



**HAL**  
open science

# Géométries de Cartan branchées : problème d'équivalence et symétries

Alexis Garcia

► **To cite this version:**

Alexis Garcia. Géométries de Cartan branchées : problème d'équivalence et symétries. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Côte d'Azur, 2022. Français. NNT : 2022COAZ4046 . tel-03850849

**HAL Id: tel-03850849**

**<https://theses.hal.science/tel-03850849v1>**

Submitted on 14 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE DE DOCTORAT

## Géométries de Cartan branchées : problème d'équivalence et symétries

**Alexis GARCIA**

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Nice

**Présentée en vue de l'obtention  
du grade de docteur en Mathématiques  
d'Université Côte d'Azur**

**Dirigée par :** Sorin Dumitrescu

**Soutenue le :** 15 septembre 2022

**Devant le jury, composé de :**

Elisha Falbel (PR), Rapporteur, Université  
de Paris Sorbonne

Adolfo Guillot (Autre), Rapporteur,  
Université Nationale Autonome du Mexique

Karin Melnick (Professeur), Examineur,  
Université du Maryland

Guy Casale (MCF), Examineur, Université  
de Rennes 1

Andreas Høring (PR), Examineur,  
Université Côte d'Azur

# Géométries de Cartan branchées : problème d'équivalence et symétries

## **Jury :**

### **Rapporteurs :**

Elisha Falbel (PR), Rapporteur, Université de Paris Sorbonne

Adolfo Guillot (Autre), Rapporteur, Université Nationale Autonome du  
Mexique

### **Examineurs :**

Karin Melnick (Professeur), Examineur, Université du Maryland

Guy Casale (MCF), Examineur, Université de Rennes 1

Andreas Horing (PR), Examineur, Université Côte d'Azur

## Résumé

Nous donnons des résultats de classifications des variétés complexes compactes admettant certaines structures géométriques méromorphes rigides, au sens de Gromov. Plus précisément, nous étudions les structures géométriques méromorphes induites par les géométries de Cartan méromorphes. Dans le cas régulier, i.e sans pôle, un résultat de Biswas, Dumitrescu et McKay ([7]) énonce qu'il n'existe pas de tel objet sur une variété complexe compacte simplement connexe  $M$  dont les fonctions méromorphes sont les constantes, s'appuyant sur les deux faits suivants. D'une part, un résultat de Dumitrescu ([22]) qui montre l'existence de  $n = \dim(M)$  germes indépendants de symétries infinitésimales pour un tel objet, et d'autre part le fait que de tels germes s'étendent en des symétries infinitésimales globales sur une variété simplement connexe. Ces deux arguments montrent que le problème initial s'inscrit dans le programme plus général de la classification des structures géométriques holomorphes quasi-homogènes.

Dans le cas méromorphe, le second argument est mis en défaut à l'aide d'exemples très simples (voir par exemple [8]). Les symétries infinitésimales d'une géométrie de Cartan méromorphe sur une variété complexe  $M$ , avec pôle  $D$ , forment un système local sur le complément  $M \setminus D$  de ce diviseur. Une grande partie de cette thèse est dédiée à la recherche de conditions suffisantes pour assurer que ce système local se prolonge à  $M$ , et donc de ramener le problème initial à un résultat de classification de certaines structures géométriques méromorphes quasi-homogènes. Ces conditions sont exprimées en termes de *géodésiques*, généralisant les géodésiques des connexions affines classiques. Nous appliquons les résultats obtenus dans le cas affine, c'est à dire que nous étendons le résultat de [7] de manière partielle aux connexions affines méromorphes.

Nous étudions également la version méromorphe du problème d'équivalence associé à des structures géométriques particulières, dont la version holomorphe correspond aux travaux de Cartan, Tanaka ([49]) ou encore Morimoto ([40]). Nous construisons notamment un exemple de structure géométrique méromorphe sur une variété complexe compacte, induite par une géométrie de Cartan holomorphe branchée, mais sans représentant holomorphe branché normal.

**Mots-clés :** Géométries de Cartan, Structures géométriques méromorphes, Connexions affines méromorphes, Groupes et algèbre de Lie, Problème d'équivalence

## Abstract

We give classification results of complex compact manifolds which admit some meromorphic rigid geometric structures in the Gromov's sense. More precisely, we study meromorphic geometric structures arising from the meromorphic Cartan geometries. In the regular case, i.e in the absence of any pole, a result by Biswas, Dumitrescu and McKay ([7]) states that there is no such object on a complex compact manifold which is simply connected  $M$ , and whose meromorphic functions are the constant. It relies on the two following facts. First, a result by Dumitrescu ([22]) proves the existence of  $n = \dim(M)$  independent germs of infinitesimal symmetries for a such object. Secondly, such germs prolongates as global infinitesimal symmetries when the base manifold is simply connected. These two arguments show that the initial problem is a particular case of the classification of quasi-homogeneous holomorphic geometric structures on complex compact manifolds.

In the meromorphic case, the second fact no longer stands, which is highlighted by easy examples (see for example [8]). The infinitesimal symmetries of a meromorphic Cartan geometry on a complex manifold  $M$ , with pole  $D$ , form a local system on the complement  $M \setminus D$  of this divisor. The thesis mainly focuses on sufficient conditions to ensure that this local system prolongates to the whole  $M$ , i.e to recover the first argument as described above. These conditions are expressed in terms of *geodesics*, an object wich generalizes the geodesics of the classical affine connections. We then apply these results in the affine case, i.e we partially extend the main result of [7] to some meromorphic affine connections.

We also study the meromorphic analog of the equivalence problem associated with some geometric structures, whose holomorphic version corresponds to the work of Cartan, Tanaka ([49]) and other authors such as Morimoto ([40]). We construct an example of meromorphic geometric structure on a complex compact manifold which is induced by a branched holomorphic Cartan geometry, but which admits no normal branched holomorphic representant.

**Key words :** Cartan geometries, Meromorphic geometric structures, Meromorphic affine connections, Lie Groups and Algebras, Equivalence problem

---

## *Remerciements*

Avant de commencer, je tiens à exprimer mon immense gratitude envers les différentes personnes et entités qui ont permises à ce travail de voir le jour. A commencer par mon directeur de thèse, Sorin, qui a fait preuve de beaucoup de patience et de pédagogie pour me faire grandir, au moins scientifiquement parlant, et dont les rayons de culture mathématique ont éclairé le vide interstellaire de mon esprit.

Ensuite, à l'Université de Nice Côte d'Azur, qui a été ma seconde maison durant près de 10 ans !

A l'Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales et Appliquées de Nice, sa directrice Élisabeth Taffin-De Givenchy, sa secrétaire Catherine Briet, deux femmes extraordinaires et d'une humanité émouvante.

Au Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné et son équipe extraordinaire, notamment les différents doctorants que j'ai cotoyé et dont je vais vexer plus d'un en omettant de les citer : Zakaria, Benjamin, Medhi, Huang, Yanis, Thomas, Michael, Martino, et c'est tout ce que ma mémoire limitée me permet de retransmettre dans l'immédiat. Les différentes gestionnaires qui font de ce lieu de travail un lieu avant tout humain : Isabelle, Clara, Mireille, etc... Un grand merci à vous tous !

Mais, comme tout le monde le sait bien maintenant, l'espace et le temps ne sont pas deux dimensions indépendantes, et dans mon long temps propre à l'intérieur de ce que j'appelle l'Université de Nice, il y a eu surtout des être extraordinaires qui ont été une seconde famille pour moi : Charles, Matthieu, Charlotte, Maeva, Florian, Florian, Yannis, Yanis, Nicolas, Nicolas, Quentin, et le chef incontesté de notre groupe (et d'avantage, mais je ne veux vexer personne ici), un modèle de rigueur, d'intuition, d'authenticité et d'humanité, Marcu-Antone. Merci à vous, et que la vie vous offre de nombreuses joies au moins aussi fortes que le l'immense bonheur que vous m'avez apporté.

Dans ce même temps propre, il y a eu des archanges qui nous ont gardé sur le droit chemin et permis à nos passions de voir le jour. Je veux parler de professeurs sans égaux dans cette même université : Laurent Michel, Philippe Maisonobe, Michel Merle, André Hirschowitz, Erwann Aubry, Andreas Höring et Christophe Cazanave, dont la patience et la volonté de transmettre leur passion est encore émouvante même après des années.

Enfin, merci à famille, ma mère Fabienne, à qui je dois l'obstination, y compris sur mes erreurs, mon père Jacques, à qui je dois sûrement le principe de divaguer sur des sujets philosophiques pendant une ballade dans la forêt, ma grand-mère Josiane, qui a fait de mon enfance un rêve, et enfin ma soeur, qui m'a toujours soutenu, à la limite du supportable.

Merci à vous tous !

# Géométries de Cartan branchées : problème d'équivalence et symétries

Alexis Garcia

1<sup>er</sup> octobre 2022

# Table des matières

<b>0 Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Structures géométriques holomorphes sur une variété complexe compacte . . . .	8
0.2 Géométries de Cartan et problème d'équivalence . . . . .	9
0.3 Rôle des automorphismes infinitésimaux dans la classification . . . . .	10
0.4 Structures géométriques et géométries de Cartan méromorphes . . . . .	11
0.5 Résultats de la thèse . . . . .	11
0.5.1 Propriété d'extension des champs de Killing et dimension algébrique nulle . . . . .	11
0.2.3 Problème d'équivalence méromorphe et géométries de Cartan branchées	13
0.2.4 Plan de la thèse . . . . .	14
<b>1 Géométries de Cartan méromorphes</b>	<b>16</b>
1.1 Fibrés principaux et structures géométriques méromorphes . . . . .	16
1.1.1 Fibrés principaux . . . . .	16
1.1.2 Faisceaux linéarisés sur un fibré principal . . . . .	18
1.1.3 Suite exacte d'Atiyah . . . . .	21
1.1.4 Fibré des repères et structures géométriques méromorphes . . . . .	22
1.2 Réductions structurales, métriques holomorphes et $H$ -structures . . . . .	24
1.2.1 Réductions structurales . . . . .	24
1.2.2 Métriques holomorphes sur un fibré vectoriel holomorphe . . . . .	25
1.2.3 $H$ -structures méromorphes et métriques riemanniennes méromorphes . . . . .	26
1.3 Connexions linéaires et connexions principales méromorphes . . . . .	27
1.3.1 Connexions linéaires méromorphes . . . . .	27
1.3.2 Connexions principales méromorphes . . . . .	29
1.3.3 Courbure d'une connexion linéaire . . . . .	33
1.3.4 Systèmes locaux et monodromie d'une connexion méromorphe . . . . .	34
1.3.5 Restriction d'une connexion méromorphe . . . . .	35
1.4 Géométries de Klein . . . . .	37
1.4.1 Définition et propriété de base . . . . .	37
1.4.2 Cohomologie relative d'une représentation associée à une géométrie de Klein . . . . .	38
1.4.3 Géométries de Klein affines . . . . .	41
1.4.4 Algèbres de Lie graduées et géométries de Klein paraboliques . . . . .	41
1.4.5 Prolongation de Tanaka algébrique . . . . .	45
1.4.6 Géométries de Klein complexes graduées . . . . .	49
1.4.7 Extensions de modèles . . . . .	50
1.5 Géométries de Cartan branchées et méromorphes . . . . .	52
1.5.1 Géométries de Cartan holomorphes . . . . .	52
1.5.2 Géométries de Cartan méromorphes et holomorphes branchées . . . . .	53
1.5.3 Courbure et représentation de courbure, développements . . . . .	56

1.5.4	Automorphismes et champs de Killing d'une géométrie de Cartan méromorphe	60
1.6	Extensions méromorphes et structures géométriques méromorphes induites	63
1.6.1	$Q$ -extensions méromorphes et $Q$ -structures méromorphes induites	63
1.6.2	$Q$ -structures méromorphes induites	66
1.6.3	Cas des géométries holomorphes branchées	68
1.6.4	Cas des géométries de Cartan affines	69
1.6.5	Description de la fibre d'une $Q$ -extension méromorphe	71
1.6.6	Connexions de Cartan méromorphes horizontales	73
1.7	Feuilletage en courbes distinguées et fonctions de structures	74
1.7.1	Application exponentielle	75
1.7.2	Courbes distinguées	75
1.7.3	Fonction de structure d'une base géométrique	79
1.7.4	Sections exponentielles et courbure	81
1.8	Catégorie différentiable	82
1.8.1	Foncteur d'une sous-catégorie différentiable vers les extensions méromorphes	82
1.8.2	Structures complexes sur les géométries de Cartan différentiables avec un modèle complexe	83
1.8.3	Interpolation de connexions de Cartan méromorphes dans la catégorie différentiable	84
<b>2</b>	<b>Problème d'équivalence méromorphe</b>	<b>88</b>
2.1	Problème d'équivalence méromorphe et méthode pour sa résolution	88
2.1.1	Rappels sur le problème d'équivalence	88
2.1.2	Problème d'équivalence méromorphe	90
2.1.3	Version méromorphe de la méthode de A.Čap et J.Slovák	90
2.1.4	Théorème d'holomorphicité	91
2.2	Problèmes d'équivalences méromorphe pour certains modèles gradués	92
2.2.1	Hypothèses et notations	93
2.2.2	Lemme préliminaire	94
2.2.3	Extensions régulières et géométries de Cartan régulières	95
2.2.4	Réduction aux $Q$ -extensions normales	98
2.2.5	Catégorie des géométries normales	101
2.2.6	Résolution du problème d'équivalence méromorphe pour les $Q$ -extensions normales	104
2.2.7	Exemple des structures Lagrangiennes méromorphes	106
2.3	Problème d'équivalence branché correspondant	108
2.3.1	Problème d'équivalence branché local	109
2.3.2	Problème d'équivalence branché global	110
2.3.3	Connexions de Weyl méromorphes et cas des $G$ -structures classiques	113
2.3.4	Structures méromorphes d'ordre 0	114
2.3.5	Condition nécessaire pour les structures méromorphes d'ordre supérieur	119
2.3.6	Exemple pour une algèbre de Lie graduée non abélienne	121
<b>3</b>	<b>Automorphismes infinitésimaux et dimension algébrique nulle</b>	<b>125</b>
3.1	Notations	125
3.2	Rôle des automorphismes infinitésimaux	126
3.2.1	Dimension algébrique d'une variété complexe compacte	126
3.2.2	Germes d'automorphismes infinitésimaux en dimension algébrique nulle	126
3.2.3	Propriété d'extension des champs de Killing	128

3.2.4	Preuve dans le cas holomorphe	129
3.2.5	Argument dans le cas méromorphe	130
3.3	Propriété d'extension et géométries totalement géodésiques	131
3.3.1	Connexion de Killing	131
3.3.2	Monodromie des champs de Killing dans le cas totalement géodésique	135
3.3.3	Sous-espaces caractéristiques	136
3.4	Propriété d'extension pour les géométries paraboliques régulières et totalement géodésiques	138
3.4.1	Modèles paraboliques simples de degré 1	139
3.4.2	Sous-espace caractéristique pour les géométries paraboliques régulières	139
3.5	Résultats en dimension algébrique nulle	142
3.5.1	Annulation de la première forme caractéristique du fibré adjoint	142
3.5.2	Notion de degré sur une variété complexe compacte et application pour les modèles affine	145
3.5.3	Géométries modelées sur la variété des drapeaux complets	147

# Notations et définitions de bases

## Géométrie différentielle

Par variété différentiable nous entendrons une variété différentiable de classe  $C^\infty$ . La notation  $TM$  désignera son fibré tangent.

**Notation 1.** Soit  $M$  une variété réelle et  $X$  un champ de vecteur différentiable sur  $M$ . On note  $\phi_X^t$  le flot de  $X$  au temps  $t \in \mathbb{R}$ , lorsque celui-ci est bien défini. Si  $X, Y$  sont deux champs de vecteurs différentiables sur  $M$ ,  $[X, Y]$  désigne leur crochet.

## Groupes et algèbres de Lie

Soit  $G$  un groupe de Lie (réel ou complexe). Nous renvoyons à [27] pour la définition d'un groupe de Lie, d'une algèbre de Lie, ainsi que les faits élémentaires de la théorie des groupes et algèbres de Lie.

**Notation 2.** La composition à gauche (resp. à droite) par un élément  $g \in G$  sera notée  $L_g$  (resp.  $R_g$ ).

**Définition 0.0.1.** La forme de Maurer-Cartan  $\omega_G$  de  $G$  est la forme (holomorphe) définie par  $\omega_G(g)(v) = TL_{g^{-1}}(v) \in \mathfrak{g}$  pour tout  $g \in G$  et  $v \in T_g G$ .

**Notation 3.** Le champ invariant à gauche vérifiant  $X(\text{Id}) = A$  sera noté  $\tilde{A}$ . L'espace tangent  $T_{\text{Id}_G} G$  s'identifie au sous-espace des champs invariants à gauche sur  $G$  et possède donc une structure d'algèbre de Lie. Il sera noté  $\text{Lie}(G)$ .

On note dans la suite  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ .

**Définition 0.0.2.** La formule de Maurer-Cartan est l'identité donnée par :  $d\omega_G + [\omega_G, \omega_G]_{\mathfrak{g}} = 0$ .

**Notation 4.** L'exponentielle est l'application  $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$  définie par  $\exp_G(A) = \phi_{\tilde{A}}^1(\text{Id})$  (Notation 1) pour tout  $A \in \mathfrak{g}$ .

**Notation 5.** Pour  $g \in G$ , l'action adjointe de  $g$  sera notée  $\text{ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ . Pour  $A \in \mathfrak{g}$ , l'action adjointe dérivée sera notée  $\text{Ad}(A) \in \text{End}(\mathfrak{g})$ .

**Définition 0.0.3.** Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel (réel ou complexe). Une représentation d'un groupe de Lie (réel ou complexe)  $G$  sur  $\mathbb{V}$  est un morphisme de groupe de Lie  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$ .

**Définition 0.0.4.** Une représentation d'algèbre de Lie est un morphisme  $\rho' : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathbb{V})$  d'algèbres de Lie, i.e. une application linéaire telle que  $\rho'([A, B]_{\mathfrak{g}}) = [\rho'(A), \rho'(B)]$  pour tout  $A, B \in \mathfrak{g}$ . On dit que  $\rho'$  est la représentation dérivée d'une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$  (ou que  $\rho$  intègre  $\rho'$ ) si et seulement si  $\rho'(A)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \rho(\exp_G(tA))(v)$ .

## Géométrie Complexe

Soit  $M$  une variété complexe. L'espace tangent holomorphe de  $M$  sera noté  $TM$  et son déterminant  $\mathcal{K}_M$ . Un diviseur  $D$  de  $M$  désignera pour nous une somme formelle finie  $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha D_\alpha$  de sous-variétés irréductibles  $D_\alpha$  de codimension 1 dans  $M$  avec  $c_\alpha$  des entiers relatifs. Les diviseurs  $D_\alpha$  seront appelées composantes irréductibles de  $D$ .

**Définition 0.0.5.** Dans toute cette thèse, une paire désignera un couple  $(M, D)$  formé d'une variété complexe  $M$  et d'un diviseur  $D$  de  $M$ .

**Notation 6.** Le support d'un diviseur  $D = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha D_\alpha$  comme ci-dessus est l'union  $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha \subset M$ . La notation  $M \setminus D$  sera employée pour désigner le complémentaire du support de  $D$  dans  $M$ .

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application holomorphe entre deux variétés complexes .

**Notation 7.** Soit  $\alpha$  une 1-forme holomorphe sur  $N$ . On notera  $f^*\alpha$  le pullback au sens de la géométrie différentielle.

**Notation 8.** On notera  $Tf : TM \rightarrow TN$  l'application tangente à  $f$ .

## Langage des faisceaux et des modules

Soit  $M$  une variété complexe ou réelle. Si  $M$  est complexe, on considère un diviseur  $D$  de  $M$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau d'ensembles sur  $M$  (nous renvoyons à [31], Chapitre II. 1 pour les définitions). La fibre au dessus d'un ouvert  $U \subset M$  sera notée  $\mathcal{F}(U)$ .

**Notation 9.** La restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U$  sera notée  $\mathcal{F}|_U$ . Si  $V \subset U$  sont deux ouverts on note  $\rho_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  le morphisme de restriction.

**Notation 10.** Soit  $F$  un ensemble. Le faisceau constant de fibre  $F$  est le faisceau  $\underline{F}_M$  tel que pour tout ouvert  $U \subset M$ , il existe un isomorphisme  $\varphi_U : \underline{F}_M(U) \simeq F$ , et  $\varphi_V \circ \rho_U^V = \varphi_U$  pour tout  $V \subset U$ .

**Notation 11.** Soit  $M$  complexe. On note  $\mathcal{O}_M$  (resp.  $\mathcal{O}_M^\infty$ ) le faisceau structural de  $M$  (resp. le faisceau des fonctions différentiables sur  $M$ ) : la fibre au dessus de  $U \subset M$  est l'ensemble des fonctions holomorphes (resp. différentiables) sur  $U$ . La notation  $\mathcal{R}_M$  sera employée pour désigner à la fois  $\mathcal{O}_M$  et  $\mathcal{O}_M^\infty$ .

**Notation 12.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $M$  et  $x \in M$ . On définit la fibre  $\mathcal{F}_x$  de  $\mathcal{F}$  en  $x$  comme le quotient de l'union  $\bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$  par la relation d'équivalence suivante. Soient  $U$  et  $V$  contenant  $x$ ,  $s \in \mathcal{F}(U)$  et  $t \in \mathcal{F}(V)$ . : Alors  $s \sim t$  si et seulement si il existe  $W \subset U \cap V$  contenant  $x$  tel que  $s|_W = t|_W$ . Si  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux, alors  $\phi$  préserve évidemment la relation d'équivalence précédente. On note alors  $\phi_x$  le morphisme obtenu par passage au quotient.

**Notation 13.** Soit  $f : M \rightarrow M'$  un morphisme de variétés complexes, et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $M'$ . On définit  $f^*\mathcal{F}$  comme le faisceau sur  $M$  dont la fibre sur  $U \subset M$  est :  $f^*\mathcal{F}(U) = \lim_{V \supset U} \mathcal{F}(V)$ . En particulier, si  $f : \Sigma \hookrightarrow M'$  est l'inclusion d'un sous-ensemble, nous notons  $\mathcal{F}|_\Sigma = f^*\mathcal{F}$ .

**Notation 14.** Si  $x \in M$ ,  $\mathfrak{m}_x$  désigne l'idéal de  $\mathcal{R}_M$  dont les éléments s'annulent sur  $x$ . Pour un diviseur  $D \subset M$ , l'idéal correspondant est noté  $\mathcal{O}_M(-D)$ . Son dual est noté  $\mathcal{O}_M(D)$ . on définit l'extension  $\mathcal{O}_M[*D]$  comme le faisceau de  $\mathcal{O}_M$ -modules dont la fibre au dessus de  $U$  est l'ensemble des fonctions méromorphes sur  $U$ , dont les diviseurs des pôles sont des multiples de  $D \cap U$ . Autrement dit  $\mathcal{O}_M[*D] = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{O}_M(rD)$ .

**Notation 15.** Pour  $f \in \mathcal{O}_M[*D](U)$ ,  $\text{ord}_D(f)$  désignera l'ordre de  $f$  en  $D$  c'est à dire l'entier  $d \in \mathbb{Z}$  minimal tel que  $f \in \mathcal{O}_M(dD)(U)$ .

**Notation 16.** Pour une sous-variété  $\Sigma \subset M$ , on définit un idéal  $\mathfrak{m}_{\Sigma,D}$  de  $\mathcal{O}_M[*D]$  de la manière suivante. Supposons d'abord que  $D$  est irréductible et soit  $z_1$  une équation de ce dernier. Une fonction méromorphe  $f \in \mathcal{O}_M[*D](U)$  appartient à  $\mathfrak{m}_{\Sigma,D}(U)$  si et seulement si pour tout  $x_0 \in D \cap U$ ,  $z_1^{\text{ord}_D(f)}$   $f$  s'annule en restriction à  $\Sigma \cap U'$ . Si  $D$  n'est pas irréductible, on note  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$  les composantes irréductibles et on définit  $\mathfrak{m}_{\Sigma,D} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{m}_{\Sigma,D_\alpha}$ .

Soit  $\mathcal{W}$  un  $\mathcal{O}_M$ -module cohérent sur  $M$  (voir [31], Chapitre 2, Définition p. 111). Soit  $x \in M$ . Alors la fibre  $\mathcal{W}_x$  est un  $\mathcal{O}_{M,x}$ -module et on définit :

**Notation 17.** On définit la fibre de  $\mathcal{W}$  en  $x \in M$  comme l'espace vectoriel complexe

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x \otimes \mathcal{W}_x = \mathcal{W}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{W}_x \quad (1)$$

Lorsque  $\mathcal{W}$  est le faisceau des sections d'un fibré vectoriel holomorphe, elle s'identifie à la fibre classique. Le morphisme d'évaluation  $ev_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathcal{W}(x)$  est le passage au quotient modulo  $\mathfrak{m}_x \mathcal{W}_x$ .

## Langage des catégories

**Définition 0.0.6.** Une catégorie  $\mathcal{C}$  est un couple  $(\text{Ob}(\mathcal{C}), F)$  où  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  est un ensemble appelé ensemble des objets et  $F$  un ensemble appelé ensemble des flèches, muni des objets suivants :

1. Deux application  $s : F \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $t : F \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$  appelée sources et but.
2. Une identité  $Id : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow F$  qui à  $C \in \mathcal{C}$  associe l'identité  $Id_C \in F$ .
3. Pour  $f, g \in F$  tels que  $t(f) = s(g)$ , une composition  $g \circ f \in F$  telle que  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  et  $Id_C \circ f = f$  pour tous  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $f, g, h \in F$ .

Pour tout couple  $C, C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , on note  $\text{Hom}^{\mathcal{C}}(C, C')$  l'ensemble des flèches entre  $C$  et  $C'$ , i.e l'ensemble des  $f \in F$  tels que  $s(f) = C$  et  $t(f) = C'$ .

**Définition 0.0.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  entre  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  est une flèche  $f \in F$  avec  $s(f) = A$ ,  $t(f) = B$  et telle qu'il existe une flèche inverse  $g$  i.e  $g \circ f = Id_A$  et  $f \circ g = Id_B$ . La classe d'isomorphisme de  $A$  est l'ensemble des  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  pour lesquels il existe un isomorphisme entre  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$ . L'ensemble des classes d'isomorphismes de  $\mathcal{C}$  sera notée  $[\mathcal{C}]$ .

**Définition 0.0.8.** Un foncteur  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est un couple  $\mu = (\mu_{\text{Ob}}, \mu_{\#})$  formé d'une application  $\mu_{\text{Ob}} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$  et d'une application  $\mu_{\#} : F \rightarrow F'$  telles que :

- (i) Pour tout  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\mu_{\#}(Id_C) = Id_{\mu_{\text{Ob}}(C)}$
- (ii) Pour tout  $C, C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\mu_{\#}(\text{Hom}^{\mathcal{C}}(C, C')) \subset \text{Hom}^{\mathcal{C}'}(\mu_{\text{Ob}}(C), \mu_{\text{Ob}}(C'))$

On considère la définition suivante pour l'équivalence de catégories :

**Définition 0.0.9.** Une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est un foncteur  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  tels que

- (i) L'application  $\mu_{\#}$  induit une bijection entre  $[\mathcal{C}]$  et  $[\mathcal{C}']$ . Dans ce cas,  $\mu$  est dit essentiellement surjectif.
- (ii) Si  $X, Y \in \mathcal{C}$ , alors  $\text{Hom}^{\mathcal{C}'}(\mu(X), \mu(Y)) = \mu_{\#}(\text{Hom}^{\mathcal{C}}(X, Y))$ . Dans ce cas,  $\mu$  est dit pleinement fidèle.

# Chapitre 0

## Introduction

Cette thèse a pour sujet d'étude la version méromorphe de certaines *structures géométriques holomorphes* (voir ci-dessous) sur les variétés complexes compactes  $M$ , dans le but de les classifier. Par exemple, on se demande quelles variétés complexes compactes peuvent admettre une *métrique riemannienne méromorphe* (l'analogue méromorphe d'une métrique riemannienne). Même dans le cas holomorphe, de nombreux résultats de classification contrastent avec le cas différentiable où par exemple toute variété réelle admet une métrique riemannienne.

Nous étudions les *isométries infinitésimales* de ces structures, i.e les champs de vecteurs méromorphes locaux les préservant. Plus précisément, nous nous intéressons à des structures géométriques méromorphes naturellement associées aux *géométries de Cartan méromorphes*, et en particulier aux *géométries de Cartan holomorphes branchées* introduites dans [4]. Les géométries de Cartan méromorphes sont la généralisation directe des *géométries de Cartan*, introduites par E. Cartan (par exemple dans [15]). Les liens entre les géométries de Cartan et certaines structures géométriques, qui sont induites par ces dernières, ont été approfondis par la résolution du *problème d'équivalence de Cartan*, d'abord par Cartan lui même ([16]) puis pour d'autres structures par N. Tanaka ([49]) d'abord, puis d'autres auteurs comme T. Morimoto ([40]).

Dans notre contexte, les géométries de Cartan méromorphes constituent un outil pour les preuves des résultats de classification des variétés complexes compactes admettant des structures géométriques méromorphes. Il existe en effet, dans la catégorie holomorphe, des résultats récents de classification des variétés complexes compactes admettant certains types de géométrie de Cartan holomorphe, et dont la preuve repose sur les automorphismes infinitésimaux ([7]). Notre objectif principal a été d'étendre certains de ces résultats dans la catégorie méromorphe.

Le contexte dans lequel nos résultats de classification se situent est celui où  $M$  n'admet que des fonctions méromorphes constantes. Dans [7], les auteurs prouvent qu'une géométrie de Cartan holomorphe de *type algébrique* ne peut pas exister sur  $M$  lorsque son groupe fondamental est fini.

Nous étendons partiellement le résultat ci-dessus à la catégorie méromorphe. Nous nous intéressons également à la version méromorphe du problème d'équivalence entre certaines structures géométriques holomorphes et géométries de Cartan holomorphes résolu par N. Tanaka ([49]) et T. Morimoto ([40]).

## 0.1 Structures géométriques holomorphes sur une variété complexe compacte

Il existe une grande diversité de *structures géométriques* dans les catégories différentiables et holomorphes, sur les variétés réelles et complexes. Une définition générale a été donnée par M. Gromov ([29]), mais nous nous concentrons sur deux cas particuliers. Les premières structures géométriques qui furent considérées sont les *métriques riemanniennes* et les *connexion affines* sur les variétés réelles, dans le cadre de la géométrie riemannienne. Il est maintenant classique que toute variété réelle admet ces deux types de structures (voir par exemple [36], Théorème I.5.7 et Théorème II.2.1).

Les premiers résultats de classification partiels des variétés riemanniennes ont été obtenus par les travaux de B. Riemann, W. Killing et H. Hopf. Ils se sont concentrés sur les variétés riemanniennes *localement homogènes* : les *isométries infinitésimales locales* au voisinage d'un point de la variété agissent transitivement via leurs flots locaux. En dimension 2, cela équivaut à une *courbure constante*, et une surface riemannienne réelle complète et simplement connexe de courbure sectionnelle constante est isométrique à l'un des modèles homogènes suivant : la sphère pour la courbure positive, l'espace euclidien pour la courbure nulle et l'espace hyperbolique pour la courbure négative. En dimension  $n \geq 2$ , une variété riemannienne complète simplement connexe et localement homogène est *homogène* : il existe un groupe  $G$  d'isométries agissant transitivement sur  $M$  (Corollaire I. 2.3.13, [53]). Dans l'étude de ces structures, les notions d'*isométries* et d'*isométries infinitésimales* ont donc une place importante.

D'autres exemples sont apparus avec la définition d'une géométrie proposée par F. Klein dans le cadre de son célèbre programme. Une *géométrie de Klein* (complexe) est un couple  $(G, P)$  formé d'un groupe de Lie (complexe)  $G$  et d'un sous-groupe de Lie (complexe)  $P$  de  $G$ . L'espace homogène  $G/P$  est alors une variété réelle (complexe), et  $G$  agit transitivement sur  $G/P$  en préservant une structure géométrique (holomorphe). En effet,  $G/P$  est l'espace de base d'un fibré  $P$ -principal (holomorphe)  $G \rightarrow G/P$ , dont l'espace total est muni d'une forme (holomorphe)  $P$ -équivariante à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  : la forme de *Maurer-Cartan* de  $G$ . La présence de cette dernière implique que le fibré tangent (holomorphe)  $T(G/P)$  est isomorphe au fibré vectoriel (holomorphe) associé à  $G$  et la représentation adjointe quotient  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . En notant  $P'$  le noyau de cette représentation et  $Q$  son image, on obtient que le fibré des repères (holomorphes)  $R^1(G/P)$  admet une réduction (holomorphe)  $G/P'$  au sous-groupe  $Q$ . Il s'agit d'un autre type de structure géométrique (holomorphe), appelé *Q-structure (holomorphe)* et introduit par Chern (voir aussi [34]). Pour certaines géométries de Klein  $(G, P)$ , la variété  $G/P$  est équipée d'une structure géométrique plus riche : par exemple une connexion affine si  $G$  est le groupe affine et  $P$  le sous-groupe linéaire. Dans tous les cas, l'action de  $G$  sur  $G/P$  préserve la structure géométrique, qui est dite *homogène*.

La topologie et certains invariants de l'espace homogène  $G/P$  d'une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  dépendent de  $G$  et de  $P$ , et donc de la structure géométrique holomorphe induite. Dans [10], A. Borel montre par exemple que si  $G$  est semi-simple, alors  $G/P$  est compacte si et seulement si  $P$  contient un sous-groupe de Borel. De plus, dans [11], A. Borel et F. Hirzebruch prouvent que la structure des algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{p}$  de  $G$  et de  $P$  implique des relations entre les classes caractéristiques de  $T(G/P)$ .

En général, un théorème de N. Steenrod ([47], Corollaire 12.6) montre que pour beaucoup de sous-groupes fermés  $H \subset GL_n(\mathbb{R})$ , le fibré des repères  $R^1(M)$  d'une variété réelle  $M$  peut

être réduit au sous-groupe  $H$ . En particulier, c'est le cas pour le groupe orthogonal et toute variété réelle admet une métrique riemannienne.

La situation est différente dans la catégorie holomorphe. Il est par exemple prouvé dans [21] qu'une surface complexe compacte équipée d'une *métrique riemannienne holomorphe* (analogue holomorphe d'une métrique riemannienne) possède une courbure sectionnelle identiquement nulle. Cela a été généralisé en toute dimension dans [5]. En particulier, cela implique que son groupe fondamental est infini. On peut également citer les travaux de M. Inoue et S. Kobayashi ([32]) sur les surfaces complexes compactes munies d'une connexion affine holomorphe : ces dernières sont toutes revêtues par un tore complexe.

## 0.2 Géométries de Cartan et problème d'équivalence

D'autres exemples de structures géométriques holomorphes sur une variété complexe sont induites par des versions infinitésimales des géométries de Klein. Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur une variété complexe  $M$  est un couple  $(E, \omega)$  où  $E \xrightarrow{P} M$  est un fibré  $P$ -principal holomorphe et  $\omega$  une 1-forme sur  $E$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , avec des propriétés similaires à celle de la forme de Maurer-Cartan de  $G$ . Un tel objet définit canoniquement une  $Q$ -structure holomorphe sur  $M$ . Il existe donc une application  $f$  des  $(G, P)$ -géométries de Cartan vers les  $Q$ -structures holomorphes. Cette dernière préserve les isomorphismes des deux catégories (voir Théorème 1.6.1). Par exemple, en considérant le groupe  $G$  des transformations euclidiennes de  $\mathbb{C}^n$  et  $P$  le sous-groupe orthogonal, l'ensemble des  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes sur une variété complexe  $M$  est en bijection avec l'ensemble des connexions affines holomorphes  $\nabla$  préservant une métrique riemannienne holomorphe  $g$  sur  $M$  (au sens  $\nabla(g) = 0$ ). L'application  $f$  est alors le foncteur d'oubli de la connexion affine. Tous ces faits sont vrais dans la catégorie différentiable et en remplaçant les groupes de Lie complexes par leurs analogues réels.

Ces objets ont été introduits par E. Cartan dans la catégorie différentiable. Dans cette catégorie, et pour la plupart des modèles  $(G, P)$ , l'existence d'un tel objet sur une variété réelle  $M$  est assurée par des arguments similaires à ceux prouvant l'existence d'une connexion principale différentiable sur un fibré principal. Par exemple, il existe toujours une métrique riemannienne différentiable  $g$  sur toute variété réelle, et un tel objet définit canoniquement une connexion affine différentiable  $\nabla$  sans torsion et telle que  $\nabla(g) = 0$  : sa *connexion de Levi-Civita*.

En revanche, dans la catégorie holomorphe, l'application  $f$  évoquée ci-dessus n'est pas surjective en général, et certaines  $Q$ -structures holomorphes ne sont pas induites par une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe. Il existe de nombreux résultats qui prouvent que l'existence d'une géométrie de Cartan holomorphe apporte des restrictions sur la variété complexe compacte support. Par exemple, dans [38], B. McKay prouve que si  $M$  est une variété complexe kählérienne, l'existence d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M$  impose les mêmes relations sur ses classes de Chern que sur le modèle  $G/P$ .

Les géométries de Cartan ont également été utilisées par E. Cartan pour résoudre le problème de l'équivalence locale de deux  $H$ -structures (réelles ou complexes) sur deux variétés (réelles ou complexes, voir [16]). Comme les  $H$ -structures sont étudiées au voisinage d'un point de la variété support, les  $H$ -structures pouvaient être réduites à un sous-groupe  $Q$ , associé comme précédemment à une géométrie de Klein  $(G, P)$ . Le problème était donc ramené à celui de l'équivalence locale pour les  $Q$ -structures. La première étape de la résolution

est la *prolongation* de ces  $Q$ -structures. Dans [46], I. Singer et S. Sternberg ont reformulés de manière globale cette étape, en utilisant le formalisme des fibrés principaux. En particulier, l'étape de prolongation peut se décrire comme le fait d'associer à une  $Q$ -structure  $\tilde{E}$  sur une variété complexe  $M$ , une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan avec une propriété particulière (voir Chapitre III). En particulier, les automorphismes infinitésimaux de la  $Q$ -structure sont en bijection avec les automorphismes infinitésimaux de la  $(G, P)$ -géométrie de Cartan correspondante.

Cette méthode a été étendue pour de nombreuses  $H$ -structures, d'abord par E. Cartan lui même puis par N. Tanaka (voir par exemple [49]). Elle est reprise pour des structures plus générales par T. Morimoto dans [40]. Ces structures seront appelées  $G_0^\#$ -structures  $\mathfrak{g}_-$ -régulières holomorphes dans cette thèse. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_-$  est une algèbre de Lie complexe graduée négativement, et  $G_0^\#$  est un sous-groupe complexe du groupe de ses automorphismes préservant la filtration correspondante, et dont le sous-groupe des éléments préservant la graduation est noté  $G_0$ .

### 0.3 Rôle des automorphismes infinitésimaux dans la classification

La classification des structures géométriques holomorphes est souvent plus simple sous l'hypothèse qu'elles sont localement homogène, comme nous avons vu pour les métriques riemanniennes holomorphes. Il existe également des résultats de classification concernant les structures géométriques holomorphes *quasi-homogènes*, i.e localement homogènes en restriction à un ouvert dense. Cela est vérifié par les structures géométriques holomorphes *rigides* sur les variétés complexes compactes  $M$  de *dimension algébrique nulle* (i.e dont les fonctions méromorphes sont constantes) grâce au Théorème 2 de [23].

Lorsque  $M$  est simplement connexe, dans certains cas, une structure géométrique holomorphe localement homogène sur  $M$  est homogène sur un ouvert dense dans  $M$ , sous l'action d'un groupe de Lie  $L$  : on dit qu'elle est *quasi-homogène*. Notamment, on peut utiliser qu'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe localement homogène sur  $M$  est quasi-homogène, car le faisceau des automorphismes infinitésimaux d'une telle géométrie est un système local : un germe d'automorphisme infinitésimal s'étend donc en un automorphisme infinitésimal global sur  $M$ . Cela découle par exemple directement de la description donnée dans [42] des automorphismes infinitésimaux, et remonte à un résultat de Nomizu ([41]) dans le contexte des métriques riemanniennes analytiques. En particulier, une structure géométrique holomorphe induite par une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe quasi-homogène sur  $M$  est quasi-homogène car les automorphismes infinitésimaux de la géométrie de Cartan sont des isométries infinitésimales de la structure géométrique.

Dans le cas ci-dessus, l'action infinitésimale des automorphismes infinitésimaux globaux de la  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe s'intègre en une action holomorphe d'un groupe de Lie complexe  $L$ , agissant par automorphismes de la géométrie (et donc de la structure géométrique induite) avec une orbite ouverte et dense dans  $M$ . La preuve se ramène à classifier les structures géométriques rigides sur une variété compacte  $M$  (réelle ou complexe), possédant une action d'un groupe de Lie par isométries de cette structure, et avec une orbite ouverte dense dans  $M$ .

Les différentes étapes de la méthode présentée ci-dessus sont illustrées par le résultat principal de [7], prouvant qu'une variété complexe compacte  $M$ , dont les fonctions méro-

morphes sont constantes, et admettant une géométrie de Cartan holomorphe  $(E, \omega)$  de *type algébrique*, possède un groupe fondamental infini. La preuve est faite en raisonnant directement sur les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes : l'homogénéité locale est obtenue par un analogue du résultat pour les structures géométriques holomorphes rigides ([22]). Comme indiqué ci-dessus, lorsque  $M$  est simplement connexe, cela implique qu'il existe une famille d'automorphismes infinitésimaux globaux sur  $M$ , transitive sur un ouvert dense dans  $M$ . Il est alors prouvé dans le contexte de [7] que cette famille peut être choisie commutative, et s'intègre en une action d'un groupe de Lie abélien avec une orbite ouverte dense dans  $M$ . La troisième étape est donc de classifier les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes sur une variété complexe compacte, simplement connexe munies d'une action par automorphismes d'un groupe de Lie abélien  $L$ . Elle est obtenue en prouvant que la courbure de la géométrie de Cartan holomorphe est identiquement nulle. Dans ce cas, le résultat de classification est que  $M$  est biholomorphe à  $G/P$ , et n'existe pas d'exemple de dimension algébrique nulle.

## 0.4 Structures géométriques et géométries de Cartan méromorphes

La notion de structure géométrique holomorphe au sens de Gromov, et donc en particulier celle de  $H$ -structure holomorphe et de connexion affine méromorphe, s'étend naturellement à la catégorie méromorphe (voir [23]). En particulier, lorsque  $H$  est un sous-groupe complexe de  $GL_n(\mathbb{C})$  et  $(M, D)$  est une *paire*, formée d'une variété complexe  $M$  et d'un diviseur  $D$  sur  $M$ , on a la notion de  $H$ -structure méromorphe sur  $(M, D)$  (Définition 1.2.7). De même, si  $(G, P)$  est une géométrie de Klein complexe, alors la notion de géométrie de Cartan holomorphe s'étend naturellement en celle de  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  (Définition 1.5.6). Le foncteur  $f$  décrit dans la catégorie holomorphe s'étend naturellement entre ces deux nouvelles catégories.

Cependant, le passage de la catégorie holomorphe à la catégorie méromorphe apporte des différences. Soit  $Q = \underline{ad}(P)$  le sous-groupe associé précédemment à  $(G, P)$ . Même si toute  $Q$ -structure holomorphe sur une variété complexe est l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur cette dernière, il se peut que certaines  $Q$ -structures méromorphes ne soit l'image d'aucune  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe. Cela nous amènera à définir un objet qui permet de caractériser les structures géométriques méromorphes appartenant à l'image d'une géométrie de Cartan méromorphe : les  *$Q$ -extensions méromorphes* (Définition 1.2.1). Il existe alors un foncteur analogue à celui de la catégorie holomorphe (Théorème 1.6.1). Les propriétés de ce foncteur seront détaillées dans le chapitre 1.

Pour illustrer ces propos, mentionnons que certaines *métriques riemanniennes méromorphes* (i.e l'analogue méromorphe des métriques riemanniennes holomorphes, voir Définition 1.2.8) ne sont l'image d'aucune géométrie de Cartan méromorphe modelée sur la géométrie de Klein euclidienne complexe. La raison principale est l'absence de bases orthonormées méromorphes au voisinage d'un point des pôles de la métrique (voir Exemple 1.6.1).

## 0.5 Résultats de la thèse

### 0.5.1 Propriété d'extension des champs de Killing et dimension algébrique nulle

Comme annoncé, l'objectif principal de la thèse est d'étendre le résultat de [7] à certaines géométries de Cartan méromorphes. La première différence apparaît lorsque l'on cherche à

prouver l'existence d'une famille d'automorphisme infinitésimaux globaux. En effet, le résultat de prolongement des germes d'automorphismes infinitésimaux n'est valable que pour une géométrie de Cartan holomorphe sur une variété complexe simplement connexe. Si  $(E, \omega_0)$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire, alors on peut considérer la géométrie de Cartan holomorphe obtenue par restriction à la variété complexe  $M \setminus D$ , non simplement connexe en général. La monodromie du système local correspondant n'est en général pas triviale (voir [Exemple 3.3.1](#)). Dans le Chapitre IV, nous dirons qu'une géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur une variété complexe compacte  $M$  vérifie la *propriété d'extension des champs de Killing* si cette monodromie est toujours triviale et si les automorphismes infinitésimaux sont toujours des sections méromorphes du fibré tangent.

Nous donnerons alors des conditions géométriques suffisantes pour obtenir cette propriété. Plus précisément, nous définissons dans le [chapitre 1](#) la notion de géométrie de Cartan méromorphe *totale-ment géodésique* et *holomorphiquement totale-ment géodésique* sur une paire  $(M, D)$  (voir [Définition 1.7.2](#)). Cela est défini en terme des feuilletages  $\mathcal{T}_A$  de  $E$  en courbes  $A$ -distinguées, i.e dont le fibré tangent s'envoie dans  $\mathbb{C}A$  via  $\omega_0$ , où  $A \in \mathfrak{g}$ .

Il s'agit d'une condition naturelle si l'on pense au modèle affine  $(G, P) = (\text{Aff}(\mathbb{C}^n), \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ . En effet, dans ce cas, une géométrie de Cartan méromorphe correspond à une connexion affine méromorphe  $\nabla$  sur  $M$  avec pôles supportés en  $D$ . La géométrie est *holomorphiquement totale-ment géodésique* si et seulement si il existe un sous-ensemble dense  $W \subset D$  telle qu'en chaque point  $x \in W$ , il existe une *géodésique holomorphe paramétrée*  $\bar{\Sigma}$  pour  $\nabla$  avec  $\bar{\Sigma} \cap D = \{x\}$ . Si de plus  $\nabla$  est sans torsion, un résultat classique de géométrie différentielle montre qu'au voisinage de tout point  $x$  comme précédemment, il existe une base locale de  $TM[\star D]$  telle que les coordonnées d'un champ de Killing pour  $\nabla$  sont constantes le long de  $\bar{\Sigma}$ . Une telle structure géométrique méromorphe vérifie donc la propriété locale d'extension des champs de Killing.

Plus généralement, les automorphismes infinitésimaux d'une géométrie de Cartan  $(E, \omega_0)$  correspondent aux sections parallèles d'une connexion méromorphe  $(\mathcal{V}, \nabla_{\omega_0}^{\kappa})$  sur  $E$  : la *connexion de Killing*. Lorsque la géométrie est totale-ment géodésique, il existe un sous-ensemble  $W$  dense dans  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$  dont les points appartiennent à des feuilles  $\mathcal{T}_A$  traversant le diviseur  $\tilde{D}$ , pour un certain  $A \in \mathfrak{g}$ .

Pour chaque  $A \in \mathfrak{g}$ , la connexion  $\mathcal{T}_A$ -partielle induite par la connexion de Killing préserve le sous-module  $\mathcal{V}_A = \mathcal{O}_E A$ . Elle induit donc une connexion  $\mathcal{T}_A$ -partielle  $(\mathcal{V}_{A^\perp}, \nabla_A)$ , où  $\mathcal{V}_{A^\perp} = \mathcal{O}_E \otimes A^\perp$  et  $A^\perp$  est un supplémentaire arbitraire de  $\mathbb{C}A$ . Nous étudions alors les sections parallèles de ces connexions  $\mathcal{T}_A$ -partielles et prouvons :

**Proposition 4.3.2.1.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ , holomorphiquement totale-ment géodésique ([Définition 1.7.2](#)). Soit  $e_0 \in \tilde{D}$  tel qu'il existe une courbe  $A$ -distinguée  $\Sigma$  avec  $\Sigma \cap \tilde{D} = \{e_0\}$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $e_0$  avec les faits suivants :*

1. *Pour tout  $e \in U \setminus \tilde{D}$ , l'automorphisme  $\mu \in \text{GL}(\mathfrak{g})$  image d'un lacet  $[\gamma] \in \pi_1(U \setminus \tilde{D}, e)$  par la monodromie de la connexion de Killing en  $e$  (voir [Définition 3.3.1](#)) vérifie :*

$$\pi_{A^\perp} \circ \mu = \pi_{A^\perp} \tag{4.1}$$

où  $\pi_{A^\perp}$  est la projection sur  $\mathcal{V}_{A^\perp}$  parallèlement au sous-module  $\mathcal{O}_E A \subset \mathcal{V}$ , et l'orthogonal  $A^\perp$  est pris pour un produit hermitien quelconque sur  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ .

2. Pour tout ouvert  $V \subset U$  une section de  $\pi_{A^1}(\ker(\nabla_{\omega_0}^k))$  sur  $V \setminus \tilde{D}$  est la restriction d'une section de  $\mathcal{V}_{A^1}[\star\tilde{D}]$  sur  $V$ . Supposons de plus que  $(E, \omega_0)$  est une géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors, une section comme précédemment est la restriction d'une section de  $\mathcal{V}_{A^1}$  sur  $V$ .

Ce résultat sera appliqué aux modèles *paraboliques*  $(G, P)$ , i.e  $G$  est un groupe semi-simple et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  (Définition 1.4.12). En effet, dans ce contexte nous disposons de la généralisation directe d'un résultat de A.Căp ([13]) qui montre que la projection sur un sous-module  $\mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}_{-k}$  (où  $k$  est le *degré parabolique* de  $(G, P)$ ) d'une section horizontale pour  $\nabla_{\omega_0}^k$ , détermine complètement cette section (voir Théorème 3.4.2). En étudiant les courbes distinguées pour le degré  $k = 1$  avec  $G$  simple, et pour le degré  $k > 1$  en général, nous en déduisons respectivement :

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $M$  une variété complexe,  $D$  un diviseur effectif. Soit  $(G, P)$  un modèle parabolique de degré  $k = 1$  avec  $G$  simple, et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe et totalement géodésique sur  $(M, D)$  (Définition 1.7.2). Alors :*

1.  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing.
2. Supposons de plus que  $(E, \omega_0)$  est branchée. Soit  $e_0 \in \tilde{V}$  appartenant à une composante irréductible  $\tilde{D}_\alpha$ ,  $U_{e_0}$  un voisinage de  $e_0$  dans  $E$  et  $s$  une section horizontale de  $\nabla_{\omega_0}^k$  sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ . Alors  $s$  est la restriction d'une section holomorphe de  $\mathcal{V}$  sur  $U_{e_0}$ .

et :

**Théorème 4.4.3.** *Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$  et  $D$  un diviseur effectif. Soit  $(G, P)$  un modèle parabolique de degré  $k > 1$ , de dimension  $n$ , et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée régulière (Définition 2.2.4) et totalement géodésique (Définition 1.7.2) sur  $(M, D)$ . Alors  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing.*

Nous retrouvons donc pour ces modèles la propriété d'extension des champs de Killing. Pour conclure, nous prouverons le Lemme 3.5.1.1, qui décrit les pôles et zéros de ces champs de vecteurs lorsque  $(G, P)$  est le modèle affine et la géométrie est *holomorphe branchée* (un cas particulier de géométrie de Cartan méromorphe introduit dans [4]). Nous obtiendrons alors la généralisation suivante du théorème de [7] :

**Théorème 4.5.3.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension algébrique nulle. Soit  $D$  un diviseur de  $M$ . Soit  $(G, P)$  un modèle affine de dimension  $n = \dim(M)$ . Supposons que  $M$  admet une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée. Alors  $\pi_1(M)$  est infini ou  $(E, \omega_0)$  n'est pas totalement géodésique (voir Définition 1.7.2).*

Notons que l'action infinitésimale des automorphismes infinitésimaux globaux obtenus ne s'intègre pas en l'action d'un groupe de Lie sur  $M$ . La preuve utilise un résultat de [6] où les *parallélismes rationnels branchés* sont classifiés.

### 0.2.3 Problème d'équivalence méromorphe et géométries de Cartan branchées

Dans le chapitre 2, nous avons étendu la résolution du problème d'équivalence pour les  $G_0^\#$ -structures holomorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières (voir plus haut) à la catégorie méromorphe. Nous devons faire une distinction avec le cas holomorphe car il y a une équivalence non pas avec des catégories de structures géométriques méromorphes, mais avec des catégories de  $G_0^\#$ -extensions méromorphes (voir plus haut).

Il existe comme dans la catégorie holomorphe une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  naturellement associée à  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  et un foncteur  $f^\#$  de la catégorie des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes régulières vers celle des  $G_0^\#$ -extensions  $\mathfrak{g}_-$ -régulières. Il s'obtient comme une composée d'un foncteur  $f$  de la première catégorie vers celle des  $Q$ -extensions méromorphes *normales* (voir [Définition 2.2.5](#)), par un foncteur  $\mu^\#$  correspondant à la réduction de toute  $G_0^\#$ -extension  $\mathfrak{g}_-$ -régulière à une  $Q$ -extension normale. Nous définissons une sous-catégorie de  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes régulières, dites *normales*, et prouvons :

**Theorème 0.2.1.** *Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple comme dans la [sous-section 2.2.1](#),  $(G, P)$  la géométrie de Klein associée et  $\mu^\#$  le foncteur de la [Définition 2.2.6](#). Le foncteur  $\mu^\#$  est une équivalence de catégories. En particulier,  $f^\# = \mu^\# \circ f$  est une équivalence de catégories entre celle des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes normales et celle des  $G_0^\#$ -extensions méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières.*

Une question naturelle concernant les structures géométriques méromorphes sur une paire  $(M, D)$  est de savoir si leurs isométries infinitésimales préservent un sous-module  $\mathcal{E} \subset TM[\star D]$ . Pour les  $G_0^\#$ -structures  $\mathfrak{g}_-$ -régulières, cela revient à déterminer celles qui proviennent d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée et normale sur  $(M, D)$ . Nous donnons une caractérisation de ces dernières (voir [Théorème 2.3.1](#)).

Nous donnons des exemples de telle structures provenant d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée, mais n'admettant aucun représentant normale dans la catégorie précédente. Nous donnons par exemple une métrique riemannienne méromorphe sur  $(M, D)$ , où  $M = \Sigma \times \Sigma$  est un produit de surfaces de Riemann hyperelliptiques, dont la restriction à un sous-module  $\mathcal{E} \subset TM[\star D]$  est holomorphe, mais dont la connexion de Levi-Civita ne préserve aucune extension méromorphe de  $TM$  : il s'agit de l'[Exemple 2.3.2](#).

## 0.2.4 Plan de la thèse

Dans le [chapitre 1](#), nous définirons d'abord les *structures géométriques méromorphes* selon M. Gromov. Nous commencerons par rappeler des faits classiques sur les fibrés principaux et les connexions principales. Cela permettra d'introduire l'analogie méromorphe des *H-structures*, en particulier les *métriques riemanniennes méromorphes*, et des connexions affines. Nous définirons ensuite les *géométries de Klein complexes* en donnant deux exemples importants : les *géométries paraboliques complexes* ([Définition 1.4.16](#)) et les *prolongations de Tanaka* ([Définition 1.4.17](#)). Ces exemples s'intersectent en de nombreuses géométries de Klein, et ont la particularité d'être *gradués* ([Définition 1.4.21](#)). Ils nous interviendront au [chapitre 2](#). Nous définirons ensuite les *géométries de Cartan méromorphes* ([Définition 1.5.6](#)) et des objets importants dans leur étude. Nous caractérisons ensuite les *Q-structures méromorphes* induites par les objets précédents, en introduisons les *Q-extensions méromorphes* ([Définition 1.6.1](#)).

Dans le [chapitre 2](#), nous résolvons le problème d'équivalence de Cartan méromorphe associées à des versions généralisées des structures étudiées par N.Tanaka dans [\[49\]](#). Cela est divisé en deux résultats : la résolution du problème d'équivalence méromorphe pour les  $Q$ -structures méromorphes régulières normales (voir [Définition 2.2.5](#)) avec le [Théorème 2.2.2](#), et la réduction de toute  $G_0^\#$ -structure méromorphe régulière à une  $Q$ -structure méromorphe normale avec le [Corollaire 2.2.1](#). Nous donnons également des contre-exemples pour prouver que le processus de normalisation qui est utilisé dans la résolution de ce problème ne préserve pas la sous-catégorie des géométries de Cartan holomorphes branchées, en parti-

culier l'exemple [Exemple 2.3.2](#). Pour cela, nous utilisons une caractérisation locale des  $G_0^\#$ -structures méromorphes régulières qui proviennent d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale : le [Corollaire 2.3.1](#).

Dans le [chapitre 3](#), nous étudions la propriété d'extension des automorphismes infinitésimaux ([Définition 3.2.4](#)) pour certaines géométries de Cartan méromorphes paraboliques totalement géodésiques ([Théorème 3.4.1](#) et [Théorème 3.4.3](#)). Nous l'appliquons pour prouver une extension du théorème principal de [\[7\]](#) dans la catégorie méromorphe, lorsque la géométrie de Klein modèle  $(G, P)$  est la géométrie affine ([Théorème 3.5.3](#)).

# Chapitre 1

## Géométries de Cartan méromorphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les *géométries de Cartan méromorphes* et décrivons les *structures géométriques méromorphes* qu'elles induisent. Ces objets vivent sur les *paires* :

**Définition 1.0.1.** *Une paire est un couple  $(M, D)$  où  $M$  est une variété complexe et  $D$  un diviseur de cette dernière.*

Nous commençons par rappeler la définition analogue à celle de M.Gromov ([29],[24]) des *structures géométriques méromorphes*, en rappelant des faits élémentaires sur les fibrés principaux. Nous décrivons les deux exemples principalement étudiés dans cette thèse : les *H-structures méromorphes* pour un sous-groupe linéaire complexe  $H$  et les *connexions méromorphes affines*.

### 1.1 Fibrés principaux et structures géométriques méromorphes

Dans la première section, nous rappelons des faits élémentaires à propos des fibrés principaux holomorphes. Nous rappelons notamment la notion de *linéarisation* d'un faisceau, et la correspondance entre les faisceaux linéarisés sur l'espace total d'un fibré principal et les faisceaux sur la variété base. Nous rappelons ensuite la définition des *structures géométriques méromorphes* selon M. Gromov.

#### 1.1.1 Fibrés principaux

Soit  $M$  une variété complexe, et  $P$  un groupe de Lie réel (resp. complexe). Un *fibré  $P$ -principal différentiable* (resp. *holomorphe*)  $E \xrightarrow{p} M$  est un fibré différentiable (resp. holomorphe) sur  $M$  muni d'une action à droite différentiable (resp. holomorphe) de  $P$ , préservant les fibres de  $p$ , libre et transitive sur les fibres de  $p$ . L'action d'un élément  $b \in P$  sera notée  $r_b$ . Dans le reste de cette section,  $\mathcal{R}_E$  et  $\mathcal{R}_M$  désigneront respectivement  $\mathcal{O}_E$  et  $\mathcal{O}_M$  si  $E$  est holomorphe, ou  $\mathcal{O}_E^\infty$  et  $\mathcal{O}_M^\infty$  si il est différentiable.

Un *morphisme* de fibrés  $P$ -principaux différentiables (resp. holomorphes) entre  $E \xrightarrow{p} M$  et  $E' \xrightarrow{p'} M'$  est un morphisme de variétés différentiables (resp. complexes)  $\Psi : E \rightarrow E'$  vérifiant  $\Psi \circ r_b = r_b \circ \Psi$ . En particulier, il existe un morphisme  $\varphi : M \rightarrow M'$  faisant commuter

le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} \quad (1.1)$$

L'action de  $P$  sur l'espace total  $E$  d'un fibré  $P$ -principal différentiable ou holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  induit naturellement une identification des espaces tangents  $T_e p^{-1}(x)$  à la fibre  $p^{-1}(x)$  d'un point  $x \in M$ , avec  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ . En effet, on définit les *champs fondamentaux*  $\tilde{v}$  de la fibre en  $x$  par la formule :

$$\forall v \in \mathfrak{p}, \tilde{v}(e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e \cdot \exp_{Id} tv \quad (1.2)$$

Les champs fondamentaux engendrent  $T_e p^{-1}(x)$  pour tout  $e \in p^{-1}(x)$ , car l'action de  $P$  est transitive sur cette fibre. La formule (1.2) définit donc un isomorphisme  $\mathfrak{p} \rightarrow T_e p^{-1}(x)$  qui à  $v$  associe  $\tilde{v}$ .

**Définition 1.1.1.** *Soit  $E$  comme ci-dessus.*

1. L'unique 1-forme  $\omega_{P,x}$  sur  $p^{-1}(x)$ , à valeurs dans  $\mathfrak{p}$  telle que pour tout  $e \in p^{-1}(x)$ ,  $\omega_{P,x}(e)(\tilde{v}) = v$  pour tout  $v \in \mathfrak{p}$  et  $\tilde{v}$  comme dans (1.2), est appelée *forme de Maurer-Cartan* de la fibre de  $x \in M$ . On notera  $\iota_x$  l'inclusion de  $p^{-1}(x)$  dans  $E$ .
2. On définit  $\omega_{P,E} : \ker(dp) \rightarrow \mathcal{R}_E \otimes \mathfrak{p}$  comme l'isomorphisme de  $\mathcal{R}_E$ -modules coïncidant avec (le morphisme correspondant à)  $\omega_{P,x}$  en restriction à  $p^{-1}(x)$ .

Toute section holomorphe (resp. différentiable)  $\sigma : U \rightarrow E$  sur un ouvert  $U \subset M$  définit une trivialisatation :

$$\begin{array}{ccc} \psi_\sigma & : & E|_U \rightarrow U \times P \\ & & b \rightarrow (p(e), p_e) \end{array} \quad (1.3)$$

où  $p_e \in P$  est l'unique élément tel que  $\sigma(p(e)) \cdot p_e = e$ . La trivialisatation (1.3) est un morphisme de  $P$ -fibrés principaux holomorphes (resp. différentiables) sur  $U$ . Si  $\sigma, \sigma'$  sont deux sections holomorphes (resp. différentiables) sur  $U$ , il existe  $b : U \rightarrow P$  holomorphe (resp. différentiable) telle que  $\sigma' = \sigma \cdot b$ . Alors :  $\psi'_\sigma = (Id_U, r_b) \circ \psi_\sigma$ .

Puisque l'action de  $P$  sur  $E$  est libre et transitive sur les fibres, il existe au voisinage de tout  $x \in M$  une section comme précédemment. On peut donc définir de manière équivalente un  $P$ -fibré principal holomorphe (différentiable) comme un fibré en groupes  $P$  munis de trivialisatations holomorphes (différentiables) locales. Il y a donc bijection entre les classes d'isomorphismes fibrés  $P$ -principaux holomorphes (resp. différentiables) sur  $M$  et les cocycles  $(\gamma_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta} \in \check{H}^1(M, \mathcal{R}_M \otimes P)$ .

Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe (resp. différentiable). Soit  $F$  une variété complexe (resp. réelle) munie d'une action à gauche de  $P$ . Le fibré  $E \times F$  est muni d'une action à droite de  $P$  définie par  $(e, f) \cdot p = (e \cdot p, p^{-1}f)$ . Le quotient sera noté

$$E \times_P F = (E \times F) / P \quad (1.4)$$

Ses éléments sont les classes  $[(e, f)]$  des couples  $(e, f) \in E \times F$  modulo l'action précédente. Prenons le cas particulier d'une représentation  $\rho : P \rightarrow GL(\mathbb{V})$ . Dans ce cas  $P$  agit par  $p \cdot v = \rho(p)(v) \in \mathbb{V}$ . Le fibré vectoriel  $E \times_P \mathbb{V}$  sera appelé *fibré représentation* de  $\mathbb{V}$ .

Soit  $V$  un fibré vectoriel complexe (resp. réel) de rang  $n$  sur une variété complexe (resp. réelle)  $M$  et  $\mathcal{E}$  le  $\mathcal{R}_M$ -module localement libre de ses sections (holomorphes ou différentiables).

Notons, pour  $x \in M$ ,  $Iso(\mathbb{K}^n, \mathcal{E}(x))$  l'ensemble des isomorphismes entre  $\mathcal{E}(x)$  et  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). L'ensemble

$$R(\mathcal{E}) = \{(x, b) | x \in M, b \in Iso(\mathbb{K}^n, \mathcal{E}(x))\} \quad (1.5)$$

est une variété (réelle ou complexe) fibrée sur  $M$ . Nous notons  $p_R$  la projection associée, i.e  $p_R(x, b) = x$ . Elle est munie d'une structure de fibré  $GL_n(\mathbb{K})$ -principal holomorphe (différentiable) sur  $M$  car il existe localement des bases du  $\mathcal{R}_M$ -module  $\mathcal{E}$ , i.e des sections holomorphes (différentiables) de  $R(\mathcal{E})$ .

**Définition 1.1.2.** *Le fibré  $GL_n(\mathbb{C})$ -principal holomorphe (resp. différentiable)  $R(\mathcal{E})$  sera appelé fibré des base de  $\mathcal{E}$ .*

Les fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe  $M$  forment une catégorie dont les flèches sont les *isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes*. En terme de faisceaux des sections holomorphes, un isomorphisme de fibrés vectoriels se traduit de la façon suivante :

**Définition 1.1.3.** *Soient  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  respectivement un  $\mathcal{O}_{M_1}$ -module et un  $\mathcal{O}_{M_2}$ -module localement libres. Un isomorphisme de fibrés vectoriels entre  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est un couple  $(\varphi, \Phi)$  où  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  est un biholomorphisme et  $\Phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \varphi^* \mathcal{V}_2$  un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{M_1}$ -modules.*

Notons que tous les faits de cette sous-section sont valables lorsque l'on remplace  $P$ ,  $M$  et  $E$  par des variétés différentiables, et les  $\mathcal{O}_M$ -modules par les faisceaux des sections différentiables.

### 1.1.2 Faisceaux linéarisés sur un fibré principal

Soit  $M$  une variété complexe et  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe. Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{R}_E$ -module sur  $E$  (voir [Notation 11](#)). Une  $P$ -action à droite de  $\mathcal{V}$  est une famille  $(\phi_b)_{b \in P}$  d'isomorphisme  $\mathcal{R}_E$ -modules  $\phi_b : \mathcal{V} \simeq r_b^* \mathcal{V}$  vérifiant la condition de cocycle :

$$\forall b_1, b_2 \in P, r_{b_2}^* \phi_{b_1} \circ \phi_{b_2} = \phi_{b_1 \cdot b_2} \quad (1.6)$$

i.e une collection d'automorphismes de fibrés vectoriels holomorphes sur  $\mathcal{V}$ , couvrant les automorphismes de  $E$  correspondant à l'action du groupe  $P$ .

**Définition 1.1.4.** *Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{R}_E$  et  $(\Psi, \Phi)$  un automorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de  $\mathcal{V}$ . Une section  $s$  de  $\mathcal{V}(U)$  est invariante par  $(\Psi, \Phi)$  si et seulement si pour tout  $V \subset U$  tel que  $\Psi(V) \subset U$ , on a  $\Phi(s) = s \circ \Psi$ . Une section  $P$ -invariante d'un  $\mathcal{R}_E$ -module  $P$ -linéarisé est une section invariante par tous les isomorphismes de fibrés vectoriels de la linéarisation.*

Lorsque  $P$  est un groupe de Lie complexe, D. Mumford ([\[26\]](#)) définit un type particulier d'action sur un  $\mathcal{R}_E$ -module : une  $P$ -linéarisation. Nous ne donnons pas la définition dans cette thèse car les linéarisations que nous considérerons seront toutes construites sur ces deux exemples :

**Définition 1.1.5.** *La linéarisation canonique  $(\psi_b)_{b \in P}$  du module trivial de rang  $r$   $\mathcal{V} = \mathcal{R}_E^{\oplus r}$  est définie sur tout ouvert  $U \subset E$  par :*

$$\begin{array}{ccc} \psi_b(U) : \mathcal{V}(U) & \longrightarrow & r_b^* \mathcal{V}(U) = \mathcal{V}(r_b(U)) \\ s & \longrightarrow & s \circ r_{b^{-1}} \end{array} \quad (1.7)$$

**Définition 1.1.6.** *La linéarisation induite par l'action de  $P$  sur l'espace total  $E$  de  $E \xrightarrow{P} M$  est la linéarisation  $(dr_b)_{b \in P}$  où  $dr_b : TE \rightarrow r_b^* TE$  est la différentielle de l'automorphisme  $r_b$  pour tout  $b \in P$ .*

Les linéarisations suivent les mêmes constructions que les  $\mathcal{R}_E$ -modules : si  $(\mathcal{V}_1, (\phi_b^1)_{b \in P})$  et  $(\mathcal{V}_2, (\phi_b^2)_{b \in P})$  sont deux linéarisations à droites sur  $E$ , alors  $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$  est équipé de la linéarisation  $(\phi^1 \otimes \phi^2)_{p \in P}$  définie comme  $(\phi^1 \otimes \phi^2)_b = \phi_b^1 \otimes \phi_b^2$ . De même pour la dualité.

**Définition 1.1.7.** *Si  $(\mathcal{V}_1, (\phi_b^1)_{b \in P})$  et  $(\mathcal{V}_2, (\phi_b^2)_{b \in P})$  sont deux  $\mathcal{R}_E$ -modules équipés d'une  $P$ -action, alors un morphisme  $P$ -équivariant est un morphisme de  $\mathcal{R}_E$ -modules  $\Phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\phi_b^1} & r_b^* \mathcal{V}_1 \\ \Phi \downarrow & & \downarrow r_b^* \Phi \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{\phi_b^2} & r_b^* \mathcal{V}_2 \end{array} \quad (1.8)$$

Les morphismes équivariants entre  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont naturellement en bijection avec les sections équivariante de  $\mathcal{V}_1^* \otimes \mathcal{V}_2$  muni de  $(\phi^{1*} \otimes \phi_b^2)_{b \in P}$ . Notons en outre que tout ce qui vient d'être dit se transpose pour une action à gauche lorsque  $E$  est une variété munie d'une action à gauche par  $P$ .

Soit  $(\mathcal{V}, \phi)$  un  $\mathcal{R}_E$ -module localement libre de rang  $n$ , équipé d'une linéarisation  $\Phi$ . Le pushforward  $p_* \mathcal{V}$  est donc un  $\mathcal{R}_M$ -module, dont la fibre au dessus d'un ouvert  $U \subset M$  est l'ensemble des sections  $s \in \mathcal{V}(p^{-1}(U))$ . La condition de cocycle (1.6) permet de définir une action de  $P$ , définie au dessus de  $U \subset M$  par :

$$\begin{array}{ccc} P \times p_* \mathcal{V}(U) & \longrightarrow & p_* \mathcal{V}(U) \\ (b, s) & \longrightarrow & \phi_b(s) \end{array} \quad (1.9)$$

où  $(\phi_b)_{b \in P}$  est la linéarisation de  $\mathcal{V}$ .

**Définition 1.1.8.** *Le module quotient de  $\mathcal{V}$  par l'action de  $P$  sur  $E$  comme le sous  $\mathcal{R}_M$ -module :  $\bar{\mathcal{V}} = (p_* \mathcal{V})^P$  de  $p_* \mathcal{V}$  des sections invariantes par l'action (1.9).*

De plus, les  $\mathcal{O}_E$ -modules localement libre et  $P$ -linéarisés sur l'espace total d'un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  forment une catégorie dont les flèches sont les isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes  $P$ -équivariants.

