



**HAL**  
open science

# Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués

Imane Khayour

► **To cite this version:**

Imane Khayour. Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués. Autre. Université de Strasbourg, 2021. Français. NNT : 2021STRAD030 . tel-03850602

**HAL Id: tel-03850602**

**<https://theses.hal.science/tel-03850602v1>**

Submitted on 14 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE MSII**

**Icube – UMR 7353**

**THÈSE** présentée par :

**Imane KHAYOUR**

soutenue le : **28 Septembre 2021**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : **SIAR**

**Commande des robots parallèles à câbles  
avec actionneurs embarqués**

**THÈSE dirigée par :**  
**GANGLOFF Jacques**

Professeur, Université de Strasbourg

**RAPPORTEURS :**  
**BOUTAYEB Mohamed**  
**MARCHAND Nicolas**

Professeur, Université de Lorraine  
Directeur de recherches, Université Grenoble-Alpes

**AUTRES MEMBRES DU JURY :**  
**CUVILLON Loïc**  
**DURAND CHAMONTIN Sylvain**  
**GOUTTEFARDE Marc**

Maître de conférences, Université de Strasbourg  
Maître de conférences, INSA Strasbourg  
Directeur de recherches, Université de Montpellier



*À la mémoire des mes grands-parents  
chéris, Abderrahim KHAYOUR et  
Bouchaib EL MAHZOUM, et à mes  
chers et tendres parents, Bouchra et  
Mohamed Azeddine, qui m'ont toujours  
soutenu et encouragé, et qui me comblent  
d'un amour inconditionnel et intemporel.*





## *Remerciements*

Tout d'abord, j'aimerais remercier Jacques de m'avoir accordé la chance de poursuivre une thèse de doctorat. Merci d'avoir été rigoureux, minutieux et soucieux de la qualité de tous les détails de la thèse.

Merci à Loïc pour son temps et ses efforts sans relâche. Les mots ne suffiront pas à témoigner ma gratitude pour tout ce que tu as fait. J'ai beaucoup appris à tes côtés et je te serai éternellement reconnaissante.

Merci à Sylvain de m'avoir toujours encouragé depuis mon arrivée au laboratoire. Merci pour ton soutien sans égal durant les moments les plus durs de la thèse. Et, merci de m'avoir donné l'occasion de prendre en charge la mission d'enseignement. Elle s'est avérée être une expérience enrichissante et révélatrice de belles choses.

Merci à mes chers amis de m'avoir accompagné durant cette période. Merci d'avoir veillé sur moi à tous les niveaux. Merci de m'avoir apporté beaucoup de joie, de réconfort et de force quand j'en manquais. Merci pour vos prières, vos messages et vos appels de plus d'une heure des fois. Merci pour la sincère affection que vous me portez. Je vous chéris grandement en retour.

Enfin, je souhaite exprimer mon infinie gratitude à ma petite famille. Merci à mes parents, grande soeur et petits frères. Merci de me couvrir et de me bénir par votre amour. Merci de m'apprendre à apprécier davantage les petites choses de la vie. Merci à mes parents de n'avoir jamais manqué à me soutenir dans tout ce que j'entreprends. Malgré la distance qui nous sépare, vous avez su combler ce sentiment au quotidien. Je réalise à présent que je suis chanceuse de porter en moi une partie de vous qui m'accompagnera pour toujours. J'espère un jour revaloir tout ce que vous faites pour moi.

Merci à mon grand-père Abderrahim qui nous a toujours poussé à poursuivre des études de haut niveau et à surtout être toujours avides de savoir. Merci de nous avoir aimé tendrement et merci d'avoir ancré en nous les plus belles et nobles valeurs. Je sais que tu serais fier de moi comme je serai toujours fière d'être ta petite fille.

## Déclaration sur l'honneur *Declaration of Honour*

J'affirme être informé que le plagiat est une faute grave susceptible de mener à des sanctions administratives et disciplinaires pouvant aller jusqu'au renvoi de l'Université de Strasbourg et passible de poursuites devant les tribunaux de la République Française.

Je suis conscient(e) que l'absence de citation claire et transparente d'une source empruntée à un tiers (texte, idée, raisonnement ou autre création) est constitutive de plagiat.

**Au vu de ce qui précède, j'atteste sur l'honneur que le travail décrit dans mon manuscrit de thèse est un travail original et que je n'ai pas eu recours au plagiat ou à toute autre forme de fraude.**

*I affirm that I am aware that plagiarism is a serious misconduct that may lead to administrative and disciplinary sanctions up to dismissal from the University of Strasbourg and liable to prosecution in the courts of the French Republic.*

*I am aware that the absence of a clear and transparent citation of a source borrowed from a third party (text, idea, reasoning or other creation) is constitutive of plagiarism.*

***In view of the foregoing, I hereby certify that the work described in my thesis manuscript is original work and that I have not resorted to plagiarism or any other form of fraud.***

Nom : Prénom : KHAYOUR Imane

Ecole doctorale : MSII

Laboratoire : ICube

Date : 01/11/2021

Signature :



# Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués

## Résumé

Les robots parallèles à câbles présentent plusieurs avantages par rapport aux robots parallèles classiques. En raison de la faible masse des câbles, qui remplacent les corps rigides, la masse à déplacer par le robot est plus faible. Par conséquent, ces robots manipulateurs permettent d'atteindre des vitesses et accélérations élevées et de couvrir un espace de travail plus important. Les robots parallèles à câbles sont également plus facilement reconfigurables et moins coûteux.

En contrepartie, la flexibilité des câbles dégrade les performances en termes de précision et de temps d'établissement. Il est donc nécessaire d'atténuer les vibrations induites par la faible rigidité de l'effecteur actionné par câbles.

L'élasticité des câbles réduit également la bande passante des efforts qu'ils peuvent transmettre. En effet, plus les câbles sont longs ou composés d'un matériau élastique, plus la longueur de câble à enrouler pour générer une force donnée est grande. Cette bande passante réduite des enrouleurs des câbles limite les performances des robots parallèles à câbles. Elle ne permet pas de rejeter efficacement les vibrations et de suivre des trajectoires dynamiques et rapides par l'action seule des enrouleurs des câbles.

Dans cette thèse, on propose d'embarquer sur la plateforme différents types d'actionneurs additionnels pour améliorer la dynamique du robot. Ces actionneurs sont dotés d'une bande passante plus élevée que celle des enrouleurs des câbles. Une commande prédictive optimale est proposée pour distribuer à la fois les efforts des câbles et des actionneurs embarqués contribuant au mouvement du robot.

Des expérimentations, menées sur deux prototypes de robots parallèles à câbles, valident l'approche et évaluent les performances de l'amortissement actif des vibrations et du suivi de trajectoire.

Mots-clés : robots parallèles à câbles, actionneurs embarqués, propulseurs, commande prédictive, suivi de trajectoire, amortissement actif de vibrations, dynamique de robots manipulateurs.

## Résumé en anglais

Cable-driven parallel robots exhibit many advantages over traditional parallel robots. Due to the low mass of the cables, which replace the rigid links, the mass to be moved by the robot is lighter. Therefore, these manipulators can reach higher speeds and accelerations and cover larger workspaces. Cable-driven parallel robots are also easily scalable and less expensive.

On the other hand, the flexibility of the cables degrades the performances in terms of precision and settling time. Hence, it is necessary to attenuate the vibrations induced by the low rigidity of the end-effector actuated by the cables. The elasticity of the cables also reduces the bandwidth of the forces that they can transmit. Indeed, the longer the cables made of an elastic material, the greater the required cable length to be wound to generate a given force. The reduced cable winches bandwidth hinders the performances of the cable-driven parallel robots. It prevents the effectiveness of vibration damping and the tracking of fast and dynamic trajectories by the action of the cables only.

In this thesis, we propose to embed different types of additional actuators on the platform to improve the robot dynamics. These actuators have a higher bandwidth compared to the cable winches. An optimal predictive control is proposed to distribute both the forces of the cables and the on-board actuators contributing to the overall movement of the robot. Experiments are carried out on two prototypes of cable-driven parallel robots to validate the approach and evaluate the performances of the active vibration damping and the trajectory tracking.

Keywords: cable-driven mechanisms, embedded actuators, propellers, predictive control, trajectory tracking, active vibration damping, manipulator dynamics.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	1
1.2 Contexte du projet DexterWide	1
1.3 Robots parallèles à câbles	2
1.4 Structure de thèse	2
1.5 Contributions	3
<b>2 État de l’art</b>	<b>5</b>
2.1 Architecture des robots manipulateurs	5
2.2 Robots parallèles à câbles	6
2.2.1 Applications	6
2.2.2 Avantages	9
2.3 Espace de travail	10
2.4 Classification des RPC	11
2.4.1 Robots pleinement contraints et suspendus	11
2.4.2 Degré de redondance	12
2.4.3 Robots redondants en câbles	13
2.5 Les câbles	14
2.6 Actionneurs embarqués	18
2.6.1 Stabilisation avec des dispositifs embarqués passifs et actifs	18
2.6.1.1 Amortissement passif	18
2.6.1.2 Amortissement actif	19
2.6.2 Évaluation des actionneurs embarqués	20
2.6.2.1 Générateurs d’efforts transitoires	20
2.6.2.2 Générateurs d’efforts persistants	22
2.6.3 Choix et motivations	24
2.7 Allocation des actionneurs	25
2.7.1 Définition du problème d’allocation	25
2.7.2 Résolution du problème non contraint	27
2.7.3 Résolution du problème contraint	28
<b>3 Modélisation du robot parallèle à câbles</b>	<b>31</b>
3.1 Repères et notations	31
3.2 Modèle des câbles	32
3.2.1 Modèle linéaire élastique	32
3.2.2 Longueur à vide et longueur en charge du câble	33
3.2.3 Tension du câble	33
3.2.4 Torseur d’effort exercé par les câbles du RPC	34
3.3 Modélisation du RPC	34
3.3.1 Modèle géométrique inverse	34
3.3.2 Modèle cinématique	34

3.3.2.1	Jacobienne du robot . . . . .	34
3.3.2.2	Matrice des efforts appliqués par les câbles . . . . .	35
3.3.3	Modèle dynamique de la plateforme . . . . .	36
3.3.3.1	Dynamique des enrouleurs . . . . .	39
3.3.3.2	Modèle du robot incluant la dynamique des enrouleurs . . . . .	40
3.3.4	Modèle dynamique avec des générateurs de forces unilatérales . . . . .	40
3.3.4.1	Torseur d'effort des actionneurs embarqués . . . . .	41
3.3.4.2	Modèle avec l'action des câbles et des actionneurs . . . . .	42
3.3.4.3	Modèle complet incluant la dynamique des actionneurs . . . . .	42
3.4	Linéarisation du modèle dynamique complet du RPC . . . . .	44
3.4.1	Modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre . . . . .	44
3.4.2	Représentation d'état incluant la dynamique des actionneurs . . . . .	47
3.5	Robot parallèle à câbles plan . . . . .	48
3.5.1	Configuration du robot plan . . . . .	48
3.5.2	Singularités du robot plan . . . . .	50
3.5.3	Modèle dynamique du robot plan . . . . .	51
3.5.4	Configuration des actionneurs . . . . .	52
3.5.4.1	Disposition des propulseurs . . . . .	52
3.5.4.2	Orientation des actionneurs . . . . .	53
3.5.5	Modèle du robot plan incluant la dynamique des actionneurs . . . . .	54
3.6	Conclusion . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Amélioration de la dynamique par des propulseurs à air comprimé embarqués</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Technologie des propulseurs à air comprimé . . . . .	58
4.2.1	Étude théorique : tuyère de Laval . . . . .	58
4.2.2	Circuit pneumatique . . . . .	60
4.3	Loi de commande pour la stabilisation de la plateforme . . . . .	60
4.3.1	Modèle du système . . . . .	60
4.3.2	Stratégie de commande multi-étapes . . . . .	61
4.4	Résultats expérimentaux . . . . .	71
4.4.1	Plateforme expérimentale : PiSaRo3 . . . . .	71
4.4.2	Commande multi-étapes : résultats expérimentaux . . . . .	72
4.5	Stratégie de commande prédictive . . . . .	75
4.5.1	La commande prédictive . . . . .	75
4.5.2	Commande prédictive sans erreur statique . . . . .	81
4.5.3	Commande prédictive pour la stabilisation de la plateforme . . . . .	83
4.5.4	Comparaison avec le correcteur multi-étapes (simulation) . . . . .	87
4.6	Conclusion . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Amélioration de la dynamique des RPC avec des propulseurs à hélices</b> . . . . .	<b>91</b>
5.1	Suivi de trajectoire à un degré de liberté . . . . .	91
5.1.1	Descriptif du robot PiSaRo4 . . . . .	91
5.1.2	Modèle dynamique du système . . . . .	93
5.1.3	Identification des paramètres du modèle . . . . .	97
5.1.4	Synthèse de la commande prédictive . . . . .	98
5.1.5	Résultats expérimentaux . . . . .	102
5.2	Rejet de perturbation : robot plan à deux degrés de liberté . . . . .	106
5.2.1	Modèle du système . . . . .	106

5.2.2 Synthèse de la commande prédictive . . . . .	109
5.2.3 Résultats expérimentaux . . . . .	111
5.3 Conclusion . . . . .	114
<b>6 Conclusion</b>	<b>115</b>
6.1 Synthèse . . . . .	115
6.2 Perspectives . . . . .	117
<b>A Linéarisation de la dynamique du RPC</b>	<b>119</b>
A.1 Suivant $\mathbf{x}$ . . . . .	119
A.2 Suivant $\mathbf{l}_{2\delta}$ : . . . . .	120
<b>B Commande prédictive : problème d'optimisation quadratique</b>	<b>121</b>
B.1 Modèle de prédiction . . . . .	121
B.2 Fonction de coût quadratique . . . . .	122
B.3 Intégration des contraintes . . . . .	123
B.3.1 Solution non contrainte . . . . .	123
B.3.2 Solution contrainte . . . . .	123
<b>C Code MATLAB</b>	<b>125</b>
<b>D Linéarisation de la dynamique du RPC contraint à deux degrés de liberté</b>	<b>127</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>





# Notations

Symbole	Définition
$n$	le nombre de degrés de liberté du robot parallèle à câbles
$n_c$	le nombre des câbles
$n_a$	le nombre d'actionneurs
$\mathcal{F}_g$	le repère inertiel d'origine $O$
$\mathcal{F}_p$	le repère lié à la plateforme mobile et attaché à son centre de gravité $G$
$\mathbf{R}_{gp}$	la matrice de rotation entre le repère inertiel et le repère mobile
$A_i$	le point d'attache du câble à la base fixe
$B_i$	le point d'attache du câble à la plateforme
${}^g\mathbf{u}_{ci}$	les coordonnées du vecteur directeur unitaire du $i^{\text{ème}}$ câble dans $\mathcal{F}_g$
${}^g\mathbf{b}_{ci}$	les coordonnées du vecteur entre le centre de gravité $G$ et le point d'attache $B_i$ dans $\mathcal{F}_g$
$\mathbf{x}^T = [\mathbf{p}^T, \boldsymbol{\theta}^T]$	la pose de la plateforme
$\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$	la position de la plateforme
$\boldsymbol{\theta} = [\theta \ \phi \ \psi]^T$	l'orientation de la plateforme selon les angles d'Euler
$\dot{\mathbf{p}}$	la vitesse de la plateforme
$\boldsymbol{\omega}$	la vitesse angulaire de la plateforme
$l_{1i}$	la longueur du $i^{\text{ème}}$ câble entre ses deux points d'attache $A_i$ et $B_i$
$l_{2i}$	la longueur à vide du $i^{\text{ème}}$ câble, i.e à tension nulle
$m_p$	la masse de la plateforme
$\mathbf{I}_g$	le tenseur d'inertie de la plateforme dans le repère fixe
$\mathbf{I}_p$	le tenseur d'inertie de la plateforme dans le repère attaché à l'effecteur
$k_s$	la raideur spécifique du câble en $\text{Nm}^{-1}$
$f_c$	le coefficient de friction du câble en $\text{Nm}^{-1}\text{s}$
$\tau_i$	la tension du $i^{\text{ème}}$ câble
$t_i$	la poussée du $i^{\text{ème}}$ actionneur embarqué
$\mathbf{W}_c \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$	la matrice des efforts appliqués par les câbles
$\mathbf{W}_a \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$	la matrice des efforts appliqués par les propulseurs



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Introduction

Cette thèse intitulée « *Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués* » a été préparée sous la direction de Jacques Gangloff et l'encadrement de Loïc Cuvillon et Sylvain Durand. Elle s'intéresse aux robots parallèles à câbles flexibles et se focalise sur l'amélioration de leur performance en utilisant des actionneurs embarqués. Elle vise à atteindre de meilleures performances dynamiques notamment avec un meilleur rejet des perturbations et un meilleur suivi de trajectoire.

### 1.2 Contexte du projet DexterWide

Ce travail s'intègre dans le projet ANR DexterWide qui vise à développer des outils permettant l'usage de robots anthropomorphes embarqués sur un robot parallèle à câbles afin de réaliser des manipulations dextres, des manipulations de charges importantes et des opérations de manutention dans un large espace de travail. Dans ce projet, c'est un robot anthropomorphe de type Yaskawa SIA20F qui a été monté sur le robot parallèle CoGiRo développé par le LIRMM (voir dans la Figure 1.1). Un intérêt particulier est porté à la minimisation des vibrations qui ont lieu durant les tâches en ayant recours à des stratégies de commandes avancées.



FIGURE 1.1 – Projet ANR DexterWide : robot parallèle à câbles CoGiRo et robot anthropomorphe Yaskawa SIA20F embarqué

### 1.3 Robots parallèles à câbles

Avec cette architecture, les corps qui soutiennent l'effecteur ne sont pas rigides mais constitués de câbles. Ils sont actionnés avec des poulies par enroulement et déroulement. On peut donc déplacer l'effecteur en faisant varier la longueur des câbles. La particularité des câbles est leur effort unilatéral : ils peuvent tirer une charge mais pas la pousser.

En raison de masses en mouvement relativement faibles, les robots parallèles à câbles peuvent atteindre des accélérations élevées. Ils sont également plus facilement transportables et reconfigurables, car plus modulaires. Cependant, les câbles ont une flexibilité plus grande que les liaisons habituellement utilisées en robotique parallèle. L'usage de câbles flexibles dégrade les performances notamment en termes de précision et de temps d'établissement. Pour améliorer la performance d'un robot parallèle à câbles flexibles, il est donc nécessaire d'atténuer les vibrations induites. De plus, si ces robots sont uniquement actionnés par des enrouleurs, leur dynamique limitée ne permet pas de rejeter efficacement les vibrations. En effet, plus les câbles sont longs ou/et élastiques, plus la longueur de câble à enrouler pour générer une force donnée est grande [ROBINSON et al., 1999]. Comme les enrouleurs des câbles ont une vitesse maximale, la bande passante de la force exercée est limitée par cette saturation.

Dans cette thèse, on propose d'évaluer la possibilité d'embarquer différents types d'actionneurs, dotés d'une bande passante plus élevée que celle des enrouleurs des câbles pour améliorer le comportement dynamique du robot.

Des expérimentations ont été menées pour évaluer la performance des actionneurs choisis.

### 1.4 Structure de thèse

Après cette introduction, le chapitre 2 de la thèse est consacré à un état de l'art des différents travaux traitant des robots parallèles à câbles. Les différentes méthodes de réduction de vibrations ou oscillations sont présentées.

Étant donné que l'objectif de la thèse est d'améliorer la dynamique des robots en embarquant des actionneurs, l'état de l'art traite également la redondance d'actionnement et passe en revue les différents algorithmes utilisés pour sa gestion, telle l'allocation des actionneurs.

Le chapitre 3 est dédié à la modélisation du robot parallèle à câbles. Un premier modèle est synthétisé incluant uniquement l'action des câbles. Un deuxième modèle comprenant les actionneurs embarqués est établi. Chacun de ces modèles inclut la dynamique des enrouleurs et des actionneurs embarqués. Ces derniers sont décrits comme des générateurs de force unilatérale. Enfin, un modèle linéarisé complet est calculé analytiquement.

En particulier, le modèle d'un robot plan utilisé pour les validations expérimentales est détaillé. Cette configuration plane est pertinente pour des applications telles que le nettoyage des vitres d'un immeuble ou la peinture de fresques où de grandes longueurs de câble sont employées.

Le chapitre 4 étudie et valide l'utilisation de propulseurs à air comprimé pour améliorer la dynamique d'un robot parallèle à câbles. Ces propulseurs embarqués ont une dynamique beaucoup plus rapide que celle des enrouleurs.

Une première étude porte sur l'amélioration du rejet des perturbations sur un robot parallèle à câbles plan suivant ses trois degrés de liberté. Deux approches d'amortissement actif sont comparées. La première dissocie le calcul de la commande de l'allocation des actionneurs. La deuxième approche combine les différentes étapes de la première en une seule, en utilisant le formalisme de la commande prédictive. Ces deux méthodes prennent en compte les contraintes des actionneurs.

En outre, le fonctionnement tout ou rien des propulseurs à air comprimé est étudié et une commande adaptée est proposée.

La dynamique rapide des propulseurs de drones leur permet également d'être de bons candidats pour améliorer la dynamique de l'effecteur tout en étant plus simple à mettre en oeuvre. Ce type d'actionneurs est évalué dans le chapitre 5. On s'intéresse d'abord au cas d'un robot à un degré de liberté (1-DDL) puis au cas d'un robot à deux degrés de liberté (2-DDL) combinant à la fois l'action des enrouleurs et celle des propulseurs. Une commande prédictive linéaire a été développée pour ces deux robots à 1-DDL et 2-DDL. Cette commande présente des particularités intéressantes telles que l'anticipation, si la trajectoire est connue à l'avance, et surtout la prise en compte des saturations.

Le dernier chapitre 6 tire diverses conclusions relatives aux choix des actionneurs et dresse une comparaison entre les différents résultats obtenus. Les perspectives de ce travail sont aussi présentées.

## 1.5 Contributions

Ce travail a mené à plusieurs contributions dans le domaine de la commande des robots parallèles à câbles :

- utilisation d'actionneurs embarqués originaux sur un robot parallèle à câbles pour en améliorer la dynamique,
- synthèse de lois de commande adaptées aux caractéristiques de chaque actionneur,
- combinaison au sein d'une même loi de commande de moyens d'actionnement redondants pour le suivi de trajectoire et le rejet de perturbations d'un robot parallèle à câbles.

L'utilisation des propulseurs à air comprimé a été validée expérimentalement pour l'amélioration du rejet de perturbations sur un robot plan. Les premiers résultats relatifs à cette application ont été présentés à la conférence ICRA dans [SELLET et al., 2019]. Une commande prédictive est ensuite introduite pour ce même type de propulseur, prenant en compte les contraintes de fonctionnement tout ou rien des actionneurs, et une comparaison entre les différentes approches est établie dans [KHAYOUR et al., 2020a]. Ces travaux ont été présentés à la conférence IFAC World Congress. Dernièrement, les expérimentations avec les hélices de drone ont mené à des résultats qui ont fait l'objet d'une publication à la conférence IROS [KHAYOUR et al., 2020b].



## Chapitre 2

# État de l'art

### 2.1 Architecture des robots manipulateurs

Il existe principalement deux architectures de robots manipulateurs : série et parallèle, voir Figure 2.1. Les robots séries consistent en un enchaînement de corps rigides, liés par des articulations actionnées par des servomoteurs électriques ou hydrauliques [LIYANAGE, KROUGLICOF et GOSINE, 2010] dont la chaîne cinématique est ouverte et s'étend d'une base fixe vers l'effecteur (ou organe terminal).

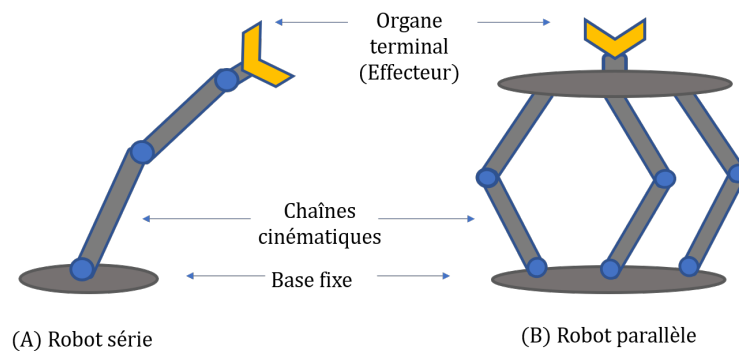


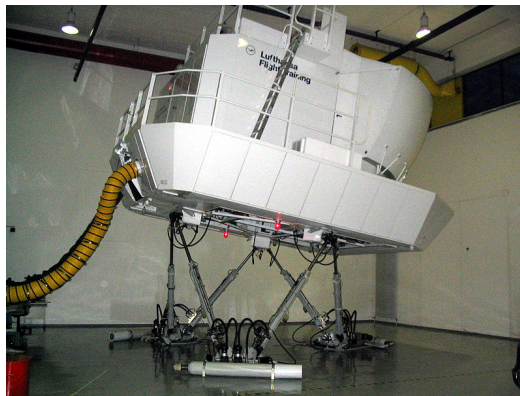
FIGURE 2.1 – Schéma de robot série et parallèle [YESHMUKHAMETOV et al., 2017]

Un robot parallèle est constitué de chaînes cinématiques fermées. Son organe terminal est donc relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques. Ces chaînes sont totalement indépendantes [MERLET, 2006]. Prenons l'exemple d'un joueur de volley exécutant une manchette : ses deux mains forment l'effecteur. Les deux bras sont indépendants l'un de l'autre et bougent pour déplacer les mains jointes. Cet ensemble forme une chaîne cinématique fermée. Le robot parallèle hexapode nommé plateforme de Gough-Stewart [FICHTER, 1986] est un des premiers robots parallèles. Ce robot a été employé dans plusieurs applications comme des simulateurs de vol (Figure 2.2a) ou des télescopes hexapodes (Figure 2.2b).

La configuration parallèle présente certains avantages par rapport à la configuration série :

- Un robot parallèle peut en général supporter une charge plus grande qu'un robot série, car la charge se répartit sur de multiples chaînes cinématiques [FICHTER, 1986].
- Sur une configuration série, les actionneurs sont positionnés le long de la chaîne cinématique. Ce qui veut dire que chaque liaison supporte le poids des corps en aval et le poids de ses actionneurs. Pour un robot parallèle classique, le poids





(A) Simulation de vol de la Lufthansa



(B) Télescope radio AMIBA

FIGURE 2.2 – Exemple d'applications de la plateforme de Gough-Stewart  
 [*Stewart Platform, Wikipedia s. d.*]

de la charge utile est partagé par les différentes chaînes cinématiques qui relient l'effecteur et il est plus facile de regrouper tous les actionneurs en amont des chaînes cinématiques.

- L'erreur de positionnement des chaînes d'un robot parallèle n'est pas cumulative jusqu'à l'effecteur, contrairement au robot série.
- L'accélération de l'effecteur est plus importante, car on peut placer la plupart des actionneurs sur une base fixe et donc réduire significativement l'inertie des parties mobiles.

L'inconvénient principal du robot parallèle à corps rigides par rapport au robot série est son espace de travail réduit. Néanmoins, les robots parallèles à câbles, introduits dans la section suivante, ne présentent pas cet inconvénient.

## 2.2 Robots parallèles à câbles

Un robot parallèle à câbles (RPC) est un robot parallèle dont les corps (rigides pour un robot classique) ont été remplacés par des câbles. Les premiers travaux relatifs aux RPC datent du début des années 1980 [LANDSBERGER, 1984].

L'architecture d'un RPC, comme on peut le voir sur la Figure 2.3, se compose d'une plateforme mobile (ou effecteur) reliée via des câbles à une structure fixe. Une extrémité des câbles est enroulée sur le tambour de poulies fixées sur la base fixe. L'autre extrémité des câbles est attachée à la plateforme mobile. En enroulant et en déroulant les câbles (au travers d'enrouleurs montés sur des moteurs électriques), le RPC se déplace dans son espace de travail.

### 2.2.1 Applications

L'usage des RPC a été envisagé dans différents scénarios :

**Sauvetage :** Le robot développé dans [TADOKORO et al., 1999] a été utilisé pour secourir les personnes lors de catastrophes naturelles comme un tremblement de terre. Une grue modulaire portable manipulée par des câbles [MERLET et DANAY, 2010] a été développée par Merlet et al. pour la localisation des victimes et leur extraction durant des missions de sauvetage.

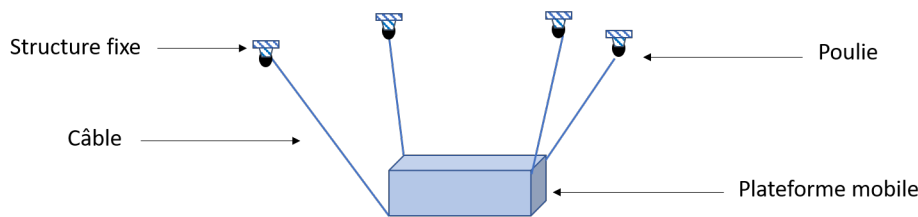


FIGURE 2.3 – Schéma d'un RPC

**Réhabilitation :** Le robot String-Man [SURDILOVIC et BERNHARDT, 2004], voir Figure 2.4, vise à assister des patients pour la réhabilitation de la marche. Dans ce même domaine, on peut citer : [HOMMA, FUKUDA et NAGATA, 2002 ; AGRAWAL et al., 2009 ; MERLET et DANNEY, 2010 ; SARGSYAN, ARAKELIAN et BRIOT, 2012 ; GONÇALVES et al., 2015] et [MERLET, 2008] pour l'assistance aux personnes âgées ou à mobilité réduite.



FIGURE 2.4 – String-Man [SARGSYAN, ARAKELIAN et BRIOT, 2012]

**Logistique :** Parmi les applications où le RPC est le plus souvent envisagé, on peut citer les opérations de "*pick and place*". Grâce à leur rapidité due à leur faible inertie, les RPC permettent de faire des mouvements de va-et-vient rapides pour manipuler et trier des objets. Un premier robot dédié à cette application est le robot FALCON développé par Kawamura [KAWAMURA et al., 1997]. On trouve également le SEGESTA (Figure 2.5) de [HILLER et al., 2005], ou le robot NIST-ROBOCANE [JAMES, ROGER et NICHOLAS, 1993], un des premiers robots suspendus dédié à la manutention de charges lourdes dans un grand espace de travail.

Le robot CoGiRo [GOUTTEFARDE et al., 2015b] est un autre exemple de robot industriel (voir section 1.2) qui a pour objectif de manipuler automatiquement de lourdes charges dans un entrepôt.

On peut aussi citer le robot FASTKIT [PEDEMONTE et al., 2020] qui a été conçu pour réaliser du "*pick and place*" rapide dans des entrepôts de stockage, voir Figure 2.6.

**Acquisition d'images et de données :** Comme le RPC peut assurer un déplacement sur de très grands espaces de travail tels que des stades, des caméras peuvent être placées sur l'effecteur du robot pour réaliser des prises de vue

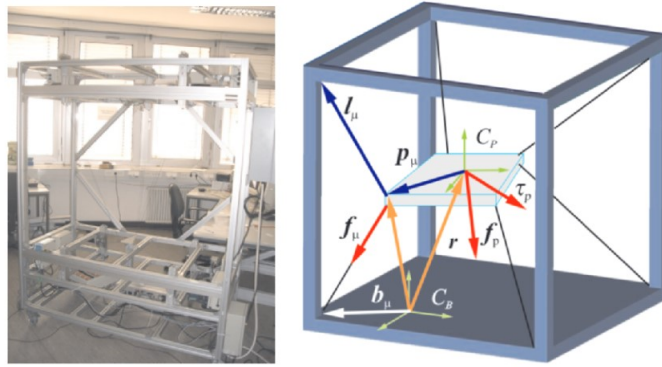


FIGURE 2.5 – Banc d'essai du robot redondant SEGESTA de Hiller et Bruckmann [BRUCKMANN et al., 2013]



FIGURE 2.6 – FASTKIT [PEDEMONTE et al., 2020]

[CONE, 1985 ; THOMPSON et BLACKSTONE, 2005]. La stabilisation de la caméra "Skycam", voir Figure 2.7, très largement utilisée pour des événements sportifs, se fait grâce à des gyroscopes pour donner un bon rendu vidéo. Des systèmes de robots porteurs de télescope sont décrits dans [LE COROLLER et al., 2004 ; ALTSCHULER, 2002 ; LI et al., 2013].



FIGURE 2.7 – Skycam

**Industrie et ingénierie :** Outre les opérations de "pick and place" déjà citées, les RPC trouvent de nombreuses autres applications dans l'industrie. Par exemple, certains robots ont été employés pour la peinture industrielle de grandes surfaces, tels des avions, comme dans le projet CableBOT [CableBOT s. d.]. D'autres RPC ont été utilisés pour automatiser l'usinage de grandes pièces et leur manipulation. Le robot CoGiRo a également été utilisé comme imprimante 3D à

grande échelle [IZARD et al., 2017].

**Retour haptique :** Un des premiers robots utilisés pour de la télé-opération est présenté dans [LINDEMANN et TESAR, 1989]. Le SPIDAR [SATO, HIRATA et KAWARADA, 1992] est un exemple de RPC qui vise à créer une interface haptique de réalité virtuelle pour le domaine spatial. Enfin, le robot Inca 6D [Inca s. d.] est spécialement conçu pour travailler dans des environnements de réalité virtuelle, voir Figure 2.8.



FIGURE 2.8 – Inca 6D [Inca s. d.]

Il s'agit d'un RPC à six degrés de liberté que la compagnie HAPTION commercialise comme interface haptique. L'effecteur est composé d'une poignée tenue par l'utilisateur qui perçoit des forces et des moments générés par huit câbles.

### 2.2.2 Avantages

Remplacer les corps rigides du robot parallèle par des câbles a plusieurs avantages :

**Rapidité :** Vu que les câbles sont plus légers que les corps rigides et que la structure parallèle permet de placer les actionneurs (généralement des enrouleurs pour enrouler/dérouler les câbles) sur une base fixe, les pièces mobiles ont une inertie réduite [KAWAMURA et al., 1997].

**Grand espace de travail :** La longueur des câbles peut varier fortement contrairement aux corps rigides, ce qui permet de couvrir un espace de travail plus grand que les autres types de robots manipulateurs (séries ou parallèles classiques). Le RPC peut donc se déplacer sur un très grand espace [CONE, 1985 ; NAHON, GILARDI et LAMBERT, 2002 ; BOUCHARD, GOSSELIN et al., 2006].

**Charge utile élevée :** Un RPC peut supporter une importante charge, parfois même plus importante que sa propre masse. Un exemple est le télescope Arecibo capable de manipuler un effecteur atteignant les 900 tonnes [LOVE, 2004]. On peut aussi citer le robot CoGiRo [LAMAURY et GOUTTEFARDE, 2013 ; GOUTTEFARDE et al., 2015b], RPC industriel utilisé dans le projet DexterWide (voir section 1.2) qui peut manipuler une charge de 300 kg dans son espace de travail [NGUYEN et GOUTTEFARDE, 2015 ; EL-GHAZALY, GOUTTEFARDE et CREUZE, 2015].

**Consommation d'énergie réduite :** La masse très faible (voire négligeable) des câbles, comparée à celle des corps rigides, réduit la masse à déplacer et donc l'énergie dépensée par le robot.



**Configuration modulaire :** Les RPC sont des robots facilement reconfigurables. On peut plus simplement modifier leur structure qu'avec un robot traditionnel. Pour cela, il suffit par exemple de déplacer les points d'arrimage [MERLET et DANEY, 2010; GAGLIARDINI et al., 2015].

**Coût de construction :** Les RPC sont faciles à construire et à modifier. Leur coût évolue plus lentement en fonction du volume de l'espace de travail qu'avec des structures à corps rigides.

## 2.3 Espace de travail

L'ensemble des positions et orientations (poses) que la plateforme peut atteindre constitue son espace de travail [VERHOEVEN et HILLER, 2000]. La notion d'espace de travail pour les RPC a été abordée dans plusieurs travaux, avec plusieurs définitions :

- Dans [MERLET, 2004], Merlet énonce trois contraintes qui doivent être vérifiées pour qu'une pose soit admise dans l'espace de travail. Premièrement, la longueur de câbles calculée doit être comprise entre les valeurs maximale et minimale possibles de longueur de câbles. Deuxièmement, les interférences entre câbles [MERLET, 2004; BOUCHARD, 2008; NGUYEN et GOUTTEFARDE, 2015] et les collisions entre plateforme et câbles doivent être évitées [OTIS et al., 2009]. Enfin, la tension des câbles qui garantit l'équilibre statique de la plateforme doit être comprise dans une plage où le comportement linéaire du câble est garanti.
- Dans [GOUTTEFARDE et GOSSELIN, 2006], Gouttefarde et Gosselin définissent "l'espace des poses polyvalentes" (EPP) ou "*wrench closure workspace*", qui est l'ensemble des poses du RPC où les câbles peuvent générer un torseur quelconque en garantissant la positivité de leurs tensions. Cette définition ne prend pas en compte la plage d'admissibilité des tensions et dépend uniquement de la géométrie du robot. Plusieurs méthodes de résolution numériques ont été développées. Par exemple, [MERLET, 2013] propose des outils d'analyse par intervalle.
- Dans [GOUTTEFARDE, MERLET et DANEY, 2007], il est question de "l'espace des torseurs générables" (ETG) ou "*wrench feasible workspace*". Cette définition, contrairement à la précédente, intègre la notion d'admissibilité des tensions des câbles. Cela veut dire que la tension doit être comprise entre deux valeurs : valeur minimale [BOSSCHER, RIECHEL et EBERT-UPHOFF, 2006] qui veille à maintenir le câble sous tension et de forme quasi-rectiligne, et valeur maximale pour ne pas abîmer le câble avec une tension plus élevée que le RPC ne peut le supporter. L'ETG a été déterminé numériquement par une analyse par intervalle dans [GOUTTEFARDE, DANEY et MERLET, 2010].
- Dans [BARRETTE et GOSSELIN, 2005], Barrette introduit la notion d'un espace de travail dynamique qui comprend les poses transitoires que le robot peut atteindre, compte tenu de son inertie, en effectuant des accélérations admissibles et en maintenant la tension des câbles positive.

Il existe plusieurs algorithmes de distribution de tension permettant de déterminer les tensions admissibles de câble pour une pose donnée de l'effecteur en fonction du torseur d'efforts à appliquer [BORGSTROM et al., 2009; GOSSELIN et GRENIER, 2011; GOUTTEFARDE et al., 2015a; LAMAURY et GOUTTEFARDE, 2013].

## 2.4 Classification des RPC

Les RPC peuvent être catégorisés suivant plusieurs critères. On peut notamment les classer suivant leur configuration et leur nombre d'actionneurs.

### 2.4.1 Robots pleinement contraints et suspendus

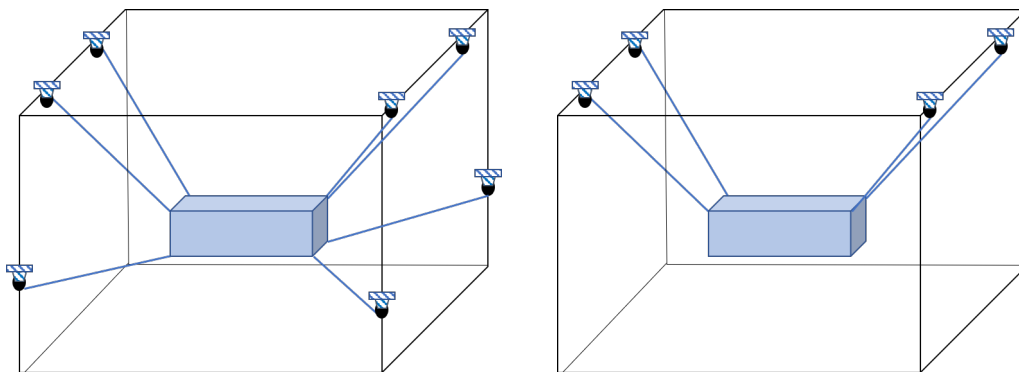
Les RPC peuvent être classés selon la configuration de leurs câbles.

#### RPC pleinement contraints

Un robot est dit pleinement contraint si tout torseur d'efforts peut être généré sur la plateforme mobile par les câbles. Les câbles sont disposés sur la plateforme de manière à ce que leurs actions soient antagonistes [GOUTTEFARDE, 2016].

Une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un robot soit classé comme étant pleinement contraint est qu'il dispose d'au moins un câble en dessous de son effecteur (Figure 2.9a).

Les robots pleinement contraints ont fait l'objet de plusieurs études comme [KAWAMURA et al., 1997; HILLER et al., 2005; DIAO, 2015]. Le robot FASTKIT, voir la Figure 2.6, est un exemple de robot pleinement contraint.



(A) RPC pleinement contraint

(B) RPC suspendu

FIGURE 2.9 – Robots pleinement contraint et suspendu

#### RPC suspendus

Si tous les câbles du robot sont situés au-dessus de la plateforme mobile, ce robot est alors dit suspendu (Figure 2.9b). La gravité est considérée comme un câble virtuel et maintient les câbles sous tension par son action antagoniste. Ce type de robot a fait l'objet de nombreuses études, notamment parce qu'il présente l'avantage de réduire le risque de collision des câbles avec l'environnement situé sous le robot. Pour un même nombre de câbles, il permet aussi de supporter une plus grande charge puisque tous les câbles se trouvent en haut de la plateforme et contribuent à la sustentation de la charge. Des exemples de robots suspendus sont décrits par [DUAN et al., 2009; LAMAURY et GOUTTEFARDE, 2013; WEBER, 2016]. Le Skycam, voir Figure 2.7, est l'exemple le plus connu des robots suspendus.

Le principal défaut de ce type de structure est sa faible raideur [KAWAMURA et al., 1997; WEBER, 2016] qui conduit à des vibrations de plus grande amplitude [YUAN

et al., 2017].

Une autre limitation potentielle de l'architecture suspendue est qu'il n'est pas possible d'avoir une accélération verticale vers le bas supérieure à celle de la gravité.

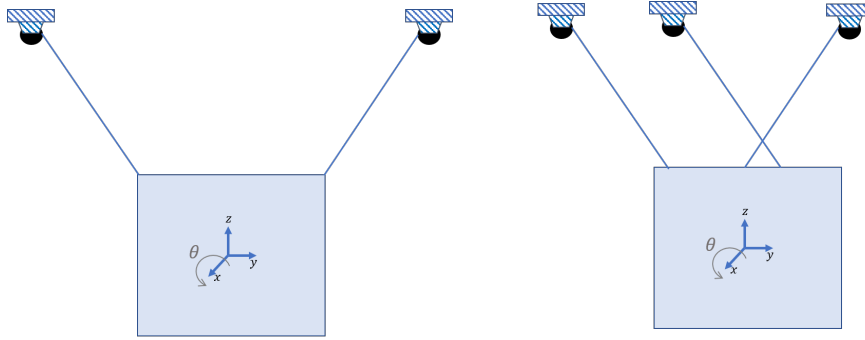
### 2.4.2 Degré de redondance

Les RPC peuvent être catégorisés selon leurs degrés de liberté (DDL) commandés  $n$  et leur nombre de câbles  $n_c$  [POTT, 2018]. Le degré de redondance  $r$  est lui défini par l'équation :

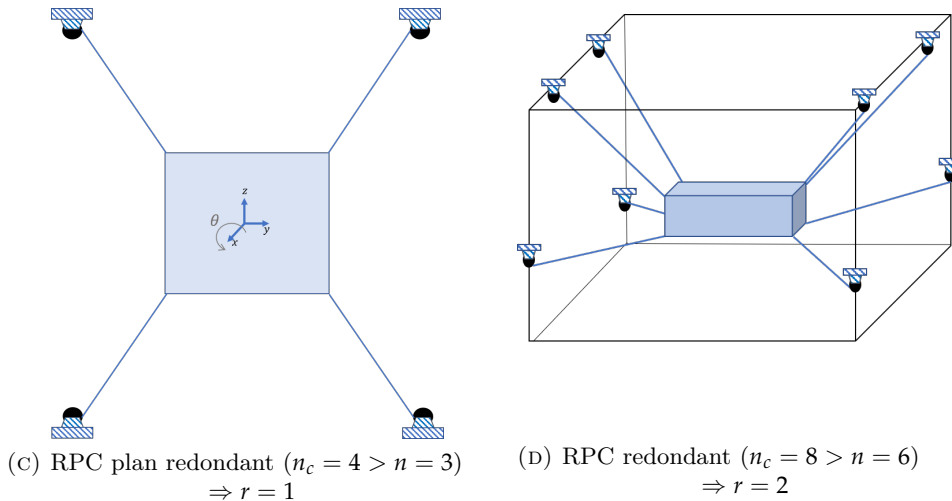
$$r = n_c - n \quad (2.1)$$

Selon [POTT, 2018], on distingue les cas de figure suivants :

- $n_c < n$  : Le degré de redondance est négatif. Un exemple de ce type de RPC est illustré dans la Figure 2.10a. Bien que la gravité agisse comme un câble virtuel, ce robot plan ne dispose que de deux câbles physiques actionnables ( $n_c = 2$ ) pour trois DDL (translations suivant  $y$  et  $z$  et rotation suivant  $x$ ).



(A) RPC plan non redondant ( $n_c = 2 < n = 3$ )  $\Rightarrow r < 0$  (B) RPC plan non redondant ( $n_c = n = 3$ )  $\Rightarrow r = 0$



(C) RPC plan redondant ( $n_c = 4 > n = 3$ )  $\Rightarrow r = 1$  (D) RPC redondant ( $n_c = 8 > n = 6$ )  $\Rightarrow r = 2$

FIGURE 2.10 – Redondance des câbles

- $n_c = n$  : Le robot dispose d'un nombre de câbles égal au nombre de ses DDL. Par exemple, dans le cas du robot plan non redondant suspendu de la Figure 2.10b, le robot n'a que trois câbles actionnables, donc  $n_c = 3$  pour un nombre de DDL  $n = 3$ . Il ne dispose donc pas de degré de redondance supplémentaire et  $r = 0$ .

Un RPC à six DDL, développé dans [JIANG, BARNETT et GOSSELIN, 2018], doté de six câbles, voir Figure 2.11, s'insère dans cette catégorie.

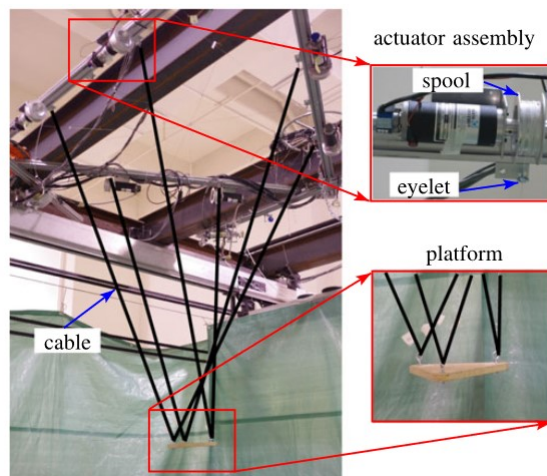


FIGURE 2.11 – Prototype du robot suspendu à six degrés de liberté [JIANG, BARNETT et GOSSELIN, 2018]

- $n_c = n + 1$  : Le degré de redondance est égal à 1. Le robot plan de la Figure 2.10c dispose de quatre câbles ( $n_c = 4$ ) et donc est commandable suivant ses trois DDL ( $r = 1$ ). Le robot FALCON de Kawamura [KAWAMURA et al., 1997] rentre aussi dans cette catégorie avec six DDL ( $n = 6$ ) et sept câbles ( $n_c = 7$ ).
- $n_c > n + 1$  : Le degré de redondance est supérieur à 1. Un exemple de ce type de structure est présenté dans [WEBER, CUVILLON et GANGLOFF, 2015] où le RPC suspendu étudié MiCaRo, illustré dans la Figure 2.12, est doté de 8 câbles ( $n_c = 8$ ) pour se déplacer suivant ses 6 DDL ( $n = 6$ ), donc  $r = 2$ . Le CoGiRo [EL-GHAZALY, GOUTTEFARDE et CREUZE, 2015] représente un deuxième exemple de RPC exposant les mêmes propriétés que le MiCaRo. Un RPC pleinement contraint de degré de redondance similaire est présenté dans la Figure 2.10d.

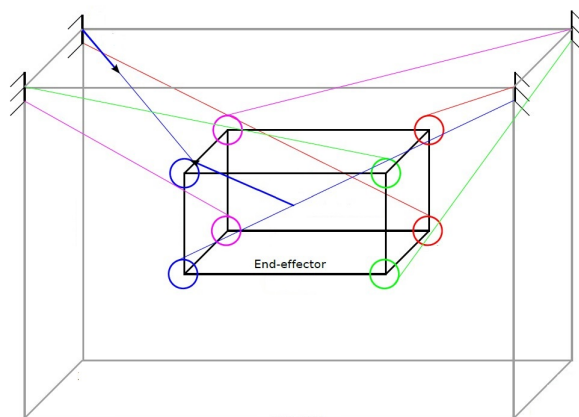


FIGURE 2.12 – RPC suspendu redondant MiCaRo [WEBER, 2016]

### 2.4.3 Robots redondants en câbles

La redondance des câbles pour un RPC offre plusieurs avantages selon [LAMAURY, 2013] :



- Le degré de redondance permet d'augmenter le rapport entre le volume de l'espace de travail du robot et le volume de sa structure [MERLET, 2012].
- Plus on utilise de câbles, plus on peut soulever des charges lourdes.
- Les câbles ne peuvent que tirer. Ils doivent toujours être maintenus tendus pour ne pas faire perdre un degré d'actionnement au robot. La redondance offre plus de liberté dans le choix des valeurs de tensions positives des différents câbles permettant d'atteindre la pose désirée dans l'espace de travail.
- La redondance des câbles permet de réduire le nombre de singularités dans l'espace de travail [BARRETTE et GOSELIN, 2005].
- La redondance permet d'être tolérant aux pannes. Elle permet le remplacement ou la reconfiguration des actionneurs en cas de défaillance de l'un des câbles.

D'autres avantages de la redondance d'actionnement sont cités par [JOHANSEN et FOSSEN, 2013]. La redondance permet aussi d'introduire des critères supplémentaires à optimiser vu que plusieurs solutions sont possibles pour résoudre un même problème [HÄRKEGÅRD, 2004]. Par exemple, on peut introduire dans la fonction de coût la bande passante des actionneurs sous la forme d'une saturation sur la dérivée temporelle ("*rate constraint*") de leur effort de sortie. Plusieurs applications permettent d'étayer que la redondance des actionneurs permet de garantir des objectifs multiples dans l'aérospatial ([BUFFINGTON et BUFFINGTON, 1997; EBERHARDT et WARD, 1999; SANTOS et al., 2015]) et dans le secteur automobile [VALASEK, 2003]. Enfin, la redondance permet un contrôle partiel de la matrice de raideur de la plateforme, en augmentant de manière coordonnée les tensions des câbles antagonistes [AZADI, BEHZADIPOUR et FAULKNER, 2009].

Selon Gouttefarde et Lamaury [GOUTTEFARDE et al., 2015a], une redondance des câbles sur un RPC suspendu n'est pas nécessaire, mais elle offre certains avantages dont un espace de travail plus grand. Il est précisé qu'une redondance de degré  $r = 1$  ou  $r = 2$  offre un bon compromis entre les avantages de la redondance et le surcoût d'actionnement.

Comme on s'intéresse à des applications utilisant des câbles longs pour effectuer des manipulations sur un espace de travail de grande dimension verticale, on choisit dans ce travail de thèse la configuration suspendue pour éviter les collisions des câbles avec l'environnement. De plus, on choisit une configuration du RPC suspendu non redondant ( $r = 0$ ), le sur-actionnement viendra par l'ajout d'actionneurs embarqués dans le but d'améliorer la dynamique du robot.

## 2.5 Les câbles

Bien qu'ils présentent de nombreux avantages, les câbles demeurent des éléments déformables et élastiques. Ces caractéristiques sont sources d'inconvénients :

1. Le câble a une flexibilité variable qui dépend de sa longueur.
2. Le câble peut se déformer sous son propre poids. On parle d'affaissement.
3. Les vibrations dues à l'élasticité du câble dégradent la performance du robot.
4. La résistance des câbles en compression est quasi nulle. Ils ne peuvent travailler qu'en traction.

Chacun des points cités est détaillé.

**Raideur des câbles** La raideur du câble est inversement proportionnelle à sa longueur. L'élasticité des câbles, caractérisée par le module de Young, est donnée par l'équation :

$$k_c = \frac{k_s}{l_2} = \frac{es}{l_2} \quad (2.2)$$

où  $k_c$  est la raideur axiale du câble et  $l_2$  est sa longueur à vide, i.e. quand sa tension est nulle. Sa raideur spécifique  $k_s$  dépend de la section  $s$  du câble et de son module de Young  $e$ .

Plus la raideur est faible et plus la longueur de câble à enrouler est grande pour générer une même force donnée sur l'effecteur. Or, les moteurs qui entraînent les poulies sont limités en vitesse. Donc, la bande passante de la force que l'on peut créer avec les câbles est limitée par la saturation de la vitesse d'enroulement. Cette limitation de la bande passante est d'autant plus importante que la longueur déroulée du câble est importante.

