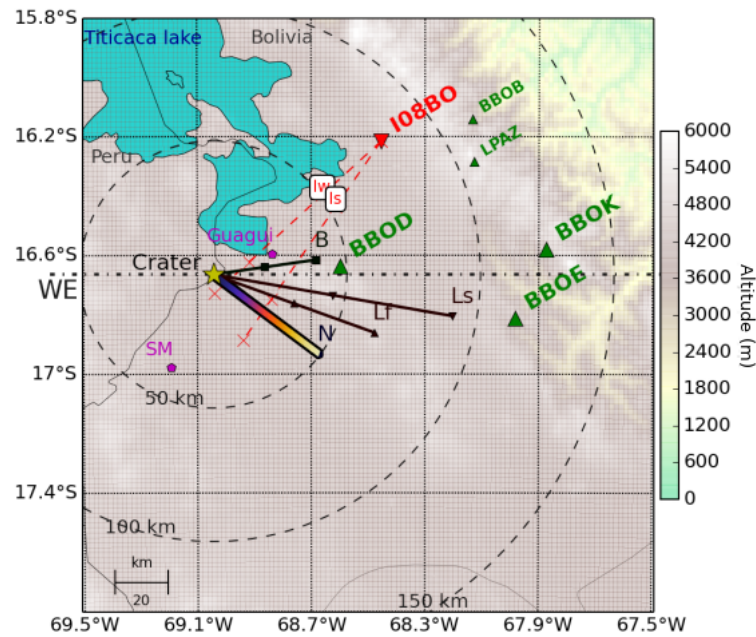


FIGURE 5.2 – Carte de la région de Carancas. La station I08BO est représentée par un triangle rouge et les stations sismiques (Le Pichon, Antier, Cansi, Hernandez, Minaya, Burgoa, Drob, Evers, et Vaubaillon, 2008) par des triangles verts. Le cratère, de coordonnées  $16^{\circ}39'52''S$ ,  $69^{\circ}02'38''W$  est représenté par une étoile. Les traces au sol des différentes trajectoires de la littérature (B (Brown et al., 2008), Ls et Lf (Le Pichon et al., 2008) et N (Gainville et al., 2017)) sont représentées. Les azimuts des deux arrivées à I08BO sont représentés en pointillés rouges. L'image est extraite de (Henneton et al., 2014).

impactent le sol (Popova et al., 2011) du fait de la forte pression dynamique exercée sur elles lors de leur phase de décélération entre 20 et 10 km d'altitude. Ainsi, la météorite de Carancas est considérée être un des rares exemples d'astéroïde monolytique ne présentant pas de fracture interne (Kocherov et al., 2020), ce qui permet d'expliquer sa haute résistance mécanique. Cette particularité en fait un cas d'école pour l'étude du bang sonique de tels objets.

Les signaux mesurés aux stations I08BO, BBOD, BBOE et BBOK sont présentés sur la FIGURE 5.3 (Gainville et al., 2017). Pour les stations BBOD, BBOE et BBOK les signaux acoustiques sont enregistrés sur les capteurs sismiques. Il s'agit a priori de l'onde acoustique incidente arrivant au capteur. Le couplage air/sol des stations est inconnu, dépendant d'une part de la topographie locale, de la nature du sol, de l'installation du capteur sismique, et d'autre part de la fréquence et de l'angle d'incidence de l'onde acoustique. Les stations I08BO,

Station	Type	Temps d'arrivée (s)	Amplitude max (Pa/nm)	Fréquence centrale (Hz)
I08BO	Iw	249,0	1,1	2,1
	Is	267,3	0,5	0,84
BBOD	Iw	129,7	40,0	3,3
BBOE	Isa	329,5	38,0	5,2
	Isb	307,5	6,0	4,7
BBOK	Isa	372,1	10,0	3,2
	Isb	352,4	14,0	4,1

TABLEAU 5.1 – Caractéristiques des signaux enregistrés aux stations associés à l'événement de Carancas (Le Pichon et al., 2008; Henneton, 2013; Gainville et al., 2017).

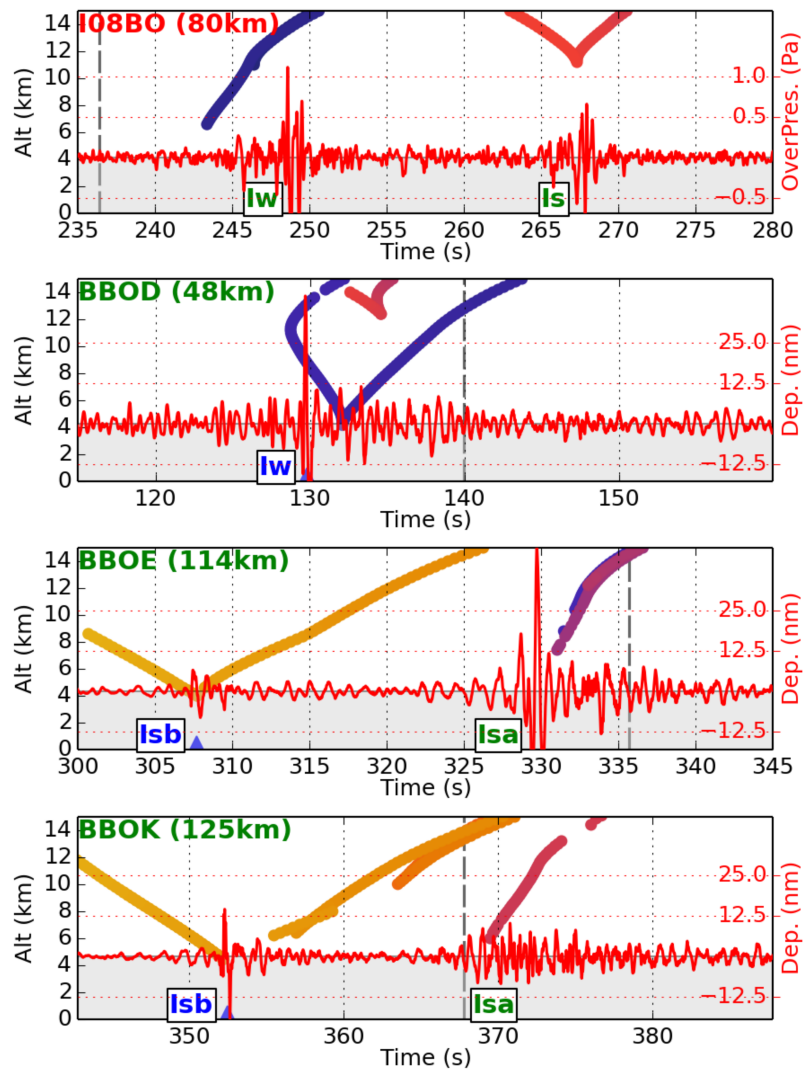


FIGURE 5.3 – Signaux de pression (en Pa, station infrasonore I08B0, en haut) ou de déplacement vertical (en nm, stations sismiques BBOD, BBOE, BBOK) enregistrés lors de l'évènement de Carancas. La distance indiquée pour chaque station est celle au cratère. Sont représentés en couleur les temps d'arrivée des rayons émis le long de la trajectoire proposée par (Gainville et al., 2017) en fonction de leur altitude à la verticale de chaque station. Les couleurs de ces rayons correspondent aux couleurs repérant l'altitude du point d'émission le long de la trajectoire sur la FIGURE 5.5, du jaune clair au bleu foncé depuis la thermosphère jusqu'à la troposphère. Figure extraite de (Gainville et al., 2017, Fig 2).

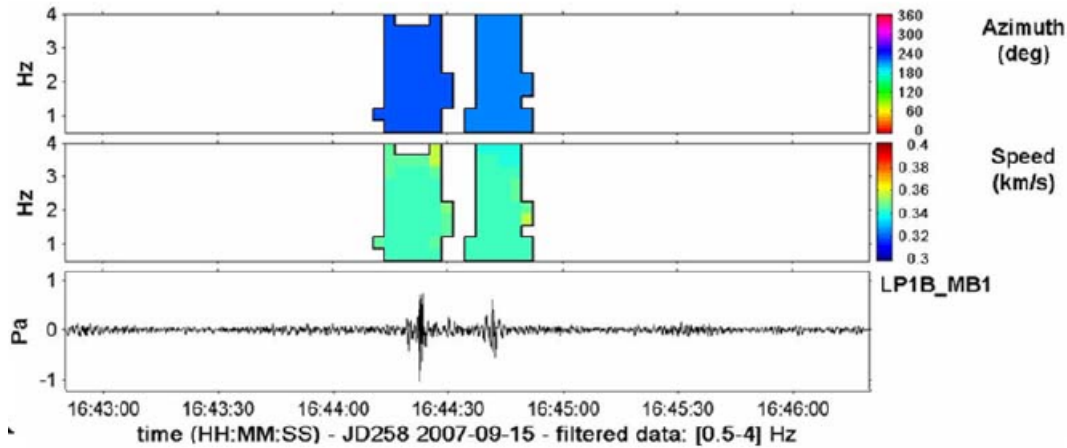


FIGURE 5.4 – Résultats PMCC pour les enregistrements à la station I08BO représentant l’azimut d’émission ainsi que la vitesse apparente horizontale, pour les deux signaux enregistrés à la station. Figure tirée de (Le Pichon et al., 2008)

BBOE et BBOK présentent deux arrivées, alors que la station BBOD n’en présente qu’une seule. Les arrivées à la station I08BO sont notées  $I_w$  et  $I_s$ , correspondant respectivement aux émissions dans la troposphère et dans la stratosphère. Les arrivées aux stations BBOE et BBOK sont notées  $I_{sa}$  et  $I_{sb}$  et correspondent à des émissions dans la stratosphère entre 28 et 35 km pour la première et entre 35 et 70 km pour la deuxième. La station BBOD ne présente qu’une arrivée notée  $I_w$  correspondant à une émission troposphérique. Les stations BBOB et LPAZ localisées dans un périmètre d’environ 120 km du cratère ne présentent quant à elles aucune détection. L’onde étant trop rasante et l’altitude de la topographie plus élevée que pour les autres stations, expliquent cette absence de signaux. Nous présentons dans le tableau 5.1 les temps d’arrivées des signaux aux différentes stations, ainsi que les amplitudes maximales des signaux (en pression pour la station infrasonore et en déplacement vertical pour les stations sismiques) et leurs fréquences centrales. Les différents temps d’arrivée, correspondent à la différence de temps entre l’impact de la météorite au cratère et l’arrivée du signal infrasonore à la station. Ces signaux temporels, tracés sur la FIGURE 5.3, sont de formes complexes et ne représentent pas explicitement une onde en N caractéristique d’un bang supersonique théorique. On pourra se référer à (Henneton et al., 2015) pour la simulation numérique du bang sonique au sol à partir d’un météoroïde de forme sphérique. L’amplitude maximale est de 1,1 Pa pour la station infrasonore et de 40 nm pour les stations sismiques. Les fréquences caractéristiques à la station infrasonore I08BO sont plus faibles que celles des stations sismiques en raison de la fonction de transfert des capteurs. Notons que la fréquence caractéristique de la première arrivée à la station I08BO est supérieure à la deuxième.

Les paramètres géométriques des ondes arrivées à la station I08BO ont été calculés avec la méthode PMCC (Progressive Multi-Channel Correlation) (Cansi, 1995) par Le Pichon et al. (2008) (voir FIGURE 5.4). Cette méthode permet d’obtenir pour les deux signaux, l’azimut d’arrivée ainsi que la vitesse apparente. L’azimut a une légère variation entre les deux arrivées,  $227,4^\circ$  pour la première et  $214,7^\circ$  pour la deuxième, qui montre bien que la source en question est mobile et que les deux arrivées sont donc associées à deux positions d’émission distinctes le long de la trajectoire. La vitesse apparente (c’est-à-dire la vitesse du front d’onde vue par la station) est d’environ 345 m/s, légèrement supérieure à la vitesse du son au sol (338 m/s d’après les données ECMWF).

Afin de pouvoir étudier le bang sonique émis par la météorite de Carancas, il est nécessaire de connaître sa trajectoire. Pour les entrées d’objets hypersoniques dans l’atmosphère, la trajectoire est généralement une ligne droite gouvernée par deux angles : l’azimut  $\gamma$ , mesurant son orientation horizontale, dans le sens des aiguilles d’une montre par rapport au nord

et son élévation  $\beta$  mesurant l'angle par rapport à l'horizontale. Différentes trajectoires ont été proposées dans la littérature pour cette météorite (Le Pichon et al., 2008; Brown et al., 2008; Henneton, 2013). Le Pichon et al. (2008) proposent deux trajectoires (Lf et Ls sur la FIGURE 5.2) à partir des différents signaux enregistrés aux stations : une trajectoire (Lf) en supposant que les différentes arrivées résultent de deux fragmentations successives à deux altitudes différentes, une autre trajectoire (Ls) en supposant que les deux arrivées sont dues au bang sonique. Brown et al. (2008) se basent sur l'absence de fragmentation et proposent une trajectoire (B sur la FIGURE 5.2) en ne considérant que les arrivées à la station infrasonore. Ces trajectoires de la littérature ne permettent pas d'avoir un temps d'arrivée et des azimuts à la station I08BO cohérents avec toutes les observations, comme le reconnaissent les auteurs eux-mêmes. L'hypothèse de non-fragmentation étant la plus probable, Henneton (2013) et Gainville et al. (2017) définissent une autre trajectoire qui doit se situer entre les croix rouges (FIGURE 5.2), correspondant aux positions d'émission où la vitesse de propagation est comprise entre 270 et 340 m/s. Cette trajectoire est inversée à partir des temps des arrivées géométriques uniquement, à savoir l'unique arrivée à BBOD et les premières arrivées à BBOE et à BBOK. Ainsi les arrivées à la station I08BO n'ont pas été utilisées dans l'inversion de cette trajectoire, contrairement à Le Pichon et al. (2008), qui fait une moyenne entre les arrivées géométriques et non-géométriques pour le calcul de sa trajectoire.

La simulation de la propagation des infrasons à partir de cette trajectoire inversée montre que les arrivées non-géométriques au sol sont toutes associées à une onde passant au-dessus des stations au temps d'observation, comme on le voit sur la FIGURE 5.3. L'hypothèse est donc formulée dans (Gainville et al., 2017) que ces arrivées sont associées à un mécanisme de diffraction. Cette hypothèse reste néanmoins à valider, notamment pour la station infrasonore I08BO.

Pour la suite de cette étude, nous considérons donc la trajectoire de Gainville et al. (2017) qui a un angle d'incidence de  $57^\circ$  provenant du sud-est avec un azimut de  $127^\circ$ . Ces angles sont déterminés par Gainville et al. (2017) en recherchant la trajectoire qui minimise la différence des temps d'arrivées entre les valeurs enregistrées aux stations et les valeurs obtenues par l'acoustique géométrique pour les trois arrivées géométriques (BBOD, BBOE-Isa, BBOK-Isa). Les rayons acoustiques sont calculés à partir d'un code de tracé de rayons en trois dimensions en utilisant les données météorologiques réassimilées ECMWF (*European Center for Medium-Range Weather Forecasts*), et représentés en noir sur la FIGURE 5.11, FIGURE 5.13 et FIGURE 5.12 pour la température (convertie en vitesse du son) et le vent. Ces données sont celles prises à l'échéance de 18h00 TU, la plus proche de l'heure d'impact.

### 5.2.2 Résultats de l'analyse de la propagation du bang sonique

En utilisant cette trajectoire et ces données météorologiques, les rayons correspondant au bang sonique émis le long de la trajectoire sont calculés et ainsi, la carte de bang sonique a pu être obtenue à partir d'environ 120 000 rayons, représentée sur la FIGURE 5.5 sous la forme de la trace au sol du front d'onde simulé par la méthode de tracé de rayons. Le cratère d'impact est représenté par une étoile, les points d'arrivée au sol des rayons sont représentés en couleur et interpolés par un maillage triangulaire. La couleur correspond à l'altitude d'émission le long de la trajectoire qui est représentée par un rectangle. La station infrasonore I08BO est en rouge et les différentes stations sismiques en vert.

L'ensemble des arrivées retenues sont uniquement des arrivées directes, où les rayons ont une altitude décroissante entre la source et le sol, elles s'apparentent donc au bang sonique dit primaire (sans réfraction dans la thermosphère). Les effets de réfraction en altitude dus au profil atmosphérique, font apparaître deux zones : en bleu les arrivées associées à des émissions dans la troposphère (Iw), et en magenta et rouge les arrivées associées à des émissions dans la stratosphère (Is). Les arrivées Iw ne présentent aucune caustique et sont limitées par les rayons réfractés vers le haut qui viennent tangenter le sol. Après leur réflexion sur le sol, ces

rayons émis dans la troposphère partent vers la thermosphère où l'énergie est dissipée et ne sont pas guidés. Les arrivées magenta des émissions dans la stratosphère Is présentent un pli du front d'onde mais sont relativement loin des stations. Les arrivées rouges des émissions dans la stratosphère présentent, elles aussi, une caustique séparant la zone illuminée de la zone d'ombre. C'est par ailleurs dans cette zone d'ombre que se trouve la station infrasonore I08BO, qui a cependant enregistré deux arrivées (FIGURE 5.3). Ainsi, la première arrivée à I08BO pourrait être associée à de la diffraction des ondes émises dans la troposphère (bleu) de type ondes rampantes. Ce phénomène est classiquement observé dans le cas du bang sonique primaire (Coulouvrat, 1997, 2002) associé à un avion supersonique. La seconde arrivée à I08BO est associée aux émissions dans la stratosphère et à un mécanisme de diffraction à une caustique. Les temps d'arrivées obtenus au-dessus de la station I08BO représentés sur la figure des signaux (FIGURE 5.3) permettent de montrer l'existence de la caustique pli située à 11 km d'altitude, soit 7 km au-dessus de la station. Nous pouvons aussi le voir en traçant l'intersection des rayons avec le plan parallèle à la trajectoire et passant par la station I08BO (voir FIGURE 5.6 et FIGURE 5.7). La caustique au-dessus de la station I08BO est formée par les émissions stratosphériques entre 33 et 36 km d'altitude. Dans le plan de la station elle est en biais, à 7 km au-dessus de la station puis touche le sol à l'est de celle-ci (cf. FIGURE 5.5). Sur la FIGURE 5.7, ces mêmes rayons dans le plan sont représentés en indiquant leurs kmah, celui-ci étant égal à 0 ou 1. Nous pouvons alors constater que cette caustique est formée par le repliement du front dont la géométrie est essentiellement formée par l'altitude d'émission  $\phi$ . Ce paramètre étant constant à la caustique, sa surface qui forme une caustique pli, peut être paramétrée par  $\psi$ , l'angle azimutal autour de la trajectoire, dans le plan de la station I08BO et par le temps  $t$  orthogonalement à ce plan.

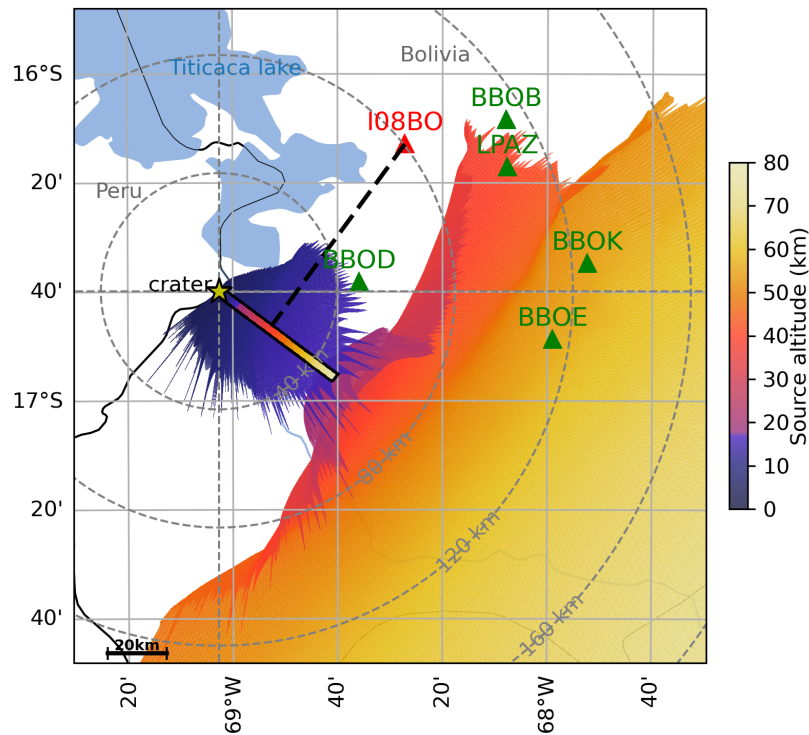


FIGURE 5.5 – Carte de la région de Carancas avec le cratère de la météorite (étoile), les stations sismiques (triangles verts) et la station infrasonore (triangle rouge). Le rectangle de couleur représente la projection horizontale de trajectoire et les points de couleur le points d’intersection de chaque rayon avec le sol. La couleur indique l’altitude d’émission des rayons le long de la trajectoire. Le plan de propagation d’intérêt est représenté en pointillés noirs. Figure inspirée de (Gainville et al., 2017, Fig 1).

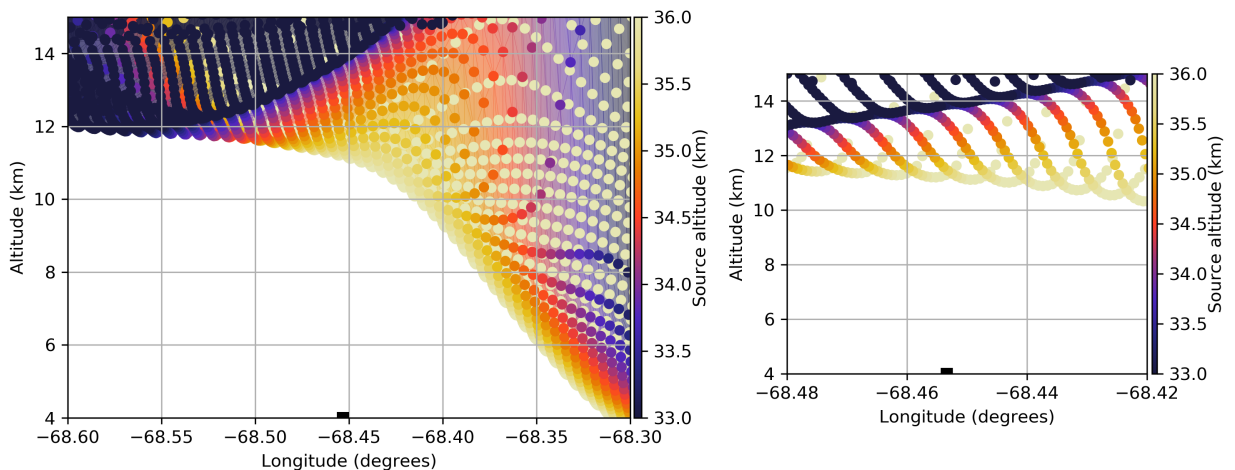


FIGURE 5.6 – Points d’intersection des rayons avec le plan vertical, parallèle à la trajectoire et passant par la station I08BO. Les rayons sont émis dans la stratosphère, pour un angle azimutal autour de la trajectoire  $\psi$  variant de 0 à 180°. La couleur indique l’altitude d’émission et le rectangle noir au sol indique la position de la station. A droite : zoom sur la caustique au dessus de la station entre  $-68,45^\circ$  et  $-68,44^\circ$ .

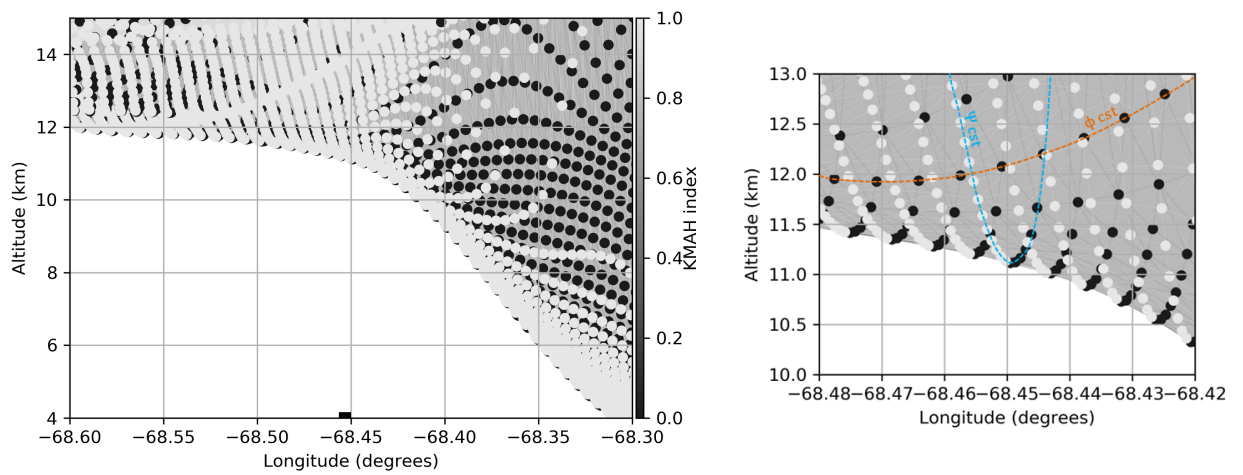


FIGURE 5.7 – (a) Identique à la FIGURE 5.6, mais les points sont colorés, sur fond gris foncé, par le nombre de caustiques tangentées (kmah) : noir pour kmah = 0 et gris clair pour kmah = 1. Le paramètre  $\phi$  correspond à l'altitude d'émission et  $\psi$  à l'angle azimutal autour de la trajectoire.



### 5.2.3 Signatures acoustiques

Les signatures acoustiques à la station dépendent des caractéristiques du choc aérodynamique au voisinage de la source. Pour des sources hypersoniques à un nombre de Mach supérieur à 10 environ, le modèle auto-semblable de ReVelle (1976) décrit le météoroïde comme une source linéique émettant un choc fort auto-semblable, sous forme d'une onde de souffle caractérisée par sa seule énergie, égale ici à l'énergie résultant de la traînée hydrodynamique du météoroïde. Cette énergie est équivalente à un rayon caractéristique  $R_0 = 0,742c_xMD$ , avec  $D$  le diamètre de la source supposée sphérique,  $c_x$  le coefficient de traînée et  $M$  le nombre de Mach local. L'onde de choc de forte amplitude au voisinage immédiat de la météorite évolue rapidement pour devenir à  $5R_0$  une onde acoustique vérifiant les hypothèses de l'acoustique faiblement non linéaire, soit un niveau de surpression inférieur à environ un dixième de la pression atmosphérique locale. de la météorite et de la propagation acoustique de ce choc. Ce modèle a été affiné au moyen de diverses simulations aérodynamiques directes par (Henneton et al., 2015) pour des sphères entrant à différents nombres de Mach, en considérant cette fois un gaz réel subissant à ces vitesses très élevées des mécanismes de dissociation et d'ionisation. Le modèle de Henneton et al. (2015) donne que, le long d'un rayon, au temps  $t_a = 5R_0/c_0(\mathbf{x}_s, t_s)$ , l'onde de choc peut être approchée par une onde de souffle dont la durée de phase positive  $t_d$  et le maximum de surpression  $p'_*$  sont donnés par :

$$t_d \sim 0,68 \frac{R_0}{c_0(\mathbf{x}_s)}, \quad (5.1)$$

et

$$\frac{p'_*}{p_0(\mathbf{x}(t_a), t_a)} \sim 0,24Z^{-3/4}, \quad (5.2)$$

où  $Z = 5[(1 - 1/M^2)p_0(\mathbf{X}(t_a), t_a)/p_0(\mathbf{x}_s, t_s)]^{1/2}$ . La réduction d'amplitude de 30% en gaz réel par rapport au cas d'un gaz parfait est prise en compte dans l'approximation (5.2). En atmosphère homogène et à Mach 10,  $p'_*/p_0 \sim 0.0718$ . La forme de l'onde de souffle peut être approchée par celle proposée par (Reed, 1977) par la relation  $p'(X(t_a), t) = p'_*s_R(\frac{t-t_a}{t_d})$  avec :

$$s_R(t') = -t' \left(1 - \frac{t'+1}{\sigma}\right) \left(1 - \left(\frac{t'+1}{\sigma}\right)^2\right) \quad (5.3)$$

sur l'intervalle temporel  $[t_a - (\sigma - 1)t_d - t_a]$ , et zéro par ailleurs. Le paramètre  $\sigma$  vaut  $\sigma = 25/7$ .

Au-delà du temps de propagation  $t_a = 5R_0/c_0$ , l'onde de souffle est d'amplitude suffisamment faible pour vérifier une équation de Burgers généralisée le long de chaque rayon (Scott et al., 2017) tenant compte 1) de la divergence géométrique de l'onde, 2) de la variation de la masse volumique de l'atmosphère, 3) de l'absorption atmosphérique (thermovisqueuse et par relaxation moléculaire) et des effets faiblement non linéaires. Du fait de ces derniers, l'onde de souffle se transforme progressivement en une onde en N, s'allonge et diminue en amplitude. Pour l'amplitude, il est à noter toutefois que en pression, la décroissance géométrique est partiellement compensée par l'augmentation de la masse volumique de l'atmosphère.

Ce modèle de bang sonique à la source, couplé avec l'équation de Burgers généralisée pour la propagation, a été appliqué au cas de la météorite de Carancas afin de simuler les signatures acoustiques associées aux arrivées géométriques aux stations BBOD, BBOE et BBOK (Henneton et al., 2015; Gainville et al., 2017). La signature en surpression à l'émission et à la station BBOK sont reprises à la FIGURE 5.8. Le rayon de l'onde de souffle vaut environ 27 m pour la météorite de Carancas (Gainville et al., 2017), soit un temps de propagation pour le passage en choc faible d'environ 0,4s. Les simulations de Gainville et al. (2017) montrent que, entre cette position d'émission et les trois stations, les effets faiblement non linéaires sont responsables d'un allongement de la durée du signal d'un facteur 3 environ, et d'une diminution de l'amplitude du signal d'un facteur 5 environ. Ces effets faiblement non

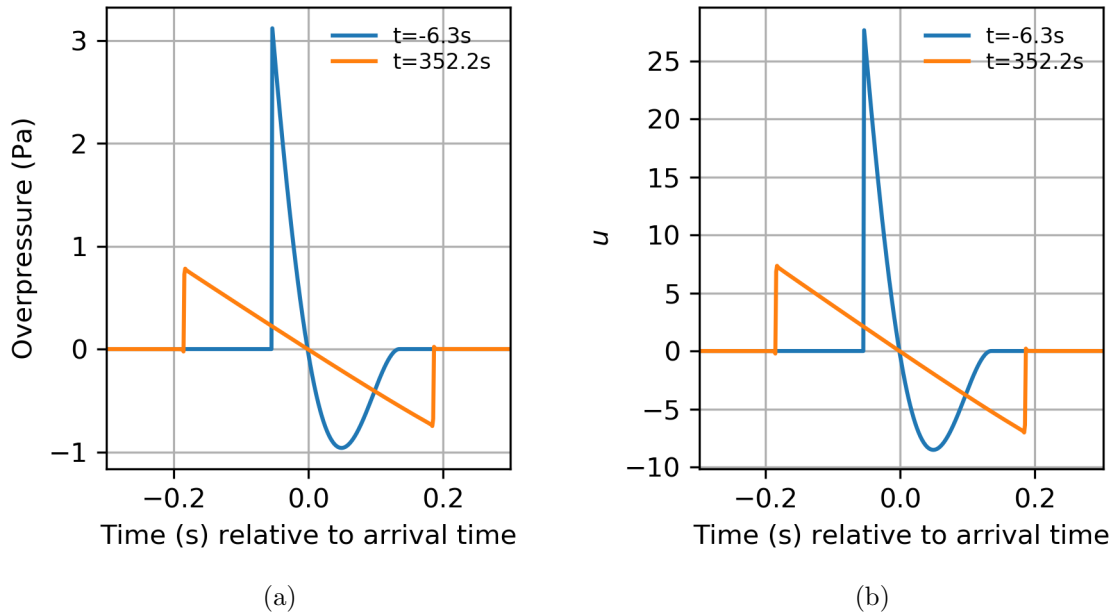


FIGURE 5.8 – (a) Signature en surpression et (b) normalisée au point d’émission (environ  $5R_0$ ) et au sol pour le rayon émis vers 54,3 km d’altitude et arrivant à la station BBOK pour la configuration de référence de la météorite de Carancas (Gainville et al., 2017). Notons que le doublement de l’amplitude due à la réflexion au sol n’est pas pris en compte contrairement à la figure 5(b) de Gainville et al. (2017).

linéaires et ceux d’absorption sont les seuls modifiant la signature normalisée en amplitude  $u$  de la FIGURE 5.8, les premiers étant dominants sur les seconds. L’amplitude des signaux est également modifiée par les effets linéaires de divergence du front d’onde et de variation de la masse volumique de l’atmosphère suivant la relation (2.41). Dans le cas de la station BBOK (FIGURE 5.8 à gauche), ces deux effets se compensent au sol.

Les signaux simulés aux station BBOD, BBOE et BBOK ont été comparés aux mesures sismiques (Gainville et al., 2017). Seule l’enveloppe fréquentielle peut être comparée puisque les coefficients de couplage des ondes acoustiques avec les capteurs sismiques ne sont pas connus et dépendent notamment de l’incidence de l’onde. Les comparaisons montrent des enregistrements relativement cohérents avec l’hypothèse d’un objet d’environ 1 m de diamètre et arrivant au sol avec une vitesse de 2500 m/s. Ces résultats sont également en accord avec le diamètre du cratère. Néanmoins, des incertitudes persistent sur le modèle de source car l’inversion pour chaque arrivée géométrique mesurée donne des valeurs différentes du couple (vitesse, diamètre) de la météorite (Gainville et al., 2017).