**Proposition 1.1.2.1.** *Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{R}_E$ -module  $P$ -linéarisé.*

1. *Le module quotient  $\bar{\mathcal{V}}$  est un  $\mathcal{R}_M$ -module localement libre de rang  $n$ .*
2. *Les applications  $\mathcal{V} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}$  et  $\bar{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{R}_E \otimes p^* \bar{\mathcal{V}}$  sont des bijections réciproques.*
3. *La bijection du point 1. s'étend en un foncteur comme suit. Soient  $E_1 \xrightarrow{p_1} M_1$  et  $E_2 \xrightarrow{p_2} M_2$  deux fibrés  $P$ -principaux holomorphes sur deux variétés complexes, et  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  respectivement un  $\mathcal{O}_{E_1}$ -module et un  $\mathcal{O}_{E_2}$ -module localement libres  $P$ -linéarisés. Soit  $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$  un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes  $P$ -équivariant entre  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$ . Son image par le foncteur est l'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes  $(\varphi, \Phi)$ , où  $\varphi$  est le morphisme couvert par  $\tilde{\Psi}$  et  $\Phi$  est la restriction de  $p_{1*} \tilde{\Phi}$  à  $\bar{\mathcal{V}}_1 \subset p_{1*} \mathcal{V}_1$ .*
4. *Pour un module linéarisé  $(\mathcal{V}, \phi)$ , il y a bijection entre les sections de  $\bar{\mathcal{V}}(U)$  et les sections de  $\mathcal{V}(p^{-1}(U))$  invariantes par  $(\phi_b)_{b \in P}$ .*

*Démonstration.* Voir [3], Chapitre II, Proposition 2.2.5. □

Soit  $\rho : P \rightarrow GL(\mathbb{V})$  une représentation.

**Définition 1.1.9.** *Le module trivial  $\mathcal{V} = \mathcal{R}_E \otimes \mathbb{V}$  est équipé de la linéarisation  $(\phi_b^{\mathbb{V}})_{b \in P}$  définie par :*

$$\phi_b^{\mathbb{V}} = \psi_b \otimes \rho(b^{-1}) \quad (1.10)$$

où  $\psi_b$  est la linéarisation de la [Définition 1.1.5](#). Le module quotient  $\bar{\mathcal{V}}$  est appelé module représentation associé à  $\mathbb{V}$ , et sera noté  $E(\mathbb{V})$ . Il s'agit du faisceau des section (différentiables ou holomorphes) de  $E \times_P \mathbb{V}$ .

Soient  $E_1 \xrightarrow{p_1} M_1$  et  $E_2 \xrightarrow{p_2} M_2$  deux fibrés  $P$ -principaux holomorphes, et  $\Psi : E_1 \rightarrow E_2$  un isomorphisme. Alors on obtient un isomorphisme de faisceaux :

$$\Psi^* : \Psi^* \mathcal{O}_{E_2} \rightarrow \mathcal{O}_{E_1} \quad (1.11)$$

correspondant à la composition à droite d'une fonction holomorphe sur  $E_2$  par  $\Psi$ .

**Définition 1.1.10.** *Dans la situation ci-dessus, et pour une représentation  $\mathbb{V}$  de  $P$ , l'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes  $\Psi(\mathbb{V})$  image de  $\Psi^* \otimes Id_{\mathbb{V}}$  par le foncteur du point 3., [Proposition 1.1.2.1](#) est appelé morphisme induit par  $\Psi$  et associé à la représentation  $\mathbb{V}$ .*

**Exemple 1.1.1.** *Si  $P$  est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie  $G$ , on a le module adjoint  $E(\mathfrak{g})$  associé à la représentation adjointe  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  (resp.  $E(\mathfrak{p})$ ).*

**Définition 1.1.11.** *Soit  $\sigma : U \rightarrow E$  une section holomorphe d'une fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$ , sur un ouvert  $U \subset M$ . Le morphisme représentation  $\psi_\sigma(\mathbb{V})$  associé à la trivialisation  $\psi_\sigma$  (voir [Équation 1.3](#)) sera appelé trivialisation du module représentation associée à  $\sigma$ .*

Cela permet de définir la notion de section méromorphe, relativement à une représentation :

**Définition 1.1.12.** *Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe,  $D$  un diviseur effectif de  $M$ . Soit  $\mathbb{V}$  un  $P$ -module. Soit  $U \subset M$  un ouvert. Une section  $\mathbb{V}$ -méromorphe de  $E$  sur  $U$  est une section holomorphe  $\sigma : U \setminus D \rightarrow E$  telle que la trivialisation  $\psi_\sigma(\mathbb{V}) : E(\mathbb{V})|_{U \setminus D} \rightarrow \mathcal{O}_{U \setminus D} \otimes \mathbb{V}$  de la [Définition 1.1.11](#) se restreint en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules.*

**Lemme 1.1.2.1.** *Soit  $P = GL_n(\mathbb{C})$  et  $\mathbb{C}^n$  la représentation canonique de  $P$ . Alors :*

1. *L'application qui à un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  associe  $\mathcal{E} = E(\mathbb{C}^n)$  induit une équivalence de catégories entre celle des fibrés  $P$ -principaux holomorphes et leurs isomorphismes, et celle des  $\mathcal{O}_M$ -modules localement libres de rang  $n$  munis des isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes. L'image d'un isomorphisme  $\Psi$  de fibrés  $P$ -principaux holomorphes est le morphisme induit  $\Psi(\mathbb{C}^n)$  de fibrés vectoriels holomorphes ([Définition 1.1.10](#)). Un pseudo-inverse est obtenu en associant à  $\mathcal{E}$  son fibrés des bases holomorphes, et à un isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes l'isomorphisme correspondant entre les fibrés des bases.*
2. *Le module représentation  $E(\mathfrak{p})$  est canoniquement isomorphe à  $End(\mathcal{E})$  dans l'équivalence ci-dessus.*

*Démonstration.* Voir [\[1\]](#), Proposition 9. □

### 1.1.3 Suite exacte d'Atiyah

Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un  $P$ -fibré principal différentiable ou holomorphe sur une variété complexe. Si  $E$  est différentiable  $TE$  et  $TM$  désigneront les faisceaux des champs de vecteurs différentiables sur  $E$  et  $M$ . L'action  $(dr_b)_{b \in P}$  sur  $TE$ , où  $dr_b : TE \rightarrow r_b^* TE$  est la différentielle faisceautique de l'action à droite  $r_p$  de  $P$  sur  $E$ , provient d'une linéarisation. Notons  $\omega_{P,E}$  la forme de Maurer-Cartan de  $E$  ([Définition 1.1.1](#)). La correspondance décrite dans la sous-section précédente s'applique à cette linéarisation pour donner une suite exacte.

**Définition 1.1.13.** *Le  $\mathcal{R}_M$ -module quotient  $At(E_P) := (p_* TE)^P$  est appelé module d'Atiyah.*

Notons :

$$q = p_* dp : At(E_P) \longrightarrow TM \quad \text{et} \quad \iota = p_* \omega_{P,E}^{-1} : E(\mathfrak{p}) \longrightarrow At(E_P) \quad (1.12)$$

Alors :

**Proposition 1.1.3.1.** *On a la suite exacte de  $\mathcal{R}_M$ -modules suivante :*

$$0 \longrightarrow E(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\iota} At(E_P) \xrightarrow{q} TM \longrightarrow 0 \quad (1.13)$$

où  $\iota$  et  $q$  sont définis par ([1.12](#)).

*Démonstration.* Voir Théorème 1., [\[1\]](#). □

Soit  $\rho_{\mathbb{V}} : P \rightarrow GL(\mathbb{V})$  une représentation, et  $(\phi_b^{\mathbb{V}})_{b \in P}$  la linéarisation à droite de  $\mathcal{V} = \mathcal{R}_E \otimes \mathbb{V}$  de la [Définition 1.1.9](#). Considérons la linéarisation  $(\psi_b^{\mathbb{V}})_{b \in P}$  sur  $\Omega_E^1 \otimes \mathbb{V} = \Omega_E^1 \otimes \mathbb{V}$  définie par  $\psi_b^{\mathbb{V}} = (dr_b^*)^{-1} \otimes \phi_b^{\mathbb{V}}$ . Alors le module quotient de  $\Omega_E^1 \otimes \mathbb{V}$  est isomorphe à  $Hom_{\mathcal{R}_M}(At(E_P), E(\mathbb{V}))$ , et :

**Corollaire 1.1.1.** *Soit  $M$  une variété complexe munie d'un diviseur  $D$  et un fibré  $P$ -principal holomorphe (resp. différentiable)  $E \xrightarrow{p} M$ . Soit  $\mathbb{V}$  comme ci-dessus. Pour tout ouvert  $U \subset M$ , on a une bijection entre :*

- les sections holomorphes (resp. différentiables, resp. méromorphes avec pôles supportés en  $D$ )  $\beta$  de  $Hom_{\mathcal{R}_M}(At(E_P), E(\mathbb{V}))$
- les 1-formes holomorphes (resp. différentiables, resp. méromorphes avec pôles supportés en  $p^{-1}(D)$ )  $\theta$  sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{V}$  qui sont équivariantes pour la linéarisation définie ci-dessus.

Cette bijection est donnée par les formules :

$$\theta = Id_{\mathcal{R}_E} \otimes p^* \beta \quad \text{et} \quad \beta = p_* \theta \quad (1.14)$$

En particulier il y a une bijection entre les sections  $\beta$  comme ci-dessus et telles que  $Im(\iota) \subset ker(\beta)$ , et les 1-formes holomorphes  $\bar{\theta} \in \Omega_M^1 \otimes \bar{\mathbb{V}}(U)$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la Proposition [1.1.2.1](#) et de l'isomorphisme

$$(At(E_P)/Im(\iota))^* \simeq TM \quad (1.15)$$

induit par la Proposition [1.1.3.1](#). □

Soit  $\Psi : E \rightarrow E'$  un isomorphisme entre deux fibrés  $P$ -principaux holomorphes  $E \xrightarrow{p} M$  et  $E' \xrightarrow{p} M'$ . La différentielle  $d\Psi : TE \rightarrow \Psi^* TE'$  est un morphisme  $P$ -équivariant entre  $(TE, (dr_b)_{b \in P})$  et  $(\Psi^* TE', (\Psi^* dr'_b)_{b \in P})$ . Par la [Proposition 1.1.2.1](#), il correspond donc à un morphisme :

$$\hat{\Psi} : At(E_P) \simeq \psi^* At(E'_P) \quad (1.16)$$

**Définition 1.1.14.** *Le morphisme défini par ([1.16](#)) sera appelé morphisme d'Atiyah induit par  $\Psi$ .*

### 1.1.4 Fibré des repères et structures géométriques méromorphes

Soit  $M$  une variété complexe (resp. réelle) de dimension  $n \geq 1$ . Le fibré des bases  $R^1(M)$  de  $TM$  est le *fibré des repères holomorphes* (resp. différentiables) de  $M$ . Il est muni d'une 1-forme à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ) définie comme suit. Pour tout  $b \in E$ , l'application  $\theta(b)$  associe à tout vecteur  $v \in T_bE$  les coordonnées de  $Tp(v)$  dans la base de  $T_{p(b)}M$  correspondante à  $b$ . En particulier,  $\theta$  est équivariante pour la représentation canonique de  $GL_n(\mathbb{C})$  (resp.  $GL_n(\mathbb{R})$ ) sur  $\mathbb{C}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ), au sens :  $\theta(b \cdot h)(\cdot) = h^{-1}\theta(b)(\cdot)$ . Dans la suite, on se concentre sur le cas des variétés complexes  $M$ .

**Définition 1.1.15.** *La forme holomorphe  $\theta$  sur le fibré des repères  $R^1(M)$  définie ci-dessus est appelée solderform de  $M$ . Plus généralement, une solderform sur un fibré principal holomorphe  $p : E \rightarrow M$  de groupe structural un sous-groupe fermé  $P \subset GL_n(\mathbb{C})$ , est une 1-forme holomorphe  $\theta$  sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $P$ -équivariante pour l'action canonique de  $P$  sur  $\mathbb{C}^n$ , et dont le noyau est  $\ker(\theta) = \ker(dp)$ .*

**Lemme 1.1.4.1.** *Soit  $P \subset GL_n(\mathbb{C})$  un sous-groupe fermé. Tout fibré  $P$ -principal holomorphe  $E$  sur  $M$ , muni d'une solderform  $\theta$ , est canoniquement isomorphe à une réduction holomorphe de  $R^1(M)$  à  $P$ .*

*Démonstration.* Le fibré  $P$ -principal holomorphe  $p : E \rightarrow M$  s'identifie au fibré des bases  $R(\mathcal{E})$  du fibré vectoriel complexe  $\mathcal{E} = E \times_P \mathbb{C}^n$  (Définition 1.1.2). La forme  $\theta$  permet d'identifier  $\mathcal{E}$  à  $TM$  de la manière suivante : à un vecteur  $v \in T_xM$ , on associe le vecteur  $w = [(e, \theta(\tilde{v}(e)))]$  où  $\tilde{v}(e) \in T_eE$  est un relevé quelconque de  $v$  à  $E$ . Cela est bien défini par la condition que  $\theta(\tilde{A}) = 0$  pour un champ fondamental  $\tilde{A}$ .  $\square$

De plus, la solderform permet de relever canoniquement les isomorphismes (locaux) de variétés complexes de même dimension :

**Proposition 1.1.4.1.** *Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés complexes de dimension  $n$ , et  $\theta_1, \theta_2$  leurs solderforms respectives définies sur les fibrés des repères  $p_1 : R^1(M_1) \rightarrow M_1$  et  $p_2 : R^1(M_2) \rightarrow M_2$ . Tout biholomorphisme local  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M_2$  défini sur un ouvert  $U \subset M_1$  est canoniquement couvert par un isomorphisme local de fibrés  $GL_n(\mathbb{C})$ -principaux holomorphes  $\tilde{\varphi} : p_1^{-1}(U) \rightarrow p_2^{-1}(\varphi(U))$ , uniquement déterminé par la condition  $\tilde{\varphi}^*\theta_2 = \theta_1$ .*

*Démonstration.* Posons  $\tilde{\varphi} = (\varphi, T\varphi)$  où  $T\varphi(b_1, \dots, b_n) = (T\varphi(b_1), \dots, T\varphi(b_n))$  est l'application tangente sur les repères de  $M$ . Soit  $(x, b) \in R^1(M_1)$ , i.e  $b = (b_i)_{i=1, \dots, n}$  est une base de  $T_xM$  (voir Définition 1.1.2). Alors  $(T\varphi(b_i))_{i=1, \dots, n}$  est une base de  $T_{\varphi(x)}M_2$  et par définition de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \quad \tilde{\varphi}^*\theta_2(x, b)[b_i] &:= \theta_2(\varphi(x), T\varphi(b_i)_{i=1, \dots, n})[T\varphi(b_i)] \\ &= \sum_{j=1}^n T\varphi(b_j)^*[T\varphi(b_i)]\mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{e}_i = \theta_1(x, b)[b_i] \end{aligned} \tag{1.17}$$

$\square$

Le fibrés des repères (d'ordre 1) d'une variété complexe se généralise aux ordres supérieurs. Considérons variétés complexe pointées  $(M, x)$  et  $(M', x')$ . Pour tout  $r \geq 0$ , définissons la relation d'équivalence suivante sur les germes de morphismes  $\varphi$  entre les deux variétés

pointées : deux germes  $\varphi, \varphi'$  sont dits  $r$ -équivalents si et seulement si pour toute courbe holomorphe  $\gamma : D(0, \epsilon) \rightarrow M$  avec  $\gamma(0) = x$ , on a :

$$\frac{d^r}{dt^r} \Big|_{t=0} \varphi \circ \gamma = \frac{d^r}{dt^r} \Big|_{t=0} \varphi' \circ \gamma \quad (1.18)$$

Le jet d'ordre  $r$  d'un morphisme de variété pointées  $\varphi$  entre  $(M, x)$  et  $(M', x')$  est la classe d'équivalence  $j_x^r \varphi$  pour la relation (1.18) et l'ensemble de ces classes sera noté  $J_{x,x'}^r(M, M')$  dans la suite. Pour  $r \geq 1$ , la classe d'équivalence d'un biholomorphisme est constituée de biholomorphismes, et on note  $R_{x,x'}^r(M, M')$  l'ensemble des classe correspondant. Lorsque  $(M, x) = (M', x') = (\mathbb{C}^n, 0)$ , cet ensemble est clairement muni d'une structure de groupe induit par la composition, et on le note  $D^{r,n}$ . Alors  $R_{0,x}^r(\mathbb{C}^n, M)$  est muni d'une action à droite par  $D^{r,n}$  via la composition.

On vérifie alors facilement que pour tout  $x \in M$ ,  $R_{0,x}^1(\mathbb{C}^n, M)$  s'identifie à l'ensemble des bases de  $T_x M$ , i.e à la fibre de  $R^1(M)$  en  $x$ . Plus généralement, l'union  $R^r(M)$  des ensembles  $R_{0,x}^r(\mathbb{C}^n, M)$  sur  $x \in M$  est un fibré  $D^{r,n}$ -principal holomorphe  $p_r : R^r(M) \rightarrow M$  où  $p_r(j_x^r \varphi) = x$ . L'union  $J^r(M)$  des ensembles  $J_{0,x}^r(\mathbb{C}^n, M)$  est une variété fibrée sur  $M$  pour la même application.

**Définition 1.1.16.** *Le fibré  $D^{r,n}$ -principal holomorphe  $p_R : R^r(M) \rightarrow M$  défini ci-dessus est le fibré des repères d'ordre  $r$  de  $M$ .*

Si  $\pi : V \rightarrow M$  est un fibré vectoriel holomorphe de rang  $k$  sur  $M$ , alors  $J^r(V)$  est muni d'une structure de fibré vectoriel holomorphe sur  $M$ . ur un module localement libre  $\mathcal{V}$ ,  $J^r \mathcal{V}$  désigne le faisceau des sections de  $J^r(V)$  où  $V$  est le fibré vectoriel complexe correspondant à  $\mathcal{V}$ . Il est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre.

**Définition 1.1.17.** *Le module  $J^r \mathcal{V}$  est appelé module des  $r$ -jets de  $\mathcal{V}$ . Soit  $s$  une section holomorphe de  $\mathcal{V}$ . Alors on note  $j^r(s)$  le jet à l'ordre  $r$  de l'application  $s : U \rightarrow V$  correspondante. On note  $j^r : \mathcal{V} \rightarrow J^r \mathcal{V}$  le morphisme ainsi obtenu et  $j^r(\mathcal{V})$  son image.*

Cela permet de définir la notion de *structure géométrique méromorphe* sur une paire  $(M, D)$ , i.e un couple formé d'une variété complexe  $M$  et un diviseur  $D$ .

**Définition 1.1.18.** *Soit  $Z$  une variété complexe munie d'une action à gauche de  $D^r := D^{r,n}$ . Une structure géométrique méromorphe d'ordre  $r$  sur une paire  $(M, D)$  modelée sur  $Z$  est une application méromorphe  $S : R^r(M) \rightarrow Z$  avec pôles au dessus de  $D$  et vérifiant :*

$$\forall b \in D^r, \forall j \in R^r(M \setminus D), g(j \cdot b^{-1}) = b \cdot g(j) \quad (1.19)$$

*Une structure géométrique holomorphe sur  $M$  est une structure géométrique méromorphe sur  $(M, \emptyset)$ .*

**Définition 1.1.19.** *Une isométrie entre deux structures géométriques méromorphes d'ordre  $r \geq 0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sur deux paires  $(M_1, D_1)$  et  $(M_2, D_2)$  est un biholomorphisme  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tel que  $\varphi(D_1) \subset D_2$  et  $S_2 \circ J^r(\varphi) = S_1$ . Pour une structure géométrique méromorphe  $S$  sur  $(M, D)$ , le sous-faisceau de  $\text{Aut}_M^{\text{loc}}$  dont la fibre sur  $U \subset M$  est l'ensemble des isométries de la restriction de  $S$  à  $U$  est noté  $\text{Is}_S^{\text{loc}}$ . Une isométrie infinitésimale d'une structure géométrique méromorphe  $S$  sur  $(M, D)$  est un champ de vecteur holomorphe local  $X$  sur un ouvert  $U \subset M \setminus D$  dont le flot local agit par isométries sur  $S$ . On note  $\text{fill}_S^{\text{loc}}$  le sous-faisceau de  $TM \setminus D$  correspondant.*

**Définition 1.1.20.** *Une isométrie à l'ordre  $r \geq 0$  de  $S$  en  $x \in M$  est un jet  $j \in J^r(M)|_x$  tel que pour tout germe de biholomorphisme  $\varphi_x \in j$ ,  $J^r S \circ J^{r+1}(\varphi_x) = J^r S$ . Le sous-faisceau de  $J^{r+1} \text{Aut}_M^{\text{loc}}$  dont la fibre au dessus de  $U$  est constitué des jets  $J^{r+1} r \varphi$  est noté  $\text{Is}_S^r$ .*

Notons  $Is_{S,x}^r$  le sous-espace des germes  $J^r \varphi \in Is_S^r|_x$  tels que  $\varphi(x) = x$ . Notons aussi  $j_r^{r+1} : J^{r+1} Aut_M^{loc} \rightarrow J^r Aut_M^{loc}$  l'application troncature des jets d'ordre  $r+1$  à l'ordre  $r$ .

**Définition 1.1.21.** *Une structure géométrique holomorphe  $S$  d'ordre  $r$  sur  $M$  est rigide à l'ordre  $r+k$  si  $j_{r+k}^{r+k+1}$  est injective en restriction à  $Is_{S,x}^{r+k+1}$ .*

## 1.2 Réductions structurales, métriques holomorphes et $H$ -structures

Un exemple important de structure géométrique méromorphe sur une paire  $(M, D)$  (voir sous-section 1.1.4) est celui des  $H$ -structures méromorphes pour un sous-groupe de Lie complexe  $H$  de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Nous introduisons d'abord la notion de réduction, avec l'exemple des métriques holomorphes sur un fibré vectoriel holomorphe, puis nous introduisons les  $H$ -structures méromorphes. Un cas particulier est celui des métriques riemanniennes méromorphes sur une paire  $(M, D)$ .

### 1.2.1 Réductions structurales

Soit  $G$  un groupe de Lie réel (resp. complexe) et  $P \subset G$  un sous-groupe réel (resp. complexe). Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal différentiable (resp. holomorphe) sur  $M$ . Alors le fibré  $E_G = E \times_P G$  défini par (1.4) contient  $E$  de manière canonique. Il y a en effet une injection de fibrés holomorphes (resp. différentiables) sur  $M$  :

$$\begin{aligned} \iota_G : E &\longrightarrow E_G \\ e &\longrightarrow [(e, Id_G)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

La variété fibrée  $E_G$  est un fibré  $G$ -principal holomorphe (resp. différentiable) sur  $M$  puisqu'elle est munie de l'action donnée par  $(e, g') \cdot g = (e, g'g)$  et admet les sections holomorphes (resp. différentiables) de  $E$ .

**Définition 1.2.1.** *Le fibré  $E_G$  est appelé extension du groupe structural de  $E$  à  $G$ .*

Soit maintenant  $\bar{E}$  est un fibré  $G$ -principal holomorphe (resp. différentiable) sur  $M$ .

**Définition 1.2.2.** *On appelle réduction structurale holomorphe (resp. différentiable) de  $\bar{E}$  au sous-groupe  $P$  un  $P$ -fibré holomorphe (resp. différentiable) principal  $E \xrightarrow{p} M$  muni d'une injection  $\iota_G : E \hookrightarrow \bar{E}$  de fibrés holomorphes (resp. différentiable) sur  $M$ , qui est  $P$ -équivariante pour les actions de  $P$  sur  $E$  et  $\bar{E}$ .*

Les réductions holomorphes (resp. différentiables) de  $E_G$  au sous-groupe  $P$  sont en bijections avec les sections  $\tau$  du fibré associé  $E_G \times_G G/P$ . La bijection associée à une réduction  $E$  la section :

$$\begin{aligned} \tau : M &\longrightarrow E_G \times_G G/P \\ x &\longrightarrow [(e, gP)] \end{aligned} \quad (1.21)$$

où  $e \in p^{-1}(x)$  et  $g$  est un élément de  $G$  tel que  $e \cdot g \in E$ .

Dans [47], N.Steenrod prouve un résultat d'existence pour les  $P$ -réductions différentiables d'un  $G$ -fibré principal différentiable réel sur une variété réelle  $M$ ,  $P$  étant un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie  $G$ .

**Définition 1.2.3.** *Un sous-groupe  $P \subset G$  est solide dans  $G$  si et seulement si  $G/P$  possède la propriété suivante : toute application continue  $f : F \rightarrow G/P$  d'un fermé  $F \subset X$  dans un espace normal  $X$  se prolonge en  $f : X \rightarrow G/P$ .*

**Exemple 1.2.1.** *Par exemple, le groupe unitaire  $U(n) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$  (resp.  $O_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ) est solide : le quotient  $H_n := GL_{2n}(\mathbb{R})/U(n)$  est l'ensemble des formes hermitiennes sur  $\mathbb{C}^n$ . Il s'agit donc d'un espace vectoriel réel.*

**Theorème 1.2.1.** *Soit  $M$  une variété réelle,  $G$  un groupe de Lie réel et  $E$  un fibré  $G$ -principal différentiable sur  $M$ . Soit  $P \subset G$  solide et  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$  une collection discrète de points de  $M$ . Soient  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille de sections différentiables  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$  où les  $U_\alpha$  sont des voisinages de chaque  $x_\alpha$ , avec  $\bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta = \emptyset$  pour  $\alpha \neq \beta$ . Alors il existe une réduction différentiable  $\hat{E}$  de  $E$  à  $P$  telle que  $\hat{E} \cap p^{-1}(U_\alpha) = \sigma_\alpha(U_\alpha) \cdot P$  pour tout  $\alpha \in I$ .*

*Démonstration.* Voir le Théorème 12.2 de [47] appliqué au fermé  $A = \bigcup_{\alpha} \bar{U}_\alpha$  et à la réduction  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{\sigma_\alpha(U_\alpha)} \cdot P \subset E$ . □

**Exemple 1.2.2.** *En particulier, en reprenant l'Exemple 1.2.1, et en appliquant le Théorème 1.2.1 à  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I} = \emptyset$ , on obtient que tout fibré vectoriel complexe  $V$  sur une variété complexe  $M$  possède une métrique hermitienne, i.e une section  $h \in C^\infty(M, V^* \otimes V^*)$  telle que  $h(x)$  est une forme hermitienne sur chaque fibre  $V(x)$ . En effet, on a une réduction structurale différentiable  $\hat{E}$  à  $U(n)$  du  $GL_{2n}(\mathbb{R})$ -fibré principal  $E$  des bases de  $V$  (Définition 1.1.2). Comme  $H_n = GL_{2n}(\mathbb{C})/U(n)$  est l'ensemble des formes hermitiennes sur  $\mathbb{C}^n$ , la position relative (Équation 1.21)  $h : M \rightarrow E \times_{GL_{2n}(\mathbb{C})} H_n$  est une métrique hermitienne sur  $V$ .*

Cet exemple est fondamental pour introduire les classes de Chern  $c_i(V)$  de  $V$  (voir [35], Théorème 2.2.16 pour la définition en terme de métrique hermitienne).

## 1.2.2 Métriques holomorphes sur un fibré vectoriel holomorphe

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{R}_M$ -module localement libre de rang  $n$  (de manière équivalente un fibré vectoriel complexe ou réel de rang  $n$  sur  $M$ ). Soit  $R(\mathcal{E})$  son fibré des bases (Définition 1.1.2). On note  $S^2(\mathcal{E}^*)$  le quotient de  $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$  par l'image du morphisme :

$$\begin{aligned} \text{Alt} : \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* &\longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* \\ (s^* \quad , \quad t^*) &\longrightarrow s^* \otimes t^* - t^* \otimes s^* \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pour toute sections  $g \in H^0(U, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$ , et toute section  $s \otimes t \in H^0(U, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ , on peut considérer la contraction  $g(s \otimes t)$ . Les sections de  $S^2(\mathcal{E}^*)$  sur  $U \subset M$  sont alors en bijection avec les sections  $g \in H^0(U, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$  telles que  $g(s \otimes t) = g(t \otimes s)$ , i.e les sections *symétriques*.

**Définition 1.2.4.** *Une métrique holomorphe (resp. réelle) sur  $\mathcal{E}$  est une section  $g \in H^0(M, S^2(\mathcal{E}^*))$  telle que pour tout  $x \in M$ , l'évaluation  $ev_x(g)$  est une forme bilinéaire non dégénérée sur  $\mathcal{E}(x)$ .*

**Exemple 1.2.3.** *Si  $\mathcal{E} = \mathcal{R}_M^{\oplus n}$ , on a la métrique canonique  $q_0$  définie comme suit. Soit  $(1_i)_{i=1, \dots, n}$  la base canonique de  $\mathcal{E}$ . Alors  $q_0(1_i, 1_j) = 1_M \otimes \delta_j^i$ .*

Soit  $\sigma : U \rightarrow R(\mathcal{E})$  une section holomorphe du fibré des bases de  $\mathcal{E}$ , définissant une base locale  $(s_1, \dots, s_n)$  sur  $U$  et une trivialisatation  $\psi_\sigma : \mathcal{E}|_U \simeq \mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}^n$  (voir Définition 1.1.11). Une telle section définit une métrique holomorphe  $g_\sigma$  sur  $\mathcal{E}|_U$ , par la formule :

$$g_\sigma = q_0 \circ (\psi_\sigma \otimes \psi_\sigma) \quad (1.23)$$

i.e :  $g_\sigma(s_i, s_j) = \delta_j^i$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2$  deux sections holomorphes sur  $U$ , et l'application holomorphe  $b : U \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $\sigma_1 = \sigma_2 \cdot b$ . Alors, par définition du groupe orthogonal,  $g_{\sigma_1} = g_{\sigma_2}$  si et seulement si  $b$  est à valeurs dans  $O_n(\mathbb{C})$ .

**Définition 1.2.5.** Soit  $E \subset R(\mathcal{E})$  une réduction holomorphe à  $O_n(\mathbb{C})$ . Alors l'unique métrique holomorphe  $g \in H^0(M, S^2(\mathcal{E}^*))$  telle que  $g|_U = g_\sigma$  pour toute section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  (formule (1.23)) est appelée métrique holomorphe associée à  $E$ . Réciproquement, si  $g$  est une métrique, on définit la réduction associée  $E \subset R(\mathcal{E})$  comme le sous-fibré dont les sections  $\sigma : U \rightarrow E$  vérifient  $g|_U = g_\sigma$ .

Nous obtenons un premier exemple d'équivalence de catégories :

**Définition 1.2.6.** Soit  $M$  une variété complexe.

1. Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  deux  $\mathcal{O}_M$ -modules localement libres de même rang. Soient  $g, g'$  des métriques holomorphes sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ . Un morphisme entre  $(\mathcal{E}, g)$  et  $(\mathcal{E}', g')$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M$ -module  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  tel que  $g = g' \circ (\Phi \otimes \Phi)$
2. On définit la catégorie  $\mathcal{R}_M$  dont les objets sont les fibrés  $O_n(\mathbb{C})$ -principaux holomorphes sur une var
3. On définit la catégorie  $\mathcal{F}_M$  dont les objets sont les couples  $(\mathcal{E}, g)$  où  $g$  est une métrique holomorphe sur un module localement libre  $\mathcal{E}$ , et les flèches sont les morphismes de métriques holomorphes.

**Proposition 1.2.2.1.** L'application  $f : \mathcal{R}_M \rightarrow \mathcal{F}_M$  qui à  $E$  associe la métrique holomorphe  $g$  associée à la réduction holomorphe correspondante du fibré des bases  $R(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{E} = E(\mathbb{C}^n)$  (Définition 1.2.5) est bijective. Elle induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* L'application  $f$  définit naturellement un foncteur. En effet, soient  $E$  et  $E'$  deux objets de  $\mathcal{R}_M$ ,  $(\mathcal{E}, g)$  et  $(\mathcal{E}', g')$  leurs images respectives par  $f$ , et  $\Psi : E \simeq E'$  une flèche dans  $\mathcal{R}$ . Elle induit un isomorphisme  $\Phi = \Psi^{\mathbb{C}^n}$  entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  (voir Définition 1.1.10). Par définition des métriques holomorphes  $g$  et  $g'$ , on a :  $g' \circ (\Phi \otimes \Phi) = g$ , i.e  $\Phi$  est une flèche entre les images  $g = f(\mathcal{E}, E)$  et  $g' = f(\mathcal{E}', E')$ . La surjectivité et l'injectivité sont immédiates par définition du groupe orthogonal. Le foncteur est plein (Définition 0.0.9) : soient  $(\mathcal{E}, g)$  et  $(\mathcal{E}', g')$  deux objets de  $\mathcal{F}$ ,  $E$  et  $E'$  les réductions holomorphes des fibrés des bases au sous-groupe orthogonal qui correspondent, et  $\Phi$  un isomorphisme entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ . Alors il s'agit d'une flèche entre  $(\mathcal{E}, g)$  et  $(\mathcal{E}', g')$  si et seulement si  $g = g' \circ (\Phi \otimes \Phi)$ , si et seulement si  $\Phi$  applique une base locale  $g$ -orthonormée sur une base locale  $g'$ -orthonormée, i.e le morphisme  $\Psi : R(\mathcal{E}) \simeq R(\mathcal{E}')$  induit par  $\Phi$  applique  $E$  sur  $E'$ . Comme  $\Psi$  et  $\Phi$  se déterminent mutuellement,  $f$  est fidèle.  $\square$

### 1.2.3 $H$ -structures méromorphes et métriques riemanniennes méromorphes

Soit  $M$  une variété complexe et considérons une réduction holomorphe  $\tilde{E}_0 \subset R^1(M \setminus D)$  à un sous-groupe fermé  $H \subset GL_n(\mathbb{C})$ , se prolongeant en un fibré  $H$ -principal  $\tilde{E}$  sur  $M$  et dont les bases sont formées par des sections méromorphes de  $TM$ . Alors  $\tilde{E}$  induit une structure géométrique  $S$  holomorphe d'ordre 1 sur  $M$ . Notons en effet  $R = R^1(M \setminus D)$  et  $\tilde{R} = R \times_{GL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})/H$  et  $\tilde{q}$  le passage au quotient. Alors  $\tilde{E}|_{M \setminus D}$  correspond à une trivialisatoin  $\tilde{\Psi} : \tilde{R} \rightarrow M \times GL_n(\mathbb{C})/H$  donné par la position relative (Équation 1.21). L'application composée

$$S = \Psi \circ \tilde{q} : R \rightarrow GL_n(\mathbb{C})/H \quad (1.24)$$

est la restriction d'une application méromorphe  $S$  qui est  $GL_n(\mathbb{C})$ -équivariante, donc une structure géométrique d'ordre 1. Notons que deux fibrés  $H$ -principaux holomorphes comme précédemment peuvent induire la même structure méromorphe  $S$  sur  $(M, D)$ .

**Définition 1.2.7.** Soit  $(M, D)$  une paire avec  $\dim(M) = n \geq 1$  et  $H$  un sous-groupe de Lie complexe de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Une  $H$ -structure méromorphe sur  $(M, D)$  est une structure  $S$  obtenue comme dans la formule (1.24).

Nous introduisons maintenant des structures méromorphes qui généralisent les métriques riemanniennes.

**Définition 1.2.8.** Soit  $(M, D)$  une paire.

1. Une métrique riemannienne holomorphe sur  $M$  est une métrique holomorphe sur  $TM$  (Définition 1.2.4).
2. Une métrique riemannienne méromorphe sur  $(M, D)$  est une section globale  $g$  de  $S^2T^*M[\star D]$ , dont la restriction à  $M \setminus D$  est une métrique riemannienne holomorphe.
3. La catégorie  $\mathcal{M}_{M,D}$  est celle dont les objets sont les métriques riemanniennes méromorphes sur  $(M, D)$  et les flèches sont les identités.

## 1.3 Connexions linéaires et connexions principales méromorphes

Un exemple important de structure géométrique méromorphe est celui de *connexion affine méromorphe* sur une variété complexe. Nous rappelons la définition des connexions linéaire méromorphes ainsi que leur versions *partielles*. Nous définissons ensuite les connexions principales méromorphes. Dans le cas différentiable et holomorphe, la définition est due à Ehresmann ([25]), et aboutit, via la notion de transport parallèle, à l'équivalence entre connexion principale sur une réduction et connexion holomorphe préservant une réduction structurale. Nous utilisons le point de vue développé par M. Atiyah ([1]) pour étendre cela à la catégorie méromorphe. Nous rappelons aussi un résultat d'existence de réduction structurales et de connexions principales dans la catégorie différentiable du à N. Steenrod ([47]), qui sera utile dans le chapitre 2.

### 1.3.1 Connexions linéaires méromorphes

Soit  $M$  une variété complexe et  $D$  un diviseur.

**Définition 1.3.1.** Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{O}_M[\star D]$ -module localement libre. Une connexion (linéaire) méromorphe sur  $\mathcal{V}$  avec pôle en  $D$  est un morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceau :

$$\nabla : \mathcal{V} \longrightarrow \Omega_M^1[\star D] \otimes \mathcal{V}$$

vérifiant la formule de Leibniz, i.e :  $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$  pour tout  $f \in \mathcal{O}_M[\star D](U)$  et  $s \in \mathcal{V}(U)$ . Une connexion méromorphe sur  $M$  est un couple  $(\mathcal{V}, \nabla)$  comme précédemment. Si  $D = \emptyset$ ,  $\nabla$  est une connexion holomorphe.

Plus généralement :

**Définition 1.3.2.** Soit  $\mathcal{V}$  comme dans la Définition 1.3.1, et  $\mathcal{T}$  un sous-faisceau localement libre de  $TM$ ,  $\mathcal{T}^*$  son dual. Notons  $\iota^* : T^*M \rightarrow \mathcal{T}^*$  l'application duale de l'inclusion. Une connexion  $\mathcal{T}$ -partielle méromorphe en  $D$  sur  $\mathcal{V}$  est un morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux :

$$\nabla : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}^*[\star D] \otimes \mathcal{V}$$

vérifiant la formule de Leibniz, i.e :  $\nabla(fs) = (\iota^* \otimes Id_{\mathcal{V}})(df) \otimes s + f\nabla(s)$  pour tout  $f \in \mathcal{O}_M[\star D](U)$  et  $s \in \mathcal{V}(U)$ .

**Exemple 1.3.1.** *Le module trivial  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_M^{\oplus r}$  est équipé d'une connexion holomorphe  $d$ , appelée connexion canonique du module trivial, uniquement déterminée par la condition que  $d(s) = 0$  pour toute section constante  $s$  de  $\mathcal{V}$ .*

Soit  $\varphi : M \rightarrow M'$  un morphisme de variétés complexes et  $(\mathcal{V}', \nabla')$  une connexion méromorphe sur  $M'$  avec un pôle en  $D' \subset M'$ . Nous allons définir le *pullback* de  $(\mathcal{V}', \nabla')$  par  $\varphi$ , en suivant [44]. Lorsque le pôle est vide, il est possible de passer par le formalisme des fibrés vectoriels munis d'une connexion holomorphe. Ici, nous conservons le formalisme des faisceaux pour justifier que la construction donne lieu à une connexion méromorphe sur  $M$ . La difficulté est alors que  $\varphi^*\mathcal{V}'$  n'est pas le faisceau des sections du fibré vectoriel obtenu par pullback.

Notons  $D = \varphi^*D'$ , qui est un diviseur effectif sur  $M$ . On obtient un morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceau  $\varphi^*\nabla' : \varphi^*\mathcal{V}' \rightarrow (\varphi^*\Omega_{M'}^1)[*D] \otimes \varphi^*\mathcal{V}'$ . On définit alors un morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux entre  $\varphi^*\mathcal{O}_{M'}$ -modules par :

$$(\varphi^*\nabla')_0 = d\varphi - \varphi^*\nabla' \quad (1.25)$$

où  $d\varphi$  désigne la contraction de  $\varphi^*\nabla'$  par l'image  $d\varphi(X)$  d'un champ de vecteur  $X \in TM(U)$ . La composition à droite d'une fonction  $f \in H^0(U, \mathcal{O}_{M'})$  par  $\varphi$  définit un morphisme de faisceaux

$$\varphi_{\#} : \varphi^*\mathcal{O}_{M'} \rightarrow \mathcal{O}_M \quad (1.26)$$

On note  $\mathfrak{m}_{\varphi} \subset \varphi^*\mathcal{O}_{M'}$  son noyau.

**Lemme 1.3.1.1.** *Pour tout champ de vecteur  $X$  sur un ouvert  $U \subset M$ , la contraction  $X \lrcorner (\varphi^*\nabla')_0$  préserve le sous  $\varphi^*\mathcal{O}_{M'}$ -module  $\mathfrak{m}_{\varphi}\varphi^*\mathcal{V}' \subset \varphi^*\mathcal{V}'$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi^*s$  une section de  $\varphi^*\mathcal{V}'$  sur  $U$  et  $f \in \mathfrak{m}_{\varphi}(U)$ . Par définition :

$$X \lrcorner (\varphi^*\nabla')_0(f\varphi^*s) = \nabla'_{T\varphi(X)}(fs) = (T\varphi(X) \lrcorner df)s + f(T\varphi(X) \lrcorner \nabla'(s)) \quad (1.27)$$

Le second terme de la somme de droite est déjà dans  $\mathfrak{m}_{\varphi}\varphi^*\mathcal{V}'(U)$ . Par ailleurs :

$$T\varphi(X) \lrcorner df = \mathcal{L}_X \varphi_{\#}(f) = 0 \quad (1.28)$$

d'où le résultat.  $\square$

Donc  $(\varphi^*\nabla')_0$  passe aux quotients en un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire, vérifiant la formule de Leibniz. Notons  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_M \otimes \varphi^*\mathcal{V}'$ . Comme  $Im(\varphi_{\#}) = \mathcal{O}_M/\mathfrak{m}_{\varphi}$  est un sous-module de  $\mathcal{O}_M$ , le morphisme précédent s'étend de manière unique en un morphisme :

$$\varphi^*\nabla' : \varphi^*\mathcal{V} \rightarrow \Omega_M^1[*D] \otimes \varphi^*\mathcal{V} \quad (1.29)$$

coïncidant avec  $(\varphi^*\nabla')_0$  sur le sous  $\mathcal{O}_{M'}$ -module  $\varphi^*\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$  et vérifiant la formule de Leibniz (voir par exemple [44], 0.11.c).

**Définition 1.3.3.** *Le couple  $(\mathcal{V}, \varphi^*\nabla')$  est une connexion méromorphe avec pôle en  $D$ , appelée pullback de la connexion  $(\mathcal{V}', \nabla')$  par  $\varphi$ .*

Les connexions méromorphes se transportent aussi par les isomorphismes de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules :

**Définition 1.3.4.** *Soit  $(\mathcal{V}', \nabla')$  une connexion méromorphe (avec pôle en  $D$ ) sur  $M'$ , et  $\phi : \mathcal{V}[*D] \rightarrow \mathcal{V}'[*D]$  un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules. On définit une connexion méromorphe  $(\mathcal{V}, \phi^{-1}\nabla')$  où :*

$$\phi^{-1}\nabla' = (Id_{\Omega_M^1} \otimes \phi^{-1}) \circ \nabla' \circ \phi \quad (1.30)$$

*Un isomorphisme de connexions méromorphes (avec pôles en  $D$ ) entre  $(\mathcal{V}, \nabla)$  et  $(\mathcal{V}', \nabla')$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules  $\phi : \mathcal{V}[*D] \rightarrow \mathcal{V}'[*D]$  tel que  $\nabla = \phi^{-1}\nabla'$ .*

Clairement, ces définitions se généralisent aux connexions méromorphes  $\mathcal{T}$ -partielles pour un sous-module  $\mathcal{T} \subset TM$  (voir [Définition 1.3.2](#)), en remplaçant les morphismes de variétés par des morphismes de couples  $(M, \mathcal{T})$ .

**Définition 1.3.5.** Soit  $\mathcal{T} \subset TM$  et  $\nabla$  une connexion  $\mathcal{T}$ -partielle méromorphe en  $D$  sur un  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre  $\mathcal{V}$ . Soit  $\varphi : M \rightarrow M$  un automorphisme de variété complexe tel que  $d\varphi(\mathcal{T}) \subset \varphi^*\mathcal{T}$ , et  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \varphi^*\mathcal{V}$  un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M$ -module. On dit que  $(\mathcal{V}, \nabla)$  est invariante par  $(\varphi, \phi)$  si et seulement si  $\phi$  est un isomorphisme entre le pullback  $\varphi^*\nabla$  et  $\phi^{-1}(\varphi^*\nabla)$ .

### 1.3.2 Connexions principales méromorphes

Dans [\[25\]](#), C. Ehresmanh a donné une description géométrique des connexions sur un fibré vectoriel, en utilisant la notion de *connexion principale* que nous étendons ici à la catégorie méromorphe :

**Définition 1.3.6.** Soit  $E$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur une variété complexe  $M$ . Une connexion  $P$ -principale sur  $E$  est une 1-forme holomorphe  $\tilde{\omega}$  sur  $E$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ , et vérifiant :

$$(i) \quad \forall b \in P, r_b^*\tilde{\omega} = \text{ad}(b^{-1}) \circ \tilde{\omega}$$

$$(ii) \quad \forall x \in M, \iota_x^*\tilde{\omega} = \omega_{P,x} \text{ où } \omega_{P,x} \text{ est la forme de Maurer-Cartan de la fibre } p^{-1}(x) \text{ (voir } \a href="#">\text{Définition 1.1.1}).$$

Soit  $\tilde{D}$  un diviseur effectif de  $E$ , invariant par l'action de  $P$ . Une connexion méromorphe  $P$ -principale holomorphe sur  $(E, \tilde{D})$  est une 1-forme méromorphe  $\tilde{\omega} \in \Omega_E^1[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{p}$  dont la restriction à  $E \setminus \tilde{D}$  est une connexion  $P$ -principale holomorphe sur  $E \setminus \tilde{D}$ .

**Définition 1.3.7.** Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe et  $\tilde{\omega}$  une connexion  $P$ -principale holomorphe sur  $E$ . Une section  $\sigma : U \rightarrow E$  est dite  $\tilde{\omega}$ -horizontale si  $\sigma^*\tilde{\omega} = 0$ .

Une section  $\sigma$  comme ci-dessus est tangente à  $\tilde{\omega}$  en  $x_0 \in U$  si  $\sigma^*\tilde{\omega}(T_{x_0}M) = \{0\}$ .

Par le [Corollaire 1.1.1](#), les connexions  $P$ -principales méromorphes sur  $E$  avec pôle en  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$  sont en bijection avec les sections  $\tilde{\beta}$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\text{At}(E_P), E(\mathfrak{p}))[\star D]$  sur  $E$  vérifiant :

$$\tilde{\beta} \circ \iota = \text{Id}_{E(\mathfrak{p})} \tag{1.31}$$

où  $\iota : E(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \text{At}(E_P)$  est l'inclusion définie dans la [Proposition 1.1.3.1](#). La condition [\(1.31\)](#) montre que  $\tilde{\beta}$  est équivalente à son noyau  $\mathcal{K} = \ker(\tilde{\beta}) \subset \text{At}(E)[\star D]$ . Ce dernier étant un  $\mathcal{O}_M$ -module supplémentaire à l'image du morphisme  $\iota$ ,  $\tilde{\beta}$  est encore équivalent à un scindage :

$$\tau : TM[\star D] \rightarrow \text{At}(E)[\star D] \tag{1.32}$$

de la suite exacte d'Atiyah de  $E$  avec pôle en  $D$ . Il y a donc une bijection entre les connexions  $P$ -principales holomorphes (resp. méromorphes)  $\tilde{\omega}$  sur  $E$  (resp. avec pôles en  $\tilde{D}$ ) et les scindage  $\tau$  de la suite exacte d'Atiyah de  $E$  (resp. avec pôle en  $D$ ) comme en [\(1.32\)](#).

**Lemme 1.3.2.1.** Soient  $E_1 \xrightarrow{p_1} M_1$  et  $E_2 \xrightarrow{p_2} M_2$  deux fibrés  $P$ -principaux holomorphes, et  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  des connexions  $P$ -principales méromorphes sur chaque fibré, avec pôles au dessus de  $D_1 \subset M_1$  et  $D_2 \subset M_2$  respectivement. Notons  $\tau_1, \tau_2$  les scindages de leur suite exacte d'Atiyah avec pôles en  $D_1$  et  $D_2$  correspondants à ces deux connexions principales méromorphes (voir [\(1.32\)](#)). Supposons que  $\tilde{\Psi} : E_1 \rightarrow E_2$  est un isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes couvrant  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ . Alors  $\tilde{\Psi}^*\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1$  si et seulement si  $\varphi(D_1) = D_2$  et le

diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 TM_1 & \xrightarrow{\tau_1} & At(E_1)[*D_1] \\
 d\varphi \downarrow & & \downarrow \hat{\Psi} \\
 \varphi^*TM_2 & \xrightarrow{\varphi^*\tau_2} & \varphi^*At(E_2)[*D_2]
 \end{array} \tag{1.33}$$

où  $\hat{\Psi}$  est le morphisme d'Atiyah induit par  $\tilde{\Psi}$  ([Définition 1.1.14](#)).

*Démonstration.* Par définition de  $\hat{\Psi}$ , les noyaux respectifs  $\mathcal{K}_1 \subset At(E_1)[*D_1]$  et  $\mathcal{K}_2 \subset At(E_2)[*D_2]$  des morphismes  $\tilde{\beta}_1$  et  $\tilde{\beta}_2$  correspondant aux formes méromorphes équivariantes  $\tilde{\omega}_1$  et  $\tilde{\omega}_2$  satisfont  $\tilde{\Psi}(\mathcal{K}_1) = \varphi^*\mathcal{K}_2$ . Le résultat découle alors de la définition de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .  $\square$

La construction d'une connexion méromorphe associée à une connexion principale méromorphe repose sur le fait élémentaire suivant :

**Lemme 1.3.2.2.** *Soit  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe, et  $D$  un diviseur de  $M$ . Soit  $\mathbb{V}$  un  $P$ -module,  $E(\mathbb{V})$  son module représentation ([Définition 1.1.9](#)) et  $d$  la connexion canonique sur le module trivial  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{V}$ . Pour tout champ holomorphe  $P$ -invariant  $X \in At(E)(U)$ , la contraction  $X \dashv p_* d$  préserve le sous-module  $E(\mathbb{V}) \subset p_*\mathcal{V}$ .*

Soit  $\tilde{\omega}_0$  une connexion  $P$ -principale méromorphe sur  $E$  avec pôle en  $p^{-1}(D)$ , et  $\tau$  le scindage de la suite exacte d'Atiyah de  $E$  correspondant ([Équation 1.32](#)). Le morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux  $\nabla^{\mathbb{V}} : \mathcal{V}[*D] \rightarrow \Omega_M^1[*D] \otimes \mathcal{V}$  défini par :

$$\nabla^{\mathbb{V}} = \tau \dashv p_* d \tag{1.34}$$

est une connexion méromorphe sur  $\mathcal{V}$  avec pôle en  $D$ .

**Définition 1.3.8.** *Soient  $E \xrightarrow{P} M$ ,  $\mathbb{V}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\omega}_0$  comme dans le [Lemme 1.3.2.2](#). La connexion méromorphe  $\nabla^{\mathbb{V}}$  sur  $\mathcal{V}$  définie par ([1.34](#)) est appelé connexion méromorphe covariante associée à la connexion  $P$ -principale méromorphe  $\tilde{\omega}_0$ .*

Réciproquement, partons d'une connexion méromorphe  $\nabla$  sur un  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre  $\mathcal{E}$  de rang  $r$ , avec pôle en  $D$ . Soit  $p_R : R \rightarrow M$  son fibré des bases ([Définition 1.1.2](#)) et  $\sigma : U \rightarrow R$  une section holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $M$ . Soit  $\psi_\sigma$  la trivialisatation de  $\mathcal{E}|_U$  associée à  $\sigma$  et  $d_\sigma$  le pullback de la connexion holomorphe canonique sur  $\mathcal{O}_U^{\oplus r}$  par  $\psi_\sigma$ . Alors :

$$\Theta = \nabla - d_\sigma \tag{1.35}$$

s'identifie à un morphisme  $\Theta : TM \rightarrow R(End(\mathbb{C}^r))[*D]$ . Notons  $\tau_\sigma : TU \rightarrow At(R)|_U$  le scindage correspondant de la suite exacte d'Atiyah de  $R$ , et définissons :

$$\tau = \tau_\sigma + \Theta \tag{1.36}$$

Alors la restriction de  $\nabla$  à  $U$  est la connexion méromorphe covariante associée à la connexion principale méromorphe  $\tilde{\omega}_U$  sur  $p_R^{-1}(U)$  correspondant au scindage  $\tau$  défini par ([1.36](#)). En effet :

**Lemme 1.3.2.3.** *Soit  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe muni d'une connexion principale méromorphe  $\tilde{\omega}$ , et  $\mathbb{V}$  une représentation de  $P$ . Soit  $\nabla$  la connexion covariante méromorphe associée. Alors pour toute section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$ , la trivialisatation  $\psi_\sigma$  est un isomorphisme entre  $(E(\mathfrak{g})|_U, \nabla)$  et la connexion méromorphe  $\nabla_0$  sur  $\mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{g}$  définie par :*

$$\nabla_0 = d - \rho_{\mathbb{V}}(\psi_\sigma(\tau - \tau_\sigma)) = d - \rho_{\mathbb{V}}(\sigma^*\tilde{\omega}(v)) \tag{1.37}$$

où  $\tau_\sigma$  est le scindage de la suite exacte d'Atiyah de  $E$  associé à  $\sigma$ ,  $\tau$  est le scindage associé à  $\tilde{\omega}$  ([1.32](#)) et  $d$  la connexion canonique de module trivial sur  $\mathcal{O}_U \otimes \mathbb{V}$ .

*Démonstration.* On considère une section  $s \in E(\mathfrak{g})(U)$ , un champ de vecteur holomorphe  $v \in TM(U)$ . On calcule en relevant les sections en des sections  $P$ -invariantes :

$$\begin{aligned}
 p^* \nabla_v^{\mathbb{V}}(s) &= p^*[\tau(v) - d(p^*s)] \\
 &= p^*[\tau(v) - d(p^*[(\sigma, \psi_\sigma(s))])] \\
 &= p^*(\tau_\sigma(v)) - d(p^*[(\sigma, \psi_\sigma(s))]) + p^*(\tau - \tau_\sigma(v)) - d(p^*[(\sigma, \psi_\sigma(s))]) \\
 &= p^*(\psi_\sigma^{-1}(v - d\psi_\sigma(s))) + p^*(\tau - \tau_\sigma(v)) - d(p^*[(\sigma, \psi_\sigma(s))]) \\
 &= p^*(\psi_\sigma^{-1}(v - d\psi_\sigma(s))) + p^*(\psi_\sigma^{-1}(\rho_{\mathbb{V}}(\tau - \tau_\sigma(v)) \cdot \psi_\sigma(s)))
 \end{aligned}$$

En considérant le pushforward de cette égalité, le résultat est immédiat.  $\square$

**Définition 1.3.9.** Une connexion méromorphe  $\nabla$  sur un module localement libre  $\mathcal{E}$  préserve une réduction holomorphe  $\tilde{E} \subset R(\mathcal{E})$  à un sous-groupe de Lie complexe  $H \subset GL_r(\mathbb{C})$  si et seulement si pour toute section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow R(\mathcal{E})$ , le morphisme  $\tau$  défini par (1.36) est à valeurs dans le sous-module  $At(E)[*D] \subset At(R(\mathcal{E}))[*D]$ .

Le sous-groupe de Lie complexe  $H \subset GL_r(\mathbb{C})$  étant fixé, on définit deux catégories comme suit. La première, notée  $\mathcal{P}$ , a pour objets les triplets  $(E, \tilde{\omega}, D)$  formés d'un fibré  $H$ -principal holomorphe  $\tilde{E} \xrightarrow{p} M$ , et d'un diviseur  $D \subset M$  et d'une connexion principale méromorphe  $\tilde{\omega}$  sur  $E$  avec pôle en  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$ . Ses flèches sont définies comme suit. Soient  $(E_1, \tilde{\omega}_1)$  et  $(E_2, \tilde{\omega}_2)$  deux objets de  $\mathcal{P}$ , et notons  $R_1$  et  $R_2$  les extensions de  $E_1$  et  $E_2$  au groupe  $GL_r(\mathbb{C})$ , et étendons  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  en deux connexions  $GL_r(\mathbb{C})$ -principales méromorphes. Une flèche entre  $(E_1, \tilde{\omega}_1)$  et  $(E_2, \tilde{\omega}_2)$  est un isomorphisme de fibrés principaux holomorphes  $\tilde{\Psi} : R_1 \rightarrow R_2$  préservant les connexions  $GL_r(\mathbb{C})$ -principales.

La seconde, notée  $\mathcal{F}$ , a pour objets les connexions méromorphes  $(\mathcal{E}, \nabla)$  de rang  $r$  sur une variété complexe  $M$ , avec pôle en un diviseur  $D \subset M$ , et préservant une réduction  $\tilde{E} \subset R(\mathcal{E})$  au groupe  $H$ . Ses flèches sont les isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes (Définition 1.1.3) préservant les connexions méromorphes (Définition 1.3.9).

**Proposition 1.3.2.1.** Soit  $r \geq 1$  et  $H \subset GL_r(\mathbb{C})$  un sous-groupe de Lie complexe. L'application  $f$  qui à une connexion méromorphe principale  $\tilde{\omega}$  sur un fibré  $H$ -principal holomorphe  $\tilde{E} \xrightarrow{p} M$  associe la connexion méromorphe covariante  $\nabla^{\mathbb{C}^r}$  sur  $\tilde{E}(\mathbb{C}^r)$  (où  $\mathbb{C}^r$  est la représentation canonique) induit une équivalence de catégories entre les catégories définies ci-dessus.

*Démonstration.* Étendons  $f$  aux flèches en définissant l'image d'un isomorphisme  $\tilde{\Psi} : R_1 \rightarrow R_2$  de  $\mathcal{P}$  comme l'isomorphisme de fibré vectoriels  $(\varphi, \Phi)$  où  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  est l'isomorphisme couvert par  $\tilde{\Psi}$  et  $\Phi = \tilde{\Psi}(\mathbb{C}^r)$ . Par le Lemme 1.3.2.1, cela définit un foncteur.

Prouvons sa surjectivité, en suivant la preuve du Théorème 5 de [1]. Soit  $\nabla$  une connexion méromorphe sur  $\mathcal{E}$  préservant une réduction holomorphe  $E \subset R(\mathcal{E})$  au groupe  $H$ . Recouvrons  $M$  par des ouverts  $U$  munis de sections holomorphes  $\sigma : U \rightarrow E$  et prouvons que les morphismes  $\tau_U : TU \rightarrow At(E)[*D]$  obtenus comme en (1.36) coïncident en restriction aux intersections. Considérons donc deux sections holomorphes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $E$  respectivement sur  $U$  et  $U'$ , et notons  $b : U \cap U' \rightarrow H$  l'unique application holomorphe telle que  $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot b$ . Par conséquent, les bases holomorphes correspondantes  $(\bar{s}_i)_{i=1, \dots, r}$  et  $(\bar{t}_i)_{i=1, \dots, r}$  de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sur  $U$  et  $U'$  vérifient :

$$\bar{t}_i = \sum_{j=1}^r b_{ji} \bar{s}_j \tag{1.38}$$

pour tout  $1 \leq i \leq r$ . Choisissons un champ de vecteur holomorphe  $X \in TM(U \cap U')$ . Les scindages  $\tau_{\sigma_1}, \tau_{\sigma_2}$  de la suite exacte d'Atiyah de  $E$  associés à  $\sigma$  et  $\sigma_2$  vérifient par définition  $\tau_{\sigma_1}(X) = [(\sigma_1, T\sigma_1(X))]$  et  $\tau_{\sigma_2}(X) = [(\sigma_2, T\sigma_2(X))]$ . On en déduit, par définition du morphisme  $\iota$  de la suite exacte (1.1.3.1) :

$$\tau_{\sigma_2} - \tau_{\sigma_1}(X) = \iota([(\sigma_1, b^* \omega_H(X))]) \quad (1.39)$$

Par ailleurs, les morphismes  $\Theta$  et  $\Theta'$  obtenus comme en (1.35) vérifient :

$$\begin{aligned} [\Theta' - \Theta(X)](\bar{s}_i) &= d_{\sigma_1} - d_{\sigma_2}(\bar{s}_i) \\ &= -d_{\sigma_2}(\bar{s}_i) \\ &= d_{\sigma_2} \left( \sum_{j=1}^r b_{ji}^{-1} \bar{t}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^r [d \log(\rho_{\mathbb{V}}(b^{-1}))]_{ji} \bar{s}_j \end{aligned} \quad (1.40)$$

d'où  $\Theta' - \Theta(X) = [(\sigma_1, -b^* \omega_H(X))]$ . Finalement,  $\tau' - \tau(X) = [(\sigma_1, -b^* \omega_H(X) + b^* \omega_H(X))] = 0$ , et  $\tau$  coïncide avec  $\tau'$  en restriction à  $U \cap U'$ .

Prouvons enfin qu'il est plein. Soient  $E_1 \xrightarrow{p_1} M_1$  et  $E_2 \xrightarrow{p_2} M_2$  deux fibrés  $H$ -principaux holomorphes. Soit  $(\varphi, \Phi)$  un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes entre  $\mathcal{E}_1 = E_1(\mathbb{C}^r)$  et  $\mathcal{E}_2 = E_2(\mathbb{C}^r)$ . Supposons qu'il s'agit d'un isomorphisme de connexions méromorphes entre une connexion méromorphe  $\nabla_1$  sur  $\mathcal{E}_1$  préservant  $E_1$ , et  $\nabla_2$  sur  $\mathcal{E}_2$  préservant  $E_2$ . Soit  $\Psi : R_1 \rightarrow R_2$  l'isomorphisme de fibrés  $GL_r(\mathbb{C})$ -principaux holomorphes correspondant entre les fibrés des bases. En utilisant le Lemme 1.3.2.3, et le fait que la représentation canonique de  $H$  est libre, on obtient que le morphisme d'Atiyah  $\hat{\Psi}$  qu'il induit (Définition 1.1.14) vérifie  $\hat{\Psi} \circ \tau_1 = \varphi^* \tau_2 \circ d\varphi$ . Par le Lemme 1.3.2.1,  $\hat{\Psi}$  préserve les connexions principales méromorphes.  $\square$

Nous rappelons enfin un résultat classique sur l'existence d'une connexion  $P$ -principale dans la catégorie différentiable. Plus précisément, l'existence d'une connexion  $P$ -principale différentiable qui est holomorphe au voisinage d'un ensemble discret  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset M$ .

**Lemme 1.3.2.4.** *Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur une variété complexe  $M$ . Fixons un ensemble discret  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset M$  de points. Fixons également pour tout  $\alpha \in I$  une section  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$ . Alors il existe des voisinages  $U'_\alpha \subset U_\alpha$  de chaque  $x_\alpha$  et une connexion  $P$ -principale différentiable  $\tilde{\omega}$  sur  $E$  telle que pour tout  $\alpha \in I$ ,  $\sigma_\alpha|_{U'_\alpha} : U'_\alpha \rightarrow E$  est  $\tilde{\omega}$ -horizontale. En particulier, la restriction  $\tilde{\omega}|_{p^{-1}(U'_\alpha)}$  est une connexion  $P$ -principale holomorphe.*

*Démonstration.* Pour tout  $\alpha \in I$ , il existe une section  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$  (holomorphe). Cela définit, sur chaque restriction  $E|_{U_\alpha}$ ,  $\tilde{\omega}_\alpha$  l'unique connexion holomorphe  $P$ -principale holomorphe  $\tilde{\omega}_\alpha$  sur  $p^{-1}(U_\alpha)$  correspondant au morphisme  $\tau_{\sigma_\alpha} : TM|_{U_\alpha} \rightarrow At(E_P)|_{U_\alpha}$  défini par (??) (Équation 1.32). Par construction,  $\sigma_\alpha^* \tilde{\omega}_\alpha$  est la projection sur  $E(\mathfrak{p})$  parallèlement à  $\tau_{\sigma_\alpha}(TM|_{U_\alpha})$  de  $T\sigma_\alpha$ , donc identiquement nulle :  $\sigma_\alpha$  est  $\tilde{\omega}_\alpha$  horizontale.

Nous avons vu (Proposition 1.1.3.1, point 2.) que les 1-formes holomorphes (resp. différentiables) à valeurs dans  $\mathfrak{p}$  sur  $E$ , équivariantes pour l'action à droite et l'action adjointe de  $P$ , sont en bijection avec les sections holomorphes (resp. différentiables) de  $At(E_P)^* \otimes E(\mathfrak{p})$ . Une telle section provient d'une connexion  $P$ -principale si et seulement si elle vérifie (1.31).

Autrement dit, les connexions  $P$ -principales holomorphes (resp. différentiables) sont en bijection avec les sections holomorphes (resp. différentiables) d'un  $P$ -fibré sur  $M$  dont la fibre est un espace affine.

Par un résultat classique sur les variétés différentiables (voir [36], Théorème 5.7), pour tout fermé  $Z \subset M$ , toute section d'un tel faisceau définie sur  $Z$  se prolonge en une section globale différentiable de ce dernier. Choisissons pour tout  $\alpha \in I$  un ouvert  $U'_\alpha$  voisinage de  $x_\alpha$  et tel que  $\overline{U'_\alpha} \subset U_\alpha$ . Posons  $Z = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{U'_\alpha}$  et appliquons le résultat mentionné ci-dessus à la section  $\tilde{\omega}|_Z \in H^0(Z, \mathcal{F})$  définie par  $\tilde{\omega}|_{U'_\alpha} = \tilde{\omega}_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ . On obtient une section différentiable  $\tilde{\omega} \in C^\infty(M, \mathcal{F})$  telle que  $\tilde{\omega}|_{U'_\alpha}$  coïncide avec  $\tilde{\omega}_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ .  $\square$

### 1.3.3 Courbure d'une connexion linéaire

Soit  $V$  un fibré vectoriel complexe holomorphe sur une variété complexe  $M$  de dimension  $n$ . De manière équivalente on peut considérer son faisceau de sections holomorphes  $\mathcal{E}$  qui est un  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre. Soit  $\nabla$  une connexion différentiable sur  $V$  (ou de manière équivalente sur  $\mathcal{E}$ ).

**Définition 1.3.10.** *La courbure  $R_\nabla$  de  $\nabla$  est la section différentiable de  $\Omega_M^2 \otimes \text{End}(\mathcal{E})$  définie, pour tous champs de vecteurs différentiables  $X, Y$  sur  $M$ , par :*

$$R_\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (1.41)$$

**Lemme 1.3.3.1.** *Soit  $A \in C^\infty(M, \Omega_M^1 \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{R}))$  et  $d$  la connexion canonique sur le fibré de rang  $r$ . La courbure  $R_\nabla$  de la connexion  $\nabla = d + A$  sur le fibré trivial  $V = M \times \mathbb{C}^r = M \times \mathbb{R}^{2r}$  est  $R_\nabla = dA + A \wedge A$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le vérifier sur la base  $(1_M \otimes \mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, 2r}$  où  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, 2r}$  est la base canonique. On utilise alors la formule de Lie-Cartan.  $\square$

**Lemme 1.3.3.2.** *Soit  $\nabla$  une connexion sur un fibré vectoriel  $V \rightarrow M'$ , et  $f : M \rightarrow M'$  une application différentiable. Alors la courbure  $R_{f^*\nabla}$  du pullback  $f^*\nabla$  sur  $f^*V$  est  $R_{f^*\nabla} = (f^* \otimes \text{Id}_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}) \circ R_\nabla$*

Soit  $(\mathcal{E}, \nabla)$  une connexion holomorphe sur  $M$ . Alors  $\mathcal{E} = R(\mathbb{C}^n)$  où  $R = R(\mathcal{E}) \xrightarrow{p_R} M$  est le fibré des bases de  $\mathcal{E}$ . En particulier,  $\text{End}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{E}) = R(\text{End}(\mathbb{C}^n))$ . Alors  $\tilde{R}_\nabla = p_R^* R_\nabla$  s'identifie canoniquement à une section de  $\Omega_R^2 \otimes p_R^* R(\text{End}(\mathbb{C}^n)) = \Omega_R^2 \otimes \mathbb{C}^n$ .

**Lemme 1.3.3.3.** *Soit  $\tilde{\omega}$  la connexion  $GL_n(\mathbb{C})$ -principale différentiable sur  $R$  correspondant à  $\nabla$ . Alors :  $\tilde{R}_\nabla = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma : U \rightarrow R$  une section différentiable sur  $U \subset M$  et  $\psi_\sigma = \psi_\sigma(\mathbb{C}^n)$  la trivialisatation de  $\mathcal{E}|_U$  correspondante. Alors, par le [Lemme 1.3.2.3](#) :

$$\psi_\sigma^{-1} \nabla = d + \sigma^* \tilde{\omega}. \quad (1.42)$$

Par conséquent ([Lemme 1.3.3.1](#)) :

$$R_\nabla = [\text{Id}_{\Omega_M^2} \otimes \psi_\sigma(\text{End}(\mathbb{C}^n))] \circ R_{\psi^{-1}\nabla} = [\text{Id}_{\Omega_M^2} \otimes \psi_\sigma(\text{End}(\mathbb{C}^n))] \circ (dA + A \wedge A) \quad (1.43)$$

où  $A = \sigma^* \tilde{\omega}$  est la matrice de  $\psi_\sigma^{-1} \nabla$  dans la base canonique du module trivial. Le résultat découle de l'identité  $p^* A = \tilde{\omega}$ .  $\square$

Lorsque  $V = TM$  est le fibré tangent holomorphe de  $M$ , la connexion  $\nabla$  est appelée connexion affine holomorphe (ou méromorphe) sur  $M$  (ou sur  $(M, D)$ ).

**Définition 1.3.11.** *La torsion d'une connexion affine holomorphe sur  $M$  est la section holomorphe  $T_\nabla \in H^0(M, \Omega_M^2 \otimes TM)$  définie par :*

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]_{TM} \quad (1.44)$$

Soit  $\nabla$  une connexion affine holomorphe sur  $M$ , et  $\tilde{\omega}$  la connexion  $GL_n(\mathbb{C})$ -principale holomorphe sur  $R = R^1(M)$  correspondante (Proposition 1.3.2.1). Soit  $R$  le fibré des repères de  $M$  (Définition 1.1.2). Alors  $TM = E(\mathbb{C}^n)$  (Définition 1.1.9) et  $T_\nabla$  s'identifie donc à une section de  $\Omega_M^2 \otimes E(\mathbb{C}^n)$ . Par la Proposition 1.1.2.1 et la Proposition 1.1.3.1, le pullback  $\tilde{T}_\nabla = Id_{\mathcal{O}_E} \otimes p_R^* T_\nabla$  correspond donc à une unique 2-forme holomorphe sur  $R$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ , s'annulant sur  $\ker dp_R$ .

**Lemme 1.3.3.4.** *On a :  $\tilde{T}_\nabla = d\theta + \theta \wedge \tilde{\omega}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le vérifier le long d'une section  $\sigma : U \rightarrow R^1(M)$ . Soit  $(b_1, \dots, b_n)$  la base de  $TM$  correspondante, et  $\psi_\sigma$  la trivialisatation de  $TM|_U$  associée. Alors :

$$\psi_\sigma^*(\nabla) = d + A \quad (1.45)$$

où  $A = \sigma^* \tilde{\omega}$ . Donc :

$$\psi_\sigma^*(T_\nabla)(b_i, b_j) = \psi_\sigma([b_i, b_j]) + b_i \lrcorner A(\psi_\sigma(b_j)) - b_j \lrcorner A(\psi_\sigma(b_i)) \quad (1.46)$$

où  $\lrcorner$  désigne la contraction d'une forme par un champ de vecteur. Par conséquent  $Id_{\mathcal{O}_R} \otimes p_R^* T_\nabla$  coïncide avec  $\tilde{\nabla}$  le long de  $\sigma$ .  $\square$

### 1.3.4 Systèmes locaux et monodromie d'une connexion méromorphe

**Définition 1.3.12.** *Soit  $M$  une variété et  $K$  un ensemble. Un faisceau localement constant de fibre  $K$  sur  $M$  est un faisceau  $\mathcal{K}$  tel que pour tout  $x_0 \in M$ , il existe un voisinage  $U$  et un isomorphisme  $\mathcal{K}|_U \simeq \underline{K}_U$ . Nous noterons  $\mathcal{K}_{x_0}$  la fibre de  $\mathcal{K}$  en  $x_0$  (Notation 1.2).*

**Définition 1.3.13.** *Un système local sur une variété  $M$  est un faisceau localement constant, dont la fibre  $K$  est un espace vectoriel. Si de plus  $(K, [, ,])$  est une algèbre de Lie et qu'il existe un crochet  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  sur  $\mathcal{K}$  et des isomorphismes  $\varphi_U : (\mathcal{K}(U), [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}) \simeq (K, [, ,])$  compatibles avec la restriction, on dit que  $\mathcal{K}$  est un système local en algèbres de Lie.*

Les systèmes locaux sur une variété  $M$  forment une sous-catégorie de celle des  $\mathbb{C}$ -faisceaux. Les deux résultats suivants sont alors bien connus :

**Lemme 1.3.4.1.** *Soit  $\mathcal{K}$  un système local sur une variété  $M$ , et  $f : M' \rightarrow M$  une application continue. Alors  $f^* \mathcal{K}$  est un système local sur  $M'$ . Si  $M'$  est simplement connexe, alors  $f^* \mathcal{K}$  est un faisceau constant.*

**Proposition 1.3.4.1.** *Soit  $M$  connexe et  $x \in M$ . Alors il y a une équivalence, notée  $Mon^x$ , entre la catégorie des systèmes locaux  $\mathcal{K}$  sur  $M$  et la catégorie des représentations de  $\pi_1(M, x)$ .*

*Démonstration.* Nous renvoyons à [20], Proposition I.1.3.  $\square$

**Définition 1.3.14.** *Soit  $\mathcal{K}$  un système local sur un espace  $M$ , de fibre un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $K$  et  $x \in M$ . La représentation  $Mon^x(\mathcal{K})$  de  $\pi_1(M, x)$  définie dans la Proposition 1.3.4.1 est appelée monodromie de  $\mathcal{K}$  en  $x$ .*

**Définition 1.3.15.** Soit  $M$  une variété complexe, et  $\nabla$  une connexion méromorphe sur un module localement libre  $\mathcal{E}$  sur  $M$ , avec pôles supportés en  $D$ . Une section horizontale pour  $\nabla$  est une section holomorphe  $s$  de  $\mathcal{E}$  sur  $U \subset M \setminus D$  telle que  $\nabla(s) = 0$ . On note  $\ker \nabla$  le sous-faisceau de  $\mathcal{E}|_{M \setminus D}$  des sections horizontales.

