



**HAL**  
open science

# Modélisation, optimisation et simulation des réseaux de distribution d'électricité

Marouan Handa

► **To cite this version:**

Marouan Handa. Modélisation, optimisation et simulation des réseaux de distribution d'électricité. Modélisation et simulation. Université de Picardie Jules Verne, 2021. Français. NNT : 2021AMIE0029 . tel-03828973

**HAL Id: tel-03828973**

**<https://theses.hal.science/tel-03828973v1>**

Submitted on 25 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse de Doctorat

*Mention Mathématiques*

présentée à l'École Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)

de l'Université de Picardie Jules Verne

par

**Marouan Handa**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

*Modélisation, optimisation et simulation des réseaux de distribution d'électricité*

Soutenue le 13 juillet 2021, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen

M. Olivier Goubet	PR, Univ. de Lille	Président du Jury
M <sup>me</sup> Claudia Sagastizábal	PR, Univ. Estadual de Campinas	Rapporteur
M. Serge Dumont	PR, Univ. de Nîmes	Rapporteur
M. Khalide Jbilou	PR, ULCO	Examineur
M. Matthieu Brachet	MCF, Université de Poitiers	Examineur
M <sup>me</sup> Véronique Martin	MCF, UPJV	Examineur
M. Jean-Paul Chehab	PR, UPJV	Directeur
M. Vivien Desveaux	MCF, UPJV	Co-encadrant





# Remerciements

Je tient tout d'abord à adresser à mon directeur de thèse Jean-Paul et à mon co-encadrant Vivien, toute ma gratitude. Je n'aurai probablement pas réussi à finir ma thèse sans votre encadrement, votre précieuse aide et votre soutien. À Jean-Paul, merci pour la confiance que tu m'as accordée depuis le début et durant la thèse, pour toutes les connaissances que tu m'as apprises tout au long de mon cursus. Ces années de travail avec toi étaient vraiment très agréables, j'ai toujours apprécié ta manière de faire, d'enseigner et de présenter les choses pour qu'elles apparaissent de façon naturelle. Aussi tu m'as toujours apporté le sourire avec ta bonne humeur et de ton humour, même dans certains moments difficiles. À Vivien, merci pour le temps énorme que tu m'as accordé durant ces quatre années de thèse ; pour la rigueur, l'organisation et toutes les choses que j'ai pu apprendre de toi. Merci de m'avoir toujours poussé au-delà des limites que je croyais ne pas pouvoir atteindre, cela m'a souvent redonné confiance en moi et m'a motivé à continuer de travailler. Merci aussi pour tous les moments qu'on a eu pendant les pauses déjeuner, où l'on a discuté, avec les autres, de plein de sujets différents. Ces moments étaient souvent les meilleurs de la journée.

Je remercie vivement Claudia Sagastizábal d'avoir accepté de rapporter cette thèse, pour tout l'intérêt qu'elle a eu à lire le manuscrit et d'avoir contribué par son expertise à l'améliorer. Je remercie Serge Dumont d'avoir accepté de lire et de rapporter mon travail de thèse.

Merci à toi Olivier Goubet, d'abord pour tout le savoir mathématique que tu m'a enseigné au cours de mes deux années de Master ; aussi pour ton côté humain : j'ai apprécié que tu aies toujours demandé de mes nouvelles pendant la thèse et je tiens à te dire que tu as laissé ta place vide au sein du LAMFA. Enfin je te remercie d'avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi de thèse ainsi que membre du jury. Je remercie Véronique Martin qui m'a aussi accompagnée dans mon parcours. D'abord quand j'étais étudiant en Master, je te remercie pour tout le « savoir numérique » que tu m'a transmis. Ensuite, en tant que chargée de td/tp dans tes cours, ce fut pour moi un grand plaisir d'enseigner à tes côtés. Enfin, je te remercie d'avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse. Je remercie Khalide Jbilou, j'ai apprécié les échanges courts mais très efficaces pour moi lors des comités de suivis de thèse ; je te remercie aussi d'avoir accepté d'être membre du jury. Je remercie également Matthieu Brachet d'avoir accepté de te joindre à l'équipe du jury de thèse.

Merci à l'ensemble des membres du LAMFA, qui font de ce laboratoire un endroit accueillant, agréable et vivant. Merci aux deux directeurs du Labo que j'ai pu rencontrer : Fabien Durand et Ivan Marin, grâce à vous notre cher laboratoire tourne à plein régime. Merci Ivan d'être toujours passé au bureau des doctorants pour savoir si tout allait bien pour nous ; et aussi pour les Galettes du Roi. Grand merci à Isabelle, Christelle, Laurent et récemment Mylène et Étienne, pour leur disponibilité, leur efficacité et leur pouvoir à transformer des tâches qui semblent compliquées en des tâches faciles.

Aux doctorants du LAMFA (passés et présents) : Guillaume, Gauthier, Henry, Arriane, Mariem, Jihade, Clara, Arthur, Afaf, Hatice, Alice, Clément, Yohan, Sebastian, Felipe, Christopher, Cheryl, Jérémie, Sylvain, Anne-Sophie (en espérant que je n'ai oublier personne). Chacun de vous m'a apporté quelque chose de nouveau, à travers les discussions (mathématiques, politiques, culturels...); aussi à travers toutes les activités (repas, soirées, foot...) qu'on as pu avoir ensemble. Merci à vous tous.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont toujours encouragé et soutenu durant ma thèse. Je pense à mes amis : Hassna, Philippe, Benjamin, Amine, Kamal, Hamid, Valdo, Anas, Said, Roberto, Roberta, Jaouad, Ahmed et Ousama.

Enfin, je tient à remercier ma famille : d'abord mes parents qui m'ont toujours poussé à viser le plus haut que je peux. Sans vos encouragements, sans doute que je n'allais pas avoir tant de courage pour m'investir dans une thèse. Je remercie également mon grand Frère Rafik pour tous ses messages de soutien. Enfin, un énorme merci à mon petit frère Farid, qui as dû me supporter ces deux dernières années, dans tous mes états ! aussi pour les précieuses discussions mathématique et autres qu'on a pu avoir quotidiennement, et aussi pour les précieuses aides qu'il m'a apportées.

# Table des matières

## Remerciements

Table des matières	i
--------------------	---

Table des figures	iii
-------------------	-----

Liste des tableaux	v
--------------------	---

Introduction générale	1
-----------------------	---

<b>1 Modélisation des réseaux de distribution</b>	<b>13</b>
---	-----------

1 Introduction . . . . .	13
--------------------------	----

2 Production de l'énergie électrique . . . . .	14
--	----

3 Les réseaux de distribution . . . . .	15
---	----

4 Hiérarchie de modèles du réseau de distribution . . . . .	19
---	----

5 Stratégies de gestion des réseaux de distribution d'électricité . .	26
---	----

6 Conclusion . . . . .	27
------------------------	----

<b>2 Généralités sur les algorithmes d'optimisation</b>	<b>29</b>
---	-----------

1 Classification des problèmes d'optimisation . . . . .	30
---	----

2 Optimisation non-linéaire : existence, unicité et conditions d'opti- malité . . . . .	32
--	----

3 Optimisation non-linéaire : algorithmes de résolution . . . . .	37
---	----

4 Optimisation linéaire et algorithme du simplexe . . . . .	57
---	----

5 Optimisation semi-définie positive et méthode de points inté- rieurs primale-duale . . . . .	66
---	----

<b>3 Modélisation macroscopique et algorithme à fenêtre glissante</b>	<b>75</b>
---	-----------

1	Introduction . . . . .	75
2	Modélisation du système de distribution . . . . .	76
3	Algorithme à fenêtre glissante . . . . .	86
4	Résultats numériques . . . . .	88
5	Conclusion et perspectives . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Relaxation SDP du problème OPF dans un réseau de distribu-</b>	
	<b>tion d'électricité</b>	<b>103</b>
1	Introduction . . . . .	103
2	Outils mathématiques . . . . .	107
3	Modélisation microscopique d'un système de distribution . . . . .	112
4	Étude d'un réseau composé d'une ligne . . . . .	124
5	Convexification du problème sur le réseau complet . . . . .	133
6	Étude du problème avec les amplitudes des tensions fixées . . . . .	138
7	Étude du problème avec les amplitudes de tension variables . . . . .	145
8	Exemples numériques . . . . .	147
9	Conclusion et perspectives . . . . .	154

# Table des figures

1	Modèle macroscopique de système de distribution . . . . .	5
2	(a) Variation de l'état de charge par rapport à la variation de la courbe de prix, (b) variation de la puissance importée par rapport à la variation de la courbe de prix et de consommation pour le modèle (P1) . . . . .	6
3	(a) Variation de l'état de charge par rapport à la variation de la courbe de prix, (b) variation de la puissance importée par rapport à la variation de la courbe de prix et de consommation pour le modèle (P2) . . . . .	7
4	La première itération (à gauche) et la seconde itération (à droite) de l'algorithme à fenêtre glissante . . . . .	8
5	Exemple de graphe d'un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60] . . . . .	9
1.1	Le réseau électrique [5] . . . . .	16
1.2	Une ligne du réseau . . . . .	21
1.3	Système de distribution . . . . .	24
1.4	Exemple du graphe d'un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60] . . . . .	25
3.1	Modèle macroscopique de système de distribution . . . . .	77
3.2	La première itération (à gauche) et la seconde itération (à droite) de l'algorithme à fenêtre glissante . . . . .	87
3.3	Variation de l'état de charge pour différentes courbes de prix (modèle (P1)) . . . . .	89
3.4	Variation de la valeur optimale en fonction de la capacité de stockage maximale (modèle (P1)) . . . . .	90
3.5	Variation de la valeur optimale en fonction des capacités maximales de chargement et de déchargement (modèle (P1)) . . . . .	90
3.6	Variation de la valeur optimale en fonction de l'efficacité du chargement et du déchargement (modèle (P1)) . . . . .	91



3.7	Variation de l'état de charge par rapport à différentes courbes de prix (modèle $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	92
3.8	Variation de la valeur optimale en fonction des capacités maximales de chargement et de déchargement (modèle $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	93
3.9	Variation de la valeur optimale en fonction de l'efficacité du chargement et du déchargement (modèle $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	93
3.10	Variation de la valeur optimale en fonction de la capacité maximale de stockage (modèle $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	94
3.11	Variation de la valeur optimale en fonction de la puissance d'abonnement (modèle $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	94
3.12	Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation (Modèle $(P1)$ ) . . . . .	95
3.13	Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	96
3.14	Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation $(\widehat{P2})$ ) . . . . .	97
3.15	État de charge de la solution de référence et de la solution de l'algorithme à fenêtre glissante avec $L = 30$ et $r = 5$ (modèle $(P1)$ )	98
3.16	État de charge de la solution de référence et de la solution de l'algorithme à fenêtre glissante avec $L = 30$ et $r = 5$ (modèle $(\widehat{P2})$ )	99
4.1	Exemple de graphe d'un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60] . . . . .	112
4.2	Graphe à 4 nœuds . . . . .	123
4.3	Réseau d'une seule ligne . . . . .	125
4.4	(a) : ensemble $\mathcal{A}$ , (b) : ensemble $\mathcal{F}$ , (c) : ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ . . . . .	127
4.5	(a) : l'ensemble $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ avec $\bar{\theta} > \frac{\pi}{2}$ , (b) : l'ensemble $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ avec $\bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$ . . . . .	129
4.6	Quelques cas possibles pour l'ensemble $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$ ; la surface orange correspond à $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P$ ; la courbe verte correspond à $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$	132
4.7	Zoom de la figure 4.6 (c); on a $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P) = \{a\}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P) = \{b\}$ . . . . .	132
4.8	(a) : la relation $\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P)$ est satisfaite, (b) : l'ensemble $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$ est vide . . . . .	133
4.9	Exemple de graphe $\widetilde{G}$ et de chemins admissibles . . . . .	141
4.10	Réseau à 5 nœuds [107] . . . . .	149

# Liste des tableaux

3.1	Valeurs des paramètres de stockage . . . . .	88
3.2	Comparaison du coût d'achat d'énergie avec stockage et sans stockage (modèle (P1)) . . . . .	88
3.3	Comparaison du coût d'achat d'énergie avec stockage et sans stockage (modèle ( $\widehat{P2}$ )) . . . . .	91
3.4	Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec $L$ variable et $r = 5$ fixé (modèle (P1)) . . . . .	99
3.5	Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec $L$ variable et $r = 5$ fixé (modèle ( $\widehat{P2}$ )) . . . . .	100
3.6	Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec $L = 40$ fixé $r$ variable (modèle (P1)) . . . . .	100
3.7	Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec $L = 40$ fixé $r$ variable (modèle ( $\widehat{P2}$ )) . . . . .	100
4.1	Tableau de variations des fonctions $F_1$ et $F_2$ . . . . .	126
4.2	Données sur les nœuds du réseau à 5 nœuds . . . . .	149
4.3	Données sur les lignes de transmission du réseau à 5 nœuds . . . . .	149
4.4	Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF <sub>1</sub> ) et ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) pour différentes valeurs de $\underline{P}_2$ , avec amplitudes des tensions fixées et sans les contraintes de puissance réactive . . . . .	150
4.5	Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF <sub>1</sub> ) et ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) pour différentes valeurs de $\underline{Q}_1$ , avec amplitudes des tensions fixées et avec les contraintes de puissance réactive . . . . .	151
4.6	Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF <sub>1</sub> ) et ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) pour différentes valeurs de $\overline{P}_1$ avec amplitudes des tensions variables . . . . .	152
4.7	Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF <sub>1</sub> ) et ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) pour différentes valeurs de $\underline{P}_1$ , avec amplitudes des tensions variables et sans contraintes de puissance réactives . . . . .	153

4.8	Comparaison des valeurs optimales des problèmes $(OPF_1)$ et $(\overline{OPF_2})$ pour différentes valeurs de $Q_2$ , avec amplitudes des tensions fixées et avec les contraintes de puissance réactive . . . .	154
-----	---	-----

# Introduction générale

## Motivations et contexte

### Motivations

La conception et la gestion des réseaux électriques de transport et de distribution a pour objectif l'acheminement de l'électricité depuis les producteurs jusqu'aux consommateurs, qu'ils soient clients (industries, commerces) ou usagers (collectivités, particuliers), tout en garantissant un bon niveau de qualité, de sécurité et, ce, au meilleur coût.

Les demandes en besoins énergétiques sont devenues de plus en plus pressantes ces dernières décennies : la forte croissance de la population mondiale a entraîné une augmentation de la production industrielle et il est nécessaire

- d'assurer la fiabilité et la qualité de l'approvisionnement énergétique avec des besoins accrus ;
- de maintenir l'énergie à un niveau accessible, malgré l'augmentation régulière du coût de l'énergie électrique (partout dans le monde) ;
- de tenir compte des exigences écologiques et industrielles en termes de sécurité, dans l'exploitation des installations énergétiques.

Ces situations nouvelles conduisent à reconsidérer ou à adapter la conception des réseaux électriques de distribution en intégrant

- le déploiement massif de la production décentralisée avec l'incorporation des énergies renouvelables et la possibilité d'installer des sources d'énergie à proximité des consommateurs ;
- la diversité des usages énergétiques avec le développement des véhicules électriques s'appuyant sur les progrès en stockage de l'énergie.

Cependant ces productions renouvelables (solaire, éolien) sont intermittentes et elles représentent un nombre important de points d'injection, de faible puissance, et n'ont qu'une faible prévisibilité.

La prise en compte de ces éléments dans le but d'assurer la planification et la gestion des réseaux de distribution est un défi majeur, notamment lorsqu'il s'agit d'intégrer les ressources énergétiques locales. En effet, la présence de ces dernières impacte les réseaux de distribution sur lesquels elles sont raccordées : des incertitudes apparaissent sur les profils de tension et sur les pics de consommation, ce qui peut conduire à la violation des limites réglementaires ou techniques (voir [22]). Il est donc nécessaire d'imaginer des solutions novatrices à ces problèmes, tout en maintenant la sécurité globale de l'ensemble du réseau

et dans les meilleures conditions économiques.

Pour répondre à ces défis, les réseaux classiques de distribution sont amenés à évoluer vers les réseaux électriques dit intelligents, appelés aussi les « Smart Grids ». Pour y parvenir, plusieurs changements doivent s’opérer au sein des réseaux de distribution, allant de leur structure jusqu’à leur fonctionnement. En particulier, ces réseaux doivent être flexibles et réactifs au niveau de la consommation, mais également de la production d’énergies traditionnelles et renouvelables, des moyens de stockage, de sorte à favoriser les interactions entre les acteurs du marché. Ils peuvent utiliser pour cela les technologies de l’information et de communication comme les compteurs communicants (compteurs Linky et IBOX).

## Le projet VERTPOM

C’est dans ce contexte que s’inscrit le projet VERTPOM (Véritable énERgie du Territoire POSitif et Modulaire), lancé en juin 2017 avec le soutien du Programme d’Investissements d’Avenir opéré par l’ADEME. Ce projet a pour objectif de proposer un nouveau système de gestion des réseaux de distribution d’énergie, basé sur le développement d’un outil d’aide à la décision intelligent et dynamique, baptisé VERTPOM-BANK ou BANQUE DE L’ENERGIE. Cet outil expérimental permettra, d’une part, de maintenir un bilan optimisé entre l’énergie disponible issue de la production (traditionnelle et renouvelable) au regard des utilisations (consommations et pertes), en liaison avec les moyens de stockage énergétique. D’autre part, ce système de gestion visera à faciliter l’utilisation des énergies renouvelables propres à chaque territoire, afin de les rendre moins dépendants des énergies traditionnelles, leur permettant ainsi de devenir à « énergie positive », c’est-à-dire produisant plus d’énergie qu’ils n’en consomment.

La banque de l’énergie est basée sur des algorithmes de prédiction de la production de l’énergie traditionnelle, de l’énergie renouvelable, de la consommation et des pertes dans le système de distribution. Elle s’appuie également sur des algorithmes d’aide à la décision qui reposent sur les prédictions antérieures, sur le prix d’achat et/ou de production d’énergie, sur les capacités techniques du réseau (types de câbles et longueurs, section, etc) ; ils prennent aussi en compte la capacité de stockage installée et permettent ainsi d’envisager une gestion optimale de l’énergie dans le territoire. Tout ces algorithmes exploitent une base commune de données fournies par le gestionnaire d’énergie dans le territoire concerné.

## Objectif de la thèse

L’objectif de cette thèse est de proposer des modèles d’optimisation de systèmes de distribution d’énergie, et de fournir des outils de simulation à échelle

réduite puis à échelle réelle. Ces outils seront utilisés pour l'optimisation du fonctionnement en temps réel d'un réseau de distribution. Ils permettront d'évaluer les besoins en stockage et en énergie renouvelable en vue d'obtenir un territoire à énergie positive tout en respectant les contraintes physiques du réseau mais aussi les contraintes économiques. Plusieurs modèles sont considérés, chacun d'eux correspondant à une granularité du réseau ; ils sont étudiés, leur optimalité est analysée mathématiquement et des algorithmes de résolution numérique effective sont proposés, étudiés et mis en œuvre.

## Organisation du manuscrit

Les deux premiers chapitres sont dédiés à des mises en contexte. Le chapitre 1 contient une description synthétique des modèles de réseaux de distribution d'électricité, et notamment ceux considérés dans le travail de thèse. Le chapitre 2 est une présentation générale des problèmes et méthodes d'optimisation sous forme de survol ; cela permet de placer les types de problèmes d'optimisation considérés dans leur contexte et aussi de mettre en évidence les algorithmes de résolution que nous avons utilisés. Les chapitre 3 et 4 contiennent les contributions originales de la thèse : le chapitre 3 porte sur le développement et l'analyse d'un modèle de type macroscopique, ainsi que sur la construction d'algorithmes d'optimisation associés, comme celui à fenêtre glissante ; le chapitre 4 porte, lui, sur les modèles microscopiques (problème SDP), on effectue une analyse rigoureuse<sup>1</sup> des conditions d'optimalité après avoir réalisé une relaxation convexe du problème initial. En particulier, nos deux résultats principaux donnent des hypothèses suffisantes pour que cette relaxation soit exacte (équivalence avec le problème de départ).

Nous allons maintenant présenter plus en détails le contenu de chaque chapitre.

### Chapitre 1

Ce chapitre a pour vocation d'introduire le domaine d'application de la thèse, c'est à dire la modélisation des réseaux de distribution d'électricité.

On commence par rappeler les différentes formes de production d'énergie électrique (fossiles, nucléaire et renouvelable) et on établit leurs avantages et inconvénients respectifs. On définit ensuite le réseau de distribution et son positionnement dans le réseau électrique, ainsi que les différents acteurs en présence (le fournisseur, le gestionnaire et les consommateurs). On présente alors les réseaux de distributions intelligents et la nécessité de transition des réseaux de distribution traditionnels vers ce nouveau concept de réseau, pour pouvoir faire face aux différents défis techniques, sécuritaires et écologiques. Enfin, une partie

---

1. que nous n'avons pas trouvée dans la littérature

est dédiée au stockage de l'énergie, en particulier au rôle majeur qu'il peut jouer dans le fonctionnement des réseaux de distribution intelligents.

On peut alors introduire différents types d'outils et de modèles mathématiques qui permettent de construire les modèles de réseaux de distribution, préalable à leur analyse, et au développement de stratégies de gestion et de planification. À cet effet, on rappelle d'abord quelques notions de base en électricité, indispensables à l'obtention des modèles que l'on présente de manière hiérarchisée selon le degré de description :

- le modèle macroscopique où l'on ne considère que l'aspect temporel et on néglige l'aspect spatial ;
- le modèle microscopique où l'aspect spatial est considéré, c'est-à-dire que toute la topologie du réseau est prise en compte ;
- le modèle mésoscopique où la spatialité du réseau est prise en compte mais de façon plus grossière qu'à l'échelle microscopique, en regroupant certains secteurs, par exemple des quartiers ou des des secteurs industriels.

Pour chacun de ces modèles, on décrit leur obtention ainsi que l'intérêt de leurs utilisations respectives, en s'appuyant sur la littérature dédiée.

Enfin, on conclut ce chapitre en donnant les différentes stratégies que peuvent employer les gestionnaires afin de pouvoir exploiter au mieux ces modèles et outils, pour une gestion optimale du réseau.

## Chapitre 2

Quelque soit l'échelle de description du réseau considérée, la meilleure stratégie de gestion s'obtient comme solution d'un problème d'optimisation sous contraintes, où la fonction coût représente un objectif donné (économique, technique, etc), et les contraintes traduisent des limitations physiques (capacité maximale de stockage, limitation de flux de puissance dans une ligne de transmission, etc). Pour mieux identifier les problèmes d'optimisation qui seront traités, nous présentons un bref survol organisé autour d'une classification des problèmes ainsi que des méthodes de résolution associées. Seule l'optimisation uni-critère sera considérée. Nous mettrons en exergue les algorithmes utilisés dans les chapitre 3 et 4.

Plus précisément, ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, on effectue une classification des problèmes d'optimisation selon la forme de la fonction objectif, des contraintes et du domaine de résolution, et on présentera ensuite les algorithmes principaux adapté à chaque classe de problème.

On présentera ensuite des notions et résultats classiques en optimisation non-linéaire, sans et avec contraintes. Ces résultats permettent d'établir l'existence et l'unicité des solutions. Ils permettent aussi de donner des caractérisations de solutions (conditions d'optimalités), sur lesquelles s'appuie la construction des algorithmes de résolution. On présentera après quelques méthodes effectives en

optimisation non-linéaire comme les algorithmes de type gradient ou de type Newton.

Une partie sera dédiée à l'optimisation linéaire. On définira la forme générale de ces problèmes et, comme dans le cas non-linéaire, on donnera des résultats théoriques permettant d'assurer l'existence de solutions, ainsi que de caractériser ces solutions. On décrira ensuite l'algorithme du simplexe qui permet de résoudre ces problèmes.

Enfin, dans une dernière partie, on s'intéressera aux problèmes d'optimisation semi-définie positive. Ces problèmes sont assez particuliers du fait que la variable de décision est une matrice symétrique. On définira la forme générale de ces problèmes, notamment le problème primal et le problème dual. Une partie théorique sera consacrée à l'existence et la caractérisation des solutions. On décrira ensuite l'algorithme de points intérieurs, particulièrement efficace pour la résolution de ces problèmes.

## Chapitre 3

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des modèles macroscopiques de réseaux de distribution avec des unités de stockage d'énergie. Ces modèles s'obtiennent en omettant les dépendances spatiales et en regroupant les nœuds de même nature (voir figure 3.1). Le gestionnaire du réseau est chargé d'importer de l'électri-

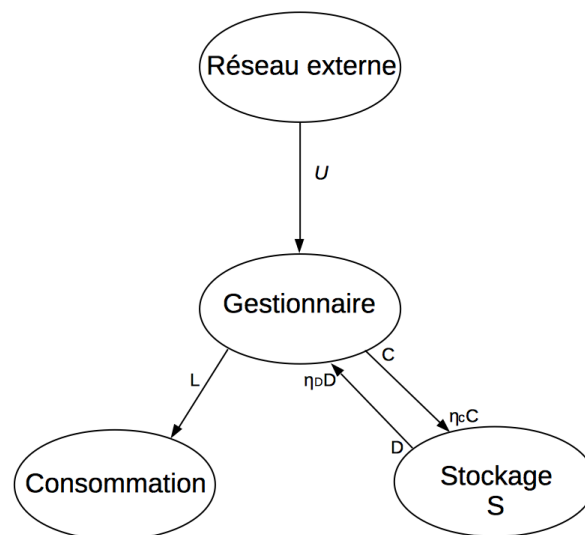


FIGURE 1 – Modèle macroscopique de système de distribution

cité d'un réseau externe et ensuite de la distribuer aux consommateurs finaux (les clients et usagers). Il peut aussi décider d'importer un surplus d'énergie et la stocker, notamment quand le prix de celle-ci est bas ; il peut également utiliser l'énergie disponible dans le stockage pour fournir les consommateurs, notamment quand le prix est élevé.



Le but de ces modèles est d'étudier l'impact de l'utilisation du stockage d'énergie sur l'économie du réseau. Pour cela, on considère dans un premier temps, un problème d'optimisation linéaire, où la fonction objectif représente le coût d'achat d'énergie sur une période de temps donnée. On appellera ce problème le modèle sans abonnement. Pour  $S_0 \in [S_{min}, S_{max}]$  un état de stockage initiale donnée, ce problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{C, D \in \mathbb{R}^N} \quad & \sum_{i=1}^N P_i(L_i + C_i - \eta_D D_i), \\ \text{s.c. } \forall 1 \leq i \leq N, \quad & \begin{cases} S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i, \\ S_{min} \leq S_i \leq S_{max}, \\ 0 \leq C_i \leq C_{max}, \\ 0 \leq D_i \leq D_{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

où  $C$  et  $D$  sont les variables de décision et représentent les opérations charge et décharge du stockage;  $S_i$  est l'état de charge du stockage au temps  $t_i$ ;  $P_i$  est le prix moyen de l'énergie importée sur  $[t_{i-1}, t_i]$  et  $L_i$  est la consommation moyenne sur  $[t_{i-1}, t_i]$ .

La figure 2 est une illustration du modèle (P1), pour une durée de temps de 24 heures. La figure 2 (a) représente l'évolution de l'état de charge du stockage avec la courbe du prix et la figure 2 (b) représente l'évolution de la puissance importée avec la courbe de prix et la courbe de consommation.

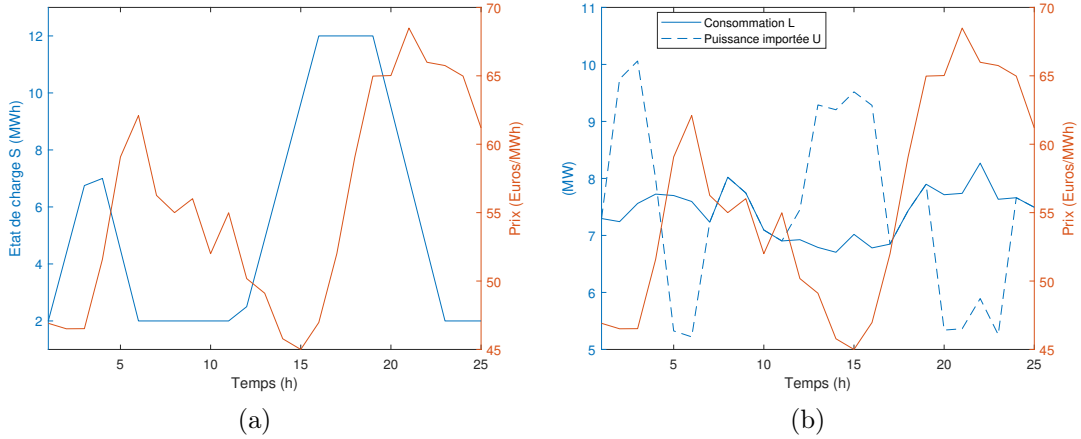


FIGURE 2 – (a) Variation de l'état de charge par rapport à la variation de la courbe de prix, (b) variation de la puissance importée par rapport à la variation de la courbe de prix et de consommation pour le modèle (P1)

On introduit alors un deuxième modèle à partir du premier, en modifiant la fonction objectif de manière à ce que l'objectif économique soit plus réaliste et tienne compte des possibilités d'abonnement. La formulation de ce modèle se basera sur les hypothèses suivantes : on suppose que le gestionnaire a souscrit

un abonnement pour une puissance donnée  $U_{ab}$  ; on suppose de plus que le prix de cet abonnement est constant et n'a aucune influence sur le problème d'optimisation correspondant. Cet abonnement est basé sur l'alternative suivante :

- si la puissance importée  $U_i$  ne dépasse pas  $U_{ab}$ , son prix est  $P_i$  ;
- sinon, la puissance importée  $U_i$  est toujours importée au prix  $P_i$ , mais la puissance excessive  $U_i - U_{ab}$  est pénalisée d'un surcoût  $Q_i$ .

On appellera ce problème le modèle avec abonnement, il s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{C, D \in \mathbb{R}^N} & \sum_{i=1}^N P_i(L_i + C_i - \eta_D D_i) + \sum_{i=1}^N Q_i(L_i + C_i - \eta_D D_i - U_{ab})^+, \\ \text{s.c. } \forall 1 \leq i \leq N, & \begin{cases} S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i, \\ S_{min} \leq S_i \leq S_{max}, \\ 0 \leq C_i \leq C_{max}, \\ 0 \leq D_i \leq D_{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

où la notation  $x^+$  désigne la partie positive du réel  $x$ .

La figure 3 est une illustration du modèle (P2), pour une durée de temps de 24 heures. La figure 3 (a) représente l'évolution de l'état de charge du stockage avec la courbe du prix et la figure 3 (b) représente l'évolution de la puissance importée avec la courbe de prix et la courbe de consommation.

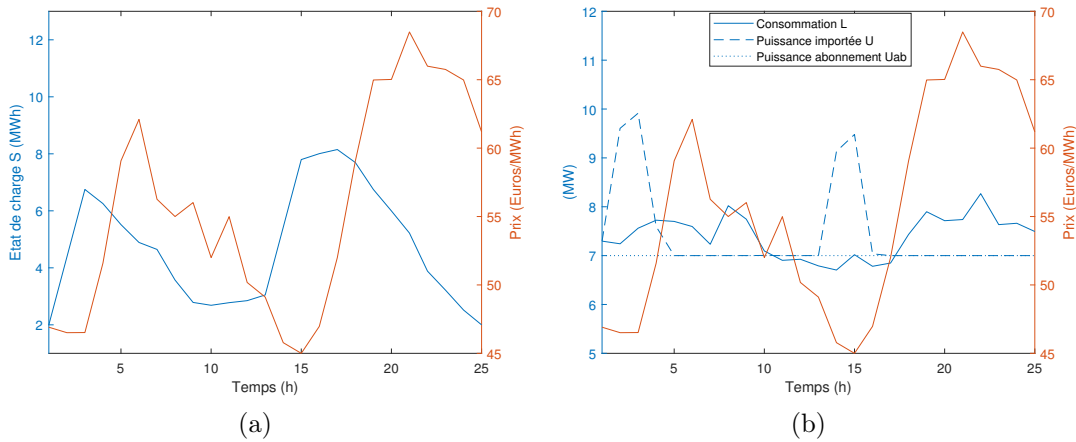


FIGURE 3 – (a) Variation de l'état de charge par rapport à la variation de la courbe de prix, (b) variation de la puissance importée par rapport à la variation de la courbe de prix et de consommation pour le modèle (P2)

Les deux problèmes présentés précédemment n'admettent pas nécessairement une unique solution car leurs fonctions objectifs ne sont pas strictement convexes. Néanmoins nous allons démontrer deux propriétés qualitatives satisfaites par leurs solutions et présentées dans les théorèmes 0.1 et 0.2.

**Théorème 0.1.** Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P1) ou (P2). Alors  $C_i^* D_i^* = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

**Théorème 0.2.** Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P1) ou (P2) et  $S^* = S_0 + \sum_{k=1}^i (\eta_C C_k - D_k)$  l'état de charge associé. On a l'alternative suivante :

- (i) Si  $N \leq (S_0 - S_{min})/D_{max}$ , alors  $S_N^* = S_0 - ND_{max}$  ;
- (ii) Si  $N > (S_0 - S_{min})/D_{max}$ , l'état de charge du stockage revient à sa valeur minimale au temps  $N$ , i.e.  $S_N^* = S_{min}$ .

Nous proposerons ensuite un algorithme à fenêtre glissante qui a pour objectif de réduire le temps de calcul avec pour objectif de faire des simulations en temps réel. Cet algorithme est inspiré principalement des méthodes de décomposition de domaine (voir [96]), il est basé sur des principes similaires à certaines méthodes existantes telles que « Limited Foresight » et « Myopic Approach » (voir [59, 85]). La méthode proposée consiste à calculer une succession de solutions optimales sur une grille de temps échelonnés, en permettant à deux sous-intervalles successifs de se chevaucher. On construit la solution du problème global en concaténant les solutions obtenues dans les sous-intervalles.

Cet algorithme repose sur le choix de deux paramètres : la longueur de la fenêtre temporelle  $L$  et la longueur du recouvrement  $r$ . La figure 4 illustre le fonctionnement de l'algorithme proposé dans les premières itérations. La première itération génère une solution sur l'intervalle de temps  $[[a_0, b_0]] = [[0, L]]$ . L'état de charge à l'instant  $L - r$  est utilisé comme condition initiale pour la deuxième itération, qui est ensuite calculée sur l'intervalle  $[[a_1, b_1]] = [[L - r, 2L - r]]$ . Enfin, on discutera de l'influence des paramètres  $L$  et  $r$  sur l'efficacité de notre

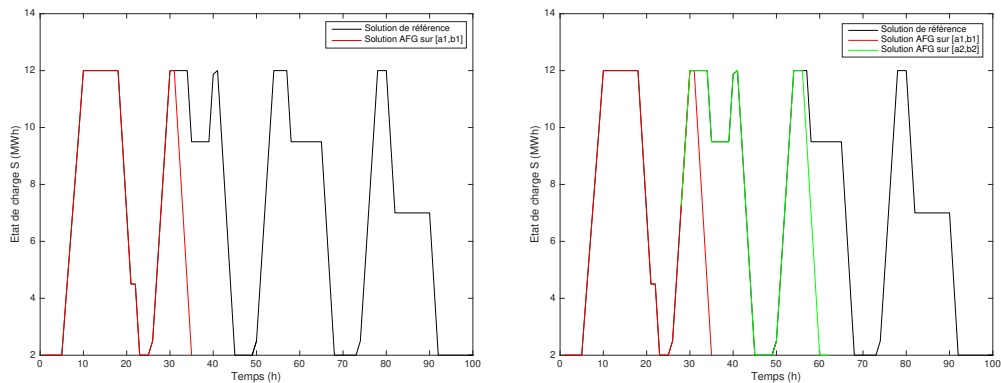


FIGURE 4 – La première itération (à gauche) et la seconde itération (à droite) de l'algorithme à fenêtre glissante

algorithme.

## Chapitre 4

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des modèles microscopiques de réseaux de distribution. Celui-ci est modélisé par un graphe connexe sans cycle  $\Sigma = (S, E)$

(voir figure 5), où  $S$  est l'ensemble des nœuds du réseau et  $E$  est l'ensemble des arêtes représentant les lignes de transmission du réseau. L'électricité circule à travers ce réseau selon les lois de Kirchhoff.

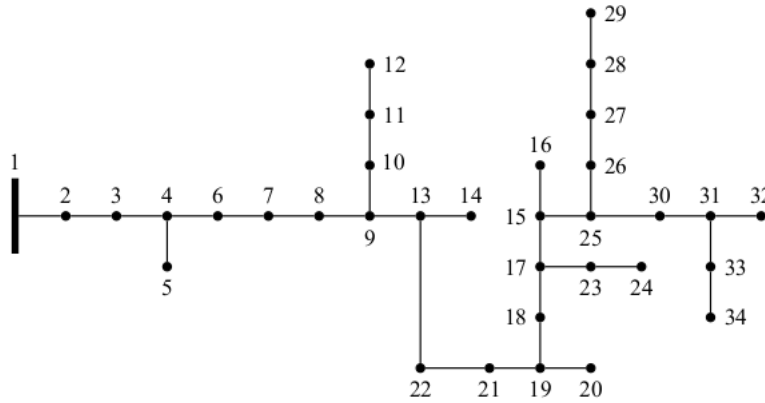


FIGURE 5 – Exemple de graphe d'un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60]

Contrairement aux modèles macroscopiques, les contraintes et les pertes en lignes de transmission sont ici prises en compte. Ces modèles, aussi connus sous le nom de AC-OPF, sont utilisés dans la littérature pour plusieurs objectifs : économique tel que la minimisation des coûts de production ou d'importation d'énergie, de sécurité tel que le maintien d'un profil de tension constant et des objectifs techniques tel que la minimisation des pertes de puissance active et/ou réactive dans le réseau.

Le problème d'optimisation qui nous intéresse consiste à calculer les flux de puissances dans le réseau de manière à minimiser la fonction objectif, sous certaines contraintes de transmission, d'injection et de sécurité du réseau. Le calcul de ces flux se fait avec des équations, dites de flux de puissances, qui apparaissent comme contraintes d'égalités dans le problème. Ces équations dépendent de la tension complexe en chaque nœud du réseau, elles sont non-convexe et donc rendent le problème aussi non-convexe. Par conséquent, le problème ainsi défini est difficile à résoudre. On peut en effet être amené à calculer un minimum local et non global.

Pour contourner ce problème, on « convexifie » le problème via une relaxation convexe. On effectue cette relaxation en remplaçant l'ensemble des contraintes non-convexes du problème par un ensemble convexe le contenant, et dont on connaît une représentation algébrique utilisable en pratique. Pour cela, on écrit le problème d'optimisation qui nous intéresse, après certaines reformulations,

sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
& \min_{W \in \mathbb{H}_m^+} \widehat{J}(W), \\
\text{s.c. } & \underline{V}_i \leq \sqrt{W_{i,i}} \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in S & (a) \\
& \underline{P}_i \leq \text{Tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in S & (b) \quad (\text{OPF}_2) \\
& \text{Tr}(B^{ik} W) + \text{Tr}(B^{ki} W) \leq \overline{F}_\ell, \quad \forall \{i, k\} = \psi(\ell) \in E, & (c) \\
& \text{rang}(W) = 1, & (d)
\end{aligned}$$

où  $\mathbb{H}_m^+$  est l'espace des matrices hermitiennes d'ordre  $m$  semi-définies positives,  $B^i$  et  $B^{ik}$  sont des matrices hermitiennes d'ordre  $m$  données;  $\widehat{J}$  est une fonctionnelle convexe. La contrainte (a) représente une limitation physique de l'amplitude de la tension; la contrainte (b) représente une limitation sur la puissance active injectée en chaque noeud  $i$  et enfin, la contrainte (c) est une limitation sur le flux de puissance active sur chaque ligne de transmission  $\{i, k\}$ .

La contrainte (d) rend le problème ( $\text{OPF}_2$ ) non-convexe. En retirant cette contrainte, on obtient une relaxation convexe :

$$\begin{aligned}
& \min_{W \in \mathbb{H}_m^+} \widehat{J}(W), \\
\text{s.c. } & \underline{V}_i \leq \sqrt{W_{i,i}} \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in S & (a) \quad (\overline{\text{OPF}}_2) \\
& \underline{P}_i \leq \text{Tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in S & (b) \\
& \text{Tr}(B^{ik} W) + \text{Tr}(B^{ki} W) \leq \overline{F}_\ell, \quad \forall \{i, k\} = \psi(\ell) \in E. & (c)
\end{aligned}$$

Le problème d'optimisation obtenu est semi-défini positif et on peut le résoudre avec des algorithmes efficaces (tels que l'algorithme de points intérieurs). Cette méthode est appelée une relaxation SDP.

La solution du problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) n'est pas nécessairement de rang 1. Le but du travail qui suivra consiste à établir certaines hypothèses, sous lesquelles la solution du problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) soit de rang 1. Ces résultats constituent le cœur de ce chapitre et notre contribution. La stratégie suivie est la suivante :

D'abord on considère un problème où les amplitudes des tensions sont fixées, c'est-à-dire  $\underline{V}_i = \overline{V}_i$ . On obtient le résultat suivant (les notations  $b_{ik}$  et  $g_{ik}$ ) seront introduites dans les chapitres 1 et 4) :

**Théorème 0.3.** *On considère un graphe connexe et sans cycle. On suppose que pour toute arête  $\{i, k\} \in E$ , on a  $\overline{\theta}_{ik} \leq \arctan\left(\frac{b_{ik}}{g_{ik}}\right)$ . Alors on distingue trois cas :*

1. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang 1, il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et  $(|v|, \arg(v))$  est solution du problème ( $\text{OPF}_2$ ).*
2. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang au moins égal à 2, alors le problème ( $\text{OPF}_2$ ) n'est pas réalisable.*
3. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) n'est pas réalisable, alors le problème ( $\text{OPF}_2$ ) n'est pas réalisable.*

Dans un second temps, on démontre un résultat similaire dans le cas où les amplitudes des tensions sont variables, c'est-à-dire  $0 < \underline{V}_i \leq \overline{V}_i$ , pour tout  $i \in S$ . On obtient le résultat suivant :

**Théorème 0.4.** *On considère un réseau de distribution dont le graphe est connexe et sans cycle. On suppose que  $\underline{P}_i = -\infty$ , pour tout  $i \in S$ . Alors on distingue deux cas :*

1. *Si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  admet une solution  $W$  de rang 1, il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et  $(|v|, \arg(v))$  est solution du problème  $(\text{OPF}_2)$ .*
2. *Si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  n'est pas réalisable, alors le problème  $(\text{OPF}_2)$  n'est pas réalisable.*

La démonstration de ces deux théorèmes nécessite l'étude de la géométrie de l'ensemble admissible du problème  $(\text{OPF}_2)$ , via sa frontière de Pareto.

On s'appuie sur la notion de points Pareto-optimaux définis de la manière suivante :

**Définition 0.5.** *Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Un point  $x \in \mathcal{A}$  est dit Pareto-optimal dans  $\mathcal{A}$  si*

$$\{y \in \mathcal{A} : y \prec x\} = \emptyset,$$

où la notation  $x \prec y$  signifie que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i \leq x_i \text{ et } \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } y_i < x_i.$$

On notera  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$  l'ensemble des points  $x \in \mathcal{A}$  qui sont Pareto-optimaux dans  $\mathcal{A}$ . Cet ensemble est appelé la frontière de Pareto de  $\mathcal{A}$ .

L'intérêt de l'utilisation de la notion de frontière de Pareto est que le minimum d'une fonction strictement croissante sur un ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$  est atteint sur  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Donc, pour montrer que les problèmes  $(\text{OPF}_2)$  et  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  ont la même solution, on cherchera à démontrer que  $\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}(\mathcal{M})$ , où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble admissible du problème  $(\text{OPF}_2)$  et  $\mathcal{M}$  est l'ensemble admissible du problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$ .

L'idée de ce raisonnement a été inspiré de [63, 64, 107]. Néanmoins, on donne dans ce travail des fondements théoriques qui permettent de donner des démonstrations rigoureuses du point de vue mathématique de ces résultats.

La relation  $\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}(\mathcal{M})$  est tout à fait non triviale à démontrer. Pour cela, on étudiera d'abord un réseau à deux nœuds. Cette étude nous donnera une idée de ce que peuvent être les hypothèses, sous lesquelles la relation  $\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}(\mathcal{M})$  est satisfaite. Ensuite, cette étude sera généralisée sur le réseau tout entier, pour le cas d'amplitudes des tensions fixées, et ensuite dans le cas des amplitudes des tensions variables.

Enfin, on conclura ce chapitre avec quelques expériences numériques pour mettre en évidence les résultats théoriques annoncés.



# Chapitre 1

## Modélisation des réseaux de distribution

### 1 Introduction

Les réseaux électriques de distribution connaissent de nombreux changements dus à l'arrivée massive de la production décentralisée, à l'ouverture des marchés de l'énergie, aux contraintes environnementales de plus en plus strictes, aux nouvelles technologies d'information et de communication et aux autres nouveaux matériels du réseau, tels que les véhicules électriques. Les gestionnaires des réseaux sont amenés à faire évoluer les méthodes et outils de planification et de gestion déjà existants dans les réseaux électriques. En effet, ces changements induisent de nombreuses incertitudes dans les systèmes de distribution, par exemple les incertitudes sur la production lorsque des énergies renouvelables sont intégrées, les incertitudes sur la consommation, ou encore les incertitudes sur les prix d'achat de l'énergie au fournisseur. Pour cela, il est nécessaire de développer des stratégies de planification et de gestion des réseaux de distribution, qui tiennent compte de ces changements et de ces incertitudes.

L'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu sur la modélisation des réseaux de distribution d'électricité, notamment les outils mathématiques permettant de les décrire ainsi que les différentes stratégies pour exploiter ces outils en vue d'avoir une gestion efficace du réseau. Il s'organisera comme suit. Dans la partie 2, on présentera les différents types d'énergie électrique : traditionnelle et renouvelable. Dans la partie 3, on présentera le réseau de distribution et son positionnement dans le réseau électrique, les différents acteurs au sein d'un réseau de distribution (le gestionnaires et les consommateurs) et son développement dans le cadre des Smart Grid. On parlera aussi du stockage de l'énergie et de ses différentes applications au sein d'un réseau de distribution. La partie 4 sera consacrée à définir les différents outils et méthodes mathématiques permettant d'étudier les réseaux de distribution. On définira une hiérarchie de modèles selon le degré de description du réseau : le modèle macroscopique, le modèle mésoscopique et le modèle microscopique. Enfin, on terminera par quelques conclusions dans la partie 6.



## 2 Production de l'énergie électrique

### 2.1 Les énergies fossiles

La combustion du charbon, du pétrole et du gaz naturel demeure aujourd'hui le premier mode de production de l'électricité dans le monde. Plus de 60% de l'électricité mondiale est produite de cette façon. Le principal avantage de ce type de production d'énergie est qu'elle est contrôlable, car elle ne dépend que des combustibles. Cela permet donc d'ajuster la production en temps réel avec la demande.

Cependant, l'utilisation des combustibles fossiles pour la production d'électricité présente plusieurs inconvénients. En premier lieu, c'est un procédé très polluant, qui relâche une quantité importante de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère et contribue ainsi significativement au réchauffement climatique. D'autre part, le stock mondial des combustibles fossiles étant fini et non-renouvelable, ce type de production n'est pas inépuisable.

### 2.2 L'énergie nucléaire

L'énergie nucléaire est obtenue par fission de l'atome (essentiellement de l'uranium) et représente environ 10% de la production mondiale d'électricité. Comme les énergies fossiles, il s'agit d'un mode de production contrôlable. Ce moyen de production ne rejette pas de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère et ne contribue donc pas au réchauffement climatique.

L'énergie nucléaire soulève par contre d'autres difficultés, comme la sécurité des installations et le stockage des déchets radioactifs qu'elle produit. Enfin, le stock mondial d'uranium étant lui aussi fini, l'énergie nucléaire telle qu'elle existe aujourd'hui n'est pas inépuisable non plus. Notons que de nouvelles techniques comme la production d'électricité par fusion nucléaire permettraient de s'affranchir de certaines de ces difficultés. Ces techniques sont cependant encore à l'état de recherche expérimentale (voir projet ITER [54]) et loin des applications industrielles.

### 2.3 Les énergies renouvelables

Les énergies renouvelables sont des formes d'énergies inépuisables : la consommation ne limite pas son utilisation future. Cette forme d'énergie est souvent induite par des phénomènes naturels abondamment répartis dans la nature tels que le soleil, le vent, la mer et les cours d'eau. Des installations d'unités de conversion sur de nombreux sites permettent de capturer ces énergies et de les convertir en énergie électrique. On peut mentionner notamment les panneaux photovoltaïques pour le soleil, les parcs éoliens pour le vent et les centrales hydrauliques pour les cours d'eau. La puissance totale injectée au réseau (de

transport et/ou de distribution) dépend du nombre d'installations et de leur disponibilité.

Les énergies renouvelables sont une véritable alternative aux énergies traditionnelles. D'abord, elles sont propres, car elles émettent très peu de gaz à effet de serre et ne produisent pas de déchets. Elles sont inépuisables et ne dépendent pas de ressources dont le stock est limité, comme le pétrole ou l'uranium. Enfin, elles autorisent une production décentralisée, adaptée à la fois aux ressources et aux besoins locaux et elles offrent une grande indépendance énergétique [40].

Le type d'énergie renouvelable qui fournit actuellement le plus d'énergie dans le monde est l'hydroélectricité. Cependant, dans de nombreux pays, la capacité de production des centrales hydroélectriques ne peut plus être significativement augmentée. Par ailleurs, la production d'énergie hydroélectrique dépend de l'importance des dénivelés et nécessite donc une géographie particulière (region montagneuse). En revanche, la production d'électricité par éoliennes et panneaux photovoltaïques est en plein essor et dispose encore d'une marge de progression importante. Cependant ces deux sources d'énergie dépendent fortement des conditions météorologiques. En effet, une éolienne produit de l'électricité à partir de l'énergie cinétique induite par le vent qui entraîne les pales de la turbine. Quant aux panneaux photovoltaïques, c'est l'énergie du rayonnement solaire qui est convertie en électricité. Par conséquent, ces énergies sont donc non contrôlables. Néanmoins, il existe dans la littérature des modèles de prédiction pour la production renouvelable d'électricité en fonction des conditions météorologiques. Les auteurs de [48] et de [11] proposent une étude bibliographique sur les modèles de prévision d'énergie existant à la fois pour les panneaux photovoltaïques et pour les éoliennes.

## 3 Les réseaux de distribution

### 3.1 Positionnement du système de distribution dans le réseau électrique

Un réseau électrique dans sa globalité est conçu pour acheminer l'énergie depuis les centrales de production jusqu'aux consommateurs. Il est structuré en trois parties : le réseau de transport, le réseau de répartition et le réseau de distribution, voir figure 1.1.

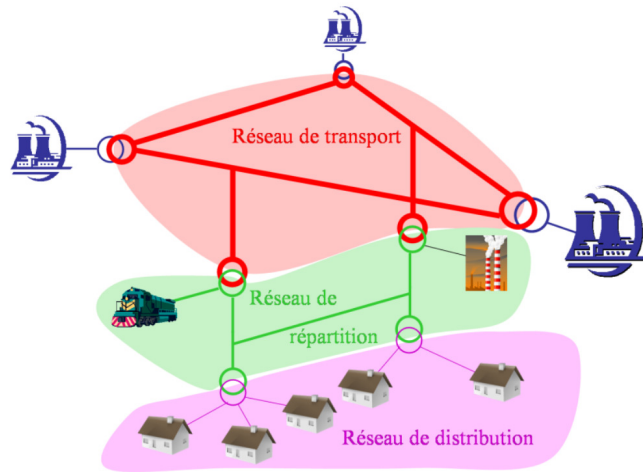


FIGURE 1.1 – Le réseau électrique [5]

Le réseau de transport a pour objectif de transporter de grandes quantités d'énergie sur de très longues distances. Le réseau de répartition sert à répartir l'énergie sur les différentes régions. Il relie le réseau de transport aux gros clients industriels et aux réseaux de distribution. Enfin, le réseau de distribution a pour rôle d'acheminer l'énergie depuis le réseau de répartition vers les consommateurs finaux (voir [5, 89]). Aux jonctions entre ces différents réseaux, des transformateurs permettent de modifier le niveau de tension de l'énergie transportée.

Il existe deux niveaux de tension dans un réseau de distribution : moyenne tension et basse tension. En France, le réseau de distribution moyenne tension (HTA) varie de 1 à 50 kV. Le système de distribution basse tension (BT) varie entre 50 et 1000 V et la tension de raccordement standard de la plupart des clients est de 230 V (voir [5]). Les transformations interviennent dans les postes source, points de départ du réseau de distribution. L'électricité est distribuée en moyenne tension pour les clients commerciaux (hôpitaux, industries...). Pour les autres clients, notamment dans les zones résidentielles, l'électricité est convertie en basse tension par des postes de transformation HTA/BT avant d'être livrée.

### 3.2 La consommation d'énergie

La consommation d'énergie dans un réseau de distribution, également appelée charge, consiste à utiliser l'énergie électrique pour exécuter une fonction. Cette consommation va des appareils électroménagers aux machines industrielles. L'évolution de la consommation du système électrique au cours du temps, c'est-à-dire la variation de la puissance consommée ou du courant dans le réseau en fonction du temps, s'appelle la courbe de charge. La consommation d'énergie déterminée par la puissance nominale des utilisateurs peut être vue comme une quantité aléatoire qui peut prendre diverses valeurs avec une certaine

probabilité. Cette incertitude peut vite devenir problématique lors de la modélisation d'un réseau de distribution. Pour cela, plusieurs méthodes de prévision des courbes de consommation ont été développées (voir par exemple [41]).

### 3.3 Les gestionnaires des réseaux de distributions

Dans les systèmes de distribution d'électricité, les consommateurs résidentiels, industriels et commerciaux peuvent utiliser l'électricité à tout moment de la journée. Ils souscrivent à une consommation électrique maximale puis paient leur consommation totale d'électricité en kWh. Néanmoins, ils ne peuvent pas acheter leur énergie électrique directement sur le marché. Un gestionnaire du réseau de distribution d'énergie (GRD) est alors chargé des transactions d'énergie électrique et fournit celle-ci jusqu'à l'utilisateur final. Il contrôle aussi les moyens de production d'énergies locales, tels que les générateurs, les énergies renouvelables et éventuellement les dispositifs de stockage. Enfin, il doit maintenir un équilibre entre la puissance importée et les besoins des consommateurs à chaque instant. Il est aussi chargé du développement, de l'entretien et du fonctionnement du réseau de distribution.

En France, l'entreprise nationale EDF assure la distribution d'environ 95% de l'électricité sur le territoire français. Les 5 % restants sont couverts par 160 entreprises locales de distribution (distributeurs non-nationalisés), qui exercent leurs activités dans près de 2500 communes (voir [86]).