Si les câbles utilisés ont une raideur faible, les fréquences d'oscillation du robot sont faibles [YUAN et al., 2017]. En l'absence d'amortissement, elles altèrent le temps d'établissement de l'effecteur.

Lorsqu'il n'est pas possible d'augmenter les performances des enrouleurs, un moyen d'améliorer la dynamique du RPC est d'embarquer sur la plateforme des actionneurs supplémentaires offrant une bande passante plus grande que les enrouleurs.

**Affaissement des câbles** L'affaissement du câble nuit à la raideur de la plateforme et dégrade la précision de positionnement. L'importance de modéliser correctement ce phénomène, quand on travaille sur les RPC, a été soulignée dans [KOZAK, ZHOU et WANG, 2006; RIEHL et al., 2010; RIEHL, 2011].

Si l'affaissement n'est pas négligeable, le câble est modélisé comme une caténaire élastique [IRVINE, 1981]. Dans [BOUCHARD, 2008], Bouchard stipule pour la première fois les conditions nécessaires pour pouvoir négliger l'affaissement et modéliser les câbles comme des segments droits.

Un câble tendu, de masse négligeable, peut être considéré rectiligne. Il est modélisé par une ligne droite entre leurs points d'attache [MING et HIGUCHI, 1994; FANG et al., 2004; WISCHNITZER, SHVALB et SHOHAM, 2008].

**Élasticité des câbles** Lorsque l'amortissement est faible, des accélérations brutales ou des perturbations externes provoquent des oscillations qui dégradent le temps de réponse. Si les modes propres du système ne sont pas pris en compte et atténués par la loi de commande du RPC, ses performances peuvent être très fortement dégradées. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées pour rejeter ces vibrations. Les premières méthodes proposées utilisent exclusivement les enrouleurs pour commander cette réjection.

Dans [WEBER, CUVILLON et GANGLOFF, 2015], une commande modale est développée pour rejeter les vibrations dues à la flexibilité axiale des câbles. La dynamique du RPC est linéarisée le long de la trajectoire de l'effecteur et le modèle dynamique est projeté dans l'espace modal. Les modes vibratoires sont découplés dans l'espace modal et peuvent être amortis indépendamment par de simples correcteurs mono-variables (SISO, pour "Single Input- Single Output"). L'approche est validée expérimentalement sur un robot à six DDL. Comme la raideur, et donc les modes propres du RPC, varient en fonction de la pose courante, les gains des correcteurs SISO s'y adaptent. Cette technique de séquençement de gain ("gain scheduling") permet de conserver des performances satisfaisantes sur l'ensemble de l'espace de travail.

Dans [BEGEY et al., 2018], un RPC est actionné par des câbles flexibles et commandé pour suivre une trajectoire en utilisant : 1) une commande en position des enrouleurs pour contrôler l'élongation et donc la tension des câbles, 2) une stratégie de commande de type couple calculé (ou "*computed torque control*") qui inverse le modèle dynamique pour linéariser le système avant de corriger l'erreur résiduelle avec un correcteur PID. La théorie des perturbations singulières ("*singular perturbation theory*") est utilisée pour prouver la stabilité de la commande proposée.

Dans [JAMSHIDIFAR et al., 2018], le mouvement du robot étudié est découplé des modes vibratoires indésirables. Une commande robuste linéaire à paramètres variants (LPV- $H_\infty$ ) est utilisée pour minimiser l'effet de vibrations de la plateforme le long de la trajectoire et garantir un critère de stabilité. Le correcteur LPV- $H_\infty$  synthétisé utilise les degrés de redondance du robot pour modifier les tensions des câbles et éliminer les oscillations causées par les perturbations.

Dans [KHOSRAVI et TAGHIRAD, 2014], une stratégie de commande composite est présentée. Elle est constituée : 1) d'une commande par couple calculé pour le suivi de trajectoire basé sur le modèle du RPC avec des câbles considérés rigides et 2) d'un terme correcteur sur la variation de l'élongation des câbles pour garantir l'atténuation des vibrations dues à leur élasticité.

Une commande composite est également développée dans [BABAGHASABHA, KHOSRAVI et TAGHIRAD, 2016] où la stabilité de commande est validée grâce à la théorie des perturbations singulières. Elle se compose : 1) d'un correcteur adaptatif pour garantir un asservissement robuste aux incertitudes du modèle du RPC et 2) d'une commande rapide pour amortir les vibrations longitudinales des câbles, identique au travail précédemment cité.

Dans [KORAYEM, TAHERIFAR et TOURAJIZADEH, 2015], une commande par mode glissant ("*sliding mode control*") est utilisée pour atténuer les vibrations. Il s'agit d'une commande qui se base sur une surface de glissement sur laquelle commute la commande pour ramener le système à l'équilibre. Le calcul de cette surface est basé sur une fonction de Lyapunov liée à l'énergie du système et utilisée pour dissiper l'énergie vibratoire.

Dans [BAKLOUTI, CARO et COURTEILLE, 2019], une action "*feedforward*" est calculée à partir d'un modèle élasto-dynamique inverse pour compenser les oscillations dues à l'élasticité des câbles. Un PID a été synthétisé pour le rejet de perturbations et la stabilisation de la plateforme.

**Traction des câbles** Le câble peut déplacer la plateforme uniquement en la tirant. Quand il est détendu, il n'applique aucune force. La tension des câbles doit donc être toujours positive. Si un câble se détend, le robot perd un degré d'actionnement. Il faut prendre cette contrainte en compte dans la synthèse de la loi de commande pour veiller à ce que tous les câbles soient tendus en permanence.

Dans le cas où le degré de redondance est nul, les tensions appliquées par les câbles sur la plateforme s'obtiennent en inversant un système carré avec autant d'équations que d'inconnues. Il existe donc une solution unique de tension des câbles pour créer un torseur d'efforts donné sur la plateforme.

Pour respecter les contraintes de tension positives et bornées, certains algorithmes de planification de trajectoires, comme dans [OH et AGRAWAL, 2006], les introduisent sous forme d'inégalités à respecter tout le long de la trajectoire. Un correcteur basé sur une fonction de Lyapunov et un planificateur de trajectoire incluant les contraintes d'admissibilité sont proposés. Cet ensemble est formulé sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire qui retourne de manière séquentielle les tensions admissibles

permettant de suivre la trajectoire.

Dans [JIANG, BARNETT et GOSSELIN, 2018], une commande de suivi de trajectoire périodique est synthétisée, pour un robot suspendu par six câbles (voir Figure 2.11), dans le but d'étendre la synthèse de ses trajectoires au-delà de l'espace de travail statique. Cette approche exploite l'inertie du mouvement de l'effecteur pour atteindre temporairement des positions hors de l'espace de travail statique. Les conditions de positivité des tensions sont explicitées pour chaque type de trajectoires. Le robot suspendu est traité comme un ensemble de systèmes masses-ressorts non amortis pour faciliter la planification des trajectoires. En imposant certaines conditions sur le terme de translation et de rotation des trajectoires, les tensions sont maintenues positives le long des différentes trajectoires générées.

Dans [GOSSELIN, LEFRANÇOIS et ZOSO, 2010], un algorithme de planification de trajectoire point à point avec une vitesse nulle en ces points, intégrant les contraintes de positivité et d'admissibilité, a été développé pour créer un mouvement de balancement de l'effecteur d'un RPC suspendu.

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour vérifier que les câbles peuvent générer tout torseur d'efforts sur la plateforme et commander les différents DDL du robot [GOUTTEFARDE, 2016 ; KURTZ et HAYWARD, 1991]. Ce résultat est mentionné dans différents domaines :

- Dans le domaine aérospatial, plusieurs articles [CRAWFORD, 1969 ; SERVIDIA et PENA, 2002 ; CURTI, ROMANO et BEVILACQUA, 2010] portent sur le contrôle et la stabilisation de satellites actionnés par des propulseurs redondants pour contrôler leur orientation et leur itinéraire de vol en minimisant le temps de réponse et le coût d'énergie. Les satellites sont actionnés par des propulseurs fixés à leur plateforme. Ils ne peuvent exercer une force que selon une direction et dans un seul sens. Cette force ou poussée ne peut être que positive. Dans l'article [CRAWFORD, 1969], Crawford appelle "tâche" une fonction particulière à réaliser durant une phase donnée de la mission du satellite. Il stipule que le nombre de propulseurs  $n_a$  dont on a besoin pour garantir un tel objectif est  $n_a = D + 1$ , où  $D$  est la dimension de la tâche, soit le nombre de degrés de liberté commandés du système.
- Dans [VERHOEVEN, 2004 ; HILLER et al., 2005 ; MIKELSONS et al., 2008 ; POTT, BRUCKMANN et MIKELSONS, 2009], pour un système actionné par des tendons, le nombre de tendons  $m$  nécessaires pour manipuler un effecteur dépend directement du nombre de degrés de liberté  $n$  de la tâche ou trajectoire à effectuer. Le nombre de tendons  $m$  doit être au minimum  $m = n + 1$ .

Si le RPC est redondant ( $r \geq 1$ ), la matrice de configuration  $\mathbf{W}_c$ , reliant le torseur d'efforts et les différentes tensions des câbles, doit être nécessairement de rang plein pour un actionnement complet :

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{W}_c \boldsymbol{\tau} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{w}_c$  exprime le torseur d'efforts généré par les câbles et  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur des tensions. Si la matrice de configuration est de rang plein et si le système est redondant, les solutions pour les tensions sont :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_c^\dagger \mathbf{w}_c + \boldsymbol{\tau}_0 \quad (2.4)$$

avec  $\mathbf{W}_c^\dagger$  une pseudo-inverse, telle la pseudo-inverse de Moore-Penrose [JAMES, 1978], et  $\boldsymbol{\tau}_0$  une tension arbitraire dans le noyau ou espace nul de  $\mathbf{W}_c$ .

Dans cette section, les inconvénients introduits par les câbles dans la composition du RPC ont été mis en évidence. Pour résumer, la bande passante limitée des enrouleurs pénalise la bande passante de la force qui peut être créée avec les câbles. Cette bande passante est d'autant plus faible que les câbles sont longs et/ou flexibles.

Comme on cherche à améliorer la dynamique du RPC, il faut utiliser des actionneurs embarqués additionnels et de bande passante plus élevée que les enrouleurs, et envisager de nouvelles commandes autres que celles utilisées dans le cadre de l'élimination des vibrations par les enrouleurs.

## 2.6 Actionneurs embarqués

Dans la littérature, plusieurs travaux étudient l'ajout de dispositifs pour éliminer les vibrations d'un système oscillant peu amorti. On distingue deux catégories de dispositifs d'amortissement : passifs et actifs.

### 2.6.1 Stabilisation avec des dispositifs embarqués passifs et actifs

#### 2.6.1.1 Amortissement passif

Il s'agit d'amortir les vibrations d'une plateforme par l'ajout de ressorts et d'amortisseurs mécaniques (tels des silentblochs en caoutchouc).

Par exemple, l'amortisseur harmonique ("*tuned mass damper*") a été utilisé dans le domaine de l'automobile pour réduire le bruit du moteur et prolonger la durée de vie du vilebrequin [HENRICH, 1957]. Il a été également employé dans le domaine de l'amortissement des vibrations de bâtiment en cas de séismes [PETERSEN, 1980].

L'amortisseur harmonique consiste en une masse  $m_d$ , un ressort de raideur  $k_d$  et un amortisseur  $c_d$ , comme on peut le voir sur la Figure 2.13. Cet ensemble est attaché à la structure pour réduire l'amplitude de ses vibrations en cas d'excitation (vent, tremblement de terre ...).

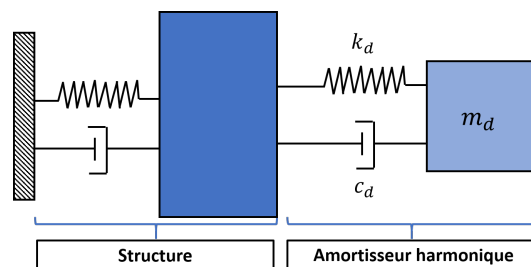


FIGURE 2.13 – Amortisseur harmonique attaché à une structure oscillante peu amortie [CONNOR, 2003]

Son principe est d'accorder sa fréquence naturelle à celle de la structure afin que l'amortisseur résonne en opposition de phase avec les vibrations de la structure. L'énergie mécanique de la structure sous l'effet de l'excitation est donc dissipée par l'amortisseur harmonique. La dissipation de l'énergie oscillatoire de la structure, et donc l'amortissement efficace de ses modes vibratoires naturels, sont garantis par le choix adéquat des paramètres de l'amortisseur harmonique. Dans [CONNOR, 2003], les équations régissant le choix des paramètres (masse, raideur et coefficient d'amortissement) de l'amortisseur harmonique sont données.

Des pendules peuvent être aussi utilisés pour éliminer les vibrations d'une structure [CONNOR, 2003]. Il suffit d'adapter leur fréquence de résonance  $\omega_d$  à la fréquence de

la structure en modifiant leur longueur  $l$ , telle que :  $\omega_d = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , où  $g$  représente la gravité. Un des exemples les plus remarquables est la boule d'amortissement de 600 t conçue pour le gratte-ciel Taipei 101 [KOURAKIS, 2007], voir Figure 2.14.

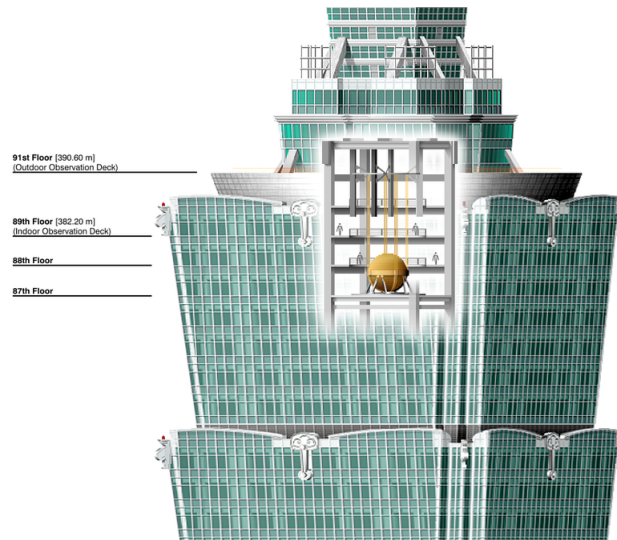


FIGURE 2.14 – Amortisseur harmonique du gratte-ciel Taipei 101 [*Tuned mass damper, Wikipedia s. d.*]

Il existe également des amortisseurs harmoniques liquides [RAI et al., 2013]. Une version composée de colonnes d'eau reliées par des tuyaux a été proposée originalement pour amortir le mouvement de roulis pour les navires [FRAHM, 1910].

Une limitation de ces amortisseurs mécaniques est qu'ils ne sont pas modulables et donc conviennent uniquement à l'amortissement d'une fréquence donnée.

Pour le cas d'un RPC, la fréquence d'oscillation dépend de la pose du robot. Un premier travail qui souligne ce point est [MONTGOMERY et VAUGHAN, 2017]. Un deuxième exemple est dans [LESELLIER, 2019] qui étudie la variation de la fréquence du robot suspendu CoGiRo en fonction de sa pose et qui relève qu'elle en dépend fortement.

On en conclut donc que ce type de dispositif d'amortissement non modulable ne convient pas à la structure d'un RPC, en particulier de type suspendu dont la raideur dépend de la position de la plateforme dans son espace de travail.

### 2.6.1.2 Amortissement actif

L'amortisseur actif utilise un capteur et un actionneur dans une boucle de rétroaction dans le but d'atténuer les vibrations. Une version de ce type d'amortisseur actif est un amortisseur à deux étages [CONNOR, 2003] (voir Figure 2.15). Le premier étage consiste en un amortisseur passif accordé à la fréquence désirée et le second est un amortisseur actif, plus petit, placé au-dessus du premier, qui permet de régler finement la fréquence à annuler.

Un autre exemple d'amortisseur, l'ADD ("*Active Damping Device*") de Micromega Dynamics, voir Figure 2.16, est utilisé pour annuler les vibrations sur le châssis du vérin d'une fraiseuse [ZULAIKA et CAMPA, 2009]. Le dispositif est composé d'un accéléromètre et d'une bobine acoustique contrôlée en fonction de la mesure d'accélération.



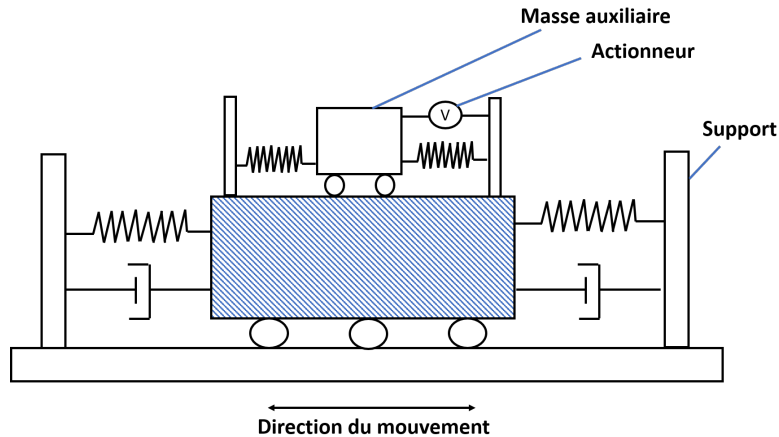


FIGURE 2.15 – Amortisseur passif-actif à deux étages



FIGURE 2.16 – Micromega Dynamics ADD-45N et son contrôleur

L'ADD peut être utilisé de manière autonome pour réduire les vibrations mesurées grâce au capteur embarqué. Sa plage de travail est comprise entre des fréquences de 20 Hz et 20 kHz.

## 2.6.2 Évaluation des actionneurs embarqués

Les actionneurs embarqués peuvent être utilisés comme des générateurs de torseur d'effort. Plusieurs effets sont utilisés pour créer ce torseur : gyroscopique, inertiel en rotation ou en translation. Le torseur d'efforts appliqué à l'effecteur peut être transitoire ou permanent. Les dispositifs actifs sont probablement les mieux adaptés aux RPC vu leur capacité à s'adapter aux variations de la réponse harmonique de la structure mécanique durant son déplacement.

Les paragraphes qui suivent détaillent une sélection d'actionneurs capables de réduire les vibrations sur un RPC avec des câbles flexibles. Les choix retenus, justifiés, seront ultérieurement évalués expérimentalement dans le cadre de la thèse.

### 2.6.2.1 Générateurs d'efforts transitoires

**Roue à réaction** Une roue à réaction est une masse en rotation utilisée pour générer un couple de réaction. Sa rotation est actionnée autour de son axe par un moteur. Le couple produit par la roue à réaction est de sens opposé au couple que le moteur applique à la roue.

Communément utilisé pour contrôler l'orientation des satellites [ISMAIL et VARATHARAJOO, 2010], ce mécanisme a été utilisé sur un RPC pour compenser les vibrations en rotation d'un robot [WEBER, CUVILLON et GANGLOFF, 2014]. Deux roues à inertie sont

embarquées sur le robot pour amortir les oscillations dans le plan et une troisième pour les oscillations hors plan.

Les limitations de ce type d'actionnement sont : 1) le couple de la roue à inertie ne peut pas excéder le couple maximal du moteur, 2) le couple appliqué accélère la roue à inertie, une fois que la roue à inertie atteint sa vitesse maximale, le couple devient nul. Par exemple en cas de perturbation constante, la roue à réaction atteindra sa vitesse maximale et saturera. Quand cela se produit, on a besoin d'autres dispositifs pour générer une force ou un moment afin d'éliminer la perturbation et réinitialiser la vitesse de la roue [SIDI, 1997a]. Ces limitations font que les roues à réaction ne sont pas très adaptées pour éliminer des vibrations à basse fréquence ainsi que pour produire un couple constant.

De plus, ces actionneurs étant plutôt dédiés au spatial, leur prix est conséquent à moins de les construire soi-même.

**Actionneur gyroscopique** C'est un dispositif souvent utilisé dans les satellites [LAPPAS, STEYN et UNDERWOOD, 2002], dans les bateaux [TOWNSEND, MURPHY et SHENOI, 2007] et les sous-marins [THORNTON et al., 2007], qui sert à stabiliser leur orientation. L'actionneur gyroscopique, décrit dans la Figure 2.17, est monté sur un axe perpendiculaire à l'axe de la roue.

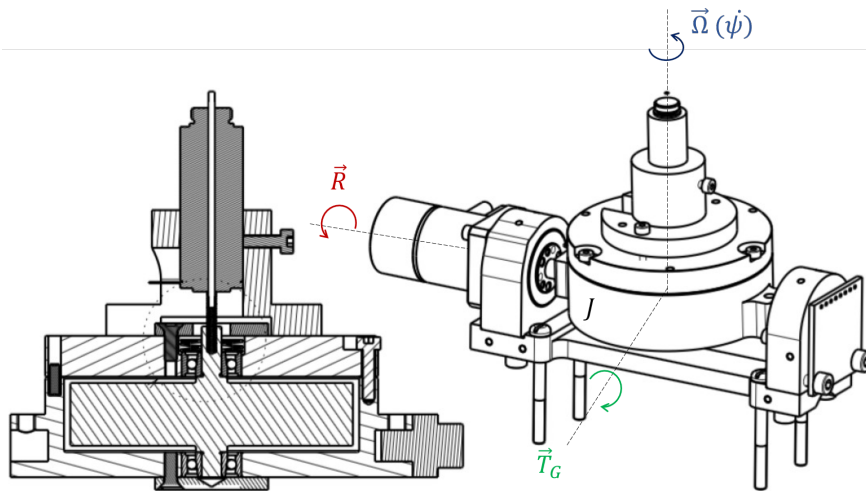


FIGURE 2.17 – Schéma d'un actionneur gyroscopique

Le couple créé par l'actionneur gyroscopique peut être exprimé par :

$$\vec{T}_G = J\vec{\Omega} \times \vec{R} \quad (2.5)$$

où  $\vec{T}_G$  est le couple gyroscopique,  $\vec{\Omega}$  la vitesse angulaire du gyroscope suivant son axe de révolution,  $J$  son moment d'inertie et  $\vec{R}$  est la vitesse de précession.

D'après l'équation (2.5), le couple de cet actionneur dépend de la bande passante de l'asservissement de vitesse du moteur actionnant la précession  $\vec{R}$ . Comme la précession dévie l'axe gyroscopique, la direction du couple généré est en conséquence modifiée. Donc, l'actionneur gyroscopique permet de générer instantanément des couples élevés, mais il ne permet pas de les maintenir longtemps dans une direction donnée.

**Masse en translation linéaire** Une masse actionnée suivant une translation peut produire des forces transitoires, en vertu de la troisième loi de Newton, "pour toute action, il y a une réaction égale et opposée". Considérons un actionneur fixé à un



support et exerçant une force sur une masse. Sous l'effet de cette force, la masse se déplace et une force opposée est générée sur le support.

Ce dispositif a été précédemment utilisé pour stabiliser des bâtiments [DIAZ et REYNOLDS, 2009] et des structures aérospatiales [ZIMMERMAN et INMAN, 1990]. La durée d'application de la force dépend du débattement autorisé pour la translation de la masse. Donc, plus ce débattement est petit, plus la force appliquée sera transitoire. Les moteurs linéaires "direct drive" peuvent être utilisés pour générer de telles forces. Un exemple de ce dispositif, commercialisé par la société EteI™, est illustré dans la Figure 2.18.



FIGURE 2.18 – Actionneurs linéaires EteI™

**Bras en rotation** Une masselotte est fixée à l'extrémité d'un bras rotatif de longueur fixe. Cet ensemble constitue un pendule actionné.

Son mouvement permet d'exercer un torseur d'effort sur le système sur lequel on l'embarque. Ce système a été utilisé dans [HE et al., 2008] pour stabiliser un robot sauteur ("hopper") en plein saut (voir Figure 2.19). Il a aussi été utilisé sur un RPC plan pour éviter les mouvements hors plan [RUSHTON et KHAJEPOUR, 2016, RIJK, RUSHTON et KHAJEPOUR, 2018] et sur un robot parallèle à câble hybride [QI et al., 2019] : à la différence des RPC, ces robots disposent de bras de robot série montés sur leur plateforme [QI, KHAJEPOUR et MELEK, 2019] ou de systèmes mécaniques comme les pendules [QI et al., 2019] pour exécuter des tâches spécifiques.

Les bras en rotations ont également été employés dans [LESELLIER et al., 2018] pour la stabilisation active d'un RPC suspendu hybride embarquant un robot six axes anthropomorphe (voir Figure 1.1).

Ces bras en rotation altèrent la dynamique de la plateforme en modifiant son inertie. En fin de réjection, il faut assurer le retour en position nominale des bras. Celui-ci doit se faire le plus lentement possible pour minimiser le torseur de réaction et ne pas déstabiliser la plateforme.

### 2.6.2.2 Générateurs d'efforts persistants

Un générateur d'efforts persistants peut être utilisé pour compenser l'action d'un torseur externe sur l'effecteur provoqué par des perturbations ou par des tâches au contact. Le générateur doit être capable de produire et de maintenir un torseur constant de même amplitude et de sens opposé au torseur externe.

**Masse en mouvement** Ce dispositif est utilisé dans les grues (voir Figure 2.20), pelleuses et bulldozers par exemple, pour compenser le couple de basculement créé quand ils soulèvent une charge. Il est possible de générer un moment constant en déplaçant une masse embarquée sur ces véhicules. Si la projection du centre de gravité

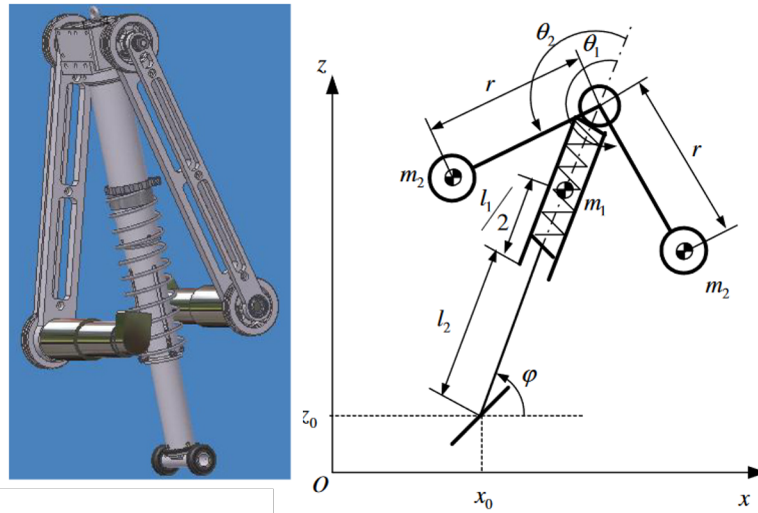


FIGURE 2.19 – Modèle 3D et schéma du robot "hopper" utilisant des bras en rotation [HE et al., 2008]

de l'ensemble (véhicule, masse embarquée et charge) ne se situe pas dans le polygone de stabilité du véhicule, celui-ci risque de basculer. On peut donc garantir sa stabilité en déplaçant la masse.

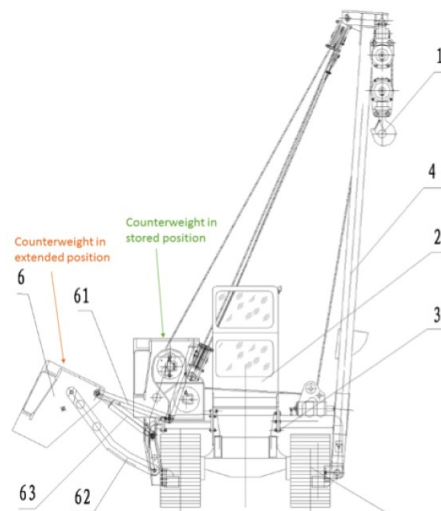
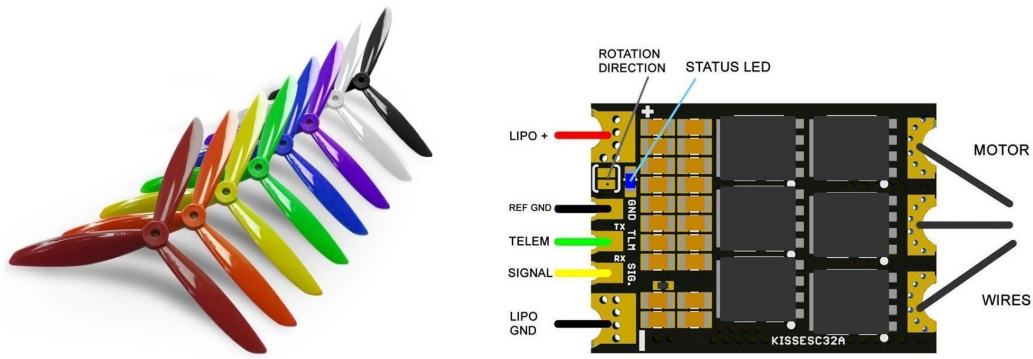


FIGURE 2.20 – Grue stabilisée par un contrepois mobile

**Propulseurs à hélices** Les hélices de drone, voir Figure 2.21a, peuvent également être utilisées pour générer des torseurs persistants. L'amplitude de la force créée dépend du carré de la vitesse de rotation de l'hélice. La constante de temps des moteurs de quadcoptères associée à leur variateur de vitesse (ESC pour "Electronic speed control"), voir Figure 2.21b, se situe entre 0.1 s et 0.3 s [FILATOV et al., 2016]. Ce sont donc des actionneurs qui semblent très intéressants à embarquer pour le rejet de perturbation. Cette technologie est l'une des solutions retenues dans cette thèse et sera davantage détaillée dans le chapitre 5.

**Propulseurs à air comprimé** Les propulseurs à air comprimé peuvent aussi être utilisés pour générer des forces persistantes sur l'effecteur dans le sens opposé au flux



(A) Hélices tripales DALprop TJ4045

(B) Variateur de vitesse KISS 32A

FIGURE 2.21 – Exemple d'hélices et d'ESC

de l'air. L'établissement de la force de poussée des jets d'air comprimé entre l'ouverture de la vanne et la mesure de la force est très rapide, voire quasi-instantané, par rapport à la dynamique d'enroulement/déroulement des câbles d'un RPC. L'amplitude de cette force est fonction du débit de gaz comprimé, sa masse volumique et la forme de la tuyère d'échappement. L'air comprimé peut être stocké dans un réservoir situé sur l'effecteur ou être acheminé au travers de tuyaux flexibles. Cette technologie est aussi une solution retenue dans cette thèse et sera davantage détaillée dans le chapitre 4.

### 2.6.3 Choix et motivations

Les dispositifs embarqués doivent respecter le cahier des charges suivant :

- être le plus compact et le plus léger possible pour faciliter leur intégration sur la plateforme et ne pas altérer l'inertie de la plateforme.
- être capable de générer des torseurs persistants, pour compenser des perturbations externes constantes (vent, contact ...).
- avoir une bande passante plus élevée que celle des enrouleurs. L'intérêt majeur d'introduire des actionneurs embarqués est d'améliorer la dynamique du RPC en rejetant rapidement des vibrations ou effectuant des trajectoires rapides, inaccessibles avec la seule action des enrouleurs.

Le tableau 2.1 dresse une comparaison entre les différents dispositifs envisageables à embarquer sur le RPC. Ce tableau de comparaison nous apprend que les roues à réaction possèdent une plus grande bande passante. Mais, elles ne permettent de générer que des moments. Il en est de même pour les actionneurs gyroscopiques qui de plus sont complexes à construire et mettre en oeuvre. Il reste les masses en translation et les bras en rotation, étudiés précédemment dans le cadre du projet DexterWide par [LESELLIER, 2019], qui n'autorisent qu'un effort transitoire car le débattement maximal possible pour la masse est rapidement atteint. Finalement, seuls les propulseurs à air comprimé et les propulseurs à hélices permettent de générer un torseur d'effort persistant. Les jets d'air ont une bande passante élevée avec un temps de réponse très court. Mais, ils sont complexes à alimenter et à commander avec des valves tout ou rien. De plus, la masse à embarquer est importante à cause de la nécessité d'avoir une réserve locale d'air comprimé. Ils seront explorés en détail durant cette thèse (chapitre 4). Les hélices de drone ont une bande passante un peu moindre que les propulseurs

à air comprimé. Mais, ils sont plus simples à mettre en œuvre et à alimenter. Ces actionneurs sont aussi très légers, car ils héritent des contraintes de poids présentes dans le domaine des drones. Les hélices de drone seront également investiguées durant cette thèse (chapitre 5).

	Torseur persistant	Force transitoire	Moment transitoire	Bande passante	Poids	Taille	Complexité
AG	×	×	✓	+	+	-	-
MT	×	✓	✓	++	+	+	+
PA	×	✓	✓	++	+	+	+
RR	×	×	✓	++	+	+	+
JA	✓	✓	✓	+++	-	-	-
HL	✓	✓	✓	+	++	++	++

[AG : Actionneur Gyroscopique], [MT : Masse en Translation], [PA : Pendule Actionné], [RR : Roue à Réaction], [JA : Jets d’Air], [HL : Hélice], [✓ : capable de générer], [× : incapable de générer], [+++ : très avantageux], [++ : avantageux], [+ : assez avantageux], [- : désavantageux]

TABLEAU 2.1 – Comparaison des dispositifs d’actionnement embarqués

## 2.7 Allocation des actionneurs

Les dispositifs retenus dans cette thèse sont les propulseurs à air et à hélices. Nous avons fait le choix de les fixer à la plateforme de telle sorte qu’ils ne puissent générer une force que dans un sens, le long d’une direction fixe par rapport à l’effecteur. On les appellera des générateurs de force unilatérale.

En embarquant des actionneurs sur la plateforme du RPC (suspendu) non redondant, l’ensemble forme un système sur-actionné.

Le problème d’allocation des actionneurs s’apparente au problème de distribution des tensions des câbles. Les tensions des câbles sont bornées par une valeur maximale, dite valeur de saturation. Mais, comme le câble ne peut que tirer, sa tension doit aussi être positive. Il en est de même pour les générateurs de force unilatérale. Aussi, ils ne peuvent pas dépasser leur valeur maximale de poussée.

### 2.7.1 Définition du problème d’allocation

Le sur-actionnement et les divers niveaux de saturation des actionneurs soulèvent la question de l’allocation des différents actionneurs, c’est-à-dire comment générer la loi de commande demandée en la distribuant à chaque actionneur individuellement. Ce sujet a été traité dans plusieurs domaines, notamment :

- Aérospatial et aéronautique : [SIDI, 1997b ; DURHAM, 1993 ; BODSON, 2002 ; HÄRKEGÅRD, 2004 ; ZHANG et al., 2007].
- Naval : [SØRDALEN, 1997 ; GARUS, 2004 ; FOSSEN et JOHANSEN, 2006 ; CHRISTIAAN, 2009 ; POPPE et al., 2010 ; JOHANSEN et FOSSEN, 2013].
- Automobile et autres véhicules : [AXEHILL et SJÖBERG, 2003 ; TJONNAS et JOHANSEN, 2009 ; CHEN et WANG, 2011].

La loi de commande en position d’un système avec redondance d’actionnement en efforts peut se décomposer en trois étapes [JOHANSEN et FOSSEN, 2013], comme représentée sur la Figure 2.22 :

**1- Commande bas-niveau des actionneurs :** Chaque actionneur a sa régulation individuelle afin d’asservir sa sortie (moment ou force)  $\mathbf{w}$ , à la grandeur de

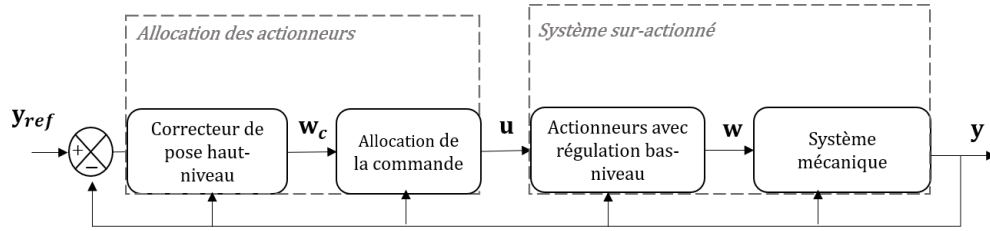


FIGURE 2.22 – Allocation des actionneurs d'un système sur-actionné, où  $\mathbf{w}_c$  est le torseur d'effort "virtuel" désiré et  $\mathbf{w}$  le torseur d'effort effectif

consigne  $\mathbf{u}$ . Par exemple, dans le cas des propulseurs à hélices, la force de poussée est asservie en régulant la vitesse de rotation de l'hélice en boucle fermée par un correcteur PID interne.

**2- Asservissement haut-niveau du système :** La première étape consiste à calculer l'effort  $\mathbf{w}_c$  qu'il faudra exercer sur le système pour atteindre un certain objectif (rejet de perturbations ou suivi de trajectoire).

On considère un système dynamique non linéaire affine vis-à-vis de sa commande :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'états,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des sorties à asservir du système et  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de ses entrées (commandes) et  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions de  $\mathbf{x}$  telles que  $f$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires.

L'effort, produit par les différents actionneurs après allocation, appliqué sur la plateforme est noté  $\mathbf{w}$  (Figure 2.22). Il doit tendre vers la commande haut-niveau  $\mathbf{w}_c$ , soit le torseur d'efforts désiré.

**3- Allocation des actionneurs :** Le torseur d'efforts est généré en commandant les différents actionneurs embarqués sur le système.

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U} \quad (2.8)$$

La matrice de configuration  $\mathbf{W}$  permet de lier les différentes forces des actionneurs  $\mathbf{u}$  au torseur d'efforts  $\mathbf{w}$  appliqué au système.  $\mathbf{U}$  est l'espace des efforts admissibles des actionneurs tenant compte des saturations.

Les actionneurs sont bornés physiquement en termes d'amplitude ou en vitesse de variation. La limitation sur la vitesse de variation a été traitée dans les articles [DURHAM et BORDIGNON, 1996 ; HÄRKEGÅRD, 2004 ; JOHANSEN et FOSSEN, 2013], où la vitesse de variation est définie par :

$$\dot{u} = \frac{u(t) - u(t - T)}{T} \quad (2.9)$$

avec  $T$  la période d'échantillonnage de la commande numérique.

On peut écrire les contraintes en amplitude et en taux de variation sous la forme :

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

$$\dot{u}_{\min} \leq \dot{u} \leq \dot{u}_{\max}$$

où  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$  sont les saturations en amplitude et  $\dot{u}_{\min}$  et  $\dot{u}_{\max}$  en taux de variation des actionneurs.

L'effort désiré en sortie du bloc de l'asservissement de haut niveau est appelé entrée virtuelle ("*virtual input control*") chez [FOSSEN et JOHANSEN, 2006] et noté  $\mathbf{w}_c$ . Comme souligné précédemment, les actionneurs ne peuvent pas fournir exactement le torseur d'efforts souhaité  $\mathbf{w}_c$ . Au travers de la matrice de configuration  $\mathbf{W}$  et en tenant compte des saturations ( $\mathbf{U}$ ), ils génèrent un effort en entrée du système  $\mathbf{w}$  (2.8). L'objectif est de faire converger l'effort virtuel vers l'effort possible en respectant les saturations des actionneurs. Dans le cas où leurs limitations physiques ne permettraient pas de générer l'effort désiré  $\mathbf{w}_c$ , on cherche à minimiser l'erreur d'allocation en dégradant donc les performances. Ce problème de minimisation s'écrit sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \|\mathbf{R}\mathbf{s}\| \quad (2.10)$$

$$\text{tel que } \mathbf{s} = \mathbf{w}_c - \mathbf{w} \quad (2.11)$$

$$= \mathbf{w}_c - \mathbf{W}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{U}$  représente l'ensemble des commandes des actionneurs respectant leurs saturations et limites physiques et  $\mathbf{R}$  est une matrice de pondération.

Dans le cas où le système est sur-actionné, on a une liberté de choix des combinaisons de forces des actionneurs. Ceci nous permet de définir des objectifs secondaires, comme la minimisation de l'énergie de la commande.

### 2.7.2 Résolution du problème non contraint

Soit le torseur d'effort  $\mathbf{w}$  que l'on souhaite générer. Il faut nécessairement embarquer sur le système un nombre d'actionneurs au moins égal au degré de liberté de la plateforme que l'on souhaite contrôler. Le rang de la matrice de configuration  $\mathbf{W}$  doit être nécessairement plein pour contrôler le nombre des directions commandables du système.

#### Cas non redondant :

Si le nombre d'actionneurs est égal au nombre des degrés de liberté du système, la matrice de configuration est alors carrée. Les forces des propulseurs sont directement calculées en inversant la matrice de configuration de rang plein.

Dans le cas d'un problème planaire, qui nous intéresse particulièrement dans le reste de cette thèse, on crée un torseur d'effort de dimension trois (une force  $F_y$  suivant l'axe  $y$ , une force  $F_z$  suivant l'axe  $z$  et un moment suivant l'axe  $x$ ) sur la plateforme dotée de trois propulseurs. L'allocation s'exprime donc comme suit :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont les poussées des trois propulseurs.

La solution du problème d'allocation pour le cas non redondant est alors :

$$\mathbf{u}_{3 \times 1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w} \quad (2.14)$$

tel que  $\mathbf{W}^{-1}$  est l'inverse de la matrice de configuration carrée.

### Cas redondant :

Si le nombre des actionneurs est supérieur au nombre de degrés que l'on souhaite commander, le système est redondant. La matrice de configuration n'est alors pas carrée. Le problème d'allocation admet plusieurs solutions. En effet, plusieurs combinaisons des forces des propulseurs donnent un même torseur d'effort désiré.

L'espace nul de  $\mathbf{W}$ , ou le noyau de l'application  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}$ , est de dimension  $r > 0$ .

La solution particulière à ce problème est exprimée par l'équation :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{w} \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{W}^\dagger$  est la pseudo-inverse de la matrice de configuration de rang plein  $\mathbf{W}$ .

La solution générale  $\mathbf{u}$  pour le cas redondant s'exprime en fonction de l'espace nul de  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathcal{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (2.16)$$

où  $\mathcal{N}$  est la base de l'espace nul et  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur de dimension  $r$ .

Par exemple, pour créer le torseur de dimension trois pour le système plan précédent, sur une plateforme dotée de quatre actionneurs, le problème d'allocation s'écrit alors :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Comme on peut le voir, ce degré de redondance  $r = 1$  permet d'obtenir différentes solutions pour le problème d'allocation. Pour chaque valeur du scalaire  $\lambda$ , les forces des propulseurs prennent différentes valeurs.

### 2.7.3 Résolution du problème contraint

Pour les RPC redondants, la plupart des algorithmes de distribution de tension font appel à une optimisation sous contraintes, avec des variantes dans la fonction de coût et les contraintes prises en compte.

Ces algorithmes de distribution des tensions peuvent être exprimés sous forme de programmation linéaire [FANG et al., 2004] ou d'optimisation quadratique [BRUCKMANN, POTT et HILLER, 2006]. L'avantage de la programmation linéaire est sa simplicité et donc son temps de calcul réduit. Toutefois, elle n'assure pas la continuité de la tension du câble d'un point à un autre de la trajectoire. Au contraire, l'optimisation quadratique est plus coûteuse en termes de calcul, mais garantit la continuité des tensions et assure l'existence d'une solution en l'absence de contrainte.

D'autres algorithmes utilisent l'analyse par intervalles pour la distribution optimale des tensions et pour garantir sa faisabilité [GOUTTEFARDE, DANAY et MERLET, 2010]. Gouttefarde et Lamaury présentent un algorithme versatile de distribution de tensions pour des RPC avec un degré de redondance égal à deux [GOUTTEFARDE et al., 2015a]. Mikelson introduit un algorithme temps-réel pour des RPC redondants ( $r = 1$ ) [MIKELSONS et al., 2008].



Afin de créer les forces sur le système sans saturer les différents actionneurs, plusieurs méthodes d'allocation ont été adoptées.

1. **Allocation directe :**

Les premiers travaux, présentant cette méthode, ont été établis par [DURHAM, 1993 ; DURHAM, 1994]. Elle consiste à calculer d'abord la solution non contrainte du problème (2.15). Il en résulte l'effort à appliquer sur le système. L'idée est de recalculer ensuite la commande qui veillera à préserver la direction du torseur à exercer, sans saturer les différents actionneurs, garantissant ainsi l'objectif de la commande.

En d'autres termes, on calcule la grandeur de commande  $u^*$  qui produit la valeur maximale de l'entrée virtuelle commandée  $\mathbf{w}_c^*$  et qui génère le torseur maximal possible dans la direction de  $\mathbf{w}_c$  (solution non contrainte). Ce problème a été reformulé par [BODSON, 2002] en un problème d'optimisation :

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} \beta \quad \text{tel que} \quad \beta = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_c}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$$

où  $\beta \in ]0, 1]$  est le gain entre le torseur commandé  $\mathbf{w}_c$  et le torseur que l'on peut générer avec les actionneurs suivant la direction de  $\mathbf{w}$ .

2. **Programmation linéaire :**

Elle consiste à reformuler le problème contraint en un problème de programmation linéaire. Plusieurs manières de formuler ce problème ont été présentées dans [BODSON, 2002 ; PETERSEN et BODSON, 2005 ; OPPENHEIMER, DOMAN et BOLENDER, 2010 ; JOHANSEN et FOSSEN, 2013].

Les méthodes numériques les plus souvent utilisées pour la résolution du problème de programmation linéaire sont l'algorithme du simplexe, la méthode des ensembles actifs et l'algorithme de points intérieurs [NOCEDAL et WRIGHT, 2006 ; JOHANSEN et FOSSEN, 2013].

3. **Optimisation quadratique :**

Pour le calcul de puissance optimale des actionneurs, il faut nécessairement exprimer le problème d'allocation sous une forme quadratique [HÄRKEGÅRD, 2004]. La fonction visant à minimiser la consommation énergétique s'écrit donc :

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (2.18)$$

Il est possible de l'exprimer sous forme d'une fonction pondérée :

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u} \quad (2.19)$$

$$\text{tel que} \quad \mathbf{w}_c = \mathbf{W}\mathbf{u} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{U} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{R}$  est une matrice de pondération.

La formulation quadratique du problème est la plus utilisée parce que le problème admet une solution explicite en l'absence des contraintes [HÄRKEGÅRD, 2004]. Les algorithmes de programmation quadratique sont généralement considérés plus robustes [CHRISTIAAN, 2009]. Aussi, contrairement au problème d'optimisation linéaire, elle fournit une solution optimale unique (ensemble de solutions admissibles strictement convexe), ce qui en fait donc une méthode adaptée pour le calcul en ligne de la solution.

Les problèmes d'optimisation quadratique sont résolus par les méthodes numériques des ensembles actifs et de points intérieurs [HÄRKEGÅRD, 2002 ; NOCEDAL et WRIGHT, 2006 ; JOHANSEN et FOSSEN, 2013].



#### 4. Allocation prédictive des actionneurs :

Parmi les algorithmes d'allocation, c'est une méthode qui reformule l'ensemble du problème d'allocation sous un formalisme de commande prédictive. Elle résout le problème d'optimisation sur un horizon fuyant en optimisant une fonction coût qui respecte les différentes contraintes en amplitude et de vitesse de variation d'amplitude des actionneurs [LUO et al., 2004]. Le calcul de la commande et l'allocation se font de manière simultanée, en une seule étape, comme on peut le voir sur la Figure 2.23. Une même optimisation comprend à la fois le calcul du torseur à générer et l'allocation des différents actionneurs en respectant leurs contraintes pour produire le torseur calculé.

On peut intégrer directement dans le modèle complet du système le modèle des actionneurs pour un comportement plus réaliste. Dans [VEKSLER et al., 2016], un correcteur prédictif prenant en compte les limitations des actionneurs est proposé. Le correcteur calcule le torseur nécessaire pour le positionnement dynamique d'un bateau et alloue directement les actionneurs redondants embarqués.

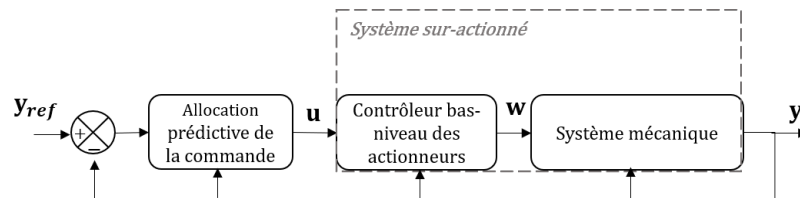


FIGURE 2.23 – Allocation prédictive d'un système sur-actionné

L'approche prédictive sera privilégiée dans cette thèse. Plusieurs stratégies seront ainsi mises en œuvre dans les chapitres suivants dans le but d'améliorer la dynamique de RPC suspendus non redondant en câbles mais sur-actionnés de par l'ajout de dispositifs embarqués : propulseurs à air comprimé (chapitre 4) ou à hélice de drone (chapitre 5). L'approche prédictive permettra de gérer la dynamique lente des câbles et la dynamique plus rapide des générateurs de force unilatérale embarqués, de même que leurs contraintes (allocation, saturations, actionneurs tout ou rien...).

Auparavant, nous devons nous intéresser à la modélisation du système, un RPC suspendu non contraint avec des actionneurs embarqués (chapitre 3). Le modèle obtenu sera nécessaire à la validation en simulation mais surtout à la commande prédictive qui est basée modèle.

## Chapitre 3

# Modélisation du robot parallèle à câbles

L'étape de modélisation est une étape indispensable à la synthèse de lois de commande avancées. Un modèle dynamique permet de décrire le comportement d'un système en fonction de ses entrées et du temps.

Dans le cas des RPC, on s'intéresse dans un premier temps au modèle des câbles qui sont l'organe de transmission des efforts, et donc un élément clé du modèle. On opte ici pour le modèle linéaire élastique non pesant qui s'avère le plus pertinent dans notre cadre d'étude d'après l'état de l'art vu dans le chapitre précédent. Une fois ce modèle établi, le modèle géométrique inverse du robot est développé. Ce modèle permet de calculer les coordonnées articulaires, c.-à-d. la longueur des câbles, en fonction de la pose courante de l'effecteur. Le modèle dynamique du robot actionné par les câbles est alors établi. Ce modèle dynamique est ensuite augmenté avec l'action des générateurs de forces embarqués.

Finalement, la linéarisation du modèle dynamique complet est détaillée. Ce modèle sera utilisé dans la suite pour l'une des commandes synthétisées. On appliquera ces modèles au cas d'un robot plan à trois degrés de liberté.

### 3.1 Repères et notations

Le robot à câbles consiste en une plateforme mobile liée à une base fixe à l'aide de  $n_c$  câbles (voir Figure 3.1). On définit le repère galiléen (ou inertiel)  $\mathcal{F}_g$  d'origine  $\mathbf{O}$ , fixe par rapport au monde, et le repère  $\mathcal{F}_p$  solidaire du corps de la plateforme mobile et attaché au centre de gravité  $\mathbf{G}$  de la plateforme.

La plateforme peut se déplacer suivant  $n$  degrés de liberté en modifiant la longueur des câbles. La première extrémité du câble est attachée au tambour d'une poulie. Cette poulie est en général solidaire de la base fixe, mais peut aussi dans certains cas être montée sur la plateforme. Dans les deux cas de figure, la modélisation demeure inchangée. On nomme  $\mathbf{A}_i$ , le point fixe d'arrimage du  $i^{\text{ème}}$  câble. Ses coordonnées sont exprimées dans le repère inertiel sous forme du vecteur  ${}^g\mathbf{OA}_i = {}^g\mathbf{a}_{ci}$ . L'autre extrémité est reliée à la plateforme au point d'arrimage  $\mathbf{B}_i$ . Ses coordonnées sont exprimées dans le repère lié à la plateforme  $\mathcal{F}_p$  sous forme du vecteur  ${}^p\mathbf{GB}_i = {}^p\mathbf{b}_{ci}$ .

La matrice de rotation entre le repère inertiel  $\mathcal{F}_g$  et le repère attaché à la plateforme mobile  $\mathcal{F}_p$  est notée  $\mathbf{R}_{gp}$ . Cette matrice permet d'effectuer un changement de base et d'obtenir l'expression dans le repère inertiel d'un vecteur  ${}^p\mathbf{v}$ , exprimé dans le repère mobile :

$${}^g\mathbf{v} = \mathbf{R}_{gp} {}^p\mathbf{v} \quad (3.1)$$

La formule de Bour permet d'exprimer la dérivée temporelle d'un vecteur par rapport au repère  $\mathcal{F}_g$  en fonction de sa dérivée par rapport à un autre repère  $\mathcal{F}_p$ .

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right)_g = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right)_p + \boldsymbol{\omega}(p/g) \times \mathbf{v} \quad (3.2)$$

où la rotation  $\mathcal{F}_p$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{F}_g$  est décrite par le vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(p/g)$ .

Si le vecteur  ${}^p\mathbf{v}$  est fixe dans le repère attaché à la plateforme  $\mathcal{F}_p$  alors sa dérivée  $\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right)_p$  est nulle.

Soit  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T \in \mathbb{R}^n$  la pose de l'organe terminal exprimée dans le repère inertiel  $\mathcal{F}_g$ . Elle définit la position de la plateforme  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$  avec  $\mathbf{p}$  le vecteur des coordonnées du centre de gravité  $G$  de la plateforme exprimé dans le repère fixe. Son orientation  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T$  est définie par un triplet d'angles d'Euler.