Le résultat suivant est classique :

**Lemme 1.3.4.2.** Soit  $\nabla$  comme dans la [Définition 1.3.15](#).

1. Il existe  $S \subset M$  maximal, de codimension supérieure à 1, tel que  $\ker \nabla|_{M \setminus (S \cup D)}$  est un système local sur  $M \setminus (S \cup D)$  ([Définition 1.3.15](#)).
2. Il y a équivalence entre  $R_\nabla = 0$  et  $\mathcal{E}|_{M \setminus D} = \ker \nabla \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{M \setminus D}$ . Dans ce cas,  $S = \emptyset$ .

*Démonstration.* Nous renvoyons au Théorème I.2.17 dans [\[20\]](#). □

**Définition 1.3.16.** Soit  $M$  une variété complexe et  $(\mathcal{E}, \nabla)$  une connexion holomorphe sur  $M$  et  $S \subset M$  comme au point 1. du [Lemme 1.3.4.2](#).

1. Lorsque le point 2. du [Lemme 1.3.4.2](#) est vérifié, la connexion holomorphe  $(\mathcal{E}, \nabla)$  est dite plate.
2. La monodromie de  $\nabla$  en  $x \in M \setminus S$ , notée  $Mon^x(\nabla)$  est celle du système local  $\ker \nabla|_{M \setminus S}$  en  $x$ .

Si  $\varphi : (\mathcal{V}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{V}', \nabla')$  est un isomorphisme de connexions méromorphes comme dans la [Définition 1.3.4](#), alors la restriction de  $\varphi|_{M \setminus D}$  au sous-faisceau  $\ker \nabla$  induit un isomorphisme entre  $\ker \nabla$  et  $\ker \nabla'$ . En particulier, pour  $x \in M \setminus D$ , l'isomorphisme  $\varphi_x : \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}'_x$  entre les fibres donne un isomorphisme de représentation :

$$\varphi_x \circ Mon^x(\nabla) = Mon^x(\nabla') \circ \varphi_x \quad (1.47)$$

### 1.3.5 Restriction d'une connexion méromorphe

Soit  $D$  un diviseur irréductible d'une variété complexe  $M$ . Soit  $(\mathcal{V}, \nabla)$  une connexion méromorphe sur  $(M, D)$  et  $S$  le sous-ensemble du [Lemme 1.3.4.2](#). Nous allons voir qu'une méthode pour étudier la monodromie de  $(\mathcal{V}, \nabla)$  au voisinage d'un point  $x_0 \in D \setminus S$ , est de la restreindre à une courbe non incluse dans  $D$  passant par  $x_0$ .

Soit  $\Sigma \subset M \setminus S$  une sous-variété de dimension  $< n$ , avec  $\Sigma \cap D = \{x_0\}$ . Soit  $j : \Sigma \hookrightarrow M$  l'inclusion et  $\mathfrak{m}_\Sigma \subset \mathcal{O}_M$  l'idéal des fonctions holomorphes s'annulant sur  $\Sigma$ . Alors  $\mathcal{O}_\Sigma = j^* \mathcal{O}_M / j^* \mathfrak{m}_\Sigma$ , et nous pouvons définir :

**Définition 1.3.17.** Soient  $\mathcal{V}$  et  $\Sigma$  comme ci-dessus.

1. On définit la restriction  $\mathcal{V}_\Sigma$  de  $\mathcal{V}$  à  $\Sigma$  au sens des fibrés comme le  $j^* \mathcal{O}_M$ -module localement libre  $\mathcal{O}_\Sigma \otimes j^* \mathcal{V}$ .
2. Le morphisme de restriction  $\rho : \mathcal{V}|_\Sigma \rightarrow \mathcal{V}_\Sigma$  est le morphisme surjectif de  $j^* \mathcal{O}_M$ -module correspondant au passage au quotient par  $j^* \mathfrak{m}_\Sigma \otimes \mathcal{V}|_\Sigma$ .

Le pullback  $j^* \nabla|_{M \setminus D}$  de la connexion holomorphe  $(\mathcal{V}|_{M \setminus D}, \nabla)$  ([Définition 1.3.3](#)) s'étend alors en une connexion méromorphe  $\bar{\nabla}$  sur  $\mathcal{V}_\Sigma$  avec pôle en  $x_0 = j^* D$  (voir par exemple [\[44\]](#), 0.14.a).

**Définition 1.3.18.** La connexion méromorphe  $(\mathcal{V}_\Sigma, \bar{\nabla})$  est appelée restriction de  $(\mathcal{V}, \nabla)$  à  $\Sigma$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $M$ . Soit  $x \in \Sigma$ . Alors les fibres  $\mathcal{F}_x$  et  $(\mathcal{F}|_\Sigma)_x$  sont égales (voir [Notation 1.3](#)). Par conséquent, la fibre  $\rho_x$  du morphisme de restriction se restreint en un morphisme :

$$\rho_x : (\ker \nabla)_x \longrightarrow (\mathcal{V}_\Sigma)_x \quad (1.48)$$

**Lemme 1.3.5.1.** *Soit  $(\mathcal{V}, \nabla)$ ,  $S$  comme ci-dessus et  $\Sigma$  une sous variété complexe de dimension 1 dans  $M \setminus S$  avec  $\Sigma \cap D = \{x_0\}$ . Supposons de plus qu'il existe un voisinage simplement connexe  $U_{x_0}$  de  $\Sigma$  dans  $M \setminus S$ . Alors :*

1. On a  $\rho(\ker \nabla) \subset \ker \bar{\nabla}$  où  $\rho$  est le morphisme de restriction ([Définition 1.3.17](#)).
2. Pour tout  $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$ , le morphisme  $j_* : \pi_1(\Sigma \setminus x_0, x) \longrightarrow \pi_1(U_{x_0} \setminus D, x)$  induit par l'inclusion est un isomorphisme.
3. Soit  $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$  et  $\rho_x$  défini par ([1.48](#)). Soient  $[\gamma] \in \pi_1(U_{x_0} \setminus D, x)$  et  $[\gamma'] = j_*^{-1}([\gamma])$ . Soient  $\mu = \text{Mon}^x(\nabla)([\gamma])$  et  $\bar{\mu} = \text{Mon}^x(\bar{\nabla})([\gamma'])$ . Alors :  $\rho_x \circ \mu = \bar{\mu} \circ \rho_x$ .

*Démonstration.* 1. Ceci est immédiat par définition du pullback d'une connexion ([Définition 1.3.3](#)).

2. Par l'hypothèse sur  $\Sigma$ , la restriction  $(\mathcal{V}_\Sigma, \bar{\nabla})$  de  $(\mathcal{V}, \Sigma)$  est bien définie. Fixons un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $\Sigma$  et une coordonnée  $z$  sur  $V$ . Comme  $\Sigma$  est une sous-variété analytique de  $M$ ,  $T\Sigma$  est un sous-fibré vectoriel complexe de  $TM|_\Sigma$ . Donc la trivialisatoin  $\frac{\partial}{\partial z}$  de  $T\Sigma$  sur  $V$  s'étend en un champ de vecteur holomorphe  $Z_1$  sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $M$ , ne s'annulant jamais. Ce dernier induit un feuilletage holomorphe de  $U$  par des courbes complexes  $(\Sigma_e)_{e \in U}$  avec  $\Sigma_{e_0} = \Sigma$ . Par un résultat classique sur les feuilletages holomorphes, quitte à restreindre  $U$ , il existe des coordonnées locales  $(z_1, \dots, z_n)$  sur cet ouvert telles que chaque feuille  $\Sigma_e$  est d'équation  $z_2 = \dots = z_n = \text{cste}$  et  $z_1$  est une coordonnée globale sur  $\Sigma_e$ . La fibration  $\pi : U \longrightarrow \Sigma$  donnée par  $\pi(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, 0, \dots, 0)$  est une rétractation de  $U$  sur  $\Sigma$ . Par conséquent, le morphisme  $j_*$  est l'isomorphisme inverse de  $\pi_*$ .
3. Par le [Lemme 1.3.4.1](#), la restriction  $(\ker \nabla)|_\Sigma$  au sens des faisceaux est un système local sur  $\Sigma$ . Sa monodromie en  $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$  vérifie  $\text{Mon}^x(\ker \nabla)|_\Sigma \circ j_* = \text{Mon}^x(\ker \nabla)$  où  $j$  est le morphisme défini en 1. Les fibres  $(\ker \nabla)|_{\Sigma, x}$  et  $(\ker \nabla)_x$  s'identifient naturellement. En particulier  $\mu_\Sigma := \text{Mon}^x(\ker \nabla)_\Sigma([\gamma])$  vérifie :

$$\mu_\Sigma = \mu \quad (1.49)$$

Appliquons la [Proposition 1.3.4.1](#) au morphisme de restriction  $\rho : (\ker \nabla)|_\Sigma \longrightarrow \ker \bar{\nabla}$  (voir [Définition 1.3.17](#)). Nous obtenons :

$$\rho_x \circ \mu_\Sigma = \bar{\mu} \circ \rho_x \quad (1.50)$$

d'où le résultat. □

Le résultat ci-dessus permet de se ramener à l'étude de la monodromie d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 sur une courbe complexe :

**Exemple 1.3.2.** *Soient  $M = \mathbb{C}^2$ ,  $D = \{z_1 = 0\}$ , la connexion est le couple  $(\mathcal{V}, \nabla)$  avec  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_M^{\oplus 2}$  et :*

$$\nabla = d + dz_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{z_1} \end{pmatrix} + dz_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Les solutions fondamentales de

$$y_2' = -\frac{\alpha}{z_1} y_2 \quad (1.52)$$

sont connues. Comme  $\Sigma \cap D = \{x_0\}$  où  $x_0$  est l'origine, le [Lemme 1.3.5.1](#) nous permet de conclure que la monodromie correspond à celle de l'équation [\(1.52\)](#).

Nous pouvons également retrouver le résultat fondamental suivant à partir du [Lemme 1.3.4.2](#):

**Lemme 1.3.5.2.** *Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre sur  $M$  et  $\nabla$  une connexion méromorphe sur  $M$  avec pôles supportés en  $D \subset M$ . Pour tout  $x \in M \setminus D$ , l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $ev_x : \mathcal{V}_x \rightarrow \mathcal{V}(x)$  (voir [Notation 12](#)) se restreint en une application injective à  $\ker(\nabla)_x$ .*

*Démonstration.* Notons, pour toute courbe complexe  $\Sigma$  contenant  $x$ ,  $\rho_x$  le morphisme [Équation 1.48](#). Un germe  $s_x \in \mathcal{V}_x$  pour lequel  $\rho_x(s_x)$  s'annule quelque soit  $\Sigma$  est clairement nul. Il suffit par conséquent de fixer  $\Sigma$  et de prouver que  $ev_x : (\mathcal{V}_\Sigma)|_x \rightarrow \mathcal{V}(x)$  est injectif en restriction à  $\rho_x(\ker \nabla)_x$ . Par le [Lemme 1.3.5.1](#),  $\rho(\ker \nabla)_x = \ker(\bar{\nabla})_x$  où  $\bar{\nabla}$  est la restriction de  $\nabla$  à  $\Sigma$ . Cette dernière est plate, et on conclut à l'aide du [Lemme 1.3.4.2](#), point 2.  $\square$

Ce chapitre introduit les *géométries de Cartan holomorphes branchées*. Ces objets sont introduits par I.Biswas et S.Dumitrescu dans [\[4\]](#), et étendent les géométries de Cartan holomorphe au sens où une géométrie de Cartan holomorphe branchée est holomorphe en restriction à un ouvert dense de la variété support. Certaines constructions utilisées dans la résolution du problème d'équivalence (voir chapitre suivant) peuvent donc être appliquées sur cet ouvert dense, mais n'aboutissent pas à une géométrie de Cartan holomorphe branchée. Nous introduisons pour cette raison les *géométries de Cartan méromorphes*, ainsi que les analogues méromorphes des structures géométriques induites par les géométries de Cartan holomorphes : les *extensions méromorphes*.

## 1.4 Géométries de Klein

Nous commençons par définir les modèles des *géométries de Cartan holomorphes et méromorphes* : les *géométries de Klein*. Ces dernières définissent des variétés complexes  $G/P$  munies de  $Q$ -structures holomorphes, où  $Q$  est un groupe dépendant de la géométrie de Klein. Ces  $Q$ -structures holomorphes sont homogènes sous l'action d'un groupe de Lie complexe  $G$ . Nous donnons plusieurs exemples, dont les *modèles paraboliques complexes* et les *prolongations de Tanaka*.

### 1.4.1 Définition et propriété de base

**Définition 1.4.1.** *Une géométrie de Klein (complexe) est un couple  $(G, P)$  où  $G$  est un groupe de Lie (complexe),  $P$  est un sous-groupe (complexe) fermé et  $G/P$  un variété (complexe) de dimension finie.*

Une géométrie de Klein (complexe)  $(G, P)$  définit un espace homogène  $G/P$ . Cette variété (complexe) possède une propriété particulière : en effet,  $G$  est un fibré  $P$ -principal (holomorphe) sur  $G/P$  via la projection  $p_{G/P} : G \rightarrow G/P$  naturelle, et l'action de  $P$  sur  $G$  à droite. De plus,  $G$  est équipé de sa forme de Maurer-Cartan  $\omega_G$ . Cela donne une trivialisatoin  $TG \simeq \mathcal{O}_G \otimes \mathfrak{g}$  équivariante pour les linéarisations  $(dr_b)_{b \in P}$  et  $(\phi_p^g)_{p \in P}$  (voir [Proposition 1.1.3.1](#)). La sous-algèbre  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$  est une sous-représentation de la représentation adjointe  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ . Cette dernière passe donc au quotient :

**Définition 1.4.2.** *La représentation adjointe  $\underline{ad} : P \rightarrow GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  obtenue en considérant les quotients des endomorphismes de  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est appelée représentation adjointe quotient.*

**Proposition 1.4.1.1.** *Le fibré tangent  $T(G/P)$  est isomorphe au fibré  $G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  représentation adjointe quotient du fibré  $P$ -principal  $p_{G/P} : G \rightarrow G/P$ .*

*Démonstration.* Considérons la composée  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_G : TG \rightarrow \mathcal{O}_G \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  de la forme de Maurer-Cartan  $\omega_G$  et de la projection naturelle  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$ . Il s'agit d'un morphisme de  $\mathcal{O}_G$ -modules  $P$ -équivariant, et le sous-faisceau  $Im(\iota)$  image du morphisme  $\iota$  défini dans la [Proposition 1.1.3.1](#) est contenu dans son noyau par définition. Par le [Corollaire 1.1.1](#), nous en déduisons qu'il correspond à une section holomorphe globale de  $\Omega_{G/P}^1 \otimes G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Par construction, en tout point  $x \in G/P$ , cette section s'évalue en un isomorphisme entre  $T_x G/P$  et  $G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})(x)$ . Par conséquent, elle correspond à un isomorphisme entre  $T(G/P)$  et  $G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ .  $\square$

Notons  $Q$  l'image de la représentation adjointe quotient ([Définition 1.4.2](#)) et  $P'$  son noyau. En fixant une base de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , on identifie canoniquement  $Q$  à un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Alors, par la [Proposition 1.4.1.1](#),  $T(G/P)$  est isomorphe à  $G/P'(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  et  $G/P'$  s'identifie donc à une réduction holomorphe de  $R^1(G/P)$  au sous-groupe  $Q$  : la variété homogène  $G/P$  d'une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  est équipée de la  $Q$ -structure holomorphe  $G/P'$ .

Par définition,  $L_g^* \omega_G = \omega_G$  pour tout  $g \in G$ . On dit que  $L_g$  est un automorphisme de  $(G, \omega_G)$ , et comme  $G$  agit transitivement sur  $G/P$  la géométrie de Klein  $(G, P)$  est dite homogène. De plus,  $L_g$  est clairement une isométrie de la  $Q$ -structure holomorphe  $G/P'$ , car la restriction de la solderform de  $G/P$  à  $G/P'$  coïncide avec la projection de  $\omega_G$  sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  (identifié à  $\mathbb{C}^n$  via une base comme ci-dessus).

**Définition 1.4.3.** *Une géométrie de Klein  $(G, P)$  est effective si  $P$  n'admet pas de sous-groupe normal  $N \subset G$  non trivial.*

Pour toute géométrie de Klein complexe  $(G, P)$ , en notant  $N$  le sous-groupe normal maximal de  $G$  contenu dans  $P$ , alors  $(G'', P'') = (G/N, P/N)$  est une géométrie de Klein complexe effective (Nous renvoyons à [\[45\]](#), Chapitre 4, Proposition 4.3.1 pour la preuve de ce fait). En particulier, nous avons :

**Lemme 1.4.1.1.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe et  $Q = \underline{ad}(P) \subset GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Alors il existe une géométrie de Klein complexe  $(G'', P'')$  de même dimension que  $(G, P)$  telle que  $\underline{ad}(P'') = Q$ .*

## 1.4.2 Cohomologie relative d'une représentation associée à une géométrie de Klein

Avant de donner des exemples, nous introduisons un outil important dans l'étude des géométries de Klein  $(G, P)$  et de leurs versions infinitésimales : la *cohomologie relative*.

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe,  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$  une représentation de  $G$  et  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_G \otimes \mathbb{V}$ . L'action à droite de  $G$  sur lui même permet de définir la linéarisation à droite  $(\phi_g^{\mathbb{V}})_{g \in G}$  ([Définition 1.1.9](#)). En particulier, on a une action sur l'espace vectoriel des sections globales  $H^0(G, \mathcal{V})$ . Par définition de  $(\phi_g^{\mathbb{V}})_{g \in G}$ , cette dernière préserve le sous-espace  $V$  des sections constantes  $1_G \otimes v$ . On note :

$$\varphi_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow V \tag{1.53}$$

l'isomorphisme qui à  $v \in \mathbb{V}$  associe  $1_G \otimes v \in V$ .

Considérons l'exemple de la représentation adjointe  $\mathbb{V} = \mathfrak{g}$ . La forme de Maurer-Cartan  $\omega_G$  de  $G$  ([Définition 0.0.1](#)) correspond à un isomorphisme de  $\mathcal{O}_G$ -modules  $\Phi_{\omega_G} : TG \rightarrow \mathcal{V}$ , équivariant pour la linéarisation  $(dr_g)_{g \in G}$  sur  $TG$ . Les sections  $X \in H^0(U, TG)$  avec  $\Phi_{\omega_G}(X) \in V$  sont exactement les champs invariants à gauche sur  $G$ . Nous retrouvons l'identification  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  entre les champs invariants à gauche et  $\mathfrak{g}$ . De manière duale, le sous-espace des 1-formes holomorphes invariants à gauche est une  $G$ -représentation isomorphe à  $\mathfrak{g}^*$  via un isomorphisme noté  $\varphi_{\mathfrak{g}^*}$ .

Plus généralement, pour  $m \geq 0$ , on définit des morphismes de représentations par :

$$\varphi_m = \wedge^m \varphi_{\mathfrak{g}^*} \otimes \varphi_{\mathbb{V}} : \wedge^m \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{V} \longrightarrow H^0(G, \Omega_G^1 \otimes \mathbb{V}) \quad (1.54)$$

où les actions sont respectivement données par  $\wedge^m \text{ad}^*(g) \otimes \rho_{\mathbb{V}}(g)$  et  $\wedge^m dr_g^* \otimes \phi_g^{\mathbb{V}}$ . L'image de  $\varphi_m$  est l'ensemble

$$\text{Im}(\varphi_m) = \Omega_G^m(\mathbb{V}) \quad (1.55)$$

des  $m$ -formes invariantes à gauche, i.e les sections  $\eta$  telles que  $l_g^* \eta = \eta$  pour tout  $g \in G$ . Cela invite à calculer la cohomologie de  $\mathcal{V}$  à partir d'un complexe de  $G$ -représentations  $C^m(\mathfrak{g}, \mathbb{V})$  représentant les formes invariantes :

**Définition 1.4.4.** *Le  $m$ -ième module de Chevalley  $C^m(\mathfrak{g}, \mathbb{V})$  est l'espace vectoriel  $\wedge^m \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{V}$  muni de la représentation  $\wedge^m \text{ad}^* \otimes \rho_{\mathbb{V}}$  de  $G$ .*

Soit  $d$  la différentielle extérieure de De Rham et son extension aux  $\mathbb{V}$ -formes  $d \otimes Id_{\mathbb{V}}$ . Pour  $\eta \in \Omega_G^m(\mathbb{V})$ ,  $d \otimes Id_{\mathbb{V}}(\eta)$  est dans le sous-espace  $\Omega_G^{m+1}(\mathbb{V})$  (voir [Lemme 1.3.2.2](#)).

**Définition 1.4.5.** *Soit  $m \geq 0$ . La différentielle de Kostant est l'application linéaire  $\partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}}$  faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} C^m(\mathfrak{g}, \mathbb{V}) & \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}}} & C^{m+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{V}) \\ \varphi_m \uparrow & & \uparrow \varphi_{m+1} \\ \Omega_G^m(\mathbb{V}) & \xrightarrow{d \otimes Id_{\mathbb{V}}} & \Omega_G^{m+1}(\mathbb{V}) \end{array} \quad (1.56)$$

Le complexe  $(C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{V}), \partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}})$  est appelé complexe de Chevalley associé au module  $\mathbb{V}$ . Les espaces  $\mathbb{H}^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) = \text{Ker} \partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}} / \text{Im} \partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}}$  sont appelés espaces de cohomologies de la représentation  $\rho_{\mathbb{V}}$ .

**Exemple 1.4.1.** *Considérons la représentation de  $\mathfrak{g}$  adjointe :  $\mathbb{V} = \mathfrak{g}$ . Le premier module de Chevalley est par définition  $C^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \text{Ker} \partial \cap \text{End}(\mathfrak{g})$ . Ce sont donc les endomorphismes  $\phi \in \text{End}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  satisfaisant l'identité de Jacobi :  $[\phi(A), B] + [A, \phi(B)] - \phi([A, B]) = 0$ . Ce sont donc les dérivations de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . L'image  $\text{Im} \partial$  est l'ensemble des dérivations intérieures, i.e les endomorphismes  $\phi$  représentés par un élément  $A \in \mathfrak{g}$  au sens où  $\phi(B) = [A, B]_{\mathfrak{g}}$  pour tout  $B \in \mathfrak{g}$ . La première cohomologie  $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  représente donc les dérivations modulo les dérivations intérieures.*

**Proposition 1.4.2.1.** *Soit  $A_1, \dots, A_N$  une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $A_1^*, \dots, A_N^*$  la base duale. Soit  $\phi \in C^m(\mathfrak{g}, \mathbb{V})$ . On a la formule :*

$$\begin{aligned} \partial_{\mathfrak{g}, \mathbb{V}} \phi(A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_{m+1}}) &= \sum_{k=1, \dots, m+1} (-1)^{k+1} \rho_{\mathbb{V}}(A_k) \phi(A_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{A}_{i_k} \wedge \dots \wedge A_{i_{m+1}}) \\ &\quad + \sum_{k,l} (-1)^{k+l+1} \phi([A_{i_k}, A_{i_l}]_{\mathfrak{g}} \wedge A_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{A}_{i_k} \wedge \dots \wedge \hat{A}_{i_l} \wedge \dots \wedge A_{i_{m+1}}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

*Démonstration.* On reporte à la preuve du Théorème 10.1 de [\[19\]](#).  $\square$

Supposons à partir de maintenant qu'il existe une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{p}$  en sous-algèbres de Lie et considérons  $P = \exp_G(\mathfrak{p})$ . En identifiant  $\mathfrak{g}_-$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  par la projection naturelle, on obtient une action de  $\mathfrak{p}$  (et donc de  $P$  qui est simplement connexe) sur  $\mathfrak{g}_-$  appelée *représentation adjointe quotient*  $\underline{Ad} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  (resp. *représentation adjointe quotient*

$ad: P \rightarrow GL(\mathfrak{g}_-)$  de  $P$ ). Si  $\mathbb{V}$  est un  $\mathfrak{g}$ -module, alors en particulier  $\mathbb{V}$  est un  $\mathfrak{g}_-$ -module. Par conséquent, pour tout  $m \geq 0$ , l'espace

$$C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) = \bigwedge^m \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathbb{V} \quad (1.58)$$

est une représentation de  $\mathfrak{p}$ , et donc de  $P$ .

**Définition 1.4.6.** *La différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative associée à  $\mathbb{V}$  est le morphisme*

$$\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}: C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) \rightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) \quad (1.59)$$

obtenu en remplaçant  $\mathfrak{g}$  par  $\mathfrak{g}_-$  dans la [Définition 1.4.5](#). Les espaces de cohomologie associés sont noté  $\mathbb{H}^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$ . Le complexe  $(C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}), \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}})$  est appelé complexe de Chevalley relatif.

D'un point de vue géométrique, le complexe de Chevalley relatif peut se retrouver en appliquant la construction de la ?? aux formes invariantes à gauche sur l'espace homogène  $G/P$  (voir Théorème 22.1 [\[19\]](#)).

Fixons maintenant des produits hermitiens  $(\langle, \rangle_m)_{m \geq 0}$  sur chaque module  $C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$  de la [Définition 1.4.6](#).

**Définition 1.4.7.** *Pour tout  $m \geq 0$ , l'application linéaire  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*: C^{m+1}(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) \rightarrow C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$  obtenue comme l'adjoint de  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}$  pour le produit hermitien  $\langle, \rangle_m$  est appelé codifférentielle associée à  $\langle, \rangle_m$ . On définit également le Laplacien associé par  $\square_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} = \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* + \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}$ .*

**Proposition 1.4.2.2.** *Pour tout  $m \geq 1$ , on a :*

1. *La propriété de disjonction :*

$$\ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) \cap \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) \cap \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) = \{0\} \quad (1.60)$$

2. *La décomposition orthogonale :*

$$C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) = \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) \oplus \ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) \quad (1.61)$$

3. *La décomposition de Hodge :*

$$C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) = \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) \oplus \ker(\square_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) \oplus \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) \quad (1.62)$$

4. *Les espaces de cohomologie  $\mathbb{H}^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$  sont donc isomorphes à  $\ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) / \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*)$  pour tout  $m \geq 1$ .*

*Démonstration.* Prouvons la formule [\(1.60\)](#). Soit  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \phi \in \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}) \cap \ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*)$ , avec  $\phi \in C^{m-1}(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$ . Alors par définition :

$$\langle \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \phi, \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \phi \rangle_m = \langle \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \phi, \phi \rangle_{m-1} = 0 \quad (1.63)$$

et par conséquent  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \phi = 0$ . De manière similaire, si  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}} \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* \varphi = 0$ , alors par définition  $\langle \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^* \varphi, \varphi \rangle = 0$ .

La formule [\(1.62\)](#) et l'isomorphisme  $\mathbb{H}^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}) \simeq \ker(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*) / \text{Im}(\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}^*)$  est une conséquence de cette propriété (voir preuve du Théorème 3.3.1 de [\[14\]](#)).  $\square$

### 1.4.3 Géométries de Klein affines

Nous donnons deux exemples de géométries de Klein complexes *réductives* :

**Définition 1.4.8.** Une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  est réductive si et seulement si la représentation adjointe restreinte  $\text{ad} : P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est la somme directe de  $\mathfrak{p}$  et d'une sous-représentation  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ .

**Exemple 1.4.2** (Le modèle de translation). Un modèle de translation est un couple de la forme  $(G, \{Id_G\})$  où  $G$  est un groupe de Lie et  $\{Id_G\}$  le sous groupe trivial.

**Exemple 1.4.3** (Le modèle affine). La géométrie de Klein affine générale de dimension  $n$  est le couple  $(\text{Aff}(\mathbb{C}^n), GL_n(\mathbb{C}))$  où  $\text{Aff}(\mathbb{C}^n)$  est le groupe affine de  $\mathbb{C}^n$ .

1. L'espace homogène  $G/P$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{C}^n$ .
2. Une base de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  où  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,\dots,n}$  sont les générateurs infinitésimaux des translations par les vecteurs  $(\frac{\partial}{\partial z_i})_{i=1,\dots,n}$ . Les vecteurs complémentaires  $(\mathbf{e}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  sont les endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  correspondant aux matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , i.e  $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_k]_{\mathfrak{g}} = \delta_k^i \mathbf{e}_j$ . Ils forment une base de  $\mathfrak{p} = \text{End}(\mathbb{C}^n)$ . Les autres relations non triviales dans  $\mathfrak{g}$  sont données par  $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{ji}]_{\mathfrak{g}} = \mathbf{e}_{ii} - \mathbf{e}_{jj}$  si  $j \neq i$ .
3. La 1-forme  $\tilde{\omega}$  du point 2. est une connexion  $GL_n(\mathbb{C})$ -principale holomorphe sur  $G$ . Il s'agit de l'unique connexion principale plate telle que la section  $\sigma$  est horizontale. En particulier,  $G/P$  est équipée d'une connexion affine holomorphe plate.

*Démonstration.* 1. En considérant l'orbite de l'origine  $0 \in \mathbb{C}^n$  par  $G$ , l'espace homogène  $G/P$  s'identifie clairement à  $\mathbb{C}^n$ .

2. La forme de Maurer-Cartan est un isomorphisme  $P$ -équivariant entre  $TG$  et  $\mathcal{O}_G \otimes \mathfrak{g}$  pour les linéarisations  $(dR_b)_{b \in P}$  et  $(\phi_b^{\mathfrak{g}})_{b \in P}$ . Le résultat s'obtient en considérant sa projection sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , i.e  $\theta_0$ . Par le [Proposition 1.1.4.1](#), elle identifie  $E$  à  $R^1(G/P)$ .
3. La première affirmation est une conséquence immédiate de l'équivariance de la forme de Maurer-Cartan. □

**Exemple 1.4.4** (Le modèle euclidien). Il s'agit d'une réduction de l'Exemple précédent au sous-groupe orthogonal : le modèle euclidien  $(\text{Euc}_n(\mathbb{C}), O_n(\mathbb{C}))$ . Ici  $\text{Euc}_n(\mathbb{C}) = O_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$  est le sous-groupe de  $\text{Aff}(\mathbb{C}^n)$  des automorphismes de la métrique holomorphe canonique  $q_0$  (voir [Exemple 1.2.3](#)) sur  $T(G/P) = T\mathbb{C}^n$ . Une base de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{ij} - \mathbf{e}_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \tag{1.64}$$

où  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  est la base de l'Exemple [1.4.3](#) ( $\mathfrak{p} = \text{Lie}(O_n(\mathbb{C}))$  est la sous-algèbre de  $\text{End}(\mathbb{C}^n)$  des matrices antisymétriques). Un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$  est encore la sous-algèbre abélienne  $\mathfrak{m} = \mathbb{C}^n$  engendrant les translations dans  $\text{Aff}(\mathbb{C}^n)$ . Toutes les relations non triviales dans  $\mathfrak{g}$  se déduisent à partir des relations pour le modèle affine général.

### 1.4.4 Algèbres de Lie graduées et géométries de Klein paraboliques

Nous voulons maintenant introduire une grande classe d'exemples : les *modèles gradués* (voir [Définition 1.4.21](#)). Cela nécessite d'introduire la notion de sous-groupe parabolique d'un groupe de Lie complexe semi-simple  $G$ , et d'expliquer pourquoi cela définit une graduation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

**Définition 1.4.9.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est graduée si il existe des sous-espaces  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  tels que  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$  et pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}$ , on a  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ . Nous noterons dans ce cas, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i \quad \mathfrak{g}^i = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{g}_j \quad (1.65)$$

Le degré de la graduation  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est l'entier minimal  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\bigoplus_{|i| > k} \mathfrak{g}_i = \{0\}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , nous notons  $n_i = \dim(\mathfrak{g}_i)$ .

En particulier,  $\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{p}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ , et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{p}$ . Supposons à présent que  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie complexe  $G$ .

**Définition 1.4.10.** Le sous-groupe  $G_0 = \exp_G(\mathfrak{g}_0)$  est le sous-groupe de Levi associé à  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

**Lemme 1.4.4.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est graduée par  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Alors le sous-groupe de Levi  $G_0$  est un sous-groupe solide de  $P$  ([Définition 1.2.3](#)).

*Démonstration.* Le groupe  $P$  est le produit semi-direct de  $G_0$  et du sous-groupe distingué  $P^+ = \exp_G(\mathfrak{g}^1)$ . Par ailleurs,  $\mathfrak{g}^1$  est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$ . Par conséquent,  $P^+$  est homéomorphe à un espace vectoriel, donc  $P/P^+ \simeq G_0$  est solide.  $\square$

**Définition 1.4.11.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie graduée par  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Une base  $(\mathfrak{e}_j^i)_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j=1, \dots, n_i}}$  est graduée si pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $(\mathfrak{e}_j^i)_{j=1, \dots, n_i}$  est une base de  $\mathfrak{g}_i$  et si pour tous couples  $(i, j)$  et  $(i', j')$  d'indices, il existe un indice  $(i'', j'')$  tel que :

$$[\mathfrak{e}_j^i, \mathfrak{e}_{j'}^{i'}]_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{e}_{j''}^{i''} \quad (1.66)$$

Il est immédiat, en utilisant le théorème de la base incomplète, que tout algèbre de Lie graduée de dimension finie admet une base graduée.

Un exemple important est la graduation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  d'un groupe de Lie complexe semi-simple  $G$  relativement à un sous groupe *parabolique*  $P \subset G$ . Nous reportons à [\[33\]](#) pour la définition des *sous-algèbres de Cartan*, des *systèmes de racines* de *racines simples*, de *bases de Chevalley* et les résultats classiques utilisés à leurs propos. Donnons un exemple :

**Exemple 1.4.5.** Une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$  est constituée des matrices diagonales de trace nulle. Notons  $(a_{i,j}^*)_{i,j=1, \dots, m}$  la base duale des matrices élémentaires dans  $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ . Un système de racines simples pour  $\mathfrak{g}$  est  $\Delta^0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\}$  où  $\alpha_i = a_{i,i}^* - a_{i+1,i+1}^*$

**Exemple 1.4.6.** Soit  $G = SL_3(\mathbb{C})$  et  $G_0$  le sous-groupe des matrices diagonales de  $G$ .

1. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$  de  $G_0$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Un système de racines positives est donné par  $\alpha, \beta, \gamma$  où  $\alpha = \epsilon_{1,2}$ ,  $\beta = \epsilon_{2,3}$  et  $\gamma = \alpha + \beta$ . On note  $P$  le sous-groupe de Borel standard de  $G$  associé.

2. Une base de Chevalley de  $G$  est donnée par  $(\mathfrak{e}_{-\gamma}, \mathfrak{e}_{-\alpha}, \mathfrak{e}_{-\beta}, \mathfrak{h}_{\alpha}, \mathfrak{h}_{\beta}, \mathfrak{e}_{\alpha}, \mathfrak{e}_{\beta}, \mathfrak{e}_{\gamma})$  où  $\mathfrak{h}_{\alpha}, \mathfrak{h}_{\beta}$  est la base duale de  $\alpha, \beta$  dans  $\mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{e}_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathfrak{e}_{-\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\mathfrak{e}_{\lambda} = {}^t \mathfrak{e}_{-\lambda}$  pour toute racine positive  $\lambda$ .

Fixons une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ . Il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que pour tout  $A \in \mathfrak{u}$ ,  $\text{Ad}(A)$  est nilpotent,  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$  et  $\mathfrak{u}$  maximale pour cette propriété.

**Définition 1.4.12.** *Le sous-groupe de Borel standard associé à  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$  est le sous-groupe  $B = \exp_G \mathfrak{b}$  où  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$ . Un sous-groupe fermé  $P \subset G$  est dit parabolique lorsqu'il contient un sous-groupe de Borel standard.*

Le résultat suivant est du à A. Borel (voir par exemple [9], Corollaire 16.13) :

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $G$  semi-simple complexe et  $P \subset G$  un sous-groupe fermé. Alors  $G/P$  est une variété complexe projective si et seulement si  $P$  est parabolique.*

Nous fixons  $G$  un groupe de Lie complexe semi-simple et  $P \subset G$  un sous-groupe parabolique contenant  $H = \exp_G(\mathfrak{h})$ , et nous expliquons comment cela définit une graduation de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Soit  $\Delta$  un système de racine associé à  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\Pi_P \subset \Delta$  l'ensemble des racines simples  $\lambda \in \Delta$  telles que  $\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{p}$ .

**Définition 1.4.13.** *La hauteur parabolique  $ht_P(\lambda)$  de  $\lambda \in \Delta$  relativement à  $P$  est le nombre minimal  $h$  de racines simples  $\mu_1, \dots, \mu_h \in \Delta$  telles que  $\lambda - \mu_1 - \dots - \mu_h \in \Pi_P$ . Le degré parabolique de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\mathfrak{p}$  est  $k = \max \{ht_P(\lambda) \mid \lambda \in \Delta\}$ .*

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $G$  semi-simple complexe,  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan, et un système de racine  $\Delta$  sur  $\mathfrak{h}$ . Il y a bijection entre les sous-groupes paraboliques  $P \subset G$  contenant  $H = \exp_G(\mathfrak{h})$  et les  $k$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  où  $k$  est le degré parabolique de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\mathfrak{p}$ . Cette bijection associe le sous-groupe parabolique  $P$  à la graduation  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  où*

$$\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{\alpha \in \Delta \mid ht_P(\alpha) = i} \mathfrak{g}_\alpha \quad (1.67)$$

où  $ht_P$  est la hauteur parabolique et  $\mathfrak{g}_\alpha$  l'espace de racine de  $\alpha \in \Delta$ . Réciproquement, à  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  on associe le sous groupe parabolique  $P = \exp_G(\mathfrak{p})$  où  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0$ .

*Démonstration.* Voir par exemple [14], Théorème 3.2.1 □

Revenons au cas général d'un groupe de Lie complexe  $G$  dont l'algèbre de Lie est graduée  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , et fixons une  $G$ -représentation  $\mathbb{V}$ . Nous notons pour tout  $m \geq 0$  le  $m$ -ième module de Chevalley  $C^m = C^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})$  associé (Définition 1.4.4) et  $\partial = \partial_{\mathfrak{g}_-, \mathbb{V}}$  la différentielle de Kostant relative à  $\mathfrak{g}_-$  (Définition 1.4.6).

**Définition 1.4.14.** *Supposons  $\mathfrak{g}$  graduée par  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . On définit :*

1. *Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , les sous-espaces  $C_l^m$  et  $C^{m,l}$  de  $C^m$  par :*

$$C_l^m = \bigoplus_{k + \sum_{s=1}^m i_s = l} \mathfrak{g}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \mathfrak{g}_{i_m}^* \otimes \mathfrak{g}_k \quad \text{et} \quad C^{m,l} = \bigoplus_{l' \geq l} C_{l'}^m \quad (1.68)$$

2. *La décomposition en somme directe par les  $(C_l^m)_{l \in \mathbb{Z}}$  est nommée graduation par le degré. Le degré d'un élément  $\phi \in C^m$  est l'entier minimal  $l \in \mathbb{Z}$  avec  $\phi \in C^{m,l}$ .*
3. *La projection  $\pi_l$  de  $C^m$  sur l'un de ses facteurs directs  $C_l^m$ . La projection  $\pi_{\leq l}$  de  $C^m$  sur  $\bigoplus_{l'=-\infty}^l C_{l'}^m$  parallèlement à  $C^{m,l+1}$ .*
4. *La composante  $\mathbb{H}^m(\mathfrak{g}_-, \mathbb{V})_l = \ker(\partial_l) / \text{Im}(\partial_l)$  de la cohomologie relative associée.*

Soient  $G_0 = \exp_G(\mathfrak{g}_0)$  et  $P = \exp_G(\mathfrak{p})$  (Définition 1.4.9). L'action adjointe de  $G_0$  (resp.  $G$ ) préserve la graduation  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  (resp. la filtration  $(\mathfrak{g}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ). Par conséquent,  $C_l^m$  (resp.  $C^{m,l}$ ) est un  $G_0$ -module (resp. un  $P$ -module).

**Lemme 1.4.4.2.** *Pour tout  $m \geq 0$  et  $l \in \mathbb{Z}$ , on a  $\partial(C^{m,l}) \subset \partial C^{m+1,l}$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le [Proposition 1.4.2.1](#) à une base graduée de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Définition 1.4.15.** Soit  $\mathbb{V}$  une  $G$ -représentation. Soient  $m \geq 0$  et  $l \in \mathbb{Z}$ .

1. On définit le morphisme  $\partial_l : C_l^m \rightarrow C_l^{m+1}$  par :

$$\pi_l \circ \partial \tag{1.69}$$

2. Fixons  $m \geq 0$ . Pour tout supplémentaire  $\mathfrak{n}^l$  de  $Im(\partial_l) \subset C_l^{m+1}$  et  $\mathfrak{m}_l$  de  $ker(\partial_l)$  dans  $C_l^m$ . La restriction  $\partial_l|_{\mathfrak{m}_l}$  est un isomorphisme sur son image dont on note l'inverse  $\partial_l^{-1}$ . Le morphisme de scindage  $\chi_l$  associé par :

$$\chi_l = \partial_l^{-1} \circ proj_{Im(\partial_l)}^{\mathfrak{n}_l} \tag{1.70}$$

où  $proj_{Im(\partial_l)}^{\mathfrak{n}_l}$  est la projection sur  $Im(\partial_l)$  parallèlement à  $\mathfrak{n}_l$ .

En particulier, soient  $\mathfrak{n}_l$ ,  $\mathfrak{m}_l$  et  $\chi_l$  comme dans la [Définition 1.4.15](#), alors :

$$\forall \phi^l \in C^{m,l}, \phi^l - \partial_l \circ \chi_l \circ \pi_l(\phi_l) \in \mathfrak{n}_l \tag{1.71}$$

Si de plus  $\mathfrak{n}_l$  et  $\mathfrak{m}_l$  sont stables par l'action d'un sous-groupe  $O \subset G_0$ , alors  $\chi_l$  est un morphisme de  $O$ -modules.

Supposons à présent que  $G$  soit semi-simple, et que  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est la graduation associée à un sous-groupe parabolique  $P$  ([Théorème 1.4.2](#)). Soit  $(C^m)_{m \geq 0}$  le complexe de Chevalley  $\mathfrak{g}_-$ -relatif associé à  $\mathbb{V}$  ([Équation 1.58](#)),  $(C_l^m)_{m \geq 0, l \in \mathbb{Z}}$  sa graduation par le degré homogène ([Définition 1.4.14](#)). Notons  $\partial$  la différentielle de Kostant relative et  $\partial_l$  sa version graduée ([Définition 1.4.15](#)). Le résultat suivant est dû à B. Kostant ([\[37\]](#)) :

**Theorème 1.4.3.** Dans la situation ci-dessus, il existe une famille  $(\langle \cdot, \cdot \rangle_m)_{m \geq 0}$  de produits hermitiens sur  $(C^m)_{m \geq 0}$  tels que pour tout  $m \geq 0$ , la codifférentielle de Kostant relative associée  $\partial^*$  est un morphisme de  $P$ -représentations.

*Démonstration.* Nous renvoyons à [\[37\]](#), 4. pour la preuve originale. L'idée est de considérer la base de Chevalley  $(\mathfrak{e}_{\pm\alpha}, \mathfrak{h}_\beta)_{\beta \in \Delta^0, \alpha \in \Delta^+}$  associée à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  contenue dans  $\mathfrak{p}$  (voir ??). L'automorphisme linéaire  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  défini par  $\theta(\mathfrak{h}_\beta) = -\mathfrak{h}_\beta$  et  $\theta(\mathfrak{e}_\alpha) = \mathfrak{e}_{-\alpha}$  est alors une involution de Cartan (i.e un automorphisme d'algèbre de Lie avec  $\theta^2 = Id_{\mathfrak{g}}$ ). Par conséquent, la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $\langle A, B \rangle = (A, \theta(B))$ , où  $(\cdot, \cdot)$  est la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ , est une forme hermitienne  $P$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$ . Il suffit donc de prouver que  $\partial_{\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}}$  est un morphisme de  $P$ -représentations. Cela découle de la définition géométrique de la différentielle de Kostant relative (voir remarque qui suit la [Définition 1.4.6](#)).  $\square$

**Corollaire 1.4.1.** Pour tout  $m \geq 0$ , les sous-espaces  $\mathfrak{n}_l = ker(\partial^*) \cap C_l^{m+1}$  et  $\mathfrak{m}_l = Ker(\partial^*) \cap C_l^m$  sont des supplémentaires comme dans la [Définition 1.4.15](#). Ce sont des sous-représentations du groupe  $P$ .

*Démonstration.* Par le [Proposition 1.4.2.2](#), ces sous-espaces sont biens des supplémentaires de  $Im(\partial_l)$  et  $ker(\partial_l)$  respectivement. Par ailleurs,  $\partial^*$  est un morphisme de représentations du groupe  $P$ , ce qui implique la seconde propriété.  $\square$

**Définition 1.4.16.** Une géométrie de Klein parabolique complexe est un couple  $(G, P)$  où  $G$  est un groupe de Lie complexe semi-simple et  $P \subset G$  un sous-groupe complexe parabolique ([Définition 1.4.12](#)). Le degré parabolique de  $(G, P)$  est le degré parabolique  $k$  du sous-groupe  $P$ .

### 1.4.5 Prolongation de Tanaka algébrique

Une autre classe d'exemple de géométries de Klein complexes  $(G, P)$  où l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est graduée est celle des *prolongations de Tanaka*.

Soit  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i=1}^{k'} \mathfrak{g}_{-,i}$  une algèbre de Lie complexe graduée et  $G_-$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_-$ . Alors  $G_-$  est une variété filtrée en considérant  $\mathfrak{g}_-$  comme le sous-espace des champs invariants à gauche. De plus, le crochet de champs de vecteurs sur  $G_-$  induit sur  $gr(TG_-)$  une structure de fibré en algèbre de Lie localement isomorphe à  $(U \times \mathfrak{g}_-, (Id_U, [, ]_{\mathfrak{g}_-}))$  ([Définition 1.4.23](#)). Nous supposons aussi que  $\mathfrak{g}_-$  est *fondamentale*, i.e engendrée comme algèbre de Lie par  $\mathfrak{g}_{-,-1}$ .

Soit  $G_0 \subset Aut(\mathfrak{g}_-)$  un sous-groupe d'automorphismes d'algèbre de Lie stabilisant chaque élément de la graduation  $(\mathfrak{g}_{-,i})_{i=1,\dots,k}$ . Le gradué  $gr(TG_-)$  est engendré par les éléments de  $gr(\mathfrak{g}_-)$ . Comme  $G_0$  préserve la graduation de  $\mathfrak{g}_-$ , il induit donc une réduction holomorphe du fibré des bases de  $gr(TG_-)$ .

Dans [\[48\]](#), N. Tanaka associe au couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  une algèbre de Lie graduée  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -k} \mathfrak{g}_{-,i}$ . Elle peut s'interpréter comme les automorphismes infinitésimaux formels de la filtration  $(T^i G_-)_{i=1,\dots,k'}$  préservant la réduction définie précédemment (voir [\[54\]](#), 2.3). Nous rappelons ici sa construction.

**Proposition 1.4.5.1.** *Soient  $\mathfrak{g}_-$  et  $G_0$  comme ci-dessus. Alors il existe une suite  $(V^{(r)}, Q^{(r)})_{r \geq 0}$  de couples avec pour tout  $r \geq 0$  :*

- (i)<sub>r</sub> Il existe une représentation  $\rho^{(r)} : G_- \rightarrow GL(V^{(r)})$ , et l'espace  $V^{(r)}$  est gradué par des sous-espaces  $(V_i^{(r)})_{i=-k,\dots,r-1}$ . On note  $\rho_{der}^{(r)}$  la représentation dérivée associée et  $\partial^{(r)}$  la 1-différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative associée à cette représentation ([Définition 1.4.6](#)).
- (ii)<sub>r</sub> Pour tout  $i \in \{-k, \dots, -1\}$ ,  $j \in \{-k, \dots, r-1\}$ , et  $A_i \in \mathfrak{g}_{-,i}$ , on  $\rho^{(r)}(A_i)(V_j^{(r)}) \subset V_{i+j}^{(r)}$ .
- (iii)<sub>r</sub>  $Q^{(r)}$  est un groupe de Lie d'algèbre

$$\mathfrak{q}^{(r)} = \bigoplus_{i < 0} Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{-,i}, V_{i+r}^{(r)}) \cap ker(\partial^{(r)}) \subset C^1(\mathfrak{g}_-, V^{(r)}) \quad (1.72)$$

(iv)<sub>r</sub>  $V^{(r+1)} = V^{(r)} \oplus \mathfrak{q}^{(r)}$  comme représentation.

*Démonstration.* On construit la suite par récurrence sur  $r_0 \geq 0$ . Pour  $r_0 = 0$ , on pose  $V^{(0)} = \mathfrak{g}_-$  et  $\mathfrak{q}^{(0)} = Lie(G_0)$  qui vérifie de manière immédiate les propriétés (i)<sub>0</sub>, (ii)<sub>0</sub>, (iii)<sub>0</sub> et (iv)<sub>0</sub>.

Supposons qu'il existe  $r_0 \geq 0$  et  $(V^{(r)}, Q^{(r)})_{r=0,\dots,r_0}$  avec les propriétés (i)<sub>r</sub>, (ii)<sub>r</sub>, (iii)<sub>r</sub> et (iv)<sub>r</sub> de l'énoncé. Posons :  $V^{(r_0+1)}$  comme dans (iv)<sub>r\_0+1</sub> où  $\mathfrak{q}^{(r_0+1)}$  est défini comme en (iii)<sub>r\_0+1</sub>. On définit :

$$Q^{(r_0+1)} = \{Id_{\mathfrak{g}_-} \oplus u \mid u \in \mathfrak{q}^{(r_0+1)}\} \quad (1.73)$$

qui est un groupe de Lie lorsqu'il est muni de la loi :

$$\forall u, v \in Q^{(r_0+1)}, u \cdot v = u \circ proj_{\mathfrak{g}_-} v \quad (1.74)$$

Définissons alors la représentation  $\rho^{(r_0+1)} : G_- \rightarrow GL(V^{(r_0+1)})$  du point (i)<sub>r\_0+1</sub>. Comme  $G_-$  est connexe, il suffit de définir sa représentation dérivée  $\rho_{der}^{(r_0+1)}$ . Définissons une application linéaire  $\rho' : \mathfrak{g}_- \rightarrow End(V^{(r_0+1)})$  de la manière suivante : soit  $A \in \mathfrak{g}_-$  et  $C \in V^{(r_0+1)}$ . Alors :

$$\rho'(A)(C) = \begin{cases} [A, C] & \text{si } C \in \mathfrak{g}_- \\ -u(C) & \text{si } C \in \mathfrak{q}^{(r_0)} \end{cases} \quad (1.75)$$

Alors l'identité de Jacobi pour  $\mathfrak{g}_-$  et l'hypothèse de récurrence (iii)<sub>r\_0</sub> impliquent que  $\rho$  est une représentation d'algèbre de Lie et on définit  $\rho_{der}^{(r_0+1)} = \rho'$ . Le point (iv)<sub>r\_0+1</sub> est immédiat par construction.  $\square$

Le théorème suivant est dû à N. Tanaka ([48], 5.1 et 5.2) :

**Theorème 1.4.4.** Soient  $\mathfrak{g}_-$  et  $G_0$  comme dans la Proposition 1.4.5.1 et la suite  $(V^{(r)}, Q^{(r)})_{r \geq 0}$  associée. Alors la représentation :

$$\mathfrak{g} = \varinjlim_{r \geq 0} V^{(r)} \quad (1.76)$$

est équipée d'un crochet d'algèbre de Lie  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$  tel que :

- (i) Pour tout  $r \geq 0$  et  $u \in \mathfrak{q}^{(r)}$ ,  $Ad(u)|_{\mathfrak{g}_-} = \rho^{(r+1)}(u)$ .
- (ii) Les sous-espaces  $(\mathfrak{g}_i)_{i \geq -k}$  définis par  $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{-,i}$  si  $i < 0$  et  $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{q}^{(i)}$  si  $i \geq 0$  forment une graduation de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, pour tout  $i \geq 0$ , le sous-espace  $\mathfrak{p}^i = \bigoplus_{r \geq i} \mathfrak{q}^{(r)}$  est une sous-algèbre de Lie.

**Définition 1.4.17.** Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple formé d'une algèbre de Lie graduée fondamentale  $\mathfrak{g}_- = (\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, -1}$  et d'un sous-groupe  $G_0 \subset Aut(\mathfrak{g}_-)$  d'automorphismes préservant chaque élément de la graduation.

1. La prolongation de Tanaka de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  est l'unique groupe de Lie simplement connexe (il en existe un unique à isomorphisme près par le troisième théorème de Lie)  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  définie par (1.76). On définit  $P = P^0$  comme l'unique sous-groupe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}^0$  (Théorème 1.4.4).
2. Le couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  est d'ordre  $r_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  si et seulement si pour tout  $r \geq r_0 + 1$  on a  $\mathfrak{q}^{(r_0+1)} = \{0\}$  où  $(\mathfrak{q}^{(r)})_{r \geq 0}$  est la suite d'algèbre de Lie définie dans la Proposition 1.4.5.1.

Le résultat suivant sera utile dans la construction de certaines géométries de Cartan :

**Lemme 1.4.5.1.** Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple formé d'une algèbre de Lie complexe graduée  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_{-i}$  et d'un sous-groupe fermé  $G_0 \subset GL(\mathfrak{g}_-)$  d'automorphismes de la graduation. Soit  $G$  sa prolongation de Tanaka,  $P$  comme dans la Définition 1.4.17 et  $\mathfrak{p} = Lie(P)$ , ainsi que  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  le quotient par ce sous-espace. Soient enfin  $(\mathfrak{g}_i)_{i \geq -k}$  la graduation de  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  du Théorème 1.4.4. Alors :

1. Le noyau de la composée  $\underline{ad} = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ ad$  est le sous-groupe :  $P' = exp_G(\bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_i) \subset P$ .
2. Il existe une application holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  telle que  $\underline{ad} \circ s = Id_Q$ , où  $Q = P/P'$ .

*Démonstration.* Considérons le sous-groupe  $R = exp_G(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathfrak{g}_i)$  de  $P$ . Par définition, pour tout  $i \geq 0$  on a  $Ad(\mathfrak{g}_i)|_{\mathfrak{g}_-} = \mathfrak{q}^{(i)} \subset Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ , et par conséquent l'action adjointe de  $R$  sur  $\mathfrak{g}_-$  est libre. Comme  $P$  est le produit semi-direct de  $R$  et du groupe  $P'$  de l'énoncé, nous obtenons que  $ker(\underline{ad}) \subset P'$ . Enfin,  $P'$  est clairement inclus dans le noyau de  $\underline{ad}$  par définition des sous-espaces  $(\mathfrak{g}_i)_{i \geq k}$ . Nous obtenons que  $P' = ker(\underline{ad})$ . La représentation adjointe quotient est un isomorphisme entre  $R \subset P$  et  $Q = \underline{ad}(P)$ . La section holomorphe  $s$  recherchée est donc simplement son inverse.  $\square$

Par le Théorème 1.4.4 (voir aussi le Lemme 1.14, [49]), le résultat suivant est immédiat.

**Lemme 1.4.5.2.** Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$  une algèbre de Lie complexe graduée et  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$  la 1-cohomologie  $\mathfrak{g}_-$  relative de la représentation adjointe de  $G$  (Définition 1.4.6) et  $(\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l)_{l \in \mathbb{Z}}$  sa filtration par le degré homogène (Définition 1.4.14). Alors les faits suivants sont équivalents :

- (i) Pour tout  $l \geq 1$ ,  $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l = \{0\}$ .
- (ii) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est la prolongation de  $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$ .

Le cas où  $k = 1$  correspond à l'algèbre de Lie abélienne  $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^n$  et  $G_0 = Q$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ . La définition de Tanaka contient donc en particulier la notion de sous-groupe de type fini proposée par E.Cartan :

**Définition 1.4.18.** *Un sous-groupe complexe fermé  $Q \subset GL_n(\mathbb{C})$  est dit d'ordre  $r_0$  si et seulement si  $(\mathbb{C}^n, Q)$  est d'ordre  $r_0$  au sens de Tanaka.*

**Exemple 1.4.7.** *Le groupe orthogonal  $Q = O_n(\mathbb{C})$  est d'ordre 0. En particulier tout sous-groupe  $Q \subset O_n(\mathbb{C})$  est d'ordre 0.*

*Démonstration.* Prouvons l'assertion pour  $Q = O_n(\mathbb{C})$ . Soit  $G = Q \times \mathbb{C}^n$ ,  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}^n$  et  $\partial : Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}_-^* \wedge \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-$  la différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative associée à la représentation adjointe. Prouvons que  $\mathfrak{q}^{(1)} = ker(\partial) = \{0\}$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_-$  est abélienne, donc  $\partial$  se factorise par la projection sur  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})$  parallèlement à  $End(\mathfrak{g}_-)$ . Soit  $\phi \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe orthogonal est le sous-espace des endomorphismes antisymétriques de  $\mathbb{C}^n$ . Notons  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  la base canonique de  $\mathfrak{g}_-$  et pour tout  $1 \leq j, k \leq n$ ,  $\mathbf{e}_{jk}$  l'endomorphisme de  $\mathfrak{g}_-$  défini par  $\mathbf{e}_{jk}(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}^k \mathbf{e}_k$ . Alors il existe des complexes  $(a_{i,j}^k)_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ j < k}}$  tels que :

$$\phi = \sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ j < k}} a_{i,j}^k \mathbf{e}_i^* \otimes (\mathbf{e}_{jk} - e_{kj}) \quad (1.77)$$

Par conséquent :

$$\partial\phi = \sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ j < k}} \frac{1}{2} (a_{i,j}^k - a_{k,j}^i) \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k \quad (1.78)$$

Ainsi, si  $\phi \in ker(\partial)$  alors nous avons les équations :

$$a_{i,j}^k = a_{k,j}^i \quad \text{et} \quad a_{i,j}^k = -a_{j,i}^k \quad (1.79)$$

pour tout  $1 \leq i, j, k \leq n$  avec  $j < k$ . La seule solution de ce système est  $\phi = 0$ . □

**Exemple 1.4.8.** *Le groupe conforme  $CO_n(\mathbb{C})$  est d'ordre 1 lorsque  $n > 2$ .*

*Démonstration.* Voir [30], Exemple 3.(B). □

**Définition 1.4.19.** *Soit  $\mathfrak{g}_-$  une algèbre de Lie graduée négativement et  $G_0 \subset GL(\mathfrak{g}_-)$  un sous-groupe d'automorphisme préservant la graduation, d'ordre  $r_0 \geq 0$  (Définition 1.4.17). La géométrie de Klein  $(G, P)$  associée est la paire constituée de la  $r_0$ -prolongation  $G = G^{(r_0)}$  de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  (Définition 1.4.17) et de  $P = P^{(r_0)}$ .*

Parmi ces prolongations, on travaillera beaucoup sur ces deux exemples de base :

**Définition 1.4.20.** *La géométrie de Klein conforme de dimension  $n$  est le couple  $(G, P)$  où  $G$  est le sous-groupe de  $SL_{n+2}(\mathbb{C})$  des automorphismes préservant la forme bilinéaire  $g_0 = dz_1 dz_{n+2} + dz_2^2 + \dots + dz_{n+1}^2$  sur  $\mathbb{C}^{n+2}$ , et le sous-groupe  $P \subset G$  est le stabilisateur de  $\mathbb{C}e_1 \in \mathbb{C}^{n+2}$  où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique (ce vecteur appartient à la quadrique  $C = \{v \in \mathbb{C}^{n+2} \mid g_0(v, v) = 0\}$ ).*

Pour  $n \geq 3$ , ce sont des prolongations de Tanaka (Définition 1.4.17). Nous le prouvons pour  $n = 3$  :

**Exemple 1.4.9.** *La géométrie 3-conforme complexe  $(G, P)$  est la 1-prolongation du sous-groupe d'ordre 1  $Q = CO_3(\mathbb{C})$  (Exemple 1.4.8).*

*Démonstration.* Par les remarques ci-dessus,  $P$  est parabolique de degré 1 dans  $G$  et on a une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{p}'$  de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , où  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}^3$ ,  $\mathfrak{p}' = \mathbb{C}^{3*} = \mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie}(Q) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{o}_3(\mathbb{C})$  est l'algèbre de Lie de  $CO_3(\mathbb{C})$ . Par le [Théorème 1.4.4](#), il s'agit de vérifier que  $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$  est concentré en degré homogènes négatifs. Or  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$  est concentré en degrés homogènes 0,1 et 2. Commençons par prouver que la composante homogène de degré 2 de  $\ker(\partial)$  (où  $\partial$  est la différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative, voir [Définition 1.4.6](#)) et donc de  $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$  est nulle. Soit  $\varphi = \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j} \mathbf{e}_{-i}^* \otimes \mathbf{e}_j$  appartenant à cette dernière. Alors :

$$0 = \partial\varphi = \sum_{i,j,k} a_{i,j} (\delta_j^k \mathbf{e}_{-i}^* \wedge \mathbf{e}_{-j}^* \otimes \mathbf{e}_0 + (1 - \delta_j^k) \mathbf{e}_{-i}^* \wedge \mathbf{e}_{-j}^* \otimes \mathbf{e}_{j,k}^0) \quad (1.80)$$

est une combinaison de vecteurs indépendants dans  $\mathbb{W}$ . Par conséquent  $a_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j = 1, 2, 3$  i.e  $\varphi = 0$ .

Considérons un élément :

$$\begin{aligned} \varphi = & a_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_0 + a_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_0 + a_3 \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_0 \\ & + \alpha_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{1,2}^0 + \alpha_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{1,2}^0 + \alpha_3 \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{1,2}^0 \\ & + \beta_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{2,3}^0 + \beta_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{2,3}^0 + \beta_3 \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{2,3}^0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

de la composante homogène de degré 1 de  $\ker(\partial)$ . Alors :

$$\begin{aligned} 0 = & \partial\varphi \\ = & a_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} + a_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-3} \\ & + a_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} - a_2 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-1} \\ & + a_3 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-1} + a_3 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} \\ & + \alpha_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-1} - \alpha_2 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} - \alpha_3 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-1} \\ & + \beta_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} + \beta_1 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3} + \beta_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-2} \\ & + \beta_3 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-3} \end{aligned} \quad (1.82)$$

$$= \text{termes indépendants} + (a_2 - \alpha_1) \mathbf{e}_{-1}^* \wedge \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-1} + (a_3 - \beta_2) \mathbf{e}_{-2}^* \wedge \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}$$

Par conséquent :

$$a_1 = 0 \quad \beta_1 = \beta_3 = 0 \quad \alpha_1 = a_2 \quad \beta_2 = a_3 \quad (1.83)$$

soit  $\varphi = a_2 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_0 + a_2 \mathbf{e}_{-1}^* \otimes \mathbf{e}_{1,2}^0 + a_3 \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_0 + a_3 \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{2,3}^0 + a_3 \mathbf{e}_{-3}^* \otimes \mathbf{e}_0$  soit  $\varphi = \text{Ad}(A') = \partial A'$  où  $A' = a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ . Par conséquent la composante homogène de degré 1 de  $\ker(\partial)$  coïncide avec celle de  $\text{Im}(\partial)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Exemple 1.4.10.** Soit  $G = SL_3(\mathbb{C})$  et  $P$  le sous-groupe de Borel standard (voir [Définition 1.4.12](#)) de  $G$ . Notons  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-2, \dots, 2}$  la graduation correspondante de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , et  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i=1}^2 \mathfrak{g}_{-i}$ . Alors  $(G, P)$  est la géométrie de Klein obtenue par prolongation de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  où  $G_0 = \text{exp}_G(\mathfrak{g}_0)$ .

*Démonstration.* Reprenons la base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  introduite dans l'[Exemple 1.4.6](#) et remarquons que  $\mathfrak{g}_{-1}$  est muni d'une forme symplectique non dégénérée  $(\cdot, \cdot)$  définie par :

$$(A_1, A_2) = \mathbf{e}_{-\gamma}^*([A_1, A_2]_{\mathfrak{g}}) \quad (1.84)$$

Par l'identité de Jacobi et la relation  $[\mathbf{e}_{-\alpha}, \mathbf{e}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} = \mathbf{e}_{-\gamma}$ , on obtient que l'image d'un élément de  $G_0$  par la représentation adjointe est totalement déterminée par sa restriction  $\mathfrak{g}_{-1}$ . L'ensemble des automorphisme obtenu est alors le groupe symplectique  $Sp(\mathfrak{g}_{-1})$ . Par conséquent,  $\text{Ad}$

identifie  $\mathfrak{g}_0$  à  $S^2(\mathfrak{g}_-^*)$  l'algèbre de Lie de  $Sp(\mathfrak{g}_{-1})$ . De la même façon, on identifie  $\mathfrak{g}_1$  à un sous-espace  $S^3(\mathfrak{g}_{-1}^*)$  et  $\mathfrak{g}_2$  à un sous-espace de  $S^4(\mathfrak{g}_{-1}^*)$ . Plus généralement, pour  $l = 0, 1, 2$ , on identifie  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_l)$  à  $\mathfrak{g}_{-1}^{*\otimes l} \otimes S^2(\mathfrak{g}_{-1}^*)$ .

Par la Proposition 1.1.8 de [46],  $S^{l+2}(\mathfrak{g}_{-1}^*)$  est la  $l + 1$ -ième prolongation de l'algèbre de Lie de  $Sp(\mathfrak{g}_{-1}^*)$  au sens de la Définition 1.4.18, pour tout  $l = 0, 1, 2$ . Par conséquent,  $\mathfrak{g}_l$  est la  $l + 1$ -ième prolongation de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  au sens de la Définition 1.4.17.  $\square$

### 1.4.6 Géométries de Klein complexes graduées

**Définition 1.4.21.** Une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  est graduée si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  est graduée  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  et que  $P$  est le sous-groupe correspondant à la sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  de la Définition 1.4.9. Son degré est l'entier minimal  $k$  tel que  $\mathfrak{g}_i = \{0\}$  dès que  $|i| > k$ .

En particulier, les géométries de Klein paraboliques complexes (Définition 1.4.16) et les prolongations de Tanaka (Définition 1.4.19) sont des géométries de Klein complexes graduées.

Fixons une géométrie de Klein graduée complexe  $(G, P)$  et décrivons la structure géométrique sur  $G/P$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  admet une  $k$ -gradation  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$ . Les éléments de la filtration  $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}^{k-1} \subset \dots \subset \mathfrak{g}^{-k} = \mathfrak{g}$  définie par  $\mathfrak{g}^i = \bigoplus_{i' \geq i} \mathfrak{g}_{i'}$  sont des  $P$ -

modules. Nous en déduisons une filtration  $(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p})_{i=-1, \dots, -k}$  de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , dont les éléments sont des sous  $P$ -modules de la représentation adjointe quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  (Définition 1.4.2). Notons pour tout  $i \in \{-k, \dots, -1\}$  le module représentation  $\mathcal{E}^i = G(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p})$ . Nous obtenons une filtration  $(T^i G/P)_{i=-1, \dots, -k}$  de  $T(G/P)$  par les sous-modules

$$T^i G/P = \phi_{G/P}^{-1}(\mathcal{E}^i) \quad (1.85)$$

où  $\phi_{G/P} : T(G/P) \simeq G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  est l'isomorphisme de la Proposition 1.4.1.1.

**Définition 1.4.22.** Une variété complexe filtrée est une variété complexe  $M$  munie d'une filtration  $(T^i M)_{i=-1, \dots, -k}$  de son faisceau tangent par des sous-modules localement libres tels que  $[T^i M, T^{i'} M]_{TM} \subset T^{i+i'} M$ .

**Lemme 1.4.6.1.** Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein graduée complexe.

1. La filtration  $(T^i G)_{i=-k, \dots, k}$  de  $TG$  par les sous-fibrés  $T^i G = \omega_G^{-1}(\mathfrak{g}^i)$  se projette via  $Tp_{G/P}$  sur la filtration  $(T^i G/P)_{i=-1, \dots, -k}$  définie par (1.85).
2. Le fibré des bases du gradué  $gr(T(G/P))$  admet pour réduction holomorphe au sous-groupe de Levi  $G_0 = \exp_G(\mathfrak{g}_0)$  le fibré  $E^0 = G \times_P P/P^+$ .
3.  $G$  et  $G/P$  sont des variétés filtrées pour les filtrations précédentes.

*Démonstration.* 1. Il suffit de reprendre la preuve du Proposition 1.4.1.1. Soit  $\sigma : U \rightarrow G$  une section holomorphe de  $p_{G/P}$  sur un ouvert  $U \subset G/P$ . L'isomorphisme  $\phi_{G/P} : T(G/P) \simeq G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  est défini par  $\phi_{G/P}^{-1}([\sigma, A]) = Tp(\omega_G(\sigma)^{-1}(A))$ . Le résultat en découle directement.

2. Le sous-groupe  $P^+ = \exp_G(\mathfrak{g}^1)$  est distingué dans  $P$ . Il s'identifie au sous-groupe de  $P$  dont l'action adjointe agit comme l'identité sur le gradué  $gr(\mathfrak{g}_-)$ . Donc  $E^0$  s'identifie à une réduction holomorphe du fibré des bases de  $gr(T(G/P))$ . Par ailleurs,  $P$  est le produit semi-direct de  $G_0$  et  $P^+$ . Par conséquent,  $P/P^+$  est un groupe isomorphe comme groupe de Lie complexe à  $G_0$ .

3. Fixons une base filtrée  $(\mathfrak{e}_j^i)_{\substack{i=-k, \dots, k \\ j=1, \dots, n_i}}$  de  $\mathfrak{g}$  (Définition 1.4.11). La formule de Maurer-Cartan (0.0.2) implique que  $(T^i G)_{i=-k, \dots, k}$  est préservée par le crochet  $[\cdot, \cdot]_G$  sur  $G$ . En effet,  $T^i G$  est engendré comme  $\mathcal{O}_G$ -module par les champs  $\omega_G$ -constants  $(\tilde{\mathfrak{e}}_j^i)_{i \geq i}$

associés à la base  $(\tilde{\mathbf{e}}_j^{i'})_{i' \geq i}$  de  $\mathfrak{g}^i$ , et par définition d'une base filtrée, pour tout  $i, i' \in \{-k, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  et  $j' \in \{1, \dots, n_{i'}\}$ , il existe  $j'' \in \{1, \dots, i + i'\}$  tel que :

$$[\tilde{\mathbf{e}}_j^i, \tilde{\mathbf{e}}_{j'}^{i'}]_G = \tilde{\mathbf{e}}_{j''}^{i+i'} \quad (1.86)$$

On conclut avec la formule de Leibniz. Par le point 1., ceci est vrai pour la filtration  $T^i G/P$  également.  $\square$

La filtration de  $T(G/P)$  est particulière :

**Définition 1.4.23.** *Un fibré holomorphe en algèbres de Lie sur  $M$ , de fibre  $\mathfrak{h}$ , est un couple  $(V, [\cdot, \cdot])$  où  $V$  est un fibré vectoriel complexe de rang  $\dim(\mathfrak{h})$  et  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  est un morphisme de fibrés avec la propriété suivante : pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et une trivialisatation  $\psi : V|_U \simeq U \times \mathfrak{h}$  tel que pour tout couple  $(s, t)$  de sections de  $V|_U$  :*

$$[\psi(s), \psi(t)]_{\mathfrak{h}} = \psi([s, t]) \quad (1.87)$$

**Lemme 1.4.6.2.** *Le crochet de module induit par  $[\cdot, \cdot]_{G/P}$  sur le gradué  $gr(T(G/P))$  de  $T(G/P)$  pour la filtration du [Lemme 1.4.6.1](#) induit une structure de fibré holomorphe en algèbres de Lie sur ce dernier, de fibre  $(\mathfrak{g}_-, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme  $\phi_{G/P} : T(G/P) \simeq G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  est un isomorphisme de modules filtrés. Il induit donc un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{G/P}$ -modules entre  $gr(T(G/P))$  et  $gr(G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$ . Il suffit donc de prouver que  $gr(G(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$  est un fibré en algèbres de Lie, localement isomorphe à  $(U \times \mathfrak{g}_-, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ . Nous renvoyons alors au [Lemme 2.2.3.3](#) appliqué à  $\mathbb{E} = (\phi_{G/P}, G \times_P Q)$  où  $Q = \underline{ad}(P)$ .  $\square$

### 1.4.7 Extensions de modèles

Nous terminons en décrivant les hiérarchies entre les différentes géométries de Klein et leurs conséquences. Il arrive que pour deux géométries de Klein complexes  $(G_1, P_1)$  et  $(G_2, P_2)$ , il existe une inclusion  $\iota : G_1/P_1 \hookrightarrow G_2/P_2$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Il existe une application holomorphe injective  $\iota_{G_1, G_2} : G_1 \hookrightarrow G_2$  telle que  $\iota_{G_1, G_2}(P_1) = \iota_{G_1, G_2}(G_1) \cap P_2$ .
- (ii)  $\iota$  est le passage aux quotients de  $\iota_{G_1, G_2}$ .