### 3.4 Les réseaux de distribution intelligents

Au cours de ces dernières années, la gestion des réseaux de distribution devient de plus en plus compliquée. Cela est dû à plusieurs facteurs : une croissance rapide des productions décentralisées installées sur le réseau de distribution, l'intégration des véhicules électriques et aussi la libéralisation des marchés de l'énergie [89]. Le réseau doit donc avoir plus de flexibilité pour pouvoir intégrer ces changements. C'est dans ce contexte de transformation des réseaux existants en réseaux flexibles, que sont apparus les réseaux électriques intelligents ou « Smart Grid ».

Les Smart Grid sont des réseaux de distribution d'électricité qui se basent sur la circulation d'informations entre les différents acteurs du réseau : le gestionnaire du réseau de distribution, le gestionnaire du réseau de transport et les consommateurs. Le but est d'ajuster au mieux le flux d'électricité en temps réel entre ces différents acteurs et permettre une gestion plus efficace du réseau électrique. Ils utilisent pour cela les nouvelles technologies d'information et de communication, tels que les compteurs communicants (IBOX).

L'énergie électrique ne pouvant être stockée facilement et rapidement en très grande quantité, les technologies du Smart Grid cherchent alors à ajuster en temps réel la production et la distribution (l'offre et la demande) de

l'énergie électrique, en hiérarchisant les besoins de consommation (quantités et localisations) selon leurs priorités. Cela permet :

- d'optimiser le rendement des petites centrales de production décentralisées ;
- de minimiser les pertes en lignes de transmission électrique ;
- d'éviter d'investir régulièrement dans de nouvelles lignes électriques ;
- d'optimiser l'insertion de la production décentralisée et de diminuer ou d'éliminer les problèmes induits par l'intermittence de certaines sources comme le solaire ou l'éolien (voir [31]).

### 3.5 Le stockage de l'énergie

Le stockage de l'énergie joue aussi un rôle majeur dans le fonctionnement des réseaux de distribution intelligents. Plusieurs études ont mis en évidence la flexibilité que peut apporter au gestionnaire du réseau de distribution le stockage, interfacé avec un outil d'optimisation, pour atteindre l'équilibre entre la production et/ou l'achat d'énergie et la demande. De plus, les systèmes de stockage apportent des avantages à la fois sur le plan de la sécurité et sur le plan économique pour le réseau. Ils permettent d'atténuer les changements de puissance fréquents et rapides des ressources renouvelables et donc de résoudre les problèmes de volatilité et d'intermittence associés aux énergies renouvelables.

Les auteurs de [47] analysent l'utilisation du stockage pour équilibrer la production d'énergie éolienne connectée au réseau de distribution. Dans [2], les auteurs proposent une stratégie de contrôle du stockage (charge-décharge), afin de compenser les variations de la production d'énergie solaire photovoltaïques dans les réseaux de distribution basse tension. La stratégie proposée permet d'atténuer l'impact des changements soudains de la production photovoltaïque, dus à des conditions météorologiques instables. Le stockage peut aussi être utilisé pour la régulation de la tension dans les réseaux de distribution, en présence de production décentralisée (voir [110]). Enfin, le stockage peut être utilisé pour stocker de l'énergie à des moments où le prix de l'électricité est bas et utiliser l'énergie stockée à des moments où le prix est élevé, produisant ainsi des avantages économiques pour le réseau de distribution (voir [102, 103]).

Il existe différents types de technologies de stockage d'électricité avec des caractéristiques différentes. Certains sont disponibles et d'autres encore au stade de développement. Les technologies de stockage électrique sont comparées sur plusieurs critères comme la capacité de stockage et les taux de charge et/ou de décharge. On renvoie à [73] pour une comparaison des technologies de stockage existantes, ainsi que pour l'analyse de leurs caractéristiques, leurs avantages, leurs inconvénients et leurs champs d'application.

Lors de l'étude préalable à l'installation d'un système de stockage dans un réseau, un dimensionnement optimal du système de stockage doit être effectué. Les petits systèmes de stockage peuvent ne pas être suffisants pour offrir les avantages économiques et la flexibilité souhaitée au préalable. D'autre part,

les grands systèmes de stockage imposent au réseau des coûts d'investissement et de maintenance plus élevés. Pour cela, une taille optimale pour le système de stockage doit être trouvée de façon à ce que le gain économique apportée par le système de stockage soit supérieur aux coûts d'installation et d'entretien de ce système. Dans [42], une stratégie de dimensionnement et d'exploitation optimale du système de stockage est proposée pour un réseau de distribution intelligent équipé d'unités de production d'énergie décentralisées (renouvelables et non renouvelables). Les auteurs de [71] ont fait une analyse coûts-bénéfices du stockage d'énergie pour la réduction de la demande de pointe dans les réseaux de distribution moyenne tension. Ils ont aussi analysé la sensibilité aux différents taux de croissance de la demande et aux capacités de stockage.

Enfin, la localisation du stockage joue aussi un rôle important. En effet, l'installation d'unités de stockage à des endroits non optimaux peut entraîner une augmentation des pertes de puissance en ligne, et par conséquent une augmentation des coûts et ainsi avoir un effet contraire à celui souhaité. Les auteurs de [57] proposent une méthode basée sur la sensibilité aux pertes pour un placement optimal des unités de stockage dans le système de distribution afin de réduire les pertes de puissance en ligne.

## 4 Hiérarchie de modèles du réseau de distribution

Il existe plusieurs outils mathématiques permettant d'analyser les réseaux de distribution. Un premier outil est l'analyse du flux de puissance (ou Load Flow) [9], qui permet d'étudier en détail le comportement et le fonctionnement du réseau. Les équations de flux de puissance sont aussi importantes pour quantifier l'impact de la production décentralisée sur les réseaux, permettant ainsi une planification intelligente de ces derniers.

Un autre outil, connu dans la littérature sous le nom de « economic dispatch », inclut des indicateurs technoéconomiques permettant d'évaluer les choix d'investissements, tels que des unités de stockage ou l'installation de nouvelles productions d'énergie (renouvelable ou traditionnelle), afin de répondre à la demande sur une période de temps donnée (voir par exemple [100, 101]). Cet outil utilise des formulations simplifiées et ignore les contraintes de flux de puissance, sauf dans sa variante dite « security constrained ».

Ces outils sont peu performants pour analyser les réseaux de distribution intelligents (Smart Grid). Pour cela, il existe une autre approche : la méthode OPF (Optimal Power Flow) (voir [1]). Cet outil consiste à trouver la solution optimale à une fonction objectif soumise aux contraintes de flux de puissance et autres contraintes de sécurité, telles que des contraintes de stabilité de transmission et des contraintes de tension. Ce type d'outil est similaire à l'approche « economic dispatch », dans laquelle on ajoute des contraintes de sécurité. Contrairement à l'analyse des équations de flux de puissance classiques,

qui ne prennent en compte que l'aspect spatial, la méthode OPF peut également prendre en compte la dimension temporelle. Cette dernière est importante lorsque certaines variables du problème dépendent du temps, comme c'est le cas en présence de stockage.

Dans ce travail, on va utiliser l'outil OPF, en considérant deux échelles de description du réseau de distribution : l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Une échelle intermédiaire, dite l'échelle mésoscopique, est également envisageable. Elle ne sera pas étudiée dans ce manuscrit, mais on la présentera brièvement dans ce chapitre introductif, afin de dresser un panorama complet des modèles existants. On rappelle d'abord quelques notions en électricité, qui permettront ensuite de donner un sens à ces différentes échelles pour des réseaux de distribution d'électricité.

## 4.1 Quelques notions en électricité

Dans cette partie, on présente les différentes notions et quantités physiques permettant de décrire le flux d'électricité dans un réseau. On va montrer notamment l'obtention des équations de flux de puissance à partir de la loi de Kirchoff. On renvoie le lecteur par exemple à [76] pour une description plus détaillée.

On s'intéresse à un réseau de distribution où circule un courant électrique alternatif sinusoïdal. Cela signifie que l'intensité du courant et la tension sont des fonctions sinusoïdales du temps. La description du flux d'énergie électrique dans ce réseau se fait avec la notion de puissance électrique : la quantité d'énergie électrique par unité de temps. Dans un régime alternatif sinusoïdal, on parle de puissance apparente complexe, qui est mesurée en voltampères (VA). Sa partie réelle s'appelle la puissance active et est mesurée en watts (W), et sa partie imaginaire s'appelle la puissance réactive et est mesurée en voltampères réactifs (var).

La puissance active représente la puissance nette, qui peut être utilisée pour générer du travail, par exemple pour un moteur. La notion de puissance réactive est plus compliquée à aborder puisqu'elle ne permet pas de générer de travail. Elle apparaît dans tout système ayant des composants réactifs tel que les condensateurs ou les inductances contenus dans les appareils de froid ou certains composants informatiques. On clarifiera d'avantage la notion de puissance réactive dans la suite.

Les réseaux de transport ou de distribution d'électricité sont modélisés par des graphes, où les nœuds injectent ou retirent de l'énergie. Mathématiquement, un réseau de distribution est caractérisé par le fait que le graphe associé ne contient pas de cycle.

### 4.1.1 Les équations de flux de puissance

On considère une ligne de transmission du réseau, modélisée par deux nœuds  $i$  et  $k$  et une arête  $\{i, k\}$  du graphe (voir figure 1.2).

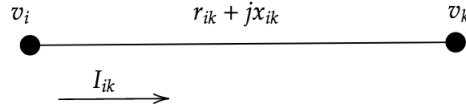


FIGURE 1.2 – Une ligne du réseau

Cette ligne peut contenir un ou plusieurs composants électriques (résistance, inductance ou capacitance). On associe aux nœuds  $i$  et  $k$  les tensions complexes  $v_i = V_i e^{j\theta_i}$  et  $v_k = V_k e^{j\theta_k}$ , avec  $V_i = |v_i|$  et  $V_k = |v_k|$ . Ici, suivant les conventions d'écriture dans le domaine de l'électricité,  $j$  désigne le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . On associe aussi à cette ligne l'impédance  $z_{ik} = r_{ik} + jx_{ik}$  où  $r_{ik}$  et  $x_{ik}$  sont respectivement la résistance et la réactance de la ligne de transmission. L'impédance électrique quantifie l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal. On dit que la ligne est

- purement résistive si  $x_{ik} = 0$ ; dans ce cas, cette ligne ne contient que des composants résistifs, c'est-à-dire qui transforment la puissance en chaleur, par exemple un lave-linge, une bouilloire électrique ou simplement un câble de transmission électrique;
- capacitif si  $x_{ik} < 0$ ; dans ce cas, cette ligne ne contient que des composants capacitifs tels que des condensateurs;
- inductif si  $x_{ik} > 0$ ; dans ce cas, cette ligne ne contient que des composants inductifs, par exemple des bobines génératrices de champs magnétiques.

L'admittance d'une ligne est définie par  $y := \frac{1}{z}$  et est mesuré en siemens (S). On écrit l'admittance  $y_{ik}$  sous la forme algébrique suivante

$$y_{ik} = g_{ik} - jb_{ik},$$

où  $g_{ik}$  est la conductance et  $b_{ik}$  la susceptance. Cette écriture algébrique de l'admittance avec un signe «  $-$  » est un choix qui permettra dans la suite de simplifier certains calculs.

L'intensité du courant parcourant la ligne  $\{i, k\}$  de  $i$  vers  $k$  est donnée par

$$I_{ik} = y_{ik}(v_i - v_k).$$

Cette dernière relation découle de la loi d'Ohm.

La puissance complexe parcourant la ligne  $\{i, k\}$  de  $i$  vers  $k$  est définie par

$$S_{ik} = v_i \overline{I_{ik}}. \quad (1.1)$$



Elle peut se décomposer sous la forme

$$S_{ik} = F_{ik} + jG_{ik},$$

où  $F_{ik}$  et  $G_{ik}$  désignent les flux de puissances respectivement active et réactive. Un rapide calcul permet d'établir

$$F_{ik} = V_i^2 g_{ik} + V_i V_k (b_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \cos(\theta_{ik})), \quad (1.2)$$

$$G_{ik} = V_i^2 b_{ik} - V_i V_k (g_{ik} \sin(\theta_{ik}) + b_{ik} \cos(\theta_{ik})), \quad (1.3)$$

où  $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$  est appelé angle de phase. Les équations (1.2) et (1.3) s'appellent les équations de flux de puissance.

En courant alternatif, la tension et l'intensité du courant varient approximativement de manière sinusoïdale. Lorsqu'il y a une inductance ou une capacité dans la ligne, les formes d'ondes de tension et d'intensité de courant ne s'alignent pas parfaitement. La puissance réactive est due au retard entre la tension et le courant, appelé angle de phase, et ne peut pas effectuer de travail. Si une puissance réactive apparaît dans une ligne capacitive, alors dans cette puissance est produite ; si elle apparaît dans une ligne inductive, alors cette puissance est consommée.

#### 4.1.2 Les équations nodales

On considère à présent le réseau tout entier (voir figure 1.4) et on suppose qu'il contient  $m$  nœuds.

On note  $I_i$  l'intensité du courant injecté au nœud  $i$ . Elle peut être calculée par la loi de Kirchhoff pour obtenir

$$I_i = \sum_{k \sim i} I_{ik},$$

où la notation  $i \sim k$  signifie que les nœuds  $i$  et  $k$  sont reliés par une ligne de transmission.

La puissance complexe injectée au nœud  $i$  est alors définie par  $S_i = v_i \bar{I}_i$ . En utilisant (1.1), on déduit que

$$S_i = \sum_{k \sim i} S_{ik}.$$

La puissance complexe s'écrit  $S_i = P_i + jQ_i$ , où  $P_i$  et  $Q_i$  désignent respectivement les puissances active et réactive injectées au nœud  $i$ . D'après la décomposition des  $S_{ik}$ , on en déduit

$$P_i = \sum_{k \sim i} F_{ik},$$

$$Q_i = \sum_{k \sim i} G_{ik}.$$

### 4.1.3 Pertes en lignes de transmission

Dans les réseaux d'électricité, une partie de l'énergie électrique est dissipée sous forme de chaleur. Ce phénomène s'appelle l'effet Joule et est dû à la manifestation thermique de la résistance électrique lors du passage d'un courant dans tout matériau conducteur.

Considérons une ligne de transmission  $\{i, k\}$ , en supposant que le courant traverse cette ligne du noeud  $i$  vers le noeud  $k$ . Si l'on veut transférer une certaine quantité de courant électrique par cette ligne, il faut fournir au noeud  $i$  une puissance supérieure à celle nécessaire au noeud  $k$ , puisqu'une partie sera dissipée sous forme d'énergie thermique lors de la transmission. Cette énergie thermique peut rapidement devenir très importante lorsque l'on considère un grand nombre de lignes de transmission. Cependant, pour qu'un réseau de distribution fonctionne efficacement, il est crucial de disposer de moyens pour quantifier et contrôler ces pertes.

La perte de puissance active de transmission dans la ligne  $\{i, k\}$  est donnée par

$$L_{ik} = F_{ik} + F_{ki} = g_{ik}(V_i^2 + V_k^2 - 2V_iV_k \cos(\theta_{ik})) = g_{ik}|v_i - v_k|^2.$$

D'autres formulations sont parfois utilisées pour quantifier les pertes (voir par exemple [68]).

## 4.2 Modélisation macroscopique

Dans ce type de modèle, on considère un réseau de distribution en présence d'unités de stockage d'énergie. Pour mettre en évidence l'utilisation du stockage, on néglige la puissance réactive et on suppose que seule la puissance active est transférée. On néglige aussi les pertes et les contraintes en lignes de transmission. Par conséquent, la spatialité ou la topologie du réseau n'est pas considérée. On regroupe alors tout les noeuds de même nature pour n'obtenir que des noeuds génériques qui représentent :

- un réseau externe d'où l'énergie (achetée ou produite) est importée ;
- la consommation ;
- le stockage d'énergie.

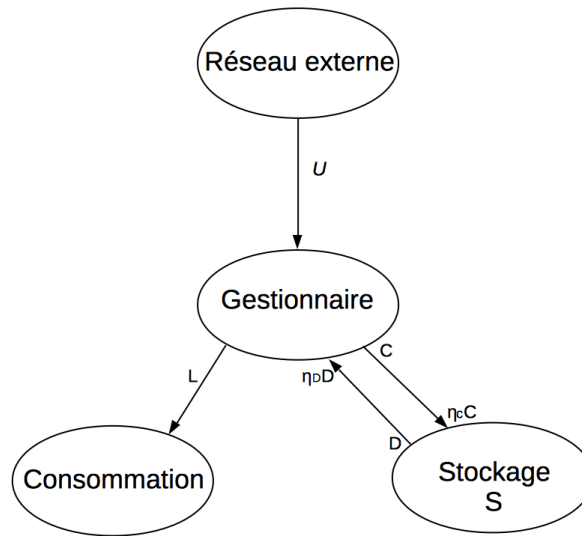


FIGURE 1.3 – Système de distribution

Dans la figure 1.3, on a rajouté un noeud représentant le gestionnaire, qui est un noeud fictif pour mettre en évidence la contrôlabilité du réseau par le gestionnaire.

Ce type de modèle est assez utilisé dans la littérature, généralement dans le but de déterminer une stratégie d'achat d'énergie la moins coûteuse possible pour desservir des consommateurs (client et usagers) donnés, sur une période de temps donnée. Pour cela, la meilleure stratégie est présentée comme la solution d'un problème d'optimisation, où l'on cherche à minimiser une fonction représentant l'objectif économique ou technoéconomique, sous certaines contraintes physiques. Cette approche permet par exemple de mettre en évidence l'utilisation du stockage pour l'optimisation de l'achat d'énergie, à la fois à court terme et à long terme (voir [104, 105]). Les auteurs de [102, 103] ont utilisé un tel modèle pour étudier l'économie et la fiabilité d'un système de distribution intégrant la production locale d'énergie renouvelable et l'utilisation du stockage d'énergie.

Dans l'optique d'obtenir un territoire à énergie positive, cette approche peut aussi permettre de faire des estimations globales des besoins en capacités de stockage et en énergie renouvelable et traditionnelle en fonction de la consommation du territoire.

### 4.3 Modélisation microscopique

Dans ce type de modèle, aussi appelé AC-OPF dans la littérature, on considère l'aspect spatial d'un réseau de distribution où l'électricité circule à travers le réseau selon les lois de Kirchhoff. Le réseau est modélisé par un graphe connexe sans cycle, comme dans la figure 1.4.

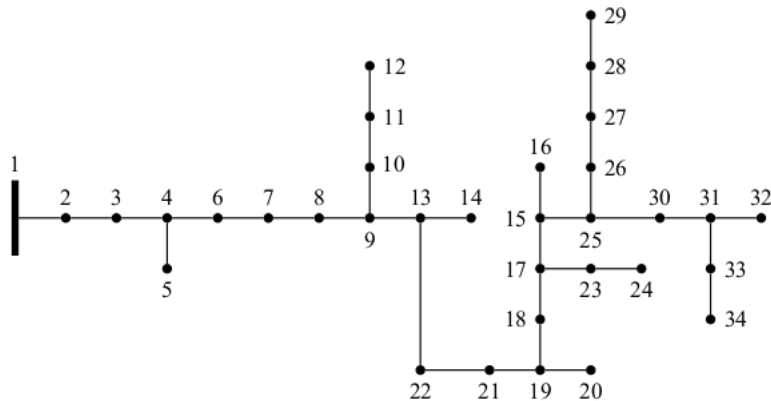


FIGURE 1.4 – Exemple du graphe d’un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60]

Les lignes de transmission sont soumises à des contraintes thermiques, ainsi qu’à des contraintes de tension et de stabilité électrique. On doit alors calculer les flux de puissance dans le réseau en considérant les différentes répartitions de générateurs (ou productions), de charges (ou consommateurs) et éventuellement d’unités de stockage d’énergie. Le calcul de ces flux se fait avec les équations de flux de puissances introduites précédemment. Enfin, une description microscopique du réseau permet aussi de prendre en compte les pertes en lignes de transmission.

Dans le mode de fonctionnement normal d’un réseau de distribution, les lignes de transmission sont inductives et donc les effets inductifs dominent les effets résistifs. Cette hypothèse se traduit par  $b_{ik} > g_{ik} > 0$  dans toutes lignes de transmission. Cette hypothèse est standard dans la littérature lorsque l’on étudie des réseaux de distribution (voir [107]).

Notons qu’en général, si l’on ne prend pas en compte le stockage, la modélisation se fait de manière statique : elle ne prend en considération que l’aspect spatial et chaque problème d’optimisation correspondant est résolu indépendamment du temps. L’aspect temporel n’est inclus dans la modélisation qu’en cas d’utilisation d’unités de stockage.

Ces modèles sont largement utilisés dans la littérature, aussi bien pour des objectifs économiques, par exemple pour la minimisation des coûts de production (ou d’importation) d’énergie (voir [39]), que pour la maximisation de l’excès d’énergie produite dans le réseau (voir [51]). Ils sont aussi utilisés pour des objectifs techniques, par exemple la minimisation des pertes de puissance active et/ou réactive dans les lignes de transmission (voir [107]). Enfin, un autre usage concerne les problèmes de sécurité, comme le maintien d’un profil de tension constant ou l’amélioration de la stabilité de la tension (voir [106]). Certaines études combinent plusieurs fonctions objectif, conduisant à considérer des problèmes d’optimisation multi-critère (voir [90]).

#### 4.4 Modélisation mésoscopique

Une modélisation de ce type consiste à prendre en compte la spatialité du réseau de façon plus grossière qu'à l'échelle microscopique, en regroupant certains secteurs, par exemple des quartiers ou des secteurs industriels. Un tel modèle est notamment utilisé lorsque l'on s'intéresse à des réseaux de distribution à très grande échelle spatiale. Les modèles mésoscopiques bénéficient à la fois des avantages de l'échelle microscopique et de ceux de l'échelle macroscopique, dans le sens où ils permettent de faire des simulations en temps raisonnable, sans trop perdre d'informations sur les contraintes de transmission et les pertes en lignes. Les auteurs de [109] proposent une méthode basée sur la partition d'un grand système de distribution en secteurs plus petits et sur la création d'un équivalent réduit pour chaque secteur. Cet équivalent réduit utilise une méthode appelée PTFD (Power Transfer Distribution Factors), qui consiste à indiquer la puissance maximale qui peut être transférée entre deux secteurs de manière fiable, tout en assurant le respect des contraintes de sécurité (surcharges thermiques, violations de limite de tension ou effondrement total de la tension) (voir par exemple [32, 84]).

### 5 Stratégies de gestion des réseaux de distribution d'électricité

Dans la littérature, on trouve trois types de stratégie de gestion des réseaux de distribution.

- La première est « le moteur de règle » (Rule-based technique) [50, 74] : les décisions sont faites en fonction de la situation actuelle et en définissant certains scénarios, généralement au moyen d'arbres de décision. Cette méthode fournit des solutions réalisables mais ne peut garantir le meilleur résultat possible.
- La deuxième stratégie est la planification basée sur l'optimisation qui vise à fournir les meilleures solutions possibles, globalement ou localement. Elle se présente comme solution d'un problème de minimisation (ou de maximisation) d'une fonction objectif donnée sous certaines contraintes (voir [56]).
- La troisième stratégie est mixte : elle combine la stratégie du « moteur de recherche » et l'optimisation (voir par exemple [105]). L'intérêt est d'exploiter l'avantage des deux stratégies.

Pour tenir compte des incertitudes tels que la consommation, le prix et l'énergie renouvelable, il existe deux grandes approches. L'une consiste à modifier le modèle mathématique déterministe afin d'inclure des variables supplémentaires, qui peuvent être stochastiques (par exemple dans le cas des énergies renouvelables) et à établir plusieurs scénarios possibles qui peuvent être utilisés selon la situation. L'autre approche est basée sur la stratégie mixte « moteur de recherche » et optimisation. Elle utilise le modèle déterministe et l'ajuste selon différentes situations ou modifications, comme par exemple la méthode MPC

(Model Predictive Control) utilisée dans [105]. Ce genre de méthodes requiert des modèles de prédiction sur les incertitudes.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu bibliographique général sur le fonctionnement des réseaux de distribution. On a en particulier présenté :

- le positionnement du réseau de distribution dans un réseau électrique ; ce dernier a des particularités par rapport au réseaux de transport, notamment au niveaux des tensions considérées : basse tension pour les zones résidentielles et moyenne tension pour les zones commerciales ;
- le stockage de l'énergie, ainsi que les avantages économiques et de sécurité qu'il peut apporter au réseau de distribution ;
- la consommation et l'importance de disposer de modèles permettant de la prédire ;
- les sources d'énergie traditionnelles et renouvelables, leurs avantages et inconvénients respectives, ainsi que quelques références bibliographiques de modèles de prédiction d'énergie provenant des panneaux photovoltaïques et des éoliennes ;
- le rôle du gestionnaire du réseau de distribution ;
- les réseaux électriques intelligents et la technologie des IBOX.

Tous ces outils techniques jouent un rôle clé dans le cadre du réseau électrique intelligent. Néanmoins, il est nécessaire de disposer de stratégies et de méthodes mathématiques et numériques solides pour pouvoir les exploiter de manière optimale, dans le but d'obtenir un territoire à énergie positive, sans excès d'investissement. Pour cela, on a présenté un très succinct état de l'art sur les outils mathématiques permettant de modéliser les réseaux. On a rappelé quelques notions de base en électricité qui sont indispensables pour la construction de modèles. On a ensuite défini trois types de modèle selon le niveau de description du réseau :

- L'échelle macroscopique où l'on ne considère que l'aspect temporel, mais pas l'aspect spatial du réseau. Ce type de modèles est souvent utilisé pour évaluer l'effet du stockage sur le coût d'achat ou de production de l'électricité. Cela permet aussi de pouvoir réaliser des simulations rapides en prenant en compte la totalité du réseau. Par contre, cela oblige à négliger les pertes en ligne et les contraintes de transmission.
- L'échelle microscopique ou échelle réelle du réseau dans laquelle on considère essentiellement la dimension spatiale du réseau. La dépendance temporelle n'est nécessaire qu'en présence d'unités de stockage. Ce type de modèle permet, en plus de la minimisation des coûts d'achat ou de production, d'évaluer les pertes en lignes, de les minimiser et de respecter les contraintes de sécurité pour un bon fonctionnement du réseau. L'inconvénient de ce modèle est la difficulté d'effectuer des simulations en temps réel lorsque le réseau est de taille importante.

- L'échelle mésoscopique où l'on regroupe plusieurs nœuds d'un même secteur. Ce type de modèle a les avantages des deux échelles microscopique et macroscopique. Il permet de faire des simulations en des temps raisonnables tout en conservant des informations sur les pertes en ligne et des contraintes de sécurité.

## Chapitre 2

# Généralités sur les algorithmes d'optimisation

La modélisation et l'étude des réseaux de distribution d'énergie conduit souvent à considérer et à résoudre des problèmes d'optimisation, usuellement écrits sous la forme

$$\inf_{x \in K} J(x).$$

On cherche donc un  $x^* \in K$  tel que pour tout  $x \in K$ , on ait  $J(x) \geq J(x^*)$ . La fonction  $J$  est le critère ou la fonction objectif que l'on souhaite minimiser, elle peut représenter un objectif économique à atteindre, par exemple le coût d'investissement ou le coût d'exploitation ;  $x$  représente la variable de décision qui, une fois déterminée, réalisera l'objectif économique recherché. Enfin, le domaine  $K$  est un ensemble de contraintes, souvent de restrictions ou de bornes physiques liées aux paramètres techniques du réseau de distribution, par exemple des limitations sur la capacité maximale du stockage d'énergie, ou des limitations sur la transmission de puissances.

La résolution analytique de problèmes d'optimisation est le plus souvent hors de portée, notamment quand ces derniers sont de très grande taille. Pour cela, des algorithmes de résolution ou d'approximation numérique des solutions sont donc indispensables ; ils diffèrent selon les caractéristiques, les types et la complexité des problèmes considérés. En pratique, on cherche à construire ces méthodes de résolution en tenant compte de la nature du problème considéré : type de contraintes, propriétés de la fonction coût et taille du problème.

Dans ce chapitre, nous faisons une présentation synthétique des principaux types de problèmes d'optimisation ainsi que des algorithmes numériques de résolution associés ; ils concerneront notamment les problèmes abordés dans ce mémoire. Nous organisons notre présentation de la façon suivante.

Dans la partie [1](#), nous présentons la classification des problèmes d'optimisation selon la forme de la fonction objectif, des contraintes et du domaine de résolution. Les principaux algorithmes utilisés sont mentionnés pour chaque classe de problème. Dans la partie [2](#), nous présentons des notions et résultats théoriques en optimisation non linéaire, sans contraintes et avec contraintes. Ces résultats, sous certaines hypothèses, permettent de s'assurer de l'existence de solutions, parfois de l'unicité, et de caractériser ces solutions. La caractérisation



des solutions (conditions d'optimalité) constitue la base de la conception de la plupart des algorithmes de résolution. Ensuite, dans la partie 3, nous présentons les algorithmes de résolution pour des problèmes non linéaires. On s'attardera en particulier sur des algorithmes de type gradient et les algorithmes de type Newton. Ces derniers peuvent parfois être couplés à des méthodes de recherche linéaire. Nous énoncerons au fur et à mesure des résultats de convergence. La partie 4 porte sur les bases de l'optimisation linéaire. On considérera la forme générale de ces problèmes, et l'on donnera ensuite des résultats théoriques permettant de s'assurer de l'existence de solutions, ainsi que la caractérisation des solutions. On décrira ensuite l'algorithme du simplexe permettant de résoudre ces problèmes. Enfin, la partie 5 porte sur les problèmes d'optimisation semi-définie positive. Ces problèmes sont assez particuliers : la variable de décision est une matrice symétrique. On définira la forme générale de ces problèmes, notamment le problème primal et le problème dual. On décrira ensuite l'algorithme de points intérieurs, très efficace pour la résolution de ces problèmes.

Nous présentons donc un bref survol des problèmes et des algorithmes d'optimisation. Nous mettrons en exergue ceux étudiés et utilisés dans les contribution de cette thèse (chapitre 3 et chapitre 4) en les signalant dans un cadre grisé :



## 1 Classification des problèmes d'optimisation

Il n'existe pas de méthodes qui s'applique universellement et efficacement à tout les problèmes d'optimisation, c'est pourquoi il est primordial de pouvoir d'abord les classifier suivant la forme de la fonction objectif et des contraintes.

On peut distinguer par exemple [14]

- les problèmes d'optimisation continue où les variables peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles ( $x \in K \subseteq \mathbb{R}$ ) et les problèmes d'optimisation discrètes ( $x \in K$ , ensemble discret) ;
- les problèmes d'optimisation uni-critère, où l'on a une seule fonction objectif à minimiser et les problèmes d'optimisation multi-critères, où l'on a plusieurs fonctions objectifs à minimiser. On recherche donc un compromis entre plusieurs objectifs souvent antagonistes ;
- les problèmes d'optimisation avec contraintes et les problèmes d'optimisation sans contraintes. Dans ce dernier cas, la variable de décision n'est soumise à aucune restriction ;
- les problèmes d'optimisation déterministes, qui suggèrent que les données du problèmes sont connues et fixées à l'avance, et les problèmes d'optimisation stochastique quand ce n'est pas le cas, l'incertitude peut donc être introduite dans le modèle.

Dans ce chapitre, on considère les problèmes d'optimisation continue. Le domaine  $K$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , qui peut être fermé, ouvert, convexe, non-convexe, etc. Il peut aussi être défini par des contraintes fonctionnelles,

c'est à dire

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0, g(x) \leq 0\},$$

où

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ et } g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

sont des fonctions quelconques. On parle alors de contraintes d'égalité et/ou d'inégalités. Par convention, nous dirons que le problème est sans contraintes si  $K = \mathbb{R}^n$ .

En pratique, il est important d'identifier aussi le type du problème d'optimisation à résoudre, cela permet de sélectionner la famille d'algorithmes la plus pertinente. On parlera alors

- D'optimisation non-linéaire, si la fonction objectif et les contraintes sont quelconques : linéaires ou non linéaires, convexe ou non-convexe, différentiables ou non-différentiables. Un cas particulier classique est l'optimisation quadratique : lorsque la fonction objectif s'exprime sous la forme

$$J(x) = x^T Q x + c^T x,$$

avec  $c \in \mathbb{R}^n$  et  $Q$  une matrice carrée symétrique définie positive, et les contraintes sont affines.

- D'optimisation linéaire, si la fonction objectif est linéaire et les contraintes sont affines.
- D'optimisation semi-définie positive (SDP), qui étend l'optimisation linéaire. Dans ce type de problème, l'inconnue est une matrice symétrique  $X$  que l'on impose d'être semi-définie positive (ou hermitienne), c'est à dire que  $K \subset \mathbb{S}_n^+$  où  $\mathbb{S}_n^+$  est le cône des matrices symétriques semi définies positives. La fonction objectif quant à elle est définie par

$$J(X) = \langle C, X \rangle,$$

où  $C \in \mathbb{S}^n$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire définie sur  $\mathbb{S}^n$ .

Les optimisations linéaire, quadratique et SDP apparaissent comme des sous-branches de l'optimisation convexe, où la fonction objectif est convexe et  $K$  est un cône convexe (voir [17]).

Nous citons ci-après quelques algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'optimisation selon leur type, il s'agit d'une liste non exhaustive.

En programmation linéaire, les algorithmes les plus populaires sont : l'algorithme du simplexe et l'algorithme de points intérieurs. Ils sont très efficaces en pratique et n'invoquent pas de dérivées, ni de la fonction objectif, ni des contraintes.

En programmation non-linéaire, le choix d'algorithmes s'effectue en fonction de la nature de la fonction objectif et des contraintes :

- Algorithmes avec dérivées [82]
  - sans contraintes : méthodes de type gradient, méthodes de type Newton et quasi-Newton, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt ;

- avec contraintes : gradient projeté, algorithme de Uzawa, méthode SQP (Newton), algorithme de points intérieurs, lagrangien augmenté.
- Algorithmes sans dérivés [62]
  - méthodes heuristiques : Nelder-Mead, surfaces de réponses (réseaux de neurones, krigeage) ;
  - méthodes stochastiques : méthodes à 2 phases, algorithmes génétiques, recuit simulé.
- Non-différentiable [14] (la fonction objectif et/ou les contraintes sont non-différentiables) : méthodes de sous-gradient, méthodes de faisceaux, méthodes d'échantillonnage du gradient,
- Si la fonction objectif s'écrit sous forme  $J(x) = G(x) + H(x)$  avec  $G$  convexe différentiable et  $H$  convexe non différentiable [79] : algorithme proximal, algorithme des directions alternées (ADMM).

En optimisation SDP, tout dépend de la taille du problème. Le plus souvent, les algorithmes de points intérieurs sont utilisés pour les problèmes de petite et de moyenne taille. Pour les problèmes de grande taille, on préconise l'utilisation des algorithmes comme celui de la méthode des faisceaux après reformulation du problème SDP en un problème non différentiable. On trouve aussi la méthode du lagrangien augmenté (une adaptation de l'algorithme des directions alternées aux problèmes SDP).

Enfin, notons que certains types de problèmes d'optimisation peuvent se chevaucher avec d'autres, comme l'exemple de l'optimisation linéaire ou SDP avec l'optimisation convexe. Pour cela la classification donnée dans cette partie n'est pas unique, elle peut changer d'un auteur à un autre.

## 2 Optimisation non-linéaire : existence, unicité et conditions d'optimalité

Nous énonçons ici quelques notions et résultats théoriques classiques en optimisation non-linéaire. Ces derniers sont fondamentaux pour la conception des algorithmes présentés dans la partie 3. Nous suivons les monographies de [12, 15], où l'on trouvera également les preuves des résultats énoncés.

### 2.1 Définition du problème

On souhaite résoudre le problème

$$\inf_{x \in K} J(x), \tag{P}$$

où  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $K$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On va considérer deux types de contraintes fonctionnelles : les contraintes d'égalités et les contraintes d'inégalités. L'ensemble  $K$  s'écrit alors

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0, g(x) \leq 0\},$$

où

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ et } g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q.$$

Remarquons que si  $h \equiv 0$  et  $g \equiv 0$ , on sera dans le cas d'un problème sans contraintes puisqu'on a  $K = \mathbb{R}^n$  dans ce cas.

On suppose ici que la fonction  $J$  est non-linéaire avec des contraintes  $g$  et  $h$  linéaires ou non-linéaires. Dans la suite, on appellera  $K$  l'ensemble admissible et on appellera un point  $x^* \in K$ , un point admissible.

Une solution globale du problème (P) est un point  $x^* \in K$  minimisant la fonctionnelle  $J$  sur l'ensemble admissible  $K$ , c'est à dire

$$J(x^*) \leq J(x), \forall x \in K.$$

Une solution locale du problème (P) est un point  $x^* \in K$  minimisant la fonctionnelle  $J$  localement sur l'ensemble admissible  $K$ , c'est à dire qu'il existe  $B(x^*, \varepsilon)$  une boule centrée en  $x^*$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  tel que

$$J(x^*) \leq J(x), \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap K.$$

On dit que  $x^*$  est une solution locale stricte, si l'inégalité précédente est stricte quand  $x^* \neq x$ . Enfin, notons qu'une solution globale est une solution locale.

## 2.2 Existence et unicité de la solution

On s'intéresse ici à l'existence et à l'unicité de la solution du problème (P). Le théorème 2.1 fournit des hypothèses sur la fonction  $J$  et sur l'ensemble admissible  $K$ , pour qu'on ait existence d'une solution au problème (P). Sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut aussi avoir unicité de la solution.

**Théorème 2.1.** *On suppose que  $J$  est continue et  $K$  fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors le problème (P) admet au moins une solution si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- $J$  est coercive, i.e.  $\lim_{\substack{x \in K \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} f(x) = +\infty$ .
- $K$  est borné.

*De plus, cette solution est unique si  $K$  est un ensemble convexe et  $J$  est strictement convexe.*

## 2.3 Conditions d'optimalité

Dans cette partie, il est question de caractériser une solution du problème (P) avec des conditions sous forme d'égalités et d'inégalités.

Ces conditions permettent tout d'abord de vérifier l'optimalité d'un point admissible donné; elles peuvent fournir également une expression formelle des

solutions d'un problème d'optimisation. Finalement, elles sont à la base de la conception de plusieurs algorithmes de résolution.

### 2.3.1 Conditions d'optimalité de premier ordre dans les problèmes sans contraintes

**Théorème 2.2** (Conditions nécessaires et suffisantes). *On suppose que  $J$  est de classe  $C^1$  et convexe. Alors  $x^*$  est un minimum global de  $J$  si et seulement si*

$$\nabla J(x^*) = 0.$$

Notons que sans hypothèse de convexité sur la fonction  $J$ , la condition  $\nabla J(x^*) = 0$  signifie juste que  $x^*$  est un point critique.

### 2.3.2 Conditions d'optimalité de premier ordre dans les problèmes avec contraintes

Les conditions présentées dans le théorème (2.3) sont connues sous le nom de conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT), publiées en 1951. Ce résultat généralise celui des multiplicateurs de Lagrange, connu sous le nom de théorème des extrema liées, qui ne s'adresse qu'au cas des contraintes d'égalités.

Dans ce théorème, certaines hypothèses de qualifications de contraintes doivent être vérifiées, voir paragraphe (2.3.3).

**Théorème 2.3** (KKT). *On suppose que les fonctions  $J$ ,  $h$  et  $g$  sont de classe  $C^1$ . Soit  $x^*$  une solution locale du problème (P). On suppose que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$  (dans un sens qu'on donnera ci-dessous) pour les contraintes  $h$  et  $g$ . Alors il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^q$  tels que les conditions suivantes, dites de Karush-Kuhn-Tucker, sont vérifiées :*

$$(KKT) \begin{cases} \mu_j^* \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, q\}, & (a) \\ h(x^*) = 0, g(x^*) \leq 0, & (b) \\ \mu_j^* g_j(x^*) = 0, \forall j \in \{1, \dots, q\}, & (c) \\ \nabla J(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0. & (d) \end{cases}$$

La condition (b) est appelée l'admissibilité primale. La condition (a) est appelée l'admissibilité duale. La condition (c) est appelée la condition de complémentarité. Finalement, la condition (d) est l'équation d'optimalité, qui peut aussi s'écrire

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = 0,$$

où  $L$  désigne le Lagrangien du problème (P) défini par

$$L(x, \lambda, \mu) = J(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x).$$

Les composantes du vecteur  $(\lambda, \mu)$  sont les multiplicateurs de Lagrange. On pose  $\Lambda^* = (\lambda^*, \mu^*)$ . Un couple  $(x^*, \Lambda^*)$  qui satisfait les conditions (2.3) est dit une solution primale-duale du problème (P).

Notons que le théorème 2.3 donne des conditions nécessaires, mais pas forcément suffisantes pour l'optimalité. Pour que ces conditions soient aussi suffisantes, on suppose que les fonctions  $J$ ,  $h$  et  $g$  sont convexes et  $h$  une fonction affine. Néanmoins, il existe d'autres hypothèses qui peuvent aussi assurer la suffisance des conditions présentées dans le théorème 2.3, comme les conditions d'optimalité de second ordre (voir théorème 2.5), qui requiert des dérivées de second ordre des fonctions  $J$ ,  $h$  et  $g$ .

### 2.3.3 Qualification de contraintes

Comme mentionné ci-dessus, l'existence des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  tels que les conditions (KKT) sont satisfaites, est assurée lorsque les contraintes sont qualifiées en  $x^*$ . Le but ici est de donner une idée de ce concept, de conditions de qualification suffisantes. On pourra consulter [12] pour plus de précisions sur les conditions de qualification de contraintes.

Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  une solution de (P). On dit qu'une contrainte en inégalité  $g_j$  est active au point  $x^*$  si  $g_j(x^*) = 0$ . On note  $I(x^*) := \{j \text{ tel que } g_j(x^*) = 0\}$ .

On dit que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$  si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. **(CQ-LI)** Les gradients des contraintes actives  $\nabla h_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , et  $\nabla g_j$ ,  $j \in I(x^*)$ , sont linéairement indépendants.
2. **Mangasarian-Fromovitz (CQ-MF)** Si

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in I(x^*)} \alpha_j \nabla g_j(x^*) = 0, \text{ avec } \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i \in I(x^*),$$

alors  $\alpha_i = 0$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, p\} \cup I(x^*)$ .

3. **(CQ-A)** Les fonctions  $h_i$  et  $g_j$ , avec  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $j \in I(x^*)$ , sont affines dans un voisinage de  $x^*$ .
4. **Qualification de Slater (CQ-S)**
  - Les fonctions  $h_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , sont affines, et les gradients  $\nabla h_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , sont linéairement indépendants ;
  - Les fonctions  $g_j$ ,  $j \in I(x^*)$ , sont convexes ;
  - Il existe un vecteur  $\bar{x} \in K$  tel que  $g_j(\bar{x}) < 0$ , pour tout  $j \in I(x^*)$ .

### 2.3.4 Conditions d'optimalité du deuxième ordre dans les problèmes sans contraintes

Le théorème qui suit fournit les conditions nécessaires d'optimalité du deuxième ordre dans le cas sans contraintes.

**Théorème 2.4** (Conditions nécessaires). *On suppose que  $x^*$  est un minimum local de  $J$  et que  $J$  est différentiable dans un voisinage de  $x^*$  et deux fois différentiable en  $x^*$ . Alors*

$$\nabla J(x^*) = 0 \quad \text{et} \quad x^{*T} \nabla^2 J(x^*) x^* \geq 0.$$

Maintenant, le théorème qui suit fournit les conditions suffisantes d'optimalité du deuxième ordre dans le cas sans contraintes.

**Théorème 2.5.** *On suppose que  $J$  est différentiable dans un voisinage de  $x^*$  et deux fois différentiable en  $x^*$ . Si*

- $\nabla J(x^*) = 0$ , et
- $x^{*T} \nabla^2 J(x^*) x^* > 0$ ,

*alors  $x^*$  est un minimum local strict de  $J$ .*

### 2.3.5 Conditions d'optimalité du deuxième ordre dans les problèmes avec contraintes

Le théorème qui suit fournit les conditions nécessaires d'optimalité du deuxième ordre dans le cas avec contraintes.

**Théorème 2.6.** *Soit  $x^*$  une solution locale de (P). Supposons que*

- les fonctions  $J, h_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $g_j, \forall j \in I(x^*)$ , sont de classe  $C^2$  dans un voisinage de  $x^*$  ;
- les fonctions  $g_j$ , pour tout  $j \notin I(x^*)$ , sont continues en  $x^*$  ;
- la qualification de contrainte (CQ-MF) est vérifiée en  $x^*$ .

*Alors il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda^*$  associés à  $x^*$  tels que les conditions (KKT) sont vérifiées et*

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \Lambda^*) d \geq 0,$$

*pour tout  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que*

$$\nabla h_i(x^*)^T d = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{et} \quad \nabla g_j(x^*)^T d = 0, \quad \forall j \in I(x^*).$$

Le théorème qui suit fournit les conditions suffisantes d'optimalité du deuxième ordre dans le cas avec contraintes.

**Théorème 2.7.** Soit  $x^* \in K$ . Supposons que :

- les fonctions  $J, h_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $g_j, \forall j \in I(x^*)$ , sont différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et deux fois différentiables en  $x^*$  ;
- il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda^*$  tels que les conditions (KKT) sont vérifiées et

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \Lambda^*) d > 0,$$

pour tout  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\nabla h_i(x^*)^T d = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \nabla g_j(x^*)^T d = 0, \forall j \in I(x^*).$$

Alors  $x^*$  est un minimum local strict de (P).

Notons que les conditions suffisantes d'optimalité présentées dans le théorème 2.7, ne requièrent pas de qualification de contraintes.

### 3 Optimisation non-linéaire : algorithmes de résolution

On présente ici quelques algorithmes classiques de résolution d'optimisation non-linéaire. Nous suivons principalement [81]. Des précisions bibliographiques seront données au fur et à mesure.

Dans la pratique, la recherche de solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes fonctionnelles consiste à déterminer un point optimal  $x^*$  et des multiplicateurs de Lagrange associés  $(\lambda^*, \mu^*)$ . On distingue trois familles d'algorithmes, les méthodes primales, les méthodes duales et les méthodes primales-duales.

- Les méthodes primales consistent à déterminer le point  $x^*$ , les multiplicateurs  $(\lambda^*, \mu^*)$  servent juste à vérifier l'optimalité de  $x^*$ .
- Les méthodes duales, quant à elles, déterminent plutôt les multiplicateurs en considérant un autre problème, dit dual, déduit par dualité du problème initial (primal).
- Enfin, les méthodes primales-duales considèrent les deux problèmes primal et dual. Elles itèrent en mesurant le saut de dualité, c'est à dire  $p^* - d^*$  où  $p^*$  est la valeur optimale du problème primal et  $d^*$  est la valeur optimale du problème dual. L'algorithme s'arrête quand le saut de dualité est inférieur à une tolérance fixée.

Enfin, notons que la conception des algorithmes de problèmes avec contraintes se basent sur le cas de problèmes d'optimisation sans contraintes, et se généralisent aux problèmes avec contraintes.

#### 3.1 Cas des problèmes sans contraintes

On considère le problème (P) avec  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction supposée différentiable et  $K = \mathbb{R}^n$ .



### 3.1.1 Algorithmes de descente

Un algorithme de descente consiste à générer une suite d'itérations  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnée,} \\ x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k, \end{cases}$$

et telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, J(x_{k+1}) < J(x_k). \quad (2.1)$$

Les algorithmes de ce type sont déterminés par deux éléments :

- le choix de la direction de descente  $d_k \in \mathbb{R}^n$ ,
- le choix du pas de descente  $\delta_k \in \mathbb{R}^{*+}$ .

Ces deux éléments doivent être choisis de façon à ce que 2.1 soit vérifié. Si on suppose que  $J$  est différentiable, on a

$$J(x_{k+1}) = J(x_k) + \delta_k \nabla J(x_k)^T d_k + o(\delta_k).$$

Pour satisfaire (2.1), on cherche donc  $d_k$  tel que

$$\nabla J(x_k)^T d_k < 0.$$

On donne ci-dessous la forme générale des algorithmes de descente

---

#### Algorithme 1 Algorithme de descente

---

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point initial.

$k = 0$

**Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

1. Trouver une direction de descente  $d_k$  tel que :  $\nabla J(x_k)^T d_k < 0$ .
2. Choisir un pas de descente  $\delta_k > 0$  dans la direction  $d_k$  tel que  $J(x_{k+1}) < J(x_k)$ .
3.  $x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k$  ;  
 $k = k + 1$  ;

**Fin Tant que**

**Retourner**  $x_k$ .

---

Maintenant, on va préciser quelques choix et stratégies de calcul possibles de  $\delta_k$  et  $d_k$ .

### 3.1.2 Choix de la direction de descente $d_k$

D'abord, notons que chaque choix de direction de descente  $d_k$  possible conduit à un algorithme différent.

Dans la littérature, il existe deux grande stratégies de choix de direction de descente :

- la direction du gradient, c'est-à-dire  $d_k = -\nabla J(x_k)$ , qui conduit aux algorithmes de type gradient, présentés dans la partie 3.1.5.
- la direction de Newton, définie par  $d_k = -(\nabla^2 J(x_k))^{-1} \nabla J(x_k)$ , qui conduit aux algorithmes de type Newton, présentés dans la partie 3.1.6.

### 3.1.3 Calcul du pas de descente-recherche linéaire

Notons que dans la plupart des algorithmes de descente, on dispose de résultats de convergence locale, c'est-à-dire que, partant d'un point initial  $x_0$ , pour que la convergence vers un minimum  $x^*$  soit assurée, il faut que  $x_0$  soit inclus dans un voisinage  $V$  de  $x^*$ . La recherche linéaire est une des méthodes qui permet de forcer la convergence de l'algorithme lorsque le point initial est éloigné d'un minimum. On parle alors de *globalisation* par recherche linéaire. Dans le même contexte, il existe une autre méthode classique, celle dite des régions de confiance (voir [24]), qui ne sera pas abordée ici.

Une fois la direction de descente  $d_k$  calculée, il faut déterminer  $\delta_k$  de sorte à ce que l'inégalité (2.1) soit vérifiée. Il s'agit de trouver un compromis entre deux critères antagonistes :

- $\delta_k$  ne doit pas être trop grand pour qu'on puisse avoir une décroissance de la fonction objectif ;
- $\delta_k$  ne doit pas être trop petit pour ne pas avoir une convergence lente.

La solution retenue consiste à chercher un  $\delta_k$  optimal, c'est-à-dire solution du problème

$$\min_{\delta > 0} J(x_k + \delta d_k). \quad (2.2)$$

Cette méthode s'appelle la recherche linéaire exacte. Elle est moins évidente à mettre en œuvre et est coûteuse en temps de calcul, sauf pour le cas quadratique, où  $\delta_k$  peut être calculé explicitement.

Dans la pratique, on effectue une recherche linéaire inexacte. Elle s'effectue comme suit :

1. on formule certaines conditions sur  $\delta_k$  qui assurent la décroissance de  $J(x_k)$  et préviennent la stagnation de  $J(x_k)$  ( $\delta_k$  trop petit, voir plus bas) ;
2. on choisit une valeur de départ  $\delta_0$  pour le pas ;
3. on teste itérativement plusieurs valeurs candidates pour  $\delta_k$ , et on s'arrête si l'une de ces valeurs vérifie les conditions de 1.

Les conditions de Wolfe (1969) sont parmi les plus utilisés :

$$J(x_k + \delta_k d_k) \leq J(x_k) + \beta_1 \delta_k (\nabla J(x_k))^T d_k, \quad (2.3)$$

$$\nabla J(x_k + \delta_k d_k)^T d_k \geq \beta_2 (\nabla J(x_k))^T d_k. \quad (2.4)$$

avec  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ , voir [99]. La condition (2.3) est dite condition d'Armijo, introduite par Armijo en 1966 (voir [8]). Elle garantit la décroissance de  $J$ . Son utilisation seule peut conduire à des valeurs trop petites de  $\delta_k$ . L'inégalité (2.4) est dite condition de courbure, elle permet d'éviter les pas trop petits.

La proposition suivante permet d'assurer que sous certaines hypothèses, on peut toujours trouver un pas qui satisfait les deux conditions de Wolfe [99].

**Proposition 3.1.** *Soit  $d_k$  une direction de descente de  $J$  en  $x_k$ . On suppose que la fonction  $\delta \mapsto J(x_k + \delta d_k)$  est dérivable et bornée inférieurement. Alors il existe un pas  $\delta_k > 0$  vérifiant les conditions de Wolfe (2.3) et (2.4).*

Il existe plusieurs algorithmes permettant de déterminer un pas de descente qui vérifie les conditions de Wolfe. Un tel algorithme est dit à pas de Wolfe. Nous donnons ci-après un exemple dû à Fletcher [37] et Lemaréchal [65] (algorithme 2).

---

**Algorithme 2** Fletcher-Lemaréchal

---

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable,  $\delta_{k,0}$  un point initial,  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta_1, \beta_2$  tel que  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ ,  $\tau_i \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $\tau_e > 1$ .

on pose  $j = 0$ ;  $\underline{\delta} = 0$ ;  $\bar{\delta} = +\infty$ ;

**Tant que**  $\delta_{k,j}$  ne vérifie pas les conditions de Wolfe, **faire**

1. Si  $\delta_{k,j}$  ne vérifie pas (2.3), alors le pas est trop grand et
  - on diminue la borne supérieure :  $\bar{\delta} = \delta_{k,j}$ ;
  - on choisit un nouveau pas  $\delta_{k,j+1} \in [(1 - \tau_i)\underline{\delta} + \tau_i\bar{\delta}, \tau_i\underline{\delta} + (1 - \tau_i)\bar{\delta}]$ ;
2. Si  $\delta_{k,j}$  vérifie (2.3), mais ne vérifie pas (2.4), alors le pas est trop petit et
  - on augmente la borne inférieure :  $\underline{\delta} = \delta_{k,j}$ ;
  - on choisit un nouveau pas :
    - $\delta_{k,j+1} \in [\tau_e\underline{\delta}, +\infty[$ , si  $\bar{\delta} = +\infty$ ,
    - $\delta_{k,j+1} \in [(1 - \tau_i)\underline{\delta} + \tau_i\bar{\delta}, \tau_i\underline{\delta} + (1 - \tau_i)\bar{\delta}]$  sinon.

3.  $j=j+1$ ;

**Fin Tant que**

**Retourner**  $\delta_k = \delta_{k,j}$ .

---

La proposition 3.2 assure que l'algorithme 2 fournit bien un pas de descente qui vérifie les conditions de Wolfe.