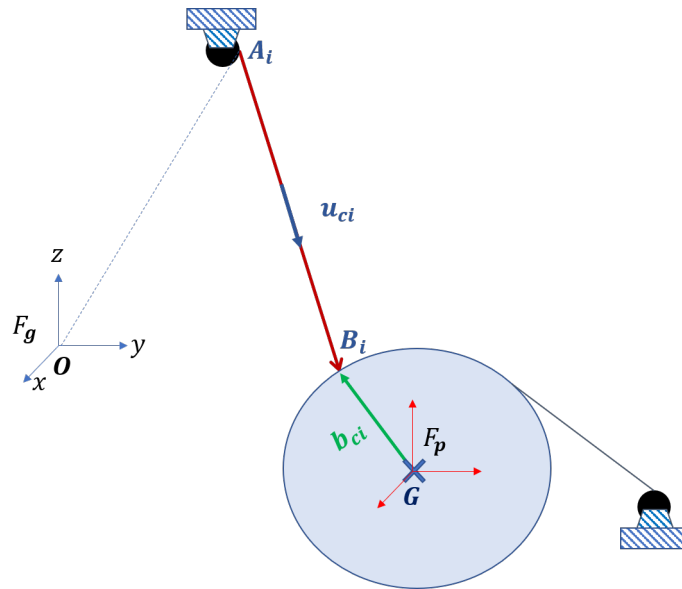


FIGURE 3.1 – Notations et repères définis pour la modélisation

## 3.2 Modèle des câbles

### 3.2.1 Modèle linéaire élastique

Les câbles sont entre autres caractérisés par leur élasticité. Ce paramètre est considéré constant et relatif au matériau de fabrication et/ou tressage du câble.

Il est nécessaire de faire des tests de traction pour vérifier que le modèle théorique correspond bien au comportement réel du câble, comme dans [RIEHL, 2011 ; WEBER, 2016].

Les câbles utilisés durant cette thèse sont des polymères tressés, considérés comme des solides élastiques [WEBER, 2016]. Avec ce type de câble, la masse linéique est négligeable. Comme indiqué dans [BOUCHARD, 2008], l'affaissement des câbles est alors négligeable. On peut donc modéliser le câble avec le modèle linéaire élastique.

Le câble est modélisé comme étant un ressort linéaire dont la masse est négligeable.

Quand celui-ci est sous tension, sa géométrie est une ligne droite entre les points  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ . Sa longueur géométrique  $l_1(\mathbf{x})$ , est un scalaire défini par :

$${}^s\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = l_1 \mathbf{s}\mathbf{u}_{ci} \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{s}\mathbf{u}_{ci}$  est le vecteur directeur unitaire du câble  $i$  (Figure 3.1).

### 3.2.2 Longueur à vide et longueur en charge du câble

Considérons un câble enroulé autour du tambour de sa poulie. Quand aucune masse n'y est attachée, la tension du câble est nulle. Sa longueur correspondante est appelée longueur à vide. La longueur à vide est notée  $l_2$ .

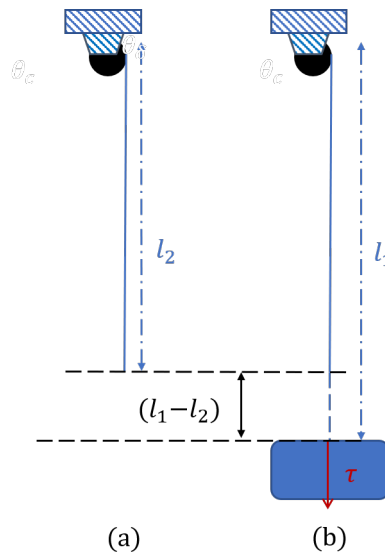


FIGURE 3.2 – Poulie bloquée : (a) Traction nulle sur le câble, (b) Traction positive sur le câble

Si une charge est ajoutée, la nouvelle longueur, due à l'élasticité du câble est appelée longueur géométrique ou en charge. Elle est notée  $l_1$  (voir Figure 3.2). La tension du câble liée à son élongation est  $\tau$ .

### 3.2.3 Tension du câble

Conformément à la loi de Hooke, la tension  $\tau$  du câble et son élongation sont liées par l'équation avec  $k_c(l_2) = \frac{k_s}{l_2}$  (cf. eq. 2.2) :

$$\tau = k_c(l_2)[l_1 - l_2] \quad (3.4)$$

Un câble ne peut que tirer et pas pousser, on parle de force unilatérale. La tension est ainsi définie ici par un scalaire  $\tau > 0$ . Ceci implique que la longueur en charge du câble  $l_1$  doit être toujours supérieure à sa longueur à vide :

$$\tau > 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 > l_2 \quad (3.5)$$

Si l'on considère que la tension appliquée à la portion de câble enroulée autour du tambour est nulle, la longueur à vide  $l_2$  est alors directement liée à la position de la poulie :

$$l_2 = r \theta_c \quad (3.6)$$

avec  $\theta_c$ , la position angulaire de la poulie, et  $r$ , le rayon du tambour de l'enrouleur. Pour ajuster sa longueur à vide et donc sa tension, le câble peut être enroulé autour d'un tambour actionné par un actionneur rotatif.

### 3.2.4 Torseur d'effort exercé par les câbles du RPC

Pour un RPC à  $n_c$  câbles, la longueur en charge et la longueur à vide de l'ensemble des câbles sont notées respectivement :

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} l_{1_1} \\ \vdots \\ l_{1_{n_c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} l_{2_1} \\ \vdots \\ l_{2_{n_c}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le vecteur d'élongations des câbles est  $[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2]$ .

En enroulant et en déroulant le câble, la longueur à vide  $\mathbf{l}_2$  et donc la tension des câbles peuvent être modifiées. Le vecteur  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n_c}$  exprime les tensions des  $n_c$  câbles appliquées à la plateforme en tenant compte des phénomènes de frottement visqueux :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2] \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{F}_c = \text{diag}(f_c, \dots, f_c)$ , avec  $f_c$  le coefficient de friction interne des câbles,  $\mathbf{K}_c = \text{diag}(\frac{k_s}{l_{2_1}}, \dots, \frac{k_s}{l_{2_{n_c}}})$ , est la matrice diagonale des raideurs de câbles et  $k_s$  est la raideur spécifique des câbles.

## 3.3 Modélisation du RPC

### 3.3.1 Modèle géométrique inverse

L'équation décrivant les coordonnées articulaires  $\mathbf{l}_1$  du robot en fonction de ses coordonnées opérationnelles  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$  s'exprime [DIAO et MA, 2009] par :

$$l_{1_i}(\mathbf{x}) = \|\mathcal{A}_i \mathbf{B}_i\|_2 = \|(\mathbf{p} + {}^s \mathbf{b}_{ci}) - {}^s \mathbf{a}_{ci}\|_2, \quad i = 1 \dots n_c \quad (3.9)$$

$$= \|(\mathbf{p} + \mathbf{R}_{gp} {}^p \mathbf{b}_{ci}) - {}^s \mathbf{a}_{ci}\|_2 \quad (3.10)$$

où  ${}^s \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$  et  ${}^s \mathbf{a}_{ci}$  sont les vecteurs entre les points d'attache du câble  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  dans le repère inertiel et les coordonnées du point  $\mathbf{A}_i$  respectivement, exprimés dans le repère inertiel.

### 3.3.2 Modèle cinématique

#### 3.3.2.1 Jacobienne du robot

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  relie les vitesses opérationnelles  $\dot{\mathbf{x}}$  de l'effecteur à ses vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{l}}_1$  :

$$\dot{\mathbf{l}}_1 = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

avec  $\dot{\mathbf{p}}$  la vitesse de la plateforme et  $\boldsymbol{\omega}$  sa vitesse angulaire.

Elle est obtenue en dérivant le modèle géométrique inverse du RPC (3.9). La vitesse

articulaire du câble  $i$  est ainsi :

$$\dot{\mathbf{i}}_{1_i} = \left( \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right)_g \cdot \frac{{}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|{}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|_2} \quad (3.12)$$

$$= \left( \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right)_g \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} \quad (3.13)$$

En décomposant le vecteur  ${}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$ , on obtient :

$$\dot{\mathbf{i}}_{1_i} = \left( \underbrace{\frac{d}{dt} {}^g \mathbf{A}_i \mathbf{O}}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\frac{d}{dt} {}^g \mathbf{O} \mathbf{G}}_{\dot{\mathbf{p}}} + \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i \right)_g \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} \quad (3.14)$$

$$= \left( \dot{\mathbf{p}} + \left( \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i \right)_g \right) \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} \quad (3.15)$$

étant donné que le point d'attache  $\mathbf{A}_i$  est fixe dans  $\mathcal{F}_g$ .

En utilisant la formule de Bour (3.2), on peut écrire,  $\mathbf{B}_i$  étant un point d'attache fixe sur la plateforme :

$$\left( \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i \right)_g = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i \right)_p}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \times {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i \quad (3.16)$$

On aboutit alors à l'équation suivante pour la vitesse articulaire du câble :

$$\dot{\mathbf{i}}_{1_i} = (\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times {}^g \mathbf{G} \mathbf{B}_i) \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} \quad (3.17)$$

$$= \dot{\mathbf{p}} \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} + (\boldsymbol{\omega} \times {}^g \mathbf{b}_{ci}) \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} \quad (3.18)$$

$$= \dot{\mathbf{p}} \cdot {}^g \mathbf{u}_{ci} + \boldsymbol{\omega} \cdot ({}^g \mathbf{b}_{ci} \times {}^g \mathbf{u}_{ci}) \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathbf{i}}_{1_i} = [{}^g \mathbf{u}_{ci}^T \quad ({}^g \mathbf{b}_{ci} \times {}^g \mathbf{u}_{ci})^T] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La jacobienne s'exprime donc sous la forme matricielle :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^g \mathbf{u}_{c1}^T & ({}^g \mathbf{b}_{c1} \times {}^g \mathbf{u}_{c1})^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_{cn_c}^T & ({}^g \mathbf{b}_{cn_c} \times \mathbf{u}_{cn_c})^T \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

telle que  $\dot{\mathbf{i}}_1 = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}}$ .

### 3.3.2.2 Matrice des efforts appliqués par les câbles

La matrice des efforts appliqués par les câbles  $\mathbf{W}_c \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$  lie les tensions  $\boldsymbol{\tau}$  à la résultante des forces  ${}^g \mathbf{F}_c$  et moments  ${}^g \mathbf{N}_c$  appliqués à la plateforme :

$$\begin{bmatrix} {}^g \mathbf{F}_c \\ {}^g \mathbf{N}_c \end{bmatrix} = \mathbf{W}_c(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \quad (3.22)$$

La résultante des forces  ${}^g\mathbf{F}_c$  est la somme des forces exercées par les câbles sur la plateforme :

$$\sum_{i=1}^{n_c} -\tau_i {}^g\mathbf{u}_{ci} = {}^g\mathbf{F}_c \quad \text{avec } \tau_i > 0 \quad (3.23)$$

où  ${}^g\mathbf{u}_{ci}$  est le vecteur directeur du câble de sens opposé à la force de traction.

L'ensemble des moments créés par chaque câble  ${}^g\mathbf{N}_c$  est défini par la relation :

$$\sum_{i=1}^{n_c} {}^g\mathbf{b}_{ci} \times (-\tau_i {}^g\mathbf{u}_{ci}) = {}^g\mathbf{N}_c \quad (3.24)$$

où  ${}^g\mathbf{b}_{ci}$  est la position du point d'attache du câble par rapport au centre de gravité de la plateforme.

On aboutit à la relation matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{u}_{c1} & \dots & {}^g\mathbf{u}_{cn_c} \\ {}^g\mathbf{b}_{c1} \times {}^g\mathbf{u}_{c1} & \dots & {}^g\mathbf{b}_{cn_c} \times {}^g\mathbf{u}_{cn_c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_c(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{n_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

On remarque que la matrice des efforts appliqués par les câbles sur la plateforme (ou "wrench matrix") est directement liée à la jacobienne du robot  $\mathbf{J}$  par la relation :

$$\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T \quad (3.26)$$

Le torseur d'effort des câbles s'obtient donc à partir des équations (3.25) et (3.26) :

$$\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.27)$$

### 3.3.3 Modèle dynamique de la plateforme

Pour pouvoir établir le modèle dynamique régissant la plateforme mobile, il faut calculer les vitesses et accélérations de son centre d'inertie  $G$  dans le repère fixe. Le vecteur  $\mathbf{p}$  fournit les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la plateforme exprimées dans le repère galiléen  $\mathcal{F}_g$ . La vitesse du point  $G$  par rapport à ce repère est donnée par :

$$\left( \frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right)_g = \dot{\mathbf{p}} \quad (3.28)$$

Son accélération résulte de la dérivation du vecteur vitesse :

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OG} \right)_g = \ddot{\mathbf{p}} \quad (3.29)$$

Soit  $\mathbf{R}_{gp}$ , la matrice de rotation entre le repère inertiel  $\mathcal{F}_g$  et le repère lié à la plateforme mobile  $\mathcal{F}_p$ . La relation entre le tenseur d'inertie de la plateforme exprimé dans le repère fixe ( $\mathbf{I}_g$ ) et celui exprimé dans le repère attaché à l'effecteur ( $\mathbf{I}_p$ ) est donnée par :

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{R}_{gp} \mathbf{I}_p \mathbf{R}_{gp}^T \quad (3.30)$$

Le moment cinétique de la plateforme est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma}_G = \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega} \quad (3.31)$$

avec  $\boldsymbol{\omega} = {}^s\boldsymbol{\omega}(p/g)$ , le vecteur instantané de rotation de  $\mathcal{F}_p$  par rapport à  $\mathcal{F}_g$  exprimé dans  $\mathcal{F}_g$ .

Le moment dynamique  $\boldsymbol{\delta}_G$  par rapport au repère inertiel  $\mathcal{F}_g$  est défini par :

$$\boldsymbol{\delta}_G = \left( \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_G \right)_g \quad (3.32)$$

En utilisant le fait que le tenseur d'inertie est constant dans le repère attaché à la plateforme  $\mathcal{F}_p$ , la loi de Bour définie dans l'équation (3.2) donne :

$$\boldsymbol{\delta}_G = \mathbf{I}_g \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega} \quad (3.33)$$

Pour décrire le mouvement de l'effecteur, on utilise le Théorème de la Résultante Dynamique (TRD) et le Théorème du Moment Dynamique (TMD) dans le repère inertiel.

Selon le TRD, la somme des forces appliquées au solide est égale à la résultante dynamique :

$$m_p \boldsymbol{\gamma}(G/g) = \Sigma \mathbf{F}(ext \rightarrow p) \quad (3.34)$$

où  $m_p$  est la masse de la plateforme.

L'application du TMD donne :

$$\boldsymbol{\delta}_G = \Sigma \mathbf{M}(ext \rightarrow p) \quad (3.35)$$

En concaténant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{\text{ext}} \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{w}_{\text{ext}}$  est le torseur des efforts externes appliqués à la plateforme.

Soit  $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{p}}^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}^T]^T$  le vecteur de la vitesse de la plateforme et  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$  une matrice jacobienne analytique qui lie la dérivée temporelle des coordonnées angulaires  $\boldsymbol{\theta}$  à la vitesse angulaire de la plateforme  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.37)$$

Le vecteur d'accélération angulaire est alors défini tel que :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.38)$$

On peut réécrire donc l'équation du PFD (3.36) comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{\text{ext}} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{I}_g \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{\text{ext}} \quad (3.40)$$

Pour conserver les propriétés de la matrice d'inertie (symétrie et positivité), on peut multiplier à gauche par  $\mathbf{S}^T$  l'équation du moment dynamique. Le modèle devient alors :

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{I}_g \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{w}_{\text{ext}} \quad (3.41)$$



Donc, l'équation dynamique exprimée sous la forme standard devient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \mathbf{w}_{\text{totx}} \quad (3.42)$$

avec :

— la matrice d'inertie :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

— la matrice des effets centrifuges et de Coriolis :

$$\mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^T [(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times] (\mathbf{I}_g \mathbf{S}) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où  $[(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times] = [\boldsymbol{\omega} \times]$  est une matrice antisymétrique définie avec les éléments du vecteur de vitesse angulaire telle que :

$$[(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

— le vecteur représentant l'effet de la gravité :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

— le vecteur des efforts externes :

$$\mathbf{w}_{\text{totx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{w}_{\text{ext}} \quad (3.47)$$

En utilisant la matrice  $\mathbf{S}$  telle qu'introduite dans (3.37), on peut définir une nouvelle jacobienne  $\mathbf{J}_x$  reliant les vitesses articulaires de la plateforme  $\dot{\mathbf{i}}_1$  à la vitesse opérationnelle  $\dot{\mathbf{x}}$  telle que :

$$\dot{\mathbf{i}}_1 = \mathbf{J}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (3.48)$$

$$= \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_x} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

D'après (3.26) et (3.27), le torseur d'efforts appliqués par les câbles sur la plateforme est :

$$\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix} = \mathbf{W}_c(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.50)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_{n_c}]^T$  est le vecteur de tensions des câbles.

Le torseur d'efforts externes (3.47) devient :

$$\mathbf{w}_{\text{totx}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{W}_c}_{\mathbf{W}_{\text{cx}}} \boldsymbol{\tau} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{J}^T}_{\mathbf{J}_x^T} \boldsymbol{\tau} \quad (3.51)$$

Finalement, le modèle dynamique du RPC (3.42) est donné par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} \quad (3.52)$$

### 3.3.3.1 Dynamique des enrouleurs

Dans la partie précédente, l'entrée du modèle dynamique est la tension des câbles qui est commandée en modifiant leur longueur grâce aux enrouleurs. Les enrouleurs ont leur propre dynamique liée aux caractéristiques des moteurs actionnant le tambour des poulies. Dans cette section, nous explicitons la dynamique des enrouleurs en privilégiant leur commande en position ou en vitesse.

Le modèle dynamique de l'enrouleur est donné par :

$$\mathbf{B}_{\text{rot}}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_c + \mathbf{f}_{\text{vrot}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_c + \mathbf{f}_{\text{srot}} = \boldsymbol{\gamma} + r\boldsymbol{\tau} \quad (3.53)$$

tel que :

- $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_c$  le vecteur des accélérations angulaires des enrouleurs
- $\mathbf{B}_{\text{rot}}$  l'inertie de l'ensemble rotor et enrouleurs
- $\mathbf{f}_{\text{vrot}}$  le coefficient des frottements visqueux
- $\mathbf{f}_{\text{srot}}$  le vecteur des frottements secs
- $\boldsymbol{\gamma}$  le vecteur des couples moteurs
- $r$  le rayon du tambour de l'enrouleur

Considérant que le câble est enroulé sur le tambour à tension nulle, on peut écrire ce modèle en fonction de  $\mathbf{l}_2$  (3.6) :

$$\mathbf{B}_{\text{rot}}\ddot{\mathbf{l}}_2 + \mathbf{f}_{\text{vrot}}\dot{\mathbf{l}}_2 + r\mathbf{f}_{\text{srot}} = r\boldsymbol{\gamma} + r^2\boldsymbol{\tau} \quad (3.54)$$

où  $\mathbf{l}_2 = r\boldsymbol{\theta}_c$ .

Un réducteur est souvent intercalé entre le moteur et le tambour afin d'augmenter le couple. Ceci conduit à une réduction de la vitesse maximale et à une augmentation des frottements secs. Ces frottements secs sont non linéaires et rendent donc la commande plus délicate.

On propose dans ce travail de commander les moteurs en position ou vitesse angulaire du tambour via une boucle interne rapide, comme dans [BEGEY et al., 2018]. Outre un rejet de perturbations (tels les frottements secs), une boucle rapide d'asservissement des moteurs permet de linéariser la dynamique des enrouleurs et de découpler leur dynamique de celle de la plateforme en rejetant l'effet de la tension  $\boldsymbol{\tau}$  dans l'équation (3.54).

Dans [BEGEY et al., 2018], la position angulaire du tambour est asservie pour commander la tension du câble. Ici, on choisit d'asservir la vitesse angulaire du tambour. Ce choix est justifié par :

- une représentation d'état du modèle dynamique plus simple, si l'on souhaite introduire un coefficient d'amortissement visqueux du câble ;
- la commande de vitesse est nulle pour une position statique de la plateforme, ce qui simplifie l'expression de la fonction coût de la commande prédictive (qui sera présentée dans la section 4.5).

La dynamique des moteurs est asservie par une boucle locale à l'actionneur avec un correcteur PID de manière à garantir un rejet efficace des perturbations et une

erreur statique nulle. En considérant un temps d'établissement du courant instantané (inductance négligeable), le moteur asservi peut être assimilé à un second ordre. Soit  $\dot{\mathbf{l}}_2^*$  la consigne de vitesse de longueur de câble déroulé, on a :

$$\dot{\mathbf{l}}_2 = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \dot{\mathbf{l}}_2^* \quad (3.55)$$

où  $\omega_n$ , la pulsation propre non amortie du système de second ordre qui modélise la boucle fermée et  $\zeta$ , son coefficient d'amortissement.

La vitesse des enrouleurs est limitée par la saturation en vitesse des moteurs, d'où :

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}_{c_{\max}} &\leq \dot{\theta}_{c_i}^* \leq \dot{\theta}_{c_{\max}}, \quad i = 1, \dots, n_c \\ \Rightarrow -\dot{l}_{2_{\max}} &\leq \dot{l}_{2_i}^* \leq \dot{l}_{2_{\max}}, \quad i = 1, \dots, n_c \end{aligned} \quad (3.56)$$

où  $\dot{l}_{2_{\max}} = r\dot{\theta}_{c_{\max}}$  avec  $r$  le rayon de la poulie.

### 3.3.3.2 Modèle du robot incluant la dynamique des enrouleurs

On peut modéliser la réponse de la vitesse d'enroulement des câbles asservie sous forme d'une représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \dot{\mathbf{l}}_2^* \\ \dot{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c \end{cases} \quad (3.57)$$

où  $\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\omega_n^2 \mathbf{I} & -2\zeta\omega_n \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \omega_n^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_c = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$  et  $\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{l}}_2 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{x_c}}$ .

D'après (3.52) et (3.8), on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \mathbf{W}_{c\mathbf{x}}(\mathbf{x}) [\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2]] \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \dot{\mathbf{l}}_2^* \\ \dot{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c \\ -\dot{l}_{2_{\max}} \leq \dot{l}_{2_i}^* \leq \dot{l}_{2_{\max}}, \quad i = 1, \dots, n_c \end{cases} \quad (3.58)$$

### 3.3.4 Modèle dynamique avec des générateurs de forces unilatérales

En plus de l'action des  $n_c$  câbles qui supportent l'effecteur ou organe terminal du robot,  $n_a$  actionneurs embarqués sont ajoutés et utilisés comme générateurs de forces unidirectionnelles.

Comme introduit dans le chapitre précédent, l'élasticité des câbles engendre des effets indésirables sur les RPC, tels que des oscillations de la plateforme. La redondance d'actionnement est proposée ici pour éliminer ces problèmes.

1. Des actionneurs additionnels peuvent être embarqués sur le robot pour réaliser un amortissement actif des vibrations [SELLET et al., 2019], pendant que les enrouleurs se chargent du suivi de trajectoire. En outre, ces actionneurs peuvent amortir les vibrations dans les directions de l'espace où le robot n'est pas actionné par les câbles.
2. La bande passante des efforts de traction des câbles est limitée par la dynamique des moteurs [ROBINSON et al., 1999]. D'après la loi de Hooke, plus la raideur des câbles est faible, plus la longueur de câble à enrouler pour produire un effort donné est grande. Dans le cas où les câbles sont très longs ou légers (fabriqués

avec un matériau flexible comme les polymères), leur raideur diminue.

La vitesse d'enroulement des câbles étant limitée, la bande passante en effort l'est également. Donc, l'ajout d'actionneurs rapides supplémentaires permet d'améliorer la dynamique du RPC.

3. Enfin, avec une bonne dynamique des actionneurs embarqués, on peut imaginer augmenter l'accélération verticale d'un robot suspendu en direction du sol, alors qu'elle est limitée par l'accélération de la gravité dans le cas d'un RPC suspendu.

### 3.3.4.1 Torseur d'effort des actionneurs embarqués

Des générateurs de forces unidirectionnelles, par exemple des propulseurs à air, sont montés sur la plateforme. La direction de la poussée  $\mathbf{u}_{a_i}$  pour l'actionneur  $i$  est constante dans le repère de la plateforme  $\mathcal{F}_p$ , comme représenté sur la Figure 3.3. La poussée  $t_i$  ainsi délivrée est positive,  $t_i \geq 0$ .

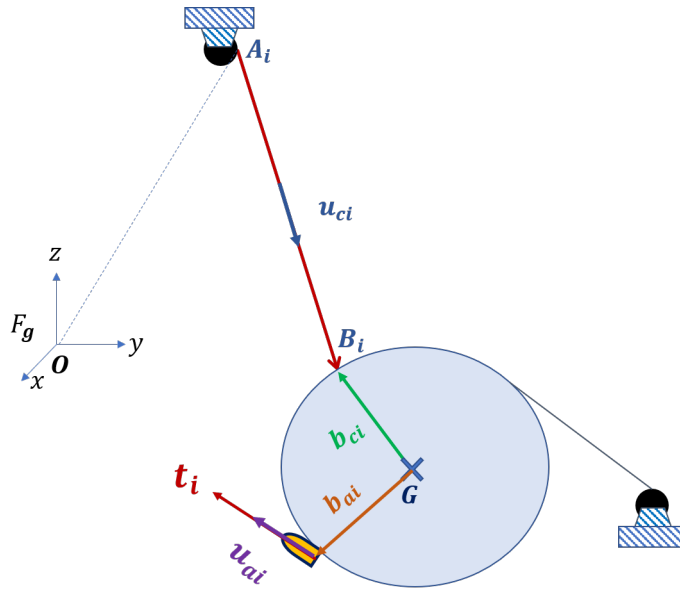


FIGURE 3.3 – Plateforme du RPC avec actionneurs embarqués

Soit  $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_{n_a}]^T$  le vecteur des poussées de tous les générateurs de force unilatérale (GFU) embarqués. Par analogie avec l'actionnement des câbles et le résultat (3.25), le torseur d'efforts appliqués sur la plateforme par les GFU est donné par :

$$\begin{bmatrix} {}^p\mathbf{F}_a \\ {}^p\mathbf{N}_a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^p\mathbf{u}_{a_1} & \dots & {}^p\mathbf{u}_{a_{n_a}} \\ {}^p\mathbf{b}_{a_1} \times {}^p\mathbf{u}_{a_1} & \dots & {}^p\mathbf{b}_{a_{n_a}} \times {}^p\mathbf{u}_{a_{n_a}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \mathbf{t} \quad (3.59)$$

où  $\mathbf{b}_{a_i}$  est le vecteur entre le centre de gravité  $G$  et la position du propulseur sur la plateforme,  $\mathbf{F}_a$  et  $\mathbf{N}_a$  sont respectivement la force et le moment appliqués par les GFU sur la plateforme. La matrice  $\mathbf{A}_a$  est la matrice de configuration des actionneurs embarqués. Elle est constante vis-à-vis de la plateforme vu que les GFU y sont fixés. Le torseur d'efforts exercés par les actionneurs embarqués exprimé dans le repère inertiel  $\mathcal{F}_g$  est :

$$\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_a \\ {}^g\mathbf{N}_a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{gp}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{gp}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_a(\mathbf{x})} \mathbf{A}_a \mathbf{t} = \mathbf{W}_a(\mathbf{x}) \mathbf{t} \quad (3.60)$$

où  $\mathbf{R}_{gp}$  est la matrice de rotation entre  $\mathcal{F}_g$  et  $\mathcal{F}_p$  et  $\mathbf{W}_a \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$  est la matrice des efforts appliqués par les GFU.

### 3.3.4.2 Modèle avec l'action des câbles et des actionneurs

Les câbles, ainsi que les GFU, appliquent chacun une force et un moment dont les résultantes sont  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{w}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_a \\ {}^g\mathbf{N}_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_a \mathbf{t}} + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_c \boldsymbol{\tau}} \quad (3.61)$$

$$= [\mathbf{W}_c \quad \mathbf{W}_a] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement les vecteurs des tensions de câbles et des poussées des actionneurs embarqués.

Donc, l'équation dynamique du RPC (3.42) avec actionneurs embarqués devient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

où  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times (n_a + n_c)}$  :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{W}_{\text{cx}} \quad \mathbf{W}_{\text{ax}}] (\mathbf{x}) \quad (3.64)$$

avec :

$$\mathbf{W}_{\text{cx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{W}_c, \quad \mathbf{W}_{\text{ax}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{W}_a \quad (3.65)$$

### 3.3.4.3 Modèle complet incluant la dynamique des actionneurs

Comme les enrouleurs des câbles, les actionneurs embarqués ont une dynamique propre et présentent des saturations. Notre choix s'étant porté sur des générateurs de force unilatérale, tels que des jets d'air comprimé ou des propulseurs à hélice, ils ne peuvent donc fournir une force dans un sens.

$$0 \leq t_i^* \leq t_{\max}, \quad i = 1, \dots, n_a \quad (3.66)$$

où  $t_i^*$  est la consigne de la force du  $i^{\text{ème}}$  générateur de force unilatérale et  $t_{\max}$ , la force maximale qu'il peut produire.

Soit  $T_a$  la constante de temps des actionneurs embarqués et  $T_c$  la constante de temps des actionneurs des câbles. Pour améliorer la dynamique de l'effecteur, les actionneurs embarqués sur la plateforme ont des dynamiques plus rapides que celles des poulies. La représentation d'état de la réponse des actionneurs embarqués s'exprime par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_t \mathbf{t}^* \\ \mathbf{t} = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_a \end{cases} \quad (3.67)$$

où  $\mathbf{x}_a \in \mathbb{R}^{n_{x_a}}$  est le vecteur d'état de la boucle de commande des GFU.

Un schéma bloc du RPC complet incluant les actionneurs (enrouleurs de câbles +

GFU embarqués) est représenté sur la Fig. 3.4.  $[\dot{\mathbf{i}}_2^T, \mathbf{t}^T]^T$  représente l'entrée du système, à savoir les consignes des actionneurs.

Les dynamiques pour les deux types d'actionnement sont linéaires, (3.57) et (3.67), et leurs sorties  $[\dot{\mathbf{i}}_2, \mathbf{t}]^T$  sont les grandeurs d'entrée du modèle dynamique du mouvement de l'effecteur.

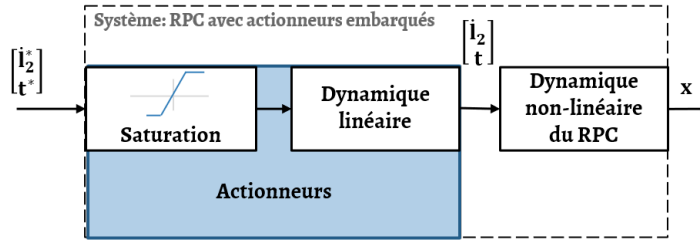


FIGURE 3.4 – Modèle du RPC avec actionneurs embarqués

Les actionneurs ont des saturations d'entrées définies dans (3.56) et (3.66), telles que :

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{i}}_{2_{\max}} &\leq \dot{\mathbf{i}}_2^* \leq \dot{\mathbf{i}}_{2_{\max}} \\ \mathbf{0} &\leq \mathbf{t}^* \leq \mathbf{t}_{\max} \end{aligned} \quad (3.68)$$

où  $\dot{\mathbf{i}}_{2_{\max}} = \dot{i}_{2_{\max}} \mathbb{1}_{n_c \times 1}$  et  $\mathbf{t}_{\max} = t_{\max} \mathbb{1}_{n_a \times 1}$  avec  $\dot{i}_{2_{\max}}$ , la vitesse d'enroulement maximale des câbles et  $t_{\max}$ , la poussée maximale des actionneurs embarqués.

On concatène la dynamique des deux actionneurs en une seule représentation d'état, en introduisant un nouveau vecteur d'état  $\mathbf{x}_u$  de dimension  $n_{x_u} = n_{x_c} + n_{x_a}$  et une nouvelle entrée des correcteurs des actionneurs  $\mathbf{u}^*$  de dimension  $n_u = n_c + n_a$  tels que :

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix}_{n_{x_u}}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_2^* \\ \mathbf{t}^* \end{bmatrix}_{n_u} \quad (3.69)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\text{où } \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_t \end{bmatrix}_{n_{x_u} \times n_{x_u}}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_t \end{bmatrix}_{n_{x_u} \times n_u} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}_{n_u \times n_{x_u}}.$$

On suppose que la dynamique des deux actionneurs (enrouleurs et générateurs de forces unilatérales) est découplée de la dynamique de la plateforme. Donc, l'équation dynamique du RPC (3.63) avec les actionneurs embarqués devient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \underbrace{\mathbf{W}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2] \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_{\text{totx}}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_2^* \\ \mathbf{t}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_2 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u \\ -\mathbf{u}_{\max} \leq \mathbf{u}^* \leq \mathbf{u}_{\max} \end{cases} \quad (3.71)$$

### 3.4 Linéarisation du modèle dynamique complet du RPC

#### 3.4.1 Modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre

Un modèle dynamique linéarisé du RPC est établi pour développer des stratégies de commande linéaire par la suite. On appelle  $f$  l'équation dynamique régissant le système :

$$f(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{l}}_2, \mathbf{l}_2, \mathbf{t}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} - \mathbf{w}_{\text{totx}} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

La dynamique du robot est linéarisée autour d'un point d'équilibre :

$$\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T, \dot{\mathbf{l}}_2^T, \mathbf{l}_2^T, \mathbf{t}^T]^T = [\mathbf{x}_e^T, \mathbf{0}^T, \dot{\mathbf{l}}_{2e}^T, \mathbf{l}_{2e}^T, \mathbf{t}_e^T]^T \quad (3.73)$$

avec  $\mathbf{t}_e$  et  $\mathbf{l}_{2e}$  les vecteur des poussées des générateurs de forces unilatérales et de longueurs à vide des câbles, qui permettent de maintenir la plateforme à l'équilibre.

Soit la pose de la plateforme relative à sa position statique autour du point d'équilibre définie par l'écart  $\mathbf{x}_\delta$  tel que :

$$\mathbf{x}_\delta = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \quad (3.74)$$

De même pour :

$$\mathbf{l}_{2\delta} = \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_{2e}, \quad \mathbf{t}_\delta = \mathbf{t} - \mathbf{t}_e \quad (3.75)$$

On procède à un développement en série de Taylor du premier ordre autour du point de fonctionnement  $\bar{\mathbf{x}}$  (3.73) :

$$\begin{aligned} f(\ddot{\mathbf{x}}_e + \ddot{\mathbf{x}}_\delta, \dot{\mathbf{x}}_e + \dot{\mathbf{x}}_\delta, \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_\delta, \dot{\mathbf{l}}_{2e} + \dot{\mathbf{l}}_{2\delta}, \mathbf{l}_{2e} + \mathbf{l}_{2\delta}, \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_\delta) &= f(\bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}}_\delta + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}_\delta \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x}_\delta + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{l}_{2\delta} \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{l}}_{2\delta} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{t}_\delta = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Le premier terme  $f(\bar{\mathbf{x}})$  est nul étant donné que  $\mathbf{x}_e$  est un point d'équilibre vérifiant l'équation (3.72). En dérivant l'expression de l'équation dynamique (3.72), nous obtenons :

Suivant  $\ddot{\mathbf{x}}_\delta$  :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_e) \underbrace{\left. \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}}_{=1} \quad (3.77)$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_e)} \quad (3.78)$$

Suivant  $\dot{\mathbf{x}}_\delta$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e) \underbrace{\left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}}_{=1} + \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}_e - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Le torseur d'efforts  $\mathbf{W}_{\text{totx}}$  comprend à la fois le torseur des câbles et des actionneurs embarqués. Seul le frottement des câbles dépend de  $\dot{\mathbf{x}}$ , on a donc d'après (3.64) :

$$- \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}}_{=0} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}$$

En substituant l'expression de  $\boldsymbol{\tau}$  (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial (\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2) [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c [\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2])}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{F}_c \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{l}}_1(\mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \end{aligned}$$

et d'après (3.48), on aboutit à l'expression suivante :

$$- \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{F}_c \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e) \quad (3.80)$$

On a donc d'après les équations (3.79) et (3.80) :

$$\boxed{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e} \dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{F}_c \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e)} \quad (3.81)$$

Suivant  $\mathbf{x}_\delta$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \ddot{\mathbf{x}}_e + \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e} \dot{\mathbf{x}}_e - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

D'après (3.82) et l'équation (A.5), on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \ddot{\mathbf{x}}_e + \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e} \dot{\mathbf{x}}_e \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e) - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{t}_e \end{aligned}} \quad (3.83)$$



Suivant  $\mathbf{l}_{2\delta}$  :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} \quad (3.84)$$

Le terme  $\left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}$  est développé en annexe (A.6). On aboutit donc à l'expression suivante :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{2e}) \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_e) \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \left. \frac{\partial([\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2])}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{l}_{2e}} [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_e) - \mathbf{l}_{2e}] \\ &= -\mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) - \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{2e}) \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_e) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Suivant  $\dot{\mathbf{l}}_{2\delta}$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} \\ &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial (\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2])}{\partial \dot{\mathbf{l}}_2} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} \\ &= -\mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{F}_c \end{aligned} \quad (3.87)$$

Suivant  $\mathbf{t}_\delta$  :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = -\mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x}_e) \quad (3.88)$$

**Point d'équilibre statique :**

Comme on évalue le système à un point d'équilibre statique, sa vitesse et son accélération sont alors nulles  $(\dot{\mathbf{x}}_e, \ddot{\mathbf{x}}_e) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . D'après (3.44) et (3.81), on obtient :

$$\mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e) = \mathbf{C}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} = \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{F}_c \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e) \quad (3.90)$$

et d'après (3.83) :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} = \left. \frac{\partial \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e) - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{t}_e \quad (3.91)$$

On rassemble les différentes dérivées partielles du modèle linéarisé (3.76) pour obtenir le modèle linéarisé suivant :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_e)\ddot{\mathbf{x}}_\delta + \mathbf{C}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e)\dot{\mathbf{x}}_\delta + \mathbf{K}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e)\mathbf{x}_\delta = \mathbf{T}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e)\mathbf{l}_{2\delta} + \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_e)\dot{\mathbf{l}}_{2\delta} + \mathbf{W}_{ax}(\mathbf{x}_e)\mathbf{t}_\delta \quad (3.92)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e) &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{F}_c\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e), & \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_e) &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{F}_c \\ \mathbf{K}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e, \mathbf{t}_e) &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_e} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e})\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_e)}_{\mathbf{K}_{xc}} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{W}_{ax}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{t}_e}_{\mathbf{K}_{xa}} \\ &= \mathbf{K}_{xc} + \mathbf{K}_{xa} \\ \mathbf{T}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e) &= \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) + \mathbf{J}_x^T(\mathbf{x}_e) \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{2e}) \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_e) \\ \boldsymbol{\tau}_e &= \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e})[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_e) - \mathbf{l}_{2e}] \end{aligned} \quad (3.93)$$

où  $\mathbf{W}_{ax}(\mathbf{x}_e)$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{x}_e)$  sont respectivement la matrice d'allocation des propulseurs et la matrice d'inertie de la plateforme, évaluées au point d'équilibre  $\mathbf{x}_e$ . Behzadipour et Khajepour proposent une expression analytique de la raideur totale de la plateforme due aux câbles  $\mathbf{K}_{xc}$  [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2006b]. Cette matrice est décomposée en  $\mathbf{K}_e$ , la raideur élastique causée par l'élasticité des câbles et  $\mathbf{K}_a$ , la raideur antagoniste générée par les forces internes antagonistes. L'expression analytique de  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{K}_a$  qui s'expriment en fonction de la géométrie du mécanisme et des propriétés du câble est telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{xc} &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_a \\ \mathbf{K}_e &= \sum_{i=1}^n k_i \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T & \mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T[\mathbf{b}_{ci}\times]^T \\ [\mathbf{b}_{ci}\times]\mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T & [\mathbf{b}_{ci}\times]\mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T[\mathbf{b}_{ci}\times]^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_a &= \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{l_i} \begin{bmatrix} \mathbb{I} - \mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T & [\mathbf{b}_{ci}\times]^T - \mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T[\mathbf{b}_{ci}\times]^T \\ [\mathbf{b}_{ci}\times] - [\mathbf{b}_{ci}\times]\mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T & [\mathbf{b}_{ci}\times][\mathbf{b}_{ci}\times]^T - [\mathbf{b}_{ci}\times]\mathbf{u}_{ci}\mathbf{u}_{ci}^T[\mathbf{b}_{ci}\times]^T \end{bmatrix} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tau_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{u}_{ci}\times][\mathbf{b}_{ci}\times] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.94)$$

où  $\mathbf{u}_{ci}$  et  $\mathbf{b}_{ci}$  sont respectivement le vecteur directeur et le vecteur moment du  $i^{\text{ème}}$  câble,  $k_i$  le coefficient de raideur élastique,  $l_i$  la longueur du  $i^{\text{ème}}$  câble et  $\tau_i$  sa tension.

### 3.4.2 Représentation d'état incluant la dynamique des actionneurs

Le modèle linéaire résultant est équivalent à un système masse-ressort à  $n$  degrés de liberté. Pour décrire le système linéarisé sous forme de représentation d'état, on considère le vecteur d'état :

$$\underline{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_\delta^T, \dot{\mathbf{x}}_\delta^T, \mathbf{l}_{2\delta}^T]^T \quad (3.95)$$

avec  $\dot{\mathbf{x}}_\delta$  et  $\mathbf{l}_{2\delta}$  sont respectivement la vitesse de la plateforme et la longueur à vide des câbles évaluées par rapport à son point d'équilibre.

L'entrée du système linéarisé est composée des forces des actionneurs embarqués et des différences de longueur de câble à vide, on a donc :

$$\underline{\mathbf{u}} = [\mathbf{l}_{2\delta}^T, \mathbf{t}_\delta^T]^T \quad (3.96)$$

D'après (3.92) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A}_s \underline{x} + \mathbf{B}_s \underline{u} \\ \mathbf{y} = \underline{x}_\delta = \mathbf{C}_s \underline{x} \end{cases} \quad (3.97)$$

$$\text{où } \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_x & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_x & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_x & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_{ax} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En intégrant la dynamique des actionneurs (3.70), on aboutit finalement à :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{x}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \mathbf{C}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.98)$$

où  $\underline{x}_u$  est le vecteur d'état de la dynamique des actionneurs et  $\mathbf{u}^*$ , la consigne envoyée à leur entrée, qui s'expriment respectivement :

$$\underline{x}_u = \begin{bmatrix} \underline{x}_c \\ \underline{x}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_2^* \\ \mathbf{t}^* \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

## 3.5 Robot parallèle à câbles plan

Sans perte de généralité, on étudie ici le cas d'un RPC plan. Cette configuration plan est pertinente pour des applications telles que la peinture ou le nettoyage de grandes surfaces et de façades, qui impliquent de grandes longueurs de câbles.

Une configuration suspendue nonredondante a été retenue. Nous avons donc  $n = n_c$ ,  $n$  étant le nombre de degrés de liberté et  $n_c$  le nombre des câbles. Du fait d'une configuration non-redondante, il n'est pas nécessaire de gérer la distribution des tensions des câbles.

Dans une configuration plane nous avons trois degrés de liberté (deux translations et une rotation) et par conséquent  $n_c = n = 3$ . Les trois câbles relient la plateforme à une structure porteuse qui surplombe le robot, comme illustré sur la Fig. 3.5. La gravité joue le rôle d'un quatrième câble virtuel exerçant une force de magnitude et direction constante antagoniste à celles des trois câbles. En l'absence de câble entre le sol et la plateforme, la dynamique d'accélération de la nacelle vers le bas est limitée par l'accélération de la pesanteur. L'ajout d'actionneurs embarqués de dynamique rapide vise à améliorer la dynamique du robot.

### 3.5.1 Configuration du robot plan

La configuration du robot plan choisi pour cette étude (voir Fig. 3.5) a été inspirée de [JIANG, 2016]. Les sorties des poulies  $\mathbf{A}_i$  et les points d'attache des enrouleurs  $\mathbf{B}_i$  sont contraints dans le plan  $Oyz$  tel que :

$${}^g \mathbf{u}_{ci} = \frac{{}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|{}^g \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{ciy} \\ u_{ciz} \end{bmatrix}, \quad {}^g \mathbf{b}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{ciy} \\ b_{ciz} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

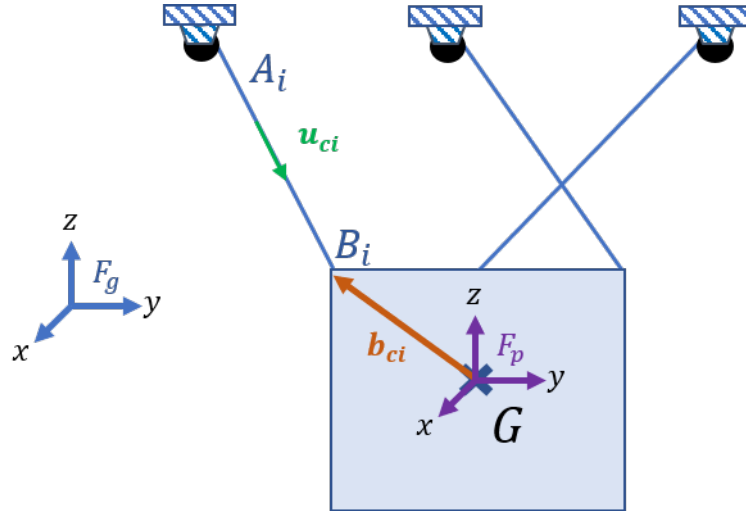


FIGURE 3.5 – Robot plan suspendu à trois degrés de liberté

Dans le cas plan, la matrice  $\mathbf{W}_c(\mathbf{x})$  des efforts appliqués par les câbles (3.50) devient :

$$\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix} = \mathbf{W}_c(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} {}^g\mathbf{u}_{c1} & {}^g\mathbf{u}_{c2} & {}^g\mathbf{u}_{c3} \\ {}^g\mathbf{b}_{c1} \times {}^g\mathbf{u}_{c1} & {}^g\mathbf{b}_{c2} \times {}^g\mathbf{u}_{c2} & {}^g\mathbf{b}_{c3} \times {}^g\mathbf{u}_{c3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

avec  ${}^g\mathbf{b}_{ci} \times {}^g\mathbf{u}_{ci} = \begin{bmatrix} b_{ciy}u_{ciz} - b_{ciz}u_{ciy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  d'après (3.100).

Donc :

$$\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_{c1y} & u_{c2y} & u_{c3y} \\ u_{c1z} & u_{c2z} & u_{c3z} \\ b_{c1y}u_{c1z} - b_{c1z}u_{c1y} & b_{c2y}u_{c2z} - b_{c2z}u_{c2y} & b_{c3y}u_{c3z} - b_{c3z}u_{c3y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Les câbles ne génèrent donc qu'un moment suivant l'axe  $x$  et deux forces suivant  $y$  et  $z$ . Les mouvements sont restreints au plan  $Oyz$  :

$$\begin{bmatrix} {}^g\mathbf{F}_c \\ {}^g\mathbf{N}_c \end{bmatrix} = [0 \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.103)$$

On peut restreindre les équations du modèle dynamique de la plateforme aux trois degrés de liberté commandables.

Pour le robot plan, la matrice des efforts appliqués est donc carrée et de dimension  $3 \times 3$  :

$$\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} u_{c1y} & u_{c2y} & u_{c3y} \\ u_{c1z} & u_{c2z} & u_{c3z} \\ b_{c1y}u_{c1z} - b_{c1z}u_{c1y} & b_{c2y}u_{c2z} - b_{c2z}u_{c2y} & b_{c3y}u_{c3z} - b_{c3z}u_{c3y} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

Les interférences entre câbles et les collisions entre la plateforme et les câbles ont été étudiées dans [MERLET, 2004; BOUCHARD, 2008; OTIS et al., 2009; NGUYEN et GOUTTEFARDE, 2015]. Ce point ne sera pas traité dans cette thèse. Toutefois, la

collision des câbles entre eux et avec la plateforme a été prise en compte par [JIANG, 2016] pour ce type de robot.

### 3.5.2 Singularités du robot plan

On vérifie que le choix de la géométrie du RPC ne présente pas de singularités, qui conduiraient à une perte de commandabilité dans son espace de travail.

Soit le torseur  $\boldsymbol{\gamma}$  qu'on souhaite générer par les câbles dans la configuration représentée sur la Fig. 3.5. D'après (3.103) :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} M_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Donc, d'après (3.104) :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_c^{-1} \boldsymbol{\gamma} \quad (3.106)$$

Ainsi, il faut vérifier que le déterminant de la matrice des efforts appliqués, qui est aussi celui de la transposée de la jacobienne d'après (3.26), n'est pas nul afin d'éviter toute configuration singulière [JIANG et GOSSELIN, 2014; POTT, 2018]. Le déterminant de cette matrice est donné par l'équation [JIANG et GOSSELIN, 2014] :

$$\det(\mathbf{W}_c) = -({}^s \mathbf{b}_{c1} \times {}^s \mathbf{u}_{c1}) ({}^s \mathbf{u}_{c2} \times {}^s \mathbf{u}_{c3}) + ({}^s \mathbf{b}_{c2} \times {}^s \mathbf{u}_{c2}) ({}^s \mathbf{u}_{c1} \times {}^s \mathbf{u}_{c3}) - ({}^s \mathbf{b}_{c3} \times {}^s \mathbf{u}_{c3}) ({}^s \mathbf{u}_{c1} \times {}^s \mathbf{u}_{c2}) \quad (3.107)$$

Les différentes configurations où l'on risquerait d'avoir des singularités sont représentées dans la Figure 3.6. Elles correspondent aux cas suivants :

- $({}^s \mathbf{b}_{c1} \times {}^s \mathbf{u}_{c1}) = 0$  quand le vecteur entre le centre d'attache du câble sur la plateforme et le centre de gravité  ${}^s \mathbf{b}_{c1}$  s'aligne avec le câble de vecteur directeur  ${}^s \mathbf{u}_{c1}$ .
- $({}^s \mathbf{b}_{c2} \times {}^s \mathbf{u}_{c2}) = 0$  idem pour le deuxième câble ( $i = 2$ ).
- $({}^s \mathbf{b}_{c3} \times {}^s \mathbf{u}_{c3}) = 0$  idem pour le troisième câble ( $i = 3$ ).

Pour que le déterminant soit nul, il faudrait que les conditions a), b) et c) soient vérifiées en même temps, ce qui ne peut pas arriver.

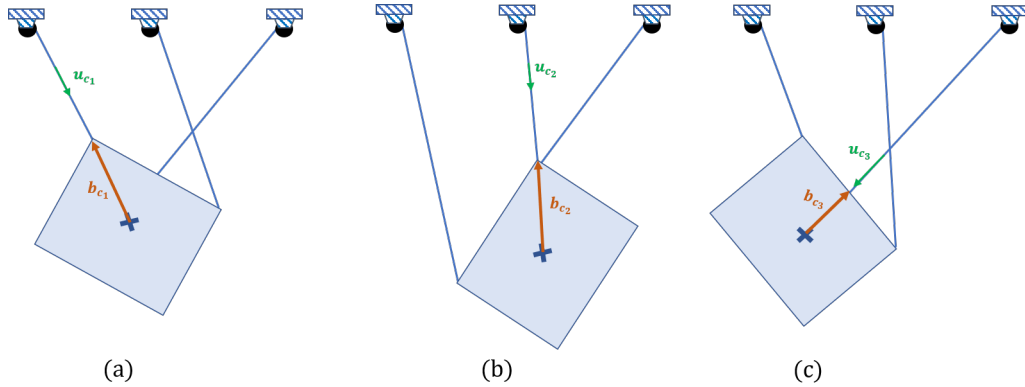


FIGURE 3.6 – Trois configurations particulières

### 3.5.3 Modèle dynamique du robot plan

La position du centre de gravité de la plateforme est notée  $\mathbf{p} = [y \ z]^T$ . Son orientation autour de l'axe  $x$  est notée  $\boldsymbol{\theta} = \theta$ . La pose de l'effecteur s'écrit donc :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T \ \boldsymbol{\theta}^T]^T = [y \ z \ \theta]^T \quad (3.108)$$

Un pivot interdit toute translation. Le repère fixé à la plateforme  $\mathcal{F}_p$  est en rotation d'un angle  $\theta$  suivant l'axe  $x$  du repère  $\mathcal{F}_g$  fixé à la base. La matrice de rotation  $\mathbf{R}_{gp}$  est exprimée par :

$$\mathbf{R}_{gp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

où  $c_\theta = \cos(\theta)$  et  $s_\theta = \sin(\theta)$ .

On rappelle l'équation dynamique (3.63) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_p \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{I}_g \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Dans le cas d'un robot plan, on a la matrice  $\mathbf{S} = \mathbb{I}_{3 \times 3}$  vu que la rotation est uniquement suivant l'axe  $x$  ( $\theta_y = \theta_z = 0$  à tout instant) et  $\mathbf{I}_g = \mathbf{R}_{gp}^T \mathbf{I}_p \mathbf{R}_{gp}$ .

Le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis (3.44) est nul dans le cas plan :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{I}_g \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{I}_g \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times I_{px} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.111)$$

avec  $I_{px}$  l'inertie autour de  $x$ .