**Définition 1.4.24.** *On dit que  $(G_2, P_2)$  étend  $(G_1, P_1)$  lorsque (i) et (ii) sont vérifiées, et on note  $(G_1, P_1) \subset (G_2, P_2)$ .*

En particulier, si  $(G_1, P_1) \subset (G_2, P_2)$  alors  $G_2 = G_1 \times_{P_1} P_2$  est un fibré  $P_2$  principal sur  $G_1/P_1$ , et  $\iota_{G_1, G_2}^* \omega_{G_2} = \iota_{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2} \circ \omega_{G_1}$  où  $\iota_{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2} : \mathfrak{g}_1 \hookrightarrow \mathfrak{g}_2$  est l'injection d'algèbres de Lie induite par  $\iota_{G_1, G_2}$ .

**Exemple 1.4.11.** *Soit  $(G_1, P_1) = (\text{Aff}(\mathbb{C}^n, GL_n(\mathbb{C})))$  et  $(G_2, P_2) = (SL_{n+1}(\mathbb{C}), P_2)$  où  $P_2 \subset G_2$  est le stabilisateur de  $\mathbb{C}e_1$  ( $e_1$  étant le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ ). Alors  $(G_1, P_1) \subset (G_2, P_2)$ .*

*Démonstration.* En effet, les éléments du groupe affine  $G_1$  sont les couples  $(A, v)$  avec  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $v \in \mathbb{C}^n$ , et :

$$\iota_{G_1, G_2} : G_1 \longrightarrow G_2 \\ (A, v) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

est un morphisme injectif de groupes de Lie. De plus,  $\iota_{G_1, G_2}(P_1)$  est clairement  $P_2 \cap \iota_{G_1, G_2}(G_1)$ . L'interprétation géométrique de cette inclusion de modèles est que  $G_1/P_1 = \mathbb{C}^n$  s'identifie à l'orbite de  $[1 : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^n$  par le sous-groupe des transformations affines  $\iota_{G_1, G_2}(G_1) \subset SL_{n+1}(\mathbb{C})$ .  $\square$

**Exemple 1.4.12.** Soit  $(G_1, P_1) = (Euc_n(\mathbb{C}), O_n(\mathbb{C}))$  le modèle euclidien (voir Exemple 1.4.4), et  $(G_2, P_2)$  le modèle  $n$ -conforme (voir Exemple 1.4.20). Alors  $(G_1, P_1) \subset (G_1', P_2)$ .

*Démonstration.* Nous avons observé que le sous-groupe  $G_0 = \exp_{G_2}(\mathfrak{g}_0)$  de  $G_2$  s'identifie à  $CO(\mathfrak{g}_-)$  pour la forme de Killing. Le choix d'une base orthonormée de  $\mathfrak{g}_-$  identifie  $P_1 = O_n(\mathbb{C})$  à un sous-groupe de  $G_0$ . Or  $G_2$  contient le sous-groupe  $G_0 \times \exp_{G_2}(\mathfrak{g}_-)$ . Pour  $(A, v) \in Euc_n(\mathbb{C})$ , nous pouvons donc définir  $\iota_{G_1, G_2}(A, v)$  comme  $A \cdot \exp_{G_2}(v)$  en identifiant  $A$  à un élément de  $G_0$  et  $v \in \mathfrak{g}_-$ . Le sous-groupe  $\iota_{G_1, G_2}(P_1)$  est par construction l'intersection de  $\iota_{G_1, G_2}(G_1)$  avec  $P_2$ .  $\square$

Soit  $M$  une variété complexe,  $E$  un fibré  $P_1$ -principal holomorphe (resp. différentiable) sur  $M$  et  $\omega$  une 1-forme  $P_1$ -équivariante holomorphe (resp. différentiable) sur  $E$ , à valeurs dans  $\mathfrak{g} = Lie(G_1)$ . Supposons que  $(G_1, P_1) \subset (G_2, P_2)$ . Alors l'extension  $E' = E \times_{P_1} P_2$  est un fibré  $P_2$ -principal holomorphe (resp. différentiable), et on note  $\iota : E \rightarrow E'$  l'inclusion naturelle.

**Lemme 1.4.7.1.** Soit  $E'$  et  $\omega$  comme ci-dessus. Supposons que  $\iota_{P_1, x}^* \omega = \omega_{P_1, x}$  pour tout  $x \in M$  (où  $\omega_{P_1, x}$  est la forme de Maurer-Cartan de la fibre en  $x$ ). Alors il existe une unique forme  $\omega'$  holomorphe (resp. différentiable)  $P_2$ -équivariante sur  $E'$  telle que :

$$\iota^* \omega' = \iota_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'} \circ \omega \text{ et } \iota_{P_2, x}^* \omega' = \omega_{P_2, x} \quad (1.89)$$

pour tout  $x \in M$ . Nous avons noté  $\iota_{P_2, x}$  l'inclusion de la fibre  $p'^{-1}(x)$  dans  $E'$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $E'$  est le quotient de  $E \times P_2$  par l'action à droite de  $P_1$  donnée par  $(e, b') \cdot b = (e \cdot b, b^{-1}b')$ . Définissons alors la section globale  $\tilde{\omega}'$  de  $\Omega_{E \times P_2}^1 \otimes \mathfrak{g}'$  par :

$$\forall (e, b') \in E \times P_2, \forall v \in T_e E, \forall A \in \mathfrak{p}', \quad \tilde{\omega}'(e, b')(v, \tilde{A}) = \omega(e)(v) \oplus ad(b')(A) \quad (1.90)$$

Alors  $\tilde{\omega}'$  est  $P_1$ -équivariante et :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'\left(\frac{d}{dt}\Big|_{T=0}(e, b') \cdot \exp_{G_1}(tA)\right) &= \tilde{\omega}'\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e \cdot \exp_{G_1}(tA), \exp_{G_1}(-tA)b'\right) \\ &= \omega_{P_1, x}(e)(\tilde{A}) + ad(b')(ad(b'^{-1})(-A)) = 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

donc  $\tilde{\omega}'$  s'annule en restriction aux fibres de  $E \times P_2 \rightarrow E'$ . Elle induit donc une 1-forme  $\omega'$ ,  $P_2$ -équivariante et vérifiant les propriétés énoncées.

Pour l'unicité, notons  $\beta : At(E) \rightarrow E(\mathfrak{g})$  et  $\beta' : At(E') \rightarrow E(\mathfrak{g}')$  les morphismes correspondant à  $\omega$  et  $\omega'$  (Corollaire 1.1.1). Remarquons que la condition  $\iota_{P_2, x}^* \omega' = \omega_{P_2, x}$  implique que pour toute section  $\sigma : U \rightarrow E'$ ,  $\beta'$  est uniquement déterminée par  $\beta' \circ \tau_\sigma$  où  $\tau_\sigma : TM|_U \rightarrow At(E')|_U$  est le scindage de la suite exacte d'Atiyah induit par  $\sigma$  (voir ??). Si  $\sigma$  est une section de  $E \subset E'$  sur  $U$ , alors  $\iota^* \omega' = \omega$  équivaut à  $\beta' \circ \tau_\sigma = \beta$ . Par conséquent  $\beta'$  est uniquement déterminé par  $\beta$ .  $\square$

## 1.5 Géométries de Cartan branchées et méromorphes

Dans cette section, nous définissons les *géométries de Cartan méromorphes*, et *holomorphes branchées* sur une variété complexe  $M$ . La définition équivariante donnée dans [4] va nous permettre d'exhiber un foncteur  $f$  vers une catégorie dont les objets sont des extensions méromorphes particulières de  $TM$  : les *extensions géométriques*.

Cela donne un cadre formel pour le Chapitre III où nous étendrons la résolution du problème d'équivalence holomorphe pour certaines structures géométriques holomorphes à leurs analogues méromorphes. Les fibres de  $f$  sont décrites à l'aide de sections d'un certain faisceau sur la variété support : cela permet de faciliter la construction d'une connexion de Cartan sur un fibré  $P$ -principal en présence d'une section de ce dernier. Dans toute la section, la géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  (Définition 1.4.1) est fixée.

### 1.5.1 Géométries de Cartan holomorphes

**Définition 1.5.1.** Soit  $M$  une variété complexe. Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M$  est la donnée d'un couple  $(E, \omega)$  où  $E \xrightarrow{p} M$  est un  $P$ -fibré principal holomorphe et  $\omega \in \Omega_E^1 \otimes \mathfrak{g}$  est une 1-forme vérifiant

- (i) Pour tout  $x \in M$ ,  $\iota_{P,x}^* \omega = \omega_{P,x}$  où  $\omega_{P,x}$  et  $\iota_{P,x}$  sont respectivement la forme de Maurer-Cartan de la fibre  $p^{-1}(x)$  et son inclusion (voir Définition 1.1.1).
- (ii)  $\omega$  est  $P$ -équivariante, i.e  $r_p^* \omega = ad(p^{-1})\omega$  pour tout  $p \in P$ .
- (iii)  $\omega(e)$  est un isomorphisme entre  $T_e E$  et  $\mathfrak{g}$  pour tout  $e \in E$ .

La forme  $\omega$  est appelée connexion de Cartan holomorphe sur  $E$ .

Comme sur le modèle  $G$ , le fibré tangent  $TE$  est trivialisé par les champs  $\omega$ -constants : si on fixe une base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  de  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ , on obtient une base globale  $Y_i = \omega^{-1}(\mathbf{e}_i)$  de  $TE$ . Il s'agit donc d'un parallélisme holomorphe.

**Proposition 1.5.1.1.** Soit  $M$  une variété complexe,  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe et  $(E, \omega)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M$ . Soit  $\mathcal{E} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Alors il existe un isomorphisme  $\phi : TM \rightarrow \mathcal{E}$  de  $\mathcal{O}_M$ -modules.

*Démonstration.* Voir la preuve dans la catégorie méromorphe, Proposition 1.6.1.1 □

**Exemple 1.5.1.** Une géométrie de translation holomorphe sur  $M$  est une  $(G, \{Id_G\})$ -géométrie de Cartan holomorphe  $(E, \omega)$ . Dans ce cas,  $E$  s'identifie canoniquement à  $M$  et  $\omega$  est simplement une 1-forme holomorphe à valeurs dans  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ , de rang maximal sur  $M$ . De manière équivalente, il s'agit d'une trivialisatoin  $\omega : TM \simeq \mathcal{O}_M \otimes \mathfrak{g}$ , ou encore d'un parallélisme holomorphe  $Y_i = \omega^{-1}(\mathbf{e}_i)$  lorsque l'on fixe une base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  de  $\mathfrak{g}$ .

Notons  $\tilde{A} = \omega^{-1}(A)$  pour tout vecteur  $A \in \mathfrak{g}$ . Pour  $e \in E$ , il existe un voisinage  $V \subset \mathfrak{g}$  de l'origine tel que pour tout  $A \in V$ ,  $\phi_{\tilde{A}}^1(e)$  est bien défini. De plus, comme  $\omega(e)$  est un isomorphisme entre  $T_e E$  et  $\mathfrak{g}$ , quitte à restreindre  $V$  l'application  $A \rightarrow \phi_{\tilde{A}}^1(e)$  est injective.

**Définition 1.5.2.** Soient  $e$  et  $V$  comme ci-dessus. L'application exponentielle  $exp_e : \mathfrak{g} \rightarrow E$  est définie pour tout  $A \in V$  par :

$$exp_e(A) = \phi_{\tilde{A}}^1(e) \tag{1.92}$$

Le voisinage  $V$  est appelé domaine de  $exp_e$ .

Cette application implique qu'il existe des sections privilégiées de  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}$  :

**Définition 1.5.3.** Soit  $e_0 \in E \setminus \tilde{D}$  et  $U_{e_0}$  l'image de l'application exponentielle en  $e_0$ . L'opérateur d'extension en  $e_0$  est une application linéaire  $\phi_{e_0} : \mathcal{V}(e_0) \rightarrow \mathcal{V}(U_{e_0})$  définie par :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall A \in \mathfrak{g}, [\phi_{e_0}(X)](\phi_A^t(e_0)) = \omega_0(T\phi_A^t(\omega_0(e_0)^{-1}[A])) \quad (1.93)$$

Les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes sur  $M$  forment une catégorie :

**Définition 1.5.4.** Un isomorphisme de géométries de Cartan holomorphes entre  $(E, \omega)$  sur  $M$  et  $(E', \omega')$  sur  $M'$  est un morphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes  $\Psi : E \rightarrow E'$  tel que  $\Psi^*\omega' = \omega$ .

Soit  $(E', \omega')$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M'$ . Soit  $f : M \rightarrow M'$  un morphisme de variétés complexes et considérons le fibré  $P$ -principal holomorphe  $E = f^*E'$  sur  $M$ . Ce dernier est muni d'une projection holomorphe  $proj_2 : E \rightarrow E'$ , qui permet d'introduire le pullback au sens des 1-formes :  $\omega = proj_2^*\omega'$ .

**Définition 1.5.5.** Le couple  $(E, \omega)$  est appelé pullback de  $(E', \omega')$  par  $f$  et noté  $f^*(E', \omega')$ .

Le pullback d'une géométrie de Cartan holomorphe n'est en général pas une géométrie de Cartan holomorphe :

**Exemple 1.5.2.** Soient  $M = M' = D(0, 1)$  le disque unité et  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  donné par  $f(z) = z^2$ . Munissons  $M'$  de la géométrie de translation canonique  $(E', \omega') = (M', \omega')$  donnée par  $\omega'(z) = dz \otimes e_1$  (voir Exemple 1.5.1). Alors le pullback de  $(M', \omega')$  par  $f$  est  $(M, \omega)$  avec  $\omega(z) = 2zdz \otimes e_1$ . Ce n'est pas une géométrie de Cartan holomorphe.

L'existence d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M$  identifie  $M$  à  $E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  (Définition 1.1.9). Ce fait sera démontré plus généralement dans la catégorie méromorphe (Proposition 1.6.1.1).

**Exemple 1.5.3.** Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$ . Alors il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des connexions affines holomorphes  $\nabla$  sur  $M$  (les flèches étant les automorphismes de  $(M, \nabla)$ ) et celle des  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes sur  $M$ , où  $(G, P)$  est le modèle affine général (Exemple 1.4.3).

*Démonstration.* Construisons une application de l'ensemble des  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes  $(E, \omega)$  sur les variété complexes  $M$  vers celui des connexions affines sur ces dernières. Les  $P$ -modules  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{p}$  décomposent l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe des transformations affines  $G$  en une somme directe. Par conséquent, une  $(G, P)$ -connexion de Cartan holomorphe  $\omega$  sur un fibré  $P$ -principal  $E$  équivaut, suivant (??), à un couple  $(\theta, \tilde{\omega})$  avec  $\theta$  une 1-forme holomorphe à valeurs dans  $\mathfrak{m}$  et  $\tilde{\omega}$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}$ . Comme  $\omega$  est une connexion de Cartan, l'évaluation  $\omega(e) : T_e E \rightarrow \mathfrak{g}$  est un isomorphisme pour tout  $e \in E$ . Donc  $\theta$  est surjectif et équivaut à une solder-form. De plus,  $\iota_{P,x}^*\omega$  coïncide avec  $\omega_{P,x}$  pour tout  $x \in M$  (voir Définition 1.1.1), donc  $\tilde{\omega}$  est une connexion  $P$ -principale holomorphe sur  $E$ . La solderform  $\theta$  fournit un isomorphisme canonique entre  $E$  et  $R^1(M)$ , donc il y a une première équivalence de catégories entre les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes et celle des connexions principales holomorphes sur les fibrés des repères des variétés complexes. La Proposition 1.3.2.1 prolonge cette équivalence vers les connexions affines holomorphes comme annoncé.  $\square$

## 1.5.2 Géométries de Cartan méromorphes et holomorphes branchées

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n = \dim(G/P)$ , et  $D$  un diviseur de  $M$  dont les composantes irréductibles sont notées  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ . Un couple  $(M, D)$  ainsi obtenu sera appelé

paire dans toute cette thèse. Si  $p : E \rightarrow M$  est un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$ , nous noterons toujours  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$ . Nous notons également  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}$  qui est un module linéarisé à partir de la représentation adjointe (voir Définition 1.1.9), et dont le quotient sera noté  $\bar{\mathcal{V}}$ .

**Définition 1.5.6.** Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  est un couple  $(E, \omega_0)$  où  $E \xrightarrow{p} M$  est un fibré  $P$ -principal sur  $M$  et  $\omega_0$  est une 1-forme méromorphe sur  $E$  à valeurs dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  telle que  $(E \setminus \tilde{D}, \omega_0)$  est une géométrie holomorphe sur  $M \setminus D$  (voir Notation 6). La forme  $\omega_0$  est appelée connexion de Cartan méromorphe sur  $E$ .

Soit  $\omega_0$  une connexion de Cartan méromorphe sur  $E$  telle que  $(E, \omega_0)$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ . Il correspond à cette dernière une unique section globale  $\Phi_{\omega_0}$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_E}(TE, \mathcal{V})[\star\tilde{D}]$ , définie par :

$$X \lrcorner \omega_0 = \Phi_{\omega_0}(X) \quad (1.94)$$

pour tout champ de vecteur holomorphe local  $X$  de  $E$ . Cette dernière est  $P$ -équivariante pour les linéarisations  $(dr_b)_{b \in P}$  et  $(\phi_b^{\mathfrak{g}})_{b \in P}$  de  $TE$  et  $\mathcal{V}$ . Par la correspondance établie dans la Proposition 1.1.2.1, elle équivaut donc à une section globale de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(At(E), \bar{\mathcal{V}})[\star D]$ . Comme  $\mathcal{O}_M[\star D]$  est noethérien, il existe donc un diviseur effectif minimal  $D_{\text{supp}}$  dont les composantes irréductibles appartiennent à  $D$  et tel que  $\Phi_{\omega_0}$  est une section de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_E}(TE, \mathcal{V})(\tilde{D}_{\text{supp}})$ .

**Définition 1.5.7.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ .

1. Le diviseur support de  $\omega_0$  est le diviseur minimal  $D_{\text{supp}}$  défini ci-dessus.
2. Le diviseur de branchement de  $\omega_0$  est le diviseur  $D$  de  $M$  dont le relevé  $\tilde{D}$  à  $E$  est le diviseur des zéros de la section définie par (1.94) :  $\tilde{D} = (\wedge^N \Phi_{\omega_0})_0$ .

Les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes forment une catégorie :

**Définition 1.5.8.** Un isomorphisme de géométries de Cartan méromorphes  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  et  $(E', \omega'_0)$  sur  $(M', D')$  est un isomorphisme de géométries de Cartan holomorphes entre les restrictions à  $M \setminus D$  et  $M' \setminus D'$ . La catégorie dont les objets sont les  $(G, P)$ -géométries de Cartan sur une paire et les flèches sont leurs isomorphismes sera appelée catégorie des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes.

**Définition 1.5.9.** Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$  est une géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  telle que le diviseur support de  $\omega_0$  est vide et le diviseur de branchement est  $D$ .

**Définition 1.5.10.** Un isomorphisme de géométries de Cartan branchées entre  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  et  $(E', \omega'_0)$  sur  $(M', D')$  est un isomorphisme de  $P$ -fibrés principaux  $\Psi : E \rightarrow E'$  se restreignant en un isomorphisme de géométrie de Cartan holomorphes entre  $M \setminus D$  et  $M' \setminus D'$ .

**Exemple 1.5.4.** Soit  $(G, P) = (G, \{1\})$  un modèle de translation (voir Exemple 1.5.1). Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  équivaut donc à un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[\star D]$ -module  $\Phi_{\omega_0} : TM[\star D] \simeq \mathcal{O}_M[\star D] \otimes \mathfrak{g}$ . Lorsqu'une base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  est choisie pour  $\mathfrak{g}$ , cela équivaut encore à un parallélisme méromorphe  $Y_i = \omega_0^{-1}(\mathbf{e}_i)$ . La correspondance est donnée par :

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n Y_i^* \otimes \mathbf{e}_i \quad (1.95)$$

où  $(Y_i^*)_{i=1, \dots, n}$  désigne la base de 1-formes duales des  $(Y_i)_{i=1, \dots, n}$ . Un parallélisme holomorphe branché sur  $(M, D)$  est un parallélisme méromorphe tel que la géométrie de Cartan méromorphe de translation correspondante est holomorphe branchée sur  $(M, D)$ .

Les géométries de Cartan holomorphes branchées sont plus naturelles à considérer que les géométries de Cartan méromorphes en général. D'une part, les couples  $(E, \omega_0)$  construits par pullback d'une géométrie de Cartan holomorphe comme dans la [Exemple 1.5.2](#) sont des géométries de Cartan branchées. Par exemple, toute variété projective  $M \subset \mathbb{P}^N$  de dimension  $n$  admet une application holomorphe surjective vers  $\mathbb{P}^n$  (voir [\[4\]](#), Proposition 3.1). En considérant l'espace projectif comme la variété homogène  $G/P$  associée à la géométrie de Klein projective  $(G, P)$  de dimension  $n$ , on obtient que toute variété projective est équipée d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée modelée sur  $(G, P)$ . L'existence de l'isomorphisme  $\Phi_{\omega_0}$  défini par [\(1.94\)](#) permet d'itérer certains opérateurs différentiels. Soit en effet  $\mathbb{V}$  un  $P$ -module,  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{V}$  et introduisons pour  $r \geq 1$  les  $P$ -modules  $\mathbb{J}^r \mathbb{V}$  définis par itération :

$$\mathbb{J}^1 \mathbb{V} = \mathbb{V} \oplus \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{V} \quad \text{et} \quad \mathbb{J}^{r+1} \mathbb{V} = \mathbb{J}^1(\mathbb{J}^r \mathbb{V}) \quad (1.96)$$

Nous notons  $\mathcal{J}^r \mathbb{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{J}^r \mathbb{V}$ . Nous pouvons alors construire, par itération sur  $r \geq 1$ , des opérateurs différentiels  $\mathcal{D}^r : \mathcal{V}[\star \tilde{D}] \rightarrow \mathcal{J}^r \mathbb{V}[\star \tilde{D}]$ . Définissons pour toute section méromorphe  $s$  de  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{D}^1(s) = d(s) \circ \Phi_{\omega_0}^{-1} = \omega_0^{-1} \lrcorner d(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{r+1}(s) = \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^r(s)) \quad (1.97)$$

**Définition 1.5.11.** *L'opérateur  $\mathcal{D}^r$  défini via [\(1.97\)](#) est appelé dérivée invariante absolue d'ordre  $r$ .*

Fixons une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe  $(E, \omega_0)$  dont nous notons  $p : E \rightarrow M$  le fibré  $P$ -principal holomorphe. Considérons la variété complexe  $E_G = E \times_P G$  qui est un quotient de  $E \times G$  par l'action naturelle de  $P$  sur  $E \times G$  (voir [\(1.4\)](#)). Il s'agit donc de l'extension de  $E$  au groupe de Lie complexe  $G$  (??) et elle est munie de la structure de fibré  $G$ -principal holomorphe  $p_G : E_G \rightarrow M$  définie par  $p_G(e, g') = p(e)$ . Nous notons  $\iota_G : E \hookrightarrow E_G$  l'inclusion définie par [\(1.20\)](#).

**Lemme 1.5.2.1.** *Soient  $\pi_1, \pi_2$  les projections sur le premier et le second facteur de  $E \times G$ . La 1-forme holomorphe  $\bar{\omega} \in \Omega_{G \times G}^1 \otimes \mathfrak{g}$  définie par*

$$\bar{\omega} = (ad \circ \pi_2)[\pi_1^* \omega_0] + \pi_2^* \omega_G \quad (1.98)$$

*est invariante par l'action naturelle de  $P$  sur  $E \times G$  (voir [\(1.4\)](#)), et les vecteurs tangents aux orbites sont dans son noyau.*

*Démonstration.* L'équivariance de  $\bar{\omega}$  est une simple conséquence de l'équivariance de la forme de Maurer-Cartan. De plus, si  $(e, g') \in E \times G$ , et  $A \in \mathfrak{p}$  alors par définition de l'action de  $P$  sur  $E \times G$  :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(e, g') \cdot [(e, g') \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_G(tA)] &:= ad(g')[\omega_0(e) \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e \cdot \exp_G(tA) \right)] + \omega_G(g') \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_G(-tA) \cdot g' \right) \\ &= ad(g')(A) - ad(g')(A) = 0 \end{aligned} \quad (1.99)$$

Cela montre que les vecteurs tangents aux orbites de  $P$  dans  $E_G$  sont dans le noyau de  $\bar{\omega}$ .  $\square$

Par définition de  $E_G$ , la forme méromorphe  $\bar{\omega}$  du [Lemme 1.5.2.1](#) passe au quotient en une connexion  $G$ -principale méromorphe  $\tilde{\omega}$  sur  $E_G$ .

**Définition 1.5.12.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ .*

1. *Le fibré  $G$ -principal holomorphe  $E_G$  défini ci-dessus est le tractor bundle associé de  $(E, \omega_0)$ .*

2. *La connexion  $G$ -principale méromorphe  $\tilde{\omega}$  définie ci-dessus est appelée tractor-connexion. Elle est holomorphe lorsque  $(E, \omega_0)$  est une géométrie de Cartan holomorphe branchée.*

*On note  $\nabla^{\omega_0}$  la connexion covariante sur  $E(\mathfrak{g})$  correspondant à la représentation adjointe  $\mathfrak{g}$ .*

### 1.5.3 Courbure et représentation de courbure, développements

Reprenons une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  (resp. réelle). La forme de Maurer-Cartan  $\omega_G$  est une connexion  $P$ -principale holomorphe (resp. différentiable) sur  $G$ , invariante par l'action à gauche de  $G$ . Soient  $A, B \in \mathfrak{g}$  et  $\tilde{A}, \tilde{B}$  les champs invariants correspondant, i.e  $\omega_G(\tilde{A}) = A$  et  $\omega_G(\tilde{B}) = B$ . Rappelons que la formule de Maurer-Cartan est vérifiée :

$$d\omega_G(\tilde{A}, \tilde{B}) + [A, B]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad (1.100)$$

Réciproquement, considérons un fibré  $P$ -principal holomorphe (resp. différentiable)  $E$  sur une variété complexe (resp. réelle)  $M$ ,  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$  et une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\omega_0$  sur  $(E, \tilde{D})$ .

**Définition 1.5.13.** Une développante locale de  $(E, \omega_0)$  sur  $U$  est une application  $\psi : U \rightarrow G/P$  couverte par un isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes  $\Psi : p^{-1}(U) \rightarrow G$  tel que  $\omega_0 = \Psi^* \omega_G$ . Une  $(G, G/P)$ -structure branchée sur  $M$  est un atlas  $((U_\alpha)_{\alpha \in I}, \varphi_\alpha)$  où  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset G/P$  est un revêtement ramifié et tel que pour tout  $\alpha, \beta \in I$ , il existe  $g_{\alpha, \beta} \in G$  avec  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = L_{g_{\alpha, \beta}}$ . Elle est dite compatible avec  $(E, \omega_0)$  si  $\varphi_\alpha$  est une développante de  $(E, \omega_0)$  pour tout  $\alpha \in I$ .

**Définition 1.5.14.** La forme de courbure  $K_\omega$  d'une géométrie de Cartan méromorphe (resp. différentiable)  $(E, \omega_0)$  sur une variété complexe (resp. réelle)  $M$  et modelée sur  $(G, P)$  est la 2-forme méromorphe (resp. différentiable sur  $E \setminus D$ ) :

$$K_{\omega_0} = d\omega_0 + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0]_{\mathfrak{g}} \quad (1.101)$$

On dit que  $(E, \omega_0)$  est plate si cette forme est identiquement nulle.

L'annulation de cet objet équivaut à l'équation de Maurer-Cartan (0.0.1), et on a dans ce cas l'existence de développantes locales sur  $M \setminus D$ . Cela est une conséquence directe du résultat suivant, qui est la version locale du second théorème de Lie :

**Théorème 1.5.1.** Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe. Soit  $U \subset E$  un ouvert contenant  $e_0 \in E$  et  $\omega$  une 1- $\mathfrak{g}$ -forme holomorphe sur  $U$ . Supposons que  $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\mathfrak{g}} = 0$ . Alors il existe une application biholomorphe  $\Psi : U' \rightarrow V \subset G$  sur un voisinage  $U'$  de  $e_0$  telle que

$$\Phi = \Psi^* \omega_G \quad (1.102)$$

*Démonstration.* Voir [45], Théorème 6.1. □

**Lemme 1.5.3.1.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan sur  $(M, D)$ .

1. Si  $\omega_0$  vérifie l'équation de Maurer-Cartan (0.0.1), alors pour tout  $x \in M \setminus D$ , il existe une développante locale de  $(E, \omega_0)$  au voisinage de  $x$ .
2. Si de plus  $\omega_0$  est une connexion branchée, alors il y a équivalence entre :
  - (i)  $(E, \omega_0)$  est plate
  - (ii) Il existe une  $(G, G/P)$ -structure branchée sur  $(M, D)$  compatible avec  $(E, \omega_0)$ .

*Démonstration.* 1. Si  $(E, \omega_0)$  est plate, par définition de  $K_{\omega_0}$ , on obtient que pour tout  $A, B \in \mathfrak{g}$  :

$$[\omega_0^{-1}(A), \omega_0^{-1}(B)]_{TE} = \omega_0^{-1}([A, B]_{\mathfrak{g}}) \quad (1.103)$$

Fixons  $x_0 \in M \setminus D$  et  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ , ainsi qu'un voisinage  $U \subset E$  de  $e_0$ . Comme  $e \notin \tilde{D}$ ,  $\omega_0$  est un isomorphisme de  $TE|_U$  vers  $\mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{g}$  et vérifie l'hypothèse du Théorème 1.5.1

On en déduit qu'il existe un voisinage  $U_{e_0} \subset U$  de  $e_0$  et application holomorphe  $\Psi : U_{e_0} \rightarrow G$  telle que  $\omega_0 = \Psi^* \omega_G$ . En particulier, par l'équivariance de  $\omega_0$ , nous avons  $\Psi(e \cdot b) = \Psi(e) \cdot b$  pour tout  $b \in P$ . Cela signifie que  $\Psi$  est un automorphisme de fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $p^{-1}(U_{x_0})$ , où  $U_{x_0} = p(U_{e_0})$ . Donc  $\Psi$  couvre une application holomorphe  $\varphi : U_{x_0} \rightarrow G/P$ , qui par construction est une développante de  $(E, \omega_0)$  sur  $U_{x_0}$ .

2. Pour prouver cette équivalence, il suffit de prouver qu'il existe une développante locale au voisinage  $U$  de tout point  $x_0 \in D$ . Or  $\omega_0$  est branchée donc il s'agit d'une 1- $\mathfrak{g}$ -forme holomorphe sur  $U$ . En appliquant le [Théorème 1.5.1](#) comme en 1., on obtient des développantes locales au voisinage de tout point de branchement  $x_0 \in D$ . □

Si  $(E, \omega)$  est une géométrie de Cartan holomorphe qui vérifie l'hypothèse du [Lemme 1.5.3.1](#) et si  $M$  est simplement connexe, alors les développantes locales  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$  d'une  $(G, G/P)$ -structure comppatible se recollent en un isomorphisme  $\varphi : M \rightarrow G/P$  tel que  $\varphi^*(G, \omega_G) = (E, \omega)$ . On en déduit que l'équation de Maurer-Cartan mesure la divergence entre la géométrie de Cartan  $(E, \omega_0)$  et la géométrie canonique de la géométrie de Klein  $(G, P)$ .

**Lemme 1.5.3.2.** *Soit  $(E, \omega)$  une géométrie de Cartan holomorphe transverse branchée sur  $(M, D)$ . La courbure  $K_\omega$  vérifie :  $\forall p \in P, r_p^* \star K_\omega = ad(p^{-1}) \circ K_\omega$ .*

*Démonstration.* Voir [\[45\]](#), Chapitre 5, Lemme 3.23. □

Nous envisagerons souvent la courbure comme la section d'un fibré vectoriel au dessus de  $M$ . Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie méromorphe sur  $(M, D)$  et  $K_{\omega_0}$  sa courbure. Par le [Lemme 1.5.3.2](#),  $K_{\omega_0}$  est une 2-forme méromorphe  $P$ -équivariante sur  $E$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , et s'annulant sur  $\text{Ker}(dp)$ . Par la Proposition [\[1.1.3.1\]](#), elle équivaut donc à une section méromorphe de  $\Omega_M^2 \otimes E(\mathfrak{g})$ . En composant avec l'isomorphisme  $\phi_0 \wedge \phi_0 : \wedge^2 T^* M \simeq E(\wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*)$ , on obtient une section méromorphe  $\bar{k}_{\omega_0}$  de  $E(\mathbb{W})$  où  $\mathbb{W} = \wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ .

**Définition 1.5.15.** *La section méromorphe  $\bar{k}_{\omega_0}$  (resp.  $k_{\omega_0} = Id_{\mathcal{O}_E} \otimes p^* \bar{k}_{\omega_0}$ ) est appelée représentation de courbure de  $(E, \omega_0)$ . On notera  $\mathbb{W} = \wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$  la représentation de  $P$  dans laquelle  $k_{\omega_0}$  prend ses valeurs.*

Fixons une base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , avec  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  engendrant un supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$  de  $\mathfrak{p}$ . Notons  $(\mathbf{e}_i^*)_{i=1, \dots, N}$  les formes linéaires duales. Les constantes de structures du modèle sont les complexes  $(c_{i,j}^k)_{i,j,k=1, \dots, N}$  définis par  $c_{i,j}^k = \mathbf{e}_k^*[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]_{\mathfrak{g}}$ .

**Définition 1.5.16.** *Les constantes de structures  $\gamma_{i,j}^k$  de  $(E, \omega_0)$  associées à la base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  sont les fonctions méromorphes sur  $E$  définies par :*

$$\gamma_{i,j}^k = \mathbf{e}_i^* \omega_0([Y_i, Y_j]) \quad (1.104)$$

La  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sera dite sans  $\mathfrak{g}_-$ -torsion si et seulement si pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , les coefficients de structures  $\gamma_{i,j}^k$  sont les constantes de structures  $c_{i,j}^k$  du modèle. La  $\mathfrak{g}_-$ -torsion de  $\omega_0$  est définie par  $\tau_{\omega_0} = \sum_{i,j,k=1}^n (\gamma_{i,j}^k - c_{i,j}^k) \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k$ .

On a donc la formule :

$$k_{\omega_0} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N (\gamma_{i,j}^k - c_{i,j}^k) \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k \quad (1.105)$$

et  $\tau_{\omega_0}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  est la projection de  $k_{\omega_0}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  sur  $\mathfrak{g}_-$  parallèlement à  $\mathfrak{p}$ .

**Exemple 1.5.5.** *Considérons une variété complexe  $M$ , et un modèle de translation  $(G, \{1\})$  de dimension  $n = \dim(M)$  (voir Exemple 1.5.1). Fixons une base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et notons  $c_{i,j}^k$  les constantes de structures associées. Une  $(G, \{1\})$ -géométrie de Cartan plate sur  $M$  correspond alors à un parallélisme  $Y_i = \omega^{-1}(\mathbf{e}_i)$  tel que*

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j] &= \omega^{-1}(\omega([Y_i, Y_j])) \\ &= \omega^{-1}(k_\omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k Y_k \end{aligned} \tag{1.106}$$

Le sous-espace de  $H^0(M, TM)$  formé des sections  $\omega$  constantes est donc une algèbre de Lie (pour le crochet de champs de vecteurs) isomorphe à  $\mathfrak{g}$ . Une telle structure sera appelée structure de translation modelée sur  $G$ .

**Exemple 1.5.6.** *Soit  $H \subset GL_n(\mathbb{C})$  un sous-groupe fermé et  $G = H \rtimes \mathbb{C}^n$ . Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, H)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  et  $k_{\omega_0}$  sa représentation de courbure. Décomposons  $\omega_0 = \theta_0 \oplus \tilde{\omega}$  où  $\tilde{\omega}$  est la projection sur  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$  parallèlement au supplémentaire  $\mathfrak{g}_- = \text{Lie}(\mathbb{C}^n)$ . Alors  $\tilde{\omega}$  équivaut à une connexion méromorphe  $\nabla$  sur  $TM$  (voir Exemple ??), et on note  $T_\nabla$  sa torsion. Comme  $\mathfrak{g}_-$  est un  $H$ -module abélien, on a :*

$$\begin{aligned} k_{\omega_0} &= (d\omega_0 + [\omega_0, \omega_0]) \circ (\omega_0^{-1} \otimes \omega_0^{-1}) \\ &= (d\theta_0 + [\theta_0, \tilde{\omega}]_{\mathfrak{g}} \circ (\omega_0^{-1} \otimes \omega_0^{-1})) \oplus d\tilde{\omega} \circ (\omega_0^{-1} \otimes \omega_0^{-1}) \end{aligned} \tag{1.107}$$

Alors on vérifie facilement que la section  $\tilde{T}_\nabla$  du Lemme 1.3.3.4 coïncide avec  $\tau_{\omega_0} \circ (\beta_0 \otimes \beta_0)$ .

Considérons deux  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes  $(E, \omega_0)$  et  $(E, \omega'_0)$  dans la même fibre par  $f$  (voir Théorème 1.6.1). Considérons la section  $\varphi$  du Lemme 1.6.5.1 qui décrit la différence entre  $\omega_0$  et  $\omega'_0$ . Notons  $\tilde{\varphi} = p^* \varphi$ . On a :

**Lemme 1.5.3.3.** *Pour tout  $A, B \in \mathfrak{g}_-$ , on a :*

$$k_{\omega'_0} = k_{\omega_0} + \partial \tilde{\varphi} + d(\tilde{\varphi} \circ \omega_0) \circ (\omega_0^{-1} \wedge \omega_0^{-1}) + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\tilde{\varphi} \wedge \tilde{\varphi}) \tag{1.108}$$

où  $\tilde{A}, \tilde{B}$  sont les champs  $\omega_0$ -constants associés à  $A, B \in \mathfrak{g}$ . En particulier les torsion relatives à  $\mathfrak{g}_-$  sont reliées par :

$$\tau_{\omega'_0}(A, B) = \tau_{\omega_0}(A, B) + \text{proj}_{\mathfrak{g}_-}(\partial \tilde{\varphi}(A, B)) \tag{1.109}$$

où  $\partial$  est la différentielle de Kostant relative à  $\mathfrak{g}_-$  (Définition 1.4.6).

*Démonstration.* Notons  $\tilde{C}'$  et  $\tilde{C}$  respectivement les champs  $\omega'_0$  et  $\omega_0$ -constants associés à  $C \in \mathfrak{g}$ . Par définition de  $\tilde{\varphi}$ , on a :

$$\tilde{C}' = \tilde{C} - \omega_0^{-1}[\tilde{\varphi}(\text{proj}_{\mathfrak{g}_-}(C))] \tag{1.110}$$

Dans la suite, nous omettons le symbole  $\text{proj}_{\mathfrak{g}_-}$ . Développons le calcul de la courbure de

$\omega'_0 :$

$$\begin{aligned}
 k_{\omega'_0} &= -d\omega'_0(\tilde{A}', \tilde{B}') + [A, B]_{\mathfrak{g}} \\
 &= -d\omega_0(\tilde{A} - \omega_0^{-1}[\tilde{\varphi}(A)], \tilde{B} - \omega_0^{-1}[\tilde{\varphi}(B)]) - d(\tilde{\varphi} \circ \omega_0)(\tilde{A}, \tilde{B}) + [A, B]_{\mathfrak{g}} \\
 &= k_{\omega_0}(A, B) - \omega_0([\tilde{A}, -\omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(B))]) + \omega_0([-\omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(A)), \tilde{B}]) - d(\tilde{\varphi} \circ \omega_0)(\tilde{A}, \tilde{B}) + [\tilde{\varphi}(A), \varphi(\tilde{B})]_{\mathfrak{g}} \\
 &= k_{\omega_0}(A, B) + \partial\tilde{\varphi}(A, B) - K_{\omega_0}(\tilde{A}, \omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(B))) - K_{\omega_0}(\omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(A)), \tilde{B}) \\
 &\quad + d(\tilde{\varphi} \circ \omega_0)(\tilde{A}, \tilde{B}) + [\tilde{\varphi}(A), \varphi(\tilde{B})]_{\mathfrak{g}}
 \end{aligned} \tag{1.111}$$

Comme  $K_{\omega_0}(\tilde{A}, \omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(B))) = K_{\omega_0}(\omega_0^{-1}(\tilde{\varphi}(A)), \tilde{B}) = 0$  nous obtenons la formule annoncée. La seconde assertion s'obtient en projetant le calcul ci-dessus sur  $\mathfrak{g}_-$  parallèlement à  $\mathfrak{p}$ .  $\square$

Soit  $U \subset M$  un ouvert muni d'une section  $\sigma : U \rightarrow E$  une section holomorphe. Nous allons donner une formule équivalente au [Lemme 1.5.3.3](#) en terme de fonctions au dessus de  $U$ . Soit :

$$\psi_\sigma : E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})) \simeq \mathcal{O}_U \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}) \tag{1.112}$$

la trivialisaton du module représentation de  $\text{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  associée à  $\sigma$  (voir Proposition [1.1.11](#)). Soient

$$\mathcal{B} = \psi_\sigma(\varphi) , \Omega = \psi_\sigma(p_*k_{\omega_0}) \text{ et } \Omega' = \psi_\sigma(p_*k_{\omega'_0}) \tag{1.113}$$

Soit  $\psi_\sigma(\mathfrak{g}_-)$  la trivialisaton de  $\mathcal{E}$  sur  $U$  associée à  $\sigma$ . Nous définissons :

$$\mathcal{A} = \psi_\sigma(\mathfrak{g}_-) \circ \phi_0 \tag{1.114}$$

Il s'agit d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_U[*D]$ -modules entre  $TU[*D]$  et  $\mathcal{O}_U[*D] \otimes \mathfrak{g}_-$ , que nous identifierons à une 1-forme méromorphe sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}_-$ . L'isomorphisme inverse sera noté  $\mathcal{A}^{-1}$ . Notons  $\partial = \text{Id}_{\mathcal{O}_U} \otimes \partial$  la différentielle de Kostant ([Définition 1.4.6](#)) et :

$$\begin{aligned}
 \text{Alt} : \quad \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{W} \\
 A^* \otimes B^* \otimes C &\longrightarrow \frac{1}{2}A^* \wedge B^* \otimes C
 \end{aligned} \tag{1.115}$$

Alors :

**Lemme 1.5.3.4.** *On a :*

$$\Omega' = \Omega + \partial\mathcal{B} + \text{Alt}(d\mathcal{B} \circ (\text{Id} \otimes \mathcal{A}^{-1})) + [\mathcal{B} \circ \mathcal{A}, \mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) \tag{1.116}$$

ou encore  $\Omega' = \Omega + \partial\mathcal{B} + d(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) + [\mathcal{B} \circ \mathcal{A}, \mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})$ .

*Démonstration.* La différentielle extérieure  $d\mathcal{B}$  est une section méromorphe de  $\Omega_U^1 \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(TU \otimes \mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{g}_-, \mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{p})$ . Donc  $d\mathcal{B} \circ (\text{Id} \otimes (\psi_\sigma \circ \phi_0)^{-1})$  est une section méromorphe de  $\mathcal{O}_U \otimes (\mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g})$  et on peut considérer sa forme alternée en appliquant ([1.115](#)). Par ailleurs,  $\psi_\sigma \circ \phi_0(X) = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(\sigma^*\omega_0(X))$  pour tout champ de vecteur  $X$  sur  $U$ . Par définition, pour  $A, B \in \mathfrak{g}_-$ , on a donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Alt}(d\mathcal{B} \circ (\text{Id} \otimes (\psi_\sigma \circ \phi_0)^{-1}))(A, B) &= (\psi_\sigma \circ \phi_0)^{-1}(B) \text{-} d\mathcal{B}(A) - (\psi_\sigma \circ \phi_0)^{-1}(A) \text{-} d\mathcal{B}(B) \\
 &= \mathcal{L}_{\tilde{B}}\tilde{\varphi}(A) - \mathcal{L}_{\tilde{A}}\tilde{\varphi}(B)
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

On retrouve l'expression apparaissant dans le calcul ([1.111](#)).  $\square$

Cette formule sera utilisée notamment dans la résolution du problème d'équivalence pour les géométries de Cartan paraboliques branchées.

### 1.5.4 Automorphismes et champs de Killing d'une géométrie de Cartan méromorphe

Une géométrie de Cartan holomorphe se distingue de la géométrie canonique  $(G, \omega_G)$  par l'absence d'une action de  $G$  sur  $M$ . Cependant, il se peut en général que certains automorphismes locaux de  $M$  préservent la géométrie  $(E, \omega_0)$  de la même manière que l'action à gauche de  $G$  sur  $G/P$  préserve la géométrie de Klein :

**Définition 1.5.17.** *Soit  $(E, \omega)$  une géométrie de Cartan holomorphe sur une variété complexe  $M$ ,  $p : E \rightarrow M$  son fibré  $P$ -principal holomorphe et  $U \subset M$  un ouvert non vide. Un biholomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  est un automorphisme local de la géométrie si et seulement si  $\varphi$  se relève en biholomorphisme  $\tilde{\varphi} : p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(\varphi(U))$  tel que  $\tilde{\varphi}^* \omega = \omega$ .*

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ . On note  $\tilde{D} = p^{-1}(D)$ . Remarquons qu'un biholomorphisme local  $\tilde{\varphi}$  sur un ouvert  $\tilde{U} \subset E \setminus \tilde{D}$  vérifiant  $\tilde{\varphi}^* \omega_0 = \omega_0$  commute avec les champs fondamentaux de l'action de  $P$  sur  $E$  (par définition d'une connexion de Cartan). Donc il se prolonge à l'ouvert  $p^{-1}(U)$ , où  $U = p(\tilde{U})$ , en un isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes. Le biholomorphisme local  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  couvert par  $\tilde{\varphi}$  est alors un automorphisme local de  $(E, \omega_0)$ .

**Définition 1.5.18.** *Le faisceau  $\text{Aut}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}$  des automorphismes locaux de  $(E, \omega_0)$  est le faisceau sur  $E \setminus \tilde{D}$  tel que pour tout  $\tilde{U} \subset E \setminus \tilde{D}$ ,  $\text{Aut}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}(\tilde{U})$  est l'ensemble des automorphismes locaux du fibré  $P$ -principal  $E$  définis sur  $\tilde{U}$  et couvrant un automorphisme local de  $(E, \omega_0)$ . Nous noterons  $\text{Aut}_{M, \omega_0}^{\text{loc}}$  le faisceau sur  $M \setminus D$  des automorphismes locaux  $\varphi$  de  $(E, \omega_0)$ , i.e ceux couverts par une section  $\tilde{\varphi}$  de  $\text{Aut}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}$ .*

**Définition 1.5.19.** *Soit  $U \subset M \setminus D$ . Un champ de vecteur local  $X \in H^0(U, TM)$  est un automorphisme infinitésimal (ou automorphisme infinitésimal) de  $(E, \omega_0)$  si et seulement si  $\phi_X^t \in \text{Aut}_{M, \omega_0}^{\text{loc}}(U)$ . Nous noterons  $\mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{\text{loc}}$  (resp.  $\mathfrak{kil}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}$ ) le sous-faisceau de  $TM \setminus D$  (resp.  $TE \setminus \tilde{D}$ ) constitué des automorphismes infinitésimaux (resp. leur relevés à  $E$ ).*

Soit  $(M', D')$  un couple formé d'une variété complexe  $M'$  de même dimension que  $M$  et d'un diviseur effectif  $D'$ , et  $(E', \omega'_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur ce dernier. Soit  $F : M \rightarrow M'$  une application de rang maximal sur un ouvert dense  $M \setminus S$  de  $M$ , et supposons que  $(E, \omega_0) = \varphi^*(E', \omega'_0)$  (voir [Définition 1.5.5](#)). Alors  $(E, \omega_0)$  est une géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  où  $D = S \cup F^{-1}(D')$  et :

**Lemme 1.5.4.1.** *On a  $dF(\mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{\text{loc}}) = F^* \mathfrak{kil}_{M', \omega'_0}^{\text{loc}}$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $E = F^* E'$ . Il existe donc un morphisme de  $P$ -fibrés principaux holomorphes  $\tilde{F} : E \rightarrow E'$  couvrant  $F$ , et :

$$\omega_0 = \tilde{F}^* \omega'_0 = \tilde{F}^* \omega'_0 \circ d\tilde{F}$$

Il suffit donc de prouver que  $d\tilde{F}(\mathfrak{kil}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}) = \tilde{F}^* \mathfrak{kil}_{E', \omega'_0}^{\text{loc}}$ . Soit  $X \in \mathfrak{kil}_{E, \omega_0}^{\text{loc}}(U)$  sur un ouvert  $U \subset E \setminus \tilde{D}$ . Par définition, pour tout  $A \in \mathfrak{g}$ , on a  $[X, \tilde{A}] = 0$  où  $\tilde{A}$  est le champ  $\omega_0$ -constant. Alors, en notant  $\tilde{A}'$  le champ  $\omega'_0$ -constant associé à  $A$ , on a :

$$[T\tilde{F}(X), \tilde{A}'] = [T\tilde{F}(X), T\tilde{F}(\tilde{A})] = T\tilde{F}[X, \tilde{A}] = 0 \quad (1.118)$$

et donc  $T\tilde{F}(X) \in \mathfrak{kil}_{E', \omega'_0}^{\text{loc}}(\tilde{F}(U))$ . □

Par définition, il existe des morphismes surjectifs de faisceaux :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{p} & : Aut_{E,\omega_0}^{loc} \longrightarrow p^* Aut_{M,\omega_0}^{loc} \\ & (\tilde{\varphi}, U) \longrightarrow (\varphi, p(U)) \\ dp|_{\mathfrak{K}ill^{loc}} & : \mathfrak{K}ill_{E,\omega_0}^{loc} \longrightarrow p^* \mathfrak{K}ill_{M,\omega_0}^{loc} \\ & (X, U) \longrightarrow (Tp(X), p(U)) \end{aligned} \quad (1.119)$$

où  $\varphi$  est l'unique automorphisme local de  $M$  qui est couvert par le morphisme de  $P$ -fibrés  $\tilde{\varphi}$ . Lorsque le modèle  $(G, P)$  est *effectif* (Définition 1.4.3), il s'agit de deux isomorphismes. On a en effet le lemme suivant (voir [39], Proposition 3.6) :

**Lemme 1.5.4.2.** *Soit  $(E, \omega)$  une géométrie de Cartan holomorphe effective sur  $M$ , et notons  $p$  la projection de  $E$ . Soient  $\Psi \in Aut^{loc}(E, \omega)(p^{-1}(U))$ . Si  $\Psi$  couvre l'identité, alors  $\Psi = Id_E$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Psi$  couvre l'identité, il existe une application holomorphe  $b : p^{-1}(U) \rightarrow P$  avec  $\Psi(e) = e \cdot b(e)$  pour tout  $e \in p^{-1}(U)$ . Notons  $N$  le sous-groupe connexe minimal contenant  $b(U)$ . Soit  $v \in T_e E$  un vecteur tangent en  $e \in p^{-1}(U)$ . Comme  $\Psi \in Aut^{loc}(p^{-1}(U))$ , on doit avoir  $\omega(T\Psi(v)) = \omega(v)$ . Or :

$$\begin{aligned} \omega(T\Psi(v)) & = r_{b(e)}^* \omega(d\Psi(v)) \\ & = r_{b(e)}^* \omega(dr_{b(e)}(v) + db(v)) \\ & = ad(b(e)^{-1})[\omega(v)] + b^* \omega_P(v) \end{aligned} \quad (1.120)$$

Donc  $\omega(v) = ad(b(e)^{-1})[\omega(v)] \pmod{\mathfrak{n}}$ . Par conséquent, pour tout  $b \in N$ , et tout  $A \in \mathfrak{g}$ , on a :  $A = ad(b^{-1})(A) \pmod{\mathfrak{n}}$ . Fixons alors  $B \in \mathfrak{n}$ , nous obtenons :

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ad(\exp_G(-tB))(A) = -[B, A]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{n} \quad (1.121)$$

donc  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , et  $N$  est normal dans  $G$ . □

Ce résultat peut se reformuler comme une propriété du foncteur  $f$  du Théorème 1.6.1 :

**Corollaire 1.5.1.** *Si  $(G, P)$  est une géométrie de Klein effective, alors le foncteur  $f$  est fidèle.*

*Démonstration.* Par définition, les flèches de  $\mathcal{G}_{M,D}$  sont des isomorphismes de fibrés  $P$ -principaux holomorphes. Il suffit donc de prouver qu'une flèche entre une géométrie méromorphe  $(E, \omega_0)$  et elle même induisant l'identité sur  $f(E, \omega_0)$  est l'identité. Or par définition, une telle flèche est un automorphisme de  $(E \setminus \tilde{D}, \omega_0)$  couvrant l'identité sur  $M \setminus D$ . Le Lemme 1.5.4.2 permet de conclure. □

La condition d'effectivité n'est pas restrictive : soit  $K$  le noyau de l'action adjointe de  $P$  sur  $\mathfrak{g}$ . Alors on peut se ramener à une géométrie modelée sur  $(G', P')$  avec  $G' = G/K$  et  $P' = G' \cap P$ , c'est à dire une géométrie effective (voir [45], Chapitre IV, Proposition 3.1). Le Lemme 1.5.4.2 possède un analogue infinitésimal :

**Corollaire 1.5.2.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ , où  $(G, P)$  est effectif. Alors les morphismes définis par (1.119) sont des isomorphismes de faisceaux. En particulier :*

$$\mathfrak{K}ill_{\omega_0}^{loc} \cap Ker dp = \{0\}_{E \setminus \tilde{D}}$$

Lorsque  $(G, P)$  est effectif nous nommerons les sections de  $\mathfrak{kil}_{\omega_0, M}^{loc}$  *champs de Killing* de la géométrie  $(E \setminus \tilde{D}, \omega_0, p_0)$ .

L'abondance de symétries pour une géométrie de Cartan holomorphe peut être utilisée dans la classification (voir [24]). Notamment dans la situation suivante :

**Définition 1.5.20.**  $(E, \omega_0)$  (resp.  $M$ ) est dite *localement homogène* si et seulement si pour tout  $x_0 \in M \setminus D$ , il existe un voisinage  $U_{x_0}$  de ce point et une famille  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n \in \mathfrak{kil}_{\omega_0, M}^{loc}(U_{x_0})$  telle que  $TM|_{U_{x_0}}$  est engendré par les  $\bar{X}_i$  comme  $\mathcal{O}_M$ -module. Elle est *quasi-homogène* si il existe un ouvert dense  $U \subset M$  tel que  $(E, \omega_0)$  est localement homogène sur  $U$ .

Nous expliquons à présent que les champs de Killing forment un système local sur  $M \setminus D$ . Par le Corollaire 1.5.2, nous sommes ramenés à prouver la même propriété pour  $\mathfrak{kil}_{E, \omega_0}^{loc}$  :

**Lemme 1.5.4.3.**  $\mathfrak{kil}_{E, \omega_0}^{loc}$  est un système local en algèbres de Lie de dimension finie sur  $E \setminus \tilde{D}$ .

*Démonstration.* Par définition d'un système local, il s'agit de prouver que pour tout  $e \in E \setminus \tilde{D}$ , il existe un voisinage  $U_e$  de  $E \setminus \tilde{D}$  et un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux :  $\phi_e : K(e)_{U_e} \rightarrow \mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}|_{U_e}$  où  $K(e)_{U_e}$  est le faisceau constant de fibre  $K(e) = \mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}(e)$  (voir Définition 1.3.13). Pour cela, on considère l'application exponentielle  $exp_e : V \rightarrow E$  sur un voisinage  $V \subset \mathfrak{g}$  de 0 sur lequel elle est injective (voir Définition 1.5.2). Elle induit un biholomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi_e : V &\longrightarrow U_e \\ A &\longrightarrow \phi_{\tilde{A}}^1(e) \end{aligned} \quad (1.122)$$

où  $\tilde{A} = \omega_0^{-1}(A)$  et  $U_e$  est un voisinage de  $e$ . L'application linéaire de la Définition 1.5.3 se restreint en :

$$\begin{aligned} \phi_e : \frac{K(e)_{U_e}}{X(e)} &\longrightarrow \mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}|_{U_e} \\ &\longrightarrow X, X(\phi_e(A)) = T\phi_{\tilde{A}}^1(X(e)) \end{aligned} \quad (1.123)$$

Montrons d'abord que cette application est bien définie : considérons une section  $X \in \mathfrak{kil}^{loc}(U_e)$ , la section constante  $X(e)$  de  $K_{U_e}$  sur  $U_e$  et montrons que

$$\forall e' \in U_e, X(e') = \phi_e(X(e))(e') \quad (1.124)$$

En effet, soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  et  $(Y_i)_{i=1, \dots, N} \in H^0(U, TE)$  les champs  $Y_i = \omega_0^{-1}(\mathbf{e}_i)$ . Par définition de  $\mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}$ ,  $X$  doit commuter avec les  $Y_i$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . En fixant une direction quelconque  $A \in \mathfrak{g}$  et en considérant la courbe  $\gamma_A(t) = \psi_e(tA)$  associée, cela implique que les dérivées  $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} X \circ \gamma_A(t)$  et  $\frac{d}{dt}|_{t=0} T_e \phi_A^t(X(e))$  coïncident. Or  $X(e) = T\phi_0^1(\omega_0(X(e)))$ , donc  $X(\gamma_A(t)) = T\phi_A^1(X(e))$  et on en déduit immédiatement la formule (1.124). Par conséquent  $\phi_{E \setminus \tilde{D}}$  est bien définie. Elle réalise de plus une bijection entre  $\mathfrak{kil}^{loc}(e)$  et  $\mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}(U)$  pour tout  $U \subset U_{E \setminus \tilde{D}}$ , compatible avec les restrictions. Nous avons donc montré qu'il s'agit d'un isomorphisme du faisceau constant vers la restriction de  $\mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}$  au voisinage  $U_{E \setminus \tilde{D}}$ . En particulier,  $\mathfrak{kil}^{loc}$  est un système local de dimension  $k$  sur  $M \setminus D$ .

La structure d'algèbre de Lie sur une fibre  $\mathfrak{kil}^{loc}(U_{x_0})$  est simplement celle induite par le crochet de champ de vecteurs  $[\cdot, \cdot]$  sur  $M$ . En effet, si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux éléments dans la fibres, alors par définition ils se relèvent en  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in TE(p^{-1}(U_{x_0}))$  avec, pour tout  $A \in \mathfrak{g}$  :  $[\tilde{X}_1, \tilde{A}] = [\tilde{X}_2, \tilde{A}]$  où  $\tilde{A} = \omega_0^{-1}(A)$ . En appliquant l'identité de Jacobi, on trouve immédiatement  $[[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2], \tilde{A}] = 0$  donc  $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$  est un relevé de  $[X_1, X_2]$  commutant avec tous les champs  $\omega_0$ -constants. Comme  $M$  est connexe, la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Lie  $(\mathfrak{kil}_{\omega_0}^{loc}(U_{x_0}), [\cdot, \cdot])$  est indépendante du point  $x_0 \in M \setminus D$  et du voisinage  $U_{x_0}$ .  $\square$

**Remarque 1.5.4.1.** *En particulier,  $(\mathfrak{fil}^{loc}(M \setminus D), [, ])$  est une algèbre de Lie de dimension finie  $k$ , majorée par la dimension  $N = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ .*

**Corollaire 1.5.3.** *Si  $(G, P)$  est une géométrie de Klein effective, alors  $\mathfrak{fil}_{M, \omega_0}^{loc}$  est également un système local sur  $M \setminus D$ .*

*Démonstration.* Remarquons qu'un automorphisme infinitésimal  $X \in \mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}(\tilde{U})$  sur un ouvert  $\tilde{U} \subset E \setminus \tilde{D}$  commute avec les champs fondamentaux de l'action de  $P$  sur  $E$ . Cela équivaut à ce que  $\tilde{X}$  soit une section invariante de  $TE$  par la linéarisation  $(dr_b)_{b \in P}$ . Par conséquent,  $\mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}$  est stable par la linéarisation précédente, et  $p_* \mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}$  est encore un système local sur  $M \setminus D$ . Par la [Corollaire 1.5.2](#), on conclut immédiatement.  $\square$

## 1.6 Extensions méromorphes et structures géométriques méromorphes induites

Dans cette section, nous décrivons les  $Q$ -structures méromorphes induites par les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes, où  $Q$  est l'image de la représentation adjointe quotient d'une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  ([Définition 1.4.2](#)). Nous utilisons le langage des catégories et passons par un objet qui est l'analogue des structures holomorphes induites par les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes : les  $Q$ -extensions méromorphes. Nous distinguons le cas des géométries de Cartan holomorphes branchées.

### 1.6.1 $Q$ -extensions méromorphes et $Q$ -structures méromorphes induites

Soit  $(M, D)$  une paire de dimension  $n = \dim(G/P)$ . Reprenons la description équivariante d'une géométrie de Cartan méromorphe proposée dans [\[4\]](#) :

**Proposition 1.6.1.1.** *L'ensemble des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  est en bijection avec l'ensemble des couples  $(E, \beta_0)$  où  $E$  est un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$  et  $\beta_0$  est un isomorphisme entre  $At(E_P)[*D]$  et  $E(\mathfrak{g})[*D]$  tel que diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E(\mathfrak{p})[*D] & \xrightarrow{\iota} & At(E_P)[*D] & \xrightarrow{q} & TM[*D] \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow \phi_0 \\ 0 & \longrightarrow & E(\mathfrak{p})[*D] & \longrightarrow & E(\mathfrak{g})[*D] & \longrightarrow & \mathcal{E}[*D] \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.125)$$

où :  $\iota$  et  $q$  sont les morphismes de la suite exacte ([Proposition 1.1.3.1](#)),  $\mathcal{E} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  ([Définition 1.1.9](#)) et le morphisme  $\phi_0$  est le morphisme induit par  $\beta_0$  et le diagramme.

*Démonstration.* L'ensemble des 1-formes méromorphes  $\omega_0$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  sur  $(E, \tilde{D})$ ,  $P$ -équivariantes, est en bijection avec l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{O}_E[*\tilde{D}]$ -modules  $\omega_0 : TE[*\tilde{D}] \rightarrow \mathcal{O}_E[*\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}$  équivariants. Cette bijection se restreint entre l'ensemble des connexions de Cartan méromorphes  $\omega_0$  et les isomorphismes de  $\mathcal{O}_E[*\tilde{D}]$ -modules équivariants vérifiant, pour tout  $x \in M \setminus D$  :

$$\iota_{P,x}^* \omega_0 = \omega_{P,x} \quad (1.126)$$

où  $\iota_{P,x}$  désigne l'inclusion de la fibre  $p^{-1}(x)$  dans  $E$ , et  $\omega_{P,x}$  sa forme de Maurer-Cartan ([Définition 1.1.1](#)). La [Corollaire 1.1.1](#) établit une correspondance bijective entre les isomorphismes de  $\mathcal{O}_E[*\tilde{D}]$ -modules  $\omega_0 : TE[*\tilde{D}] \rightarrow \mathcal{O}_E[*\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}$   $P$ -équivariants et les morphismes de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules  $\beta_0 : At(E_P)[*D] \simeq E(\mathfrak{g})[*D]$ . La condition ([1.126](#)) équivaut à  $\beta_0 \circ \iota = Id_{E(\mathfrak{p})}$  par définition du morphisme  $\iota$  (voir [Proposition 1.1.3.1](#)).  $\square$

Dans le cas holomorphe, i.e lorsque  $D$  est vide, cette définition alternative permet de décrire la  $Q$ -structure holomorphe induite par une géométrie de Cartan holomorphe  $(E, \omega)$  sur  $M$ . Dans ce cas, le morphisme  $\phi_0$  construit dans la [Proposition 1.6.1.1](#) est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M$ -modules entre  $TM$  et  $\mathcal{E}$ . Le dernier module est aussi le module représentation associé au fibré  $Q$ -principal holomorphe

$$\tilde{E} = E \times_P Q \quad (1.127)$$

et la représentation  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  de  $Q$ . En fixant une base de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , le groupe  $Q$  s'identifie à un sous-groupe de Lie complexe de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Par conséquent  $\tilde{E}$  s'identifie à une réduction holomorphe du fibré des base  $R(\mathcal{E})$  au sous-groupe  $Q \subset GL_n(\mathbb{C})$ . En notant  $\tilde{\Psi} : R^1(M) \rightarrow R(\mathcal{E})$  l'isomorphisme de fibrés  $GL_n(\mathbb{C})$ -principaux holomorphes correspondant à  $\phi_0$  ([Lemme 1.1.2.1](#)), on obtient une  $Q$ -structure holomorphe

$$\tilde{E}_0 = \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{E}) \quad (1.128)$$

sur  $M$ .

Dans le cas méromorphe, le fibré  $Q$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  défini par ([1.127](#)) est une réduction du fibré des bases d'une *extension méromorphe* sur  $(M, D)$ , au sens ci-dessous :

**Définition 1.6.1.** Soit  $(M, D)$  une paire avec  $\dim(M) = n$  et  $H$  un sous-groupe complexe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

1. Une *extension méromorphe* (resp. *holomorphe*) sur  $(M, D)$  est un couple  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_M$ -module localement libre de rang  $n = \dim(M)$  et  $\phi_0 : TM[\star D] \rightarrow \mathcal{E}[\star D]$  est un isomorphisme (resp. se restreignant en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M$ -modules entre  $TM$  et  $\mathcal{E}$ ).
2. Une  $H$ -*extension méromorphe* (resp. *holomorphe*) sur  $(M, D)$  est un couple  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  (resp.  $(\phi_0, \tilde{E})$ ) où  $\tilde{E}$  est un fibré  $H$ -principal holomorphe sur  $M$  tel que  $(\tilde{E}(\mathbb{C}^n), \phi_0)$  est une *extension méromorphe* (resp. *holomorphe*) sur  $(M, D)$ .
3. Une  $Q$ -*extension méromorphe*  $(\phi_0, \tilde{E})$  est induite par une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  si  $\tilde{E}$  est obtenu comme en ([1.127](#)) et  $\phi_0$  est le morphisme construit comme dans la [Proposition 1.6.1.1](#).

Les  $H$ -extensions méromorphes sur les paires forment une catégorie :

**Définition 1.6.2.** Soit  $H$  un sous-groupe complexe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

1. Soient  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  et  $\mathbb{E}' = (\phi'_0, \tilde{E}')$  deux  $H$ -extensions méromorphes sur deux paires  $(M, D)$  et  $(M', D')$ . Un isomorphisme entre  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  est un isomorphisme de fibrés  $H$ -principaux holomorphes  $\tilde{\Psi} : \tilde{E}|_{M \setminus D} \simeq \tilde{E}'|_{M' \setminus D'}$ , couvrant un biholomorphisme  $\varphi : M \rightarrow M'$  avec la propriété suivante. Soient  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^n)$ ,  $\mathcal{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{C}^n)$  et  $\Phi = \tilde{\Psi}(\mathbb{C}^n)$  (voir [Définition 1.1.10](#)). Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} TM[\star D] & \xrightarrow{\phi_0} & \mathcal{E}[\star D] \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \varphi^* TM'[\star D] & \xrightarrow{\varphi^* \phi'_0} & \varphi^* \mathcal{E}'[\star D] \end{array} \quad (1.129)$$

Cela définit la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes sur une paire (générale).

2. Si  $\mathcal{E}$  est une sous-catégorie de cette dernière, et  $(M, D)$  est une paire, la catégorie  $\mathcal{E}_{M, D}$  est la sous-catégorie dont les objets vivent sur  $(M, D)$  et dont les isomorphismes couvrent l'identité de  $M$ .

Soit  $(\phi_0, \tilde{E})$  une  $H$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$ , et  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Par le [Corollaire 1.1.1](#), le morphisme  $\phi_0 : TM[\star D] \rightarrow \mathcal{E}[\star D]$  équivaut à une 1-forme méromorphe  $\theta_0$  sur  $\tilde{E}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  et  $H$ -équivariante. La 1-forme méromorphe  $\theta_0$  s'étend en une 1-forme  $GL_n(\mathbb{C})$ -équivariante sur  $R(\mathcal{E})$ . De manière géométrique,  $\phi_0$  équivaut à un isomorphisme de fibrés principaux holomorphes  $\tilde{\psi}$  entre  $R^1(M \setminus D)$  et  $R(\mathcal{E})|_{M \setminus D}$  ([Lemme 1.1.2.1](#)) et

$$\theta_0 = \tilde{\psi}^* \theta \quad (1.130)$$

où  $\theta$  est la solderform de  $M$ .

**Définition 1.6.3.** Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$  et  $(M, D)$  une paire.

1. Soit  $(\phi_0, \tilde{E})$  une  $H$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$ . La forme  $\theta_0$  définie par [\(1.130\)](#) est nommée solderform méromorphe associée à  $(\phi_0, \tilde{E}) \in \mathcal{E}_{M,D}$ .
2. En général, pour un fibré  $H$ -principal holomorphe  $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow M$ , et un diviseur  $\tilde{D}$   $H$ -invariant sur  $\tilde{E}$ , une solderform méromorphe sur  $(\tilde{E}, \tilde{D})$  est une 1-forme méromorphe sur  $\tilde{E}$  avec pôles en  $\tilde{D}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $H$ -équivariante, et dont le noyau est  $\ker(d\tilde{p})$ .

Cela nous permet de donner une définition équivalente des  $Q$ -extensions méromorphes :

**Lemme 1.6.1.1.** Soit  $\mathcal{E}$  la catégorie de toutes les  $H$ -extensions méromorphes sur une paire. La correspondance :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \leftrightarrow & \{\text{Fibrés } H\text{-principaux holomorphes munis d'une solderform méromorphe}\} \\ (\phi_0, \tilde{E}) & \leftrightarrow & (\tilde{E}, \theta_0) \end{array} \quad (1.131)$$

construite précédemment définit équivalence de catégories entre  $\mathcal{E}$  et la catégorie des couples  $(\tilde{E}, \theta_0)$  où  $\tilde{E}$  est un fibré  $H$ -principal holomorphe et  $\theta_0$  une solderform sur  $\tilde{E}$ . Les flèches pour cette catégorie sont les isomorphismes de fibrés  $H$ -principaux holomorphes  $\tilde{\Psi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$  tels que  $\tilde{\Psi}^* \theta'_0 = \theta_0$ .

*Démonstration.* L'application qui à  $\mathbb{E}$  associe  $(\tilde{E}, \theta_0)$  est une bijection par le [Corollaire 1.1.1](#). Nous prouvons qu'elle s'étend en une équivalence de catégorie. Considérons donc une flèche  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \varphi^* \mathcal{E}'$  entre  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  sur deux paires  $(M, D)$  et  $(M', D')$ , couvrant  $\varphi : M \rightarrow M'$ . Le relevé  $\tilde{\Psi} : R(\mathcal{E}) \rightarrow R(\mathcal{E}')$  aux fibrés des bases se restreint par définition en un isomorphisme de fibrés  $H$ -principaux holomorphes entre  $\tilde{E}$  et  $\tilde{E}'$ , couvrant l'identité. De plus, l'identité  $\Phi \circ \varphi^* \phi'_0 = \phi_0$  équivaut à  $\tilde{\psi}^* \theta'_0 = \theta_0$  (voir [Corollaire 1.1.1](#)). Nous obtenons une flèche  $\tilde{\psi}$  entre  $(\tilde{E}, \theta_0)$  et  $(\tilde{E}', \theta'_0)$ . Le foncteur obtenu est plein par le [Lemme 1.1.2.1](#) et fidèle par construction.  $\square$

Dans le cas d'une  $Q$ -extension méromorphe obtenue à partir d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ , la solderform est directement reliée à la connexion de Cartan :

**Proposition 1.6.1.2.** Soit  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  le quotient par  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$  dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et  $Q = \underline{\text{ad}}(P)$ . Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  et  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  où  $\tilde{E} = E \times_P Q$  et  $\phi_0$  est le morphisme de la [Proposition 1.6.1.1](#). La solderform  $\theta_0$  de  $\mathbb{E}$  est la 1-forme obtenue par passage au quotient de  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_0$  par l'action du noyau  $P' = \ker(\underline{\text{ad}})$  sur  $E$ .