La station I08BO étant en zone d’ombre géométrique, le modèle mis en œuvre précédemment (Gainville et al., 2017) pour calculer les signaux ne peut être appliqué directement. Néanmoins, les effets non linéaires peuvent être évalués en s’intéressant à l’onde incidente arrivant à la caustique située au dessus de la station I08BO. Les signatures normalisées représentées sur la FIGURE 5.9 montrent que l’onde en N incidente à la caustique possède une durée de phase positive de 0,21 s et que son amplitude en pression est divisée par un facteur 4 environ par rapport à l’onde émise. Afin de retrouver cette onde avec un modèle de propagation linéaire, la signature au voisinage de la source, en  $5R_0$ , devrait être une onde en N d’une durée de phase positive de 0,21 s et de maximum de surpression normalisé  $u_*$  de 23,8 (cf. FIGURE 5.9). Cette dernière valeur équivaut à  $p'_*/p_0 = 0,018$ . Afin d’initialiser à n’importe quel temps au voisinage de la source, en tenant compte de la décroissance cylindrique de

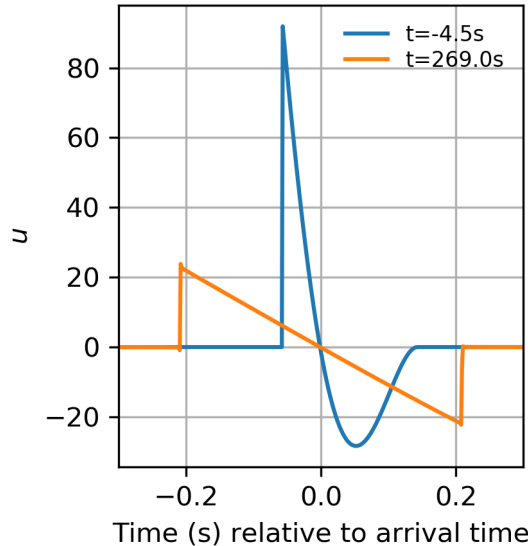


FIGURE 5.9 – Signature normalisée au point d'émission ( $\approx 5R_0$ ) et au-dessus de la station I08BO à 11 km d'altitude pour le rayon émis vers 36,2 km d'altitude pour la configuration de référence de la météorite de Carancas (Gainville et al., 2017).

l'amplitude en régime linéaire et de la vitesse du son locale, l'amplitude normalisée est

$$(c_0(t_a - t_s))^{1/2} \frac{p'_*}{p_0} = 0,22 \quad (5.4)$$

et la durée de phase positive normalisée est

$$t_d = 66/c_0. \quad (5.5)$$

Ces grandeurs sont utilisées afin de définir un modèle de source linéaire équivalent pour étudier la seconde arrivée à la station I08BO, notamment avec la méthode des rayons complexes qui tient compte uniquement des effets linéaires lors du calcul de l'amplitude.

### 5.3 Modélisation de l'atmosphère

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, l'atmosphère est le principal facteur qui influence la propagation des ondes infrasonores. C'est un milieu inhomogène et instationnaire, dont les différentes grandeurs varient sur de multiples échelles mais qui en première approximation est généralement supposé stratifié verticalement (Ostashev et Wilson, 2015). Pour l'application considérée, nous en resterons à cette hypothèse simplificatrice, même si l'on a vu au chapitre précédent que la méthode des rayons complexes s'applique également aux variations horizontales de l'atmosphère. La méthode des rayons complexes nécessite que les profils de vitesse du son  $c_0$  et du vent  $v_0$  soient définis de manière analytique dans le plan complexe. La difficulté vient de ce que les données dont on dispose dans les cas réalistes sont en général des données discrètes et bien évidemment réelles sur l'axe vertical. La difficulté est donc d'interpoler de manière adéquate ces données de façon analytique. Nous présentons ci-après différentes méthodes d'approximation dans ce sens. Les données d'intérêt sont les données réassimilées ECMWF (Vanderbecken, 2020) du jour d'impact de la météorite de Carancas, pour l'échéance de 18h00 à la position  $69^\circ\text{W}$ ,  $16^\circ 5'\text{S}$ , c'est-à-dire à l'heure et au point les plus proches dans la base ECMWF de l'impact de la météorite. Au-dessus de l'altitude maximale fournie par ECMWF, ces données sont complétées par les modèles empiriques

MSIS00 (Picone et al., 2002) pour le profil de température et HMW93 (Hedin et al., 1996) pour les composantes du vent au-dessus de 70 km.

Lors du calcul des rayons et des éléments géométriques, les équations (2.20), (2.21) et (2.24), résolues numériquement, font intervenir non seulement les valeurs de la vitesse du son et du vent mais aussi leur gradient au premier ordre pour la trajectoire des rayons et au second ordre pour les équations des éléments géodésiques. Ainsi, les profils de vitesse du son et du vent doivent être deux fois dérivables en fonction des variables d’espace et une fois par rapport au temps. L’intégration numérique des équations des rayons et des éléments géodésiques nécessite en outre de pouvoir évaluer  $c_0$  et  $\mathbf{v}_0$  et leurs dérivées en toute position du domaine un grand nombre de fois, de manière itérative et efficace. Généralement, pour le tracé de rayons réels, la procédure d’interpolation des champs  $(c_0, \mathbf{v}_0)$  est basée sur des fonctions splines cubiques (Virieux et al., 2004; Gainville, 2008; Scott et al., 2017). Cependant, celles-ci étant seulement analytiques par morceaux, cette méthode d’interpolation n’est pas analytique sur l’ensemble de l’espace et donc elle est inadaptée à la méthode des rayons complexes. Les milieux de propagation utilisés dans la littérature pour calculer numériquement les rayons complexes sont le plus souvent des fonctions analytiques (Kravtsov, 1967; Egorchenkov et Kravtsov, 2001; Kravtsov et Zhu, 2010; Berczyński et al., 2008; Stone et al., 2018). Amodei et al. (2006) proposent d’utiliser une base de Fourier en deux dimensions pour interpoler les données, mais l’évaluation en une position nécessite la somme d’un grand nombre de coefficients ce qui rend cette solution relativement lente pour son implémentation numérique. Dans la suite, nous décrivons l’utilisation de polynômes, de fonctions rationnelles et de sommes de Gaussiennes afin d’interpoler les données de vitesse du son et de vent.

Tous les profils présentés dans cette section sont considérés relativement au sol

### 5.3.1 Approximation des données de vitesse du son

Nous commençons par présenter l’approximation des données de vitesse du son  $c_0$  à l’aide de deux types de fonctions. La première est basée sur une fonction rationnelle comme pour le profil de Lingeitch et al. (1999) introduit dans le chapitre 1 et utilisé dans le chapitre 4. La seconde est basée sur une approximation polynomiale.

#### Fonction rationnelle

La première méthode que nous proposons est l’ajustement d’une fonction rationnelle sur les données de vitesse du son. Contrairement à une interpolation, le modèle ajusté ne passe pas nécessairement aux valeurs ”exactes” des données. Une fonction rationnelle utilisant deux polynômes d’ordre 4 est utilisée par Lingeitch et al. (1999) afin d’approcher les données réelles de l’*U.S. Standard Atmosphere*. Les dix paramètres  $N_i$  et  $D_i$  sont donnés dans le tableau 1.1 et la température est définie par :

$$T(z) = T(0) \frac{\sum_{i=0}^4 N_i z^i}{\sum_{i=0}^4 D_i z^i} \quad (5.6)$$

avec  $T(0) = 288,2\text{K}$ . La vitesse du son, définie par l’équation (1.2), et ses dérivées sont calculées analytiquement ce qui permet de les évaluer numériquement très rapidement.

La fonction rationnelle basée sur deux polynômes d’ordre 4 est utilisée afin d’approcher d’autres profils réaliste de température. L’ajustement des dix paramètres  $N_i$  et  $D_i$  aux données est réalisé au sens des moindres carrés. Cependant, la recherche de la solution optimale en fonction des dix paramètres est complexe et cette solution pourrait être oscillante. Afin de simplifier la procédure, un algorithme de Levenberg-Marquardt (fonction *curve\_fit* de la librairie SciPy (Virtanen et al., 2020)) est utilisée afin de rechercher la solution minimale

$N_i$ ( $\text{km}^{-i}$ )	$D_i$ ( $\text{km}^{-i}$ )
$4,057 \times 10^{-2}$	$4,084 \times 10^{-2}$
$-2,930 \times 10^{-3}$	$-1,539 \times 10^{-3}$
$1,398 \times 10^{-4}$	$7,058 \times 10^{-5}$
$-2,092 \times 10^{-6}$	$-9,406 \times 10^{-7}$
$9,908 \times 10^{-9}$	$4,119 \times 10^{-9}$

TABLEAU 5.2 – Paramètres optimisés de la fonction rationnelle (5.6) obtenus à partir des paramètres du tableau 1.1, pour une approximation des données de vitesse de son du cas Carancas.

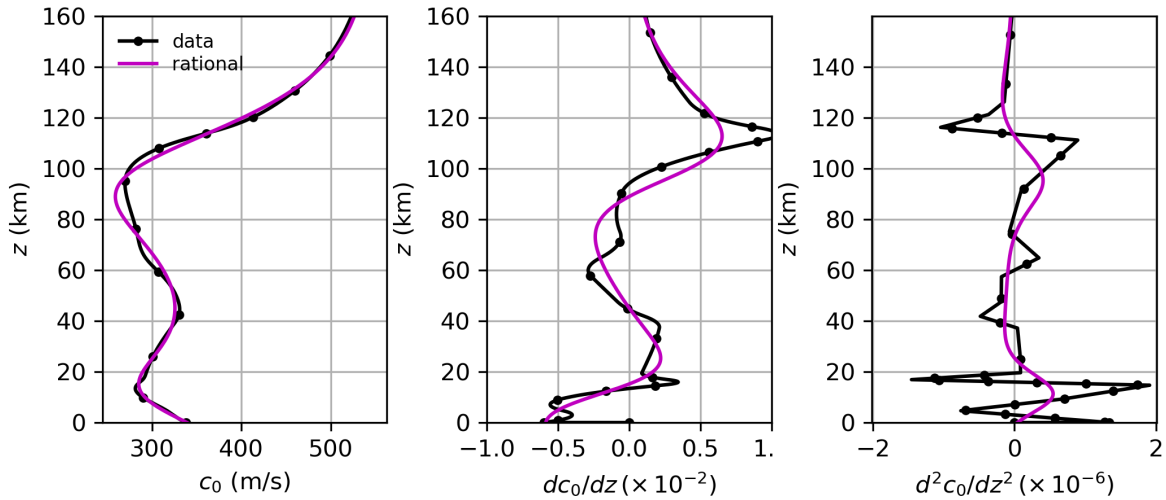


FIGURE 5.10 – Profils de la vitesse du son  $c_0$  (à gauche), de sa dérivée première  $\frac{dc_0}{dz}$  (au centre) et de sa dérivée seconde  $\frac{d^2c_0}{dz^2}$  (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par une fonction rationnelle de la température (équations (5.6) et (1.2)).

locale, en initialisant l'algorithme à partir des données du tableau 1.1. Les paramètres obtenus pour les données du cas Carancas sont récapitulés dans le tableau 5.2.

Le profil de vitesse du son ainsi défini, ainsi que ses dérivées première et seconde, sont représentés en mauve sur la FIGURE 5.10 et comparés aux données brutes en noir. Les dérivées des données réelles sont obtenues par interpolation splines cubiques.

La comparaison montre que l'approximation ne prend pas en compte les petites structures de l'atmosphère (visibles par exemple à l'altitude  $z = 20$  km). Un profil de vitesse du son lisse n'est toutefois pas en contradiction avec la méthode de tracé de rayons qui, de par son hypothèse haute fréquence, n'est pas adaptée à la prise en compte des plus fines structures atmosphériques. On le voit ainsi sur les dérivées première et seconde de  $c_0$ , qui sont également lissées par rapport aux données brutes, dont les oscillations dans la troposphère sont fortes. Cette méthode pose néanmoins deux limitations : tout d'abord, les polynômes utilisés ne sont pas d'ordre suffisamment élevé pour pouvoir approcher des données de température qui seraient plus oscillantes que l'exemple présenté ici. Ensuite, la fonction rationnelle possède quatre racines au dénominateur qui peuvent donc conduire à une vitesse du son singulière. Par exemple, pour la fonction de Lingeitch et al. (1999), ces racines sont complexes et égales à  $89,14 \pm i37,75$  m et  $25,29 \pm i74,36$  m ce qui pourrait poser problème dans le cas des rayons complexes si un rayon était amené à passer par ces points particuliers. C'est d'ailleurs ce que l'on a observé sur la FIGURE 4.15 et FIGURE 4.16 pour le cas de la source ponctuelle dans le chapitre 4 : la présence de cette singularité empêche l'intégration des rayons complexes arrivant en dessous de 225 km. Pour la fonction rationnelle approchant les données de Carancas les racines sont  $106,01 \pm i40,79$  km et  $8,17 \pm i26,49$  km. Afin d'éviter ces singularités lors de

$k$	$P^{1c_0}(z)$	$P^{2c_0}(z)$
0	$3,36990 \times 10^2$	$3,40090 \times 10^2$
1	$-3,12210 \times 10^{-3}$	$-7,23520 \times 10^{-3}$
2	$-6,23410 \times 10^{-7}$	$2,62010 \times 10^{-7}$
3	$6,98850 \times 10^{-11}$	$-3,71990 \times 10^{-13}$
4	$-2,54760 \times 10^{-15}$	$-3,57880 \times 10^{-17}$
5	$3,46820 \times 10^{-20}$	$-1,67520 \times 10^{-21}$
6	$2,73490 \times 10^{-25}$	$5,48580 \times 10^{-26}$
7	$-1,76570 \times 10^{-29}$	$-6,22590 \times 10^{-31}$
8	$3,02590 \times 10^{-34}$	$3,47580 \times 10^{-36}$
9	$-2,88310 \times 10^{-39}$	$-9,68050 \times 10^{-42}$
10	$1,68510 \times 10^{-44}$	$1,07820 \times 10^{-47}$
11	$-6,01210 \times 10^{-50}$	
12	$1,20510 \times 10^{-55}$	
13	$-1,04210 \times 10^{-61}$	

TABLEAU 5.3 – Paramètres optimisés  $A_k$  ( $m^{-(k-1)}.s^{-k}$ ) des polynômes  $P^{1c_0}$  et  $P^{2c_0}$  définis par l'équation (5.7), obtenus par ajout de données (1) et par validation non croisée (2), pour une approximation des données de vitesse de son du cas Carancas.

l'intégration des rayons, nous proposons d'utiliser une fonction polynomiale.

### Fonction polynomiale

L'ajustement d'une fonction polynomiale aux données de vitesse du son  $c_0$  nécessite d'optimiser à la fois les coefficients du polynôme et son degré. Ce degré doit être suffisamment grand pour prendre en compte un maximum d'informations liées aux données, mais suffisamment faible pour éviter une forme de sur-apprentissage (Hawkins, 2004). En effet, prendre un degré égal aux nombres de données à interpoler permet au polynôme de passer par tous les points, c'est-à-dire de réaliser une interpolation, mais en général, le polynôme résultant est fortement oscillant entre chaque point donnée, ce qui est très irréaliste. Nous proposons donc ici deux méthodes qui permettent d'obtenir un compromis sur le degré des polynômes qui sont de la forme :

$$P(z) = \sum_{k=0}^N A_k z^k \quad (5.7)$$

1) Ajout de données :

Ajouter des données permet d'éviter les oscillations entre des points potentiellement trop éloignés pour être efficacement ajustés. Pour cela nous interpolons les données de vitesse du son par des fonctions *spline* d'ordre 3 ce qui permet de densifier les données. La recherche du meilleur degré du polynôme est faite en calculant l'erreur quadratique entre le polynôme et les données interpolées sur une base de 5000 points. L'ordre trouvé pour le profil de vitesse du son est égal à 13, les coefficients optimisés sont récapitulés dans le tableau 5.3 et le polynôme associé  $P^{1c_0}(z)$  est représenté en bleu sur la FIGURE 5.11.

2) Validation non-croisée :

Cette méthode souvent utilisée en *machine learning* et aussi appelée *testset validation* ou *holdout method* (Moore, 2001) a pour objectif de diviser l'échantillon de données en deux sous-échantillons. Le premier échantillon est dit d'apprentissage (communément supérieur à 60 % de l'échantillon total) et le second est dit de validation ou de test. La recherche du degré du polynôme est bâtie sur l'échantillon d'apprentissage et validée sur l'échantillon de test avec un « score » de performance optimal. Dans la pratique, pour chaque degré de polynôme envisagé,

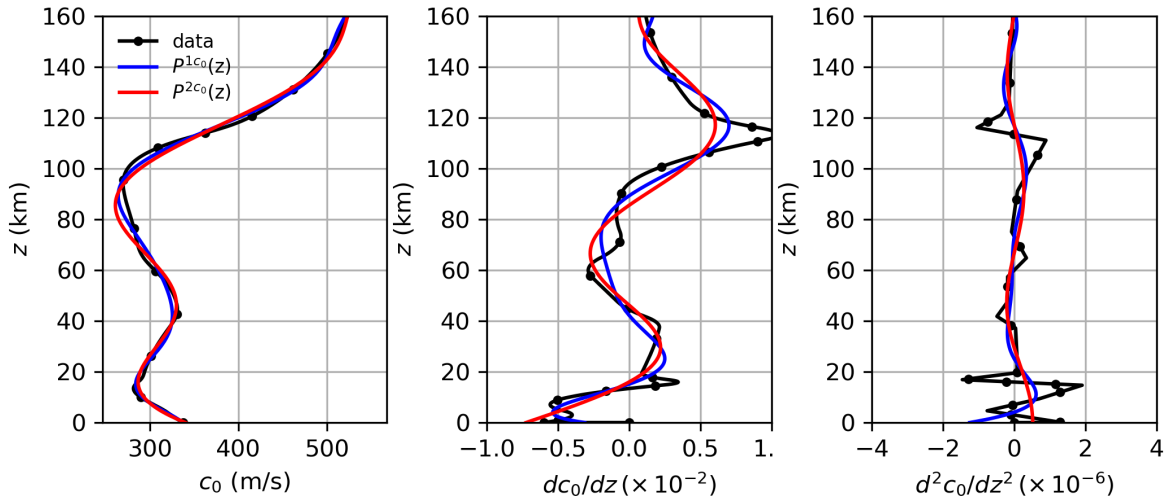


FIGURE 5.11 – Profils de la vitesse du son  $c_0$  (à gauche), et de ses dérivées première  $\frac{dc_0}{dz}$  (au centre) et seconde  $\frac{d^2c_0}{dz^2}$  (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par les fonctions polynomiales  $P^{1c_0}(z)$  (ordre 13) et  $P^{2c_0}(z)$  (ordre 10) obtenues par deux méthodes : 1) ajout de données et 2) validation non-croisée.

nous faisons une estimation du polynôme sur le premier échantillon (d'apprentissage) et calculons l'erreur quadratique moyenne entre le polynôme et l'échantillon d'apprentissage. Nous évaluons ensuite les données du deuxième échantillon (de validation), sur ce même polynôme en calculant l'erreur quadratique moyenne entre le polynôme et l'échantillon de validation. Pour que le degré choisi soit optimal, l'écart entre les deux erreurs calculées doit être minimal.

Pour les données associées au cas de Carancas, l'ordre du polynôme trouvé par la méthode de validation non-croisée est égal à 10, les coefficients optimisés sont récapitulés dans le tableau 5.3 et le polynôme associé  $P^{2c_0}(z)$  est représenté en rouge sur la FIGURE 5.11.

Comme dans le cas de l'approximation par fonction rationnelle (FIGURE 5.10), le profil calculé par les deux polynômes lisse les données. Il est cependant intéressant de remarquer que les données sont mieux approchées par polynômes, ce qui est plus visible sur la figure de la dérivée première de  $c_0$ . Le calcul de l'erreur quadratique entre les données et le polynôme d'ordre 13  $P^{1c_0}(z)$  est égale à 3,89 et entre les données et le polynôme d'ordre 10  $P^{2c_0}(z)$  est égale à 2,59. Ainsi, nous choisissons par la suite le polynôme de degré 10  $P^{2c_0}(z)$  comme référence pour l'étude de la météorite de Carancas.

L'utilisation de la méthode sur d'autres profils de vitesse du son, présentant plus ou moins de petites structures montre que les fonctions polynomiales et plus particulièrement celles obtenues à l'aide de la méthode de validation non-croisée, donnent des approximations des données moins oscillantes et plus proches des données.

### 5.3.2 Approximation des données de vent

Comme pour le cas du champ de vitesse du son, nous proposons ci-après deux méthodes afin d'approcher les données de vents zonal  $u_0$  et méridien  $v_0$  par des fonctions analytiques.

#### Fonction polynomiale

La première méthode consiste à utiliser l'approximation des données de vitesse de vent par polynôme en utilisant les deux méthodes décrites ci-dessus afin de trouver le degré optimal du polynôme. Le polynôme est ensuite ajusté par rapport aux données. Ainsi, par la méthode

$k$	$P^{1u_0}$	$P^{1v_0}$	$P^{2u_0}$	$P^{2v_0}$
0	$-2,52390 \times 10^{-1}$	-6,91110	2,70620	-3,80490
1	$-2,23040 \times 10^{-3}$	$1,13210 \times 10^{-3}$	$5,41009 \times 10^{-4}$	$1,19990 \times 10^{-5}$
2	$2,66240 \times 10^{-6}$	$-3,42980 \times 10^{-8}$	$-7,54150 \times 10^{-9}$	
3	$-4,85540 \times 10^{-10}$	$-2,03170 \times 10^{-12}$	$1,60740 \times 10^{-14}$	
4	$3,90870 \times 10^{-14}$	$1,25490 \times 10^{-16}$		
5	$-1,77090 \times 10^{-18}$	$-2,84110 \times 10^{-21}$		
6	$5,05080 \times 10^{-23}$	$3,49640 \times 10^{-26}$		
7	$-9,62880 \times 10^{-28}$	$-2,55690 \times 10^{-31}$		
8	$1,26690 \times 10^{-32}$	$1,11190 \times 10^{-36}$		
9	$-1,16620 \times 10^{-37}$	$-2,65930 \times 10^{-42}$		
10	$7,49110 \times 10^{-43}$	$2,69490 \times 10^{-45}$		
11	$-3,28910 \times 10^{-48}$			
12	$9,40620 \times 10^{-54}$			
13	$-1,57850 \times 10^{-59}$			
14	$1,17910 \times 10^{-65}$			

TABLEAU 5.4 – Paramètres optimisés  $A_k$  ( $m^{-(k-1)}.s^{-k}$ ) des polynômes  $P^{1u_0}$ ,  $P^{1v_0}$ ,  $P^{2u_0}$  et  $P^{2v_0}$  définis par l'équation (5.7), obtenus par ajout de données (1) et par validation non croisée (2), pour une approximation des données de vitesse de vent du cas Carancas.

d'ajout de données, nous obtenons un polynôme  $P^{1u_0}(z)$  d'ordre 14 pour la composante zonale et un polynôme  $P^{1v_0}(z)$  d'ordre 10 pour la composante méridienne. Les paramètres optimisés  $A_k$  sont récapitulés dans le tableau 5.4 et les polynômes correspondant  $P^{1u_0}(z)$  et  $P^{1v_0}(z)$  sont représentés en bleu sur la FIGURE 5.12. Le polynôme  $P^{1u_0}(z)$  suit bien les grandes oscillations des données de  $u_0$ . Les données de  $v_0$  ayant beaucoup de petites oscillations, le polynôme  $P^{1v_0}(z)$  lisse beaucoup plus les données. La moyenne des erreurs quadratiques entre le polynôme  $P^{1u_0}(z)$  (resp.  $P^{1v_0}(z)$ ) et les données réelles est de 5,32 m/s (resp. 2,25 m/s).

Par la méthode de validation non-croisée nous obtenons un polynôme  $P^{2u_0}(z)$  d'ordre 3 pour la composante zonale et un polynôme  $P^{2v_0}(z)$  d'ordre 1 pour la composante méridienne. Les paramètres optimisés  $A_k$  sont récapitulés dans le tableau 5.4 et les polynômes correspondant  $P^{2u_0}(z)$  et  $P^{2v_0}(z)$  sont représentés en rouge sur la FIGURE 5.12. Le profil de vitesse de vent étant plus oscillant que celui de la vitesse du son, le polynôme donne une approximation beaucoup trop lisse du profil. Ainsi, seul le comportement global est reproduit et la moyenne des erreurs quadratiques entre le polynôme  $P^{2u_0}(z)$  (resp.  $P^{2v_0}(z)$ ) et les données réelles est de 9,52 m/s (resp. 3,66 m/s). Les dérivées premières de  $P^{2u_0}(z)$  et  $P^{2v_0}(z)$  sont elles aussi mal approchées puisqu'elles sont constantes. Toutes les oscillations sont sous estimées.

Les erreurs étant plus faibles dans le premier cas, nous pouvons rapidement conclure que, contrairement à l'ajustement des données de vitesse du son, le degré de polynôme obtenu par ajout de données donne une meilleure approximation des données de vitesse de vent.

### Somme de Gaussiennes

Une deuxième méthode d'approximation des données très oscillantes de la vitesse de vent est l'utilisation d'une fonction somme de Gaussiennes. En effet, chaque oscillation de  $v_0$  peut être ajustée par une fonction Gaussienne telle que :

$$v(z) = \sum_{m=1}^M v_m \exp\left(-\frac{(z - z_m)^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad (5.8)$$

où  $M$  est le nombre de « maxima » suivant l'altitude,  $v_m$  leur amplitude,  $z_m$  leur position et  $\sigma_m$  la largeur de chaque Gaussienne à mi-hauteur. Pour ajuster le modèle aux données, nous



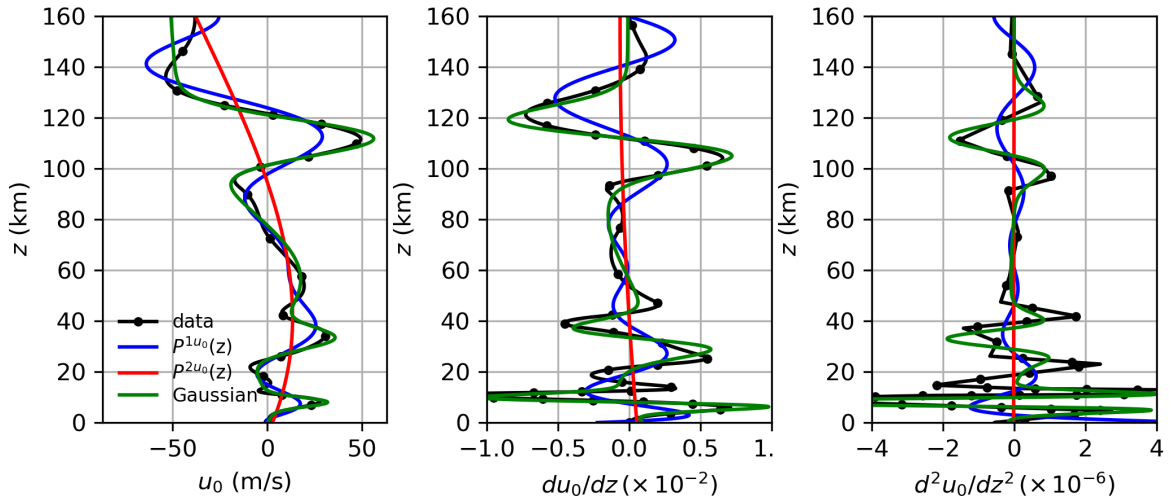


FIGURE 5.12 – Profil de vitesse de vent  $u_0$  (à gauche) et de ses dérivées première  $\frac{du_0}{dz}$  (au centre) et seconde  $\frac{d^2u_0}{dz^2}$  (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par polynômes  $P^1u_0$ ,  $P^2u_0$  ainsi que par une fonction somme de Gaussiennes définie par l'équation (5.8).

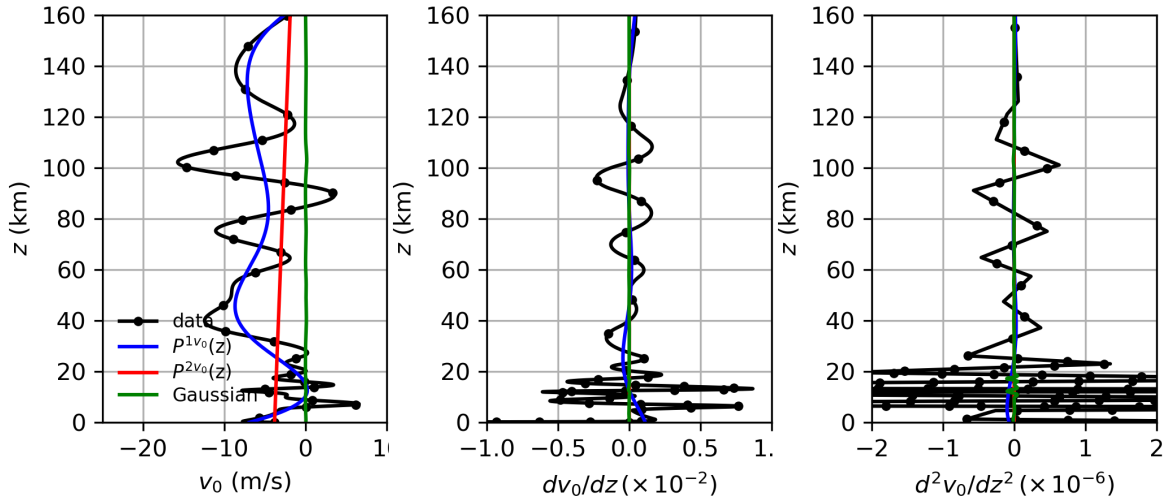


FIGURE 5.13 – Profil de vitesse de vent  $v_0$  (à gauche) et de ses dérivées première  $\frac{dv_0}{dz}$  (au centre) et seconde  $\frac{d^2v_0}{dz^2}$  (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par polynômes  $P^1v_0$ ,  $P^2v_0$  ainsi que par une fonction somme de Gaussiennes définie par l'équation (5.8).

$z_m$ (km)	$v_m$ (m/s)	$\sigma_m$ (km)
8,04780	27,2920	1,82440
2,56120	30,7710	12,3480
32,9510	32,4810	4,30570
57,2010	54,6620	25,9860
112,150	87,7460	7,24210
2240,20	-272,680	110,470

(a)  $u_0$

$z_m$ (km)	$v_m$ (m/s)	$\sigma_m$ (km)
0,96629	0,0589110	2,18760
12,2460	0,0621180	0,79460
17,1810	0,0401290	0,62460
40,7440	0,1159000	5,64190
54,4080	0,0831010	3,83740
74,6580	0,0830120	5,77110
102,950	0,1621100	4,02820
1388,10	0,0797660	11,5900

(b)  $v_0$

TABEAU 5.5 – Paramètres de la somme de Gaussiennes (5.8) optimisés sur les données du vent associées au cas de Carancas pour la composante zonale  $u_0$  et méridienne  $v_0$ .

déterminons d'abord les positions des maxima significatifs puis nous évaluons l'amplitude et la largeur de ceux-ci. Nous commençons par interpoler les données afin de pouvoir utiliser la fonction *find\_peaks* de la librairie Scipy de Python (Virtanen et al., 2020) qui permet de trouver les maxima locaux par une simple comparaison des points voisins. En connaissant ces maxima, il est rapide de trouver l'amplitude  $v_m$  et la position  $z_m$ . Pour le calcul de la largeur, nous utilisons la fonction *peak\_widths* qui fournit directement la largeur de l'oscillation à mi-hauteur. Ces paramètres obtenus à partir des données interpolées sont ensuite optimisés à l'aide de la fonction *curve\_fit* afin d'ajuster au mieux les données réelles avec la fonction (5.8). Ainsi, pour les données de Carancas, le profil présente six maxima pour  $u_0$  et huit maxima pour  $v_0$ , avec les paramètres optimisés récapitulés dans le tableau 5.5.

Finalement, en utilisant l'équation (5.8) et les paramètres optimisés du tableau 5.5, nous obtenons une approximation du vent représentée en vert sur la FIGURE 5.12 pour la composante zonale  $u_0$  et sur la FIGURE 5.13 pour la composante méridienne  $v_0$ . La méthode par somme de Gaussiennes permet de reproduire de manière réaliste un profil de vent ayant de grandes oscillations, plus particulièrement pour  $u_0$  (FIGURE 5.12), avec une moyenne des erreurs quadratiques avec les données brutes de 2,26 m/s. La composante  $v_0$  étant plus oscillante, l'approximation par somme de gaussiennes lisse plus fortement le profil, avec une erreur de 4,88 m/s. L'ordre de grandeur de cette composante étant faible, avec des variations entre -18 et 8 m/s, l'ajustement obtenu n'est pas aberrant. Ainsi, cette méthode permet d'obtenir une approximation des données oscillantes tout en maintenant un temps de calcul relativement rapide.

En résumé, l'approximation par les polynômes  $P^{1u_0}(z)$  et  $P^{1v_0}(z)$  ainsi que les sommes de Gaussiennes donnent les moyennes d'erreurs quadratiques avec les données réelles les plus faibles. Néanmoins, nous verrons dans le paragraphe suivant que seul l'ajustement par polynôme s'avère au final adapté à la méthode des rayons complexes.