Pour plus de simplicité, on notera  $I_{px} = I_p$  et  $\theta_x = \theta$ .

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

En ne conservant que les degrés de liberté commandables, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

avec :

- $\ddot{y}$  et  $\ddot{z}$  les accélérations de l'effecteur suivant les axes  $y$  et  $z$  respectivement.
- $\ddot{\theta}$  l'accélération angulaire de l'effecteur suivant l'axe  $x$ .
- $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) \ \mathbf{W}_a(\mathbf{x})]$  tel que  $\mathbf{W}_c(\mathbf{x})$  est la matrice des efforts appliqués par les trois câbles sur la plateforme et  $\mathbf{W}_a(\mathbf{x})$ , la matrice des efforts appliqués par les GFU.

- les vecteurs  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement les tensions des câbles et les forces des actionneurs embarqués.

### 3.5.4 Configuration des actionneurs

D'après l'état de l'art en aéronautique et dans le domaine des robots parallèles à câbles (section 2.5), le nombre d'actionneurs unilatéraux à disposer sur la plateforme est égal à :  $n_a = n + 1$  avec  $n$  le nombre de degrés de liberté que l'on souhaite octroyer au système.

Dans notre cas, le premier objectif est de rejeter des perturbations sur une plateforme suivant trois degrés de liberté en utilisant des propulseurs, il nous faudra donc  $n_a = 4$  actionneurs additionnels.

#### 3.5.4.1 Disposition des propulseurs

La disposition des actionneurs embarqués a été inspirée par [GARUS, 2004] qui traite du positionnement dynamique d'un sous-marin doté de quatre propulseurs. Chaque générateur de force est fixé sur la plateforme et fournit une force unilatérale. L'actionneur  $i$  est fixé sur la plateforme avec un angle  $\alpha_i$  (voir Figure 3.7).

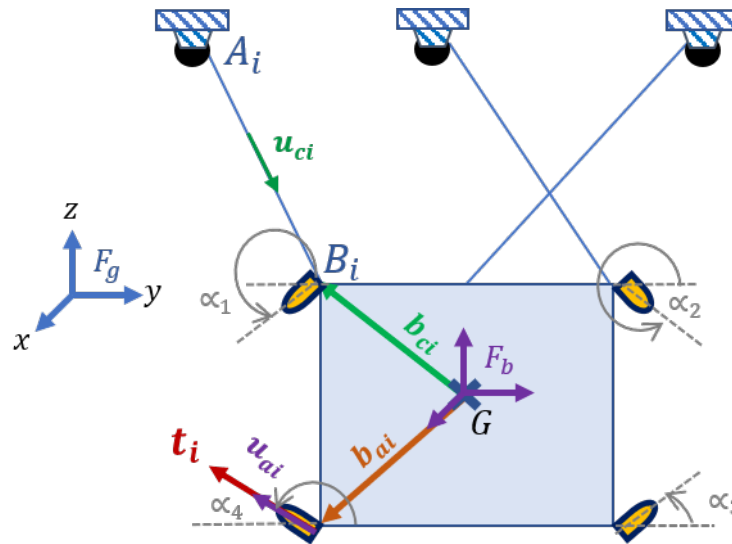


FIGURE 3.7 – Disposition des quatre actionneurs embarqués sur le robot plan à trois degrés de liberté

Les quatre forces de poussée  $\mathbf{t}_i$  générées par les actionneurs embarqués permettent de déplacer le robot suivant ses trois degrés de liberté. Par exemple, actionner les paires  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4)$  ou  $(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  avec  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_4$  et  $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3$  permet de générer des forces suivant l'axe horizontal  $y$ , comme schématisé sur la Fig. 3.8. Les paires de poussées  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  et  $(\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4)$  produisent une force suivant l'axe vertical  $z$  et les poussées combinées  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3)$  ou  $(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_4)$  génèrent un moment autour de  $x$ .

Concernant la disposition des propulseurs, la symétrie a comme effet d'éviter tout déséquilibre de la plateforme, de maximiser le moment et de simplifier la distribution de poussée. Pour maximiser un couple, il faut que la distance entre le centre de gravité et le point d'application de la poussée soit maximale. Nous plaçons donc les actionneurs aux quatre extrémités, comme représenté sur la Figure 3.7. On en déduit

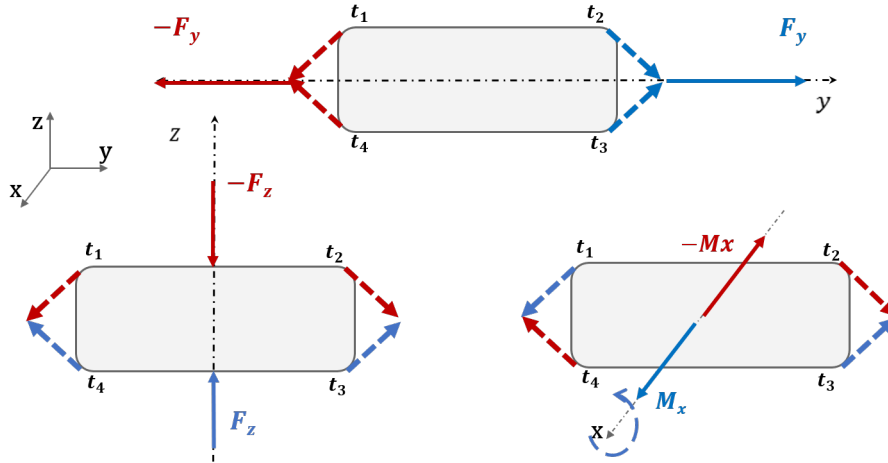


FIGURE 3.8 – Configuration des actionneurs sur le robot plan

la matrice de configuration (3.60) dépendant de l'orientation de la plateforme  $\theta$  :

$$\mathbf{W}_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{gp}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{gp}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{A}_a \quad (3.114)$$

avec :

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} c_{\alpha_1} & c_{\alpha_2} & \dots & c_{\alpha_4} \\ s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} & \dots & s_{\alpha_4} \\ b_{ay_1}s_{\alpha_1} - b_{az_1}c_{\alpha_1} & b_{ay_2}s_{\alpha_2} - b_{az_2}c_{\alpha_2} & \dots & b_{ay_4}s_{\alpha_4} - b_{az_4}c_{\alpha_4} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$b_{ay_i}$  et  $b_{az_i}$  sont les coordonnées du point d'application du  $i^{\text{ème}}$  propulseur positionné sur la plateforme tel que  $\mathbf{b}_{a_i} = [0, b_{ay_i}, b_{az_i}]^T$ .

### 3.5.4.2 Orientation des actionneurs

Comme la disposition des propulseurs est symétrique, l'orientation des quatre tuyères peut s'écrire en fonction d'un angle unique  $\alpha$  (voir figure 3.7) :

$$\alpha_1 = \pi + \alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha, \quad \alpha_3 = \alpha, \quad \alpha_4 = \pi - \alpha \quad (3.116)$$

Donc pour une orientation nulle de la plateforme ( $\theta = 0$ ,  $\mathbf{R}_{gp}(\mathbf{x}) = \mathbb{I}_{3 \times 3}$ ), la matrice d'effort des propulseurs, définie dans l'équation (3.114) s'écrit :

$$\mathbf{W}_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c_{\pi+\alpha} & c_{-\alpha} & c_{\alpha} & c_{\pi-\alpha} \\ s_{\pi+\alpha} & s_{-\alpha} & s_{\alpha} & s_{\pi-\alpha} \\ b_{ay_1}s_{\pi+\alpha} - b_{az_1}c_{\pi+\alpha} & b_{ay_2}s_{-\alpha} - b_{az_2}c_{-\alpha} & b_{ay_3}s_{\alpha} - b_{az_3}c_{\alpha} & b_{ay_4}s_{\pi-\alpha} - b_{az_4}c_{\pi-\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

ou encore avec les relations d'égalité trigonométriques :

$$\mathbf{W}_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -c_{\alpha} & c_{\alpha} & c_{\alpha} & -c_{\alpha} \\ -s_{\alpha} & -s_{\alpha} & s_{\alpha} & s_{\alpha} \\ -b_{ay_1}s_{\alpha} + b_{az_1}c_{\alpha} & -b_{ay_2}s_{\alpha} - b_{az_2}c_{\alpha} & b_{ay_3}s_{\alpha} - b_{az_3}c_{\alpha} & b_{ay_4}s_{\alpha} + b_{az_4}c_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Pour déterminer l'angle  $\alpha$  optimal, on construit un problème d'optimisation qui consiste à maximiser le torseur d'effort  $[F_y, F_z, M_x]^T$ . Il faut trouver quelle valeur  $\alpha \in [0, 2\pi[$  maximise le torseur suivant  $y$ ,  $z$  et  $\theta$ .



On suppose que les propulseurs ont une valeur de saturation de 1 N. Le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & |F_{y_{\max}}| + |F_{z_{\max}}| + |M_{x_{\max}}| \\ \text{tel que} \quad & F_{y_{\max}} = \mathbf{W}_a(\mathbf{x}) [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T, \\ & F_{z_{\max}} = \mathbf{W}_a(\mathbf{x}) [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \\ & M_{x_{\max}} = \mathbf{W}_a(\mathbf{x}) [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \end{aligned} \quad (3.119)$$

En utilisant la fonction *fminsearch* de Matlab, on trouve  $\alpha = 45^\circ$  ce qui était attendu intuitivement.

### 3.5.5 Modèle du robot plan incluant la dynamique des actionneurs

Le modèle du robot plan peut être combiné à celui des actionneurs. D'après (3.113) et (3.8), la dynamique de l'ensemble du système peut être représentée :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) \quad \mathbf{W}_a(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2] \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{l}}_2^* \\ \mathbf{t}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{l}}_2 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u \end{cases} \quad (3.120)$$

tel que :

$$\begin{cases} -\dot{\mathbf{l}}_{2_{\max}} \leq \dot{\mathbf{l}}_2^* \leq \dot{\mathbf{l}}_{2_{\max}} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{t}^* \leq \mathbf{t}_{\max} \end{cases} \quad (3.121)$$

avec  $\mathbf{W}_c$  et  $\mathbf{W}_a$  définies pour le cas plan respectivement d'après les équations (3.104) et (3.118) et les saturations  $\dot{\mathbf{l}}_{2_{\max}}$  et  $\mathbf{t}_{\max}$  en vitesse d'enroulement des câbles et en force des actionneurs embarqués respectivement.

L'entrée du système est composée à la fois des consignes de vitesse d'enroulement des trois câbles et les consignes de force des quatre propulseurs embarqués.

$$\mathbf{u}^* = [l_{21}^* \ l_{22}^* \ l_{23}^* \ t_1^* \ t_2^* \ t_3^* \ t_4^*]^T \quad (3.122)$$

Sur la base de ce modèle, des lois de commande qui prennent en compte la dynamique des actionneurs et leurs saturations seront élaborées pour permettre d'améliorer la dynamique de positionnement du robot.

Les non-linéarités de ce système proviennent de la raideur de la plateforme  $\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)$  et de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{gp}$ .

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi le modèle dynamique non linéaire d'un RPC mû par différents modes d'actionnement : les enrouleurs des câbles ainsi que des générateurs de forces unilatérales embarqués sur la plateforme. Ils exercent tous les deux un torseur d'effort permettant de déplacer la plateforme dans son espace de

travail. Les actionneurs additionnels sont choisis avec une dynamique plus rapide que celle des enrouleurs dans le but d'améliorer les performances du robot. Le modèle linéarisé du robot autour d'un point d'équilibre statique a également été calculé.

Nous avons détaillé le modèle particulier d'un RPC plan suspendu non redondant qui servira à valider en simulation et expérimentalement les différentes stratégies de commande développées par la suite. L'étude portera sur le rejet de perturbations et sur le suivi de trajectoire.

Deux technologies différentes d'actionneurs embarqués, et leurs lois de commande dédiées, sont présentées dans les chapitres suivants : des propulseurs à air comprimé et des hélices de drones.



## Chapitre 4

# Amélioration de la dynamique par des propulseurs à air comprimé embarqués

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on explore la piste des propulseurs à air comprimé pour améliorer la dynamique du robot parallèle. Des électrovannes permettent de commander le débit massique d'air expulsé, qui par réaction génère une force sur la plateforme. Ces actionneurs unilatéraux présentent notamment une bande passante en effort bien supérieure à celle générée par les poulies actionnées, notamment en raison d'un temps d'établissement extrêmement court de la force.

On se fixe dans ce chapitre l'objectif principal d'améliorer le rejet des perturbations et des oscillations sur le RPC en utilisant uniquement des actionneurs embarqués. L'idée est donc d'exploiter leur rapidité pour atténuer efficacement les oscillations à haute fréquence, ce qu'on ne peut pas réaliser de manière efficace par l'action des câbles seuls. Néanmoins, les propulseurs à air comprimé présentent plusieurs contraintes :

- ils sont limités en termes de poussée. Cette force maximale dépend de la pression maximale et du débit maximum que peut fournir le compresseur.
- L'actionnement par les électrovannes rapides est de type tout ou rien. La modulation de la poussée est réalisée par une commutation de l'électrovanne à une fréquence élevée avec modulation de largeur d'impulsion. La fréquence maximale est bornée par les temps d'ouverture et de fermeture. Ils sont respectivement de 0.2ms et 1ms avec les vannes les plus rapides du marché que nous avons utilisées. La poussée est proportionnelle au rapport cyclique du signal carré de commande de la valve.
- Lorsque l'air comprimé est embarqué sur la plateforme dans un réservoir pressurisé de contenance finie, dans le but de limiter les pertes de charge, le volume d'air utilisable est limité, donc la force doit être transitoire.

Dans ce chapitre, deux stratégies de commande sont explorées pour stabiliser le robot avec la poussée des propulseurs :

- a) une commande en trois étapes incluant le correcteur, l'allocation des poussées des propulseurs pour obtenir un torseur d'effort désiré, et finalement la modulation du signal de commande des valves tout ou rien pour une poussée souhaitée.

- b) une commande prédictive incluant la contrainte binaire (tout ou rien) des actionneurs. Dans cette stratégie, la stabilisation de la plateforme du RPC, l'allocation des efforts entre les propulseurs et la modulation de leur signal binaire de commande sont toutes gérées au sein d'un seul problème d'optimisation.

## 4.2 Technologie des propulseurs à air comprimé

Cette section dédiée à l'étude technologique des propulseurs a été le fruit du travail de Hugo SELLET durant son stage de Master [SELLET, 2018].

### 4.2.1 Étude théorique : tuyère de Laval

Une tuyère de Laval, communément utilisée dans le domaine spatial [SUTTON et BIBLARZ, 2016] et [HUGONIOT, 1885], a été choisie. Sa forme permet de maximiser la vitesse de sortie de l'air et donc la poussée. En effet, quand la vitesse du gaz est subsonique, le rétrécissement de la section de cette tuyère permet d'augmenter la vitesse de son écoulement jusqu'à atteindre Mach 1. En aval de ce rétrécissement, l'augmentation de la section de la tuyère permet de l'accélérer davantage.

Pour simplifier les équations, quelques hypothèses sont émises :

- tous les fluides restent dans leur état gazeux ;
- le gaz obéit à la loi du gaz parfait ;
- le flux de l'air dans la tuyère est isentropique ;
- les frottements entre l'air et les parois de la tuyère sont négligés ;
- les effets transitoires sont négligés et seul le régime permanent est étudié.

On considère la tuyère supersonique représentée sur la Fig. 4.1, son rétrécissement a une section  $A_{th}$  et à cet endroit, le nombre de Mach de la vitesse d'écoulement de l'air  $M_{th}$  est égal à 1. Le nombre de Mach est le ratio de la vitesse d'écoulement de l'air par rapport à la vitesse du son. Il faut nécessairement qu'au col de la tuyère ce nombre soit égal à 1 pour que le gaz à la sortie de la tuyère atteigne des vitesses supersoniques ( $M_e > 1$ ).

La pression en entrée de la tuyère est réglée et est supposée constante de valeur  $p_0$ . La température de l'air à l'entrée de la tuyère est considérée égale à la température ambiante  $T_0 = 293.15^\circ\text{K}$  soit  $20^\circ\text{C}$ .

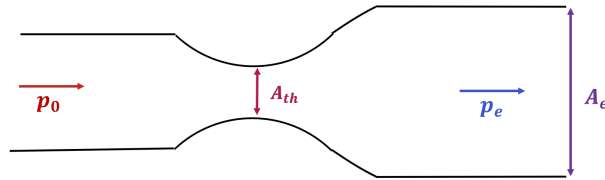


FIGURE 4.1 – Schéma de la tuyère

La vitesse Mach de sortie  $M_e$  (lorsque  $M_{th} = 1$ ) est alors fonction du rapport entre la section du col  $A_{th}$  et la section de sortie  $A_e$ . Finalement, on peut déduire la section du col de la tuyère nécessaire d'après l'équation (3-14) à la page 50 du livre de Sutton [SUTTON et BIBLARZ, 2016] :

$$\frac{A_{th}}{A_e} = M_e \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (4.1)$$

où  $\gamma = 1.4$  est l'indice adiabatique spécifique de l'air.

Une vitesse de sortie supersonique  $M_e \geq 1$  implique une section de sortie plus grande que celle du col. Pour  $M_e = 2$  par exemple, le rapport (4.1) correspond à :

$$\frac{A_{th}}{A_e} = 0.5926 < 1 \quad (4.2)$$

ce qui se traduit par une section de sortie  $A_e$  supérieure à celle du rétrécissement  $A_{th}$ . La vitesse d'écoulement de l'air à la sortie de la tuyère est en fonction de  $M_e$  d'après l'équation (3-11) à la page 49 de [SUTTON et BIBLARZ, 2016] :

$$V_e = M_e \sqrt{\gamma R T_e} \quad (4.3)$$

où  $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  la constante universelle spécifique de l'air dont la température à la sortie de la tuyère est, à partir de l'équation (3-12) à la page 49 de [SUTTON et BIBLARZ, 2016] :

$$T_e = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \quad (4.4)$$

On constate donc que la tuyère de Laval convertit de l'énergie thermique ( $T_e < T_0$ ) en énergie cinétique ( $V_e > V_{th} > V_0$ ) pour atteindre des vitesses supersoniques d'écoulement et augmenter la poussée. La force de poussée générée  $t$  par un propulseur à air comprimé s'écrit en effet comme une fonction affine de la vitesse de sortie de l'air :

$$t = \dot{m} V_e + A_e (p_e - p_a) \quad (4.5)$$

où  $p_a$  est la pression atmosphérique,  $\dot{m}$  le débit massique. Le débit est :

$$\dot{m} = A_e V_e \frac{p_e}{RT_e} \quad (4.6)$$

Une fois les diamètres de la section de sortie et de la section du col de la tuyère sélectionnées, on définit sa géométrie complète. Les tuyères de Laval, introduites dans la Figure 4.1, de forme parabolique sont très utilisées. En se servant des lignes directrices et des graphiques de la section "Nozzle Configurations" du chapitre "Nozzle Theory and Thermodynamic Relations" du livre de Sutton [SUTTON et BIBLARZ, 2016], on définit la forme de la chambre d'expansion de la tuyère illustrée dans la Figure 4.2.

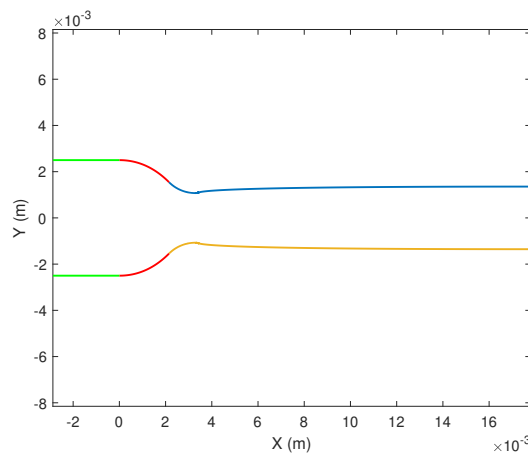


FIGURE 4.2 – Forme de la tuyère optimisée pour une poussée de 2N avec 6bar de pression d'alimentation

La tuyère est alors modélisée sous le logiciel de CAO PTC CREO™ pour être fabriquée avec l'imprimante 3D Stratasys 4 Polyjet™ et en polymère VeroWhite.

### 4.2.2 Circuit pneumatique

La Figure 4.3 présente l'ensemble des composants du circuit pneumatique pour alimenter les tuyères.

Le compresseur AERFAST™ AC12810, de pression maximale de 8 bar est connecté à un régulateur de pression Festo™ VPPM-6L-L-1-G18-0L6H-V1P, qui régule l'arrivée d'air à 6 bar. L'air comprimé est acheminé à la plateforme du robot par un tuyau flexible hélicoïdal Festo™ PUN-10X1.5-S-2-BL. Pour minimiser la chute de pression, due à la résistance du flux de l'air dans les tuyaux, un accumulateur d'air pressurisé Dye™ UL 1.2L a été rajouté à proximité des propulseurs à air comprimé. L'air comprimé est finalement distribué aux propulseurs au travers d'électrovannes rapides tout ou rien Festo™ MHJ-9-QS-6-HF. Ces électrovannes ont leurs propres circuits électroniques d'amplification et de commande qui permettent le contrôle avec le signal de faible puissance d'une carte d'entrée-sortie ou avec le GPIO d'un Raspberry Pi dans notre cas.

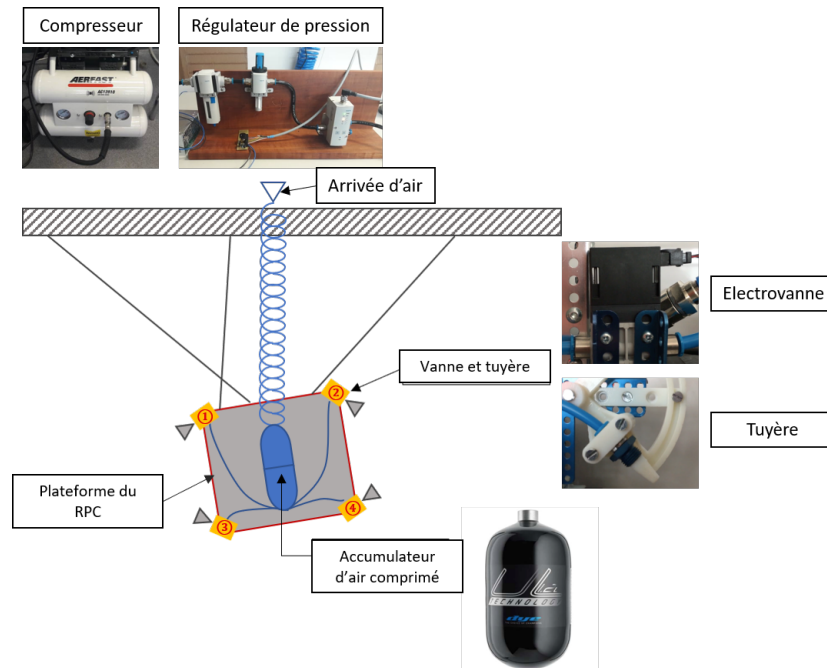


FIGURE 4.3 – Circuit pneumatique pour l'alimentation et commande des propulseurs embarqués

## 4.3 Loi de commande pour la stabilisation de la plateforme

### 4.3.1 Modèle du système

L'objectif est de réaliser un amortissement actif en utilisant les actionneurs embarqués. La synthèse de la loi de commande est effectuée sur un modèle linéarisé du robot autour du point d'équilibre. La linéarisation a été établie pour le RPC plan à l'équation (3.97).

Seule l'action des générateurs de force est évaluée ici pour stabiliser le système. Les poulies ne sont pas actionnées, donc les longueurs à vide du câble ne changent pas :

$$\mathbf{l}_{2\delta} = \mathbf{0} \text{ et ainsi } \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{t}_\delta = \mathbf{t} \quad (4.7)$$

avec une poussée nulle ( $\mathbf{t}_e = \mathbf{0}$ ) des propulseurs à l'équilibre statique.

De plus, le temps de réponse très court des propulseurs à air par rapport à la période d'oscillation mécanique du système est négligé. On néglige donc le temps d'ouverture et de fermeture des électrovannes ainsi que le temps d'établissement de la force de poussée.

L'amortissement introduit par les câbles n'est pas considéré ici, donc :

$$f_c = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_x = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

D'après (3.97), la représentation d'état du système linéarisé est alors :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_s \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_s \underline{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_s \underline{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\delta \\ \dot{\mathbf{x}}_\delta \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_x & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_{ax} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{C}_s = \mathbb{I}$ ,

tel que  $\mathbf{x}_\delta = [y_\delta, z_\delta, \theta_\delta]^T$  est la pose de la plateforme par rapport à son point d'équilibre,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_x$  sont respectivement les matrices d'inertie et de raideur de la plateforme et  $\mathbf{W}_{ax}$  est la matrice d'allocation des propulseurs.

Ce modèle est équivalent à un oscillateur harmonique couplé à  $n$  degrés de liberté.

### 4.3.2 Stratégie de commande multi-étapes

Considérons la plateforme à son équilibre statique. Quand une perturbation d'effort vient s'y appliquer, une oscillation faiblement amortie est générée en raison de la grande élasticité des câbles et de leur faible dissipation. Pour éliminer cette oscillation, on propose une stratégie de commande en trois étapes :

1. La loi de commande calcule un torseur d'effort, en contre-réaction à la vitesse de la plateforme afin d'amortir les oscillations.
2. La poussée individuelle de chaque propulseur est allouée en respectant leur valeur de saturation, telle que le torseur résultant sur la plateforme soit le plus proche de celui calculé à l'étape précédente.
3. La poussée calculée à l'étape précédente est générée en modulant la largeur d'impulsion d'une porteuse haute fréquence qui sert à commander les électrovannes.

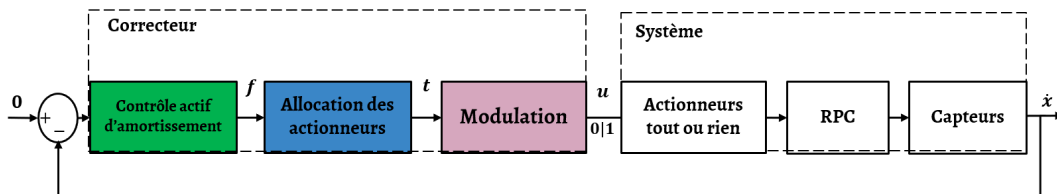


FIGURE 4.4 – Stratégie de commande à multi-étapes : amortissement de vibrations et allocation des actionneurs embarqués



### Loi de commande

L'objectif de la loi de commande est d'amortir le plus rapidement possible les oscillations du système sous la contrainte d'une commande à amplitude bornée.

C'est un problème de commande à temps minimal, qui en application du principe du maximum de Pontriaguine conduit à une commande optimale de type "bang-bang". Dans une telle stratégie, la commande commute entre deux niveaux : sa valeur maximale et minimale.

Dans le cas d'un oscillateur harmonique non-amorti, il est aisé de trouver une solution explicite sous la forme d'une surface de commutation dans un espace de phase entre la zone où une commande maximale doit être appliquée et la zone où une commande minimale doit l'être.

Cependant, une expression analytique de cette surface de commutation n'est pas aisément dérivable dans le cas d'un oscillateur monovisible amorti [SCARAMOZZINO, LISTMANN et GEBHARDT, 2015]. Outre le fait que notre système soit multivariable, la commande "bang-bang" est sensible aux erreurs de modèle et au bruit de mesure résultant en des commutations à haute fréquence de la sortie.

Pour ces raisons, nous nous tournons vers d'autres lois de commande sous optimales comme le "speed gradient" développé par [FRADKOV, 1991].

Pour notre oscillateur multivariable, la loi de commande du "speed gradient" [FRADKOV, MIROSHNIK et NIKI-FOROV, 2000] est, dans sa version linéaire, définie par :

$$\mathbf{w}_a = -\boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}}_\delta \quad (4.10)$$

et, dans sa version avec commutation, par :

$$\mathbf{w}_a = -\boldsymbol{\gamma}_c \text{sign}(\dot{\mathbf{x}}_\delta) \quad (4.11)$$

avec  $\mathbf{w}_a$ , le torseur d'effort commandé et  $\dot{\mathbf{x}}_\delta$ , la vitesse de la plateforme suivant les  $n$  degrés de liberté. La matrice  $\boldsymbol{\gamma}_c$  est une matrice de gains définie positive ( $\gamma_i > 0$ ). La fonction  $\text{sign}()$  est ici vectorielle et retourne un vecteur composé du signe de chaque élément.

La commande "speed gradient" dans sa version avec commutation, est une commande de type "bang-bang", qui commute deux valeurs  $-\boldsymbol{\gamma}_c$  et  $\boldsymbol{\gamma}_c$ . Pour minimiser le temps de retour à l'équilibre,  $\boldsymbol{\gamma}_c$  est choisi égal au torseur maximal généré par les propulseurs. Les performances de cette commande sont alors proches de la commande optimale [SCARAMOZZINO, LISTMANN et GEBHARDT, 2015].

Les conditions et preuves de stabilité des systèmes asservis par la commande "speed gradient" sont présentées dans [FRADKOV et al., 1995].

Nous utilisons pour notre système la version linéaire du "speed gradient", équivalente à une contre-réaction proportionnelle à la vitesse de la plateforme :

$$\mathbf{w}_a = -\boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}}_\delta \quad (4.12)$$

L'équation régissant le comportement de la plateforme autour de l'équilibre devient d'après notre modèle (4.9) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta = \mathbf{W}_{ax} \mathbf{t} = \mathbf{w}_a \quad (4.13)$$

$$\text{et finalement } \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_\delta + \boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}}_\delta + \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

L'implémentation de la commande sous cette forme permet de supprimer tout risque de réticence (phénomène plus connu sous son nom anglais "chattering") [CAPONIGRO et al., 2018], car il n'y a pas de commutation de la commande, donc pas de discontinuité du signal.

Un choix simple pour le gain  $\boldsymbol{\gamma}_c$  est une matrice diagonale avec  $\gamma_i > 0$  :

$$\boldsymbol{\gamma}_c = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

En l'absence de couplage fort entre les différents degrés de liberté ( $\mathbf{K}_x$  diagonale), ce choix règle individuellement le coefficient d'amortissement de chaque degré de liberté. Dans le cas où  $\mathbf{K}_x$  n'est pas diagonale, la commande reste valide, car comme démontré plus loin, il suffit que la matrice vérifie  $\boldsymbol{\gamma}_c > \mathbf{0}$  pour stabiliser le système.

### Allocation des actionneurs

Dans l'étape d'allocation, on calcule les forces unilatérales fixées sur la plateforme pour générer le torseur issu de la commande.

L'objectif est de calculer la commande individuelle de chaque actionneur tout en respectant leurs saturations, pour obtenir le torseur résultant le plus proche de celui désiré.

Le torseur  $\mathbf{w}_a$  généré par  $n_a$  actionneurs embarqués est donné par :

$$\mathbf{w}_a = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{F}_a \\ {}^s\mathbf{N}_a \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{ax} \mathbf{t} \quad (4.16)$$

avec  $\mathbf{t}$ , le vecteur des poussées des actionneurs/ propulseurs.

Dans le cas du robot plan, la matrice des efforts appliqués par les quatre propulseurs embarqués est de dimension  $3 \times 4$  avec un torseur limité à trois DDL :  $\mathbf{w}_a = [F_y, F_z, M_x]^T$ .

En l'absence de contraintes sur les valeurs admissibles des poussées  $\mathbf{t}$ , une solution particulière ( $\mathbf{t}_p$ ) du problème d'allocation des propulseurs est :

$$\mathbf{t}_p = (\mathbf{W}_{ax})^\dagger \mathbf{w}_a \quad (4.17)$$

où  $(\mathbf{W}_{ax})^\dagger$  est la pseudo-inverse ("Moore-Penrose") de la matrice de configuration des propulseurs.

En raison de la redondance d'actionnement d'ordre 1, l'ensemble des solutions du problème s'écrit :

$$\mathbf{t} = \underbrace{(\mathbf{W}_{ax})^\dagger \mathbf{w}_a}_{\mathbf{t}_p} + \mathcal{N}\lambda \quad (4.18)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est un scalaire et  $\mathcal{N}$  est une base du noyau de  $\mathbf{W}_{ax}$ . Avec la configuration symétrique choisie (Figure 4.8), si tous les propulseurs génèrent une même force, le torseur résultant sur la plateforme est nul.  $\mathcal{N} = \frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  est une base normée du noyau tel que le vecteur  $\mathcal{N}$  vérifie  $\mathcal{N}^T \mathcal{N} = 1$ .

Dans le cas général, l'ensemble  $\mathbf{S}$  des poussées admissibles  $\mathbf{t}$ , est représenté par le polytope formé par l'intersection des deux ensembles  $\boldsymbol{\Gamma}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$ . L'ensemble  $\boldsymbol{\Gamma}$  est l'ensemble des solutions du problème d'allocation (4.16) et l'ensemble  $\boldsymbol{\Omega}$  est l'ensemble

des forces admissibles (4.18) [GOUTTEFARDE et al., 2015a].

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{W}_{\text{ax}} \mathbf{t} = \mathbf{w}_{\mathbf{a}}\} \quad (4.19)$$

$$\Omega = \{\mathbf{t} \mid t_i \in [t_{\min}, t_{\max}], 1 \leq i \leq n_a\} \quad (4.20)$$

Pour le cas du PiSaRo3, où le degré de redondance d'actionnement des propulseurs est de 1, ce polytope est unidimensionnel (segment de ligne).

Pour illustrer ces ensembles, on considère un système avec trois propulseurs embarqués  $\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]^T$  pour créer un torseur d'effort  $\mathbf{w}_{\mathbf{a}}$  de dimension 2. L'espace des poussées admissibles des propulseurs  $\Omega$ , forme un cube (4.20), comme représenté sur la Figure 4.5.

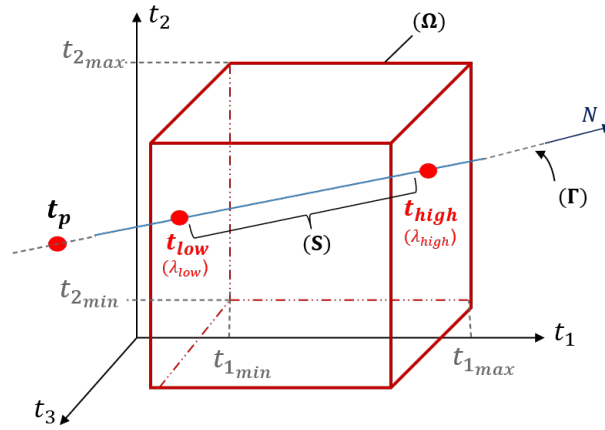


FIGURE 4.5 – Ensemble des forces solutions du problème d'allocation  $\Gamma$  et l'ensemble des forces admissibles  $\Omega$

Étant donné que le degré de redondance est ici de 1, l'espace nul est unidimensionnel avec le vecteur  $\mathcal{N}$  comme base. L'ensemble des poussées solutions  $\Gamma$ , vérifiant l'équation (4.19) peut donc être représenté par une droite dont le vecteur directeur est  $\mathcal{N}$ . Le point  $\mathbf{t}_p$  sur la Figure 4.5 représente la solution particulière du problème sans contrainte (4.17).

Trouver une solution réalisable consiste à choisir un point de la droite à l'intérieur de l'hypercube (ensemble des forces admissibles). Et donc, l'ensemble des solutions réalisables  $\mathbf{S}$  est le segment de droite défini par  $\{\mathbf{t}_{low}, \mathbf{t}_{high}\}$ .

La méthode la mieux adaptée pour sélectionner  $\lambda$  et donc de trouver une solution au problème, est la minimisation de la norme euclidienne  $\|\mathbf{t}\|_2 = \sum \sqrt{t_i^2}$  pour réduire l'énergie des propulseurs (d'après l'équation (4.5), minimiser la poussée générée revient à réduire le débit d'air consommé).

Ce choix de la norme 2 est basé sur les travaux de [BORGSTROM et al., 2009] qui concernent la distribution de tension sur des manipulateurs parallèles.

En minimisant une norme euclidienne, on assure la continuité des forces d'un pas d'échantillonnage au suivant, contrairement à la norme 1. La norme euclidienne évite donc d'exciter les modes oscillatoires en assurant une continuité des poussées.

La distribution des tensions des câbles est un problème similaire à l'allocation des propulseurs unilatéraux. En effet, leur poussée doit être positive et ne peut pas dépasser la poussée maximale  $\mathbf{t}_{\max}$ .

Le problème d'optimisation contraint de l'allocation des propulseurs s'écrit de manière générale :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{t}} \quad & \|\mathbf{t}\|^2 \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{w}_a = \mathbf{W}_{ax} \mathbf{t} \\ & \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{\max} \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'après (4.18), l'ensemble  $\mathbf{S}_t$  des poussées réalisables est défini comme :

$$\mathbf{S}_t = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t}_p + \mathcal{N}\lambda \leq \mathbf{t}_{\max}\} \quad (4.22)$$

Le problème d'optimisation (4.21) est résolu à chaque période d'échantillonnage de la commande pour déterminer la solution  $\mathbf{t}$  correspondant à la valeur optimale de  $\lambda$ .

L'objectif du problème d'optimisation quadratique (4.21) décrit en utilisant la norme euclidienne peut être redéfini en fonction de  $\lambda$  [GOUTTEFARDE et al., 2015a] :

$$\min_{\mathbf{t}} \|\mathbf{t}\|^2 = \min_{\lambda} \|\lambda\|^2 \quad (4.23)$$

En effet, il vient à partir de (4.18) :

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \|\mathbf{t}_p + \mathcal{N}\lambda\|^2 \quad (4.24)$$

$$= \|\mathbf{t}_p\|^2 + 2\mathbf{t}_p^T \mathcal{N}\lambda + \|\mathcal{N}\lambda\|^2 \quad (4.25)$$

La solution non contrainte  $\mathbf{t}_p$  (4.17), vérifie  $\mathbf{t}_p^T \mathcal{N} = \mathbf{0}$ , i.e.  $t_{p1} + t_{p2} + t_{p3} + t_{p4} = 0$ , avec  $\mathcal{N} = \frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

Comme la base  $\mathcal{N}$  choisie dans l'espace nul unidimensionnel de la matrice de configuration  $\mathbf{W}_{ax}$  est orthonormée ( $\|\mathcal{N}\| = 1$ ). On a alors :

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \|\mathbf{t}_p\|^2 + \|\lambda\|^2 \quad (4.26)$$

Comme pour chaque pose de la plateforme la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  est constante, il est ainsi démontré que minimiser  $\mathbf{t}$  revient à minimiser  $\lambda$  (4.23). Le problème se réécrit en fonction de  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \|\lambda\|^2 \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{w}_a = \mathbf{W}_{ax} \mathbf{t} \\ & \mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathcal{N}\lambda \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour le cas des propulseurs à air comprimé fixés sur le robot plan, ils ne peuvent générer qu'une force unilatérale positive ( $t_i \geq 0$ ). Donc, la borne minimale de la force des propulseurs est  $\mathbf{t}_{\min} = \mathbf{0}$ . La contrainte de l'équation (4.27) devient :

$$-\mathbf{t}_p \leq \mathcal{N}\lambda = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \quad (4.28)$$

La solution  $\lambda$  respectant la contrainte  $\mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathcal{N}\lambda$  est donc :

$$\lambda = 2 \max_i (-\mathbf{t}_p)_i = -2 \min_i (\mathbf{t}_p)_i \quad (4.29)$$

où  $\min_i(\mathbf{t}_p)_i$ , indique le plus petit élément du vecteur  $\mathbf{t}_p$ .

Alors, le vecteur de poussées positives des propulseurs, solution pour générer un torseur d'effort désiré  $\mathbf{w}_a$ , est :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathcal{N}\lambda = \mathbf{t}_p - [1\ 1\ 1\ 1]^T \min_i(\mathbf{t}_p)_i > \mathbf{0} \quad (4.30)$$

$$= \mathbf{t}_p - [1\ 1\ 1\ 1]^T \min_i((\mathbf{W}_{ax})^\dagger \mathbf{w}_a)_i \quad (4.31)$$

Les propulseurs ont également une force maximale de poussée  $\mathbf{t}_{\max}$ .

Si la solution du problème (4.27), respectant la contrainte (4.30), ne vérifie pas la contrainte de saturation supérieure :

$$\mathcal{N}\lambda \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \quad (4.32)$$

$$\text{i.e. } \mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathcal{N}\lambda \leq \mathbf{t}_{\max}$$

alors, le problème n'a pas de solution admissible.

On peut toutefois calculer une poussée  $\mathbf{t}_\beta$  générant un torseur dit réduit ( $\mathbf{w}_\beta = \beta\mathbf{w}_a$ ), compatible avec la saturation haute des actionneurs. Ce torseur est d'amplitude réduite ( $\beta \leq 1$ ) mais colinéaire au torseur désiré.

On définit le gain  $\beta$  qui permet d'appliquer un facteur d'échelle :

$$\beta = \text{sat} \left( \frac{t_{\max}}{\max(\mathbf{t})_i} \right) \quad (4.33)$$

où la fonction de saturation  $\text{sat}()$  est définie telle que :

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } |x| \leq 1 \\ -1 & \text{si } x < -1 \end{cases} \quad (4.34)$$

tel que si  $\max(\mathbf{t})_i > t_{\max}$ , alors  $\max(\mathbf{t}_\beta) = t_{\max}$ .

En présence d'une saturation ( $\max(\mathbf{t})_i > t_{\max}$ ), le gain  $\beta$  est inférieur à 1 et les poussées  $\mathbf{t}_\beta$  correspondant au torseur réduit sont données par :

$$\mathbf{t}_\beta = \beta\mathbf{t} \quad (4.35)$$

puisque la relation entre le torseur et la poussée est linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\beta &= \beta\mathbf{w}_a = \beta\mathbf{W}_a \mathbf{t} \\ &= \mathbf{W}_a \mathbf{t}_\beta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Par définition de  $\beta$ , les poussées réduites  $\mathbf{t}_\beta$  respectent alors la contrainte  $\max(\mathbf{t})_i > t_{\max}$ .

Pour résumer et illustrer cette stratégie d'allocation, on considère un torseur  $\mathbf{w}$  désiré de dimension 3 et quatre propulseurs de poussée bornée  $0 \leq t_i \leq 2\text{ N}$ . Les trois étapes de l'algorithme d'allocation sont alors :

1. On calcule la solution particulière non contrainte  $\mathbf{t}_p$  donnée par la pseudo-inverse de la matrice des efforts  $\mathbf{W}_{ax}$ . Par exemple :

$$\mathbf{t}_p = (\mathbf{W}_{ax})^\dagger \mathbf{w} = [4 \ -2 \ -2 \ 0]^T \quad (4.37)$$

2. Pour imposer des poussées positives et minimiser leur norme euclidienne, on

utilise le degré de liberté supplémentaire offert par l'espace nul. En appliquant la formule (4.30), on a  $\min_i(\mathbf{t}_p)_i = -2$ , soit un vecteur de poussées :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathcal{N}\lambda \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &= [4 \ -2 \ -2 \ 0]^T + [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \cdot (2) \\ &= [6 \ 0 \ 0 \ 2]^T \end{aligned} \quad (4.39)$$

3. On vérifie que les forces de poussée ne dépassent pas la saturation des propulseurs. Or  $\max(t_i) > 2N$ , on calcule alors le gain  $\beta$  :

$$\beta = \text{sat} \left( \frac{t_{\max}}{\max(t_i)} \right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (4.40)$$

Le vecteur de poussées  $\mathbf{t}_\beta$  pour produire le torseur réduit  $\mathbf{w}_\beta = \beta \mathbf{w}_a$  en respectant les contraintes de saturation des actionneurs est donc :

$$\mathbf{t}_\beta = \beta \mathbf{t} = \left[ 2 \ 0 \ 0 \ \frac{2}{3} \right]^T$$

La Figure 4.6 illustre les différentes étapes de cet algorithme.

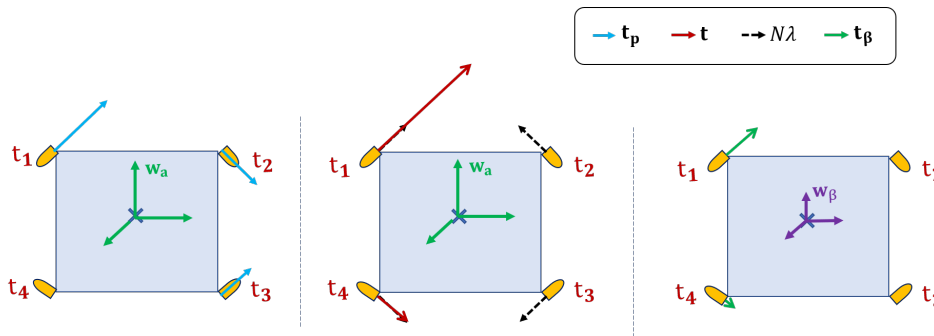


FIGURE 4.6 – Torseur désiré  $\mathbf{w}_a$  et solution non contrainte donnée par la pseudo-inverse  $[4 \ -2 \ -2 \ 0]^T$  vs torseur respectant les contraintes de positivité vs torseur réduit respectant les contraintes de saturation

En raison de la base constante de l'espace nul (les propulseurs sont fixes sur la plateforme) et de sa dimension réduite à 1 ( $\lambda$  est un scalaire), un algorithme simple en trois étapes a pu être proposé pour l'allocation des poussées sur un RPC plan.

Il fournit une solution à chaque période d'échantillonnage de l'asservissement et permet de répondre aux différentes contraintes de saturation et sans optimisation itérative, coûteuse en temps de calcul comme les algorithmes cités dans l'état de l'art (voir section 2.7.1).

### Modulation du signal de commande

Les électrovannes utilisées pour commander le débit d'air et donc la poussée, sont des électrovannes tout ou rien. Étant donné la nature binaire de cette entrée, il est nécessaire de transformer la poussée d'amplitude variable issue du bloc d'allocation en un signal binaire  $\{0,1\}$  en entrée des électrovannes, comme on peut le voir sur la Figure 4.4. La stratégie de modulation proposée ici est la modulation de largeur d'impulsion (MLI), plus connue sous son acronyme anglais PWM (pour "Pulse Width Modulation").

La porteuse à haute fréquence du signal est fixée à 100 Hz, ce qui est compatible

avec le temps de commutation des électrovannes. On vérifie, grâce à un banc d'essai, que la force de poussée générée par un propulseur est linéaire vis-à-vis de la largeur d'impulsion du signal PWM.

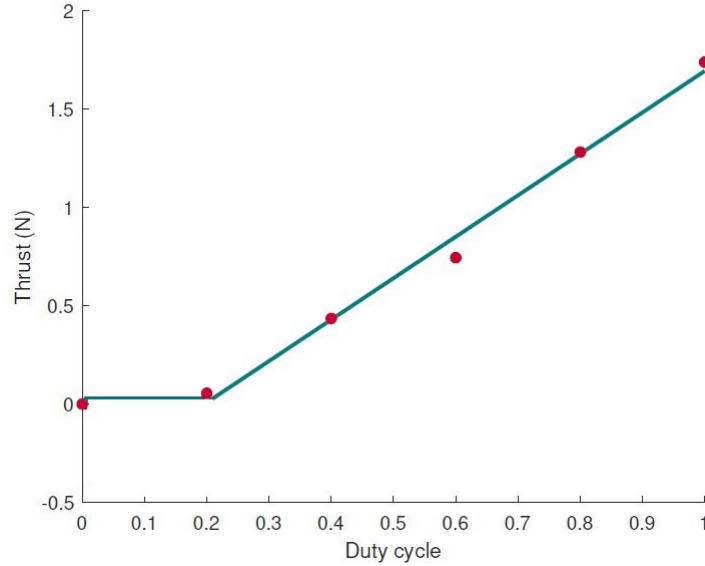


FIGURE 4.7 – La force de propulsion en fonction du rapport cyclique de la porteuse à 100 Hz

On remarque, sur la Figure 4.7, l'existence d'une zone morte. Pour des rapports cycliques inférieurs à 0.18, qui correspondent à 1.8 ms d'ouverture pour une porteuse à 100 Hz, on observe une poussée nulle.

En effet, selon la documentation technique de la vanne, son temps d'ouverture avoisine les 1.8 ms. La force ne peut donc s'établir qu'une fois ce temps écoulé. Si on considère un rapport cyclique de 0.2, soit 2 ms pour une porteuse à 100 Hz : durant 1.8 ms, la vanne est en cours d'ouverture et reste donc complètement ouverte uniquement pendant 0.2 ms. On constate une légère augmentation de la poussée pour ce rapport cyclique, ce qui indique que le temps d'établissement de la force due à la dynamique de l'écoulement d'air est très rapide et de constante de temps inférieure à 200  $\mu$ s. On choisit donc de moduler la commande de poussée continue en signal binaire en utilisant une modulation PWM à une fréquence porteuse de 100 Hz et d'un rapport cyclique minimal de 0.2 soit de 2 ms pour respecter le temps d'ouverture et de fermeture de la vanne rapide.

Quand le système asservi a atteint son régime permanent, le torseur de commande devient très faible. Les très courtes impulsions à 100 Hz, soit chaque 10 ms, du PWM correspondant à ce faible torseur tendent à perturber le système.

Pour contrer ce problème, on intègre une zone morte sur la vitesse de la plateforme (la commande est proportionnelle à la vitesse). Si la vitesse suivant un certain axe de la plateforme est en dessous d'un seuil, le torseur à générer  $\mathbf{w}$  est annulé. On évite alors d'actionner les propulseurs quand on est déjà très proche de l'état d'équilibre :

$$\mathbf{w} = \begin{cases} -\gamma_c \dot{\mathbf{x}} & \text{si } \dot{\mathbf{x}} \geq \dot{\mathbf{x}}_s \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.41)$$

avec  $\dot{\mathbf{x}}_s$  le seuil de la zone morte.

### Stabilité de la commande

Pour cette première application de rejet de perturbations sur la plateforme du robot plan à sa position d'équilibre, on n'utilise pas les enrouleurs qui sont maintenus à une position constante. Seuls les propulseurs sont utilisés, donc :  $\mathbf{l}_{2\delta} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{l}}_{2\delta} = \mathbf{0}$ . Durant l'étape de modélisation, on considère le coefficient de friction  $f_c$  nul et donc,  $\mathbf{C}_x = \mathbf{0}$ . D'après (3.92) ou (4.9), la dynamique du robot plan linéarisé autour de son point d'équilibre  $\underline{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_e^T, \mathbf{0}^T]^T$  s'écrit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_\delta + \mathbf{K}_x(\mathbf{l}_{2e}, \mathbf{x}_e) \mathbf{x}_\delta = \mathbf{W}_{ax}(\mathbf{x}_e) \mathbf{t} = \mathbf{w}_a \quad (4.42)$$

avec  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_p, m_p, I_p)$ , la matrice d'inertie de la plateforme définie positive,  $\mathbf{K}_x(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\tau}_e)$ , la matrice de raideur de la plateforme qui dépend de la géométrie et l'élasticité des câbles et leur configuration au point d'équilibre.

Le torseur d'effort d'amortissement actif de la plateforme est donné par :

$$\mathbf{w}_a = \beta \mathbf{w}_a = \beta (-\boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}}_\delta) \quad (4.43)$$

où  $\boldsymbol{\gamma}_c$  est une matrice constante et définie positive.

Le modèle dynamique en boucle fermée s'écrit donc :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_\delta + \beta \boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}}_\delta + \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

où  $\beta > 0$  est une fonction scalaire lipschitzienne définie par l'équation (4.33).

Pour étudier la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, on utilise la théorie de stabilité de Lyapunov présentée dans [KHALIL, 2001].

La stabilité asymptotique d'un système garantit que si son état est proche de l'équilibre, ou est écarté par une perturbation transitoire, son état converge de manière asymptotique vers sa position d'équilibre stationnaire.

Pour un système dont la dynamique est régie par l'équation  $\dot{x} = f(x)$  qui vérifie  $f(0) = 0$ , le point d'équilibre à l'origine 0 est asymptotiquement stable [KHALIL, 2001] :

— s'il est stable, soit si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$  tel que :

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.45)$$

— et si on peut choisir  $\delta$  tel que :

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.46)$$

#### **Théorie de stabilité de Lyapunov**

On considère  $V$  une fonction de Lyapunov candidate.

Pour que le système soit asymptotiquement stable au sens de la théorie de Lyapunov,  $V$  doit vérifier les conditions suivantes :

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0 \quad (4.47a)$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.47b)$$

On choisit la fonction continue et dérivable représentant l'énergie mécanique totale du système (cinétique et potentielle élastique) comme fonction de Lyapunov candidate



pour notre système (4.44) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_\delta, \dot{\mathbf{x}}_\delta) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\delta^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_\delta + \frac{1}{2} \mathbf{x}_\delta^T \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta \quad (4.48)$$

La première condition est vérifiée :  $\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$ , étant donné que  $\mathbf{M} > \mathbf{0}$ , en raison des propriétés intrinsèques de la matrice d'inertie et  $\mathbf{K}_x > \mathbf{0}$ , à l'exception de configurations de pose particulières, où le terme de rotation de la matrice de raideur antagoniste est négatif (le second terme dans l'expression de  $\mathbf{K}_a$  (3.94) [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2006a; BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2006b]). Dans le cas du robot plan suspendu étudié, ces configurations correspondent à une orientation proche de  $180^\circ$  de la plateforme du robot, soit une configuration plateforme "à l'envers", qui ne peut être atteinte en fonctionnement normal du système.