*Démonstration.* En effet, notons  $\text{proj}_1 : E \times P' \rightarrow E$  la projection sur le premier facteur. Remarquons que la 1-forme méromorphe  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_0 \circ T\text{proj}_1$  sur  $E \times P'$  est invariante par l'action produit du sous-groupe  $P'$  sur ce dernier. De plus, elle s'annule sur  $T\text{proj}_1^{-1}(\text{Ker}(dp))$  donc en particulier elle s'annule sur les champs fondamentaux associés à l'action de  $P'$ . Elle passe donc en quotient en une 1-forme  $\theta'_0$  sur  $\tilde{E}$ . En reprenant le diagramme [\(1.125\)](#), nous obtenons  $\theta'_0 = \theta_0$ .  $\square$

Cela nous permet de montrer facilement la functorialité de l'application définie dans la [Proposition 1.6.1.1](#) :

**Théorème 1.6.1.** *Identifions  $Q = \underline{ad}(P)$  à un sous-groupe fermé complexe de  $GL_n(\mathbb{C})$ , et notons  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{E}$  les catégories de  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes et de  $Q$ -extensions méromorphes. L'application  $f$  qui à une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur une paire  $(M, D)$  associe la  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$  comme dans la [Proposition 1.6.1.1](#) définit un foncteur entre  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{E}$ . Il se restreint à la sous-catégorie restreinte des  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes branchées en un foncteur à valeurs dans les  $Q$ -extensions holomorphes.*

*Démonstration.* Soient  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$  deux  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes respectivement sur  $(M, D)$  et  $(M', D')$ . Soit  $\Psi : E \setminus \tilde{D} \rightarrow E' \setminus \tilde{D}'$  une flèche entre ces derniers. Soient  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  leurs images respectives par  $f$ , et  $\varphi : M \rightarrow M'$  le biholomorphisme couvert par :

$$\tilde{\Psi} = \Psi(Q) \quad (1.132)$$

où  $\Psi(Q)$  désigne le morphisme représentation associé à  $\Psi$  et la  $P$ -variété  $Q$  ([Définition 1.1.10](#)).

Par la [Proposition 1.6.1.2](#), les morphismes  $\phi_0$  et  $\phi'_0$  sont obtenus par passage aux quotients des morphismes équivariants correspondant aux solderform méromorphes  $\theta_0$  et  $\theta'_0$ , i.e les 1-formes méromorphes obtenues par passage aux quotient des formes méromorphes  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_0$  et  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega'_0$  par l'action de  $P'$  (ici  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  est la projection naturelle sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ ). Or  $\tilde{\Psi}^* \theta'_0 = \theta_0$  par hypothèse, d'où le résultat (voir [Corollaire 1.1.1](#)).  $\square$

Au [chapitre 2](#), nous nous restreindrons à des sous-catégories de  $Q$ -extensions méromorphes sur une paire. Pour restreindre le foncteur  $f$ , nous définissons :

**Définition 1.6.4.** *Soit  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie de la catégorie des  $Q$ -extensions méromorphes. On définit l'antécédent holomorphe  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  comme l'image réciproque de  $\mathcal{E}$  par le foncteur  $f$  du [Théorème 1.6.1](#).*

## 1.6.2 $Q$ -structures méromorphes induites

Les  $Q$ -extensions méromorphes sont des objets intermédiaires entre les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes et les  $Q$ -structures méromorphes qu'elles induisent. En effet, pour tout sous-groupe de Lie complexe  $H$  de  $GL_n(\mathbb{C})$ , il existe un foncteur de la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes ([Définition 1.6.2](#)) dans celle des  $H$ -structures méromorphes ([Définition 1.1.19](#)), défini comme suit.

Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $H$ -extension méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Alors  $\phi_0$  se restreint en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{M \setminus D}$ -modules entre  $TM \setminus D$  et  $\mathcal{E}|_{M \setminus D}$ . Par le [Lemme 1.1.2.1](#), cela correspond à un isomorphisme de fibrés principaux holomorphes  $\tilde{\Psi}$  entre  $R^1(M \setminus D)$  et  $R(\mathcal{E}|_{M \setminus D})$ . La réduction holomorphe  $\tilde{E}_0 \subset R^1(M \setminus D)$  définie comme en ([1.128](#)) correspond à une  $H$ -structure holomorphe  $S$  sur  $M \setminus D$  ([Définition 1.2.7](#)).

**Lemme 1.6.2.1.** *La  $H$ -structure holomorphe  $S$  définie ci-dessus se prolonge en une  $H$ -structure méromorphe sur  $(M, D)$ .*

*Démonstration.* On rappelle que

$$S : R^1(M \setminus D) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})/H$$

est obtenue comme en ([1.24](#)) à partir de la position relative ([1.21](#)). Ainsi, l'image  $S(b)$  d'un élément  $b \in R^1(M \setminus D)$  est la classe d'un élément  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $b' = \tilde{\Psi}(b) \cdot g \in \tilde{E}$ . Fixons  $x_0 \in M$  et  $U$  un voisinage de  $x_0$  dans  $M$  équipé d'une base  $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$  de  $\mathcal{E}|_U$  dans

la réduction  $\tilde{E}$  et  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$  de  $TM|_U$ . Notons, pour tout  $x \in U$ ,  $b(x) \in R^1(M)$  (resp.  $b'(x) \in \tilde{E}$ ) l'élément correspondant à la base  $(\frac{\partial}{\partial z_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}(x))$  (resp.  $(\bar{s}_1(x), \dots, \bar{s}_n(x))$ ) de  $T_x M$  (resp.  $\mathcal{E}(x)$ ). Alors pour tout  $x \in U \setminus D$ ,  $\tilde{\Psi}(b(x))$  est l'élément de  $R(\mathcal{E})$  correspondant à la base  $(\phi_0(\frac{\partial}{\partial z_1})(x), \dots, \phi_0(\frac{\partial}{\partial z_n})(x))$  de  $\mathcal{E}(x)$ . Notons alors  $g(x)$  l'élément de  $GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $\tilde{\Psi}(b(x)) \cdot g(x) = b'(x)$ . Comme  $\phi_0$  préserve les sections méromorphes,  $g(x)$  se prolonge en une application méromorphe de  $U$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  pour la structure de variété complexe induite par l'inclusion  $GL_n(\mathbb{C}) \subset \text{End}(\mathbb{C}^n)$ . Donc  $S$  est une  $H$ -structure méromorphe sur  $(M, D)$ .  $\square$

On définit une application  $\mu$  entre les objets des deux catégories précédentes par :

$$\mu(\mathbb{E}) = S \quad (1.133)$$

**Lemme 1.6.2.2.** *L'application définie par (2.2.6) s'étend en un foncteur de la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes vers celles des  $H$ -structures méromorphes. C'est une équivalence de catégories vers son image.*

*Démonstration.* Soit  $(\varphi, \Phi)$  un isomorphisme entre deux  $H$ -extensions méromorphes  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  sur deux paires  $(M, D)$  et  $(M', D')$ . Par définition, cela équivaut à un isomorphisme  $\tilde{\Psi} : \tilde{E}|_{M \setminus D} \rightarrow \tilde{E}'|_{M \setminus D}$ . Soient  $S$  et  $S'$  les images par  $\mu$  des de ces deux objets. En utilisant le [Lemme 1.6.1.1](#), le diagramme (1.129) se réécrit au niveau des fibrés principaux :

$$\begin{array}{ccc} R^1(M \setminus D) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & R(\mathcal{E})|_{M \setminus D} \\ \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Psi} \\ R^1(M' \setminus D) & \xrightarrow{\tilde{\psi}'} & R(\mathcal{E}')|_{M' \setminus D'} \end{array} \quad (1.134)$$

où  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\psi}'$  sont les isomorphismes de fibrés principaux holomorphes associés à  $\phi_0$  et  $\phi'_0$  ([Lemme 1.1.2.1](#)) et  $\tilde{\varphi}$  est le relevé canonique de  $\varphi$  aux fibrés des repères ([Proposition 1.1.4.1](#)). Par conséquent, les réductions holomorphes  $\tilde{E}_0 \subset R^1(M \setminus D)$  et  $\tilde{E}'_0 \subset R^1(M' \setminus D')$  correspondant respectivement à  $S$  et  $S'$  vérifient  $\tilde{\varphi}(\tilde{E}_0) = \tilde{E}'_0$ , i.e  $\varphi$  est une isométrie entre  $S$  et  $S'$ .

Le foncteur  $\mu$  est fidèle car c'est la restriction du foncteur fidèle du [Lemme 1.1.2.1](#). Il est plein vers son image par définition.  $\square$

**Définition 1.6.5.** *Soit  $\mathcal{S}_0$  une sous-catégorie de celle des  $H$ -structures holomorphes.*

1. *La sous-catégorie  $\mathcal{E}$  des  $H$ -extensions méromorphes associée à  $\mathcal{S}_0$  est celle dont les objets sont les  $H$ -extensions méromorphes  $(\phi_0, \tilde{E})$  sur une paire  $(M, D)$  telle que  $S = \mu(\mathbb{E})$  se restreint à  $M \setminus D$  en un objet de  $\mathcal{S}_0$ .*
2. *La sous-catégorie  $\mathcal{S}$  des  $H$ -structures méromorphes associée à  $\mathcal{S}_0$  est celle dont les objet sont les  $H$ -structures méromorphe  $S'$  sur une paire  $(M, D)$  dont la restriction  $S'|_{M \setminus D}$  est un objet de  $\mathcal{S}_0$ .*
3. *Le foncteur  $\mu$  associé à  $\mathcal{S}_0$  est la restriction  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$  aux deux catégories précédentes.*

Nous prouvons maintenant, grâce à l'exemple des métriques riemanniennes méromorphes ([Définition 1.2.8](#)), que le foncteur  $\mu$  de la [Définition 1.6.5](#) n'est pas surjectif en général. Plus précisément, définissons  $\mathcal{S}_0$  comme la sous-catégorie des métriques riemanniennes holomorphes sur les variétés complexes, et  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  les sous-catégories respectives de  $H$ -structures méromorphes et  $H$ -extensions méromorphes associées ([Définition 1.6.5](#)). Alors :

**Exemple 1.6.1.** Soit  $(M, D) = (\mathbb{C}^2, \{z_1 = 0\})$  où  $(z_1, z_2)$  sont les coordonnées canoniques sur  $M$ . Soit  $g$  la métrique riemannienne méromorphe sur  $(M, D)$  définie par  $g(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} dz_1^2 + dz_2^2$ . Alors  $g$  n'est pas dans l'image de  $\mathcal{E}$  par le foncteur  $\mu$ .

*Démonstration.* Par définition,  $g$  est dans l'image de  $\mathcal{S}_{M,D}$  si et seulement si la réduction holomorphe  $\tilde{E}_0$  de  $R^1(M \setminus D)$  à  $H$  correspondante se prolonge en un fibré  $H$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  sur  $(M, D)$ , tel que  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^n)$  est une extension méromorphe sur  $(M, D)$ . Or  $\tilde{E}_0$  est la réduction formée des bases  $g$ -orthonormées locales de  $TM \setminus D$ . Supposons que cette réduction se prolonge en  $\tilde{E}$  comme précédemment, et prouvons que  $\mathcal{E}$  n'est pas une extension méromorphe sur  $(M, D)$ . Fixons un point  $x_0 \in D$  quelconque, un voisinage  $U$  de  $x_0$  et supposons qu'il existe une famille de champs méromorphes  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  sur  $U$  telle que la restriction à  $U \setminus D$  appartient à  $\tilde{E}_0$ . Notons  $(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  les coordonnées respectives de ces deux champs méromorphes dans la base  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2})$ . Alors l'orthonormalité implique :

$$\frac{1}{z_1}(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = 2g(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) + g(\bar{Y}_1, \bar{Y}_1) + g(\bar{Y}_2, \bar{Y}_2) = 2 \quad (1.135)$$

En particulier,  $\frac{(a_1+b_1)^2}{(a_2+b_2)^2} = -z_1$ . Ceci est impossible car la fonction  $z_1$  n'admet pas de racine globalement définie sur  $U \setminus D$ .  $\square$

### 1.6.3 $Q$ -structures méromorphes induites par une géométries de Cartan holomorphe branchées

Nous expliquons maintenant pourquoi les  $Q$ -extensions méromorphes sont indispensables pour caractériser la sous-catégorie des  $Q$ -structures méromorphes induites par les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes branchées.

**Lemme 1.6.3.1.** La bijection de la [Proposition 1.6.1.1](#) se restreint en une bijection entre l'ensemble des  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes branchées sur  $(M, D)$  et les sections  $\beta_0$  dont la restriction à  $At(E_P)$  est un morphisme  $\beta_0 : At(E_P) \longrightarrow E(\mathfrak{g})$  et  $(\bigwedge^n \phi_0)_0 = D$ .

*Démonstration.* Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  et  $\beta_0$  la section correspondante [\(Proposition 1.6.1.1\)](#). Par définition,  $\beta_0$  se restreint en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{M \setminus D}$ -modules, donc  $(\bigwedge^N \beta_0)_0 = (\bigwedge^N \phi_0)_0$  est inclus dans  $D$ . Enfin,  $\omega_0$  est holomorphe sur  $E$  si et seulement si  $\beta_0$  se restreint en un morphisme de  $\mathcal{O}_M$ -modules comme dans l'énoncé. Dans ce cas, le diviseur de branchement  $D$  [\(Définition 1.5.7\)](#) est par construction  $D = (\bigwedge^N \beta_0)_0$ , qui coïncide avec  $(\bigwedge^n \phi_0)_0$ .  $\square$

Par conséquent, le foncteur  $f$  de la [Théorème 1.6.1](#) se restreint en un foncteur, encore noté , entre les catégories  $\mathcal{G}^0$  et  $\mathcal{E}^0$  définies comme suit :

**Définition 1.6.6.** Soit  $(M, D)$  une paire de dimension  $n = \dim(G/P)$ ,  $H$  un sous-groupe de Lie complexe de  $GL_n(\mathbb{C})$  et  $Q$  l'image de la représentation adjointe quotient de  $(G, P)$ .

1. Une extension holomorphe sur  $(M, D)$  est une extension méromorphe  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  sur  $(M, D)$  [\(Définition 1.6.1\)](#) telle que  $\phi_0$  se restreint à  $TM$  en un morphisme injectif  $\phi_0 : TM \longrightarrow \mathcal{E}$ .
2. La catégorie des  $H$ -extensions holomorphes est l'intersection de la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes et des extensions holomorphes. Une flèche entre deux extensions holomorphes  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  et  $(\mathcal{E}', \phi'_0)$  sur deux paires  $(M, D)$  et  $(M', D')$  est un isomorphisme de  $H$ -extensions méromorphes entre ces dernières tel que  $(\varphi, \Phi_0)$  se restreint en un isomorphisme de fibrés vectoriels entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  [\(Définition 1.1.3\)](#).

3. Soit  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie de  $H$ -extensions méromorphes. On note  $\mathcal{E}^0$  son intersection avec les  $H$ -extensions holomorphes.
4. Soit  $\mathcal{G}$  l'antécédent d'une sous-catégorie  $\mathcal{E}$  de  $Q$ -extensions méromorphes. On note  $\mathcal{G}^0$  son intersection avec les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes branchées.

De même, le foncteur  $\mu$  de la [Définition 1.6.5](#) se restreint en un foncteur  $\mu : \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{S}$ . Cependant, nous n'obtiendrons pas en général une équivalence de catégorie vers son image. Nous donnons ci-dessous un contre-exemple.

Soit  $M = \mathbb{C}^2$ , muni de ses coordonnées canoniques  $(z_1, z_2)$  et  $D = \{z_1 = 0\}$ . Soit  $Q$  le sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{C})$  des automorphismes linéaires stabilisant la droite  $\mathbb{C}\mathfrak{e}_{-1} \subset \mathbb{C}^2$ , et considérons la catégorie  $\mathcal{E}_{M,D}$  des  $Q$ -extensions méromorphes sur  $(M, D)$  ([Définition 1.6.2](#)). Un objet  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  de  $\mathcal{E}_{M,D}$  avec  $\phi_0 = Id_{TM[\star D]}$  équivaut donc à un couple  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})$  de sous-modules de  $TM[\star D]$ , où  $\mathcal{E}_1 = \tilde{E}(\mathbb{C}\mathfrak{e}_{-1})$  et  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^2)$ . Son image  $S = \mu(\mathbb{E})$  équivaut aux deux sous-modules  $\mathcal{E}_1|_{M \setminus D}$  et  $\mathcal{E}|_{M \setminus D}$  de  $TM \setminus D$  obtenu par restriction à  $M \setminus D$ . Par définition, existe une flèche de  $\mathcal{E}_{M,D}$  entre deux  $Q$ -extensions  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  comme précédemment si et seulement si  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}'_1$ .

**Exemple 1.6.2.** Soit  $Q$  le sous-groupe défini ci-dessus et  $(M, D)$  une paire. On définit deux objets  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  de  $\mathcal{E}_{M,D}$  associés comme ci-dessus aux couples  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})$  et  $(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}')$  où  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_1}$ ,  $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{O}_M \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_1}$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_2}$ ,  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 \oplus \mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_2}$ . Alors  $\mu(\mathbb{E}) = \mu(\mathbb{E}')$  mais il n'existe pas de flèche entre  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$ .

*Démonstration.* Par les remarques précédentes l'exemple, il n'existe pas de flèche car  $\mathcal{E}'_1 \neq \mathcal{E}_1$ . De plus, les images des deux  $Q$ -extensions méromorphes par  $\mu$  coïncident car la filtration induite sur  $TM \setminus D$  est la même.  $\square$

#### 1.6.4 Cas des géométries de Cartan affines

Le cas des géométries de Cartan méromorphes affines, i.e modélées sur la géométrie de Klein affine complexe  $(G, P)$  de dimension  $n \geq 1$  ([Exemple 1.4.3](#)) est particulier. Soit en effet  $\mathcal{G}$  la catégorie des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes ([Définition 1.5.8](#)) et  $\mathcal{C}$  la catégories des connexions affines méromorphes. On a une équivalence de catégories  $c : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  comme suit.

Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ , et  $(\phi_0, \tilde{E})$  son image par le foncteur du [Théorème 1.6.1](#). Comme  $Q = P$ , on a que  $E = \tilde{E} = R(\mathcal{E})$  est le fibré des bases de  $\mathcal{E} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . De plus,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}$  est somme directe de  $\mathfrak{p} = Lie(P)$  et d'un  $P$ -module supplémentaire  $\mathfrak{m}$  ([Exemple 1.4.3](#)). Par conséquent,  $\omega_0$  est somme directe d'une 1-forme méromorphe  $\theta_0$  à valeurs dans  $\mathfrak{m}$ ,  $P$ -équivariante sur  $E$ , avec  $\theta_0(e)$  surjective pour  $e \in E \setminus \tilde{D}$  ( $\tilde{D} = p^{-1}(D)$ ) et d'une 1-forme  $\tilde{\omega}$  méromorphe sur  $E$ , à valeurs dans  $\mathfrak{p}$ ,  $P$ -équivariante, i.e une connexion principale méromorphe avec pôles en  $\tilde{D}$ . Cette dernière équivaut par le [Proposition 1.3.2.1](#) à une connexion méromorphe  $\bar{\nabla}$  sur  $\mathcal{E}$  avec pôles en  $D$ .

**Définition 1.6.7.** La catégorie  $\mathcal{E}^{conn}$  a pour objets les couples  $(\mathbb{E}, \bar{\nabla})$  formés d'une extension méromorphe  $\mathbb{E} = (\mathcal{E}, \phi_0)$  sur une paire  $(M, D)$  et d'une connexion méromorphe sur  $\mathcal{E}$  avec pôles en  $D$ . Le foncteur  $f^{conn} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}^{conn}$  est défini par :

$$f^{conn}(E, \omega_0) = (\mathcal{E}, \phi_0, \bar{\nabla}) \quad (1.136)$$

où  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  et  $\bar{\nabla}$  sont construites comme ci-dessus.

On définit alors un foncteur  $\mu^{conn}$  de la catégorie  $\mathcal{E} = f(\mathcal{G})$  vers  $\mathcal{C}$  en posant  $\mu^{conn}(\phi_0, \tilde{E}) = \nabla$  où :

$$\nabla = \phi_0^{-1}(\bar{\nabla}) \quad (1.137)$$

**Proposition 1.6.4.1.** *La composée  $c = \mu^{\text{conn}} \circ f^{\text{conn}}$  où  $\mu^{\text{conn}}$  et  $f^{\text{conn}}$  sont définis ci-dessus est une équivalence de catégories entre  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Par la [Proposition 1.3.2.1](#) et le [Lemme 1.6.1.1](#),  $f^{\text{conn}}$  est une équivalence de catégories. Il reste à prouver que  $c$  est une équivalence de catégories. Ceci est immédiat par définition de l'image  $\nabla = c(\bar{\nabla})$  ([Équation 1.137](#)).  $\square$

Caractérisons les images des géométries de Cartan holomorphes branchées.

**Définition 1.6.8.** *Une connexion affine holomorphe branchée sur une paire  $(M, D)$  est une connexion affine méromorphe  $\nabla$  sur  $(M, D)$  telle qu'il existe un sous-module  $\mathcal{E} \subset TM[\star D]$  avec les propriétés suivantes :*

- (i) *La restriction de  $\nabla$  à  $\mathcal{E}$  est une connexion holomorphe.*
- (ii)  *$\mathcal{E}$  contient  $TM$  comme un sous-module.*
- (iii)  *$D$  est le support du quotient  $\mathcal{E}/TM$ .*

**Lemme 1.6.4.1.** *Soit  $\nabla$  une connexion affine holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors le sous-module  $\mathcal{E} \subset TM[\star D]$  de la [Définition 1.6.8](#) est unique.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  deux sous-modules vérifiant les trois conditions de la [Définition 1.6.8](#), et notons  $E$  et  $E'$  leur fibrés des bases respectifs. Alors  $\nabla$  équivaut à deux connexions principales holomorphes  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\omega}'$  sur  $E$  et  $E'$ . Par ailleurs, les restrictions des deux fibrés principaux holomorphes à  $M \setminus D$  sont canoniquement isomorphes à  $R^1(M \setminus D)$ , et nous envisageons dans la suite de la preuve  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\omega}'$  comme une unique connexion principale méromorphe  $\tilde{\omega}$  sur  $R^1(M)$ . Fixons alors deux bases locales de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sur un ouvert  $U \subset M$ . Elles correspondent donc à deux sections méromorphes  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $R^1(M)$  sur  $U$ . Considérons alors l'unique fonction méromorphe  $b$  sur  $U$  à valeurs dans  $P$  telle que  $\sigma' = \sigma \cdot b$ . Par construction  $\sigma^* \tilde{\omega}$  et  $(\sigma')^* \tilde{\omega}$  sont deux formes différentielles holomorphes sur  $U$ . La formule de changement de jauge classique pour les connexions principales implique alors que  $b$  est solution de l'équation différentielle

$$d(b) = Ab - bA' \quad (1.138)$$

où  $A$  (resp.  $A'$ ) est la matrice de  $\nabla$  dans la base correspondant à  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ). Cette dernière étant holomorphe sur  $U$ , quitte à restreindre  $U$  le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que  $b$  doit être holomorphe sur  $U$ . En échangeant les rôles de  $\sigma$  et de  $\sigma'$ , nous obtenons que  $b^{-1}$  est également holomorphe sur  $U$ . Il vient que  $\mathcal{E}|_U = \mathcal{E}'|_U$ . Ceci étant valable au voisinage de tout point de  $M$ , nous obtenons l'unicité.  $\square$

**Lemme 1.6.4.2.** *Soit  $\nabla$  une connexion affine méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Alors  $\nabla$  est holomorphe branchée sur  $(M, D)$  si et seulement si elle est l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée affine sur  $(M, D)$  via l'équivalence de la [Proposition 1.6.4.1](#).*

*Démonstration.* Si  $\nabla$  est l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ , alors on considère l'extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$  image de  $(E, \omega_0)$  par le foncteur  $f$  ([Théorème 1.6.1](#)), et le sous-module  $\mathcal{E} = \phi_0^{-1}(\tilde{E}(\mathbb{C}^n))$  de  $TM[\star D]$ , qui contient alors  $TM$  et vérifie la condition (iii) de la [Définition 1.6.8](#). Par construction,  $\nabla$  se restreint en une connexion holomorphe sur  $\mathcal{E}$ .

Réciproquement, supposons  $\nabla$  holomorphe branchée, et soit  $\mathcal{E}$  le sous-module de la [Définition 1.6.8](#). Alors  $\nabla$  équivaut à une connexion holomorphe principale sur le fibré  $E$  des bases de  $\mathcal{E}$ . On obtient ainsi une géométrie de Cartan holomorphe branchée affine  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ , dont l'image par l'équivalence de la [Proposition 1.6.4.1](#) est  $\nabla$  par construction.  $\square$

### 1.6.5 Description de la fibre d'une $Q$ -extension méromorphe

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe,  $Q = \underline{ad}(P)$  et  $(M, D)$  une paire. Fixons une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  et notons  $\mathbb{E}$  son image par le foncteur  $f$  du [Théorème 1.6.1](#). On aimerait comprendre quelle donnée supplémentaire permet de décrire  $(E, \omega_0)$  à partir de  $\mathbb{E}$ .

Commençons par considérer le cas des géométries de Cartan méromorphes affines :

**Exemple 1.6.3.** *Considérons le modèle affine  $(G, P) = (Aff(\mathbb{C}^n), GL_n(\mathbb{C}))$  ([Exemple 1.4.3](#)) où  $n \geq 1$ . Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Supposons qu'il existe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$  par  $f$ . Alors la fibre de  $\mathbb{E}$  est en bijection avec les sections méromorphes  $\varphi$  de  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathfrak{g}))$ , avec pôles supportés en  $D$ .*

*Démonstration.* On a  $P = Q = GL_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{E} = R(\mathcal{E})$ . De plus,  $E = \tilde{E}$ , et  $\phi_0$  induit un isomorphisme entre  $\mathcal{E}^* \otimes E(\mathfrak{g})[*D]$  et  $\Omega_M^1 \otimes \text{End}(TM)[*D]$  (voir [Corollaire 1.1.1](#)). Le premier module est naturellement isomorphe à  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathfrak{g}))[*D]$ .

En reprenant la [Proposition 1.6.4.1](#), la fibre de  $\mathbb{E}$  par  $f$  est en bijection avec l'ensemble des connexions affines méromorphes sur  $M$ , avec pôles supportés en  $D$ . Cette bijection associe à une  $(G, P)$ -connexion de Cartan  $\omega_0$  sur  $E = R(\mathcal{E})$  la connexion méromorphe induite par la connexion  $GL_n(\mathbb{C})$ -principale méromorphe  $\tilde{\omega} = \text{proj}_{\mathfrak{p}} \circ \omega_0$  (ici  $\text{proj}_{\mathfrak{p}}$  désigne la projection sur  $\mathfrak{p}$  parallèlement au supplémentaire  $\mathfrak{m} = \mathbb{C}^n$ ). Soit  $\omega'_0$  une connexion de Cartan sur  $E$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ . Soient  $\nabla$  et  $\nabla'$  respectivement les connexions affines méromorphes correspondant à  $\omega_0$  et  $\omega'_0$ . Alors

$$\psi = \nabla' - \nabla \quad (1.139)$$

est une section méromorphe de  $\Omega_M^1 \otimes \text{End}(TM)$ , dont les pôles sont supportés en  $D$ . En particulier,  $\psi \circ \phi_0^{-1}$  est une section méromorphe de  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathfrak{g}))$ , avec pôles supportés en  $D$ .  $\square$

L'exemple ci-dessus admet la généralisation suivante :

**Définition 1.6.9.** *Soit  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe et  $\omega_0, \omega'_0$  deux  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes (resp. différentiables) sur  $E$ , et  $\beta_0, \beta'_0$  les morphismes correspondant ([Proposition 1.6.1.1](#) et [sous-section 1.8.1](#)). Soit  $\varphi$  une section holomorphe (resp. différentiable) de  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$  sur  $M$ . On note  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega'_0$  si et seulement si*

$$\beta'_0 = \beta_0 + \varphi \circ \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \beta_0 \quad (1.140)$$

où  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  est le quotient par  $E(\mathfrak{p}) \subset E(\mathfrak{g})$ .

**Lemme 1.6.5.1.** *Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$ . Supposons qu'il existe un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E$  tel que  $\tilde{E} = E \times_P Q$ , une connexion de Cartan  $\omega_0$  sur  $E$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ . Soit  $\beta_0$  le morphisme de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules associé à  $\omega_0$  ([Proposition 1.6.1.1](#)).*

1. *Description géométrique : L'ensemble des connexions de Cartan méromorphes  $\omega'_0$  sur  $E$  dans la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E})$  est en bijection avec les 1-formes méromorphes  $P$ -équivariantes  $\Theta \in H^0(E, \Omega_E^1 \otimes \mathfrak{p})$  s'annulant sur  $\text{Ker}(d\mathfrak{p})$ . Cette bijection est donnée par la formule :*

$$\omega'_0 = \omega_0 + \Theta \quad (1.141)$$

*Dans cette bijection, si  $\omega_0$  est branchée alors les connexions branchées correspondent aux formes holomorphes.*

2. *Description équivariante* : L'ensemble des géométries de Cartan méromorphes de la forme  $(E, \beta'_0)$  dans la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E})$  est en bijection avec l'ensemble des sections méromorphes  $\varphi$  de  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ . Cette bijection est construite en associant à  $\varphi$  l'unique connexion de Cartan méromorphe  $\omega'_0$  sur  $E$  vérifiant  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega'_0$  (??). Les connexions de Cartan holomorphes branchées correspondent aux sections  $\varphi$  telles que  $\varphi \circ \phi_0$  est holomorphe sur  $M$ .

*Démonstration.* D'abord, les deux descriptions sont équivalentes par la correspondance de la Proposition 1.1.3.1. Prouvons donc la seconde bijection. Soit  $\beta'_0 : At(E_P)[*D] \rightarrow E(\mathfrak{g})[*D]$  correspondant à une connexion de Cartan méromorphe sur  $(E, \tilde{D})$ . Alors  $\delta = \beta'_0 - \beta_0$  s'annule sur  $\iota(E(\mathfrak{p}))$  où  $\iota$  est l'injection dans la suite exacte d'Atiyah de  $E$  (Proposition 1.1.3.1). Donc  $\delta$  induit un morphisme  $\bar{\delta} : At(E_P)/\iota(E(\mathfrak{p})[*D]) \rightarrow E(\mathfrak{g})[*D]$ . Comme  $\phi_0$  est un isomorphisme entre  $At(E_P)/\iota(E(\mathfrak{p})[*D])$  et  $\mathcal{E}[*D]$ , on obtient un morphisme  $\varphi = \bar{\delta} \circ \phi_0^{-1} : \mathcal{E}[*D] \rightarrow E(\mathfrak{g})$ . Enfin, comme les images de  $(E, \beta_0)$  et  $(E, \beta'_0)$  coïncident,  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_0 = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega'_0$ . Donc  $\varphi$  est à valeurs dans  $E(\mathfrak{p})[*D]$ . Il s'agit donc d'une section de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{E}, E(\mathfrak{p})) = E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ .  $\square$

**Lemme 1.6.5.2.** Soit  $E$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$  et  $\omega_0, \omega'_0$  deux  $(G, P)$ -connexions de Cartan différentiables (resp. méromorphes) sur  $(E, \tilde{D})$  telles que  $(E, \omega'_0)$  et  $(E, \omega_0)$  sont dans la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E})$ . Notons  $\mathcal{G}_{M,D}$  (resp.  $\mathcal{G}_{M,D}^{\text{diff}}$ ) l'antécédent méromorphe (resp. différentiable, voir Définition 1.6.4 et Définition 1.8.1) de la catégorie  $\mathcal{E}_{M,D}$  des  $Q$ -extensions méromorphes sur  $(M, D)$  et supposons qu'il existe flèche  $\Psi_0$  de  $\mathcal{G}_{M,D}$  entre  $(E, \omega_0)$  et  $(E, \omega'_0)$ . Alors :

1. Il existe une application différentiable (resp. méromorphe)  $\rho' : E \setminus \tilde{D} \rightarrow \mathfrak{p}'$  telle que  $\Psi_0(e) = e \cdot \exp_G(\rho'(e))$  pour tout  $e \in E \setminus \tilde{D}$ . Cette application est équivariante et correspond à une section différentiable (resp. méromorphe)  $\bar{\rho}'$  de  $E(\mathfrak{p})$ .
2. La section  $\varphi$  du Lemme 1.6.5.1 est donnée par :

$$p^* \varphi = F(-\rho') + \exp_G(\rho')^* \omega_P \circ \omega_0^{-1} \quad (1.142)$$

où  $F(\rho') = \text{ad}(\exp_G(\rho')) - \text{Id}_{\mathfrak{g}}$  pour tout  $\rho' \in \mathfrak{p}'$ .

*Démonstration.* Fixons une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  et considérons  $\sigma' = \Psi_0 \circ \sigma$ . Comme  $\Psi_0$  couvre l'identité,  $\sigma'$  est une section différentiable (resp. holomorphe) de  $E$ , et il existe donc une application différentiable (resp. méromorphe)  $b'_\sigma : U \setminus D \rightarrow B$  telle que  $\sigma' = \sigma \cdot b_\sigma$ . Comme  $G$  est connexe, il existe  $\rho'_\sigma : U \setminus D \rightarrow \mathfrak{p}$  différentiable (resp. méromorphe) telle que  $b'_\sigma = \exp_G(\rho'_\sigma)$ .

Nous avons donc :  $\Psi_0(\sigma(x)) = \sigma'(x) = \sigma(x) \cdot b'_\sigma(x)$  pour tout  $x \in U \setminus D$ , et toute section  $\sigma$  comme ci-dessus. Cela définit une application différentiable (resp. méromorphe)  $\rho' : E \setminus \tilde{D} \rightarrow \mathfrak{p}$  par :

$$\rho'(\sigma(x)) = \rho'_\sigma(\sigma(x)) \quad (1.143)$$

et comme  $\Psi_0$  est  $P$ -équivariant, il s'agit d'une application  $P$ -équivariante. On a :

$$\begin{aligned} \sigma^* \omega'_0(x) &= \sigma^*(\Psi_0^* \omega_0)(x) \\ &= \sigma^*(r_{b'_\sigma(x)}^* \omega_0(x)) \oplus b'^*_\sigma \omega_P(x) \\ &= \text{ad}(b'_\sigma(x)^{-1}) \sigma^* \omega_0(x) \oplus \exp_G(\rho'_\sigma)^* \omega_P \end{aligned} \quad (1.144)$$

Donc la section  $\varphi$  du Lemme 1.6.5.1 est décrite par :

$$\psi_\sigma(\varphi) = (\text{ad}(b'^{-1}_\sigma) - \text{Id}_{\mathfrak{g}}) \oplus \exp_G(\rho')^* \omega_P \circ \phi_0^{-1} \quad (1.145)$$

où  $\psi_\sigma = \psi_\sigma(\text{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}))$  est la trivialisat on associée à la section  $\sigma$  (voir [Définition 1.1.11](#) et [Définition 1.1.9](#)).

Enfin, comme  $\omega_0$  et  $\omega'_0$  sont dans la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E})$ , on obtient :

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_0 = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega'_0 = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \Psi_0^* \omega_0 \quad (1.146)$$

et par [\(1.144\)](#) :  $\underline{ad}(b'_\sigma) = Id$  pour toute section  $\sigma : U \longrightarrow E$ . On obtient bien  $\rho' \in \mathfrak{p}' = \text{Lie}(P')$ .  $\square$

### 1.6.6 Connexions de Cartan méromorphes horizontales

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe,  $Q$  l'image de la représentation adjointe quotient  $\underline{ad}$  ([Définition 1.4.2](#)). Nous supposons qu'il existe une application holomorphe  $s : Q \longrightarrow P$  avec

$$\underline{ad} \circ s = Id_Q \quad (1.147)$$

et nous fixons un supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$  de  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$  dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ .

Soit  $(M, D)$  une paire. Pour décrire la fibre d'une  $Q$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$  par le foncteur  $f$  du [Théorème 1.6.1](#), nous avons suppos e qu'il existe une géométrie de Cartan méromorphe dans cette fibre. Nous montrons maintenant que ceci est toujours v erifi e localement.

Fixons une  $Q$ -extension méromorphe  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  sur  $(M, D)$ . Soit  $x \in M$ , alors il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et une section holomorphe  $\tilde{\sigma} : U \longrightarrow \tilde{E}$ . Cela définit une trivialisat on de  $\tilde{E}|_U$ , et l'égalité [\(1.147\)](#) implique que ce dernier s'injecte dans le fibré  $P$ -principal trivial  $E \xrightarrow{p} U$ . Par conséquent  $\tilde{E}|_U = E \times_P Q$ . Notons  $\psi_{\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}_-)$  la trivialisat on de  $\mathcal{E}$  associée à  $\tilde{\sigma}$  ([Définition 1.1.10](#)). Alors :

$$\mathcal{A} = \phi_0 \circ \psi_{\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}_-) \quad (1.148)$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_U[*D]$ -modules  $\mathcal{A} : TU[*D] \longrightarrow \mathcal{O}_U[*D] \otimes \mathfrak{g}_-$  que nous appellerons tout au long de cette thèse la *matrice* de  $\tilde{\sigma}$ . Nous notons son inverse  $\mathcal{A}^{-1}$ .

**Proposition 1.6.6.1.** *Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$ ,  $U \subset M$  un ouvert et  $E \xrightarrow{p} U$  un fibré  $P$ -principal holomorphe avec  $\tilde{E}|_U = E \times_P Q$ .*

1. *Pour toute section  $\sigma : U \longrightarrow E$ ,  $\mathfrak{g}$ -méromorphe en  $D$  ([Définition 1.1.12](#)), il existe une unique  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\omega_1$  sur  $E$  telle que :*
  - (i) *L'image de  $(E, \omega_1)$  par le foncteur  $f$  est  $\mathbb{E}|_U$ ,*
  - (ii) *et  $\sigma^* \omega_1$  est à valeurs dans le supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$ .*
2. *Si  $\mathbb{E}$  est holomorphe ([Définition 1.6.1](#)) et  $\sigma$  est une section holomorphe sur  $U$ , alors  $\omega_1$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée sur  $(p^{-1}(U), \tilde{D})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\beta_1$  la section de  $At(E_P)^* \otimes E(\mathfrak{g})[*D]$  correspondant à  $\omega_1$  (voir Proposition [1.6.1.1](#)). Par définition du foncteur  $f$  ([Théorème 1.6.1](#)), la condition  $f(p^{-1}(U), \omega_1) = (\mathcal{E}|_U, \phi_0, \tilde{E}|_U)$  équivaut à :

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \beta_1 = \phi_0 \circ q \quad (1.149)$$

où  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  est le quotient par le sous-module  $E(\mathfrak{p}) \subset E(\mathfrak{g})$  et  $q$  le quotient dans la suite exacte d'Atiyah (formule [\(1.13\)](#)).

Considérons la trivialisat on  $\psi_\sigma = \psi_\sigma(\mathfrak{g})$  de  $E(\mathfrak{g})$  (voir [Définition 1.1.11](#)). Comme  $\mathfrak{g}_-$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$ , la propriété [\(1.149\)](#) détermine compl etement la projection  $proj_{\mathfrak{g}_-} \circ \psi_\sigma \circ \beta_1$  parall ement à  $\mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{p}$ . La condition d'horizontalité [\(1.6.10\)](#) se récrit :

$$proj_{\mathfrak{p}} \circ \psi_\sigma \circ \beta_1 \circ \iota = Id_{E(\mathfrak{p})} \quad (1.150)$$

Comme  $\psi_\sigma(E(\mathfrak{g}))$  est la somme directe de  $\mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{g}_-$  et de  $\mathcal{O}_U \otimes \mathfrak{p}$ , les deux projections déterminent de manière unique  $\psi_\sigma(\beta_1)$ , i.e une connexion de Cartan méromorphe sur  $p^{-1}(U)$ . Enfin, si  $(\phi_0, \tilde{E}) \in \mathcal{E}_{M,D}^0$ , alors pour tout  $X \in TM(U)$ ,  $\phi_0(X)$  est une section méromorphe de  $\mathcal{E}$ . Donc, par (1.150) et (1.150) on obtient que  $\beta_1(\tilde{X})$  est holomorphe pour tout  $\tilde{X} \in At(E_P)(U)$ . Cela signifie exactement que  $\omega_1$  se prolonge en une 1-forme sur  $p^{-1}(U)$ .  $\square$

**Définition 1.6.10.** Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe et  $\sigma : U \rightarrow E$  une section  $G$ -méromorphe en  $D$ . Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$  avec  $\tilde{E} = E \times_Q P$ .

1. Une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\sigma$ -horizontale est une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\omega_1$  sur  $p^{-1}(U)$  telle que  $\sigma^* \omega_1$  est à valeurs dans  $\mathfrak{g}_-$ .
2. La  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\sigma$ -horizontale sur  $p^{-1}(U)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  est celle définie au point 1. de la Proposition 1.6.6.1.

**Lemme 1.6.6.1.** Reprenons le contexte de la Proposition 1.6.6.1. Soit  $b : U \rightarrow P$  une application méromorphe à valeurs dans  $P$  et  $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma} \cdot b$  considérée comme section du fibré  $P$ -principal  $E$ . Soient  $\omega_1, \omega'_1$  les  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}_2$ -horizontales dans la fibre de  $\mathbb{E}_U$ . Soit  $\mathcal{A}$  la matrice  $\tilde{\sigma}$  (1.148). Alors  $\omega_1 \xrightarrow{\varphi} \omega'_1$  (voir Définition 1.6.9) avec :

$$\psi_{\tilde{\sigma}}(\varphi) = -b \bullet \pi_{\mathfrak{p}} + (b^{-1})^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1} \quad (1.151)$$

où  $\pi_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$  est la projection sur  $\mathfrak{p}$  relativement à  $\mathfrak{g}_-$ ,  $b \bullet$  (resp.  $b \cdot$ ) désigne l'action de  $b$  sur la  $P$ -représentation  $End(\mathfrak{g})$  (resp.  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ ), et  $\psi_{\tilde{\sigma}}$  la trivialisatoin de  $E(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g})$  sur  $U$  induite par  $\tilde{\sigma}$  (voir Définition 1.1.11).

*Démonstration.* Soit  $\omega''_1$  la  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe sur  $E$  définie par

$$\tilde{\sigma}_2^* \omega''_1 = \pi_{\mathfrak{g}_-} \circ ad(b^{-1})[\sigma^* \omega_1] \quad (1.152)$$

où  $proj_{\mathfrak{g}_-}$  est la projection sur le supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$  parallèlement à  $\mathfrak{p}$ . Alors  $\pi_{\mathfrak{g}_-} \circ \tilde{\sigma}_2^* \omega_1 = \pi_{\mathfrak{g}_-} \circ \tilde{\sigma}_2^* \omega''_1$  donc l'image de  $(E, \omega''_1)$  par  $f$  coïncide avec celle de  $(E, \omega_1)$ , i.e  $\mathbb{E}|_U$ . Par construction,  $\omega''_1$  est  $\sigma_2$ -horizontale, et par conséquent  $\omega'_1 = \omega''_1$  (Proposition 1.6.6.1). On en déduit :

$$\tilde{\sigma}^* \omega'_1(x) = ad(b) \circ \pi_{\mathfrak{g}_-} \circ ad(b^{-1})[\sigma^* \omega_1] - (b^{-1})^* \omega_P \quad (1.153)$$

Comme  $\mathcal{A} = \tilde{\sigma}^* \omega_1$ , on obtient :

$$\psi_{\tilde{\sigma}}(\varphi) \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} = \tilde{\sigma}^*(\omega'_1 - \omega_1) = -ad(b) \circ \pi_{\mathfrak{p}} \circ ad(b^{-1}) \circ \mathcal{A} + (b^{-1})^* \omega_P \quad (1.154)$$

d'où le résultat en composant par  $\mathcal{A}^{-1}$  à droite.  $\square$

## 1.7 Feuilletage en courbes distinguées et fonctions de structures

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein holomorphe,  $M$  une variété complexe de dimension  $n = dim(G/P)$  et  $D$  un diviseur effectif. Dans la théorie classique, la description de l'ensemble des structures géométriques holomorphes induites par les  $(G, P)$ -géométries de Cartan holomorphes sur  $M$  passe souvent par l'existence de sections particulières du fibré de ces géométries (voir par exemple Proposition 3.1.8, [14]). Ces dernières sont construites à partir de l'exponentielle de la géométrie (Définition 1.5.2). La caractérisation de la sous-catégorie des structures qui sont l'image d'une géométrie de Cartan se fait par le lien entre la fonction

de structure des structures (Définition 1.7.4) et la courbure (Lemme 1.5.3.2) des géométries de Cartan. Nous étudions dans cette section des analogues pour les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes sur une paire  $(M, D)$ , que nous nommerons *sections exponentielles*. Elles sont reliées à la notion de *géodésiques* et de *courbes distinguées* (Définition 1.7.2). Ces dernières permettent de mettre en évidence une classe particulière de géométries de Cartan méromorphes : les géométries de Cartan méromorphes *totalemt géodésiques*, dont les automorphismes infinitésimaux seront étudiés au chapitre 3.

### 1.7.1 Application exponentielle

Soit  $(E, \omega)$  une géométrie de Cartan holomorphe sur  $M$ . Soit  $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g}$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$ . L'exponentielle en  $e \in E$  permet de construire une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  au voisinage de  $x = p(e)$  avec la propriété que  $\sigma^* \omega(T_x M) \subset \mathfrak{g}_-$ . En effet, pour tout  $e \in E$ , la projection  $p$  est un biholomorphisme entre l'image  $\exp_e(V)$  et  $U = p(\exp_e(\mathfrak{g}_-))$  puisque  $T_A \exp_e(\mathfrak{g})$  est un supplémentaire de  $T_{\exp_e(A)} p^{-1}(x)$  pour tout  $A \in V$  et  $x = p(\exp_e(A))$ .

Pour une géométrie méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ , on dispose donc de sections holomorphes comme ci-dessus au voisinage d'un point  $x \in M \setminus D$ . Au dessus d'un point  $x \in D$ , l'exponentielle n'est plus définie en général. En effet, les champs  $\omega_0$ -constants peuvent avoir des pôles en  $\tilde{D}$ , et ne sont donc pas nécessairement complets : leur flot en un point régulier  $e \in E \setminus \tilde{D}$  n'est pas défini sur  $\mathbb{C}$ , et non défini en un point de branchement  $e_0 \in \tilde{D}$ .

**Exemple 1.7.1.** *Considérons le modèle affine de dimension 1 :  $(G, P) = (\text{Aff}(\mathbb{C}), \mathbb{C}^*)$ . Notons  $\mathfrak{e}_1$  pour le vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C} \subset \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et  $\mathfrak{e}_0$  pour une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ . Soit  $E = M \times \mathbb{C}^*$  le  $P$ -fibré holomorphe trivial sur  $M = \mathbb{C}$  et  $D = \{z_1 = 0\} \subset M$  ( $z_1$  est la coordonnée canonique sur  $\mathbb{C}$ ).*

*Notons  $\sigma_0(z_1) = (z_1, 1)$  la section canonique. Soit  $\omega_0$  la connexion de Cartan méromorphe sur  $E$  définie par  $\sigma_0^* \omega_0(\frac{\partial}{\partial z_1}) = \mathfrak{e}_1 - \frac{1}{z_1} \mathfrak{e}_0$ . Le champ méromorphe  $\omega_0$  constant  $Y_1 = \omega_0^{-1}(\mathfrak{e}_1)$  vérifie  $Y_1(\sigma_0(z_1)) = \frac{\hat{\partial}}{\partial z_1} + \frac{1}{z_1} \hat{\mathfrak{e}}_0$  où  $\frac{\hat{\partial}}{\partial z_1}$  et  $\hat{\mathfrak{e}}_0$  sont respectivement les uniques champs de vecteurs holomorphes  $P$ -invariants sur  $E$  tels que  $\frac{\hat{\partial}}{\partial z_1} \circ \sigma_0 = T_{\sigma_0}(\frac{\partial}{\partial z_1})$  et  $\hat{\mathfrak{e}}_0 \circ \sigma_0 = \omega_0(\sigma_0)^{-1}(\mathfrak{e}_0)$ . Ces champs trivialisent  $TE$  globalement et nous notons  $\hat{\psi} : TE \simeq E \times \mathbb{C}^2$  la trivialisatation de fibré vectoriel associée.*

*Choisissons  $z_1 \neq 0$  dans  $M$  et décrivons le flot  $\gamma(t) = \phi_{Y_1}^t(\sigma_0(z_1))$  du champ  $Y_1$ . Notons  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  où les composantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont identifiées à des courbes dans  $M$  et  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ . Alors, par  $P$ -invariance de la trivialisatation  $\hat{\psi}$ , on a :*

$$(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = \hat{\psi}(\gamma'(t)) = \hat{\psi}(Y_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) = (1, \frac{1}{\gamma_1(t)}) \quad (1.155)$$

*Nous obtenons  $\gamma_1(t) = t + z_1$  et  $\gamma_2'(t) = \frac{1}{\gamma_1(t)}$  soit  $\gamma_2(t) = \log(z_1 + t)$ . Par conséquent, ce flot n'est pas défini sur  $\mathbb{C}$ . En particulier l'application exponentielle n'est pas définie pour  $e \in p^{-1}(0)$ .*

### 1.7.2 Courbes distinguées

A partir de maintenant, nous nous intéressons à une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ . Nous commençons par introduire du vocabulaire relatif aux feuilletages holomorphes (de dimension 1). Dans cette thèse, nous n'aurons qu'à considérer des feuilletages holomorphes de rang 1 et qui sont réguliers.

**Définition 1.7.1.** *Soit  $M$  une variété complexe.*

1. *Un feuilletage de rang 1 sur  $M$  est un sous-faisceau cohérent  $\mathcal{T} \subset TM$  de rang 1 tel que le quotient  $TM/\mathcal{T}$  est sans torsion.*

2. Une feuille de  $\mathcal{T}$  en  $x \in M$  est une courbe complexe  $\Sigma$  contenant  $x$  et vérifiant  $T\Sigma = \mathcal{T}_\Sigma$  où  $\mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{T}|_\Sigma$ .
3. Un champ de vecteur holomorphe  $X$  sur  $U \subset M$  est dit définir  $\mathcal{T}$  si  $\mathcal{T}|_U = \mathcal{O}_U X$ .
4. Un ouvert  $U \subset M$  est feuilleté si et seulement si il existe un champ de vecteur holomorphe  $X$  sur  $U \subset M$  qui définit  $\mathcal{T}$ .

Soit  $\mathcal{T}$  un feuilletage holomorphe de dimension 1 sur  $M$ . Alors  $\mathcal{T}$  est localement trivial, donc il existe au voisinage de tout point  $x_0 \in M$  une section  $X \in \mathcal{T}(U)$ , i.e un champ de vecteur holomorphe qui définit  $\mathcal{T}$ . Comme  $TM/\mathcal{T}$  est sans torsion,  $X$  a des zéros isolés. Pour tout  $x_0 \in M$  n'appartenant pas aux zéros de  $X$ , ce champ s'intègre en une courbe complexe  $\Sigma$ . Nous notons alors  $\Sigma_{x_0}^{\mathcal{T}}$  la feuille (maximale) de  $\mathcal{T}$  en  $x_0$ .

**Lemme 1.7.2.1.** *Soit  $\mathcal{T} \subset TM$  un feuilletage holomorphe de dimension 1 sur  $M$  et  $D$  une sous-variété lisse et irréductible de  $M$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $D$  n'est pas invariant par  $\mathcal{T}$ , i.e. n'est pas une union de feuilles de  $\mathcal{T}$ .
- (ii) L'ensemble  $W$  des points  $x \in D$  tel qu'il existe une feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}$  avec  $\Sigma \cap D = \{x\}$  est Zariski dense dans  $D$ . De manière équivalente  $x \in W$  si et seulement si pour tout champ  $Z$  définissant  $\mathcal{T}$  au voisinage de  $x$ ,  $Z(x)$  est transverse à  $D$ .
- (iii) Pour toute équation locale  $z_1$  de  $D$  sur un ouvert  $U \subset M$ , et tout champ  $Z$  définissant  $\mathcal{T}$  sur  $U$ , la dimension :

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{M,x}}{\langle \mathcal{L}_Z(z_1), z_1 \rangle} \quad (1.156)$$

est finie en au moins un point  $x \in D \cap U$ .

*Démonstration.* Notons  $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{T}|_D$ , qui est un sous module de  $\mathcal{O}_D \otimes TM|_D$ . Notons également  $q : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{N}$  le passage au quotient par  $TD$  dans le second faisceau, où  $\mathcal{N}$  est le faisceau normal de  $D$ . L'ensemble  $W$  du point (ii) est le lieu d'annulation de la section de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\overline{\mathcal{T}}, \mathcal{N})$  correspondant au morphisme de  $\mathcal{O}_D$ -modules  $q|_{\overline{\mathcal{T}}}$ . Comme  $D$  est irréductible,  $W = D$  ou  $W$  est un diviseur strict de  $D$ , ce qui prouve l'équivalence entre (i) et (ii). Pour l'équivalence avec (iii), nous renvoyons à [12].  $\square$

Soit  $\mathcal{T} \subset TM$  un feuilletage holomorphe de rang 1 sur  $M$  et notons  $q : TM \rightarrow TM/\mathcal{T}$  la projection naturelle. Alors la formule (où  $U$  est un ouvert quelconque de  $M$ ) :

$$\forall U \subset M, \forall Z \in \mathcal{T}(U), \forall X \in TM(U), \quad \nabla_Z^{\mathcal{T}} q(X) = q([Z, X]) \quad (1.157)$$

définit une connexion  $\mathcal{T}$ -partielle holomorphe sur  $TM/\mathcal{T}$  (Définition 1.3.2) appelée connexion de Bott de  $\mathcal{T}$  et introduite par P. Molino d'après les travaux de Baum et Bott (voir [2]).

**Lemme 1.7.2.2.** *Soit  $\mathcal{T}$  un feuilletage holomorphe de rang 1 sur  $M$ ,  $\nabla^{\mathcal{T}}$  la connexion  $\mathcal{T}$ -partielle (1.157) et  $U \subset M$  un ouvert feuilleté pour  $\mathcal{T}$ . Alors tout germe de section  $\nabla^{\mathcal{T}}$ -horizontale en un point  $x \in U$  est le germe d'une section  $\nabla^{\mathcal{T}}$ -horizontale sur le voisinage  $V \subset U$  d'une feuille  $\Sigma \subset U$ .*

*Démonstration.* Soit  $Z$  un champ de vecteur holomorphe définissant  $\mathcal{T}$  sur  $U$ . Fixons  $x' \in U$  et  $t \in \mathbb{C}$  tel que le flot  $\phi = \phi_Z^t(x')$  est bien défini sur un voisinage de  $x'$  dans  $U$ . Considérons le morphisme de faisceaux  $d\phi : TM/\mathcal{T} \rightarrow \phi^* TM/\mathcal{T}$  défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\phi} & \phi^* TM \\ q \downarrow & & \downarrow \phi^* q \\ TM/\mathcal{T} & \xrightarrow{d\phi} & \phi^* TM/\mathcal{T} \end{array} \quad (1.158)$$

Fixons alors un germe  $s(U') \in TM/\mathcal{T}(U')$  comme dans l'énoncé (ici  $U' \subset U$  est un voisinage de  $x$ ). Par la formule (1.157) définissant  $\nabla^{\mathcal{T}}$ , il est immédiat que  $s$  est invariante par l'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes  $(\phi, \overline{d\phi})$ . En définissant  $\overline{s}$  par  $\overline{s}|_{U'} = s$  et  $\overline{s}|_{\phi(U')} = \overline{d\phi}(s)$ , nous voyons que  $s$  se prolonge en une section  $\overline{s}$  de  $TM/\mathcal{T}(U' \cup \phi(U'))$ , parallèle pour  $\nabla^{\mathcal{T}}$ . Donc  $s$  se prolonge en une section de  $TM/\mathcal{T}$ , parallèle pour  $\nabla^{\mathcal{T}}$ , sur l'orbite de  $U'$  par le flot local  $(\phi_Z^t)_t$  de  $Z$ .

Comme le flot local  $(\phi_Z^t)_t$  de  $Z$  agit transitivement sur  $\Sigma$ , nous obtenons que  $s$  se prolonge en une section  $\overline{s}$  de  $TM/\mathcal{T}$ , parallèle pour  $\nabla^{\mathcal{T}}$  et définie sur un voisinage ouvert de  $\Sigma$ .  $\square$

Le feuilletage qui nous intéresse est construit de la manière suivante :

**Lemme 1.7.2.3.** *Soit  $A \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ . Alors il existe un feuilletage holomorphe de dimension 1  $\mathcal{T}_A \subset TE$  tel que pour toute feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}_A$  et  $e' \in \Sigma \setminus \tilde{D}$ ,  $v \in T_{e'}\Sigma$ , on a :  $\omega_0(e')(v) \in \mathbb{C}A$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T}'_A = \Phi_{\omega_0}^{-1}(\mathcal{O}_E A)$  où  $\Phi_{\omega_0}$  est le morphisme défini par (1.94). Il s'agit d'un sous-module de  $TE[\star \tilde{D}]$  par définition. Soient  $(\tilde{D}_\alpha)_{\alpha \in I}$  les composantes irréductibles de  $\tilde{D}$ . Alors il existe des entiers naturels minimaux  $(n_\alpha)_{\alpha \in I}$  tels que  $\mathcal{T}_A := \mathcal{T}'_A(-\sum_{\alpha \in I} n_\alpha \tilde{D}_\alpha)$  soit un sous-module de  $TE$ , i.e un feuilletage holomorphe de dimension 1 sur  $E$ . Ce dernier vérifie la propriété de l'énoncé par construction.  $\square$

Cela mène à définir :

**Définition 1.7.2.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$  et soit  $A \in \mathfrak{g}$ . Soit  $\mathcal{T}_A$  le feuilletage du Lemme 1.7.2.3.*

1. *Une courbe  $\Sigma \subset E$  est  $A$ -distinguée si et seulement si pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $\Sigma$  est incluse dans la feuille  $\Sigma_x^A$  en  $x$ .*
2. *Soit  $x_0 \in M$ . Une courbe complexe  $\overline{\Sigma} \subset M$  est une  $A$ -géodésique en  $x_0$  si et seulement si elle contient  $x_0$  et s'il existe une section  $G$ -méromorphe  $\tau$  de  $E|_{\overline{\Sigma}}$  sur  $(\overline{\Sigma}, x_0)$  telle que  $\Sigma = \tau(\overline{\Sigma})$  est  $A$ -distinguée.*
3. *Une  $A$ -géodésique  $\overline{\Sigma} \subset M$  de  $(E, \omega_0)$  est holomorphe si et seulement si la section  $\tau$  du point 2. se prolonge en une section holomorphe de  $E|_{\overline{\Sigma}}$  sur  $\overline{\Sigma}$ .*
4.  *$(E, \omega_0)$  est (holomorphiquement) totalement géodésique si et seulement pour toute composante irréductible  $D_\alpha$  de  $D$  (resp.  $\tilde{D}_\alpha$  de  $\tilde{D}$ ), il existe  $A \in \mathfrak{g}$  et une  $A$ -géodésique intersectant transversalement  $D_\alpha$  (resp. tel que  $\tilde{D}$  n'est pas invariant par  $\mathcal{T}_A$ ). On notera  $W$  (resp.  $\tilde{W}$ ) l'union des points de  $D$  (resp. de  $\tilde{D}$ ) qui sont l'intersection avec une géodésique transverse (resp. une courbe distinguée transverse).*

Soit  $\sigma : U \setminus D \rightarrow E$  une section  $G$ -méromorphe de  $E$  (Définition 1.1.12). Fixons une base  $(\mathfrak{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  de  $\mathfrak{g}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , et tout  $e \in E$ , notons  $\Sigma_e^i$  la feuille de  $\mathcal{T}_{\mathfrak{e}_i}$  en  $e$ , et  $\overline{\Sigma}_e^i$  sa projection par  $p : E \rightarrow M$ .

**Définition 1.7.3.** *Une section exponentielle en  $x_0 \in M$  est une section méromorphe  $\sigma : U \setminus D \rightarrow E$  avec la propriété suivante. Soit  $e_0 = \sigma(x_0)$ , alors pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Sigma_{e_0}^i$  est l'image de  $\overline{\Sigma}_{e_0}^i$  par  $\sigma$ . Une section holomorphe exponentielle en  $x_0$  est une section holomorphe sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  qui est exponentielle.*

Dans le cas des géométries de Cartan holomorphes branchées, on peut se ramener à supposer que la géométrie est totalement géodésique :

**Lemme 1.7.2.4.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur une paire  $(M, D)$ . Alors toute géodésique de  $(E, \omega_0)$  est holomorphe (Définition 1.7.2). En particulier,  $(E, \omega_0)$  est holomorphiquement totalement géodésique si et seulement si elle est totalement géodésique.*

*Démonstration.* Il est facile de montrer, en raisonnant avec des coordonnées locales, que l'hypothèse sur  $(E, \omega_0)$  implique que pour tout  $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}$ , le feuilletage  $\mathcal{T}_A$  est transverse à  $\ker(dp)$ . Soit alors  $\Sigma$  une  $A$ -géodésique de  $(E, \omega_0)$  et notons  $\tilde{\Sigma}$  la courbe  $A$ -distinguée se projetant sur  $\Sigma \setminus D$ . La remarque précédente implique que  $\mathcal{T}_A$  induit une connexion principale holomorphe sur la restriction  $E|_{\Sigma}$ , et par construction  $\tilde{\Sigma}$  est une section holomorphe horizontale de cette connexion. Par conséquent, cette dernière se prolonge en une courbe  $A$ -distinguée se projetant sur  $\Sigma$ . Cela signifie exactement que  $\Sigma$  est une géodésique holomorphe.  $\square$

Donnons tout de suite un exemple de géométrie de Cartan holomorphe branchée qui n'est pas totalement géodésique :

**Exemple 1.7.2.** *Soit  $(G, P) = (\mathbb{C}^2, \{0\})$  la géométrie de translation canonique de dimension 2. Soit  $M = \mathbb{C}^2$  munie de ses coordonnées canoniques  $(z_1, z_2)$ , et  $D$  l'hyperplan d'équation  $z_1 = 0$ . Considérons la  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  définie par  $E = M$  et :*

$$\omega_0(z_1, z_2) = dz_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (-dz_1 + z_1^2 dz_2) \otimes \mathbf{e}_2 \quad (1.159)$$

où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^2$ . Alors  $(E, \omega_0)$  n'est totalement géodésique en restriction à aucun voisinage d'un point  $x_0 \in D$ .

*Démonstration.* Les champs  $\omega_0$ -constants associés à  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  sont  $Y_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}$  et  $Y_2 = \frac{1}{z_1^2} \frac{\partial}{\partial z_2}$ . Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ,  $h$  une fonction holomorphe sur  $M$  et  $Z$  un champ holomorphe sur  $M$  tel que  $\omega_0(Z) = ha\mathbf{e}_1 + hb\mathbf{e}_2$ , i.e un champ de direction constante. Alors  $Z = haY_1 + hbY_2 = haz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + h(\frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_1^2}) \frac{\partial}{\partial z_2}$  est tangent à  $D$  en tout point  $x_0 \in D$ . Par conséquent, toute géodésique de  $\omega_0$  en  $x_0 \in D$  est incluse dans  $D$ .  $\square$

**Lemme 1.7.2.5.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ ,  $x_0 \in M$  et  $\bar{\Sigma}$  une sous-variété lisse de  $M$  contenant  $x_0$  et telle qu'il existe une section  $G$ -méromorphe  $\tau$  de  $E|_{\bar{\Sigma}}$  sur  $(\bar{\Sigma}, x_0)$  (Définition 1.1.12). Alors il existe une section  $G$ -méromorphe  $\sigma$  de  $E$  sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  telle que  $\sigma|_{\bar{\Sigma} \cap U} = \tau$ .*

*Démonstration.* Choisissons un voisinage connexe  $U$  de  $x_0$  muni d'une section holomorphe  $\sigma_0 : U \rightarrow E$ . Alors il existe une fonction méromorphe  $\bar{B}$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$  telle que  $\tau = \sigma_0 \cdot \exp_G(\bar{B})$ . Quitte à restreindre  $U$ , il existe des coordonnées  $(z_1, \dots, z_n)$  telles que  $\bar{\Sigma} \cap U = \{z_1 = \dots = z_m = 0\}$  où  $m$  est la codimension de  $\bar{\Sigma}$ . La fonction  $\bar{B}$  s'étend alors de manière immédiate en une fonction méromorphe  $B$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}$ , par la formule  $B(z_1, \dots, z_n) = \bar{B}(z_1, \dots, z_m)$ . La section  $G$ -méromorphe  $\sigma = \sigma_0 \cdot \exp_G(B)$  vérifie la propriété requise.  $\square$

Considérons l'unique connexion de Cartan méromorphe  $\sigma$ -horizontale  $\omega_1$  sur  $U \setminus D$ , dans la même fibre par  $f$  que  $(E, \omega_0)$  (Définition 1.6.10). Comme  $\sigma$  est méromorphe,  $\omega_1$  est méromorphe. Nous notons alors  $\varphi$  la section méromorphe de  $E(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$  décrivant  $\omega_0$  relativement à  $\omega_1$  (voir Lemme 1.6.5.1).

**Lemme 1.7.2.6.** *1. La section  $\sigma$  est exponentielle en  $x_0$  si et seulement si  $\varphi(\mathbf{e}_i)$  est identiquement nulle en restriction à  $\bar{\Sigma}_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

2. La section  $\sigma$  est exponentielle en  $x_0$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la courbe  $\Sigma_i = \sigma(\bar{\Sigma}_i)$  est  $\mathfrak{e}_i$ -distinguée.

*Démonstration.* 1.  $\sigma$  est exponentielle si et seulement si pour  $i = 1, \dots, n$  et  $t \in D(0, \epsilon)$  on a  $\phi_{Z_i}^t(e_0) = \sigma(\phi_{Z_i}^t(x_0))$ . En dérivant l'égalité par rapport à  $s$  en  $s = t$ , cela équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}|_{s=t} \phi_{Z_i}^s(e_0) &= \frac{d}{ds}|_{s=t} \sigma(\phi_{Z_i}^t(x_0)) \\ \phi_{Z_i}^t(e_0) &= \sigma \circ \phi_{Z_i}^t(x_0) \end{cases} \quad (1.160)$$

Soit :

$$z_1^{d(i)} Y_i(\phi_{Z_i}^t(e_0)) = z_1^{d(i)} \omega_1^{-1}(\mathfrak{e}_i)(\phi_{Z_i}^t(x_0)) \quad (1.161)$$

Considérons alors les sections  $\beta_0, \beta_1 \in H^0(U, \text{Hom}(At(E_P), E(\mathfrak{g}))[\star D])$  associées à  $\omega_0$  et  $\omega_1$  (Proposition 1.6.1.1). L'égalité précédente se réécrit :

$$(\beta_0 - \beta_1)^{-1}(\mathfrak{e}_i)(\phi_{Z_i}^t(x_0)) = 0 \quad (1.162)$$

pour tout  $t \in D(0, \epsilon)$ . Or  $\beta_0 - \beta_1 = \varphi \circ \beta_0$ , donc  $(\beta_0 - \beta_1)^{-1} = \beta_0^{-1} \circ \varphi$ . Comme de plus  $\beta_0^{-1}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[\star D]$ -modules, on obtient que l'égalité précédente équivaut à  $\varphi(\mathfrak{e}_i) \in \mathfrak{m}_{\bar{\Sigma}_i, D} \otimes E(\mathfrak{p})$ .

2. Soit  $\sigma$  méromorphe sur  $U$  et notons  $\psi_\sigma = \psi_\sigma(\mathfrak{g})$  la trivialisatoin de  $E(\mathfrak{g})[\star D]$  associée à  $\sigma$  (voir Définition 1.1.11). Supposons que  $\sigma$  est exponentielle en  $x_0$ . Soit  $x \in U \setminus D$  et  $v \in \bar{T}_x \Sigma_i$ . Par définition,  $\phi_0(v) \in \mathbb{C} \bar{s}_i(x)$ . Donc  $\psi_\sigma[\beta_0 \circ \tau_\sigma(v)] \in \mathbb{C} \mathfrak{e}_i \pmod{\mathfrak{p}}$ . Par définition également :

$$\text{proj}_{\mathfrak{p}}(\psi_\sigma[\beta_0 \circ \tau_\sigma(v)]) = \psi_\sigma[\varphi(\mathfrak{e}_i)(x)] = 0 \quad (1.163)$$

Donc :

$$\sigma^* \omega_0(v) = \psi_\sigma[\beta_0 \circ \tau_\sigma(v)] = \mathfrak{e}_i \quad (1.164)$$

Réciproquement, si  $\sigma^* \omega_0(v) \in \mathbb{C} \mathfrak{A}$  pour tout  $x \in \bar{\Sigma}_i \setminus D$  et  $v \in T_x \bar{\Sigma}_i$ , alors  $\varphi(\mathfrak{e}_i) = 0$  par définition. □

**Corollaire 1.7.1.** *Si  $(E, \omega_0)$  est une géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe une section holomorphe exponentielle en  $x_0$ .*

*Démonstration.* Fixons  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$  et notons  $(\Sigma_i)_{i=1, \dots, n}$  les feuilles de chaque  $\mathcal{T}_{\mathfrak{e}_i}$  (Lemme 1.7.2.3) en  $e_0$ . Il reste à construire une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  telle que  $\sigma(U)$  contient les courbes  $\Sigma_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les sections  $\sigma$  sont en bijection avec les applications holomorphes  $b : U \rightarrow P$ , et celles avec  $\sigma(U)$  contenant  $\Sigma_i$  correspondent à  $b(\bar{\Sigma}_i) = \{Id\}$  où  $\bar{\Sigma}_i = p(\Sigma_i)$ . Comme les courbes  $\bar{\Sigma}_i$  sont transverses, une telle application existe. □

### 1.7.3 Fonction de structure d'une base géométrique

Fixons une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$ ,  $Q$  l'image de sa représentation adjointe quotient  $\underline{ad}$  (Définition 1.4.2), ainsi qu'une base  $(\mathfrak{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  de  $\mathfrak{g}$  où  $(\mathfrak{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  est une base du supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$  de  $\mathfrak{p}$ . Nous notons  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-} = \overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_- \subset \mathbb{W}$  et  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}$  la projection de  $\mathbb{W} = (\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}_-^*) \otimes \mathfrak{g}$  parallèlement à  $(\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}_-^*) \otimes \mathfrak{p}$ . L'isomorphisme naturel  $\mathfrak{g}_- \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  donne à  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  une structure de représentation du groupe  $P$ . Cette dernière se factorise par une représentation du groupe  $Q$  puisque  $P'$  agit trivialement sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ .

Notons  $\partial$  la seconde différentielle de Kostant dans le complexe de Chevalley  $\mathfrak{g}_-$ -relatif associé à la représentation  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$  (Définition 1.4.6) et  $\pi_{1, \mathfrak{q}}$  la projection naturelle

de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  sur  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})$ . Comme  $\pi_{1,\mathfrak{q}}$  est surjective, et que l'image de son noyau  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}')$  par  $\partial$  est inclus dans  $\mathbb{W}_{\mathfrak{p}}$ , il existe une unique application linéaire  $\tilde{\partial}$  satisfaisant l'équation :

$$\tilde{\partial} \circ \pi_{1,\mathfrak{q}} = \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \partial|_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})} \quad (1.165)$$

Considérons la géométrie de Klein complexe  $(Q \times \mathfrak{g}_-, Q)$  où  $\mathfrak{g}_-$  est le sous-groupe additif de l'espace vectoriel. Soit  $\underline{\partial}$  la différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$  relative de la représentation adjointe  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{q}$  de  $G'$  (Définition 1.4.6). Les applications  $\underline{\partial}$  et  $\tilde{\partial}$  sont reliées par :

**Lemme 1.7.3.1.** *La projection  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \tilde{\partial}$  coïncide avec  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \underline{\partial}$  en restriction à  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})$ . Par définition, pour tout  $A, B \in \mathfrak{g}_-$  on a :

$$\underline{\partial}\varphi(A, B) = [\varphi(A), B]_{\mathfrak{g}'} + [A, \varphi(B)]_{\mathfrak{g}'} \quad (1.166)$$

car  $\mathfrak{g}_-$  est une sous-algèbre abélienne de  $\mathfrak{g}'$ . D'autre part :

$$\tilde{\partial}\varphi(A, B) = [\varphi(A), B]_{\mathfrak{g}'} + [A, \varphi(B)]_{\mathfrak{g}'} - \varphi([A, B]_{\mathfrak{g}_-}) \quad (1.167)$$

avec  $\varphi([A, B]_{\mathfrak{g}_-})$  à valeurs dans  $\mathfrak{q}$ . Par conséquent, les projections sur  $\mathfrak{g}_-$  de  $\underline{\partial}\varphi$  et  $\tilde{\partial}\varphi$  coïncident, d'où le résultat.  $\square$

Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur une paire  $(M, D)$  et  $(\bar{s}_i)_{i=1, \dots, n}$  une base locale de  $\mathcal{E}$  sur un ouvert  $U \subset M$ , correspondant à une section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  sur  $U$ . Soient  $\bar{Y}_i = \phi_0^{-1}(\bar{s}_i)$  les champs méromorphes correspondant.