### 5.3.3 Validation et limites de l'approximation des données

#### Propagation dans la direction de BBOK

Afin d'évaluer l'effet des méthodes d'approximation par polynômes des données de vitesse du son et par somme de fonctions Gaussiennes des données du vent, nous reprenons le cas de Carancas dans la direction de la station BBOK étudié dans l'article de Gainville et al. (2017). Les stations BBOD et BBOK se situent à des azimuts de respectivement  $86,3^\circ$  et  $85,5^\circ$  relativement au cratère de la météorite de Carancas. Ainsi, nous analysons la propagation du bang sonique dans la direction Est, soit  $\gamma = 90^\circ$ .

La vitesse du son effective  $c_{\text{eff}} = c_0 + v_0$  dans la direction Est est représentée sur la FIGURE 5.14, avec en noir l'interpolation par des splines (Gainville et al., 2017) et en rouge l'approximation des données par fonction polynomiale. En haut à droite nous représentons le résultat des simulations des rayons en considérant une interpolation (non analytique) par fonctions splines cubiques (Gainville et al., 2017). Les rayons obtenus à partir des données approchées sont représentés en bas à droite. Dans les deux cas, la couleur correspond à l'altitude d'émission  $\phi$  le long de la trajectoire. Par souci de lisibilité et afin de retrouver le résultat de Gainville et al. (2017, Figure 1c), nous ne considérons que les émissions troposphériques jusqu'à 16 km d'altitude (bleues) et stratosphériques, au-dessus de 28 km. Ces émissions troposphériques font apparaître des arrivées au sol ( $z = 4$  km) entre le cratère et  $x = 48$  km. La plupart de ces rayons sont ensuite réfractés vers le haut sans atteindre une nouvelle fois le sol. Les rayons stratosphériques arrivent à la surface du sol à partir de la distance  $x = 65,5$  km où ils forment une caustique. L'ajustement du profil météorologique permet de retrouver la même position de cette caustique, et des trajectoires des rayons similaires.

Afin de comparer au mieux les résultats obtenus avec d'une part l'approximation analytique de données atmosphériques et d'autre part l'interpolation par splines, nous comparons

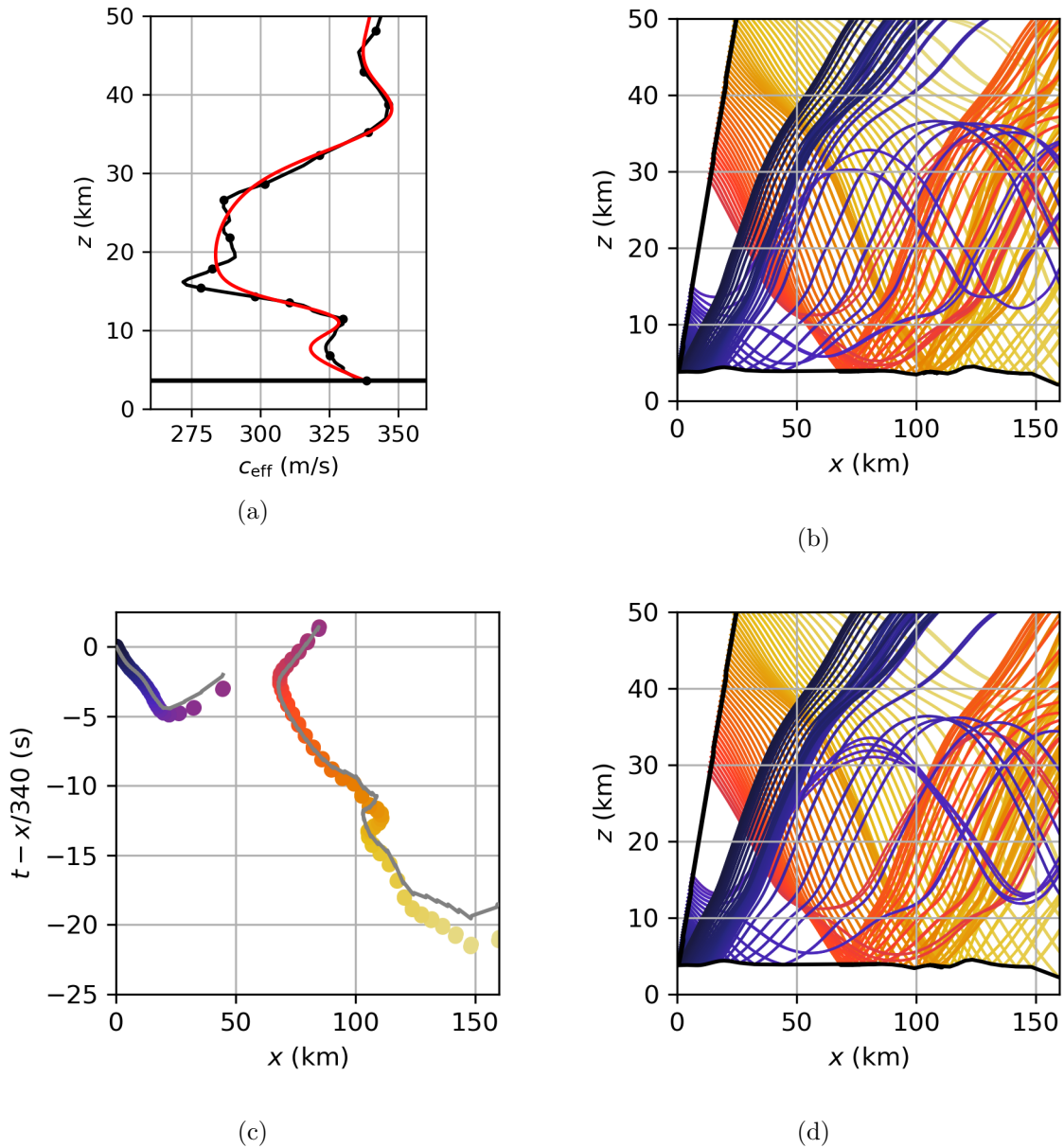


FIGURE 5.14 – (a) Vitesse du son effective calculée par interpolation spline (Gainville et al., 2017) (●) et à partir de l’approximation analytique (—) pour l’azimut  $\gamma = 90^\circ$ . (b) Rayons associés à la trajectoire de la météorite de Carancas dans la direction de la station BBOK calculés en 3D pour le profil atmosphérique interpolé par splines ((Gainville et al., 2017, Figure 1)), et par fonction analytique (d). (c) Temps réduits d’arrivée au sol pour le cas splines en couleurs et en gris pour l’ajustement.

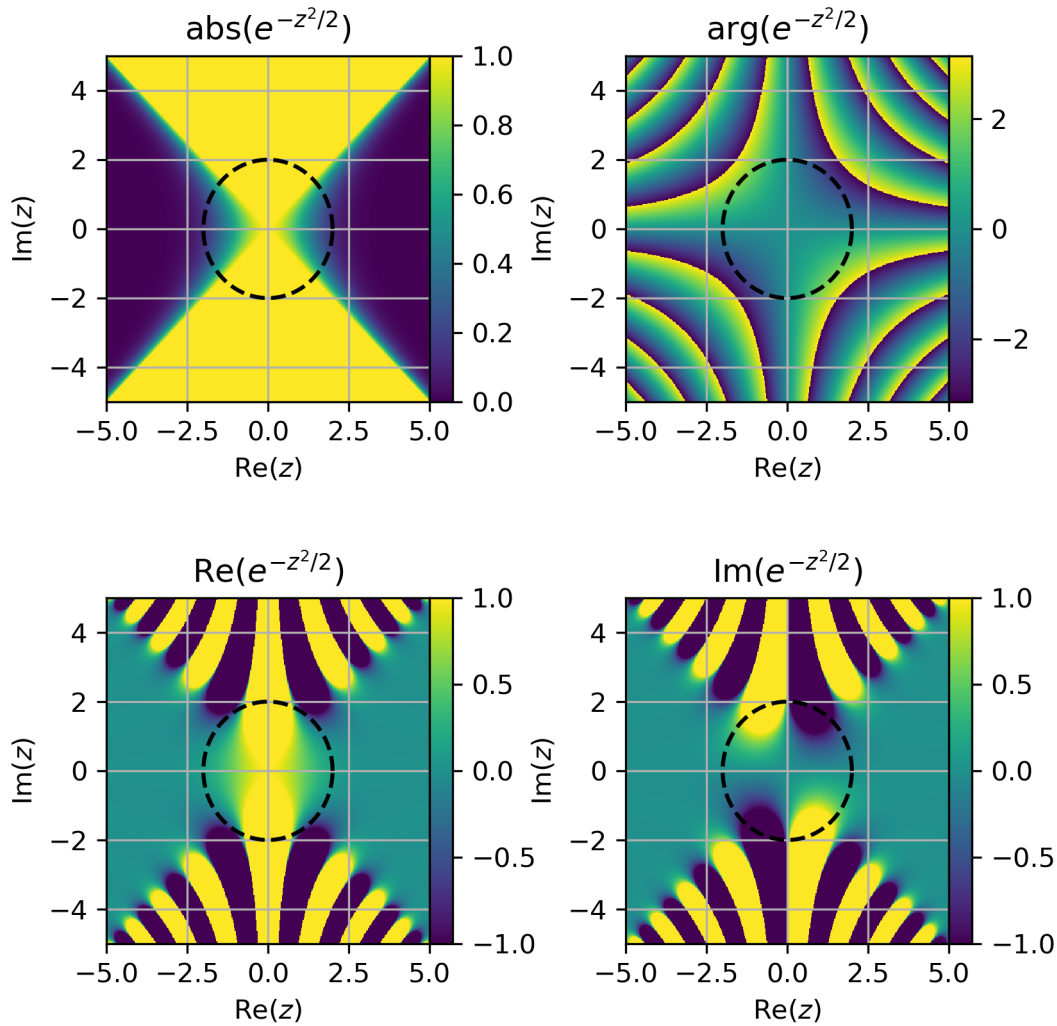


FIGURE 5.15 – Valeur absolue, argument, partie réelle et partie imaginaire de la fonction Gaussienne définie par l'équation (5.8) pour  $z_m = 0$ , dans le plan  $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ .

les temps d'arrivées réduits  $(t - x/c_{\text{ref}})$  au sol, des arrivées troposphériques et stratosphériques (voir FIGURE 5.14, en bas à gauche). Les résultats en couleur correspondent aux calculs avec l'interpolation spline et ceux en gris avec l'ajustement analytique de données.

Dans l'ensemble, les deux méthodes d'interpolation des données atmosphériques donnent des résultats similaires qui suivent le même comportement suivant la distance. Des différences apparaissent loin de la source et loin de la caustique. Néanmoins, nous considérons que cette différence reste faible et que l'approximation des données prend en compte les grandes structures de l'atmosphère, celles qui dirigent principalement les rayons acoustiques.

### Rayons complexes et approximation par Gaussiennes

Avant de présenter les résultats en zone d'ombre, nous montrons ici une limitation de l'approximation par une somme de fonctions Gaussiennes des profils de vitesse de vent. Lors de la propagation des rayons complexes en zone d'ombre, la position géométrique le long de ces rayons est à valeur complexe, et peut donc atteindre des grandes valeurs de partie imaginaire. Lorsque le paramètre  $|z - z_m|$  de la fonction gaussienne, définie par l'équation (5.8), est

supérieur à  $2\sigma_m$ , ceci peut engendrer des singularités de la fonction exponentielle par le biais de fortes oscillations, et ainsi empêcher l'intégration numérique des rayons complexes. C'est ce que nous observons sur la FIGURE 5.15, représentant la variation de la fonction Gaussienne, centrée en 0 ( $z_0 = 0$  km), d'amplitude égale à 1 et avec  $\sigma_0 = 1$ , dans le plan ( $\text{Im}(z)$ ,  $\text{Re}(z)$ ). La variation de l'argument de la fonction,  $\arg(\exp(-z^2/2))$ , montre bien l'effet oscillant de la fonction en cas de partie imaginaire non nulle lorsque  $z > 2\sigma_0$  (cercle de rayon 2 sur la FIGURE 5.15). Les autres figures quant à elles montrent les changements de signe associés à la partie réelle et à la partie imaginaire de la fonction Gaussienne, et donc les oscillations de cette fonction lorsque  $z > 2\sigma_0$ .

Nous pouvons prendre en exemple l'étude du cas de la météorite de Carancas, cas qui sera exposé dans les paragraphes suivants. En effet, les données de vitesse de vent possèdent, à basse altitude, un jet troposphérique, étroit, de largeur  $\sigma = 1,8$  km à une altitude de 8 km. Nous verrons dans la partie 5.4.2 que, pour atteindre la zone d'ombre et plus particulièrement la station au sol, une position d'émission  $\phi$  d'environ 34 km d'altitude, dont la partie imaginaire est de l'ordre de 5000 m, doit être considérée. Celle-ci est largement supérieure à 3,6 km. Ainsi, à la position  $\text{Re}(z) = 8$  km la fonction Gaussienne approchant ce jet troposphérique, devient fortement oscillante, ce qui induit une singularité numérique empêchant l'intégration des rayons.

## 5.4 Météorite de Carancas : propagation en zone d'ombre

La partie synthétisant les travaux sur la météorite de Carancas met en évidence que la méthode de tracé de rayons est particulièrement adaptée afin d'étudier la propagation du bang sonique généré par des sources telles qu'une météorite en entrée hypersonique, car la géométrie du problème est complètement tridimensionnelle. Dans le cas d'une telle source, les distances entre l'émission et les stations sont relativement faibles, si bien que les arrivées observées sont directes : les rayons sont émis directement depuis leur source vers le sol et arrivent à la station sans réfraction en altitude dans un guide d'onde. Dans cette partie, nous présentons les résultats pour le cas de la météorite de Carancas avec une trajectoire projetée en deux dimensions. Cette projection en deux dimensions permet d'utiliser la méthode des rayons complexes développée dans le chapitre 4. Les profils météorologiques utilisés sont ceux définis dans la section 5.3 ( $P^{2c_0}(z)$ ,  $P^{1u_0}$  et  $P^{1v_0}$ ), avec le profil de masse volumique de l'atmosphère défini par l'équation (1.7). A titre illustratif nous présentons la trace au sol des fronts d'onde simulés en trois dimensions en utilisant ce profil météorologique analytique. Contrairement au cas de la FIGURE 5.16 où la météorologie était définie de manière 3D, donc variable en espace  $y$  compris horizontalement, ici elle est uniquement stratifiée dans la direction verticale, égale à celle définie par les polynômes  $P^{2c_0}(z)$ ,  $P^{1u_0}$  et  $P^{1v_0}$ , qui ajustent les données au niveau du cratère. Ceci explique la différence de géométrie des fronts au sol, même s'ils suivent globalement la même forme. Néanmoins, au niveau de la station infrasonore nous retrouvons la zone d'ombre d'intérêt avec la caustique au sol à environ 25 km à l'est de la station.

L'objectif de cette section est de vérifier l'hypothèse émise dans Henneton (2013) et Gainville et al. (2017), que la deuxième arrivée mesurée à la station I08BO est due à la diffraction à la caustique située à 11 km d'altitude (7 km au-dessus de la station), associée à des émissions dans la stratosphère. Pour cela nous comparons les paramètres géométriques mesurés à la station, tels que le temps d'arrivée et les vitesses apparentes, ainsi que l'amplitude de la signature, avec ces mêmes paramètres estimés par la méthode des rayons complexes.

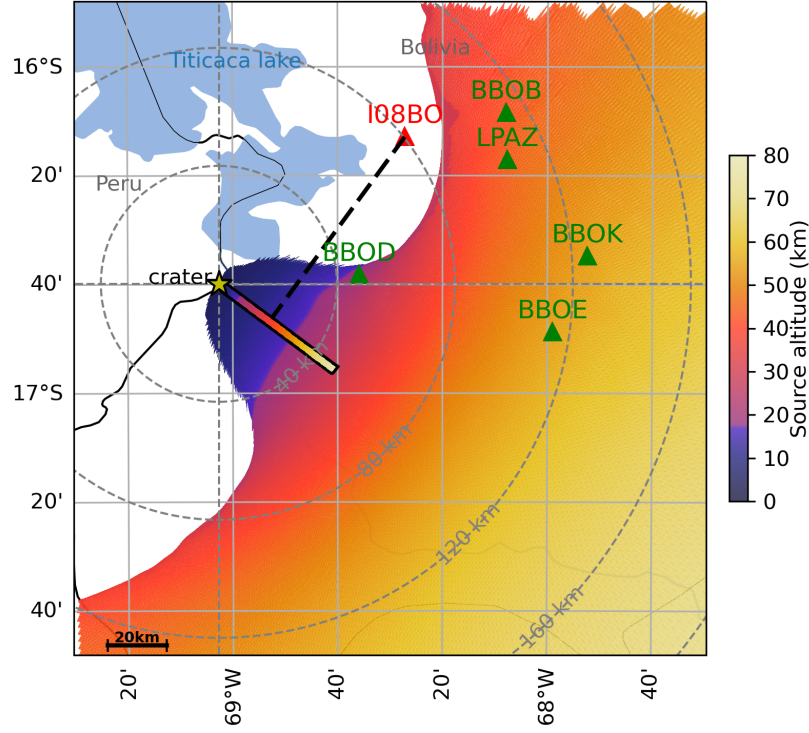


FIGURE 5.16 – Carte de la région de Carancas similaire à celle de la FIGURE 5.5, en utilisant le profil atmosphérique ajusté par les polynômes  $P^{2c_0}(z)$ ,  $P^{1u_0}$  et  $P^{1v_0}$ .

#### 5.4.1 Trajectoire simplifiée en deux dimensions

Comme nous l'avons vu dans la partie 5.2.2, la géométrie de la propagation du bang sonique issu de la météorite de Carancas est tridimensionnelle. Cependant, la méthode de détermination des rayons propres complexes développée dans le chapitre 4 n'a été mise en œuvre numériquement qu'en deux dimensions. Afin d'appliquer cette méthode, nous simplifions le cas de propagation en deux dimensions en projetant la trajectoire de la météorite dans le plan vertical défini par la station I08BO et par l'azimut de la seconde arrivée à cette station, soit un azimut de  $214,7^\circ$  ou une direction de propagation de  $34,7^\circ$ . Ce plan est représentée sur la carte FIGURE 5.5 en pointillés noirs. La trajectoire de la météorite de Carancas projetée dans ce plan possède un angle d'inclinaison  $\alpha = -5^\circ$  par rapport à la verticale et arrive au sol à une distance horizontale  $x = 0$  et une altitude de  $z = 4000$  m au-dessus du niveau de la mer. Dans la suite, nous supposons que le sol est parfaitement plat, à cette même altitude de 4000 m. Dans ce plan de propagation, la station I08BO est située en  $x = 80$  km.

De plus, les rayons sont supposés être émis orthogonalement à la trajectoire et instantanément. Cette émission suivant une source cylindrique revient à supposer que le nombre de Mach de la météorite est infini. Cette approximation est justifiée car le nombre de Mach de la météorite de Carancas vaut environ 40 à 90 km d'altitude (soit un angle de Mach de  $1.43^\circ$  entre le front d'onde émis et la trajectoire) et environ 10 au sol (soit un angle de Mach de  $5.7^\circ$ ), pour un temps de rentrée d'environ 9 s (Henetton et al., 2014). Ainsi, le cas simplifié de la météorite de Carancas est défini comme une onde cylindrique émise dans le plan  $(x, z)$  tel que :

$$\mathbf{x}_s = \phi(-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) + 4000 \mathbf{e}_z, \quad (5.9)$$

la normale au front d'onde vérifiant

$$\mathbf{n}_s = \cos \psi (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z) + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad (5.10)$$

et le temps à la source  $t_s = 0$  s. Pour ce cas étudié en deux dimensions,  $\psi = 0^\circ$ .

Enfin, le signal à la source est choisi afin de retrouver, avec le modèle de propagation linéaire et la source cylindrique, le signal incident, simulé par rayons classiques 3D en acoustique non linéaire, au niveau de la caustique située au dessus de la station I08BO. La signature source est alors une onde en N donnée par la relation  $p'(\mathbf{x}_s, t_s) = p'_\star s_\delta\left(\frac{t-t_s}{t_d}\right)$  où

$$s_\delta(t') = -\frac{t'}{2} \left( \tanh\left(\frac{t'+1}{\delta}\right) - \tanh\left(\frac{t'-1}{\delta}\right) \right). \quad (5.11)$$

L'amplitude  $p'_\star$  est donnée au voisinage de la source par l'équation (5.4), la durée de phase positive  $t_d$  par l'équation (5.5) et la durée de montée du choc est choisie comme  $\delta = 0,02$  s. En considérant l'hypothèse d'une atmosphère homogène dans le champ proche de la source cylindrique, l'amplitude est définie par la relation :

$$u_\star(t_a) = \left[ \left( \frac{\rho_0 c_0}{K^3} \right)^{1/2} \frac{1}{\gamma} \right] (c_0 t_a)^{1/2} \frac{p'_\star}{p_0}, \quad (5.12)$$

où l'on retrouve directement le terme de (5.4) avec  $t_s = 0$ . Cette amplitude  $u_\star$  n'est pas singulière sur la source et peut être initialisée en  $t_a = 0$ .

Afin de calculer la surpression  $p'$  pour tous les récepteurs dans le plan en  $x = 80$  km (puis en  $x = 185$  km dans un second temps), nous sommes les contributions de chaque rayon arrivant au récepteur considéré par la relation (2.57). L'amplitude de chaque rayon est initialisée par l'équation (5.12). Afin de prendre en compte la divergence cylindrique de la source, nous calculons la section du tube de rayon en trois dimension avec l'équation (2.46), où  $\mathbf{X}_\psi$  est l'élément géodésique relatif à l'angle azimutal autour de l'axe du cylindre  $\psi$  (voir schéma FIGURE 2.3). L'intégration numérique des équations géodésiques (2.24), montre que  $\mathbf{X}_\psi$  est approximativement égale à  $c_0 t$  et est dans la direction  $\mathbf{e}_y$ . Ainsi, pour les rayons émis dans le plan  $(x, z)$ , le problème numérique reste à deux dimensions.

### 5.4.2 Propagation pour le profil météorologique de Carancas

Dans cette partie, nous analysons la propagation pour l'approximation en deux dimensions de la météorite de Carancas. Les profils météorologiques utilisés sont ceux détaillés dans la section 5.3. Nous présentons dans la présente section, les résultats pour le polynôme  $P^{2c_0}(z)$  d'ordre 10 pour la vitesse du son (cf. FIGURE 5.11 et tableau 5.3), le polynôme  $P^{1u_0}(z)$  d'ordre 14 pour la composante zonale de la vitesse de vent et le polynôme  $P^{1v_0}(z)$  d'ordre 10 pour sa composante méridienne (cf. FIGURE 5.13 et tableau 5.4). Nous rappelons ici que l'azimut de propagation vers la station I08BO est  $\gamma = 34,7^\circ$ . Par rapport au cas en trois dimensions de référence (Gainville et al., 2017), ces profils sont à la fois stratifiés et plus lisses. Par contre, ils sont analytiques ce qui permet d'utiliser la méthode des rayons complexes. Ces profils verticaux sont détaillés entre les altitudes 4 à 50 km sur la FIGURE 5.17a et FIGURE 5.17b.

#### Rayons

Les rayons réels obtenus par un lancer de rayons, sont tracés sur la FIGURE 5.17c. Pour une distance d'intérêt de 80 km (distance cratère-station I08B0), les rayons directs sont en noir et ceux ayant tangenté une caustique en gris. Ces rayons réels forment une caustique pli, située au-dessus de la station (distance  $x = 80$  km), à une altitude  $z = 8,72$  km, donc à 4,72 km de la surface du sol, conduisant à une zone d'ombre entre le sol et cette altitude. A une altitude plus élevée en  $z = 30,2$  et  $31,4$  km on observe les branches d'une caustique cuspidée, formée par les émissions entre 4 et 20 km d'altitude. La caustique d'intérêt dont la diffraction a pu être enregistrée à la station ((Gainville et al., 2017)) est la caustique à basse altitude. Ainsi, pour le calcul des paramètres initiaux à partir du lancer de rayons, nous ne considérerons que les émissions entre 20 et 40 km d'altitude.

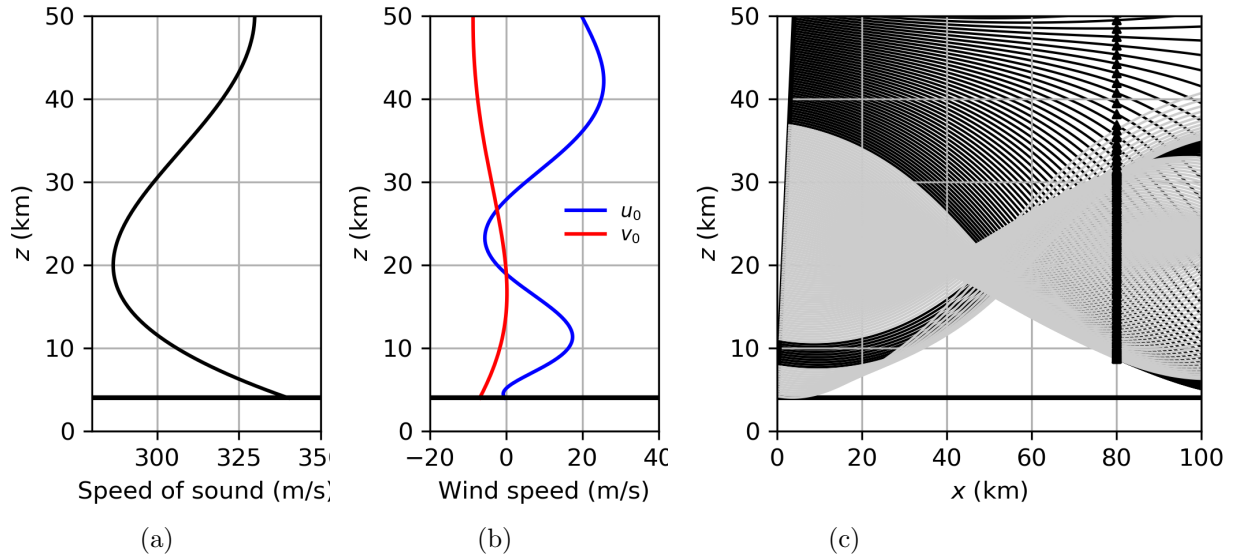


FIGURE 5.17 – (a) Polynôme  $P^{2c_0}(z)$  représentant la vitesse du son  $c_0$ . (b) Polynômes  $P^{1u_0}(z)$  et  $P^{1v_0}(z)$  représentant la composante zonale  $u_0$  et azimutale  $v_0$  du vent. (c) Lancer de rayons associé aux profils (a) et (b) dans la direction telle que  $\gamma = 34,7^\circ$  avec la trajectoire projetée dans le plan présenté sur la FIGURE 5.5, ainsi que les rayons rapides (—) et lents (—) passant par les points d'intersection  $\blacktriangle$  avec le plan  $x = 80$  km.

La méthode des rayons complexes décrite dans le chapitre 4 permet d'obtenir les solutions dans le plan vertical localisé en  $x = 80$  km. Pour cela, nous considérons les solutions dans ce plan obtenues par lancer de rayons (triangles noirs sur la FIGURE 5.17c). Ces triangles correspondent à la première étape de la méthode des rayons complexes. L'extraction des solutions dans ce plan permet d'avoir les paramètres  $\phi$  et  $t$  réels en fonction de  $z$ . Dans cette partie, la variable  $z$  joue le rôle de la variable  $x$  dans l'algorithme du chapitre 4. Une analyse de la convergence de la position de la caustique, comme pour le cas de la source ponctuelle (FIGURE 4.10), donne un nombre de rayons minimal pour le lancer de rayons égal à 200.

À partir des solutions du lancer de rayons, nous déterminons les rayons propres, puis les optimisons suivant la méthode décrite dans le chapitre 4. Les paramètres initiaux (en couleur) ainsi que les paramètres optimisés (en noir) sont représentés sur la FIGURE 5.18. Nous pouvons voir que la méthode de recherche des paramètres initiaux est robuste. Pour les rayons réels (en vert), après optimisation, ces paramètres restent inchangés. En revanche, la phase d'optimisation est nécessaire pour la zone d'ombre, particulièrement pour le temps  $t$  qui dévie fortement de l'estimation initiale. Les différents rayons propres, obtenus après optimisation et intégration, sont représentés sur la FIGURE 5.19 avec les rayons directs en noir, les rayons ayant tangenté une caustique en gris et les rayons complexes en rouge. Ceux-ci sont associés à une onde émise dans la stratosphère et diffractée jusqu'à la station localisée à la surface du sol.

### Paramètres géométriques

Comme nous l'avons vu tout au long de ce manuscrit, les grandeurs géométriques d'intérêt à une station sont les vitesses apparentes des ondes et leurs temps d'arrivée.

La vitesse apparente est définie par la relation  $v_a = \omega/k_x$ . Pour les milieux stratifiés, le terme  $k_x$  est constant le long des rayons et égal à sa valeur à la source. Ainsi,

$$v_a = \frac{c_0(\phi)}{\cos \alpha} + v_0(\phi) \quad (5.13)$$

où l'angle  $\alpha$  est un paramètre constant, correspondant ici à l'angle de la trajectoire par



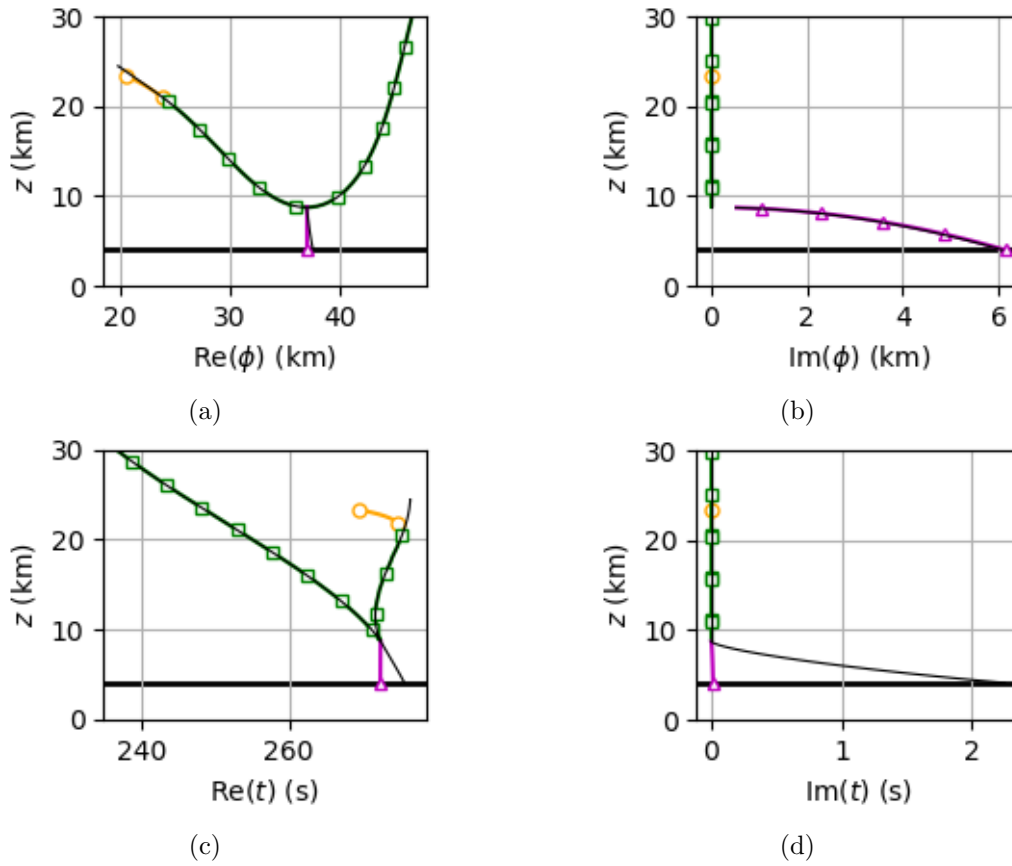


FIGURE 5.18 – Paramètres initiaux de l’optimisation pour le cas de l’onde cylindrique, obtenu par la méthode des rayons complexes, à partir du lancer de rayons de la FIGURE 5.17, avec les paramètres réels  $\square$ ,  $\circ$ , et complexes  $\triangle$ . Les solutions optimisées de ces mêmes paramètres (—) sont superposées.