Le deuxième critère à vérifier est que la dérivée de la fonction de Lyapunov considérée soit définie négative.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}_\delta, \dot{\mathbf{x}}_\delta) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\delta^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_\delta + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\delta^T \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta \\ &= \dot{\mathbf{x}}_\delta^T [-\beta \boldsymbol{\gamma} \dot{\mathbf{x}}_\delta - \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta] + \mathbf{x}_\delta^T \mathbf{K}_x \mathbf{x}_\delta \\ &= -\dot{\mathbf{x}}_\delta^T \beta \boldsymbol{\gamma} \dot{\mathbf{x}}_\delta \leq 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

avec  $\beta \geq 0$  et  $\boldsymbol{\gamma} > \mathbf{0}$  par définition.

On constate que la dérivée de la fonction de Lyapunov est semi-définie négative.

Pour pouvoir conclure sur la stabilité asymptotique qui requiert une inégalité strictement négative, on peut utiliser le théorème de LaSalle sur les ensembles invariants [KHALIL, 2001].

Par définition, un ensemble invariant est un ensemble de points de l'espace d'état tel que toute trajectoire du système  $\dot{x} = f(x)$ , ayant pour condition initiale un point dans cet ensemble, reste indéfiniment à l'intérieur de cet ensemble [MÜLLHAUPT, 2009].

**Corollaire du théorème d'invariance de LaSalle [Khalil, 2001]**

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système défini par l'équation dynamique  $\dot{x} = f(x)$ . Soit  $V : D \rightarrow \mathcal{R}$  une fonction continûment dérivable et définie positive sur le domaine  $D$  contenant l'origine  $x = 0$  telle que  $\dot{V} \leq 0$  dans  $D$ .

Soit l'ensemble  $\mathcal{S} = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ . Si le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\mathcal{S}$  est restreint à la solution  $x = 0$ , alors, l'origine est asymptotiquement stable.

Ce corollaire du théorème d'invariance de LaSalle nous permet de vérifier que le système converge de manière asymptotique vers son point d'équilibre.

En effet, l'ensemble  $\mathcal{S} = \{x \in D \mid \dot{\mathbf{V}}(x) = 0\}$ , où la dérivée de la fonction de Lyapunov est nulle, revient d'après (4.49) à  $\mathcal{S} = \{x \in D \mid \dot{\mathbf{x}}_\delta = 0\}$ . Une solution dans  $\mathcal{S}$  vérifie donc  $\dot{\mathbf{x}}_\delta = 0 \implies \ddot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{0}$ .

Or, d'après le modèle du système (4.44),  $\dot{\mathbf{x}}_\delta = \ddot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{0}$  implique  $\mathbf{x}_\delta = \mathbf{0}$ . Par conséquent, la seule solution et le plus grand invariant contenu dans  $\mathcal{S}$  est l'origine. Ainsi, en appliquant le théorème d'invariance de LaSalle, l'origine  $[\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T]^T$  est asymptotiquement stable.

## 4.4 Résultats expérimentaux

### 4.4.1 Plateforme expérimentale : PiSaRo3

Le RPC PiSaRo3 (voir Figure 4.8) a été construit pour tester l'efficacité de la commande utilisant des propulseurs à air comprimé [SELLET, 2018]. Sa structure est constituée de pièces en tôle d'aluminium pliée, percée et anodisée de type Matrix™. Elles permettent un prototypage rapide de l'architecture du robot tout en conservant une rigidité et une précision d'assemblage correctes. La géométrie de la plateforme a été optimisée pour garantir un espace de travail couvrant une aire de  $1.2\text{ m} \times 0.96\text{ m}$ . Le robot est suspendu par trois câbles de type fils de pêche (Caperlan™ Line Clear 0.55 mm). Les tests de tension cycliques montrent qu'après une procédure de rodage, leurs raideurs spécifiques  $k_s$  tendent vers 500 N. Trois poulies sont entraînées par des moteurs Dynamixel™ XM430-W210-R montés sur la plateforme.

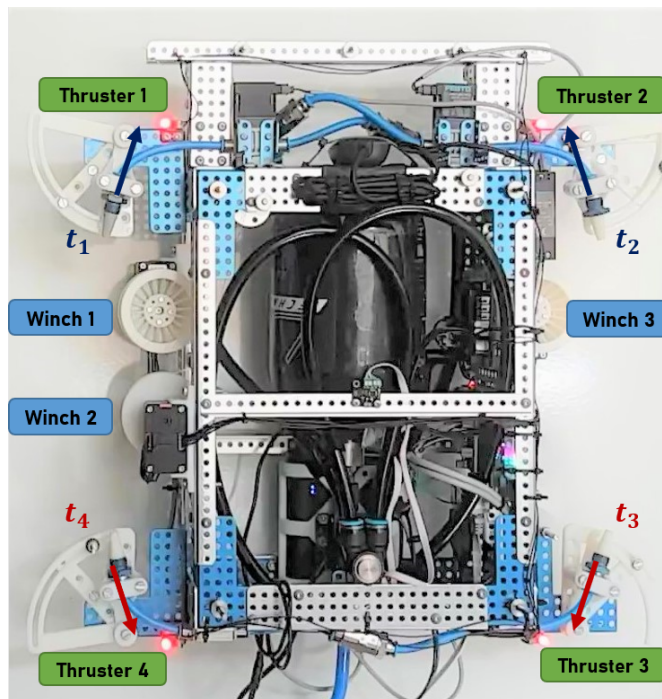


FIGURE 4.8 – Plateforme expérimentale PiSaRo3

Quatre propulseurs sont embarqués sur la plateforme générant des forces unilatérales  $t_1, \dots, t_4$ . Le débit d'air du propulseur est contrôlé par quatre électrovannes tout ou rien connectées aux entrées/sorties à usage général (GPIO pour "General Purpose Input/Output") d'un micro-ordinateur Raspberry Pi 3 (RPi 3) embarqué.

Pour implanter la loi de commande, une toolbox dédiée au RPi, appelée RPIt [GANGLOFF, 2020], a été développée par Jacques Gangloff. Elle permet d'utiliser le mode externe de Simulink Coder™ pour générer le code à embarquer sur une cible Raspberry Pi ou PC avec une distribution Linux (Debian) et faire un prototype rapide de la loi de commande. Le schéma Simulink est automatiquement converti en code C, puis transféré sur la cible pour y être directement compilé (sans compilation croisée). L'exécutable est lancé sur la cible et une connexion TCP/IP est établie entre Simulink et la cible permettant de monitorer les signaux.

Des blocs Simulink sont disponibles pour contrôler les actionneurs Dynamixel™, pour récupérer les données (mesures) d'une IMU standard connectée au bus I2C, pour interagir via le protocole TCP/IP avec un PC dédié à la Vision, ou encore pour lire et

écrire des données binaires sur les GPIO du Raspberry Pi.

Une image de la plateforme terminale est donnée sur la Figure 4.8. Quatre marqueurs lumineux rouges (LED), disposés en carré, sont utilisés pour simplifier le traitement d'image pour l'estimation de la pose par une caméra externe 500Hz. Une IMU Invensense™ MPU 9150 est positionnée approximativement au centre de gravité de la plateforme terminale. Un émetteur-récepteur USB sans fil Xbox 360™ est utilisé pour la commande manuelle du robot.

Ce robot pèse 3.7kg. Ses longueurs nominales de câble sont 1.5m et il peut théoriquement porter une charge utile de 2kg dans son espace de travail.

#### 4.4.2 Commande multi-étapes : résultats expérimentaux

##### Synthèse et stratégie de commande

La Figure 4.9 rappelle le schéma de la stratégie de commande multi-étapes pour la stabilisation active du RPC plan.

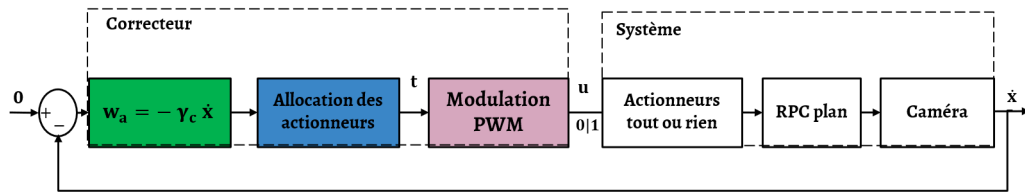


FIGURE 4.9 – Stratégie de commande à multi-étapes : application au RPC plan

La commande est un torseur d'effort sur la plateforme pour amortir les modes oscillants. Cette commande est issue d'un correcteur proportionnel en rétroaction sur la vitesse mesurée (4.10) :

$$\mathbf{w}_a = \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ N_\theta \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{w}_a = -\boldsymbol{\gamma}_c \dot{\mathbf{x}} \quad (4.51)$$

Les vitesses de translation suivant  $y$  et  $z$  sont calculées à partir de la dérivation temporelle de la pose 3D de la plateforme du robot plan fournie par l'algorithme de traitement d'image de la caméra externe (voir section 4.4.1). La vitesse de rotation est fournie par un gyromètre embarqué.

La matrice de gains, utilisée pour notre cas est  $\boldsymbol{\gamma}_c = \mathbb{I}_{3 \times 3}$ . Cette valeur donne les meilleurs résultats expérimentaux pour l'amortissement actif des trois modes vibratoires.

La zone morte est gérée dans le bloc d'allocation des propulseurs. Si le torseur d'amortissement est supérieur aux valeurs de seuil indiquées dans l'équation (4.41) il est envoyé au bloc de l'allocation des propulseurs. Si sa valeur est inférieure aux valeurs de seuil, les propulseurs sont coupés : leur force de propulsion est nulle. Dans ce cas, le système est très proche de l'équilibre et on le laisse se stabiliser passivement. On évite ainsi d'exciter les modes hautes fréquences du système avec le bruit de mesure sur la vitesse et les impulsions du PWM.

Dans le cas du robot PiSaRo3, la zone morte a été choisie expérimentalement telle

que :

$$\text{si } \mathbf{w}_a \leq [0.05 \text{ N}, 0.05 \text{ N}, 0.05 \text{ N m}]^T \implies \mathbf{t} = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (4.52)$$

1. Le bloc de l'allocation des propulseurs est synthétisé en deux étapes. D'après l'équation (4.30) :

$$\mathbf{t} = (\mathbf{W}_{\mathbf{ax}})^\dagger \mathbf{w}_a - \min_i((\mathbf{W}_{\mathbf{ax}})^\dagger \mathbf{w}_a)_i \mathbb{1}_{4 \times 1} \quad (4.53)$$

Cette équation permet de garantir la positivité des forces de propulseurs unilatéraux.

La matrice d'allocation  $\mathbf{W}_{\mathbf{ax}}$  est évaluée au voisinage du point d'équilibre de la plateforme et est donnée par l'équation (3.114).

$$\mathbf{W}_{\mathbf{ax}} = \begin{bmatrix} \cdots & \cos(\alpha_i + \theta_0) & \cdots \\ \cdots & \sin(\alpha_i + \theta_0) & \cdots \\ \cdots & b_{ay_i} \sin(\alpha_i + \theta_0) - b_{az_i} \cos(\alpha_i + \theta_0) & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

où  $\theta_0$  est l'angle de la plateforme fourni par l'algorithme de vision. Les coordonnées  $b_{ay_i}$  et  $b_{az_i}$  sont les coordonnées des points d'attache de chaque propulseur embarqué et les  $\alpha_i$  modélisent les inclinaisons des propulseurs.

2. Si la force des propulseurs dépasse la limite de saturation  $t_i > t_{\max}$ , le coefficient  $\beta$  de remise à l'échelle est calculé :

$$\mathbf{t}_\beta = \beta \mathbf{t} \quad \text{tel que } \beta = \text{sat} \left( \frac{t_{\max}}{\max(\mathbf{t})_i} \right) \quad (4.55)$$

avec  $\mathbf{t}_\beta$  le vecteur de poussées des propulseurs correspondant au torseur de norme réduite.

Les expérimentations ont été menées avec des propulseurs développant une force maximale  $t_{\max} = 1.8 \text{ N}$ .

Avant de réaliser les essais expérimentaux pour valider la loi de commande synthétisée et affiner le réglage de ses paramètres, on valide la commande sous Simulink avec un modèle du robot plan non linéaire, fait à partir de blocs de la boîte à outils Matlab<sup>TM</sup> SimMechanics. Les paramètres de la plateforme PiSaRo3 ont été identifiés et estimés (voir Tableau 4.1).

TABLEAU 4.1 – Paramètres du système

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Masse de la plateforme	$m_p$	3.195	kg
Tenseur d'inertie de la plateforme	$I_p$	0.066	kgm <sup>2</sup>
Raideur spécifique du câble	$k_s$	504	N
Coefficient d'amortissement du câble	$f_c$	7	N m <sup>-1</sup> s

### Courbes expérimentales

Une perturbation transitoire répétable est appliquée au robot plan PiSaRo3. La plateforme du robot est ainsi écartée de sa position d'équilibre et maintenue à cette position par un câble dédié. Ce câble exerce une force de perturbation constante qui disparaît dès que celui-ci est sectionné (par une simple paire de ciseaux). Le robot

plan oscille alors avant de se stabiliser à sa position d'équilibre.

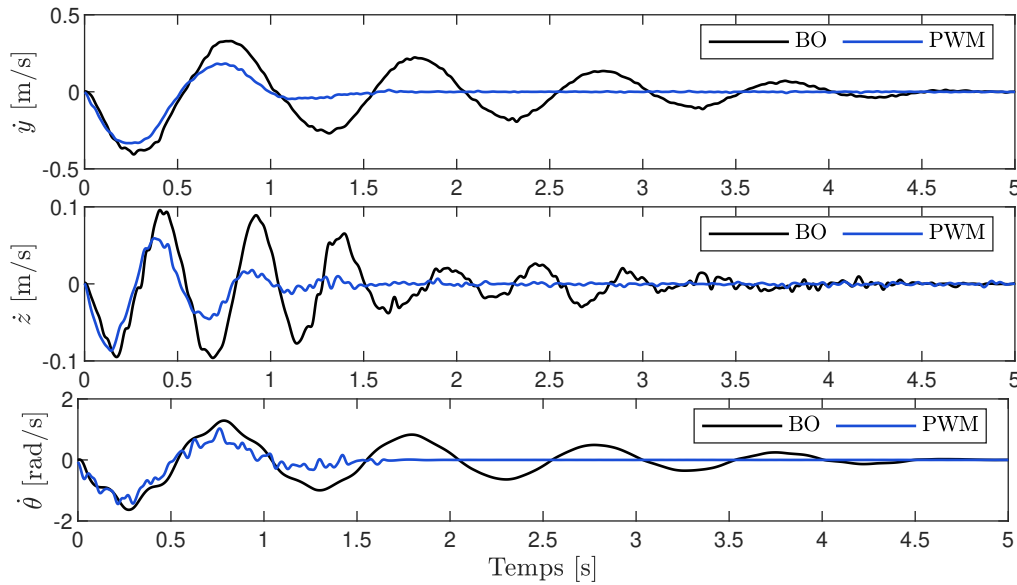


FIGURE 4.10 – Résultats expérimentaux : vitesses de translation suivant  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  et orientation  $\dot{\theta}$  de la plateforme en réponse à une perturbation impulsionnelle (boucle ouverte vs. amortissement actif de la vitesse)

La performance de la loi de commande avec modulation PWM est comparée au comportement du système en boucle ouverte (BO) dans la Figure 4.10, avec le tracé des vitesses cartésiennes de l'effecteur suivant  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  et  $\dot{\theta}$ . Ces vitesses ont été filtrées pour diminuer le bruit de mesure.

Les rapports cycliques, correspondants aux différentes amplitudes de commande de poussée des quatre propulseurs embarqués, présentés à la Figure 4.11, montrent que les trois propulseurs 1, 2 et 3 agissent d'abord sur la première demi-période. Ensuite, les propulseurs 1, 2 prennent le relais avec le propulseur 4 au maximum, pour contrer l'oscillation sur la deuxième demi-période. On remarque aussi l'effet de la zone morte pour  $t > 2$  s avec une commande nulle (4.41).

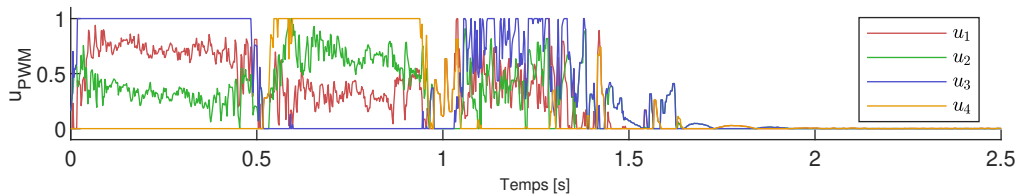


FIGURE 4.11 – Résultats expérimentaux : rapports cycliques des propulseurs à air comprimé

La performance est évaluée en calculant l'intégrale des erreurs quadratiques sur la position suivant les trois composantes  $\mathbf{x} = [y \ z \ \theta]^T$  :  $E_{\dot{y}}$ ,  $E_{\dot{z}}$  and  $E_{\dot{\theta}}$ .

TABLEAU 4.2 – Somme des erreurs quadratiques.

Loi de commande	$E_{\dot{y}}$	$E_{\dot{z}}$	$E_{\dot{\theta}}$	$\int  u_i $
Boucle ouverte	0.1129	0.0064	1.5043	-
PWM	0.0382	0.0019	0.5767	2.516

## Conclusion

Cette étude préliminaire montre expérimentalement que le propulseur à air est une solution viable pour l'amortissement actif des vibrations du RPC. Le tableau 4.2 démontre l'efficacité de la réduction de l'erreur quadratique. On a noté toutefois pendant les expérimentations que le PWM est bruyant en raison de la haute fréquence de la porteuse du signal de commutation à 100 Hz.

## 4.5 Stratégie de commande prédictive

La commande prédictive est une commande très répandue dans l'industrie de nos jours. Elle est venue compléter le classique correcteur PID en offrant une réponse à ses limitations. Parmi ces limitations, on peut mentionner une gestion très basique des saturations ("anti-windup") et de l'anticipation de la consigne ("feed-forward"). La première mention de la commande prédictive date des années 1970. Son appellation d'origine est alors PFC pour "*Predictive Functional Control*" inventée par Jacques Richalet [RICHALET et al., 1978; RICHALET, 1993].

### 4.5.1 La commande prédictive

Le concept de la commande prédictive est d'utiliser un modèle pour prédire la sortie d'un procédé et calculer une commande qui minimise une fonction coût sur un horizon fuyant.

La commande prédictive ou MPC ("*Model Predictive Control*") repose ainsi sur :

1. un modèle du procédé : la commande prédictive est dite à base de modèle [RICHALET et O'DONOVAN, 2009]. A partir de l'état courant du système  $\underline{x}_k$  et les commandes futures  $\mathbf{u}_{k+i}$ , le modèle prédit la sortie future du système  $\mathbf{y}_{k+i}$  sur un horizon de prédiction. L'horizon de prédiction de dimension  $N$  échantillons est représenté sur la Figure 4.12, où l'échantillon d'indice  $k$  représente l'instant courant entre sorties passées et futures.
2. une fonction coût à minimiser : elle définit les objectifs de la séquence de commande optimale pour le procédé via un critère de performance. Une minimisation de l'amplitude de la commande et une minimisation de l'erreur, entre la sortie prédite du système  $\mathbf{y}_{k+i}$  et une référence  $\mathbf{y}_{ref}$  (Figure 4.12), sont des critères classiques. Le vecteur  $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{y}_{k+1}^T \dots \mathbf{y}_{k+N}^T]^T$  est la séquence des sorties estimées, le vecteur  $\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_k^T \dots \mathbf{u}_{k+N-1}^T]^T$  est la séquence des commandes futures. Ces commandes sont les variables d'optimisation, ou décisionnelles, solutions du problème d'optimisation de la commande prédictive.

Dans ce problème d'optimisation, des contraintes peuvent être ajoutées sur les états du système et sur la commande. Une contrainte typique est d'imposer une amplitude de la commande bornée entre des valeurs  $\mathbf{u}_{min}$  et  $\mathbf{u}_{max}$ .

A chaque pas d'échantillonnage, le problème d'optimisation est résolu sur l'horizon de prédiction [BEMPORAD, 2006; ANDERSSON et NÄSHOLM, 2018]. Un algorithme d'optimisation, ou solveur, recherche la solution optimale  $\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_k^T \dots \mathbf{u}_{k+N_u-1}^T]^T$  qui minimise la fonction coût tout en prenant en compte les contraintes.

Pour réduire la dimension du problème, la taille de l'horizon de commande  $N_u$  sur lequel la commande peut varier peut être choisie inférieure à l'horizon de prédiction ( $1 \leq N_u < N$ ). Au-delà de ces  $N_u$  pas, la commande reste constante sur le reste de l'horizon de prédiction, comme on peut le visualiser sur la Figure 4.12.

Seul le premier échantillon de l'horizon  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_k$  de la solution optimale  $\mathbf{U}_k$  est appliqué au système. Au pas d'échantillonnage suivant, l'horizon de prédiction est décalé

d'un pas vers le futur et une nouvelle séquence de commandes  $\mathbf{U}_{k+1}$  est recherchée. Comme l'horizon est décalé à chaque période d'échantillonnage, la commande prédictive est dite à horizon fuyant ou glissant ("*receding horizon*").

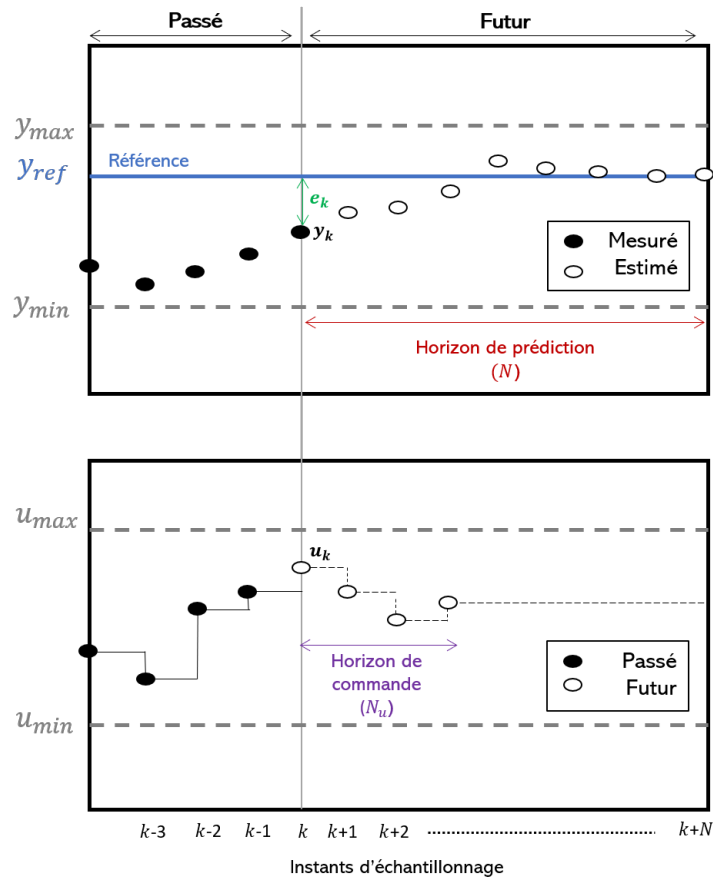


FIGURE 4.12 – Définition des grandeurs et des horizons de la commande prédictive, d'après [BEMPORAD, MORARI et RICKER, 2004]

En actualisant à chaque pas d'échantillonnage la prédiction des sorties avec la nouvelle mesure de la sortie du système, on introduit dans la commande prédictive une rétroaction (cf. Figure 4.13). Ainsi, des erreurs de modèle ou des perturbations peuvent être compensées par la commande.

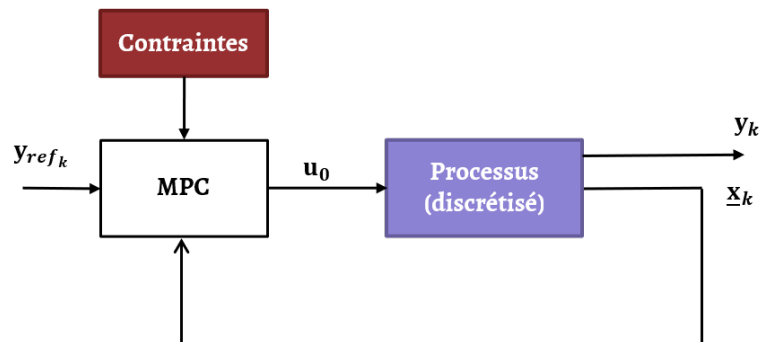


FIGURE 4.13 – Schéma bloc d'une commande prédictive.

Pour simplifier les écritures, la référence à l'instant  $k$ , où est résolu le problème d'optimisation, est omise par la suite : seule la résolution à l'instant courant est pertinente pour l'implémentation de la commande. On note  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0^T \dots \mathbf{u}_{N_u-1}^T]^T$ , les séquences



des commandes futures sur un horizon de  $N_u$  pas, débutant à l'instant courant, et on note  $\mathbf{x}_0$  l'état du système à l'instant d'échantillonnage courant.

Le problème d'optimisation associé à la commande prédictive peut ainsi s'écrire :

$$\min_{\mathbf{U}} J(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{U}) \quad (4.56a)$$

$$\text{tel que } \underline{\mathbf{x}}_{k+1} = f(\underline{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.56b)$$

$$\mathbf{y}_k = g(\underline{\mathbf{x}}_k) \quad (4.56c)$$

$$\underline{\mathbf{x}}_0 \text{ connu} \quad (4.56d)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \forall k \in [0, \dots, N_u - 1] \quad (4.56e)$$

$$\underline{\mathbf{x}}_{\min} \leq \underline{\mathbf{x}}_k \leq \underline{\mathbf{x}}_{\max}, \quad \forall k \in [1, \dots, N] \quad (4.56f)$$

où :

- $J$  est la fonction coût à minimiser, dépendante de la séquence de commandes  $\mathbf{U}$  et de la séquence des états du système  $\underline{\mathbf{X}} = [\underline{\mathbf{x}}_0^T \dots \underline{\mathbf{x}}_N^T]^T$ , sur l'horizon de prédiction  $N$  ;
- $\underline{\mathbf{x}}_k$  est l'état du système à l'instant  $t = k T_s$ , avec  $T_s$  la période d'échantillonnage ;
- $f$  est le modèle d'état à temps discret du processus. Dans le reste du manuscrit, cette fonction est linéaire. On utilise alors le nom de commande prédictive linéaire pour ce problème.
- $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\underline{\mathbf{x}}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$  et  $\underline{\mathbf{x}}_{\max}$  sont des vecteurs bornant l'amplitude de la commande et des états.

## Commande prédictive linéaire

Une commande MPC linéaire s'établit sur une représentation discrète d'un système linéaire (obtenue si besoin par une linéarisation) :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_k \end{cases} \quad (4.57)$$

où  $\underline{\mathbf{x}}_k$  est le vecteur d'état à l'instant d'échantillonnage courant et  $\mathbf{y}_k$  le vecteur des sorties du système. Les matrices d'états  $\mathbf{A}$ , d'entrées  $\mathbf{B}$  et de sorties  $\mathbf{C}$  du système, sont à coefficients constants.

## Fonction coût et paramètres de réglage du MPC

La fonction coût permet de définir les objectifs de la commande  $\mathbf{u}_k$  via un critère de performance. L'objectif premier d'une commande est généralement d'asservir la sortie du système à une référence. Ainsi, la fonction coût proposée historiquement par les premières implémentations de la commande prédictive (correcteurs GPC et DMC "Dynamic Matrix Control" [MACIEJOWSKI, 2002]) minimise la norme quadratique de l'incrément de commande  $\Delta\mathbf{u}_k$  et l'erreur de suivi de la référence :

$$\min_{\mathbf{U}} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|\Delta\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.58)$$

avec

- $\Delta\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$ , l'incrément de commande, où  $\mathbf{u}_k$  et  $\mathbf{u}_{k-1}$  sont respectivement la commande courante et la commande au pas d'échantillonnage précédent ;



- $\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{ref}$ , l'erreur entre les sorties et leur consigne  $\mathbf{y}_{ref}$ . La consigne peut être une constante ("setpoint")  $\mathbf{y}_{ref}$ , ou une trajectoire  $\mathbf{y}_{ref_k}$  sur l'horizon de prédiction ;
- $\mathbf{U} = [\Delta \mathbf{u}_0^T \dots \Delta \mathbf{u}_{N_u-1}^T]^T$ , la séquence d'incrément de commande, solution du problème d'optimisation.
- $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ , une notation pour la norme euclidienne d'un vecteur pondérée par  $\mathbf{V}$ , telle que  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$  ;
- $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ , les matrices de pondération respectivement sur la norme de l'erreur et de la commande.

Minimiser l'incrément de commande  $\Delta \mathbf{u}_k$  ou la commande  $\mathbf{u}_k$  permet dans les deux cas de limiter l'amplitude de la commande. L'intérêt d'une formulation du problème en incrément de commande  $\Delta \mathbf{u}_k$  est qu'en régime permanent ( $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), la fonction coût (4.58) est minimale lorsque la sortie du système est égale à la référence ( $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref}$ ). C'est une condition nécessaire pour avoir une erreur statique nulle. Si la fonction de coût n'est pas minimale pour le régime permanent désiré  $\{\mathbf{y}_\infty, \Delta \mathbf{u}_\infty\} = \{\mathbf{y}_{ref}, \mathbf{0}\}$ , la commande optimale déplacera le système vers un régime permanent différent et introduira une erreur statique [ROSSITER, 2003].

A noter que cette formulation en incrément de commande ne garantit pas l'élimination de l'erreur statique en présence d'erreurs de modèle ou de perturbations. La commande prédictive avec erreur statique nulle sera discutée dans la section 4.5.2.

La formulation en  $\Delta \mathbf{u}$  garantit donc une fonction coût minimale en régime permanent pour  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref}$ , quelle que soit la référence  $\mathbf{y}_{ref}$ . En contrepartie, il est nécessaire d'augmenter le système (4.57) pour introduire la variable d'optimisation  $\Delta \mathbf{u}_k$ . D'après la définition de l'incrément de commande en (4.58), le système augmenté a pour représentation d'état :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{u}_{k+1}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{\mathbf{u}_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{\mathbf{u}_k} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.59)$$

en introduisant l'état supplémentaire  $\mathbf{x}_{\mathbf{u}_k} = \mathbf{u}_{k-1}$ .

Une alternative à la fonction de coût (4.58) est de minimiser effectivement la commande  $\mathbf{u}_k$  et non ses incréments  $\Delta \mathbf{u}_k$ . Cette formulation présente un intérêt - si l'on souhaite minimiser explicitement l'amplitude de la commande ou - si on ne veut pas augmenter la dimension du système et donc la dimension du problème d'optimisation associé.

Soit  $\mathbf{u}_{ref}$  la commande du système quand  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref}$  en régime permanent, alors la fonction de coût alternative s'écrit :

$$\min_{\mathbf{U}} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.60)$$

L'introduction de  $\mathbf{u}_{ref}$  dans la fonction de coût est nécessaire pour vérifier la condition énoncée précédemment : la fonction de coût doit être minimale pour le régime permanent désiré  $\{\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty\} = \{\mathbf{y}_{ref}, \mathbf{u}_{ref}\}$ , si on ne veut pas que la commande optimale introduise une erreur statique. La valeur de  $\mathbf{u}_{ref}$  est à déterminer pour chaque nouvelle référence  $\mathbf{y}_{ref}$ .

Le comportement du correcteur peut être ajusté en modifiant les différents paramètres apparaissant dans les fonctions coût précédentes. Ces paramètres sont :

- $T_s$ , la période d'échantillonnage. Elle définit la fréquence de mise à jour de la commande prédictive. Plus elle est courte, plus le système est réactif à une perturbation ou consigne, mais plus la contrainte est forte sur le solveur pour résoudre le problème en un temps inférieur à celui de la période. Une règle empirique consiste à choisir une période égale à  $\frac{1}{10}$  du temps de réponse désiré en boucle fermée.
- $N$ , l'horizon de prédiction. Il est choisi tel que le produit  $NT_s$  soit au moins égal au temps de réponse désiré en boucle fermée. Un horizon court rend la commande moins optimale, réduit la dimension et donc le temps de résolution du problème d'optimisation, mais il réduit également la stabilité de la commande jusqu'à une potentielle instabilité. Augmenter l'horizon de prédiction a les effets inverses et favorise le respect des contraintes.
- $N_u$ , l'horizon de commande. Il est choisi petit par rapport à l'horizon de prédiction ( $N_u \ll N$ ). Ainsi, le nombre de variables décisionnelles du problème d'optimisation est fortement réduit et le problème plus rapide et simple à résoudre. Le fait qu'à chaque période seul le premier pas de commande calculé sur l'horizon est appliqué est un argument supplémentaire en faveur d'un horizon court. Augmenter la taille de l'horizon de commande améliore les performances en boucle fermée, mais cette amélioration est négligeable au delà d'un horizon de quelques pas (environ 3 pas d'après [ROSSITER, 2003]).
- $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ , les matrices de pondérations de l'erreur de suivi et de l'amplitude de la commande. Ces matrices sont couramment choisies constantes et diagonales afin de permettre de pondérer individuellement les sorties entre elles ainsi que les commandes :  $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_{n_y})$  et  $\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, \dots, r_{n_u})$ . Plus le ratio  $q_i/r_i$  entre les matrices est grand, plus le correcteur est agressif : des commandes d'amplitude importante pouvant atteindre les saturations sont tolérées pour privilégier une erreur de suivi et un temps de réponse faibles.

### Modèle de prédiction et formulation du problème quadratique

L'autre élément constitutif de la commande prédictive est le modèle de prédiction des sorties du système. Le modèle de prédiction du MPC linéaire s'établit à partir de la représentation d'état discrète (4.57). Sur les  $N$  pas de l'horizon, les prédictions des sorties sont données par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 \\
 \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\underline{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{y}_N &= \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_N = \mathbf{C}\mathbf{A}^N\underline{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_{N-1}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

En dissociant les termes passés (connus) et les termes futurs (prédits), la séquence des sorties prédites peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}\underline{\mathbf{x}}_0 + \mathcal{C}\mathbf{U} \tag{4.62}$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CB} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

avec  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1^T \dots \mathbf{y}_N^T]^T$  et  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0^T \dots \mathbf{u}_{N-1}^T]^T$ , respectivement la séquence des sorties futures et la séquence des commandes futures.

Le vecteur des sorties prédites sur l'horizon de prédiction  $N$  est ainsi entièrement déterminé par l'état courant du système ( $\mathbf{x}_0$  connu) et la séquence de commandes futures  $[\mathbf{u}_0^T \dots \mathbf{u}_{N-1}^T]^T$  à décider.

Dans le cas où l'horizon de commande est restreint à  $N_u$  avec  $\mathbf{u}_k$  constant pour  $k \in \{N_u, N_u + 1 \dots N - 1\}$ , l'équation de prédiction (4.62) est facilement modifiée en adaptant l'écriture de la matrice  $\mathcal{C}$  (4.63).

En réunissant la fonction coût (4.60), la prédiction des sorties (4.62) ci-dessus et les contraintes linéaires sur les entrées (4.56e), sur les états et sorties (4.56f) du système, on forme un problème d'optimisation où les seules variables décisionnelles sont les commandes sur l'horizon de prédiction  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0^T \dots \mathbf{u}_{N-1}^T]^T$ .

Cette optimisation contrainte de  $\mathbf{U}$ , résolue à chaque pas d'échantillonnage, pour un modèle et des contraintes linéaires et une fonction coût quadratique, peut être transcrite en un problème d'optimisation quadratique (QP) [MACIEJOWSKI, 2002]. Cette transcription de la commande prédictive en un problème d'optimisation QP est détaillée dans l'annexe B.

Un grand nombre de solveurs performant peuvent alors être utilisés pour résoudre un problème d'optimisation de cette classe. On mentionnera des solveurs libres, open source (OSQP et QPOASES) et d'autres commerciaux (CPLEX, GUROBI, MOSEK).

Il est à noter que, d'après l'équation (4.62), pour prédire la séquence de sorties futures  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1^T \dots \mathbf{y}_N^T]^T$ , il est nécessaire de connaître l'état courant du système  $\mathbf{x}_0$ . Si les états ne sont pas tous accessibles ou les mesures sont entachées de bruit, un observateur est utilisé pour estimer l'état complet du système.

Le filtrage de Kalman [KALMAN et al., 1960] est le plus couramment utilisé pour les systèmes linéaires en présence de mesures bruitées. Plus de détails relatifs à cet estimateur sont développés dans [WELCH, BISHOP et al., 1995].

Pour résumer, la commande prédictive présente de nombreuses propriétés attrayantes pour l'asservissement d'un système. Elle est une commande :

- optimale vis-à-vis de multiples objectifs : la fonction de coût permet de définir de multiples critères de performance à minimiser représentant autant d'objectifs pour la commande. En pondérant ces critères dans la fonction de coût, un ordre de priorité est affecté aux objectifs de la commande.
- sous contraintes : La commande prédictive permet de prendre en compte explicitement les saturations des actionneurs en entrée du système et les limites sur les états admissibles du processus.
- multi variable : La commande prédictive s'applique indifféremment à des systèmes à une seule entrée une seule sortie (SISO), plusieurs entrées plusieurs sorties (MIMO), des systèmes sur-actionnés...

- prédictive avec anticipation ("*preview*") de la référence : si un changement de la référence sur l'horizon de prédiction est connu à l'avance, la commande prédictive peut agir sur la commande du système en anticipation, avant le changement de référence, pour réduire l'erreur de suivi.

En contrepartie de ces propriétés avantageuses, un inconvénient majeur est le temps de calcul de la commande prédictive. A chaque période d'échantillonnage, un problème d'optimisation sous contrainte doit être résolu. Malgré l'utilisation de processeurs et d'algorithmes de résolutions rapides, le temps de calcul reste un facteur limitant pour asservir à haute fréquence des systèmes multi variables. Pour réduire la taille du problème d'optimisation, l'horizon de prédiction  $N$  peut être réduit, mais en dessous d'un certain seuil, la stabilité en boucle fermée de la commande n'est plus garantie.

Concernant la stabilité de la commande prédictive [GRIMM et al., 2005] ont montré qu'un horizon de prédiction  $N$  suffisamment grand garantissait une stabilité asymptotique en boucle fermée. La stabilité de la commande prédictive est alors vérifiée expérimentalement a posteriori.

Pour garantir la stabilité de la commande sur un horizon fini, une contrainte terminale ( $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f$ ) ou un coût terminal ( $J_f = \|\mathbf{x}_N\|_{\mathbf{P}}^2$ ) peuvent être ajoutés dans la définition du problème. Cependant, ces deux solutions complexifient le problème d'optimisation. Plus de détails relatifs à la stabilité du correcteur prédictif sont introduits dans [KEERTHI et GILBERT, 1988; RAWLINGS et MUSKE, 1993; BEMPORAD, CHISCI et MOSCA, 1994].

#### 4.5.2 Commande prédictive sans erreur statique

Une commande prédictive sans erreur statique ("*offset-free MPC*") vise à obtenir en régime permanent une erreur nulle entre la sortie du système et la référence, malgré les incertitudes de modèle et les perturbations. Cette commande est introduite ici dans le but de développer dans le chapitre 5 une commande en position de la plateforme d'un RPC sans erreur statique.

Avec  $\mathbf{y}_c = \mathbf{H}\mathbf{y}$ , on définit le sous-ensemble  $\mathbf{y}_c$  des sorties du système que l'on souhaite contrôler et asservir à une référence  $\mathbf{y}_{c,ref}$ . D'après [ROSSITER, 2003], deux conditions sont requises pour une commande prédictive sans erreur statique :

1. la fonction coût doit être minimale pour le régime permanent désiré : soit  $\mathbf{y}_{c,\infty}$ , la valeur de  $\mathbf{y}_c$  en régime permanent, alors la fonction coût doit être minimale pour  $\mathbf{y}_{c,\infty} = \mathbf{y}_{c,ref}$ . Cette première condition a été discutée dans la section précédente.
2. la sortie du modèle en régime permanent  $\mathbf{y}_\infty$  doit correctement prédire la sortie du système physique malgré les incertitudes sur le système.

Pour vérifier cette seconde condition, le modèle du système est augmenté avec un modèle de perturbations. Ces perturbations peuvent ensuite être estimées pour faire correspondre la sortie du modèle et la sortie du système réel. Ce modèle de perturbations n'a pas besoin de correspondre aux perturbations effectives présentes sur le système pour prendre en compte efficacement les effets de ces perturbations et les erreurs de modèle [MORARI et MAEDER, 2012].

### Modèle de perturbation et observateur

Divers modèles de perturbations ont été proposés [BADGWELL et MUSKE, 2002 ; PANNOCCHIA, 2003]. Pour capturer les écarts en régime permanent, les perturbations sont modélisées par des intégrateurs dans le modèle augmenté. [PANNOCCHIA et RAWLINGS, 2003 ; MAEDER, BORRELLI et MORARI, 2009] ont proposé un modèle du système (4.57) augmenté sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_k + \mathbf{C}_d\mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} &= \mathbf{d}_k \end{cases} \quad (4.64)$$

avec  $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ , le vecteur de perturbations constantes et  $(\mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$  des matrices constantes à définir représentant respectivement l'effet des perturbations sur l'état et la sortie du système.

Le modèle augmenté (4.57) est observable [MAEDER, BORRELLI et MORARI, 2009] si et seulement si  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  est observable, et :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbb{I} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} = n_x + n_d \quad (4.65)$$

où  $n_x$  et  $n_d$  sont respectivement le nombre d'états du système et le nombre de perturbations. La démonstration de ce résultat est une application directe du test de Hautus qui énonce que le système  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  est observable ssi  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbb{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n_x$ . Ce théorème impose des contraintes dans le choix des matrices  $\mathbf{B}_d$  et  $\mathbf{C}_d$  du modèle augmenté. L'analyse des dimensions des matrices dans l'équation (4.65) permet d'en extraire un corollaire : pour que le système puisse être observable, le nombre de perturbations constantes du modèle doit être inférieur ou égal au nombre de sorties ( $n_d \leq n_y$ ).

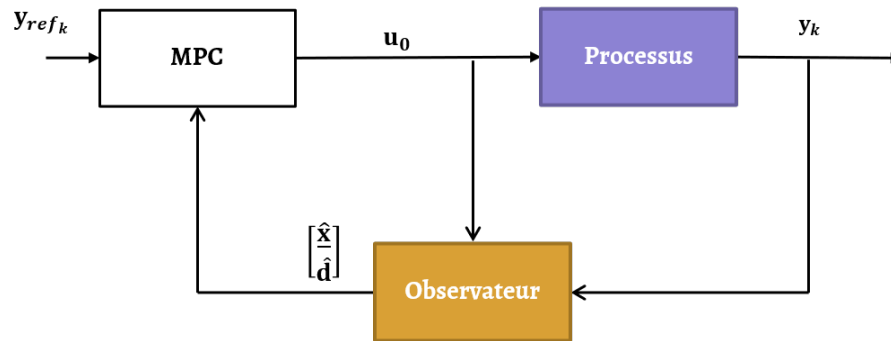


FIGURE 4.14 – Schéma de commande prédictive avec observateur de perturbations

Pour estimer ces perturbations et l'état courant du système, un observateur du système augmenté (Figure 4.14) est considéré sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{d}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_k \\ \hat{\mathbf{d}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_d \end{bmatrix} \underbrace{(\mathbf{C}\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k + \mathbf{C}_d\hat{\mathbf{d}}_k - \mathbf{y}_k)}_{\mathbf{e}_{s_k}} \quad (4.66)$$

où la notation  $\hat{\mathbf{x}}$  désigne une estimation de  $\mathbf{x}$ . Les matrices  $\mathbf{L}_x$  et  $\mathbf{L}_d$  constituent les gains de l'observateur. Ils sont choisis pour faire tendre l'erreur  $\mathbf{e}_{sk}$  entre les vecteurs de sortie estimée  $\hat{\mathbf{y}}$  et mesurée  $\mathbf{y}_k$  vers  $\mathbf{0}$ .

Le gain  $\mathbf{L}_d$  corrige l'estimation de  $\hat{\mathbf{d}}_k$  en fonction de l'erreur de prédiction entre la sortie du modèle augmenté et la sortie mesurée sur le système :

$$\mathbf{e}_{sk} = (\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{C}_d\hat{\mathbf{d}}_k) - \mathbf{y}_k \quad (4.67)$$

$$= \hat{\mathbf{y}}_k - \mathbf{y}_k \quad (4.68)$$

Soit  $\hat{\mathbf{d}}_\infty$  la valeur vers laquelle converge  $\hat{\mathbf{d}}_k$  en régime permanent, alors  $\mathbf{L}_d\mathbf{e}_{s\infty} = \mathbf{0}$  en régime permanent. Si  $\hat{\mathbf{d}}_\infty$  est un vecteur de perturbations tel que la sortie du modèle augmenté correspond à la sortie mesurée du système, alors  $\mathbf{e}_{s\infty} = \mathbf{0}$ . L'équivalence suivante entre régime permanent et erreur de sortie nulle doit être vérifiée :

$$\mathbf{L}_d\mathbf{e}_s = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_s = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

De cette équivalence, il est possible d'en déduire la condition  $n_d \geq n_y$  sur le nombre de perturbations à introduire dans le modèle. Cette condition  $n_d \geq n_y$  et la condition  $n_d \leq n_y$  précédente pour l'observabilité imposent de choisir un nombre de perturbations  $n_d$  tel que  $n_d = n_y$  [PANNOCCHIA, GABICINI et ARTONI, 2015].

Ainsi, il faut autant de perturbations constantes que de sorties mesurées sur le système ( $n_d = n_y$ ) pour que la sortie du modèle augmenté en régime permanent  $\hat{\mathbf{y}}_\infty$  prédise correctement la sortie mesurée sur le système  $\mathbf{y}_\infty$ , malgré les perturbations et incertitudes sur le système.

### Problème de commande prédictive sans erreur statique

Soit le problème de commande prédictive sans erreur statique défini par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} \quad & \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_{c_k} - \mathbf{y}_{c_{ref}}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}\|_{\mathbf{R}}^2 \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{d}_k \\ & \mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k \\ & \mathbf{y}_{c_k} = \mathbf{H}\mathbf{y}_k = \mathbf{H}(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{C}_d\mathbf{d}_k) \\ & \mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ & \mathbf{d}_0 = \hat{\mathbf{d}}_0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

avec  $\mathbf{u}_{ref}$ , la référence de la commande telle que la fonction de coût est minimale pour le régime permanent  $\{\mathbf{y}_{c_\infty}, \mathbf{u}_\infty\} = \{\mathbf{y}_{c_{ref}}, \mathbf{u}_{ref}\}$ .

Si le nombre de perturbations du modèle augmenté est égal au nombre de sorties mesurées du système, et si le système en boucle fermée composé de la commande prédictive (4.70) et de l'observateur (4.66) est asymptotiquement stable ( $\{\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{d}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k\} \rightarrow \{\hat{\mathbf{x}}_\infty, \hat{\mathbf{d}}_\infty, \mathbf{y}_\infty\}$ ), alors  $\mathbf{y}_{c_k} \rightarrow \mathbf{y}_{c_{ref}}$  et l'asservissement est sans erreur statique [MUSKE et BADGWELL, 2002; PANNOCCHIA et RAWLINGS, 2003; MAEDER, BORRELLI et MORARI, 2009].

La preuve de ce théorème est présentée dans les travaux cités.

#### 4.5.3 Commande prédictive pour la stabilisation de la plateforme

Pour amortir les oscillations de la plateforme d'un RPC en présence de perturbations, une commande prédictive est proposée pour piloter les propulseurs embarqués.

L'objectif de la commande est de stabiliser la plateforme du robot plan de la section 4.3 en minimisant le temps de retour à l'équilibre statique ainsi que l'énergie de la commande, i.e la quantité d'air comprimé utilisée par les propulseurs.

L'intérêt de la commande prédictive est ici de pouvoir prendre en compte explicitement les contraintes de saturation des propulseurs ainsi que la commande binaire (tout ou rien) de leurs électrovannes. Cette approche réalise une allocation prédictive qui distribue les forces aux différents propulseurs embarqués. Contrairement à l'approche multi-étapes proposée à la section 4.3, le calcul de la commande et l'allocation des actionneurs sont ainsi réalisés efficacement en une seule étape. Le schéma-bloc de la boucle de régulation correspondante est représenté Figure 4.15.

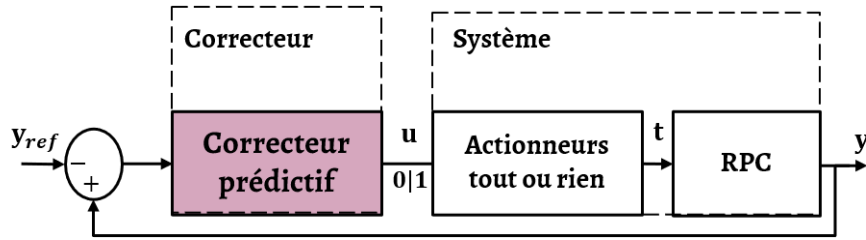


FIGURE 4.15 – Stratégie d'allocation prédictive

### Synthèse de la commande prédictive

Le modèle dynamique de la plateforme est identique à celui utilisé dans l'approche précédente de commande multi-étapes avec allocation directe. Le modèle linéaire est obtenu par une linéarisation en un point d'équilibre statique de pose  $\mathbf{x}_e = [y_e z_e \theta_e]^T$  et un vecteur d'état défini tel que :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\delta \\ \dot{\mathbf{x}}_\delta \end{bmatrix} = [y_\delta \quad z_\delta \quad \theta_\delta \quad \dot{y}_\delta \quad \dot{z}_\delta \quad \dot{\theta}_\delta]^T \quad (4.71)$$

avec  $y_\delta = y - y_e$ ,  $z_\delta = z - z_e$  et  $\theta_\delta = \theta - \theta_e$ , les déviations de la pose par rapport à l'équilibre.

Le modèle dynamique linéaire (4.9) de la plateforme du RPC plan, dont l'entrée  $\mathbf{u}$  est le vecteur des poussées des propulseurs, est ici brièvement rappelé :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \underline{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_x & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_{ax} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

Dans ce modèle,  $\mathbf{M}$  est la matrice d'inertie et  $\mathbf{K}_x$  est la matrice de raideur de la plateforme à l'équilibre.

Le torseur d'efforts commandable est fonction de la poussée des quatre propulseurs,  $\mathbf{u} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]^T$ , et de la position et orientation de ces propulseurs sur la plateforme

représentées par la matrice de configuration  $\mathbf{W}_{\text{ax}}$  (3.114) :

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x}_e) \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Les électrovannes rapides utilisées pour activer les propulseurs à air comprimé sont tout ou rien : soit ouvertes, soit fermées. En négligeant le court transitoire d'ouverture et de fermeture, la poussée en sortie du propulseur est alors également binaire : soit nulle, soit maximale. Cette caractéristique est intégrée dans la modélisation du système en redéfinissant le vecteur  $\mathbf{u}$  et la matrice  $\mathbf{B}$  du modèle (4.72) ci-dessus.

Pour chaque propulseur  $i = 1 \dots 4$ , on définit une variable binaire  $u_i$  pour la commande de l'électrovanne :

$$u_i \in \{0, 1\} \quad \text{tel que} \quad t_i = t_{\max} u_i \quad (4.74)$$

avec  $t_i$ , la poussée du propulseur et  $t_{\max}$ , la poussée maximale identique à tous les propulseurs.

Le modèle dynamique de la plateforme avec en entrées les commandes binaires des électrovannes est alors donné par la représentation d'état (4.72), où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{B}$  sont ainsi redéfinis :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \text{avec } u_i \text{ binaire, et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ t_{\max} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_{\text{ax}} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Du point de vue de la commande, l'objectif est ici d'amortir les oscillations de la plateforme suite à une perturbation transitoire appliquée sur celle-ci. Ainsi l'objectif est de ramener la plateforme à l'équilibre, qui est caractérisé par une déviation nulle de sa pose d'équilibre ( $\mathbf{y}_{ref} = \mathbf{x}_{\delta ref} = 0$ ) et une poussée nulle des propulseurs ( $\mathbf{u}_{ref} = 0$ ). La fonction de coût à minimiser par la commande prédictive est ainsi :

$$J = \min_{\mathbf{U}} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.76)$$

$$= \min_{\mathbf{U}} \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \begin{bmatrix} y_{\delta_k} \\ z_{\delta_k} \\ \theta_{\delta_k} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.77)$$

avec  $y_{\delta}$ ,  $z_{\delta}$  et  $\theta_{\delta}$ , les déviations de la position et orientation de la plateforme.