**Définition 1.7.4.** *La fonction de structure de  $(\bar{s}_i)_{i=1, \dots, n}$  (resp. de  $\tilde{\sigma}$ ) est la section méromorphe de  $\mathcal{O}_U \otimes \mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  définie par :  $k^{(\bar{s}_i)} = k^{\tilde{\sigma}} = \sum_{i,j,k=1}^n (\bar{Y}_k^*([\bar{Y}_i, \bar{Y}_j]_{TM}) \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k$ .*

Soit  $\tilde{\sigma}$  une section holomorphe de  $\tilde{E}$  sur  $U$ ,  $\psi_{\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}_-)$  la trivialisatation locale de  $\mathcal{E}$  induite par  $\tilde{\sigma}$  (Définition 1.1.11) et  $\mathcal{A}$  sa matrice ((1.148)). Alors :

$$k^{\tilde{\sigma}} = d\mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) \quad (1.168)$$

Soit  $E$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$  tel que  $\tilde{E} = E \times_P Q$ ,  $\sigma : U \rightarrow E$  une section holomorphe et  $\omega_1$  la connexion méromorphe horizontale associée (voir Définition 1.6.10). Soit  $(s_i)_{i=1, \dots, n}$  la base géométrique correspondant à la section holomorphe  $\tilde{\sigma} = [\sigma]_{\tilde{E}}$ . Alors :

**Lemme 1.7.3.2.** *On a :  $k_{\omega_1} \circ \sigma = k^{(\bar{s}_i)}$ .*

*Démonstration.* Les champs  $\omega_1$ -constants  $Y_i = \omega_1^{-1}(\mathbf{e}_i)$  vérifient  $Y_i \circ \sigma = T\sigma(Tp(Y_i))$  par définition. Par conséquent pour tout  $i, j$ , en notant  $\hat{Y}_k = Tp(Y_k \circ \sigma)$  :

$$\begin{aligned} k_{\omega_1}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \circ \sigma &:= \omega_1 \circ \sigma[\mathcal{L}_{T\sigma(\hat{Y}_i)} T\sigma(\hat{Y}_j) - \mathcal{L}_{T\sigma(\hat{Y}_j)} T\sigma(\hat{Y}_i)] \\ &= \omega_1(\sigma) \circ T\sigma([\hat{Y}_i, \hat{Y}_j]) \\ &= k^{(\bar{s}_i)}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (1.169)$$

D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 1.7.3.3.** Soient  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}'$  deux sections holomorphes de  $\tilde{E}$  sur un ouvert  $U \subset M$ . Soit  $q : U \rightarrow Q$  la fonction méromorphe telle que  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \cdot q$ . Soit  $\psi_{\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}_-)$  la trivialisatation de  $\mathcal{E}$  associée à  $\tilde{\sigma}$  et  $\mathcal{A}$  la matrice de  $\tilde{\sigma}$  ((1.148)). Alors on a :

$$k^{\tilde{\sigma}'} = q^{-1} \cdot [k^{\tilde{\sigma}} + \tilde{\partial}\mathcal{B}] \quad (1.170)$$

où  $\mathcal{B} = ((q^{-1})^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1})$ ,  $q^{-1}$  désigne l'action de  $q^{-1}$  sur le  $Q$ -module  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  et  $\tilde{\partial}$  est le morphisme défini par ((1.165)).

*Démonstration.* Appliquons le Lemme 1.6.6.1 à la géométrie de Klein  $(G_1, P_1) = (Q \times \mathfrak{g}_-, Q)$ , et aux  $(G_1, P_1)$ -connexions de Cartan méromorphes  $\omega_1, \omega'_1$  sur  $\tilde{E}|_U$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  et respectivement  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ -horizontales (Définition 1.6.10 et Proposition 1.6.6.1). Alors en notant  $\psi_{\tilde{\sigma}}$  la trivialisatation de  $\tilde{E}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q}))$  induite par  $\tilde{\sigma}$  (Définition 1.1.11), nous avons  $\omega_1 \xrightarrow{\varphi} \omega'_1$  avec :

$$\psi_{\tilde{\sigma}}(\varphi) = q \cdot (q^* \omega_Q \circ \mathcal{A}^{-1}) \quad (1.171)$$

car  $\mathfrak{g}_-$  est un  $Q$ -module donc  $\text{proj}_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q})}(\text{ad}(q^{-1})|_{\mathfrak{g}_-}) = 0$ .

Par ailleurs, en reprenant la preuve du Lemme 1.7.3.2, nous avons :

$$k^{\tilde{\sigma}} = \tau_{\omega_1} \circ \tilde{\sigma} + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_-} \quad \text{et} \quad k^{\tilde{\sigma}'} = \tau_{\omega'_1} \circ \tilde{\sigma}' + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_-} \quad (1.172)$$

où  $\tau_{\omega_1}, \tau_{\omega'_1}$  désignent les torsions des connexions de Cartan. En appliquant le Lemme 1.5.3.3 aux  $(G_1, P_1)$ -connexions de Cartan  $\omega_1, \omega'_1$ , et la formule ((1.172)), nous obtenons :

$$k^{\tilde{\sigma}'} = \tau_{\omega'_1} \circ \tilde{\sigma}' + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_-} = q^{-1} \cdot [\tau_{\omega'_1} \circ \tilde{\sigma} + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_-}] = q^{-1} \cdot [\tau_{\omega_1} + [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_-} + \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}(\tilde{\partial}\mathcal{B})] = q^{-1} \cdot (k^{\tilde{\sigma}} + \tilde{\partial}\mathcal{B}) \quad (1.173)$$

Par le Lemme 1.7.3.1,  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \tilde{\partial}\mathcal{B} = \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \tilde{\partial}\mathcal{B}$ , d'où le résultat.  $\square$

### 1.7.4 Sections exponentielles et courbure

Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  et  $\mathbb{E} = f(E, \omega_0) = (\phi_0, \tilde{E})$ , et fixons  $x \in M$  ainsi qu'un voisinage  $U$  de  $x$ . L'existence d'une section exponentielle  $\sigma : U \setminus D \rightarrow E$  de  $(E, \omega_0)$  en un point  $x_0 \in M$  implique que sa courbure peut être partiellement décrite à partir de la base locale correspondant à  $\tilde{\sigma} = [\sigma]_{\tilde{E}}$ . En effet :

**Proposition 1.7.4.1.** Soit  $\tilde{\sigma}$  et  $\sigma$  comme ci-dessus. Alors :

$$k^{\tilde{\sigma}} - \text{proj}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}(k_{\omega_0} \circ \sigma) \in \mathfrak{m}_{x,D} \otimes \mathbb{W} \quad (1.174)$$

où  $\mathfrak{m}_{x,D}$  est l'idéal des fonctions méromorphes avec pôle en  $D$  et s'annulant en  $x$  (voir Notation 16).

*Démonstration.* Soit  $x \in M$  et  $\sigma : U \rightarrow E$  une section exponentielle en  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$  sur  $U$ . Soit  $\omega_1$  l'unique connexion méromorphe  $\sigma$ -horizontale et telle que  $f(p^{-1}(U), \omega_1) = f(p^{-1}(U), \omega_0)$  (voir Proposition-Définition 1.6.10). On a en particulier :

$$k_{\omega_1} \circ \sigma = k^{(\tilde{\sigma}_i)_i} \in \mathcal{O}_M[\star D] \otimes \mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}(U) \quad (1.175)$$

Soit  $\mathcal{B} = \psi_{\sigma}(\varphi)$  où  $\psi_{\sigma} = \psi_{\sigma}(\mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{p})$  (voir Proposition 1.1.11). Alors le Lemme 1.5.3.4 implique :

$$\text{proj}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}(k_{\omega_1} - k_{\omega_0}) \circ \sigma = \partial\mathcal{B} \quad (1.176)$$

Par ailleurs, comme  $\sigma$  est  $\omega_0$ -exponentielle, ainsi que  $\omega_1$ -exponentielle, la Lemme 1.7.2.6 implique que  $\mathcal{B}(\mathfrak{e}_i) \in \mathfrak{m}_{x,D}(U) \otimes \mathfrak{p}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , i.e  $\mathcal{B} \in \mathfrak{m}_{x,D}(U) \otimes \text{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ . Comme le morphisme  $\partial$  est obtenu en tensorisant la différentielle de Kostant par l'identité de  $\mathcal{O}_M[\star D]$ , on en déduit que  $\partial\mathcal{B} \in \mathfrak{m}_{x,D}(U) \otimes \mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$ . D'où le résultat. La formule ((1.174)) est alors conséquence de ((1.175)).  $\square$

## 1.8 Catégorie différentiable

Dans cette section, nous fixons une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$ , notons  $Q$  l'image de sa représentation adjointe quotient ([Définition 1.4.2](#)) et considérons la géométrie de Klein réelle  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$  où  $G^{\mathbb{R}}$  et  $P^{\mathbb{R}}$  sont les groupes de Lie réels sous-jacents respectifs de  $G$  et  $P$ . Nous définissons une sous-catégorie de  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$ -géométries de Cartan différentiables qui induit des  $Q$ -extensions méromorphes via un foncteur analogue à celui du [Théorème 1.6.1](#). En particulier, le fibré  $P^{\mathbb{R}}$ -principal d'une géométrie dans cette catégorie est muni d'une structure complexe, et nous donnons une condition suffisante pour le vérifier. Enfin, nous montrons que toute famille de germes connexions de Cartan méromorphes définies sur un fibré  $P$ -principal holomorphe, dans la fibre d'une même  $Q$ -extension méromorphe, s'interpole en une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe dans la fibre de cet objet. En particulier cela prouve la surjectivité du foncteur décrit précédemment, ce qui est crucial dans la résolution du problème d'équivalence méromorphe au [chapitre 2](#).

### 1.8.1 Foncteur d'une sous-catégorie différentiable vers les extensions méromorphes

Le résultat de la [Proposition 1.6.1.1](#) est valable dans la catégorie différentiable. Plus précisément, en utilisant la version différentiable de la correspondance du [Corollaire 1.1.1](#), nous obtenons une bijection entre les couples  $(E', \beta_1)$  formés d'un fibré  $P^{\mathbb{R}}$ -principal différentiable et d'une 1- $\mathfrak{g}$ -forme différentiable sur  $E'$ , et les  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$ -géométries de Cartan différentiables. Comme dans la preuve du [Théorème 1.6.1](#), nous obtenons alors un foncteur  $\bar{f}$  entre la catégorie des  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$ -géométries de Cartan différentiable sur une variété réelle  $M'$  et celle des couples  $(\phi, \tilde{E}')$  où  $\tilde{E}'$  est un fibré  $Q^{\mathbb{R}}$ -principal différentiable sur  $M'$  et  $\phi : TM' \rightarrow \mathcal{E}'$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{M'}^{\infty}$ -modules (où  $\mathcal{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{C}^n)$ ).

**Définition 1.8.1.** Soit  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie de  $Q$ -extensions méromorphes et  $\mathcal{E}_{M,D}$  la catégorie correspondante sur une paire  $(M, D)$  ([Définition 1.6.5](#)).

1. L'antécédent différentiable de  $\mathcal{E}$  est la catégorie  $\mathcal{G}^{diff}$  dont les objets sont les couples  $(E, \omega_1)$  où  $E \xrightarrow{p} M$  est un fibré  $P$ -principal holomorphe sur une variété complexe  $M$ , munies d'un diviseur  $D$ , et  $\omega_1$  une connexion de Cartan différentiable sur  $E \setminus \tilde{D}$  tels que :

(i)  $(E^{\mathbb{R}}|_{M \setminus D}, \omega_1)$  est une  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$ -géométrie différentiable sur  $(M \setminus D)^{\mathbb{R}}$ .

(ii) Soit  $(\phi'_0, \tilde{E}') = \bar{f}(E|_{M \setminus D}, \omega_1)$  (voir remarques précédant la définition) et  $\tilde{E} = E \times_P Q$ .

Il existe un (unique) isomorphisme de  $\mathcal{O}_M$ -modules  $\phi_0 : TM[\star D] \rightarrow \tilde{E}(\mathbb{C}^n)[\star D]$  tel que  $Id_{\mathcal{O}_{M \setminus D}^{\infty}} \otimes \phi_0|_{M \setminus D} = \phi$

(iii)  $(\phi_0, \tilde{E})$  est un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ .

Les flèches sont les isomorphismes  $\Psi_0 : E \setminus \tilde{D} \rightarrow E' \setminus \tilde{D}'$  de  $P$ -fibrés holomorphes au dessus de  $M \setminus D$  induisant des isomorphismes entre les fibrés représentations associés à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , et tels que  $\Psi_0^* \omega'_1 = \omega_1$ .

2. On note  $f^{diff}$  le foncteur défini de la manière suivante. Soit  $(M, D)$  une paire et  $(E, \omega_1)$  un objet de  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$ . Notons  $(\phi, \tilde{E}') = \bar{f}(E, \omega_1)$ . Alors  $f^{diff}(E, \omega_1) = (\phi_0, \tilde{E})$  où  $\tilde{E} = E \times_P Q$  et  $\phi_0$  est l'unique morphisme de  $\mathcal{O}_M$ -modules vérifiant (i) et (ii) du point 1.

**Lemme 1.8.1.1.** Soit  $(M, D)$  une paire et  $\mathcal{E}_{M,D}$  la catégorie de toutes les  $Q$ -extensions méromorphes sur  $(M, D)$ , et notons  $\mathcal{G}^{diff}$  l'antécédent différentiable. Notons  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  le quotient par  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ . Soit  $(E, \omega_1)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable sur  $(M, D)$  avec  $E$

s'étendant en un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$ , encore noté  $E$ . Alors  $(E, \omega_1)$  est un objet de  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  si et seulement si  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_1$  est une 1-forme méromorphe sur  $E$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\bar{f}(E|_{M \setminus D}, \omega_1) = (\phi'_0, \tilde{E}')$  induise un objet  $\mathbb{E}$  de  $\mathcal{E}_{M,D}$  comme dans la Définition 1.8.1. En transposant la preuve de la Proposition 1.6.1.2 dans la catégorie différentiable, nous obtenons que la solderform méromorphe  $\theta_0$  associée à  $\mathbb{E}$  s'obtient par passage au quotient de  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_1$  par l'action du noyau  $P'$  de la représentation adjointe quotient. Ainsi, cette projection doit être méromorphe. Réciproquement, si cette projection est méromorphe, alors le morphisme  $\phi'_0$  est le morphisme associé à la 1-forme  $\theta_0$  par le Corollaire 1.1.1. En particulier, il applique les sections méromorphes de  $TM$  dans les section méromorphes de  $\tilde{E}(C^n)$ . Sa restriction  $\phi_0$  à  $TM[\star D]$  définit donc une  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$ .  $\square$

## 1.8.2 Structures complexes sur les géométries de Cartan différentiables avec un modèle complexe

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n = \dim(G/P)$  et  $M^{\mathbb{R}}$  la variété réelle sous-jacente à  $M$ . Soit  $(E, \omega)$  une  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$ -géométrie de Cartan différentiable sur  $M^{\mathbb{R}}$ . En particulier, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  se décompose en une somme directe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1,0)} \oplus \mathfrak{g}^{(0,1)}$ . Nous notons  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^{(1,0)*} \oplus \mathfrak{g}^{(0,1)*}$  la décomposition duale. En particulier, l'ensemble des formes bilinéaires alternées  $\mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$  sur  $\mathfrak{g}$  se décompose comme  $\mathfrak{g}^{(2,0)*} \oplus \mathfrak{g}^{(1,1)*} \oplus \mathfrak{g}^{(0,2)*}$ .

**Définition 1.8.2.** On définit :

1. Une décomposition  $\mathbb{W} = \mathbb{W}^{(2,0)} \oplus \mathbb{W}^{(1,1)} \oplus \mathbb{W}^{(0,2)}$  du module de courbure de  $(G^{\mathbb{R}}, P^{\mathbb{R}})$  où pour  $0 \leq p \leq 2$  :

$$\mathbb{W}^{(p,2-p)} = \mathfrak{g}_-^{(p,2-p)*} \wedge \mathfrak{g}_-^{(2-p,p)*} \otimes \mathfrak{g} \quad (1.177)$$

2. Une décomposition  $k_\omega = k_\omega^{(2,0)} \oplus k_\omega^{(1,1)} \oplus k_\omega^{(0,2)}$  de la représentation de courbure  $k_\omega$  suivant la décomposition précédente.

La décomposition de  $k_\omega$  peut s'interpréter géométriquement. En effet, la structure complexe sur  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  et la connexion de Cartan différentiable  $\omega$  induisent une décomposition

$$TE = T^{(1,0)}E \oplus T^{(0,1)}E \quad (1.178)$$

du faisceau des champs de vecteurs différentiables sur la variété réelle correspondant à  $E$ , où l'on note pour  $p = 0, 1$  :  $T^{(p,1-p)}E = \omega^{-1}(\mathfrak{g}^{(p,1-p)})$ . De plus, ces objets définissent une structure presque-complexe  $J^\omega : TE \setminus \tilde{D} \rightarrow TE \setminus \tilde{D}$  sur  $E \setminus \tilde{D}$ , faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} TE \setminus \tilde{D} & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{O}_{E \setminus \tilde{D}}^\infty \otimes \mathfrak{g} \\ J^\omega \downarrow & & \downarrow Id_{\mathcal{O}_{E \setminus \tilde{D}}}^\infty \otimes Id_{\mathfrak{g}} \\ TE & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{O}_{E \setminus \tilde{D}}^\infty \otimes \mathfrak{g} \end{array} \quad (1.179)$$

Par définition d'une connexion de Cartan,  $J^\omega$  est équivariante pour la linéarisation  $(dr_b)_{b \in P}$  induite par l'action de  $P$ , et préserve le sous-faisceau  $\ker(dp)$ .

Considérons à présent un diviseur effectif  $D$  sur  $M$ , la catégorie  $\bar{\mathcal{G}}_{M \setminus D}$  des  $(G, P)$ -géométries de Cartan différentiables sur  $M \setminus D$  ainsi que  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  la catégorie dont l'image par  $f^{diff}$  est constituée de  $Q$ -extensions méromorphes sur  $(M, D)$  (voir Définition 1.8.1). En étendant la preuve d'un résultat de A. Căp et J.Slovák (Proposition 3.1.17, [14]), nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur un objet de  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  pour induire une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  :

**Lemme 1.8.2.1.** Soit  $(M, D)$  une paire et  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal différentiable. Soit  $\omega_1$  une  $(G, P)$ -connexion de Cartan différentiable sur  $E \setminus \tilde{D}$ , et  $k_{\omega_1} = k_{\omega_1}^{(2,0)} \oplus k_{\omega_1}^{(1,1)} \oplus k_{\omega_1}^{(0,2)}$  sa représentation de courbure. Soit  $(\phi, \tilde{E}) = \tilde{f}(E, \omega_1)$  (voir [sous-section 1.8.1](#)). Alors les faits suivants sont équivalents :

- (i) Il existe une structure complexe sur  $E$  telle que  $(E, \omega_1)$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$
- (ii) Le fibré  $GL_n(\mathbb{C})$ -principal différentiable des bases  $\tilde{E}^\#$  de  $\tilde{E}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  (voir [Définition 1.1.9](#)) admet une structure de fibré holomorphe sur  $M$ , l'image  $\phi(TM[\star D])$  est le faisceau des sections méromorphes correspondantes, et  $k_{\omega_1} = k_{\omega_1}^{(2,0)}$

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat. Prouvons la réciproque.

Considérons la structure presque complexe  $J^{\omega_1}$  sur  $E \setminus \tilde{D}$  définie par [\(1.179\)](#). Par le théorème de Newlander-Nirenberg, pour prouver qu'elle est intégrable, il suffit de prouver que le tenseur,  $N^{\omega_1}$  défini par :

$$N^{\omega_1}(X, Y) = [X, Y] - [J^{\omega_1}(X), J^{\omega_1}(Y)] + J^{\omega_1}[J^{\omega_1}(X), Y] + J^{\omega_1}[X, J^{\omega_1}(Y)] \quad (1.180)$$

est identiquement nul sur  $E \setminus D$ . Soient  $A, B \in \mathfrak{g}$ , et notons  $\tilde{C} = \omega_1^{-1}(C)$  pour tout  $C \in \mathfrak{g}$ . Alors par définition de  $J^{\omega_1}$  :

$$\begin{aligned} \omega_1(N^{\omega_1}(\tilde{A}, \tilde{B})) &= \omega_1([\tilde{A}, \tilde{B}]) - \omega_1([i\tilde{A}, i\tilde{B}]) + i\omega_1([i\tilde{A}, \tilde{B}]) + i\omega_1([\tilde{A}, i\tilde{B}]) \\ &= k_{\omega_1}(A, B) - k_{\omega_1}(iA, iB) + ik_{\omega_1}(iA, B) + ik_{\omega_1}(A, iB) - N^{\mathfrak{g}}(A, B) \\ &= -4k_{\omega_1}^{(0,2)}(A, B) \end{aligned} \quad (1.181)$$

où  $N^{\mathfrak{g}}$  désigne le tenseur analogue pour la structure complexe de  $G$  (donc nul).

Par conséquent, l'hypothèse implique que  $J^{\omega_1}$  est intégrable sur  $E \setminus \tilde{D}$ . De plus,  $0 = k_{\omega_1}^{(1,1)} = d\omega_1 \circ \omega_1^{-1} \wedge \omega_1^{-1}$  donc  $\omega_1$  est holomorphe pour cette structure complexe.

Montrons que  $J^{\omega_1}$  se prolonge en une structure complexe sur  $E$ . Notons  $\phi_0$  la restriction de  $\phi$  à  $TM[\star D]$ ,  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ , et  $\theta_0$  la solderform méromorphe correspondant à l'extension méromorphe  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  ([Définition 1.6.3](#)). Rappelons que  $\tilde{E} = E \times_P Q$  où  $Q$  est l'image de la représentation ajointe quotient de  $(G, P)$ . Notons  $\pi : E \rightarrow \tilde{E}$  la projection. Le fibré  $Q$ -principal différentiable  $\tilde{E}$  est donc muni d'une 1- $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ -forme différentiable  $\theta_0$   $Q$ -équivariante, qui s'étend par équivariance en la 1-forme méromorphe  $\theta_0$  sur  $\tilde{E}^\#$ . Cette dernière s'obtient par passage au quotient de  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \circ \omega_1$  par l'action du groupe complexe  $P'$  sur  $E$ . Comme  $J^{\omega_1}$  est équivariante et préserve  $\ker(d\pi) \subset TE \setminus \tilde{D}$ , elle induit un endomorphisme équivariant  $\tilde{J}^{\omega_1}$  de  $TE \setminus \tilde{D}/\ker(d\pi)$ . Ce dernier passe au quotient en une structure complexe sur  $\tilde{E} \setminus \pi(\tilde{D})$ , totalement déterminée par  $\theta_0$ . Comme  $\theta_0$  est holomorphe sur  $\tilde{E}^\#$ , cette dernière coïncide avec la structure complexe de  $\tilde{E}^\#$  restreinte à  $\tilde{E} \setminus \pi(\tilde{D})$ . Par conséquent,  $\tilde{J}^{\omega_1}$  se prolonge en un endomorphisme de  $TE/\ker(d\pi)$ . Or  $J^{\omega_1}|_{\ker(d\pi)}$  coïncide avec la structure complexe sur les fibres de  $\pi$  induite par l'action de  $P'$ , donc se prolonge en un endomorphisme de  $\ker(d\pi)$  sur  $E$ . Nous obtenons que  $J^{\omega_1}$  se prolonge en une structure complexe sur  $E$ , vérifiant les propriétés (i) par construction.  $\square$

### 1.8.3 Interpolation de connexions de Cartan méromorphes dans la catégorie différentiable

Supposons, sans perte de généralité, que la représentation adjointe  $ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est injective ([Lemme 1.4.1.1](#)). Soit  $P'$  le noyau de la représentation adjointe quotient de  $(G, P)$

et fixons un supplémentaire  $\mathfrak{g}_-$  de  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$  dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Nous fixons aussi une paire  $(M, D)$  où  $M$  est une variété complexe de dimension  $n = \dim(G/P)$ .

Soit  $\mathbb{E}$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ . Nous avons vu (Proposition 1.6.6.1) que pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un objet  $(E, \omega_1)$  de  $\mathcal{G}_{U,D}$  (Définition 1.6.4) dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  par le foncteur  $f$  (Théorème 1.6.1). Deux obstructions apparaissent pour obtenir un résultat global : d'abord l'existence d'un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E$  tel que  $\tilde{E} = E \times_P Q$ . Le lemme ci-dessous donne une hypothèse très générale sous laquelle cette première obstruction est vide :

**Lemme 1.8.3.1.** *Supposons qu'il existe une application holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  avec  $ad \circ s = \text{Id}_Q$ . Alors pour tout fibré  $Q$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  sur  $M$ , il existe un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E$  sur  $M$  tel que  $E \times_P Q = \tilde{E}$ .*

*Démonstration.* Considérons une famille  $(\tilde{\sigma}_\beta)_{\beta \in J}$  de sections holomorphes de  $\tilde{E}$  recouvrant  $M$ . Considérons le cocycle  $(\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in J} \in \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^* \otimes Q)$  défini par  $\tilde{\sigma}_\alpha \cdot \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} = \tilde{\sigma}_\beta$ . La section  $s$  permet de relever ce cocycle en  $(\gamma_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in J} \in \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^* \otimes P)$  en posant  $\gamma_{\alpha,\beta} = s(\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta})$ . On obtient donc un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E$  avec  $\tilde{E} = E \times_P Q$ .  $\square$

La seconde obstruction est l'existence d'une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\omega_0$  telle que  $f(E, \omega_0) = (\phi_0, \tilde{E})$ . Un résultat classique dans la théorie des géométries de Cartan différentiables montre cependant que cette dernière est vide dans la catégorie différentiable : le foncteur  $\bar{f}$  (voir sous-section 1.8.1) est surjectif sur les objets. Nous prouvons ici un résultat de surjectivité intermédiaire entre la catégorie différentiable et la catégorie méromorphe : l'interpolation d'une famille de connexions de Cartan méromorphes par une connexion de Cartan différentiable (Théorème 1.8.1). Ce résultat sera utile dans le chapitre III pour étendre la résolution du problème d'équivalence dans la catégorie holomorphe à la catégorie méromorphe. Il s'agit d'une généralisation d'un fait utilisé dans la preuve du Théorème 3.1.14 de [14].

Commençons la preuve du résultat annoncé. D'abord, il existe toujours un modèle affine qui s'étend en  $(G, P)$  :

**Définition 1.8.3.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe. On définit*

1. *Le sous-groupe  $G_0 \subset P$  comme le sous-groupe dont l'image par  $ad$  est constituée des automorphismes de  $\mathfrak{g}$  préservant  $\mathfrak{g}_-$  et se restreignant en l'identité sur  $\mathfrak{p}$ .*
2. *Le sous-groupe  $P^+ \subset P$  comme le sous-groupe dont l'image par  $ad$  est constituée des automorphismes de la forme  $\text{Id}_{\mathfrak{g}_-} \oplus u_1 \oplus u_2$  où  $u_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  et  $u_2 \in \text{End}(\mathfrak{p})$ .*

Soit  $G_- = \exp_G(\mathfrak{g}_-) \subset G$ . Alors  $G_0$  est inclus dans le normalisateur de  $G_-$  dans  $P$ . Par conséquent, nous pouvons définir :

**Définition 1.8.4.** *On définit le groupe de Lie  $\hat{G} = G_0 \ltimes G_-$ .*

**Lemme 1.8.3.2.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe et  $G_0, P^+$  comme dans la Définition 1.8.3. Alors :*

1. *On a une décomposition en produit semi-direct  $P = G_0 \ltimes P^+$ .*
2. *Le sous-groupe  $G_0 \subset P$  est solide (Définition 1.2.3) et  $P^+ \subset P$  un sous-groupe normal. La géométrie de Klein  $(G, P)$  étend  $(\hat{G}, G_0)$  (Définition 1.4.24).*
3. *Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un  $P$ -fibré principal et choisissons un ensemble discret  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$  dans  $M$ . Soient  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$  des sections  $G$ -méromorphes, définies respectivement sur des voisinages disjoints  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de chaque point  $x_\alpha$  (Définition 1.1.12). Alors il existe des*

voisinsages  $U'_\alpha$  de chaque  $x_\alpha$  vérifiant  $\overline{U}'_\alpha \subset U_\alpha$  et une réduction différentiable  $\hat{E}$  de  $E|_{M \setminus D}$  à  $G_0$  tels que pour tout  $\alpha \in I$  :

$$\hat{E} \cap p^{-1}(U'_\alpha \setminus D) = \sigma_\alpha(U'_\alpha \setminus D) \cdot G_0 \quad (1.182)$$

*Démonstration.* 1. Par l'hypothèse faite sur  $(G, P)$ , la représentation adjointe  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est un homomorphisme injectif. Soit  $\overline{P} = ad(P)$ . Comme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{p}$ , un résultat classique d'algèbre linéaire montre que  $\overline{P}$  est le produit semi-direct de  $ad(G_0) \simeq G_0$  et de  $ad(P^+)$ . En particulier,  $P$  est le produit semi-direct de  $P^+$  et de  $G_0$  et  $P^+$  est distingué dans  $P$ .

2. Par le point 1.,  $\overline{P}^+$  est homéomorphe à un espace-vectoriel. Par injectivité de la représentation adjointe, il en va de même pour  $P^+ = ad^{-1}(\overline{P}) \subset P$  : il est donc solide dans  $P$  (Définition 1.2.3). Par construction,  $\hat{\mathfrak{g}} := Lie(\hat{G}) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{g}_0$  sont des sous-espaces de  $\mathfrak{g}$ . L'inclusion correspondante est une inclusion d'algèbres de Lie.

3. Nous détaillons d'abord la preuve lorsque les sections  $\sigma_\alpha$  sont holomorphes sur  $U_\alpha$ . Comme  $M$  est localement compacte, il existe des ouverts disjoints  $U'_\alpha$  contenant  $x_\alpha$  et vérifiant  $\overline{U}'_\alpha \subset U_\alpha$ . On applique alors le Théorème 1.2.1 au fermé  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{U}'_\alpha$ .

Dans le cas général, il suffit de considérer un recouvrement ouvert  $(U_\beta)_{\beta \in J}$  de  $M$ , une famille  $(\sigma_\beta)_{\beta \in J}$  de  $M$  par des sections  $G$ -méromorphes en  $D$  de  $E$  sur chaque  $U_\beta$ , contenant  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$  et telles que le cocycle  $(b_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in J}$  obtenu est constitué de fonctions holomorphes à valeurs dans  $P$  (existent car les  $D_\alpha$  sont irréductibles). Cela définit un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E' \xrightarrow{p'} M$ , et il existe par construction un isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes  $\Psi : E|_{M \setminus D} \rightarrow E'|_{M \setminus D}$ . La preuve précédente s'applique alors à  $E'$  : nous disposons d'une réduction différentiable  $\hat{E}'$  de  $E'|_{M \setminus D}$  à  $G_0$  avec  $\hat{E}'|_{U'_\alpha \setminus D} = \sigma(U'_\alpha \setminus D) \cdot G_0$  pour tout  $\alpha \in I$ . En considérant  $\hat{E} = \Psi^{-1}(\hat{E}')$ , nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

Ces remarques préliminaires permettent d'exploiter le Lemme 1.3.2.4 et d'obtenir :

**Theorème 1.8.1.** Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe,  $Q$  l'image de sa représentation adjointe quotient  $ad : P \rightarrow GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  et  $(M, D)$  une paire. Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$ , et soient :

- $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe vérifiant  $E \times_P Q = \tilde{E}$
- $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$  un sous-ensemble discret de  $M$
- Une famille  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de voisinages disjoints des éléments de  $X$
- Une famille  $(\omega_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes sur chaque  $p^{-1}(U_\alpha)$  dans la fibre de chaque restriction  $\mathbb{E}|_{U_\alpha}$

Alors il existe un objet  $(E, \omega_1)$  de  $\mathcal{G}_{M, D}^{diff}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ , et des voisinages  $(U'_\alpha)_{\alpha \in I} \Subset (U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de chaque  $x_\alpha \in X$  tels que :

$$(E|_{U'_\alpha}, \omega_\alpha) = (E|_{U'_\alpha}, \omega_1) \quad (1.183)$$

pour tout  $\alpha \in I$ .

*Démonstration.* Quitte à restreindre les voisinages  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ , nous pouvons sans perte de généralité supposer qu'il existe pour tout  $\alpha \in I$  une section holomorphe  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$ . Par le Lemme 1.8.3.2 et le Théorème 1.2.1, il existe une réduction différentiable  $\hat{E}$  de  $E$  au sous-groupe  $G_0$  (Définition 1.8.3), et des voisinages  $(U'_\alpha)_{\alpha \in I} \Subset (U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de chaque  $x_\alpha \in X$  tels que pour tout  $\alpha \in I$  :

$$\hat{E}|_{U'_\alpha} = \sigma_\alpha(U'_\alpha) \cdot G_0 \quad (1.184)$$

Soit  $\hat{\mathfrak{g}} = Lie(\hat{G})$  (Définition 1.8.4). Par définition de  $G_0$  et par le point 2. du Lemme 1.8.3.2, pour tout  $\alpha \in I$ , la 1-forme différentiable  $\hat{\omega}_\alpha$  sur  $\hat{E}|_{U'_\alpha}$  définie par :

$$\hat{\omega}_\alpha = proj_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mathfrak{p}^+} \circ \omega_\alpha \quad (1.185)$$

est une  $(\hat{G}, G_0)$ -connexion de Cartan différentiable sur  $\hat{E}|_{U'_\alpha \setminus D}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_{U'_\alpha}$  par  $f^{diff}$ . De plus,  $P^+$  est distingué dans  $P$ , donc  $\tilde{\varphi}_\alpha = (\omega_\alpha - \hat{\omega}_\alpha) \circ \hat{\omega}_\alpha^{-1}$  est une fonction  $G_0$ -équivariante sur  $\hat{E}|_{U'_\alpha}$  à valeurs dans  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}^+)$ . Par la Proposition 1.1.2.1, elle équivaut donc à une section différentiable :

$$\varphi_\alpha = p_* \tilde{\varphi}_\alpha \quad (1.186)$$

de  $\hat{E}(Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}^+))$  sur  $U'_\alpha \setminus D$ .

Par ailleurs, notons  $\theta_0$  la solderform méromorphe sur  $\tilde{E}$  associée à  $\mathbb{E}$  (Définition 1.6.3) et  $\hat{\theta}_0 = \tilde{\pi}^* \theta_0$  où  $\tilde{\pi} : E \rightarrow \tilde{E}$  est la projection naturelle. Par la Proposition 1.6.1.2, nous avons pour tout  $\alpha \in I$  :

$$\hat{\omega}_\alpha = proj_{\hat{\mathfrak{g}}_0}^{\mathfrak{g}_0} \circ \omega_\alpha \oplus proj_{\hat{\mathfrak{g}}_0}^{\mathfrak{g}_-} \circ \omega_\alpha = \hat{\theta}_0 \oplus \tilde{\omega}_\alpha \quad (1.187)$$

où  $\tilde{\omega}_\alpha$  est une connexion  $G_0$ -principale différentiable sur  $\hat{E}|_{U'_\alpha \setminus D}$ . Le Théorème 1.2.1 implique qu'il existe des voisinages  $(U''_\alpha)_{\alpha \in I} \in (U'_\alpha)_{\alpha \in I}$  de chaque  $x_\alpha \in X$ , une connexion  $G_0$ -principale différentiable  $\tilde{\omega}$  sur  $\hat{E}|_{M \setminus D}$  telle que pour tout  $\alpha \in I$  :

$$\tilde{\omega}|_{\hat{E}|_{U''_\alpha \setminus D}} = \tilde{\omega}_\alpha \quad (1.188)$$

De plus, un fibré vectoriel complexe de rang  $r$  sur  $M$  induit un fibré réel de fibre  $\mathbb{C}^r$  sur la variété réelle sous-jacente, qui est solide au sens de N.Steenrod. Par le Théorème 12.2 de [47], il existe donc une section différentiable  $\varphi$  de  $\hat{E}(Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}^+))$  sur  $M \setminus D$ , avec pour tout  $\alpha \in I$  :

$$\varphi|_{U''_\alpha \setminus D} = \varphi_\alpha \quad (1.189)$$

Par le point 2. du Lemme 1.8.3.2, nous avons  $(\hat{G}, G_0) \subset (G, P)$  (Définition 1.4.24) et le Lemme 1.4.7.1 implique qu'il existe une  $(G, P)$ -connexion de Cartan différentiable  $\omega_0$  sur  $E \setminus D$  avec  $\omega_0|_{\tilde{E} \setminus D} = \hat{\omega}_0$ . Nous définissons alors  $\omega_1$  par  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega_1$  en reprenant les notations du Lemme 1.6.5.1.

Par construction, pour tout  $\alpha \in I$ , nous obtenons :

$$\omega_\alpha \xrightarrow{-\varphi_\alpha} \omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega_1 \quad (1.190)$$

d'où  $\omega_1|_{p^{-1}(U''_\alpha)} = \omega_\alpha$  par (1.188) et (1.189).  $\square$

En appliquant de plus le Lemme 1.8.3.1, puis la Proposition 2.3.2.1 à une famille vide de connexions de Cartan, nous obtenons :

**Corollaire 1.8.1.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe,  $Q$  l'image de sa représentation adjointe quotient  $\underline{ad} : P \rightarrow GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  et  $(M, D)$  une paire. Supposons qu'il existe une application holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  telle que  $\underline{ad} \circ s = Id_Q$ . Alors pour toute  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$  sur  $(M, D)$ , il existe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable sur  $(M, D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$  par  $f^{diff}$ .*

## Chapitre 2

# Problèmes d'équivalences pour certaines structures méromorphes

Nous allons étudier des généralisations du problème d'équivalence pour des structures géométriques étudiées par E. Cartan, N. Tanaka ([49]) ou encore T. Morimoto ([40]) à la catégorie méromorphe. Ces structures géométriques sont modélées sur un couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme dans la sous-section 1.4.5, et il existe une équivalence de catégories avec celle des  $(G, P)$ -géométries de Cartan dites *normales* (voir Définition 2.2.7), où  $(G, P)$  est la géométrie de Klein associée à  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  (voir Définition 1.4.17).

Nous retrouvons dans les deux premières sections l'analogie méromorphe de cette équivalence (Corollaire 2.2.2). Dans la dernière section, nous caractérisons les structures qui proviennent d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée et *normale* (Théorème 2.3.1) via l'équivalence précédente. Nous l'utilisons pour donner des exemples de structures qui sont induites par des géométries de Cartan holomorphes branchées comme dans la sous-section 1.6.2, mais sans représentant holomorphe branchée *normale* (Exemple 2.3.2 et Exemple 2.3.3).

### 2.1 Problème d'équivalence méromorphe et méthode pour sa résolution.

Dans cette section, nous fixons  $n \geq 1$  et un sous-groupe fermé  $Q \subset GL_n(\mathbb{C})$ , et nous définissons le *problème d'équivalence méromorphe* associé à une sous-catégorie de  $Q$ -structures méromorphes. Nous reprenons une partie de la méthode de A. Čap et J. Slovák pour obtenir une méthode générale de résolution de ce problème lorsque  $Q$  est l'image de la représentation adjointe quotient d'une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  (Définition 1.4.2). Nous obtiendrons ainsi l'étape cruciale pour la version méromorphe des résultats de N. Tanaka et T. Morimoto.

Par le Lemme 1.4.1.1, nous pouvons supposer que  $(G, P)$  est effectif ce que nous ferons. Nous faisons aussi l'hypothèse qu'il existe une application holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  telle que  $ad \circ s = Id_Q$ .

#### 2.1.1 Rappels sur le problème d'équivalence

Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés réelles de dimension  $n$ . Deux  $H$ -structures différentiables  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sur deux variétés réelles  $M_1$  et  $M_2$  sont dites *localement équivalentes* si et seulement si pour tout  $x \in M_1$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M_2$  qui est un isomorphisme entre les restrictions  $\tilde{E}_1|_U$

et  $\tilde{E}_2|_{\varphi(U)}$ . Le problème d'équivalence pour une sous-catégorie  $\bar{\mathcal{E}}$  de  $H$ -structures différentiables consiste à déterminer lorsque deux objets  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  de  $\bar{\mathcal{E}}$  sont localement équivalents. Dans plusieurs de ses travaux (voir [17], [18]), E. Cartan a proposé une méthode générale pour résoudre ce problème, connue sous le nom de *méthode des repères mobiles*.

Plus tard, I.Singer et S.Sternberg ont reformulé cette méthode ([46]) pour les groupes  $Q$  d'ordre fini au sens de E.Cartan (Définition 1.4.18). La première étape est la *prolongation* d'une  $Q$ -structure différentiable  $\tilde{E}$  sur une variété réelle  $M$  : on lui associe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan  $(E, \omega)$  particulière sur  $M$ , où  $(G, P)$  est une géométrie de Klein réelle telle que  $\underline{ad}(P) = Q$  (Définition 1.4.2). Le fait important est que si  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont deux  $Q$ -structures différentiables comme précédemment, et  $(E_1, \omega_1)$ ,  $(E_2, \omega_2)$  sont les géométries de Cartan associées, alors les automorphismes locaux entre  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont en bijection avec les automorphismes locaux entre  $(E_1, \omega_1)$  et  $(E_2, \omega_2)$ . Le problème est alors ramené à la question de déterminer lorsque deux géométries de Cartan sont localement isomorphes. Cette dernière a déjà été résolue par E. Cartan.

Dans [49], N.Tanaka a étendu cette méthode à d'autres structures. Il fixe un modèle  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  constitué d'une algèbre de Lie graduée  $\mathfrak{g}_-$  et un groupe  $G_0$  d'automorphismes de l'espace vectoriel  $gr(\mathfrak{g}_-)$ , avec l'hypothèse que  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  est d'ordre fini  $r_0 \geq 0$  (Définition 1.4.17) et que sa prolongation de Tanaka  $G$  (on note  $P$  le sous-groupe correspondant) est un groupe de Lie simple. Cela définit naturellement un sous-groupe  $G_0^\#$  (voir Définition 2.2.2), et il résout le problème d'équivalence pour des sous-catégories  $\bar{\mathcal{E}}$  de  $G_0^\#$ -structures dites *régulières* (voir Définition 2.2.3). La méthode diffère de la précédente car l'image  $Q = \underline{ad}(P)$  est différente de  $G_0^\#$  en général. Une étape est donc de se ramener à la prolongation de certaines  $Q$ -structures différentiables (régulières et normales, voir Définition 2.2.5) par un théorème de réduction (voir Lemme 3.8, [49]).

Dans [40], T. Morimoto ([40]) reformule la méthode de Tanaka comme une généralisation de celle de Singer et Sternberg. Il fixe  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme ci-dessus en affaiblissant l'hypothèse que sa prolongation de Tanaka  $G$  est simple. Nous avons vu que cela définit des sous-groupes  $(P^i)_{i \geq 0}$  de  $G$ , définis dans le Théorème 1.4.4. Une suite  $(\tilde{E}^{(r)})_{r=0, \dots, r_0+1}$  de fibrés principaux différentiables sur  $M$  est construite avec les propriétés suivantes. Pour tout  $r \geq 1$ ,  $\tilde{E}^{(r)}$  est un fibré  $P/P^{r+1}$ -principal différentiable sur  $M$ . Sa variété sous-jacente est filtrée, et  $\tilde{E}^{(r)}$  est une  $Q^{(r)} = P^r/P^{r+1}$ -réduction différentiable du fibré des bases de  $gr(T\tilde{E}^{(r-1)})$ . En particulier, les automorphismes locaux de variétés filtrées remontent de fibrés en fibrés, et le fibré  $\tilde{E}^{(r_0+1)}$  correspond à un parallélisme  $P = P^{r_0}$  équivariant sur  $\tilde{E}^{(r_0)}$  car  $Q^{(r_0)} = \{Id\}$  par définition de l'ordre de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$ . Ce parallélisme équivaut à une 1- $\mathfrak{g}$ -forme  $P$ -équivariante  $\omega$  sur  $\tilde{E}^{(r_0)}$  et on montre facilement qu'il s'agit d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable sur  $M$ . Un des avantages de cette formulation est que la résolution du problème d'équivalence se transpose directement dans la catégorie holomorphe. La méthode fait appel à de nombreux résultats intermédiaires. Nous ne savons pas comment l'étendre à la catégorie méromorphe.

Dans [14], A. Čap et J. Slovák donnent une nouvelle méthode pour résoudre le problème d'équivalence pour les catégories  $\bar{\mathcal{E}}$  étudiée par N. Tanaka et leurs analogues holomorphes (voir Théorème 3.1.14 et 3.1.18, [14]). Ils proposent une construction directe en terme de connexions de Cartan sur un fibré  $P$ -principal différentiable  $E$  abstrait sur la variété  $M$ . Elle utilise la surjectivité du foncteur  $\tilde{f}$  (voir sous-section 1.8.1 et Corollaire 1.8.1) et une étape de normalisation pour construire une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable particulière, appelée *normale*, dans la fibre de toute  $G_0^\#$ -structure différentiable. Cela résout la version différentiable du problème d'équivalence, et pour en déduire la version holomorphe,

un théorème d'holomorphie (voir [Théorème 2.1.2](#)) est prouvé. De nombreuses étapes de cette méthode s'étendent à toutes les catégories de  $Q$ -structures lorsque  $Q$  est l'image de la représentation adjointe quotient d'une géométrie de Klein (réelle ou complexe)  $(G, P)$ .

### 2.1.2 Problème d'équivalence méromorphe

Deux  $H$ -structures méromorphes  $S_1$  et  $S_2$  sur deux paires  $(M_1, D_1)$  et  $(M_2, D_2)$  ([Définition 1.2.7](#)) sont localement équivalentes si pour tout  $x \in M_1$ , il existe un voisinage  $U \subset M_1$  de  $x$  et une isométrie  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  entre  $S_1|_U$  et  $S_2|_U$  ([Définition 1.1.19](#)). Le *problème d'équivalence méromorphe* associé à une sous-catégorie  $\mathcal{S}$  de  $H$ -structures méromorphes consiste à donner une méthode pour déterminer lorsque deux objets  $S_1, S_2$  de  $\mathcal{S}$  sont localement équivalentes.

Pour le problème d'équivalence associé à une sous-catégorie  $\bar{\mathcal{E}}$  de  $H$ -structures différentiables, nous avons vu qu'une méthode souvent employée consiste à trouver une sous-catégorie de  $(G, P)$ -géométries de Cartan différentiables, telles que la restriction de  $\bar{f}$  à cette dernière est une équivalence de catégorie vers  $\bar{\mathcal{E}}$ . Dans la catégorie méromorphe, nous pouvons raisonner directement sur les  $H$ -extensions méromorphes ([Lemme 1.6.2.2](#)) pour prouver une équivalence de catégories. Nous définissons donc  $\mathcal{E}$  comme la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes sur une paire  $(M, D)$ , dont la restriction à  $M \setminus D$  est un objet de  $\bar{\mathcal{E}}$  (voir [Définition 1.6.5](#)).

Nous dirons que deux objets  $\mathbb{E}_1 \in \mathcal{E}_{M_1, D_1}$  et  $\mathbb{E}_2 \in \mathcal{E}_{M_2, D_2}$  sont localement équivalentes si et seulement si pour tout  $x \in M_1$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_1$  et une isomorphisme  $\tilde{\Psi} : \mathbb{E}_1|_U \simeq \mathbb{E}_2|_{\varphi(U)}$  où  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M_2$  est un biholomorphisme local vérifiant  $\varphi(D_1 \cap U) \subset D_2$ . Pour résoudre le problème d'équivalence associé à  $\mathcal{S}$ , nous nous ramenons donc au *problème d'équivalence méromorphe* associé à  $\mathcal{E}$  qui consiste en la question suivante :

**Question 2.1.1.** *Soient  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  deux objets de  $\mathcal{E}$ . Sont-ils localement équivalents ?*

### 2.1.3 Version méromorphe de la méthode de A.Căp et J.Slovák

Nous expliquons maintenant que lorsque  $H = Q$  est l'image de la représentation adjointe de la géométrie de Klein  $(G, P)$ , ce problème admet une formulation équivalente en termes de catégories.

**Définition 2.1.1.** *Soit  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie de  $Q$ -extensions méromorphes,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{diff}$  comme dans la [Définition 1.6.4](#) et la [Définition 1.8.1](#).*

1. *Une sous-catégorie  $\mathcal{G}^{norm}$  de  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  de  $\mathcal{G}^{diff}$ ) est dite normale si et seulement si elle est stable par isomorphismes et si la condition suivante est satisfaite. Pour toute paire  $(M, D)$  et toute  $Q$ -extension méromorphe  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}_{M, D}$  ([Définition 1.6.1](#)) la fibre de  $\mathbb{E}$  par  $f$  (resp. par  $f^{diff}$ ) intersecte  $\mathcal{G}^{norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$ ) en une unique classe d'isomorphismes.*
2. *Soit  $\mathcal{G}^{norm}$  une sous-catégorie normale (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$ ). Un foncteur de normalisation différentiable est un foncteur  $h^{diff} : \mathcal{G}^{diff} \rightarrow \mathcal{G}^{diff, norm}$  préservant les fibres de  $f^{diff}$ . Il est holomorphe si il est à valeurs dans  $\mathcal{G}^{norm}$ .*

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff}$ ) comme dans la [Définition 2.1.1](#). Soit  $\mathcal{G}^{norm}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{G}^{diff}$ ). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La restriction de  $f$  (resp.  $f^{diff}$ ) à  $\mathcal{G}^{norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$ ) est une équivalence de catégories vers  $\mathcal{E}$ .*

(ii) La sous-catégorie  $\mathcal{G}^{norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff,norm}$ ) est normale et il existe un foncteur de normalisation (resp. différentiable) pour cette dernière.

*Démonstration.* Prouvons d'abord le sens direct. Comme la restriction  $f|_{\mathcal{G}^{norm}}$  (resp. la restriction de  $f^{diff}$ ) est une équivalence de catégories, nous avons le fait suivant. Soit  $\mathbb{E}$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ . Soient  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$  deux objets de  $\mathcal{G}_{M,D}^{norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff,norm}$ ) dans sa fibre par  $f$  (resp.  $f^{diff}$ ). Alors comme  $f|_{\mathcal{G}^{norm}}$  (resp.  $f^{diff}|_{\mathcal{G}^{diff,norm}}$ ) est plein, l'identité de  $\mathcal{E}$  se relève en une flèche entre  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$ . De plus, l'axiome du choix montre qu'il existe un pseudo-inverse  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}^{norm}$  (resp.  $g^{diff} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}^{diff,norm}$ ) de la restriction  $f|_{\mathcal{G}^{norm}}$  (resp.  $f^{diff}|_{\mathcal{G}^{diff,norm}}$ ). Nous pouvons donc considérer  $h = g \circ f$  (resp.  $h^{diff} = g^{diff} \circ f^{diff}$ ) qui est un foncteur de normalisation (resp. différentiable).

Prouvons le sens indirect. Le foncteur  $f^{diff}$  est essentiellement surjectif par l'hypothèse (H2) et le [Corollaire 1.8.1](#). De plus, si il existe un foncteur de normalisation holomorphe  $h$  ([Définition 2.1.1](#)), alors  $f^{diff} = f \circ h$  donc  $f$  est également essentiellement surjectif, ainsi que sa restriction à la sous-catégorie normale  $\mathcal{G}^{norm}$ . Ces foncteurs sont tous fidèles par le [Corollaire 1.5.1](#). Il reste à prouver que la restriction de  $f^{diff}$  (resp.  $f$ ) à la sous-catégorie normale est un foncteur plein. Fixons une flèche  $\tilde{\Psi}$  entre deux objets  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  sur deux paires  $(M, D)$  et  $(M', D')$  ([Définition 1.6.1](#)), et notons  $\varphi : M \rightarrow M'$  le biholomorphisme couvert par  $\tilde{\Psi}$ . Fixons aussi  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$  deux géométries de Cartan méromorphes appartenant à  $\mathcal{G}_{M,D}^{norm}$  et  $\mathcal{G}_{M',D'}^{norm}$  et dans les fibres respectives des deux objets précédents. Nous devons prouver qu'il existe une flèche  $\Psi : E \times \tilde{D} \simeq E' \times \tilde{D}'$  entre les deux géométries, telle que  $f(\Psi) = \tilde{\Psi}$ . Quitte à considérer  $\mathbb{E}'_2 = \varphi^* \mathbb{E}_2$  et  $(E'', \omega''_0) = \varphi^*(E', \omega'_0)$ , nous pouvons sans perte de généralité considérer que  $(M, D) = (M', D')$ . Nous devons donc construire  $\Psi$  tel que  $\Psi(Q) = \tilde{\Psi}$  et  $\Psi^* \omega'_0 = \omega_0$ .

Commençons par prouver que l'on peut relever  $\tilde{\Psi}$  localement en des isomorphisme  $\Psi_U : E|_U \simeq E'|_U$ , i.e  $\Psi_U(Q) = \tilde{\Psi}|_U$ . Fixons pour cela  $x \in M$  et une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  sur un voisinage  $U$  de  $x$ . Considérons alors  $\tilde{\sigma} = [\sigma]_{\tilde{E}}$  ainsi que  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\Psi} \circ \tilde{\sigma}$ . Quitte à restreindre  $U$ ,  $E'|_U$  est trivial et le scindage  $s : Q \rightarrow P$  permet de construire une section holomorphe  $\sigma' : U \rightarrow E'$  telle que  $\tilde{\sigma}' = [\sigma']_{\tilde{E}'}$ . Nous considérons alors

$$\psi_U : E|_U \simeq E'|_U \quad (2.1)$$

l'unique isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux holomorphes tel que  $\psi_U \circ \sigma = \sigma'$ . Par construction  $\psi_U(Q) = \tilde{\Psi}|_U$ . Or  $\omega''_0 := \psi_U^* \omega'_0$  est une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe sur  $E|_U$ , elle appartient par définition à  $\mathcal{G}_{U,D}^{norm}$ , et à la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E}|_U)$ . Par la propriété (ii) de la [Définition 2.1.1](#), il existe un automorphisme de fibré  $P$ -principal holomorphe  $\varphi_U$  sur  $E|_{U \setminus D}$  tel que  $\varphi_U^* \omega''_0 = \omega_0$ . Nous posons :

$$\Psi_U = \psi_U \circ \varphi_U \quad (2.2)$$

Il s'agit à nouveau d'un relevé de  $\tilde{\Psi}|_U$ , avec la propriété supplémentaire que  $\Psi_U^* \omega'_0 = \omega_0$ .

Cette propriété nous permet de montrer que les relevés  $(\Psi_U)_{x \in M}$  ainsi obtenus se recollent en une flèche  $\Psi$  de  $\mathcal{G}_{M,D}$  entre  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$ . En effet, soient  $U, U'$  munis de deux relevés  $\Psi_U, \Psi_{U'}$  comme en [\(2.2\)](#). Alors  $\Psi_{U,U'} := \Psi_U^{-1}|_{U \cap U'} \circ \Psi_{U'}|_{U \cap U'}$  est un automorphisme du fibré  $P$ -principal holomorphe  $E|_{U \cap U' \setminus D}$ , couvrant l'identité et tel que  $\Psi_{U,U'}^* \omega_0 = \omega_0$ . Par la [Corollaire 1.5.1](#), on obtient que  $\Psi_{U,U'}$  est l'identité, donc  $\Psi_U$  et  $\Psi_{U'}$  coïncident sur l'intersection. Nous avons donc construit l'isomorphisme  $\Psi$  requis entre  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$ .  $\square$

## 2.1.4 Théorème d'holomorphic

Reprenons les définitions précédentes et supposons qu'il existe un foncteur de normalisation différentiable  $h^{diff} : \mathcal{G}^{diff} \rightarrow \mathcal{G}^{diff,norm}$ . Pour résoudre le *problème d'équivalence*

méromorphe, il nous reste alors à prouver qu'il s'agit d'un foncteur de normalisation holomorphe (Définition 2.1.1 et Théorème 2.1.1). Dans [14], les auteurs prouvent pour cela un théorème d'holomorphie, dont nous donnons une version méromorphe ci-dessous.

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe effective,  $Q = \underline{ad}(P)$  (Définition 1.4.2) et  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie de  $Q$ -extensions méromorphes. Soient  $\mathcal{G}^{diff}$ , et  $\mathcal{G}$  les antécédents différentiables et holomorphes correspondants (Définition 1.8.1 et Définition 1.6.4). Soit  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  une sous-catégorie normale (Définition 2.1.1) et  $\mathcal{G}^{norm} = \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{diff, norm}$ .

**Théorème 2.1.2.** *On se place dans la situation décrite ci-dessus. Supposons que pour toute paire  $(M, D)$ , tout objet  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}_{M, D}$  et tout  $x \in M$ , il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  et  $(E'_U, \omega'_0) \in f^{-1}(\mathbb{E}|_U) \cap \mathcal{G}_{U, D}^{norm}$ . Alors tout foncteur de normalisation différentiable  $h^{diff} : \mathcal{G}^{diff} \rightarrow \mathcal{G}^{diff, norm}$  est un foncteur de normalisation holomorphe (Définition 2.1.1).*

*Démonstration.* Fixons un foncteur de normalisation différentiable  $h^{diff}$ , et une paire  $(M, D)$ . Soit  $(E, \omega_1) \in \mathcal{G}_{M, D}^{diff}$  et  $(E, \omega_0) \in \mathcal{G}_{M, D}^{diff, norm}$  son image par  $h^{diff}$ . Par le Lemme 1.8.2.1, il suffit de prouver que la représentation de courbure  $k_{\omega_0}$  de  $(E, \omega_0)$  coïncide avec sa composante de type  $(2, 0)$  (voir Définition 1.8.2).

Fixons  $x \in M$ . Par l'hypothèse, il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et  $(E'_U, \omega'_0) \in \mathcal{G}_{U, D}^{norm}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$ . Comme  $(E|_U, \omega_0) \in \mathcal{G}_{U, D}^{diff, norm}$  est aussi dans la fibre de cet objet, il existe une flèche  $\Psi$  dans  $\mathcal{G}^{diff}$  entre  $(E|_U, \omega_0)$  et  $(E'_U, \omega'_0)$ . En particulier :

$$k_{\omega_0}|_{p^{-1}(U)} = k_{\omega'_0} \circ \Psi \quad (2.3)$$

donc  $k_{\omega_0}$  coïncide avec sa composante de type  $(2, 0)$ . Par conséquent,  $(E|_U, \omega_0) \in \mathcal{G}_{U, D}$ . Ceci étant vrai quelquesoit  $x \in M$ , nous obtenons  $(E, \omega_0) \in \mathcal{G}_{M, D}^{norm}$ .  $\square$

## 2.2 Problèmes d'équivalences méromorphe pour certains modèles gradués

Dans cette section, nous fixons un couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  formé d'une algèbre de Lie graduée  $\mathfrak{g}_- = (\mathfrak{g}_{-, i})_{i=-k, \dots, -1}$  ( $k \geq 1$ ) et un sous-groupe  $G_0 \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_-)$  d'automorphismes de  $\mathfrak{g}_-$  stabilisant chaque élément de la graduation. Nous définissons le sous-groupe  $G_0^\# \subset GL(\mathfrak{g}_-)$  associé par N. Tanaka à ce couple. Sous des hypothèses similaires à celles utilisées par T. Morimoto pour généraliser les résultats de N. Tanaka, nous résolvons le problème d'équivalence méromorphe associé à une catégorie  $\mathcal{E}^\#$  de  $G_0^\#$ -extensions méromorphes dites  $\mathfrak{g}_-$ -régulières (Définition 2.2.3) : ce sont les analogues méromorphes des structures étudiées par N. Tanaka et T. Morimoto.

Le plan de cette section est le suivant : nous présentons d'abord les hypothèses sur  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  et définissons une géométrie de Klein  $(G, P)$  associée à ce couple par N. Tanaka. Puis nous définissons la catégorie  $\mathcal{E}^\#$  d'extensions méromorphes pour laquelle nous voulons résoudre le problème d'équivalence méromorphe. La résolution est divisée en deux étapes : on prouve d'abord, de manière analogue au Lemme 3.8 de [49], une équivalence de catégories entre  $\mathcal{E}^\#$  et une catégorie  $\mathcal{E}$  de  $Q$ -extensions méromorphes dites normales (Définition 2.2.5). On résout enfin le problème d'équivalence associé à une catégorie  $\mathcal{E}$  de  $Q$ -extensions méromorphes, où  $Q$  est l'image de la représentation adjointe quotient de  $(G, P)$ , en utilisant les résultats de la section 2.1. L'équivalence obtenue est réinterprétée en terme de structures méromorphes grâce au Lemme 1.6.2.2.

### 2.2.1 Hypothèses et notations

Fixons un couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme ci-dessus. Nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

- (H1)  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  est d'ordre fini  $r_0 \geq 0$  (Définition 1.4.17) et on note  $(G, P)$  la géométrie de Klein associée, ainsi que  $Q$  l'image de sa représentation adjointe quotient  $\underline{ad} : P \rightarrow GL(\mathfrak{g}_-)$ .
- (H2) Il existe une application holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  telle que  $\underline{ad} \circ s = Id_Q$ .
- (H3) Il existe des supplémentaires  $(\mathfrak{m}_l)_{l \geq 0}$  et  $(\mathfrak{n}_l)_{l \geq 0}$  comme dans la Définition 1.4.15 qui sont des sous-représentations du  $P$ -module  $\mathbb{W}$ .

Ces hypothèses sont par exemple vérifiées lorsque  $(\mathfrak{g}_-, G_0) = (\mathbb{C}^n, H)$  où  $H$  est le groupe orthogonal ou conforme complexe (en utilisant que  $G_0 = Q = H$  et l'Exemple 1.2.1). Plus généralement, les hypothèses sont vérifiées lorsque  $(G, P)$  est parabolique avec  $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l = \{0\}$  pour tout  $l \leq 0$ , grâce au Lemme 1.4.5.2 (pour (H1)), au Corollaire 1.4.1 (pour (H3)) et au résultat suivant (pour (H2)) dû à N. Tanaka ([49], Lemme 1.9) :

**Lemme 2.2.1.1.** *Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semi-simple,  $P$  un sous-groupe parabolique et  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  la graduation correspondante (Théorème 1.4.2). Alors le noyau  $P' = \ker(\underline{ad})$  coïncide avec  $G^k = \exp_G(\mathfrak{g}^k)$ . En particulier,  $\underline{ad}$  est un biholomorphisme entre  $\exp_G(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathfrak{g}_i)$  et  $Q$ .*

Par exemple cela est le cas pour la géométrie de Klein complexe conforme de dimension  $n \geq 3$  (Définition 1.4.20). Il existe des exemples de couples  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  vérifiant ces hypothèses mais avec  $(G, P)$  non parabolique (voir Remarque 3.10.4, [40]).

Fixons quelques notations pour le reste de cette section. Nous noterons  $\partial$  la différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative associée à la représentation adjointe  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$  (Équation 1.58). Nous noterons

$$(\mathbb{W}_l)_{l \in \mathbb{Z}} \text{ et } (\mathbb{H}_l)_{l \in \mathbb{Z}} \quad (2.4)$$

les graduations de  $\mathbb{W}$  et de  $\mathbb{H} = \mathbb{H}$  induites par la graduation de  $\mathfrak{g}$  (Définition 1.4.14). Nous noterons aussi :

$$\mathbb{H}_\mathfrak{p}^l = \mathbb{H}^l \cap \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}) \quad (2.5)$$

Nous utiliserons la même notation  $\pi_l$  pour désigner la projection sur chacune des composantes des graduations. Nous notons également  $r_0 \geq 0$  l'entier minimal tel que :

$$\mathbb{W} \subset \bigoplus_{l=0}^{r_0} \mathbb{W}_l \quad (2.6)$$

i.e le degré homogène maximal d'un élément de  $\mathbb{W}$ . Nous définissons :

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{l=1}^{r_0} \mathfrak{n}_l \subset \mathbb{W} \quad (2.7)$$

L'hypothèse (H2) permet d'appliquer le Corollaire 1.8.1.

L'hypothèse (H3) permet d'obtenir une version fibrée des morphismes de scindages  $\chi_l$  de la cohomologie relative associée à  $(G, P)$  et aux supplémentaires  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  (Définition 1.4.15). En effet, le quotient  $P/G_0$  est canoniquement isomorphe au sous-groupe  $P^+$  (voir Définition 1.4.9). De plus, par l'hypothèse (H1), l'espace topologique sous-jacent à  $P^+$  est isomorphe à celui du groupe  $Q^{(r_0+1)}$  de la Proposition 1.4.5.1. Ce dernier est le noyau d'une application linéaire  $\partial^{(r_0)}$ , donc  $P/G_0$  est homéomorphe à un espace vectoriel, donc solide. Par le Théorème 1.2.1, tout fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  admet une réduction différentiable  $\hat{E} \xrightarrow{\hat{p}} M$  au sous-groupe  $G_0$ . Comme  $G_0$  est le stabilisateur des sous espaces

$(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , pour tout  $l \geq 0$ ,  $\mathbb{W}_l$  et  $\mathbb{H}_l$  sont des sous-représentations de  $G_0$ . On peut donc considérer les  $C_M^\infty$ -modules  $\hat{E}(\mathbb{W}_l)$  et  $\hat{E}(\mathbb{H}_l)$  (Définition 1.1.9), et la réduction différentiable  $\hat{E}$  définit un morphisme de  $C_M^\infty$ -modules  $\bar{\chi}_l : \hat{E}(\mathbb{W}_l) \rightarrow \hat{E}(\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1})$  comme suit :

$$\bar{\chi}_l = \hat{E}(Id_{C_E^\infty} \otimes \chi_l) \quad (2.8)$$

où l'on identifie  $\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1}$  et  $\mathbb{H}_l$  via la projection.

**Proposition 2.2.1.1.** *Soit  $\hat{E}$  comme ci-dessus. Pour tout  $l \geq 0$ , le morphisme  $\bar{\chi}_l : \hat{E}(\mathbb{W}_l) \rightarrow \hat{E}(\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1})$  défini par (3.31) possède la propriété suivante. Pour toute section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  à valeurs dans  $\hat{E}$ , en notant  $\psi_\sigma^1$  et  $\psi_\sigma^2$  les trivialisations de  $\hat{E}(\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1})$  et  $\hat{E}(\mathbb{W}_l)$  associées à  $\sigma$  (Définition 1.1.11), on a le diagramme commutatif ci-dessous :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}(\mathbb{W}_l)|_U & \xrightarrow{\bar{\chi}} & \hat{E}(\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1}) \\ \psi_\sigma^2 \downarrow & & \downarrow \psi_\sigma^1 \\ C_U^\infty \otimes \mathbb{W}_l & \xrightarrow{Id \otimes \chi_l} & C_U^\infty \otimes \mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1} \end{array} \quad (2.9)$$

En particulier  $\bar{\chi}_l|_U$  préserve les sous-faisceaux des sections holomorphes.

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  comme dans l'énoncé. Pour toute section  $\varphi$  de  $\hat{E}(\mathbb{H}^l/\mathbb{H}^{l+1})$ , on a alors :

$$\psi_\sigma^1(\varphi) = \hat{p}^* \varphi \circ \sigma$$

d'où (2.9) car le morphisme de  $C_E^\infty$ -modules  $\hat{p}^* \bar{\chi}$  correspondant à  $\bar{\chi}$  (Lemme 1.1.2.1) coïncide avec  $Id_{C_E^\infty} \otimes \chi_l$  par définition.  $\square$

Ce morphisme sera l'outil principal pour construire un foncteur de normalisation (Définition 2.1.1).

## 2.2.2 Lemme préliminaire

Soit  $(M, D)$  une paire. Pour pouvoir prouver l'existence et l'unicité à isomorphisme près d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe normale dans la fibre de tout objet  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}_{M, D}$ , nous utiliseront le résultat suivant :

**Lemme 2.2.2.1.** *Soit  $(M, D)$  une paire,  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe et  $U \subset M$  un ouvert. Soit  $l \geq 0$  un entier.*

1. *Soit  $\mathcal{A}$  une 1-forme différentiable sur  $U \setminus D$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}_-$ . Supposons que le morphisme de  $TU \setminus D$  dans  $C^\infty(U \setminus D, \mathfrak{g}_-)$  correspondant admet un inverse  $\mathcal{A}^{-1}$ , et que*

$$d\mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})$$

*est à valeurs dans  $\mathbb{W}^1$ . Alors pour toute fonction infiniment différentiable  $C_l$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{H}^l$ , les fonctions  $d(C_l \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})$  et  $[C_l, C_l]_{\mathfrak{g}}$  sont à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l+1}$ .*

2. *Soient  $\omega_0$  et  $\omega'_0$  deux  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes régulières sur  $E$  telles que  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega'_0$  avec  $\varphi$  une section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^l)$ . Alors :  $\pi_{\leq l}(k_{\omega_0}) = \pi_{\leq l}(k_{\omega'_0}) + \partial_l \tilde{\varphi}$  où  $\tilde{\varphi} = p^* \varphi$  et  $\pi_{\leq l}$  est la projection de la Définition 1.4.14.*

*Démonstration.* 1. Pour la seconde fonction, le résultat découle directement de l'homogénéité de  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$  (par définition d'une graduation). Pour la première, remarquons que la formule de Lie-Cartan se réécrit :

$$d(\mathcal{C}_l \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) = \text{Alt}(d\mathcal{C}_l \circ (\text{Id} \otimes \mathcal{A}^{-1})) - \mathcal{C}_l \circ d\mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) \quad (2.10)$$

où  $\text{Alt}$  est le morphisme d'alternation (Équation 1.115). En particulier, si  $A \in \mathfrak{g}_i$  et  $B \in \mathfrak{g}_j$  où  $i, j < 0$ , alors :

$$\text{Alt}(d\mathcal{C}_l \circ (\text{Id} \otimes \mathcal{A}^{-1})) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}^{-1}(A)}\mathcal{C}_1(B) - \mathcal{L}_{\mathcal{A}^{-1}(B)}\mathcal{C}_1(A) \quad (2.11)$$

est à valeurs dans  $\mathfrak{g}^k$  avec  $k \geq \min(i, j) + l$ , donc en particulier  $k \geq i + j + l + 1$ . Par l'hypothèse sur  $\mathcal{A}$ ,  $d\mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})(A, B)$  est à valeurs dans  $\mathfrak{g}^{i+j+1}$ , donc  $\mathcal{C}_1 \circ d\mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})(A, B)$  est à valeurs dans  $\mathfrak{g}^{i+j+l+1}$ . Le résultat s'en suit.

2. Cette formule découle directement du point 1. et du Lemme 1.5.3.3

□

Il permet de faire des preuves par récurrence sur le degré homogène.

### 2.2.3 Extensions régulières et géométries de Cartan régulières

Nous allons définir une catégorie  $\mathcal{E}^\#$  formée de  $G_0^\#$ -extensions méromorphes et pour laquelle on résout le problème d'équivalence méromorphe.

Soit  $H$  un sous-groupe de  $GL(\mathfrak{g}_-)$  préservant la filtration définie par :

$$\mathfrak{g}_-^i = \bigoplus_{j=i}^{-1} \mathfrak{g}_j \quad (2.12)$$

Fixons une base graduée  $(\mathbf{e}_j^i)_{\substack{i=-k', \dots, -1 \\ j=1, \dots, n_i}}$  de  $\mathfrak{g}_-$  (Définition 1.4.11). Nous pouvons donc identifier  $H$  à un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  et donc parler de  $H$ -extension méromorphe sur une paire  $(M, D)$  (Définition 1.6.1). Fixons une paire  $(M, D)$  et considérons une  $H$ -extension méromorphe  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  sur cette dernière (voir Définition 1.6.1). Le  $\mathcal{O}_M$ -module  $\mathcal{E}$  est muni d'une filtration par des sous-modules localement libres  $(\mathcal{E}^i)_{i=-k, \dots, -1}$  définis par :

$$\mathcal{E}^i = \tilde{E}(\mathfrak{g}_-^i) \quad (2.13)$$

Le sous-groupe  $H^+ \subset H$  des automorphismes d'espace filtré dont la composante homogène de degré 0 est l'identité, est normal dans  $H$ . Donc  $H_0 = H/H^+$  est un groupe et nous obtenons une réduction du fibré des bases de  $gr(\mathcal{E})$  au sous-groupe  $H_0$  :

$$E^0 = \tilde{E} \times_H H_0 \quad (2.14)$$

La filtration (2.13) et l'isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules  $\phi_0 : TM[*D] \longrightarrow \mathcal{E}[*D]$  définissent une filtration  $(\mathcal{T}^i)_{\substack{i=-k, \dots, -1 \\ j=1, \dots, i}}$  de  $TM[*D]$  par des sous modules localement libres :

$$\mathcal{T}^i = \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_M[*D] \otimes \mathcal{E}^i) \quad (2.15)$$

En particulier,  $\phi_0$  est morphisme de modules filtrés et on notera  $gr(\phi_0)$  sa composante homogène de degré 0, qui est donc un isomorphisme entre  $gr(TM[*D])$  et  $gr(\mathcal{E})[*D]$ .