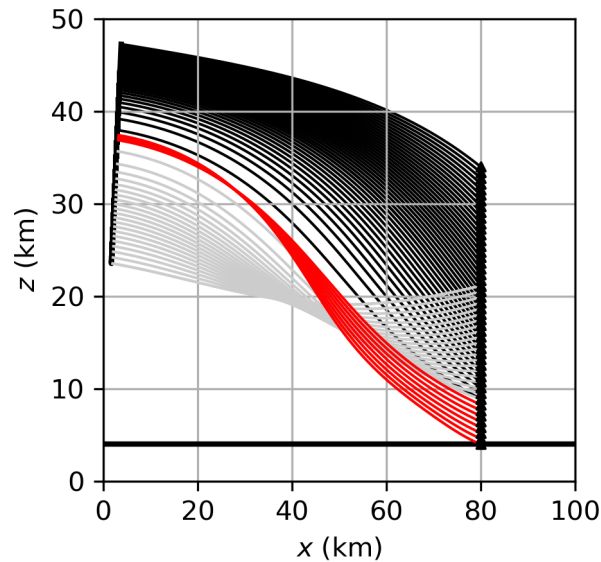


FIGURE 5.19 – Rayons propres rapides (—), lents (—), et complexes (—), arrivant aux récepteurs dans le plan  $x = 80$  km, associés aux paramètres optimisés FIGURE 5.18.

rapport à la verticale. Notons que dans l’équation (5.13),  $v_0$  désigne la composante du vent horizontale prise dans la direction de propagation en deux dimensions. L’évolution de la vitesse apparente est déterminée par l’évolution de la position d’émission  $\phi$ , qui elle-même dépend

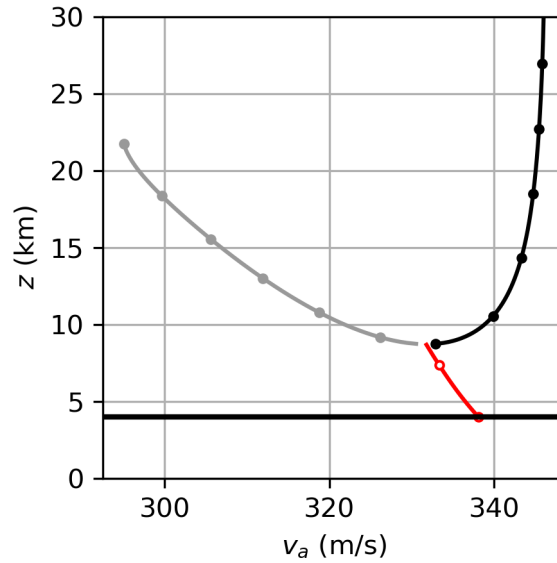


FIGURE 5.20 – Vitesses apparentes aux récepteurs dans le plan en  $x = 80$  km, en fonction de l’altitude. Les couleurs correspondent aux rayons de la FIGURE 5.19.

de l’altitude des récepteurs  $z$ . Cette relation  $v_a(z)$  dépend donc de la géométrie à la source et du profil météorologique le long du rayon considéré. Ainsi, l’évolution de  $v_a(z)$  ne peut pas être obtenue sans l’utilisation de la méthode des rayons complexes. Calculée dans le plan  $x = 80$  km, la vitesse apparente est représentée sur la FIGURE 5.20 en fonction de l’altitude des récepteurs  $z$ . Pour les rayons réels, elle forme deux branches distinctes correspondant aux arrivées rapides (noirs) et lentes (gris), illustrées sur la FIGURE 5.19. Suivant la relation (5.13), les résultats sont en accord avec les variations du paramètre d’émission  $\phi$ . Ainsi, la vitesse  $v_a$  est comprise entre 280 et 332 m/s pour les rayons ayant tangenté une caustique (gris) et entre 332 et 345 m/s pour les rayons directs (noirs). Par ailleurs,  $v_a \approx 332$  m/s à la caustique en  $z = 8,72$  km. Pour les arrivées complexes, l’altitude d’émission  $\phi$  varie entre 36 et 37 km, ce qui implique une croissance de  $v_a$  jusqu’à 338 m/s au sol ( $z = 4$  km). Ce cas d’étude montre bien que, pour ce type de source, la vitesse apparente peut évoluer significativement dans la zone d’ombre. Sa détermination nécessite le calcul du paramètre  $\phi$  qui est obtenu par la méthode des rayons complexes.

Le temps d’arrivée  $t$  est indiqué sur la FIGURE 5.18 mais aussi sur la FIGURE 5.21a pour chaque signature autour de la caustique. Ce paramètre décroît avec l’altitude pour les arrivées directes rapides, mais est plus grand et augmente pour les arrivées lentes ayant tangenté la caustique. Dans la zone d’ombre, les valeurs réelles du temps d’arrivée tendent à être une extrapolation linéaire des valeurs limites à la caustique. La valeur du temps d’arrivée à la caustique est égale à 272 s, et à 275,5 s pour l’onde arrivant au sol (en  $z = 4$  km). Tout comme pour la vitesse apparente, c’est l’optimisation faite à partir de la méthode des rayons complexes qui permet d’obtenir ce paramètre géométrique.

### Analyse des signatures acoustiques

Nous calculons les signatures acoustiques, la surpression maximale  $p'_*$  et le pic du spectre pour les récepteurs toujours situés dans le plan  $x = 80$  km pour des altitudes  $z$  comprises entre le sol situé à 4 km et 17 km, afin de visualiser l’évolution des formes d’onde autour de la caustique localisée en  $z = 8,72$  km ( FIGURE 5.21). Suivant l’altitude des récepteurs, les arrivées directes (points noirs) ont une forme d’onde en N dont l’amplitude décroît légèrement avec l’altitude. Les arrivées ayant tangenté une caustique (points gris), ont une forme d’onde en U (transformée de Hilbert d’une onde en N, comme vu au chapitre précédent), avec une

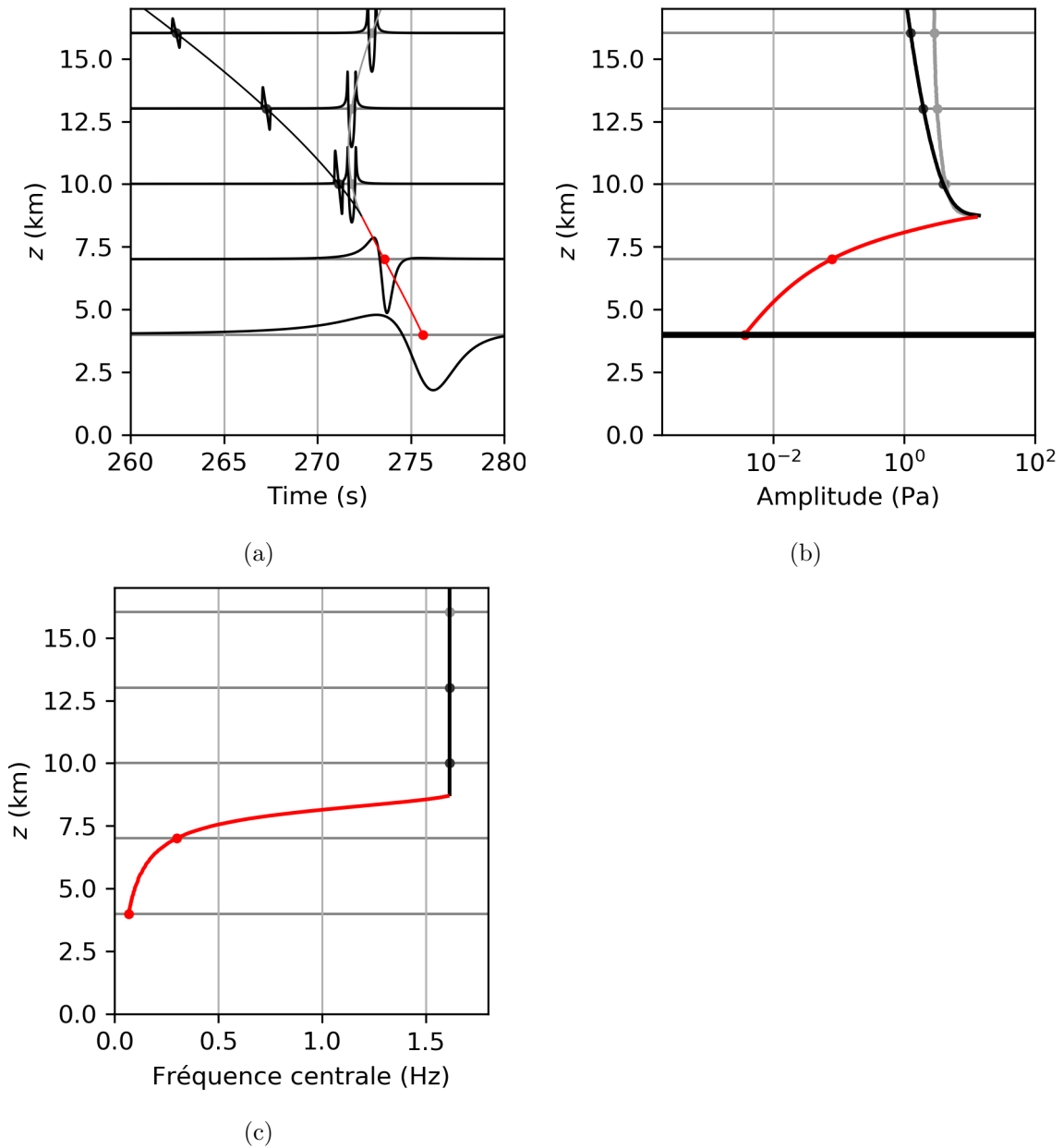


FIGURE 5.21 – (a) Signatures aux récepteurs localisés autour de la caustique en  $z = 8,72$  km entre 0 et 16 km d'altitude, avec leurs temps d'arrivée. Les amplitudes sont normalisées. (b) Amplitudes correspondantes. (c) Fréquences centrales correspondantes. Les couleurs correspondent aux rayons de la FIGURE 5.19.

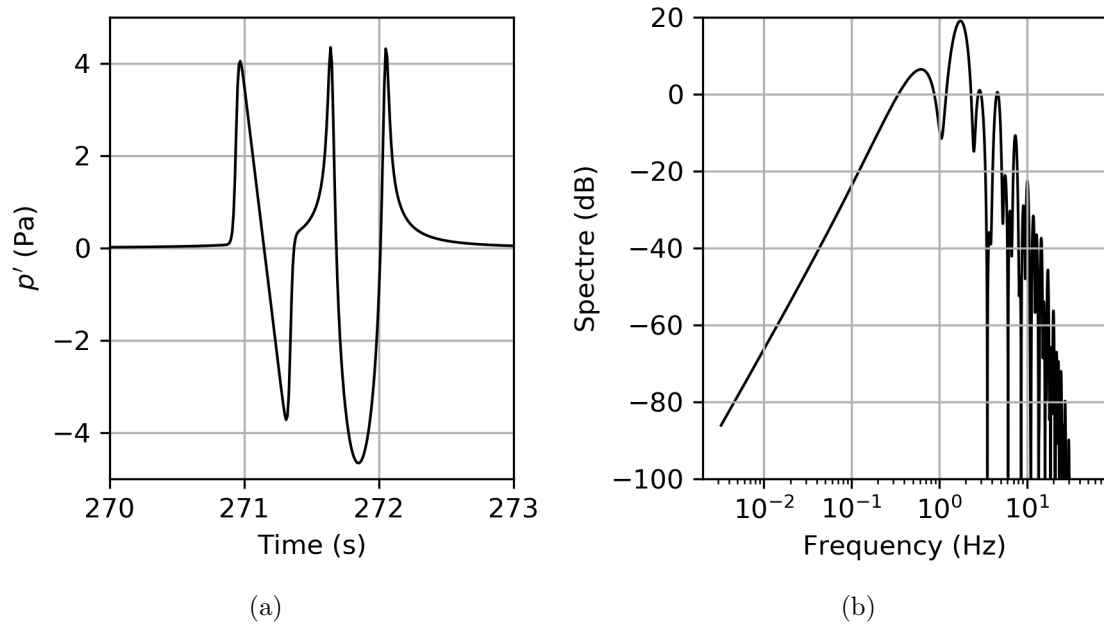


FIGURE 5.22 – (a) Signature et (b) son spectre au dessus de la caustique, en  $z = 10$  km.

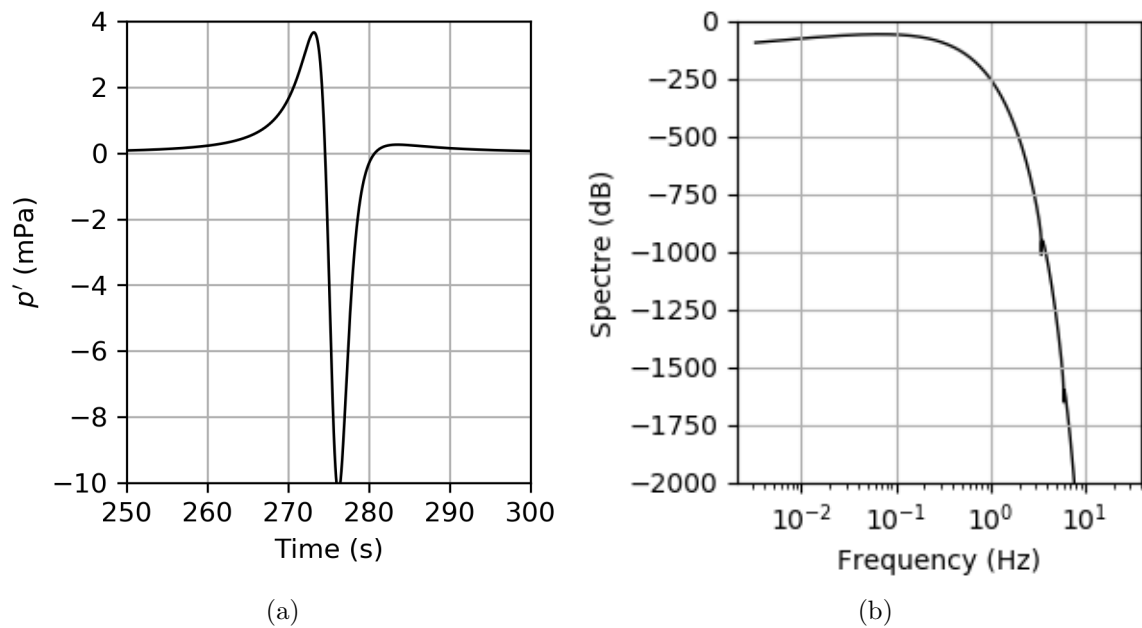


FIGURE 5.23 – (a) Signature et (b) son spectre au sol, en  $z = 4$  km.

CHAPITRE 5. APPROXIMATION DE DONNÉES MÉTÉOROLOGIQUES ET  
APPLICATION À LA MÉTÉORITE DE CARANCAS

	Temps d'arrivée (s)	Vitesse apparente (m/s)	Amplitude (Pa)	Fréquence (Hz)
Station	267,3	344,9	0,5	0,84
Rayons $\mathbb{C}$	275,5	338,0	$6,6 \times 10^{-3}$	0,07

TABLEAU 5.6 – Comparaison entre les données à la station I08BO pour la seconde arrivée et les résultats obtenus pour le cas simplifié en deux dimensions.

amplitude moins rapidement décroissante. Les arrivées diffractées (points rouges) ont une forme d'onde en N lissée par la décroissance exponentielle avec la distance mais aussi avec la fréquence, puisque en zone d'ombre les phénomènes de diffraction sont dominants. La singularité d'amplitude en  $z = 8,72$  km correspond à la caustique pli formée par les rayons stratosphériques. Cette diffraction explique aussi la décroissance du pic du spectre dans la zone d'ombre (voir FIGURE 5.21). Celui-ci évolue de 1,6 Hz dans la zone insonifiée à 0,07 Hz à 4 km d'altitude, dans la zone d'ombre.

Au sol, l'amplitude de l'onde incidente obtenue est égale à  $3,3 \times 10^{-3}$  Pa. Celle-ci est doublée par réflexion au sol, soit  $6,6 \times 10^{-3}$  Pa. Entre la source et le sol, l'amplitude est modifiée par différents facteurs. La décroissance exponentielle de la masse volumique de l'atmosphère avec l'altitude implique, l'onde se propageant vers le bas, une amplification d'un facteur 14,4. La divergence géométrique est approximativement cylindrique avec un facteur 0,04. Et finalement, la décroissance exponentielle due à la diffraction en zone d'ombre est d'environ 0,001. La décroissance de l'amplitude globale est le produit de tous ces effets. A l'exception de la diffraction, les autres effets sont du même ordre de grandeur que pour les stations BBOE et BBOK (Gainville et al., 2017). L'amplitude au sol est extrêmement faible en raison du terme de diffraction, la station se trouvant relativement loin à l'intérieur de la zone d'ombre de la caustique.

Nous représentons sur la FIGURE 5.23 la signature de l'onde diffractée, obtenue au sol en  $z = 4$  km, ainsi que son spectre. Le signal est de faible amplitude, et sa durée de phase positive largement supérieure à 15 s. Le spectre, quant à lui, présente de faibles arches (-1000 dB vers 4 Hz qui est indétectable d'un point de vue expérimental), celles-ci étant caractéristiques du spectre de l'onde en N incidente (voir FIGURE 5.22), mais avec une décroissance exponentielle caractéristique d'une onde diffractée. Au-dessus de la caustique, le signal temporel est la somme de l'onde en N incidente et de l'onde en U réfractée qui ont séparément le même spectre. Le spectre total résultant des interférences entre les deux est proche du spectre de l'onde en N modulé.

Nous récapitulons dans le tableau 5.6 les résultats à la station I08BO pour la deuxième arrivée de l'évènement de la météorite de Carancas, ainsi que les résultats obtenus par la méthode des rayons complexes pour ce même cas, simplifié en deux dimensions et avec l'approximation précédemment décrite des données atmosphériques. Nous pouvons constater que les ordres de grandeur du temps d'arrivée ainsi que de la vitesse apparente restent corrects, avec une différence de 3,5 s pour le temps d'arrivée (on ajoute au temps à la station, le temps d'avancement de la météorite entre l'altitude d'émission et l'impact, égal à 4,5 s) et 7 m/s pour la vitesse apparente. Les écarts sont donc respectivement de 3% pour le temps d'arrivée et de 2% pour la vitesse apparente. Rappelons l'ensemble des approximations réalisées pour obtenir ce résultat :

- estimation de la trajectoire de la météorite à partir de trois arrivées géométriques aux stations sismiques BBOD, BBOK et BBOE ;
- hypothèse d'atmosphère invariante horizontalement ;
- données météorologiques extraites de la base de données réassimilées ECMWF au point et à l'instant les plus proches ;
- ajustement de celles-ci pour obtenir des fonctions analytiques par des polynômes ;

- hypothèse de Mach infini à l'émission ;
- projection du problème 3D dans un plan 2D.

En revanche la différence la plus importante est pour l'amplitude de l'onde (simulation inférieure d'un facteur 100 environ) et pour le pic du spectre (facteur 10 environ). La simulation indique une altitude trop élevée de la caustique, et donc une amplitude et un pic spectral trop faibles. Les données mesurées correspondraient plutôt à la simulation à 2 km environ de la caustique. Ceci pourrait s'expliquer par la différence d'altitude des caustiques entre les cas bi- et tri-dimensionnels. Toutefois, l'altitude de la caustique à la verticale de la station en trois dimensions est encore plus élevée (7 km au lieu de 4 km). Pour expliquer les observations, il faudrait peut être considérer une diffraction oblique dans une direction normale à la surface de la caustique (voir FIGURE 5.6). Il serait donc intéressant de tester l'influence des six approximations listées ci-dessus et la sensibilité des incertitudes des différents paramètres sur l'amplitude et le pic du spectre en zone d'ombre. Par ailleurs, la forme d'onde mesurée est significativement différente de celle simulée, ce qui semble indiquer d'autres mécanismes, comme par exemple des réflexions partielles par des petites inhomogénéités ou de la turbulence qui renverraient directement du signal en zone d'ombre.

### 5.4.3 Propagation en zone d'ombre après le passage de plusieurs caustiques

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'utilisation des rayons complexes lorsque les rayons ont tangenté plusieurs caustiques avant d'arriver aux récepteurs. Le profil météorologique de la section 5.4.2 et la source cylindrique en deux dimensions (cf. FIGURE 5.5) sont particulièrement bien adaptés à cette étude car les rayons sont majoritairement piégés dans un guide d'onde acoustique. Nous reprenons donc l'étude du paragraphe précédent, avec une approximation des données atmosphériques par polynômes, en positionnant les récepteurs verticalement à plus grande distance, en  $x = 185$  km. Le paramètre d'émission  $\phi$  varie entre le sol et 40 km d'altitude, ce qui permet aux rayons piégés de traverser plusieurs caustiques le long de leur trajet. Les rayons réels obtenus par lancer de rayons sont représentés sur la FIGURE 5.24. Les points d'intersection avec le plan en  $x = 185$  km sont indiqués par des triangles noirs. Les rayons noirs représentent les rayons ayant tangenté trois caustiques avant ce plan, les rayons gris ceux ayant tangenté deux caustiques et les rayons gris clairs ceux ayant tangenté une seule caustique. Le plan en  $x = 185$  km intersecte une caustique cuspidée dont le sommet se situe en  $x = 170$  km. Cependant, les branches dans ce plan sont suffisamment éloignées du point focal pour être considérées localement comme deux caustiques plis en  $z = 18$  km et  $z = 22$  km. Nous notons respectivement B et C les zones d'ombre associées, de part et d'autre de la cuspidée. Dans ce même plan une caustique pli est formée en  $z = 10,2$  km par la réfraction des rayons piégés dans le guide, avec la zone d'ombre associée, notée A. Une caustique cuspidée en altitude forme deux branches en 34,4 et 35,4 km d'altitude. Les zones d'ombre associées se situent de part et d'autre des branches de cette caustique cuspidée, notées respectivement D et E. Cette configuration de propagation longue distance présente une géométrie riche et complexe, et est bien représentative d'une évolution réaliste de rayons à plus grande distance. Ainsi, nous allons montrer que même pour des géométries de ce type, la méthode des rayons complexes permet d'obtenir des résultats dans les zones d'ombre.

La bonne détermination des positions des caustiques nécessite de lancer 200 rayons. A partir des paramètres géométriques aux points d'intersection, nous pouvons appliquer la méthode des rayons complexes présentée dans le chapitre 4 afin d'obtenir les rayons propres dans le plan  $x = 185$  km. Nous considérons ici cinquante récepteurs localisés entre la surface du sol et  $z = 40$  km d'altitude. Les paramètres initiaux (en couleur) ainsi que les paramètres optimisés (en noir), sont représentés sur la FIGURE 5.25. La différence entre ces solutions réside principalement dans les parties imaginaires des paramètres initiaux.

Comparativement à la propagation à 80 km, celle à 185 km présente un nombre de caus-

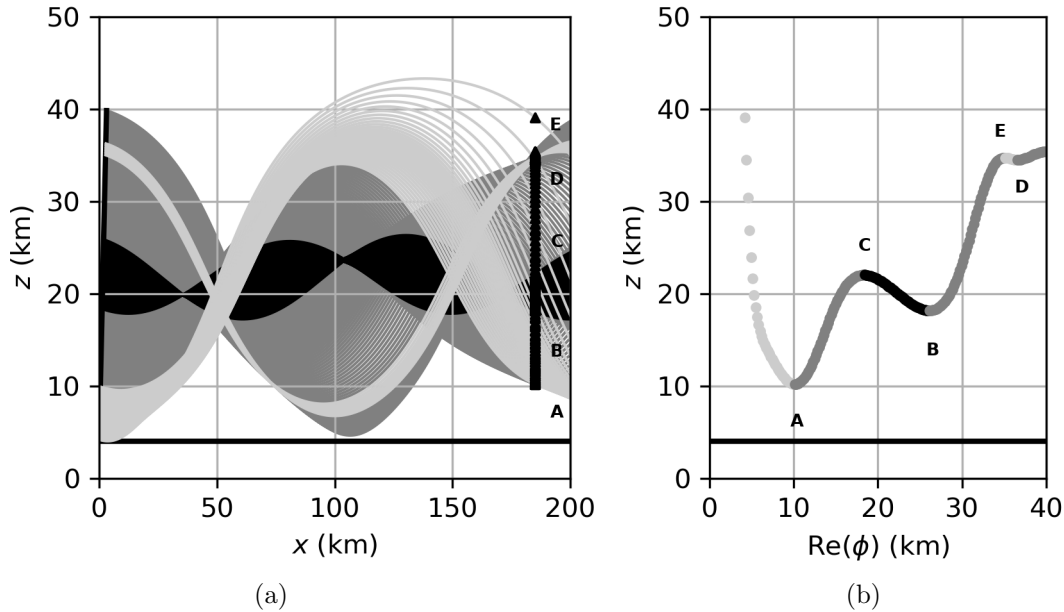


FIGURE 5.24 – (a) Rayons émis entre 4 et 40 km d’altitude dans le cas d’une source cylindrique faisant un angle  $\alpha = 5^\circ$  avec la verticale dans le plan de propagation. Le plan des récepteurs  $\blacktriangle$  se situe en  $x = 185$  km. Rayons ayant tangé trois ((-)) deux ((-)) ou une ((-)) caustique(s) avant d’atteindre les récepteurs. Le sol est à 4 km d’altitude. Les différentes zones d’ombre sont notées A,B,C,D et E (voir texte). (b) Altitude d’émission  $\text{Re}(\phi)$  suivant l’altitude  $z$  d’observation dans le plan  $x = 185$  km. Les couleurs correspondent aux rayons de la figure (a).

tiques plus grand (cf.  $\text{Re}(\phi)$  FIGURE 5.18 et FIGURE 5.25). Elles sont dues au guide d’onde stratosphérique dans lequel les ondes émises relativement horizontalement restent piégées sans toucher le sol. Les parties imaginaires de  $\phi$  et  $t$  sont du même ordre de grandeur entre le cas à 80 km et à 182 km, soit entre 1 et 5 km pour  $\text{Im}(\phi)$  et entre 0 et 3 s pour  $\text{Im}(t)$ . Ainsi, la pénétration dans le plan complexe est relativement indépendante de la distance de propagation car elle ne dépend que de la distance à la caustique dans la zone d’ombre et du rayon de courbure relatif de la caustique.

Les rayons propres réels et complexes optimisés et intégrés sont représentés sur la FIGURE 5.26. Nous retrouvons les rayons réels noirs et gris tandis que les rayons complexes sont représentés en rouge. Les lettres A,B,C,D et E indiquent toujours les mêmes zones d’ombre que sur FIGURE 5.24.

Avant d’étudier le comportement des signatures dans le plan  $x = 185$  km autour des caustiques, nous analysons l’évolution de la section du tube de rayon  $\nu$  qui intervient dans la définition de la surpression (2.57). En effet, le comportement de  $\nu$  permet de dénombrer le nombre de caustiques tangées et ainsi prendre en compte le déphasage associé. L’angle  $\theta$  de la section du tube de rayons  $\nu = |\nu| \exp(i\theta)$  est représenté sur la FIGURE 5.27 le long des rayons de la FIGURE 5.26, en fonction de la distance  $x$ , ainsi que sa valeur aux récepteurs. Comme nous l’avons présenté dans le chapitre 1, pour les rayons réels, la section du tube de rayon s’annule au passage de la caustique et change de signe, ce qui implique un déphasage de  $\pi$  de l’angle  $\theta$ . Ce phénomène est observé sur la FIGURE 5.27a pour les rayons réels gris et noirs pour lesquels  $\theta$  augmente par palier de  $\pi$  à chaque passage de caustique. Nous retrouvons aux récepteurs les trois caustiques tangées pour les rayons noirs ( $\theta = 3\pi$ ), deux pour les rayons gris ( $\theta = 2\pi$ ) et une seule pour les rayons gris clair ( $\theta = \pi$ ).

Pour les rayons complexes, l’évolution de la section du tube de rayons est différente car elle est complexe le long des rayons. Dans cet exemple nous observons que l’aire du tube de rayons complexes ne s’annule pas le long de la propagation. La phase  $\theta$  aux récepteurs, seul point physique des rayons complexes, évolue et tend vers  $\theta = 2n\pi + \pi/2$  au voisinage de

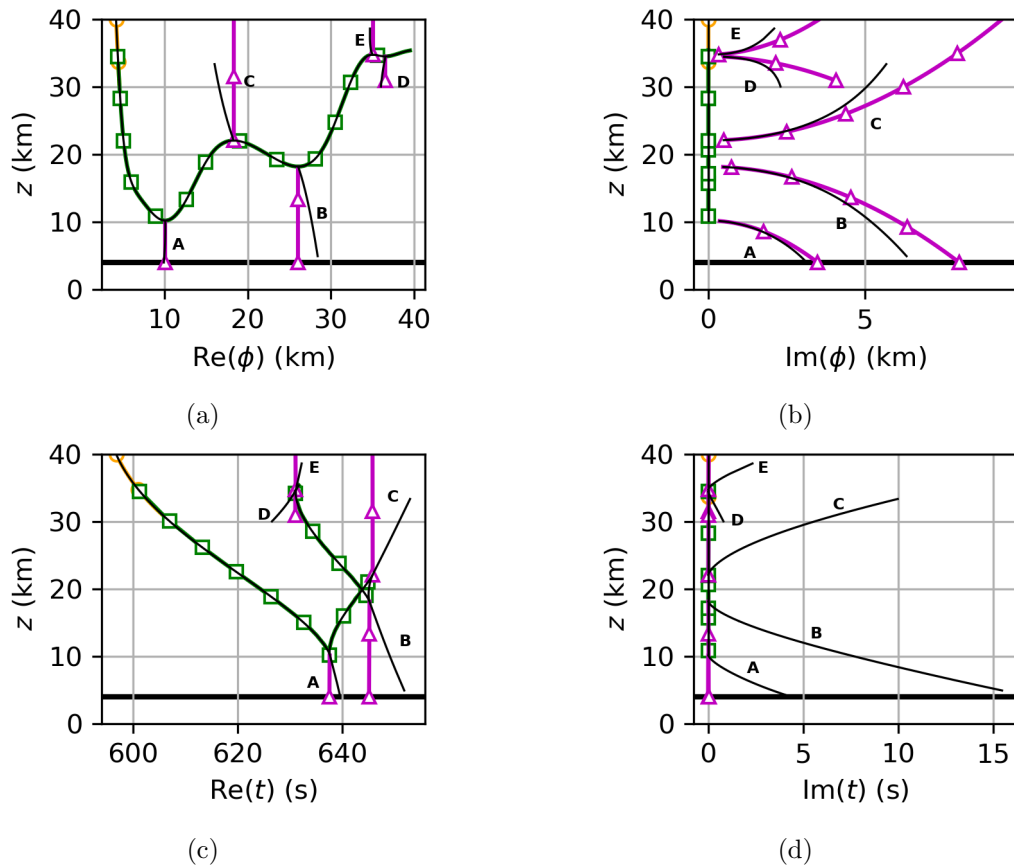


FIGURE 5.25 – Paramètres initiaux de l’optimisation pour le cas de l’onde cylindrique associés au lancer de rayons de la FIGURE 5.24, obtenus par la méthode décrite dans le chapitre 4 avec les paramètres réels  $\square$ ,  $\circ$ , et complexes  $\triangle$ . Les solutions optimisées de ces mêmes paramètres (—) sont superposées. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d’ombre de la FIGURE 5.24.

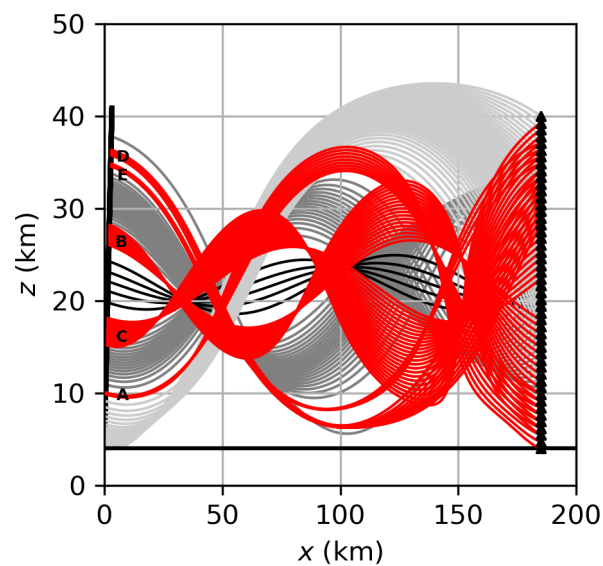


FIGURE 5.26 – Rayons propres réels (—)/(—) et complexes (—) optimisés pour le cas en FIGURE 5.24. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les rayons associés aux zones d’ombre de la FIGURE 5.24.



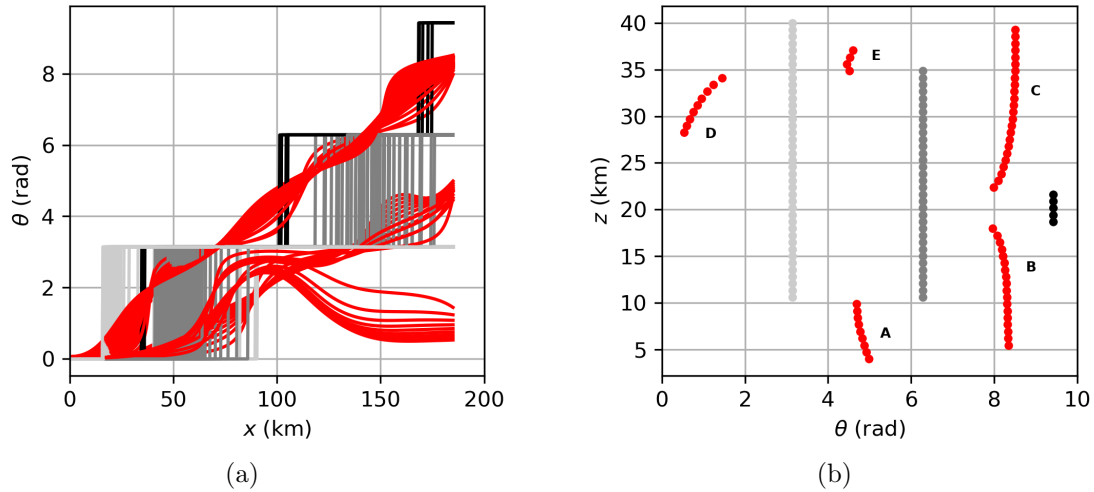


FIGURE 5.27 – Angle de la section du tube de rayon  $\nu = |\nu| \exp(i\theta)$  pour les rayons réels (en noir et en gris) et les rayons complexes (en rouge) de la FIGURE 5.26, le long des rayons (a) et aux récepteurs (b). Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d’ombre de la FIGURE 5.24.

la caustique. Ainsi, au voisinage de la caustique, la phase dans la zone d’ombre est égale à celle du rayon réel incident plus  $\pi/2$ . Il est important de remarquer que l’évolution de  $\nu$  aux récepteurs ne peut être obtenue sans l’intégration des rayons complexes.