**Proposition 3.2.** *Soit  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Soient  $x_k \in \mathbb{R}^n$  et  $d_k$  une direction de descente de  $J$  en  $x_k$ . On suppose que la fonction  $\delta \mapsto J(x_k + \delta d_k)$  est bornée inférieurement et  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ . Alors l'algorithme 2 trouve un pas  $\delta_k$  vérifiant les conditions de Wolfe en un nombre fini d'itérations.*

La recherche linéaire peut jouer un rôle dans la convergence des algorithmes de descente, c'est le cas dans le théorème 3.3 dû à Zountendijk en 1970 [111].

Rappelons qu'une fonction  $J$  est dite à gradient Lipshitz de constante  $L$  si

$$\exists L > 0, \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Théorème 3.3** (Théorème de Zoutendijk). *Soit  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable, de gradient Lipschitz et bornée inférieurement. Soit  $\theta_k$  l'angle entre  $d_k$  et  $\nabla J(x_k)$ , défini par*

$$\theta_k = \frac{\langle -\nabla J(x_k), d_k \rangle}{\|\nabla J(x_k)\| \|d_k\|}.$$

*On considère un algorithme de descente qui génère une suite  $(x_k)_k$  où le pas de descente  $\delta_k$  vérifie les conditions de Wolfe. Alors la série*

$$\sum_{k \geq 1} \cos(\theta_k)^2 \|\nabla J(x_k)\|^2$$

*converge.*

Citons quelques développements récents concernant les méthodes de globalisation. Raydan-Lacruz [13, 26] ont montré que l'inégalité (2.1) peut être relaxée, ils obtiennent ainsi la méthode spectrale qui est non-monotone.

### 3.1.4 Critères d'arrêts

Un critère d'arrêt doit être choisi pour garantir l'arrêt de l'algorithme après un nombre fini d'itérations avec une bonne approximation de la solution.

Un premier critère naturel est basé sur les conditions d'optimalité du premier ordre. Dans le cas de problèmes sans contraintes, pour une précision demandée  $\varepsilon$ , on arrête l'algorithme si

$$\|\nabla J(x_k)\| < \varepsilon.$$

En pratique, le test d'optimalité n'est pas toujours satisfait et on doit alors fournir d'autres critères. Pour  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  deux précisions et *IterMax* un nombre maximum d'itérations donné, l'algorithme s'arrête si

- stagnation de la solution :  $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon_1(1 + \|x_k\|)$ ,
- stagnation de la valeur optimale :  $\|J(x_{k+1}) - J(x_k)\| < \varepsilon_2(1 + \|J(x_k)\|)$ ,
- le nombre d'itérations dépasse un seuil fixé à l'avance :  $k < \text{IterMax}$ .

### 3.1.5 Algorithmes de type gradient

Un algorithme de type gradient est un algorithme de descente prenant pour direction

$$d_k = -\nabla J(x_k),$$

appelée direction du gradient. Cette direction est bien une direction de descente puisque

$$\nabla J(x_k)^T (-\nabla J(x_k)) = -\|\nabla J(x_k)\|^2 < 0.$$

Le pas de descente  $\delta_k$  est déterminé par une stratégie de recherche linéaire présenté précédemment.

Le théorème 3.4 fournit des hypothèses pour avoir la convergence globale de l'algorithme à descente du gradient, c'est à dire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0.$$

**Théorème 3.4.** *On suppose que  $J$  est de classe  $C^1$ , bornée inférieurement et à gradient Lipschitz de constante  $L > 0$ . Alors l'algorithme de descente du gradient converge dans les cas suivants :*

1. si on choisit un pas constant tel que  $\forall k, \delta_k = \delta < \frac{2}{L}$  ;
2. si on choisit un pas optimal ;
3. si on choisit un pas de Wolfe.

### Algorithme du gradient conjugué : cas général

L'algorithme du gradient conjugué peut être vu comme une modification de la méthode du gradient puisque dans ce cas, la direction de descente s'écrit

$$d_k = \begin{cases} -\nabla J(x_0) & \text{si } k = 0, \\ -\nabla J(x_{k+1}) + \beta_{k+1}d_k & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

où  $\beta_k$  est une suite de réels.

Cette méthode a été conçue initialement pour résoudre un problème d'optimisation quadratique :  $\inf_{\mathbb{R}^n} J(x)$  où  $J(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle$  avec  $A$  une matrice symétrique définie positive. Cela revient à résoudre le système linéaire  $\nabla J(x) = Ax - b = 0$ . Elle a ensuite été étendue au cas non-linéaire, c'est-à-dire à la résolution d'une équation de la forme  $\nabla J(x) = 0$ , où  $x \mapsto \nabla J(x)$  est non-linéaire. On présentera ici des algorithmes de gradient conjugué dans le cas non-quadratique, et on renvoie le lecteur à [14] pour les méthodes de gradient conjugués dans le cas quadratique.

---

**Algorithme 3** Méthode du gradient conjugué

---

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point initial,  $d_0 = -\nabla J(x_0)$ . $k = 0$ **Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

1. Choisir un pas de descente  $\delta_k > 0$  par la méthode de la recherche linéaire ;
2. Calcul d'un nouvel itéré  $x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k$  ;
3. Calcul d'un nouveau gradient  $\nabla J(x_{k+1})$  ;
4. Calcul du paramètre  $\beta_{k+1}$  par une des méthodes (2.5) ou (2.6) ;
5. Construction d'une nouvelle direction de descente  $d_{k+1} = -\nabla J(x_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k$ .

 $k = k + 1$  ;**Fin Tant que****Retourner**  $x_k$ .

---

On donne ci-dessous les deux méthodes classiques de calcul du paramètre  $\beta_k$ , dites de Fletcher-Reeves et de Polack-Ribière.

La méthode de Fletcher-Reeves consiste à calculer  $\beta_{k+1}$  de la manière suivante :

$$\beta_{k+1} = \frac{\|\nabla J(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla J(x_k)\|^2}. \quad (2.5)$$

La méthode de Polack-Ribière consiste à calculer  $\beta_{k+1}$  de la manière suivante :

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle \nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k), \nabla J(x_{k+1}) \rangle}{\|\nabla J(x_k)\|^2}. \quad (2.6)$$

Ces deux méthodes coïncident dans le cas d'un problème quadratique.

**3.1.6 Algorithmes de type Newton****Méthode de Newton-Raphson**

Cette méthode est vouée à la résolution numérique des systèmes d'équations s'écrivant sous la forme  $F(x) = 0$  avec  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Lorsque l'on considère un problème d'optimisation sans contraintes, il s'agira de résoudre l'équation

$$\nabla J(x) = 0,$$

c'est à dire de rechercher les points critiques de la fonction  $J$  à minimiser.

Soit  $J$  de classe  $C^2$  et  $x^*$  un point critique de  $J$ . On peut construire la méthode de Newton de la façon suivante : on part de  $\nabla J(x^*) = 0$ , et on écrit

$$0 = \nabla J(x + (x^* - x)) \approx \nabla J(x) + \nabla^2 J(x)(x^* - x).$$

Si bien que si  $\nabla^2 J(x)$  est inversible, on a que  $x^* \approx x - (\nabla^2 J(x))^{-1} \nabla J(x)$ .

L'algorithme de Newton consiste à itérer cette relation, il s'écrit en générant la suite récurrente

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k,$$

avec  $d_k = -(\nabla^2 J(x_k))^{-1} \nabla J(x_k)$ , aussi appelé direction de Newton. La méthode de Newton à pas fixe correspond au choix  $\delta_k = 1$ . Elle peut être à pas variable,  $\delta_k$  pouvant être calculé à chaque itération de manière optimale, ou en utilisant les conditions de Wolfe.

Remarquons que si  $\nabla^2 J(x_k)$  est définie positive, la méthode de Newton est bien une méthode de descente, puisque :

$$\langle \nabla J(x_k), d_k \rangle = -\langle \nabla J(x_k), (\nabla^2 J(x_k))^{-1} \nabla J(x_k) \rangle < 0.$$

Le théorème suivant donne des conditions de convergence de l'algorithme de Newton (voir [37]) :

**Théorème 3.5.** *Supposons que  $J$  est de classe  $C^2$  et soit  $x^*$  un minimum local de  $J$ . On suppose que :*

- *la matrice hessienne satisfait la condition de Lipschitz*

$$\|\nabla^2 J(x) - \nabla^2 J(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

*dans un voisinage de  $x^*$  ;*

- *la matrice hessienne  $\nabla^2 J(x^*)$  est définie positive.*

*Alors la méthode de Newton est bien définie en chaque itération et converge vers  $x^*$ . De plus, cette convergence est quadratique.*

La méthode de Newton présente plusieurs inconvénients :

- le calcul de la matrice Hessienne  $\nabla^2 J(x_k)$  à chaque itération puisqu'en pratique, on dispose rarement de l'expression analytique des dérivés secondes ;
- la résolution complète du système linéaire  $\nabla^2 J(x_k)d_k = -\nabla J(x_k)$  à chaque itération peut se révéler coûteuse en temps de calcul ;
- pas de distinction entre minimum, maximum ou points stationnaires. En d'autres termes, on a besoin d'avoir  $\nabla^2 J(x_k)$  définie positive à chaque itération.

### Méthode de Newton inexacte

La méthode de Newton inexacte [29] a été proposée pour réduire le temps de calcul en résolvant partiellement le système linéaire

$$\nabla^2 J(x_k)d_k = -\nabla J(x_k). \quad (2.7)$$

On calcule donc le vecteur  $d_k$  satisfaisant la condition de Newton inexacte

$$\|\nabla^2 J(x_k)d_k + \nabla J(x_k)\| \leq \eta_k \|\nabla J(x_k)\|, \quad (2.8)$$

où  $\eta_k$  est appelé terme forçant et peut varier à chaque itération. Notons que si  $\eta_k = 0, \forall k$ , alors on retrouve la méthode de Newton classique.

Pour mettre cette approche en œuvre, plusieurs méthodes existent, telles les méthodes de Newton-Krylov. Nous renvoyons à [16, 88] pour plus de détails. La condition (2.8) sert de test d'arrêt pour la résolution par méthode de Krylov. On cherche à faire le moins d'itérations de Krylov possible en adaptant la précision de la résolution à chaque itération de Newton, tout en gardant une bonne convergence de la méthode de Newton.

Le terme forçant contrôle la précision pour laquelle le système linéaire doit être résolu. Il a une influence sur la vitesse de convergence et la performance de la méthode. On choisit  $\eta_k$  afin d'avoir un bon compromis entre coût de calcul et précision. Les choix classiques sont [29, 34, 58]

- $\eta_k$  fixé, dans ce cas on obtient une convergence locale linéaire ;
- $\eta_k \rightarrow 0$ , dans ce cas on obtient une convergence locale superlinéaire ;
- $\eta_k = \mathcal{O}(\|\nabla J(x_k)\|)$ , on obtient une convergence locale quadratique.

### Méthodes de quasi-Newton

Les méthodes de quasi-Newton ont été développées pour contourner certains inconvénients de la méthode de Newton, en particulier le problème du calcul de la matrice Hessienne  $\nabla^2 J(x_k)$  qui n'est pas toujours aisé ou possible de réaliser. Ces méthodes consistent à remplacer  $\nabla^2 J(x_k)$  dans les itérations de Newton par une approximation  $H_k$  de celle-ci ; on peut aussi construire l'approximation  $B_k$  de  $\nabla^2 J(x_k)^{-1}$ , l'inverse de  $\nabla^2 J(x_k)$ .

Connaissant  $x_k, \nabla J(x_k)$  et  $\nabla J(x_{k+1})$ , on peut construire une approximation  $H_{k+1}$  de la matrice Hessienne  $\nabla^2 J(x_k)$ , comme solution de l'équation suivante

$$\nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k) = H_{k+1}(x_{k+1} - x_k). \quad (2.9)$$

Cette équation est appelée équation de sécante. De la même manière, on peut construire une approximation  $B_{k+1}$  de l'inverse de la matrice Hessienne  $(\nabla^2 J(x_k))^{-1}$ , comme solution de l'équation suivante

$$B_{k+1}(\nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k)) = x_{k+1} - x_k. \quad (2.10)$$



Dans le cas des deux équations (2.9) ou (2.10), on est amené à résoudre un système de  $n$  équations à  $n^2$  inconnues. Il existe donc une infinité de matrices  $H_{k+1}$  (ou  $B_{k+1}$  respectivement) qui sont solutions.

La méthode de Broyden (1965) consiste à choisir une matrice  $H_{k+1}$  de sorte à ce qu'elle vérifie l'équation de la sécante (2.9) et qu'elle soit assez proche de  $H_k$  (pour permettre de conserver ce qui a déjà été calculé) (voir [38]). Cela revient à résoudre le problème quadratique strictement convexe suivant :

$$\begin{aligned} \min_H \frac{1}{2} \|H - H_k\|_F^2 \\ \text{s.c. } \nabla y_k = H \sigma_k, \end{aligned}$$

où  $y_k = J(x_{k+1}) - J(x_k)$ ,  $\sigma_k = x_{k+1} - x_k$  et  $\|\cdot\|_F$  désigne la norme de Frobenius définie par  $\|A\|_F = (\text{tr}(AA^T))^{\frac{1}{2}}$ . La résolution de ce problème conduit à la formule de mise à jour suivante :

- **Formule de Broyden**

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k \sigma_k) \sigma_k^T}{\sigma_k^T \sigma_k}.$$

Cependant, la matrice  $H_k$  solution de ce problème n'est pas forcément symétrique, et cela n'est pas souhaitable car la hessienne d'une fonction de classe  $C^2$  est symétrique. Pour imposer la symétrie à  $H_{k+1}$ , on résout alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_H \frac{1}{2} \|H - H_k\|^2 \\ \text{s.c. } \nabla y_k = H \sigma_k \text{ et } H^T = H. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Plusieurs normes matricielles peuvent être utilisées dans la résolution du problème (2.11), elles conduisent à différentes formules directes de  $H_k$ . Les méthodes BFGS et DFP sont les plus utilisées. Elles sont obtenues en choisissant comme norme matricielle, une norme de la forme

$$\|A\|_U = \|U^{\frac{1}{2}} A U^{\frac{1}{2}}\|_F,$$

où  $U$  est une matrice symétrique inversible qui vérifie :  $y_k = U \sigma_k$ .

Ainsi la résolution du problème (2.11) avec cette norme conduit aux formules de mise à jour suivantes (voir [14]) :

- **Formule de BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shannon)**

$$B_{k+1} = \left( I - \frac{\sigma_k y_k^T}{y_k^T \sigma_k} \right)^T B_k \left( I - \frac{y_k \sigma_k^T}{y_k^T \sigma_k} \right) + \frac{\sigma_k \sigma_k^T}{y_k^T \sigma_k}. \quad (\text{BFGS})$$

- **Formule de DFP (Davidson, Fletcher, Powell)**

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\delta_k \delta_k^T}{y_k^T \sigma_k} - \frac{B_k y_k y_k B_k}{y_k^T B_k y_k}. \quad (\text{DFP})$$

Ces deux formules sont mutuellement duales dans le sens où on obtient l'une en inversant  $\delta_k$  et  $y_k$  dans l'autre et en prenant  $H_k = B_k^{-1}$ . Par exemple la formule

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \sigma_k} - \frac{H_k \sigma_k \sigma_k^T H_k}{\sigma_k^T H_k \sigma_k}. \quad (\text{BFGS}')$$

donne l'inverse de la matrice  $B_{k+1}$  obtenue par la formule (BFGS). De la même manière, la formule

$$H_{k+1} = \left( I - \frac{y_k \sigma_k^T}{y_k^T \sigma_k} \right) H_k \left( I - \frac{\sigma_k y_k^T}{y_k^T \sigma_k} \right) + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \sigma_k}. \quad (\text{DFP}')$$

donne l'inverse de la matrice  $B_{k+1}$  obtenue par la formule (DFP).

Le caractère symétrique défini positif des suites  $B_k$  et  $H_k$  définie par (BFGS) et (DFP') respectivement peut s'établir par récurrence et, puisque le caractère défini positif d'une matrice est automatiquement vérifiée par son inverse, nous en déduisons la proposition suivante :

**Proposition 3.6.** *Si  $B_k$  est définie positive et si  $y_k \sigma_k > 0$ , alors  $B_{k+1}$ , déterminé par l'une des formules (BFGS) ou (DFP), est définie positive.*

Notons que que l'inégalité  $y_k^T \sigma_k > 0$  est vérifiée si on utilise un pas de Wolfe. En effet, si  $\delta_k$  vérifie les conditions de Wolfe (2.3), (2.4) alors

$$\begin{aligned} y_k \sigma_k &= (\nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_{k+1}))^T (\delta_k d_k) \\ &= \nabla J(x_{k+1})^T \delta_k d_k - \nabla J(x_k)^T \delta_k d_k \\ &\geq (\beta_2 - 1) \delta_k \nabla J(x_{k+1})^T d_k > 0. \end{aligned}$$

Si la matrice initiale  $B_0$  est symétrique définie positive, l'algorithme BFGS à pas de Wolfe, résumé dans l'algorithme 4, est bien un algorithme de descente.

---

#### Algorithme 4 Algorithme BFGS

---

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point initial,  $B_0$  une matrice symétrique définie positive.

$k = 0$

**Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

1. Choix de la direction de descente  $d_k = -B_k \nabla J(x_k)$  ;
2. Calcul d'un pas de descente  $\delta_k > 0$  avec la recherche linéaire de Wolfe ;
3. Calcul d'un nouvel itéré  $x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k$  ;
4. Mise à jour de la matrice  $B_k$  par la formule (BFGS) ;
5.  $k = k + 1$  ;

**Fin Tant que**

**Retourner**  $x_k$ .

---

Nous donnons ci-après (théorème (3.7)) un résultat de convergence global dans le cas où  $J$  est convexe. Il existe plusieurs autres résultats de convergence

locale, notamment des résultats donnant la convergence super-linéaire sous certaines hypothèses sur la matrice hessienne. On renvoie à [19] pour plus de détails sur les résultats de convergence.

**Théorème 3.7.** *On suppose que  $J$  est convexe, bornée inférieurement et de gradient Lipschitz sur le domaine  $\{x \in \mathbb{R}^n : J(x) \leq J(x_0)\}$ . Soit  $(x_k)_k$  la suite générée par l'algorithme BFGS. Alors on a*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla J(x_k) = 0.$$

Malgré l'absence de résultats de convergence dans le cas où  $J$  est non convexe, l'algorithme BFGS reste encore de nos jours un algorithme très performant, il est utilisé notamment en optimisation non-convexe. Il présente également de bonnes performances même dans certains cas où la fonction  $J$  est non-différentiable (voir [27, 67]).

### Méthodes quasi-Newton à mémoire limitée

Un des inconvénients majeurs des méthodes de quasi-Newton est la construction de l'approximation de la hessienne (ou de son inverse) par une matrice pleine que l'on doit stocker. Cela peut poser des problèmes de capacité de mémoire lorsque la taille du problème devient très grande. Les méthodes de type quasi-Newton à mémoire limitée ont été proposées pour palier ce problème. En 1980, Nocedal [80] a introduit des formules de quasi-Newton à mémoire limitée qui modifient la méthode de quasi-Newton pour obtenir des approximations de la matrice hessienne ou de son inverse, en utilisant un petit nombre de vecteurs réduisant ainsi le stockage. Plusieurs études numériques portant sur des problèmes de grande taille, ont montré que ces méthodes sont très efficaces, peu coûteuses en espace mémoire et en temps de calcul [43] et [77].

Lorsque la fonction coût s'exprime comme somme de fonctions faisant intervenir chacune un petit nombre de variables, on parle alors de séparabilité [45]. On trouvera dans [46] l'adaptation des méthodes à mémoire limitée pour ce type de problème.

À titre d'illustration, nous décrivons ici la méthode BFGS à mémoire limitée due à Nocedal, nous la notons L-BFGS.

Nous réécrivons tout d'abord la formule (BFGS) sous forme

$$B_{k+1} = V_k^T B_k V_k + \rho_k \delta_k \delta_k^T, \quad (2.12)$$

avec

$$\rho_k = \frac{1}{\delta_k^T y_k}, \quad (2.13)$$

$$V_k = I - \rho_k y_k \delta_k^T. \quad (2.14)$$

Remarquons que la matrice  $B_k$  dans (2.12) est formée en chaque étape à partir du couple  $(y_k, \delta_k)$ . Le principe de la méthode L-BFGS consiste à ne conserver en mémoire qu'un nombre limité de ces couples pour reconstruire rapidement la matrice  $B_{k+1}$ . Quand la capacité de stockage est atteinte, on supprime alors le couple de vecteurs le plus ancien pour le remplacer par le dernier calculé.

En pratique, on se donne un entier  $m$  qui sera le nombre de couples de vecteurs à conserver. À l'itération  $k$ , on construit un couple de vecteur  $(y_k, \delta_k)$  à partir

- d'une matrice  $B_k^0$  initiale, symétrique définie positive,
- des  $m$  couples stockés précédemment  $(y_i, \delta_i)_{i=k-m}^{k-1}$ ,

avec une procédure qu'on expliquera plus loin. La liste des  $m$  couples de vecteurs stockés est mise à jour de la manière suivante :

- on supprime en début de liste le couple  $(y_{k-m}, \delta_{k-m})$  ;
- on ajoute en fin de liste le nouveau couple  $(y_k, \delta_k)$ .

La matrice  $B_k$  est construite à partir des couples  $(y_i, \delta_i)_{i=m-k}^{k-1}$  avec  $m$  mises à jour de la matrice  $B_k^0$  dans la formule (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} B_k = & (V_{k-1}^T \dots V_{k-m}^T) B_k^0 (V_{k-m} \dots V_{k-1}) + \\ & \rho_{k-m} (V_{k-1}^T \dots V_{k-m-1}^T) \delta_{k-m}^T \delta_{k-m} (V_{k-m+1} \dots V_{k-1}) + \dots + \\ & \rho_{k-1} \delta_{k-1} \delta_{k-1}^T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La matrice  $B_k$  ainsi définie par la formule (2.15) n'est pas formée explicitement, on stocke juste les  $m$  valeurs précédentes du couple  $(y_i, \delta_i)$ . À partir de la représentation (2.15) de la matrice  $B_k$ , on peut calculer récursivement le produit  $B_k g_k$  où  $g_k = -\nabla J(x_k)$ , par une formule récursive à deux boucles, due à Matthies et Strang [72]. Elle est résumée dans l'algorithme 5.

---

#### Algorithme 5 Récursion à deux boucles

---

**Données:**  $(y_i, \delta_i)_{i=m-k}^{k-1}$ ,  $B_k^0$  une matrice initiale SDP,  $g_k = -\nabla J(x_k)$ .

1.  $q_k = g_k$  ;

**pour**  $i=k-1 \dots 0$  **faire**

calculer  $\rho_i$  avec l'équation (2.13) et

$$\alpha_i = \rho_i \delta_i^T q_{i+1};$$

$$q_i = q_{i+1} - \alpha_i y_i;$$

**Fin pour**

2.  $r_0 = B_k^0 q_0$  ;

**pour**  $i=0 \dots k-1$  **faire**

calculer

$$\beta_i = \rho_i y_i^T r_i;$$

$$r_{i+1} = r_i + \delta_i (\alpha_i - \beta_i);$$

**Fin pour**

**Retourner**  $d_k = r_k = B_k g_k$ .

---

Notons que pendant les  $m$  premières itérations, la méthode est identique à la méthode BFGS si l'on conserve la même matrice initiale  $B_0 = B_k^0$ .

L'approche présentée ci-dessus permet de mettre en oeuvre la méthode L-BFGS en utilisant l'approximation de l'inverse de la matrice Hessienne  $B_k$ . Il existe une autre approche permettant d'implémenter L-BFGS en utilisant l'approximation directe de la matrice Hessienne  $H_k$  (voir [20]).

## 3.2 Cas des problèmes avec contraintes

On considère le problème (P) avec  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction supposée différentiable et  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ , où  $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ .

### 3.2.1 Méthode du gradient projeté

La méthode du gradient projetée est une adaptation de la méthode du gradient décrite au paragraphe (3.1.5). Elle consiste à calculer de manière alternée une prédiction de l'itération par une méthode de gradient puis à la projeter sur  $K$ .

Considérons une itération d'un algorithme de descente tel que décrit dans le cas sans contrainte :

$$z_{k+1} = x_k - \delta_k \nabla J(x_k),$$

où  $\delta_k > 0$  est choisi de telle sorte que  $J(x_k - \delta_k \nabla J(x_k)) < J(x_k)$ . Notons que, même si  $x_k \in K$ , rien ne garantit que l'on aura  $z_{k+1} \in K$ . L'idée est de projeter sur l'ensemble des contrainte  $K$  les points  $z_{k+1}$ ; ils peuvent en effet être non admissibles, i.e.,  $z_{k+1} \notin K$ .

Nous rappelons ici la construction de la projection sur  $K$ , un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On définit  $x_K = p_K(x)$ , la projection d'un point  $x \in \mathbb{R}^n$  sur  $K$  comme l'unique solution du problème

$$\inf_{y \in K} \|x - y\|. \quad (2.16)$$

Le point  $p_K(x)$  est caractérisé comme étant l'unique point de  $K$  vérifiant les deux inégalités équivalentes suivantes :

$$\langle x - p_K(x), y - p_K(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K, \quad (2.17)$$

$$\|x - p_K(x)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in K. \quad (2.18)$$

Remarquons que si  $x \in K$  alors  $p_K(x) = x$ .

Une itération de la méthode du gradient projeté s'écrit alors comme suit :

$$x_{k+1} = p_K(x_k - \delta_k \nabla J(x_k)) = p_K(z_{k+1}). \quad (2.19)$$

Cette itération est obtenue en résolvant le problème (2.16) en  $x_k - \delta_k \nabla J(x_k)$ . Cette étape est réalisable lorsque le domaine des contraintes  $K$  ne contient que des contraintes de bornes ( par exemple  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$  ). Auquel cas le calcul de la projection est aisé. Le calcul de la projection devient difficile lorsque les contraintes ne sont pas de type bornes.

Le théorème 3.8, dû à Levitin et Polyak en 1966 (voir [66]), donne une condition suffisante de convergence de la méthode du gradient projeté.

**Théorème 3.8.** *Supposons que  $J$  est convexe, différentiable, à gradient Lipshitz de constante  $L$ . Si  $0 < \epsilon_1 \leq \delta_k \leq \frac{2}{L+2\epsilon_2}$ , avec  $\epsilon_2 > 0$ , alors la suite  $x_k$  générée par l'algorithme de gradient projeté (2.19) converge vers un minimum de  $J$ .*

On consultera [21] pour une étude approfondie des propriétés de convergence de la méthode du gradient projeté.

### 3.2.2 Méthode de pénalisation

Une autre approche pour résoudre les problèmes avec contraintes est la méthode de pénalisation que nous décrivons ici très brièvement dans le cas de la pénalisation extérieure. On associe au problème (P) une fonction  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\Psi(x) = 0 \iff x \in K$  ainsi qu'une suite de réels positifs  $c_k$ , croissante, avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = +\infty$ . On considère la suite de problèmes

$$(\mathcal{P}_k) \quad \inf_{x \in K} (J(x) + c_k \Psi(x))$$

Chacun des  $(\mathcal{P}_k)$  est un problème sans contraintes ; on pourra supposer qu'ils admettent une unique solution, notée  $x_k$ . Le théorème (3.9) donne des conditions pour que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \arg \min_{x \in K} (J(x))$

**Théorème 3.9.** *On suppose que (P) admet au moins une solution (par exemple  $J$  coercive) et que  $\mathcal{P}_k$  admet une solution  $x_k$  pour tout  $k$ . Alors toute valeur d'adhérence de  $x_k$  est solution de (P) .*

Il existe aussi une méthode de pénalisation intérieure : l'algorithme de points intérieurs (voir [35]). On décrira cette méthode pour des problèmes d'optimisation SDP dans la partie 5.

Les méthodes présentées ci-dessus n'utilisent pas les relations d'optimalité du premier ordre. On peut résoudre le problème d'optimisation (P) sous contraintes fonctionnelles en utilisant les relations KKT : cela consiste à déterminer un point optimal  $x^*$  et des multiplicateurs de Lagrange  $(\lambda^*, \mu^*)$ .

### 3.2.3 Méthode d'Uzawa

Cette méthode est vouée au calcul numérique des points selles des lagrangiens. Soit

$$L(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j g_j(x),$$

le lagrangien associé à (P). On rappelle la

**Définition 3.10.** On dit que  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  est un point selle de (P) sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$  si

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}).$$

Nous présentons ici la méthode d'Uzawa dans le cas général.

L'idée de cet algorithme consiste à coupler itérativement à la minimisation en  $x$  du point selle, un algorithme de descente (gradient) sur le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et de gradient projeté sur  $\mu$ . Plus précisément, nous pouvons le présenter comme suit dans l'algorithme 6.

---

#### Algorithme 6 Algorithme d'Uzawa

---

**Données:** On se donne  $\rho > 0$  le paramètre de descente.

$k = 0$ , choix de  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu^0 \in \mathbb{R}_+^q$

**Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

Poser  $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k)$ ,  $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_q^k) \in \mathbb{R}_+^q$

Calculer  $x^k = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^k, \mu^k)$

Poser  $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \rho h_i(x^k)$ ,  $i = 1, \dots, p$

Poser  $\mu_j^{k+1} = \max(0, \mu_j^k + \rho g_j(x^k))$

**Fin Tant que**

**Retourner**  $x_k$ .

---

Remarquons que sous l'hypothèse que les conditions d'optimalité du premier ordre soient satisfaites, la deuxième étape consiste à résoudre

$$\nabla_x L(x, \lambda^k, \mu^k) = \nabla J(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j^k \nabla g_j(x).$$

La convergence est donnée par le théorème 3.11.

**Théorème 3.11.** On suppose que

- $J$  est  $\mathcal{C}^1$  et elliptique;
- $h$  est affine;
- $g$  est convexe et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On suppose que  $L$  possède un point selle  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ . Alors il existe  $\rho_1$  et  $\rho_2$  tels que  $\forall \rho \in [\rho_1, \rho_2]$ , la suite  $x^k$  converge vers  $x^*$ .

Signalons que, dans le cas d'un problème quadratique avec contraintes d'égalités, toute méthode de type Uzawa peut être construite en appliquant un algorithme de descente ou de projection (sous-espaces de Krylov) au problème

du complément de Schur agissant sur le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  : les versions gradient conjugué, Bi-CgStab ou GMRES d'Uzawa peuvent être ainsi construites, par exemple.

### 3.2.4 Méthode SQP (Newton)

La méthode SQP (Sequenciel Quadratic Programming) est une méthode de type Newton consistant à résoudre successivement des sous-problèmes quadratiques et à utiliser les solutions de ces sous-problèmes pour définir une nouvelle itération  $x_{k+1}$ . Ces sous-problèmes sont définis comme une approximation quadratique du lagrangien du problème (P) associée à une approximation linéaire des contraintes.

On obtient alors SQP en appliquant la méthode de Newton aux conditions d'optimalité du premier ordre (KKT) pour le problème (P). Pour des raisons pratiques, il est usuel de distinguer deux situations liées à la nature des contraintes :

#### Cas de contraintes d'égalités

On considère tout d'abord un problème d'optimisation avec des contraintes d'égalités, c'est à dire  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  où  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Le lagrangien du problème (P) s'écrit :

$$L(x; \lambda) = J(x) + \lambda^T h(x),$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ . Les conditions d'optimalité (KKT) du premier ordre (2.3) s'écrivent comme système de  $n + p$  équations à  $n + p$  inconnues en  $x$  et en  $\lambda$  :

$$F(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla J(x) + A(x)^T \lambda \\ h(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

avec

$$A(x)^T = (\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x)),$$

la matrice Jacobienne de  $h$  où  $h_i$  est la  $i$ -ème composante de  $h$ .

Toute solution  $(x^*, \lambda^*)$  du problème (P), où les colonnes de la matrice  $A(x)^T$  sont linéairement indépendantes, vérifie le système (2.20). L'idée est de résoudre le système non linéaire (2.20) par une méthode de Newton.

La matrice Jacobienne de  $F(x; \lambda)$  relativement à  $x$  et  $\lambda$  est donnée par

$$F'(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x; \lambda) & A(x)^T \\ A(x) & 0 \end{pmatrix}.$$



Une itération de Newton s'écrit

$$F'(x_k; \lambda_k) \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \end{pmatrix} = -F(x_k; \lambda_k),$$

soit

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 J(x_k; \lambda_k) & A(x)^T \\ A(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \lambda_{QP} - \lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x_k; \lambda_k) \\ h(x_k) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

avec  $d = x_{k+1} - x_k$  et  $\lambda_{QP} = \lambda_{k+1}$ .

L'itération (2.21) est bien définie à condition que la matrice  $F'(x; \lambda)$  soit inversible. C'est le cas si les hypothèses suivantes sont vérifiées en  $(x; \lambda) = (x_k; \lambda_k)$  :

1. Les colonnes  $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x)$  de la matrice  $A(x)^T$  sont linéairement indépendantes ;
2. La matrice  $\nabla_{xx}^2 L(x; \lambda)$  est définie positive, c'est-à-dire  $d^T \nabla_{xx}^2 L(x; \lambda) d > 0$ , pour tout  $d \neq 0$  tel que  $A(x)d = 0$ .

L'hypothèse 1. est l'hypothèse de qualification de contraintes **CQ-LI**, qu'on suppose vérifiée dans cette partie. L'hypothèse 2. est la condition suffisante d'optimalité du deuxième ordre (2.7).

On a

$$\nabla L(x_k; \lambda_k) = \nabla J(x_k) + A(x_k)^T \lambda.$$

L'itération (2.21) peut donc s'écrire

$$\begin{cases} \nabla_{xx}^2 L(x_k; \lambda_k) + pA(x_k)^T = -\nabla J(x_k), \\ A(x_k)d + h(x_k) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Le système (2.22) correspond aux conditions d'optimalité du premier ordre du problème quadratique suivant :

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \nabla J(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L(x_k; \lambda) d, \\ & A(x_k)d + h(x_k) = 0. \end{aligned} \quad (QP_E^k)$$

Le problème  $(QP_{EI}^k)$  s'appelle le problème quadratique osculateur du problème (P) en  $(x_k, \lambda_k)$ . L'itération  $(x_{k+1}, \lambda_k)$  peut être vue soit comme une solution du problème quadratique  $(QP_{EI}^k)$ , soit comme une itération générée par la méthode de Newton (2.21), appliqué aux conditions d'optimalité du premier ordre du problème (P). La présentation de la méthode comme liée à celle de Newton en facilite l'analyse, l'approche SQP permet de concevoir des algorithmes pratiques et de pouvoir considérer aussi les contraintes d'inégalités.

**Algorithme 7** Algorithme SQP avec contraintes d'égalités

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  différentiables,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point initial,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  un multiplicateur initial.

$k = 0$

**Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

1. Résoudre le problème osculateur quadratique  $(QP_{EI}^k)$  et obtenir la solution primale  $d_k$  et le multiplicateur  $\lambda_{QP}$  associé à la contrainte d'égalité;
2.  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ;  
 $\lambda_{k+1} = \lambda_{QP}$ ;  
 $k = k + 1$ ;

**Fin Tant que**

**Retourner**  $x_k$ .

Pour que le problème osculateur quadratique admette une unique solution, il faut que la matrice hessienne du lagrangien  $\nabla_{xx}^2 L(x_k; \lambda_k)$  soit définie positive à chaque itération. C'est pourquoi, dans la pratique, les implémentations de la méthode SQP utilisent une approximation de la matrice Hessienne du Lagrangien  $H_k$  à l'aide de techniques de type quasi-Newton comme BFGS.

**Cas de contraintes d'égalité et d'inégalité**

On se place dans le cas où  $K = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ , avec  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux fonctions supposées différentiables. On suit le même principe que dans le cas de contraintes d'égalités : on linéarise les contraintes d'égalités et d'inégalités, et on utilise une approximation quadratique du lagrangien  $L$ , définie dans ce cas par

$$L(x; \lambda, \mu) = J(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x),$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  et  $\mu \in \mathbb{R}^q$ . Le problème osculateur quadratique associé à (P) s'écrit ici

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \nabla J(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L(x_k; \lambda) d, \\ \text{s.t.} \quad & A_h(x_k) d + h(x_k) = 0, \\ & A_g(x_k) d + g(x_k) \leq 0, \end{aligned} \tag{QP_{EI}^k}$$

où  $A_g(x)$  est la matrice Jacobienne de  $g$  et  $A_h(x)$  est la matrice Jacobienne de  $h$ .

La méthode SQP appliquée aux problèmes avec contraintes d'égalités et d'inégalités est résumée ci-dessous dans l'algorithme 8.

**Algorithme 8** Algorithme SQP avec contraintes d'égalités et d'inégalités

**Données:**  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  différentiables,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point initial,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  un multiplicateur initial.

$k = 0$

**Tant que** "critère d'arrêt" est non satisfait, **faire**

1. Résoudre le problème osculateur quadratique ( $QP_{EI}^k$ ) et obtenir la solution primale  $d_k$  et le multiplicateur  $\lambda_{QP}$  associé à la contrainte d'égalité;
2.  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ;  
 $\lambda_{k+1} = \lambda_{QP}$ ;  
 $\mu_{k+1} = \mu_{QP}$ ;  
 $k = k + 1$ ;

**Fin Tant que**

**Retourner**  $x_k$ .

Comme mentionné précédemment, pour calculer une direction de descente et un multiplicateur de Lagrange, il faut résoudre le problème quadratique osculateur sous-jacent. Pour cela, on utilise une des méthodes et algorithmes dédiés à la résolution des problèmes quadratiques avec contraintes. On trouvera une description de ces méthodes dans [33].

L'algorithme SQP est une méthode de type Newton, il converge localement quadratiquement tant que les points initiaux  $(x_0, \lambda_0)$  sont choisis dans un certain voisinage de  $(x^*, \lambda^*)$ . Cet algorithme se globalise en ajoutant une étape de recherche linéaire.

**L'algorithme 8 sera utilisé dans le chapitre 4.**

### 3.2.5 Critères d'arrêt

Dans le cas de problèmes avec contraintes, l'itération  $(x_k, \lambda_k, \mu_k)$  doit vérifier le système KKT. Pour vérifier si les conditions du système KKT sont satisfaites, on peut procéder comme suit : pour  $\varepsilon_{opt}$ ,  $\varepsilon_{adm}$  et  $\varepsilon_{comp}$  des précisions demandées, l'algorithme s'arrête si :

$$\begin{aligned} \|\nabla_x L(x_k, \Lambda_k)\| &< \varepsilon_{opt}, \\ \|h(x_k)\| &< \varepsilon_{adm} \quad \text{et} \quad \|\max(0, g(x_k))\| < \varepsilon_{adm}, \\ \mu_i^k &= 0 \quad \text{si} \quad g_i(x^k) < -\varepsilon_{comp}, \end{aligned}$$

où  $L$  est le lagrangien du problème (voir [7]).

De manière analogue au cas de l'optimisation sans contrainte, on utilise de plus des critères d'arrêts portant sur la stagnation de la solution, stagnation de la valeur optimale et le nombre maximal d'itérations.

## 4 Optimisation linéaire et algorithme du simplexe

L'optimisation linéaire ou programmation linéaire est une sous-branche de l'optimisation convexe dans laquelle la fonction objectif est linéaire et les contraintes sont affines. Beaucoup de problèmes issus de la recherche opérationnelle peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation linéaire tels que la planification et la gestion des réseaux de distribution d'énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire) et aussi la gestion du trafic (aérien, routier, ferroviaire). Le lecteur pourra consulter [4, 28] pour d'autres exemples. Les problèmes d'optimisation linéaire apparaissent aussi comme des étapes dans des algorithmes conçus pour résoudre des problèmes d'autres types.

Le premier algorithme permettant de résoudre ces problèmes est l'algorithme du simplexe, conçu par G.B. Dantzig en 1947. Il a connu au fil du temps plusieurs variantes, et reste encore de nos jours très utilisé. Il consiste à faire des déplacements sur la frontière du domaine admissible en faisant décroître la fonction objectif. Une autre famille d'algorithmes est celle de points intérieurs qui trouvent leur origine dans les travaux de Dikin 1967 [30]. Contrairement à la méthode du simplexe, ce type de méthode génère des itérés à l'intérieur de l'ensemble admissible. On consultera [98].

Dans cette partie, nous rappelons les concepts de base de l'optimisation linéaire et les outils nécessaires pour décrire ensuite l'algorithme du simplexe (voir [14]).

### 4.1 Formulation standard et formulation canonique

Un problème d'optimisation linéaire sous la forme standard consiste à trouver  $x \in \mathbb{R}^n$  solution du problème

$$\begin{cases} \min c^T x, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (P_L)$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  avec  $m \leq n$ , et  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . La contrainte  $x \geq 0$  signifie que toutes les composantes de  $x$  sont positives ou nulles, c'est à dire  $x_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . On notera de la même façon  $x > 0$  si  $x_i > 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

On peut également définir un problème d'optimisation linéaire sous la forme canonique

$$\begin{cases} \min c'^T x, \\ A'x \leq b'. \end{cases} \quad (P'_L)$$

Les deux formulations sont équivalentes, c'est à dire qu'on peut écrire le problème  $(P_L)$  sous la forme du problème  $(P'_L)$

$$\begin{cases} \min c^T x, \\ A'x \leq b', \end{cases}$$

où

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \text{ et } b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix},$$

Inversement, on peut écrire le problème  $(P'_L)$  sous la forme  $(P_L)$  : on introduit une variable d'écart  $z = b' - A'x \geq 0$  et on décompose la variable  $x = u - v$ , avec  $u \geq 0$  et  $v \geq 0$ , le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} \min c^T x, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $c = (c^T, -c^T, 0)^T$ ,  $x = (u, v, z)^T$  et  $A = (A', -A', I)$ .

Souvent les solveurs d'optimisation linéaire existants, tel que `linprog` sur Matlab et Python, acceptent les deux formalismes standard et canonique. Dans la suite de cette partie, on va considérer les problèmes écrits sous forme standard.

## 4.2 Définitions et notations

On note

$$F_P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

et

$$F_P^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x > 0\},$$

l'ensemble des vecteurs admissibles et l'ensemble des vecteurs strictement admissibles, respectivement, du problème  $(P_L)$ . On supposera toujours que  $A$  est surjective.

On dit que le problème  $(P_L)$  est borné si la valeur minimale de la fonction objectif, pour  $x \in F_P$ , est finie. On note alors  $\inf f > -\infty$  avec  $f(x) = c^T x$ . On dit que le problème  $(P_L)$  est réalisable si  $F_P \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ .

On appelle base d'indices, un ensemble d'indices  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  de cardinal  $m \leq n$ , tels que la sous-matrice  $A_B$  formée des  $m$  colonnes correspondantes de  $A$  soit inversible.

On associe à la base d'indices  $B$ , l'ensemble d'indices complémentaires  $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$  et la sous-matrice  $A_N$  formée des  $n - m$  colonnes correspondantes de  $A$ .

Les composantes  $x_i$  avec  $i \in B$  sont dites basiques de  $x$ , et celles avec  $i \in N$  sont dites non basiques. Après permutations éventuelles des colonnes, on peut

écrire

$$A = \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix},$$

avec  $A_B$  inversible, et  $x = (x_B \ x_N)$  la partition correspondante du vecteur  $x$ .

On note  $I^+(x) := \{i : x_i > 0\}$  et  $I^o(x) := \{i : x_i = 0\}$ .

On dit qu'un point  $x \in F_P$  est un sommet de  $F_P$  si la sous-matrice  $A_B$ , avec  $B = I^+(x)$ , est injective. On a dans ce cas  $|B| \leq m$ .

On dit qu'un sommet  $x \in F_P$  est dégénéré si  $|I^+(x)| < m$  et qu'il est non dégénéré si  $|I^+(x)| = m$ .

Un sommet  $x^* \in F_P$  qui est solution du problème  $(P_L)$  est dit solution sommet du problème  $(P_L)$ .

### 4.3 Existence de solution et CNS d'optimalité

L'existence d'une solution au problème  $(P_L)$  ne résulte pas directement du théorème 2.1, car l'ensemble admissible  $F_P$  n'est pas nécessairement compact et la fonction  $x \mapsto c^T x$  ne tend pas forcément vers  $+\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  dans l'ensemble  $F_P$ .

Le théorème 4.1 ci-dessous, donne les hypothèses sur l'ensemble admissible et sur la fonction objectif qui assurent l'existence d'une solution au problème  $(P_L)$ .

#### Théorème 4.1.

1. Le problème  $(P_L)$  admet une solution si et seulement si

$$F_P \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \inf f > -\infty.$$

2. Si le problème  $(P_L)$  admet une solution, alors il admet une solution sommet.

La proposition 4.2 fournit les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en optimisation linéaire.

**Proposition 4.2.** *Un point  $x$  est solution du problème  $(P_L)$  si et seulement si il existe  $y \in \mathbb{R}^m$  et il existe  $s \in \mathbb{R}^n$  tels que*

$$\begin{cases} A^T y + s = c, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \quad s \geq 0, \\ x^T s = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Le système (2.24) s'obtient directement en appliquant les conditions KKT. Le problème ( $P_L$ ) est convexe et ses contraintes sont qualifiées du fait qu'elles sont affines.

#### 4.4 Problème dual et existence d'une solution strictement complémentaire

La variable  $s$  de la proposition 4.2 est appelée variable d'écart duale et le couple  $(y, s)$  est appelé solution duale du problème ( $P_L$ ) et  $x$  est la solution primale. Autrement dit, le couple  $(y, s)$  est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \max_{(y,s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0. \end{cases} \quad (D_L)$$

Le problème ( $D_L$ ), qui est aussi linéaire, est appelé problème dual du problème ( $P_L$ ). Il s'obtient de la façon suivante grâce à la dualisation lagrangienne.

On considère la fonction

$$\psi(x, y) = c^T x - y^T (Ax - b).$$

Le problème ( $P_L$ ) peut être réécrit sous la forme

$$\inf_{x \geq 0} \sup_y \psi(x, y). \quad (2.25)$$

D'autre part, on a

$$\sup_y \psi(x, y) = c^T x - \sup_y y^T (Ax - b).$$

Or le supremum d'une fonction linéaire est  $+\infty$ , sauf si elle est identiquement nulle, donc on obtient

$$\inf_{x \geq 0} \sup_y \psi(x, y) = \inf_{x \geq 0} \begin{cases} c^T x & \text{si } Ax = b \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère maintenant la réécriture de la fonction  $\psi$  sous la forme

$$\psi(x, y) = (c - A^T y)^T x + b^T y.$$

On a

$$\inf_{x \geq 0} \psi(x, y) = \inf_{x \geq 0} (c - A^T y)^T x + b^T y.$$

L'infimum de cette fonction est atteint en  $x = 0$  si  $A^T y \leq c$  et il est égal à  $-\infty$  sinon.

En inversant l'infimum et le supremum dans le problème (2.25), on obtient

$$\sup_y \inf_{x \geq 0} \psi(x, y) = \sup_y \begin{cases} b^T y & \text{si } A^T y \leq c, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi on retrouve le problème dual ( $D_L$ ).

On note maintenant

$$F_D := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \quad \text{et} \quad F_D^o := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x > 0\},$$

l'ensemble des couples de vecteurs admissibles et l'ensemble des couples de vecteurs strictement admissibles, respectivement, du problème ( $D_L$ ).

Soit  $S_P$  l'ensemble des solutions du problème primal ( $P_L$ ),  $S_D$  l'ensemble des solutions du problème dual ( $D_L$ ) et  $S$  l'ensemble des solutions primales-duales du problème ( $P_L$ ). On peut définir l'ensemble  $S$  comme produit cartésien de l'ensemble des solutions primales et de l'ensemble des solutions duales, c'est à dire

$$S = S_P \times S_D.$$

L'équation  $x^T s = 0$  représente les conditions de complémentarité, elle est équivalente à

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i > 0 \Rightarrow s_i = 0.$$

On dit qu'une solution primale-duale du problème ( $P_L$ ) est strictement complémentaire si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i > 0 \Leftrightarrow s_i = 0.$$

En général, toutes les solutions ne sont pas nécessairement strictement complémentaires. La proposition (4.3) ci-dessous montre qu'en optimisation linéaire, on peut toujours trouver une solution strictement complémentaire.

**Proposition 4.3.** *Supposons que le problème ( $P_L$ ) ait une solution, alors il possède une solution primale-duale strictement complémentaire et par conséquent, on a*

$$B \cap N = \emptyset \quad \text{et} \quad B \cup N = \{1, \dots, n\},$$

où

$$B := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \exists x \in S_P \text{ tel que } x_i > 0\},$$

et

$$N := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \exists (y, s) \in S_D \text{ tel que } s_i > 0\}.$$

La proposition 4.4 donne une description simple des ensembles  $S_P$  et  $S_D$  en utilisant les ensembles d'indices définis dans la proposition 4.3. Cette description sera très utile pour l'algorithme du simplexe.

**Proposition 4.4.** *Supposons que le problème ( $P_L$ ) possède une solution. Alors*

$$S_P = \{x \in F_P \mid x_N = 0\},$$



et

$$S_D = \{x \in F_D \mid x_B = 0\},$$

où les ensembles  $B$  et  $N$  sont définis comme dans la proposition 4.3.

## 4.5 Propriétés des solutions

D'abord, notons que l'ensemble  $F_P$  est un polytope convexe. D'après le théorème 4.1, on sait que si le problème  $(P_L)$  a une solution alors il a une solution sommet. L'algorithme du simplexe consiste à faire des déplacements sur les arêtes du polytope convexe  $F_P$ . Autrement dit, étant donné un sommet initial  $x_0$  de  $F_P$ , on se donne une direction  $d$  et on calcule le déplacement

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d,$$

tel que  $x_{k+1}$  soit un sommet de  $F_P$ . Dans le cas où le problème est de grande taille, il peut y avoir plusieurs sommets, pour cela l'algorithme du simplexe sélectionne les sommets à explorer.

On suppose que la matrice  $A$  est de rang plein  $m$ .

### 4.5.1 Le coût réduit et le critère d'arrêt

Soit  $B$  une base d'indices et soit  $x = (x_B, x_N) \in F_P$ . On a

$$x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N)$$

et

$$c^T x = c_B^T A_B^{-1}(b - A_N x_N) + c_N^T x_N.$$

On appelle coût réduit le gradient de  $c^T x$  par rapport à  $x_N$ , c'est à dire

$$r = c_N - A_N^T A_B^{-T} c_B.$$

Soit  $x$  un sommet de  $F_P$  et  $r$  le coût réduit associé. Si  $r \geq 0$  alors  $x$  est une solution optimale. En effet, en posant  $y = A_B^{-T} c_B$ , on a  $r = c_N - A_N^T y$ . En posant  $s = (0 \ r)$ , on obtient

$$A^T y + s = c, \quad s \geq 0 \text{ et } x^T s = 0.$$

Inversement, si  $x$  est un sommet non dégénéré optimal, alors il existe une solution duale  $(y, s)$  telle que  $A^T y + s = c$ ,  $s \geq 0$  et  $x^T s = 0$ . Puisque  $x$  est non dégénéré, alors  $x_B > 0$  et donc  $s_B = 0$ . On obtient alors que  $A_B^T y = c_B$  et  $r = c_N - A_N^T y = s_N \geq 0$ .

### 4.5.2 Recherche de direction

Supposons qu'il existe un indice  $j$  tel que  $r_j < 0$ . Dès lors, on peut encore faire décroître le coût  $c^T x$  en augmentant la composante  $j$  de  $x_N$ . On cherche alors un nouvel itéré admissible  $x^+$  en faisant un déplacement selon la direction  $d = (d_B \ d_N)$ , c'est à dire

$$x^+ = x + \alpha d,$$

avec

$$d_N = e_N^j,$$

où  $e_N^j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{\text{card}(N)}$ . De plus, il faut que le déplacement  $d$  vérifie

$$Ax^+ = b.$$

Pour cela, il faut que  $Ad = 0$  et donc  $d_B = -A_B^{-1} A_N e_N^j$ . Le coût décroît bien le long de  $d$  puisqu'on a

$$c^T d = r_j < 0.$$

Maintenant, si  $r$  a plusieurs composantes strictement négatives, alors on choisit l'indice  $j$  parmi ceux qui donnent la composante de  $r$  la plus négative. Cette règle s'appelle le coût réduit le plus négatif [44]. Il existe d'autres règles qui conduisent à des algorithmes différents (voir par exemple [44, 49]).

Remarquons que si  $d_B \geq 0$ , alors le problème n'est pas borné. En effet, dans ce cas on a  $x^+ \geq 0$ , pour tout  $\alpha > 0$ . Le coût  $c^T x^+ = c^T x + \alpha c^T d$  est alors strictement décroissant. Dans ce cas, l'algorithme échoue.

## 4.6 Algorithme du simplexe

### 4.6.1 Choix de la longueur du pas et de la nouvelle base d'indices

On suppose que  $d_B \not\geq 0$ . Il faut prendre un pas assez grand, mais pas trop, de sorte à avoir  $x_B^+ \geq 0$ . Pour cela, on prend  $\alpha \leq \alpha'$  avec

$$\alpha' := \min \left\{ -\frac{x_i}{d_i} : i \in B, d_i < 0 \right\}.$$

Le réel  $\alpha'$  représente le pas maximal jusqu'à la frontière du domaine.

Supposons que le minimum ci-dessus soit atteint en un indice  $k$ . Alors on a

$$x_k + \alpha' d_k = 0.$$

Ensuite, on fait sortir l'indice  $k$  de la base  $B$  et on y introduit l'indice  $j$ . La nouvelle base d'indices s'écrit alors

$$B^+ = (B \cup \{j\}) \setminus \{k\}.$$

### 4.6.2 Recherche d'un point initial

Pour démarrer l'algorithme du simplexe, il faut disposer d'un point initial qui soit sommet de  $F_P$ . Si on ne dispose pas d'un premier point, la méthode suivante permet de trouver un tel sommet. On résout le problème d'optimisation linéaire auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m z_i, \\ Ax + Dz = b, \\ x \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $D$  est une matrice diagonale définie par

$$D_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i \geq 0, \\ -1 & \text{si } b_i < 0, \end{cases}$$

avec la méthode du simplexe décrite précédemment en prenant comme sommet initial le point  $(0, Db)$ .

Notons que le problème (2.26) a toujours une solution, car il est borné, puisque  $\sum_{i=1}^m z_i \geq 0$ .

### 4.6.3 Algorithme du simplexe : pseudo-code

---

**Algorithme 9** Algorithme du simplexe

---

**Données:** Sommet initial  $x$  de  $F_P$

1. **(Calcul du coût réduit)** On calcule  $y \in \mathbb{R}^m$ , solution du système

$$A_B^T y = c_B$$

et puis le coût réduit

$$r = c_N - A_N^T y.$$

2. **(Test d'arrêt)** Si  $r \geq 0$ , alors  $x$  est solution du problème ( $P_L$ ) et l'algorithme s'arrête.
3. **(Calcul de la direction)** Soit  $j$  un indice tel que  $r_j < 0$ . On calcule la direction de descente par

$$d_N = e_N^j \text{ et } d_B = -A_B^{-1} A_N e_N^j.$$

4. **(Calcul de la longueur du pas)** Si  $d_B \geq 0$ , le problème ( $P_L$ ) n'est pas borné et l'algorithme s'arrête.  
Sinon, on définit le pas maximal  $\alpha'$  jusqu'à la frontière du domaine

$$\alpha' := \min \left\{ -\frac{x_i}{d_i} : i \in B, d_i < 0 \right\},$$

et on détermine l'indice  $k$  qui donne ce minimum.