La structure géométrique holomorphe correspondant à la restriction d'une  $H$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$  à  $M \setminus D$  est donc celle d'une filtration de son fibré tangent  $TM \setminus$

$D$  par les sous-fibrés  $\mathcal{T}^i|_{M \setminus D}$  définis par (2.15). Dans la suite, nous caractérisons les  $H$ -extensions méromorphes sur  $(M, D)$  induisant une structure de variété filtrée sur  $M \setminus D$  (Définition 1.4.22) et de fibré en algèbres de Lie de fibre  $\mathfrak{g}_-$  sur  $TM \setminus D$  (Définition 1.4.23). Les dernières seront appelées  $H$ -extension  $\mathfrak{g}_-$ -régulières.

Comme  $\mathfrak{g}_-$  est une représentation du groupe de Lie  $H \times \mathfrak{g}_-$ , dont l'algèbre de Lie est filtrée, les  $H$ -modules  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  et  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-} = \mathfrak{g}_-^* \wedge \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-$  admettent des graduations par  $H_0$ -modules  $(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-))_{l \in \mathbb{Z}}$  et  $(\mathbb{W}_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  par le degré homogène (voir Définition 1.4.14). Nous noterons  $\pi_l$  les projections correspondantes et  $\pi_{\leq l}$  la projection sur les composantes de degré  $\leq l$  pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ . Les filtrations  $(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-))_{l \geq 0}$  et  $(\mathbb{W}^l)_{l \geq 0}$  correspondantes sont des filtrations par  $H$ -modules, et :

**Lemme 2.2.3.1.** *Soit  $M$  une variété complexe,  $(\phi_0, \tilde{E})$  une  $H$ -extension méromorphe sur  $(M, D)$  et  $l_0 \leq 1$ . Soit  $U \subset M$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une section holomorphe  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \tilde{E}$  dont la fonction de structure (Définition 1.7.4)  $k^{\tilde{\sigma}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l_0}$ .*
- (ii) *Pour toute section holomorphe  $\tilde{\sigma}' : U \rightarrow \tilde{E}$ ,  $k^{\tilde{\sigma}'}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l_0}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\sigma}$  une section holomorphe de  $\tilde{E}$  sur  $U \subset M$  vérifiant (i), et  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \cdot h$  une seconde section holomorphe sur  $U$ , où  $h$  est une fonction holomorphe sur  $U$  à valeurs dans  $H$ . Par le Lemme 1.7.3.3, les fonctions de structures  $k^{\tilde{\sigma}}$  et  $k^{\tilde{\sigma}'}$  vérifient :

$$k^{\tilde{\sigma}'} = h^{-1} \cdot [k^{\tilde{\sigma}} + \partial \mathcal{B}] \quad (2.16)$$

où :  $\mathcal{B} = (h^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1})$  est à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)^1$ . En particulier,  $\partial \mathcal{B}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^1$ , et  $\mathbb{W}^{l_0}$  est un  $H$ -module. Donc  $k^{\tilde{\sigma}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l_0}$  si et seulement si cela est vrai pour  $k^{\tilde{\sigma}'}$ . Donc la propriété (i) ne dépend que de  $\mathbb{E}$ .  $\square$

Par le Lemme 2.2.3.1, il existe donc un entier maximal  $l_0 \leq 1$  tel que pour toute section holomorphe (resp. différentiable)  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$ ,  $k^{\tilde{\sigma}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l_0}$ . Nous le noterons  $l_0(\mathbb{E})$ .

**Lemme 2.2.3.2.** *Soit  $\mathbb{E}$  comme ci-dessus et  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{E}} = \phi_0([\phi_0^{-1}, \phi_0^{-1}])$ .*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $l_0(\mathbb{E}) \geq 0$
- (ii) *Pour tout  $i, j \in \{-k', \dots, -1\}$ ,  $[\mathcal{E}^i, \mathcal{E}^j]_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}^{i+j}[\star D]$*
- (iii) *La restriction  $(\mathcal{T}^i)_{i=-k', \dots, -1}$  de la filtration (2.15) à  $M \setminus D$  équipe cette dernière d'une structure de variété filtrée.*

2. *Dans la situation 1., les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$\text{gr}_0(k^{\tilde{\sigma}})$  est holomorphe (resp. différentiable et définie sur  $U$ ) pour toute section holomorphe (resp. différentiable)  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  sur un ouvert  $U \subset M$ .*
- (ii)  *$[\mathcal{E}^i, \mathcal{E}^j]_{\mathcal{E}}$  est inclus dans le sous  $\mathcal{O}_M$ -module engendré par  $\mathcal{E}^{i+j}$  et  $\mathcal{O}_M[\star D] \otimes \mathcal{E}^{i+j+1}$ .*

*Démonstration.* 1. L'équivalence entre (ii) et (iii) est conséquence directe de la définition de  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{E}}$ . L'équivalence entre (i) et (ii) s'obtient comme suit. Soit  $\tilde{\sigma}$  une section holomorphe de  $\tilde{E}$  sur  $U$  et  $(\bar{s}_j^i)_{i=-k', \dots, -1}$  la base géométrique filtrée associée. Alors pour tout  $i = -k', \dots, -1$ ,  $\mathcal{E}^i|_U$  est le sous-module engendré par  $(\bar{s}_j^{i'})_{i'=i, \dots, -1}$ . Par définition de la fonction de structure et de  $l_0(\mathbb{E})$ , nous avons :

$$[\bar{s}_j^i, \bar{s}_{j'}^{i'}]_{\mathcal{E}} = \sum_{l \geq l_0(\mathbb{E})} \sum_{\substack{(i'', j'') \\ i''=i+i'+l}} \mathbf{e}_{j''}^{i''*} (k^{\tilde{\sigma}}(\mathbf{e}_j^i, \mathbf{e}_{j'}^{i'})) \bar{s}_{j''}^{i''} \mod \mathcal{E}^{i+i'+l+1}[\star D]|_U \quad (2.17)$$

L'équivalence en découle directement.

2. Il s'agit d'une conséquence directe de (2.17).  $\square$

Supposons que l'hypothèse du point 2. dans le Lemme 2.2.3.2 est vérifiée. Alors le gradué  $gr(\mathcal{E})$  associé à  $(\mathcal{E}^i)_{i=-k, \dots, -1}$  est un module localement libre et il est équipé d'un crochet  $gr[\cdot, \cdot]_{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{O}_M$ -modules. Par ailleurs, en utilisant la formule de Leibniz, nous obtenons directement qu'il induit un crochet de fibré vectoriel sur  $gr(\mathcal{E})$ , que nous noterons encore  $gr[\cdot, \cdot]_{\mathcal{E}}$

**Définition 2.2.1.** Soit  $\mathbb{E}$  une  $H$ -extension méromorphe (resp. différentiable) sur  $(M, D)$  vérifiant l'hypothèse 2. du Lemme 2.2.3.2. Le couple  $(gr(\mathcal{E}), gr[\cdot, \cdot]_{\mathcal{E}})$  défini ci-dessus est appelé fibré des symboles de  $\mathbb{E}$ .

**Lemme 2.2.3.3.** Soit  $\mathbb{E}$  comme dans le point 2. du Lemme 2.2.3.2. Alors les assertions suivantes son équivalentes :

(i)  $l_0(\mathbb{E}) \geq 1$

(ii) Le fibré des symboles de  $\mathbb{E}$  (Définition 2.2.1) est un fibré d'algèbres de Lie localement isomorphe à  $(U \times \mathfrak{g}_-, (Id_U, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}))$ .

*Démonstration.* Fixons un ouvert  $U \subset M$  muni d'une section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  et considérons la base géométrique locale filtrée  $(\tilde{s}_j^i)_{i=-k', \dots, -1}$  correspondante. Alors la formule Équation 2.17 montre que la trivialisatoin locale  $\psi_{\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}_-)$  de  $\mathcal{E}|_U$  correspondant à  $\tilde{\sigma}$  est un isomorphisme de fibrés d'algèbres de Lie vers  $(U \times \mathfrak{g}_-, (Id_U, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}))$  dès que  $l_0(\mathbb{E}) \geq 1$ .  $\square$

**Remarque 2.2.3.1.** Les résultats des Lemme 2.2.3.2 et Lemme 2.2.3.3 restent vrai en remplaçant  $\mathbb{E}$  par un couple  $(\phi_0, \tilde{E})$  formé d'un fibré  $H$ -principal différentiable  $\tilde{E} \rightarrow M^{\mathbb{R}}$  et d'un isomorphisme  $\phi_0$  entre le fibré tangent réel  $(TM \setminus D)^{\mathbb{R}}$ , et en remplaçant les  $\mathcal{O}_M$ -modules (resp.  $\mathcal{O}_M[*D]$ -modules) par les  $C_M^{\infty}$ -modules (resp.  $C_{M \setminus D}^{\infty}$ -modules) correspondants.

En plus du sous-groupe  $Q$ , l'exemple important dans cette section est le suivant :

**Définition 2.2.2.** Le groupe  $G_0^{\#}$  est le sous-groupe de  $GL(\mathfrak{g}_-)$  des automorphismes de l'espace vectoriel filtré  $\mathfrak{g}_-$ , tel que la composante homogène de degré 0 est un élément de  $G_0$ .

Nous pouvons maintenant définir la catégorie concernée par le problème d'équivalence :

**Définition 2.2.3.** Soit  $\mathfrak{g}_-$  et  $H$  comme ci-dessus

1. Une  $H$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière est une  $H$ -extension méromorphe  $\mathbb{E}$  avec  $l_0(\mathbb{E}) \geq 1$ .
2. Nous définissons  $\mathcal{E}^{\#}$  comme la catégorie définie de la manière suivante. Les objets sont les  $G_0^{\#}$ -extensions  $\mathfrak{g}_-$ -régulières. Soit  $(M, D)$  une paire, deux objets  $(\phi_0, \tilde{E}_1^{\#})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}_2^{\#})$  de  $\mathcal{E}_{M, D}^{\#}$  et  $\mathcal{E} = \tilde{E}_1^{\#}(\mathfrak{g}_-)$  et  $\mathcal{E}' = \tilde{E}_2^{\#}(\mathfrak{g}_-)$  ainsi que  $gr(\mathcal{E})$  et  $gr(\mathcal{E}')$  les gradués associés. Une flèche entre ces objets est un isomorphisme  $\Phi^{\#}$  de  $\mathcal{O}_M$ -modules entre  $gr(\mathcal{E})$  et  $gr(\mathcal{E}')$  tel que  $gr(\phi'_0) = \Phi^{\#} \circ gr(\phi_0)$  (où  $gr(\phi_0)$  et  $gr(\phi'_0)$  les composantes homogènes de degré 0 de  $\phi_0$  et  $\phi'_0$ ).

**Exemple 2.2.1.** 1. Si  $(G, P)$  est la géométrie de Klein obtenue comme la  $r_0$ -prolongation d'un sous-groupe  $H \subset GL_n(\mathbb{C})$  d'ordre  $r_0 = 0$  (Définition 1.4.18), alors on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}^0$ ,  $Q = G_0^{\#} = H$  et  $[\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-] = \{0\}$  par définition d'une graduation. Par conséquent, la condition de régularité est triviale, i.e  $\mathcal{E}^{\#}$  est la catégorie des  $H$ -extensions méromorphes.

2. Si  $(G, P)$  est une géométrie de Klein parabolique de degré  $k$  (Définition 1.4.16), alors la notion de  $G_0^\#$ -structure méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière coïncide avec la version méromorphe de la notion de système différentiel fortement régulier de N. Tanaka (Définition 1.4, [48]).

La régularité d'une  $Q$ -extension méromorphe image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable par le foncteur  $\bar{f}$  (voir sous-section 1.8.1) se traduit par une propriété sur cette dernière :

**Définition 2.2.4.** Une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable  $(E, \omega_1)$  sur  $M \setminus D$  est dite régulière si et seulement si sa courbure  $k_{\omega_1}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^1$ . On dit aussi que  $\omega_1$  est régulière.

**Lemme 2.2.3.4.** Soit  $(M, D)$  une paire. Soit  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$  et  $\omega_1$  une  $(G, P)$ -connexion de Cartan différentiable sur  $E|_{M \setminus D}$ . Supposons que l'image de  $(E|_{M \setminus D}, \omega_1)$  par  $\bar{f}$  est la restriction d'une  $Q$ -extension méromorphe  $\mathbb{E}$  sur  $(M, D)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathbb{E}$  est  $\mathfrak{g}_-$ -régulière.
- (ii)  $(E, \omega_1)$  est régulière.

*Démonstration.* Fixons une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan différentiable  $(E, \omega_1)$  sur  $M \setminus D$  et  $\mathbb{E}$  comme dans l'énoncé. Supposons que  $\mathbb{E}$  est régulière. Fixons  $x \in M \setminus D$ ,  $e \in p^{-1}(x)$  et considérons une section exponentielle  $\sigma : U \rightarrow E$  (Définition 1.7.3) définie sur un voisinage  $U$  de  $x$  inclus dans  $M \setminus D$ , et vérifiant  $\sigma(x) = e$ . Une adaptation de la preuve du Corollaire 1.7.1 à la catégorie différentiable prouve l'existence d'une section  $\sigma$  comme précédemment. Notons  $\tilde{\sigma} = [\sigma]_{\tilde{E}}$ . Par définition,  $k^{\tilde{\sigma}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^1$ . En adaptant la Proposition 1.7.4.1 à la catégorie différentiable, nous avons  $k^{\tilde{\sigma}}(x) = \text{proj}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ k_{\omega_1}(e)$ . Par conséquent  $k_{\omega_1}(e) \in \mathbb{W}^1$  et  $(E, \omega_1)$  est régulière.

Réciproquement, si  $(E, \omega_1)$  est régulière, alors  $k^{\tilde{\sigma}}(x) \in \mathbb{W}^1$ . Par les faits précédents, cela est vrai pour toute section  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  définie au voisinage de  $x$ . Comme cela est vrai pour tout  $x \in M \setminus D$ ,  $\mathbb{E}$  est régulière.  $\square$

Nous voulons donc résoudre le problème d'équivalence associé à  $\mathcal{E}^\#$ . Comme dans la méthode de Tanaka, la stratégie est de se ramener au Théorème 2.1.1. Pour cela, il faut prouver une équivalence de catégories entre  $\mathcal{E}^\#$  et une sous-catégorie de  $Q$ -extensions méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières, qui seront dites *normales*. Il s'agit d'une condition supplémentaire qui assure que le processus de normalisation, défini de manière générale pour les  $(G, P)$ -géométries de Cartan différentiables, définit bien un foncteur de normalisation au sens de la Définition 2.1.1 en restriction aux antécédents des  $Q$ -extensions méromorphes considérées.

## 2.2.4 Réduction aux $Q$ -extensions normales

Nous définissons maintenant une sous-catégorie  $\mathcal{E}$  de  $Q$ -extensions méromorphes sur les paires, équivalente à  $\mathcal{E}^\#$ . L'intérêt est de se ramener à la méthode de A. Căp et J. Slovák (section 2.1) pour résoudre le problème d'équivalence méromorphe.

Reprenons les notations de la sous-section 1.7.3. L'espace vectoriel  $\text{Im}(\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \partial)$  est une sous-représentation de la représentation  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  du groupe  $P$  (sous-section 2.2.1). Il est somme directe de l'image de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  et de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  par  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \partial$ .

Définissons alors des sous-espaces  $(\tilde{\mathfrak{n}}_l)_{l \geq 0}$  de  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  en posant pour tout  $l \geq 0$  :

$$\tilde{\mathfrak{n}}_l = \pi_l \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \partial(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})) \oplus \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}(\mathfrak{n}_l) \quad (2.18)$$

où  $\mathfrak{n}_l$  a été défini dans la [sous-section 2.2.1](#). Ce sont donc des supplémentaires de chaque composante homogène de l'image de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  par  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} \circ \partial$  dans  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$ . De plus, par l'hypothèse (H3), leur somme directe :

$$\tilde{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{l \geq 0} \tilde{\mathfrak{n}}_l \quad (2.19)$$

est une sous-représentation du groupe  $P$ .

Fixons une  $Q$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $(\phi_0, \tilde{E})$  sur une paire  $(M, D)$ . Par le [Lemme 1.7.3.3](#), pour tout  $l \geq 0$ , la propriété que la composante homogène  $\pi_l(k^{\tilde{\sigma}})$  de la fonction de structure  $k^{\tilde{\sigma}}$  d'une section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  sur  $U \subset M$ , est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}_l$ , est indépendante de la section différentiable  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$ . Cette propriété équivaut à  $k^{\tilde{\sigma}}$  à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}$  par définition.

Considérons la géométrie de Klein  $(G_0^{\#} \times \mathfrak{g}_-, G_0^{\#})$ , où  $G_0^{\#}$  est le groupe de la [Définition 2.2.2](#), et notons  $\tilde{\delta}^{\#}$  le morphisme obtenu comme en [\(1.165\)](#). Par définition de  $G_0^{\#}$ , pour tout  $l \geq 1$  on a :

$$\pi_l(\text{Ad}(\mathfrak{g}_0^{\#})) = \pi_l(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)) \quad (2.20)$$

où  $\mathfrak{g}_0^{\#} = \text{Lie}(G_0^{\#})$ . De plus, par définition des supplémentaires  $(\tilde{\mathfrak{n}}_l)_{l \geq 0}$  ([sous-section 2.2.4](#)), pour tout  $l \geq 0$ , toute fonction  $h : U \rightarrow G_0^{\#}$  et toute 1- $\mathfrak{g}_-$ -forme  $\mathcal{A}$  définies sur un ouvert  $U \subset M$  :

$$\pi_l \circ \tilde{\delta}^{\#}(h^* \omega_{G_0^{\#}} \circ \mathcal{A}^{-1}) \quad (2.21)$$

est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}_l$ .

Ces remarques permettent de prouver le lemme ci-dessous, qui correspond au théorème de réduction de N. Tanaka ([\[49\]](#), Lemme 3.8).

**Lemme 2.2.4.1.** *Soit  $(\phi_0, \tilde{E}^{\#})$  un objet de  $\mathcal{E}^{\#}$  sur une paire  $(M, D)$ . Alors il existe une unique  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi'_0, \tilde{E})$  avec les propriétés suivantes :*

- (i) *La fonction de structure  $k^{\tilde{\sigma}}$  de toute section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}$*
- (ii)  *$\tilde{E}|_{M \setminus D}$  est une réduction holomorphe de  $\tilde{E}^{\#}|_{M \setminus D}$  et  $\phi'_0 = \phi_0$ .*

*Démonstration.* Commençons par prouver l'existence de  $\tilde{E}$ . Fixons un ouvert  $U \subset M$  et une section holomorphe  $\sigma^{\#} : U \rightarrow \tilde{E}^{\#}$ . Par [\(2.21\)](#) et par le [Lemme 1.7.3.3](#), pour toute fonction méromorphe  $h : U \rightarrow G_0^{\#}$ , nous avons pour tout  $l \geq 0$  :

$$\pi_l(k^{\sigma^{\#} \cdot h}) = \pi_l(\text{ad}(h)[k^{\sigma^{\#}}]) \pmod{\tilde{\mathfrak{n}}_l} \quad (2.22)$$

Prouvons par récurrence qu'il existe pour tout  $l \geq 1$  une fonction méromorphe  $h_l : U \rightarrow N \subset G_0$  telle que  $\pi_l(k^{\sigma^{\#} \cdot h_l})$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}_l$ . Pour  $l = 1$ , décomposons

$$k^{\sigma^{\#}} = \kappa_1 + \kappa' \quad (2.23)$$

avec  $\kappa_1$  et  $\kappa'_1$  respectivement à valeurs dans l'image de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  par  $\partial^{\#}$  et  $\kappa'_1$  une fonction à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}_1$ . Par [\(2.20\)](#), il existe une fonction  $B_1$  sur  $U$  à valeurs dans la composante homogène de degré 1 de  $\mathfrak{g}_0^{\#}$  telle que  $\kappa_1 = \partial^{\#}(\text{Ad}(B_1))$ . En particulier,  $h = \exp_{G_0^{\#}}(B_1)$  est à valeurs dans  $N$  et vérifie  $\text{ad}(h) = \text{Id}_{\mathfrak{g}_-} + \text{Ad}(B_1)$ . En utilisant [\(2.22\)](#) et

(2.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \pi_1(k^{\sigma^\#} \cdot h) &= \pi_1(ad(h^{-1})(k^{\sigma^\#})) \pmod{\tilde{\mathfrak{n}}_1} \\
 &= \pi_1(k^{\sigma^\#}) - \pi_1(B_1 \cdot k^{\sigma^\#}) \pmod{\tilde{\mathfrak{n}}_1} \\
 &= \pi_1(k^{\sigma^\#}) - \pi_1(\eta_1) - \partial^\#(Ad(B_1)) \pmod{\tilde{\mathfrak{n}}_1} \\
 &= \kappa'_1
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

où  $\eta_1$  est de degré homogène strictement supérieur à 1. Nous obtenons l'initialisation. En itérant ce principe pour  $l > 1$ , nous obtenons à chaque étape des fonctions méromorphes  $h_l = h_{l-1} \cdot h$  telles que  $\pi_{l'}(k^{\sigma^\#} \cdot h_l)$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}_{l'}$  pour tout  $0 \leq l' \leq l$ . On définit alors  $\tilde{E}$  comme le fibré  $Q$ -principal holomorphe engendré par les sections méromorphes  $\tilde{\sigma}^\# \cdot h$  obtenue comme précédemment, où  $\tilde{\sigma}^\#$  varie dans l'ensemble des sections holomorphes de  $\tilde{E}^\#$ .

Nous avons pour l'instant prouvé qu'il existe une  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$  telle que  $k^{\tilde{\sigma}}$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}$  pour toute section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$ , et telle que  $\tilde{E}|_{M \setminus D} \subset \tilde{E}^\#|_{M \setminus D}$  est le sous fibré maximal avec cette propriété. Prouvons maintenant qu'il s'agit d'une réduction holomorphe à  $Q$ . Pour cela, considérons deux sections holomorphes  $\tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_2$  de  $\tilde{E}$  sur un ouvert  $U \subset M$ , et leurs fonctions de structures respectives  $k^{\tilde{\sigma}_1}$  et  $k^{\tilde{\sigma}_2}$ . Notons  $h$  l'unique fonction holomorphe sur  $U$  à valeurs dans  $G_0^\#$  telle que  $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1 \cdot h$ . La graduation  $(\mathfrak{g}_0^\#)_{l \geq 0}$  selon le degré homogène des endomorphismes de  $\mathfrak{g}_-$  correspondants induit une unique décomposition

$$h = h_0 \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_k \tag{2.25}$$

où  $h_l = \exp_{G_0^\#}(A_l)$ ,  $A_l \in (\mathfrak{g}_0^\#)_i$  et  $k$  est le l'entier minimal tel que  $(\mathfrak{g}_0^\#)_l = \{0\}$  pour  $i \geq k + 1$ . Prouvons par récurrence que  $h_l \in Q$  pour tout  $l \geq 0$ . Pour  $l = 0$ , cela est immédiat car  $(\mathfrak{g}_0^\#)_0 = \mathfrak{g}_0$  donc  $h_0 \in G_0 \subset Q$ . Prouvons l'hérédité. Supposons que cela est vrai pour  $l \geq l_0$ . Alors  $k^{\tilde{\sigma}_1 \cdot h_0 \cdot \dots \cdot h_{l_0}}$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathfrak{n}}$ . En reprenant le calcul (2.24) au degré  $l_0 + 1$ , nous obtenons que  $\partial^\# ad(h_{l_0+1}) = 0$ . Par définition de  $Q \subset G_0^\#$  (voir Définition 1.4.17), cela implique que  $h_{l_0+1}$  est à valeurs dans  $Q$ . Nous obtenons l'hérédité.

L'argument précédent montre directement l'unicité de la réduction  $\tilde{E}$ .  $\square$

**Définition 2.2.5.** Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme précédemment, ainsi que  $(G, P)$  la géométrie de Klein associée et  $(\tilde{\mathfrak{n}}_l)_{l \geq 0}$  les supplémentaires définis ci-dessus.

1. Soit  $(M, D)$  une paire. Une  $Q$ -extension méromorphe normale sur  $(M, D)$  est une  $Q$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  avec la propriété (i) du Lemme 2.2.4.1.
2. On définit la catégorie  $\mathcal{E}$  comme la sous-catégorie de celle des  $Q$ -extensions méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières qui sont normales.
3. On définit  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff}$ ) comme l'antécédent holomorphe (resp. différentiable)  $\mathcal{E}$  par  $f$  (voir Définition 1.6.4 et Définition 1.8.1).
4. On définit similairement les catégories  $\bar{\mathcal{G}}$  et  $\bar{\mathcal{E}}$  de  $(G, P)$ -géométries de Cartan différentiables normales et de  $Q$ -extensions normales en remplaçant les objets par leurs analogues différentiables (voir sous-section 1.8.1).

Soit  $(M, D)$  une paire et  $(\phi_0, \tilde{E})$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ . Par les inclusions de groupes de Lie :

$$G_0 \subset Q \subset G_0^\# \tag{2.26}$$

nous obtenons un fibré  $G_0^\#$ -principal holomorphe :

$$\tilde{E}^\# = \tilde{E} \times_Q Q_0^\# \quad (2.27)$$

et donc une  $G_0^\#$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$ . Une flèche  $\Phi$  entre deux objets  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  est clairement une flèche entre les  $G_0^\#$ -extensions méromorphes induites comme ci-dessus, et en particulier

$$\Phi^\# = gr(\Phi) \quad (2.28)$$

est une flèche dans  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$  (voir Définition 2.2.3).

**Définition 2.2.6.** On définit un foncteur  $\mu^\# : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^\#$  de la manière suivante. Soit  $(M, D)$  une paire. Pour tout objet  $(\phi_0, \tilde{E}) \in \mathcal{E}_{M,D}$ , son image par  $\mu^\#$  est la  $G_0^\#$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  définie par (2.27). Le foncteur  $\mu^\#$  associé à une flèche  $\Phi$  entre deux objets  $(\phi_0, \tilde{E})$  et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  de  $\mathcal{E}_{M,D}$  la flèche  $\Phi^\#$  définie comme en (2.28). On définit également  $f^\# = \mu^\# \circ f$ .

Le Lemme 2.2.4.1 peut donc se reformuler comme une équivalence de catégories :

**Theorème 2.2.1.** Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple comme dans la sous-section 2.2.1,  $(G, P)$  la géométrie de Klein associée et  $\mu^\#$  le foncteur de la Définition 2.2.6. Le foncteur  $\mu^\#$  est une équivalence de catégories.

*Démonstration.* La partie existence du Lemme 2.2.4.1 prouve que  $\mu^\#$  est essentiellement surjectif. En effet, étant donné un objet  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  de  $\mathcal{E}^\#$  sur une paire  $(M, D)$ , considérons la  $Q$ -extension méromorphe normale  $(\phi_0, \tilde{E})$  construite dans ce lemme, et  $(\phi_0, \tilde{E}_1^\#) = \mu^\#(\phi_0, \tilde{E})$ . Alors  $\tilde{E}_1^\#|_{M \setminus D} = \tilde{E}^\#|_{M \setminus D}$ . Notons  $\mathcal{E}_1 = \tilde{E}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  et  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Alors  $\mathcal{E}_1[*D] = \mathcal{E}[*D]$  et par conséquent le couple  $(Id_{TM[*D]}, Id_{\mathcal{E}[*D]})$  est une flèche de  $\mathcal{E}^\#$  entre  $\mu^\#(\phi_0, \tilde{E})$  et  $\mathcal{E}^\#$ .

La partie unicité du même lemme prouve que  $\mu^\#$  est plein. Enfin, il est fidèle car il agit comme l'identité sur les flèches (en plongeant les catégories  $\mathcal{E}^\#$  et  $\mathcal{E}$  dans la catégorie des extensions méromorphes, voir Définition 1.6.1 et Définition 1.6.2).  $\square$

Le lemme ci-dessous est essentiel pour la résolubilité du problème d'équivalence méromorphe associé à la catégorie  $\mathcal{E}$  :

**Lemme 2.2.4.2.** Pour tout  $l \geq 1$ , notons  $\chi_l$  le morphisme de la Définition 1.4.15 associé aux supplémentaires  $\mathfrak{m}_l$  et  $\mathfrak{n}_l$  (sous-section 2.2.1). Alors l'image  $\chi_l(\tilde{\mathfrak{n}}_l)$  est incluse dans  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ .

*Démonstration.* Comme l'image  $\chi_l(\tilde{\mathfrak{n}}_l)$  contient déjà  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  par définition, il s'agit de montrer que  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-) \cap \chi_l(\tilde{\mathfrak{n}}_l) = \{0\}$ . Soit donc  $\varphi$  dans cette intersection. Par définition de  $\chi_l$ , il appartient donc à un supplémentaire  $\mathfrak{m}_l$  de  $Im(\partial) \subset \mathbb{H}^l$ . De plus, il existe  $\kappa \in \tilde{\mathfrak{n}}_l$  tel que  $\partial\varphi = \kappa$ . Par définition de  $\tilde{\mathfrak{n}}_l$ , cela implique qu'il existe  $\varphi' \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  tel que  $\partial(\varphi - \varphi') = 0$ . Nécessairement,  $\varphi'$  est de degré homogène strictement positif, et ceci est également vrai pour  $\varphi$ . Par l'hypothèse (H1) (sous-section 2.2.1),  $(G, P)$  est la prolongation de Tanaka de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$ . Le Lemme 1.4.5.2 implique donc  $\varphi = \varphi' + \partial B$  où  $B \in \mathfrak{p}$ . En projetant sur  $\mathfrak{m}_l \cap Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  parallèlement à  $Im(\partial) \oplus \mathfrak{m}_l \cap Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ , nous obtenons  $\varphi = 0$ .  $\square$

## 2.2.5 Catégorie des géométries normales

Nous définissons maintenant une sous-catégorie de  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes régulières qui est normale (Définition 2.1.1) :

**Définition 2.2.7.** La catégorie  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  est la sous-catégorie de  $\mathcal{G}^{diff}$  définie de la façon suivante.

1. Soit  $(M, D)$  une paire et  $(E, \omega_0)$  un objet de  $\mathcal{G}_{M, D}^{diff}$ . Alors  $(E, \omega_0)$  est un objet de  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  si et seulement si la courbure  $k_{\omega_0}$  est à valeurs dans le sous-espace  $\mathfrak{n}$  donné par (2.7).
2. On définit la sous-catégorie  $\mathcal{G}^{norm}$  de  $\mathcal{G}$  comme l'intersection de  $\mathcal{G}$  et de  $\mathcal{G}^{diff, norm}$ .

Le lemme ci-dessous permet une preuve par récurrence sur le degré homogène du fait que deux connexions de Cartan méromorphes normales dans la même fibre de  $f$  sont isomorphes :

**Lemme 2.2.5.1.** Soit  $(M, D)$  une paire et  $E \xrightarrow{P} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe. Soient  $\omega_0$  et  $\omega'_0$  deux  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes régulières et normales sur  $(E, \tilde{D})$ . Supposons qu'il existe  $l \geq 1$  et une section méromorphe  $\varphi_l$  de  $E(\mathbb{H}^l)$  sur  $M$  avec pôles en  $D$  telle que :

$$\omega_0 \xrightarrow{\varphi_l} \omega'_0 \quad (2.29)$$

où la notation  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega'_0$  est celle du Lemme 1.6.5.1. Alors il existe un automorphisme  $\Psi_{l+1}$  de fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M \setminus D$ , préservant les sections  $\mathfrak{g}$ -méromorphes de  $E$  (Définition 1.1.12) et tel que :  $\omega''_0 = \Psi_{l+1}^* \omega_0$  est une connexion de Cartan méromorphe régulière normale sur  $(E, \tilde{D})$  et vérifie :

$$\omega''_0 \xrightarrow{\varphi_{l+1}} \omega'_0 \quad (2.30)$$

où  $\varphi_{l+1}$  est une section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^{l+1})$  avec pôles en  $D$ . L'énoncé reste vrai en remplaçant les sections différentiables par les sections holomorphes des fibrés vectoriels holomorphes correspondants,  $(E, \tilde{D})$  par  $E \setminus \tilde{D}$ , et les connexions de Cartan méromorphes sur  $(E, \tilde{D})$  par les connexions de Cartan différentiables sur  $E \setminus \tilde{D}$  dans la catégorie  $\mathcal{G}_{M, D}^{diff}$ .

*Démonstration.* Fixons  $x \in M$  et  $U$  un voisinage muni d'une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$ . Notons  $\mathcal{E} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ ,  $(\phi_0, \tilde{E})$  l'image commune de  $(E, \omega_0)$  et  $(E, \omega'_0)$  par  $f^{diff}$ . Soit  $\psi_\sigma$  la trivialisatoin locale de  $E(Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}))$  sur  $U \setminus D$  induite par  $\sigma$  (Définition 1.1.10). Nous obtenons une fonction méromorphe  $\mathcal{C} = \psi_\sigma(\varphi_l)$  sur  $U$  avec pôles en  $D$  et à valeurs dans  $\mathbb{H}^l$ . Par définition de  $\mathcal{G}^{norm}$  et par le Lemme 1.5.3.3, nous obtenons que

$$\pi_{l'}(\partial\mathcal{C} + d(\mathcal{C} \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) + [\mathcal{C}, \mathcal{C}]_{\mathfrak{g}})$$

est à valeurs dans  $\mathfrak{n} \cap \mathbb{W}_{l'} = \mathfrak{n}_{l'}$  pour tout  $l' \in \{l, \dots, r_0 + 1\}$ , où  $\mathcal{A}$  est la matrice de la section  $\sigma$  (1.148). Or par le Lemme 2.2.2.1, nous avons :

$$\pi_l(\partial\mathcal{C} + d(\mathcal{C} \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1})) = \pi_l(\partial\mathcal{C}) = \partial(\pi_l(\mathcal{C})) \quad (2.31)$$

et le sous-espace  $\mathfrak{n}_l$  est un supplémentaire de  $Im(\partial_l) = Im(\partial) \cap \mathbb{W}_l$ , par conséquent  $\pi_l(\partial\mathcal{C}) = 0$ . Par l'hypothèse (H1) et le Lemme 1.4.5.2, nous avons  $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l = \{0\}$ . Par conséquent :

$$\pi_l(\mathcal{C}) = Ad(B_l) \quad (2.32)$$

où  $B_l$  est une fonction méromorphe sur  $U$  avec pôles en  $D$  et à valeurs dans  $\mathfrak{g}^{l+1}$ .

Nous définissons alors  $\Psi_{l+1}$  comme l'unique automorphisme de fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $p^{-1}(U \setminus D)$  défini par :

$$\Psi_{l+1}(\sigma) = \sigma \cdot exp_G(-B_l) \quad (2.33)$$

et  $\omega_0'' = \Psi_{l+1}^* \omega_0$ . Alors  $\Psi_{l+1}$  préserve par construction les sections  $\mathfrak{g}$ -méromorphes de  $E$  et en appliquant le [Lemme 1.6.5.2](#), nous obtenons  $\omega_0'' \xrightarrow{\varphi_{l+1}} \omega_0'$  avec  $\psi_\sigma(\varphi_{l+1}) = \psi_\sigma(\varphi_l) - \pi_l(\mathcal{C}) - \Delta_l \circ \mathcal{A}^{-1}$ , i.e :

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l - \pi_l(\varphi_l) - \phi_l \quad (2.34)$$

où  $\phi_l$  est une section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^{l+1})$  sur  $U$  avec pôles en  $D$ . En particulier,  $\varphi_{l+1}$  est une section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^{l+1})$  sur  $U$  avec pôles en  $D$ .

Par ailleurs, si  $\sigma' = \sigma \cdot b$  est une autre section holomorphe de  $E$  sur  $U$ , alors  $\mathcal{C}' := \psi_{\sigma'}(\varphi_l) = b^{-1} \cdot \mathcal{C}$  où  $b^{-1}$  désigne l'action de  $b \in Q$  sur  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ . Construisons alors un automorphisme  $\Psi'_{l+1}$  comme précédemment, en substituant  $\sigma$  par  $\sigma'$ . Par  $P$ -équivariance de  $\pi_l$  et des trivialisations  $\psi_\sigma, \psi_{\sigma'}$ , l'automorphisme  $\Psi'_{l+1}$  obtenu coïncide avec  $\Psi_{l+1}$ . Nous obtenons donc un automorphisme de fibré  $P$ -principal holomorphe  $\Psi_{l+1}$  de  $p^{-1}(M \setminus D)$ , préservant les sections  $\mathfrak{g}$ -méromorphes, et la connexion de Cartan méromorphe régulière et normale  $\omega_0'' = \Psi_{l+1}^* \omega_0$  vérifie  $\omega_0'' \xrightarrow{\varphi_{l+1}} \omega_0'$  avec  $\varphi_{l+1}$  une section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^{l+1})$  sur  $M$  avec pôles en  $D$ .

Enfin, nous avons  $proj_{\mathfrak{g}_-}^p \circ \omega_0 = proj_{\mathfrak{g}_-}^p \circ \omega_0''$  donc en particulier  $(E, \omega_0'')$  est un objet de  $\mathcal{G}_{M,D}$ .

En remplaçant  $\sigma$  par une section différentiable de  $E$ ,  $\mathcal{G}_{M,D}$  par  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  et les différents  $\mathcal{O}_M$ -modules représentations associés à  $E$  ([Définition 1.1.9](#)) par leur extensions en des  $C_M^\infty$ -modules, nous obtenons la version holomorphe de l'énoncé.  $\square$

**Proposition 2.2.5.1.** *La catégorie  $\mathcal{G}^{diff, norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{norm}$ ) est normale ([Définition 2.1.1](#)).*

*Démonstration.* La catégorie  $\mathcal{G}^{norm}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff, norm}$ ) est stable par les isomorphismes de  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{G}^{diff}$ ). En effet, si  $\Psi$  est un isomorphisme de  $(G, P)$ -géométries de Cartan différentiables entre  $(E_1, \omega_1)$  et  $(E_2, \omega_2)$ , alors  $k_{\omega_1} = k_{\omega_2} \circ \Psi$ .

Prouvons la seconde propriété du point 1 de la [Définition 2.1.1](#). Fixons une paire  $(M, D)$ , un objet  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}_{M,D}$ , et deux objets  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega_0')$  de  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff, norm}$  dans  $f^{-1}(\mathbb{E})$ . Soient  $\hat{E}$ , et  $\hat{E}'$  les réductions différentiables respectives de  $E$  et  $E'$  au sous-groupe  $O \subset P$  de la [Définition 2.2.7](#).

Commençons par fixer un point  $x \in M$  et un voisinage  $U \subset M$  de  $x$  muni de deux sections différentiables  $\sigma : U \rightarrow \hat{E}$  et  $\sigma' : U \rightarrow \hat{E}'$ . Posons  $\psi_U$  l'unique isomorphisme de fibrés  $P$ -principaux différentiables sur  $U$  tel que  $\psi_U(\sigma) = \sigma'$ . Par construction  $\psi_U$  couvre l'identité de  $U$ . Considérons alors la connexion de Cartan différentiable  $\omega_0'' = \psi_U^* \omega_0'$  sur  $E|_U \setminus D$ . Elle est par construction dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$ , et la réduction correspondante est  $\hat{E}|_U$ . En particulier, par le [Lemme 1.6.5.1](#), il existe une section différentiable  $\varphi$  de  $E(\mathbb{H}_p) \subset E(\mathbb{H}^1)$  sur  $U \setminus D$  telle que  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega_0''$ .

Nous pouvons donc appliquer le [Lemme 2.2.5.1](#) à  $\omega_0$  et  $\omega_0''$  : en effet, ces deux connexions de Cartan différentiables sont dans la fibre du même objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ , et par le [Lemme 1.6.5.1](#) nous avons donc  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi_1} \omega_0''$  avec  $\varphi_1$  une section différentiable de  $E(\mathbb{H}_p^1)$  sur  $U \setminus D$ . En appliquant par itération ce principe, nous obtenons une suite  $(\omega_0^r)_{r=0, \dots, r_0+1}$  de connexions de Cartan différentiables sur  $p^{-1}(U \setminus D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  par  $f^{diff}$  et une suite  $(\varphi_l)_{l=1, \dots, r_0+2}$  avec les propriétés suivantes. Pour tout  $r = 0, \dots, r_0 + 1$  :

- (i) Il existe une flèche  $\Psi_U^r$  de  $\mathcal{G}_{U,D}^{diff}$  entre  $(E|_U, \omega_0^r)$  et  $(E|_U, \omega_0)$
- (ii)  $\varphi_{r+1}$  est une section différentiable de  $E(\mathbb{H}_p)^{r+1}$
- (iii) On a :  $\omega_0^r \xrightarrow{\varphi_{r+1}} \omega_0''$

En particulier, au rang  $r = r_0 + 1$  :  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})^{r_0+2} = \{0\}$  et nous obtenons que  $\omega_0^{r_0+1} = \omega_0''$ , donc une flèche  $\Psi_U^{r_0+1}$  entre  $(E|_U, \omega_0)$  et  $(E|_U, \omega_0'')$ . En composant l'isomorphisme obtenu par  $\psi_U$ , nous obtenons une flèche  $\Psi_U$  de  $\mathcal{G}_{U,D}^{diff}$  entre  $(E|_U, \omega_0)$  et  $(E|_U, \omega_0')$ .

Recouvrons  $M$  par des ouverts  $U$  comme précédemment, et fixons deux ouverts  $U, U'$  du recouvrement obtenu. Alors  $\Psi_U|_{U \cap U'}^{-1} \circ \Psi_{U'}|_{U \cap U'}$  est un automorphisme de  $(E|_{U \cap U'}, \omega_0)$  couvrant l'identité. Par le [Corollaire 1.5.1](#), il s'agit de l'identité et par conséquent  $\Psi_U$  et  $\Psi_{U'}$  coïncident sur  $p^{-1}(U \cap U' \setminus D)$ . Nous obtenons finalement une flèche de  $\mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  entre  $(E, \omega_0)$  et  $(E', \omega'_0)$ .  $\square$

## 2.2.6 Résolution du problème d'équivalence méromorphe pour les $Q$ -extensions normales

Pour terminer la résolution du problème d'équivalence méromorphe, il nous reste à fixer une paire  $(M, D)$  et à construire un foncteur de normalisation  $h : \mathcal{G}_{M,D}^{diff} \rightarrow \mathcal{G}_{M,D}^{diff, norm}$ , puis prouver que son image est constituée de géométries de Cartan méromorphes.

Nous fixons quelques notations. Pour tout objet  $(E, \omega_1)$  de  $\mathcal{G}^{diff}$  dans la fibre d'un objet  $(\phi_0, \tilde{E})$  de  $\mathcal{E}$ , sur une paire  $(M, D)$ , nous associons une réduction différentiable  $\hat{E}$  de  $E$  au sous-groupe de Levi  $G_0$  (voir [sous-section 2.2.1](#)). Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , notons :

$$\bar{\chi}_l : E(\mathfrak{n}_l) \rightarrow E(\mathfrak{m}_l) \quad (2.35)$$

le morphisme associé à  $\hat{E}$  et aux supplémentaires  $\mathfrak{n}_l$  et  $\mathfrak{m}_l$  fixés en début de section (voir [Proposition 2.2.1.1](#)). Comme la projection  $\pi_l$  sur la composante homogène de degré  $l$  est un morphisme de  $P$ -modules, la [Proposition 1.1.2.1](#) appliquée à  $Id_{C_E^\infty} \otimes \pi_l$  permet de considérer un morphisme de  $C_M^\infty$ -modules :

$$\bar{\pi}_l : \hat{E}(\mathbb{W}) \rightarrow \hat{E}(\pi_l(\mathbb{W})) \quad (2.36)$$

Par l'égalité  $\hat{E}(\mathbb{W}) = \hat{E}(\mathbb{W})$ , nous pouvons appliquer ce morphisme à la section  $\bar{k}_{\omega_1}$  de  $\hat{E}(\mathbb{W})$  correspondant à la courbure  $k_{\omega_1}$  de  $\omega_1$ .

**Définition 2.2.8.** Soient  $(E, \omega_1)$  et  $\hat{E}$  comme ci-dessus. La suite normalisante de  $(E, \omega_1)$  associée à  $\hat{E} \subset E$  est la suite de couples  $(\omega_0^l, \varphi_{l+1})_{l=0, \dots, r_0+1}$  où  $\omega_0^l$  est une connexion de Cartan différentiable sur  $E \setminus \tilde{D}$ ,  $\varphi_{l+1}$  est une section différentiable de  $\hat{E}(\mathbb{H})^{l+1}$  sur  $U \setminus D$ , définie de la manière suivante :

$$\omega_0^0 = \omega_1 \quad \text{et} \quad \varphi_0 = 0 \quad (2.37)$$

puis :

$$\omega_0^l \xrightarrow{\varphi_{l+1}} \omega_0^{l+1} \quad \text{où} : \quad \varphi_{l+1} = \bar{\chi}_{l+1}(\bar{\pi}_{l+1}(\bar{k}_{\omega_0^l})) \quad (2.38)$$

et  $r_0$  est l'entier défini par [\(2.6\)](#),  $\bar{\chi}$  est le morphisme [\(3.31\)](#), et la notation  $\omega_0 \xrightarrow{\varphi} \omega_0'$  est celle du [Lemme 1.6.5.1](#).

Nous obtenons un foncteur de normalisation holomorphe :

**Lemme 2.2.6.1.** Pour tout objet  $(E, \omega_1) \in \mathcal{G}_{M,D}^{diff}$ , considérons une réduction différentiable  $\hat{E}$  comme ci-dessus, et notons  $(\omega_0^l, \varphi_{l+1})_{l=0, \dots, r_0+1}$  la suite normalisante associée à  $\hat{E}$  ([Définition 2.2.8](#)). Définissons  $h(E, \omega_1) = (E, \omega^{r_0+1})$ . Alors :

1. Pour tout  $l \geq 0$ ,  $(E, \omega_0^l)$  est dans la même fibre de  $f^{diff}$  que  $(E, \omega_1)$ .
2. L'application  $h$  est à valeurs dans  $\mathcal{G}_{M,D}^{norm}$ .

Par conséquent,  $h$  est un foncteur de normalisation holomorphe ([Définition 2.1.1](#)).

*Démonstration.* 1. Cela découle directement du [Lemme 2.2.4.2](#), de la définition de la suite normalisante et du choix de la réduction  $\hat{E}$ .

2. Fixons  $(E, \omega_1) \in \mathcal{G}_{M,D}^{diff}$  et  $\hat{E} \subset E$  comme dans l'énoncé. Notons  $\bar{k}_{\omega_0^l} = p_* k_{\omega_0^l}$  la section différentiable de  $E(\mathbb{W})$  correspondant à la représentation de courbure de chaque connexion  $\omega_0^l$ , et prouvons par itération sur  $r \geq 0$  que  $\pi_l(k_{\omega_0^{l+1}})|_{\hat{E}}$  est à valeurs dans  $\mathfrak{n}_l$ . Pour  $r = 0$ , ceci est une conséquence de la régularité de  $\omega_1$  (voir [Définition 2.2.4](#) et [Lemme 2.2.3.4](#)).

Prouvons l'hérédité : supposons la propriété vérifiée au rang  $r \leq r_0$ . Soit  $\sigma : U \rightarrow \hat{E}$  une section différentiable, et  $\psi_\sigma(\mathbb{W})$  (resp.  $\psi_\sigma(\mathbb{H})$ ) la trivialisatoin locale de  $\hat{E}(\mathbb{W})$  (resp.  $\hat{E}(\mathbb{H})$ ) donnée dans la [Définition 1.1.11](#). Définissons  $\kappa = k_{\omega_0^l} \circ \sigma = \psi_\sigma(\mathbb{W})(p_* k_{\omega_0^l})$  et  $C = \psi_\sigma(\mathbb{H})(\varphi_l)$ . Alors par définition :

$$C = -\psi_\sigma(\mathbb{H})(\bar{\chi}_0 \circ \bar{\pi}_l(\bar{k}_{\omega_0^l})) = -\chi_l \circ \pi_l(\kappa)(k_{\omega_0^l} \circ \sigma) \quad (2.39)$$

où  $\bar{\pi}_l$  est le morphisme [\(2.36\)](#). Par ailleurs, le [Lemme 1.5.3.3](#) nous donne :

$$\psi_\sigma(\mathbb{W})(\bar{k}_{\omega_0^{l+1}}) = \kappa + \partial C + d(C \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) + [C, C]_{\mathfrak{g}} \quad (2.40)$$

En utilisant la [Proposition 2.2.1.1](#) et l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$\psi_\sigma(\mathbb{W})(\bar{k}_{\omega_0^{l+1}}) = \kappa - \chi_l \circ \pi_l(\kappa) + \Delta_{l+1} \pmod{\bigoplus_{l=0}^{r-1} \mathfrak{n}_l} \quad (2.41)$$

où  $\Delta_{l+1} = d(C \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) + [C, C]_{\mathfrak{g}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{W}^{l+2}$  par le [Lemme 2.2.2.1](#). Par conséquent :

$$\pi_l(\psi_\sigma(\mathbb{W})(\bar{k}_{\omega_0^l})) = \psi_\sigma(\mathbb{W})(\bar{\pi}_l(\bar{k}_{\omega_0^{l+1}})) \quad (2.42)$$

est à valeurs dans  $\mathfrak{n}_l \subset \mathbb{W}$ , i.e la propriété est vérifiée au rang  $r+1$ . Au rang  $l = r_0 + 1$ , la courbure vérifie que  $k_{\omega_0^{l+1}}|_{\hat{E}}$  prend ses valeurs dans  $\bigoplus_{r=1}^{l_0+1} \mathfrak{n}_{l-1} = \mathfrak{n}$ , i.e  $(E, \omega_0)$  est normale.

Prouvons enfin que  $h$  est un foncteur de normalisation holomorphe ([Définition 2.1.1](#)), i.e que l'hypothèse du [Théorème 2.1.2](#) est satisfaite. Fixons  $\mathbb{E} = (\phi_0, \bar{E}) \in \mathcal{E}_{M,D}$ ,  $x \in M$  et un voisinage  $U$  de  $x$  muni d'une section holomorphe  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \bar{E}$ . Comme nous avons supposé l'existence d'une section holomorphe  $s : Q \rightarrow P$  de la représentation adjointe quotient, le [Lemme 1.8.3.1](#) montre qu'il existe un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  tel que  $\bar{E} = E \times_P Q$ . Nous pouvons également considérer une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  telle que  $[\sigma]_{\bar{E}} = \tilde{\sigma}$ . La [Proposition 1.6.6.1](#) implique alors qu'il existe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_1)$  sur  $(U, D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$ . Le [Lemme 2.2.3.4](#) montre qu'elle est régulière. Le dernier terme de la suite normalisante associée à  $(E, \omega_1)$  et  $\hat{E} = \sigma \cdot O$  est alors une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe régulière et normale dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$ . □

Nous obtenons :

**Theorème 2.2.2.** *Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple formé d'une algèbre de Lie graduée négativement  $\mathfrak{g}_-$  et d'un sous-groupe  $G_0$  d'automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}_-$  stabilisant les composantes de la graduation. Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) de la [sous-section 2.2.1](#) sont vérifiées et soit  $(G, P)$  la géométrie de Klein associée. Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}^{norm}$  les catégories données respectivement par les [Définition 2.2.5](#) et [Définition 2.2.7](#). Le problème d'équivalence méromorphe pour la catégorie  $\mathcal{G}$  est résolu. Plus précisément, pour toute paire  $(M, D)$ , le foncteur  $f$  de la [Théorème 1.6.1](#) se restreint en une équivalence de catégories entre  $\mathcal{G}_{M,D}^{norm}$  et  $\mathcal{E}_{M,D}$ .*

*Démonstration.* D'abord le [Lemme 2.2.3.4](#) prouve que  $\mathcal{G}^{diff}$  est l'image réciproque de  $\mathcal{E}$  par  $f^{diff}$ . La catégorie  $\mathcal{G}^{diff,norm}$  est une catégorie normale par la [Proposition 2.2.5.1](#). Le foncteur  $h$  défini dans le [Lemme 2.2.6.1](#) est un foncteur de normalisation à valeurs dans  $\mathcal{G}_{M,D}^{norm} = \mathcal{G}_{M,D}^{diff,norm} \cap \mathcal{G}_{M,D}$ . Il suffit alors d'appliquer le [Théorème 2.1.1](#).  $\square$

Par le [Théorème 2.2.1](#), nous obtenons :

**Corollaire 2.2.1.** *La composée  $f^\# = \mu^\# \circ f$  est une équivalence de catégories entre celle des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes normales et celle des  $G_0^\#$ -extensions méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières.*

Enfin, en composant l'équivalence de catégories du [Corollaire 2.2.1](#) par le foncteur  $\mu$  ([Définition 1.6.5](#)) à droite, et en appliquant le [Lemme 1.6.2.2](#), nous obtenons :

**Corollaire 2.2.2.** *Il y a une équivalence de catégories entre  $\mathcal{G}^{norm}$  et la catégories des  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières. En particulier, pour toute  $G_0^\#$ -structure méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $S$  sur  $(M, D)$ , il existe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe normale  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  telle que  $\mathfrak{Kil}_S^{loc} = \mathfrak{Kil}_{M, \omega_0}^{loc}$  (voir [Définition 1.1.19](#) et [Définition 1.5.19](#)).*

### 2.2.7 Exemple des structures Lagrangiennes méromorphes

Soient  $m \geq 2$ ,  $G = SL_m(\mathbb{C})$  et  $P = B$  le sous-groupe de Borel standard de  $G$  associé à l'algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de l'[Exemple 1.4.5](#) (voir [Définition 1.4.12](#)). Soit  $\Delta$  le système de racines associé à  $\mathfrak{h}$ ,  $\Delta^+$  un sous-ensemble de racines positives et  $\Delta^0$  l'ensemble des racines simples. On note  $(\mathfrak{e}_{\pm\alpha}, \mathfrak{h}_\gamma)_{\alpha \in \Delta^+, \gamma \in \Delta^0}$  une base de Chevalley associée à ce système de racines.

Le sous-groupe  $P$  est donc un sous-groupe complexe parabolique de  $G$ , et la graduation  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  du [Théorème 1.4.2](#) est donnée par :

$$\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{|\alpha|=i} \mathbb{C}e_\alpha \quad (2.43)$$

pour tout  $i \neq 0$ , où  $|\alpha|$  est la hauteur de  $\alpha$  par rapport à  $\Delta^0$ ,  $k = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$  et  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . Le sous-espace  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{C}e_{-\alpha}$  est donc une sous-algèbre supplémentaire de  $\mathfrak{p}$ . En généralisant la preuve de l'[Exemple 1.4.10](#), on observe que  $(G, P)$  est la prolongation de Tanaka de  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$ , où  $G_0 = \exp_G(\mathfrak{h})$ . Nous notons  $G_0^\#$  le sous-groupe de la [Définition 2.2.2](#), et allons décrire les  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières.

Identifions  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  à  $\mathfrak{g}_-$  via la projection parallèlement à  $\mathfrak{p}$ . Par définition d'une algèbre de Cartan, le sous-groupe de Levi  $G_0$  stabilise les droites  $\mathbb{C}e_{-\alpha}$  pour tout  $\alpha \in \Delta^0$ . Comme  $G_0^\# = G_0 \times N$ , où  $N$  est le sous-groupe des automorphismes d'espace vectoriel filtré sur  $\mathfrak{g}_-$  dont la composante homogène de degré nul est l'identité, on obtient que  $G_0^\#$  stabilise les droites  $\mathbb{C}e_{-\alpha}$ .

Fixons alors une  $G_0^\#$ -extension méromorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  sur une paire  $(M, D)$  ([Définition 2.2.3](#)), et  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}_-)$

Définissons pour tout  $\gamma \in \Delta^0$  les sous-modules :

$$\bar{\mathcal{L}}_\gamma = \tilde{E}^\#(\mathbb{C}e_{-\gamma}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\gamma = \phi_0^{-1}(\bar{\mathcal{L}}_\gamma[\star D]) \cap TM \quad (2.44)$$

de  $\mathcal{E}$  et  $TM$  respectivement. Chaque  $\mathcal{L}_{\gamma_i}$  est un feuilletage holomorphe de rang 1 sur  $M$  ([Définition 1.7.1](#)). Les feuilletages sont transverses en tout point  $x \in M \setminus D$ , i.e  $\mathcal{L}_{\gamma_i}(x) \cap \mathcal{L}_{\gamma_j}(x) = \emptyset$  dès que  $i \neq j$ . Enfin, par définition d'une base Chevalley, la base  $(\mathfrak{e}_{-\alpha})_{\alpha \in \Delta^+}$  de  $\mathfrak{g}_-$  s'obtient par les crochets itérés des éléments de la famille  $(\mathfrak{e}_{-\gamma})_{\gamma \in \Delta^0}$ . Par régularité de  $(E, \omega_0)$ , et en utilisant la formule de Leibniz, nous obtenons :

$$TM[\star D] = \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{\gamma_1, \dots, \gamma_i \in \Delta^0} [\mathcal{L}_{\gamma_1}, [\mathcal{L}_{\gamma_2}, \dots [\mathcal{L}_{\gamma_{i-1}}, \mathcal{L}_{\gamma_i}]_{TM} \dots]_{TM}[\star D] \quad (2.45)$$

Par conséquent, nous obtenons un foncteur :

$$\lambda : \mathcal{E}^\# \longrightarrow \mathcal{L} \quad (2.46)$$

de la catégorie  $\mathcal{E}^\#$  des  $G_0^\#$ -extensions méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières vers une catégorie  $\mathcal{L}$  définie comme ci-dessous :

**Définition 2.2.9.** Soit  $(G, P)$  comme ci-dessus et  $k = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$ .

1. Une structure lagrangienne de contact méromorphe de degré  $k$ , sur une paire  $(M, D)$  est un  $k$ -uplet  $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k})$  de feuilletages de rang 1 sur  $M$ , transverses en tout  $x \in M \setminus D$ , et vérifiant la propriété (2.45). Une feuille  $\bar{\Sigma}$  de  $\mathcal{L}_{\gamma_i}$  est appelée  $\gamma_i$ -chaînette de  $\mathbb{L}$ .
2. Un isomorphisme entre deux structures lagrangiennes de contact méromorphes  $(\mathcal{L}_{\gamma_1}^1, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k}^1)$  et  $(\mathcal{L}_{\gamma_1}^2, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k}^2)$  de degré  $k$  sur  $(M_1, D_1)$  et  $(M_2, D_2)$  est un isomorphisme  $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$  de variétés complexes, avec  $\varphi(D_1) = D_2$  et  $d\varphi(\mathcal{L}_{\gamma_j}^1) = \varphi^* \mathcal{L}_{\gamma_j}^2$  pour tout  $j = 1, \dots, k$ . On note  $\mathcal{L}$  la catégorie ainsi obtenue.

Il est clair que  $\mathcal{L}$  est une catégorie équivalente à celle des  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières, et  $\lambda$  est le foncteur obtenu en composant le foncteur  $\mu$  (Définition 2.2.6) par cette équivalence. De plus :

**Lemme 2.2.7.1.** Le foncteur  $\lambda$  défini ci-dessus est surjectif sur les objets.

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{L}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k})$  une structure lagrangienne de contact méromorphe de degré  $k$  sur  $(M, D)$ . Recouvrons  $M$  par des ouverts  $U \subset M$  tels qu'il existe des bases  $\bar{s}_j$  de chaque restriction  $\mathcal{L}_{\gamma_j}|_U$ . Par la condition (2.45), les sous-modules  $(\mathcal{E}^{-i})_{i=1, \dots, k}$  de  $TM$  définis par :

$$\mathcal{E}^{-i} = \bigoplus_{\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_i}} [\mathcal{L}_{\gamma_{j_1}}, \mathcal{L}_{\gamma_{j_2}} \dots [\mathcal{L}_{\gamma_{j_{i-1}}}, \mathcal{L}_{\gamma_{j_i}}]_{TM} \dots]_{TM} \quad (2.47)$$

définissent une filtration d'un sous-module  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{-k}$ , vérifiant  $\mathcal{E}[\star D] = TM[\star D]$ . En particulier  $(\mathcal{E}, \phi_0)$  est une extension méromorphe sur  $(M, D)$ . De plus, les bases locales de  $\mathcal{E}$  obtenues en considérant les crochets itérés des sections  $(\bar{s}_j)_{j=1, \dots, k}$  définissent des trivialisations holomorphes de fibré en algèbre de Lie pour  $gr(\mathcal{E})$ , de fibre  $\mathfrak{g}_-$  (voir Définition 1.4.23). De manière équivalente, la  $G_0^\#$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$ , où  $\tilde{E}^\#$  est la réduction holomorphe du fibré des bases de  $\mathcal{E}$  correspondant aux sections précédentes, est  $\mathfrak{g}_-$ -régulière (voir Lemme 2.2.3.3). Par construction, l'image de  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  par  $\lambda$  est  $(\mathcal{L}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k})$ .  $\square$

**Theorème 2.2.3.** Soit  $(G, P)$  comme ci-dessus et  $\mathcal{G}^{norm}$  la catégorie des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes normales (Définition 2.2.7).

1. La composée du foncteur  $f : \mathcal{G}^{norm} \longrightarrow \mathcal{E}^\#$  et du foncteur  $\lambda$  défini ci-dessus est une équivalence de catégorie.
2. L'image  $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k})$  par  $\lambda \circ f$  d'un objet  $(E, \omega_0)$  de  $\mathcal{G}_{M, D}$  est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\gamma_i} = Tp(\mathcal{T}_{\mathfrak{e}_{-\gamma_i}})$$

où  $\mathcal{T}_{\mathfrak{e}_{-\gamma_i}}$  est le feuilletage distingué (Définition 1.7.2) sur  $E$ .

*Démonstration.* 1. En utilisant le Lemme 1.6.2.2, nous obtenons que la catégorie  $\mathcal{E}^\#$  est équivalente à celle des structures Lagrangiennes méromorphes de degré  $k$ . Par le Corollaire 2.2.1, nous obtenons l'équivalence annoncée.

2. Considérons la sous-représentation  $\mathbb{V}_i = ad(P)[\mathbf{e}_{-\gamma_i}]$  du groupe  $P$ . Son image par le passage au quotient  $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  est la classe de  $\mathbb{C}\mathbf{e}_{-\gamma_i}$ . Le sous-module  $\overline{\mathcal{L}}_{-\gamma_i}$  défini par (2.44) est donc l'image de  $E(\mathbb{V}_i)$  par le morphisme  $E(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Comme  $\mathcal{L}_{-\gamma_i} = TM \cap \phi_0^{-1}(\overline{\mathcal{L}}_{-\gamma_i})$ , on conclut en utilisant la Proposition 1.6.1.1 □

**Corollaire 2.2.3.** *Soit  $(G, P)$  comme ci-dessus,  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  et  $\mathbb{L}$  son image par le foncteur  $\lambda \circ f$ . Alors pour toute  $\gamma_i$ -chaînette  $\overline{\Sigma}$  de  $\mathbb{L}$ , et tout  $x_0 \in \overline{\Sigma}$ ,  $\overline{\Sigma}$  est une  $\mathbf{e}_{-\gamma_i}$ -géodésique de  $(E, \omega_0)$  en  $x_0$  (Définition 1.7.2).*

*Démonstration.* Choisissons  $x_0 \in \overline{\Sigma}$ . Il s'agit de prouver qu'il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $M$  et une courbe  $\mathbf{e}_{-\gamma_i}$ -distinguée  $\Sigma$  pour  $(E, \omega_0)$  telle que  $p(\Sigma) = \overline{\Sigma} \cap (U \setminus D) = U \cap (\overline{\Sigma} \setminus \{x_0\})$ , et la section  $\tau : U \cap (\overline{\Sigma} \setminus \{x_0\}) \rightarrow \Sigma$  inverse de  $p$  est une section  $\mathfrak{g}$ -méromorphe sur  $(U \cap \overline{\Sigma}, x_0)$  (Définition 1.1.12).

Commençons par prouver l'existence de  $\Sigma$  avec la première propriété. Remarquons pour cela que le champ  $\omega_0$ -constant  $\tilde{\mathbf{e}}_{-\gamma_i}$  est holomorphe sur  $E \setminus \tilde{D}$  et ne s'annule pas. Choisissons alors un voisinage  $U \subset M$  de  $x_0$  relativement compact, et une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$ . Par conséquent, le champ de vecteur  $\phi_0^{-1}([\sigma, \mathbf{e}_{-\gamma_i}])$  est holomorphe sur  $U \setminus D$  et ne s'annule jamais. Par le point 3. du Théorème 2.2.3, il définit  $\mathcal{L}_{-\gamma_i}$  sur  $U \setminus D$ . Considérons alors  $x \in U \cap (\overline{\Sigma} \setminus \{x_0\})$ ,  $e \in p^{-1}(x)$  et la feuille maximale  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}_{\mathbf{e}_{-\gamma_i}}$  en  $e$ . Son image  $p(\Sigma)$  est un ouvert de  $\overline{\Sigma}$ , contenant l'orbite  $\tilde{\gamma}(t) = \phi_{\mathbf{e}_{-\gamma_i}}^t(e)$  du flot de  $\tilde{\mathbf{e}}_{-\gamma_i}$  en  $e$ . Par les remarques précédentes, ce champ est complet, donc  $\tilde{\gamma}$  est définie sur  $\mathbb{C}$  et son image n'est contenue dans aucun compact de  $p^{-1}(U \setminus D)$ . En particulier, quitte à restreindre  $U$ , on a  $\overline{\Sigma} \cap (U \setminus D) \subset p \circ \tilde{\gamma}(\mathbb{C}) \subset p(\Sigma)$ , d'où le résultat.

Prouvons maintenant que l'inverse  $\tau : U \cap (\overline{\Sigma} \setminus \{x_0\}) \rightarrow \Sigma$  de la restriction de  $p$  à  $\Sigma$  est une section  $\mathfrak{g}$ -méromorphe sur  $(\overline{\Sigma} \cap U, x_0)$ . Il suffit pour cela de prouver que l'unique fonction holomorphe  $b$  sur  $U \cap (\overline{\Sigma} \setminus \{x_0\})$  à valeurs dans  $P$  telle que  $\tau = \sigma \cdot b$  en restriction à cette sous-variété se prolonge à  $U \cap \overline{\Sigma}$  en une fonction méromorphe. Or  $d \log(b)$  est la restriction de  $\pi_{\mathfrak{p}} \circ \sigma^* \omega_0$  à  $\overline{\Sigma} \cap U$ , où  $\pi_{\mathfrak{p}}$  est la projection parallèlement à  $\mathfrak{g}_-$ . Elle est donc méromorphe. Comme de plus  $b$  est univaluée, elle est nécessairement méromorphe. □

## 2.3 Problème d'équivalence branché correspondant

Nous reprenons les notations de la section 2.2 et fixons une paire  $(M, D)$ . Soit  $\mu$  le foncteur de la Définition 1.6.5 associé à  $\mathcal{E}^\#$ , et  $\mathcal{S}$  la sous-catégorie de  $G_0^\#$ -structures méromorphes correspondantes. Nous nommerons les objets de  $\mathcal{S}$  les  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières.

Le but de cette section est le suivant : étant fixée une paire  $(M, D)$ , donner une description des  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières sur  $(M, D)$  qui sont images d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée et normales sur  $(M, D)$ , via l'équivalence du Corollaire 2.2.2. Ce problème sera appelé *problème d'équivalence branché*. Il est justifié car le foncteur de normalisation  $h$  ne préserve pas, en général, la sous-catégorie  $\mathcal{G}^0$  des géométries de Cartan holomorphes branchées sur  $(M, D)$ .

Nous commencerons par un résultat local (Corollaire 2.3.1), puis un résultat global (Théorème 2.3.1). Ces résultats nous permettront de construire des exemples de  $G_0^\#$ -structures méromorphes  $\mathfrak{g}_-$ -régulières sur une paire  $(M, D)$  qui sont image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée, mais d'aucune  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$ . Ces contre-exemples seront modélés sur un couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  vérifiant  $G_0^\# = Q$ . Cette propriété simplifie les preuves car le Lemme 2.2.4.1 est trivial dans ce cas.

La caractérisation globale est une conséquence directe de la caractérisation locale grâce aux hypothèses (sous-section 2.2.1).

### 2.3.1 Problème d'équivalence branché local

Nous commençons par caractériser les objets de  $\mathcal{E}$  (Définition 2.2.5) qui proviennent localement d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale (Définition 2.2.7).

Fixons une paire  $(M, D)$  et un objet  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  de  $\mathcal{E}_{M,D}$ , ainsi qu'une section holomorphe  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \tilde{E}$ . Notons  $\mathcal{A}$  sa matrice (1.148) et  $k^{\tilde{\sigma}}$  sa fonction de structure (Définition 1.7.4).

**Définition 2.3.1.** La suite normalisante associée à  $\tilde{\sigma}$  est la suite  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1, \dots, r_0+1}$  de couples formés de deux fonction méromorphes sur  $U$  à valeurs respectivement dans  $\mathbb{H}^1$  et  $\mathbb{W}$ , et définies par récurrence par :

$$\Omega_1 = k^{\tilde{\sigma}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_1 = -\chi_1 \circ \pi_1(\Omega_1) \quad (2.48)$$

et :

$$\Omega_{l+1} = \Omega_l + \partial \mathcal{B}_l + d(\mathcal{B}_l \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A}^{-1} \wedge \mathcal{A}^{-1}) + [\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_l]_{\mathfrak{g}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{l+1} = -\chi_{l+1} \circ \pi_{l+1}(\Omega_{l+1}) \quad (2.49)$$

Nous définissons aussi :  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} = \sum_{l=1}^{r_0+1} \mathcal{B}_l$ .

**Lemme 2.3.1.1.** Soit  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \tilde{E}$  comme précédemment et  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1, \dots, r_0+1}$  la suite normalisante correspondante (Définition 2.3.1). Soient :

- $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal holomorphe tel que  $\tilde{E} = E \times_P Q$
- $\sigma : U \rightarrow E$  une section holomorphe dont la classe  $[\sigma]_{\tilde{E}}$  modulo  $P'$  coïncide  $\tilde{\sigma}$
- $\psi_{\sigma}$  la trivialisatation de  $E(\mathbb{H})$  sur  $U$  induite par  $\sigma$  (Définition 1.1.11)
- $\omega_1$  l'unique  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe  $\sigma$ -horizontale sur  $E$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  (Définition 1.6.10) et Proposition 1.6.6.1) et  $\bar{k}_{\omega_1} = p_* k_{\omega_1}$  la section différentiable de  $E(\mathbb{W})$  correspondant à sa courbure.

Alors pour tout  $l = 0, \dots, r_0 + 1$  :

$$\psi_{\sigma}(\varphi_{l+1}) = \mathcal{B}_{l+1} \quad \text{et} \quad \psi_{\sigma}(\bar{k}_{\omega_1^{l+1}}) = \Omega_{l+1} \quad (2.50)$$

où  $(\omega_0^l, \varphi_{l+1})_{l=0, \dots, r_0+1}$  est la suite normalisante associée à la réduction

$$\hat{E} = \sigma(U) \cdot G_0$$

et  $(E|_U, \omega_1)$  (Définition 2.2.8). En particulier, les termes  $\mathcal{B}_l$  sont à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ .

*Démonstration.* Nous faisons une preuve par récurrence sur  $l = 0, \dots, r_0 + 1$ . Notons  $\bar{\chi}_l$  le morphisme de la Proposition 2.2.1.1 associé à la réduction  $\hat{E}$  et aux supplémentaires  $\mathfrak{n}_l, \mathfrak{m}_l$  (sous-section 2.2.1).