En connaissant la section du tube de rayon et donc le nombre de caustiques tangentées le long de la propagation de tous les rayons, nous pouvons, à partir de l’équation (2.57) et en initialisant à la source avec une onde en N définie par l’équation (5.11), calculer les signatures aux récepteurs, ainsi que les amplitudes en surpression acoustique. Les signatures pour quelques récepteurs localisés entre la surface du sol et 30 km d’altitude sont représentées sur la FIGURE 5.28a. Le temps d’arrivée de chaque forme d’onde est indiqué par un point de même code couleur que précédemment (noir/gris/gris clair pour les arrivées ayant tangenté trois/deux/une caustiques, rouge pour les arrivées diffractées).

Naturellement, les distances parcourues étant supérieures, les temps d’arrivées de ces signatures le sont également comparés à la FIGURE 5.21. Ils varient entre 600 et 650 s pour les arrivées réelles, et entre 637 et 660 s pour les arrivées complexes. Entre les deux caustiques (entre 18 et 22 km), il y a trois arrivées dont les temps d’arrivée forment une queue d’aronde, front d’onde caractéristique d’une caustique cuspidée (cf. Annexe A).

Les formes des signatures obtenues sont en adéquation avec le comportement de  $\theta$ . En effet, pour les arrivées réelles entre les deux caustiques, les arrivées ayant tangenté une caustique trois fois (noir) ont une forme de U inversé, correspondant à un N ayant subi trois transformées de Hilbert successives (déphasage de  $3\pi/2$ ), tandis que les arrivées ayant tangenté une caustique deux fois ont une forme de N inversé (déphasage de  $\pi$ ). Pour les arrivées troposphériques (gris clair) qui ont tangenté une seule caustique on retrouve la signature en U déjà décrite. Dans les zones d’ombre les signatures sont les sommes des formes d’onde aux caustiques mais avec une atténuation due à la diffraction d’autant plus importante que l’on s’éloigne des caustiques. Pour les arrivées réelles autour des caustiques, les amplitudes forment quatre branches (voir FIGURE 5.28b), avec une pression allant de 0,1 à environ 10 Pa. Rappelons que les amplitudes deviennent infinies au voisinage proche des caustiques. Pour les arrivées complexes, l’amplitude décroît, conformément au résultat attendu, avec une amplitude au sol de  $5 \times 10^{-4}$  Pa pour l’onde diffractée de la caustique en 10,2 km et de  $10^{-5}$  Pa pour l’onde diffractée de la caustique à 18 km d’altitude. Pour les autres caustiques, soit elles diffractent au-dessus de 40 km, soit elles sont trop loin du sol. Nous remarquerons qu’il y a un facteur 10 entre l’amplitude de l’onde diffracté à 8,72 km d’altitude pour le cas  $x = 80$  km

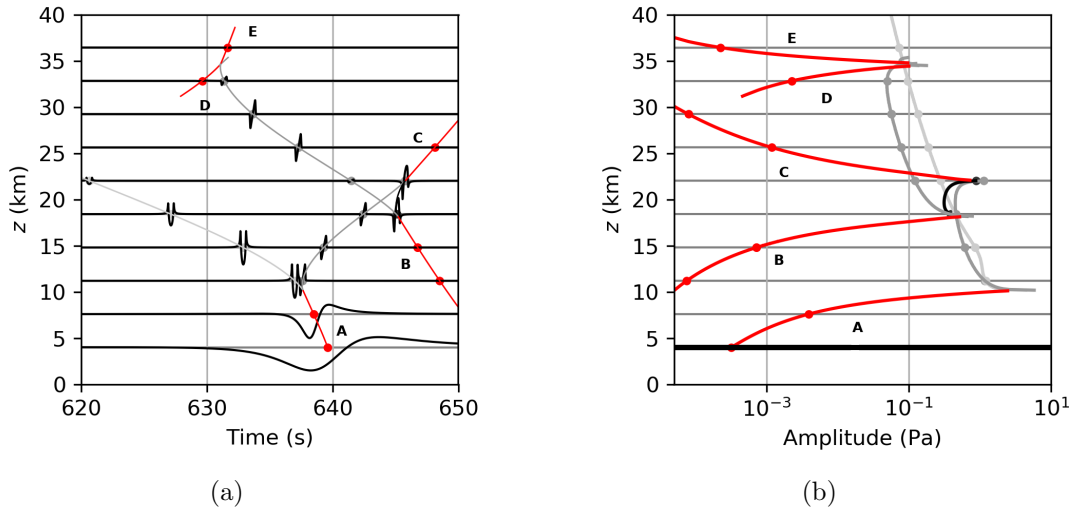


FIGURE 5.28 – (a) Signatures aux récepteurs dans le plan  $x = 185$  km avec leur temps d'arrivée et (b) les amplitudes correspondantes. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d'ombre de la FIGURE 5.24.

par rapport au cas  $x = 185$  km qui se justifie par une altitude plus élevée de la caustique pour le deuxième cas.

Ainsi, cet exemple démontre que la méthode des rayons complexes s'applique aisément à des cas de propagation plus lointaine, pour lesquels plusieurs caustiques sont tangentes. Pour les sources de type météoroïde, ces configurations se rencontreraient par exemple au cas récent de la météorite de Chelyabinsk (Kulichkov et al., 2018).

## 5.5 Conclusion du chapitre

L'objectif principal de ce chapitre était de comparer les résultats de simulation de la propagation infrasonore par rayons complexes avec les données de la météorite de Carancas, et de mettre en évidence la nature diffractée du signal enregistré à la station infrasonore I08BO.

Cette météorite a impacté la Terre le 15 Septembre 2007 au Pérou, près de cinq stations sismiques et une station infrasonore. C'est un cas d'intérêt car il est probable qu'elle n'ait pas fragmenté. La station infrasonore a ainsi enregistré deux signaux associés au bang sonique de la météorite, alors qu'elle se situe en zone d'ombre géométrique selon la trajectoire proposée le plus récemment. Afin de pouvoir utiliser la méthode des rayons complexes pour des cas réels tel que celui de la météorite de Carancas, nous avons présenté une méthode permettant d'ajuster les données atmosphériques par des fonctions analytiques adaptées à la méthode étudiée. L'utilisation d'une approximation de données atmosphériques par des polynômes a permis de présenter les résultats pour le cas de la météorite de Carancas en deux dimensions. La comparaison des paramètres géométrique tels que le temps d'arrivée et la vitesse apparente permet de montrer que l'ordre de grandeur obtenu par la méthode des rayons complexes est en cohérence avec les observations à la station. Néanmoins la comparaison de l'amplitude et du pic du spectre de l'onde diffractée met en évidence que l'utilisation de la méthode en trois dimensions est indispensable pour permettre de conclure quant à l'arrivée stratosphérique diffractée à la station I08BO.



---

## Chapitre 6

# Conclusion

L'objectif principal de ce travail était de pouvoir estimer les paramètres géométriques ainsi que l'amplitude du champ de pression et les signatures acoustiques des ondes diffractées en zone d'ombre par application de la méthode des rayons complexes à la propagation atmosphérique infrasonore. Par rapport à cet objectif, deux voies ont été explorées. Tout d'abord une étape analytique qui permet d'élargir la méthode des rayons complexes à la propagation des infrasons. Puis une seconde étape a permis de développer une méthode numérique permettant de calculer les rayons propres dans tout le domaine physique.

### 6.1 Résultats théoriques et analytiques

Dans le chapitre 1 nous avons mis en évidence l'intérêt de la méthode de tracé de rayons pour l'étude de la propagation des infrasons à grande distance. En effet, malgré ses limitations, cette méthode reste un bon compromis entre, d'une part la possibilité de calcul en trois dimensions avec la prise en compte d'une atmosphère variable dans les trois dimensions de l'espace, du vent, du relief de la Terre mais aussi de l'absorption et des non-linéarités, et, d'autre part, son faible coût numérique. L'absence d'information en zone d'ombre liée à cette méthode peut alors être surmontée par l'extension de la méthode au tracé de rayons complexes, tout en conservant son efficacité globale.

L'acoustique géométrique est donc la base des travaux de ce manuscrit. Elle résulte d'un processus asymptotique sous l'hypothèse haute fréquence, selon laquelle les échelles caractéristiques de variations de l'onde (longueur d'onde, période) sont petites par rapport à celles du milieu de propagation. Elle conduit à l'ordre dominant à l'équation eikonale gouvernant la phase de l'onde et qui détermine les chemins empruntés par le signal acoustique, et à l'ordre suivant à l'équation de transport de l'action de l'onde régissant l'évolution de l'amplitude du champ de pression le long de chaque rayon. La résolution de l'équation eikonale permet d'introduire l'existence de solutions réelles mais aussi complexes. Dans le chapitre 2 nous avons décrit la géométrie d'un rayon complexe, qui s'avère être une surface dans l'espace complexe. Aussi, nous avons décrit la notion d'un sous-rayon complexe (appelé par souci de simplification « rayon complexe » dans la suite de ce manuscrit). Celui-ci correspond à l'élément physiquement admissible permettant d'atteindre un récepteur réel, notamment en zone d'ombre. Le calcul des rayons propres arrivant aux récepteurs en zone illuminée et en zone d'ombre est alors souligné comme le point essentiel permettant l'obtention des paramètres géométriques et du champ de pression à la position d'intérêt.

La méthode des rayons complexes n'a été utilisée principalement que dans le cadre de l'optique géométrique et de la sismologie. Une validation analytique nous a paru nécessaire dans le cas d'une onde plane au chapitre 3, afin de justifier son application à la propagation infrasonore. Le calcul analytique des rayons réels et complexes pour le cas de la caustique pli en altitude avec une zone d'ombre au sol a notamment mis en évidence l'existence de

rayons complexes réfléchis. Les rayons complexes sont influencés par le profil météorologique, étendu dans le plan complexe. A contrario des rayons réels, leurs paramètres d'émission et leurs coordonnées sont à valeurs complexes. Les paramètres géométriques obtenus aux points récepteurs réels peuvent quant à eux être à valeurs complexes. La partie imaginaire mesure alors les effets de diffraction de l'onde en zone d'ombre qui se traduit par son atténuation. L'obtention analytique de ces paramètres d'émission nous a permis d'analyser le comportement local au voisinage d'une caustique. En effet, leurs parties réelles peuvent être choisies constantes en première estimation, égales à leur valeur à la caustique. Ce point sera essentiel pour initialiser l'algorithme itératif développé dans un cadre plus général. La comparaison aux solutions exacte et asymptotique de l'équation de Helmholtz a également montré la principale limite de la méthode lorsque la caustique est trop proche du sol, distante de moins d'une longueur d'onde environ, aux marges de l'hypothèse haute fréquence sous-jacente.

## 6.2 Résultats numériques

D'un point de vue applicatif, il est essentiel d'établir une méthodologie déterminant les rayons propres complexes afin d'atteindre un récepteur donné correspondant à une station infrasonore. En effet, la comparaison avec les enregistrements aux stations infrasonores nécessite la détermination de toutes les arrivées liées aux différentes phases atmosphériques, ce qui jusqu'à présent était un aspect délicat techniquement. De plus, afin de prendre en compte un profil de vitesse du son réaliste et d'intégrer les effets du vent, il est nécessaire de pouvoir intégrer les rayons numériquement. A cet effet, nous avons développé une méthode de calcul des rayons complexes présentée dans le chapitre 4. Toutes les solutions complexes ne sont pas toujours physiquement acceptables. Par conséquent, nous avons restreint le problème aux rayons propres complexes qui sont connectés aux rayons réels par le biais d'une caustique. Cette méthode repose sur trois étapes :

- le lancer de rayons réels, permettant d'obtenir les informations géométriques aux capteurs et de déduire la position des caustiques et des guides d'onde ;
- l'estimation initiale des paramètres d'émission de tous les rayons propres, en particulier complexes, pour les récepteurs d'intérêt, à partir des rayons obtenus à la première étape par interpolation et extrapolation, notamment complexe dans les zones d'ombre ;
- l'optimisation des rayons propres à partir des paramètres initiaux obtenus à la deuxième étape, à l'aide de l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt.

L'application de cette méthode à un cas de source ponctuelle (chapitre 4) a souligné l'éventuelle existence de pôles dans le plan complexe, par exemple de la vitesse du son. Le calcul de l'amplitude du champ, à partir de tous les rayons propres, a quant à lui montré un phénomène fréquent de singularité liée à une caustique interrompue par le sol dont la géométrie ne permet pas d'utiliser notre méthode.

La méthode, déjà validée dans le chapitre 3 par confrontation avec des solutions analytiques, l'est cette fois par comparaison avec l'approximation parabolique, dans le cas plus réaliste d'une source ponctuelle avec un profil météorologique stratifié verticalement avec vent horizontal, créant ainsi deux guides d'ondes strato- et thermo-sphériques. La validation intègre également un profil variant aussi dans la direction horizontale. La théorie des rayons étant singulière à la caustique et en son très proche voisinage, la mise en oeuvre de l'UTD (Théorie Uniforme de la Diffraction), nécessitant la connaissance des rayons réels et complexes permet de lever cette singularité et de parachever la méthode. Elle permet clairement de simuler le comportement physique du champ, les arrivées multiples dans certaines zones, les interférences entre celles-ci, la présence de caustiques et la diffraction dans les zones d'ombre. Les deux méthodes comparées (rayons et approximation parabolique) présentent toutefois des différences, principalement au niveau des positions des caustiques (quelques kilomètres), qui

s'expliquent par leurs approximations respectives, notamment l'une simulée avec une atmosphère advectionnée (rayons) et l'autre avec une vitesse du son effective (parabolique). En recalant celles-ci, les différences s'avèrent en revanche faibles au niveau de l'amplitude (moins de 2 dB d'écart). Dans les configurations étudiées, la principale limite de la méthode des rayons complexes s'avère alors être les phénomènes de rayons rampants, non encore décrits, notamment dans la zone d'ombre près de la source.

Afin d'appliquer la méthode à des profils atmosphériques issus de données réelles, nous avons mis en place une méthodologie (chapitre 5) permettant d'approcher ces données (vitesse du son et de vent) par diverses fonctions analytiques telles que les polynômes, les fonctions rationnelles et les fonctions gaussiennes. La principale difficulté d'un tel ajustement réside dans le choix du degré de précision, afin d'éviter un surajustement des données conduisant à des oscillations. La comparaison de différentes approches nous a permis de privilégier l'ajustement par polynômes par validation non-croisée.

La méthode de tracé de rayons est particulièrement adaptée à la propagation du bang sonique émis par l'entrée atmosphérique à vitesse hypersonique d'un météoroïde. En effet, le problème est alors essentiellement tri-dimensionnel, non linéaire avec une source mobile étendue et échappe aux autres méthodes de simulation. Afin d'appliquer la méthode, nous avons choisi le cas de référence de la météorite de Carancas (chapitre 5) car celle-ci n'a très probablement pas fragmenté avant son impact au sol. Selon la trajectoire proposée précédemment, le bang a alors généré deux arrivées à la station infrasonore I08BO du réseau de surveillance international, qui se situe en zone d'ombre pour ces deux arrivées. L'application en deux dimensions (par projection dans le plan vertical passant par la station dans la direction de détection de l'arrivée) en considérant une source cylindrique montre que les résultats géométriques obtenus en zone d'ombre sont en cohérence avec les données enregistrées à la station I08BO pour la seconde arrivée. Néanmoins, les signaux simulés (forme temporelle, spectre, amplitude) s'avèrent sous estimés par rapport aux observations. Ceci indique une caustique trop éloignée de la station, ce qui pourrait être expliqué par la projection bidimensionnelle, l'incertitude sur les données météorologiques ou sur la trajectoire. Une autre piste est un autre mécanisme de propagation comme la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère.

### 6.3 Perspectives

Pour une comparaison plus quantitative avec les résultats physiques, l'extension à trois dimensions paraît indispensable. La difficulté principale dans ce cas est la première étape de l'algorithme visant à la détermination géométrique des caustiques et des guides d'onde dans des configurations complexes.

Dans le cas spécifique de la météorite de Carancas, il serait utile d'intégrer la station I08BO et donc la prévision par rayons complexes en zone d'ombre dans le processus d'inversion de la trajectoire. Ceci permettrait de contraindre celle-ci afin de s'ajuster au mieux aux données infrasonores mesurées à cette station. Une étude de sensibilité aux différents facteurs influençant le champ (trajectoire et caractéristiques de la source, météorologie) serait également à mener.

Afin d'approcher au mieux la réalité physique, il apparaît important de prendre en compte les non-linéarités lors du calcul de l'amplitude. En plus de l'atténuation géométrique liée aux éléments géodésiques, il est nécessaire d'intégrer une équation de Burgers généralisée le long des rayons. Elle permet d'obtenir l'évolution de la forme d'onde en prenant en compte les effets faiblement non linéaires, et l'absorption atmosphérique. Une méthodologie pourrait être de conserver cette approche pour les rayons réels, et de la raccorder de façon linéaire dans les zones d'ombre.

Le cas de la météorite de Carancas présente une station en zone d'ombre proche du point d'impact ne nécessitant donc pas d'inclure la contribution des rayons complexes réfléchis. Il

serait néanmoins intéressant de les prendre en compte dans la méthode numérique développée.

Une autre perspective est la prise en compte des rayons rampants le long du sol et rayonnant dans la zone d'ombre. Ceci amènerait à la généralisation de la méthode incluant les effets de topographie, qui, comme le profil atmosphérique, doit être approchée par une fonction analytique afin d'être compatible avec la méthode des rayons complexes.

La méthode des rayons complexes pourrait être étendue aux rayons complexes rampants mais également à d'autres singularités. En particulier, nous avons observé que les ondes émises par une source ponctuelle au sol et réfractées dans la stratosphère forment un point de focalisation au sol réduite à un rayon. Ce point singulier induit un couplage avec les rayons rampants pouvant être observés à grande distance.

Enfin, la méthode des rayons complexes permet de réaliser un calcul rapidement en milieu relativement lisse pour une source tridimensionnelle. Elle peut être utilisée comme condition initiale d'autres méthodes de simulation tels que la sommation de modes ou l'approximation parabolique, ces dernières permettant de prendre en compte la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère.

## Annexe A

# Caustique cuspidée et rayons complexes

Les caustiques sont des surfaces d'amplification du champ acoustique. Selon la théorie des catastrophes (Thom, 1975), elles sont classées selon leur géométrie. Les deux plus simples sont la caustique *pli*, présentée dans le Chapitre 2 et la caustique *cuspidée*. Afin de lever la singularité aux caustiques nous avons introduit la diffraction qui est calculée à l'aide de la méthode des rayons complexes. Dans cet annexe nous présentons les rayons complexes associés à une caustique cuspidée.

Un front d'onde parabolique  $f(x) = x^2$  est considéré, afin d'obtenir une caustique cuspidée, illustrée sur la FIGURE A.1a. Cette forme de caustique se forme généralement en altitude, du au recourbement du front d'onde à cause de la réfraction des rayons par l'atmosphère. Ici nous considérons une atmosphère homogène, ainsi la caustique cuspidée est formée par la courbure du front seulement. La caustique cuspidée est caractérisée par un point de rebroussement et un front d'onde en forme de queue d'aronde. Le front d'onde est représenté en bleu à différents temps de propagation sur la FIGURE A.2.

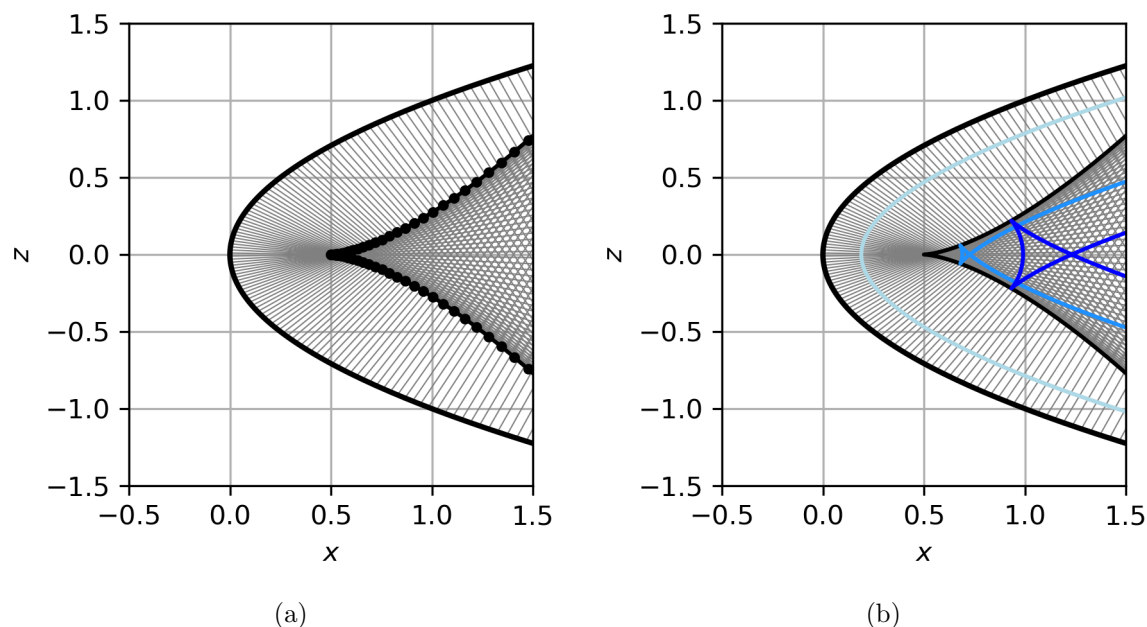


FIGURE A.1 – (a) Front d'onde parabolique (—) et rayons réels (---) formant une caustique cuspidée (●). (b) Fronts d'onde à différents instants de propagation.

Nous soulignons qu'on ne considère que le cas en deux dimensions. La caustique cuspidée forme deux zones d'ombre : une formée par la partie supérieure du front initial, l'autre par



la partie inférieure. En se plaçant en  $x = 1$  on peut distinguer trois zones

- entre  $z = -1$  et la première branche de la caustique en  $z = -0,25$  : c'est la zone d'ombre de la partie supérieure de la parabole et seulement les rayons de la partie inférieure y sont présents

- entre la deuxième branche de la caustique et  $z = 1$  : c'est la zone d'ombre de la partie inférieure de la parabole et seulement les rayons de la partie supérieure y sont présents

- l'intérieur de la cuspidée entre  $z = -0,25$  et  $z = 0,25$  où trois rayons arrivent.

L'objectif est donc de trouver tous les rayons arrivant à des récepteurs virtuels placés en  $x = 1$ . Pour cela nous considérons les équations des rayons (2.16) avec les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} \phi^2 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(\phi)^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ f'(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1b})$$

où  $\phi$  est la position d'émission verticale. Les équations des rayons sont alors :

$$x = \phi^2 - c_0 \frac{1}{\sqrt{1 + 4\phi^2}} \tau \quad (\text{A.2a})$$

$$z = \phi + c_0 \frac{2\phi}{\sqrt{1 + 4\phi^2}} \tau. \quad (\text{A.2b})$$

Par substitution on déduit les équations pour les paramètres  $\phi$  et  $\tau$  qui permettront l'arrivée aux récepteurs  $\mathbf{x}_r$  :

$$2\phi^3 + \phi(1 - 2x_r) - z_r = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\tau = \frac{(\phi^2 - x_r)}{c_0} \sqrt{1 + 4\phi^2}. \quad (\text{A.3b})$$

Pour les rayons réels (représentés en vert sur la FIGURE A.2a), ces solutions sont réelles. En revanche pour les rayons complexes (représentés en rouge), ces paramètres sont complexes. Ainsi la position d'émission des rayons complexes est complexe (voir FIGURE A.2b) et leur points d'arrivée aux récepteur est bien réel.

Par ailleurs, les coordonnées de la caustique cuspidée peuvent être obtenues à partir des relations paramétriques Coulouvrat (2000, Eq. (5)) ou directement à partir des équations des rayons en connaissant  $\tau_c$  (le paramètre curviligne à la caustique). Ce paramètre  $\tau_c$  est obtenu à partir du calcul de la section du tube de rayon qui s'annule à la caustique  $\nu = \mathbf{X}_\phi \wedge \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} = 0$ . Ainsi, avec la relation

$$\mathbf{X}_\phi = \begin{pmatrix} 2\phi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4\phi c_0}{(1 + 4\phi^2)^{3/2}} \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2\phi \end{pmatrix} + \frac{c_0}{\sqrt{1 + 4\phi^2}} \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\phi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\tau_c = -\frac{1}{2} c_0 (1 + 4\phi^2)^{3/2}, \quad (\text{A.5})$$

les coordonnées de la caustique représentées par des points noirs sur la FIGURE A.1a sont :

$$x_c = 3\phi^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{A.6a})$$

$$z_c = -4\phi^3. \quad (\text{A.6b})$$

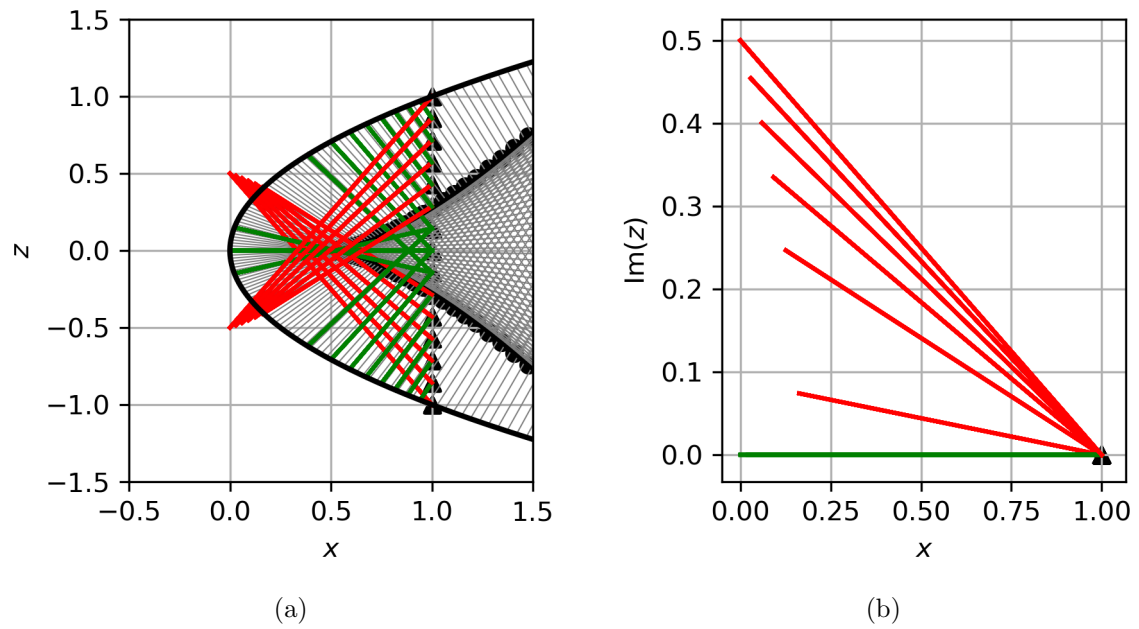


FIGURE A.2 – (a) La même que FIGURE A.1a avec les rayons propres réels (—) et complexes (—) arrivants aux récepteurs (▲) en  $x = 1$ . (b) Ces mêmes rayons propres dans le plan  $(\text{Im}(z), x)$ .



---

## Annexe B

# Éléments pour le développement asymptotique

Nous présentons dans cette annexe quelques éléments pour le développement asymptotique fait dans le chapitre 2. Nous donnons principalement les étapes du développement qui permet d'aboutir à l'équation de l'action de l'onde (5.14d) ainsi qu'à l'invariant de Blokhintzev.

### B.1 Développement asymptotique au 2ème ordre

Nous avons vu dans le chapitre 2 que l'analyse multi-échelle au deuxième ordre permet d'obtenir le système (2.35). Ce développement nous a conduit à la condition

$$B_1 + B_2 = 0,$$

où nous rappelons ces deux quantités :

$$B_1 = -\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho'_1 - \rho_0 \nabla \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \right) - \left( \frac{c_0}{\rho_0} \mathbf{n} \cdot \nabla \rho_0 + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right) \rho'_1, \quad (\text{B.1a})$$

$$B_2 = -\left( \frac{\rho_0}{c_0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) - \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla (c_0^2 \rho'_1)}{c_0} - \rho'_1 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla p_0}{\rho_0 c_0} \rho'_1. \quad (\text{B.1b})$$

La condition  $B_1 + B_2 = 0$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho'_1 + \left( \frac{\rho_0}{c_0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) + \rho_0 \nabla \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla (c_0^2 \rho'_1)}{c_0} \\ & + \rho'_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \rho'_1 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \cdot \nabla \rho_0 - \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla p_0}{\rho_0 c_0} \rho'_1 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où l'on peut réécrire les termes suivants :

$$\rho_0 \nabla \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \mathbf{n} \right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla (c_0^2 \rho'_1)}{c_0} = \frac{\rho_0}{c_0} c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) + c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \rho'_1 + \frac{\nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{n})}{c_0} \rho'_1. \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, en regroupant les termes de (B.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \rho'_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho'_1 + \left( \frac{\rho_0}{c_0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) + \frac{\rho_0}{c_0} c_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) \\ & + \rho'_1 \left( \frac{\nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{n})}{c_0} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + \left( \frac{c_0}{\rho_0} \right) \rho'_1 \mathbf{n} \cdot \left( \nabla \rho_0 - \frac{\nabla p_0}{c_0^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

D'après l'équation d'état du fluide non perturbé  $\nabla p_0 - c_0^2 \nabla \rho_0$  est proportionnel à  $\nabla s_0$  qui est d'un ordre inférieur d'après l'équation (2.6). Le dernier terme de (B.4) peut donc être négligé. En utilisant la dérivée particulière  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{w} \cdot \nabla$  et en multipliant par  $c_0/\rho_0$  on a :

$$\left(\frac{c_0}{\rho_0}\right) \frac{d\rho'_1}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1\right) + \rho'_1 \left(\frac{c_0}{\rho_0}\right) \left(\frac{\nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{n})}{c_0} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0\right) = 0. \quad (\text{B.5})$$

En utilisant la relation (B.15), nous retrouvons l'équation (2.40) :

$$\left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^{1/2} \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \rho'_1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{n})}{c_0} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0\right) \rho'_1 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Le terme de droite peut s'écrire en fonction de la vitesse de groupe  $\mathbf{w} = c_0 \mathbf{n} + \mathbf{v}_0$ , ainsi

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \rho'_1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} (\nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{w}) \rho'_1 = 0. \quad (\text{B.7})$$

En multipliant l'équation des rayons (2.21) par  $\mathbf{K}$  et en divisant par  $K^2$

$$\frac{1}{K} \frac{dK}{dt} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{w}. \quad (\text{B.8})$$

En utilisant les équation (B.17) et (B.18), l'équation (B.7) devient :

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{c_0}{K\rho_0}\right)^{1/2} \rho'_1\right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{c_0}{K\rho_0}\right)^{1/2} \rho'_1\right) \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (\text{B.9})$$

puis en utilisant la relation (B.18) et en factorisant par  $\frac{1}{2} \frac{1}{\rho'_1} \left(\frac{K\rho_0}{c_0}\right)^{1/2}$  :

$$\frac{d}{dt} A + A \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (\text{B.10})$$

qui correspond à l'équation de conservation de l'action de l'onde (2.41) avec

$$A = \frac{c_0 \rho_1'^2}{K \rho_0} = \frac{p_1'^2}{K c_0^3 \rho_0}, \quad (\text{B.11})$$

en remplaçant  $\rho'_1$  à partir de la relation de polarisation (2.37).

En suivant la démarche de Scott et al. (2017, Annexe C), en considérant un volume  $V(t)$  formé à tout instant  $t$  par les des rayons infiniment proches, se propageant à la vitesse de groupe  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ ,  $V(t)$ , le théorème de Reynolds permet d'écrire :

$$\frac{K}{\nu} \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu}{K}\right) = \nabla \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{B.12})$$

En injectant l'équation (B.12) :

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dt} A + \frac{K}{\nu} \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu}{K}\right) = 0, \quad (\text{B.13})$$

qui devient

$$\frac{d}{dt} \left(A \frac{\nu}{K}\right) = 0. \quad (\text{B.14})$$

Cette équation traduit le fait que le produit de l'action de l'onde  $A$  par le volume convecté  $\nu/K$  se conserve le long des rayons, où  $A \frac{\nu}{K}$  correspond à l'invariant de Blokhintzev (Blokhintzev, 1946).

## B.2 Relations utiles

Soit  $a$ , et  $b$  des constantes quelconques.

$$a \frac{db}{dt} + \frac{d}{dt}(ab) = 2a^{1/2} \frac{d}{dt}(a^{1/2}b) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{1}{ab} \frac{d}{dt}(ab) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} + \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d}{dt}(a^{1/2}) = \frac{1}{2a^{1/2}} \frac{da}{dt} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{1}{a^{1/2}} \frac{d}{dt}(a^{1/2}) = \frac{1}{2a} \frac{da}{dt} \quad (\text{B.18})$$



---

## Annexe C

# Théorie Uniforme de la Diffraction

Nous rappelons que la surpression acoustique le long d'un rayon suit la relation suivante (cf. chapitre 2) :

$$p'(\mathbf{X}(t_a), t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K \left( \frac{\rho_0 c_0^3}{|\nu|} \right)^{1/2} \tilde{u}(q) \times \exp[-i \operatorname{sgn}(q)\theta/2 - |q| \operatorname{Im}(\omega t_a) + iq \operatorname{Re}(\omega(t_a - t))] dq. \quad (\text{C.1})$$

L'objectif ici est de pouvoir, à partir des rayons arrivant au voisinage d'une caustique, obtenir le champ de pression (White et Pedersen, 1981). Dans la zone insonifiée il y a deux rayons arrivant au voisinage de la caustique, un rayon direct ( $f$ ) et un rayon lent ( $s$ ) ayant déjà tangentié la caustique (voir la FIGURE C.1, avec le point d'intérêt au voisinage de la caustique en bleu).