5. Si  $\alpha' = 0$ .
  - S'il existe d'autres indices  $j$  tel que  $r_j < 0$  que l'on n'a pas encore exploité, alors on prend un autre indice avec la règle du coût réduit le plus négatif (ou avec une autre règle) puis on retourne à l'étape 3.
  - Si, pour tout indice  $j$  tel que  $r_j < 0$ , on a  $\alpha' = 0$ , alors  $x$  est solution du problème ( $P_L$ ) et l'algorithme s'arrête.
6. Si  $\alpha' > 0$ , alors on calcule un nouveau sommet

$$x_+ = x + \alpha' d,$$

et une nouvelle base d'indices associés

$$B^+ = (B \cup \{j\}) \setminus \{k\}.$$

**Retourner**  $x^*$  solution du problème ( $P_L$ ).

---

### 4.6.4 Solveurs pour l'optimisation linéaire

Il existe beaucoup de solveurs permettant de résoudre les problèmes d'optimisation linéaire, et qui sont implémentés dans plusieurs langages ou sur différents environnements numériques tels que Excel, R, Matlab, Python. Par

exemple, dans Matlab, on trouve dans *Optimization Toolbox*, la fonction *linprog* qui utilise par défaut l'algorithme du simplexe appliqué au problème dual ; on peut aussi spécifier l'utilisation d'un algorithme de point intérieur. Cette fonction existe également en langage Python.

L'algorithme du simplexe sera utilisé dans le chapitre 3.

## 5 Optimisation semi-définie positive et méthode de points intérieurs primale-duale

L'optimisation semi-définie positive ou SDP est une sous-branche de l'optimisation convexe qui étend l'optimisation linéaire. Dans ces problèmes, on cherche à minimiser (ou maximiser) une fonction objectif linéaire où la variable de décision est une matrice symétrique qu'on impose d'être semi-définie positive et de satisfaire une contrainte affine.

L'optimisation SDP a connu de grandes avancées à partir des années 1990 pour plusieurs raisons : beaucoup de problèmes pratiques ont pu être formulées sous forme d'optimisation SDP ; aussi, certains problèmes non convexes peuvent être transformés sous forme d'optimisation SDP après une relaxation convexe, ce qui permet de pouvoir calculer une solution approchée (voir chapitre 4).

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre les problèmes SDP tels que la méthode de points intérieurs, la méthode du lagrangien augmenté [18] ou encore la méthode des faisceaux qui nécessite de reformuler le problème SDP en un problème d'optimisation non-différentiable [52].

Dans cette partie, comme en optimisation linéaire, on présente les concepts de base de l'optimisation SDP et les outils nécessaires pour décrire l'algorithme de points intérieurs.

### 5.1 Les cônes $\mathbb{S}_+^n$ et $\mathbb{S}_{++}^n$

Soit  $\mathbb{S}^n$  l'espace vectoriel des matrices d'ordre  $n$  symétriques. On rappelle qu'il est de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ . On munit  $\mathbb{S}^n$  du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}.$$

Ici  $\text{Tr}(A)$  désigne la trace de la matrice  $A$ . On note  $\mathbb{S}_+^n$  (respectivement  $\mathbb{S}_{++}^n$ ) le cône de  $\mathbb{S}^n$  formé des matrices semi-définies positives (respectivement définies positives).

Soient  $A, B \in \mathbb{S}^n$ . On définit les relations d'ordres

- $A \succcurlyeq B$  si et seulement si  $A - B \in \mathbb{S}_+^n$ ,

- $A \succ B$  si et seulement si  $A - B \in \mathbb{S}_{++}^n$ .

La proposition qui suit fournit quelques propriétés des cônes  $\mathbb{S}_+^n$  et  $\mathbb{S}_{++}^n$ , qui nous seront utiles dans la suite.

**Proposition 5.1.** Soient  $A, B \in \mathbb{S}^n$ . Alors on a

1.  $A \succcurlyeq 0 \iff \forall B \succcurlyeq 0, \langle A, B \rangle \geq 0$ .
2.  $A \succ 0 \iff \forall B \succcurlyeq 0, B \neq 0, \langle A, B \rangle > 0$ .
3. Si  $A$  et  $B \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $\langle A, B \rangle = 0 \iff AB = 0$ .

## 5.2 Le problème primal et le problème dual

Le problème primal consiste à trouver  $X \in \mathbb{S}^n$  solution du problème

$$\begin{cases} \min \langle C, X \rangle, \\ \langle A_i, X \rangle = b_i, 1 \leq i \leq m, \\ X \succcurlyeq 0, \end{cases} \quad (P_{SDP})$$

où  $C \in \mathbb{S}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $A_i \in \mathbb{S}^n$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Le problème dual consiste à trouver le couple  $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$  solution du problème

$$\begin{cases} \max \langle b, y \rangle, \\ \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ S \succcurlyeq 0. \end{cases} \quad (D_{SDP})$$

Le problème dual s'obtient avec la dualisation Lagrangienne. Il suffit d'adapter la méthode décrite dans la partie 4 pour le cas SDP.

*Remarque 5.2.* Le problème dual est équivalent à trouver  $y \in \mathbb{R}^m$  solution du problème

$$\begin{cases} \max \langle b, y \rangle, \\ C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succcurlyeq 0. \end{cases} \quad (D'_{SDP})$$

La relation  $C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succcurlyeq 0$  s'appelle une inégalité matricielle linéaire.

## 5.3 Définitions et notations

On note  $p^*$  la valeur optimale du problème ( $P_{SDP}$ ) et  $d^*$  la valeur optimale du problème ( $D_{SDP}$ ).

On note

$$F_P := \{X \in \mathbb{S}^n : \langle A_i, X \rangle = b_i, 1 \leq i \leq m, X \succcurlyeq 0\}$$

et

$$F_P^o := \{X \in \mathbb{S}^n : \langle A_i, X \rangle = b_i, 1 \leq i \leq m, X \succ 0\},$$

l'ensemble des matrices admissibles et l'ensemble des matrices strictement admissibles, respectivement, du problème ( $P_{SDP}$ ).

On note

$$F_D := \{(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n, \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, S \succcurlyeq 0\}$$

et

$$F_D^o := \{(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n, \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, S \succ 0\},$$

l'ensemble des couples admissibles et l'ensemble des couples strictement admissibles, respectivement, du problème ( $D_{SDP}$ ).

On note  $F = F_D \times F_P$  et  $F^o = F_D^o \times F_P^o$  l'ensemble des triplet admissible et l'ensemble des triplets strictement admissibles primale-dual.

On note  $S_P$  (resp.  $S_D$ ) l'ensemble des solutions de ( $P_{SDP}$ ) (resp. ( $D_{SDP}$ )).

## 5.4 Existence de solutions et CNS d'optimalité

La proposition suivante est un résultat direct de la dualisation lagrangienne :

### Proposition 5.3.

1. Si  $(X, y, S) \in F$ , alors  $\langle C, X \rangle - \langle b, y \rangle = \langle X, S \rangle \geq 0$ .
2. Si de plus  $\langle X, S \rangle = 0$ , alors  $X \in S_P$  et  $(y, S) \in S_D$ .

La quantité  $p^* - d^*$  est le saut de dualité. La proposition 5.3 montre que le saut de dualité est égal à  $\langle X, S \rangle$ , qui est toujours positive ou nul. On parle alors de dualité faible. Quand le saut de dualité est nul, on parle alors de la dualité forte, et c'est une condition suffisante d'optimalité.

Le théorème qui suit donne les conditions nécessaires d'optimalité.

### Théorème 5.4.

1. Si  $F_P \times F_D^o \neq \emptyset$ , alors  $S_P$  est non vide et borné et  $p^* = d^*$ .
2. Si  $F_P^o \times F_D \neq \emptyset$  et si les matrices  $A_i$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathbb{S}^n$ , alors  $S_D$  est non vide et borné et  $p^* = d^*$ .
3. Si  $F^o \neq \emptyset$  et si les  $A_i$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathbb{S}^n$ , alors  $S_P$  et  $S_D$  sont non vides et bornés et  $p^* = d^*$ .

La proposition 5.5 fournit les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les problèmes d'optimisation SDP. C'est l'équivalent des conditions KKT dans le cas SDP.

**Proposition 5.5.** Si  $F^o \neq \emptyset$  et les matrices  $A_i$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathbb{S}^n$ , alors  $(X, y, S)$  est une solution primale-duale du problème ( $P_{SDP}$ ) si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ \langle A_i, X \rangle = b_i, 1 \leq i \leq m, \\ S \succcurlyeq 0, X \succcurlyeq 0, \\ \langle X, S \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

## 5.5 Méthode de points intérieurs primale-duale

On présente ici les principes de la méthode de points intérieurs primale-duale.

Pour simplifier les formulations, on introduit l'opérateur  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  défini par

$$\mathcal{A}(X) := (\langle A_1, X \rangle, \dots, \langle A_m, X \rangle).$$

Son adjoint est donné par

$$\mathcal{A}^*(y) = \sum_{i=1}^m y_i A_i.$$

### 5.5.1 La fonction barrière et le chemin central

Soit  $\mu > 0$ . On associe au problème ( $P_{SDP}$ ), le problème-barrière suivant

$$\begin{cases} \min_{X \in \mathbb{S}^n} \langle C, X \rangle + \mu f(X), \\ \mathcal{A}(X) = b. \end{cases} \quad (P_{SDP}^\mu)$$

De même, on associe au problème ( $D_{SDP}$ ), le problème-barrière suivant

$$\begin{cases} \max_{(y,S) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n} \langle b, y \rangle + \mu f(S), \\ \mathcal{A}^*(y) + S = C, \end{cases} \quad (D_{SDP}^\mu)$$

La fonction  $f(X)$  s'appelle une fonction barrière. Elle est définie sur  $\mathbb{S}_+^n$  par

$$f(X) = \begin{cases} -\ln \det X & \text{si } X \succ 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction barrière possède les propriétés suivantes :

- $f(X)$  tend vers  $+\infty$  quand  $X$  s'approche d'une matrice  $\bar{X} \in \partial \mathbb{S}_+^n$ , où  $\partial \mathbb{S}_+^n$  désigne la frontière de l'ensemble  $\mathbb{S}_+^n$ . La fonction barrière impose donc la contrainte  $X \succeq 0$ .
- $\nabla f(X) = -X^{-1}$ .



- $\nabla^2 f(X) = X^{-1} \odot X^{-1}$  où  $P \odot Q$  est l'opérateur de  $\mathbb{S}^n$  dans  $\mathbb{S}^n$  défini par  $(P \odot Q)H := \frac{1}{2}(PHQ^T + QHP^T)$ , pour  $P, Q \in \mathbb{S}^n$ .

Soit maintenant

$$L(X, y) = \langle C, X \rangle + \mu f(X) - \mathcal{A}(X)y^T + b,$$

le lagrangien du problème ( $P_{SDP}^\mu$ ). On suppose que le problème barrière ( $P_{SDP}^\mu$ ) a une solution optimale  $X_\mu$ . Alors  $X_\mu \in F_p^o$  et il existe  $y_\mu \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\nabla_X L(X_\mu, y_\mu) = 0,$$

c'est-à-dire

$$C - \mu X_\mu^{-1} - \mathcal{A}^* y_\mu = 0.$$

On pose  $S_\mu := \mu X_\mu^{-1} \succ 0$ . On a alors  $(y_\mu, S_\mu) \in F_D^o$  et le triplet  $(X_\mu, y_\mu, S_\mu)$  vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{A}(X_\mu) = b, \\ \mathcal{A}^*(y_\mu) + S_\mu = C, \\ X_\mu S_\mu = \mu I, \end{cases} \quad (K_\mu)$$

où  $I$  désigne la matrice identité de  $n \times n$ . Le chemin central est l'ensemble des solutions du système ( $K_\mu$ ), c'est-à-dire

$$\Gamma(\mu) = \{(X_\mu, y_\mu, S_\mu) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n : \mu > 0\}.$$

Le chemin central joue un rôle crucial pour calculer la solution optimale. En effet, puisque  $X_\mu S_\mu = \mu I$  implique que  $\langle X_\mu, S_\mu \rangle = n\mu$ , on peut donc calculer  $\mu$  à chaque itération à l'aide de la relation  $\mu = \frac{1}{n} \langle X_\mu, S_\mu \rangle$ . Par ce fait,  $\mu$  mesure le saut de dualité. Enfin, si  $(X^*, y^*, S^*)$  est une solution optimale du problème ( $P_{SDP}$ ), alors

$$\lim_{\mu \searrow 0} (X_\mu, y_\mu, S_\mu) = (X^*, y^*, S^*).$$

### 5.5.2 Recherche d'une direction de Newton

Pour calculer une approximation de la solution primale-duale, on utilise le schéma suivant :

$$(X_\mu^{k+1}, y_\mu^{k+1}, S_\mu^{k+1}) = (X_\mu^k + \alpha_X dX, y_\mu^k + \alpha_y dy, S_\mu^k + \alpha_S dS),$$

où

$$\mu = \beta \mu^k,$$

avec

$$\mu^k = \frac{1}{n} \langle X_\mu^k, S_\mu^k \rangle.$$

L'introduction du paramètre  $\beta \in ]0, 1[$  sert à faire décroître  $\mu$  à chaque itération.

On cherche alors une direction  $(dX, dy, dS)$  en utilisant la méthode de Newton appliquée au système  $(K_\mu)$  : on applique la méthode de Newton pour résoudre  $F(X_\mu, y_\mu, S_\mu) = 0$ , où

$$F(X, y, S) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^*(y) + S - C \\ \mathcal{A}(X) - b \\ S - \mu X \end{pmatrix}.$$

On considère  $S - \mu X$  à la place de  $XS - \mu I$ , car cette dernière expression n'est pas symétrique et donc on ne peut pas lui appliquer l'opérateur  $\mathcal{A}$ , comme on le verra dans lemme 2.29. La direction  $(dX, dy, dS)$  doit vérifier

$$\nabla F_{(X,y,S)}(dX, dy, dS) = -F(X^k, y^k, S^k). \quad (2.28)$$

Pour résoudre (2.28), on utilisera le lemme suivant :

**Lemme 5.6.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux opérateurs linéaires de  $\mathbb{S}^n$  vers  $\mathbb{S}^n$  tels que  $P$  soit inversible et  $P^{-1}Q$  soit défini positif (sans être forcément auto-adjoint). On suppose que  $A$  est surjective (les  $A_i$  sont linéairement indépendant). Alors pour  $U \in \mathbb{S}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$  et  $W \in \mathbb{S}^n$ , le système*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^* & I \\ \mathcal{A} & 0 & 0 \\ P & 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dy \\ dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ v \\ W \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

admet une unique solution donnée par

$$\begin{aligned} dy &= (AP^{-1}QA^*)^{-1}(v - AP^{-1}(W - Q(U))), \\ dS &= U - A^*(dy), \\ dX &= P^{-1}(W - Q(dS)). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les formules pour  $dS$  et  $dX$  s'obtiennent directement de la première équation et de la troisième équation du système (2.29). Maintenant, en substituant la formule de  $dS$  dans celle de  $dX$  et, en utilisant la deuxième équation du système (2.29), on obtient

$$AP^{-1}QA^*(dy) = v - AP^{-1}(W - Q(U)). \quad (2.30)$$

Puisque  $P^{-1}Q$  est supposée définie positive et  $\mathcal{A}$  est surjective alors la matrice  $AP^{-1}QA^*$  est inversible. Donc  $dy$  est déterminée de manière unique en inversant la matrice  $AP^{-1}QA^*$  à gauche de l'équation (2.30).  $\square$

On se place dans le cadre du théorème 5.5, c'est-à-dire  $F^o \neq \emptyset$  et les matrices  $A_i$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathcal{S}^n$ . On a

$$\nabla F_{(X,y,S)}(X, y, S) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^* & I \\ \mathcal{A} & 0 & 0 \\ \mu X^{-1} \odot X^{-1} & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Puisque l'opérateur  $X^{-1} \odot X^{-1}$  est défini positif, alors le lemme 5.6 assure l'existence et l'unicité de la solution de (2.28).

### Symétrisation de l'équation $XS = \mu I$

L'équation  $XS = \mu I$  n'est pas nécessairement symétrique, ce qui ne permet pas d'utiliser le lemme 5.6 pour calculer la direction de Newton. Pour cela il faut chercher une méthode pour linéariser cette équation.

Une première approche proposée par Alizadeh, Haeberly et Overton [3] consiste à symétriser l'équation  $XS = \mu I$  en la remplaçant par

$$XS + SX = \mu I,$$

et ensuite de la linéariser comme suit :

$$\frac{1}{2}(SdX + dXS + XdS + dSX) = \mu I - \frac{1}{2}(XS + SX).$$

On peut écrire le terme  $\frac{1}{2}(SdX + dXS + XdS + dSX)$  sous forme  $P(dX) + Q(dS)$  avec  $P = S \odot I$  et  $Q = X \odot I$ . Un inconvénient de cette méthode est que l'on ne dispose pas d'expression de l'inverse de  $P$  et, pour calculer dans ce cas  $P^{-1}Q$ , il faut résoudre l'équation  $SdX + dXS = Y$ , appelée équation de Lyapunov. Un autre inconvénient est que le système (2.29) peut être mal défini en  $F^o$  (voir [95]).

Il existe une approche plus générale consistant à remplacer  $XS = \mu I$  par

$$\frac{1}{2}(RXSR^{-1} + R^{-T}SXR^T) = \mu I,$$

avec  $R$  inversible. Cette méthode a été étudiée pour plusieurs matrices  $R$  par Monteiro [75], puis généralisé par Zhang [108].

Après linéarisation du système (2.29) avec cette transformation, les directions obtenues sont dites de MZ (Monteiro et Zhang). La matrice  $R$  est choisie de sorte à ce que  $RXSR^{-1}$  soit symétrique. Pour cela, il existe trois choix pour  $R$  :

- $R = S^{\frac{1}{2}}$  (direction HRVW/KSH/M [53]), on obtient  $P = I$  et  $Q = X \odot S^{-1}$ ;
- $R = X^{-\frac{1}{2}}$  (direction HRVW/KSH/M duale [61]), on obtient  $P = S \odot X^{-1}$  et  $Q = I$ ;

- $R = W^{-\frac{1}{2}}$  où  $W$  est l'unique matrice SDP solution de  $WSW = X$  (direction NT [78]), on obtient  $P = I$  et  $Q = W \odot W$ .

### 5.5.3 Calcul de la longueur du pas

On doit calculer les longueurs de pas  $\alpha_p$  et  $\alpha_d$  de façon à avoir

$$X^k + \alpha_p dX \succ 0 \text{ et } Z^k + \alpha_d dZ \succ 0.$$

En pratique, on prend

$$\alpha_p = \gamma \min\{1, \bar{\alpha}_p\},$$

avec

$$\bar{\alpha}_p = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda_{\min}(L^{-1}dXL^{-T})}, & \text{si } \lambda_{\min}(L^{-1}dXL^{-T}) < 0, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,  $L$  désigne la matrice triangulaire de la factorisation de Cholesky de  $X^k$  et  $\lambda_{\min}(L^{-1}dXL^{-T})$  la plus petite valeur propre de la matrice  $L^{-1}dXL^{-T}$ .

On calcule  $\alpha_d$  de la même manière.

### 5.5.4 Pseudo-code

---

**Algorithme 10** Algorithme de points intérieurs primal-dual

---

**Données:** Point initial  $(X^0, y^0, S^0)$  tel que  $X^0 \succ 0, S^0 \succ 0$

On se donne la tolérance  $\varepsilon$  et les paramètres  $0 < \beta < 1$  et  $0 < \gamma < 1$ .

1. On calcule  $\mu^k = \frac{\langle X^k, S^k \rangle}{n}$ .  
Si  $\mu^k < \varepsilon$  et  $(X^k, y^k, S^k)$  vérifie les conditions d'optimalité (5.5), alors  $(X^k, y^k, S^k)$  est l'approximation de la solution optimale et l'algorithme s'arrête.
2. (**Recherche de direction**) On cherche une direction  $(dX, dy, dS)$  avec une valeur de  $\mu = \beta\mu^k$ , en résolvant (2.28).
3. (**Calcul de la longueur du pas**) On calcule  $\alpha_p$  et  $\alpha_d$  tels que  $X^k + \alpha_p dX \succ 0$  et  $Z^k + \alpha_d dZ \succ 0$  avec la procédure de la section 5.5.3.
4. **Mise à jour**

$$(X^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1}) = (X^k + \alpha_p dX, y^k + \alpha_d dy, Z^k + \alpha_d dZ)$$

**Retourner**  $(X^*, y^*, S^*)$ .

---

### 5.5.5 Solveurs SDP

Il existe deux familles de solveurs en optimisation SDP :

- La première famille de solveurs utilise les méthodes de points intérieurs primaux-duaux, destinées aux problèmes de petite taille et de taille

moyenne. On trouve des solveurs comme *SEDUMI* (voir [93, 94] ) ou *SDPT3* (voir [97]), qui sont conçus pour l'optimisation SDP, linéaire et quadratique. On trouve aussi *SDPA* et *CSDP* qui sont limités à l'optimisation SDP.

- La deuxième famille de solveurs est destinée aux problèmes de grande taille. Le solveur *conicBundle* (voir [52]) formule le problème SDP comme un problème d'optimisation non-différentiable et le résout par la méthode des faisceaux. Le solveur *SDPLR* (voir [18]) utilise des approximation de bas rang et la reformulation du problème SDP comme un problème d'optimisation non-linéaire.

On utilisera la méthode de points intérieurs dans le chapitre 4.

## Chapitre 3

# Modélisation macroscopique et algorithme à fenêtre glissante

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des modèles macroscopiques de réseaux de distribution d'énergie incluant des unités de stockage. Ces modèles ont la particularité de ne pas avoir de dépendance spatiale ; ils peuvent être obtenus en regroupant les nœuds de même nature. Par conséquent, on ne considère ni les pertes en lignes, ni les contraintes de transmission dans la formulation.

Comme mentionné dans le chapitre 1, l'utilisation des capacités de stockage permet au gestionnaire d'avoir plus de flexibilité dans la gestion des transactions et des livraisons d'énergie. Le but est donc d'étudier à travers ces modèles, l'impact du stockage sur l'économie du réseaux de distribution. Notons que de tels modèles sont largement utilisés dans la littérature (par exemple [102, 103, 105]).

La meilleure gestion de l'énergie est vue comme la solution d'un problème d'optimisation dans lequel la fonction objectif représente le coût réel de l'énergie. Les variables de décision sont les opérations de chargement et de déchargement du stockage, tandis que les limitations physiques du système de stockage (capacité et taux de charge/décharge) sont imposées comme contraintes. La définition de la fonction objectif peut conduire à différents types de modèles que l'on va étudier dans ce chapitre.

Un enjeu majeur de cette étude est la possibilité de développer des outils de décision. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer des simulations en temps réel. Les méthodes classiques d'optimisation numérique s'avèrent être très coûteuses en temps de calcul lorsque l'on considère des problèmes de grande taille. Pour cette raison, on va introduire un algorithme à fenêtre glissante, inspiré principalement des méthodes de décomposition de domaines (voir [96]), qui est basé sur des principes similaires à certaines méthodes existantes telles que « Limited Foresight » et « Myopic approach » (voir [59, 85]). Ces méthodes consistent à calculer successivement des solutions optimales sur une grille de temps échelonnée. Cependant, dans notre cas, on permet à deux intervalles successifs de se

chevaucher. L'influence de la longueur du recouvrement sur l'efficacité de notre algorithme sera discutée.

Le reste de ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la partie 2, on décrit la modélisation macroscopique du système de distribution incluant le stockage. On présente un premier problème d'optimisation (linéaire) qui peut être écrit sous forme d'un programme linéaire. Ce problème est classique et a été utilisé dans [102, 103, 105]. Afin de prendre en compte des situations plus réalistes, on introduit un problème d'optimisation plus avancé (non-linéaire) qui inclut un abonnement (souscription) de puissance dans la fonction de coût. Ce problème peut s'écrire sous forme linéaire au prix d'une augmentation du nombre de variables de décision. Ensuite, on prouve quelques propriétés qualitatives satisfaites par les solutions de ces deux problèmes. Enfin, on rappelle quelques méthodes numériques classiques permettant d'approcher leurs solutions.

La partie 3 est dédiée à présenter en détails l'algorithme à fenêtre glissante. Dans la partie 4, on effectue de nombreuses simulations numériques afin d'illustrer à la fois les modèles et les algorithmes. L'influence des paramètres physiques (capacité et efficacité du stockage) et numériques (longueur de la fenêtre en temps et longueur du recouvrement) seront étudiés. Enfin, dans la partie 5, nous concluons par quelques remarques et perspectives.

## 2 Modélisation du système de distribution

### 2.1 Description du système

Le modèle que l'on va introduire dans ce chapitre est inspiré de [105]. Il est obtenu en regroupant géographiquement les nœuds de même nature. Cela nous ramène à considérer seulement quatre nœuds (voir figure 3.1) :

- le gestionnaire qui est chargé d'importer et de distribuer l'énergie électrique ;
- un réseau externe (source) où les énergies traditionnelles ou renouvelables peuvent être achetées et importées ;
- la consommation mutualisée de tous les clients et usagers ;
- le stockage qui peut être utilisé par le gestionnaire pour stocker ou fournir de l'énergie supplémentaire.

On considère un intervalle de temps  $[0, T]$  qui est discrétisé de façon régulière par les temps discrets  $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ , tels que  $t_{i+1} = t_i + \delta t$ . Pour simplifier la présentation, le pas de temps sera fixé à  $\delta t = 1$  (par exemple : une heure). Les quantités suivantes représentent des puissances moyennes sur l'intervalle de temps  $[t_{i-1}, t_i]$  (exprimées en watt),  $L_i$  est la consommation,  $C_i$  et  $D_i$  sont respectivement la puissance chargée et déchargée, et  $U_i$  est la puissance importée. Physiquement, il y a nécessairement des pertes lors des opérations de chargement et de déchargement. On notera respectivement  $\eta_C$  et  $\eta_D$  l'efficacité de ces processus qui sont supposés dans  $]0, 1[$ . Autrement dit, si le gestionnaire envoie une puissance  $C_i$  du réseau vers le stockage, la puissance stockée sera

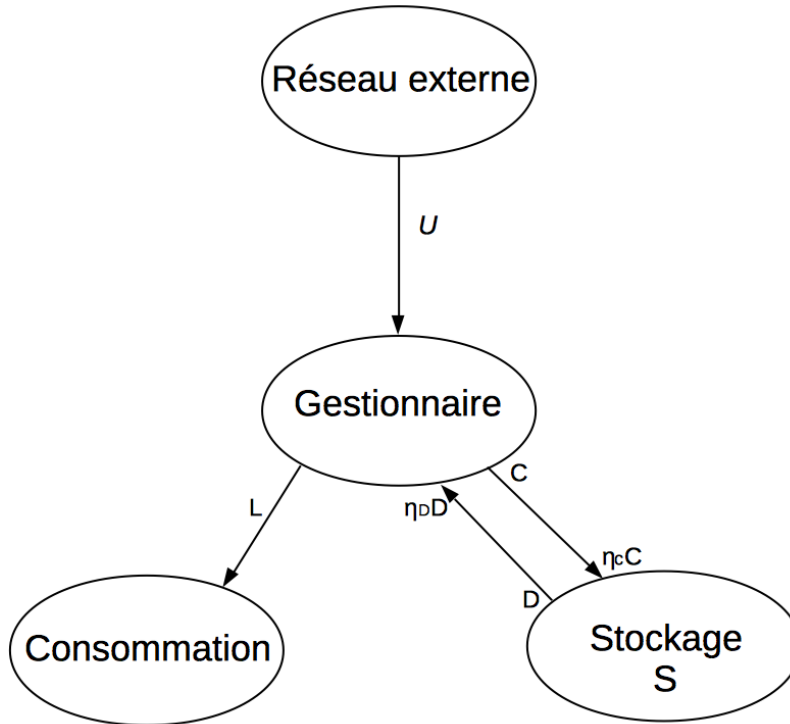


FIGURE 3.1 – Modèle macroscopique de système de distribution

seulement  $\eta_C C_i$ . L'état de charge du stockage au temps  $t_i$  sera noté  $S_i$  (exprimé en kilowatt-heure). La quantité  $L_i$  est supposée connue, alors que  $C_i$ ,  $D_i$  et  $U_i$  sont les variables de décision qui doivent être calculées par le gestionnaire.

Étant donné une valeur initiale du stockage  $S_0$ , l'état de charge au temps  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , est défini récursivement par

$$S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i. \quad (3.1)$$

L'expression de  $S_i$  peut aussi être écrite de manière équivalente sous la forme

$$S_i = S_0 + \sum_{k=1}^i (\eta_C C_k - D_k). \quad (3.2)$$

*Remarque 2.1.* Pour certaines applications, l'état de charge final  $S_N$  est fixé. En effet, pour des raisons techniques, on lui impose parfois d'être égal à l'état de charge initial  $S_0$  ([87, 104]). Ce type de condition limite n'est pas pertinent dans le cadre de l'algorithme à fenêtre glissante qui sera proposé dans la partie 3. Par conséquent, l'état de charge final est laissé libre dans cette étude.

Les variables  $C_i$ ,  $D_i$  et  $S_i$  sont bornées par leurs limitations physiques, qui s'expriment

$$S_{min} \leq S_i \leq S_{max}, \quad (3.3)$$



$$0 \leq C_i \leq C_{max}, \quad (3.4)$$

$$0 \leq D_i \leq D_{max}. \quad (3.5)$$

Les constantes  $S_{min}$  et  $S_{max}$  désignent respectivement la capacité minimale et maximale de stockage d'énergie, et  $C_{max}$  et  $D_{max}$  sont respectivement la puissance maximale de charge et de décharge.

Pour simplifier, le stock externe d'énergie est supposé infini. Le gestionnaire doit maintenir à l'équilibre l'équation de bilan

$$U_i = L_i + C_i - \eta_D D_i. \quad (3.6)$$

Les contraintes physiques décrites ci-dessus resteront inchangées dans les différentes situations économiques que l'on va considérer dans la suite ; chaque modèle économique (fourniture d'électricité avec ou sans abonnement) sera uniquement régi par le choix de la fonction objectif à minimiser.

## 2.2 Le modèle sans abonnement

Pour simplifier, on considère dans un premier temps une fonction objectif linéaire qui correspond à un modèle économique simple. Le gestionnaire importe de l'électricité d'un réseau externe (source) à un prix donné.

### 2.2.1 Formulation

Le prix de l'électricité importé du réseau externe est supposé fixé et connu à l'avance. Par contre, il peut évoluer en fonction du temps. On notera  $P_i$  le prix moyen de l'électricité sur l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ . Par conséquent, le coût total de l'énergie importée sur  $[0, T]$  est donné par

$$\sum_{i=1}^N P_i U_i.$$

En tenant compte de (3.6), et puisque  $L_i$  est fixé, minimiser ce coût équivaut donc à minimiser la fonction objectif

$$J(C, D) = \sum_{i=1}^N P_i (C_i - \eta_D D_i). \quad (3.7)$$

Pour  $S_0 \in [S_{min}, S_{max}]$  donné, le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\begin{aligned} & \min_{C, D \in \mathbb{R}^N} J(C, D), \\ \text{s.c. } \forall 1 \leq i \leq N, & \begin{cases} S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i, \\ S_{min} \leq S_i \leq S_{max}, \\ 0 \leq C_i \leq C_{max}, \\ 0 \leq D_i \leq D_{max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

Notons qu'une fois ce problème résolu, on peut retrouver la puissance importée  $U_i$  par l'équation (3.6).

### 2.2.2 Propriétés

Le problème (P1) n'admet pas nécessairement une unique solution puisque  $J$  n'est pas strictement convexe. Nous allons énoncer quelques propriétés qualitatives satisfaites par les solutions de (P1).

Physiquement, les opérations de charge et de décharge ne peuvent pas être réalisées simultanément. Théoriquement, nous devrions donc ajouter la contrainte  $C_i D_i = 0$  au problème (P1). Le premier résultat que nous présentons montre que cette contrainte est automatiquement prise en compte dans le problème d'optimisation. Il n'est donc pas nécessaire de l'inclure dans l'espace de résolution.

**Théorème 2.2.** *Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P1). Alors  $C_i^* D_i^* = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $j$  tel que  $C_j^* D_j^* > 0$ . On définit

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= \begin{cases} C_i^* & \text{si } i \neq j, \\ (C_j^* - \frac{1}{\eta_C} D_j^*)^+ & \text{si } i = j, \end{cases} \\ \bar{D}_i &= \begin{cases} D_i^* & \text{si } i \neq j, \\ (\eta_C C_j^* - D_j^*)^- & \text{si } i = j, \end{cases} \end{aligned}$$

où  $x^+$  et  $x^-$  désignent respectivement la partie positive et la partie négative du réel  $x$ , i.e.  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = -\min(x, 0)$ . Cette définition assure que pour tout  $i$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{C}_i \leq C_i^*, \\ 0 &\leq \bar{D}_i \leq D_i^*, \end{aligned}$$

donc  $\bar{C}$  et  $\bar{D}$  satisfont les contraintes (3.4) et (3.5). Soit  $S^*$  et  $\bar{S}$  les états de charge définis respectivement à partir de  $(C^*, D^*)$  et  $(\bar{C}, \bar{D})$  par la relation (3.1).

Alors, on a

$$\begin{aligned}\bar{S}_i &= S_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i (\eta_C \bar{C}_k - \bar{D}_k) + \eta_C \bar{C}_j - \bar{D}_j, \\ &= S_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i (\eta_C C_k^* - D_k^*) + (\eta_C C_j^* - D_j^*)^+ - (\eta_C C_j^* - D_j^*)^-.\end{aligned}$$

Puisque  $x^+ - x^- = x$ , on déduit

$$\bar{S}_i = S_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i (\eta_C C_k^* - D_k^*) + (\eta_C C_j^* - D_j^*) = S_i^*.$$

Par conséquent, on a  $\bar{S} = S^*$ , donc  $\bar{S}$  satisfait la contrainte (3.3).

D'autre part, puisque  $\eta_C \eta_D < 1$ , on a

$$\begin{aligned}\bar{C}_j - \eta_D \bar{D}_j &= (C_j^* - \frac{1}{\eta_C} D_j^*)^+ - \eta_D (\eta_C C_j^* - D_j^*)^-, \\ &< (C_j^* - \eta_D D_j^*)^+ - (C_j^* - \eta_D D_j^*)^- = C_j^* - \eta_D D_j^*.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}J(\bar{C}, \bar{D}) &= \sum_{i \neq j} P_i(\bar{C}_i - \eta_D \bar{D}_i) + P_j(\bar{C}_j - \eta_D \bar{D}_j), \\ &< \sum_{i \neq j} P_i(C_i^* - \eta_D D_i^*) + P_j(C_j^* - \eta_D D_j^*) = J(C^*, D^*),\end{aligned}$$

ce qui contredit l'optimalité de  $(C^*, D^*)$ . □

Le théorème suivant décrit l'état de charge du stockage au temps final  $N$  avant et après le temps  $(S_0 - S_{min})/D_{max}$ , qui est le temps minimal pour vider le stockage  $S$  au taux de décharge maximal  $D_{max}$ .

**Théorème 2.3.** *Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P1) et  $S^*$  l'état de charge associé définie par (3.1). On a l'alternative suivante :*

- (i) Si  $N \leq (S_0 - S_{min})/D_{max}$ , alors  $S_N^* = S_0 - ND_{max}$  ;
- (ii) Si  $N > (S_0 - S_{min})/D_{max}$ , l'état de charge du stockage revient à sa valeur minimale au temps  $N$ , i.e.  $S_N^* = S_{min}$ .

*Preuve 2.4.* On commence par prouver (i). Soit  $(\bar{C}, \bar{D})$  défini par  $\bar{C}_i = 0$  et  $\bar{D}_i = D_{max}$ , pour tout  $i$ . On voit immédiatement que  $\bar{C}$  et  $\bar{D}$  satisfont les contraintes (3.4) et (3.5). De plus, d'après (3.2), on a  $\bar{S}_i = S_0 - iD_{max}$ , donc l'hypothèse sur  $N$  garantit que l'état de charge associé  $\bar{S}$  satisfait la contrainte (3.3).

D'autre part, on a

$$J(\bar{C}, \bar{D}) - J(C^*, D^*) = - \sum_{i=1}^N P_i(C_i^* + \eta_D(D_{max} - D_i^*)) \leq 0.$$

S'il existe  $i$  tel que  $C_i^* > 0$  ou  $D_i^* < D_{max}$ , alors la quantité précédente est strictement négative, ce qui contredit l'optimalité de  $(C^*, D^*)$ . Par conséquent,  $(C^*, D^*) = (\bar{C}, \bar{D})$  et  $S_N^* = S_0 - ND_{max}$ . Remarquons que la solution est unique dans ce cas.

On prouve maintenant (ii). Par l'absurde, supposons que  $S_N^* > S_{min}$ . Si  $D_i^* = D_{max}$ , pour tout  $1 \leq i \leq N$ , alors selon l'hypothèse sur  $N$ , on a

$$S_N^* = S_0 - ND_{max} < S_{min},$$

ce qui est impossible. Par conséquent, il existe  $i$  tel que  $D_i^* < D_{max}$ . On définit  $j = \max\{i : D_i^* < D_{max}\}$ . Puisque pour tout  $k$  tel que  $j \leq k < N$ , on a

$$S_N^* = S_k^* + \sum_{i=k+1}^N (\eta_C C_i^* - D_i^*) = S_k^* - (N - k)D_{max},$$

cela garantit que  $S_k^* > S_N^*$ .

Soit  $\bar{C}$  and  $\bar{D}$  deux vecteurs définis par

$$(\bar{C}_i, \bar{D}_i) = \begin{cases} (C_i^*, D_i^*) & \text{si } i \neq j, \\ (C_j^* - \epsilon_1, 0) & \text{si } i = j \text{ et } C_j^* > 0, \\ (0, D_j^* + \epsilon_2) & \text{si } i = j \text{ et } C_j^* = 0, \end{cases}$$

avec

$$\epsilon_1 = \min\left(\frac{S_N^* - S_{min}}{\eta_C}, C_j^*\right)$$

et

$$\epsilon_2 = \min\left(S_N^* - S_{min}, D_{max} - D_j^*\right).$$

Cette définition garantit que  $\bar{C}$  and  $\bar{D}$  satisfont les contraintes (3.4) and (3.5). Soit  $\bar{S}$  l'état de charge associé à  $\bar{C}$  and  $\bar{D}$ . On va vérifier que  $\bar{S}$  satisfait la contrainte (3.3). D'abord, pour  $i \leq j$ , on a  $\bar{S}_i = S_i^*$ . Ensuite, pour  $i > j$ , on a

$$\bar{S}_i = S_i^* + \eta_C(\bar{C}_i - C_j^*) - (\bar{D}_j - D_j^*).$$

En distinguant les cas, on a donc

$$\bar{S}_i = \begin{cases} S_i^* - \eta_C \epsilon_1 & \text{si } C_j^* > 0, \\ S_i^* - \epsilon_2 & \text{si } C_j^* = 0. \end{cases}$$

D'après les définitions de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , on en déduit

$$S_i^* - S_N^* + S_{min} \leq \bar{S}_i < S_i^*,$$

donc  $S_{min} \leq S_i^* < S_{max}$ .

Enfin, on prouve que  $(\bar{C}, \bar{D})$  réalise une valeur inférieure pour  $J$  que  $(C^*, D^*)$ . C'est immédiat puisque

$$\bar{C}_j - \eta_D \bar{D}_j - (C_j^* - \eta_D D_j^*) = \begin{cases} -\epsilon_1 & \text{si } C_j^* > 0, \\ -\eta_D \epsilon_2 & \text{si } C_j^* = 0, \end{cases}$$

donc dans tous les cas

$$\bar{C}_j - \eta_D \bar{D}_j < C_j^* - \eta_D D_j^*.$$

Cela contredit l'optimalité de  $(C^*, D^*)$ .  $\square$

### 2.2.3 Méthodes de résolution

On récrit le problème (P1) sous la forme matricielle suivante qui convient plus à l'application des méthodes de résolution classiques :

$$\begin{aligned} \min_{C, D \in \mathbb{R}^N} & \quad (P^T \quad -\eta_D P^T) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \\ \text{s.c.} & \quad a \leq A (\eta_C C - D) \leq b, \\ & \quad 0 \leq C \leq c, \\ & \quad 0 \leq D \leq d, \end{aligned}$$

où  $C$  et  $D$  sont les variables de décision correspondant, respectivement, à la charge et à la décharge,  $P \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur prix et  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^N$  sont des vecteurs donnés, définis par

$$\begin{aligned} a &= (S_{min} - S_0)\mathbf{1}, \\ b &= (S_{max} - S_0)\mathbf{1}, \\ c &= D_{max}\mathbf{1}, \\ d &= C_{max}\mathbf{1}, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ . Enfin,  $A \in M_N(\mathbb{R})$  est la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec ce formalisme, le problème (P1) est écrit sous forme d'un programme linéaire. Il peut être résolu soit par la méthode du simplexe, soit par la méthode du point intérieur pour les problèmes de très grande taille (voir chapitre 2).

*Remarque 2.5.* On note que le problème (P1) peut être reformulé en n'utilisant qu'une seule variable de décision  $\Delta = \eta_C C - D$ . En effet, on peut récrire la

fonction objectif comme

$$J(\Delta) = \sum_{i=1}^N P_i \left( \frac{1}{\eta_C} \Delta_i^+ + \eta_D \Delta_i^- \right).$$

Par conséquent, en considérant le problème

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \in \mathbb{R}^N} J(\Delta), \\ \text{s.c. } \forall 1 \leq i \leq N, & \begin{cases} S_{min} - S_0 \leq \sum_{k=1}^i \Delta_k \leq S_{max} - S_0, \\ -D_{max} \leq \Delta_i \leq \eta_C C_{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{P1}') \end{aligned}$$

les deux problèmes (P1) et (P1') sont équivalents au sens suivant :

1. Si  $(C^*, D^*)$  est une solution du problème (P1), alors  $\Delta^* = \eta_C C^* - D^*$  est une solution du problème (P1').
2. If  $\Delta^*$  est une solution du problème (P1'), alors  $(C^*, D^*) = (\frac{1}{\eta_C} \Delta^{*+}, \Delta^{*-})$  est une solution du problème (P1).

## 2.3 Le modèle avec abonnement

Dans cette section, on prend en compte un modèle économique plus réaliste. Au lieu d'acheter librement de l'électricité à partir du réseau externe, comme dans le modèle précédent, l'importation sera limitée par un abonnement électrique.

### 2.3.1 Formulation

On considère les mêmes nœuds que dans le modèle précédent (voir Figure 3.1). Supposons que le gestionnaire ait souscrit un abonnement pour une puissance donnée  $U_{ab}$ . On suppose que le prix de cet abonnement est une constante qui n'a aucune influence sur le problème d'optimisation qui va suivre. Nous n'en tiendrons donc pas compte. Le fonctionnement de cet abonnement est basé sur l'alternative suivante :

- si la puissance importée  $U_i$  ne dépasse pas  $U_{ab}$ , son prix est  $P_i$  ;
- sinon, la puissance importée  $U_i$  est toujours importée au prix  $P_i$ , mais la puissance excessive  $U_i - U_{ab}$  est pénalisée d'un surcoût  $Q_i$ .

Par conséquent, le coût de la puissance importée est

$$\sum_{i=1}^N P_i U_i + \sum_{i=1}^N Q_i (U_i - U_{ab})^+.$$

Comme précédemment, en utilisant l'équation (3.6), ce coût peut être reformulé en utilisant uniquement les variables de décision  $C$  et  $D$ . Ainsi, nous obtenons

la fonction objectif suivante à minimiser

$$J_{ab}(C, D) = \sum_{i=1}^N P_i(C_i - \eta_D D_i) + \sum_{i=1}^N Q_i(L_i - U_{ab} + C_i - \eta_D D_i)^+. \quad (3.8)$$

Remarquons que la consommation intervient ici dans le problème d'optimisation pour la gestion du stock. Ce n'était pas le cas dans le précédent modèle. En effet, la consommation n'intervenait alors qu'*a posteriori* pour calculer la puissance importée  $U_i$ , via l'équation (3.6).

Le problème d'optimisation est alors le suivant

$$\begin{aligned} & \min_{C, D \in \mathbb{R}^N} J_{ab}(C, D), \\ \text{s.c. } & \forall 1 \leq i \leq N, \quad \begin{cases} S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i, \\ S_{\min} \leq S_i \leq S_{\max}, \\ 0 \leq C_i \leq C_{\max}, \\ 0 \leq D_i \leq D_{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

*Remarque 2.6.* Le modèle sans abonnement peut être considéré comme un cas particulier de ce modèle avec  $U_{ab}$  suffisamment grand.

### 2.3.2 Propriétés

Les résultats présentés ici indiquent que les solutions de (P2) satisfont les mêmes propriétés que les solutions de (P1).

**Théorème 2.7.** *Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P2). Alors  $C_i^* D_i^* = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .*

**Théorème 2.8.** *Soit  $(C^*, D^*)$  une solution du problème (P2) et  $S^*$  l'état de charge associé, défini par (3.1). On a l'alternative suivante :*

- (i) si  $N \leq (S_0 - S_{\min})/D_{\max}$ , alors  $S_N^* = S_0 - ND_{\max}$  ;
- (ii) si  $N > (S_0 - S_{\min})/D_{\max}$ , l'état de charge d'énergie revient à sa valeur minimale au temps  $N$ , i.e.  $S_N^* = S_{\min}$ .

Les preuves de ces derniers théorèmes sont similaires à celles du modèle sans abonnement. Le terme supplémentaire dans la fonction objectif  $J_{ab}$  ne pose aucune difficulté technique pour adapter la preuve.

### 2.3.3 Méthodes de résolution

On va écrire le problème (P2) sous forme de programme linéaire. Pour cela, on introduit la variable auxiliaire  $q \in \mathbb{R}^N$  et la fonction

$$\hat{J}_{ab}(C, D, q) = \sum_{i=1}^N P_i(C_i - \eta_D D_i) + \sum_{i=1}^N Q_i q_i.$$

On considère alors le problème d'optimisation sous contraintes

$$\begin{aligned} & \min_{C, D, q \in \mathbb{R}^N} \widehat{J}_{ab}(C, D, q), \\ \text{s.c. } & \forall 1 \leq i \leq N, \quad \begin{cases} S_i = S_{i-1} + \eta_C C_i - D_i, \\ S_{\min} \leq S_i \leq S_{\max}, \\ 0 \leq C_i \leq C_{\max}, \\ 0 \leq D_i \leq D_{\max}, \\ q_i \geq 0, \\ q_i \geq L_i + C_i - \eta_D D_i - U_{ab}. \end{cases} \quad (\widehat{\text{P2}}) \end{aligned}$$

On établit maintenant que les problèmes  $(\text{P2})$  et  $(\widehat{\text{P2}})$  sont équivalents.

**Proposition 2.9.**

1. Si  $(C^*, D^*)$  est solution du problème  $(\text{P2})$ , alors en posant

$$q_i^* = (L_i - U_{ab} + C_i^* - \eta_D D_i^*)^+, \quad (3.9)$$

le triplet  $(C^*, D^*, q^*)$  est solution du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ .

2. Si  $(C^*, D^*, q^*)$  est solution du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ , alors  $(C^*, D^*)$  est solution du problème  $(\text{P2})$ .

*Démonstration.* On remarque d'abord que si  $(C, D, q)$  vérifie les contraintes du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ , alors on a

$$\widehat{J}_{ab}(C, D, q) \geq J_{ab}(C, D).$$

1. Par la définition (3.9) de  $q^*$ , il est immédiat que le triplet  $(C^*, D^*, q^*)$  satisfait les contraintes du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ . Soit  $(C, D, q)$  un triplet vérifiant les contraintes du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ . On a

$$\widehat{J}_{ab}(C, D, q) \geq J_{ab}(C, D) \geq J_{ab}(C^*, D^*) = \widehat{J}_{ab}(C^*, D^*, q^*).$$

La dernière égalité vient de la définition (3.9) de  $r^*$ . Par conséquent,  $(C^*, D^*, q^*)$  est solution du problème  $(\widehat{\text{P2}})$ .

2. Le couple  $(C^*, D^*)$  vérifie trivialement les contraintes du problème  $(\text{P2})$ . Soit  $(C, D)$  vérifiant les contraintes du problème  $(\text{P2})$  et soit

$$q_i = (L_i - U_{ab} + C_i - \eta_D D_i)^+.$$

Cette définition assure que

$$J_{ab}(C, D) = \sum_{i=1}^N P_i(C_i - \eta_D D_i) + \sum_{i=1}^N Q_i q_i,$$

donc

$$J_{ab}(C, D) = \widehat{J}_{ab}(C, D, q) \geq \widehat{J}_{ab}(C^*, D^*, q^*) \geq J_{ab}(C^*, D^*).$$



On en déduit que  $(C^*, D^*)$  est solution du problème (P2).

□

Le problème (P2) est non-linéaire et non-différentiable. D'un point de vue numérique, il peut être résolu par exemple par la méthode du sous-gradient ou la méthode des faisceaux (voir [70, 91]). Grâce à la reformulation équivalente ( $\widehat{\text{P2}}$ ), on est ramené à un problème de programmation linéaire, on peut donc utiliser les mêmes méthodes numériques que pour le problème (P1).

### 3 Algorithme à fenêtre glissante

Dans de nombreuses applications concrètes, le calcul des solutions de (P1) ou ( $\widehat{\text{P2}}$ ) peut être inclus dans un système décisionnel qui vise à appliquer une stratégie de stockage optimal. Il est donc crucial de calculer la solution en temps réel. Lorsque l'on considère un grand nombre de pas de temps, par exemple pour une simulation d'une année avec une résolution d'une heure, le temps de calcul peut rapidement devenir très important. Nous proposons donc une méthode basée sur une fenêtre temporelle glissante comme suit.

Notons que cette méthode présente des similitudes avec des algorithmes existants comme « limited foresight » et « myopic approach », voir [59, 85]. Cependant, nous pouvons citer quelques différences : la longueur du chevauchement entre intervalles consécutifs est variable dans notre méthode et l'influence de cette longueur est discutée ; d'autre part, dans ces méthodes existantes, il y a une condition aux limites imposée au moment final de chaque sous-intervalle, alors que ce n'est pas le cas dans notre méthode.

L'idée principale est de décomposer le problème global sur l'intervalle de temps discret  $[[0, N]]$  en une succession de simulations sur des petits sous-intervalles de temps. Les solutions sont ensuite concaténées afin d'obtenir une solution approchée du problème global.

Dans ce qui suit, nous supposons que les sous-intervalles sont suffisamment grands pour entrer dans le cadre de la deuxième alternative des théorèmes 2.3 et 2.8. Par conséquent, ces théorèmes garantissent que l'état du stockage sera égal à  $S_{min}$  à la fin de chaque simulation. Cela crée des conditions aux limites artificielles qui mèneront à une solution globale non optimale. Afin d'éviter ces artefacts numériques, nous imposons que deux sous-intervalles successifs doivent se recouvrir.

On présente maintenant en détails la méthode suggérée. Soit  $L \in \mathbb{N}^*$ ,  $L \leq N$ , la longueur de la fenêtre temporelle. L'autre paramètre de la méthode est la longueur du recouvrement  $r \in \mathbb{N}$ , qui doit nécessairement vérifier  $r < L$ . On définit les sous-intervalles  $[[a_k, b_k]] \subset [[0, N]]$ , avec  $b_k - a_k = L$ , en utilisant la procédure suivante :

- $a_0 = 0$  ;
- $b_k = a_k + L$ ,  $k \geq 0$  ;

- $a_k = b_{k-1} - r, \quad k > 0.$

Afin de calculer la solution sur le sous-intervalle  $[[a_k, b_k]]$ , on a besoin d'une condition initiale  $S_0^k$  pour l'état de charge au temps  $a_k$ . Puisque  $a_k$  appartient au sous-intervalle  $[[a_{k-1}, b_{k-1}]]$ , on peut définir cette condition initiale comme la valeur de l'état de charge calculée à l'instant  $a_k$ , obtenue lors de la simulation sur le sous-intervalle  $[[a_{k-1}, b_{k-1}]]$ . Cette méthode est résumée dans l'algorithme 11.

---

**Algorithme 11**


---

**Données:**  $L, r$  and  $S_0$

$S = (S_0)$

**pour**  $k = 0, 1, 2, \dots$  **faire**

résoudre le problème (P1) ou ( $\widehat{P2}$ ) sur  $[[a_k, b_k]]$  avec la dernière composante de  $S$  comme état de charge initiale

calculer  $S^k = (S_1^k, \dots, S_L^k)$  avec l'équation (3.3)

$S \leftarrow$  concaténation de  $S$  et  $(S_1^k, \dots, S_{L-r}^k)$

**Fin pour**

---

La figure 3.2 illustre le fonctionnement de l'algorithme proposé dans les premières itérations. La première itération génère une solution sur l'intervalle de temps  $[[a_0, b_0]] = [[0, L]]$ . L'état de charge à l'instant  $L - r$  est utilisé comme condition initiale pour la deuxième itération, qui est ensuite calculée sur l'intervalle  $[[a_1, b_1]] = [[L - r, 2L - r]]$ .

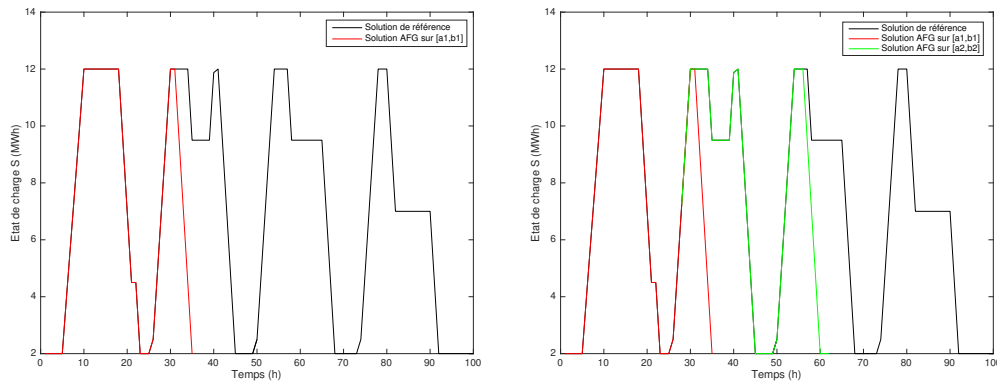


FIGURE 3.2 – La première itération (à gauche) et la seconde itération (à droite) de l'algorithme à fenêtre glissante

Le choix des paramètres  $L$  et  $r$  et leur influence sur la qualité de l'approximation, ainsi que leur influence sur le temps CPU seront discutés dans la partie 4.