Le problème d'optimisation du correcteur prédictif est alors décrit par :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \\ & \text{tel que : } \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{T}} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{\text{T}} \mathbf{u}_k \\ & \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{\delta k} = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \\ & \quad u_{k_i} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (4.78)$$

où



- $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0^T \dots \mathbf{u}_{N-1}^T]^T$  est la séquence optimale de commandes binaires des valves des propulseurs, solution du problème ;
- $\mathbf{x}_k$  est le vecteur d'état à temps discret,  $\{\mathbf{A}_T, \mathbf{B}_T\}$  sont respectivement les matrices d'état et d'entrée du modèle (4.72)-(4.75) discrétisé à la période d'échantillonnage  $T_s$  avec un bloqueur d'ordre 0 sur l'entrée ;
- $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont les matrices de pondération sur la déviation de la pose et la norme de la commande binaire des quatre propulseurs considérés identiques. Elles ont été définies telles que :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_z & 0 \\ 0 & 0 & q_\theta \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} = r\mathbb{I}_4 > \mathbf{0} \quad (4.79)$$

Les contraintes de saturation sur la poussée des propulseurs ( $0 \leq t_i \leq t_{\max}$ ) sont ici implicitement prises en compte dans le problème d'optimisation par la nature binaire des commandes  $u_i$  qui impose  $t_i \in \{0, t_{\max}\}$ .

La présence de variables manipulées binaires transforme le problème en problème d'optimisation quadratique en nombres entiers (appelé MIQP pour "*Mixed-Integer Quadratic Programming*"), où certaines variables d'optimisation sont binaires ou entières [BEMPORAD et MORARI, 1999].

Ce type de correcteur prédictif, décrit sous forme d'un problème MIQP quand les entrées du système ne peuvent prendre que des valeurs binaires, a été introduit dans divers domaines. On trouve de nombreuses applications en particulier dans le domaine du génie climatique et de l'énergie. Par exemple dans [DOSTÁL et FERKL, 2014], une chambre climatique est régulée en température et humidité avec des actionneurs n'ayant que 2 états ON/OFF. Les actionneurs sont une résistance chauffante, un humidificateur et un condenseur. Des correcteurs prédictifs MIQP ont aussi été appliqués à la gestion d'une centrale solaire thermodynamique [VASALLO et BRAVO, 2016], d'une maison intelligente avec production photovoltaïque [KILLIAN, ZAUNER et KOZEK, 2018] et un système de climatisation avec un collecteur solaire [MENCHINELLI et BEMPORAD, 2008]. Les variables binaires sont les signaux de commande des pompes, valves, ou convertisseurs tout ou rien, qui permettent de gérer les flux d'énergies entre les unités de production, de consommation ou de stockage de l'énergie. Des variables binaires supplémentaires sont utilisées pour décrire des états, telle une unité de stockage (batterie) pleine ou vide. Cette approche MPC/MIQP a également été étudiée dans le domaine du véhicule autonome pour générer des trajectoires du véhicule sous la contrainte de règles logiques de conduites (distance de sécurité par rapport aux autres véhicules, voie de circulation pour les routes à plusieurs voies...) définies par des variables binaires [QIAN et al., 2016].

Pour résoudre ces problèmes d'optimisation MIQP, plusieurs solveurs sont disponibles. CPLEX, GUROBI et MOSEK sont des solveurs MIQP qui nécessitent une licence commerciale, mais proposent une licence gratuite pour une utilisation dans un contexte académique.

### Implémentation et simulation de la commande prédictive

Pour valider la commande prédictive MIQP, un modèle non linéaire du robot PiSaRo3 (section 4.4.1) est synthétisé avec la boîte à outils Simulink Simscape Multibody™. Ce logiciel permet de décrire graphiquement un système à plusieurs corps avec des blocs représentant des solides, des liaisons et des forces. Les équations de mouvement correspondantes à la description sont alors formulées et résolues par le

logiciel.

Le problème d'optimisation de la commande MPC (4.78) a lui été formulé avec Yalmip, une boîte à outils logicielle pour l'optimisation développée par J. Löfberg [LÖFBERG, 2004]. Le code matlab correspondant est fourni dans l'annexe C. Une fois le problème MIQP décrit, le solveur GUROBI est utilisé pour le résoudre. Il est un des solveurs présentant les meilleures performances en termes de temps de calcul.

Concernant le réglage des matrices de pondération du correcteur, un poids  $r$  identique est affecté individuellement à la commande de chaque propulseur. Aucun propulseur n'est à privilégier par rapport à un autre : les 4 actionneurs sont considérés identiques, découplés et tous nécessaires afin de pouvoir générer un torseur d'effort quelconque sur la plateforme. Les poids de la matrice diagonale de pondération  $\mathbf{Q}$  du RPC sont choisis grands pour imposer une déviation faible de la pose du RPC et ainsi un retour rapide à l'équilibre statique. Le réglage final des poids  $\{q_y, q_z, q_\theta\}$  sur les déviations suivant chaque degré de liberté est affiné en simulation. Les paramètres retenus pour les pondérations et la taille de l'horizon de prédiction sont listés dans le tableau 4.3.

TABLEAU 4.3 – Paramètres du correcteur MPC

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$r$	0.1	$T_s$	0.01 s
$\{q_y, q_z, q_\theta\}$	$\{10, 40, 10\}$	$N$	40

On considère une perturbation transitoire de la pose du PiSaRo3 ayant pour conséquence d'exciter ses modes oscillants/vibratoires. Pour simuler simplement cette perturbation dans le simulateur, la pose initiale de la plateforme à l'instant  $t = 0$  s est déviée de sa pose à l'équilibre.

Les résultats de simulation montrent que le correcteur prédictif MPC MIQP est apte à amortir activement les oscillations de la plateforme avec l'action des propulseurs embarqués. La réponse temporelle de la déviation de pose de la plateforme est donnée dans la Figure 4.16 pour la boucle fermée avec le correcteur prédictif (MPC) et pour la boucle ouverte avec la réponse libre du système (BO). Les commandes binaires des électrovannes des propulseurs à air comprimé sont tracées dans la Figure 4.17b. On constate l'efficacité de la formulation MIQP : le nombre de commutations des vannes entre l'état fermé et ouvert pendant la stabilisation est fortement réduit par rapport à la commande PWM.

#### 4.5.4 Comparaison avec le correcteur multi-étapes (simulation)

On compare la performance du correcteur prédictif MIQP et du correcteur multi-étapes utilisant la modulation (PWM) proposé section 4.3.2. Les critères de performance utilisés pour évaluer le rejet d'une perturbation impulsionnelle sont :

- le temps d'amortissement  $T_d$  des oscillations de la plateforme ;
- le taux en % de réduction de l'erreur RMS sur la pose ;
- $\int |u_i|$ , l'air comprimé total consommé pour rejeter la perturbation ;
- $N_s$ , le nombre de commutations des électrovannes des propulseurs ;

Le temps d'amortissement  $T_d$  est défini comme le temps nécessaire à l'amplitude des oscillations pour atteindre et s'installer dans la bande des  $\pm 1$  mm ou  $\pm 5$  mrad autour de la pose d'équilibre. Les ratios d'amélioration sont calculés avec l'erreur quadratique moyenne (RMS en %) par rapport à la réponse en boucle ouverte pour chaque composante du vecteur de déviation  $\underline{\mathbf{x}} = [y_\delta \ z_\delta \ \theta_\delta]^T$ . Enfin, la quantité d'air

total consommé pour stabiliser le système est évaluée avec le temps d'ouverture total des électrovannes.

Les résultats de l'évaluation ont été résumés dans le tableau 4.4.

Correcteur	$N_s$	$\int  u_i $	$T_d$ [s]			Amélioration		
			$y$	$z$	$\theta$	$y$	$z$	$\theta$
PWM	386	2360	3.944	1.844	2.418	36%	58%	25%
MPC	40	348	1.104	1.081	0.797	40%	60%	38%

TABLEAU 4.4 – Comparaison des critères de performance du rejet de perturbations pour les deux stratégies de commande.

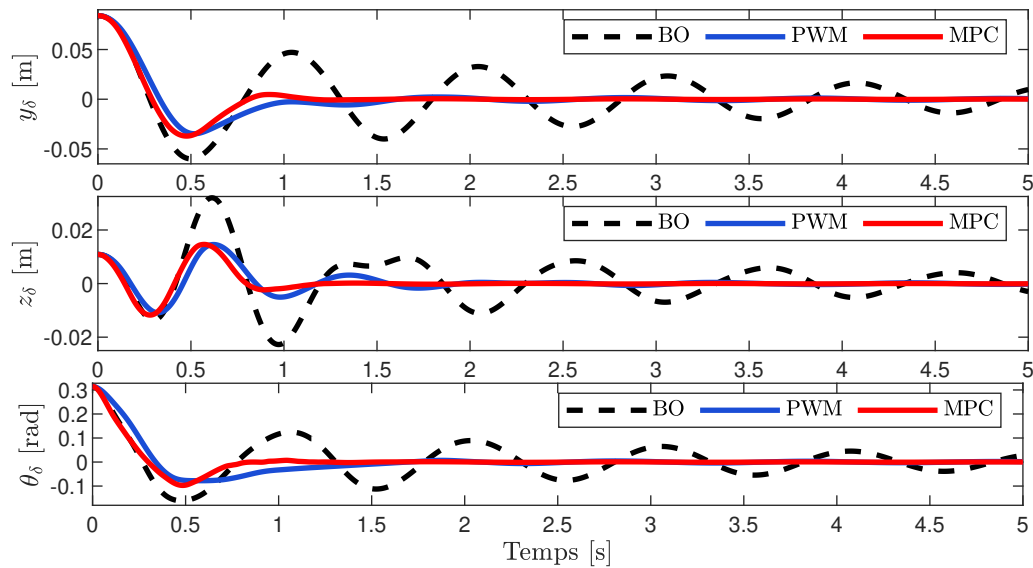


FIGURE 4.16 – Résultats de simulation : positions  $y_\delta$ ,  $z_\delta$  et orientation  $\theta_\delta$  de la plateforme en réponse à une perturbation impulsionnelle pour les deux stratégies de commande

Le correcteur prédictif (MPC) a un temps d'amortissement un peu plus rapide suivant les trois degrés de liberté, comme le montre la Figure 4.16, comparé au correcteur multi-étapes. Pour rappel, le correcteur multi-étapes utilise les propulseurs pour appliquer un torseur d'effort en rétroaction proportionnel à la vitesse cartésienne de la plateforme. Ensuite, une modulation PWM est utilisée pour générer la poussée variable requise sur chaque propulseur afin d'obtenir le torseur d'effort désiré.

Le correcteur MPC MIQP réalise surtout l'amortissement en consommant 7 fois moins d'air comprimé que l'autre stratégie. Ce critère est très important lorsque le réservoir d'air est embarqué sur la plateforme du robot. De plus, le nombre de commutations est réduit (9 fois moins) par rapport à l'approche PWM. En commutant moins, la stabilisation active par l'action des propulseurs est plus silencieuse. Les signaux de commande tout ou rien des quatre propulseurs à air comprimé sont représentés sur la Figure 4.17 pour les deux stratégies.

Néanmoins, le temps de résolution du problème d'optimisation MIQP à chaque pas d'échantillonnage est de deux ordres de grandeur supérieurs à la période d'échantillonnage du système (0.01 s) en simulation sur PC. Malgré l'usage de GUROBI, l'un des solveurs MIQP les plus performants, l'implémentation de cette commande prédictive en temps réel sur une plateforme de calcul embarquée sur le PiSaRo4 n'est pas envisageable en l'état actuel.

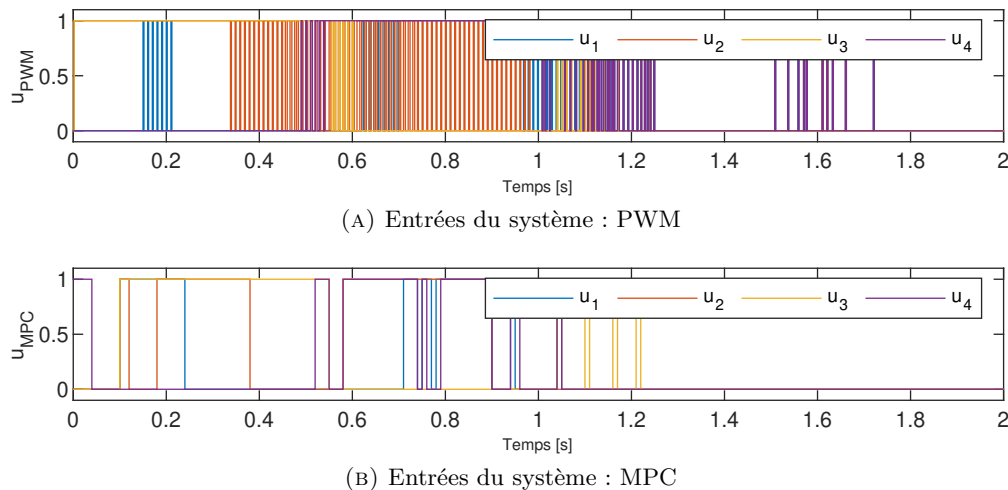


FIGURE 4.17 – Résultats de simulation : signaux de commande des électrovannes pour les deux stratégies de commandes.

## 4.6 Conclusion

Deux commandes ont été proposées afin d'amortir les oscillations de la plateforme d'un RPC en utilisant des actionneurs embarqués tout ou rien.

La première stratégie est une commande en trois étapes : 1/ calcul d'un torseur d'effort de rétroaction proportionnel à la vitesse, 2/ allocation des poussées correspondantes pour chaque propulseur, 3/ modulation PWM de la commande binaire des électrovannes pour obtenir les poussées désirées.

La seconde stratégie est une allocation prédictive qui stabilise le système en résolvant un problème d'optimisation MIQP. La formulation MIQP permet d'intégrer explicitement la nature binaire de la commande des électrovannes.

Les deux stratégies de commande sont validées et comparées en simulation. On note que la stratégie prédictive MPC MIQP donne de meilleurs résultats sur divers aspects : rejet plus efficace des perturbations, commutations moins nombreuses des électrovannes et consommation d'air réduite. En réduisant le nombre et la fréquence des commutations, on favorise l'établissement du flux de l'air et ainsi la poussée des propulseurs. De plus, cette stratégie prévient l'usure mécanique des vannes et augmente leur longévité. Mais le temps de résolution conséquent du problème MIQP ne permet pas encore une implantation temps réel de cette commande sur un robot.

Les propulseurs à air comprimé ont ainsi été évalués sur le robot PiSaRo3 exclusivement avec la commande en trois étapes. Les expériences ont validé leur usage comme actionneur embarqué sur un RPC pour améliorer la dynamique de rejet de perturbations. Néanmoins, l'usage d'électrovannes rapides tout ou rien complexifie la synthèse d'une commande optimale. Le circuit pneumatique (compresseur, filtre, accumulateur...) est encombrant et complexifie le système robotique. Finalement, la poussée limitée avec une pression standard de 6 bar et le bruit engendré par la commutation rapide des électrovannes sont également des inconvénients notables de ce type d'actionneur.



## Chapitre 5

# Amélioration de la dynamique des RPC avec des propulseurs à hélices

Dans ce chapitre, l'association de câbles et de propulseurs à hélice est étudiée pour améliorer la dynamique d'un RPC lors d'un suivi de trajectoire. Comme mentionné précédemment, l'utilisation de longs câbles élastiques réduit la bande passante de l'actionnement par câbles [ROBINSON et al., 1999] : plus l'élasticité du câble est importante, plus la quantité de câbles à enrouler est importante pour générer un effort donné. Comme la vitesse des enrouleurs est bornée, plus la quantité de câbles à enrouler est importante, plus le temps d'établissement de l'effort est long.

L'addition de propulseurs générant des efforts de plus faible amplitude, mais avec un temps de réponse plus rapide que ceux des enrouleurs, peut résoudre ce problème et améliorer la bande passante des efforts commandables. Ainsi, il est envisageable d'améliorer la bande passante du suivi de trajectoire, en plus de la réjection de perturbation.

Contrairement au chapitre précédent où seuls les propulseurs étaient utilisés pour stabiliser le CDPR à l'équilibre, ici les efforts doivent être répartis entre deux types hétérogènes d'actionneurs redondants. La commande prédictive est de nouveau utilisée pour résoudre le problème d'allocation. Cette commande permet en effet de prendre en compte explicitement les saturations distinctes de chaque actionneur et leur redondance. En outre, le formalisme MPC permet aussi de considérer des dynamiques différentes pour les deux types d'actionnement.

La faisabilité et les performances de ce concept d'actionnement hybride sont évaluées dans ce chapitre sur un RPC plan, nommé PiSaRo4. Celui-ci dispose de 4 hélices actionnées par des moteurs synchrones triphasés sans balais autopilotés, issus de la technologie des drones. Une comparaison sera réalisée avec le robot PiSaRo3, introduit précédemment qui utilise des propulseurs à air comprimé.

## 5.1 Suivi de trajectoire à un degré de liberté

### 5.1.1 Descriptif du robot PiSaRo4

Le PiSaRo4 est un robot à câbles plan à 3 DDL avec un actionnement redondant comprenant 3 enrouleurs de câbles et 4 propulseurs à hélice.

Dans une première étude, le déplacement du RPC est restreint à 1 DDL pour simplifier le problème : la translation verticale. Pour contraindre ce mouvement selon la direction  $z$ , les 3 points d'attache des câbles sont choisis tels que les 3 câbles soient

verticaux et parallèles (Fig. 5.1). De plus, le même signal de commande est envoyé simultanément aux 3 enrouleurs résultant en un enroulement simultané des 3 câbles émulant un câble équivalent unique.

Les propulseurs sont commandés par paire. Le même signal de commande de poussée  $t_L > 0$  est envoyé aux 2 propulseurs inférieurs  $\{1,2\}$ . La poussée verticale résultante est alors  $t^+ = 2t_L$  avec  $t_1 = t_2 = t_L$ . Respectivement, la poussée verticale résultante de la paire supérieure  $\{3,4\}$  est  $t^- = 2t_H$  avec  $t_3 = t_4 = t_H$ .

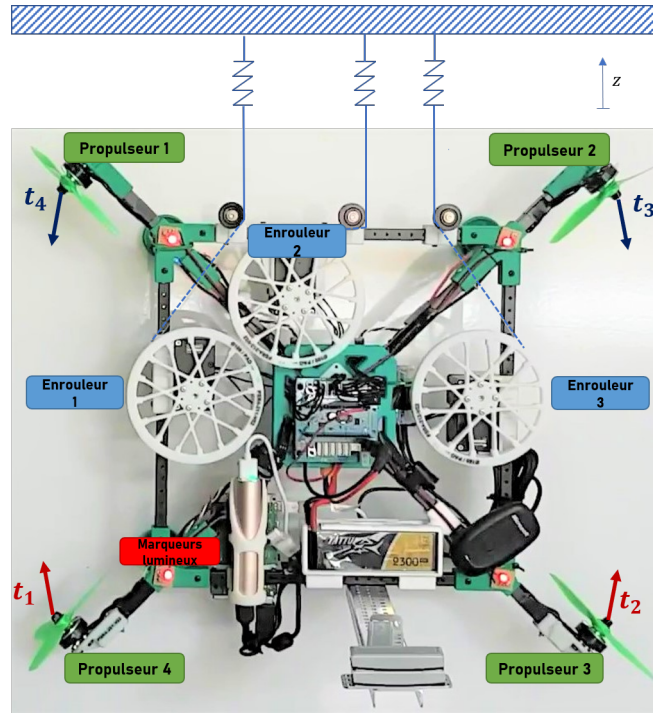


FIGURE 5.1 – PiSaRo4 : RPC plan actionné par des câbles et des propulseurs à hélice.

Le PiSaRo4 est équipé de 4 propulseurs de drones. Malgré leur dénomination, les contrôleurs électroniques de vitesse (ESC : “electronic speed controller”) disponibles pour les drones n’asservissent pas la vitesse du moteur. Or, la poussée est directement proportionnelle au carré de la vitesse des moteurs entraînant l’hélice. Pour contrôler correctement la force, il est donc nécessaire de contrôler correctement la vitesse.

Pour ce faire, une boucle externe rapide d’asservissement de la vitesse de rotation a été développée au sein de l’équipe en utilisant les données de télémétrie temps réel disponibles sur l’ESC (code source disponible à l’adresse <https://github.com/jacqu/teensyshot>). Le correcteur PID utilisé dans cette boucle d’asservissement a été réglé pour obtenir une réponse indicielle ayant la forme d’un premier ordre de constante de temps  $T_{prop} = 0.035$  s.

La plus faible vitesse que peut réguler l’ESC est  $1250 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ , donnant une poussée minimale de  $t_{min} = 0.02 \text{ N}$ . La poussée maximale d’un propulseur est de  $6.7 \text{ N}$ , limitée à  $t_{max} = 3.8 \text{ N}$  (i.e  $15000 \text{ tr} / \text{min}$  sur chaque moteur de la paire) durant les expériences par mesure de sécurité. La disposition symétrique des propulseurs à poussée unilatérale sur la plateforme maximise l’espace des torseurs d’effort faisables, mais également assure une force résultante nulle lorsque tous les propulseurs sont à leur vitesse minimale.

Les enrouleurs sont actionnés par des servomoteurs Dynamixel XM540-W150™. Ceux-ci intègrent un variateur et peuvent être asservis en position, vitesse ou couple. Leur

réponse peut être réglée avec les coefficients de correcteurs PID internes. Ils peuvent atteindre une vitesse maximale de  $53 \text{ tr.min}^{-1}$ , soit une vitesse maximale d'enroulement  $\dot{l}_{2_{\max}} = 0.2631 \text{ m s}^{-1}$  avec le rayon des poulies utilisé sur le PiSaRo4. Ces moteurs sont une évolution des Dynamixel XM430<sup>TM</sup>, utilisés sur le PiSaRo3. Disposant d'un couple 2 fois plus important, l'utilisation des XM540-W150<sup>TM</sup>a permis d'augmenter d'un facteur similaire le rayon des poulies du PiSaRo4 et d'atteindre une vitesse d'enroulement plus grande pour une même gamme de tension des câbles. La vitesse maximale d'enroulement du câble pour le PiSaRo3 était limitée à  $\dot{l}_{2_{\max}} = 0.1492 \text{ m s}^{-1}$ . Comme pour le PiSaRo3, la position et l'orientation du PiSaRo4 sont mesurées par une caméra à 500Hz qui détecte quatre LED montées sur la plateforme. L'ensemble des communications et des calculs sont réalisés par un micro-ordinateur embarqué Raspberry Pi 4, qui exécute un code généré au moyen de la boîte à outils Simulink Coder<sup>TM</sup> et la boîte à outils RPIt [GANGLOFF, 2020] développée dans l'équipe (voir description du PiSaRo3 en section 4.4.1 pour plus d'information).

Enfin, grâce à l'utilisation d'une structure en fibre de carbone et polymère, la masse du PiSaRo4 est réduite à 2.55 kg. On notera qu'un ressort a été inséré entre l'extrémité des câbles et leur point d'attache (Fig. 5.1) pour émuler la raideur de longs câbles. La hauteur de plafond limité d'un environnement d'intérieur en laboratoire ne permet pas de reproduire les longueurs de câbles d'un robot de grande échelle ou opérant sur un immeuble.

### 5.1.2 Modèle dynamique du système

Le PiSaRo4 et le PiSaRo3 dans leur configuration à un DDL sont schématisés dans la Figure 5.2. On représente par  $t^+$  et  $t^-$  la poussée de chacune des deux paires de propulseurs en fonction de la direction de leur poussée.

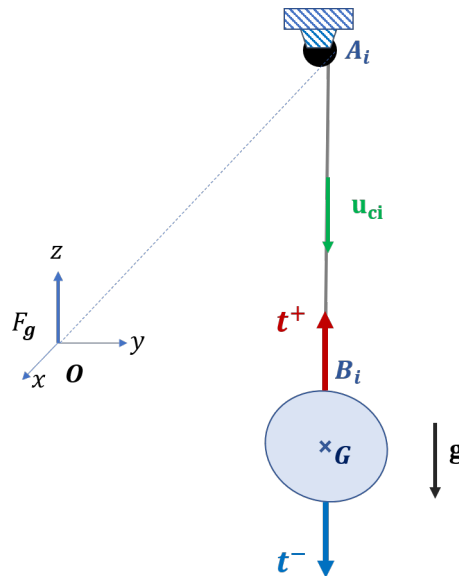


FIGURE 5.2 – Schéma du RPC à un degré de liberté

D'après (3.63), l'équation dynamique décrivant la pose  $\mathbf{x}$  de la plateforme du RPC est :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{W}_{\text{cx}} \quad \mathbf{W}_{\text{ax}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$



La matrice des efforts  $\mathbf{W}_{\mathbf{ax}}$  pour le vecteur de poussée  $\mathbf{t} = [t^+ \ t^-]^T$  est ici simplement :

$$\mathbf{W}_{\mathbf{ax}} = [1 \ -1] \quad (5.2)$$

tandis que la matrice des efforts du câble est :

$$\mathbf{W}_{\mathbf{cx}} = -({}^g\mathbf{u}_{\mathbf{c1}}) = 1 \quad (5.3)$$

Avec une pose  $\mathbf{x}$  définie par la position verticale  $z$  de la plateforme, le modèle dynamique est donc :

$$m\ddot{z} + mg = [1 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} \tau \\ t^+ \\ t^- \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

avec  $\tau = k(l_2)(l_1 - l_2) + f_c(\dot{l}_1 - \dot{l}_2)$ , la tension du câble.

Le ressort, en série avec le câble, possède une raideur faible par rapport à  $k(l_2)$  pour émuler un câble de grande longueur. On peut donc approcher la raideur de l'ensemble câble+ressort par la raideur  $k_r$  du ressort seul. Notons également que la longueur géométrique  $l_1$  du câble est  $l_1 = \|A_1 B_1\| = -z$ , puisque la position de la nacelle est  $z < 0$ .

La tension du câble peut être mise sous la forme :

$$\tau = k_r(-z - l_2) + f_c(-\dot{z} - \dot{l}_2) \quad (5.5)$$

A partir de ce modèle dynamique, on peut établir un modèle linéaire de la dynamique du RPC autour d'un point d'équilibre statique défini par le vecteur  $[z_e, \dot{z}, \dot{l}_2]^T = [z_e, 0, 0]^T$ . Le modèle linéaire est :

$$m\ddot{z}_\delta = t^+ - t^- - k_r(z_\delta + l_{2\delta}) - f_c(\dot{z}_\delta + \dot{l}_2) \quad (5.6)$$

avec :

- $z_\delta = z - z_e$ , la position relative de la plateforme ;
- $l_{2\delta} = l - l_{2e}$ , la longueur libre relative du câble, avec la longueur à l'équilibre  $l_{2e}$  obtenue en résolvant l'équation de la statique ;
- $m$ , la masse de la plateforme ;
- $g$ , l'accélération de la pesanteur ;
- $f_c$ , le coefficient d'amortissement du câble ;
- $t^+$ , la poussée exercée sur la plateforme dans la direction positive de l'axe  $z$  par la paire de propulseurs  $\{1, 2\}$ , avec  $t^+ = 2t_L$  et  $t_L = t_1 = t_2$  ;
- $t^-$ , la poussée exercée respectivement dans la direction négative de l'axe  $z$  avec  $t^- = 2t_H$  et  $t_H = t_3 = t_4$ .

La représentation d'état correspondante à ce modèle linéaire, avec  $\dot{l}_2$  la commande en vitesse de l'enrouleur, s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_\delta \\ \ddot{z}_\delta \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_r}{m} & -\frac{f_c}{m} & -\frac{k_r}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\delta \\ \dot{z}_\delta \\ l_{2\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{f_c}{m} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^+ \\ t^- \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

### Modèle dynamique de l'enrouleur

La dynamique de l'enrouleur et sa vitesse maximale limitent la bande passante des efforts commandables sur la plateforme. Elles influencent ainsi les performances dynamiques du robot.

La poulie de l'enrouleur est montée sur un moteur Dynamixel™ qui possède une boucle interne d'asservissement numérique PID de sa vitesse. Cette boucle assure une erreur statique nulle entre la consigne de vitesse et la vitesse effective d'enroulement  $\dot{l}_2$ . Un système du second ordre de gain statique unitaire modélise alors la réponse de l'enrouleur à une consigne de vitesse  $\dot{l}_2^*$  :

$$\dot{l}_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{l}_2^*(s) \quad (5.8)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation propre et  $\zeta$ , le coefficient d'amortissement.

La vitesse maximale d'enroulement du câble  $\dot{l}_{2\max}$ , exprimée en mètre par seconde, est donnée par le produit de la vitesse angulaire maximale du moteur et du rayon de la poulie. Cette vitesse maximale définit la contrainte de saturation d'entrée de l'enrouleur :

$$-\dot{l}_{2\max} \leq \dot{l}_2^* \leq \dot{l}_{2\max} \quad (5.9)$$

### Modèle dynamique des propulseurs

Comme mentionné dans la description du PiSaRo4 (section 5.1.1), les gains du correcteur PID de la boucle de vitesse du moteur portant l'hélice ont été réglés afin d'obtenir une réponse indicielle ayant la forme d'un premier ordre. Le modèle dynamique du propulseur à hélice est un premier ordre :

$$t(s) = \frac{1}{1 + T_{prop}s} t^*(s) \quad (5.10)$$

où  $T_{prop}$  est la constante de temps entre la consigne  $t^*$  et la poussée effective du propulseur  $t$ .

Pour le PiSaRo3 qui utilise des jets d'air comprimé, on considère, vu la dynamique très rapide de l'établissement du flux d'air (temps de montée  $200 \mu\text{s}$ ), que la poussée est instantanée par rapport à la dynamique en effort des enrouleurs.

Pour les deux types de propulseurs, la poussée maximale en Newton,  $t_{\max}$ , est évaluée sur un banc de test équipé d'un capteur d'effort. La contrainte de saturation de ces actionneurs unidirectionnels est ainsi :

$$0 \leq t^* \leq t_{\max} \quad (5.11)$$

### Modèle dynamique complet du système

En combinant le modèle linéaire de la dynamique de la plateforme (5.6) avec ceux des propulseurs et de l'enrouleur, la représentation d'état du modèle dynamique du

PiSaRo4 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_\delta \\ \ddot{z}_\delta \\ \dot{t}^+ \\ t^- \\ \dot{l}_2 \\ \ddot{l}_2 \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_r}{m} & \frac{-f_c}{m} & \frac{1}{m} & \frac{-1}{m} & \frac{-k_r}{m} & \frac{-f_c}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{prop}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{prop}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\delta \\ \dot{z}_\delta \\ t^+ \\ t^- \\ l_{2\delta} \\ l_2 \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{prop}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{prop}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{+*} \\ t^{-*} \\ \dot{l}_2^* \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\text{tel que} \quad 0 \leq t^{i*} \leq t_{\max}, \quad i = +, - \quad (5.13)$$

$$-l_{2\max} \leq \dot{l}_2^* \leq l_{2\max} \quad (5.14)$$

ou sous une forme compacte incluant la contrainte de saturation de l'entrée :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.15a)$$

$$\text{tel que} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -l_{2\max} \end{bmatrix} \leq \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} t_{\max} \\ l_{2\max} \end{bmatrix} \quad (5.15b)$$

avec respectivement pour vecteur d'état et vecteur des entrées :

$$\mathbf{x} = [z_\delta \quad \dot{z}_\delta \quad t^+ \quad t^- \quad l_{2\delta} \quad l_2 \quad \dot{l}_2]^T, \quad \mathbf{u} = [t^{+*} \quad t^{-*} \quad \dot{l}_2^*]^T \quad (5.16)$$

On notera que si une des deux poussées n'est pas mesurée, le système n'est pas observable. En raison de la dimension non nulle du noyau de l'application linéaire qui donne la force résultante des poussées sur la plateforme  $\mathbf{W}_{\mathbf{c}\mathbf{x}} : (t^+, t^-) \rightarrow f = t^+ - t^-$ , il existe un jeu infini de poussées  $\{t^+, t^-\}$  donnant une même force  $f$  sur la plateforme. Sans la mesure de l'une des deux poussées, il est impossible de lever l'indétermination. Cette affirmation est aisément vérifiée en étudiant le rang de la matrice d'observabilité du système.

On considère donc par la suite une représentation d'état différente du système, qui inclut dans son vecteur d'état la résultante  $f$  des poussées et place des poussées :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_\delta \\ \ddot{z}_\delta \\ f \\ \dot{l}_2 \\ \ddot{l}_2 \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_r}{m} & \frac{-f_c}{m} & \frac{1}{m} & \frac{-k_r}{m} & \frac{-f_c}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{prop}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\delta \\ \dot{z}_\delta \\ f \\ l_{2\delta} \\ l_2 \\ \dot{l}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{prop}} & -\frac{1}{T_{prop}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{+*} \\ t^{-*} \\ \dot{l}_2^* \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\text{tel que} \quad 0 \leq t^{i*} \leq t_{\max}, \quad i = +, - \quad (5.18)$$

$$-l_{2\max} \leq \dot{l}_2^* \leq l_{2\max} \quad (5.19)$$

Cette nouvelle écriture est uniquement possible si tous les propulseurs ont la même dynamique. Avec cette représentation, le système est observable sans nécessiter la mesure d'une des poussées. La mesure de la position seule de la plateforme  $\mathbf{y} = z_\delta = \mathbf{C}\mathbf{x}$  suffit pour que le système soit observable. Cette affirmation est confirmée par le rang plein de la matrice d'observabilité correspondante.

La représentation d'état du PiSaRo3 est une version simplifiée du modèle (5.17) du PiSaRo4. Le temps de réponse des propulseurs à air comprimé étant considéré instantané, les entrées de poussée  $(t^+, t^-)$  sont directement additionnées à l'accélération

de la plateforme  $\ddot{z}_\delta$ . La représentation d'état, combinant uniquement la dynamique du RPC et d'un enrouleur, s'écrit sous une forme :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.20a)$$

$$\text{tel que } \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\dot{i}_{2_{\max}} \end{bmatrix} \leq \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\max} \\ \dot{i}_{2_{\max}} \end{bmatrix} \quad (5.20b)$$

avec respectivement pour vecteur d'état et vecteur des entrées :

$$\underline{\mathbf{x}} = [z_\delta \quad \dot{z}_\delta \quad l_{2_\delta} \quad \dot{l}_2 \quad \ddot{l}_2]^T, \quad \mathbf{u} = [t^+ \quad t^- \quad \dot{l}_2^*]^T \quad (5.21)$$

### 5.1.3 Identification des paramètres du modèle

Les valeurs des paramètres mécaniques de la plateforme sont identifiées séparément de ceux des actionneurs. D'après l'équation dynamique (5.6), le robot avec son enrouleur bloqué ( $\dot{l}_{2_\delta} = 0$ ) est équivalent à un oscillateur amorti d'équation différentielle :

$$m\ddot{z}_\delta = -k_r z_\delta - f_c \dot{z}_\delta \quad (5.22)$$

Sa fonction de transfert du second ordre dans le domaine de Laplace, en présence d'une force externe  $u$ , est :

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{f_c}{m}s + \frac{k_r}{m}} \quad (5.23)$$

où les caractéristiques de sa réponse temporelle en fonction des paramètres mécaniques du modèle sont :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad \text{et} \quad \zeta_0 = \frac{f_c}{2\sqrt{m k_r}} \quad (5.24)$$

Pour identifier ces paramètres, la masse du robot  $m$  est mesurée préalablement grâce à une balance. Ensuite, à partir de la pulsation propre  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta_0$  de la réponse libre du système, on déduit la raideur  $k_r$  de l'ensemble câble+ressort et le coefficient de friction  $f_c$ .

La position  $z$  du système au cours de sa réponse libre est acquise expérimentalement après avoir écarté manuellement la plateforme de sa position d'équilibre, puis l'avoir relâchée. Le mouvement oscillatoire résultant est acquis par la caméra rapide. Cette réponse temporelle est tracée en rouge sur la Figure 5.3.

Pour estimer au mieux la pulsation propre et le coefficient d'amortissement de cette réponse, un modèle du second ordre avec 2 pôles et sans zéro, qui minimise l'erreur entre la sortie du modèle et la réponse libre mesurée est identifiée (fonction `tfest` de la boîte à outils Matlab™, System Identification). La sortie du modèle identifié et la sortie mesurée sur le système sont données sur la Figure 5.3.

Les valeurs obtenues pour les paramètres mécaniques  $m$ ,  $k_r$  et  $f_c$  sont données dans le Tableau 5.1 pour le PiSaRo4 et 3.

De manière similaire, les paramètres du second ordre caractérisant la dynamique des enrouleurs (section 5.1.2) sont identifiés à partir de la réponse de leur servomoteur à un échelon de vitesse. La vitesse effective du moteur est obtenue en dérivant la position mesurée par son codeur incrémental.

Sur le PiSaRo4, la dynamique des enrouleurs correspond à un second ordre de pulsation propre  $\omega_n = 32.4 \text{ rad s}^{-1}$  et de coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.78 \text{ s}^{-1}$  :

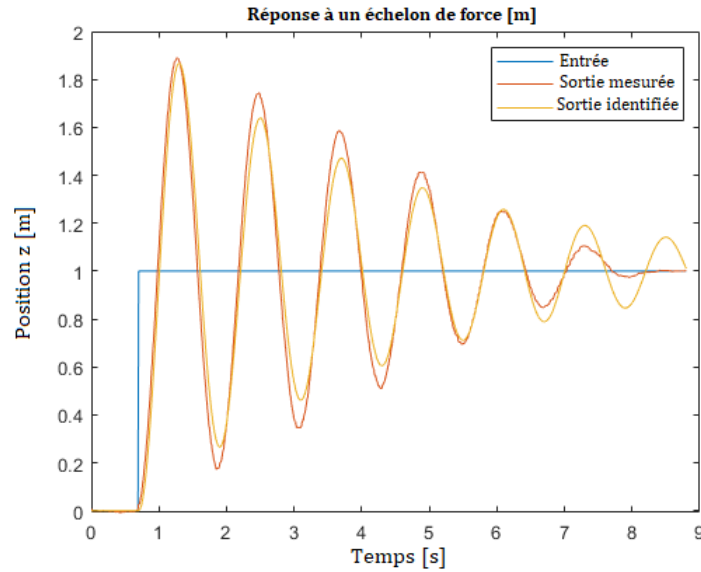


FIGURE 5.3 – Réponse temporelle de la position du robot : mesure expérimentale (en rouge) et sortie du modèle (en orange).

$$\dot{i}_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} i_2^*(s) \quad (5.25)$$

La vitesse maximale d'enroulement du câble est  $\dot{l}_{2\max} = 0.2631 \text{ m s}^{-1}$  pour le rayon de la poulie et la vitesse maximale sans charge du moteur de  $53 \text{ tr.min}^{-1}$ .

Sur le PiSaRo3, où une autre gamme de servomoteurs et des poulies de rayon plus petit sont utilisées, la pulsation propre est estimée à  $\omega_n = 30.5 \text{ rad s}^{-1}$  et le coefficient d'amortissement à  $\zeta = 0.8 \text{ s}^{-1}$ . La vitesse maximale est  $\dot{l}_{2\max} = 0.1492 \text{ m s}^{-1}$ .

Pour finir, la constante de temps  $T_{prop}$  du modèle du premier ordre (5.10) décrivant la réponse du propulseur à hélice est également identifiée à partir de sa réponse indicielle. La réponse du propulseur à une consigne de poussée est mesurée par un capteur d'effort sur un banc de test. La mesure directe du temps de réponse à 5%,  $t_{5\%} = 0.105 \text{ s}$ , fournit une constante de temps estimée  $T_{prop} = \frac{t_{5\%}}{3} = 0.035 \text{ s}$ .

Tous les paramètres du modèle complet, incluant la plateforme et les actionneurs, sont résumés dans le tableau 5.1.

Paramètres	$m$	$k_r$	$f_c$	$\omega_n$	$\zeta$	$T_{prop}$
Unités	kg	$\text{N m}^{-1}$	$\text{N m}^{-1} \text{ s}$	$\text{rad s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	s
PiSaRo 3	4.2	75	1.5	30.5	0.8	-
PiSaRo 4	2.55	70	2	32.4	0.78	0.035

TABLEAU 5.1 – Paramètres du modèle dynamique identifiés

#### 5.1.4 Synthèse de la commande prédictive

L'objectif du correcteur prédictif est de faire converger la position de la plateforme  $z_\delta$  vers une référence, en distribuant la commande entre l'enrouleur et les propulseurs

en fonction de leurs dynamiques et saturations respectives. Le correcteur prédictif doit donc résoudre le problème d'allocation de commande ("*control allocation*").

Pour atteindre cet objectif, une séquence optimale de commandes  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \dots \mathbf{u}_{N_u-1}]$  est calculée pour le système à temps échantillonné, telle que l'erreur de suivi de la référence et la norme de la commande soient minimisées. Le problème d'optimisation correspondant, incluant les saturations des actionneurs, est décrit par :

$$\min_{\mathbf{U}} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}\|_{\mathbf{R}}^2 \right] \quad (5.26a)$$

$$\text{tel que } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_T \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \quad (5.26b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{i}_{2_{\max}} \end{bmatrix} \leq \mathbf{u}_k \leq \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\max} \\ \mathbf{i}_{2_{\max}} \end{bmatrix}, k = 0, \dots, N_u - 1 \quad (5.26c)$$

où :

- $\mathbf{y}_k$  est le vecteur des sorties du système à asservir, ici la pose de la plateforme  $z_\delta$  ;
- $\mathbf{y}_{ref} = z_{\delta ref}$  et  $\mathbf{u}_{ref} = [t_{ref}^+ \quad t_{ref}^- \quad l_{2_{ref}}^*]^T$  sont respectivement la référence de position et la commande du système désirée en régime permanent ;
- $\mathbf{Q} \geq 0$ ,  $\mathbf{R} > 0$  sont deux matrices de pondération, respectivement de l'erreur de suivi de la référence et de la norme de la commande, avec la notation  $\|v\|_{\mathbf{Q}}^2 = v^T \mathbf{Q} v$  ;
- $\mathbf{x}_k$  est le vecteur d'état à temps discret,  $\{\mathbf{A}_T, \mathbf{B}_T\}$  sont respectivement les matrices d'état et d'entrée du modèle complet du PiSaRo (5.17) discrétisé à la période d'échantillonnage  $T_s$  avec un bloqueur d'ordre 0 sur l'entrée ;
- $\mathbf{i}_{2_{\max}}$  et  $\mathbf{t}_{\max}$  sont les saturations d'entrées de l'enrouleur et des propulseurs.

La résolution de ce problème d'optimisation nécessite au préalable de déterminer la valeur de référence de la commande  $\mathbf{u}_{ref}$  pour le régime permanent caractérisé par  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref}$ .

L'introduction de  $\mathbf{u}_{ref}$  dans la fonction de coût doit garantir que la fonction de coût est minimale quand le régime permanent désiré est atteint. Si la fonction de coût n'est pas minimale pour le régime permanent  $\{\mathbf{y}_{ref}, \mathbf{u}_{ref}\}$ , alors la commande optimale calculée générera une erreur statique.

Dans le cas présent, la commande  $\mathbf{u}_{ref} = [t_{ref}^+ \quad t_{ref}^- \quad l_{2_{ref}}^*]^T$  est une des solutions du système (5.17) à l'équilibre statique pour la position  $z_{\delta ref}$  :

$$k_r \left( -z_{\delta ref} - l_{2_{ref}} \right) + t_{ref}^+ - t_{ref}^- = 0 \quad (5.27)$$

avec  $0 \leq t_{ref}^i \leq t_{\max}$ ,  $i = +, -$

Dû à la redondance des actionneurs, il existe une infinité de solutions pour  $\mathbf{u}_{ref}$ . Cependant, la volonté de minimiser l'énergie consommée à l'équilibre amène à choisir une solution avec une poussée nulle des propulseurs, i.e  $[t_{ref}^+ \quad t_{ref}^-]^T = \mathbf{0}$ . Les propulseurs sont donc inactifs à l'équilibre et la sustentation du RPC est assurée par le câble seul. Le choix de piloter les enrouleurs en vitesse<sup>1</sup> a pour conséquence d'avoir une vitesse d'enroulement du câble, nulle à l'équilibre  $\dot{l}_{2_{ref}}^* = 0$ , indépendamment de la longueur

1. Cette idée relève du même concept, généralisé en commande prédictive, privilégiant l'utilisation d'incrément de commande dans la formulation du problème plutôt que la commande elle-même.

libre,  $l_{2\delta ref}$ , solution de (5.27). Ainsi, nous obtenons  $\mathbf{u}_{ref} = \mathbf{0}$ , quelle que soit la référence de position  $z_{\delta ref}$ .

La fonction de coût du problème d'optimisation (5.26) devient alors :

$$\min_{\mathbf{U}} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \|z_{\delta k} - z_{\delta ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \right] \quad (5.28)$$

Pour une erreur statique nulle, outre une fonction de coût minimale pour le régime permanent désiré, il faut que le modèle prédise correctement la sortie du système réel. La prédiction par le modèle doit être correcte, malgré l'écart inévitable avec le système dû aux incertitudes et à la présence de perturbations. Dit autrement [ROSSITER, 2003], lorsque le système réel atteint un équilibre  $z_{\delta} = z_{\delta ref}$  avec  $\mathbf{u} = 0$ , le modèle doit, pour  $\mathbf{u} = 0$ , prédire une sortie  $z_{\delta k}$  égale à  $z_{\delta ref}$  sur l'horizon.

Pour le garantir, une méthode communément utilisée est d'augmenter le modèle du système avec des perturbations constantes. Les perturbations constantes estiment et prédisent l'écart entre le modèle et le système. Elles sont modélisées par des intégrateurs dans le modèle d'état augmenté. L'état du système augmenté avec les perturbations est alors estimé par un observateur.

Dans notre cas, le modèle du système discret comprend déjà un intégrateur. En négligeant la dynamique de la boucle de vitesse de l'enrouleur pour simplifier la démonstration, le modèle du système à temps discret (5.26b) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{T}} \mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{T}} l_{2\delta}(k) \\ l_{2\delta}(k+1) &= l_{2\delta}(k) + T_s \dot{l}_{2\delta}^*(k) \end{cases} \quad (5.29)$$

où l'état  $l_{2\delta}$  a été isolé,  $\tilde{\mathbf{x}}$  représentant les autres états du système dont sa position. En considérant cette équation en régime permanent ( $\dot{l}_{2\delta}^* = 0$ ), on constate que  $l_{2\delta}$  est semblable à une perturbation d'entrée constante influant sur l'état du système via le vecteur  $\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{T}}$ .

Un asservissement avec erreur statique nulle peut donc être obtenu sans augmenter le modèle du robot avec une perturbation additionnelle en utilisant l'estimation de  $\hat{l}_{2\delta}$  fournie par un observateur, au lieu de la longueur libre mesurée du câble  $l_{2\delta}$  dans le problème d'optimisation (5.26). Toutes les perturbations externes et incertitudes de modèle seront intégrées dans la longueur libre estimée du câble. Cette grandeur estimée peut donc être différente de la longueur réelle  $l_{2\delta}$  (voir [MAEDER, BORRELLI et MORARI, 2009] pour la formalisation de cette approche).

Le schéma complet de commande est représenté sur la figure 5.4. Un filtre de Kalman sert d'observateur pour estimer les états du système, dont la longueur libre du câble  $\hat{l}_{2\delta}$ . La seule mesure en entrée de l'observateur est la position de la plateforme  $z_{\delta}$ . Cette mesure est suffisante pour vérifier le critère d'observabilité du système (voir fin de la section 5.1.2). La mesure de position est acquise avec la caméra rapide fixe qui est pointée vers la plateforme du robot.

Le filtre de Kalman et le correcteur prédictif sont implémentés en utilisant la boîte à outils Model Predictive Control de Matlab<sup>TM</sup> et l'environnement de simulation Simulink<sup>TM</sup>. Le code C correspondant est obtenu par la génération automatique de code de Simulink et la boîte à outils RPIt développée dans l'équipe. Ce code source est téléversé, puis compilé et exécuté sur l'ordinateur embarqué du robot. La période d'échantillonnage utilisée pour les expérimentations sur le PiSaRo3 et 4 est  $T_s = 30$  ms.

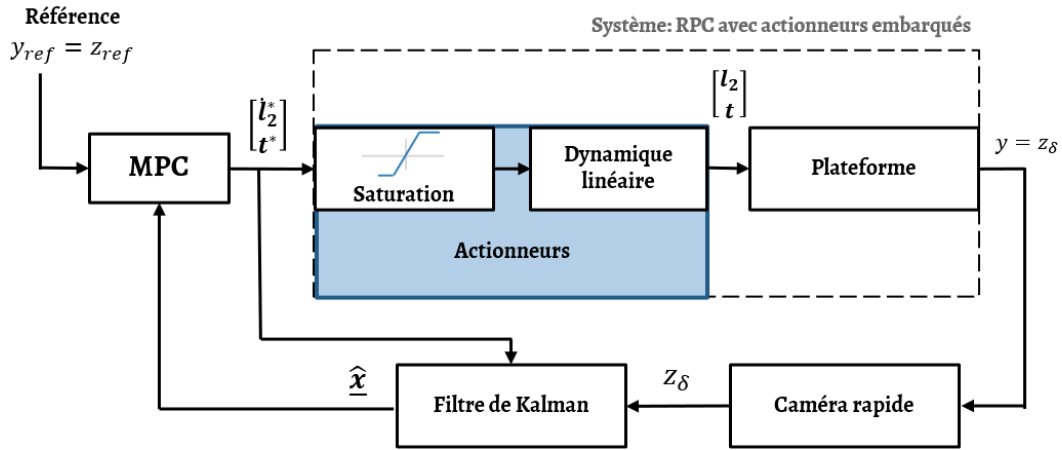


FIGURE 5.4 – Schéma-bloc de l'implémentation du MPC pour la commande des robots PiSaRo3 et 4.

### Ajustement des paramètres du correcteur prédictif

Dans la fonction de coût (5.26a), l'horizon de prédiction  $N$  est choisi tel que le produit  $NT_s$  soit au moins égal au temps de réponse désiré en boucle fermée. L'horizon de commande  $N_u$  est généralement choisi court et plus petit que l'horizon de prédiction  $N$  pour réduire la taille et complexité du problème d'optimisation.

La matrice de pondération  $\mathbf{Q}$  est ici un scalaire, car seule la position verticale est asservie. La matrice  $\mathbf{R}$  est choisie diagonale avec une pondération différente pour l'enrouleur,  $r_t$ , et les propulseurs,  $r_{l_2}$ , afin de pouvoir régler indépendamment leur contribution au suivi de trajectoire :

$$\mathbf{Q} = q_z \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_t & 0 & 0 \\ 0 & r_t & 0 \\ 0 & 0 & r_{l_2} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Le poids sur l'erreur de position  $q_z$  est arbitrairement fixé à 1, car seul le ratio entre ce poids et ceux de la commande influe sur la solution au problème de commande optimale. L'ajustement initial des poids  $\{r_t, r_{l_2}\}$  sur la norme des commandes est effectué en simulation.

On notera que le poids  $r_t$  doit être petit pour ne pas pénaliser la commande des propulseurs. Ainsi, les propulseurs peuvent contribuer significativement au mouvement et améliorer la dynamique du suivi de trajectoire par rapport à l'actionnement avec l'enrouleur seul.

Cependant, il y a un compromis : si ce poids est trop proche de zéro, l'énergie des propulseurs est vraiment peu pénalisée avec pour conséquence des commandes de poussées très élevées sans amélioration de la dynamique du robot. La conséquence néfaste sur le système est une consommation électrique plus importante et des propulseurs plus souvent actifs que nécessaire. Pour rappel, l'application donnant la force résultante  $f$  sur la plateforme en fonction des poussées positives est :  $(t^+, t^-) \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \rightarrow f = t^+ - t^-$ . Donc, tout vecteur de poussée de la forme  $[t^+ + \alpha, t^- + \alpha]^T$  produit une même force sur la plateforme indépendamment du choix de  $\alpha$ . N'importe laquelle de ces solutions peut être sélectionnée au lieu de la solution de norme minimale, si les consignes de poussées ne sont pas pénalisées dans la fonction de coût.



Les valeurs sélectionnées pour les paramètres du correcteur prédictif, ainsi que les contraintes de saturation d'entrées, ont été résumées dans le Tableau 5.2.

Paramètres	N	$N_u$	$q_z$	$r_t$	$r_{l_2}$	$\dot{l}_{2\max}$ [ $\text{m s}^{-1}$ ]	$t_{\max}$ [N]
PiSaRo3	60	8	1	$5.10^{-3}$	$1.10^{-1}$	0.1492	2.6
PiSaRo4	40	7	1	$5.10^{-3}$	$1.10^{-1}$	0.2631	5.4

TABLEAU 5.2 – Paramètres de réglage du correcteur prédictif et contraintes sur la commande

### 5.1.5 Résultats expérimentaux

Un échelon de position  $z_{\delta\text{ref}} = 0.1 \text{ m}$ , soit un déplacement de la plateforme de 10 cm vers le haut, est choisi comme consigne pour étudier les performances du correcteur. Les réponses comparées sont : i) en boucle ouverte, ii) avec le correcteur prédictif utilisant l'enrouleur seul, et iii) utilisant l'enrouleur du câble et les propulseurs.

#### Plateforme PiSaRo3 avec propulseurs à air comprimé

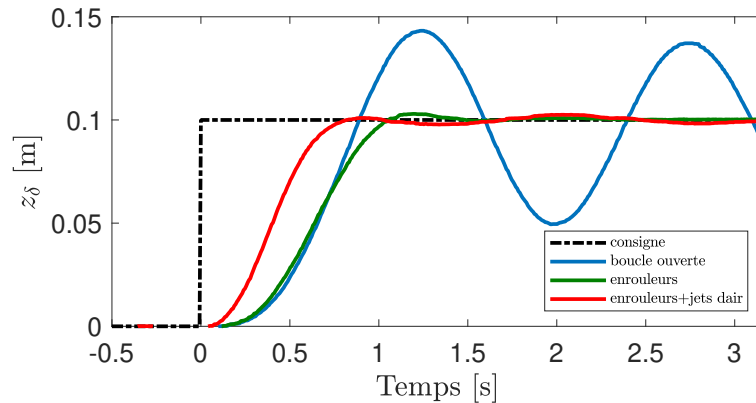


FIGURE 5.5 – Réponse du RPC PiSaRo3 à un échelon de référence 0.1 m pour les trois scénarios de commande.