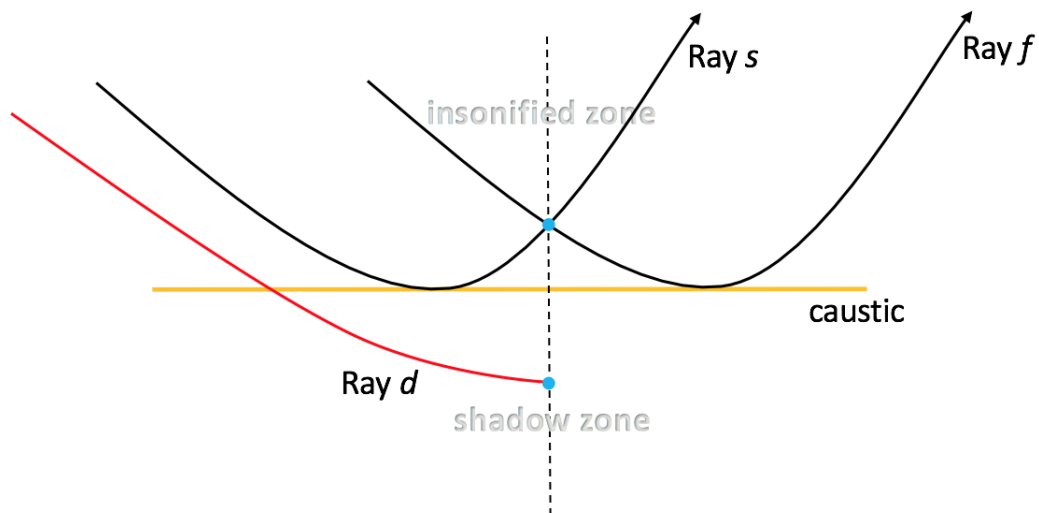


FIGURE C.1 – Schéma d'une caustique pliée avec deux arrivées dans la zone insonifiée ( $f$  et  $s$ ) et une arrivée diffractée ( $d$ ) dans la zone d'ombre.



## C.1 Théorie uniforme de la diffraction

### C.1.1 Solution des rayons au voisinage de la caustique

Proche d'une caustique pli, les rayons rapides fa et lents sl interfèrent. Ainsi la somme des contributions de leur surpression acoustique (C.1) est :

$$p'_c(\mathbf{x}_c, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} \exp[-i \operatorname{sgn}(q) \theta_{sl}/2 + iq \operatorname{Re}(\omega_{sl}(t_{sl} - t))] \\ + \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \exp[-i \operatorname{sgn}(q) \theta_{fa}/2 + iq \operatorname{Re}(\omega_{fa}(t_{fa} - t))] dq, \quad (\text{C.2})$$

avec

$$U_i(q) = K_i \tilde{u}_i(q) (\rho_{0i} c_{0i}^3)^{1/2}. \quad (\text{C.3})$$

En utilisant la relation (C.22), l'équation (C.2) est réécrite sous la forme :

$$p'_c(\mathbf{x}_c, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} + \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \right) \cos \left( -\operatorname{sgn}(q) \frac{\theta_{sl} - \theta_{fa}}{4} + q \frac{\omega_{sl} t_{sl} - \omega_{fa} t_{fa}}{2} - q \frac{\omega_{sl} - \omega_{fa}}{2} t \right) \right. \\ \left. + i \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} - \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \right) \sin \left( -\operatorname{sgn}(q) \frac{\theta_{sl} - \theta_{fa}}{4} + q \frac{\omega_{sl} t_{sl} - \omega_{fa} t_{fa}}{2} - q \frac{\omega_{sl} - \omega_{fa}}{2} t \right) \right] \\ \exp \left[ -i \operatorname{sgn}(q) \frac{\theta_{sl} + \theta_{fa}}{4} + iq \left( \frac{\omega_{fa} t_{fa} + \omega_{sl} t_{sl}}{2} - \frac{\omega_{fa} + \omega_{sl}}{2} t \right) \right] dq. \quad (\text{C.4})$$

En utilisant  $\theta_{sl} = \theta_{fa} + \pi$ , et en négligeant le dernier terme de droite dans les expressions il vient

$$\frac{\omega_{sl} t_{sl} - \omega_{fa} t_{fa}}{2} - \frac{\omega_{sl} - \omega_{fa}}{2} t = \frac{\omega_{sl} + \omega_{fa}}{2} \frac{t_{sl} - t_{fa}}{2} + \frac{\omega_{sl} - \omega_{fa}}{2} \left( \frac{t_{sl} + t_{fa}}{2} - t \right),$$

qui correspondent au produit de deux petits termes, et en simplifiant le paramètre  $\operatorname{sgn}(q)$  non nécessaire, nous obtenons :

$$p'_c(\mathbf{x}_c, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} + \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \right) \cos \left( |q| \tau - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. + i \operatorname{sgn}(q) \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} - \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \right) \sin \left( |q| \tau - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ \exp \left[ -i \operatorname{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{fa}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + iq \left( \frac{\omega_{fa} t_{fa} + \omega_{sl} t_{sl}}{2} - \frac{\omega_{fa} + \omega_{sl}}{2} t \right) \right] dq, \quad (\text{C.5})$$

avec  $\tau = \frac{\omega_{sl} + \omega_{fa}}{2} \frac{t_{sl} - t_{fa}}{2}$ .

### C.1.2 L'UTD dans la zone insonifiée

La solution de l'UTD dans la zone insonifiée est définie comme suit :

$$p'_c(\mathbf{x}_c, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda \operatorname{Ai}(\zeta) + i \operatorname{sgn}(q) \Lambda' \operatorname{Ai}'(\zeta)] \\ \exp \left[ -i \operatorname{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{fa}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + iq \left( \frac{\omega_{fa} t_{fa} + \omega_{sl} t_{sl}}{2} - \frac{\omega_{fa} + \omega_{sl}}{2} t \right) \right] dq, \quad (\text{C.6})$$

avec  $\zeta = -(\frac{3}{2}|q|\tau)^{2/3}$  et  $\tau = \frac{\omega_{sl} + \omega_{fa}}{4} (t_{sl} - t_{fa})$ . En utilisant les formulations asymptotiques de Ai (C.23) et Ai' (C.24), le raccord asymptotique avec la solution des rayons (C.5), donne

$$\Lambda = \pi^{1/2} \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{1/2}} + \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{1/2}} \right) (-\zeta)^{1/4}, \quad (\text{C.7})$$

et

$$\Lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{sl}}{|\nu_{sl}|^{\frac{1}{2}}} - \frac{U_{fa}}{|\nu_{fa}|^{\frac{1}{2}}} \right) (-\zeta)^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{C.8})$$

avec  $U_i(q) = K_i \tilde{u}_i(q) (\rho_{0i} c_{0i}^3)^{1/2}$ .

### C.1.3 L'UTD dans la zone d'ombre

Dans la zone d'ombre, seulement un rayon complexe diffracté  $d$  arrive. La solution uniforme est définie comme suit :

$$p'_c(\mathbf{x}_c, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda \text{Ai}(\zeta) + i \text{sgn}(q) \Lambda' \text{Ai}'(\zeta)] \exp \left[ -i \text{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{fa}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + iq \text{Re}(\omega(t_d - t)) \right] dq, \quad (\text{C.9})$$

avec  $\zeta = (\frac{3}{2}|q| \text{Im}(\omega t_d))^{2/3}$ .

$$\Lambda = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2U_d}{|\nu_d|^{\frac{1}{2}}} \cos \left( \frac{\theta_d - \theta_{fa}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) (\zeta)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{C.10})$$

et

$$\Lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2U_d}{|\nu_d|^{\frac{1}{2}}} \sin \left( \frac{\theta_d - \theta_{fa}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) (\zeta)^{-\frac{1}{4}}. \quad (\text{C.11})$$

$\theta_{fa}$  est l'angle de la section du tube de rayon  $\nu$  tel que défini dans le chapitre 2, pour le rayon réel rapide incident à la caustique et sa valeur est un multiple de  $\pi$ . Relativement proche de la caustique,  $\theta_{fa} = \theta_d - (\theta_d[\pi])$ . Loin de la caustique,  $\theta_{fa}$  devrait être évalué pendant l'optimisation des rayons complexes.

**Lien avec l'acoustique géométrique complexe dans la zone d'ombre** Le lien avec l'acoustique géométrique complexe est obtenue à longue distance en utilisant la relation  $\text{Ai}'(\zeta) \sim -\zeta^{\frac{1}{2}} \text{Ai}(\zeta)$  et par une combinaison des fonctions sinus et cosinus des équations (C.10) et (C.11) :

$$\begin{aligned} [\Lambda \text{Ai}(\zeta) + \Lambda' \text{Ai}'(\zeta)] \exp \left[ -i \text{sgn}(q) \left( \frac{\theta_{fa}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] &\sim \frac{U_d}{|\nu|^{\frac{1}{2}}} 2\pi^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} \text{Ai}(\zeta) \exp \left( -i \text{sgn}(q) \frac{\theta_d}{2} \right) \\ &\sim \frac{U_d}{|\nu|^{\frac{1}{2}}} \exp \left( -i \text{sgn}(q) \frac{\theta_d}{2} - |q| \text{Im}(\omega t_d) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

qui correspond à l'amplitude complexe.

### C.1.4 Continuité de l'UTD à la caustique

Dans la zone insonifiée, les limites au premier ordre, au voisinage de la caustique des coefficients  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ , sont :

$$\Lambda \sim \pi^{\frac{1}{2}} 2U \frac{(-\zeta)^{\frac{1}{4}}}{|\nu|^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.13})$$

et

$$\Lambda' \sim \pi^{\frac{1}{2}} U \frac{|\nu_{fa}|^{\frac{1}{2}} - |\nu_{sl}|^{\frac{1}{2}}}{|\nu|(-\zeta)^{\frac{1}{4}}}. \quad (\text{C.14})$$

Dans la zone d'ombre, au voisinage de la caustique,  $\theta_d \sim \theta_{\text{fa}} + \pi/2$ . Ainsi, les limites au premier ordre des coefficients  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont :

$$\Lambda = \pi^{\frac{1}{2}} 2U \frac{(\zeta)^{\frac{1}{4}}}{|\nu|^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.15})$$

et

$$\Lambda' = \pi^{\frac{1}{2}} U \frac{2}{|\nu|^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{\theta_d - \theta_{\text{fa}}}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{C.16})$$

Les équations (C.13) et (C.15), montrent que  $\Lambda$  est continu à la caustique en  $|\zeta|^{1/2}/\nu$ , qui est continu et non singulier. Pour  $\Lambda'$ , la limite des équations (C.14) et (C.16) doit être analysée.

Soit  $\sigma = t_a - t_c$ , avec  $t_c$  le temps à la caustique.  $\sigma < 0$  pour le rayon rapide et  $\sigma > 0$  pour le rayon lent. Dans la zone d'ombre, au voisinage de la caustique,  $\sigma = \pm i|\sigma|$ , où le choix du signe est discuté plus loin. Dans le voisinage de la caustique, le second ordre du volume convecté, le long d'un rayon  $\phi$  satisfait :

$$\nu(\sigma, \phi) \sim \nu_t \sigma + \frac{\nu_{tt}}{2} \sigma^2. \quad (\text{C.17})$$

Pour avoir une caustique en  $\sigma = 0$ , le signe de  $\nu_t$  doit satisfaire  $\arg(\nu_t) = \theta_{\text{fa}} + \pi$ , avec  $\theta_{\text{fa}}$  l'angle de  $\nu$  pour le rayon incident rapide. Cette relation implique que  $\nu_t e^{-i(\theta_{\text{fa}} + \pi)} = |\nu_t|$  est un nombre réel positif. La racine carrée de  $\nu$  dans la zone d'ombre est :

$$\nu^{1/2} \sim \nu_t^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\nu_{tt}}{4\nu_t} \sigma\right). \quad (\text{C.18})$$

Proche de la caustique, l'angle de  $\nu$  vérifie  $\theta_{\text{sl}} = \theta_{\text{fa}} + \pi$ , ainsi then  $\sigma_{\text{sl}} \sim -\sigma_{\text{fa}}$ , qui implique que

$$|\nu_{\text{fa}}|^{1/2} - |\nu_{\text{sl}}|^{1/2} \sim -\frac{\nu_{tt} |\nu_t|^{\frac{1}{2}}}{2\nu_t} |\sigma|^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{C.19})$$

Dans la zone d'ombre, l'angle de  $\nu$  vérifie  $\theta_d \sim \theta_{\text{fa}} + \frac{\pi}{2}$ , donc nous choisissons le signe  $\sigma_d \sim -i|\sigma_d|$ . Ainsi, la racine carrée de l'équation (C.17) est

$$\left(\nu_d e^{-i\theta_{\text{fa}}}\right)^{1/2} \sim |\nu_t|^{\frac{1}{2}} |\sigma_d|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1 - i \frac{\nu_{tt}}{4\nu_t} |\sigma_d|\right). \quad (\text{C.20})$$

Cette équation permet de montrer que :

$$2 \sin\left(\frac{\theta_d - \theta_{\text{fa}}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sim \frac{-1}{|\nu_d|^{\frac{1}{2}}} \frac{\nu_{tt} |\nu_t|^{\frac{1}{2}}}{2\nu_t} |\sigma_d|^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{C.21})$$

La substitution de l'équation (C.19) dans (C.14) et de l'équation (C.21) dans (C.16) montrent que le coefficient  $\Lambda'$  est continu à la caustique.

## C.2 Relations utiles

$$Ae^{ia} + Be^{ib} = \left((A+B) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + (A-B)i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\frac{a+b}{2}}. \quad (\text{C.22})$$

Expressions asymptotiques des fonctions Ai et Ai' :

$$\text{Ai}(\zeta \rightarrow -\infty) \sim = \frac{\cos\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}(-\zeta)^{\frac{1}{4}}}, \quad (\text{C.23})$$

$$\text{Ai}'(\zeta \rightarrow -\infty) \sim = \frac{(-\zeta)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{C.24})$$

$$\text{Ai}(\zeta \rightarrow +\infty) \sim \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{4}}}, \quad (\text{C.25})$$

$$\text{Ai}'(\zeta \rightarrow +\infty) \sim \frac{-\zeta^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{C.26})$$

$$\text{Ai}(\zeta = 0) = \left(3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^{-1}, \quad (\text{C.27})$$

$$\text{Ai}'(\zeta = 0) = \left(3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-1}, \quad (\text{C.28})$$

avec  $\Gamma$  la fonction Gamma.



# Liste des figures

1.1	Stations infrasonores du Système de Surveillance Internationale. . . . .	14
1.2	Sources d'infrasons . . . . .	15
1.3	Profil de température $T$ défini par l'équation (1.1) et profil de vitesse du son $c_0$ correspondant, calculés à partir de l'équation (1.2) ainsi que les différentes couches de l'atmosphère, séparés par la tropopause (—•—), la stratopause (—•—) et la mésopause (—•—). . . . .	18
1.4	(a) Profils de vitesse du vent zonal $v_{0_{OE}}$ et méridien $v_{0_{SN}}$ réassimilés pour le cas de la météorite de Carancas. (b) Profil de vitesse du vent $v_0$ sous forme de fonction Gaussienne calculé à partir de l'équation (1.4) avec le maximum de vitesse $v_w = 50$ m/s en $z_w = 60$ km. La largeur de la Gaussienne à mi-hauteur est $\sigma_w = 17,5$ km. . . . .	19
1.5	Masse volumique $\rho_0(z)$ définie par l'équation (1.7) pour une hauteur d'échelle constante $h = 8$ km et $\rho_0(0) = 1,33$ kg/m <sup>-3</sup> . . . . .	20
1.6	(a) Profil de vitesse du son effective $c_{eff}$ défini à partir des profils FIGURE 1.3 et FIGURE 1.4. (b) Tracé de rayons d'une source ponctuelle localisée en (0,0) avec un angle d'émission $\phi$ variant de 0 à 90°. Le code couleur indique la valeur de l'angle d'émission : bleu pour 0° et jaune pour 90°. . . . .	21
1.7	(a) Profil de vitesse du son $c_0$ de Lingeitch et al. (1999) sans vent. (b) Rayons correspondants lancés, directs (—) et réfractés (—) formant les arrivées thermosphériques $It_f$ et $It_s$ . . . . .	22
1.8	(a) Profil de vitesse du son $c_0$ de Lingeitch et al. (1999) avec prise en compte du vent sous forme de fonction Gaussienne représentées sur la FIGURE 1.4. (b) Rayons correspondants lancés, directs (rapides) (—) et ceux ayant tangencé une caustique (lents) (—) formant les arrivées stratosphériques $Is_f$ , $Is_s$ et thermosphériques $It_f$ , $It_s$ . . . . .	23
1.9	(a) Profil de vitesse du son $c_0$ de Lingeitch et al. (1999) avec prise en compte du vent sous forme de fonction Gaussienne représentées sur la FIGURE 1.4 et ajout d'un jet stream en $z = 10$ km. (b) Rayons correspondants lancés, directs (rapides) (—) et ceux ayant tangencé une caustiques (lents) (—) formant les arrivées troposphériques $Iw_f$ , $Iw_s$ stratosphériques $Is_f$ , $Is_s$ et thermosphériques $It_f$ , $It_s$ . . . . .	24
1.10	(a) Caustiques stratosphérique et thermosphérique indiquées en orange (—) du cas FIGURE 1.8. (b) Zoom sur la caustique stratosphérique. . . . .	26
1.11	(a) Onde en N d'amplitude 1 Pa et de 1 s de durée de phase positive et (b) sa transformée de Hilbert. . . . .	27
1.12	Zoom au niveau de la source de la FIGURE 1.8 et représentation de la propagation des rayons rampants le long du sol. . . . .	28
1.13	Cas de la FIGURE 1.8 : pertes par transmission (TL) par rapport au niveau à 1 m de la source en dB en niveau de couleurs avec un code parabolique WAPE. . . . .	32
2.1	Conditions initiales pour une onde plane paramétrée par les distances $\phi$ et $\psi$ . . . . .	44

2.2	Conditions initiales pour une source ponctuelle paramétrée par l'angle d'élévation $\phi$ et l'azimut $\psi$ . . . . .	45
2.3	Conditions initiales pour une source cylindrique paramétrée par la position d'émission $\phi$ et l'angle d'émission $\psi$ . . . . .	46
2.4	(a) Vitesse du son analytique $c_0(z) = \frac{1}{\sqrt{5-z}}$ avec un gradient positif qui implique (b) pour un cas de source ponctuelle au sol une caustique pli (points gris) formée par les rayons réels (—). L'ensemble des lignes en couleur représente la projection dans le plan réel d'un seul rayon complexe pénétrant en zone d'ombre. La courbe noire est la projection dans le plan réel du sous-rayon complexe atteignant le récepteur réel (point noir) dans la zone d'ombre . . . . .	49
2.5	(a) Cas identique à celui de la FIGURE 2.4 avec différents chemins d'intégration représenté sur la figure (b) dans le plan de $t$ . Voir le texte pour la définition précise des chemins d'intégration de différentes couleurs. . . . .	49
2.6	(a) Cas de la source ponctuelle de la FIGURE 2.4 avec en bleu le rayon réel pour un angle d'émission $\phi = 60^\circ$ , en rouge la solution réelle dans la zone d'ombre pour $\text{Re}(\phi) = 60^\circ$ et en noir quelques rayons complexes arrivant aux points réels de la courbe rouge. (b) Amplitudes le long des rayons bleu, noirs et rouge, où $ A $ représente la norme de la surpression acoustique totale $p'$ . . . . .	55
3.1	Géométrie du problème. . . . .	60
3.2	Profil de vitesse du son <i>bilinéaire</i> défini par l'équation (3.3) entre 0 et 17 km d'altitude, avec $b = 2,2 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ et $c_{\text{ref}} = 340 \text{ m/s}$ . . . . .	61
3.3	Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (—), émis par une onde plane en $z_s = 17 \text{ km}$ avec un angle d'émission $\alpha = -25^\circ$ , définis par les équations (3.4) et (3.5) et représentés dans le plan réel $(x, z)$ . Ces rayons arrivent aux récepteurs (▼) situés à la position horizontale $x = 100 \text{ km}$ et en altitude dans la zone illuminée au-dessus de la caustique. La réfraction forme une caustique (—) en $z_c = 5,98 \text{ km}$ . . . . .	63
3.4	Paramètres géométriques pour le cas de l'onde plane définie par les équations (3.1). (a) Positions d'émission $\phi$ (km) et (b) temps d'arrivées $t$ (s) pour les rayons directs (▼) et réfractés (▼) en fonction de l'altitude des récepteurs cités à la distance horizontale $x = 100 \text{ km}$ . La caustique (—) se situe en $z_c = 5,98 \text{ km}$ . . . . .	63
3.5	Altitude de la caustique $z_c$ définie par l'équation (3.8) en fonction de l'angle d'émission des rayons $\alpha$ . . . . .	64
3.6	Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (—), et rayons complexes directs (—) atteignant la position horizontale $x = 100 \text{ km}$ émis par une onde plane en $z_s = 17 \text{ km}$ avec un angle d'émission $\alpha = -25^\circ$ , définis par les équations (3.4) et (3.5) et projetés dans le plan réel $(\text{Re}(x), \text{Re}(z))$ . Les rayons réels arrivent aux récepteurs (▼) dans la zone illuminée et les rayons complexes arrivent aux récepteurs (▲) dans la zone d'ombre. La caustique (—) se situe à l'altitude $z_c = 5,98 \text{ km}$ . . . . .	65
3.7	Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes (—) que sur la FIGURE 3.6 projetés dans le plan $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(x))$ . . . . .	65
3.8	Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes (—) que sur la FIGURE 3.6 projetés dans le plan $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(z))$ . . . . .	66
3.9	Paramètres géométriques pour le cas de l'onde plane définie par les équations (3.1). (a) Parties imaginaires et parties réelles des positions d'émission $\phi$ (km) ainsi que (b) parties imaginaires et parties réelles des temps d'arrivées $t$ (s) pour les rayons réels directs (▼), réels réfractés (▼), complexes directs (▲) et complexes réfléchis (▲/ ▼) en fonction de l'altitude des récepteurs en $x = 100 \text{ km}$ . . . . .	67

3.10	Rayons propres réels, directs (—) et réfractés (—), ainsi que les rayons complexes directs (—) émis par une onde plane en $z_s = 17$ km avec un angle d'émission $\alpha = -25^\circ$ . Les rayons réels arrivent aux récepteurs (▼) dans la zone illuminée et les rayons complexes arrivent aux récepteurs (▲) dans la zone d'ombre. Les rayons complexes (—) se réfléchissent au sol en $z_g = 0$ . Les rayons sont représentés dans le plan réel $(x, z)$ . La caustique (—) se situe en $z_c = 5,98$ km. . . . .	68
3.11	Les rayons réels (—)/(—) et complexes (—)/(—) de la FIGURE 3.10 projetés dans le plan $(\text{Im}(x), \text{Re}(z))$ . . . . .	69
3.12	Les rayons réels (—)/(—) et complexes réfléchis (—) de la FIGURE 3.10 projetés dans le plan $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(x))$ . . . . .	69
3.13	Les mêmes rayons réels (—)/(—) et complexes réfléchis (—) que sur la FIGURE 3.10 projetés dans le plan $(\text{Re}(x), \text{Re}(z), \text{Im}(z))$ . . . . .	70
3.14	Section du tube de rayons $\nu$ aux récepteurs en $x = 100$ km (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires pour les rayons réels directs (▼), réels réfractés (▼), complexes directs (▲) et complexes réfléchis (▲/ ▼) en fonction de l'altitude des récepteurs. . . . .	73
3.15	Fonctions d'Airy de (a) première et (b) seconde espèce sous forme exacte $\text{Ai}/\text{Bi}$ et sous forme asymptotique $\tilde{\text{Ai}}/\tilde{\text{Bi}}$ . . . . .	76
3.16	Suppression acoustique totale $\tilde{p}'$ (Pa) pour une onde plane en $z_s = 17$ km avec un angle d'émission (a) $\alpha = -25^\circ$ et (b) $\alpha = -30^\circ$ en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire. La fréquence est égale à 0,1 Hz. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l'équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont présentées en fonction de l'altitude. . . .	78
3.17	Suppression acoustique $\tilde{p}'$ (Pa) pour une onde plane en $z_s = 17$ km avec un angle d'émission $\alpha = -30^\circ$ en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire (a) sans prendre en compte de la réflexion en $z_g = 0$ et (b) en ne considérant que les ondes réfléchies. La fréquence est égale à 0,1 Hz. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l'équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont présentées en fonction de l'altitude. . . .	79
3.18	Argument de la fonction d'Airy $\bar{z}_g$ en $z_g = 0$ pour différentes altitudes de la caustique $z_c$ et différentes fréquences avec la limite $\bar{z}_g = 2,54$ (—). Les points rouges correspondent aux angles $\alpha = -25^\circ$ et $\alpha = -30^\circ$ . . . . .	79
3.19	Formes d'ondes $p'$ (Pa) et spectres associés pour une onde en N émise en $z_s = 17$ km avec un angle d'émission $\alpha = -25^\circ$ en considérant le profil de vitesse du son bilinéaire. Les solutions obtenues par tracé de rayons complexes, la solution exacte de l'équation de Helmholtz et sa formulation asymptotique sont comparées en pour différentes altitudes de récepteurs dans la zone illuminée $z = 10, 6,7, 6$ km et dans la zone d'ombre $z = 3,4, 0$ km. . . . .	83
4.1	(a) Comparaison entre l'intégration analytique (—) et l'intégration numérique (—) pour un rayon complexe projeté dans le plan réel, arrivant en zone d'ombre située sous la caustique (—). (b) Erreurs absolues (m) entre les positions en $\text{Re}(z)$ en fonction de la partie réelle de $x$ le long du rayon, calculées à chaque pas d'intégration entre l'intégration analytique et l'intégration numérique, pour différentes tolérances de convergence $tol$ . . . . .	88
4.2	(a) Contours de la fonction coût $d$ , dans le plan $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d' une onde plane et d'un profil bilinéaire, défini dans le Chapitre 3. Optimisation d'un rayon à partir de paramètres réels (■) jusqu'à un récepteur dans la zone d'ombre (▲) avec les différentes itérations de l'optimisation (●). La caustique est indiquée en orange (★). (b) Erreur absolue en $z$ pour chaque itération de l'algorithme d'optimisation. . . . .	89



4.3	Comportement de $\tau$ et $z$ pour chaque itération de l'algorithme d'optimisation pour le cas de la FIGURE 4.2. . . . .	89
4.4	(a) Contours de la fonction coût $d$ dans le plan $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d'une onde plane et d'un profil bilinéaire défini dans le chapitre 3. Optimisation d'un rayon entre le point complexe (■), où une petite perturbation de la partie imaginaire a été ajoutée à $\tau$ , jusqu'à un récepteur dans la zone d'ombre (▲) avec les différentes itérations d'intégration (●). La caustique est indiquée en orange (★). (b) Erreur absolue en $z$ pour chaque itération de l'algorithme l'optimisation. . . . .	91
4.5	Comportement de $\tau$ et $z$ pour chaque itération du rayon intégré entre la source et le récepteur pour le cas de la FIGURE 4.4. . . . .	91
4.6	(a) Contours de la fonction coût $d$ dans le plan $(\text{Im}(\tau), \text{Re}(\tau))$ , pour le cas analytique d'une onde plane et d'un profil bilinéaire défini dans le chapitre 3. Optimisation d'un rayon entre le point complexe (■) et un récepteur dans la zone d'ombre (▲) suivant un chemin défini dans le plan $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ (b), qui permet de contourner la caustique. L'intégration se fait de proche en proche entre les points du chemin (●). La caustique est indiquée en orange (★). . . . .	92
4.7	(a) Profil de vitesse du son $c_0$ défini par une fonction rationnelle de polynômes (Lingevitch et al., 1999) et vitesse du son effective $c_{\text{eff}} = c_0 + v_0$ , avec le vent $v_0$ défini par une fonction Gaussienne (Blom, 2019). (b) Rayons correspondants lancés, directs (—) et réfractés (—) pour une source ponctuelle située en $(0,0)$ . Les caustiques sont indiquées en orange (—). . . . .	94
4.8	Paramètres géométriques $\phi$ et $t_a$ au sol $z_g = 0$ pour le cas de la source ponctuelle et du profil de vitesse du son $c_0$ représenté sur la FIGURE 4.8. . . . .	95
4.9	Paramètre $D_i$ (a) et sa valeur absolue (b) en fonction de $\phi$ . . . . .	95
4.10	Positions des caustiques en fonction du nombre de rayons lancés pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingevitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent. . . . .	96
4.11	Paramètre d'émission $\phi$ au lancer de rayons avec le même code couleur que les figures précédentes. En rouge : approximation de $\phi$ au niveau de la limite du guide d'onde à partir de l'équation (4.5). . . . .	97
4.12	Estimation initiale des paramètres $\phi$ et $t_a$ , pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingevitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent, en considérant des récepteurs au sol $z_g = 0$ . (□) : interpolation du lancer de rayons réels. (○) : extrapolation du lancer de rayons réels. (◐) : extrapolation en limite de guide d'onde. (△/▽) : extrapolation de rayons complexes en zone d'ombre de caustique stratosphérique (triangle vers le haut) et troposphérique (triangle vers le bas). . . . .	98
4.13	Paramètres géométriques $\phi$ et $t_a$ optimisés pour le cas de la source ponctuelle avec le profil de vitesse du son de Lingevitch et al. (1999) et une fonction Gaussienne pour le profil de vitesse de vent, en considérant des récepteurs au sol $z_g = 0$ . (●) : rayons réels directs. (●) : rayons réels ayant tangenté une caustique. (△/▽) : rayons complexes dans la zone d'ombre de la caustique stratosphérique (bleu) et thermosphérique (rouge). . . . .	99
4.14	Rayons propres optimisés, arrivant aux différents récepteurs ▲, obtenus par la méthode de tracé de rayons complexes, pour une source ponctuelle située à l'origine avec les profils de vitesse du son et de vent présentés sur la FIGURE 4.7. Rayons stratosphériques directs $Is_f$ (—), réfractés $Is_s$ (—) et complexes en zone d'ombre $Is_d$ (—). Rayons thermosphériques directs $It_f$ (—), réfractés $It_s$ (—) et complexes en zone d'ombre $It_d$ (—). Les rayons complexes sont projetés dans le plan $(\text{Re}(x), \text{Re}(z))$ . . . . .	101

4.15	Projection des rayons représentés sur la FIGURE 4.14 dans le plan $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ en fonction de la partie réelle de $c_0$ (a) et de $v_0$ (b). . . . .	101
4.16	Projection des rayons représentés sur la FIGURE 4.14 dans le plan $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ en fonction de la partie imaginaire de $c_0$ (a) et de $v_0$ (b). . . . .	102
4.17	(a) Exemple de trois chemins d'intégration dans le plan complexe de $t$ le long d'un rayon arrivant en zone d'ombre. (b) Exemple de quelques rayons pour chaque phase, intégrés suivant les mêmes chemins que sur la figure (a), avec les couleurs correspondantes. . . . .	103
4.18	Trajets dans le plan $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ des rayons de la FIGURE 4.17b, superposé à la partie imaginaire de la vitesse du son (en couleur). Le code couleur des rayons est le même que celui de la FIGURE 4.17 . . . . .	103
4.19	Valeurs réelles des paramètres géométriques aux récepteurs au sol $z_g = 0$ pour la source ponctuelle. (a) Temps réduit $t_{\text{red}} = t_a - x/c_{\text{ref}}$ avec $c_{\text{ref}} = 340$ m/s et (b) vitesse apparente $v_a$ (m/s). Les paramètres des rayons réels sont indiqués par $(\bullet)$ pour les arrivées rapides $Is_f/It_f$ , $(\circ)$ pour les arrivées lentes $Is_s/It_s$ et par $(\Delta)$ pour les arrivées complexes stratosphériques $Is_d$ et $(\nabla)$ pour les arrivées complexes thermosphériques $It_d$ . . . . .	105
4.20	Signatures $p'(t)$ (Pa) pour une source ponctuelle en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.7a. Les signatures sont représentées pour des récepteurs localisés autour des caustiques (a) stratosphérique ( $x_{cs} = 225,7$ km) et (b) thermosphérique ( $x_{ct} = 361,8$ km). Les temps d'arrivée réduits correspondants, pour les arrivées rapides $(\bullet)$ lentes $(\circ)$ et diffractées $(\Delta/\nabla)$ sont indiqués pour chaque signature. Le maximum de surpression $p_*$ est indiqué pour chaque arrivée avec la couleur correspondante. . . . .	107
4.21	Formes d'onde $p'$ (Pa) obtenues à partir des rayons et à partir de la UTD, localisées en $x = 225,72$ km, à 9 cm de la caustique stratosphérique. . . . .	107
4.22	(a) Vitesse du son effective $c_{\text{eff}} = c_0 + v_0$ pour différentes positions suivant $x$ , avec $c_0$ la vitesse du son définie par une fonction rationnelle de polynômes (Lingevitch et al., 1999) et le vent $v_0$ défini par une fonction Gaussienne (Blom, 2019) d'amplitude décroissant linéairement avec la position $x$ . (b) Rayons propres optimisés correspondants, obtenus par la méthode de tracé de rayons complexe, pour une source ponctuelle située en $(0,0)$ . Les arrivées réelles rapides $Is_f/It_f$ $(-)$ et lentes $Is_s/It_s$ $(-)$ ainsi que les arrivées diffractées $Is_d$ $(-)/ It_d$ $(-)$ , sont projetées dans le plan réel $(x,z)$ . . . . .	109
4.23	Signatures $p'$ (Pa) pour une onde définie par (4.8), émise par une source ponctuelle en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.22a. Les signatures sont représentées pour des récepteurs localisés autour des caustiques (a) stratosphérique ( $x_{cs} = 258,3$ km) et (b) thermosphérique ( $x_{ct} = 344,9$ km). Les temps d'arrivée réduits correspondants, pour les arrivées rapides $(\bullet)$ lentes $(\circ)$ et diffractées $(\Delta/\nabla)$ sont indiqués pour chaque signature. Le maximum de surpression $p_*$ est indiqué pour chaque arrivée avec la couleur correspondante. . . . .	109
4.24	Pertes par transmission (TL) au sol $z_g = 0$ pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil de vitesse du son de Lingevitch et al. (1999) et un vent défini par une fonction Gaussienne. Calculs : (1- en vert) avec les rayons complexes avec cette atmosphère advectée $(c_0, v_0)$ , (2- en rouge) avec la vitesse du son effective $c_{\text{eff}}$ , (3- en noir) avec l'approximation parabolique et la vitesse du son effective, (4- en tirets) en milieu homogène. . . . .	110