## 4 Résultats numériques

Pour toutes les simulations, les données de consommation et de prix proviennent de données réelles pour une petite ville d'environ 10 000 habitants. Selon les besoins des différentes simulations, la fenêtre de temps utilisée pourra être de 24 heures, 100 heures ou 2160 heures. Les paramètres de stockage utilisés sont définis dans le tableau 3.1 pour toutes les simulations, à l'exception des simulations dans lesquelles l'influence de ces paramètres est étudiée (figures 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9 et 3.10).

$S_{min}$	2 MWh
$S_{max}$	12 MWh
$C_{max}, D_{max}$	2.5 MW
$\eta_C, \eta_D$	0.95

TABLEAU 3.1 – Valeurs des paramètres de stockage

Toutes les simulations seront effectuées avec un algorithme du simplexe en utilisant la fonction Matlab `linprog`. La tolérance de faisabilité duale est définie par défaut à  $1e - 07$  et la tolérance de faisabilité primale est définie par défaut à  $1e - 04$ .

### 4.1 Modèle sans abonnement

Pour valider le modèle (P1), on considère une période de temps de 24 heures. La figure 3.3 représente l'évolution de l'état de charge du stockage pour différentes courbes de prix, afin de valider le modèle dans différents contextes économiques. Le but est de valider le modèle avec des courbes de prix d'allure différentes. On remarque que les résultats sont en accord avec l'intuition de base : l'état de charge  $S$  tend à augmenter lorsque le prix est bas et à diminuer lorsque le prix est élevé. Pour souligner l'avantage de l'utilisation du stockage, on compare le coût avec et sans stockage pour les quatre sous-figures de la figure 3.3, les résultats sont présentés dans le tableau 3.2.

Sous-figures	Coût sans stockage (euros)	Coût avec stockage (euros)	Gain
(a)	$1.0353e + 04$	$1.0175e + 04$	1.72%
(b)	$1.5257e + 04$	$1.4603e + 04$	4.29%
(c)	$8.3696e + 03$	$8.3192e + 03$	0.60%
(d)	$2.4375e + 04$	$2.4256e + 04$	0.48%

TABLEAU 3.2 – Comparaison du coût d'achat d'énergie avec stockage et sans stockage (modèle (P1))

Comme annoncé dans le théorème 2.3, on observe sur la figure 3.3 que l'état de charge  $S$  revient à son minimum à la fin de la simulation ( $S_{24} = S_{min} = 2$ ).

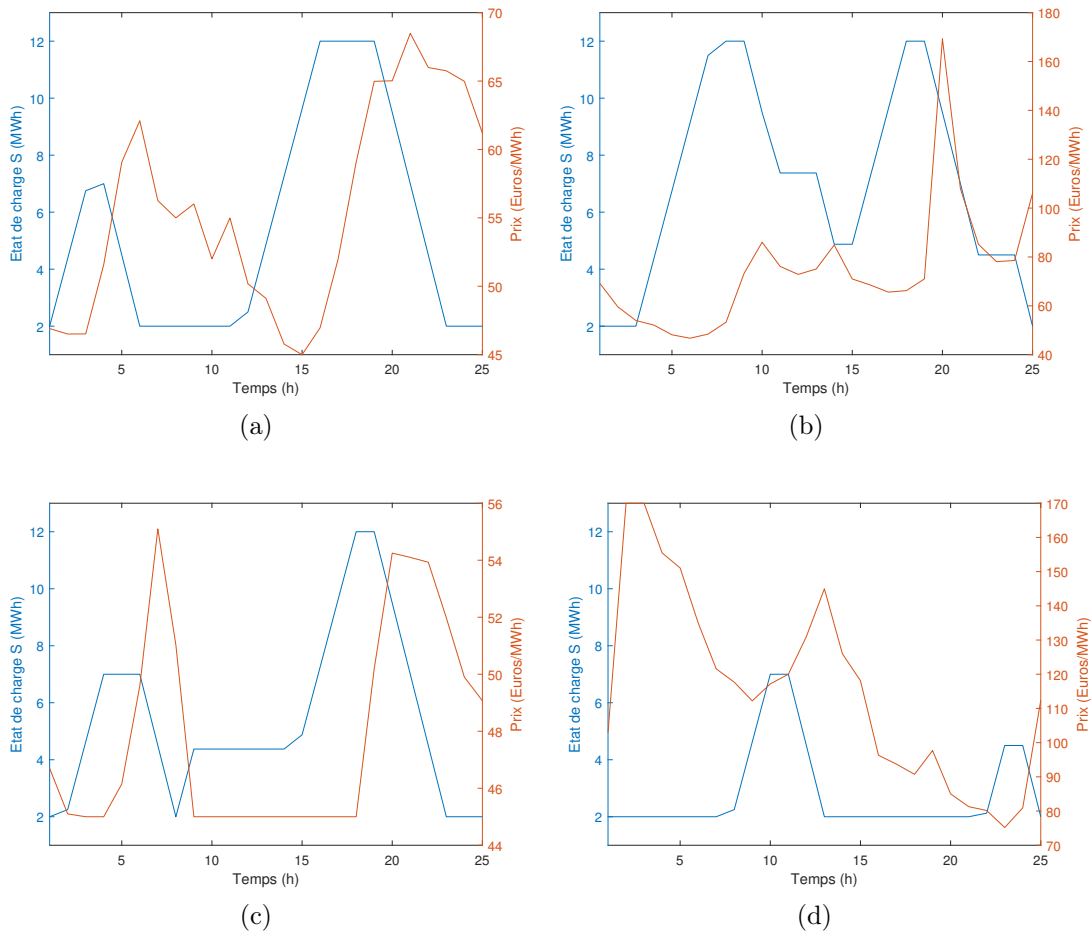


FIGURE 3.3 – Variation de l'état de charge pour différentes courbes de prix (modèle (P1))

Ensuite, on étudie l'influence des différents paramètres de stockage sur le coût, en particulier la capacité de stockage maximale  $S_{max}$ , les capacités de chargement et de déchargement maximales  $C_{max}$  et  $D_{max}$ , ainsi que les efficacités du chargement et du déchargement  $\eta_C$  et  $\eta_D$ . On considère pour cela la courbe de prix de la figure 3.3 (a). On peut voir sur la figure 3.4 que la valeur optimale de la fonction objectif diminue lorsque la capacité de stockage augmente. Cependant, comme cela peut être attendu, il existe un seuil pour la capacité de stockage (environ 20 MWh pour ces données) au-delà duquel le coût total reste constant.

Pour étudier l'influence des capacités de charge et de décharge maximales sur le coût, on fait varier  $C_{max}$  et  $D_{max}$  en supposant pour simplifier que ces deux capacités sont égales,  $C_{max} = D_{max}$ . Les résultats sont présentés dans la figure 3.5. On constate que la valeur optimale diminue lorsque les capacités de charge et de décharge maximales augmentent. Ce résultat est logique, car lorsque  $C_{max}$  et  $D_{max}$  augmentent, l'ensemble admissible devient plus grand. De la même façon que précédemment, il existe un seuil pour les capacités de chargement et de déchargement maximales (environ 10 MW pour ces données) au-delà duquel le coût total reste constant.

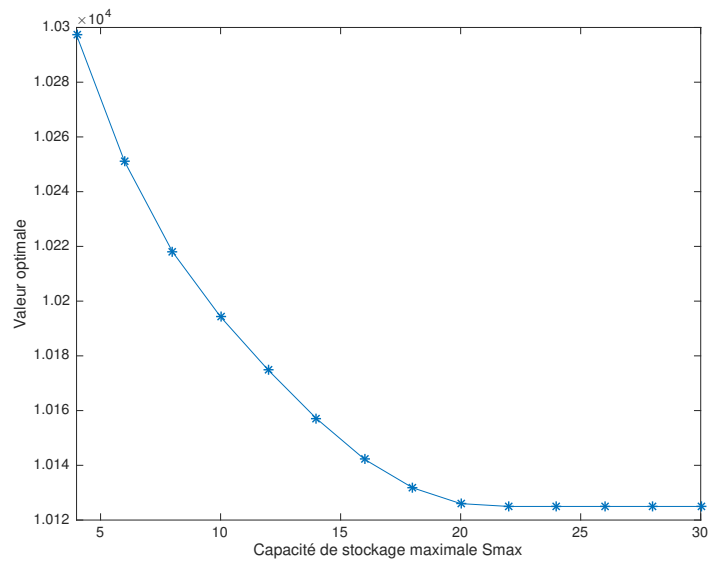


FIGURE 3.4 – Variation de la valeur optimale en fonction de la capacité de stockage maximale (modèle (P1))

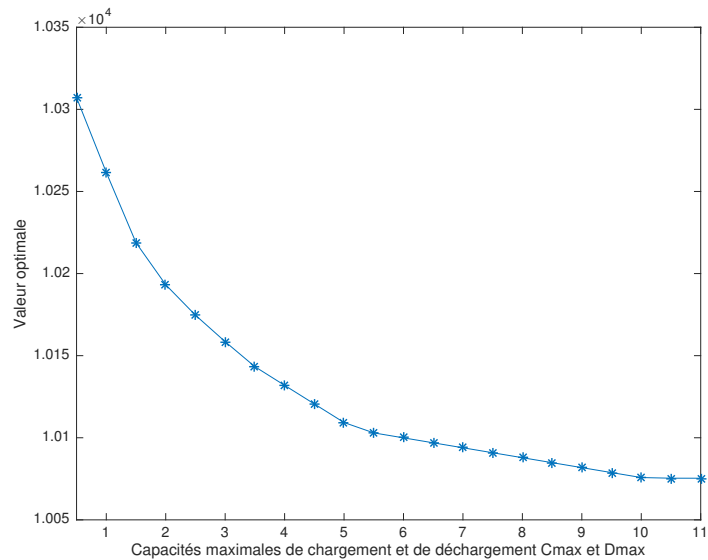


FIGURE 3.5 – Variation de la valeur optimale en fonction des capacités maximales de chargement et de déchargement (modèle (P1))

Enfin on procède de la même façon pour étudier l'influence des efficacités de charge et de décharge sur le coût. On fait varier les efficacités  $\eta_C$  et  $\eta_D$  en les supposant égales,  $\eta_C = \eta_D$ . Les résultats sont présentés dans la figure 3.6. On constate que la valeur optimale ne diminue qu'à partir d'une certaine valeur seuil des efficacités (environ 0.82 pour ces données). En-dessous de cette valeur, la valeur optimale est exactement égale au coût de l'achat d'énergie sans stockage. Cela signifie que si l'on dispose d'un système de stockage avec une efficacité de stockage en-dessous de cette valeur seuil, l'utilisation du stockage

n'aura aucun intérêt économique. Cela s'explique par les pertes importantes générées au cours des processus de charge et de décharge. À l'inverse, au-delà de la valeur seuil, plus l'efficacité est proche de 1, moins les processus de charge et de décharge génèrent de pertes, et donc plus le coût diminue.

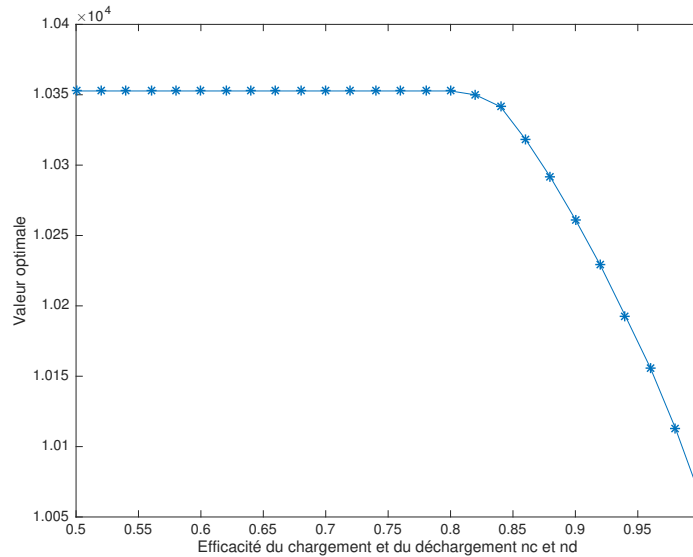


FIGURE 3.6 – Variation de la valeur optimale en fonction de l'efficacité du chargement et du déchargement (modèle (P1))

## 4.2 Modèle avec abonnement

Ici, on présente les résultats obtenus avec le modèle ( $\widehat{P2}$ ). La puissance d'abonnement  $U_{ab}$  est fixé à 7 MW, sauf pour la simulation correspondant à la figure (3.11) dans laquelle cette puissance est variable. La courbe des prix  $Q$  est prise égale à celle de  $P$ .

Les évolutions de l'état de la charge pour différentes courbes de prix sont présentées dans la figure 3.7. L'évolution de l'état de charge a une forme similaire à celle obtenue avec le modèle (P1) dans la figure 3.3. On compare le coût avec et sans stockage, les résultats sont présentés dans la tableau 3.3.

Sous-figures	Coût sans stockage (euros)	Coût avec stockage (euros)	Gain
(a)	$1.1016e + 04$	$1.0749e + 04$	2.42%
(b)	$1.7444e + 04$	$1.6545e + 04$	5.16%
(c)	$8.6340e + 03$	$8.3744e + 03$	3.00%
(d)	$2.8545e + 04$	$2.8394e + 04$	0.52%

TABLEAU 3.3 – Comparaison du coût d'achat d'énergie avec stockage et sans stockage (modèle ( $\widehat{P2}$ ))

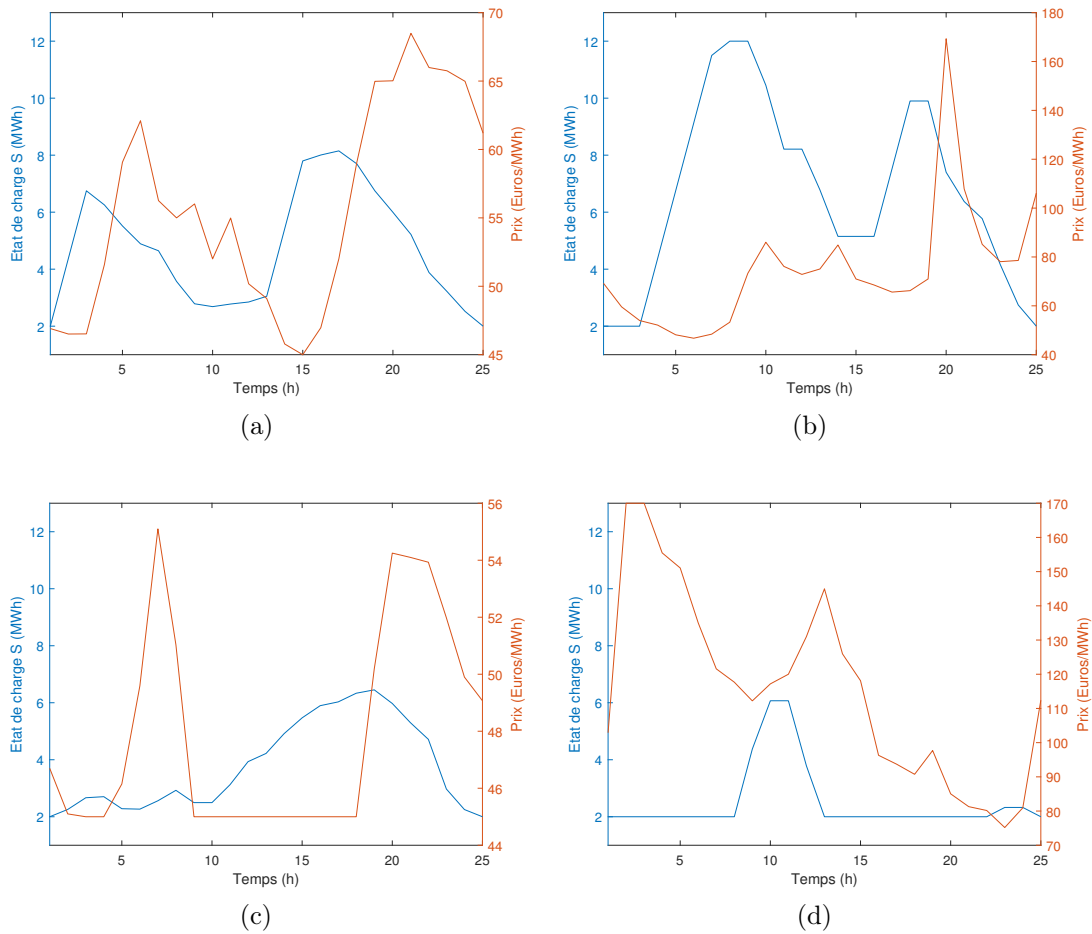


FIGURE 3.7 – Variation de l'état de charge par rapport à différentes courbes de prix (modèle  $(\hat{P}2)$ )

De même que pour le modèle sans abonnement, on étudie l'influence des paramètres de stockage sur le coût : la capacité de stockage maximale  $S_{max}$ , les capacités de charge et de décharge maximales  $C_{max}$  et  $D_{max}$ , et les efficacités de charge et de décharge  $\eta_C$  et  $\eta_D$ . On considère encore une fois la courbe de prix de la figure (3.7a). Les résultats sont affichés sur les figures 3.8, 3.9 et 3.10. La valeur seuil au-delà de laquelle il n'est plus intéressant d'augmenter la capacité de stockage (ici environ 10 MWh) n'est pas la même que pour le modèle (P1). Il en est de même pour les capacités maximales de charge et de décharge (ici environ 6 MW) contre (environ 10 MW) pour le modèle (P1).

Concernant l'efficacité de charge et de décharge, le coût a un comportement légèrement différent de celui du modèle (P1). Ici, on remarque une décroissance très lente à partir de la valeur 0.62 environ, puis une décroissance rapide à partir de la valeur 0.82 environ, qui est la même valeur que l'on avait obtenu pour le modèle (P1). L'allure générale des courbes d'influence de ces paramètres est similaire pour les modèles (P1) et  $(\hat{P}2)$ . Cependant les valeurs seuils sont différentes, car pour le modèle  $(\hat{P}2)$ , elles dépendent en plus de la puissance d'abonnement.

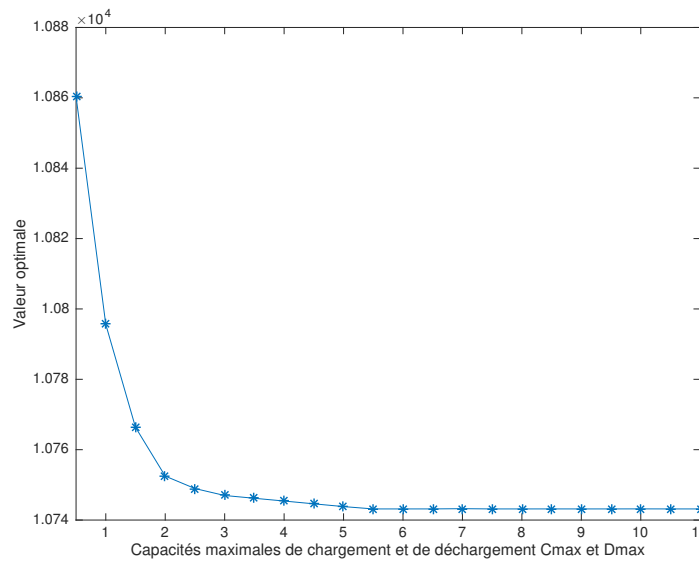


FIGURE 3.8 – Variation de la valeur optimale en fonction des capacités maximales de chargement et de déchargement (modèle ( $\hat{P}2$ ))

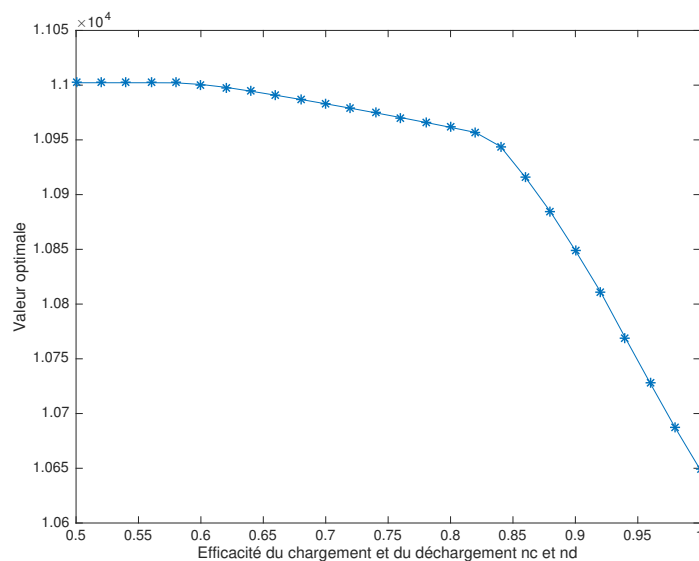


FIGURE 3.9 – Variation de la valeur optimale en fonction de l'efficacité du chargement et du déchargement (modèle ( $\hat{P}2$ ))

On montre également sur la figure 3.11 l'influence de la puissance d'abonnement sur le coût énergétique optimal. Le comportement est similaire : le coût ne diminue plus lorsque la puissance d'abonnement dépasse une valeur seuil (ici environ 8 MW pour ces données). Puisqu'il peut être attendu que le coût de l'abonnement augmente avec la puissance souscrite, le gestionnaire ne doit pas souscrire à une puissance supérieure à cette valeur seuil.

Afin de souligner les différences entre les deux modèles, on compare les



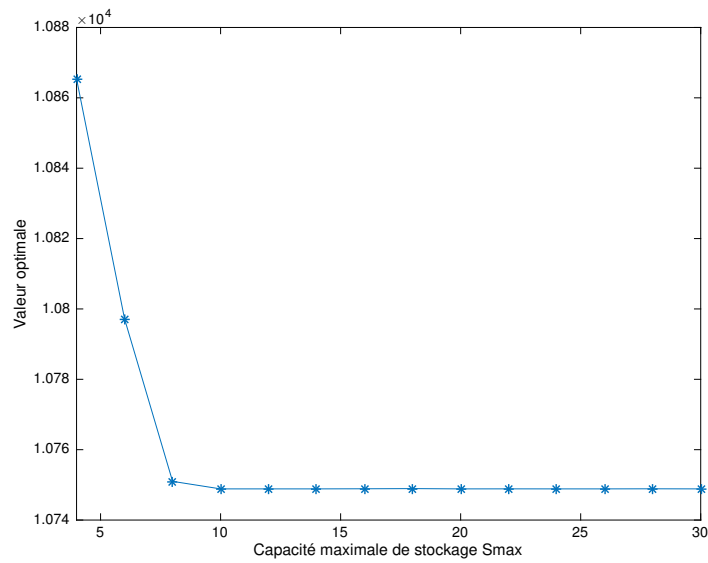


FIGURE 3.10 – Variation de la valeur optimale en fonction de la capacité maximale de stockage (modèle  $(\hat{P}2)$ )

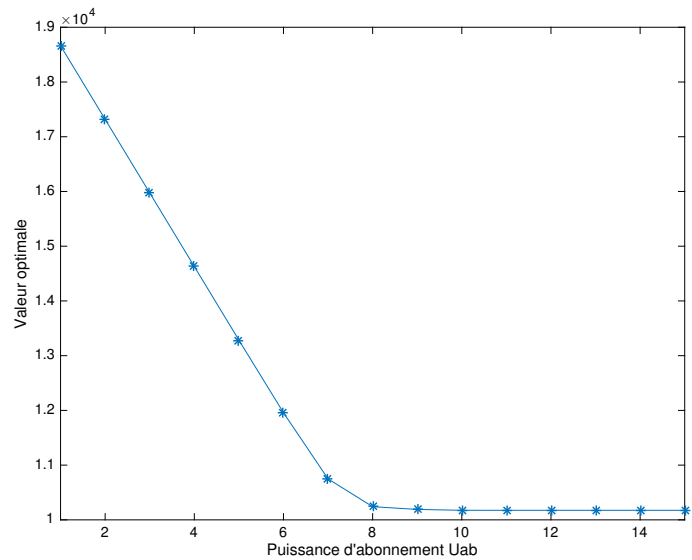


FIGURE 3.11 – Variation de la valeur optimale en fonction de la puissance d'abonnement (modèle  $(\hat{P}2)$ )

puissances importées pour chaque modèle pour différentes courbes de prix et de consommation. Les résultats sont présentés sur les figures 3.12 et 3.13. Les courbes de consommation et les courbes des prix sont également tracées afin de voir leurs impacts pour les deux modèles. Rappelons que la consommation n'intervient pas dans l'utilisation du stockage pour le modèle (P1).

On remarque que la forme des courbes de puissance importée sont légèrement différentes. Pour le modèle  $(\hat{P}2)$ , la puissance importée est clairement dépendante de la courbe de prix et aussi de la courbe de consommation, alors

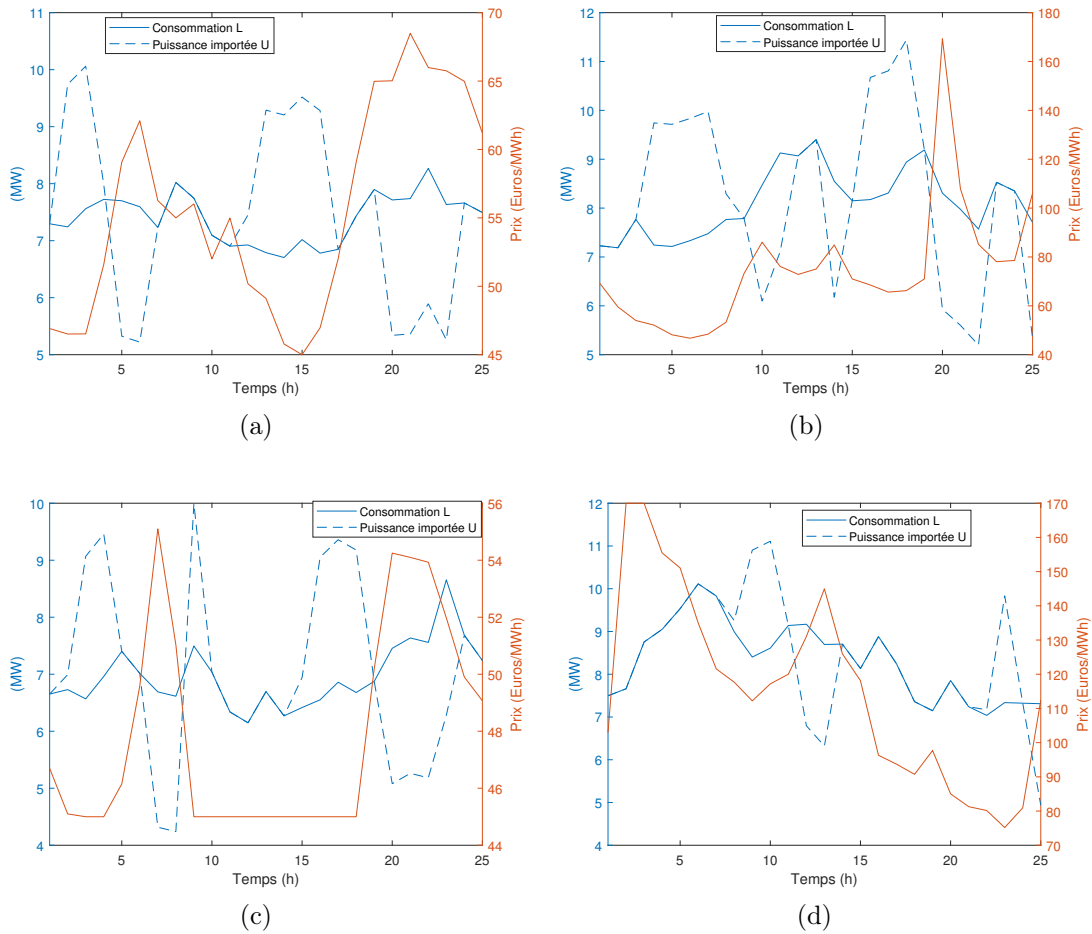


FIGURE 3.12 – Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation (Modèle (P1))

que la courbe obtenue avec le modèle (P1) est principalement guidée par le prix tout le temps. Dans les sous-figures (a) et (c), les courbes de prix ont une variation plutôt régulière et la consommation varie autour de  $7\text{ MW}$ , ce qui est aussi la valeur de la puissance d’abonnement. On observe que la puissance importée a tendance à être égale à  $U_{ab}$  la plupart du temps afin d’éviter les pénalités. Dans la sous-figure (a), il n’y a que deux courts intervalles de temps pour lesquels ce n’est pas le cas et cela correspond à des intervalles de temps pour lesquels le prix est très bas. Dans les sous-figures (b) et (d), l’allure de la puissance importée est différente : elle est beaucoup plus rarement égale à  $U_{ab}$ . Ceci s’explique par deux choses :

- Une variation importante des courbes de prix. En effet, la différence entre les valeurs maximale et minimale du prix est de  $91.82$  dans la sous-figure (d) et de  $122.58$  dans la sous-figure (b).
- La courbe de consommation est tout le temps au-dessus de la valeur choisie pour la puissance d’abonnement  $U_{ab}$ .

Dans des cas similaires aux sous-figures (b) et (d), il serait possible d’améliorer les choses en choisissant convenablement la valeur de la puissance l’abonnement  $U_{ab}$ . En effet, on remarque dans la figure 3.14 qu’en choisissant  $U_{ab}$  environ

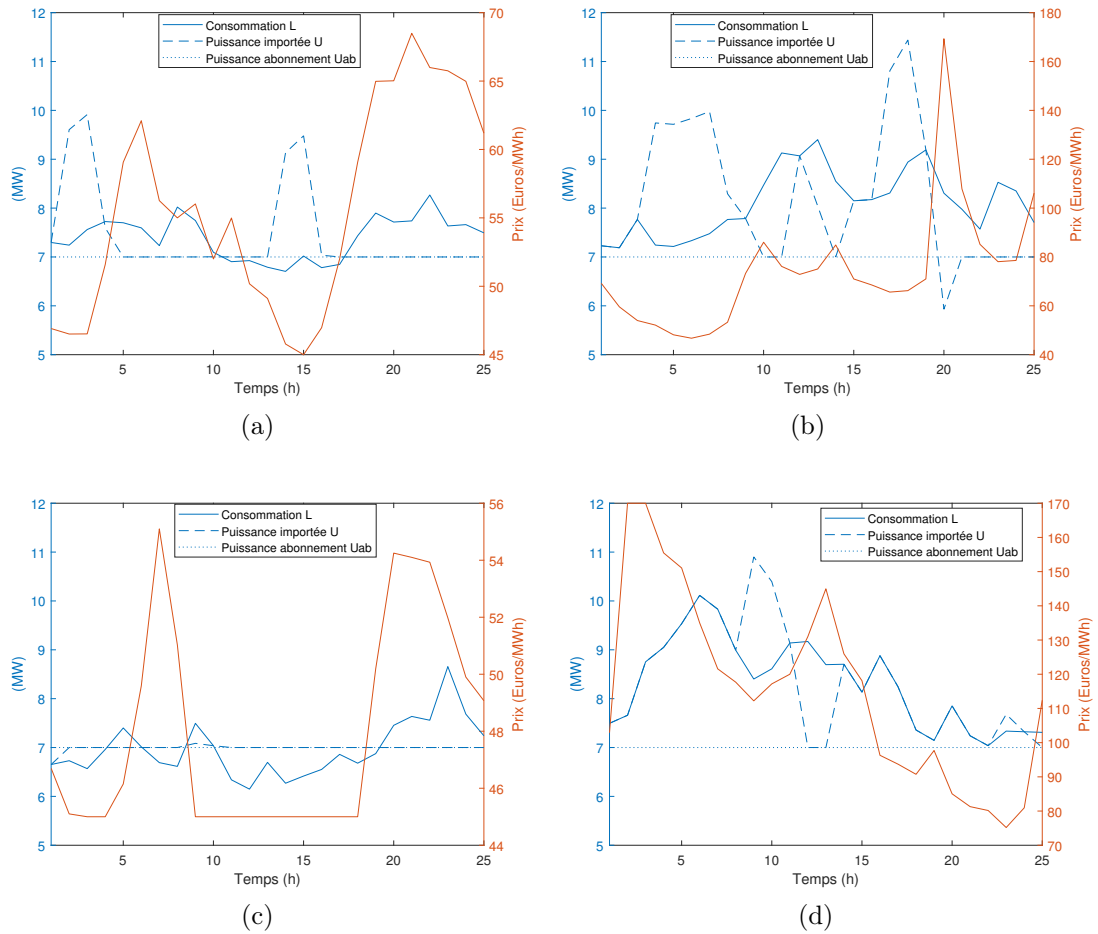


FIGURE 3.13 – Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation ( $\hat{P}2$ )

égale à la moyenne de la courbe de consommation (8 MW pour la sous-figure (a) et 8.5 MW pour la sous-figure (b)), on arrive à avoir un comportement plus lisse de la puissance importée. On précise que les prix et les données de consommation pour les sous-figures 3.14-(a) et 3.14-(b) sont respectivement les mêmes que celles pour les sous-figures 3.13-(b) et 3.13-(d). Seules les puissances d'abonnement ont été changées.

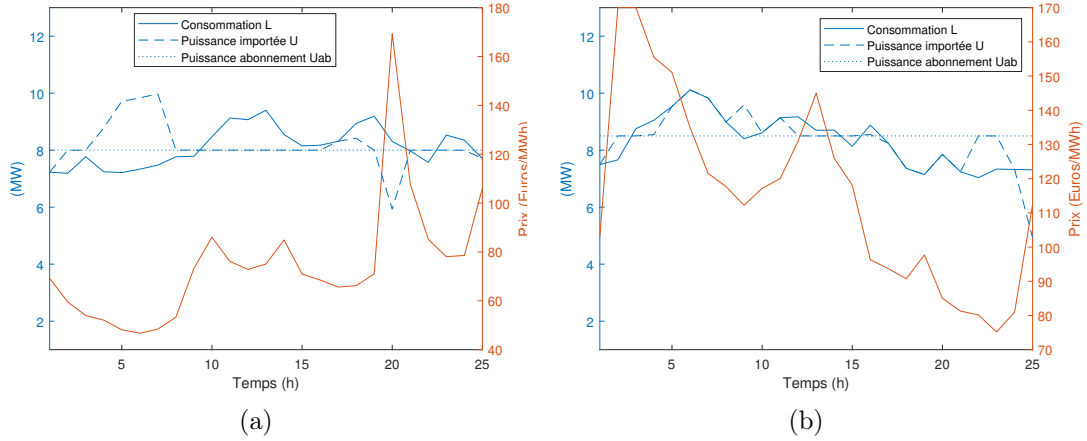


FIGURE 3.14 – Variation de la puissance importée par rapport à différentes courbes de prix et de consommation ( $\hat{P}2$ )

### 4.3 L'algorithme à fenêtre glissante

Dans cette partie, on va comparer la solution obtenue par l'algorithme à fenêtre glissante avec la solution de référence calculée en une seule étape sur la période globale  $[0, N]$ . Avant de donner les critères utilisés pour cette comparaison, on introduit quelques notations :

- $(C, D)$  représente la solution de référence,  $S$  l'état de charge associé et  $m$  la valeur optimale (égale à  $J(C, D)$  ou  $J_s(C, D)$ , selon le modèle considéré) ;
- $(C^{AFG}, D^{AFG})$  représente une solution calculée avec l'algorithme à fenêtre glissante avec les paramètres  $L$  et  $r$  fixés et qui seront spécifiés pour chaque simulation,  $S^{AFG}$  l'état de charge associé et  $m^{AFG}$  la valeur optimale (égale à  $J(C^{AFG}, D^{AFG})$  ou  $J_s(C^{AFG}, D^{AFG})$ , selon le modèle considéré).

On rappelle que l'algorithme à fenêtre glissante est caractérisé par deux paramètres : la longueur de la fenêtre temporelle  $L$  et la longueur du recouvrement  $r$ . Pour analyser l'efficacité de la méthode et la sensibilité des paramètres  $L$  et  $r$ , on utilise les trois critères suivants :

- le temps CPU (en secondes) ;
- l'erreur  $L^1$  relative sur l'état de charge  $E_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |S_i - S_i^{AFG}|}{\sum_{i=1}^N S_i}$  ;
- l'erreur relative sur la valeur optimale  $E_2 = \frac{|m - m^{AFG}|}{m}$ .

Notons que si l'erreur  $E_1$  est grande, cela n'implique pas nécessairement une mauvaise résolution du problème. En effet, l'algorithme peut avoir convergé vers une autre solution. Pour cela, il est pertinent de calculer l'erreur  $E_2$ . Celle-ci doit être faible même si l'algorithme a convergé vers une solution différente.

Les premières simulations numériques que l'on va présenter ici sont destinées à illustrer le fonctionnement de l'algorithme à fenêtre glissante. Par conséquent,

on considère une courte période de temps avec  $N = 100$ ,  $L = 30$  et  $r = 5$ .

Les évolutions de l'état de charge de la solution de référence et de la solution par l'algorithme à fenêtre glissante sont affichées sur la figure 3.15 pour le modèle (P1) et sur la figure 3.16 pour le modèle ( $\widehat{P2}$ ). On remarque que sur la figure 3.15 les deux courbes coïncident, ce qui n'est pas le cas sur la figure 3.16. Puisque les solutions des problèmes (P1) et ( $\widehat{P2}$ ) ne sont pas uniques, il est également utile de comparer leur valeur optimale. Pour le modèle (P1), on obtient  $E_1 = 4.33e - 05$  et  $E_2 = 6.79e - 11$ , tandis que pour le modèle ( $\widehat{P2}$ ), on obtient  $E_1 = 1.78e - 01$  et  $E_2 = 6.38e - 04$ . Comme attendu d'après la Figure 3.15, ces erreurs sont très faibles pour le modèle (P1). Pour le modèle ( $\widehat{P2}$ ), bien que l'erreur  $L^1$  soit importante, les valeurs optimales sont proches. Cela signifie que les deux méthodes ont probablement convergé vers différentes solutions.

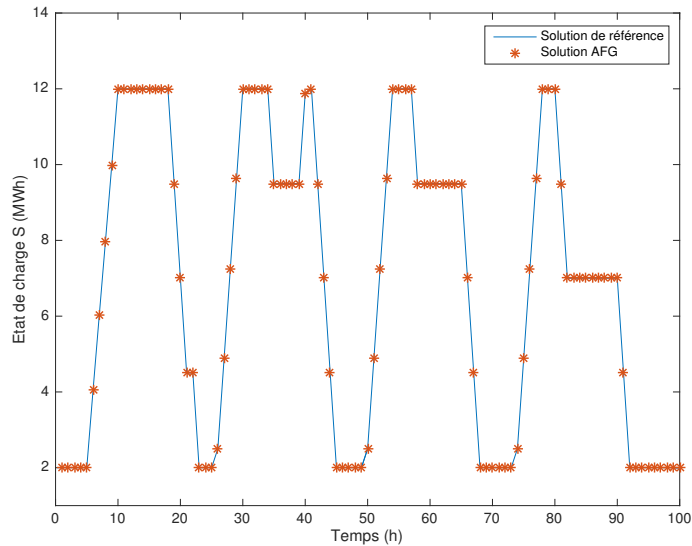


FIGURE 3.15 – État de charge de la solution de référence et de la solution de l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L = 30$  et  $r = 5$  (modèle (P1))

Étant donné que l'objectif principal de l'algorithme à fenêtre glissante est de réduire le temps CPU, on va maintenant présenter des simulations sur une période de temps beaucoup plus longue. On fixe  $N = 2160$  heures, ce qui correspond à une simulation de trois mois.

La prochaine série de résultats a un double objectif. Tout d'abord, on veut souligner que le gain de temps CPU obtenu avec l'algorithme à fenêtre glissante ne détériore pas trop la précision de la solution. Dans un deuxième temps, on souhaite étudier l'impact du choix des paramètres  $L$  et  $r$  sur la précision et le temps CPU. Par conséquent, on va effectuer un certain nombre de simulations avec l'algorithme à fenêtre glissante et avec différentes valeurs de  $L$  et  $r$ . Chacune de ces simulations sera comparée à la solution de référence.

Les résultats présentés dans les tableaux 3.4 et 3.5 contiennent respectivement les valeurs des erreurs  $E_1$ ,  $E_2$  et le temps CPU pour les modèles (P1) et

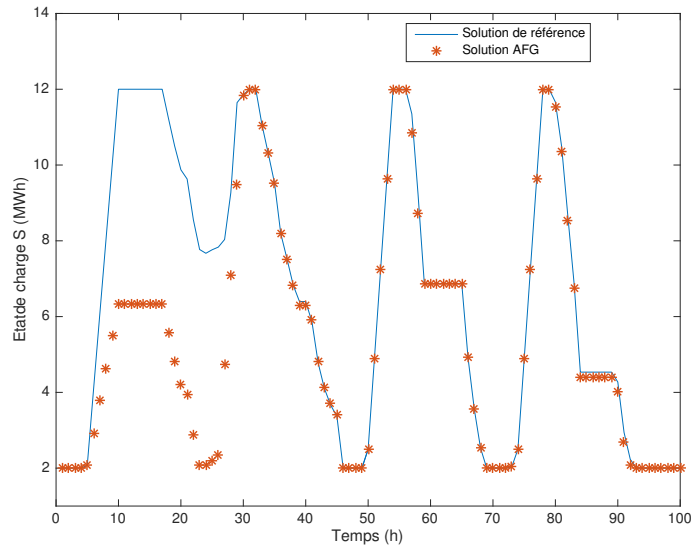


FIGURE 3.16 – État de charge de la solution de référence et de la solution de l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L = 30$  et  $r = 5$  (modèle  $(\hat{P}2)$ )

$L$	$E_1$	$E_2$	temps CPU (s)
20	$2.30e - 01$	$4.26e - 04$	2.07
40	$1.82e - 01$	$1.71e - 04$	1.50
60	$1.38e - 01$	$9.06e - 05$	1.78
100	$1.03e - 01$	$1.95e - 05$	2.10
140	$8.57e - 02$	$4.00e - 05$	3.35
180	$3.72e - 02$	$9.62e - 05$	5.07
220	$4.48e - 02$	$2.41e - 06$	7.55
580	$1.99e - 02$	$1.72e - 11$	10.01
700	$1.41e - 02$	$1.24e - 11$	15.62
820	$1.11e - 02$	$4.42e - 10$	23.51
2160	0	0	390

TABLEAU 3.4 – Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L$  variable et  $r = 5$  fixé (modèle  $(P1)$ )

$(\hat{P}2)$ , en faisant varier la longueur de la fenêtre temporelle  $L$  et en maintenant constante la longueur du recouvrement  $r$  égale à 5. Des résultats similaires sont présentés dans les tableaux 3.6 et 3.7, mais cette fois en fixant la longueur de la fenêtre de temps  $L$  à 40 et en faisant varier la longueur du recouvrement  $r$ .

Le temps CPU total pour calculer la solution de référence pour le problème  $(\hat{P}2)$  est d'environ 1077 secondes. On peut observer à partir du tableau 3.5 que les deux erreurs  $E_1$  et  $E_2$  décroissent globalement lorsque la longueur de la fenêtre temporelle  $L$  augmente. Ces erreurs restent cependant plus élevées que pour le modèle  $(P1)$ . Comme pour le modèle  $(P1)$ , on remarque que le paramètre  $r$  ne doit pas être trop petit. Un compromis entre le temps de calcul

$L$	$E_1$	$E_2$	temps CPU (s)
20	$3.34e - 01$	$4.47e - 03$	15.80
40	$2.36e - 01$	$1.71e - 03$	7.55
60	$1.80e - 01$	$1.40e - 03$	6.25
100	$1.15e - 01$	$1.90e - 04$	5.21
140	$8.48e - 02$	$5.18e - 04$	5.86
180	$7.70e - 02$	$3.80e - 04$	7.82
220	$4.54e - 02$	$5.54e - 05$	10.88
580	$1.60e - 02$	$2.27e - 05$	54.98
700	$2.28e - 02$	$3.00e - 04$	82.79
820	$6.70e - 03$	$2.10e - 05$	105.78
2160	0	0	1077

TABLEAU 3.5 – Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L$  variable et  $r = 5$  fixé (modèle ( $\hat{P}2$ ))

$r$	$E_1$	$E_2$	temps CPU (s)
5	$1.82e - 01$	$1.71e - 04$	1.50
10	$1.45e - 01$	$2.07e - 06$	1.94
15	$1.34e - 01$	$3.8e - 08$	2.18
20	$1.30e - 01$	$1.39e - 08$	2.69
25	$1.17e - 01$	$2.00e - 08$	3.31
30	$1.10e - 01$	$1.91e - 08$	4.35
35	$1.05e - 01$	$2.01e - 08$	9.35

TABLEAU 3.6 – Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L = 40$  fixé  $r$  variable (modèle ( $P1$ ))

$r$	$E_1$	$E_2$	temps CPU (s)
5	$2.36e - 01$	$1.71e - 03$	8.54
10	$1.92e - 01$	$5.73e - 04$	9.88
15	$1.56e - 01$	$2.51e - 04$	12.37
20	$1.40e - 01$	$1.38e - 04$	15.65
25	$1.35e - 01$	$1.68e - 04$	21.42
30	$1.16e - 01$	$9.58e - 05$	32.68
35	$1.05e - 01$	$8.07e - 05$	67.80

TABLEAU 3.7 – Erreurs et temps CPU pour l'algorithme à fenêtre glissante avec  $L = 40$  fixé  $r$  variable (modèle ( $\hat{P}2$ ))

et précision de la solution doit alors être recherché.

## 5 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a présenté et étudié deux problèmes d'optimisation issus de la modélisation d'un système de distribution d'énergie avec stockage. On a prouvé certaines propriétés mathématiques qualitatives des modèles. De plus, on a effectué plusieurs expériences numériques qui ont permis d'étudier l'influence du stockage et de confirmer les propriétés théoriques. Il en résulte que le stockage est un outil intéressant pour diminuer le coût énergétique.

Ensuite, on a proposé et étudié un algorithme à fenêtre glissante comme moyen de calculer une solution de façon approchée en un temps très court, même pour des problèmes à grande échelle. Ce nouvel algorithme est caractérisé par deux paramètres : la longueur de la fenêtre temporelle et la longueur du recouvrement. On a montré dans des exemples numériques qu'en choisissant convenablement ces paramètres, nous pouvons obtenir un très bon compromis entre le temps CPU et la précision de la solution.

Des extensions intéressantes de ce travail sont les suivantes :

- Prise en compte des incertitudes sur la consommation et/ou les prix. Il est possible d'introduire des variables stochastiques dans le problème afin de mieux prendre en compte la variabilité de ces grandeurs.
- Prise en compte des productions décentralisées, en particulier renouvelable. Cela peut se faire soit en disposant de modèles de prédictions de production renouvelable, soit en incluant dans le modèle des variables stochastiques. D'un point de vue du modèle, cela revient à ajouter un noeud pour la production locale. Le gestionnaire peut alors acheter de l'énergie en quantité limitée via ce noeud à un prix pouvant être différent de celui du réseau externe. Il peut être possible dans ce cas de rajouter des contraintes au problème, comme par exemple l'obligation d'utiliser en priorité l'énergie produite localement.
- Reformulation du problème de façon à évaluer le bénéfice économique du stockage par rapport au coût d'investissement et de maintenance des unités de stockage. La rentabilité dépendra ainsi des paramètres de stockage et de la période de temps considérée. Un tel modèle serait multi-objectif.





## Chapitre 4

# Relaxation SDP du problème OPF dans un réseau de distribution d'électricité

## 1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des modèles microscopiques de réseaux de distribution (voir chapitre 1). Ces modèles sont largement utilisés dans la littérature avec plusieurs objectifs [36], notamment :

- La minimisation des coûts de production (ou d'importation) d'électricité. Dans ce cas, la fonction objectif est quadratique.
- La minimisation des pertes de puissance active et/ou réactive dans les lignes de transmission. La fonction objectif est alors non-linéaire, voire non-convexe.
- Le maintien d'un profil de tension constant. La fonction objectif est alors sous forme de distance  $l^1$  ou  $l^2$  entre la tension  $v$  et une valeur visée  $v_s$  de la tension, c'est-à-dire  $J = \|v - v_s\|_1$  ou  $2$ .

Certaines études combinent plusieurs fonctions objectif, conduisant à considérer des problèmes d'optimisation multi-critère [90]. Dans ce chapitre, on va considérer la minimisation du coût de production (ou d'achat) d'énergie, ainsi que la minimisation des pertes en ligne.

Les équations de flux de puissances apparaissent dans la contrainte d'égalité du problème d'optimisation considéré. Ces équations sont non-convexes et rendent donc également le problème non-convexe. Par conséquent, ce problème est très difficile à résoudre numériquement. D'autre part, il n'y a aucune garantie qu'une solution approchée fournie par une méthode d'optimisation soit un minimum global. Pour cela, il est nécessaire de trouver un moyen de convexifier le problème.

Il existe plusieurs méthodes permettant de convexifier le problème. Une première approche est de linéariser la contrainte non-convexe sous certaines hypothèses physiques, notamment la puissance réactive et la variation de la tension doivent être négligées. Cela permet d'obtenir selon la fonction objectif, un

problème linéaire ou un problème quadratique (voir [23]). Cependant, les hypothèses physiques nécessaires restreignent largement le champ d'application de cette méthode.

Une autre approche repose sur la convexification du problème original, via une relaxation convexe. Celle-ci consiste à remplacer l'ensemble non-convexe des contraintes par son enveloppe convexe, c'est-à-dire le plus petit convexe le contenant. La relaxation convexe est alors dite exacte si la valeur optimale du problème original est égale à la valeur optimale du problème convéxifié. Si ce n'est pas le cas, alors la relaxation est dite inexacte. L'inconvénient de cette méthode est la difficulté de trouver une représentation algébrique exploitable de l'enveloppe convexe de l'ensemble des contraintes considérées. L'alternative que nous allons utiliser consiste à utiliser un ensemble convexe plus grand que l'enveloppe convexe, mais qui peut être représenté algébriquement de manière simple.

Afin de réaliser cette dernière méthode, on reformule la fonction objectif et les contraintes du problème original en termes de traces de matrices semi-définies positives, auxquelles s'ajoute une contrainte de rang. La relaxation convexe consiste alors à retirer cette contrainte de rang. Cela mène à un problème d'optimisation SDP que l'on peut résoudre au moyen d'algorithmes efficaces (par exemple l'algorithme de points intérieurs). Cette méthode s'appelle la relaxation SDP et elle a été introduite dans [10].

Les auteurs de [63, 64] ont conjecturé que la relaxation SDP est exacte sous certaines conditions de monotonie de la fonction objectif et sur les différences d'angles des tensions. Pour cela, ils ont étudié la géométrie de l'ensemble admissible du problème via sa frontière de Pareto. Le but principal de ce chapitre sera d'établir rigoureusement que la relaxation SDP est exacte dans différents contextes.

Le reste de ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la partie 2, on introduit quelques outils mathématiques, qui seront utilisés dans la suite du chapitre, afin d'étudier la convexification du problème. Ces outils sont la notion de preuve par induction sur un arbre et la frontière de Pareto d'un ensemble. On prouvera notamment quelques résultats élémentaires sur la frontière de Pareto.

Dans la partie 3, on décrit la modélisation microscopique du système de distribution via les équations de flux de puissances. On définira la fonction objectif que l'on va considérer, puis on présentera la formulation du problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre. On terminera cette partie en donnant deux reformulations du problème d'optimisation original. La première, sous forme matricielle, sera surtout utile d'un point de vue numérique, alors que la deuxième, formulée en termes d'ensembles, sera plus utile pour les preuves mathématiques.

Dans la partie 4, on étudie le problème sur un réseau composé d'une seule ligne. On prouve plusieurs résultats sur l'ensemble des contraintes à l'échelle d'une ligne qui seront utilisés dans la suite. On introduit aussi le problème convéxifié à cette échelle locale.

Dans la partie 5, on généralise à un réseau complet la convexification du problème qui a été établie dans le cas d'une seule ligne dans la partie précédente.

Dans la partie 6, on s'intéresse au problème OPF avec des amplitudes de tension fixées. On prouve rigoureusement que dans ce cas, sous une hypothèse sur les angles de tension, la convexification SDP est exacte. Le résultat final de cette partie décrit une procédure simple et efficace permettant de résoudre le problème OPF dans ce cadre.

On procède de même dans la partie 7, mais dans le cas des amplitudes de tensions variables. Nous avons cette fois besoin d'une hypothèse sur la puissance active minimale injectée aux nœuds afin de prouver que la convexification SDP est exacte.

La partie 8 est dédiée à la présentation de quelques résultats numériques illustrant les théorèmes des parties 6 et 7. On donnera également une procédure classique permettant de calculer numériquement le rang d'une matrice, ce qui est un point important de la méthode.

Enfin, on conclura et on donnera quelques perspectives à ce travail dans la partie 9.

Pour terminer cette introduction, on regroupe dans les tableaux qui suivent toutes les notations principales qui interviennent dans ce chapitre. Elles seront définies précisément dans le corps du chapitre, mais le lecteur pourra se référer à ces tableaux pour retrouver rapidement à quoi correspond une notation.