Comparée à la réponse en boucle ouverte (Figure 5.5), la réponse est efficacement amortie avec la commande prédictive sans propulseur (*enrouleurs*) ou avec les propulseurs (*enrouleurs+jets d'air*). Le dépassement n'excède pas 5% de la valeur finale souhaitée. L'amélioration notable induite par les propulseurs est un temps de montée de la réponse réduit (-20% à 0.45 s) comparé au temps de montée avec l'enrouleur seul (0.56 s).

En termes de temps de réponse, une analyse de la Figure 5.6 montre que le temps de réponse à 5% est amélioré avec l'action des propulseurs (-28% à  $t_{5\%}=0.7 \text{ s}$ ) comparé au temps de réponse avec l'enrouleur seul (0.97 s).

Cependant, le temps de réponse à 2% est, lui, fortement dégradé (+66%). L'observation de la réponse indiciaire met en évidence des oscillations résiduelles sous l'action des propulseurs à air comprimé, qui dégradent le temps de réponse à 2%.

La commande de poussée des propulseurs (tracé supérieur droit de la Figure 5.7) met en évidence l'activité des propulseurs au-delà de  $t=1.5 \text{ s}$  et une difficulté à amortir les

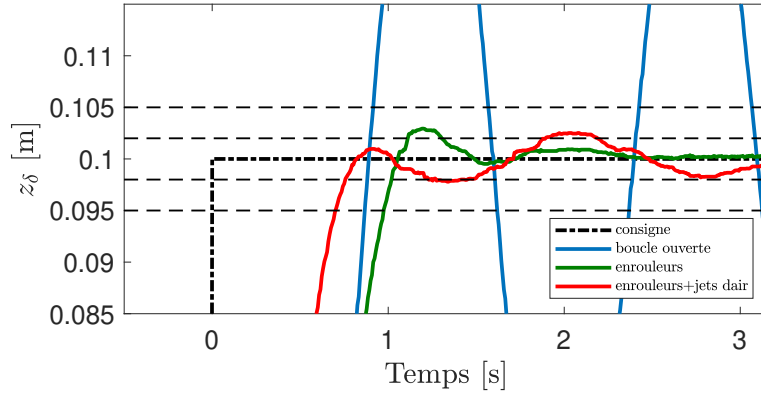


FIGURE 5.6 – Détail du temps de réponse du PiSaRo3 à l'échelon de position.

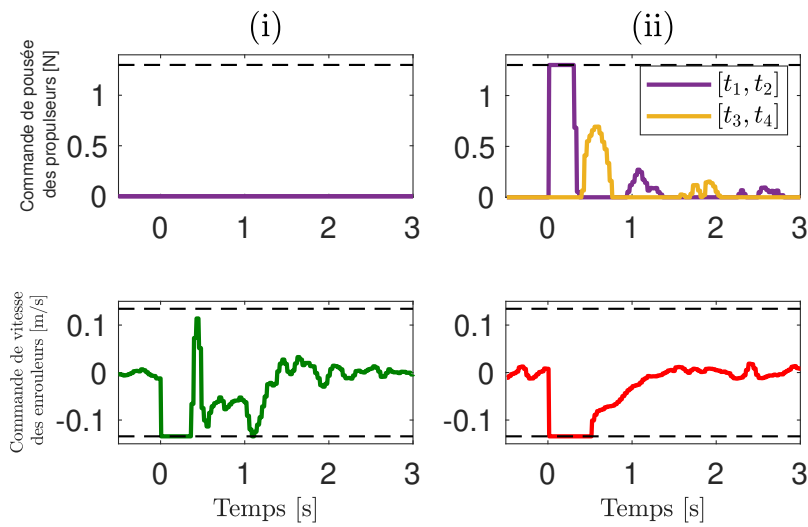


FIGURE 5.7 – Signaux de commande : colonne (i) commande avec enrouleurs seuls, colonne (ii) combinée avec les propulseurs à air comprimé

petites oscillations résiduelles de la plateforme. L'une des explications possibles est la difficulté à générer de faibles poussées continues avec des propulseurs commandés par des valves tout ou rien.

En outre, à l'instant d'apparition de l'échelon de consigne la commande de poussée atteint sa valeur de saturation maximale de 1.3 N pour la paire de propulseurs 1 et 2. La poussée positive résultante  $t^+$  est alors de 2.6 N et correspond effectivement à la valeur maximale  $t_{\max}$  définie dans les contraintes du problème d'optimisation. Cette commande fournit ainsi une accélération maximale de la plateforme vers sa nouvelle position, avant que la poussée ne s'inverse brutalement. C'est un profil très proche de la commande "bang-bang", caractéristique de la solution d'un problème de commande optimale.

En ce qui concerne la commande de vitesse d'enroulement, elle atteint également sa valeur de saturation dès l'apparition de l'échelon de consigne (tracés inférieurs de la Figure 5.7) dans les deux stratégies. On note que dans le cas de l'actionnement redondant avec les propulseurs (tracé inférieur droit), la vitesse d'enroulement reste négative sur tout l'horizon. Ainsi, l'enroulement du câble est monotone croissant sans changement de sens de rotation de l'enrouleur en présence des propulseurs, contrairement au cas où l'enrouleur est seul.

Tous les signaux de commande respectent les contraintes de saturation des entrées. Ces contraintes sont matérialisées sur les tracés par les lignes de tirets horizontales. Finalement, on constate que les signaux de commande tendent tous vers la valeur de référence en régime permanent,  $\mathbf{u}_{ref} = \mathbf{0}$ . Ainsi, l'équilibre statique est assuré par la tension du câble seul avec des propulseurs inactifs.

### Plateforme PiSaRo4 avec propulseurs à hélice

Le PiSaRo4 se différencie du PiSaRo3 par l'utilisation de propulseurs électriques à hélice. Mais son comportement en suivi de consigne se révèle similaire à celui du PiSaRo3.

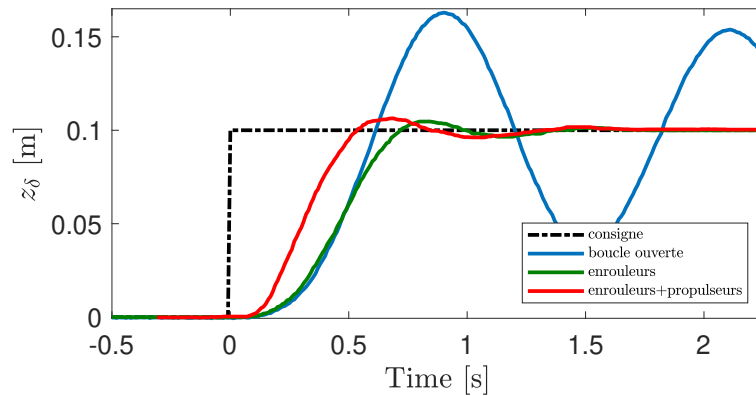


FIGURE 5.8 – Réponse du RPC PiSaRo3 à un échelon de position 0.1 m pour les trois scénarios de commande.

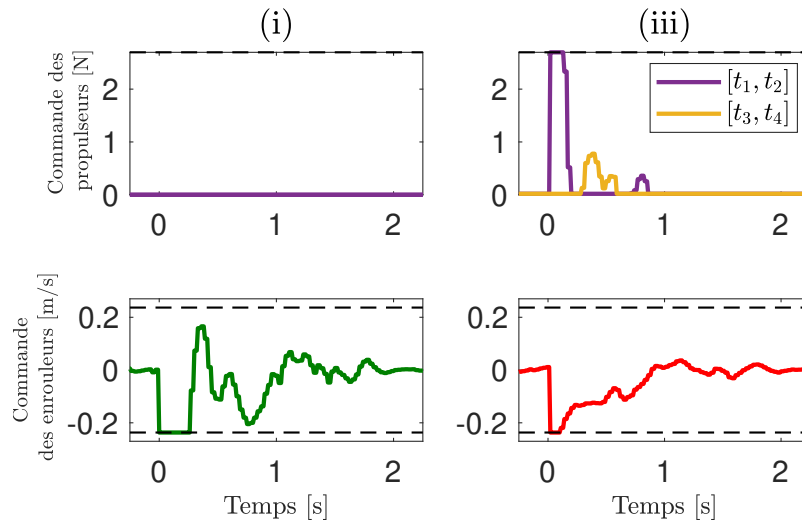


FIGURE 5.9 – Signaux de commande : colonne (i) actionnement avec poulie seule, colonne (ii) combiné avec les propulseurs à hélice

Le temps de montée de la réponse de la plateforme, en réponse à un échelon de consigne, est de façon similaire réduit de 20% avec les propulseurs comparé à l'actionnement avec enrouleur seul (Figure 5.8). Le système asservi est ici aussi correctement amorti avec ou sans l'action des propulseurs. Les signaux de commande respectent leurs contraintes et atteignent leur saturation pour une réponse minimisant l'erreur de position (Figure 5.9).

Le tracé de la commande de poussée des propulseurs à hélice montre qu'ils sont totalement inactifs au bout d'une seconde. Cette commande nulle est corrélée avec une absence d'oscillations résiduelles de la position de la plateforme sur la fin de l'horizon de temps. En l'absence de ces oscillations résiduelles, le temps de réponse à 2% est ici amélioré par rapport au PiSaRo3.

Tous ces résultats sont résumés dans le Tableau 5.3.

Robot	Commande	$t_{5\%}$ [s]	$t_{2\%}$ [s]	Temps de montée [s]
PiSaRo3	Câble	0.97	1.31	0.56
	Câble+propulseurs	0.70 (-28%)	2.18(+66%)	0.45 (-20%)
PiSaRo4	Câble	0.68	1.27	0.38
	Câble+propulseurs	0.75(+10%)	1.22(-4%)	0.30 (-21%)

TABLEAU 5.3 – Performance en suivi de consigne pour l'actionnement redondant avec le PiSaRo3 et 4.

## Conclusion

Ces premiers résultats expérimentaux valident l'utilisation de propulseurs embarqués à air comprimé ou hélice pour améliorer la dynamique d'un RPC. La commande prédictive est apte à résoudre le problème d'allocation de commande induit par la redondance d'actionnement. Ainsi, le temps de montée de la réponse à une consigne de position est significativement réduit avec l'utilisation de propulseurs. On note aussi que l'enroulement du câble est monotone jusqu'à la nouvelle position d'équilibre, sans inversion du sens de rotation de l'enrouleur. Cependant le temps de réponse n'est toujours pas amélioré par l'adjonction de propulseurs. Ces premiers résultats seront étayés dans la section suivante.

En ce qui concerne le choix de la meilleure technologie de propulsion, une comparaison directe ne peut pas être établie. En effet, les deux plateformes de test ont des structures légèrement différentes : rayon et couple maximal des enrouleurs, poids... Toutefois, une comparaison en simulation est possible sur un même modèle de la plateforme en considérant les temps de réponse et poussées maximales respectives des propulseurs disponibles.

Ainsi, la Figure 5.10 souligne que les propulseurs à hélice offrent un temps de réponse en position du RPC un peu plus court que l'air comprimé. La poussée maximale supérieure des propulseurs à hélice (2.7N contre 1.3N) compense donc un temps de réponse plus long que celui des propulseurs à air comprimé (100ms contre 2ms).

Du point de vue pratique, le choix des propulseurs à hélice s'impose par leur coût modeste (démocratisation du drone), leur poussée continue simple à réguler, leur facilité d'installation et d'alimentation, comparé au circuit pneumatique complexe des propulseurs à air comprimé.

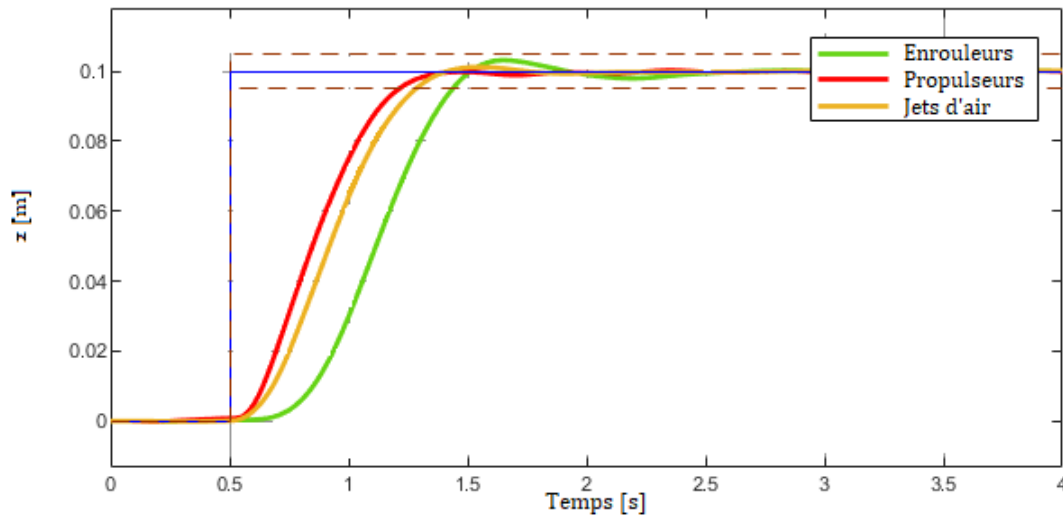


FIGURE 5.10 – Comparaison normalisée de la réponse du RPC utilisant deux types de propulseurs en simulation

## 5.2 Rejet de perturbation : robot plan à deux degrés de liberté

Embarquer des propulseurs avec un temps de réponse rapide, mais une force de poussée modérée pour améliorer les performances dynamiques d'un RPC est un nouveau concept. Après avoir validé dans la section précédente une amélioration des performances en suivi de trajectoire, on s'intéresse ici aux performances en réjection de perturbations.

En raison de la faible raideur des câbles, la plateforme du RPC est sujette à des modes oscillants peu amortis sous l'effet de perturbations externes. En pratique, la perturbation externe peut être l'action du vent sur la plateforme, un contact avec l'environnement ou encore la plateforme équipée d'une pince libérant une charge.

Cette section vise à valider l'amortissement actif de ces vibrations par une commande prédictive tirant avantage des propulseurs. L'un des objectifs est notamment de démontrer l'intérêt des propulseurs pour amortir les vibrations dans une direction de l'espace non commandable par les câbles.

L'étude est menée sur un robot plan suspendu à deux degrés de liberté. Les propulseurs embarqués sont du type propulseur à hélice. Les deux degrés de liberté en translation sont commandables avec les quatre propulseurs, alors que le câble ne permet de commander qu'une seule des translations. Des perturbations sont appliquées successivement suivant les deux axes de translation pour évaluer l'amortissement actif des vibrations de la plateforme du RPC.

### 5.2.1 Modèle du système

Le système expérimental est le PiSaRo4, dans la même configuration que l'étude précédente. Cependant, les deux degrés de liberté en translation du système sont considérés dans cette section.

Comme précédemment, les trois enrouleurs sont commandés de manière synchrone avec la même consigne de vitesse. Les trois câbles parallèles sont donc modélisés par un seul câble équivalent. Un ressort en série avec les câbles est encore présent pour

émuler de longs câbles.

A la différence de l'étude précédente, les quatre propulseurs (Figure 5.11) sont désormais pilotés indépendamment et non plus par paire. Leur disposition géométrique permet de générer une force dans une direction quelconque du plan (et un moment autour d'un axe normal au plan). En particulier, pour une position d'équilibre de la plateforme, la combinaison de leurs poussées permet de générer une force dans la direction verticale  $z$ , commandable avec le câble et dans la direction  $y$  non commandable avec le câble.

Comme le montrent les équations du modèle linéaire, le PiSaRo4 est équivalent à un pendule élastique dans cette configuration, représenté dans la Figure 5.12. On notera que les petites oscillations du système autour de l'axe  $x$  n'ont pas été contrôlées et sont amorties passivement par le système.

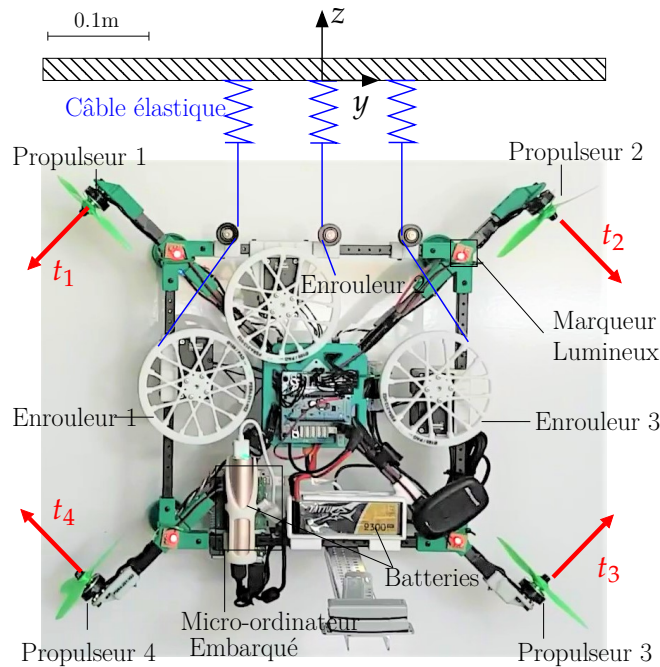


FIGURE 5.11 – Plateforme expérimentale PiSaRo4 avec propulseurs de drone embarqués

Soit  $\mathbf{x} = [y, z]^T$ , la position dans le plan du centre de gravité  $\mathbf{G}$  de la plateforme du robot. La matrice des efforts appliqués par le câble équivalent,  $\mathbf{W}_c$ , est définie en (3.25) par le vecteur directeur du câble. Ainsi, d'après la Figure 5.12, la matrice  $\mathbf{W}_c$  a pour expression :

$$\mathbf{W}_c(\mathbf{x}) = -{}^s\mathbf{u}_1 = -\frac{{}^s\mathbf{OG}}{\|\mathbf{OG}\|} \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} -y \\ -z \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Similairement, la matrice d'effort des propulseurs,  $\mathbf{W}_a$ , est fonction des vecteurs directeurs de leur poussée. L'orientation de la plateforme étant constante, cette matrice d'effort est ici la matrice de configuration constante des propulseurs  $\mathbf{A}_a$  (3.59) :

$$\mathbf{W}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_a \quad (5.33)$$

$$= [{}^s\mathbf{u}_{a1} \quad {}^s\mathbf{u}_{a2} \quad {}^s\mathbf{u}_{a3} \quad {}^s\mathbf{u}_{a4}] \quad (5.34)$$

avec,  ${}^s \mathbf{u}_{\mathbf{a}i}$ , le vecteur directeur de la poussée  $t_i$ .

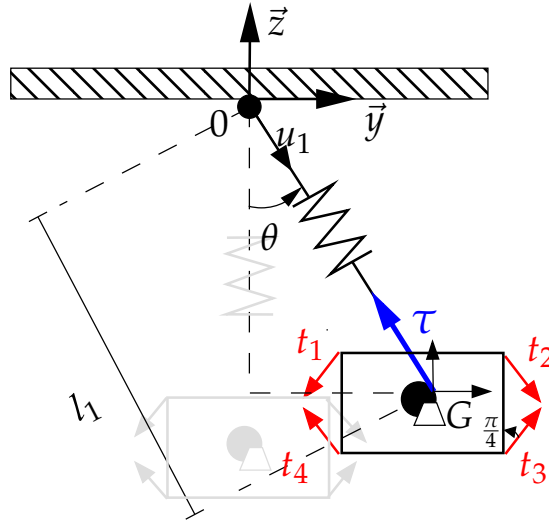


FIGURE 5.12 – Modèle équivalent du robot PiSaRo4 : le pendule élastique

A la vue de la disposition symétrique et de l'orientation des propulseurs  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  représentées sur la Figure 5.12, on aboutit à l'expression :

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Un frottement visqueux  $f_c$  entre le robot et son environnement est introduit pour tenir compte de l'amortissement naturel du système. L'équation dynamique de la plateforme du robot avec deux degrés de liberté en translation est alors d'après (3.113) :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = [\mathbf{W}_a \quad \mathbf{W}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \tau \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

où  $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]^T$  est le vecteur de poussée des quatre propulseurs embarqués et  $\tau$  la tension du câble. Cette tension s'écrit :

$$\tau = k_r (l_1(\mathbf{x}) - l_2) \quad (5.37)$$

avec une élongation donnée par la différence entre la longueur libre  $l_2$  du câble, modifiée par l'enrouleur, et sa longueur géométrique  $l_1(\mathbf{x}) = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

En substituant les matrices d'effort par leur expression (5.31) et (5.35), la dynamique de la plateforme s'écrit finalement :

$$m \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \frac{-y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ & \frac{-z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ k_r (\sqrt{y^2 + z^2} - l_2) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

### Modèle linéaire complet du RPC à deux degrés de liberté

Pour la synthèse de la commande prédictive, un modèle linéaire est calculé au voisinage d'un point d'équilibre statique  $[y, z]^T = [0, z_e]^T$ .

On définit  $y_\delta$ ,  $z_\delta$  et  $l_{2_\delta}$ , respectivement la position horizontale et verticale de la plateforme, ainsi que la longueur libre du câble par rapport à l'état d'équilibre :

$$y_\delta = y, \quad z_\delta = z - z_e, \quad l_{2_\delta} = l_2 - l_{2_e} \quad (5.39)$$

La longueur à vide du câble  $l_{2_e}$  est totalement définie par la position verticale à l'équilibre  $z_e$  de la plateforme d'après l'équilibre statique du robot :

$$\begin{aligned} mg &= k_r (l_{1_e} - l_{2_e}) = k_r \left( \sqrt{z_e^2} - l_{2_e} \right) \\ &= k_r (-z_e - l_{2_e}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec  $z_e < 0$ , considérant que le robot évolue sous son point d'attache.

Le modèle dynamique de la pose de la plateforme au voisinage de l'équilibre est obtenu par un développement en série de Taylor au premier ordre de (5.38). Détaillé dans l'annexe D, ce développement aboutit au modèle linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} + k_r \begin{bmatrix} 1 + \frac{l_{2_e}}{z_e} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\delta \\ z_\delta \end{bmatrix} = -k_r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_{2_\delta} + \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (5.41)$$

Ces équations dynamiques sont respectivement l'équation dynamique du pendule pour la grandeur  $y_\delta$  et l'équation du système masse-ressort pour la grandeur  $z_\delta$ . Ce sont deux oscillateurs harmoniques, qui sont couplés par la poussée des propulseurs au travers de la matrice de configuration  $\mathbf{A}_a$ .

Le modèle linéaire complet du système est obtenu en associant la dynamique de la plateforme (5.41) et la dynamique des actionneurs ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \ddot{i}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_{prop}} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ i_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{prop}} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^* \\ \dot{i}_2^* \end{bmatrix} \quad (5.42a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -i_{2_{\max}} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{t}^* \\ \dot{i}_2^* \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\max} \\ i_{2_{\max}} \end{bmatrix} \quad (5.42b)$$

Les vecteurs d'état et d'entrée du modèle dynamique complet (5.41)-(5.42a) sont alors respectivement :

$$\underline{\mathbf{x}} = [z_\delta \quad y_\delta \quad \dot{z}_\delta \quad \dot{y}_\delta \quad \mathbf{t}^T \quad l_{2_\delta} \quad \dot{i}_2 \quad \ddot{i}_2]^T, \quad \mathbf{u} = [\mathbf{t}^{*T} \quad \dot{i}_2^*]^T \quad (5.43)$$

### 5.2.2 Synthèse de la commande prédictive

Les objectifs du correcteur prédictif et sa synthèse sont similaires au cas du robot à un degré de liberté présenté dans la section 5.1.4. Les seules différences notables sont la dimension du vecteur de sortie à réguler, deux degrés de liberté au lieu de un, et la dimension du vecteur des entrées avec quatre poussées de propulseurs au lieu de deux.



Ainsi, la séquence de commandes optimale  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \dots \mathbf{u}_{N_u-1}]$  est calculée pour minimiser l'erreur de pose de la plateforme et la norme de la commande :

$$\min_{\mathbf{U}} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ref}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \right] \quad (5.44a)$$

$$\text{tel que } \underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_{\mathbf{T}}\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k = \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}_k \quad (5.44b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\dot{l}_{2\max} \end{bmatrix} \leq \mathbf{u}_k \leq \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\max} \\ \dot{l}_{2\max} \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, N_u - 1 \quad (5.44c)$$

où :

- $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k = [y_{\delta k} \ z_{\delta k}]^T$  est la pose de la plateforme du robot à l'instant d'échantillonnage  $k$  de l'horizon d'optimisation ;
- $\mathbf{u}_k = [\mathbf{t}_k^* \ \dot{l}_{2k}^*]^T = [t_{1k}^* \ t_{2k}^* \ t_{3k}^* \ t_{4k}^* \ \dot{l}_{2k}^*]^T$  est le vecteur de commande des poussées des propulseurs et de vitesse de l'enrouleur ;
- $\mathbf{A}_{\mathbf{T}}$  et  $\mathbf{B}_{\mathbf{T}}$  sont respectivement les matrices d'état et d'entrée du modèle complet à deux degrés de liberté (5.41)-(5.42a), après discrétisation à la période d'échantillonnage  $T_s$  avec un bloqueur d'ordre 0 sur l'entrée ;
- $\mathbf{Q} \geq 0$  et  $\mathbf{R} > 0$  sont respectivement les matrices diagonales de pondération de l'erreur de pose et de la norme de la commande. Les scalaires  $\{r_t, r_{l_2}\}$  permettent de pénaliser indépendamment la contribution des propulseurs et de l'enrouleur au déplacement de la plateforme :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_y & 0 \\ 0 & q_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_t \mathbb{I}_{4 \times 4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_{l_2} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Deux correcteurs prédictifs sont synthétisés : l'un pour le robot actionné par le câble seul et l'autre pour le robot actionné par le câble et les propulseurs. Ces deux correcteurs permettront de comparer précisément l'apport des propulseurs embarqués. Leurs paramètres et les pondérations sont ajustés selon la procédure décrite pour le cas à un degré de liberté. Les paramètres pour ces deux correcteurs prédictifs sont présentés dans le Tableau 5.4.

MPC	$N$	$N_u$	$q_{y,z}$	$r_t$	$r_{l_2}$	$\dot{l}_{2\max} [\text{ms}^{-1}]$	$t_{\max} [\text{N}]$
Câble	40	7	1	-	0,04	0,263	-
Câble et Propulseurs	40	7	1	0,005	0,05	0,263	3,81

TABLEAU 5.4 – Paramètres de réglage du correcteur prédictif pour le système actionné par i) le câble seul et ii) le câble et les propulseurs

Les correcteurs prédictifs sont implémentés en utilisant la génération de code C de Simulink™, la boîte à outils Model Predictive Control de Matlab™ et la boîte à outils RPIt interne à l'équipe. La période d'échantillonnage est  $T_s = 30 \text{ ms}$ .

La position  $[y \ z]^T$  de la plateforme est mesurée par une caméra rapide externe. Cette position est utilisée par un observateur pour reconstruire l'état complet du système, conformément au schéma de la Figure 5.4.

La commande optimale  $\mathbf{u}_0$  à appliquer en entrée des actionneurs est alors calculée sur la base de l'état courant reconstruit et de la référence de position.

### 5.2.3 Résultats expérimentaux

#### Suivi de trajectoire suivant l'axe vertical

Afin de confirmer les résultats obtenus dans le cas 1 DDL, un échelon de consigne  $z_{\delta ref} = 0.1\text{m}$  est utilisé pour évaluer les performances en suivi de trajectoire du système à 2 DDL et quatre propulseurs indépendants.

Comparée à la réponse en boucle ouverte (*boucle ouverte*), la réponse à cette consigne de position est fortement amortie avec les deux stratégies d'actionnement : câble seul (*enrouleurs*) et câble+propulseurs (*enrouleurs+propulseurs*). L'efficacité de cet amortissement actif est visible sur le tracé supérieur de la Figure 5.13.

Les deux autres tracés représentent le profil temporel des signaux de commande des actionneurs. On retrouve pour la commande des poussées un profil similaire à celui de l'étude avec un seul degré de liberté. Les propulseurs supérieurs sont actifs au même instant pour une force résultante verticale négative, bien qu'ici les 4 propulseurs soient pilotés individuellement et non par paire.

Les contraintes introduites par la saturation des actionneurs sont respectées par le correcteur : les signaux de commande restent entre leurs limites représentées par les lignes horizontales de tirets noirs. Ces limites sont atteintes comme on l'attend d'une commande optimale.

Le temps de réponse à 5% est similaire pour les deux stratégies. Il est à peine plus court pour l'actionnement câble+propulseur comparé à l'actionnement par le câble seul (voir Tableau 5.5). Il faut remarquer que le temps de passage d'un état d'équilibre (pose constante et  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) à un autre état d'équilibre est borné par la vitesse maximale d'enroulement du câble avec l'enrouleur. Cependant, le temps de montée (de 10% à 90%) est réduit de 39% passant de 0.41 à 0.25s, quand les propulseurs sont actifs simultanément avec l'enrouleur du câble.

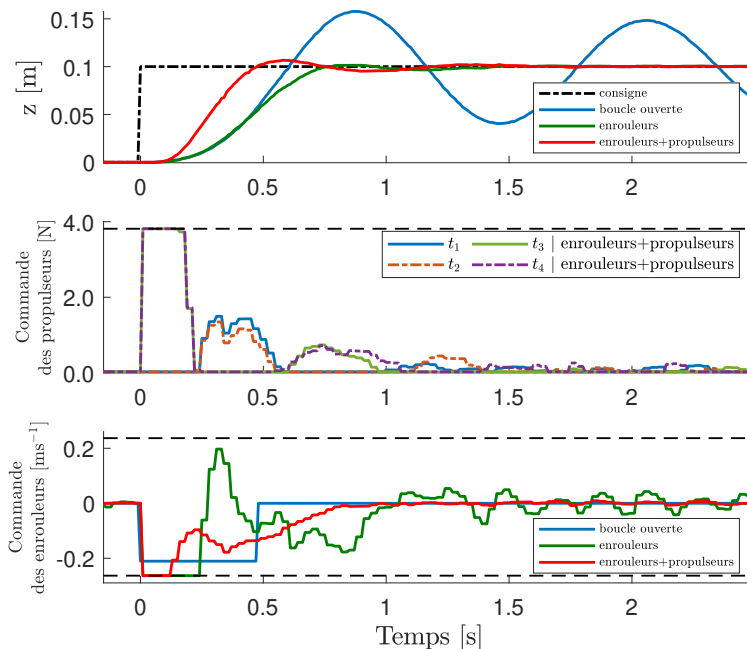


FIGURE 5.13 – Suivi d'une référence de position suivant l'axe  $z$  :  
i) câble seul et ii) câble et propulseurs à hélice

Actionnement	Temps de réponse [s]	Temps de montée [s]
Câble	0.70	0.41
Câble et Propulseurs	0.65(−7%)	0.25(−39%)

TABLEAU 5.5 – Performance du suivi de référence selon la direction verticale  $z$

Actionnement	Temps du pic[s]	Amplitude du pic [m]
Boucle ouverte	0.59	0.142
Câble	0.47(−20%)	0.072 (−49%)
Câble et Propulseurs	0.35(−40%)	0.049(−65%)

TABLEAU 5.6 – Performance du rejet de perturbation selon l’axe vertical  $z$

### Rejet de perturbation suivant l’axe vertical

Pour évaluer le rejet de perturbation, une perturbation constante est appliquée suivant l’axe  $z$  en libérant un lest de 750 g suspendu à la plateforme. Le lest est libéré brusquement en coupant le fil qui l’attache à la plateforme.

Comme indiqué sur le tracé supérieur de la Figure 5.14, la perturbation sur la position est rapidement éliminée et mieux amortie avec la contribution des propulseurs. On note que le dépassement par rapport à la position d’équilibre est considérablement réduit : l’amplitude maximale de l’oscillation avec les propulseurs actifs est réduite de 65% en comparaison avec la réponse libre (*“open-loop”*) et de 32% en comparaison avec la réponse où l’actionnement est limité au câble seul. De plus, l’amplitude du pic maximal survient à  $t = 0.35$  s avec l’action combinée du câble et des propulseurs comparée à 0.45 s lors de l’action seule du câble. La perturbation est donc plus rapidement rejetée. Ces résultats sont reportés dans le Tableau 5.6.

L’étude du profil temporel de la commande de l’enrouleur, lorsque celui-ci est utilisé seul, est caractéristique d’une commande optimale. Le signal de commande atteint successivement sa borne de saturation maximale puis minimale (voir courbe (*enrouleurs*) sur le tracé inférieur de la Figure 5.14).

Toutefois, le rejet de perturbation est meilleur lorsque la dynamique rapide des propulseurs entre en jeu. Dans ce cas, on constate que leurs poussées saturent (courbe du milieu) alors que dans le même temps la saturation de la vitesse de l’enrouleur du câble est évitée (courbe *enrouleurs+propulseurs* du tracé inférieur de la Figure 5.14). De plus, cette vitesse d’enroulement est exclusivement positive, traduisant un déroulement croissant monotone du câble au cours du temps. Ainsi, on constate que les propulseurs sont privilégiés par la commande prédictive pour rejeter le transitoire rapide lors de l’apparition d’une perturbation, pendant que les câbles compensent progressivement la perturbation en régime permanent.

### Rejet de perturbation suivant l’axe horizontal

Le rejet d’une perturbation impulsionnelle, appliquée à la plateforme pendant une durée de 0.6 s suivant l’axe horizontal  $y$ , est ici étudié. Cette perturbation est générée en commandant simultanément une poussée d’1 N sur les propulseurs 2 et 3, situés sur le bord droit de la plateforme.

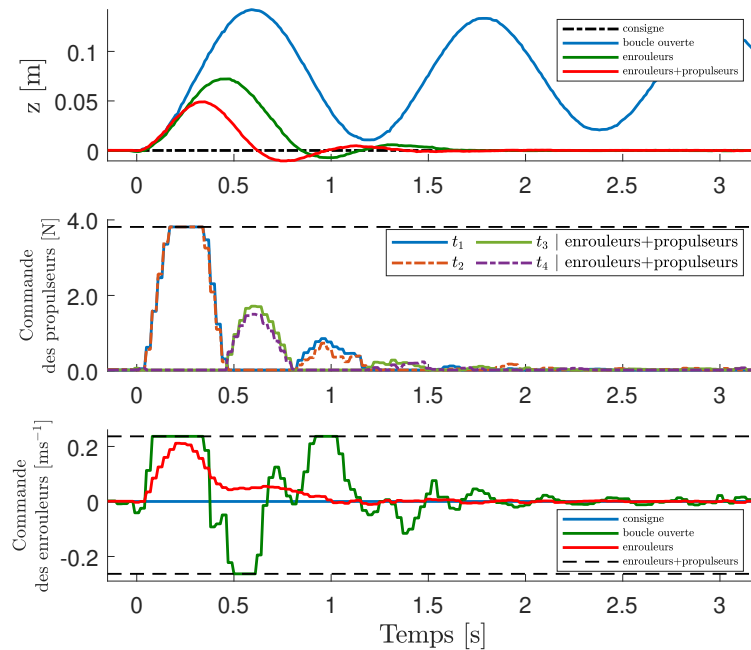


FIGURE 5.14 – Rejet de perturbation suivant l’axe  $z$  :  
 i) câble seul et ii) câble et propulseurs à hélice

Au voisinage du point d’équilibre statique, la position de la plateforme n’est pas commandable dans la direction horizontale avec l’enrouleur du câble. Ainsi, la réponse du système à la perturbation ne peut pas être amortie par l’enrouleur. Elle est similaire à la réponse libre naturellement peu amortie du système (courbe *boucle ouverte* du tracé supérieur de la Figure 5.15). Sur le même tracé, cependant, le régime oscillatoire est efficacement atténué par l’utilisation des propulseurs. Quelle que soit la pose de la plateforme, la configuration des propulseurs permet de générer un torseur d’effort dans toutes les directions du plan (tracé du milieu de la Figure 5.15).

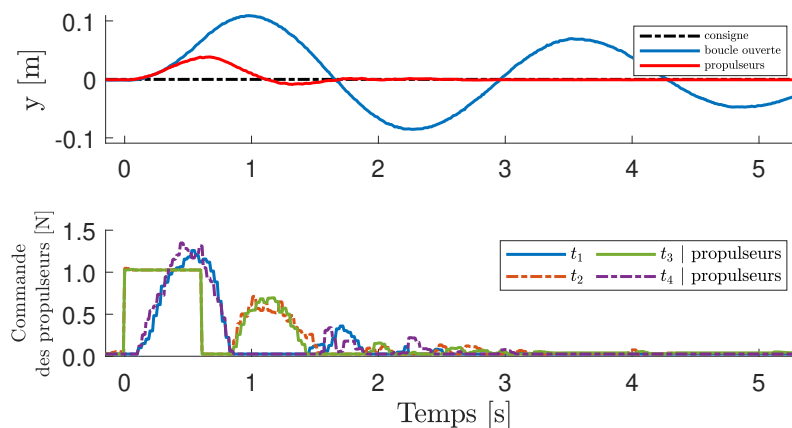


FIGURE 5.15 – Rejet de perturbation sur PiSaRo4 suivant l’axe  $y$  sous l’action des propulseurs seuls

L’amplitude maximale de l’oscillation suivant l’axe  $y$  est ainsi réduite de 64% avec les propulseurs comparée aux autres scénarios (Tableau 5.7).

Actionnement	Temps du pic [s]	Amplitude du pic [m]
Boucle ouverte / Câble	0.98	0.107
Propulseurs	0.68 (−31 %)	0.038 (−64 %)

TABLEAU 5.7 – Performance du rejet de perturbation suivant l’axe  $y$ 

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les performances d’un RPC embarquant sur sa plateforme des propulseurs ont été évaluées. Ces actionneurs sont caractérisés par une dynamique rapide, permettant de créer un effort moindre que les enrouleurs, mais avec un temps de réponse plus court que ceux-ci.

Les premiers résultats de suivi de trajectoire avec la plateforme du robot ont montré des performances proches pour les deux propulseurs candidats : le propulseur à hélice et le propulseur à air comprimé. Les propulseurs à hélice ont un temps de réponse plus long, mais compensent avec une poussée maximale plus importante par rapport aux propulseurs à air comprimé. Surtout, les propulseurs à hélice ont un coût moindre, sont plus simples à alimenter, à commander, et plus sûrs à l’usage que leurs équivalents à air comprimé. Ces derniers impliquent un gaz à haute pression et une modulation de la commande binaire de valves électromagnétiques tout ou rien.

Un robot plan suspendu, actionné par quatre propulseurs à hélice et un câble, a été construit pour évaluer expérimentalement l’amélioration de la dynamique des RPC avec une commande prédictive et des actionneurs redondants.

En combinant l’action des enrouleurs et des propulseurs rapides, les performances de suivi de trajectoire sont améliorées : le temps de montée est plus court et l’enroulement du câble est régulier sans inversion du sens de rotation des enrouleurs. Le rejet de perturbation est également significativement amélioré en comparaison à un actionnement avec câbles seuls : l’atténuation est plus rapide et l’amplitude maximale de la perturbation sur la position du RPC est réduite.

Un intérêt supplémentaire des propulseurs a été mis en évidence dans ce chapitre : suivant leur disposition sur la plateforme, ils permettent de stabiliser le robot selon des degrés de liberté du robot non commandables par les enrouleurs.

La commande prédictive offre une solution efficace au problème d’allocation posé par ces actionneurs redondants, en équilibrant leur contribution à la commande tout en tenant compte de leurs bandes passantes et saturations respectives.

## Chapitre 6

# Conclusion

### 6.1 Synthèse

Les robots parallèles à câbles présentent des atouts par rapport aux robots parallèles à corps rigides : rapidité, légèreté, coût de construction plus faible, modularité et plus grand espace de travail.

Néanmoins, les câbles, qui remplacent les corps rigides sur un robot parallèle classique, sont des éléments déformables et flexibles.

Une première limitation qu'ils introduisent est leur élasticité qui réduit la raideur de l'ensemble du robot et induit des oscillations de la plateforme sous l'effet de perturbations externes.

Une seconde limitation est la réduction de la bande passante des actionneurs due à l'élasticité des longs câbles : plus l'élasticité du câble est importante, plus la quantité de câble à enrouler est importante pour générer un même effort.

Les câbles présentent une contrainte : ils ne peuvent exercer qu'une force de traction. Il faut donc garantir la positivité des tensions des différents câbles pour conserver la commandabilité de la pose de la plateforme du RPC.

Pour contrer ces limitations introduites par les câbles, on a proposé d'embarquer sur la plateforme des actionneurs avec une dynamique plus rapide que celle des enrouleurs des câbles dans le but d'améliorer les performances du RPC en rejet de perturbations et suivi de trajectoire.

Dans cette optique, un état de l'art des différents actionneurs à embarquer a été dressé. Les critères de sélection ont été définis comme tels : légèreté et compacité, capacité à générer des torseurs d'effort persistants pour s'opposer aux perturbations externes et une bande passante en effort supérieure à celle des enrouleurs des câbles. Une comparaison entre les différents actionneurs a restreint le choix à deux candidats : les propulseurs à air comprimé et les propulseurs à hélice utilisés sur les drones.

Afin d'évaluer chaque actionneur embarqué dans le but d'améliorer la dynamique d'un RPC, le modèle dynamique d'un RPC incluant la dynamique des enrouleurs et des actionneurs embarqués a été établi au chapitre 3. Un modèle linéarisé du robot y est évalué analytiquement autour d'une position d'équilibre pour développer des stratégies de commande linéaire. Le modèle d'un robot plan en configuration suspendue, utilisé durant cette thèse pour la validation expérimentale, est également détaillé.

Les propulseurs à air comprimé ont été les premiers candidats évalués. Pour mener les expérimentations, un RPC a été construit : le PiSaRo3. Des électrovannes tout ou rien rapides ont été placées sur sa plateforme pour commander la force générée par ce type de propulseurs. Bien que ces actionneurs soient rapides, ils présentent

deux limitations : (i) la force de poussée est limitée car liée à la pression et au débit maximal du compresseur et (ii) le mode d'actionnement tout ou rien (binaire) nécessite une modulation en largeur d'impulsion (PWM) du signal de commande, pour générer des poussées d'amplitude variable.

Dans le chapitre 4, deux stratégies de commande ont été détaillées et comparées, pour éliminer les oscillations d'un RPC et ainsi valider l'utilisation des propulseurs embarqués à air comprimé. La première stratégie de commande a consisté en une allocation directe et une modulation PWM. D'abord, un torseur d'effort à appliquer par l'ensemble des propulseurs, en rétroaction de la vitesse de la plateforme, est synthétisé pour amortir les oscillations. Ensuite, l'allocation avec les contraintes de saturation de ces générateurs de forces unilatérales est traitée. Les poussées en sortie du bloc d'allocation, sont alors modulées en un signal binaire des électrovannes tout ou rien commandant l'écoulement de l'air comprimé et ainsi les poussées effectives.

Cette stratégie de stabilisation active a été validée expérimentalement sur le PiSaRo3 et une preuve de stabilité par le théorème de Lyapunov a été développée.

Une deuxième stratégie s'est axée sur la commande prédictive. La solution au problème d'amortissement actif des oscillations et d'allocation des propulseurs redondants est traitée en un seul problème d'optimisation avec nombres entiers, qui intègre directement la contrainte binaire de l'entrée des actionneurs.

En comparant ces deux stratégies, l'allocation prédictive minimise le nombre de commutations, favorisant l'établissement du flux de l'air et ainsi de la poussée. Elle permet de meilleurs résultats : erreur moyenne de position et consommation d'air comprimé réduites. Néanmoins, le temps de résolution actuel du problème d'optimisation avec nombres entiers est incompatible avec une implémentation temps réel sur le prototype. Les expérimentations menées sur le PiSaRo3 ont mises en évidence la faible poussée des propulseurs que l'on peut atteindre avec une pression industrielle standard de 6 bar. Aussi, ces actionneurs se sont révélés complexes à mettre en oeuvre de par la nature tout ou rien de la commande des électrovannes et le circuit pneumatique associé.

Dans le chapitre 5, la validité de l'utilisation de propulseurs à hélice de drone a été évaluée pour améliorer la dynamique du RPC. Un robot plan suspendu expérimental a été construit pour les expérimentations : le PiSaRo4.

Une commande prédictive, utilisant l'action combinée des enrouleurs et des actionneurs embarqués, est proposée pour améliorer le suivi d'une trajectoire. La commande prend en compte la redondance d'actionnement ainsi que les bandes passantes et saturations respectivement des enrouleurs des câbles et des actionneurs embarqués. Pour garantir une erreur statique nulle ("*offset-free model predictive control*"), les enrouleurs sont commandés en vitesse d'enroulement et un observateur estime la longueur libre des câbles. Cette longueur estimée intègre les incertitudes de modèle et les effets des perturbations pour faire correspondre la sortie du modèle aux mesures sur le système réel. Les expérimentations sur le PiSaRo4 restreint à 1 DDL ont démontré que les propulseurs à hélice améliorent la dynamique de suivi de trajectoire, en comparaison avec l'utilisation des enrouleurs seuls. Le temps de montée vers la nouvelle pose de la plateforme est réduit. De plus, la commande des enrouleurs ne change pas de signe, évitant toute inversion de leur sens de rotation pendant le déplacement.

Une fois l'amélioration du suivi de trajectoire d'un RPC avec l'utilisation des propulseurs à hélice validée, on s'est intéressé à la réjection de perturbation. D'après les expérimentations sur un robot à deux degrés de liberté, le rejet de perturbation (effort externe sur la plateforme) est amélioré en utilisant les propulseurs à hélice de drone. On note une meilleure et plus rapide atténuation des oscillations de la pose de

la plateforme : l'amplitude maximale du premier pic est nettement réduite et arrive plus tôt avec l'action conjointe des propulseurs et des câbles.

Dans le cas où la perturbation, s'exerce dans une direction non commandable par les câbles, l'expérimentation a révélé que les propulseurs seuls permettent également de rejeter efficacement les oscillations induites par la perturbation.

Au travers de cette thèse, l'utilisation de deux types d'actionneurs embarqués a été validée avec deux prototypes de robots. Des stratégies de commande linéaire, dont la commande prédictive, ont été synthétisées pour optimiser la distribution de la commande entre les divers modes d'actionnement (câbles et propulseurs) afin de positionner la plateforme d'un RPC. Des expérimentations concluantes ont été menées démontrant l'intérêt des propulseurs embarqués pour améliorer la dynamique globale des RPC, aussi bien en rejet de perturbations que de suivi de trajectoire.

## 6.2 Perspectives

La poursuite des travaux menés dans cette thèse peut suivre différents cheminement. Une perspective du travail est la prise en compte des non-linéarités du modèle dynamique du RPC pour améliorer les performances du suivi de trajectoire sur tout l'espace de travail. Certes, l'usage d'un modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre a permis de concevoir une commande prédictive linéaire et ainsi valider l'implantation des propulseurs sur la plateforme. Cependant, cette commande linéaire limite les résultats au voisinage du point d'équilibre considéré.

Une commande prédictive non-linéaire (NMPC) est un candidat naturel pour tenir compte des non-linéarités du modèle sur l'espace de travail. Parmi les sources de non-linéarités, on mentionnera la matrice de rotation définissant l'orientation de la plateforme ou la raideur des câbles qui varie en fonction de leur longueur et donc de la pose de la plateforme. Une telle commande NMPC est pertinente pour le PiSaRo4 qui, doté des propulseurs à hélices embarqués et de trois poulies, peut être commandable suivant ses trois degrés de liberté dans le plan. Ce travail a déjà été entamé en simulation avec ACADO [HOUSKA et al., 2009; HOUSKA, FERREAU et DIEHL, 2011], un outil logiciel permettant de décrire un problème NMPC et de générer le code C du solveur correspondant. L'objectif de ce suivi prédictif est d'étendre les déplacements du RPC à des trajectoires dynamiques et rapides présentant des discontinuités, telles que des dessins de fresques ou formes géométriques. Ces trajectoires exciteront d'autant plus les modes oscillants du RPC et montreront d'autant plus l'intérêt des actionneurs embarqués rapides.

D'autres commandes sont envisageables si l'on veut éviter une commande NMPC : la commande prédictive linéaire à paramètres variants (LPV) [BESSELMANN, LOFBERG et MORARI, 2012; ÅKESSON et HAGANDER, 2003], ou basée sur une linéarisation successive du modèle [ZHAKATAYEV et al., 2017; CANNON, NG et KOUVARITAKIS, 2009] pour s'adapter au modèle du RPC dans l'espace de travail.

Une autre perspective de ce travail est le développement d'un nouveau concept de robots : un manipulateur aérien à suspension élastique. Lors des validations expérimentales, le PiSaRo4 a été utilisé en configuration suspendue restreinte à un seul câble. Les propulseurs à hélice embarqués ont permis non seulement de rejeter les perturbations, mais également de modifier la pose de la plateforme du RPC selon tous les degrés de liberté dans le plan. Alors, pourquoi augmenter l'encombrement et complexifier le système en ajoutant des câbles et enrouleurs supplémentaires ?



La plateforme équipée de ses propulseurs est équivalente à un manipulateur aérien. L'introduction du câble est en réponse à l'une des limitations fortes des manipulateurs aériens. En effet, bien qu'ils ont beaucoup d'atouts (un grand espace de travail et des dynamiques rapides), l'autonomie des batteries embarquées reste très limitée. En compensant la gravité, le câble permet d'augmenter l'autonomie et de soulever des charges plus importantes avec le manipulateur.

Dans le prolongement de cette thèse, [YIĞIT et al., 2021] et al. ont développé au sein d'ICube ce concept robotique, où un drone omnidirectionnel est suspendu à un porteur par un câble élastique. Le porteur peut être une structure fixe ou une grue permettant de déplacer le point d'ancrage (voir Figure 6.1). Des premiers résultats expérimentaux ont démontré que cette architecture permet d'atteindre des dynamiques rapides avec une précision millimétrique et une consommation énergétique réduite. La simplicité d'installation et la structure d'un tel manipulateur permettent d'envisager son usage pour des applications diverses telles la peinture de fresque ou l'inspection de barrages par exemple.