4.25	Pertes par transmission (TL) au sol $z_g = 0$ pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.7a. Différentes méthodes de calcul sont présentées avec les codes couleur et symboles correspondant aux figures précédentes. . . . .	111
4.26	Sections du tube de rayon $ \nu $ le long des rayons réels pour des angles d'émission $\phi$ variant entre 0 et $15^\circ$ . En noir sont représentés ceux pour les rayons rapides, en gris ceux pour les rayons lents. Les points correspondent à la position au sol.	113
4.27	Mêmes résultats que sur la FIGURE 4.25 avec zooms autour des caustiques (a) stratosphérique et (b) thermosphérique. . . . .	114
4.28	Les mêmes zooms que sur la FIGURE 4.27 en ne considérant que les solutions de la somme des rayons, de l'UTD et de l'approximation parabolique, recalées en distance et en amplitude. . . . .	114
4.29	Pertes par transmission (TL) au sol $z_g = 0$ pour une source ponctuelle de fréquence 1 Hz, en considérant le profil atmosphérique représenté sur la FIGURE 4.22a. Différentes méthodes de calcul sont présentées avec les codes couleur et symboles correspondant aux figures précédentes. . . . .	116
4.30	Mêmes résultats que sur la FIGURE 4.29 avec zooms autour des caustiques (a) stratosphérique et (b) thermosphérique. . . . .	116
4.31	Mêmes zooms que sur la FIGURE 4.30 en ne considérant que les solutions rayons, UTD et l'approximation parabolique, recalées en distance et en amplitude. . . . .	117
5.1	Photographie du cratère de la météorite de Carancas. L'image est extraite de (Tancredi et al., 2009). . . . .	120
5.2	Carte de la région de Carancas. La station I08BO est représentée par un triangle rouge et les stations sismiques (Le Pichon, Antier, Cansi, Hernandez, Minaya, Burgoa, Drob, Evers, et Vaubaillon, 2008) par des triangles verts. Le cratère, de coordonnées $16^\circ 39' 52''\text{S}$ , $69^\circ 02' 38''\text{W}$ est représenté par une étoile. Les traces au sol des différentes trajectoires de la littérature (B (Brown et al., 2008), Ls et Lf (Le Pichon et al., 2008) et N (Gainville et al., 2017)) sont représentées. Les azimuts des deux arrivées à I08BO sont représentés en pointillés rouges. L'image est extraite de (Henetton et al., 2014). . . . .	121
5.3	Signaux de pression (en Pa, station infrasonore I08BO, en haut) ou de déplacement vertical (en nm, stations sismiques BBOD, BBOE, BBOK) enregistrés lors de l'évènement de Carancas. La distance indiquée pour chaque station est celle au cratère. Sont représentés en couleur les temps d'arrivée des rayons émis le long de la trajectoire proposée par (Gainville et al., 2017) en fonction de leur altitude à la verticale de chaque station. Les couleurs de ces rayons correspondent aux couleurs repérant l'altitude du point d'émission le long de la trajectoire sur la FIGURE 5.5, du jaune clair au bleu foncé depuis la thermosphère jusqu'à la troposphère. Figure extraite de (Gainville et al., 2017, Fig 2). . . . .	122
5.4	Résultats PMCC pour les enregistrements à la station I08BO représentant l'azimut d'émission ainsi que la vitesse apparente horizontale, pour les deux signaux enregistrés à la station. Figure tirée de (Le Pichon et al., 2008) . . . .	123
5.5	Carte de la région de Carancas avec le cratère de la météorite (étoile), les stations sismiques (triangles verts) et la station infrasonore (triangle rouge). Le rectangle de couleur représente la projection horizontale de trajectoire et les points de couleur les points d'intersection de chaque rayon avec le sol. La couleur indique l'altitude d'émission des rayons le long de la trajectoire. Le plan de propagation d'intérêt est représenté en pointillés noirs. Figure inspirée de (Gainville et al., 2017, Fig 1). . . . .	126

5.6	Points d'intersection des rayons avec le plan vertical, parallèle à la trajectoire et passant par la station I08BO. Les rayons sont émis dans la stratosphère, pour un angle azimutal autour de la trajectoire $\psi$ variant de 0 à 180°. La couleur indique l'altitude d'émission et le rectangle noir au sol indique la position de la station. A droite : zoom sur la caustique au dessus de la station entre -68,45° et -68,44° . . . . .	126
5.7	(a) Identique à la FIGURE 5.6, mais les points sont colorés, sur fond gris foncé, par le nombre de caustiques tangentées (kmah) : noir pour kmah = 0 et gris clair pour kmah = 1. Le paramètre $\phi$ correspond à l'altitude d'émission et $\psi$ à l'angle azimutal autour de la trajectoire. . . . .	127
5.8	(a) Signature en surpression et (b) normalisée au point d'émission (environ $5R_0$ ) et au sol pour le rayon émis vers 54,3 km d'altitude et arrivant à la station BBOK pour la configuration de référence de la météorite de Carancas (Gainville et al., 2017). Notons que le doublement de l'amplitude due à la réflexion au sol n'est pas pris en compte contrairement à la figure 5(b) de Gainville et al. (2017). . . . .	129
5.9	Signature normalisée au point d'émission ( $\approx 5R_0$ ) et au-dessus de la station I08BO à 11 km d'altitude pour le rayon émis vers 36,2 km d'altitude pour la configuration de référence de la météorite de Carancas (Gainville et al., 2017).	130
5.10	Profils de la vitesse du son $c_0$ (à gauche), de sa dérivée première $\frac{dc_0}{dz}$ (au centre) et de sa dérivée seconde $\frac{d^2c_0}{dz^2}$ (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par une fonction rationnelle de la température (équations (5.6) et (1.2)). . . . .	132
5.11	Profils de la vitesse du son $c_0$ (à gauche), et de ses dérivées première $\frac{dc_0}{dz}$ (au centre) et seconde $\frac{d^2c_0}{dz^2}$ (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par les fonctions polynomiales $P^{1c_0}(z)$ (ordre 13) et $P^{2c_0}(z)$ (ordre 10) obtenues par deux méthodes : 1) ajout de données et 2) validation non-croisée. . . . .	134
5.12	Profil de vitesse de vent $u_0$ (à gauche) et de ses dérivées première $\frac{du_0}{dz}$ (au centre) et seconde $\frac{d^2u_0}{dz^2}$ (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par polynômes $P^{1u_0}$ , $P^{2u_0}$ ainsi que par une fonction somme de Gaussiennes définie par l'équation (5.8). . . . .	136
5.13	Profil de vitesse de vent $v_0$ (à gauche) et de ses dérivées première $\frac{dv_0}{dz}$ (au centre) et seconde $\frac{d^2v_0}{dz^2}$ (à droite) pour les données de l'événement Carancas, et leurs approximations par polynômes $P^{1v_0}$ , $P^{2v_0}$ ainsi que par une fonction somme de Gaussiennes définie par l'équation (5.8). . . . .	136
5.14	(a) Vitesse du son effective calculée par interpolation spline (Gainville et al., 2017) (●) et à partir de l'approximation analytique (—) pour l'azimut $\gamma = 90^\circ$ . (b) Rayons associés à la trajectoire de la météorite de Carancas dans la direction de la station BBOK calculés en 3D pour le profil atmosphérique interpolé par splines ((Gainville et al., 2017, Figure 1)), et par fonction analytique (d). (c) Temps réduits d'arrivée au sol pour le cas splines en couleurs et en gris pour l'ajustement. . . . .	138
5.15	Valeur absolue, argument, partie réelle et partie imaginaire de la fonction Gaussienne définie par l'équation (5.8) pour $z_m = 0$ , dans le plan $(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$ . . . . .	139
5.16	Carte de la région de Carancas similaire à celle de la FIGURE 5.5, en utilisant le profil atmosphérique ajusté par les polynômes $P^{2c_0}(z)$ , $P^{1u_0}$ et $P^{1v_0}$ . . . . .	141

5.17	(a) Polynôme $P^{2c_0}(z)$ représentant la vitesse du son $c_0$ . (b) Polynômes $P^{1u_0}(z)$ et $P^{1v_0}(z)$ représentant la composante zonale $u_0$ et azimutale $v_0$ du vent. (c) Lancer de rayons associé aux profils (a) et (b) dans la direction telle que $\gamma = 34,7^\circ$ avec la trajectoire projetée dans le plan présenté sur la FIGURE 5.5, ainsi que les rayons rapides (—) et lents (—) passant par les points d'intersection $\blacktriangle$ avec le plan $x = 80$ km. . . . .	143
5.18	Paramètres initiaux de l'optimisation pour le cas de l'onde cylindrique, obtenu par la méthode des rayons complexes, à partir du lancer de rayons de la FIGURE 5.17, avec les paramètres réels $\square$ , $\circ$ , et complexes $\triangle$ . Les solutions optimisées de ces mêmes paramètres (—) sont superposées. . . . .	144
5.19	Rayons propres rapides (—), lents (—), et complexes (—), arrivant aux récepteurs dans le plan $x = 80$ km, associés aux paramètres optimisés FIGURE 5.18.	144
5.20	Vitesses apparentes aux récepteurs dans le plan en $x = 80$ km, en fonction de l'altitude. Les couleurs correspondent aux rayons de la FIGURE 5.19. . . . .	145
5.21	(a) Signatures aux récepteurs localisés autour de la caustique en $z = 8,72$ km entre 0 et 16 km d'altitude, avec leurs temps d'arrivée. Les amplitudes sont normalisées. (b) Amplitudes correspondantes. (c) Fréquences centrales correspondantes. Les couleurs correspondent aux rayons de la FIGURE 5.19. . . . .	146
5.22	(a) Signature et (b) son spectre au dessus de la caustique, en $z = 10$ km. . . . .	147
5.23	(a) Signature et (b) son spectre au sol, en $z = 4$ km. . . . .	147
5.24	(a) Rayons émis entre 4 et 40 km d'altitude dans le cas d'une source cylindrique faisant un angle $\alpha = 5^\circ$ avec la verticale dans le plan de propagation. Le plan des récepteurs $\blacktriangle$ se situe en $x = 185$ km. Rayons ayant tangenté trois ((—)) deux ((—)) ou une ((—)) caustique(s) avant d'atteindre les récepteurs. Le sol est à 4 km d'altitude. Les différentes zones d'ombre sont notées A,B,C,D et E (voir texte). (b) Altitude d'émission $\text{Re}(\phi)$ suivant l'altitude $z$ d'observation dans le plan $x = 185$ km. Les couleurs correspondent aux rayons de la figure (a).	150
5.25	Paramètres initiaux de l'optimisation pour le cas de l'onde cylindrique associés au lancer de rayons de la FIGURE 5.24, obtenus par la méthode décrite dans le chapitre 4 avec les paramètres réels $\square$ , $\circ$ , et complexes $\triangle$ . Les solutions optimisées de ces mêmes paramètres (—) sont superposées. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d'ombre de la FIGURE 5.24. . . . .	151
5.26	Rayons propres réels (—)/(—) et complexes (—) optimisés pour le cas en FIGURE 5.24. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les rayons associés aux zones d'ombre de la FIGURE 5.24. . . . .	151
5.27	Angle de la section du tube de rayon $\nu =  \nu  \exp(i\theta)$ pour les rayons réels (en noir et en gris) et les rayons complexes (en rouge) de la FIGURE 5.26, le long des rayons (a) et aux récepteurs (b). Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d'ombre de la FIGURE 5.24. . . . .	152
5.28	(a) Signatures aux récepteurs dans le plan $x = 185$ km avec leur temps d'arrivée et (b) les amplitudes correspondantes. Les lettres A,B,C,D et E indiquent les paramètres associés aux zones d'ombre de la FIGURE 5.24. . . . .	153
A.1	(a) Front d'onde parabolique (—) et rayons réels (—) formant une caustique cuspidée ( $\bullet$ ). (b) Fronts d'onde à différents instants de propagation. . . . .	159
A.2	(a) La même que FIGURE A.1a avec les rayons propres réels (—) et complexes (—) arrivants aux récepteurs ( $\blacktriangle$ ) en $x = 1$ . (b) Ces mêmes rayons propres dans le plan $(\text{Im}(z), x)$ . . . . .	161
C.1	Schéma d'une caustique pli avec deux arrivées dans la zone insonifiée ( $f$ et $s$ ) et une arrivée diffractée ( $d$ ) dans la zone d'ombre. . . . .	167

---

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres de numérateur $N_i$ et dénominateur $D_i$ obtenus par Lingeitch et al. (1999) pour une approximation des données de vitesse de son. . . . .	17
5.1	Caractéristiques des signaux enregistrés aux stations associés à l'événement de Carancas (Le Pichon et al., 2008; Henneton, 2013; Gainville et al., 2017). . .	121
5.2	Paramètres optimisés de la fonction rationnelle (5.6) obtenus à partir des paramètres du tableau 1.1, pour une approximation des données de vitesse de son du cas Carancas. . . . .	132
5.3	Paramètres optimisés $A_k$ ( $m^{-(k-1)}.s^{-k}$ ) des polynômes $P^{1c_0}$ et $P^{2c_0}$ définis par l'équation (5.7), obtenus par ajout de données (1) et par validation non croisée (2), pour une approximation des données de vitesse de son du cas Carancas. .	133
5.4	Paramètres optimisés $A_k$ ( $m^{-(k-1)}.s^{-k}$ ) des polynômes $P^{1u_0}$ , $P^{1v_0}$ , $P^{2u_0}$ et $P^{2v_0}$ définis par l'équation (5.7), obtenus par ajout de données (1) et par validation non croisée (2), pour une approximation des données de vitesse de vent du cas Carancas. . . . .	135
5.5	Paramètres de la somme de Gaussiennes (5.8) optimisés sur les données du vent associées au cas de Carancas pour la composante zonale $u_0$ et méridienne $v_0$ . . . . .	136
5.6	Comparaison entre les données à la station I08BO pour la seconde arrivée et les résultats obtenus pour le cas simplifié en deux dimensions. . . . .	148



---

# Bibliographie

- G. B. Airy et al. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 6 :379, 1838. [25](#)
- D. Amodei, H. Keers, D. Vasco, et L. Johnson. Computation of uniform wave forms using complex rays. Physical Review E, 73(3) :036704, 2006. [34](#), [87](#), [102](#), [117](#), [131](#)
- J. Assink, R. Waxler, et D. Velea. A wide-angle high mach number modal expansion for infrasound propagation. The Journal of the Acoustical Society of America, 141(3) :1781–1792, 2017. [32](#)
- U. S. Atmosphere. Washington. DC : US Government Printing Office, 109, 1976. [17](#)
- T. Auger et F. Coulouvrat. Numerical simulation of sonic boom focusing. AIAA journal, 40 (9) :1726–1734, 2002. [26](#), [33](#)
- M. Aver'yanov, P. Blanc-Benon, R. O. Cleveland, et V. Khokhlova. Nonlinear and diffraction effects in propagation of n-waves in randomly inhomogeneous moving media. The Journal of the Acoustical Society of America, 129(4) :1760–1772, 2011. [24](#)
- M. Aver'yanov, V. Khokhlova, O. Sapozhnikov, P. Blanc-Benon, et R. Cleveland. Parabolic equation for nonlinear acoustic wave propagation in inhomogeneous moving media. Acoustical Physics, 52(6) :623–632, 2006. [31](#)
- V. M. Babich et V. S. Buldyrev. Short-wavelength diffraction theory : asymptotic methods. Springer-Verlag, 1991. [78](#)
- M. Baudoin, F. Coulouvrat, et J.-L. Thomas. Sound, infrasound, and sonic boom absorption by atmospheric clouds. The Journal of the Acoustical Society of America, 130(3) :1142–1153, 2011. [28](#), [29](#)
- P. Berczyński, K. Y. Bliokh, Y. A. Kravtsov, et A. Stateczny. Diffraction of a Gaussian beam in a three-dimensional smoothly inhomogeneous medium : an eikonal-based complex geometrical-optics approach. The Journal of Optical Society of America, 23(6) :1442–1451, 2006. [34](#), [37](#)
- P. Berczyński, Y. A. Kravtsov, et G. Żeglinski. Gaussian beam diffraction in inhomogeneous and nonlinear media : analytical and numerical solutions by complex geometrical optics. Central European Journal of Physics, 6(3) :603–611, 2008. [34](#), [37](#), [131](#)
- J. Berland, C. Bogey, O. Marsden, et C. Bailly. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. Journal of Computational Physics, 224(2) :637–662, 2007. [30](#)
- A. Berry et G. Daigle. Controlled experiments of the diffraction of sound by a curved surface. The Journal of the Acoustical Society of America, 83(6) :2047–2058, 1988. [27](#)
- M. Berry. An introduction to catastrophe theory. Physics Bulletin, 32(3) :84, 1981. [25](#)



- M. Bertin, C. Millet, et D. Bouche. A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 136(1) :37–52, 2014. [32](#)
- D. T. Blackstock. Generalized Burgers equation for plane waves. The Journal of the Acoustical Society of America, 77(6) :2050–2053, 1985. [29](#)
- P. Blanc-Benon, L. Dallois, et D. Juvé. Long range sound propagation in a turbulent atmosphere within the parabolic approximation. Acta Acustica united with Acustica, 87(6) : 659–669, 2001. [31](#)
- E. M. Blixt, S. P. Näsholm, S. J. Gibbons, L. G. Evers, A. J. Charlton-Perez, Y. J. Orsolini, et T. Kværna. Estimating tropospheric and stratospheric winds using infrasound from explosions. The Journal of the Acoustical Society of America, 146(2) :973–982, 2019. [14](#)
- D. Blokhintsev. Acoustics of a non-homogeneous moving medium, gostekhzdat. English translation : NACA Technical Memorandum., (1399), 1956. [33](#)
- D. Blokhintzev. The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium I. The Journal of the Acoustical Society of America, 18(2) :322–328, 1946. [51](#), [164](#)
- P. Blom. Modeling infrasonic propagation through a spherical atmospheric layer - Analysis of the stratospheric pair. The Journal of the Acoustical Society of America, 145(4) :2198–2208, 2019. doi : 10.1121/1.5096855. [19](#), [33](#), [85](#), [86](#), [87](#), [94](#), [100](#), [106](#), [109](#), [113](#), [176](#), [177](#)
- P. Blom et R. Waxler. Modeling and observations of an elevated, moving infrasonic source : Eigenray methods. The Journal of the Acoustical Society of America, 141(4) :2681–2692, 2017. [33](#)
- R. Blumrich et D. Heimann. A linearized eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects. The Journal of the Acoustical Society of America, 112(2) : 446–455, 2002. [30](#)
- R. Blumrich, F. Coulouvrat, et D. Heimann. Meteorologically induced variability of sonic-boom characteristics of supersonic aircraft in cruising flight. The Journal of the Acoustical Society of America, 118(2) :707–722, 2005. [29](#)
- C. Bogey, N. De Cacqueray, et C. Bailly. A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations. Journal of Computational Physics, 228(5) :1447–1465, 2009. [30](#)
- J. Borovicka et P. Spurný. The Carancas meteorite impact - Encounter with a monolithic meteoroid. Astronomie and Astrophysics, 485(2) :L1–L4, 2008. doi : 10.1051/0004-6361:200809905. [119](#)
- L. M. Brekhovskikh et O. A. Godin. Acoustics of layered media II : Point sources and bounded beams, volume 10. Springer Science & Business Media, 2013. [32](#)
- Q. Brissaud, R. Martin, R. F. Garcia, et D. Komatitsch. Finite-difference numerical modelling of gravitoacoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere. Geophysical Journal International, 206(1) :308–327, 2016. [30](#)
- E. Britannica. Online academic edition, 2012. [13](#)
- D. J. Brown et M. A. Garcés. Ray tracing in an inhomogeneous atmosphere with winds. In Handbook of Signal Processing in Acoustics, pages 1437–1460. Springer, 2008. [87](#)

- P. Brown, D. ReVelle, E. Silber, W. Edwards, S. Arrowsmith, L. Jackson Jr, G. Tancredi, et D. Eaton. Analysis of a crater-forming meteorite impact in peru. Journal of Geophysical Research : Planets, 113(E9), 2008. [16](#), [119](#), [120](#), [121](#), [124](#), [178](#)
- P. Campus et D. Christie. Worldwide observations of infrasonic waves. In Infrasound monitoring for atmospheric studies, pages 185–234. Springer, 2010. [13](#), [14](#)
- S. Candel. Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics. Journal of Fluid Mechanics, 83(3) :465–493, 1977. [33](#), [42](#)
- Y. Cansi. An automatic seismic event processing for detection and location : The PMCC method. Geophysical research letters, 22(9) :1021–1024, 1995. [123](#)
- L. Ceranna, A. Le Pichon, D. Green, et P. Mialle. The buncefield explosion : a benchmark for infrasound analysis across central europe. Geophysical Journal International, 177(2) : 491–508, 2009. doi : 10.1111/j.1365-246X.2008.03998.x. [15](#), [33](#), [100](#)
- V. Červený. Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. Geophysical Journal International, 29(1) :1–13, 1972. [33](#)
- C. Chapman. Fundamentals of seismic wave propagation. Cambridge university press, 2004. [94](#), [97](#), [102](#)
- S. Chapman, J. Lawry, J. Ockendon, et V. Saward. Edge diffraction of complex rays. Wave Motion, 33(1) :41–49, 2001. [34](#), [37](#)
- S. J. Chapman, J. M. H. Lawry, J. R. Ockendon, et R. H. Tew. On the theory of complex rays. SIAM Review, 41(3) :417–509, 1999. doi : 10.1137/S0036144599352058. [14](#), [34](#), [37](#), [38](#), [41](#), [118](#)
- S. Choudhary et L. Felsen. Asymptotic theory for inhomogeneous waves. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 21(6) :827–842, 1973. doi : 10.1109/TAP.1973.1140598. [38](#), [118](#)
- I. Chunchuzov, S. Kulichkov, O. Popov, R. Waxler, et J. Assink. Infrasound scattering from atmospheric anisotropic inhomogeneities. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 47(5) :540–557, 2011. [27](#), [31](#)
- I. Chunchuzov, S. Kulichkov, et P. Firstov. On acoustic N-wave reflections from atmospheric layered inhomogeneities. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 49(3) :258–270, 2013. [27](#)
- I. Chunchuzov, S. Kulichkov, O. Popov, et M. Hedlin. Modeling propagation of infrasound signals observed by a dense seismic network. The Journal of the Acoustical Society of America, 135(1) :38–48, 2014. [27](#)
- I. Chunchuzov, S. Kulichkov, O. Popov, V. Perepelkin, A. Vasil'ev, A. Glushkov, et P. Firstov. Characteristics of a fine vertical wind-field structure in the stratosphere and lower thermosphere according to infrasonic signals in the zone of acoustic shadow. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 51(1) :57–74, 2015. [27](#)
- J. F. Claerbout. Fundamentals of geophysical data processing, volume 274. 1976. [31](#)
- R. O. Cleveland, M. F. Hamilton, et D. T. Blackstock. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids. The Journal of the Acoustical Society of America, 99(6) :3312–3318, 1996. [29](#), [33](#)

- A. Colaïtis, J. P. Palastro, R. K. Follett, I. V. Igumenshev, et V. Goncharov. Real and complex valued geometrical optics inverse ray-tracing for inline field calculations. Physics of Plasmas, 26(3) :032301, 2019. doi : 10.1063/1.5082951. [34](#), [37](#)
- M. D. Collins. A split-step Padé solution for the parabolic equation method. The Journal of the Acoustical Society of America, 93(4) :1736–1742, 1993. [110](#)
- H. C. Connolly Jr, C. Smith, G. Benedix, L. Folco, K. Richter, J. Zipfel, A. Yamaguchi, et H. C. Aoudjehane. The meteoritical bulletin, no. 93, 2008 march. Meteoritics & Planetary Science, 43(3) :571–632, 2008. [120](#)
- B. Cotté. Coupling of an aeroacoustic model and a parabolic equation code for long range wind turbine noise propagation. Journal of Sound and Vibration, 422 :343–357, 2018. [31](#)
- F. Coulouvrat. Théorie géométrique non linéaire de la diffraction en zone d’ombre. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 325(2) :69–75, 1997. [74](#), [125](#)
- F. Coulouvrat. Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp. Wave Motion, 32 (3) :233–245, 2000. [26](#), [160](#)
- F. Coulouvrat. Sonic boom in the shadow zone : A geometrical theory of diffraction. The Journal of the Acoustical Society of America, 111(1) :499–508, 2002. [27](#), [46](#), [125](#)
- F. Coulouvrat. Sources and propagation of atmospherical acoustic shock waves. In AIP Conference Proceedings, volume 1474, pages 19–28. American Institute of Physics, 2012. [29](#)
- R. Courant et D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics : Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, 2008. [42](#)
- G. Daigle, T. Embleton, et J. Piercy. Propagation of sound in the presence of gradients and turbulence near the ground. The Journal of the Acoustical Society of America, 79(3) : 613–627, 1986. [27](#), [28](#)
- L. Dallois et P. Blanc-Benon. A wide-angle parabolic equation for acoustic waves in inhomogeneous moving media : Applications to atmospheric sound propagation. Journal of Computational Acoustics, 09 :477–494, 2001. [31](#)
- C. de Groot-Hedlin. Finite-difference time-domain synthesis of infrasound propagation through an absorbing atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 124(3) :1430–1441, 2008. [28](#), [30](#)
- C. de Groot-Hedlin. Long-range propagation of nonlinear infrasound waves through an absorbing atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 139(4) :1565–1577, 2016. [30](#)
- C. de Groot-Hedlin, M. A. Hedlin, et K. Walker. Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere : application to a bolide explosion detected by seismic networks. Geophysical Journal International, 185(1) :305–320, 2011. [29](#), [30](#)
- C. D. de Groot-Hedlin. Infrasound propagation in tropospheric ducts and acoustic shadow zones. The Journal of the Acoustical Society of America, 142(4) :1816–1827, 2017. [29](#), [30](#)
- C. D. de Groot-Hedlin, M. A. Hedlin, et D. P. Drob. Atmospheric variability and infrasound monitoring. In Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies, pages 475–507. Springer, 2010. [14](#), [24](#)

- S. Del Pino, B. Després, P. Havé, H. Jourden, et P. Piserchia. 3d finite volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere. Computers & Fluids, 38(4) :765–777, 2009. [30](#)
- D. Dragna. Modélisation par une approche temporelle de la propagation acoustique en milieu extérieur : traitement de frontières complexes et validation sur site ferroviaire. PhD thesis, École centrale de Lyon, 2011. [110](#)
- D. P. Drob, J. Picone, et M. Garcés. Global morphology of infrasound propagation. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 108(D21), 2003. [21](#), [23](#), [87](#)
- Y. V. Drobzheva et V. Krasnov. The acoustic field in the atmosphere and ionosphere caused by a point explosion on the ground. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 65(3) :369–377, 2003. [29](#)
- W. N. Edwards. Meteor generated infrasound : Theory and observation. Infrasound monitoring for atmospheric studies, pages 361–414, 2010. [28](#), [33](#)
- R. A. Egorchenkov et Y. A. Kravtsov. Complex ray-tracing algorithms with application to optical problems. Journal of the Optical Society of America A, 18(3) :650–656, Mar 2001. doi : 10.1364/JOSAA.18.000650. [14](#), [34](#), [38](#), [48](#), [87](#), [102](#), [117](#), [131](#)
- A. Emmanuelli, D. Dragna, S. Ollivier, et P. Blanc-Benon. Characterization of topographic effects on sonic boom reflection by resolution of the Euler equations. The Journal of the Acoustical Society of America, 149(4) :2437–2450, 2021. [29](#)
- T. Ens, P. Brown, W. Edwards, et E. Silber. Infrasound production by bolides : A global statistical study. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 80 :208–229, 2012. [32](#)
- E. Esclangon. L’acoustique des canons et des projectiles. Imprimerie nationale, 1925. [32](#)
- L. Evans, H. Bass, et L. Sutherland. Atmospheric absorption of sound : Theoretical predictions. The Journal of the Acoustical Society of America, 51(5B) :1565–1575, 1972. [28](#)
- L. Evers, A. Van Geyt, P. Smets, et J. Fricke. Anomalous infrasound propagation in a hot stratosphere and the existence of extremely small shadow zones. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 117(D6), 2012. [14](#)
- T. Farges, P. Hupe, A. Le Pichon, L. Ceranna, C. Listowski, et A. Diawara. Infrasound thunder detections across 15 years over ivory coast : Localization, propagation, and link with the stratospheric semi-annual oscillation. Atmosphere, 12(9) :1188, 2021. [14](#)
- V. Farra. Ray perturbation theory for heterogeneous hexagonal anisotropic media. Geophysical Journal International, 99(3) :723–737, 1989. [33](#)
- V. Farra. Amplitude computation in heterogeneous media by ray perturbation theory : a finite element approach. Geophysical Journal International, 103(2) :341–354, 1990. [33](#)
- V. Farra, J. Virieux, et R. Madariaga. Ray perturbation theory for interfaces. Geophysical Journal International, 99(2) :377–390, 1989. [33](#)
- D. Fee et M. Garcés. Infrasonic tremor in the diffraction zone. Geophysical Research Letters, 34(16), 2007. [24](#)
- L. Felsen. Geometrical theory of diffraction, evanescent waves, complex rays and Gaussian beams. Geophysical Journal International, 79(1) :77–88, 1984. [34](#), [37](#), [47](#)

- R. Fernando, Y. Druon, F. Coulouvrat, et R. Marchiano. Nonlinear waves and shocks in a rigid acoustical guide. The Journal of the Acoustical Society of America, 129(2) :604–615, 2011. [32](#)
- O. Gainville. Modélisation de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores par une méthode de tracé de rayons non linéaires. PhD thesis, École centrale de Lyon, mai 2008. Num. 2008-07. [29](#), [33](#), [37](#), [85](#), [111](#), [131](#)
- O. Gainville, P.-F. Piserchia, P. Blanc-Benon, et J. Scott. Ray tracing for long range atmospheric propagation of infrasound. In 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, number 2006-2451 in AIAA Paper, Cambridge, Massachusetts, 8-10th May 2006. doi : 10.2514/6.2006-2451. [29](#), [57](#), [87](#)
- O. Gainville, P. Blanc-Benon, E. Blanc, R. Roche, C. Millet, F. Le Piver, B. Despres, et P.-F. Piserchia. Misty picture : a unique experiment for the interpretation of the infrasound propagation from large explosive sources. In Infrasound monitoring for atmospheric studies, pages 575–598. Springer, 2010. [15](#), [31](#)
- O. Gainville, P. Blanc-Benon, et J. Scott. Infrasound propagation in realistic atmosphere using nonlinear ray theory. In AIP Conference Proceedings, volume 1474, pages 343–346. American Institute of Physics, 2012. [113](#)
- O. Gainville, M. Henneton, et F. Coulouvrat. A re-analysis of Carancas meteorite seismic and infrasound data based on sonic boom hypothesis. Geophysical Journal International, 209(3) :1913–1923, 03 2017. ISSN 0956-540X. doi : 10.1093/gji/ggx122. [14](#), [16](#), [29](#), [33](#), [54](#), [85](#), [119](#), [120](#), [121](#), [122](#), [124](#), [126](#), [128](#), [129](#), [130](#), [137](#), [138](#), [140](#), [142](#), [148](#), [178](#), [181](#)
- L.-J. Gallin, M. Rénier, É. Gaudard, T. Farges, R. Marchiano, et F. Coulouvrat. One-way approximation for the simulation of weak shock wave propagation in atmospheric flows. The Journal of the Acoustical Society of America, 135(5) :2559–2570, 2014. [31](#)
- L.-J. Gallin, T. Farges, R. Marchiano, F. Coulouvrat, E. Defer, W. Rison, W. Schulz, et M. Nuret. Statistical analysis of storm electrical discharges reconstituted from a lightning mapping system, a lightning location system, and an acoustic array. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 121 :3929–3959, 2016. [104](#)
- R. F. Garcia, Q. Brissaud, L. Rolland, R. Martin, D. Komatitsch, A. Spiga, P. Lognonné, et B. Banerdt. Finite-difference modeling of acoustic and gravity wave propagation in mars atmosphere : application to infrasounds emitted by meteor impacts. Space Science Reviews, 211(1) :547–570, 2017. [30](#)
- B.-J. Gréa, P. Luchini, et A. Bottaro. Ray theory of flow instability and the formation of caustics in boundary layers. Technical report, Technical report, IMFT Internal Report, 2005. [34](#), [37](#), [73](#)
- D. N. Green, A. Le Pichon, L. Ceranna, et L. Evers. Ground truth events : assessing the capability of infrasound networks using high resolution data analyses. In Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies, pages 599–625. Springer, 2010. [15](#)
- D. N. Green, J. Vergoz, R. Gibson, A. Le Pichon, et L. Ceranna. Infrasound radiated by the gerdec and chelophechene explosions : propagation along unexpected paths. Geophysical Journal International, 185(2) :890–910, 2011. [31](#)
- D. N. Green, R. Waxler, J.-M. Lalande, D. Velea, et C. Talmadge. Regional infrasound generated by the humming roadrunner ground truth experiment. Geophysical Journal International, 214(3) :1847–1864, 2018. [14](#)