### Arbres

$\Sigma = (S, E)$	Arbre
$S$	Ensemble des sommets
$m$	Nombre de sommets de $\Sigma$
$E$	Ensemble des arêtes non-orientées de $\Sigma$
$\mathcal{E}$	Ensemble des arêtes orientées de $\Sigma$
$\psi : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow E$	Application de numérotation des arêtes non-orientées
$\varphi : \{1, \dots, 2(m-1)\} \rightarrow \mathcal{E}$	Application de numérotation des arêtes orientées
$S_U$	Ensemble des noeuds de production
$S_C$	Ensemble des noeuds de consommation
$A$	Matrice de « connectivité » de $\Sigma$

### Relations d'ordre sur les vecteurs de $\mathbb{R}^m$

$x \leq y$	$\forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i \leq y_i$
$x < y$	$\forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i < y_i$
$x \prec y$	$\forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i \leq y_i$ et $\exists i \in \{1, \dots, m\}, x_i < y_i$

### Topologie des ensembles

$\mathcal{O}(\mathcal{A})$	Frontière de Pareto de l'ensemble $\mathcal{A}$
$\partial\mathcal{A}$	Frontière de l'ensemble $\mathcal{A}$
$\overset{\circ}{\mathcal{A}}$	Intérieur de l'ensemble $\mathcal{A}$

### Nombres complexes

$j$	Nombre complexe tel que $j^2 = -1$
$\bar{z}$	Conjugué de $z$
$ z $	Module de $z$
$\arg(z)$	Argument de $z$ dans $] -\pi/2, \pi/2]$

### Ensembles de matrices et opérations matricielles

$M_{m,n}(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{H}_m$	Ensemble des matrices $m \times m$ hermitiennes
$\mathbb{H}_m^+$	Ensemble des matrices $m \times m$ hermitiennes semi-définies positives
$\text{tr}(A)$	Trace de la matrice $A$
$A^T$	Matrice transposée de $A$
$A^*$	Matrice adjointe de $A$
$A \succeq 0$	La matrice $A$ est semi-définie positive

### Paramètres physiques des lignes

$y_{ik}$	Admittance de la ligne $\{i, k\}$
$b_{ik}$	Conductance de la ligne $\{i, k\}$
$g_{ik}$	Susceptance de la ligne $\{i, k\}$
$\bar{\theta}_{ik}$	Angle de phase maximal de la ligne $\{i, k\}$
$\bar{F}_\ell$	Contrainte thermique de la ligne $\psi(\ell) = \{i, k\}$

### Paramètres physiques des noeuds

$\underline{V}_i, \bar{V}_i$	Valeurs minimale et maximale de l'amplitude de la tension au noeud $i$
$\underline{P}_i, \bar{P}_i$	Valeurs minimale et maximale de la puissance active au noeud $i$
$\underline{Q}_i, \bar{Q}_i$	Valeurs minimale et maximale de la puissance réactive au noeud $i$

### Ensemble définissant les contraintes

$\mathcal{F}_\ell(V)$	Ensemble des flux admissibles dans la ligne $\ell$ (à $V$ fixé)
$\mathcal{F}(V)$	Ensemble des flux admissibles dans tout le réseau (à $V$ fixé)
$\mathcal{P}_\theta(V)$	Ensemble admissible pour la contrainte thermique (à $V$ fixé)
$\mathcal{P}_P$	Ensemble admissible pour la contrainte de puissance active
$\tilde{\mathcal{F}}_\ell$	Ensemble des flux admissibles dans la ligne $\ell$ ( $V$ variable)
$\tilde{\mathcal{F}}$	Ensemble des flux admissibles dans tout le réseau ( $V$ variable)
$\tilde{\mathcal{P}}_\theta$	Ensemble admissible pour la contrainte thermique et la contrainte sur l'amplitude
$\overline{\text{conv}}(\mathcal{A})$	Convexification de l'ensemble $\mathcal{A}$

## 2 Outils mathématiques

Dans cette partie, on introduit certains outils mathématiques, qui seront utilisés dans toute la suite du chapitre.

### 2.1 Notion d'arbre

Les réseaux de distribution d'électricité sont modélisés mathématiquement par des arbres, qui sont des graphes particuliers. On rappelle ici quelques définitions élémentaires de théorie des graphes, ainsi que quelques propriétés des arbres.

Un graphe (non-orienté) désigne un couple  $\Sigma = (S, E)$ , où  $S \subset \mathbb{N}$  est l'ensemble fini des sommets et  $E \subset \{\{x, y\} : (x, y) \in S^2, x \neq y\}$  est l'ensemble des arêtes. Dans tout le chapitre, on notera  $i \sim k$  si les sommets  $i$  et  $k$  sont reliés par une arête, c'est-à-dire  $i, k \in S$  et  $\{i, k\} \in E$ . On dit dans ce cas que  $i$  et  $k$  sont voisins l'un de l'autre.

Si le graphe est connexe et sans cycle, on parle d'arbre. Le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un arbre son reliés de manière très simple.

**Proposition 2.1.** *Si  $\Sigma = (S, E)$  est un arbre tel que  $\text{card}(S) > 0$ , alors*

$$\text{card}(E) = \text{card}(S) - 1.$$

On considère dans la suite un arbre  $\Sigma = (S, E)$ , où  $S$  est de cardinal fini strictement supérieur à 1.

**Définition 2.2.** *On appelle feuille de l'arbre  $\Sigma$  tout sommet  $i \in S$  qui a exactement un voisin.*

On choisit maintenant un sommet  $r \in S$  arbitraire que l'on appelle racine de l'arbre  $\Sigma$ .

**Proposition 2.3.** *Pour tout sommet  $i \in S$ , il existe un unique chemin reliant  $r$  et  $i$ , c'est à dire une suite finie  $s_0 = r, s_1, \dots, s_n = i$ , telle que  $s_k \sim s_{k+1}$ , pour tout  $0 \leq k \leq n - 1$ .*

**Définition 2.4.** *Soit  $i \in S \setminus \{r\}$ . L'avant-dernier sommet  $k$  dans le chemin reliant  $r$  à  $i$  est appelé père de  $i$ . Le sommet  $i$  est alors un fils de  $k$ .*

**Définition 2.5.** *Un sommet  $i$  qui n'a pas de fils est appelé sommet externe de l'arbre  $\Sigma$ . Un sommet qui n'est pas externe est appelé sommet interne de l'arbre.*

*Remarque 2.6.* Cette notion de sommet externe est parfois appelée feuille dans la littérature. Toutefois, elle diffère de la notion de feuille que l'on a introduite précocement. En effet, la racine peut être une feuille dans le sens où on l'a

définie, alors qu'elle ne peut pas être un sommet externe, puisqu'elle a au moins un fils (car  $\text{card}(S) > 1$ ). Comme ces deux notions seront utilisées dans ce chapitre, nous avons choisi deux dénominations différentes pour ne pas créer d'ambiguïté.

Notons enfin qu'un sommet externe est nécessairement une feuille, mais la réciproque est fausse.

La structure d'arbre peut être définie de manière récursive. Cela implique que l'on peut utiliser un principe d'induction pour montrer qu'une proposition est vraie pour chaque sommet de l'arbre. Il s'agit d'une généralisation de la preuve par récurrence classique. On distingue deux formes d'induction : descendante et montante. On rappelle ici le principe de ces types de preuve, qui seront utilisés dans la suite.

Soit  $H_i$  une proposition logique définie pour tout sommet  $i \in S$ .

### Induction descendante

Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

- $H_r$  est vraie ;
- pour tout sommet  $i \in S \setminus \{r\}$ , de père  $k$ , on a  $H_k \Rightarrow H_i$ .

Alors la proposition  $H_i$  est vraie pour tout sommet  $i \in S$ .

### Induction montante

Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

- $H_i$  est vraie pour tout sommet externe  $i \in S$  ;
- pour tout sommet interne  $k \in S$ , on a

$$(\forall i \text{ fils de } k, H_i) \Rightarrow H_k.$$

Alors la proposition  $H_i$  est vraie pour tout sommet  $i \in S$ .

*Remarque 2.7.* Dans les preuves par récurrence sur les entiers, il est possible d'initialiser à un entier  $n_0 > 0$ . De la même façon, pour une induction descendante, il est possible d'initialiser pour les fils de la racine, et pour une induction montante, il est possible d'initialiser pour les sommets internes dont tous les fils sont des sommets externes.

## 2.2 Frontière de Pareto

La notion d'efficacité de Pareto apparaît lorsque l'on doit choisir parmi plusieurs alternatives ou critères, qui sont parfois antagonistes. Notamment, cela réfère à une situation dans laquelle aucun critère individuel ne peut être amélioré sans aggraver au moins un autre critère individuel. Cette notion a été introduite par le sociologue et économiste italien Vilfredo Pareto (1848-1923). Il l'a utilisée dans le domaine de la socioéconomie pour décrire un état de la société dans lequel on ne peut pas améliorer le bien-être d'un individu sans détériorer celui d'un autre.

En optimisation, cette notion apparaît lorsque l'on s'intéresse à des problèmes multi-objectifs, où l'on doit minimiser simultanément plusieurs fonctions objectif. Par exemple, si l'on doit minimiser deux fonction  $f_1$  et  $f_2$ , alors l'optimum de Pareto est un point  $x$  tel qu'aucun autre point  $y$  ne réalise une meilleure valeur optimale simultanément pour  $f_1$  et  $f_2$  (dans un sens à définir). L'ensemble de ces points  $x$  qui sont Pareto-optimaux s'appelle la frontière de Pareto [83].

Il se trouve que le concept de frontière de Pareto est particulièrement bien adapté à l'étude des problèmes OPF (optimal power flow). On montrera en effet que le minimum d'une fonction sur un ensemble, sous une certaine hypothèse de monotonie que l'on précisera dans la suite, est atteint sur la frontière de Pareto de cet ensemble. Cela implique qu'une solution du problème OPF est nécessairement dans la frontière de Pareto de l'ensemble admissible.

Dans cette partie, on va définir mathématiquement ce que sont les points Pareto-optimaux, ainsi que la frontière de Pareto. On présente ensuite quelques propriétés élémentaires qui nous seront utiles dans la suite. La plupart de ces propriétés peuvent être trouvées dans la littérature (voir [83]), à l'exception de la proposition 2.13 et du lemme 2.16. Pour la cohérence globale de cette partie, nous donnons une preuve de tous ces résultats.

Dans tout le chapitre, on utilisera trois relations d'ordre sur  $\mathbb{R}^n$ , définies pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  par

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} x_i \leq y_i, \\ x < y &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i < y_i, \\ x \prec y &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq y_i \text{ et } \exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i < y_i. \end{aligned}$$

**Définition 2.8.** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Un point  $x \in \mathcal{A}$  est dit Pareto-optimal dans  $\mathcal{A}$  si

$$\{y \in \mathcal{A} : y \prec x\} = \emptyset.$$

On notera  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$  l'ensemble des points  $x \in \mathcal{A}$  qui sont Pareto-optimaux dans  $\mathcal{A}$ . Cet ensemble est appelé la frontière de Pareto de  $\mathcal{A}$ .

L'appellation frontière est justifiée par le résultat suivant.

**Lemme 2.9.** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . On a  $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \subset \partial\mathcal{A}$ , où  $\partial\mathcal{A}$  est la frontière de  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Si  $x \notin \partial\mathcal{A}$ , alors  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}$ . Donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{A}$ , où  $B(x, \varepsilon)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Soit  $y = x - \frac{\varepsilon}{2}(1, \dots, 1)^T$ . On a  $y \in B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{A}$  et  $y \prec x$ . Cela contredit  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ .  $\square$

On peut établir un lien entre la frontière de Pareto et la minimisation d'une fonction strictement croissante. On commence par préciser ce que l'on appelle fonction strictement croissante.



**Définition 2.10.** Soit  $J$  une fonction définie sur un ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $J$  est strictement croissante sur  $\mathcal{A}$  si pour tous  $x, y \in \mathcal{A}$  tels que  $x \prec y$ , on a  $J(x) < J(y)$ .

On prouve maintenant que si un point réalise le minimum d'une fonction strictement croissante sur un ensemble  $\mathcal{A}$ , alors ce point appartient à  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ .

**Proposition 2.11.** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  et  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante. Si  $x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{A}} J(x)$ , alors  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ .

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $x^* \notin \mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Alors il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x' \prec x^*$ . Puisque  $J$  est strictement croissante, on a  $J(x') < J(x^*)$ . Cela contredit l'optimalité de  $x^*$ .  $\square$

Lorsqu'un point  $x$  n'est pas Pareto-optimal dans  $\mathcal{A}$ , on peut se demander s'il existe un point  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$  tel que  $x^* \prec x$ . Le résultat suivant répond affirmativement dans le cas où  $\mathcal{A}$  est compact.

**Lemme 2.12.** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact. Si  $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{O}(\mathcal{A})$ , alors il existe  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$  tel que  $x^* \prec x$ . En particulier, si  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \{y \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i \leq x_i\}$ . L'ensemble  $\mathcal{B}$  est compact comme intersection d'un compact et d'un fermé. Soit  $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $J(y) = \sum_{i=1}^n y_i$ . La fonction  $J$  est continue sur  $\mathcal{B}$ , donc il existe  $x^* \in \mathcal{B}$  tel que

$$x^* = \arg \min_{y \in \mathcal{B}} J(y).$$

Si  $x^*$  n'est pas dans  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ , alors il existe  $x' \in \mathcal{A}$  tel que  $x' \prec x^*$ . Donc pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $x'_i \leq x^*_i \leq x_i$  et par conséquent  $x' \in \mathcal{B}$ . De plus, la fonction  $J$  est strictement croissante, donc d'après la proposition 2.11, on a  $J(x') < J(x^*)$ , ce qui contredit l'optimalité de  $x^*$ . On a donc  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ .

Comme  $x$  n'appartient pas à  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ , on ne peut pas avoir  $x^* = x$ , donc il existe  $i$  tel que  $x^*_i < x_i$ , d'où  $x^* \prec x$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, on établit maintenant un résultat important qui permettra de montrer facilement que sous certaines conditions, des ensembles imbriqués ont la même frontière de Pareto.

**Proposition 2.13.** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ .

1. On a  $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$ .
2. Si de plus  $\mathcal{B}$  est compact et  $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ .

*Démonstration.*

1. Soit  $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}(\mathcal{B})$ . Si  $x \notin \mathcal{O}(\mathcal{A})$ , alors il existe  $x^* \in \mathcal{A}$  tel que  $x^* \prec x$ . Par hypothèse, on a donc  $x^* \in \mathcal{B}$ . Cela contredit  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ , donc  $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$ .

2. Comme  $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ , le 1. assure que  $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Soit  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Si  $x \notin \mathcal{O}(\mathcal{B})$ , comme  $\mathcal{B}$  est compact, d'après le lemme 2.12, il existe  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$  tel que  $x^* \prec x$ . Or on a  $x^* \in \mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ , ce qui contredit  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ . Donc  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$  et par conséquent  $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ .  $\square$

*Remarque 2.14.* Tous les ensembles auxquels on va appliquer cette proposition dans la suite seront compacts. On se contentera donc de vérifier  $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$  pour appliquer le 2.

On termine cette partie en étudiant le comportement de la frontière de Pareto sous l'effet de certaines opérations ensemblistes. On montre d'abord que pour certaines transformations linéaires, la frontière de Pareto de l'image est incluse dans l'image de la frontière de Pareto.

**Lemme 2.15.** Soit  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  et  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice vérifiant :

- $A_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\exists i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $A_{ij} > 0$ .

Alors on a

$$\mathcal{O}(A\mathcal{B}) \subseteq A\mathcal{O}(\mathcal{B}).$$

*Démonstration.* Soit  $y \in \mathcal{O}(A\mathcal{B})$ . Il existe  $x \in \mathcal{B}$  tel que  $y = Ax$ .

Supposons par l'absurde que  $x \notin \mathcal{O}(\mathcal{B})$ . Alors il existe  $x^* \in \mathcal{B}$  tel que  $x^* \prec x$ . On a donc d'un part, pour tout  $i$ ,  $x_i^* \leq x_i$ , donc

$$(Ax^*)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}x_k^* \leq \sum_{k=1}^n A_{ik}x_k = (Ax)_i. \quad (4.1)$$

D'autre part, il existe  $j$  tel que  $x_j^* < x_j$  et par hypothèse, il existe  $i$  tel que  $A_{ij} > 0$ . On a donc  $A_{ij}x_j^* < A_{ij}x_j$  et d'après (4.1),  $(Ax^*)_i < (Ax)_i$ . On en déduit que  $y^* = Ax^* \prec Ax = y$ , ce qui contredit  $y \in \mathcal{O}(A\mathcal{B})$ . Par conséquent,  $y \in A\mathcal{O}(\mathcal{B})$ .  $\square$

On montre maintenant que la frontière de Pareto commute avec le produit cartésien.

**Lemme 2.16.** Soit  $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$\mathcal{O}\left(\prod_{i=1}^m \mathcal{A}_i\right) = \prod_{i=1}^m \mathcal{O}(\mathcal{A}_i).$$

*Démonstration.* On commence par montrer le résultat pour  $m = 2$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ . Supposons par l'absurde que  $x \notin \mathcal{O}(\mathcal{A}_1)$ , alors il existe  $x^* \in \mathcal{A}_1$  tel que  $x^* \prec x$ . Donc on a  $(x^*, y) \prec (x, y)$ , ce qui contredit le fait que  $(x, y) \in \mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ , donc  $x \in \mathcal{O}(\mathcal{A}_1)$ . De la même manière, on montre que  $y \in \mathcal{O}(\mathcal{A}_2)$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A}_1) \times \mathcal{O}(\mathcal{A}_2)$ .

Inversement, soit  $(x, y) \in \mathcal{O}(\mathcal{A}_1) \times \mathcal{O}(\mathcal{A}_2)$ . Si  $(x, y) \notin \mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ , il existe  $(x^*, y^*)$  tel que  $(x^*, y^*) \prec (x, y)$ . On a donc  $x^* \prec x$  ou  $y^* \prec y$ , ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit que  $\mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{O}(\mathcal{A}_1) \times \mathcal{O}(\mathcal{A}_2)$ .

Le résultat se généralise au cas  $m > 2$  par une récurrence immédiate.  $\square$

### 3 Modélisation microscopique d'un système de distribution

On considère un réseau de distribution d'électricité, modélisé par un arbre  $\Sigma = (S, E)$ , dont les sommets représentent les nœuds et les arêtes représentent les lignes de transmission. On suppose que le nombre  $m$  de sommets est supérieur ou égal à 2. Notons que puisque le graphe  $\Sigma$  est un arbre, le cardinal de  $E$  est alors nécessairement  $m - 1$ . Pour simplifier, on suppose que les sommets sont numérotés de 1 à  $m$  et donc  $S = \{1, \dots, m\}$ . La figure 4.1 montre un exemple d'un tel réseau.

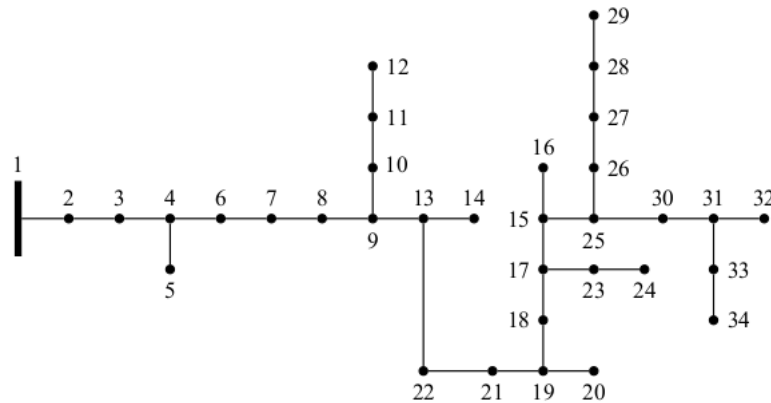


FIGURE 4.1 – Exemple de graphe d'un réseau de distribution de 34 nœuds (IEEE) [60]

Pour numéroté les éléments de  $E$ , on introduit une bijection

$$\psi : \{1, \dots, m - 1\} \rightarrow E.$$

Pour chaque ligne de transmission du réseau, nous aurons besoin de définir des flux dans les deux directions. Pour traiter cela mathématiquement, on introduit deux arêtes orientées pour chaque arête non-orientée de  $E$ . On définit donc l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(i, k) \in S^2 \mid \{i, k\} \in E\},$$

qui est de cardinal  $2(m - 1)$ . Autrement dit, pour chaque arête  $\{i, k\}$  dans  $E$ , l'ensemble  $\mathcal{E}$  contient les deux couples  $(i, k)$  et  $(k, i)$ .

Pour numéroter les éléments de  $\mathcal{E}$ , on introduit une bijection

$$\varphi : \{1, \dots, 2(m-1)\} \rightarrow \mathcal{E},$$

telle que si  $\psi(\ell) = \{i, k\}$ , avec  $i < k$ , alors  $\varphi(2\ell - 1) = (i, k)$  et  $\varphi(2\ell) = (k, i)$ . Cela signifie que les deux orientations d'une même arête sont consécutives dans  $\varphi$  et que l'ordre des arêtes est le même dans  $\varphi$  et dans  $\psi$ .

Dans le réseau, on va considérer deux types de nœuds : les nœuds de production (ou d'importation de puissance) et les nœuds de consommation. On suppose que ces deux types de nœuds forment une partition de  $S$ , autrement dit, que l'on a

$$S = S_U \cup S_C \quad \text{et} \quad S_U \cap S_C = \emptyset,$$

où

- $S_U$  est l'ensemble des nœuds de production ;
- $S_C$  est l'ensemble des nœuds de consommation.

### 3.1 Équations de flux de puissance

Dans cette partie, on rappelle les équations permettant de modéliser les flux de puissances active et réactive, introduites dans le chapitre 1. On donnera aussi les différents types de contraintes physiques qui s'appliquent à cette modélisation.

#### 3.1.1 Tension complexe

La tension complexe  $v_i$  au nœud  $i$  est définie par

$$v_i = V_i e^{j\theta_i}, \tag{4.2}$$

où  $V_i$  est le module de  $v_i$ , appelé amplitude de la tension et  $\theta_i$  est l'argument dans  $] -\pi/2, \pi/2]$  de  $v_i$ , appelé angle de la tension.

En chaque nœud  $i \in S$ , l'amplitude  $V_i$  de la tension doit vérifier la contrainte physique suivante

$$\underline{V}_i \leq V_i \leq \bar{V}_i,$$

où  $0 < \underline{V}_i \leq \bar{V}_i$  sont des paramètres fixés pour chaque nœud.

#### 3.1.2 Équations de flux de puissances et contraintes thermiques

À chaque arête non-orientée  $\{i, k\} \in E$  du réseau, on associe une admittance  $y_{ik} \in \mathbb{C}$ , introduite dans le chapitre 1 et que l'on écrit sous la forme

$$y_{ik} = g_{ik} - jb_{ik},$$

avec  $b_{ik}, g_{ik} > 0$ . Remarquons que ces grandeurs ne dépendent pas du sens du courant, et donc que l'on a  $b_{ik} = b_{ki}$  et  $g_{ik} = g_{ki}$ .

Pour chaque arête orientée  $(i, k) \in \mathcal{E}$ , les équations des flux de puissances active et réactive sont données par

$$F_{ik} = V_i^2 g_{ik} + V_i V_k (b_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \cos(\theta_{ik})), \quad (4.3)$$

$$G_{ik} = V_i^2 b_{ik} - V_i V_k (g_{ik} \sin(\theta_{ik}) + b_{ik} \cos(\theta_{ik})), \quad (4.4)$$

où  $\theta_{ik}$  est l'angle de phase défini par

$$\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k.$$

La quantité de courant pouvant circuler dans une ligne de transmission  $\{i, k\} = \psi(\ell)$  est limitée par les caractéristiques physiques de cette ligne (type de matériau, longueur et surface de la section du câble). Ce type de contrainte est appelée contrainte thermique et s'écrit

$$F_{ik} + F_{ki} \leq \bar{F}_\ell, \quad (4.5)$$

où  $\bar{F}_\ell > 0$ . Notons qu'il existe d'autres formulations des contraintes thermiques (voir [25]). La formulation que nous avons choisi a l'avantage de se réécrire de façon simple en termes d'angles de tension. En effet, d'après (4.3), on a

$$F_{ik} + F_{ki} = (V_i^2 + V_k^2)g_{ik} - 2V_i V_k g_{ik} \cos(\theta_{ik}).$$

On distingue donc trois cas selon la valeur de  $\bar{F}_\ell$  :

- si  $\bar{F}_\ell < (V_i - V_k)^2 g_{ik}$ , la contrainte (4.5) n'est pas réalisable et le problème est sans intérêt ;
- si  $(V_i - V_k)^2 g_{ik} \leq \bar{F}_\ell < (V_i + V_k)^2 g_{ik}$ , la contrainte (4.5) est équivalente à  $-\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}$ , où

$$\bar{\theta}_{ik} = \arccos \left( \frac{(V_i^2 + V_k^2)g_{ik} - \bar{F}_\ell}{2V_i V_k g_{ik}} \right).$$

- si  $(V_i + V_k)^2 g_{ik} \leq \bar{F}_\ell$ , la contrainte (4.5) est automatiquement vérifiée ; remarquons que dans ce cas, on a  $-\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}$ , avec  $\bar{\theta}_{ik} = \pi$ .

On voit que dans tous les cas d'intérêt, la contrainte thermique peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}, \quad (4.6)$$

avec  $\bar{\theta}_{ik} \in [0, \pi]$ . Notons que  $\bar{\theta}_{ik}$  ne dépend pas du sens de parcours de la ligne, et donc que  $\bar{\theta}_{ki} = \bar{\theta}_{ik}$ .

Pour des raisons techniques, on supposera dans la suite que

$$0 < \bar{\theta}_{ik} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cette condition revient à supposer que

$$(V_i - V_k)^2 g_{ik} < \bar{F}_\ell \leq (V_i^2 + V_k^2) g_{ik}.$$

Une hypothèse plus restrictive sur les angles sera faite plus loin. La pertinence physique de cette restriction sera alors discutée. Dans la suite, la contrainte thermique sera exprimée indifféremment sous la forme (4.5) ou sous la forme (4.6).

### 3.1.3 Puissances injectées dans les nœuds

En chaque nœud  $i \in S$ , la puissance injectée doit être égale à la puissance générée moins la puissance consommée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P_i &= P_i^U - P_i^C, \\ Q_i &= Q_i^U - Q_i^C. \end{aligned}$$

Notons que pour un nœud de production  $i \in S_U$ , on a  $P_i^C = Q_i^C = 0$ , donc

$$P_i = P_i^U \quad \text{et} \quad Q_i = Q_i^U. \quad (4.7)$$

Pour un nœud de consommation  $i \in S_C$ , on a  $P_i^U = Q_i^U = 0$ , donc

$$P_i = -P_i^C \quad \text{et} \quad Q_i = -Q_i^C. \quad (4.8)$$

De plus, comme on l'a prouvé dans le chapitre 1, ces puissances s'écrivent aussi en fonction des flux de puissances active et réactive, comme suit

$$P_i = \sum_{k \sim i} F_{ik}, \quad (4.9)$$

$$Q_i = \sum_{k \sim i} G_{ik}. \quad (4.10)$$

Les équations (4.9) et (4.10) apparaissent ici comme des contraintes d'égalité.

De plus, dans chaque nœud  $i \in S$ , les puissances injectées active et réactive doivent vérifier les contraintes physiques suivantes

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \bar{P}_i, \quad (4.11)$$

$$\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \bar{Q}_i. \quad (4.12)$$

Dans toute la partie théorique de ce chapitre, la contrainte (4.12) sur les puissances réactives ne sera pas considérée, afin de simplifier l'étude. Cela revient à supposer que  $\underline{Q}_i$  est suffisamment petit et que  $\bar{Q}_i$  est suffisamment grand.

Cette contrainte sera cependant réintroduite dans les expériences numériques de la partie 8 afin de vérifier si les techniques proposées permettent de donner des résultats satisfaisants, même avec cette contrainte.

### 3.1.4 Pertes de puissance en ligne de transmission

La perte de puissance active dans la ligne  $\{i, k\}$  est définie par

$$L_{ik} = F_{ik} + F_{ki}.$$

La perte totale de puissance active dans le réseau est donc donnée par

$$L = \sum_{\{i,k\} \in E} L_{ik}.$$

Remarquons qu'en utilisant (4.21), cette quantité peut se réécrire

$$L = \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} F_{ik} = \sum_{i=1}^m P_i. \quad (4.13)$$

## 3.2 Formulation du problème d'optimisation à résoudre

### 3.2.1 Les fonctions objectif

Dans la littérature, il existe plusieurs formulations de fonctions objectif, chacune correspondant à une problématique donnée (voir [36]). Dans ce travail, on s'intéresse à deux fonctions objectif qui correspondent au coût de production d'électricité et aux pertes de puissance active dans les lignes de transmission.

#### Coût d'achat ou de production d'électricité

Dans la littérature, le coût de production ou d'achat d'énergie en un noeud de production  $i \in S_U$  prend la forme quadratique suivante

$$a_i(P_i^U)^2 + b_i P_i^U + c_i,$$

où  $a_i, b_i$  et  $c_i$  sont des constantes positives liées au type de production, et telles que  $a_i + b_i > 0$ . Si l'on cherche à minimiser ce coût, on obtient la fonction objectif

$$\sum_{i \in S_U} (a_i(P_i^U)^2 + b_i P_i^U).$$

D'après l'égalité (4.7), cette fonction objectif peut se reformuler en fonction des puissances actives injectées  $P_i$  sous la forme

$$J_1(P) = \sum_{i \in S_U} (a_i P_i^2 + b_i P_i), \quad (4.14)$$

avec  $P = (P_1, \dots, P_m)^T$ .

*Remarque 3.1.* En prenant en compte la dimension temporelle dans le problème, en supposant que le seul noeud de production du réseau est le noeud 1 et en supposant que le prix d'achat de l'énergie est linéaire (c'est-à-dire  $a_i = c_i = 0$ ),

on obtient la fonction objectif

$$J_1^*(P) = \sum_{t=1}^N b_1(t) P_1^U(t),$$

où  $b_1(t)$  est le prix de l'électricité au temps  $t$  et  $P_1^U(t)$  est la puissance importée au temps  $t$ . On retrouve ainsi la fonction objectif linéaire du chapitre 3.

### Pertes de puissance active en ligne de transmission

L'expression des pertes de puissance active en ligne de transmission est donnée par l'équation (4.13). Un autre but peut être de chercher à minimiser ces pertes, ce qui mène à la fonction objectif

$$J_2(P) = \sum_{i=1}^m P_i. \quad (4.15)$$

### Nécessité d'une fonction objectif strictement croissante

Les techniques qui seront développées dans la suite nécessitent que la fonction objectif soit strictement croissante par rapport au vecteur  $P$  des puissances actives injectées, au sens de la définition 2.10. C'est le cas de la fonction objectif  $J_2$ . Par contre, la fonction objectif  $J_1$  n'est strictement croissante que si tous les nœuds du réseau sont des nœuds de production, c'est-à-dire  $S_U = S$ . Cette condition est irréaliste en pratique. Pour contourner ce problème, on considère une fonction objectif du type

$$J(P) = J_2(P) + \kappa J_1(P), \quad (4.16)$$

où le coefficient  $\kappa \geq 0$  peut être ajusté selon le poids que l'on veut donner respectivement à la minimisation du coût d'achat et à la minimisation des pertes. Cette fonction objectif  $J$  est strictement croissante pour tout  $\kappa \geq 0$ .

#### 3.2.2 Formulation physique du problème

Remarquons d'abord que d'après (4.9) et (4.3), la puissance active injectée  $P_i$  peut être vue comme une fonction des amplitudes de tension  $V_k$  et des différences d'angles  $\theta_{ik}$ . Autrement dit,  $P := P(V, \theta)$  est une variable d'état qui dépend des variables de contrôle  $V$  et  $\theta$ . D'autre part, on introduit la fonction objectif

$$\tilde{J}(V, \theta) = J(P(V, \theta)),$$

où  $J$  est la fonction objectif définie par (4.16).



Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit donc

$$\begin{aligned}
& \min_{V, \theta} \tilde{J}(V, \theta), \\
s.c. \quad & \underline{V}_i \leq V_i \leq \bar{V}_i, \quad \forall i \in S, \\
& -\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}, \quad \forall (i, k) \in \mathcal{E}, \\
& P_i = \sum_{k \sim i} F_{ik}, \quad \forall i \in S, \\
& \underline{P}_i \leq P_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in S,
\end{aligned} \tag{OPF_1}$$

où  $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$  et  $F_{ik}$  est défini par (4.3).

### 3.3 Formulation SDP du problème

Les équations de flux de puissance rendent le problème (OPF<sub>1</sub>) non-convexe et donc difficile à résoudre. On va maintenant reformuler ce problème sous forme matricielle. La non-convexité apparaîtra alors plus clairement. D'autre part, cette reformulation nous donnera une piste sur un moyen de se ramener à un problème convexe.

On commence par exprimer toutes les contraintes intervenants dans le problème (OPF<sub>1</sub>) en fonction du vecteur  $v$  des tensions complexes aux nœuds. Pour cela, on introduit les matrices hermitiennes suivantes :

- pour  $1 \leq i \leq m$ , la matrice  $E^i$  dont tous les éléments sont nuls sauf  $E^i_{i,i}$  qui vaut 1 ;
- $Y$  la matrice telle que

$$\begin{cases} \forall i \in S, & Y_{i,i} = \sum_{k \sim i} y_{ik}, \\ \forall (i, k) \in \mathcal{E}, & Y_{i,k} = -y_{ik}, \end{cases}$$

et tout les autres coefficients sont nuls ;

- pour  $1 \leq i \leq m$ , la matrice  $B^i$  définie par

$$B^i = \frac{1}{2}(Y^* E^i + E^i Y); \tag{4.17}$$

- pour  $(i, k) \in \mathcal{E}$ , la matrice  $B^{ik}$  telle que

$$\begin{cases} B^i_{i,i} = g_{ik}, \\ B^i_{i,k} = -\frac{y_{ik}}{2}, \\ B^i_{k,i} = -\frac{\bar{y}_{ik}}{2}, \end{cases}$$

et tout les autres coefficients sont nuls.

Dans le lemme qui suit, on présente des calculs préliminaires qui permettront ensuite d'exprimer toutes les grandeurs physiques du problème en fonction du vecteur  $v$  des tensions complexes.

**Lemme 3.2.** *Pour toute matrice hermitienne  $W \in \mathbb{H}_m$ , on a*

$$\mathrm{Tr}(B^{ik}W) = g_{ik}W_{i,i} + b_{ik} \mathrm{Im}(W_{i,k}) - g_{ik} \mathrm{Re}(W_{i,k}), \quad (4.18)$$

$$\mathrm{Tr}(B^iW) = \sum_{k \sim i} \mathrm{Tr}(B^{ik}W). \quad (4.19)$$

*Démonstration.* Pour  $(i, k) \in \mathcal{E}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(B^{ik}W) &= \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^m B_{q,r}^{ik} W_{r,q}, \\ &= B_{i,i}^{ik} W_{i,i} + B_{i,k}^{ik} W_{k,i} + B_{k,i}^{ik} W_{i,k}, \\ &= g_{ik}W_{i,i} - \frac{1}{2}(y_{ik}\overline{W_{i,k}} + \overline{y_{ik}}W_{i,k}), \\ &= g_{ik}W_{i,i} - \mathrm{Re}(\overline{y_{ik}}W_{i,k}), \\ &= g_{ik}W_{i,i} + b_{ik} \mathrm{Im}(W_{i,k}) - g_{ik} \mathrm{Re}(W_{i,k}). \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq i \leq m$ , on a

$$B_{i,i}^i = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m (Y_{i,q}^* E_{q,i}^i + E_{i,q}^i Y_{q,i}) = \frac{1}{2} (Y_{i,i}^* + Y_{i,i}) = \mathrm{Re}(Y_{i,i}) = \sum_{k \sim i} \mathrm{Re}(y_{ik}) = \sum_{k \sim i} B_{i,i}^{ik}.$$

D'autre part, pour  $\{i, k\} \in E$ , on a

$$B_{i,k}^i = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m (Y_{i,q}^* E_{q,k}^i + E_{i,q}^i Y_{q,k}) = \frac{1}{2} Y_{i,k} = -\frac{y_{ik}}{2} = B_{i,k}^{ik}$$

et

$$B_{k,i}^i = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m (Y_{k,q}^* E_{q,i}^i + E_{k,q}^i Y_{q,i}) = \frac{1}{2} Y_{k,i}^* = -\frac{\overline{y_{ik}}}{2} = B_{k,i}^{ik}.$$

Par conséquent, on a

$$B^i = \sum_{k \sim i} B^{ik}.$$

On en déduit, d'après ce qu'il précède, que

$$\mathrm{Tr}(B^iW) = \sum_{k \sim i} \mathrm{Tr}(B^{ik}W).$$

□

**Corollaire 3.3.** *Pour toute arête orientée  $(i, k) \in \mathcal{E}$ , le flux de puissance active  $F_{ik}$  peut s'écrire*

$$F_{ik} = \mathrm{Tr}(B^{ik}vv^*).$$

*Pour tout sommet  $i \in S$ , la puissance injectée  $P_i$  peut s'écrire*

$$P_i = \mathrm{Tr}(B^i vv^*).$$

*Démonstration.* La matrice  $vv^*$  étant hermitienne et vérifiant

$$\operatorname{Re}((vv^*)_{i,k}) = V_i V_k \cos(\theta_{ik}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}((vv^*)_{i,k}) = V_i V_k \sin(\theta_{ik}),$$

le résultat se déduit immédiatement du lemme 3.2.  $\square$

Grâce à ce lemme, on peut ramener le problème (OPF<sub>1</sub>) à l'étude du problème suivant, où la variable de décision est une matrice complexe :

$$\begin{aligned} & \min_{W \in \mathbb{H}_m} \hat{J}(W), \\ \text{s.c.} \quad & \underline{V}_i \leq \sqrt{\overline{W}_{i,i}} \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in S \\ & \underline{P}_i \leq \operatorname{Tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in S \\ & \operatorname{Tr}(B^{ik} W) + \operatorname{Tr}(B^{ki} W) \leq \overline{F}_\ell, \quad \forall \{i, k\} = \psi(\ell) \in E, \\ & W \succeq 0, \\ & \operatorname{rang}(W) = 1, \end{aligned} \tag{OPF_2}$$

où

$$\hat{J}(W) = J(\operatorname{Tr}(B^1 W), \dots, \operatorname{Tr}(B^m W)).$$

Les problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) sont équivalents comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 3.4.** *Les problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) sont équivalents dans le sens suivant :*

1. si  $(V, \theta)$  est solution du problème (OPF<sub>1</sub>), alors en notant  $v = V e^{j\theta}$ , la matrice  $W = vv^*$  est solution du problème (OPF<sub>2</sub>) ;
2. si  $W$  est solution du problème (OPF<sub>2</sub>), alors il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et  $(|v|, \arg(V))$  est solution du problème (OPF<sub>1</sub>).

*Démonstration.* Si  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ , alors  $W = vv^*$  est une matrice hermitienne semi-définie positive de rang 1. Réciproquement, si  $W$  est une matrice hermitienne semi-définie positive de rang 1, alors il existe  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  tel que  $W = vv^*$ . De plus, pour une telle matrice, on a

$$\hat{J}(W) = J(\operatorname{Tr}(B^1 W), \dots, \operatorname{Tr}(B^m W)) = J(P_1(V, \theta), \dots, P_m(V, \theta)) = \tilde{J}(V, \theta).$$

Le corollaire 3.3 assure la compatibilité entre les autres contraintes et donc l'équivalence entre les deux problèmes.  $\square$

La non-convexité du problème d'optimisation est plus visible sous la forme (OPF<sub>2</sub>), via la contrainte sur le rang. Un moyen simple pour se ramener à un problème convexe consiste à supprimer cette contrainte de rang. On obtient

alors le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
& \min_{W \in \mathbb{H}_m} \widehat{J}(W), \\
& \text{s.c. } \underline{V}_i \leq \sqrt{W_{i,i}} \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in S \\
& \quad \underline{P}_i \leq \text{Tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in S \\
& \quad \text{Tr}(B^{ik} W) + \text{Tr}(B^{ki} W) \leq \overline{F}_\ell \quad \forall \{i, k\} = \psi(\ell) \in E, \\
& \quad W \succeq 0.
\end{aligned} \tag{OPF_2}$$

Ce problème rentre dans le formalisme de l'optimisation SDP. Il est par conséquent beaucoup plus facile à résoudre numériquement que le problème (OPF<sub>2</sub>).

Cependant, rien ne garantit *a priori* qu'une solution de rang 1 du problème (OPF<sub>2</sub>) est nécessairement une solution de (OPF<sub>2</sub>). Dans la suite, on va donc essayer de trouver des conditions qui assurent qu'une solution de rang 1 du problème (OPF<sub>2</sub>) est aussi une solution de (OPF<sub>2</sub>).

### 3.4 Formulation ensembliste du problème

Dans cette partie, on propose une nouvelle reformulation du problème d'optimisation (OPF<sub>1</sub>) en considérant le vecteur des puissances actives comme variable de décision et en définissant les contraintes en termes d'ensembles. Cette formulation sera plus adaptée à l'étude mathématique qui va suivre.

Dans un premier temps, on va supposer que les amplitudes des tensions sont fixées. On considère donc un vecteur  $V \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\underline{V} \leq V \leq \overline{V}$ .

Pour chaque arête non-orientée  $\psi(\ell) = \{i, k\} \in E$ , le flux de puissance active s'écrit

$$F_{ik}(V, \theta_{ik}) = V_i^2 g_{ik} + V_i V_k (b_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \cos(\theta_{ik})). \tag{4.20}$$

On définit le vecteur  $\theta \in \mathbb{R}^{2(m-1)}$  dont la  $\ell$ -ième composante est  $\theta_\ell = \theta_{ik}$ , où  $\varphi(\ell) = (i, k)$ . De la même manière, les flux sont regroupés en un vecteur  $F(V, \theta) \in \mathbb{R}^{2(m-1)}$  dont la  $\ell$ -ième composante est

$$F_\ell(V, \theta) = F_{ik}(V, \theta_{ik}), \quad \text{où } \varphi(\ell) = (i, k).$$

Le vecteur des puissances actives  $P(V, \theta) \in \mathbb{R}^m$  est donné par

$$P_i(V, \theta) = \sum_{k \sim i} F_{ik}(V, \theta_{ik}). \tag{4.21}$$

On peut maintenant définir pour chaque contrainte un ensemble admissible. Pour la contrainte sur la puissance active, il suffit de définir

$$\mathcal{P}_P = \{P \in \mathbb{R}^m, \underline{P} \leq P \leq \overline{P}\}. \tag{4.22}$$

Passons à la contrainte thermique. Pour chaque arête non-orientée  $\psi(\ell) = \{i, k\} \in E$ , l'ensemble des flux de puissance active admissibles est défini par

$$\mathcal{F}_\ell(V) = \{(F_{ik}(V, \theta_{ik}), F_{ki}(V, -\theta_{ik}))^T, -\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}\}. \quad (4.23)$$

L'ensemble des flux de puissance active admissibles pour le réseau entier est alors donné par

$$\mathcal{F}(V) = \{F(V, \theta), -\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}. \quad (4.24)$$

Enfin, l'ensemble des puissances actives admissibles pour la contrainte thermique est

$$\mathcal{P}_\theta(V) = \{P(V, \theta), -\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}. \quad (4.25)$$

On peut relier très facilement les ensembles  $\mathcal{F}(V)$  et  $\mathcal{F}_\ell(V)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(V) = \prod_{\ell=1}^{m-1} \mathcal{F}_\ell(V). \quad (4.26)$$

Afin de faire le lien entre les ensembles  $\mathcal{F}(V)$  et  $\mathcal{P}_\theta(V)$ , on introduit la matrice  $A \in M_{m, 2(m-1)}(\mathbb{R})$ , définie par

$$A_{i,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(\ell) = (i, \cdot), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la notation  $\varphi(\ell) = (i, \cdot)$  signifie qu'il existe  $k \in S$  tel que  $\varphi(\ell) = (i, k)$  (autrement dit, qu'il existe  $k \in S$  tel que  $i \sim k$ ). Un rapide calcul montre que

$$(AF(V, \theta))_i = \sum_{\ell=1}^{2(m-1)} A_{i,\ell} F_\ell(V, \theta) = \sum_{\varphi(\ell)=(i, \cdot)} F_\ell(V, \theta) = \sum_{k \sim i} F_{ik}(V, \theta_{ik}) = P_i(V, \theta).$$

Par conséquent, on a  $P(V, \theta) = AF(V, \theta)$ . On en déduit que

$$\mathcal{P}_\theta(V) = A\mathcal{F}(V). \quad (4.27)$$

La matrice  $A$  est une sorte de matrice de connectivité du graphe  $\Sigma$ . On peut facilement vérifier qu'elle vérifie les conditions d'application du lemme 2.15.

*Exemple 3.5.* Afin d'illustrer les différentes notations introduites, on propose l'exemple d'un arbre à 4 nœuds dont les numéros des sommets et des arêtes orientées sont précisés sur la figure 4.2. Pour cet exemple, les fonction de numérotation  $\varphi$  et  $\psi$  sont données par

$$\begin{array}{lcl} & & 1 \mapsto (1, 2) \\ & & 2 \mapsto (2, 1) \\ \psi : & 1 \mapsto \{1, 2\} & \\ & 2 \mapsto \{2, 3\} & \text{et } \varphi : \\ & 3 \mapsto \{2, 4\} & 3 \mapsto (2, 3) \\ & & 4 \mapsto (3, 2) \\ & & 5 \mapsto (2, 4) \\ & & 6 \mapsto (4, 2) \end{array}$$

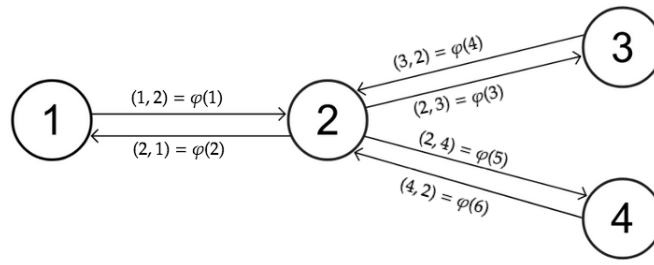


FIGURE 4.2 – Graphe à 4 nœuds

Le vecteur des flux de puissance active s'écrit

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} F_{12}(\theta) \\ F_{21}(\theta) \\ F_{23}(\theta) \\ F_{32}(\theta) \\ F_{24}(\theta) \\ F_{42}(\theta) \end{pmatrix}$$

et la matrice  $A$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend maintenant en compte la contrainte sur les amplitudes des tensions. Pour définir les ensembles admissibles avec cette contrainte supplémentaire, il suffit de prendre l'union des ensembles définis précédemment sur tous les  $V \in \mathbb{R}^m$  tels que  $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ . Cela nous amène à définir les ensembles

$$\tilde{\mathcal{F}}_\ell = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \mathcal{F}_\ell(V), \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \mathcal{F}(V), \quad (4.29)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_\theta = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \mathcal{P}_\theta(V). \quad (4.30)$$

D'après (4.26) et (4.27), ces ensembles peuvent être reliés par

$$\tilde{\mathcal{F}} = \prod_{\ell=1}^{m-1} \tilde{\mathcal{F}}_\ell \quad (4.31)$$

et

$$\tilde{\mathcal{P}}_\theta = A\tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.32)$$

Grâce à ces notations, on peut reformuler le problème (OPF<sub>1</sub>) en un problème d'optimisation dont la variable de décision est le vecteur des puissances  $P$  et dont les contraintes sont définies en termes d'ensembles.

$$\begin{aligned} & \min_{P \in \mathbb{R}^m} J(P) \\ \text{s.c. } & P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta \cap \mathcal{P}_P \end{aligned} \quad (\text{OPF}_3)$$

On montre dans la proposition suivante que les problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>3</sub>) sont bien équivalents.

**Proposition 3.6.** *Les problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>3</sub>) sont équivalents au sens suivant :*

- Si  $(V, \theta)$  est solution du problème (OPF<sub>1</sub>), alors le vecteur  $P(V, \theta)$  défini par (4.20) et (4.21) est solution du problème (OPF<sub>3</sub>).
- Si  $P$  est solution du problème (OPF<sub>3</sub>), alors il existe  $(V, \theta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2(m-1)}$  tel que  $P = P(V, \theta)$ . De plus,  $(V, \theta)$  est solution du problème (OPF<sub>1</sub>).

*Démonstration.*

- Si  $(V, \theta)$  vérifie les contraintes du problème (OPF<sub>1</sub>), alors par construction, on a  $P(V, \theta) \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta \cap \mathcal{P}_P$ .
- Si  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta \cap \mathcal{P}_P$ , la définition (4.30) de  $\tilde{\mathcal{P}}_\theta$  assure l'existence de  $V \in \mathbb{R}^m$  avec  $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ , tel que  $P \in \mathcal{P}_\theta(V)$ . D'après (4.27), il existe donc  $F \in \mathcal{F}(V)$  tel que  $P = AF$ . La définition (4.24) assure l'existence de  $\theta \in \mathbb{R}^{2(m-1)}$ , avec  $-\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ , tel que  $F = F(V, \theta)$ . On a donc  $P = AF(V, \theta) = P(V, \theta)$ . On voit immédiatement que  $(V, \theta)$  vérifie les contraintes du problème (OPF<sub>1</sub>).
- Enfin, les fonctions objectif des deux problèmes sont compatibles : on a  $\tilde{J}(V, \theta) = J(P(V, \theta))$ , donc si  $(V, \theta)$  est solution de (OPF<sub>1</sub>), alors  $P(V, \theta)$  est solution de (OPF<sub>3</sub>) et réciproquement. □

## 4 Étude d'un réseau composé d'une ligne

L'objectif des parties qui vont suivre va être de construire une convexification pertinente du problème (OPF<sub>3</sub>), puis de prouver que cette convexification est exacte sous certaines conditions. Ce type de preuve va reposer sur deux ingrédients principaux :

- des propriétés géométriques des ensembles admissibles à l'échelle locale d'une ligne ;
- la structure d'arbre du réseau.

Dans cette partie, on s'intéresse donc à un réseau constitué d'une seule ligne avec des amplitudes de tensions fixées et sans prendre en compte les contraintes de puissance. Le but est à la fois d'introduire certaines notations, de prouver des résultats géométriques sur l'ensemble admissible et de convexifier le problème

pour ce cas très simplifié. On essaiera alors dans les parties suivantes d'étendre ces résultats à un réseau complet.

On considère ici un graphe constitué d'une seule arête  $\{1, 2\}$  (voir figure 4.3). Pour simplifier les notations, les coefficients  $b_{12}$  et  $g_{12}$  seront simplement notés  $b$  et  $g$ . Les flux de puissance active  $F_{12}$  et  $F_{21}$  seront respectivement notés  $F_1$  et  $F_2$ . Enfin, l'angle  $\theta_{12}$  sera noté  $\theta$ .

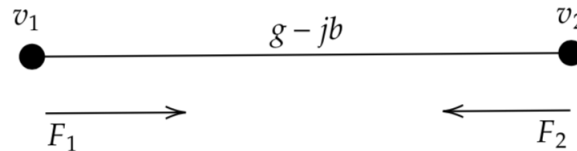


FIGURE 4.3 – Réseau d'une seule ligne

On introduit l'angle

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{g}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \quad (4.33)$$

On suppose que les modules des tensions  $V_1$  et  $V_2$  sont fixés et on omettra donc également toutes les dépendances en  $V$ .

#### 4.1 L'ensemble $\mathcal{F}$ des flux de puissance admissibles

On considère la fonction  $F(\theta) = (F_1(\theta), F_2(\theta))^T$ , avec

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= V_1^2 g + V_1 V_2 b \sin(\theta) - V_1 V_2 g \cos(\theta), \\ F_2(\theta) &= V_2^2 g - V_1 V_2 b \sin(\theta) - V_1 V_2 g \cos(\theta). \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{A} = \{F(\theta) \in \mathbb{R}^2, \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

Remarquons que  $\mathcal{A}$  est une ellipse ayant pour axe de symétrie la droite  $y = x$  (voir figure 4.4).

On rappelle que la contrainte thermique impose que l'angle  $\theta$  appartienne à  $[-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$ , où  $0 < \bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$ . Dans la suite, il sera utile de connaître les variations des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Celles-ci sont données dans le tableau 4.1.



$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\alpha$	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$
$F_1(\theta)$				
$F_2(\theta)$				

TABLEAU 4.1 – Tableau de variations des fonctions  $F_1$  et  $F_2$ 

De plus, on vérifie facilement que l'on a

$$F_1(-\pi/2) < F_1(\pi/2) \quad \text{et} \quad F_2(\pi/2) < F_2(-\pi/2).$$

L'ensemble des flux de puissances admissibles est donc défini par

$$\mathcal{F} = \{F(\theta) \in \mathbb{R}^2, \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]\}. \quad (4.34)$$

Cet ensemble est un arc de l'ellipse  $\mathcal{A}$  (voir l'exemple de la figure 4.4, avec  $\bar{\theta} = \pi/2$ ). On commence par déterminer la frontière de Pareto de l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 4.1.** *On a*

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = \{F(\theta) \in \mathbb{R}^2, \theta \in [-\min(\bar{\theta}, \alpha), \min(\bar{\theta}, \alpha)]\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$ .

- Si  $\theta \in ]\alpha, \pi/2]$ , il existe  $\theta' \in ]\alpha, \theta[$ . D'après le tableau de variation, on a alors  $F_1(\theta') < F_1(\theta)$  et  $F_2(\theta') < F_2(\theta)$ , donc  $F(\theta') \prec F(\theta)$ . On en déduit que  $F(\theta) \notin \mathcal{O}(\mathcal{F})$ .
- Si  $\theta \in [-\pi/2, -\alpha[$ , il existe  $\theta' \in ]\theta, -\alpha[$ . D'après le tableau de variation, on a alors  $F_1(\theta') < F_1(\theta)$  et  $F_2(\theta') < F_2(\theta)$ , donc  $F(\theta') \prec F(\theta)$ . On en déduit  $F(\theta) \notin \mathcal{O}(\mathcal{F})$ .
- Si  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ , soit  $\theta'$  tel que  $F_1(\theta') \leq F_1(\theta)$  et  $F_2(\theta') \leq F_2(\theta)$ . D'après le tableau de variations, la première condition implique que  $\theta' \leq \theta$  et la deuxième que  $\theta' \geq \theta$ . On en déduit que  $\theta' = \theta$ , donc  $F(\theta) \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ .

Pour résumer,  $F(\theta)$  est dans  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$  si et seulement si  $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$  (car  $\mathcal{O}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ ) et  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ , d'où le résultat.  $\square$

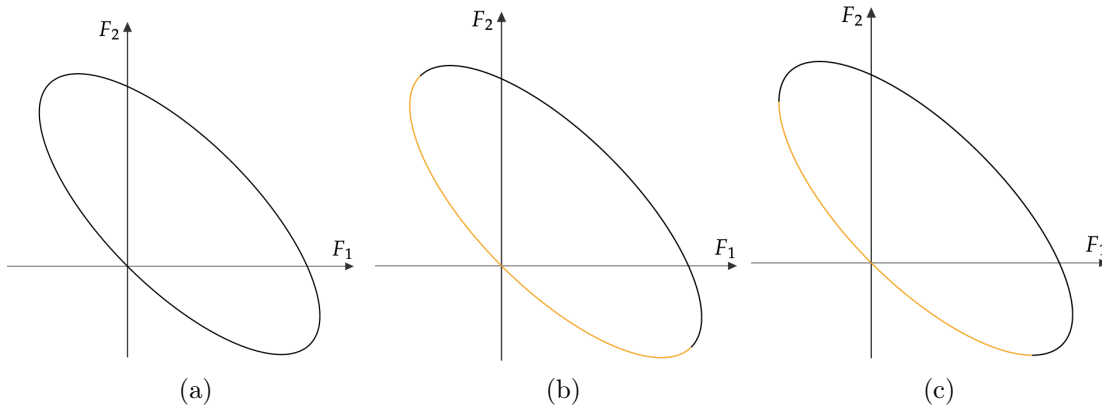


FIGURE 4.4 – (a) : ensemble  $\mathcal{A}$ , (b) : ensemble  $\mathcal{F}$ , (c) : ensemble  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$

## 4.2 Convexification de l'ensemble $\mathcal{F}$

Le but de cette partie est de construire une convexification utilisable de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire un ensemble convexe  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  contenant  $\mathcal{F}$  et vérifiant  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ . L'idée la plus naturelle consiste à prendre l'enveloppe convexe de  $\mathcal{F}$ . Cependant l'enveloppe convexe de  $\mathcal{F}$  n'est pas caractérisable algébriquement de manière simple, ce qui la rend difficile à utiliser pour résoudre les problèmes d'optimisation qui nous intéressent.