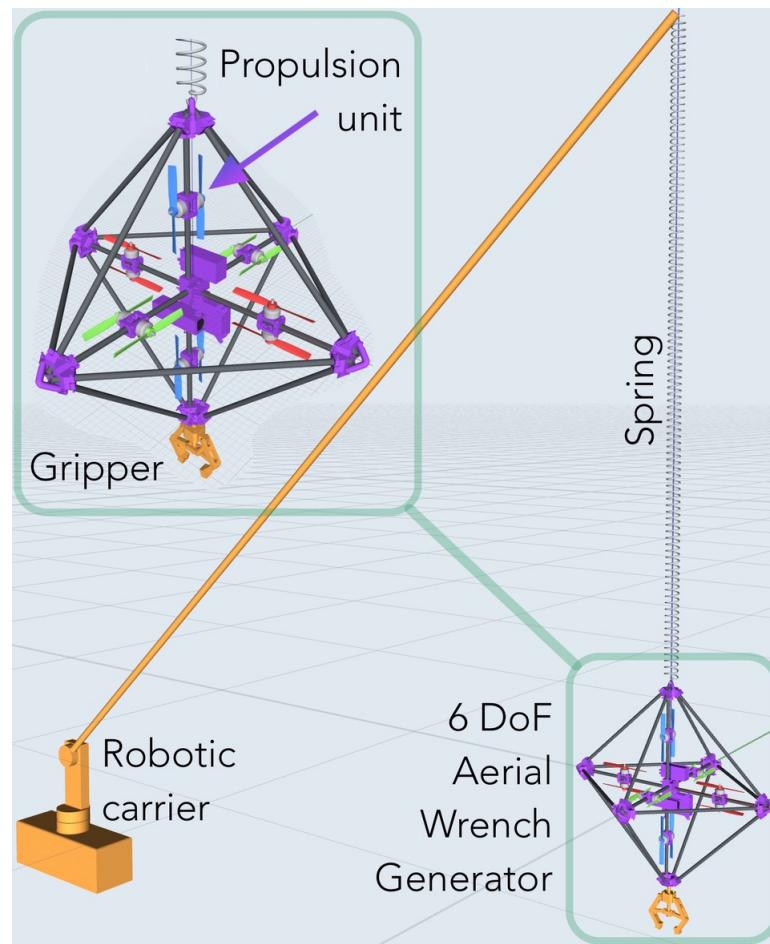


FIGURE 6.1 – Manipulateur aérien avec une suspension élastique [YIĞIT et al., 2021]

## Annexe A

# Linéarisation de la dynamique du RPC

### A.1 Suivant $\mathbf{x}$

Sachant que le torseur d'efforts  $\mathbf{w}_{\text{totx}}$  comprend à la fois le torseur des câbles et des actionneurs embarqués, on a donc :

$$-\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} = -\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{ax}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \quad (\text{A.1})$$

Pour le torseur exercé par les câbles, d'après l'équation (3.51) :

$$-\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = -\left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \quad (\text{A.2})$$

En substituant l'expression de  $\boldsymbol{\tau}$  (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_e) \left. \frac{\partial (\mathbf{K}_c(\mathbf{l}_2)[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_c[\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2])}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{l}_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_e) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Le torseur produit par les actionneurs embarqués est linéarisé autour de la position d'équilibre  $\mathbf{x}_e$ . D'après (3.64) :

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{ax}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} &= -\left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x}) \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \\ &= -\left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{t}_e \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On a donc :

$$-\left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{l}_{2e}} = \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_e) \mathbf{K}_c(\mathbf{l}_{2e}) \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_e) - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{ax}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{t}_e \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Suivant $\mathbf{l}_{2\delta}$ :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{totx}}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{cx}}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{\text{cx}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\
&= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{x}_{\mathbf{e}}, \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \\
&= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) \left. \frac{\partial (\mathbf{K}_{\mathbf{c}}(\mathbf{l}_2) [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2] + \mathbf{F}_{\mathbf{c}} [\dot{\mathbf{l}}_1 - \dot{\mathbf{l}}_2])}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{x}_{\mathbf{e}}, \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \\
&= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) \mathbf{K}_{\mathbf{c}}(\mathbf{l}_{2\mathbf{e}}) \left. \frac{\partial ([\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2])}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{x}_{\mathbf{e}}, \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\text{T}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) \left. \frac{\partial \mathbf{K}_{\mathbf{c}}(\mathbf{l}_2)}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}] \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

On simplifie l'expression :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathbf{K}_{\mathbf{c}}(\mathbf{l}_2)}{\partial \mathbf{l}_2} \right|_{\mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_2} \begin{bmatrix} \frac{k_c}{l_{2_1}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{k_c}{l_{2_i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{k_c}{l_{2_{n_c}}} \end{bmatrix} \underbrace{[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}]}_v \Big|_{\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \\
&= \left( \begin{bmatrix} -\frac{k_c}{l_{2_1}^2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} v \dots \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{k_c}{l_{2_i}^2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} v \dots \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -\frac{k_c}{l_{2_{n_c}}^2} \end{bmatrix} v \right) \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_c}{l_{2_1}^2} [l_{1_1}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_1}}] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{k_c}{l_{2_i}^2} [l_{1_i}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_i}}] & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -\frac{k_c}{l_{2_{n_c}}^2} [l_{1_{n_c}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_{n_c}}}] \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \\
&= - \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_2) \Big|_{\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \begin{bmatrix} \frac{k_c}{l_{2_1}} [l_{1_1}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_1}}] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{k_c}{l_{2_i}} [l_{1_i}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_i}}] & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{k_c}{l_{2_{n_c}}} [l_{1_{n_c}}(\mathbf{x}_{\mathbf{e}}) - l_{2_{e_{n_c}}}] \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_{2\mathbf{e}}} \\
&= - \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{2\mathbf{e}}) \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}})
\end{aligned}$$

## Annexe B

# Commande prédictive : problème d'optimisation quadratique

### B.1 Modèle de prédiction

Le modèle de prédiction utilisé est :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (\text{B.1})$$

où  $x_k$  et  $u_k$  sont respectivement l'état et l'entrée du système à l'instant  $k$ . A l'instant d'échantillonnage  $k$ , connaissant le vecteur d'état courant  $x_{0|k} = x_k$ , le contrôleur utilise le modèle discret pour prédire les états futurs sur  $N$  pas d'échantillonnage. Ce nombre de pas d'échantillonnage est appelé un horizon de prédiction.

Le vecteur d'état et le vecteur d'entrée prédits à l'instant d'échantillonnage  $k + i$  sont notés  $x_{i|k}$  et  $u_{i|k}$  où  $i$  est le nombre de pas d'échantillonnage après l'instant  $k$ . La séquence d'états futurs est prédite sur l'horizon de prédiction  $N$  avec les relations :

$$\begin{aligned} x_{0|k} &= x_k \\ x_{1|k} &= x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = Ax_{0|k} + Bu_{0|k} \\ x_{2|k} &= x_{k+2} = Ax_{k+1} + Bu_{k+1} = A^2x_{0|k} + ABu_{0|k} + Bu_{1|k} \\ &\vdots \\ x_{N|k} &= x_{k+N} = A^Nx_{0|k} + A^{N-1}Bu_{0|k} + A^{N-2}Bu_{1|k} + A^{N-3}Bu_{2|k} + \dots + Bu_{N-1|k} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

On peut rassembler l'écriture de ce vecteur sous forme matricielle et écrire alors [CANNON, 2016] :

$$X_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} U_k \quad (\text{B.3})$$

avec

$$X_k = \begin{bmatrix} x_{0|k} \\ x_{1|k} \\ \vdots \\ x_{N|k} \end{bmatrix}, \quad U_k = \begin{bmatrix} u_{0|k} \\ u_{1|k} \\ \vdots \\ u_{N-1|k} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Pour la suite, on introduit les matrices  $\mathcal{M}_{1N}$  et  $\mathcal{C}_{1N}$  telles que :

$$\mathcal{M}_{1N} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{1N} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

On peut écrire alors :

$$X_k = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathcal{M}_{1N} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_{1N} \end{bmatrix} U_k \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Fonction de coût quadratique

La fonction de coût objectif est en général exprimée sous forme quadratique. La commande prédictive vise à minimiser la fonction de coût prédite à chaque instant dépendamment des séquences d'état et d'entrée. Une fonction de coût classique qui amène l'état du système à l'origine se présente sous la forme :

$$J(x_k, U_k) = \sum_{i=0}^N (\|x_{i|k}\|_Q^2 + \|u_{i|k}\|_R^2) \quad (\text{B.7})$$

avec  $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$  la norme euclidienne pondérée,  $Q \geq 0$  et  $R > 0$  des matrices de pondérations.

En introduisant un coût terminal, on obtient :

$$J(x_k, U_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (\|x_{i|k}\|_Q^2 + \|u_{i|k}\|_R^2) + \|x_{N|k}\|_P^2 \quad (\text{B.8})$$

On notera qu'aucun terme de la fonction  $J$  ne dépend du terme  $u_{N|k}$  et que l'on peut donc l'omettre. On peut réécrire la fonction de coût en fonction des matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{M}$  calculées précédemment. Celle ci s'exprime ainsi uniquement en fonction de l'état courant et la séquence de commandes futures  $U_k$  :

$$J(x_k, U_k) = U_k^T \mathcal{H} U_k + 2x_k^T \mathcal{F}^T U_k + x_k^T \mathcal{G} x_k \quad (\text{B.9})$$

tel que :

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}^T \mathcal{Q} \mathcal{C} + \mathcal{R} \quad \mathcal{G} = \mathcal{M}^T \mathcal{Q} \mathcal{M} + \mathcal{Q} \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}^T \mathcal{Q} \mathcal{M} \quad (\text{B.11})$$

La séquence de commande optimale qui minimise la fonction de coût à l'instant d'échantillonnage présent est notée  $U_k^*$ , telle que :

$$U_k^* = \operatorname{argmin}_{U_k} J(x_k, U_k) \quad (\text{B.12})$$

## B.3 Intégration des contraintes

### B.3.1 Solution non contrainte

En l'absence de contraintes, la solution du problème quadratique est donnée par le gradient de la fonction coût :

$$\nabla J(U_k) = 2\mathcal{H}U_k + 2\mathcal{F}x_k = 0 \quad (\text{B.13})$$

La fonction coût  $J$  s'annule en un minimum vu que  $\mathcal{H}$  est définie positive ou semi-définie positive. Si  $\mathcal{H}$  est inversible, la séquence de commande optimale :

$$U_k^* = \begin{bmatrix} u_{0|k}^T & \cdots & u_{N-1|k}^T \end{bmatrix}^T = -\mathcal{H}^{-1}\mathcal{F}x_k \quad (\text{B.14})$$

Si  $\mathcal{H}$  est singulière (semi-définie positive), la solution optimale est non unique, la solution particulière de l'équation  $\nabla J = 0$  est définie comme :

$$U_k = \begin{bmatrix} u_{0|k}^T & \cdots & u_{N-1|k}^T \end{bmatrix}^T = -\mathcal{H}^\dagger\mathcal{F}x_k \quad (\text{B.15})$$

avec  $\mathcal{H}^\dagger$ , la pseudo-inverse de la matrice  $\mathcal{H}$ .

Seule la première commande est appliquée à chaque pas d'échantillonnage dans cette stratégie à horizon glissant, donc.

$$u_k = -\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathcal{H}^{-1}\mathcal{F}}_K x_k = -Kx_k \quad (\text{B.16})$$

où  $K$  est le gain d'un retour d'état. La commande prédictive dans le cas non contraint est ainsi équivalente à une commande par retour d'état.

### B.3.2 Solution contrainte

L'un des intérêts du correcteur prédictif est d'intégrer directement les contraintes sur l'entrée ou les états du système :

$$\begin{bmatrix} u_{\min} \\ \vdots \\ u_{\min} \end{bmatrix} \leq U_k = \begin{bmatrix} u_{0|k} \\ \vdots \\ u_{N-1|k} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{\max} \\ \vdots \\ u_{\max} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{bmatrix} x_{\min} \\ x_{\min} \\ \vdots \\ x_{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{1|k} \\ x_{2|k} \\ \vdots \\ x_{N|k} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{\max} \\ x_{\max} \\ \vdots \\ x_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

On réécrit les contraintes pour les intégrer sous forme de problème de programmation linéaire contraint [MACIEJOWSKI, 2002]. L'équation des contraintes sur la séquence

de commande devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} \end{bmatrix} U_k \leq \begin{bmatrix} \mathbb{1} u_{\max} \\ -\mathbb{1} u_{\min} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

avec  $\mathbb{1} = [\mathbb{I} \dots \mathbb{I}]^T$  une concaténation verticale de matrices identité.

D'après l'équation (B.6), la formulation du modèle linéaire s'exprime sous l'équation :

$$\begin{bmatrix} x_{1|k} \\ x_{2|k} \\ \vdots \\ x_{N|k} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{1N} x_k + \mathcal{C}_{1N} U_k \quad (\text{B.20})$$

On peut réécrire donc les équations de contraintes d'état telles que :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1N} \\ -\mathcal{C}_{1N} \end{bmatrix} U_k \leq \begin{bmatrix} \mathbb{1} x_{\max} \\ -\mathbb{1} x_{\min} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_{1N} \\ \mathcal{M}_{1N} \end{bmatrix} x_k \quad (\text{B.21})$$

On peut exprimer le problème sous forme d'un problème de programmation quadratique contraint [BEMPORAD, 2019] :

$$\begin{aligned} \min_{U_k} U_k^T H U_k + 2x_k^T F^T U_k \\ G U_k \leq W + S x_k \end{aligned}$$

où

$$G = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} \\ \mathcal{C}_{1N} \\ -\mathcal{C}_{1N} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \mathbb{1} u_{\max} \\ -\mathbb{1} u_{\min} \\ \mathbb{1} x_{\max} \\ -\mathbb{1} x_{\min} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathcal{M}_{1N} \\ \mathcal{M}_{1N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

La séquence de commande optimale  $U_k^*$  est alors la solution du problème d'optimisation quadratique obtenue en utilisant tout algorithme de résolution (points intérieurs, ensembles actifs,...).

## Annexe C

# Code MATLAB

Le code MATLAB avec l'interface de Yalmip pour l'optimisation quadratique en nombres entiers du bloc Simulink du correcteur prédictif des vannes tout ou rien pour le rejet de la perturbation utilisé est le suivant :

```

1 function uout = MPCbinary(currentx , currentr , t)
2 persistent Controller
3
4 if t == 0
5
6 % Global sampling-time
7 Ts = 0.01;
8
9 % Maximal thruster force
10 tmax= 2; %[N]
11
12 % MPC
13 % Define data for MPC controller
14 N = 40;
15 Q = diag([10 40 10]);
16 R = diag([.1 .1 .1 .1]);
17
18 nx = 6; % Number of states
19 nu = 4; % Number of inputs
20 ny = 3; % Number of outputs
21
22     Plant=ss(A,B,C,D);
23     Gd = c2d(Plant , Ts);
24     Ad = Gd.A;
25     Bd = Gd.B;
26
27     %% P
28     P=Q*C;
29     %%
30
31 % Avoid explosion of internally defined variables in
32     YALMIP
33     yalmip('clear')
34
35 % Setup the optimization problem
36 u = binvar(repmat(nu,1,N),repmat(1,1,N));
37 x = sdpvar(repmat(nx,1,N+1),repmat(1,1,N+1));

```



```
37     r= sdpvar(3,1)
38     % Define simple standard MPC controller
39     % Current state is known so we replace this
40     constraints = [];
41     objective = 0;
42     for k = 1:N
43         objective = objective + norm(Q*(C*x{k}-r),2) + norm(R*
44             tmax*u{k},2);
45         constraints = [constraints, x{k+1} == Ad*x{k}+Bd*tmax
46             *u{k}];
47     end
48     objective = objective + norm((P*x{N+1}),2) ;
49     % Define an optimizer object which solves the problem for
50     % a particular
51     Controller = optimizer(constraints, objective, sdpsettings(
52         'solver', 'gurobi'), {x{1}, r}, u{1});
53     % And use it here too
54     uout = Controller{{currentx, currentr}};
55 else
56     % Almost no overhead
57     uout = Controller{{currentx, currentr}};
58 end
```

## Annexe D

# Linéarisation de la dynamique du RPC contraint à deux degrés de liberté

D'après (5.38), la dynamique de l'ensemble du RPC plan contraint à deux degrés de liberté s'écrit :

$$m_p \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} k(l_2) \left( \sqrt{y^2 + z^2} - l_2 \right) + \mathbf{A}_a \mathbf{t} = 0$$

où :

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le point d'équilibre statique  $\bar{\mathbf{x}}$  autour duquel la dynamique est linéarisée est :

$$\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T, \mathbf{l}_2^T, \mathbf{t}^T]^T = [\mathbf{x}_e^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{l}_{2_e}^T, \mathbf{0}^T]^T \quad (\text{D.1})$$

tel que :  $\mathbf{x}_e^T = [0, z_e]^T$ .

Les coordonnées du système linéarisé sont définies ainsi :

$$y_\delta = y - y_e = y, \quad z_\delta = z - z_e, \quad l_{2_\delta} = l_2 - l_{2_e}, \quad t_\delta = t - t_e = t \quad (\text{D.2})$$

La longueur de câble à vide  $l_{2_e}$  est solution de l'équation dynamique à l'équilibre statique du robot :

$$m_p g = k(l_{2_e}) (l_{1_e} - l_{2_e}) = k(l_{2_e}) (-z_e - l_{2_e}) \quad (\text{D.3})$$

On procède à un développement en série de Taylor au premier ordre autour de ce point pour établir le modèle linéarisé :

$$f(\dot{y}_e + \dot{y}_\delta, \dot{z}_e + \dot{z}_\delta, \dot{y}_e + \dot{y}_\delta, \dot{z}_e + \dot{z}_\delta, y_e + y_\delta, z_e + z_\delta, l_{2_e} + l_{2_\delta}, \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_\delta) =$$

$$\underbrace{f(\bar{\mathbf{x}})}_0 + \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}} \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} \begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} + \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} \begin{bmatrix} y_\delta \\ z_\delta \end{bmatrix} + \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} l_2 \\ t \end{bmatrix}} \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} \begin{bmatrix} l_{2_\delta} \\ t_\delta \end{bmatrix} = 0$$

Les dérivées partielles suivant les différentes variables de la fonction de la dynamique du système sont :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}} \right|_{\bar{x}} = m_p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \right|_{\bar{x}} = f_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|_{\bar{x}} &= \left. \frac{\partial}{\partial l_2} \left( k(l_2) \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \left( \sqrt{y^2 + z^2} - l_2 \right) \right) \right|_{\bar{x}} \\ &= - \left( k(l_2) \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right) \Big|_{\bar{x}} \\ &= -k(l_{2_e}) \frac{1}{\sqrt{z_e^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ z_e \end{bmatrix} = -k(l_{2_e}) \frac{1}{-z_e} \begin{bmatrix} 0 \\ z_e \end{bmatrix} = k(l_{2_e}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.5)$$

avec pour rappel  $z_e < 0$ .

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (-\mathbf{A}_a \mathbf{t}) \Big|_{\bar{x}} = -\mathbf{A}_a$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \right|_{\bar{x}} &= \left. \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} k(l_2) \left( \sqrt{y^2 + z^2} - l_2 \right) \right) \right|_{\bar{x}} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \left( k(l_2) \left( \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{bmatrix} \right) \right) \right|_{\bar{x}} \\ &= k(l_{2_e}) \left. \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \left( \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{bmatrix} \right) \right|_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} &= k(l_{2_e}) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{bmatrix} \right) \Big|_{\bar{x}} \\ &= k(l_{2_e}) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \frac{z^2}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-yz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-yz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{y^2}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \right) \Big|_{\bar{x}} \\ &= k(l_{2_e}) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \frac{z_e^2}{\sqrt{z_e^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = k(l_{2_e}) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - l_{2_e} \begin{bmatrix} \frac{-1}{z_e} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = k(l_{2_e}) \begin{bmatrix} 1 + \frac{l_{2_e}}{z_e} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Le modèle linéarisé autour de la position d'équilibre est :

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} \dot{y}_\delta \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} + k(l_{2_e}) \begin{bmatrix} 1 + \frac{l_{2_e}}{z_e} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\delta \\ z_\delta \end{bmatrix} = k(l_{2_e}) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} l_{2_\delta} + \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (\text{D.8})$$



# Bibliographie

- AGRAWAL, Sunil K et al. (2009). « Optimization and design of a cable driven upper arm exoskeleton ». In : *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, p. 3-10.
- ÅKESSON, Johan et Per HAGANDER (2003). « Integral action—a disturbance observer approach ». In : *2003 European Control Conference (ECC)*. IEEE, p. 2577-2582.
- ALTSCHULER, Daniel R (2002). « The National Astronomy and Ionosphere Center's (NAIC) Arecibo Observatory in Puerto Rico ». In : *Single-Dish Radio Astronomy : Techniques and Applications*. T. 278, p. 1-24.
- ANDERSSON, Amanda et Elin NÄSHOLM (2018). *Fast Real-Time MPC for Fighter Aircraft*.
- AXEHILL, Daniel et Johan SJÖBERG (2003). *Adaptive cruise control for heavy vehicles : Hybrid control and mpc*.
- AZADI, Mojtaba, Saeed BEHZADIPOUR et Garry FAULKNER (2009). « Antagonistic variable stiffness elements ». In : *Mechanism and Machine Theory* 44.9, p. 1746-1758.
- BABAGHASABHA, Reza, Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD (2016). « Adaptive robust control of fully constrained cable robots : singular perturbation approach ». In : *Nonlinear Dynamics* 85.1, p. 607-620.
- BADGWELL, Thomas A et Kenneth R MUSKE (2002). « Disturbance model design for linear model predictive control ». In : *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*. T. 2. IEEE, p. 1621-1626.
- BAKLOUTI, Sana, Stéphane CARO et Eric COURTEILLE (2019). « Elasto-dynamic model-based control of non-redundant cable-driven parallel robots ». In : *RO-MANSY 22—Robot Design, Dynamics and Control*. Springer, p. 238-246.
- BARRETTE, Guillaume et Clément M GOSSELIN (2005). « Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms ». In : *Journal of mechanical design* 127.2, p. 242-248.
- BEGEY, Jeremy et al. (2018). « Dynamic control of parallel robots driven by flexible cables and actuated by position-controlled winches ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 35.1, p. 286-293.
- BEHZADIPOUR, S. et A. KHAJEPOUR (2006a). « Erratum : “Stiffness of Cable-based Parallel Manipulators With Application to Stability Analysis” [Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1), pp. 303–310] ». In : *Journal of Mechanical Design* 128, p. 1366-1366.
- BEHZADIPOUR, Saeed et Amir KHAJEPOUR (2006b). « Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis ». In : *Journal of mechanical design* 128.1, p. 303-310.
- BEMPORAD (2019). *Model predictive control, Course*. URL : [http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/mpc\\_course.html](http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/mpc_course.html).
- BEMPORAD, Alberto (2006). « Model predictive control design : New trends and tools ». In : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, p. 6678-6683.

- BEMPORAD, Alberto, Luigi CHISCI et Edoardo MOSCA (1994). « On the stabilizing property of SIORHC ». In : *Automatica* 30.12, p. 2013-2015.
- BEMPORAD, Alberto et Manfred MORARI (1999). « Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints ». In : *Automatica* 35.3, p. 407-427.
- BEMPORAD, Alberto, Manfred MORARI et N Lawrence RICKER (2004). « Model predictive control toolbox ». In : *User's Guide, Version 2*.
- BESSELMANN, Thomas, Johan LOFBERG et Manfred MORARI (2012). « Explicit MPC for LPV systems : Stability and optimality ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.9, p. 2322-2332.
- BODSON, Marc (2002). « Evaluation of optimization methods for control allocation ». In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25.4, p. 703-711.
- BORGSTROM, Per Henrik et al. (2009). « Design and implementation of NIMS3D, a 3-D cabled robot for actuated sensing applications ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 25.2, p. 325-339.
- BOSSCHER, Paul, Andrew T RIECHEL et Imme EBERT-UPHOFF (2006). « Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 22.5, p. 890-902.
- BOUCHARD, Samuel (2008). « Géométrie des Robots Parallèles entraînés par des Câbles ». Thèse de doct.
- BOUCHARD, Samuel, Clément GOSSELIN et al. (2006). « Kinematic sensitivity of a very large cable-driven parallel mechanism ». In : *ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, p. 851-858.
- BRUCKMANN, Tobias, Andreas POTT et Manfred HILLER (2006). « Calculating force distributions for redundantly actuated tendon-based Stewart platforms ». In : *Advances in Robot Kinematics*. Springer, p. 403-412.
- BRUCKMANN, Tobias et al. (2013). « Design and realization of a high rack storage and retrieval machine based on wire robot technology ». In : *Proceedings of the IDETC/CIE, Portland, Oregon*, p. 771-780.
- BUFFINGTON, James et James BUFFINGTON (1997). « Tailless aircraft control allocation ». In : *Guidance, Navigation, and Control Conference*, p. 3605.
- CableBOT* (s. d.). <http://www.cablebot.eu/en/publications/>.
- CANNON, Mark (2016). « C21 Model Predictive Control ». In : *Lecture Notes, Oxford University, Oxford*.
- CANNON, Mark, Desmond NG et Basil KOUVARITAKIS (2009). « Successive linearization NMPC for a class of stochastic nonlinear systems ». In : *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, p. 249-262.
- CAPONIGRO, Marco et al. (2018). « Regularization of chattering phenomena via bounded variation controls ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 63.7, p. 2046-2060.
- CHEN, Yan et Junmin WANG (2011). « Fast and global optimal energy-efficient control allocation with applications to over-actuated electric ground vehicles ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 20.5, p. 1202-1211.
- CHRISTIAAN, DW (2009). « Optimal thrust allocation methods for dynamic positioning of ships ». Thèse de doct. Delft University of Technology.
- CONE, Lawrence L (1985). « Skycam-an aerial robotic camera system ». In : *Byte* 10.10, p. 122.
- CONNOR, Jerome J (2003). « Introduction to Structural Motion Control,»Prentice Hall ». In : *Englewood Cliffs, NJ*.

- CRAWFORD, B (1969). « Configuration design and efficient operation of redundant multi-jet systems ». In : *AIAA Guidance, Control, and Flight Mechanics Conference*, p. 845.
- CURTI, Fabio, Marcello ROMANO et Riccardo BEVILACQUA (2010). « Lyapunov-based thrusters' selection for spacecraft control : analysis and experimentation ». In : *Journal of guidance, control, and dynamics* 33.4, p. 1143-1160.
- DIAO, Xiumin (2015). « Singularity analysis of fully-constrained cable-driven parallel robots with seven cables ». In : *2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. IEEE, p. 1537-1541.
- DIAO, Xiumin et Ou MA (2009). « Vibration analysis of cable-driven parallel manipulators ». In : *Multibody system dynamics* 21.4, p. 347-360.
- DIAZ, IM et Paul REYNOLDS (2009). « Robust saturated control of human-induced floor vibrations via a proof-mass actuator ». In : *Smart Materials and Structures* 18.12, p. 125024.
- DOSTÁL, Jiří et Lukáš FERKL (2014). « Model predictive control of climatic chamber with on-off actuators ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 47.3, p. 4423-4428.
- DUAN, BY et al. (2009). « On design and experiment of the feed cable-suspended structure for super antenna ». In : *Mechatronics* 19.4, p. 503-509.
- DURHAM, Wayne C (1993). « Constrained control allocation ». In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 16.4, p. 717-725.
- (1994). « Constrained control allocation-three-moment problem ». In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 17.2, p. 330-336.
- DURHAM, Wayne C et Kenneth A BORDIGNON (1996). « Multiple control effector rate limiting ». In : *Journal of guidance, control, and dynamics* 19.1, p. 30-37.
- EBERHARDT, Rowena et David WARD (1999). « Indirect adaptive flight control of a tailless fighter aircraft ». In : *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, p. 4042.
- EL-GHAZALY, Gamal, Marc GOUTTEFARDE et Vincent CREUZE (2015). « Adaptive terminal sliding mode control of a redundantly-actuated cable-driven parallel manipulator : CoGiRo ». In : *Cable-Driven Parallel Robots*. Springer, p. 179-200.
- FANG, Shiqing et al. (2004). « Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution ». In : *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics* 9.3, p. 561-568.
- FICHTER, Eugene F (1986). « A Stewart platform-based manipulator : general theory and practical construction ». In : *The International Journal of Robotics Research* 5.2, p. 157-182.
- FILATOV, DM et al. (2016). « Control system of unmanned aerial vehicle ». In : *2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*. IEEE, p. 117-119.
- FOSSEN, Thor I et Tor A JOHANSEN (2006). « A survey of control allocation methods for ships and underwater vehicles ». In : *2006 14th Mediterranean Conference on Control and Automation*. IEEE, p. 1-6.
- FRADKOV, AL et al. (1995). « Speed gradient control and passivity of nonlinear oscillators ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 28.14, p. 613-617.
- FRADKOV, Alexander L (1991). « Speed-gradient laws of control and evolution ». In : *Prepr. 1st European Control Conf., Grenoble*, p. 1865-1870.
- FRADKOV, Alexander L, Iliya V MIROSHNIK et Vladimir O NIKI-FOROV (2000). « Nonlinear and adaptive control of complex systems ». In : *Meccanica* 35, p. 201-202.
- FRAHM, Hermann (1910). *Means for damping the rolling motion of ships*. US Patent 970,368.



- GAGLIARDINI, Lorenzo et al. (2015). « A reconfiguration strategy for reconfigurable cable-driven parallel robots ». In : *2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*. IEEE, p. 1613-1620.
- GANGLOFF, Jacques (2020). *Raspberry Pi Simulink Coder target (RPi) — Team AVR - Control, Vision and Robotics Lab*, [Online ; accessed 28-March-2020]. URL : [https://avr.icube.unistra.fr/en/index.php?title=Raspberry\\_Pi\\_Simulink\\_Coder\\_target\\_\(RPi\)&oldid=3535](https://avr.icube.unistra.fr/en/index.php?title=Raspberry_Pi_Simulink_Coder_target_(RPi)&oldid=3535).
- GARUS, Jerzy (2004). « Optimization of thrust allocation in the propulsion system of an underwater vehicle ». In : *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 14, p. 461-467.
- GONÇALVES, Rogério Sales et al. (2015). « Cable-driven robot for upper and lower limbs rehabilitation ». In : *Handbook of Research on Advancements in Robotics and Mechatronics*. IGI Global, p. 284-315.
- GOSSELIN, Clément et Martin GRENIER (2011). « On the determination of the force distribution in overconstrained cable-driven parallel mechanisms ». In : *Meccanica* 46.1, p. 3-15.
- GOSSELIN, Clément, Simon LEFRANÇOIS et Nathaniel ZOSO (2010). « Underactuated cable-driven robots : machine, control and suspended bodies ». In : *Brain, Body and Machine*. Springer, p. 311-323.
- GOUTTEFARDE, Marc (2016). *Analysis and Synthesis of Large-Dimension Cable-Driven Parallel Robots*. Habilitation à Diriger les Recherches. URL : <https://seafire.lirmm.fr/f/d6a99d1c2b/>.
- GOUTTEFARDE, Marc, David DANEY et Jean-Pierre MERLET (2010). « Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 27.1, p. 1-13.
- GOUTTEFARDE, Marc et Clément M GOSSELIN (2006). « Analysis of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 22.3, p. 434-445.
- GOUTTEFARDE, Marc, Jean-Pierre MERLET et David DANEY (2007). « Wrench-feasible workspace of parallel cable-driven mechanisms ». In : *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 1492-1497.
- GOUTTEFARDE, Marc et al. (2015a). « A versatile tension distribution algorithm for  $n$ -DOF parallel robots driven by  $n + 2$  cables ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 31.6, p. 1444-1457.
- GOUTTEFARDE, Marc et al. (2015b). « Geometry selection of a redundantly actuated cable-suspended parallel robot ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 31.2, p. 501-510.
- GRIMM, Gene et al. (2005). « Model predictive control : for want of a local control Lyapunov function, all is not lost ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.5, p. 546-558.
- HARKEGARD, Ola (2002). « Efficient active set algorithms for solving constrained least squares problems in aircraft control allocation ». In : *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. T. 2. IEEE, p. 1295-1300.
- HÄRKEGÅRD, Ola (2004). « Dynamic control allocation using constrained quadratic programming ». In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 27.6, p. 1028-1034.
- HE, Guang-Ping et al. (2008). « Modeling, motion planning, and control of one-legged hopping robot actuated by two arms ». In : *Mechanism and Machine Theory* 43.1, p. 33-49.
- HENRICH, Richard E (1957). *Tuned rubber crankshaft vibration damper*. US Patent 2,779,211.

- HILLER, Manfred et al. (2005). « Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators ». In : *Mechanism and Machine Theory* 40.4, p. 429-445.
- HOMMA, Keiko, Osamu FUKUDA et Yoshihiko NAGATA (2002). « Study of a wire-driven leg rehabilitation system ». In : *IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems*. T. 2. IEEE, p. 1451-1456.
- HOUSKA, B., H.J. FERREAU et M. DIEHL (2011). « ACADO Toolkit – An Open Source Framework for Automatic Control and Dynamic Optimization ». In : *Optimal Control Applications and Methods* 32.3, p. 298-312.
- HOUSKA, Boris et al. (2009). *ACADO toolkit user's manual*.
- HUGONOT, PH (1885). « Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini ». In : *CR Acad. Sci. Paris* 101.1118-1120, p. 1229-1232.
- Inca (s. d.). <https://www.haption.com/fr/products-fr/inca-fr.html>.
- IRVINE, HM (1981). « Cable Structures The MIT Press ». In : *Cambridge, MA*, p. 15-24.
- ISMAIL, Zuliana et Renuganth VARATHARAJOO (2010). « A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control ». In : *Advances in Space Research* 45.6, p. 750-759.
- IZARD, Jean-Baptiste et al. (2017). « Large-scale 3D printing with cable-driven parallel robots ». In : *Construction Robotics* 1.1-4, p. 69-76.
- JAMES, Albus, Bostelman ROGER et Dagalakis NICHOLAS (1993). « The NIST robot-crane ». In : *Journal of Robotic Systems* 10.5, p. 709-724.
- JAMES, M (1978). « The generalised inverse ». In : *The Mathematical Gazette* 62.420, p. 109-114.
- JAMSHIDIFAR, Hamed et al. (2018). « Vibration decoupled modeling and robust control of redundant cable-driven parallel robots ». In : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 23.2, p. 690-701.
- JIANG Xiaoling et Gosselin, Clément (2016). « Trajectory generation for three-degree-of-freedom cable-suspended parallel robots based on analytical integration of the dynamic equations ». In : *Journal of Mechanisms and Robotics* 8.4, p. 041001.
- JIANG, Xiaoling, Eric BARNETT et Clément GOSSELIN (2018). « Periodic trajectory planning beyond the static workspace for 6-dof cable-suspended parallel robots ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 34.4, p. 1128-1140.
- JIANG, Xiaoling et Clément GOSSELIN (2014). « Dynamically feasible trajectories for three-dof planar cable-suspended parallel robots ». In : *ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- JOHANSEN, Tor A et Thor I FOSSEN (2013). « Control allocation—A survey ». In : *Automatica* 49.5, p. 1087-1103.
- KALMAN, Rudolf Emil et al. (1960). « Contributions to the theory of optimal control ». In : *Bol. soc. mat. mexicana* 5.2, p. 102-119.
- KAWAMURA, Sadao et al. (1997). « Development of an ultrahigh speed robot FALCON using parallel wire drive systems ». In : *Journal of the Robotics Society of Japan* 15.1, p. 82-89.
- KEERTHI, SS a et Elmer G GILBERT (1988). « Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems : Stability and moving-horizon approximations ». In : *Journal of optimization theory and applications* 57.2, p. 265-293.
- KHALIL, Hassan K. (déc. 2001). *Nonlinear Systems*. 3<sup>e</sup> éd. 750 pages. Pearson. ISBN : 0130673897.

- KHAYOUR, Imane et al. (2020a). « Active Damping of Parallel Robots Driven by Elastic Cables using On-Off Actuators through Model Predictive Control Allocation ». In : *IFAC-PapersOnLine* 53.2, p. 9169-9174.
- KHAYOUR, Imane et al. (2020b). « Improving disturbance rejection and dynamics of cable driven parallel robots with on-board propellers ». In : *2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, p. 6564-6569.
- KHOSRAVI, Mohammad A et Hamid D TAGHIRAD (2014). « Dynamic modeling and control of parallel robots with elastic cables : singular perturbation approach ». In : *IEEE Transactions on Robotics*.
- KILLIAN, M, M ZAUNER et M KOZEK (2018). « Comprehensive smart home energy management system using mixed-integer quadratic-programming ». In : *Applied energy* 222, p. 662-672.
- KORAYEM, Moharam Habibnedjad, Mohammad TAHERIFAR et Hami TOURAJZADEH (2015). « Compensating the flexibility uncertainties of a cable suspended robot using SMC approach ». In : *Robotica* 33.3, p. 578-598.
- KOURAKIS, Ioannis (2007). « Structural systems and tuned mass dampers of super-tall buildings : case study of Taipei 101 ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology.
- KOZAK, Kris, Qian ZHOU et Jinsong WANG (2006). « Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 22.3, p. 425-433.
- KURTZ, Ronald et Vincent HAYWARD (1991). « Dexterity measure for tendon actuated parallel mechanisms ». In : *IEEE Intl. Conf. on Advanced Robotics*. Citeseer, p. 1141-1146.
- LAMAURY, Johann (2013). « Contribution a la commande des robots parallèles a câbles à redondance d'actionnement ». Thèse de doct.
- LAMAURY, Johann et Marc GOUTTEFARDE (2013). « Control of a large redundantly actuated cable-suspended parallel robot ». In : *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 4659-4664.
- LANDSBERGER, Samuel Ernest (1984). « Design and construction of a cable-controlled, parallel link manipulator ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology.
- LAPPAS, VJ, WH STEYN et CI UNDERWOOD (2002). « Attitude control for small satellites using control moment gyros ». In : *Acta Astronautica* 51.1-9, p. 101-111.
- LE COROLLER, H et al. (2004). « Tests with a Carlina-type hypertelescope prototype-I. Demonstration of star tracking and fringe acquisition with a balloon-suspended focal camera ». In : *Astronomy & Astrophysics* 426.2, p. 721-728.
- LESELLIER, Maximilian (2019). « Conception, optimisation et commande d'un stabilisateur actif pour la compensation des vibrations des robots parallèles à câbles ». Thèse de doct.
- LESELLIER, Maximilian et al. (2018). « An active stabilizer for cable-driven parallel robot vibration damping ». In : *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, p. 5063-5070.
- LI, Hui et al. (2013). « Optimal force distribution based on slack rope model in the incompletely constrained cable-driven parallel mechanism of FAST telescope ». In : *Cable-driven parallel robots*. Springer, p. 87-102.
- LINDEMANN, Randel et Delbert TESAR (1989). « Construction and demonstration of a 9-string 6-DOF force reflecting joystick for telerobotics ». In : *NASA International Conference on Space Telerobotics, (4)*, p. 55-63.

- LIYANAGE, Migara H, Nicholas KROUGLICOF et Raymond GOSINE (2010). « High speed electro-hydraulic actuator for a scara type robotic arm ». In : *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, p. 470-476.
- LÖFBERG, J. (2004). « YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB ». In : *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.
- LOVE, Allan W (2004). « Arecibo observatory 40th anniversary celebration ». In : *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 46.1, p. 94-97.
- LUO, Yu et al. (2004). « Model predictive dynamic control allocation with actuator dynamics ». In : *Proceedings of the 2004 American control conference*. T. 2. IEEE.
- MACIEJOWSKI, Jan Marian (2002). *Predictive control : with constraints*. Pearson education.
- MAEDER, Urban, Francesco BORRELLI et Manfred MORARI (2009). « Linear offset-free model predictive control ». In : *Automatica* 45.10, p. 2214-2222.
- MENCHINELLI, P et Alberto BEMPORAD (2008). « Hybrid model predictive control of a solar air conditioning plant ». In : *European Journal of Control* 14.6, p. 501.
- MERLET, Jean-Pierre (2004). « Analysis of the influence of wires interference on the workspace of wire robots ». In : *On Advances in Robot Kinematics*. Springer, p. 211-218.
- (2006). *Parallel robots*. T. 128. Springer Science & Business Media.
- (2008). « Kinematics of the wire-driven parallel robot MARIONET using linear actuators ». In : *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 3857-3862.
- (2012). « The kinematics of the redundant N- 1 wire driven parallel robot ». In : *2012 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE, p. 2313-2318.
- (2013). « Wire-driven parallel robot : open issues ». In : *Romansy 19—Robot Design, Dynamics and Control*. Springer, p. 3-10.
- MERLET, Jean-pierre et David DANAY (2010). « A portable, modular parallel wire crane for rescue operations ». In : *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 2834-2839.
- MIKELSONS, Lars et al. (2008). « A real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators ». In : *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 3869-3874.
- MING, Aiguo et Toshiro HIGUCHI (1994). « Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires. I : Concept, design and control ». In : *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering* 28.2, p. 131-138.
- MONTGOMERY, Forrest et Joshua VAUGHAN (2017). « Suppression of cable suspended parallel manipulator vibration utilizing input shaping ». In : *2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. IEEE, p. 1480-1485.
- MORARI, Manfred et Urban MAEDER (2012). « Nonlinear offset-free model predictive control ». In : *Automatica* 48.9, p. 2059-2067.
- MÜLLHAUPT, Philippe (2009). *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques.
- MUSKE, Kenneth R et Thomas A BADGWELL (2002). « Disturbance modeling for offset-free linear model predictive control ». In : *Journal of Process Control* 12.5, p. 617-632.
- NAHON, Meyer, Gabriele GILARDI et Casey LAMBERT (2002). « Dynamics/control of a radio telescope receiver supported by a tethered aerostat ». In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25.6, p. 1107-1115.

- NGUYEN, Dinh Quan et Marc GOUTTEFARDE (2015). « On the improvement of cable collision detection algorithms ». In : *Cable-Driven Parallel Robots*. Springer, p. 29-40.
- NOCEDAL, Jorge et Stephen WRIGHT (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
- OH, So-Ryeok et Sunil Kumar AGRAWAL (2006). « Generation of feasible set points and control of a cable robot ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 22.3, p. 551-558.
- OPPENHEIMER, M, D DOMAN et M BOLENDER (2010). « Control allocation ». In : *The control handbook, control system applications*, p. 8-1.
- OTIS, Martin J-D et al. (2009). « Determination and management of cable interferences between two 6-DOF foot platforms in a cable-driven locomotion interface ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans* 39.3, p. 528-544.
- PANNOCCHIA, Gabriele (2003). « Robust disturbance modeling for model predictive control with application to multivariable ill-conditioned processes ». In : *Journal of Process Control* 13.8, p. 693-701.
- PANNOCCHIA, Gabriele, Marco GABICINI et Alessio ARTONI (2015). « Offset-free MPC explained : novelties, subtleties, and applications ». In : *IFAC-PapersOnLine* 48.23, p. 342-351.
- PANNOCCHIA, Gabriele et James B RAWLINGS (2003). « Disturbance models for offset-free model-predictive control ». In : *AIChE journal* 49.2, p. 426-437.
- PEDEMONTE, Nicolò et al. (2020). « Fastkit : A mobile cable-driven parallel robot for logistics ». In : *Advances in Robotics Research : From Lab to Market*. Springer, p. 141-163.
- PETERSEN, John AM et Marc BODSON (2005). « Interior-point algorithms for control allocation ». In : *Journal of guidance, control, and dynamics* 28.3, p. 471-480.
- PETERSEN, Niel R (1980). « Design of large scale tuned mass dampers ». In : *Structural control*, p. 581-596.
- POPPE, Koen et al. (2010). « Thruster Allocation for Dynamical Positioning ». In : *Study Group Mathematics with Industry*. Centrum Wiskunde & Informatica ; Amsterdam, p. 39-53.
- POTT, Andreas (2018). « Classification and Architecture ». In : *Cable-Driven Parallel Robots*. Springer, p. 15-43.
- POTT, Andreas, Tobias BRUCKMANN et Lars MIKELSONS (2009). « Closed-form force distribution for parallel wire robots ». In : *Computational Kinematics*. Springer, p. 25-34.
- QI, Ronghuai, Amir KHAJEPOUR et William W MELEK (2019). « Generalized Flexible Hybrid Cable-Driven Robot (HCDR) : Modeling, Control, and Analysis ». In : *arXiv preprint arXiv :1911.06222*.
- QI, Ronghuai et al. (2019). « Decoupled modeling and model predictive control of a hybrid cable-driven robot (HCDR) ». In : *Robotics and Autonomous Systems* 118, p. 1-12.
- QIAN, Xiangjun et al. (2016). « Optimal trajectory planning for autonomous driving integrating logical constraints : An MIQP perspective ». In : *2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. IEEE, p. 205-210.
- RAI, Nishant Kishore et al. (2013). « Seismic retrofitting of existing structures by tuned sloshing water damper : an experimental study ». In : *ISET Journal of Earthquake Technology* 50.1, p. 27-47.

- RAWLINGS, James B et Kenneth R MUSKE (1993). « The stability of constrained receding horizon control ». In : *IEEE transactions on automatic control* 38.10, p. 1512-1516.
- RICHALET, J (1993). « Industrial applications of model based predictive control ». In : *Automatica* 29.5, p. 1251-1274.
- RICHALET, Jacques et Donal O'DONOVAN (2009). *Predictive functional control : principles and industrial applications*. Springer Science & Business Media.
- RICHALET, Jacques et al. (1978). « Model predictive heuristic control ». In : *Automatica (journal of IFAC)* 14.5, p. 413-428.
- RIEHL, Nicolas (2011). « Modélisation et design de robots parallèles à câbles de grande dimension ». Thèse de doct. Montpellier 2.
- RIEHL, Nicolas et al. (2010). « On the determination of cable characteristics for large dimension cable-driven parallel mechanisms ». In : *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 4709-4714.
- RUIJK, Rogier de, Mitchell RUSHTON et Amir KHAJEPOUR (2018). « Out-of-plane vibration control of a planar cable-driven parallel robot ». In : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 23.4, p. 1684-1692.
- ROBINSON, David W et al. (1999). « Series elastic actuator development for a bio-mimetic walking robot ». In : *1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (Cat. No. 99TH8399)*. IEEE, p. 561-568.
- ROSSITER, J.A. (2003). *Model-Based Predictive Control : A Practical Approach*. Control Series. CRC Press. ISBN : 9780203503966. URL : <https://books.google.fr/books?id=owznQTI-NqUC>.
- RUSHTON, Mitchell et Amir KHAJEPOUR (2016). « Optimal actuator placement for vibration control of a planar cable-driven robotic manipulator ». In : *2016 American Control Conference (ACC)*. IEEE, p. 3020-3025.
- SANTOS, Willer Gomes dos et al. (2015). « Multi-objective optimization applied to real-time command problem of spacecraft thrusters ». In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 52.5, p. 1407-1416.
- SARGSYAN, Suren, Vigen ARAKELIAN et Sébastien BRIOT (2012). « Robotic rehabilitation devices of human extremities : design concepts and functional particularities ». In : *ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, p. 245-254.
- SATO, Makoto, Yukihiko HIRATA et Hiroshi KAWARADA (1992). « Space interface device for artificial reality—SPIDAR ». In : *Systems and Computers in Japan* 23.12, p. 44-54.
- SCARAMOZZINO, Simone, Kim D LISTMANN et Jörg GEBHARDT (2015). « Time-optimal control of harmonic oscillators at resonance ». In : *Control Conference (ECC), 2015 European*. IEEE, p. 1955-1961.
- SELLET, Hugo (2018). *Rapport de Projet de Fin d'Études : Compensation des vibrations des robots parallèles à câbles par jets d'air comprimé*.
- SELLET, Hugo et al. (2019). « Active Damping of Parallel Robots Driven by Flexible Cables Using Cold-Gas Thrusters ». In : *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, p. 530-536.
- SERVIDIA, Pablo A et RS Sanchez PENA (2002). « Thruster design for position/attitude control of spacecraft ». In : *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 38.4, p. 1172-1180.
- SIDI, Marcel J. (1997a). *Spacecraft Dynamics and Control : A Practical Engineering Approach*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press.



- SIDI, Marcel J (1997b). *Spacecraft dynamics and control : a practical engineering approach*. T. 7. Cambridge university press.
- SØRDALEN, OJ (1997). « Optimal thrust allocation for marine vessels ». In : *Control Engineering Practice* 5.9, p. 1223-1231.
- Stewart Platform*, Wikipedia (s. d.). [https://en.wikipedia.org/wiki/Stewart\\_platform](https://en.wikipedia.org/wiki/Stewart_platform).
- SURDILOVIC, Dragoljub et Rolf BERNHARDT (2004). « STRING-MAN : a new wire robot for gait rehabilitation ». In : *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*. T. 2. IEEE, p. 2031-2036.
- SUTTON, George P et Oscar BIBLARZ (2016). *Rocket propulsion elements*. John Wiley & Sons.
- TADOKORO, Satoshi et al. (1999). « A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments ». In : *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No. 99CH36289)*. T. 2. IEEE, p. 1222-1227.
- THOMPSON, R.R. et M.S. BLACKSTONE (2005). *Three-dimensional moving camera assembly with an informational cover housing*. US Patent 6,873,355. URL : <http://www.google.com/patents/US6873355>.
- THORNTON, Blair et al. (2007). « Zero-G class underwater robots : Unrestricted attitude control using control moment gyros ». In : *IEEE Journal of Oceanic Engineering* 32.3, p. 565-583.
- TJONNAS, Johannes et Tor A JOHANSEN (2009). « Stabilization of automotive vehicles using active steering and adaptive brake control allocation ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 18.3, p. 545-558.
- TOWNSEND, NC, AJ MURPHY et R Ajit SHENOI (2007). « A new active gyrostabiliser system for ride control of marine vehicles ». In : *Ocean engineering* 34.11-12, p. 1607-1617.
- Tuned mass damper*, Wikipedia (s. d.). [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned\\_mass\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper).
- VALASEK, Michael (2003). « Design and control of under-actuated and over-actuated mechanical systems : Challenges of mechanics and mechatronics ». In : *Vehicle system dynamics* 40, p. 37-49.
- VASALLO, Manuel Jesús et José Manuel BRAVO (2016). « A MPC approach for optimal generation scheduling in CSP plants ». In : *Applied Energy* 165, p. 357-370.
- VEKSLER, Aleksander et al. (2016). « Dynamic positioning with model predictive control ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24.4, p. 1340-1353.
- VERHOEVEN, Richard (2004). « Analysis of the workspace of tendon based Stewart platforms ». Thèse de doct. Verlag nicht ermittelbar.
- VERHOEVEN, Richard et Manfred HILLER (2000). « Estimating the controllable workspace of tendon-based Stewart platforms ». In : *Advances in Robot Kinematics*. Springer, p. 277-284.
- WEBER, Xavier (2016). « Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles ». Thèse de doct. Université de Strasbourg.
- WEBER, Xavier, Loic CUVILLON et Jacques GANGLOFF (2014). « Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot using reaction wheels ». In : *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, p. 1724-1729.

- (2015). « Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot in modal space ». In : *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, p. 1599-1604.
- WELCH, Greg, Gary BISHOP et al. (1995). *An introduction to the Kalman filter*.
- WISCHNITZER, Yonatan, Nir SHVALB et Moshe SHOHAM (2008). « Wire-driven parallel robot : Permitting collisions between wires ». In : *The International Journal of Robotics Research* 27.9, p. 1007-1026.
- YESHMUKHAMETOV, Azamat et al. (2017). « Design and kinematics of serial/parallel hybrid robot ». In : *2017 3rd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)*. IEEE, p. 162-165.
- YIĞIT, Arda et al. (2021). « Novel Omnidirectional Aerial Manipulator With Elastic Suspension : Dynamic Control and Experimental Performance Assessment ». In : *IEEE Robotics and Automation Letters* 6.2, p. 612-619.
- YUAN, Han et al. (2017). « Vibration analysis of cable-driven parallel robots based on the dynamic stiffness matrix method ». In : *Journal of Sound and Vibration* 394, p. 527-544.
- ZHAKATAYEV, Altay et al. (2017). « Successive linearization based model predictive control of variable stiffness actuated robots ». In : *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. IEEE, p. 1774-1779.
- ZHANG, Youmin et al. (2007). « Reconfigurable control allocation against aircraft control effector failures ». In : *2007 IEEE International Conference on Control Applications*. IEEE, p. 1197-1202.
- ZIMMERMAN, David C et Daniel J INMAN (1990). « On the nature of the interaction between structures and proof-mass actuators ». In : *Journal of guidance, control, and dynamics* 13.1, p. 82-88.
- ZULAIKA, Juanjo et Francisco Javier CAMPA (2009). « New concepts for structural components ». In : *Machine Tools for High Performance Machining*. Springer, p. 47-73.



# Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués

## Résumé

Les robots parallèles à câbles présentent plusieurs avantages par rapport aux robots parallèles classiques. En raison de la faible masse des câbles, qui remplacent les corps rigides, la masse à déplacer par le robot est plus faible. Par conséquent, ces robots manipulateurs permettent d'atteindre des vitesses et accélérations élevées et de couvrir un espace de travail plus important. Les robots parallèles à câbles sont également plus facilement reconfigurables et moins coûteux.

En contrepartie, la flexibilité des câbles dégrade les performances en termes de précision et de temps d'établissement. Il est donc nécessaire d'atténuer les vibrations induites par la faible rigidité de l'effecteur actionné par câbles.

L'élasticité des câbles réduit également la bande passante des efforts qu'ils peuvent transmettre. En effet, plus les câbles sont longs ou composés d'un matériau élastique, plus la longueur de câble à enrouler pour générer une force donnée est grande. Cette bande passante réduite des enrouleurs des câbles limite les performances des robots parallèles à câbles. Elle ne permet pas de rejeter efficacement les vibrations et de suivre des trajectoires dynamiques et rapides par l'action seule des enrouleurs des câbles.

Dans cette thèse, on propose d'embarquer sur la plateforme différents types d'actionneurs additionnels pour améliorer la dynamique du robot. Ces actionneurs sont dotés d'une bande passante plus élevée que celle des enrouleurs des câbles. Une commande prédictive optimale est proposée pour distribuer à la fois les efforts des câbles et des actionneurs embarqués contribuant au mouvement du robot.

Des expérimentations, menées sur deux prototypes de robots parallèles à câbles, valident l'approche et évaluent les performances de l'amortissement actif des vibrations et du suivi de trajectoire.

Mots-clés : robots parallèles à câbles, actionneurs embarqués, propulseurs, commande prédictive, suivi de trajectoire, amortissement actif de vibrations, dynamique de robots manipulateurs.

## Résumé en anglais

Cable-driven parallel robots exhibit many advantages over traditional parallel robots. Due to the low mass of the cables, which replace the rigid links, the mass to be moved by the robot is lighter. Therefore, these manipulators can reach higher speeds and accelerations and cover larger workspaces. Cable-driven parallel robots are also easily scalable and less expensive.

On the other hand, the flexibility of the cables degrades the performances in terms of precision and settling time. Hence, it is necessary to attenuate the vibrations induced by the low rigidity of the end-effector actuated by the cables. The elasticity of the cables also reduces the bandwidth of the forces that they can transmit. Indeed, the longer the cables made of an elastic material, the greater the required cable length to be wound to generate a given force. The reduced cable winches bandwidth hinders the performances of the cable-driven parallel robots. It prevents the effectiveness of vibration damping and the tracking of fast and dynamic trajectories by the action of the cables only.

In this thesis, we propose to embed different types of additional actuators on the platform to improve the robot dynamics. These actuators have a higher bandwidth compared to the cable winches. An optimal predictive control is proposed to distribute both the forces of the cables and the on-board actuators contributing to the overall movement of the robot. Experiments are carried out on two prototypes of cable-driven parallel robots to validate the approach and evaluate the performances of the active vibration damping and the trajectory tracking.

Keywords: cable-driven mechanisms, embedded actuators, propellers, predictive control, trajectory tracking, active vibration damping, manipulator dynamics.