- J.-P. Guiraud. Acoustique geometrique bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. Journal de Mecanique, 4(2) :215, 1965. [26](#)
- E. Hairer, S. P. Nørsett, et G. Wanner. Solving ordinary differential equations. 1, Nonstiff problems. Springer-Vlg, 1993. [87](#)
- E. Hairer, C. Lubich, et G. Wanner. Geometric Numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Springer, 2006. [86](#)
- M. F. Hamilton, D. T. Blackstock, et al. Nonlinear acoustics, volume 237. Academic press San Diego, 1998. [25](#), [29](#)
- J. E. Harvey, R. G. Irvin, et R. N. Pfisterer. Modeling physical optics phenomena by complex ray tracing. Optical Engineering, 54(3) :035105, 2015. [34](#), [37](#)
- E. Hasanov. A new theory of complex rays. IMA journal of applied mathematics, 69(6) : 521–537, 2004. [42](#)
- D. M. Hawkins. The problem of overfitting. Journal of chemical information and computer sciences, 44(1) :1–12, 2004. [133](#)
- W. D. Hayes. Energy invariant for geometric acoustics in a moving medium. The Physics of Fluids, 11(8) :1654–1656, 1968. [33](#)
- W. D. Hayes. Sonic boom propagation in a stratified atmosphere, with computer program. NASA, 1969. [29](#), [33](#)
- C. Haynes et C. Millet. A sensitivity analysis of meteoric infrasound. Journal of Geophysical Research : Planets, 118(10) :2073–2082, 2013. [29](#)
- D. Hearn et E. Krebes. Complex rays applied to wave propagation in a viscoelastic medium. Pure and Applied Geophysics, 132(1) :401–415, 1990. [38](#)
- A. E. Hedin. Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere. Journal of Geophysical Research : Space Physics, 96(A2) :1159–1172, 1991. [17](#)
- A. E. Hedin, E. Fleming, A. Manson, F. Schmidlin, S. Avery, R. Clark, S. J. Franke, G. Fraser, T. Tsuda, F. Vial, et al. Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere. Journal of atmospheric and terrestrial physics, 58(13) :1421–1447, 1996. [17](#), [131](#)
- M. Henneton. Apport de la simulation numérique à l'évaluation du bang sonique issu des météorites. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2013. [29](#), [33](#), [119](#), [121](#), [124](#), [140](#), [181](#)
- M. Henneton, P. Delorme, O. Gainville, et F. Coulouvrat. Computational fluid dynamics simulations of infrasound generation process by meteorites. In AIP Conference Proceedings, volume 1474, pages 319–322. American Institute of Physics, 2012. [29](#)
- M. Henneton, O. Gainville, F. Coulouvrat, et J. Varnier. Analyse du bang sonique émis par la météorite de Carancas. In CFA, pages 2117–2123, Poitier, France, 2014. [119](#), [121](#), [141](#), [178](#)
- M. Henneton, O. Gainville, et F. Coulouvrat. Numerical simulation of sonic boom from hypersonic meteoroids. AIAA Journal, 53(9) :2560–2570, 2015. doi : 10.2514/1.J053421. [26](#), [29](#), [32](#), [120](#), [123](#), [128](#)
- E. Hille. Ordinary differential equations in the complex domain. Courier Corporation, 1997. [86](#)

- R. Holford. Modifications to ray theory near caustics. The Journal of the Acoustical Society of America, 55(S1) :S33–S33, 1974. [34](#)
- F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, et S. McKay. Computational Ocean Acoustics, volume 9. Modern Acoustics and Signal Processing, 1995. doi : 10.1063/1.4823373. [32](#), [52](#), [53](#), [61](#)
- J. B. Keller. Geometrical theory of diffraction. The Journal of the Optical Society of America, 52(2) :116–130, Feb 1962. doi : 10.1364/JOSA.52.000116. [14](#), [34](#), [37](#), [43](#), [78](#)
- J. B. Keller et W. Streifer. Complex rays with an application to Gaussian beams. The Journal of the Optical Society of America, 61(1) :40–43, Jan 1971. doi : 10.1364/JOSA.61.000040. [34](#), [37](#), [38](#)
- J. Kendall et C. Thomson. Maslov ray summation, pseudo-caustics, lagrangian equivalence and transient seismic waveforms. Geophysical Journal International, 113(1) :186–214, 1993. [14](#)
- T. Kenkmann, N. Artemieva, et M. Poelchau. The Carancas event on september 15, 2007 : meteorite fall, impact conditions, and crater characteristics. In Lunar and Planetary Science Conference, page 1094, 2008. [119](#), [120](#)
- T. Kenkmann, N. A. Artemieva, K. Wünneman, M. H. Poelchau, D. Elbeshausen, et H. N. d. Prado. The Carancas meteorite impact crater, Peru : Geologic surveying and modeling of crater formation and atmospheric passage. Meteoritics & Planetary Science, 44(7) : 985–1000, 2009. doi : 10.1111/j.1945-5100.2009.tb00783.x. [16](#), [120](#)
- C. Khodr. Three-dimensional infrasonic wave propagation above irregular boundaries. PhD thesis, University of Bristol, 2020. [31](#)
- K. Kim, A. Rodgers, et D. Seastrand. Local infrasound variability related to in situ atmospheric observation. Geophysical Research Letters, 45(7) :2954–2962, 2018. [24](#)
- A. Kocherov, S. Voropaev, A. Korochantsev, et I. Nugmanov. Preliminary study of composition and mechanical properties of the nwa 12370 meteorite. In S. Votyakov, D. Kiseleva, V. Grokhovsky, et Y. Shchapova, editors, Minerals : Structure, Properties, Methods of Investigation, pages 119–124, Cham, 2020. Springer International Publishing. ISBN 978-3-030-49468-1. [120](#), [121](#)
- R. Kouyoumjian et P. Pathak. Chapter 3 - a uniform GTD approach to EM scattering and radiation. In V. VARADAN et V. VARADAN, editors, Low and High Frequency Asymptotics, volume 2 of Mechanics and Mathematical Methods–Series of Handbooks, pages 265–334. Elsevier, 1986. doi : <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-87726-0.50008-2>. [37](#)
- Y. A. Kravtsov. Complex rays and complex caustics. Radiophys Quantum Electron, 10 : 719–730, 1967. doi : [doi.org/10.1007/BF01031601](https://doi.org/10.1007/BF01031601). [34](#), [37](#), [38](#), [41](#), [42](#), [131](#)
- Y. A. Kravtsov et P. Berczynski. Description of the 2d Gaussian beam diffraction in a free space in frame of eikonal-based complex geometric optics. Wave Motion, 40(1) :23 – 27, 2004. ISSN 0165-2125. doi : 10.1016/j.wavemoti.2003.12.012. [14](#), [38](#)
- Y. A. Kravtsov et P. Berczynski. Gaussian beams in inhomogeneous media : a review. Studia Geophysica et Geodaetica, 51(1) :1–36, 2007. [34](#), [37](#)
- Y. A. Kravtsov et Y. I. Orlov. Caustics, catastrophes, and wave fields. Soviet Physics Uspekhi, 26(12) :1038–1058, dec 1983. doi : 10.1070/pu1983v026n12abeh004582. [14](#), [38](#), [48](#), [53](#)

- Y. A. Kravtsov et N. Y. Zhu. Theory of Diffraction. Heuristic Approaches. Alpha Science International, United Kingdom, 2010. ISBN 1842653725. [14](#), [38](#), [41](#), [42](#), [53](#), [87](#), [102](#), [131](#)
- Y. A. Kravtsov, G. W. Forbes, et A. A. Asatryan. I theory and applications of complex rays. Progress in Optics, 39 :1 – 62, 1999. ISSN 0079-6638. doi : 10.1016/S0079-6638(08)70388-3. [14](#), [38](#)
- S. Kulichkov. Long-range propagation and scattering of low-frequency sound pulses in the middle atmosphere. Meteorology and Atmospheric Physics, 85(1) :47–60, 2004. [22](#), [27](#)
- S. Kulichkov, O. Y. Popov, K. Avilov, I. Chunchuzov, O. Chkhetiani, A. Smirnov, V. Dubrovina, et A. Mishenin. Simulating the propagation of infrasonic waves and estimating the energy of the Chelyabinsk meteoroid explosion observed on february 15, 2013. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 54(3) :293–303, 2018. [29](#), [153](#)
- G. Lacanna et M. Ripepe. Influence of near-source volcano topography on the acoustic wavefield and implication for source modeling. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 250 :9–18, 2013. [29](#), [30](#)
- G. Lacanna et M. Ripepe. Modeling the acoustic flux inside the magmatic conduit by 3D-FDTD simulation. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 125(6) :e2019JB018849, 2020. [30](#)
- G. Lacanna, M. Ichihara, M. Iwakuni, M. Takeo, M. Iguchi, et M. Ripepe. Influence of atmospheric structure and topography on infrasonic wave propagation. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 119(4) :2988–3005, 2014. [25](#)
- A. Lacroix, T. Farges, R. Marchiano, et F. Coulouvrat. Acoustical measurement of natural lightning flashes : Reconstructions and statistical analysis of energy spectra. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 123 :12–040, 2018. [104](#)
- J.-M. Lalande et R. Waxler. The interaction between infrasonic waves and gravity wave perturbations : Application to observations using uttr rocket motor fuel elimination events. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 121(10) :5585–5600, 2016. [32](#)
- J.-M. Lalande, O. Sèbe, M. Landès, P. Blanc-Benon, R. S. Matoza, A. Le Pichon, et E. Blanc. Infrasound data inversion for atmospheric sounding. Geophysical Journal International, 190 (1) :687–701, 2012. [13](#)
- M. Lampton. Damping–undamping strategies for the Levenberg–Marquardt nonlinear least-squares method. Computers in Physics, 11(1) :110–115, 1997. [88](#)
- A. Le Pichon, M. Garcés, E. Blanc, M. Barthélémy, et D. P. Drob. Acoustic propagation and atmosphere characteristics derived from infrasonic waves generated by the concorde. The Journal of the Acoustical Society of America, 111(1) :629–641, 2002. [13](#), [23](#)
- A. Le Pichon, E. Blanc, et D. Drob. Probing high-altitude winds using infrasound. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 110(D20), 2005a. [22](#)
- A. Le Pichon, E. Blanc, D. Drob, S. Lambotte, J. Dessa, M. Lardy, P. Bani, et S. Vergnolle. Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 110(D13), 2005b. [31](#)
- A. Le Pichon, K. Antier, Y. Cansi, B. Hernandez, E. Minaya, B. Burgoa, D. Drob, L. G. Evers, et J. Vaubaillon. Evidence for a meteoritic origin of the September 15, 2007, Carancas crater. Meteoritics & Planetary Science, 43(11) :1797–1809, 2008. doi : 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00644.x. [120](#), [121](#), [123](#), [124](#), [178](#), [181](#)



- A. Le Pichon, E. Blanc, et A. Hauchecorne. Infrasound monitoring for atmospheric studies. Springer Science & Business Media, 2010. [13](#), [14](#)
- A. Le Pichon, L. Ceranna, et J. Vergoz. Incorporating numerical modeling into estimates of the detection capability of the IMS infrasound network. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, 117(D5), 2012. [13](#), [31](#)
- K. Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems squares. Quarterly of Applied Mathematics, 2 :164–169, 1994. [87](#)
- X.-W. Li, B. Zhou, C.-Y. Bai, et J.-L. Wu. Seismic complex ray tracing in 2d/3d viscoelastic anisotropic media by a modified shortest-path method. Geophysics, 85(6) :T331–T342, 2020. [34](#), [37](#)
- S.-C. Lin. Cylindrical shock waves produced by instantaneous energy release. Journal of Applied Physics, 25(1) :54–57, 1954. [28](#)
- J. F. Lingeitch, M. D. Collins, et W. L. Siegmann. Parabolic equations for gravity and acousto-gravity waves. The Journal of the Acoustical Society of America, 105(6) :3049–3056, 1999. doi : 10.1121/1.424634. [17](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [86](#), [87](#), [93](#), [94](#), [96](#), [98](#), [99](#), [100](#), [102](#), [108](#), [109](#), [110](#), [118](#), [131](#), [132](#), [173](#), [176](#), [177](#), [181](#)
- A. Loubeau et F. Coulouvrat. Effects of meteorological variability on sonic boom propagation from hypersonic aircraft. AIAA journal, 47(11) :2632–2641, 2009. [29](#), [33](#)
- M. I. Lourakis et al. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. Foundation of Research and Technology, 4(1) :1–6, 2005. [88](#)
- D. Ludwig. Uniform asymptotic expansions at a caustic. Communications on Pure and Applied Mathematics, 19(2) :215–250, 1966. [14](#), [25](#), [34](#), [53](#), [78](#)
- D. Luquet, R. Marchiano, et F. Coulouvrat. Long range numerical simulation of acoustical shock waves in a 3d moving heterogeneous and absorbing medium. Journal of Computational Physics, 379 :237–261, 2019. [28](#), [31](#)
- D. R. MacGorman, A. Few, et T. Teer. Layered lightning activity. Journal of Geophysical Research : Oceans, 8 :9900–9910, 1981. [104](#)
- E. Marchetti, M. Ripepe, P. Campus, A. Le Pichon, J. Vergoz, G. Lacanna, P. Mialle, P. Héréil, et P. Husson. Long range infrasound monitoring of Etna volcano. Scientific reports, 9(1) : 1–10, 2019. [23](#)
- R. Marchiano. Singularités d’amplitude et de phase en acoustique non linéaire. Application au bang sonique. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, Paris, Decembre 2003. [25](#)
- R. Marchiano, F. Coulouvrat, et R. Grenon. Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom. The Journal of the Acoustical Society of America, 114(4) :1758–1771, 2003a. [26](#)
- R. Marchiano, J.-L. Thomas, et F. Coulouvrat. Experimental simulation of supersonic superboom in a water tank : Nonlinear focusing of weak shock waves at a fold caustic. Physical review letters, 91(18) :184301, 2003b. [25](#)
- R. Marchiano, F. Coulouvrat, et J.-L. Thomas. Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp. The Journal of the Acoustical Society of America, 117(2) :566–577, 2005. [26](#)

- D. W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 11 :431–441, 1963. [87](#)
- V. P. Maslov. Perturbation theory and asymptotic methods. Moscow State Univ, 1965. [34](#)
- R. S. Matoza, M. A. Garcés, B. A. Chouet, L. D’Auria, M. A. Hedlin, C. De Groot-Hedlin, et G. P. Waite. The source of infrasound associated with long-period events at mount St. Helens. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 114(B4), 2009. [30](#)
- M. H. McKenna, R. G. Gibson, B. E. Walker, J. McKenna, N. W. Winslow, et A. S. Kofford. Topographic effects on infrasound propagation. The Journal of the Acoustical Society of America, 131(1) :35–46, 2012. [25](#)
- J. M. McKisic. Infrasound and the infrasonic monitoring of atmospheric nuclear explosions : A literature review, 1997. [14](#)
- C. Millet, J.-C. Robinet, et C. Roblin. On using computational aeroacoustics for long-range propagation of infrasounds in realistic atmospheres. Geophysical Research Letters, 34(14), 2007. [15](#), [32](#)
- E. A. Milne. VI. Sound waves in the atmosphere. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 42(247) :96–114, 1921. [32](#)
- F. Molteni, R. Buizza, T. N. Palmer, et T. Petroliaxis. The ECMWF ensemble prediction system : Methodology and validation. Quarterly journal of the royal meteorological society, 122(529) :73–119, 1996. [17](#)
- I. Montrosset et R. Orta. La methode des rayons complexes. In Annales des Telecommunications, volume 38, pages 135–144. Springer, 1983. [34](#), [37](#)
- A. W. Moore. Cross-validation for detecting and preventing overfitting. School of Computer Science Carneigie Mellon University, 2001. [133](#)
- J. J. Moré. The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and theory. In Numerical analysis, pages 105–116. Springer, 1978. [87](#)
- M. Nguyen-Dinh, O. Gainville, et N. Lardjane. A one-way coupled euler and parabolic model for outdoor blast wave simulation in real environment. Journal of Theoretical and Computational Acoustics, 26(04) :1850019, 2018. [31](#), [110](#)
- D. Norris, R. Gibson, et K. Bongiovanni. Numerical methods to model infrasonic propagation through realistic specifications of the atmosphere. In Infrasound monitoring for atmospheric studies, pages 541–573. Springer, 2010. [17](#)
- V. Ostashev et D. K. Wilson. Acoustics in moving inhomogeneous media. CRC Press, 2015. [33](#), [37](#), [110](#), [130](#)
- V. E. Ostashev, D. K. Wilson, L. Liu, D. F. Aldridge, N. P. Symons, et D. Marlin. Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation. The Journal of the Acoustical Society of America, 117(2) :503–517, 2005. [30](#)
- V. E. Ostashev, M. B. Muhlestein, et D. K. Wilson. Extra-wide-angle parabolic equations in motionless and moving media. The Journal of the Acoustical Society of America, 145(2) : 1031–1047, 2019. [31](#)

- V. E. Ostashev, D. K. Wilson, et M. B. Muhlestein. Wave and extra-wide-angle parabolic equations for sound propagation in a moving atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 147(6) :3969–3984, 2020. [31](#)
- L. Ottemöller et L. G. Evers. Seismo-acoustic analysis of the Buncefield oil depot explosion in the UK, 2005 December 11. Geophysical Journal International, 172(3) :1123–1134, 03 2008. ISSN 0956-540X. doi : 10.1111/j.1365-246X.2007.03701.x. [15](#)
- T. Pearcey. The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic (from philosophical magazine 1946). Spie Milestone Series Ms, 89 :432–432, 1993. [26](#)
- A. L. Pichon, K. Antier, Y. Cansi, B. Hernandez, E. Minaya, B. Burgoa, D. Drob, L. Evers, et J. Vaubaillon. Evidence for a meteoritic origin of the september 15, 2007, Carancas crater. Meteoritics & Planetary Science, 43(11) :1797–1809, 2008. [119](#)
- J. Picone, A. Hedin, D. P. Drob, et A. Aikin. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere : Statistical comparisons and scientific issues. Journal of Geophysical Research : Space Physics, 107(A12) :SIA–15, 2002. [131](#)
- A. D. Pierce. Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America, 1994. [25](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [32](#), [33](#), [37](#), [39](#), [41](#), [43](#), [46](#), [52](#), [61](#), [74](#), [80](#), [112](#)
- C. Pilger, P. Gaebler, P. Hupe, A. C. Kalia, F. M. Schneider, A. Steinberg, H. Sudhaus, et L. Ceranna. Yield estimation of the 2020 Beirut explosion using open access waveform and remote sensing data. Scientific reports, 11(1) :1–14, 2021. [15](#), [23](#)
- P.-F. Piserchia. Propagation et conversion des ondes t par simulation numerique hydride. PhD thesis, Thèse de doctorat dirigée par Virieux, Jean Terre, océan, espace Nice 1998, 1998. 1998NICE5175. [14](#), [34](#)
- M. N. Plooster. Shock waves from line sources. numerical solutions and experimental measurements. The physics of fluids, 13(11) :2665–2675, 1970. [28](#)
- K. J. Plotkin. State of the art of sonic boom modeling. The Journal of the Acoustical Society of America, 111(1) :530–536, 2002. [33](#), [80](#)
- O. Popova, J. Borovička, W. K. Hartmann, P. Spurný, E. Gnos, I. Nemtchinov, et J. M. Trigo-Rodriguez. Very low strengths of interplanetary meteoroids and small asteroids. Meteoritics & Planetary Science, 46(10) :1525–1550, 2011. [121](#)
- M. B. Porter et H. P. Bucker. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. The Journal of the Acoustical Society of America, 82(4) :1349–1359, 1987. [14](#)
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, et W. T. Vetterling. Numerical recipes in Fortran 77 : volume 1, volume 1 of Fortran numerical recipes : the art of scientific computing. Cambridge university press, 1992. [93](#)
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsly, et W. T. Vetterling. Numerical Recipies in Fortran 90. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996. [48](#), [87](#)
- S. K. Rallabhandi. Advanced sonic boom prediction using the augmented Burgers equation. Journal of Aircraft, 48(4) :1245–1253, 2011. [33](#)
- R. Raspet et S. J. Franke. Residue series solution of impulse noise propagation into a shadow zone. The Journal of the Acoustical Society of America, 83(5) :1964–1967, 1988. [27](#)

- R. Raspet, G. E. Baird, et W. Wu. The relationship between upward refraction above a complex impedance plane and the spherical wave evaluation for a homogeneous atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 89(1) :107–114, 1991. [27](#)
- J. W. Reed. Atmospheric attenuation of explosion waves. The Journal of the Acoustical Society of America, 61(1) :39–47, 1977. [128](#)
- D. O. ReVelle. On meteor-generated infrasound. Journal of Geophysical Research, 81(7) : 1217–1230, 1976. [28](#), [32](#), [128](#)
- J. Ridoux, N. Lardjane, L. Monasse, et F. Coulouvrat. Comparison of geometrical shock dynamics and kinematic models for shock-wave propagation. Shock Waves, 28(2) :401–416, 2018. [26](#)
- J. Ridoux, N. Lardjane, L. Monasse, et F. Coulouvrat. Extension of geometrical shock dynamics for blast wave propagation. Shock Waves, 30(6) :563–583, 2020. [26](#)
- P. H. Rogers et J. Gardner. Propagation of sonic booms in the thermosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 67(1) :78–91, 1980. [26](#)
- D. Rosales, E. Vidal, J. Ishitsuka, et S. Benavente. Geomagnetic study of Carancas meteorite and its crater. In 39th Annual Lunar and Planetary Science Conference, number 1391, page 1744, 2008. [119](#)
- R. R. Rosales et E. G. Tabak. Caustics of weak shock waves. Phys. Fluids, 10(1) :206–222, Jan. 1998. [25](#), [77](#)
- T. D. Rossing. A brief history of acoustics. In Springer Handbook of Acoustics, pages 11–27. Springer, 2014. [13](#)
- R. Sabatini. Simulation directe 3-D de la propagation non-linéaire des ondes acoustiques dans l’atmosphère terrestre. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Bailly, Christophe et Marsden, Olivier Acoustique Lyon 2017. [23](#), [39](#)
- R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly, et O. Gainville. Numerical simulation of infrasound propagation in the earth’s atmosphere : study of a stratospherical arrival pair. In AIP Conference Proceedings, volume 1685, page 090002. AIP Publishing LLC, 2015. [29](#)
- R. Sabatini, C. Bailly, O. Marsden, et O. Gainville. Characterization of absorption and non-linear effects in infrasound propagation using an augmented Burgers’ equation. Geophysical Journal International, 207(3) :1432–1445, 2016a. [29](#)
- R. Sabatini, O. M, C. Bailly, et C. Bogey. A numerical study of nonlinear infrasound propagation in a windy atmosphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 140 : 641–656, 2016b. [29](#), [30](#), [37](#)
- R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly, et O. Gainville. Three-dimensional direct numerical simulation of infrasound propagation in the earth’s atmosphere. Journal of Fluid Mechanics, 859 :754–789, 2019a. [14](#), [29](#), [30](#), [37](#)
- R. Sabatini, J. B. Snively, M. P. Hickey, et J. Garrison. An analysis of the atmospheric propagation of underground-explosion-generated infrasonic waves based on the equations of fluid dynamics : Ground recordings. The Journal of the Acoustical Society of America, 146(6) :4576–4591, 2019b. [29](#), [37](#)
- J. A. Salamone III, V. W. Sparrow, et K. J. Plotkin. Solution of the lossy nonlinear tricomi equation applied to sonic boom focusing. AIAA journal, 51(7) :1745–1754, 2013. [26](#)

- E. M. Salomons. Atmospheric refraction. In Computational Atmospheric Acoustics, pages 37–65. Springer, 2001. [25](#)
- P. Schäfer et M. Vorländer. Atmospheric ray tracing : An efficient, open-source framework for finding eigenrays in a stratified, moving medium. Acta Acustica, 5 :26, 2021. [33](#)
- J. Scott, P. Blanc-Benon, et O. Gainville. Weakly nonlinear propagation of small-wavelength, impulsive acoustic waves in a general atmosphere. Wave Motion, 72 :41 – 61, 2017. ISSN 0165-2125. doi : 10.1016/j.wavemoti.2016.12.005. [25](#), [29](#), [33](#), [38](#), [39](#), [44](#), [51](#), [53](#), [57](#), [73](#), [128](#), [131](#), [164](#)
- E. Silber et P. Brown. Infrasound monitoring as a tool to characterize impacting near-earth objects (neos). In Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies, pages 939–986. Springer, 2019. [16](#)
- E. A. Silber et P. G. Brown. Optical observations of meteors generating infrasound—i : Acoustic signal identification and phenomenology. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 119 :116–128, 2014. [33](#)
- J. T. Stone, R. H. Self, et C. J. Howls. Cones of silence, complex rays and catastrophes : high-frequency flow–acoustic interaction effects. Journal of Fluid Mechanics, 853 :37–71, 2018. doi : 10.1017/jfm.2018.544. [14](#), [34](#), [37](#), [38](#), [43](#), [48](#), [92](#), [93](#), [117](#), [131](#)
- L. C. Sutherland et H. E. Bass. Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km. The Journal of the Acoustical Society of America, 115(3) :1012–1032, 2004. [28](#)
- C. K. Tam et J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. Journal of computational physics, 107(2) :262–281, 1993. [30](#)
- G. Tancredi, J. Ishitsuka, P. H. Schultz, R. S. Harris, P. Brown, D. O. Revelle, K. Antier, A. L. Pichon, D. Rosales, E. Vidal, M. E. Varela, L. Sánchez, S. Benavente, J. Bojorquez, D. Cabezas, et A. Dalmau. A meteorite crater on earth formed on september 15, 2007 : The Carancas hypervelocity impact. Meteoritics & Planetary Science, 44(12) :1967–1984, 2009. doi : 10.1111/j.1945-5100.2009.tb02006.x. [119](#), [120](#), [178](#)
- F. D. Tappert. The parabolic approximation method. In Wave propagation and underwater acoustics, pages 224–287. Springer, 1977. [31](#)
- R. Thom. Structural stability and morphogenesis (translated by dh fowler), 1975. [62](#), [159](#)
- R. Thom. Mathematical models of morphogenesis. Ellis Horwood, 1983. [25](#)
- C. Thomson et C. Chapman. An introduction to Maslov’s asymptotic method. Geophysical Journal International, 83(1) :143–168, 1985. [14](#), [34](#)
- C. J. Thomson. Complex rays and wave packets for decaying signals in inhomogeneous, anisotropic and anelastic media. Studia Geophysica et Geodaetica, 41(4) :345–381, 1997. [34](#), [37](#), [38](#), [41](#), [61](#), [87](#), [102](#)
- P. Vanderbecken. Apport des infrasons pour l’assimilation de données dans un modèle global de prévision numérique du temps. PhD thesis, Université de Toulouse, 2020. [130](#)
- P. Vanderbecken, J.-F. Mahfouf, et C. Millet. On the use of infrasound observations from natural sources for retrieving atmospheric profiles in the stratosphere. 21, 2019. [13](#), [22](#), [33](#), [85](#)

- V. Vavrycuk. Behaviour of rays at interfaces in anisotropic viscoelastic media. Geophysical Journal International, 181(3) :1665–1677, 2010. doi : 10.1111/j.1365-246X.2010.04583.x. [57](#)
- J. Vergoz, A. Le Pichon, et C. Millet. The antares explosion observed by the usarray : an unprecedented collection of infrasound phases recorded from the same event. In Infrasound monitoring for atmospheric studies, pages 349–386. Springer, 2019. [25](#)
- J. Virieux. P-sv wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. Geophysics, 51(4) :889–901, 1986. [30](#)
- J. Virieux, N. Garnier, E. Blanc, et J.-X. Dessa. Paraxial ray tracing for atmospheric wave propagation. Geophysical Research Letters, 31(20), 2004. doi : 10.1029/2004GL020514. [42](#), [131](#)
- P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, Í. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, et SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. Nature Methods, 17 :261–272, 2020. doi : 10.1038/s41592-019-0686-2. [131](#), [137](#)
- R. Waxler et K. E. Gilbert. The radiation of atmospheric microbaroms by ocean waves. The Journal of the Acoustical Society of America, 119(5) :2651–2664, 2006. [17](#)
- R. Waxler, L. G. Evers, J. Assink, et P. Blom. The stratospheric arrival pair in infrasound propagation. The Journal of the Acoustical Society of America, 137(4) :1846–1856, 2015. [17](#), [33](#)
- D. W. White et M. A. Pedersen. Evaluation of shadow-zone fields by uniform asymptotics and complex rays. The Journal of the Acoustical Society of America, 69(4) :1029–1059, 1981. [14](#), [34](#), [54](#), [56](#), [167](#)
- G. Whitham. On the propagation of weak shock waves. Journal of Fluid Mechanics, 1(3) : 290–318, 1956. [26](#), [29](#), [33](#), [37](#)
- G. Whitham et R. G. Fowler. Linear and nonlinear waves. Physics Today, 28(6) :55, 1975. [33](#), [46](#)
- G. B. Whitham. The flow pattern of a supersonic projectile. Communications on pure and applied mathematics, 5(3) :301–348, 1952. [26](#)
- F. Wright. The Stokes set of the cusp diffraction catastrophe. Journal of Physics A : Mathematical and General, 13(9) :2913, 1980. [62](#)
- J. Wu, B. Zhou, X. Li, et Y. Bouzidi. Effective and efficient approaches for calculating seismic ray velocity and attenuation in viscoelastic anisotropic media. GEOPHYSICS, 86 (1) :C19–C35, 2021. doi : 10.1190/geo2020-0126.1. [14](#), [38](#)
- E. Zabolotskaya. Quasi-plane waves, in the nonlinear acoustics of confined beams. Sov. Phys. Acoust., 15 :35–40, 1969. [31](#)
- T. Zhu et K.-Y. Chun. Complex rays in elastic and anelastic media. Geophysical Journal International, 119(1) :269–279, 1994. [34](#), [37](#), [38](#)
- H. Ziegler. La grande aventure de Concorde. FeniXX, 1976. [60](#)

R. W. Ziolkowski et G. A. Deschamps. Asymptotic evaluation of high-frequency fields near a caustic : An introduction to Maslov's method. *Radio Science*, 19(04) :1001–1025, 1984. 34

Une boîte avec `fbox` et avec `rule`.

La plupart des phénomènes atmosphériques de forte énergie, qu'ils soient naturels (météoroïdes, séismes, volcans,...) ou anthropiques (avions, explosions chimiques ou nucléaires, ...) émettent des ondes de fréquence inférieure à 20 Hz, appelées infrasons. Ces ondes peuvent se propager sur des milliers de kilomètres en bénéficiant de leur faible atténuation et de la structure de l'atmosphère qui guide leur propagation. La propagation longue distance des infrasons permet l'observation de l'information acoustique à tout instant et en tout point de la Terre. Ainsi, les infrasons constituent une des technologies mise en œuvre dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (TICE).

La simulation de la propagation des ondes infrasonores a fait l'objet de nombreuses études notamment par les méthodes paraboliques, les méthodes aux différences finies, la sommation de modes ou par des méthodes asymptotiques, comme le tracé de rayons. Ce dernier est adapté à la propagation très longue distance des infrasons en milieu inhomogène et advecté, en trois dimensions, pour un faible coût numérique. Cette méthode reste néanmoins limitée par la présence de caustiques et de zones d'ombre pour lesquelles la méthode est singulière. Dans le but de prédire les paramètres géométriques et les signatures dans ces zones, et afin de garder l'efficacité et la rapidité de calcul, nous avons adapté la méthode de tracé de rayons complexes à la propagation atmosphérique des infrasons.

Dans une première étape, la méthode des rayons usuelle est rappelée et son extension dans la plan complexe est présentée. Un cas d'application analytique est traité, correspondant à une caustique pli horizontale au-dessus du sol, pouvant être formée par un vol supersonique à faible Mach. Ce cas met en évidence en fonction de la distance à la caustique, l'influence des rayons complexes réfléchis au sol. Dans une deuxième étape, nous avons développé une méthode numérique en deux dimensions permettant de calculer les rayons propres (rayons reliant directement la source au différents récepteurs) dans tout le domaine et pour toutes les arrivées formées par les guides d'onde atmosphériques. Ce calcul est nécessaire afin de déterminer toutes les arrivées à une station d'observation. Une étude détaillée sur le cas d'une source ponctuelle, analogue à une explosion, avec un profil atmosphérique de référence en présence d'un vent horizontal, a permis de valider l'algorithme de recherche de rayons propres développé, par une comparaison à une méthode d'approximation parabolique. L'application a été étendue au cas d'une météorologie variant également dans la direction horizontale. Le voisinage des caustiques est traité par une approche asymptotique uniforme (Théorie Uniforme de la Diffraction). Une méthodologie d'ajustement de données de vitesse du son et du vent par des fonctions analytiques a été mise en place, afin de permettre l'utilisation de profils atmosphériques réalistes adaptés à la méthode des rayons complexes. Cela a donné lieu à l'application à un cas simplifié de météorite (inspiré de la météorite de Carancas observée le 15 septembre 2007 au Pérou), dont les signatures ont été enregistrées par une station infrasonore localisée en zone d'ombre. Ce cas nous a permis de montrer que la méthode des rayons complexes est efficace pour déterminer les paramètres géométriques en zone d'ombre.