Nous allons donc construire une autre convexification, qui repose sur l'utilisation des matrices hermitiennes semi-définies positives et qui aura une caractérisation algébrique très simple.

On note  $\mathbb{H}_m^+$  l'ensemble des matrices  $m \times m$  hermitiennes semi-définies positives. On introduit alors l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{ W \in \mathbb{H}_2^+, W_{1,1} = V_1^2, W_{2,2} = V_2^2, \right. \\ \left. -\tan(\bar{\theta}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) \leq \operatorname{Im}(W_{1,2}) \leq \tan(\bar{\theta}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) \right\}.$$

On commence par décrire la forme des matrices qui sont dans  $\mathcal{H}$  et en particulier celles de rang 1.

**Lemme 4.2.** *Une matrice  $W$  de taille  $2 \times 2$  est dans  $\mathcal{H}$  si et seulement s'il existe  $\alpha \in [0, V_1 V_2]$  et  $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$  tels que*

$$W = \begin{pmatrix} V_1^2 & \alpha e^{j\theta} \\ \alpha e^{-j\theta} & V_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

*Une telle matrice est de rang 1 si et seulement si  $\alpha = V_1 V_2$ .*

*Démonstration.* Si  $W \in \mathcal{H}$ , en posant  $\alpha = |W_{1,2}|$  et  $\theta = \arg(W_{1,2})$ , la matrice  $W$  s'écrit sous la forme (4.35) avec  $\alpha > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . On a  $\det(W) \geq 0$ ,

donc  $\alpha \leq V_1 V_2$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} -\tan(\bar{\theta}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) &\leq \operatorname{Im}(W_{1,2}) \leq \tan(\bar{\theta}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) \\ \Leftrightarrow -\tan(\bar{\theta}) \cos(\theta) &\leq \sin(\theta) \leq \tan(\bar{\theta}) \cos(\theta) \Leftrightarrow -\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on voit immédiatement que si  $\alpha \in [0, V_1 V_2]$  et  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , on a  $W \in \mathcal{H}$ .

Pour la deuxième partie, si  $W$  est définie par (4.35), la matrice  $W$  est de rang 1 si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{cases} V_i^2 = \lambda \alpha e^{j\theta}, \\ \alpha e^{-j\theta} = \lambda V_k^2, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à  $\alpha = V_1 V_2$ . □

On peut maintenant établir le lien entre les ensembles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$ .

**Lemme 4.3.** *L'ensemble  $\mathcal{F}$  défini par (4.34) peut s'écrire*

$$\mathcal{F} = \{\operatorname{Re}(\operatorname{diag}(WK)), W \in \mathcal{H}, \operatorname{rang}(W) = 1\}, \quad (4.36)$$

où

$$K = \begin{pmatrix} g + jb & -g - jb \\ -g - jb & g + jb \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Soit  $W \in \mathcal{H}$  qui s'écrit donc sous la forme (4.35). On a

$$\operatorname{diag}(WK) = \begin{pmatrix} (V_1^2 - \alpha e^{j\theta})(g + jb) \\ (V_2^2 - \alpha e^{-j\theta})(g + jb) \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\operatorname{Re}(\operatorname{diag}(WK)) = \begin{pmatrix} V_1^2 g + \alpha b \sin(\theta) - \alpha g \cos(\theta) \\ V_2^2 g - \alpha b \sin(\theta) - \alpha g \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par définition de l'ensemble  $\mathcal{F}$  et comme  $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$ , on a  $\operatorname{Re}(\operatorname{diag}(WY)) \in \mathcal{F}$  si et seulement si  $\alpha = V_1 V_2$ , ce qui est équivalent d'après le lemme 4.2 à  $\operatorname{rang}(W) = 1$ . □

En enlevant la contrainte de rang dans (4.36), on obtient une convexification de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire un ensemble convexe qui contient  $\mathcal{F}$ . On notera

$$\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}) = \{\operatorname{Re}(\operatorname{diag}(WY)), W \in \mathcal{H}\}. \quad (4.37)$$

Remarquons que grâce à l'hypothèse  $\bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$ , l'ensemble  $\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F})$  est bien convexe. En effet, il s'agit alors d'un quartier d'ellipse contenu dans une demi-ellipse (voir

figure 4.5). Sans cette hypothèse, l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  ne serait pas convexe (sauf dans le cas  $\bar{\theta} = \pi$ , auquel cas  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  est l'ellipse entière).

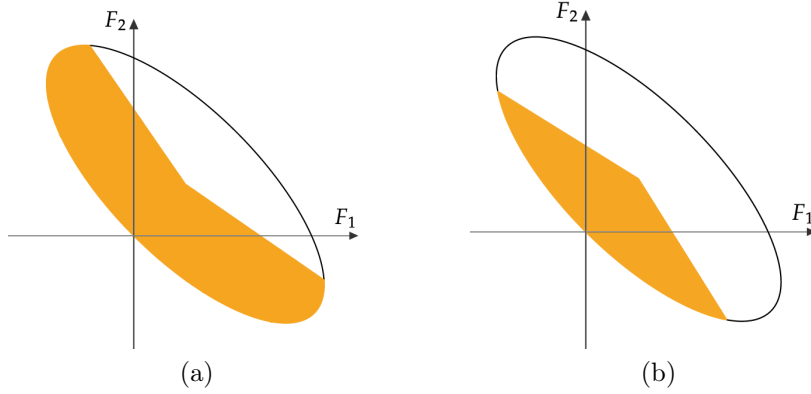


FIGURE 4.5 – (a) : l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  avec  $\bar{\theta} > \frac{\pi}{2}$ , (b) : l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  avec  $\bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$

On peut déduire des deux résultats précédents une description plus explicite de l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ .

**Corollaire 4.4.** *L'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  peut s'écrire sous la forme suivante*

$$\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) = \left\{ \left( \begin{array}{l} V_1^2 g + \alpha b \sin(\theta) - \alpha g \cos(\theta) \\ V_2^2 g - \alpha b \sin(\theta) - \alpha g \cos(\theta) \end{array} \right), \alpha \in [0, V_1 V_2], \theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}] \right\}. \quad (4.38)$$

*Démonstration.* Le résultat est immédiat d'après le calcul effectué dans la preuve précédente et le lemme 4.2  $\square$

Le résultat principal de cette partie consiste à montrer que  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  ont la même frontière de Pareto. Il s'agit d'un résultat crucial pour que la convexification  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  soit utilisable dans la suite.

**Proposition 4.5.** *On a  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{O}(\mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* La frontière de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  est constituée de l'ensemble  $\mathcal{F}$  et des segments  $[O, F(-\bar{\theta})]$  et  $[O, F(\bar{\theta})]$ , où  $O = (V_1^2 g, V_2^2 g)^T$  est le centre de l'ellipse  $\mathcal{A}$ . On commence par montrer que les points de l'intervalle  $[O, F(\bar{\theta})[$  ne sont pas dans  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ . Un point de cet intervalle s'écrit sous la forme

$$(x, y)^T = \left( \begin{array}{l} V_1^2 g + \alpha b \sin(\bar{\theta}) - \alpha g \cos(\bar{\theta}) \\ V_2^2 g - \alpha b \sin(\bar{\theta}) - \alpha g \cos(\bar{\theta}) \end{array} \right),$$

avec  $\alpha \in [0, V_1 V_2[$ . On distingue deux cas.

- Si  $\bar{\theta} \leq \arctan(g/b)$ , alors  $b \sin(\bar{\theta}) - g \cos(\bar{\theta}) \leq 0$  et comme  $0 < \bar{\theta} < \pi/2$ , on a  $-b \sin(\bar{\theta}) - g \cos(\bar{\theta}) < 0$ . On en déduit que

$$(x^*, y^*)^T = \begin{pmatrix} V_1^2 g + b \sin(\bar{\theta}) - g \cos(\bar{\theta}) \\ V_2^2 g - b \sin(\bar{\theta}) - g \cos(\bar{\theta}) \end{pmatrix} \prec (x, y)^T,$$

donc  $(x, y)^T \notin \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ .

- Si  $\bar{\theta} > \arctan(g/b)$ , alors  $b \sin(\bar{\theta}) - g \cos(\bar{\theta}) > 0$ , donc  $V_1^2 g < x < F_1(\bar{\theta})$ . D'autre part, on a  $F_1(0) < V_1^2 g$ . Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence de  $\theta^* \in ]0, \bar{\theta}[$  tel que  $x = F_1(\theta^*)$ . Enfin, on ne peut pas avoir  $y \leq F_2(\theta^*)$ , car le point  $(x, y)$  serait alors à l'extérieur ou sur le bord de l'ellipse. On a donc  $F_2(\theta^*) < y$  et  $F(\theta^*) \prec (x, y)^T$ , ce qui prouve que  $(x, y)^T \notin \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ .

On prouve de la même façon que les points de l'intervalle  $[0, F(-\bar{\theta})[$  ne sont pas dans  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ . Le lemme 2.9 assure que les points intérieurs à  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  ne peuvent pas être Pareto-optimaux. On a donc  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$ . La proposition 2.13 assure finalement que  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ .  $\square$

### 4.3 Résultats techniques

Dans cette partie, on présente quelques résultats techniques qui seront utilisés dans la suite et qui sont obtenus en faisant une hypothèse plus restrictive sur l'angle maximal  $\bar{\theta}$ . On commence par un corollaire de la proposition 4.5.

**Corollaire 4.6.** *Si  $\bar{\theta} \leq \alpha$ , alors on a*

$$\mathcal{O}(\text{conv}(\mathcal{F})) = \mathcal{O}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

*Démonstration.* Immédiat d'après le lemme 4.1 et la proposition 4.5.  $\square$

On présente maintenant une caractérisation des points de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}$ .

**Lemme 4.7.** *On suppose que  $\bar{\theta} \leq \alpha$ . Soit  $(x, y) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $(x - \delta, y) \in \mathcal{F}$ .*

*De plus, pour tout  $\varepsilon \in [0, \delta]$ , on a  $(x - \varepsilon, y) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 4.6, on a  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ . La fonction  $F_2$  est strictement décroissante sur  $[-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$ , donc il existe un unique  $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$  tel que  $F_2(\theta) = y$ . On ne peut pas avoir  $F_1(\theta) = x$ , car sinon on aurait  $(x, y) \in \mathcal{F}$ . Si on a  $F_1(\theta) > x$ , alors  $(x, y) \prec F(\theta)$ . C'est impossible, car cela contredit  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ . Par conséquent, on a nécessairement  $F_1(\theta) < x$ . En posant  $\delta = x - F_1(\theta)$ , on a bien  $(x - \delta, y) = F(\theta) \in \mathcal{F}$ .

La deuxième partie est immédiate par convexité de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ .  $\square$

Enfin, on prouve une propriété d'inversion du sens des inégalités entre les deux composantes des points de  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ .

**Lemme 4.8.** *On suppose que  $\bar{\theta} \leq \alpha$ . Soit  $(x^*, y^*) \in \mathcal{F}$  et  $(x, y) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ . Alors, on a*

1. si  $x \leq x^*$ , alors  $y \geq y^*$  ;
2. si  $x < x^*$ , alors  $y > y^*$  ;
3. si  $y \leq y^*$ , alors  $x \geq x^*$  ;
4. si  $y < y^*$ , alors  $x > x^*$ .

*Démonstration.* Par le corollaire 4.6, on a  $(x, y) \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ . Si  $x^* \leq x$  et  $y^* < y$ , alors on aurait  $(x^*, y^*) \prec (x, y)$ , ce qui contredit  $(x, y) \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}))$ . Les autres points se démontrent de manière similaire.  $\square$

#### 4.4 Considération des contraintes de puissance

On considère de plus ici les contraintes

$$\underline{P}_i \leq F_i(\theta) \leq \bar{P}_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

L'ensemble admissible s'écrit alors sous la forme :  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$  avec

$$\mathcal{F}_P = \{F \in \mathbb{R}^2, \underline{P} \leq F \leq \bar{P}\}.$$

Remarquons que l'ensemble  $\mathcal{F}_P$  est convexe. L'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P$  est alors une convexion simple de l'ensemble  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$ . La question qui se pose ensuite est de savoir si l'on a nécessairement

$$\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P). \quad (4.39)$$

Nous allons montrer que ce n'est pas toujours le cas et que certaines conditions supplémentaires doivent être imposées pour que (4.39) soit vraie. Ces conditions seront naturellement étendues dans la suite lorsque l'on passera à un réseau complet. Cependant, il est plus facile de visualiser pourquoi ces conditions sont requises dans le cas d'une seule ligne.

Toutes les illustrations qui vont suivre seront faites en fixant  $\bar{\theta} = \pi/2$ ,  $b = 5$ ,  $g = 2$  et  $V_1 = V_2 = 1$ .

La figure 4.6 montre différents cas de figure pour l'ensemble  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$ , selon les valeurs de  $\underline{P}_i$  et  $\bar{P}_i$ . Dans les cas (a) et (b), les ensembles  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P)$  et  $\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P)$  sont tous les deux égaux à  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$  et (4.39) est vérifiée. Par contre, ce n'est pas le cas sur l'exemple (c), comme on peut le voir plus en détails sur le zoom de la figure 4.7.

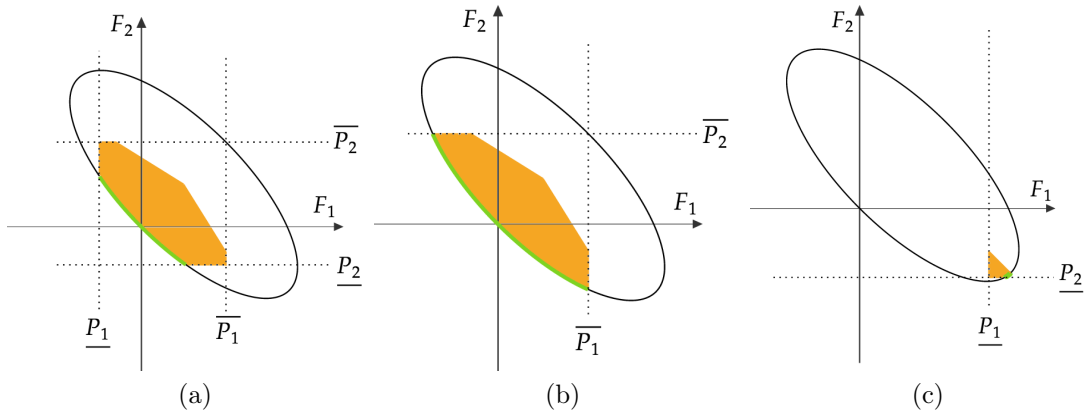


FIGURE 4.6 – Quelques cas possibles pour l'ensemble  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$  ; la surface orange correspond à  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P$  ; la courbe verte correspond à  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$

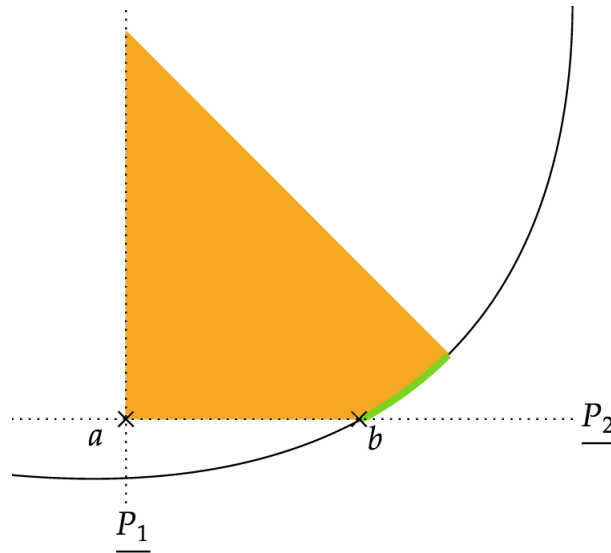


FIGURE 4.7 – Zoom de la figure 4.6 (c) ; on a  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P) = \{a\}$  et  $\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P) = \{b\}$

On peut facilement voir que ces cas problématiques n'apparaissent que quand tous les points de  $\mathcal{F}$  ne sont pas Pareto-optimaux et que les  $\underline{P}_i$  sont suffisamment grands. Par conséquent, il y a deux hypothèses possibles qui permettent d'assurer que (4.39) est vérifiée :

- Supposer que tous les points de  $\mathcal{F}$  sont Pareto-optimaux dans  $\mathcal{F}$  (voir par exemple [64]), ce que l'on fera dans la partie 6. D'après le corollaire 4.6, il suffit pour cela d'imposer  $\bar{\theta} \leq \alpha$ . Remarquons que dans ce cas, l'égalité (4.39) n'est pas nécessairement vérifiée, mais si elle ne l'est pas, cela implique que l'ensemble des contraintes admissibles  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$  est vide, comme le montre la figure 4.8. Cette alternative est suffisante pour l'application à notre problème d'optimisation. Cette hypothèse a été utilisée

dans [55, 64]. Dans ces articles, les auteurs expliquent que cette hypothèse est en pratique toujours vérifiée dans les réseaux de distributions.

- Supposer que  $\underline{P}_1 = \underline{P}_2 = -\infty$ . Cette hypothèse a déjà été faite dans la littérature (voir par exemple [92]) et sera utilisée dans la partie 7. Physiquement, cela signifie que l'on peut injecter une quantité infinie de puissance dans chaque noeud. Cette hypothèse n'est pas très réaliste et limite le champ d'application.

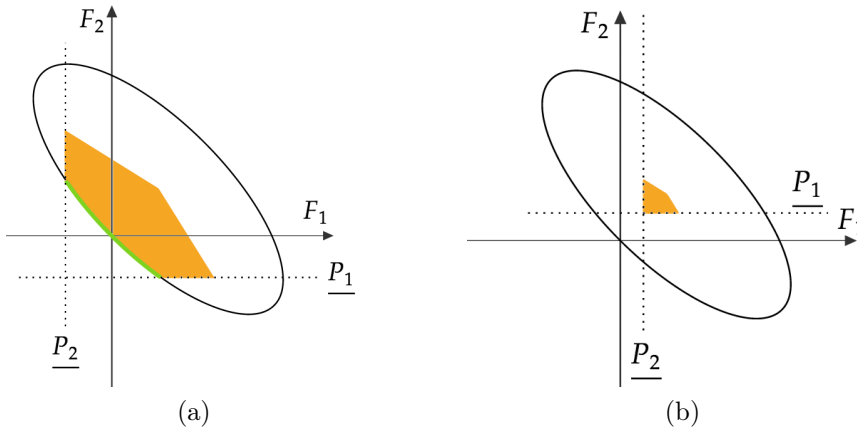


FIGURE 4.8 – (a) : la relation  $\mathcal{O}(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_P)$  est satisfaite, (b) : l'ensemble  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_P$  est vide

Dans les parties suivantes, on va généraliser et démontrer la relation (4.39) dans le cas d'un réseau à  $m \geq 2$  noeuds.

## 5 Convexification du problème sur le réseau complet

Dans cette partie, on généralise à un réseau complet la convexification qui a été construite pour une seule ligne dans la partie précédente. Cela mène à une convexification de la formulation ensembliste ( $\text{OPF}_3$ ) du problème d'optimisation. On montre ensuite que ce problème d'optimisation convexifié est équivalent au problème sous forme matricielle ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ).

On suppose dans un premier temps que les amplitudes des tensions sont fixées. On considère donc un vecteur  $V \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\underline{V} \leq V \leq \overline{V}$ .

On commence par reproduire pour chaque arête non-orientée  $\psi(\ell) = \{i, k\}$  la convexification de l'ensemble des flux de puissance admissibles  $\mathcal{F}_\ell(V)$ , défini par 4.23, qui a été construite dans la partie précédente. On introduit donc

$$\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V)) = \{\text{Re}(\text{diag}(W K_{ik})), W \in \mathcal{H}_{ik}(V)\}, \quad (4.40)$$



où l'ensemble  $\mathcal{H}_{ik}(V)$  est défini par

$$\mathcal{H}_{ik}(V) = \left\{ W \in \mathbb{H}_2^+, W_{1,1} = V_i^2, W_{2,2} = V_k^2, \right. \\ \left. -\tan(\bar{\theta}_{ik}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) \leq \operatorname{Im}(W_{1,2}) \leq \tan(\bar{\theta}_{ik}) \operatorname{Re}(W_{1,2}) \right\},$$

et la matrice  $K^{ik}$  est donnée par

$$K^{ik} = \begin{pmatrix} g_{ik} + jb_{ik} & -g_{ik} - jb_{ik} \\ -g_{ik} - jb_{ik} & g_{ik} + jb_{ik} \end{pmatrix}.$$

D'après les relations (4.26) et (4.27), il est alors naturel de définir la convexification des ensembles  $\mathcal{F}(V)$  et  $\mathcal{P}_\theta(V)$  par

$$\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}(V)) = \prod_{\ell=1}^{m-1} \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V)) \quad (4.41)$$

et

$$\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) = A \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}(V)). \quad (4.42)$$

On prend maintenant en compte la contrainte sur les amplitudes des tensions. De la même façon que l'on a défini les ensembles  $\tilde{\mathcal{F}}_\ell$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_\theta$  par les relations (4.28), (4.29) et (4.30), on définit leur convexification respective par

$$\overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{F}}_\ell) = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V)), \quad (4.43)$$

$$\overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{F}}) = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}(V)), \quad (4.44)$$

$$\overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)). \quad (4.45)$$

Les ensembles  $\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}(V))$  et  $\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V))$  sont convexes comme produit d'ensembles convexes et image par une application linéaire d'un ensemble convexe. Par contre, l'union d'ensembles convexes n'est en général pas convexe. Dans le lemme qui suit, on va montrer que dans notre cas, l'ensemble  $\overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$  est bien convexe.

**Lemme 5.1.** *L'ensemble  $\overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$  défini par (4.45) est convexe.*

*Démonstration.* Pour  $W \in \mathbb{H}_m$  et  $\{i, k\} \in E$ , avec  $i < k$ , on note  $W^{ik}$  la matrice  $2 \times 2$  extraite de  $W$  suivante :

$$W^{ik} = \begin{pmatrix} W_{i,i} & W_{i,k} \\ W_{k,i} & W_{k,k} \end{pmatrix}.$$

On introduit alors l'ensemble

$$\mathcal{H}(V) = \{W \in \mathbb{H}_m, \forall \{i, k\} \in E, i < k, W^{ik} \in \mathcal{H}_{ik}(V)\}.$$

D'autre part, soit  $\zeta_{ik} : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\zeta_{ik}(W^{ik}) = \text{Re}(\text{diag}(W^{ik}Y^{ik}))$ . D'après (4.40), on a  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V)) = \zeta_{ik}(\mathcal{H}_{ik}(V))$ .

On introduit ensuite l'application linéaire  $\zeta : \mathbb{H}_m \rightarrow \mathbb{R}^{2(m-1)}$  dont les composantes  $2\ell - 1$  et  $2\ell$  sont définies par  $(\zeta(W))_{|(2\ell-1, 2\ell)} = \zeta_{ik}(W^{ik})$ , pour tout  $\psi(\ell) = \{i, k\}$ , avec  $i < k$ .

Par construction, on a  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}(V)) = \zeta(\mathcal{H}(V))$ . D'après (4.42) et (4.45), on a alors

$$\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) = \bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} A\zeta(\mathcal{H}(V)) = A\zeta\left(\bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \mathcal{H}(V)\right).$$

Or, on a

$$\bigcup_{\underline{V} \leq V \leq \bar{V}} \mathcal{H}(V) = \left\{ W \in \mathbb{H}_m, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \underline{V}_i^2 \leq W_{ii} \leq \bar{V}_i^2, \forall \{i, k\} \in E, i < k, \right. \\ \left. W_{i,k} \in \mathbb{H}_2^+, \tan(\underline{\theta}_{ik}) \text{Re}(W_{i,k}) \leq \text{Im}(W_{i,k}) \leq \tan(\bar{\theta}_{ik}) \text{Re}(W_{i,k}) \right\}.$$

C'est donc un sous-ensemble de l'ensemble convexe  $\mathbb{H}_m$  des matrices hermitiennes, qui est défini par des contraintes linéaires et des contraintes convexe. Par conséquent, cet ensemble est convexe et comme  $A$  et  $\zeta$  sont linéaires, l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$  est convexe.  $\square$

Remarquons enfin que l'ensemble admissible pour la contrainte de puissance  $\mathcal{P}_P$ , défini par (4.22), est déjà convexe et n'a donc pas besoin d'être convexifié.

Toutes ces définitions nous amènent à considérer le problème d'optimisation suivant, qui est la convexification du problème (OPF<sub>3</sub>).

$$\begin{aligned} \min_{P \in \mathbb{R}^m} J(P) \\ \text{s.c. } P \in \overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P \end{aligned} \quad (\overline{\text{OPF}}_3)$$

Dans la partie (3), nous avons déjà obtenu le problème d'optimisation ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) comme une convexification du problème (OPF<sub>2</sub>). D'autre part, nous avons montré que les problèmes (OPF<sub>2</sub>) et (OPF<sub>3</sub>) sont tous les deux équivalents au problème physique (OPF<sub>1</sub>). Il sera important pour la suite de prouver que les problèmes ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) et ( $\overline{\text{OPF}}_3$ ) sont également équivalents, ce qui n'est pas évident *a priori*.

**Proposition 5.2.** *Les problèmes ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) et ( $\overline{\text{OPF}}_3$ ) sont équivalents au sens suivant :*

- Si  $P$  est solution du problème ( $\overline{\text{OPF}}_3$ ), il existe  $V \in \mathbb{R}^m$ , avec  $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ , et pour toute arête  $\{i, k\} \in E$ , il existe  $\alpha_{ik} \in [0, V_i V_k]$  et  $\theta_{ik} \in [-\bar{\theta}_{ik}, \bar{\theta}_{ik}]$  tels que l'on ait

$$P_i = \sum_{k \sim i} (V_i^2 g_{ik} + \alpha_{ik} b_{ik} \sin(\theta_{ik}) - \alpha_{ik} g_{ik} \cos(\theta_{ik})).$$

La matrice  $W$  définie par

$$\begin{cases} W_{i,i} = V_i^2, & \forall i \in S, \\ W_{i,k} = \alpha_{ik} e^{j\theta_{ik}}, & \forall (i,k) \in \mathcal{E}, \end{cases} \quad (4.46)$$

et dont tous les autres coefficients sont nuls, est alors solution du problème  $(\overline{\text{OPF2}})$ .

De plus, si  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta$ , alors la matrice  $W$  est de rang 1.

- Si  $W$  est solution du problème  $(\overline{\text{OPF2}})$ , alors en définissant

$$P_i = \text{Tr}(B^i W), \quad (4.47)$$

où la matrice  $B^i$  est définie par (4.17), le vecteur  $P$  est solution du problème  $(\overline{\text{OPF3}})$ .

De plus, si la matrice  $W$  est de rang 1, alors  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta$ . Dans ce cas, il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et on a  $P = P(|v|, \arg(v))$ .

*Démonstration.*

- On commence par vérifier que si  $P$  vérifie les contraintes du problème  $(\overline{\text{OPF3}})$ , c'est-à-dire si  $P \in \overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ , alors la matrice  $W$  donnée par (4.46) est bien définie et vérifie les contraintes de  $(\overline{\text{OPF2}})$ .

Les définitions (4.45) de  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$  et (4.42) de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V))$  assurent l'existence de  $V \in \mathbb{R}^m$ , avec  $\underline{V} \leq V \leq \overline{V}$ , et de  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}(V))$ , tels que  $P = AF$ .

Pour chaque arête non-orientée  $\psi(\ell) = \{i, k\} \in E$ , avec  $i < k$ , on a donc  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V))$ .

D'après le corollaire 4.4, il existe donc  $\theta_{ik} \in [-\bar{\theta}_{ik}, \bar{\theta}_{ik}]$  et  $\alpha_{ik} \in [0, V_i V_k]$  tels que

$$\begin{cases} F_{ik} = g_{ik} V_i^2 + b_{ik} \alpha_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \alpha_{ik} \cos(\theta_{ik}), \\ F_{ki} = g_{ik} V_k^2 - b_{ik} \alpha_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \alpha_{ik} \cos(\theta_{ik}). \end{cases}$$

On voit immédiatement que la matrice  $W$ , définie par (4.46), est hermitienne et vérifie  $\underline{V} \leq \sqrt{W_{i,i}} \leq \overline{V}$ . De plus, la condition  $\alpha_{ik} \in [0, V_i V_k]$  implique que  $W$  est semi-définie positive.

D'autre part, le lemme 3.2 assure que  $\text{Tr}(B^i W) = P_i$  et comme  $P \in \mathcal{P}_P$ , on a  $\underline{P}_i \leq \text{tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i$ .

Le lemme 3.3 nous donne aussi  $\text{Tr}(B^{ik} W) + \text{Tr}(B^{ki} W) = F_{ik} + F_{ki}$ . Or la contrainte thermique  $-\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}$  est équivalente à  $F_{ik} + F_{ki} \leq \overline{F}_\ell$ . On en déduit que  $\text{Tr}(B^{ik} W) + \text{Tr}(B^{ki} W) \leq \overline{F}_\ell$ .

Enfin, si  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta$ , pour toute ligne  $\psi(\ell) = \{i, k\} \in E$ , on a  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \mathcal{F}_\ell(V)$  est par définition de  $\mathcal{F}_\ell(V)$ , on a  $\alpha_{ik} = V_i V_k$ . En définissant le vecteur  $v = (V_1 e^{j\theta_1}, \dots, V_m e^{j\theta_m})^T$ , on observe que  $W = vv^*$ , donc  $W$  est de rang 1.

- On vérifie maintenant que si  $W$  vérifie les contraintes du problème  $(\overline{\text{OPF2}})$ , alors le vecteur  $P$  défini par (4.47) est dans  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ . La contrainte  $\underline{P}_i \leq \text{Tr}(B^i W) \leq \overline{P}_i$  implique immédiatement que  $P \in \mathcal{P}_P$ .

D'autre part, le lemme 3.3 assure que

$$P_i = \sum_{k \sim i} (g_{ik} W_{i,i} + b_{ik} \operatorname{Im}(W_{i,k}) - g_{ik} \operatorname{Re}(W_{i,k})).$$

En posant  $F_{ik} = g_{ik} W_{i,i} + b_{ik} \operatorname{Im}(W_{i,k}) - g_{ik} \operatorname{Re}(W_{i,k})$  et en introduisant  $V_i = \sqrt{W_{i,i}}$ ,  $\alpha_{ik} = |W_{i,k}|$  et  $\theta_{ik} = \arg(W_{i,k})$ , on obtient

$$P_i = \sum_{k \sim i} F_{ik},$$

avec

$$F_{ik} = g_{ik} V_i^2 + b_{ik} \alpha_{ik} \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} \alpha_{ik} \cos(\theta_{ik}).$$

Puisque la matrice  $W$  est semi-définie positive, le déterminant de sa matrice extraite en ne prenant que les lignes et colonnes d'indices  $i$  et  $k$  doit être positif, ce qui implique  $0 \leq \alpha_{ik} \leq V_i V_k$ . D'après le lemme 3.2, la contrainte thermique du problème ( $\text{OPF}_2$ ) peut se reformuler en  $F_{ik} + F_{ki} \leq \bar{F}_\ell$ , ce qui est équivalent à  $-\bar{\theta}_{ik} \leq \theta_{ik} \leq \bar{\theta}_{ik}$ . Le corollaire 4.4 assure alors que  $(F_{ik}, F_{ki})^T \in \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{F}_\ell(V))$ , donc  $P \in \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V))$ . La contrainte  $\underline{V}_i \leq \sqrt{W_{i,i}} \leq \bar{V}_i$  assure que  $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ . On en déduit que  $P \in \overline{\operatorname{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$ .

Enfin, si  $W$  est de rang 1, il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$ . On a alors

$$\alpha_{ik} = |W_{i,k}| = |v_i| |v_k| = \sqrt{W_{i,i}} \sqrt{W_{k,k}} = V_i V_k.$$

Par conséquent, on a  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \mathcal{F}_\ell(V)$ , donc  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_\theta$ . D'autre part, on a

$$P_i = \sum_{k \sim i} (g_{ik} V_i^2 + b_{ik} |v_i| |v_k| \sin(\theta_{ik}) - g_{ik} |v_i| |v_k| \cos(\theta_{ik})),$$

donc  $P = P(|v|, \arg(v))$ .

- Les fonctions objectif des deux problèmes d'optimisation sont compatibles. En effet, on a

$$\hat{J}(W) = J(\operatorname{Tr}(B^1 W), \dots, \operatorname{Tr}(B^m W)) = J(P).$$

□

Pour terminer cette partie, on montre que dans le cas où les amplitudes des tensions sont fixées, et où il n'y a pas de contraintes de puissance, la proposition 4.39 se généralise facilement pour un réseau complet. On précise que ces hypothèses très restrictives rendent ce résultat inutilisable en pratique. Nous ne l'utiliserons d'ailleurs pas dans la suite du chapitre. Nous le présentons tout de même pour montrer qu'un résultat de ce type peut être obtenu très facilement dans ce cadre. La prise en compte des contraintes de puissance est des amplitudes des tensions variables rendront les preuves des résultats similaires beaucoup plus complexes dans les parties suivantes.

**Proposition 5.3.** *Soit  $V \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ . On a*

$$\mathcal{O}(\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V))) = \mathcal{O}(\mathcal{P}_\theta(V)).$$

*Démonstration.* Puisque les amplitudes des tensions sont fixées, on omet les dépendances en  $V$  dans cette preuve.

D'après (4.42) et le lemme 2.15, on a

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)) = \mathcal{O}(A\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) \subset A\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})). \quad (4.48)$$

Or, la définition (4.41) et le lemme 2.16 assurent que

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \prod_{\ell=1}^{m-1} \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell)).$$

La proposition 4.5 et une nouvelle application du lemme 2.16 impliquent alors

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \prod_{\ell=1}^{m-1} \mathcal{O}(\mathcal{F}_\ell) = \mathcal{O}\left(\prod_{\ell=1}^{m-1} \mathcal{F}_\ell\right).$$

Par la définition (4.26), on obtient donc

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})) = \mathcal{O}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}. \quad (4.49)$$

En combinant (4.48) et (4.49), on trouve

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)) \subset A\mathcal{F} = \mathcal{P}_\theta.$$

D'autre part, on a  $\mathcal{P}_\theta \subset \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)$ , donc la proposition (2.13) assure que  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\theta) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta))$ .  $\square$

## 6 Étude du problème avec les amplitudes des tensions fixées

Dans toute cette partie, on suppose que les modules des tensions  $V_i$  sont fixés. Cela est équivalent à supposer que  $\underline{V}_i = \overline{V}_i$ , pour tout  $i \in S$ . On omettra donc toutes les dépendances en  $V$ . Avec cette hypothèse, l'ensemble des contraintes pour le problème (OPF<sub>3</sub>) est

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_\theta \cap \mathcal{P}_P,$$

où  $\mathcal{P}_\theta$  est défini par (4.25) et  $\mathcal{P}_P$  par (4.22).

On aura aussi besoin de l'hypothèse suivante.

**Hypothèse H<sub>1</sub>:** Pour toute arête  $\{i, k\} \in E$ , on a

$$\bar{\theta}_{ik} \leq \arctan\left(\frac{b_{ik}}{g_{ik}}\right).$$

Comme introduite dans la partie précédente, la convexification de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des contraintes pour le problème global sera alors  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ , où  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)$  est défini par (4.42). Dans cette partie, on va dans un premier temps établir que sous certaines conditions que l'on précisera, on a  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) = \mathcal{O}(\mathcal{P})$ . Il s'agit d'un résultat difficile à montrer qui nécessitera plusieurs résultats préliminaires. On en déduira ensuite un théorème qui assure que la convexification ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) est exacte dans ce cadre.

On commence par donner une caractérisation des vecteurs de l'ensemble  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$ .

**Lemme 6.1.** *On suppose que l'hypothèse  $H_1$  est vérifiée. Soit  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$  et  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  tel que  $P = AF$ .*

*Si un sommet  $i \in S$  vérifie  $P_i > \underline{P}_i$ , alors pour tout sommet  $k \in S$  tel que  $k \sim i$ , on a  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \mathcal{F}_\ell$ , avec  $\psi(\ell) = \{i, k\}$ , avec  $i < k$ .*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $P_i > \underline{P}_i$  et qu'il existe  $k \in S$  avec  $k \sim i$ , tel que  $(F_{ik}, F_{ki}) \notin \mathcal{F}_\ell$ . On va construire un vecteur  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$  tel que  $P^* \prec P$ . Cela contredira l'hypothèse que  $P$  est dans la frontière de Pareto de cet ensemble.

On a  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell) \setminus \mathcal{F}_\ell$ , donc d'après le lemme 4.7, il existe  $\delta > 0$  tel que  $(F_{ik} - \delta, F_{ki}) \in \mathcal{F}_\ell$  et pour tout  $\varepsilon \in [0, \delta]$ , on a  $(F_{ik} - \varepsilon, F_{ki}) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_\ell)$ .

Posons  $\varepsilon = \min(\delta, P_i - \underline{P}_i) > 0$ . Soit  $F^*$  défini par

$$F_{qr}^* = \begin{cases} F_{qr} & \text{si } (q, r) \neq (i, k), \\ F_{ik} - \varepsilon & \text{si } (q, r) = (i, k), \end{cases}$$

et  $P^* = AF^*$ . On a

$$P_i^* = \sum_{n \sim i} F_{in}^* = F_{ik} - \varepsilon + \sum_{\substack{n \sim i \\ n \neq k}} F_{in} = P_i - \varepsilon$$

et pour tout  $n \neq i$ , on a  $P_n^* = P_n$ . On en déduit que  $P^* \prec P$ .

Montrons maintenant que  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ . On a  $F^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$ , donc  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)$ . D'autre part, on a  $\underline{P}_i \leq P_i - \varepsilon = P_i^* < P_i \leq \bar{P}_i$ , donc  $P^* \in \mathcal{P}_P$ .

On a donc montré que  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ .  $\square$

Le lemme suivant permet de trouver une condition pour qu'un vecteur de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  soit dans  $\mathcal{F}$ . Ce résultat repose de manière cruciale sur la structure d'arbre du réseau.

**Lemme 6.2.** *On suppose que l'hypothèse  $H_1$  est vérifiée. Soit  $F^* \in \mathcal{F}$  et  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  tels que pour tout  $i \in S$ , on a*

$$\sum_{k \sim i} F_{ik} \leq \sum_{k \sim i} F_{ik}^*. \quad (4.50)$$

Alors, on a  $F_{ik} = F_{ik}^*$ , pour tout  $(i, k) \in \mathcal{E}$ .

*Démonstration.* Fixons arbitrairement une racine  $r$  de l'arbre  $\Sigma$ . Remarquons que pour un sommet  $i \in S \setminus \{r\}$ , de père  $k$ , la relation (4.50) se réécrit

$$F_{ik} - F_{ik}^* \leq \sum_{n \text{ fils de } i} (F_{in}^* - F_{in}). \quad (4.51)$$

On montre dans un premier temps par une induction montante, que pour tout  $i \in S \setminus \{r\}$ , de père  $k$ , on a  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ . Soit  $i \in S \setminus \{r\}$ , de père  $k$ .

- Si  $i$  est un sommet externe de  $\Sigma$ , alors (4.51) nous donne directement  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ .
- Si  $i$  est un sommet interne de  $\Sigma$  tel que pour tout fils  $n$  de  $i$ , on a  $F_{ni} \leq F_{ni}^*$ , alors le lemme 4.8 assure que  $F_{in} \geq F_{in}^*$ . La relation (4.51) implique donc que  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ .

La propriété est donc vraie pour tout sommet  $i \in S \setminus \{r\}$ . On montre maintenant par une induction descendante que pour tout sommet interne  $i \in S$ , on a  $F_{in} = F_{in}^*$  et  $F_{ni} = F_{ni}^*$ , pour tout fils  $n$  de  $i$ . Soit  $i \in S$  un sommet interne.

- Si  $i$  est la racine  $r$  de  $\Sigma$ , la relation (4.51) s'écrit

$$\sum_{n \text{ fils de } i} (F_{in}^* - F_{in}) \geq 0.$$

D'après ce qui précède, on sait que pour tout fils  $n$  de  $i$ , on a  $F_{ni} \leq F_{ni}^*$ , donc d'après le lemme 4.8, on a  $F_{in} \geq F_{in}^*$ . On en déduit que  $F_{in} = F_{in}^*$ , pour tout fils  $n$  de  $i$ . Le lemme 4.8 implique donc que  $F_{ni} \geq F_{ni}^*$ , donc  $F_{ni} = F_{ni}^*$ .

- Si  $i$  n'est pas la racine et que son père  $k$  vérifie  $F_{ki} = F_{ki}^*$ , alors d'après le lemme 4.8, on a  $F_{ik} \geq F_{ik}^*$ . D'après ce qui précède, pour tout fils  $n$  de  $i$ , on a  $F_{ni} \leq F_{ni}^*$ , donc d'après le lemme 4.8,  $F_{in} \geq F_{in}^*$ . La relation (4.51) s'écrit donc

$$0 \leq F_{ik} - F_{ik}^* \leq \sum_{n \text{ fils de } i} (F_{in}^* - F_{in}) \leq 0$$

On en déduit que  $F_{in} = F_{in}^*$ , pour tout fils  $n$  de  $i$ . Le lemme 4.8 assure que  $F_{ni} \geq F_{ni}^*$ , donc  $F_{ni} = F_{ni}^*$ .

Nous avons bien montré que pour tout  $(i, k) \in \mathcal{E}$ , on a  $F_{ik} = F_{ik}^*$ .  $\square$

On démontre maintenant que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{P}$  est sa convexification  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$  ont la même frontière de Pareto.

**Théorème 6.3.** *Supposons que l'hypothèse  $H_1$  est vérifiée. Si  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , alors on a*

$$\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P).$$

*Démonstration.* Si on a  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) \subset \mathcal{P}$ , alors la proposition 2.13 assure que  $\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$ . Il suffit donc de montrer la première inclusion.

Soit  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$  et  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F})$  tel que  $P = AF$ . Supposons par l'absurde que  $P \notin \mathcal{P}$ . La preuve va consister à construire un  $P' \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$  tel que  $P' \prec P$ , ce qui contredira cette hypothèse.

Comme  $P \notin \mathcal{P}_\theta$ , il existe une arête que l'on notera, quitte à renuméroter,  $\{1, 2\} = \psi(1) \in E$ , telle que  $(F_{12}, F_{21}) \notin \mathcal{F}_1$ . Remarquons que le lemme 6.1 assure que  $P_1 = \underline{P}_1$  et  $P_2 = \underline{P}_2$ .

En retirant l'arrête  $\{1, 2\}$  du graphe  $\Sigma$ , on obtient deux composantes connexes. On notera  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) l'ensemble des sommets de la composante connexe contenant 1 (respectivement 2).

Enfin, comme  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , il existe  $P^* \in \mathcal{P}$  et  $F^* \in \mathcal{F}$  tel que  $P^* = AF^*$ .

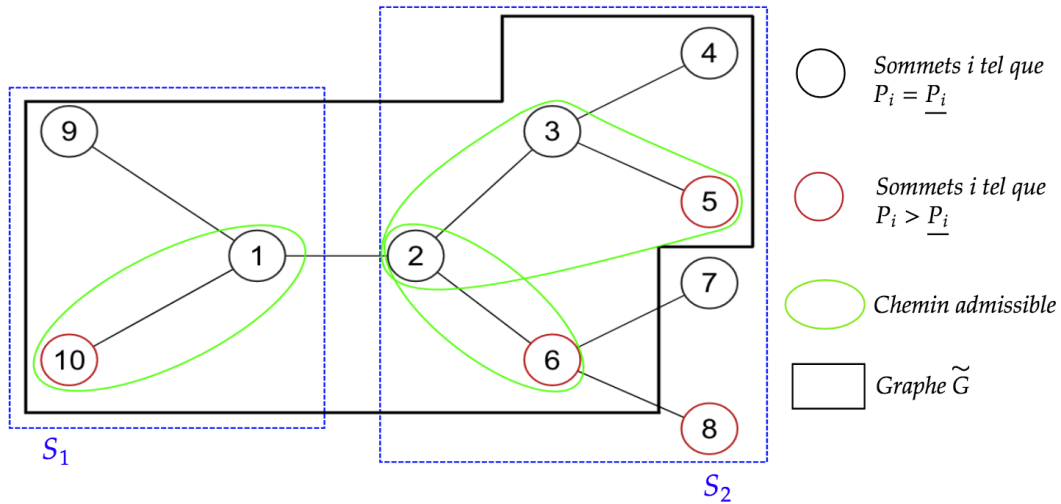


FIGURE 4.9 – Exemple de graphe  $\tilde{G}$  et de chemins admissibles

**1ère étape : il existe un sommet  $i \in S$  tel que  $P_i > \underline{P}_i$ .**

Supposons que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que tous les sommets  $i \in S$  vérifient  $P_i = \underline{P}_i$ . Comme  $\underline{P}_i \leq P_i^*$ , on en déduit que pour tout  $i \in S$ , on a

$$\sum_{k \sim i} F_{ik} \leq \sum_{k \sim i} F_{ik}^*.$$

Le lemme 6.2 assure alors que l'on a  $F_{ik} = F_{ik}^*$  pour toute arête orientée  $(i, k) \in \mathcal{E}$ . On a donc  $(F_{12}, F_{21}) = (F_{12}^*, F_{21}^*) \in \mathcal{F}_1$ , ce qui est impossible.

**2ème étape : détermination de la zone du graphe où l'on va modifier  $P$ .**

On appelle chemin admissible tout chemin de sommets  $q_1 \sim \dots \sim q_r$  tel que

- $q_1 \in \{1, 2\}$  ;
- $q_2 \notin \{1, 2\}$  ;
- $P_{q_r} > \underline{P}_{q_r}$  ;



- pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , on a  $P_i = \underline{P}_i$ .

On considère alors le sous-graphe  $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{S}, \widetilde{E})$  de  $\Sigma$ , connexe et maximal, tel que tout sommet  $i \in \widetilde{S}$  vérifiant  $P_i > \underline{P}_i$  appartient à un chemin admissible dans  $\widetilde{\Sigma}$ . Autrement dit, en parcourant le graphe à partir de 1 ou 2, dès que l'on rencontre un sommet tel que  $P_i > \underline{P}_i$ , on supprime tous ses descendants. Les chemins admissibles et la construction du graphe  $\widetilde{\Sigma}$  sont illustrés dans le cas d'un exemple simple sur la figure 4.9.

Remarquons que l'arbre  $\widetilde{\Sigma}$  admet deux types de feuilles :

- les feuilles  $i$  vérifiant  $P_i = \underline{P}_i$ , auquel cas il s'agit d'une feuille de l'arbre original  $\Sigma$  ;
- les feuilles  $i$  vérifiant  $P_i > \underline{P}_i$ , auquel cas, il ne s'agit pas nécessairement d'une feuille de l'arbre original  $\Sigma$  ; d'après la première étape et par maximalité de  $\widetilde{\Sigma}$ , il existe au moins une feuille de ce type dans  $\widetilde{\Sigma}$ .

Les sommets  $i \in \widetilde{\Sigma}$  qui ne sont pas des feuilles vérifient nécessairement  $P_i = \underline{P}_i$ .

On va maintenant montrer qu'il existe un chemin admissible  $q_1 \sim \dots \sim q_r$  dans  $\widetilde{\Sigma}$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, r-1$ , on a  $F_{q_i q_{i+1}} < F_{q_i q_{i+1}}^*$ . Supposons donc par l'absurde que pour tout chemin admissible dans  $\widetilde{\Sigma}$ , il existe  $s \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que  $F_{q_s q_{s+1}} \geq F_{q_s q_{s+1}}^*$ . On considère alors le sous-graphe  $\widehat{\Sigma} = (\widehat{S}, \widehat{E})$  de  $\widetilde{\Sigma}$  dans lequel on a enlevé tous les sommets au-delà de  $q_{s+1}$  dans les chemins admissibles.

Considérons une feuille  $i$  de  $\widehat{\Sigma}$ , dont l'unique voisin est noté  $k$ . On a deux possibilités :

- soit  $i$  correspond à un  $q_{s+1}$  décrit précédemment et vérifie donc  $F_{ki} \geq F_{ki}^*$  ;
- soit  $i$  est également une feuille de  $\widetilde{\Sigma}$  vérifiant  $P_i = \underline{P}_i$ . Il s'agit donc d'une feuille de l'arbre original  $\Sigma$ . Par conséquent, on a  $P_i \leq P_i^*$ , donc  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ . Le lemme 4.8 assure alors que l'on a  $F_{ki} \geq F_{ki}^*$ .

On considère maintenant le sommet 1 comme racine de  $\widehat{\Sigma}$ . Pour un sommet interne  $i \in \widehat{S} \cap S_2$ , de père  $k$ , on va montrer par induction montante que l'on a  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ .

- Si tous les fils de  $i$  sont des sommets externes de  $\widehat{\Sigma}$  : comme  $i$  est un sommet interne de  $\widehat{\Sigma}$  différent de la racine, ce n'est pas une feuille de  $\widehat{\Sigma}$ . Par conséquent, on a  $P_i = \underline{P}_i$ , donc

$$F_{ik} + \sum_{n \text{ fils de } i} F_{in} \leq F_{ik}^* + \sum_{n \text{ fils de } i} F_{in}^*,$$

d'où

$$F_{ik} - F_{ik}^* \leq \sum_{n \text{ fils de } i} (F_{in}^* - F_{in}).$$

Les fils  $n$  de  $i$ , qui sont des sommets externes par hypothèse, donc des feuilles de  $\widehat{\Sigma}$ , vérifient d'après ce qui précède  $F_{in} \geq F_{in}^*$ , donc on a  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ .

- Si tous les fils  $n$  de  $i$  vérifient  $F_{ni} \leq F_{ni}^*$ , alors le lemme 4.8 assure que  $F_{in} \geq F_{in}^*$  et on en déduit de la même façon que  $F_{ik} \leq F_{ik}^*$ .

Le résultat est donc vrai pour tout sommet de  $\widehat{S} \cap S_2$  et en particulier pour le sommet 2, donc  $F_{21} \leq F_{21}^*$ .

Le même résultat peut être obtenu en considérant le sommet 2 comme racine et l'ensemble  $\widehat{S} \cap S_1$ . On en déduit que  $F_{12} \leq F_{12}^*$ . Le lemme 4.8 assure alors que  $F_{21} \geq F_{21}^*$  et  $F_{12} \geq F_{12}^*$ , donc  $(F_{12}, F_{21}) = (F_{12}^*, F_{21}^*)$ , ce qui contredit le fait que  $(1,2) \notin \mathcal{F}_1$ .

Par conséquent, il existe un chemin admissible  $q_1 \sim \dots \sim q_r$  dans  $\widetilde{\Sigma}$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, r-1$ , on a  $F_{q_i q_{i+1}} < F_{q_i q_{i+1}}^*$  et donc  $F_{q_{i+1} q_i} > F_{q_{i+1} q_i}^*$  d'après le lemme 4.8. C'est sur les sommets de ce chemin admissible que l'on va modifier  $P$ .

### 3ème étape : Construction de $P'$ .

Quitte à permuter les numéros des sommets 1 et 2, on suppose que  $q_1 = 1$ . On définit alors

$$\begin{aligned} F'_{12} &= F_{12} - \delta, \\ F'_{21} &= F_{21}, \\ F'_{q_i q_{i+1}} &= \lambda_i F_{q_i q_{i+1}} + (1 - \lambda_i) F_{q_i q_{i+1}}^*, \quad \forall 1 \leq i \leq r-1, \\ F'_{q_{i+1} q_i} &= \lambda_i F_{q_{i+1} q_i} + (1 - \lambda_i) F_{q_{i+1} q_i}^*, \quad \forall 1 \leq i \leq r-1, \end{aligned}$$

où  $\delta > 0$  et les  $\lambda_i \in ]0, 1[$  seront fixés ensuite. Pour toute autre ligne  $\{i, k\}$  de  $E$ , on pose  $F'_{ik} = F_{ik}$  et  $F'_{ki} = F_{ki}$ .

On définit alors  $P' = AF'$  et on a

$$\begin{aligned} P'_1 - P_1 &= -\delta + (1 - \lambda_1) (F_{q_1 q_2}^* - F_{q_1 q_2}), \\ P'_{q_r} - P_{q_r} &= (1 - \lambda_{r-1}) (F_{q_r q_{r-1}}^* - F_{q_r q_{r-1}}), \end{aligned}$$

et pour  $2 \leq i \leq r-1$ ,

$$P'_i - P_i = (1 - \lambda_{i-1}) (F_{q_i q_{i-1}}^* - F_{q_i q_{i-1}}) + (1 - \lambda_i) (F_{q_i q_{i+1}}^* - F_{q_i q_{i+1}}).$$

On souhaite avoir  $P' \prec P$  et  $P' \in \mathcal{P}_P$ , donc  $\underline{P}_i \leq P'_i \leq P_i$  pour tout  $i \in S$ . Les sommets  $q_i$ , pour  $1 \leq i \leq r-1$ , vérifient  $P_i = \underline{P}_i$ , donc on doit nécessairement avoir  $P'_i = P_i$ . Cela implique que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \frac{\delta}{F_{q_1 q_2}^* - F_{q_1 q_2}}, \\ \lambda_i &= 1 - (1 - \lambda_{i-1}) \frac{F_{q_i q_{i-1}} - F_{q_i q_{i-1}}^*}{F_{q_i q_{i+1}}^* - F_{q_i q_{i+1}}}, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq r-1. \end{aligned}$$

Remarquons que pour  $\delta$  suffisamment petit, les  $\lambda_i$  sont bien dans  $]0, 1[$  et aussi proches de 1 que l'on veut.

Comme  $F_{q_r q_{r-1}}^* - F_{q_r q_{r-1}} < 0$ , on en déduit que  $P'_{q_r} < P_{q_r}$ . Par construction, tous les autres sommets  $i \in \Sigma \setminus \{q_r\}$  vérifient  $P'_i = P_i$ , donc on a bien  $P' \prec P$ .

**4ème étape : Vérification que  $P' \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ .**

Remarquons d'abord que par convexité de  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_{\varphi(q_i, q_{i+1})})$ , on a  $(F'_{q_i q_{i+1}}, F'_{q_{i+1} q_i}) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_{\varphi(q_i, q_{i+1})})$  pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ . D'autre part, puisque  $(F_{12}, F_{21}) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_1) \setminus \mathcal{F}_1$ , le lemme 6 assure que  $(F'_{12}, F'_{21})$  est dans  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{F}_1)$  au moins pour  $\delta$  assez petit. Donc pour  $\delta$  assez petit, on a  $P' \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta)$ . Pour montrer que  $P' \in \mathcal{P}_P$ , il suffit de montrer que  $P'_{q_r} > \underline{P}_{q_r}$ . Or on a

$$P'_{q_r} - \underline{P}_{q_r} = P_{q_r} - \underline{P}_{q_r} + (1 - \lambda_{r-1})(F_{q_r q_{r-1}}^* - F_{q_r q_{r-1}})$$

On a vu qu'en prenant  $\delta$  assez petit, on peut rendre  $\lambda_{r-1}$  aussi proche de 1 que l'on veut. Comme  $P_{q_r} > \underline{P}_{q_r}$ , on a  $P'_{q_r} > \underline{P}_{q_r}$  pour  $\delta$  assez petit, donc  $P' \in \mathcal{P}_P$ .

On a ainsi montré que pour  $\delta$  suffisamment petit, on a  $P' \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ . Comme  $P' \prec P$ , l'hypothèse initiale est contredite.  $\square$

On conclut maintenant cette partie avec un résultat permettant de relier les solutions du problème convexifié ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) aux solutions du problème physique ( $\text{OPF}_1$ ). Ce résultat a des applications numériques directes, puisqu'il permet en pratique de résoudre le problème convexe ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) pour obtenir soit une solution du problème ( $\text{OPF}_1$ ), soit la non-existence de solutions à ce problème.

**Théorème 6.4.** *On suppose que l'hypothèse  $H_1$  est vérifiée et que  $\underline{V}_i = \overline{V}_i$ , pour tout  $i \in S$ . Alors on distingue trois cas :*

1. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang 1, il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et  $(|v|, \arg(v))$  est solution du problème ( $\text{OPF}_1$ ).*
2. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang au moins égale à 2, alors le problème ( $\text{OPF}_1$ ) n'est pas réalisable.*
3. *Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) n'est pas réalisable, alors le problème ( $\text{OPF}_1$ ) n'est pas réalisable.*

*Démonstration.*

1. Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang 1, alors il existe  $v \in \mathbb{C}^m$  tel que  $W = vv^*$  et la proposition 5.2 assure que  $P = P(|v|, \arg(v))$  est solution de ( $\overline{\text{OPF}}_3$ ) et que  $P \in \mathcal{P}_\theta$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  et d'après le théorème 6.3, on a

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) = \mathcal{O}(\mathcal{P}).$$

Comme la fonction objectif  $J$  est strictement croissante, la proposition 2.11 assure que  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$ , donc  $P \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$ . On en déduit que  $P$  est solution de ( $\text{OPF}_3$ ) et d'après la proposition 3.6,  $(|v|, \arg(v))$  est solution de ( $\text{OPF}_1$ ).

2. Si le problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) admet une solution  $W$  de rang supérieure ou égal à 2, supposons que le problème ( $\text{OPF}_1$ ) est réalisable. D'après la proposition 3.6, le problème ( $\text{OPF}_3$ ) est également réalisable, donc  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Le théorème 6.3 assure alors que

$$\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) = \mathcal{O}(\mathcal{P}).$$

Autrement dit, toute solution de  $(\overline{\text{OPF}}_3)$  est dans  $\mathcal{P}_\theta$ . La proposition 5.2 assure alors que toute solution de  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est de rang 1, ce qui contredit l'hypothèse.

3. Si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  n'est pas réalisable, supposons que le problème  $(\text{OPF}_1)$  est réalisable. D'après la proposition 3.6, le problème  $(\text{OPF}_3)$  est également réalisable. On a donc  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Comme  $\mathcal{P} \subset \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ , on a  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_P \neq \emptyset$ , donc le problème  $(\overline{\text{OPF}}_3)$  est réalisable. La proposition 5.2 implique alors que le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est réalisable, ce qui est une contradiction.

□

## 7 Étude du problème avec les amplitudes de tension variables

Dans cette partie, les amplitudes des tensions ne sont plus fixées, ce qui revient à considérer les contraintes

$$\underline{V}_i \leq V_i \leq \overline{V}_i, \quad \forall i \in S,$$

où les vecteurs  $\underline{V}$  et  $\overline{V}$  vérifient  $0 < \underline{V} \leq \overline{V}$ . L'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  nécessaire dans la partie 6, sera remplacée par l'hypothèse suivante.

**Hypothèse  $\mathbf{H}_2$ :**  $\underline{P}_i = -\infty$ , pour tout  $i \in S$ .

L'ensemble des contraintes pour le problème  $(\text{OPF}_3)$  s'écrit

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_\theta \cap \mathcal{P}_P,$$

où  $\tilde{\mathcal{P}}_\theta$  est défini par (4.30) et  $\mathcal{P}_P$  est défini par (4.22). La convexification de l'ensemble  $\tilde{\mathcal{P}}$  est alors

$$\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P,$$

où  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta)$  est défini par (4.45).

On commence par montrer que pour  $V$  fixé, on a un résultat similaire au théorème 6.3, mais en remplaçant l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  de la partie précédente par l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$ . Le résultat est beaucoup plus simple à obtenir dans ce cas. On notera

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}_\theta(V) \cap \mathcal{P}_P.$$

**Lemme 7.1.** *Supposons que l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$  est vérifiée. Alors pour tout  $V \in [\underline{V}, \overline{V}]$ , on a*

$$\mathcal{O}(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P) \subset \mathcal{P}(V)$  et la proposition 2.13 permettra alors de conclure.

Soit  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P)$  et  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}(V))$  tel que  $P = AF$ . Supposons par l'absurde que  $P \notin \mathcal{P}(V)$ . On va construire  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P$  tel que  $P^* \prec P$ . Cela contredira l'hypothèse que  $P$  est dans la frontière de Pareto de cet ensemble.

Puisque  $P \notin \mathcal{P}_\theta(V)$ , on a  $F \notin \mathcal{F}(V)$  et donc il existe une arête  $\psi(\ell) = \{i, k\} \in E$  telle que  $(F_{ik}, F_{ki}) \notin F_\ell(V)$ . Par conséquent, on a  $(F_{ik}, F_{ki}) \in \overline{\text{conv}}(F_\ell(V)) \setminus F_\ell(V)$ . Donc d'après le lemme 4.7, il existe  $\delta > 0$  tel que  $(F_{ik} - \delta, F_{ki}) \in F_\ell(V)$ .

Soit  $F^*$  défini par

$$F_{qr}^* = \begin{cases} F_{qr} & \text{si } (q, r) \neq (i, k), \\ F_{ik} - \delta & \text{si } (q, r) = (i, k), \end{cases}$$

et  $P^* = AF^*$ . On a

$$P_i^* = \sum_{n \sim i} F_{ik}^* = F_{ik} - \delta + \sum_{\substack{n \sim i \\ n \neq k}} F_{in} = P_i - \delta,$$

et pour tout  $n \neq i$ , on a  $P_n^* = P_n$ , donc  $P^* \prec P$ .

On montre maintenant que  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P$ . D'abord, puisque  $F \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{F}(V))$ , on a  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V))$ . Ensuite, on a  $P_i - \delta = P_i^* \leq P_i \leq \bar{P}_i$ . Remarquons que par l'hypothèse  $H_2$ , la contrainte  $\underline{P}_i \leq P_i^*$  est automatiquement vérifiée. Par conséquent, on a  $P^* \in P_P$  et donc  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P$ .  $\square$

On montre maintenant que l'on peut étendre le résultat de ce lemme au cas des amplitudes variables, autrement dit, que les ensembles  $\tilde{\mathcal{P}}$  et  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$  ont la même frontière de Pareto.

**Théorème 7.2.** *Supposons que l'hypothèse  $H_2$  est vérifiée. Alors on a*

$$\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) \subset \tilde{\mathcal{P}}$  et on pourra conclure avec le lemme 2.13.

Soit  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$ . Il existe  $V$  tel que  $P \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P$ . Si  $P \notin \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P)$ , alors il existe  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P$  tel que  $P^* \prec P$ . Or  $P^* \in \overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$  et cela contredit le fait que  $P$  est dans la frontière de Pareto de l'ensemble  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P$ . Par conséquent, on a  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\mathcal{P}_\theta(V)) \cap \mathcal{P}_P)$ .

D'après le lemme 7.1, on a  $P \in \mathcal{O}(\mathcal{P}(V)) \subset \mathcal{P}(V) \subset \tilde{\mathcal{P}}$ . On a donc  $\mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P) \subset \tilde{\mathcal{P}}$ .  $\square$

Comme dans la partie 6, on conclut en montrant que la convexification ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) est exacte.

**Théorème 7.3.** *On suppose que l'hypothèse  $H_2$  est vérifiée. On a l'alternative suivante :*

1. *si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est réalisable, alors toute solution  $W$  de  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est de rang 1 et s'écrit  $W = vv^*$ , avec  $v \in \mathbb{C}^m$ . Dans ce cas,  $(|v|, \arg(v))$  est solution du problème  $(\text{OPF}_1)$ ;*
2. *si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  n'est pas réalisable, alors le problème  $(\text{OPF}_1)$  n'est pas réalisable non plus.*

*Démonstration.*

1. Si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est réalisable, soit  $W$  une solution de  $(\overline{\text{OPF}}_2)$ . D'après la proposition 5.2, le vecteur  $P$ , défini par  $P_i = \text{Tr}(B^i W)$ , est solution de  $(\overline{\text{OPF}}_3)$ . Comme la fonction objectif  $J$  est strictement croissante, la proposition 2.11 assure que  $P \in \mathcal{O}(\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P)$ . D'après le théorème 7.2, on a donc  $P \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{P}})$ . Par conséquent, la matrice  $W$  est de rang 1, donc s'écrit  $W = vv^*$ , avec  $v \in \mathbb{C}^m$ . D'autre part,  $P$  est solution du problème  $(\text{OPF}_3)$  et d'après la proposition 3.6,  $(|v|, \arg(v))$  est solution du problème  $(\text{OPF}_1)$ .
2. Si le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  n'est pas réalisable, d'après la proposition 5.2, le problème  $(\overline{\text{OPF}}_3)$  ne l'est pas non plus, donc  $\overline{\text{conv}}(\tilde{\mathcal{P}}_\theta) \cap \mathcal{P}_P = \emptyset$ . Par conséquent, on a  $\tilde{\mathcal{P}} = \emptyset$  et le problème  $(\text{OPF}_3)$  n'est pas réalisable. La proposition 3.6 assure alors que le problème  $\text{OPF}_1$  n'est pas réalisable non plus.

□

## 8 Exemples numériques

On présente ici quelques exemples numériques pour illustrer les résultats théoriques démontrés précédemment, en particulier les théorèmes 6.4 et 7.3.

### 8.1 Calcul numérique du rang d'une matrice

Comme on l'a vu, les théorèmes 6.4 et 7.3 dépendent du rang d'une éventuelle solution du problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$ . On a donc besoin d'une méthode permettant de calculer numériquement le rang d'une matrice. Nous allons utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD) des matrices. On commence par rappeler brièvement cette méthode.

Considérons une matrice  $W \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice unitaire  $U \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ , une matrice diagonale  $S \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls, et une matrice unitaire  $V \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  telles que  $W = USV^*$ . Cette écriture est appelée décomposition en valeurs singulières de la matrice  $W$ . Les coefficients diagonaux de la matrice  $S$  sont appelés valeurs singulières de  $W$ .

Par convention, on suppose que les valeurs singulières sont rangées dans l'ordre décroissant dans  $S$ . On note ces valeurs

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p,$$

avec  $p = \min(m, n)$  (on peut toujours les réordonner quitte à permuter les colonnes de  $U$  et de  $V$ ). Avec cette convention, la matrice  $S$  est unique.

Le rang d'une matrice  $W$  est égal au nombre de ses valeurs singulières non nulles. Lorsque l'on calcule une approximation d'une matrice  $W$ , les erreurs numériques peuvent engendrer des valeurs singulières petites, mais non nulles, et donc fausser le calcul du rang.

Pour s'affranchir de ce problème, on se donne une précision  $\varepsilon > 0$ , qui peut être choisie en fonction de l'algorithme numérique qui a permis d'obtenir la matrice  $W$  et de ses paramètres. On définit alors le rang effectif  $r$  de la matrice  $W$  comme le nombre de ses valeurs singulières qui sont supérieures à  $\varepsilon$ . On considère ainsi que les valeurs singulières de  $W$  inférieures à  $\varepsilon$  proviennent des erreurs numériques.

Soit  $\widetilde{S}$  la matrice égale à  $S$ , mais dont toutes les coefficients inférieurs à  $\varepsilon$  ont été remplacés par 0. On peut alors considérer que la matrice  $\widetilde{W} = U\widetilde{S}V^*$ , qui est proche de la matrice  $W$ , a un rang qui correspond au rang « réel » de  $W$  (c'est-à-dire sans les erreurs numériques).

Si la matrice  $\widetilde{W}$  est de rang 1, alors en notant respectivement  $u_1$  et  $v_1$  la première colonne de  $U$  et de  $V$ , on a

$$\widetilde{W} = s_1 u_1 v_1^*.$$

Si la matrice  $\widetilde{W}$  est en plus hermitienne, alors les vecteurs  $u_1$  et  $v_1$  sont nécessairement égaux et en définissant  $v = \sqrt{s_1} u_1$ , on a

$$\widetilde{W} = vv^*.$$

Autrement dit, la SVD permet non seulement de calculer le rang de la matrice  $W$  en s'affranchissant des erreurs numériques, mais dans le cas où ce rang est égal à 1, elle fournit également directement la décomposition permettant de passer d'une solution du problème ( $\overline{\text{OPF}}_2$ ) à une solution du problème ( $\text{OPF}_1$ ) dans les théorèmes 6.4 et 7.3.

## 8.2 Modèle jouet

On considère le réseau de distribution à 5 nœuds dont la structure est donnée dans la figure 4.10. Ce modèle, ainsi que les caractéristiques des lignes et des nœuds proviennent de [107], dont on a modifié légèrement quelques données. Ces données sont présentées dans les tableaux 4.2 et 4.3.

Ne disposant pas de données sur les contraintes thermiques, on a choisi les

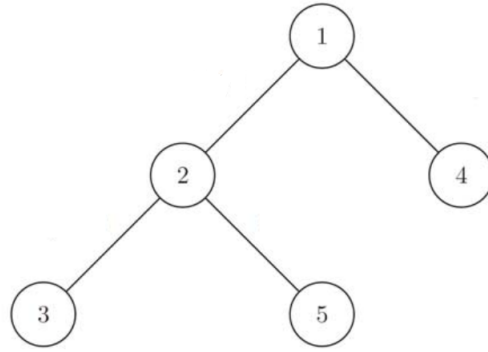


FIGURE 4.10 – Réseau à 5 nœuds [107]

Nœud	$\underline{P}_i$	$\overline{P}_i$	$\underline{Q}_i$	$\overline{Q}_i$	$\widehat{V}_i$
1	-5.4692	5.2844	-5.7604	5.5798	1.2247
2	-0.0988	-0.0648	0	0.5298	1.1509
3	-0.5828	-0.0423	0	0.6405	1.1101
4	-0.5155	-0.0334	0	0.2091	0.9762
5	-0.4329	-0.0226	0	0.3798	1.1393

TABLEAU 4.2 – Données sur les nœuds du réseau à 5 nœuds

$\overline{F}_\ell$  de sorte que l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  soit vérifiée. Pour chaque ligne  $\{i, k\}$ , on calcule l'angle  $\alpha_{ik}$  défini par 4.33 à partir des données d'admittance  $y_{ik}$ . On définit ensuite la contrainte thermique par  $\overline{F}_\ell = F(\alpha_{ik})$ . Remarquons que l'on a alors  $\overline{\theta}_{ik} = \alpha_{ik}$ .

Ligne	$y_{ik}$	$\alpha_{ik}$	$\overline{F}_\ell$
$\{1, 2\}$	$0.88 - j0.74$	0.6992	0.5869
$\{1, 4\}$	$0.14 - j0.01$	0.0713	0.0095
$\{2, 3\}$	$0.89 - j0.20$	0.2210	0.0568
$\{2, 5\}$	$0.30 - j0.66$	1.1442	0.4615

TABLEAU 4.3 – Données sur les lignes de transmission du réseau à 5 nœuds

Les calculs pour le problème  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  sont effectués par la méthode de points intérieurs, avec la fonction `SEDUMI` qui utilise la toolbox `Yalmip` sur Matlab<sup>®</sup>, voir [69]. Pour résoudre le problème  $(\text{OPF}_1)$ , on a utilisé la fonction `FMINCON` qui fait appel à un algorithme de type SQP-BFGS. Pour tous les tests numériques, on a utilisé la fonction objectif  $J$  définie par (4.16), avec  $\kappa = 0$ . Cela revient à minimiser seulement les pertes en ligne dans le réseau. Des résultats similaires peuvent être obtenus en prenant  $\kappa > 0$ .



Dans les expériences numériques qui vont suivre, on va faire varier la valeur de certains paramètres physiques, comme  $\underline{P}_i$ ,  $\overline{P}_i$  ou  $\underline{Q}_i$ , pour un noeud donné, de façon à ce que la contrainte associée soit de plus en plus restrictive. On comparera alors les valeurs optimales calculées pour les deux problèmes  $(\text{OPF}_1)$  et  $(\overline{\text{OPF}}_2)$ . Sauf mention du contraire, les valeurs des paramètres  $\underline{P}_i$ ,  $\overline{P}_i$ ,  $\underline{Q}_i$  et  $\overline{Q}_i$  seront fixés par les valeurs données dans le tableau 4.2.

### 8.3 Amplitudes des tensions fixées

Dans toute cette partie, les amplitudes des tensions sont fixées aux valeurs données dans le tableau 4.2, c'est-à-dire  $\overline{V}_i = \underline{V}_i = \widehat{V}_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq 5$ .

#### Vérification du théorème 6.4

On commence par tester numériquement la validité du théorème 6.4. Pour cela, on ne prend pas en compte la contrainte sur les puissances réactives  $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$ . D'autre part, on fixe  $\overline{P}_2 = 3$  et on fait varier la valeur de  $\underline{P}_2$  de 1.2 à 2.1, avec un pas de 0.1. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.4.

$\underline{P}_2$	$(\text{OPF}_1)$	$(\overline{\text{OPF}}_2)$	
	valeur optimale	valeur optimale	rang de $W$
1.2	0.4524	0.4524	1
1.3	0.5314	0.5314	1
1.4	0.6170	0.6170	1
1.5	0.7087	0.7087	1
1.6	non réalisable	0.8064	2
1.7	non réalisable	0.9064	2
1.8	non réalisable	1.0064	2
1.9	non réalisable	1.1064	2
2	non réalisable	non réalisable	—
2.1	non réalisable	non réalisable	—

TABLEAU 4.4 – Comparaison des valeurs optimales des problèmes  $(\text{OPF}_1)$  et  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  pour différentes valeurs de  $\underline{P}_2$ , avec amplitudes des tensions fixées et sans les contraintes de puissance réactive

On remarque que jusqu'à la valeur  $\underline{P}_2 = 1.5$ , la matrice  $W$  solution de  $(\overline{\text{OPF}}_2)$  est de rang 1 et les deux problèmes ont les mêmes valeurs optimales, aux erreurs numériques près. De  $\underline{P}_2 = 1.6$  à  $\underline{P}_2 = 1.9$ , la matrice  $W$  est de rang 2, et dans ce cas l'algorithme utilisé pour résoudre le problème  $(\text{OPF}_1)$  ne trouve

pas de solution réalisable. Enfin, à partir de  $P_2 = 2$ , les algorithmes respectifs des deux problèmes ne trouvent pas de solution réalisable. Ces résultats sont cohérents avec les trois cas de figure du théorème 6.4.

### Extension du théorème 6.4 : considération de la contrainte $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$

On cherche maintenant à savoir si le théorème 6.4 est toujours vérifié numériquement si l'on rajoute les contraintes  $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$ . On va cette fois faire varier la valeur de  $\underline{Q}_1$  de  $-0.08$  à  $0.2$ , avec un pas de  $0.04$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 4.5.

$\underline{Q}_1$	(OPF <sub>1</sub> )	(OPF <sub>2</sub> )	
	valeur optimale	valeur optimale	rang de $W$
-0.08	0.0192	0.0192	1
-0.04	0.0192	0.0192	1
0	non réalisable	0.0192	1
0.04	non réalisable	0.2530	1
0.08	non réalisable	0.2425	3
0.12	non réalisable	0.4722	3
0.16	non réalisable	non réalisable	—
0.2	non réalisable	non réalisable	—

TABLEAU 4.5 – Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) pour différentes valeurs de  $\underline{Q}_1$ , avec amplitudes des tensions fixées et avec les contraintes de puissance réactive

Pour  $\underline{Q}_1 = -0.08$  et  $\underline{Q}_1 = -0.04$ , la solution  $W$  du problème (OPF<sub>2</sub>) est de rang 1 et les deux problèmes ont la même valeur optimale. À partir de  $\underline{Q}_1 = 0.08$ , le problème (OPF<sub>2</sub>) admet soit une solution de rang supérieur ou égal à 2, soit n'est pas réalisable et l'algorithme utilisé pour résoudre (OPF<sub>1</sub>) ne trouve pas de solution. Ces résultats indiquent un comportement similaire au théorème 6.4.

Par contre, pour  $\underline{Q}_1 = 0$  et  $\underline{Q}_1 = 0.04$ , le problème (OPF<sub>2</sub>) admet une solution de rang 1 et l'algorithme de résolution du problème (OPF<sub>1</sub>) échoue à trouver une solution. Il y a deux raisons possibles à cela :

- Il pourrait s'agir d'une difficulté purement algorithmique. Il est en effet possible que le problème (OPF<sub>1</sub>) admette une solution dans ce cas, mais que la non-convexité du problème empêche l'algorithme de la trouver.
- Il est également possible que le problème (OPF<sub>1</sub>) ne soit pas réalisable dans ce cas. Cela signifierait que le théorème 6.4 n'est plus vérifié si l'on rajoute la contrainte sur la puissance réactive. Une hypothèse supplémentaire pourrait alors être nécessaire afin d'obtenir un résultat similaire. À

titre d'exemple, dans [107] une étude a été réalisée en prenant en compte les contraintes sur la puissance réactive, mais les amplitudes des tensions étaient toutes supposées égales à 1 et les  $\underline{Q}_i$  étaient supposés suffisamment petits.

## 8.4 Amplitudes des tensions variables

Dans toute cette partie, on suppose que  $\underline{V}_i = \widehat{V}_i - 0.05$  et  $\overline{V}_i = \widehat{V}_i + 0.05$ , pour tout  $1 \leq i \leq 5$ .

### Vérification du théorème 7.3

Comme on l'a fait dans la partie précédente, on commence par illustrer le théorème 7.3. Pour rentrer dans ce cadre, on ne prend ni en compte les contraintes  $\underline{P}_i \leq P_i$ , ni les contraintes  $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$ . On fait varier la valeur de  $\overline{P}_1$  de  $-0.1$  à  $0.4$ , avec un pas de  $0.1$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6.

$\overline{P}_1$	(OPF <sub>1</sub> )	(OPF <sub>2</sub> )	
	valeur optimale	valeur optimale	rang de $W$
-0.1	non réalisable	non réalisable	—
0	non réalisable	non réalisable	—
0.1	non réalisable	non réalisable	—
0.2	0.0174	0.0174	1
0.3	0.0174	0.0174	1
0.4	0.0174	0.0174	1

TABLEAU 4.6 – Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) pour différentes valeurs de  $\overline{P}_1$  avec amplitudes des tensions variables

On remarque que jusqu'à la valeur  $\overline{P}_1 = 0.1$ , les algorithmes respectifs des deux problèmes ne trouvent pas de solution réalisable. De  $\overline{P}_1 = 0.2$  à  $\overline{P}_1 = 0.6$ , la matrice  $W$  solution de (OPF<sub>2</sub>) est de rang 1 et les deux problèmes ont les mêmes valeurs optimales. Ces résultats sont cohérents avec le théorème 7.3.

### Extension du théorème 7.3 : cas où $\underline{P}_i > -\infty$

On cherche ici à vérifier si le théorème 7.3 est encore vrai numériquement sans l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$ , c'est-à-dire en prenant en compte les contraintes  $\underline{P}_i \leq P_i$ . Les contraintes  $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$  ne sont toujours pas considérées. On fixe  $\overline{P}_2 = 3$

et on fait varier la valeur de  $\underline{P}_2$  de 1.4 à 2.3, avec un pas de 0.1. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.7.

$\underline{P}_2$	(OPF <sub>1</sub> )	(OPF <sub>2</sub> )	
	valeur optimale	valeur optimale	rang de $W$
1.4	0.4547	0.4547	1
1.5	0.5347	0.5347	1
1.6	0.6213	0.6213	1
1.7	0.7141	0.7141	1
1.8	non réalisable	0.8129	2
1.9	non réalisable	0.9129	2
2	non réalisable	1.0129	2
2.1	non réalisable	1.1129	2
2.2	non réalisable	non réalisable	—
2.3	non réalisable	non réalisable	—

TABLEAU 4.7 – Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) pour différentes valeurs de  $\underline{P}_1$ , avec amplitudes des tensions variables et sans contraintes de puissance réactives

On remarque que jusqu'à la valeur  $\underline{P}_2 = 1.7$ , la matrice  $W$  solution de (OPF<sub>2</sub>) est de rang 1 et les deux problèmes ont les mêmes valeurs optimales, aux erreurs numériques près. De  $\underline{P}_2 = 1.8$  à  $\underline{P}_2 = 2.1$ , la matrice  $W$  est de rang 2, et dans ce cas l'algorithme utilisé pour résoudre le problème (OPF<sub>1</sub>) ne trouve pas de solution réalisable. Enfin, à partir de  $\underline{P}_2 = 2.2$ , les algorithmes respectifs des deux problèmes ne trouvent pas de solution réalisable. Ces résultats semblent indiquer que le théorème 6.4 pourrait être étendu au cas des amplitudes des tensions variables.

### Extension du théorème 7.3 : considération de la contrainte $\underline{Q}_i \leq Q_i \leq \overline{Q}_i$

Le but est ici de déterminer si le théorème 7.3 est vérifié numériquement si on prend en compte les contraintes sur les puissances réactives. On conserve également la contrainte  $\underline{P}_i \leq P_i$ . On fixe  $\underline{P}_1 = 0.69$  et on fait varier la valeur de  $\underline{Q}_2$  de 0.14 à 0.28, avec un pas de 0.02. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8 et sont similaires à ceux obtenus dans le cas où les amplitudes de tension sont fixées.

$\underline{Q}_2$	(OPF <sub>1</sub> )	(OPF <sub>2</sub> )	
	valeur optimale	valeur optimale	rang de $W$
0.14	0.2445	0.2779	1
0.16	non réalisable	0.2830	1
0.18	non réalisable	0.2888	1
0.20	non réalisable	0.2952	1
0.22	non réalisable	0.3026	2
0.24	non réalisable	0.3193	2
0.26	non réalisable	non réalisable	–
0.28	non réalisable	non réalisable	–

TABLEAU 4.8 – Comparaison des valeurs optimales des problèmes (OPF<sub>1</sub>) et (OPF<sub>2</sub>) pour différentes valeurs de  $\underline{Q}_2$ , avec amplitudes des tensions fixées et avec les contraintes de puissance réactive

## 9 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, on a présenté un problème d'optimisation issu de la modélisation microscopique des réseaux de distribution. Ce modèle permet de prendre en considération les contraintes et les pertes en lignes de transmission, ainsi que les contraintes sur les nœuds du réseau. La fonction objectif considérée permet de minimiser à la fois les pertes de puissance active en ligne de transmission et le coût de production (ou d'importation) de l'électricité, tout en choisissant le poids que l'on donne à chacun de ces deux termes.

Les équations de flux de puissance mènent à une contrainte non-convexe et par conséquent, le problème d'optimisation qui en résulte est également non-convexe. Pour contourner cette difficulté, on a commencé par reformuler le problème initial en un nouveau problème d'optimisation, dans lequel la variable de décision est une matrice hermitienne semi-définie positive. La contrainte non-convexe sur les flux de puissance se transforme naturellement en une contrainte sur le rang de la matrice. Afin de convexifier le problème, on a considéré sa relaxation SDP, obtenue en supprimant la contrainte sur le rang.

On a ensuite démontré deux théorèmes : le premier dans le cas où les amplitudes des tensions sont fixées et le deuxième dans le cas où les amplitudes des tensions sont variables. Ces deux théorèmes nous fournissent des hypothèses sous lesquelles la relaxation SDP du problème initial est exacte ; en d'autres termes, on peut résoudre le problème initial exactement en résolvant sa relaxation convexe.

Enfin, on a donné quelques exemples numériques pour illustrer les différents points des deux théorèmes principaux démontrés dans ce chapitre.

Plusieurs extensions de ce travail sont possibles. La première catégorie d'extensions consiste à essayer d'affaiblir les hypothèses sous lesquelles les théorèmes principaux ont été démontrés. Plus précisément, on peut s'intéresser aux points suivants :

- Est-il possible de considérer des puissances actives minimales finies dans le cas où les amplitudes des tensions sont variables, c'est-à-dire  $\underline{P}_i > -\infty$ ? Les résultats numériques semblent indiquer un comportement similaire au théorème 6.4 dans ce cas. Nous n'avons cependant pas de piste solide pour prouver un tel théorème pour l'instant.
- Peut-on prendre en compte des contraintes sur les puissances réactives, c'est-à-dire  $\underline{Q}_i > -\infty$  et  $\overline{Q}_i < +\infty$ ? Les résultats numériques semblent indiquer qu'il peut être nécessaire de rajouter une hypothèse. Dans le cas des amplitudes des tensions fixes, l'ensemble admissible pour la contrainte sur la puissance réactive est une simple transformation affine de l'ensemble admissible pour la contrainte sur la puissance active  $\mathcal{F}_\ell$ . Nous n'avons cependant pas réussi à inclure cette contrainte en toute généralité dans le théorème 6.3. On peut par contre facilement prouver un théorème équivalent en supposant que  $\underline{Q}_i = \underline{P}_i = -\infty$  (avec seulement  $\overline{Q}_i < +\infty$  et  $\overline{P}_i < +\infty$ ).

La situation est plus compliquée si les amplitudes des tensions sont variables, car la transformation affine mentionnée précédemment dépend des  $V_i$ .

- Peut-on s'affranchir de la structure d'arbre du réseau? Une réponse affirmative serait très intéressante, car les méthodes présentées pourraient alors s'appliquer à tous les types de réseaux électriques et pas seulement aux réseaux de distribution. Cela nécessiterait probablement des techniques différentes, car la structure d'arbre est utilisée de manière cruciale dans notre travail, notamment pour le théorème 6.3.

Une autre extension intéressante et probablement beaucoup plus abordable, serait de prendre en compte le stockage de l'énergie. Il s'agit de considérer en plus des nœuds de consommation et des nœuds de production, une troisième catégorie de nœuds : les nœuds de stockage. Cela impose de prendre en compte la dimension temporelle du problème, ce qui complexifie sa résolution. Comme dans le chapitre 3, cela rajouterait de nouvelles variables de décision, à savoir la charge/décharge de chaque unité de stockage.

L'inclusion d'unités de stockages dans ces modèles permettrait à la fois d'étudier leur impact sur le coût de production (ou d'importation) d'énergie et sur les pertes en ligne. Cela permettrait également de répondre à la question du placement géographique optimal des unités de stockage, ce que les modèles macroscopiques du chapitre 3 ne permettent pas de faire.

Un dernier axe d'approfondissement de ce travail auquel il serait intéressant de s'intéresser consiste à essayer de réduire le temps de calcul pour les problèmes avec un grand nombre de nœuds. Pour cela, on partitionne le réseau en un certain nombre de sous-réseaux connexes. Deux approches sont alors possibles :

- Comme dans les techniques de décomposition de domaine, on résout directement un problème d'optimisation sur chaque sous-réseau. La difficulté de ce type de méthode consiste à identifier les informations que les sous-réseaux vont devoir échanger (angles, amplitudes des tensions, voir [6]) pour assurer que la concaténation des solutions des différents problèmes d'optimisation sera proche de la solution globale. Par contre, les problèmes d'optimisation à résoudre sont plus petits et donc plus rapides à résoudre. D'autre part, ils peuvent facilement être résolus en parallèle.
- Une autre approche consiste à remplacer chaque sous-réseau par un unique nœud. On obtient ainsi un modèle dit mésoscopique, à une échelle intermédiaire entre les modèles macroscopiques présentés dans le chapitre 3 et les modèles microscopiques présentés dans ce chapitre. Dans ce type de modèle, la difficulté est de définir les caractéristiques des nœuds mésoscopiques à partir des nœuds du sous-réseau qui le forment.

# Bibliographie

- [1] Abdi, H., Beigvand, S.D., La Scala, M. : A review of optimal power flow studies applied to smart grids and microgrids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **71**, 742–766 (2017)
- [2] Alam, M., Muttaqi, K., Sutanto, D. : Mitigation of rooftop solar pv impacts and evening peak support by managing available capacity of distributed energy storage systems. *IEEE transactions on power systems* **28**(4), 3874–3884 (2013)
- [3] Alizadeh, F., Haeberly, J.P.A., Overton, M.L. : A new primal-dual interior-point method for semidefinite programming. In : *Proceedings of the Fifth SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, pp. 113–117. SIAM : Philadelphia, PA (1994)
- [4] Allaire, G. : *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique (2005)
- [5] Alvarez-Hérault, M.C. : *Architectures des réseaux de distribution du futur en présence de production décentralisée*. Ph.D. thesis (2009)
- [6] Amini, M.H., Bahrami, S., Kamyab, F., Mishra, S., Jaddivada, R., Boroojeni, K., Weng, P., Xu, Y. : Decomposition methods for distributed optimal power flow : panorama and case studies of the dc model. In : *Classical and recent aspects of power system optimization*, pp. 137–155. Elsevier (2018)
- [7] Andreani, R., Haeser, G., Martínez, J.M. : On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization. *Optimization* **60**(5), 627–641 (2011)
- [8] Armijo, L. : Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of mathematics* **16**(1), 1–3 (1966)
- [9] Baghaee, H.R., Mirsalim, M., Gharehpetian, G.B., Talebi, H.A. : Unbalanced harmonic power sharing and voltage compensation of microgrids using radial basis function neural network-based harmonic power-flow calculations for distributed and decentralised control structures. *IET Generation, Transmission & Distribution* **12**(7), 1518–1530 (2017)
- [10] Bai, X., Wei, H., Fujisawa, K., Wang, Y. : Semidefinite programming for optimal power flow problems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **30**(6-7), 383–392 (2008)
- [11] Baptista, D., Carvalho, J.P., Morgado-Dias, F. : Comparing different solutions for forecasting the energy production of a wind farm. *Neural Computing and Applications* pp. 1–9 (2018)



- [12] Bertsekas, D.P. : Nonlinear programming. athena scientific. Belmont, MA (1999)
- [13] Birgin, E.G., Martínez, J.M., Raydan, M. : Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets. *SIAM Journal on Optimization* **10**(4), 1196–1211 (2000)
- [14] Bonnans, J.F., Gilbert, J.C., Lemaréchal, C., Sagastizábal, C.A. : Numerical optimization : theoretical and practical aspects. Springer Science & Business Media (2006)
- [15] Bonnans, J.F., Gilbert, J.C., Lemaréchal, C., Sagastizábal, C.A. : Numerical optimization : theoretical and practical aspects. Springer Science & Business Media (2006)
- [16] Brown, P.N., Saad, Y. : Hybrid krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **11**(3), 450–481 (1990)
- [17] Bubeck, S. : Convex optimization : Algorithms and complexity. arXiv preprint arXiv :1405.4980 (2014)
- [18] Burer, S., Monteiro, R.D. : A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization. *Mathematical Programming* **95**(2), 329–357 (2003)
- [19] Byrd, R.H., Nocedal, J. : A tool for the analysis of quasi-newton methods with application to unconstrained minimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **26**(3), 727–739 (1989)
- [20] Byrd, R.H., Nocedal, J., Schnabel, R.B. : Representations of quasi-newton matrices and their use in limited memory methods. *Mathematical Programming* **63**(1-3), 129–156 (1994)
- [21] Calamai, P.H., Moré, J.J. : Projected gradient methods for linearly constrained problems. *Mathematical programming* **39**(1), 93–116 (1987)
- [22] Canard, J.F. : Impact de la génération d'énergie dispersée dans les réseaux de distribution. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG (2000)
- [23] Castillo, A., Gayme, D.F. : Evaluating the effects of real power losses in optimal power flow-based storage integration. *IEEE Transactions on control of network systems* **5**(3), 1132–1145 (2017)
- [24] Conn, A.R., Gould, N.I., Toint, P.L. : Trust region methods, vol. 1. Siam (2000)
- [25] Conti, S., Raiti, S., Tina, G., Vagliasindi, U. : Distributed generation in lv distribution networks : voltage and thermal constraints. In : 2003 IEEE Bologna Power Tech Conference Proceedings, vol. 2, pp. 6–pp. IEEE (2003)
- [26] Cruz, W.L., Raydan, M. : Nonmonotone spectral methods for large-scale nonlinear systems. *Optimization Methods and Software* **18**(5), 583–599 (2003)

- [27] Curtis, F.E., Mitchell, T., Overton, M.L. : A bfgs-sqp method for nonsmooth, nonconvex, constrained optimization and its evaluation using relative minimization profiles. *Optimization Methods and Software* **32**(1), 148–181 (2017)
- [28] Dantzig, G. : *Linear programming and extensions*. Princeton university press (2016)
- [29] Dembo, R.S., Eisenstat, S.C., Steihaug, T. : Inexact newton methods. *SIAM Journal on Numerical analysis* **19**(2), 400–408 (1982)
- [30] Dikin, I. : Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. In : *Doklady Akademii Nauk*, vol. 174, pp. 747–748. Russian Academy of Sciences (1967)
- [31] Dileep, G. : A survey on smart grid technologies and applications. *Renewable Energy* **146**, 2589–2625 (2020)
- [32] Dobson, I., Greene, S., Rajaraman, R., DeMarco, C.L., Alvarado, F.L., Glavic, M., Zhang, J., Zimmerman, R. : *Electric power transfer capability : concepts, applications, sensitivity and uncertainty*. PSERC Publication (01-34) (2001)
- [33] Dostál, Z. : *Optimal quadratic programming algorithms : with applications to variational inequalities*, vol. 23. Springer Science & Business Media (2009)
- [34] Eisenstat, S.C., Walker, H.F. : Choosing the forcing terms in an inexact newton method. *SIAM Journal on Scientific Computing* **17**(1), 16–32 (1996)
- [35] El-Bakry, A., Tapia, R.A., Tsuchiya, T., Zhang, Y. : On the formulation and theory of the newton interior-point method for nonlinear programming. *Journal of Optimization theory and Applications* **89**(3), 507–541 (1996)
- [36] Elattar, E.E., ElSayed, S.K. : Modified jaya algorithm for optimal power flow incorporating renewable energy sources considering the cost, emission, power loss and voltage profile improvement. *Energy* **178**, 598–609 (2019)
- [37] Fletcher, R. : *Practical Methods of Optimization : Volume 1 Unconstrained Optimization*. J. WILEY & SONS (1980)
- [38] Gay, D.M. : Some convergence properties of broyden’s method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **16**(4), 623–630 (1979)
- [39] Gayme, D., Topcu, U. : Optimal power flow with distributed energy storage dynamics. In : *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pp. 1536–1542. IEEE (2011)
- [40] Gergaud, O. : *Modélisation énergétique et optimisation économique d’un système de production éolien et photovoltaïque couplé au réseau et associé à un accumulateur*. Ph.D. thesis (2002)
- [41] Ghalekhondabi, I., Ardjmand, E., Weckman, G.R., Young, W.A. : An overview of energy demand forecasting methods published in 2005–2015. *Energy Systems* **8**(2), 411–447 (2017)

- [42] Ghiani, E., Vertuccio, C., Pilo, F. : Optimal sizing and management of a smart microgrid for prevailing self-consumption. In : 2015 IEEE Eindhoven PowerTech, pp. 1–6. IEEE (2015)
- [43] Gilbert, J.C., Lemaréchal, C. : Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical programming* **45**(1-3), 407–435 (1989)
- [44] Goldfarb, D., Reid, J.K. : A practicable steepest-edge simplex algorithm. *Mathematical Programming* **12**(1), 361–371 (1977)
- [45] Griewank, A., Toint, P. : On the unconstrained optimization of partially separable functions. In : *Nonlinear Optimization 1981*, pp. 301–312. Academic press (1982)
- [46] Griewank, A., Toint, P.L. : Partitioned variable metric updates for large structured optimization problems. *Numerische Mathematik* **39**(1), 119–137 (1982)
- [47] Grillo, S., Marinelli, M., Massucco, S., Silvestro, F. : Optimal management strategy of a battery-based storage system to improve renewable energy integration in distribution networks. *IEEE Transactions on Smart Grid* **3**(2), 950–958 (2012)
- [48] Hajjaj, C., Merrouni, A.A., Bouaichi, A., Benhmida, M., Sahnoun, S., Ghennioui, A., Zitouni, H. : Evaluation, comparison and experimental validation of different pv power prediction models under semi-arid climate. *Energy Conversion and Management* **173**, 476–488 (2018)
- [49] Harris, P.M. : Pivot selection methods of the devex lp code. *Mathematical programming* **5**(1), 1–28 (1973)
- [50] Hashmi, N., Khan, S.A. : Power energy management for a grid-connected pv system using rule-base fuzzy logic. In : 2015 3rd International Conference on Artificial Intelligence, Modelling and Simulation (AIMS), pp. 31–36. IEEE (2015)
- [51] Hayes, B., Hernando-Gil, I., Collin, A., Harrison, G., Djokić, S. : Optimal power flow for maximizing network benefits from demand-side management. *IEEE transactions on power systems* **29**(4), 1739–1747 (2014)
- [52] Helmberg, C. : Semidefinite programming. *European Journal of Operational Research* **137**(3), 461–482 (2002)
- [53] Helmberg, C., Rendl, F., Vanderbei, R.J., Wolkowicz, H. : An interior-point method for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization* **6**(2), 342–361 (1996)
- [54] Holtkamp, N., et al. : An overview of the iter project. *Fusion Engineering and Design* **82**(5-14), 427–434 (2007)
- [55] Huang, S., Filonenko, K., Veje, C.T. : A review of the convexification methods for ac optimal power flow. In : 2019 IEEE Electrical Power and Energy Conference (EPEC), pp. 1–6. IEEE (2019)
- [56] Iqbal, M., Azam, M., Naeem, M., Khwaja, A., Anpalagan, A. : Optimization classification, algorithms and tools for renewable energy : A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **39**, 640–654 (2014)

- [57] Karanki, S.B., Xu, D., Venkatesh, B., Singh, B.N. : Optimal location of battery energy storage systems in power distribution network for integrating renewable energy sources. In : 2013 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, pp. 4553–4558. IEEE (2013)
- [58] Kelley, C.T. : Iterative methods for linear and nonlinear equations, vol. 16. Siam (1995)
- [59] Keppo, I., Strubegger, M. : Short term decisions for long term problems—the effect of foresight on model based energy systems analysis. *Energy* **35**(5), 2033–2042 (2010)
- [60] Kersting, W.H. : Radial distribution test feeders. *IEEE Transactions on Power Systems* **6**(3), 975–985 (1991)
- [61] Kojima, M., Shindoh, S., Hara, S. : Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices. *SIAM Journal on Optimization* **7**(1), 86–125 (1997)
- [62] Larson, J., Menickelly, M., Wild, S.M. : Derivative-free optimization methods. arXiv preprint arXiv :1904.11585 (2019)
- [63] Lavaei, J., Tse, D., Zhang, B. : Geometry of power flows in tree networks. In : 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, pp. 1–8. IEEE (2012)
- [64] Lavaei, J., Tse, D., Zhang, B. : Geometry of power flows and optimization in distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems* **29**(2), 572–583 (2013)
- [65] Lemaréchal, C. : A view of line-searches. In : Optimization and Optimal Control, pp. 59–78. Springer (1981)
- [66] Levitin, E.S., Polyak, B.T. : Constrained minimization methods. *USSR Computational mathematics and mathematical physics* **6**(5), 1–50 (1966)
- [67] Lewis, A.S., Overton, M.L. : Nonsmooth optimization via quasi-newton methods. *Mathematical Programming* **141**(1-2), 135–163 (2013)
- [68] Li, H., Cui, H., Li, C. : Distribution network power loss analysis considering uncertainties in distributed generations. *Sustainability* **11**(5), 1311 (2019)
- [69] Löfberg, J. : Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In : In Proceedings of the CACSD Conference. Taipei, Taiwan (2004)
- [70] Mäkelä, M. : Survey of bundle methods for nonsmooth optimization. *Optimization methods and software* **17**(1), 1–29 (2002)
- [71] Mateo, C., Reneses, J., Rodriguez-Calvo, A., Frías, P., Sánchez, Á. : Cost–benefit analysis of battery storage in medium-voltage distribution networks. *IET Generation, Transmission & Distribution* **10**(3), 815–821 (2016)
- [72] Matthies, H., Strang, G. : The solution of nonlinear finite element equations. *International journal for numerical methods in engineering* **14**(11), 1613–1626 (1979)

- [73] Medina, P., Bizuayehu, A.W., Catalão, J.P., Rodrigues, E.M., Contreras, J. : Electrical energy storage systems : technologies' state-of-the-art, techno-economic benefits and applications analysis. In : 2014 47th Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 2295–2304. IEEE (2014)
- [74] Moghimi, M., Leskarac, D., Bennett, C., Lu, J., Stegen, S. : Rule-based energy management system in an experimental microgrid with the presence of time of use tariffs. In : MATEC Web of Conferences, vol. 70, p. 10011. EDP Sciences (2016)
- [75] Monteiro, R.D. : Primal–dual path-following algorithms for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization* **7**(3), 663–678 (1997)
- [76] Monticelli, A. : State estimation in electric power systems : a generalized approach. Springer Science & Business Media (2012)
- [77] Nash, S.G., Nocedal, J. : A numerical study of the limited memory bfgs method and the truncated-newton method for large scale optimization. *SIAM Journal on Optimization* **1**(3), 358–372 (1991)
- [78] Nesterov, Y.E., Todd, M.J. : Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations research* **22**(1), 1–42 (1997)
- [79] Nishihara, R., Lessard, L., Recht, B., Packard, A., Jordan, M. : A general analysis of the convergence of admm. In : International Conference on Machine Learning, pp. 343–352. PMLR (2015)
- [80] Nocedal, J. : Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation* **35**(151), 773–782 (1980)
- [81] Nocedal, J., Wright, S. : Numerical optimization springer-verlag. New York (1999)
- [82] Nocedal, J., Wright, S. : Numerical optimization. Springer Science & Business Media (2006)
- [83] Noghin, V.D. : Reduction of the Pareto Set : An axiomatic approach, vol. 126. Springer (2017)
- [84] Patel, M., Girgis, A.A. : Review of available transmission capability (atc) calculation methods. In : 2009 Power Systems Conference, pp. 1–9. IEEE (2009)
- [85] Poncelet, K., Delarue, E., Six, D., D'haeseleer, W. : Myopic optimization models for simulation of investment decisions in the electric power sector. In : 2016 13th International Conference on the European Energy Market (EEM), pp. 1–9. IEEE (2016)
- [86] Proriol, J. : Rapport d'information n° 3307 déposé par la commission des affaires économiques de l'assemblée nationale. Tech. rep., assemblee-nationale.fr (5 avril 2011)
- [87] Rancilio, G., Lucas, A., Kotsakis, E., Fulli, G., Merlo, M., Delfanti, M., Masera, M. : Modeling a large-scale battery energy storage system for power grid application analysis. *Energies* **12**(17), 3312 (2019)
- [88] Saad, Y. : Iterative methods for sparse linear systems, vol. 82. siam (2003)

- [89] Said, A.H. : Intégration du stockage dans les méthodes de planification des réseaux électriques basse tension. Ph.D. thesis (2018)
- [90] Shaheen, A.M., El-Sehiemy, R.A., Farrag, S.M. : Solving multi-objective optimal power flow problem via forced initialised differential evolution algorithm. *IET Generation, Transmission & Distribution* **10**(7), 1634–1647 (2016)
- [91] Shor, N. : *Minimization methods for nondifferentiable functions* springer verlag berlin (1985)
- [92] Sojoudi, S., Lavaei, J. : Physics of power networks makes hard optimization problems easy to solve. In : 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, pp. 1–8. IEEE (2012)
- [93] Sturm, J. : Central region method, pp. 157–194. Kluwer Academic Publishers, Netherlands (2000)
- [94] Sturm, J.F. : Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software* **11**(1-4), 625–653 (1999)
- [95] Todd, M.J., Toh, K.C., Tütüncü, R.H. : On the nesterov–todd direction in semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization* **8**(3), 769–796 (1998)
- [96] Toselli, A., Widlund, O. : *Domain decomposition methods-algorithms and theory*, vol. 34. Springer Science & Business Media (2006)
- [97] Tütüncü, R.H., Toh, K.C., Todd, M.J. : Solving semidefinite-quadratic-linear programs using sdpt3. *Mathematical programming* **95**(2), 189–217 (2003)
- [98] Vanderbei, R.J., et al. : *Linear programming*, vol. 3. Springer (2015)
- [99] Wolfe, P. : Convergence conditions for ascent methods. *SIAM review* **11**(2), 226–235 (1969)
- [100] Xiaoping, L., Ming, D., Jianghong, H., Pingping, H., Yali, P. : Dynamic economic dispatch for microgrids including battery energy storage. In : The 2nd international symposium on power electronics for distributed generation systems, pp. 914–917. IEEE (2010)
- [101] Xie, L., Ilic, M.D. : Model predictive economic/environmental dispatch of power systems with intermittent resources. In : 2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting, pp. 1–6. IEEE (2009)
- [102] Xu, Y., Singh, C. : Adequacy and economy analysis of distribution systems integrated with electric energy storage and renewable energy resources. *IEEE Transactions on power systems* **27**(4), 2332–2341 (2012)
- [103] Xu, Y., Singh, C. : Power system reliability impact of energy storage integration with intelligent operation strategy. *IEEE Transactions on smart grid* **5**(2), 1129–1137 (2013)
- [104] Xu, Y., Xie, L., Singh, C. : Optimal scheduling and operation of load aggregator with electric energy storage in power markets. In : North American Power Symposium 2010, pp. 1–7. IEEE (2010)

- [105] Xu, Y., Xie, L., Singh, C. : Optimal scheduling and operation of load aggregators with electric energy storage facing price and demand uncertainties. In : 2011 North American Power Symposium, pp. 1–7. IEEE (2011)
- [106] Yang, C.F., Lai, G.G., Lee, C.H., Su, C.T., Chang, G.W. : Optimal setting of reactive compensation devices with an improved voltage stability index for voltage stability enhancement. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **37**(1), 50–57 (2012)
- [107] Zhang, B., Lam, A.Y., Domínguez-García, A.D., Tse, D. : An optimal and distributed method for voltage regulation in power distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems* **30**(4), 1714–1726 (2014)
- [108] Zhang, Y. : On extending some primal–dual interior-point algorithms from linear programming to semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization* **8**(2), 365–386 (1998)
- [109] Zhao, F., Litvinov, E., Zheng, T. : A marginal equivalent decomposition method and its application to multi-area optimal power flow problems. *IEEE Transactions on Power Systems* **29**(1), 53–61 (2013)
- [110] Zillmann, M., Yan, R., Saha, T.K. : Regulation of distribution network voltage using dispersed battery storage systems : A case study of a rural network. In : 2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting, pp. 1–8. IEEE (2011)
- [111] Zoutendijk, G. : Nonlinear programming, computational methods. *Integer and nonlinear programming* pp. 37–86 (1970)

# Modélisation, optimisation et simulation des réseaux de distribution d'électricité

**Résumé.** La planification et la gestion des réseaux de distribution d'électricité a pour objectif l'acheminement de l'électricité depuis le réseau de répartition jusqu'aux consommateurs, tout en garantissant un bon niveau de qualité, de sécurité et un coût le plus bas possible. La meilleure stratégie de gestion peut alors être vue comme la solution d'un problème d'optimisation, où l'on cherche à minimiser une fonction représentant un objectif économique ou technoeconomique, sous certaines contraintes physiques du réseau. Plusieurs échelles de description du réseau sont possibles selon l'objectif souhaité (impact du stockage, minimisation des pertes en ligne, minimisation du coût d'achat d'énergie, utilisation des énergies renouvelables, etc). Dans cette thèse, on propose deux échelles de description du réseau de distribution : l'échelle macroscopique où la spatialité du réseau n'est pas considérée et l'échelle microscopique qui décrit de manière réaliste la topologie du réseau. Pour l'échelle macroscopique, on étudie deux modèles de distribution incluant le stockage d'énergie, correspondant chacun à une situation économique donnée. Le but de ces modèles est d'étudier l'impact de l'utilisation du stockage d'énergie sur l'économie du réseau. On propose ensuite un algorithme de type fenêtre glissante permettant de réduire le temps de calcul, avec pour objectif de faire des simulations en temps réel. Pour l'échelle microscopique, on étudie un problème connu dans la littérature sous le nom de « AC-Optimal Power Flow ». Ce problème est non-convexe et donc très difficile à résoudre. On propose une relaxation convexe de ce problème après l'avoir écrit sous forme matricielle. On démontre deux résultats portant sur les conditions pour que cette relaxation soit exacte.

**Mots-clés :** modélisation des réseaux de distribution, optimisation, simulation numérique, algorithme à fenêtre glissante, relaxation convexe, frontière de Pareto.

## Modeling, optimization and numerical simulation of electric distribution networks

**Abstract.** The objective of the planning and the management of the electric distribution networks is to deliver electricity from dispatch networks to consumers, while ensuring a good level of quality, safety and with the lowest cost. The best strategy of management can be seen as the solution of an optimization problem, where we look to minimize a merit function representing an economic or technoeconomic objective, under certain physical constraints of the network. Several network description scales are possible depending on the desired objective (impact of storage, minimization of line losses, minimization of the cost of purchasing energy, use of renewable energies, etc). In this thesis, we propose two scales of description of the distribution network : the macroscopic scale where the spatiality of the network is not considered and the microscopic scale which describes realistically the topology of the network. For the macroscopic scale, we describe and study two distribution models including energy storage, each of them correspond to a given economic situation. The aim of these models is to study the impact of the use of the energy storage on the economy of the network. We then propose a sliding window type algorithm which allows to reduce the computational time, with the objective of making real time simulations. For the microscopic scale, we study a problem known in the literature as the « AC Optimal Power Flow ». This problem is non-convex and therefore it is very difficult to solve. We propose a convex relaxation of this problem after writing it in a matrix form. We prove two results concerning the conditions, under which this relaxation can be exact.

**Keywords :** distribution networks modeling, optimization, numerical simulation, sliding window algorithm, convex relaxation, Pareto-Front.