Pour  $l = 0$ , par le Lemme 1.7.3.2, nous avons  $\psi_{\sigma}(\bar{k}_{\omega_1}) = k_{\omega_1} \circ \sigma = k^{\tilde{\sigma}}$ . De plus, par définition de  $\bar{\chi}_1$ , nous obtenons :

$$\psi_{\sigma}(\varphi_1) = \psi_{\sigma}(-\bar{\chi}_1 \circ \bar{\pi}_{\leq 1}(\bar{k}_{\omega_1})) = -\chi_1 \circ \pi_{\leq 1}(\psi_{\sigma}(\bar{k}_{\omega_1})) = -\chi_1 \circ \pi_{\leq 1}(k^{\tilde{\sigma}}) = \mathcal{B}_1 \quad (2.51)$$

Si la propriété est vraie au rang  $l \leq r_0$ , alors par l'hypothèse de récurrence sur  $\Omega_r$  et le principe précédent nous avons :

$$\psi_{\sigma}(\varphi_{l+1}) = \psi_{\sigma}(-\bar{\chi}_{l+1} \circ \bar{\pi}_{\leq l+1}(\bar{k}_{\omega_1^l})) = -\chi_{l+1} \circ \pi_{\leq l+1}(\psi_{\sigma}(\bar{k}_{\omega_1^l})) = -\chi_{l+1} \circ \pi_{\leq l+1}(\Omega_l) = \mathcal{B}_{l+1} \quad (2.52)$$

L'identité sur  $\Omega_{l+1}$  s'obtient directement à l'aide du Lemme 1.5.3.3. L'hérédité est prouvée. Enfin, les termes  $\mathcal{B}_l$  sont à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  car  $\mathbb{E}$  est normale (Lemme 2.2.6.1, point 1).  $\square$

**Corollaire 2.3.1.** Soit  $(M, D)$  une paire. Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $M$  et  $\tilde{\sigma}$  une section holomorphe de  $\tilde{E}$  sur  $U$ . Notons  $\mathcal{A}$  la matrice de  $\tilde{\sigma}$  ([\(1.148\)](#)) et  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1, \dots, r_0+1}$  la suite normalisante associée ([Définition 2.3.1](#)). Alors les faits suivants sont équivalents :

- (i) Il existe une  $(G, P)$ -connexion de Cartan holomorphe branchée normale  $(E, \omega'_0)$  sur  $p^{-1}(U)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  par  $f$ .
- (ii) Il existe une fonction méromorphe  $\rho'$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}' = \text{Lie}(P')$  et une fonction méromorphe  $\mathcal{C}$  sur  $U$  à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})^1$  avec les propriétés suivantes :
  - (a) La 1-forme  $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$  est holomorphe sur  $U$ .
  - (b) On a  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} = \mathcal{C} + F(-\rho') + \exp_G(\rho')^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1}$  où  $F$  est la fonction définie dans le [Lemme 1.6.5.2](#) et  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}}$  est celle de la [Définition 2.3.1](#).

*Démonstration.* Prouvons (i) implique (ii). Posons  $\tilde{E} = \tilde{\sigma} \cdot Q$ . Grâce à l'hypothèse (H2) ([sous-section 2.2.1](#)), il existe une section holomorphe  $\sigma : U \rightarrow E$  telle que  $[\sigma]_{\tilde{E}} = \tilde{\sigma}$ . Soit alors  $\omega_1$  la  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe sur  $E$ ,  $\sigma$ -horizontale et dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  ([Proposition 1.6.6.1](#)). Comme  $\mathbb{E}$  est une extension holomorphe sur  $(M, D)$ ,  $\omega_1$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée sur  $E$ . De plus, par le [Lemme 2.2.3.1](#), elle est régulière. Considérons alors  $\hat{E} = \sigma(U) \cdot G_0$  et la géométrie de Cartan méromorphe régulière et normale  $(E, \omega_0)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_U$  où  $\omega_0 = (\omega_0^{r_0+1})$  est le dernier terme de la suite normalisante associée à  $(E, \omega_1)$  et la réduction  $\hat{E}$  ([Lemme 2.2.6.1](#)). Par le [Lemme 2.3.1.1](#) nous avons donc  $\omega_1 \xrightarrow{\varphi} \omega_0$  avec :

$$\mathcal{B} = \psi_{\sigma}(\varphi) \quad (2.53)$$

Fixons une autre  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe normale  $\omega'_0$  sur  $E$  telle qu'il existe une flèche entre  $f^{\#}(E, \omega'_0)$  et  $f^{\#}(E, \omega_0)$ . Notons :

$$\mathcal{C} = \psi_{\sigma}(\varphi') \quad (2.54)$$

où  $\varphi'$  est la section méromorphe de  $E(\mathbb{H}^1)$  sur  $U$  avec  $\omega_1 \xrightarrow{\varphi'} \omega'_0$ . Par le [Proposition 2.2.5.1](#), il existe un flèche  $\Psi$  de  $\mathcal{G}_{U,D}$  entre  $(E, \omega'_0)$  et  $(E, \omega_0)$ . Plus précisément il existe une fonction méromorphe  $\tilde{\rho}' : E \rightarrow \mathfrak{g}^1$  telle que  $\Psi(e) = e \cdot \tilde{\rho}'(e)$  pour tout  $e \in E$ . Le [Lemme 1.6.5.2](#) implique qu'il existe une fonction méromorphe sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}'$  telle que  $\omega'_0 \xrightarrow{\phi} \omega_0$  où :

$$-\mathcal{C} + \mathcal{B} = \psi_{\sigma}(\phi) = F(-\rho') + \exp_G(\rho')^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1} \quad (2.55)$$

Le résultat en découle immédiatement car  $\omega'_0$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée sur  $E$  si et seulement si  $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$  est holomorphe sur  $U$  ([Lemme 1.6.5.1](#)).

Réciproquement si (ii) est vérifiée, alors on considère le fibré  $P$ -principal holomorphe trivial  $E \xrightarrow{p} U$ . La section  $\tilde{\sigma}$  permet d'identifier  $E \times_P Q$  à la réduction holomorphe  $\tilde{E} = \tilde{\sigma} \cdot Q$  de  $\tilde{E}^{\#}$ . L'hypothèse (H2) ([sous-section 2.2.1](#)) permet d'identifier  $\tilde{\sigma}$  à la section canonique de  $E$ , et on construit comme précédemment une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe normale sur  $E$  dans la fibre de  $(\phi_0, \tilde{E})$ . Alors la connexion de Cartan méromorphe  $\omega'_0$  définie comme précédemment est une connexion de Cartan holomorphe branchée par les égalités précédentes, et il existe par construction une flèche entre  $f^{\#}(E, \omega_0)$  et  $f^{\#}(E', \omega'_0)$ .  $\square$

### 2.3.2 Problème d'équivalence branché global

Nous avons donné un algorithme pour déterminer les  $Q$ -extensions méromorphes normales  $\mathbb{E}$  sur une paire  $(M, D)$  qui proviennent, au voisinage de tout point  $x \in M$ , d'une géométrie

de Cartan holomorphe branchée normale ([Corollaire 2.3.1](#)). Nous prouvons maintenant que ces dernières sont exactement celles dans l'image de  $\mathcal{G}_{M,D}^{0,norm}$ .

Nous commençons par prouver une version plus forte du résultat d'interpolation du [Théorème 1.8.1](#) :

**Proposition 2.3.2.1.** *Soit  $(M, D)$  une paire et  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E}) \in \mathcal{E}_{M,D}$ . Soient :*

- *Un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  tel que  $\tilde{E} = E \times_P Q$*
- *$X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$  un sous-ensemble discret de  $M$*
- *$(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille de voisinages disjoints des éléments de  $X$*
- *$(\omega_{0,\alpha})_{\alpha \in I}$  une famille de  $(G, P)$ -connexions de Cartan méromorphes régulières normales, où  $\omega_{0,\alpha}$  est définie sur  $p^{-1}(U_\alpha)$  et dans la fibre de  $\mathbb{E}|_{U_\alpha}$  par  $f$*

*Il existe une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe régulière normale  $\omega_0$  sur  $E$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$  et des voisinages  $U'_\alpha \Subset U_\alpha$  de chaque  $x_\alpha \in X$  tels que  $\omega_0|_{p^{-1}(U'_\alpha \setminus D)}$  coïncide avec  $\omega_{0,\alpha}$  pour tout  $\alpha \in I$ .*

*Démonstration.* Par définition, pour tout  $\alpha \in I$ ,  $k_{\omega_{0,\alpha}}$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{n}$  en restriction à  $\hat{E}_\alpha$ . Par le [Lemme 2.2.6.1](#), pour toute connexion de Cartan différentiable  $\omega_1$  sur  $E \setminus \tilde{D}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$  par  $f^{diff}$  (voir [sous-section 1.8.1](#)), l'image  $h(E, \omega_1)$  associée à une réduction différentiable  $\hat{E} \subset E$  au sous-groupe  $G_0$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe normale sur  $(M, D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ .

Définissons alors  $\hat{E}$  comme l'un des réductions différentiables obtenues en appliquant le [Théorème 1.2.1](#) au sous-groupe  $G_0 \subset P$  et à des sections holomorphes  $\sigma_\alpha : U'_\alpha \rightarrow E$  définies aux voisinages  $U'_\alpha$  de chaque  $x_\alpha$  ( $\alpha \in I$ ).

Appliquons le [Théorème 1.8.1](#) : il existe une connexion de Cartan différentiable  $\omega_1$  comme ci-dessus, et des voisinages  $(U'_\alpha)_{\alpha \in I}$  de chaque élément  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ , inclus dans  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ , avec la propriété suivante. Pour tout  $\alpha \in I$ , les restrictions de  $\omega_1$  et de  $\omega_{0,\alpha}$  à  $p^{-1}(U'_\alpha)$  coïncident. Soit alors  $(E, \omega_0) = h(E, \omega_1)$  où  $h$  est le foncteur de la [Lemme 2.2.6.1](#) associé à la réduction  $\hat{E} \subset E$  définie ci-dessus. Alors  $(E, \omega)$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe normale sur  $(M, D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ . De plus, par définition de  $\hat{E}$ , pour tout  $\alpha \in I$ ,  $\omega_0$  coïncide avec  $\omega_{0,\alpha}$  en restriction à  $p^{-1}(U'_\alpha)$ .  $\square$

Pour appliquer la [Proposition 2.3.2.1](#), fixons une paire  $(M, D)$  et considérons les composantes irréductibles  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $D$ . Fixons un sous-ensemble discret de  $M$  :

$$X = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \tag{2.56}$$

tel que  $x_\alpha \in D_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ .

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe effective telle que  $\mathfrak{g}$  est graduée et vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) du [Théorème 2.2.2](#). Soit  $(M, D)$  une paire et  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension holomorphe  $\mathfrak{g}_-$ -régulière ([Définition 2.2.3](#)) sur  $(M, D)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$\mathbb{E}$  est l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe régulière normale sur  $(M, D)$ .*
- (ii) *Pour tout  $X$  comme en [\(2.56\)](#), et pour tout  $\alpha \in I$ , il existe un voisinage  $U_\alpha$  de  $x_\alpha \in X$  et un objet  $(E_\alpha, \omega_{0,\alpha})$  de  $\mathcal{G}_{U_\alpha, D}^{0,norm}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_{U_\alpha}$  par  $f$ .*
- (iii) *Il existe  $X$  comme en [\(2.56\)](#) et une famille  $(\tilde{\sigma}_\alpha)_{\alpha \in I}$  de sections holomorphes de  $\tilde{E}$  définies aux voisinages de ses points, avec la propriété (ii) du [Corollaire 2.3.1](#).*

*Démonstration.* L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est immédiate. L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) se déduit directement du point 2. du [Corollaire 2.3.1](#). Prouvons (ii)  $\iff$  (iii). Le sens direct est une application immédiate du [Corollaire 2.3.1](#). Prouvons le sens réciproque. Supposons que  $\mathbb{E}$  vérifie (iii) et fixons un ensemble  $X$  comme en [\(2.56\)](#), ainsi qu'une famille  $(\tilde{\sigma}_\alpha)_{\alpha \in I}$  de sections holomorphes de  $\tilde{E}$  définies sur des voisinages disjoints  $U_\alpha$  de chaque  $x_\alpha \in X$  vérifiant (a) et (b). Appliquons le [Lemme 1.8.3.1](#) pour obtenir un fibré  $P$ -principal holomorphe  $E \xrightarrow{p} M$  tel que  $E \times_P Q = \tilde{E}$ . Grâce à la section  $s : Q \rightarrow P$ , nous pouvons construire des sections holomorphes  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $E$  sur chaque  $U_\alpha$  vérifiant  $[\sigma_\alpha]_{\tilde{E}} = \tilde{\sigma}_\alpha$ .

Alors pour tout  $\alpha \in I$ , le [Corollaire 2.3.1](#) implique qu'il existe une  $(G, P)$ -connexion de Cartan holomorphe branchée normale  $\omega_{0,\alpha}$  sur  $p^{-1}(U_\alpha)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}|_{U_\alpha}$ . Le [Lemme 2.2.3.1](#) implique qu'elle est automatiquement régulière.

Nous pouvons alors appliquer la [Proposition 2.3.2.1](#) pour obtenir une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe régulière et normale  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  dans la fibre de  $\mathbb{E}$ , avec la propriété suivante : il existe une famille  $(U'_\alpha)_{\alpha \in I}$  de voisinages  $U'_\alpha \Subset U_\alpha$  de chaque  $x_\alpha \in X$  telle que  $\omega_0$  coïncide avec  $\omega_{0,\alpha}$  en restriction à  $p^{-1}(U'_\alpha \setminus D)$ , pour tout  $\alpha \in I$ . En particulier,  $\omega_0$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée sur chaque ouvert  $p^{-1}(U'_\alpha)$  : il s'agit donc de la restriction d'une 1-forme holomorphe sur cet ouvert. Comme  $D_\alpha$  est irréductible,  $\omega_0$  est la restriction d'une 1-forme holomorphe sur un voisinage de  $D_\alpha$ . Cela est vrai pour tout  $\alpha \in I$ , et par conséquent  $\omega_0$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée sur  $E$ .  $\square$

Soit  $\mu$  le foncteur de la [Définition 1.6.5](#), alors :

**Corollaire 2.3.2.** *Soient  $(M, D)$  une paire et  $S$  une  $G_0^\#$ -structure méromorphe sur  $(M, D)$  dont la restriction à  $M \setminus D$  est régulière. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$S$  est dans l'image de  $\mathcal{G}_{M,D}^{0,norm}$  par  $\mu \circ f^\#$ .*
- (ii) *Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un objet  $(E, \omega_0) \in \mathcal{G}_{U,D}^{0,norm}$  avec  $\mu \circ f^\#(E, \omega_0) = S|_U$ .*
- (iii) *Il existe un sous-ensemble  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $M$  comme en [\(2.56\)](#) avec la propriété suivante. Pour tout  $\alpha \in I$ , il existe un voisinage  $U_\alpha$  de  $x_\alpha$  et  $(E_\alpha, \omega_{0,\alpha}) \in \mathcal{G}_{U_\alpha,D}^{0,norm}$  avec  $\mu \circ f^\#(E_\alpha, \omega_{0,\alpha}) = S|_{U_\alpha}$ .*

*Démonstration.* D'abord, les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (ii)  $\Rightarrow$  (i) sont immédiates. Prouvons maintenant (iii)  $\Rightarrow$  (i). Soit donc  $S$  une  $G_0^\#$ -structure méromorphe vérifiant (iii) et notons  $\tilde{E}_0^\#$  la réduction holomorphe de  $R^1(M \setminus D)$  au sous-groupe  $G_0^\#$  qui lui correspond. Posons pour tout  $\alpha \in I$  :  $\tilde{E}_\alpha = E_\alpha \times_P Q$ . Alors  $\tilde{E}_\alpha|_{U_\alpha \setminus D}$  s'identifie à une réduction de  $\tilde{E}_0^\#|_{U_\alpha \setminus D}$  ([Lemme 1.6.1.1](#)). Ceci étant valable pour tout  $\alpha \in I$ , et  $D_\alpha$  étant irréductibles, nous obtenons que  $\tilde{E}_0^\#$  s'étend en un fibré  $G_0^\#$ -principal holomorphe sur  $M$ , et l'identité de  $TM$  s'étend en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_M[\star D]$ -modules  $\phi_0 : TM[\star D] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}[\star D]$  où  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Autrement dit  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  est un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$ , et pour tout  $\alpha \in I$ ,  $\tilde{E}_\alpha$  est une réduction holomorphe de  $\tilde{E}^\#|_{U_\alpha}$  au sous-groupe  $Q$ . Comme  $(E_\alpha, \omega_{0,\alpha})$  est supposée normale, son image  $(\phi_0, \tilde{E}_\alpha)$  par  $f$  est une  $Q$ -extension méromorphe normale ([Définition 2.2.5](#)). Par le [Lemme 2.2.4.1](#) il existe une unique réduction holomorphe  $\tilde{E}_0 \subset E_0^\#$  au sous-groupe  $Q$  telle que  $(\phi_0, \tilde{E}_0)$  est une  $Q$ -extension méromorphe normale, i.e  $\tilde{E}_0$  prolonge les réductions  $\tilde{E}_\alpha|_{U_\alpha \setminus D}$ . On obtient une  $Q$ -extension méromorphe normale  $(\phi_0, \tilde{E})$  sur  $(M, D)$ , vérifiant les hypothèses du [Théorème 2.3.1](#), donc  $(\phi_0, \tilde{E}^\#)$  où  $\tilde{E}^\#$  est l'extension de  $\tilde{E}$  au sous-groupe  $G_0^\#$  vérifie  $\mu(\phi_0, \tilde{E}^\#) = S$  et  $(\phi_0, \tilde{E}^\#) \in f^\#(\mathcal{G}^{0,norm})$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

### 2.3.3 Connexions de Weyl méromorphes et cas des $G$ -structures classiques

Soit  $(M, D)$  une paire et  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  un couple comme dans la sous-section 2.2.1. En particulier, l'hypothèse (H3) implique que pour tout  $l \geq 1$ , tout élément  $\kappa \in \mathfrak{n}_l$ , et tout  $p \in P$ , nous avons  $p^{-1} \cdot \kappa \in \mathfrak{n}_l \bmod \pi_{l+1}(\mathbb{W})$ . Nous allons donner une signification géométrique au premier terme d'une suite normalisante (Définition 2.3.1).

Soit  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$  (Définition 2.2.3). Par le Corollaire 2.2.1, il existe un objet  $(E, \omega_0) \in \mathcal{G}_{M,D}^{norm}$  (Définition 2.2.7) dans la fibre de  $\mathbb{E}^\#$  par  $f^\#$ . Nous notons  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ , et

$$E^0 = \tilde{E}^\# \times_{G_0^\#} G_0 = E \times_P G_0 \quad (2.57)$$

ainsi que  $\pi : E \rightarrow E^0$  la projection naturelle.

**Définition 2.3.2.** Une structure de Weyl méromorphe pour  $\mathbb{E}^\#$  sur un ouvert  $U \subset M$  est un couple  $((E, \omega_0), \tau)$  où  $(E, \omega_0)$  est un objet de  $\mathcal{G}_{U,D}^{norm}$  dans la fibre de  $\mathbb{E}^\#|_U$  par  $f^\#$  et  $\tau : E^0|_U \rightarrow E$  une section méromorphe de la projection  $\pi$  sur le fibré  $G_0$ -principal holomorphe défini par (2.57).

Fixons une structure de Weyl méromorphe  $((E, \omega_0), \tau)$  de  $\mathbb{E}^\#$  sur  $U$ . Par définition d'une  $(G, P)$ -connexion de Cartan méromorphe, la 1-forme :

$$\tilde{\omega} = \tau^* \text{proj}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g} \ominus \mathfrak{p}^+} \omega_0 \quad (2.58)$$

est une connexion  $G_0$ -principale méromorphe sur  $E^0$ . De plus, par la projection  $\pi^\# : E \rightarrow \tilde{E}^\#$  sur le fibré  $Q$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  du Lemme 2.2.4.1,  $\tau$  induit une section méromorphe  $\tilde{\tau} : E^0|_U \rightarrow \tilde{E}^\#|_U$  de la projection naturelle  $\tilde{\pi} : \tilde{E}^\# \rightarrow E^0$ , et par conséquent  $\tilde{\omega}$  s'étend en une connexion  $G_0^\#$ -principale méromorphe sur  $\tilde{E}^\#|_U$ .

**Lemme 2.3.3.1.** Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme ci-dessus et  $(M, D)$  une paire. Soit  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$ ,  $U \subset M$  un ouvert et  $\theta_0$  la solderform méromorphe associée (Définition 1.6.3). Soient  $(\mathfrak{n}_l)_{l \geq 1}$  des supplémentaires comme dans la sous-section 2.2.1.

1. Soit  $((E, \omega_0), \tau)$  une structure de Weyl méromorphe sur  $U$ ,  $\tilde{\omega}$  la connexion  $G_0^\#$ -principale méromorphe sur  $\tilde{E}^\#|_U$  induite par (2.58) et  $\hat{\omega} = \theta_0 \oplus \tilde{\omega}$ . Alors :

$$\pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} [d\theta_0 \circ \bigwedge^2 \hat{\omega}^{-1}] \text{ est à valeurs dans } \mathfrak{n}_1 \quad (2.59)$$

où  $\pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}}$  est la projection de  $\mathbb{W}$  sur  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  (voir sous-section 1.7.3).

2. Soit  $\tilde{\omega}$  une connexion  $G_0^\#$ -principale méromorphe sur  $\tilde{E}^\#|_U$  vérifiant (2.59). Alors il existe une structure de Weyl méromorphe  $((E, \omega_0), \tau')$  sur  $U$  et une section méromorphe  $\varphi'$  de  $\tilde{E}^\#(\mathbb{H}^2)$  sur  $U$  telles que  $\tilde{\omega} \xrightarrow{\varphi'} \tilde{\omega}'$  où  $\tilde{\omega}'$  est définie par (2.58).

*Démonstration.* 1. Soit  $k_{\omega_0}$  la courbure de  $(E, \omega_0)$ , donc  $\pi_1(k_{\omega_0})$  est à valeurs dans  $\mathfrak{n}_1$  par l'hypothèse sur  $O \subset P$  et la définition de la catégorie  $\mathcal{G}^{norm}$ . Comme  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}^1) \subset \mathbb{H}^2$  et que  $\partial$  préserve les filtrations, la composante de degré homogène 1 de  $\partial((\tau^* \text{proj}_{\mathfrak{g}^1} \omega_0) \circ \hat{\omega}^{-1})$  est identiquement nulle. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} [d\theta_0 \circ \bigwedge^2 \hat{\omega}^{-1}] &= \pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} [d(\text{proj}_{\mathfrak{g}_-} \tau^* \omega_0) \circ \bigwedge^2 (\text{proj}_{\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0} \tau^* \omega_0)^{-1} - [\cdot]_{\mathfrak{g}_-}] \\ &= \pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} [k_{\omega_0} \circ \tau - \partial((\tau^*(\omega_0 - \text{proj}_{\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0} \omega_0) \circ \hat{\omega}^{-1}))] \\ &= \pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} [k_{\omega_0} \circ \tau - \partial((\tau^* \text{proj}_{\mathfrak{g}^1} \omega_0) \circ \hat{\omega}^{-1})] \\ &= \pi_1 \circ \pi_{\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}} (k_{\omega_0} \circ \tau) \end{aligned} \quad (2.60)$$

est à valeurs dans  $\mathfrak{n}_1$ .

2. Soit  $\tau : E^0|_U \longrightarrow (E, \omega_0)$  une structure de Weyl méromorphe arbitraire sur  $U$ , et  $\tilde{\omega}''$  la connexion  $G_0^\#$ -principale correspondante. Soit  $\varphi$  la section méromorphe de  $\tilde{E}^\#(\mathbb{H}_p)$  telle que  $\tilde{\omega} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\omega}''$  (Définition 1.6.9). Alors  $\tilde{\omega}''$  vérifie (2.59), donc le Lemme 1.5.3.3 implique que  $\pi_1(\partial\tilde{\varphi})$  est à valeurs dans  $\mathfrak{n}_1$ , où  $\tilde{\varphi} = \tilde{p}^*\varphi$  est la fonction équivariante sur  $\tilde{E}^\#|_U$  correspondant à  $\varphi$ . Par définition de  $\mathfrak{n}_1$ , nous avons donc  $\partial\pi_1(\varphi) = 0$ . L'hypothèse (H1) dans la sous-section 2.2.1 implique qu'il existe une fonction méromorphe  $B$  sur  $\tilde{E}^\#|_U$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}^1$  telle que  $\pi_1(\tilde{\varphi}) = \partial B$ . Soit alors :

$$\tau' = \tau \cdot \exp_G(-B) \quad (2.61)$$

et  $\tilde{\omega}'$  la connexion  $G_0^\#$ -principale méromorphe sur  $\tilde{E}^\#$  définie par (2.58). Alors par le Lemme 1.6.5.2 :  $\tilde{\omega} \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{\omega}'$  où  $\tilde{\varphi}_1 := \tilde{p}^*\varphi_1 = -\partial B = \pi_1(\tilde{\varphi})$ . Par conséquent,  $\tilde{\omega} \xrightarrow{\varphi'} \tilde{\omega}''$  où :

$$\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi} - \pi_1(\tilde{\varphi}) \quad (2.62)$$

est à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$ . □

**Définition 2.3.3.** Soit  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$ .

1. Une connexion de Weyl méromorphe pour  $\mathbb{E}^\#$  sur  $U$  est une connexion  $G_0^\#$ -principale sur  $\tilde{E}^\#|_U$  avec (2.59).
2. Une connexions de Weyl méromorphe est induite par une structure de Weyl méromorphe  $((E, \omega_0), \tau)$  si elle est obtenue par la formule (2.58).

**Lemme 2.3.3.2.** Si  $(\mathfrak{g}_-, G_0) = (\mathbb{C}^n, H)$  où  $\mathbb{C}^n$  est l'algèbre de Lie abélienne et  $H \subset GL_n(\mathbb{C})$  est d'ordre fini, alors :

1. Toute connexion de Weyl méromorphe pour un objet  $\mathbb{E}^\# \in \mathcal{E}_{M,D}^\#$  est induite par une structure de Weyl méromorphe pour ce dernier.
2. Si  $H$  contient le sous-groupe orthogonal, alors il y a bijection entre les connexions de Weyl méromorphes sur un ouvert  $U \subset M$  et les connexions méromorphes sur  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ , sans torsion et préservant la réduction  $\tilde{E}^\# \subset R(\mathcal{E})$ .

*Démonstration.* 1. Reprenons le Lemme 2.3.3.1 point 2. en remarquant que  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0) \cap Hom(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^2 = \{0\}$  car  $k = 1$ . Par conséquent, nous obtenons  $\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}$ .

2. Si  $O_n(\mathbb{C}) \subset H$ , alors on a  $Im(\partial) = \mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  (voir [45], Lemme 3.3.4). Donc  $\mathfrak{n}_1 = \{0\}$ . De plus,  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  est contenu dans les degrés homogènes 0 et 1. La composante de degré homogène 0 est nulle car  $\mathfrak{g}_{-2} = \{0\}$ , et la propriété (2.59) équivaut donc à l'absence de torsion. □

### 2.3.4 Structures méromorphes d'ordre 0

Nous donnons à présent des exemples de  $H$ -structures méromorphes régulières, où  $H$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ , qui proviennent d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$  (via le foncteur  $f^\#$ ), mais ne proviennent d'aucune géométrie de Cartan holomorphe branchée normale.

Commençons par le groupe orthogonal  $H = O_2(\mathbb{C})$  qui est d'ordre 0 (Exemple 1.4.7). En particulier, les groupes  $P, G_0, G_0^\#$  et  $Q$  sont tous égaux à  $H$  et  $f = f^\#$ . La géométrie de Klein correspondante est donc  $(G, P) = (Euc_2(\mathbb{C}), O_2(\mathbb{C}))$  et nous reprenons a base  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_{-2}, A)$  de

$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  définie dans l'Exemple 1.4.4 et notons  $\mathfrak{g}_-$  le sous-espace engendré par  $\mathfrak{e}_{-1}, \mathfrak{e}_{-2}$ . L'action adjointe de  $P$  sur  $\mathfrak{g}_-$  est la représentation canonique de  $O_2(\mathbb{C})$  lorsque  $\mathfrak{g}_-$  est identifié à  $\mathbb{C}^2$  via la base  $(\mathfrak{e}_{-1}, \mathfrak{e}_{-2})$ .

Soit  $V \subset M$  un ouvert et  $\theta : V \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Alors la fonction  $q = \exp_{G_0}(\theta A)$  est :

$$q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Comme  $\mathfrak{g}_-$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\partial(\mathfrak{g}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$ , où  $\partial$  désigne la différentielle de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relative (Définition 1.4.6). On a aussi  $\partial(\mathbb{H}) = \mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  où  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-} = (\bigwedge^2 \mathfrak{g}_-^*) \otimes \mathfrak{g}_-$ . De plus, l'action adjointe de  $O_2(\mathbb{C})$  préserve le produit hermitien usuel sur  $\mathfrak{g}_-$ . On obtient un produit hermitien sur  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$ . De plus  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  et  $\mathbb{W}_{\mathfrak{p}}$  sont des  $P$ -modules. Nous obtenons un supplémentaire  $P$ -invariant  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \subset \mathbb{H}$  de  $\pi_1(\text{Im}(\partial)) = \text{Im}(\partial)$  contenant  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$ , et  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 = \mathbb{W}_{\mathfrak{p}}$  de  $\text{Im}(\partial)$  dans  $\mathbb{W}$ .

Rappelons enfin qu'il existe un foncteur entre les  $H$ -structures méromorphes sur  $(M, D)$  et les métriques riemanniennes méromorphes sur  $(M, D)$  (Définition 1.2.8 et Proposition 1.2.2.1). Nous dirons qu'une métrique riemannienne  $g$  est induite par une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  lorsque  $g$  est l'image de la structure  $S = \mu(\mathbb{E})$  où  $\mathbb{E}$  est la  $H$ -extension méromorphe image de  $(E, \omega_0)$  par  $f$ .

Le résultat ci-dessous sera notre outil pour produire des contre-exemples :

**Lemme 2.3.4.1.** Soit  $(\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension méromorphe sur une paire  $(M, D)$ ,  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^2)$  et  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$  deux sections méromorphes de  $\tilde{E}$  sur  $(U, D)$  où  $U$  est un ouvert de  $M$  (Définition 1.1.12). Soit  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  la base de  $\mathcal{E}[*D]$  sur  $U$  correspondant à  $\tilde{\sigma}$ . Soient  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}}$  et  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'}$  les matrices respectives de  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}'$  (1.148) ainsi que  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}}$  et  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'}$  les uniques termes de leurs suites normalisantes respectives (Définition 2.3.1). Supposons que  $\theta$  soit une fonction holomorphe sur un ouvert  $V \subset U$  tel que  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \cdot \exp_{G_0}(\theta A)$ . Alors :

$$\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'} = \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} + d\theta \otimes A \quad (2.64)$$

*Démonstration.*  $\partial$  est un morphisme de  $P$ -représentations, et  $\mathfrak{n}_1$  et  $\mathfrak{m}_1$  sont invariants par l'action de  $P$ . Par conséquent,  $\chi_1$  est un morphisme de  $P$ -représentations et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} &:= \chi_1 \circ \pi_1(k^{\tilde{\sigma}'}) \\ &= q^{-1} \cdot \chi_1(k^{\tilde{\sigma}} + \partial[(q^{-1})^* \omega_Q \circ \mathcal{A}^{-1}]) \\ &= q^{-1} \cdot \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} + q^{-1} \cdot \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{\text{Im}(\partial)}[(q^{-1})^* \omega_Q \circ \mathcal{A}^{-1}] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Or  $Q = G_0$  est commutatif, et  $\pi_1(\mathbb{H}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$ . Par conséquent l'action de  $q^{-1} \in Q$  sur  $\pi_1(\mathbb{H})$  s'obtient par composition à droite par  $\underline{ad}(q)$ . De plus, par définition :  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'} = \underline{ad}(q^{-1}) \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}}$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'} &= \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} \circ \underline{ad}(q) \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} \\ &= \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} + \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{\text{Im}(\partial)}[(q^{-1})^* \omega_Q] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Il nous reste à calculer le dernier terme. Or  $\mathfrak{m}_1 = \pi_1(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{q}))$ . Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{\text{Im}(\partial)}[(q^{-1})^* \omega_Q \circ \mathcal{A}] &= \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{\text{Im}(\partial)} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{Y}_{-1}} \mathfrak{e}_{-1}^* \otimes A + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{Y}_{-2}} \mathfrak{e}_{-2}^* \otimes A \right] \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \bar{Y}_{-1}} \bar{Y}_{-1}^* \otimes A + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{Y}_{-2}} \bar{Y}_{-2}^* \otimes A \end{aligned} \quad (2.67)$$

ce qui se réécrit comme (2.64). □

**Corollaire 2.3.3.** *Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$  une  $Q$ -extension holomorphe sur une paire  $(M, D)$ . Soit  $x_0 \in M$  et  $U \subset M$  un voisinage de  $x_0$  dans  $M$  muni d'une section holomorphe  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \tilde{E}$ . Soit  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}}$  l'unique terme de la suite normalisante associée à  $\tilde{\sigma}$  (Définition 2.3.1) et  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}}$  la matrice de  $\tilde{\sigma}$  (Équation 1.148). Si  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}}$  n'est pas une 1-forme logarithmique sur  $U$ , alors aucune  $Q$ -extension  $\mathbb{E}'$  induisant la même  $Q$ -structure méromorphe que  $\mathbb{E}|_U$  n'est l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée et normale sur  $(U, D)$ .*

*Démonstration.* Le Corollaire 2.3.1 montre que  $\mathbb{E}|_U$  n'est pas l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée et normale sur  $(U, D)$ . Fixons une autre  $Q$ -extension holomorphe  $\mathbb{E}' = (\phi'_0, \tilde{E}')$  sur  $(U, D)$  avec  $\mu(\mathbb{E}') = \mu(\mathbb{E}|_U)$ .

On peut supposer sans perte de généralité<sup>1</sup> que  $\mathbb{E} = (Id_{TM[\star D]}, \tilde{E})$  et  $\mathbb{E}' = (Id_{TM[\star D]}, \tilde{E}')$ , i.e les fibrés vectoriels holomorphes  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^n)$  et  $\mathcal{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{C}^n)$  (Définition 1.1.9) sont des sous-modules de  $TM[\star D]$ .

Quitte à restreindre  $U$ , il existe une section holomorphe  $\tilde{\sigma}' : U \rightarrow \tilde{E}'$ , et on note  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'}$  sa matrice ainsi que  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'}$  la suite normalisante qui lui est associée. La section  $\tilde{\sigma}'$  est donc une section méromorphe de  $\tilde{E}$  (Définition 1.1.12). Il existe donc une matrice méromorphe  $q : U \rightarrow Q$  de la forme (2.63) telle que  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \cdot q$ . Soit  $\theta : V \rightarrow \mathbb{C}$  comme dans l'énoncé du Lemme 2.3.6.4, donc

$$\exp_Q(\theta A) = q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Nous avons donc

$$d\theta \otimes A = \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} - \mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'} \quad (2.69)$$

Par l'hypothèse sur  $\tilde{\sigma}$ , il y a deux cas :

- (a)  $\mathbb{E}'$  est l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale. Dans ce cas,  $d\theta$  est non logarithmique par le Corollaire 2.3.1 et (2.69).
- (b)  $\mathbb{E}'$  n'est pas l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale.

Dans le cas (a), l'égalité (2.68) implique que  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  sont méromorphes sur  $U$ , donc  $e^{i\theta}$  est méromorphe sur  $U$ . Cela implique que  $i\theta$  et donc  $\theta$  possède une différentielle extérieure logarithmique. Ceci est absurde, donc seul le cas (b) est vérifié. □

Nous commençons par un exemple local, c'est à dire un germe de métrique riemannienne méromorphe sur  $(\mathbb{C}^2, \{z_1 = 0\})$  qui fournit un contre-exemple :

**Exemple 2.3.1.** *La métrique riemannienne méromorphe  $g$  sur  $(\mathbb{C}^2, \{z_1 = 0\})$  définie par :*

$$g(z_1, z_2) = z_1^2 dz_1^2 + z_1^2 dz_2^2 \quad (2.70)$$

*est induite par une  $H$ -extension holomorphe sur  $(M, D)$  au sens mentionné ci-dessus. Elle n'est cependant induite par aucune géométrie de Cartan holomorphe branchée sans torsion sur  $(M, D)$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par prouver que  $g$  est l'image d'une  $O_2(\mathbb{C})$ -extension holomorphe  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  sur  $(M, D)$ . Une base  $g$ -orthonormée globale est donnée par les champs de vecteurs méromorphes  $\bar{Y}_1 = \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_1}$  et  $\bar{Y}_2 = \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}$ . Posons  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_M \bar{Y}_1 \oplus \mathcal{O}_M \bar{Y}_2$ ,

1. En appliquant le Lemme 1.6.1.1 et en considérant les isomorphismes  $\tilde{\psi} : R^1(M \setminus D) \rightarrow \tilde{E}|_{M \setminus D}$  et la réduction  $\tilde{E}_0 = \tilde{\psi}^{-1}(\tilde{E})$ , qui se prolonge par construction en un fibré  $Q$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  avec l'inclusion  $\tilde{E}'(\mathbb{C}^n) \subset TM[\star D]$  donnée par  $\phi_0 \circ \Phi$ ,  $\Phi = \tilde{\psi}(\mathbb{C}^n)$

$\phi_0 = Id_{TM[\ast D]}$ . Alors il s'agit d'une extension holomorphe sur  $(M, D)$ , et la réduction holomorphe  $\tilde{E}^\#$  de  $R(\mathcal{E})$  au sous-groupe  $O_2(\mathbb{C})$  engendrée par la base  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  définit une  $O_2(\mathbb{C})$ -extension holomorphe  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E})$  sur  $(M, D)$  dont l'image par  $\mu$  est  $g$ .

Notons  $\tilde{\sigma}$  la section holomorphe de  $\tilde{E}^\#$  correspondant à  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ , et calculons l'unique terme  $\mathcal{B}_1$  dans la suite normalisante associée. Le seul crochet non trivial est  $[\bar{Y}_1, \bar{Y}_2]_{TM} = -\frac{1}{z_1^2} \bar{Y}_2$ , et par conséquent :

$$k^{\tilde{\sigma}} = -\frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_{-1}^\ast \wedge \mathbf{e}_2^\ast \otimes \mathbf{e}_{-2} \quad (2.71)$$

Posons  $\mathcal{B} = \frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_{-2}^\ast \otimes A$ . Alors :

$$\partial \mathcal{B} = \frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_{-1}^\ast \wedge \mathbf{e}_{-2}^\ast \otimes \mathbf{e}_{-2} = k^{\tilde{\sigma}} \quad (2.72)$$

et  $\mathcal{B}$  est à valeurs dans  $\mathbb{H}_p \subset \mathfrak{m}_1$  (voir ci-dessus). Par conséquent  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$  et

$$\mathcal{B}_1 \circ \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{z_1} dz_2 \otimes A \quad (2.73)$$

n'est pas logarithmique sur  $M$ . Le [Corollaire 2.3.3](#) implique qu'aucune  $Q$ -extension  $\mathbb{E}'$  induisant la métrique  $g$  n'est l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée et normale sur  $(M, D)$ . □

Nous donnons à présent un contre-exemple sur une paire  $(M, D)$  où  $M$  est une surface complexe compacte.

**Exemple 2.3.2.** Soit  $\Sigma$  une courbe complexe de genre 2,  $M = \Sigma \times \Sigma$ , et  $\pi_1, \pi_2$  les projections de  $M$  sur chacun de ses facteurs. Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(\Sigma, \Omega_\Sigma^1)$  dont les diviseurs des zéros  $(\alpha_1)_0$  et  $(\alpha_2)_0$  sont disjoints. On définit  $D = \pi_1^\ast((\alpha_1)_0 + (\alpha_2)_0) + \pi_2^\ast((\alpha_1)_0 + (\alpha_2)_0)$  ainsi que deux formes holomorphes globales :

$$\eta_1 = \pi_1^\ast \alpha_1 \quad \text{et} \quad \eta_2 = \pi_1^\ast \alpha_2 + \pi_2^\ast \alpha_1 \quad (2.74)$$

Alors la métrique riemannienne méromorphe :

$$g = \eta_1^{\otimes 2} + \eta_2^{\otimes 2} \quad (2.75)$$

est induite par une géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ , mais aucune géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$ .

*Démonstration.* Soient  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  les champs de vecteurs méromorphes duaux aux formes  $(\eta_1, \eta_2)$ , et  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_M \bar{Y}_1 \oplus \mathcal{O}_M \bar{Y}_2$ . Alors  $TM \subset \mathcal{E}$ , donc la  $Q$ -extension méromorphe  $\mathbb{E} = (Id_{TM[\ast D]}, \tilde{E})$ , où  $\tilde{E}$  est la réduction holomorphe de  $R(\mathcal{E})$  au sous-groupe  $Q$ , est une  $Q$ -extension holomorphe. Elle induit par construction  $g$ . De plus,  $\mathbb{E}$  est l'image de la géométrie de Cartan holomorphe branchée  $(E, \omega_1)$  définie comme suit. Le fibré  $P$ -principal  $E$  coïncide avec  $\tilde{E}$ , et admet donc pour section globale la section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  correspondant à  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ . La connexion de Cartan  $\omega_1$  est l'unique connexion  $\tilde{\sigma}$ -horizontale dans la fibre de  $\mathbb{E}$ , qui est holomorphe branchée ([Proposition 1.6.6.1](#)).

Montrons à présent que  $g$  n'est induite par aucun objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^{0, norm}$ . Pour cela, fixons  $x_0 \in D$  n'appartenant à aucun  $\pi_1^{-1}(\alpha_i)_0$ , mais appartenant à  $\pi_2^{-1}(\alpha_1)_0$  (voir [Figure 2.1](#)).

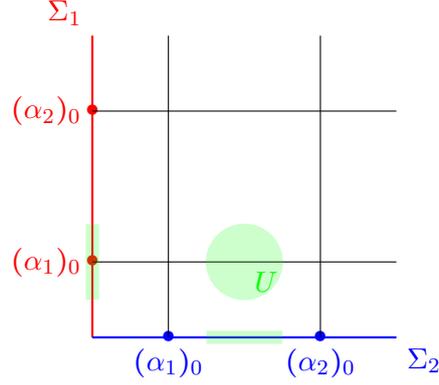


FIGURE 2.1 – L'ouvert représenté en vert est un voisinage de point  $x_0$  au voisinage du quel  $g$  n'est pas induite par une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale

Considérons un voisinage  $U = U_1 \times U_2$  de  $x_0$  où  $U_1$  et  $U_2$  sont respectivement des voisinages de  $\pi_1(x_0)$  et  $\pi_2(x_0)$ , munis de coordonnées  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$ . On note  $z_1 = \bar{z}_1 \circ \pi_1$  et  $z_2 = \bar{z}_2 \circ \pi_2$ , qui forment des coordonnées sur  $U$ . On note  $(dz_1, dz_2)$  les 1-formes correspondantes et  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2})$  les champs de vecteurs duaux. Enfin, nous notons  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  les champs de vecteurs méromorphes duaux de  $(\eta_1, \eta_2)$ . Enfin, nous notons  $m_1 \geq 0$  l'ordre en  $D \cap U$  (qui est irréductible par construction) de  $\eta_1$ . Il est minoré par l'ordre du zéro de  $\alpha_1$ , donc  $m_1 \geq 2$  car  $\Sigma_1$  est hyperelliptique.

Il existe  $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{O}_M^*(U)$  telles que la matrice de  $(\eta_1, \eta_2)$  dans  $(dz_1, dz_2)$  est :

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ dz_1 & dz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & z_1^{m_1} h_3 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

La matrice de  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$  dans  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2})$  est l'inverse de sa transposée :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 \\ \frac{1}{h_1} & 0 \\ -\frac{1}{z_1^{m_1}} \frac{h_2}{h_1 h_3} & \frac{1}{z_1^{m_1}} \frac{1}{h_3} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

On a :  $[\bar{Y}_1, \bar{Y}_2] = -\frac{1}{h_1 z_1^{m_1}} \bar{Y}_2$ . La fonction de structure associée à  $\tilde{\sigma}$  est donc :

$$k^{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{h_1 z_1^{m_1}} \mathbf{e}_{-1}^* \wedge \mathbf{e}_{-2}^* \otimes \mathbf{e}_{-2}$$

Par des calculs similaires à ceux de l'[Exemple 2.3.1](#), nous obtenons :

$$\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}^{\tilde{\sigma}} = \chi_1(k^{\tilde{\sigma}}) = -\frac{1}{z_1^{m_1}} h_4 dz_1 \otimes A + h_5 dz_2 \otimes A \quad (2.78)$$

où  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}}$  est la matrice de  $\tilde{\sigma}$ . Par le [Corollaire 2.3.3](#), aucune  $Q$ -extension méromorphe sur  $(U, D)$  induisant  $g|_U$  n'est l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée et normale sur  $(U, U \cap D)$ . En particulier, aucune géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$  n'induit  $g$ .  $\square$

### 2.3.5 Condition nécessaire pour les structures méromorphes d'ordre supérieur

Supposons à présent que  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  où  $G_0$  est d'ordre  $r_0 \geq 1$  et inclus dans  $O$  (voir sous-section 2.2.1). La géométrie de Klein  $(G, P)$  obtenue par  $r_0$ -prolongation (Définition 1.4.19) vérifie les hypothèses du Théorème 2.2.2 et du Lemme 2.3.3.1.

Par le Théorème 2.3.1, nous obtenons la condition nécessaire suivante :

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  comme ci-dessus. Soit  $(M, D)$  une paire et  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$  et  $\mathcal{E} = \tilde{E}^\#(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ . Si  $\mathbb{E}^\#$  est l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale par  $f^\#$ , alors pour toute section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  de  $\tilde{E}$ , la connexion de Weyl associée  $\tilde{\omega}$  (voir sous-section 2.3.3) est une connexion holomorphe sur  $\mathcal{E}|_U$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{E} = (\phi_0, \tilde{E})$ ,  $\tilde{\sigma}$  et  $\nabla$  comme dans l'énoncé. Soit  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1, \dots, r_0+2}$  la suite normalisante associée (Définition 2.3.1) et  $\mathcal{A}$  la matrice de 1-formes associée à  $\tilde{\sigma}$  (??). Par le Théorème 2.3.1, il existe une fonction  $\rho'$  méromorphe sur  $U$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^+$  ainsi qu'une fonction  $\mathcal{C}$  sur  $U$  à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p})$  telle que  $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$  est holomorphe sur  $U$  et pour tout  $l = 1, \dots, r_0 + 2$  :

$$\mathcal{B}_l = \pi_l(\mathcal{C}) + \pi_l(F(-\rho') + \exp_G(\rho')^* \omega_P \circ \mathcal{A}^{-1}) \quad (2.79)$$

où  $F$  est la fonction du Lemme 1.6.5.2. En projetant l'égalité (2.79) sur le supplémentaire  $\mathfrak{m}_1$  de  $\ker(\partial_1)$  et en remarquant que  $\pi_1(F(-\rho'))$  est à valeurs dans  $\ker(\partial_1)$ , nous obtenons :

$$\mathcal{B}_1 = \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}(\mathcal{B}_1) = \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}(\pi_1(\mathcal{C})) \quad (2.80)$$

et par conséquent  $\mathcal{B}_1 \circ \mathcal{A}$  est holomorphe sur  $U$ . Le théorème découle du fait que cette forme coïncide avec  $\tilde{\sigma}^* \tilde{\omega}$ .  $\square$

Le couple  $(\mathfrak{g}_-, G_0) = (\mathbb{C}^3, CO_3(\mathbb{C}))$  vérifie clairement les hypothèses du Théorème 2.3.2 (voir sous-section 2.2.1). Nous en déduisons un exemple de structure conforme méromorphe sur  $(\mathbb{C}^3, \{z_1 = 0\})$  ne provenant d'aucune géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(\mathbb{C}^3, \{z_1 = 0\})$ .

Soit en effet  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E}^\#)$  la  $CO_3(\mathbb{C})$ -extension holomorphe (régulière) sur  $(M, D)$  obtenue de la manière suivante. On note  $(M', D')$  la paire de l'Exemple 2.3.1 et  $(\phi'_0, \tilde{E}')$  la  $O_2(\mathbb{C})$ -extension méromorphe de cet exemple, ainsi que  $\mathcal{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{C}^2)$ . On note  $\pi : M \rightarrow M'$  la projection donnée par  $\pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$  et on considère

$$\tilde{E} = \pi^* \tilde{E}' \times_{O_2(\mathbb{C})} CO_3(\mathbb{C}) \quad (2.81)$$

où on utilise l'inclusion naturelle de  $O_2(\mathbb{C})$  dans  $CO_3(\mathbb{C})$  (l'image étant constituée des automorphismes fixant  $\mathbb{C}e_{-3} \subset \mathbb{C}^3$ ). Alors  $\mathcal{E} = \tilde{E}(\mathbb{C}^3) \subset TM[\star D]$  s'identifie naturellement somme directe de  $\pi^* \mathcal{E}' = \mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_1} \oplus \mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_2}$  et du module trivial  $\mathcal{O}_M \frac{\partial}{\partial z_3}$ , et nous obtenons une  $Q$ -extension méromorphe  $(\phi_0, \tilde{E})$  sur  $(M, D)$  en posant  $\phi_0 = \text{Id}_{TM[\star D]}$ .

**Exemple 2.3.3.** *Il n'existe pas de  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale dans la fibre de  $\mathbb{E}^\# = (\phi_0, \tilde{E})$ .*

*Démonstration.* Le fibré  $Q$ -principal holomorphe  $\tilde{E}$  admet une réduction à  $O_2(\mathbb{C})$  par construction. En particulier, il admet une réduction à  $O_3(\mathbb{C})$  que l'on note  $\tilde{E}_1$ . Alors  $(\phi_0, \tilde{E}_1)$  est une  $O_3(\mathbb{C})$ -réduction holomorphe par l'Exemple 2.3.1, et sa connexion de Weyl préserve par construction le sous-module  $\pi^* \mathcal{E}'$ . Sa restriction à ce sous-module est le pullback de la connexion de Weyl de l'Exemple 2.3.1. En particulier, elle n'est pas holomorphe et le Théorème 2.3.2 implique que  $\mathbb{E}^\#$  n'est pas l'image d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$  par  $f^\#$ .  $\square$

Le cas où  $r_0 = 1$  est particulier. En effet, dans ce cas nous avons que  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g}^1$  (voir [Définition 1.4.17](#)) et  $P'$  est un groupe de Lie abélien, isomorphe au groupe additif  $\mathfrak{p}'$ . En particulier, pour toute fonction méromorphe  $\rho'$  sur un ouvert  $U \subset M$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}'$ , les formules suivantes sont vérifiées :

$$\exp_G(\rho')^* \omega_P = d\rho' \quad \text{et} \quad F(-\rho') = Ad(-\rho') \quad (2.82)$$

où  $F$  est la fonction du [Lemme 1.6.5.2](#). L'équivalence du [Théorème 2.3.1](#) admet donc une formulation explicite :

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  où  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}^n$  et  $G_0$  est un sous-groupe fermé d'ordre fini  $r_0 = 1$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  ([Définition 1.4.18](#)), et  $(G, P)$  la géométrie de Klein obtenue comme 1-prolongation de ce dernier. Soit  $(M, D)$  une paire et  $\mathbb{E}^\#$  un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$  (voir [Définition 2.2.3](#)). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathbb{E}^\#$  est l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$ .
2. Pour tout  $X$  et  $(\tilde{\sigma}_\alpha)_{\alpha \in I}$  comme dans le [Théorème 2.3.1](#), la propriété suivante est vérifiée. Pour tout  $\alpha \in I$ , notons  $\mathcal{A}_\alpha$  la matrice de  $\tilde{\sigma}_\alpha$  ([??](#)) et  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1, \dots, 2}$  sa suite normalisante ([Définition 2.3.1](#)). Alors pour tout  $\alpha \in I$ , on a :
  - (i)  $\mathcal{B}_{\alpha,1} \circ \mathcal{A}_\alpha$  est holomorphe sur  $U_\alpha$ .
  - (ii)  $\mathcal{B}_{\alpha,2} \circ \mathcal{A}_\alpha$  est la somme d'une 1-forme exacte et d'une forme holomorphe sur  $U$ .

Cela permet de construire un exemple de structure conforme méromorphe sur  $\mathbb{C}^3$  qui provient d'une géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(\mathbb{C}^3, \{z_1 = 0\})$  :

**Exemple 2.3.4.** *Supposons que la matrice  $\mathcal{A}^{-1}$  dans la base  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3})$  est :*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Alors  $\mathbb{E}$  est une  $Q$ -extension holomorphe branchée ( $\mathfrak{g}_-$ -régulière) sur  $(M, D)$  et  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}_{M,D}^{0, norm}$ .

*Démonstration.* La matrice associée à  $\tilde{\sigma}$  est par définition  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{-1})^{-1}$ . La fonction de structure  $k^{\tilde{\sigma}}$  associée à la base géométrique  $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$  est :

$$k^{\tilde{\sigma}} = -\frac{1}{z_1} \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2 \quad (2.84)$$

Calculons la suite normalisante  $(\mathcal{B}_l, \Omega_l)_{l=1,2}$  associée à  $\tilde{\sigma}$ . Nous avons :

$$\mathcal{B}_1 = \chi_1 \circ \pi_1(k^{\tilde{\sigma}}) = \frac{1}{z_1^2} \chi_1(\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2) = \frac{1}{z_1} \mathbf{e}_2^* \otimes (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21}) \quad (2.85)$$

donc  $\mathcal{B}_1 \circ \mathcal{A} = dz_2 \otimes (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21})$  est holomorphe sur  $M$ .

Ensuite :

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= Alt(d\mathcal{B}_1 \circ (Id \otimes \mathcal{A}^{-1})) \\ &= \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \otimes \mathcal{L}_{\bar{Y}_1}(\mathcal{B}_1(\mathbf{e}_2)) \\ &= -\frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_{-2} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Comme  $\mathfrak{m}_2 = \{0\}$  est un supplémentaire de  $\ker(\partial_2) = \mathfrak{q}^{(2)} = \{0\}$ , nous obtenons :

$$\mathcal{B}_2 = -\chi_2 \circ \pi_2(\Omega_2) = -\frac{1}{z_1^2} \chi_2(\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \otimes (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21})) = -\frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_{-2} \quad (2.87)$$

Alors :

$$\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{z_1^2} dz_1 \otimes \mathbf{e}_{-2} = d\rho' \quad (2.88)$$

où  $\rho'(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{z_1} \mathbf{e}_{-2}$  est une fonction méromorphe sur  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g}_1$ . Par le

**Théorème 2.3.3.**  $\mathcal{E} \in \mathbb{E}_{M,D}^{0,norm}$ . □

### 2.3.6 Exemple pour une algèbre de Lie graduée non abélienne

Soit  $(G, P) = (SL_3(\mathbb{C}), B)$  où  $B$  est le sous-groupe de Borel standard défini dans l'**Exemple 1.4.6**. Reprenons les racines positives simples  $\alpha, \beta$ , notons  $\alpha + \beta = \gamma$ , et la base de Chevalley  $(\mathbf{e}_{\pm\gamma}, \mathbf{e}_{\pm\alpha}, \mathbf{e}_{\pm\beta}, \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{h}_\beta)$  introduites dans cet exemple. La graduation  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-2, \dots, 2}$  associée à  $P$  vérifie donc  $\mathfrak{g}_{\pm 2} = \mathbb{C}\mathbf{e}_{\pm\gamma}$  et  $\mathfrak{g}_{\pm 1} = \mathbb{C}\mathbf{e}_{\pm\alpha} \oplus \mathbb{C}\mathbf{e}_{\pm\beta}$ .

Soient  $G_0 = \exp_G(\mathfrak{g}_0)$  et  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i$ . Alors  $(\mathfrak{g}_-, G_0)$  est d'ordre 2 et  $(G, P)$  est sa prolongation de Tanaka par l'**Exemple 1.4.6**.

**Lemme 2.3.6.1.** *L'image  $Q$  de la représentation adjointe quotient  $ad$  de  $(G, P)$  (**Définition 1.4.2**) coïncide avec le groupe  $G_0^\#$  défini dans la **sous-section 2.2.1**.*

*Démonstration.* Par définition,  $Q \subset G_0^\#$ , nous prouvons donc l'inclusion réciproque. Soit  $\varphi$  un élément de  $G_0^\#$ . Par définition, il s'agit d'un automorphisme linéaire de  $\mathfrak{g}_-$  préservant la filtration induite par  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-2, -1}$  et tel que  $\varphi_0 = gr_0(\varphi)$  est de la forme  $\underline{ad}(g_0)$  pour  $g_0 \in G_0$ . Alors :  $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi^+$  où  $gr_0(\varphi^+) = Id_{\mathfrak{g}_-}$ . Donc :  $\varphi^+ = a_1 \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} + a_2 \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta}$ . Posons  $b = \exp_G(a_1 \mathbf{e}_\beta + a_2 \mathbf{e}_\alpha)$ . Alors  $\underline{ad}(b) = \varphi^+$  et par conséquent :  $\varphi = \underline{ad}(g_0 \cdot b) \in Q$ . □

Soit  $q \in Q$ . Alors il existe un unique  $g_0 \in G_0$  et  $q^+ \in Q$  tel que  $gr_0(q^+) = Id_{\mathfrak{g}_-}$  et  $q = \underline{ad}(g_0) \cdot q^+$ . Comme  $G_0$  est commutatif, il existe un couple  $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  tel que  $g_0 = \exp_G(\log(a_1)\mathbf{h}_\alpha) \cdot \exp_G(\log(a_2)\mathbf{h}_\beta)$  où  $\log$  désigne une détermination du logarithme quelconque. Alors :

**Lemme 2.3.6.2.** *On a les égalités suivantes :*

$$\underline{ad}(q^{-1})(\mathbf{e}_{-\alpha}) = \frac{a_1^2}{a_2} \mathbf{e}_{-\alpha} \quad \underline{ad}(q^{-1})(\mathbf{e}_{-\beta}) = \frac{a_2^2}{a_1} \mathbf{e}_{-\beta} \quad \underline{ad}(q^{-1})[\mathbf{e}_{-\gamma}] = a_1 a_2 \mathbf{e}_{-\gamma} \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{-1} \quad (2.89)$$

Ces égalités décrivent l'action de  $Q$  sur  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)$  et  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$ .

*Démonstration.* Les  $Q$ -modules  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{W}_{\mathfrak{g}_-}$  sont construits comme tenseurs de  $\mathfrak{g}_-$  et  $\mathfrak{g}_-^*$ . Montrons les égalités. Soit  $\lambda \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$  de hauteur  $-i$ . En utilisant que  $G_0$  est commutatif et  $gr_0(q^+)$  est l'identité, on a :

$$\begin{aligned} \underline{ad}(q^{-1})[\mathbf{e}_{-\lambda}] &= \underline{ad}(g_0^{-1})[\mathbf{e}_{-\lambda}] \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{-i+1} \\ &= \underline{ad}(\exp_G(-\log(a_1)\mathbf{h}_\alpha) \circ \underline{ad}(\exp_G(-\log(a_2))))[\mathbf{e}_{-\lambda}] \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{-i+1} \\ &= \exp(\underline{Ad}(-\log(a_1)\mathbf{h}_\alpha)) \circ \exp(\underline{Ad}(-\log(a_2)\mathbf{h}_\beta))[\mathbf{e}_{-\lambda}] \quad (2.90) \\ &= \exp(\underline{Ad}(-\log(a_1)\mathbf{h}_\alpha)) [e^{\log(a_2)\langle \beta, \lambda \rangle} \mathbf{e}_{-\lambda}] \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{-i+1} \\ &= e^{\log(a_1)\langle \alpha, \lambda \rangle + \log(a_2)\langle \beta, \lambda \rangle} \mathbf{e}_{-\lambda} \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{-i+1} \end{aligned}$$

Le résultat découle des égalités  $\langle \lambda, \lambda \rangle = 2$ ,  $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$  et  $\langle \gamma, \beta \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle = 1$ . □

Reprenons le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$  introduit dans la preuve du [Théorème 1.4.3](#). Ce dernier fait de la base de Chevalley précédente une base orthogonale, et induit des produits hermitiens sur  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{W}$  qui vérifient la conclusion du [Corollaire 1.4.1](#). Notons  $\partial$  (resp.  $\partial^*$ ) la (co)différentielle de Kostant correspondante pour le complexe de Chevalley  $\mathfrak{g}$ -relatif associé à la représentation adjointe de  $G$  ([Définition 1.4.6](#) et [Définition 1.4.7](#)), et  $(\mathfrak{m}_l)_{l \geq 0}$  et  $(\mathfrak{n}_l)_{l \geq 0}$  les supplémentaires de  $Im(\partial)$  dans  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{W}$  définis dans le [Corollaire 1.4.1](#).

**Lemme 2.3.6.3.** *Dans les notations ci-dessus, on a :*

1. *Le supplémentaire  $\mathfrak{m}_1$  est le sous-espace de  $\mathbb{H}$  engendré par les vecteurs indépendants :*

$$\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta, \quad \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha, \quad \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha, \quad \text{et } \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} + \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta \quad (2.91)$$

2. *Soient  $\kappa_{\alpha\beta}^\alpha = \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha}$ ,  $\kappa_{\alpha\beta}^\beta = \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta}$  et  $\kappa_{\alpha\gamma}^\gamma = \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma}$ . Alors ces éléments sont dans l'image de  $\partial$  et :*

$$\begin{aligned} \chi_1(\kappa_{\alpha\beta}^\alpha) &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta - \frac{1}{6}(\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} + \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta) \\ \chi_1(\kappa_{\alpha\beta}^\beta) &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta + \frac{1}{6}(\mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha + \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha}) \\ \chi_1(\kappa_{\alpha\gamma}^\gamma) &= -\frac{1}{3}\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta - \frac{1}{3}(\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha) \end{aligned} \quad (2.92)$$

*Démonstration.* 1. D'abord  $\pi_1(\partial\mathfrak{g})$  est engendré par  $\partial\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha - \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta}$  et  $\partial\mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta - \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha}$ , donc est de dimension 2. De plus,  $\pi_1(\mathbb{H})$  est de dimension 6, engendré par  $\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha}$ ,  $\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta}$ ,  $\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta$ ,  $\mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha$  et  $\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta$ . Par conséquent  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_1) = 4$ . Les éléments proposés sont indépendants, donc il reste à vérifier qu'ils sont orthogonaux à la base de  $\pi_1(\partial\mathfrak{g})$  décrite précédemment. Pour les deux premiers éléments, les vecteurs de  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$  correspondant n'apparaissent jamais dans la décomposition en élément simple d'un élément de  $\pi_1(\partial\mathfrak{g})$ , d'où le résultat. Pour les deux autres, on écrit les coordonnées dans la base de  $\pi_1(\mathbb{H})$  décrite précédemment.

2. On retrouve les identités proposées en utilisant le point 1. et les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha &= -\mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \\ \partial\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta &= 2\mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \\ \partial\mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha &= -2\mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} + \mathbf{e}_{-\beta}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \\ \partial\mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta &= \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \\ \partial\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} &= \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\alpha} - 2\mathbf{e}_{-\beta}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \\ \partial\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} &= \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} - 2\mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \end{aligned} \quad (2.93)$$

□

Grâce à cette description du complexe de Chevalley, nous pouvons construire le contre-exemple suivant :

**Exemple 2.3.5.** *Soit  $(M, D) = (\mathbb{C}^3, \{z_1 = 0\})$  où  $(z_1, z_2, z_3)$  sont les coordonnées canoniques. Soient  $\bar{Y}_{-\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_1}$ ,  $\bar{Y}_{-\beta} = \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial z_3}$  et  $\bar{Y}_{-\gamma} = -\frac{1}{z_1^2} \frac{\partial}{\partial z_3}$ . On définit un objet  $\mathbb{E}^\# = (Id_{TM[\star D]}, \tilde{E}^\#)$  en posant  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_M \bar{Y}_{-\alpha} \oplus \mathcal{O}_M \bar{Y}_{-\beta} \oplus \bar{Y}_{-\gamma}$  et  $\tilde{E}^\# = \tilde{\sigma} \cdot Q$  où  $\tilde{\sigma}$  est la section holomorphe de  $R(\mathcal{E})$  correspondant à la base  $(\bar{Y}_{-\alpha}, \bar{Y}_{-\beta}, \bar{Y}_{-\gamma})$  de  $\mathcal{E}$ . Alors :*

1.  $\mathbb{E}^\#$  est un objet de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$ , et il s'agit d'une extension holomorphe sur  $(M, D)$  ([Définition 1.6.1](#)).
2. Soit  $S$  l'image de  $\mathbb{E}^\#$  par le foncteur  $\mu$  ([Définition 1.6.5](#)). Alors pour tout objet  $\mathbb{E}_2^\#$  de  $\mathcal{E}_{M,D}^\#$  dans la fibre de  $S$  par  $\mu$ ,  $\mathbb{E}_2^\#$  n'est pas l'image d'un objet de  $\mathcal{G}_{M,D}^{0, \text{norm}}$ .

*Démonstration.* 1. Il s'agit de montrer que  $\mathbb{E}^\#$  est  $\mathfrak{g}_-$ -régulière, et holomorphe sur  $(M, D)$ . La régularité vient du calcul de la fonction de structure :

$$k^{\tilde{\sigma}} = -\frac{1}{z_1} \mathbf{e}_{-\alpha}^* \wedge \mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\gamma} \quad (2.94)$$

dont on déduit  $\pi_l(k^{\tilde{\sigma}}) = 0$  pour tout  $l \leq 0$ . De plus,  $\mathcal{E}$  contient clairement  $TM$  donc  $(Id_{TM[\star D]}, \tilde{E}^\#)$  est holomorphe sur  $(M, D)$ .

2. Par le [Lemme 2.3.6.1](#),  $G_0^\# = Q$ . Soit  $\mathbb{E}$  objet de  $\mathcal{E}_{M,D}$  de la forme  $(Id_{TM[\star D]}, \tilde{E})$  dans la fibre de  $S$  par  $\mu$ . Soit  $\tilde{\sigma}' : U \rightarrow \tilde{E}$  une section holomorphe au voisinage d'un point  $x_0 \in M$ . En reprenant la preuve du [Corollaire 2.2.1](#), nous obtenons qu'il existe une unique application méromorphe  $q$  sur  $U$  à valeurs dans  $Q$  telle que  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \cdot q$ . En particulier, il existe une unique  $Q$ -extension méromorphe normale  $\mathbb{E}$  sur  $(M, D)$  dans la fibre de  $S$  par  $\mu$ , et il s'agit de vérifier qu'elle n'est pas holomorphe.

Par le [Corollaire 2.3.1](#), il suffit maintenant de prouver que quelque soit  $q$ ,  $\mathcal{B}^{\tilde{\sigma}'} \circ (\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'})^{-1}$  n'est pas holomorphe sur  $U$  (où  $\mathcal{A}^{\tilde{\sigma}'}$  est la matrice de  $\tilde{\sigma}'$ , voir ??). Pour cela, utilisons l'identité  $Q = \underline{ad}(G_0) \times N$  pour écrire de manière unique  $q = \underline{ad}(g_0) \cdot q^+$  où  $q^+ \in N$  agit comme l'identité sur  $gr(\mathfrak{g}_-)$  et  $g_0$  est une fonction méromorphe à valeurs dans  $G_0$ . Décomposons comme précédemment  $g_0 = \exp_G(\log(a_1)\mathfrak{h}_\alpha) \cdot \exp_G(\log(a_2)\mathfrak{h}_\beta)$  où  $a_1, a_2$  sont deux fonctions méromorphes sur  $U$ . Alors :

**Lemme 2.3.6.4.** Soient  $(\mathcal{B}_l^{\tilde{\sigma}'})_{l \geq 1}$  et  $(\mathcal{B}_l^{\tilde{\sigma}})_{l \geq 1}$  les suites normalisantes associées à  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}'$  ([Définition 2.3.1](#)). On a :

$$\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}_1 - \frac{\partial \log(a_2)}{\partial Y_{-\alpha}} \bar{Y}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta - \frac{\partial \log(a_1)}{\partial Y_{-\beta}} \bar{Y}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha$$

où  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_1$  sont les matrices respectives des sections  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$  (voir [\(1.148\)](#)).

*Démonstration.* En utilisant le [Lemme 1.7.3.3](#) et le [Lemme 2.3.6.2](#), nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'} &= \chi_1 \circ \pi_1(k^{\tilde{\sigma}'}) \\ &= \chi_1 \circ \pi_1(q^{-1} \cdot k^{\tilde{\sigma}} + q^{-1} \cdot [\partial(q^{-1})^* \omega_Q \circ \mathcal{A}_1^{-1}]) \\ &= g_0^{-1} \cdot [\chi_1 \circ \pi_1(k^{\tilde{\sigma}} + \partial(g_0^{-1})^* \omega_{G_0} \circ \mathcal{A}_1^{-1})] \\ &= g_0^{-1} \cdot [\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} + \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{Im(\partial)} [(g_0^{-1})^* \omega_{G_0} \circ \mathcal{A}_1^{-1}]] \end{aligned} \quad (2.95)$$

Par ailleurs,  $\mathcal{A}_2 = \underline{ad}(q^{-1}) \circ \mathcal{A}_1$  par définition. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'} \circ \underline{ad}(g_0^{-1}) \circ \mathcal{A}_1 \\ &= g_0^{-1} \cdot [\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} + \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{Im(\partial)} [(g_0^{-1})^* \omega_{G_0} \circ \mathcal{A}_1^{-1}]] \circ \underline{ad}(g_0^{-1}) \circ \mathcal{A}_1 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Or  $G_0$  est commutatif, donc pour tout  $\varphi \in \pi_1(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0))$  nous avons  $g_0^{-1} \cdot \varphi = \varphi \circ \underline{ad}(g_0)$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'} \circ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}_1 + \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{Im(\partial)} [(g_0^{-1})^* \omega_{G_0} \circ \mathcal{A}_1^{-1}] \circ \mathcal{A}_1 \\ &= \mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}_1 + \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{Im(\partial)} \left[ -\frac{\partial \log(a_1)}{\partial Y_{-\alpha}} \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha - \frac{\partial \log(a_1)}{\partial Y_{-\beta}} \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\alpha \right] \\ &\quad - \text{proj}_{\mathfrak{m}_1}^{Im(\partial)} \left[ -\frac{\partial \log(a_2)}{\partial Y_{-\alpha}} \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta - \frac{\partial \log(a_2)}{\partial Y_{-\beta}} \mathbf{e}_{-\beta}^* \otimes \mathfrak{h}_\beta \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

Le résultat s'obtient directement en utilisant le point 1. du [Lemme 2.3.6.3](#)  $\square$

Par l'égalité [Équation 2.94](#) et le point 2. du [Lemme 2.3.6.3](#), nous avons

$$\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} = \chi_1 \left( -\frac{1}{z_1} \kappa_{\alpha, \gamma}^{\gamma} \right) = -\frac{2}{3z_1} \left( -\mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_{\beta} - (\mathbf{e}_{-\gamma}^* \otimes \mathbf{e}_{-\beta} + \mathbf{e}_{-\alpha}^* \otimes \mathfrak{h}_{\alpha}) \right) \quad (2.98)$$

et  $\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}} \circ \mathcal{A}_1$  s'obtient en remplaçant  $\mathbf{e}_{-\lambda}^*$  par  $\overline{Y}_{-\lambda}^*$  dans le membre de droite.

Par le [Lemme 2.3.6.4](#), quelquesoit  $q$ ,  $\mathcal{B}_1^{\tilde{\sigma}'}$  est holomorphe si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log(a_2)}{\partial \overline{Y}_{-\alpha}} = \frac{2}{3z_1} \pmod{\mathcal{O}_M(U)} \\ -\frac{3}{2z_1} = 0 \pmod{\mathcal{O}_M(U)} \end{cases} \quad (2.99)$$

ce qui est impossible. Donc  $\mathbb{E}$  n'est pas l'image d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée normale sur  $(M, D)$ . □

## Chapitre 3

# Automorphismes infinitésimaux en dimension algébrique nulle et géométries totalement géodésiques

Dans ce chapitre, nous exhibons un contexte géométrique dans lequel la version méromorphe du théorème principal de [7] est vraie. Plus précisément, nous prouvons qu'une variété complexe compacte, simplement connexe et de dimension algébrique nulle (Définition 3.2.1), n'admet pas de géométrie de Cartan affine holomorphe branchée, et totalement géodésique (Définition 1.7.2). Certaines étapes de la preuve sont vraies pour les modèles paraboliques (Définition 1.4.16), et nous conjecturons que le résultat final est encore vrai pour ces modèles et les géométries de Cartan holomorphes branchées régulières et normales (Définition 2.1.1) correspondantes.

Nous commencerons par voir comment les outils de la preuve de [7] peuvent s'étendre dans le contexte méromorphe. Notamment, nous introduirons la *propriété d'extension des champs de Killing* (Définition 3.2.4). Puis nous expliquerons pourquoi l'hypothèse totalement géodésique donne un contexte qui facilite la preuve de cette propriété (voir notamment Proposition 3.3.2.1). Nous appliquerons ce principe aux géométries paraboliques. Lorsque le degré parabolique est  $k = 1$  et la géométrie de Cartan est holomorphe branchée, nous retrouverons en plus une information sur l'ordre des champs de Killing le long des pôles de la géométrie de Cartan méromorphe. Cette information implique que les champs de Killing globaux d'une géométrie de Cartan affine holomorphe branchée et totalement géodésique ne s'annulent pas. En appliquant un résultat de [6], nous en déduisons le Théorème 3.5.3 : ce dernier peut être considéré comme une extension du résultat de [7].

### 3.1 Notations

Tout au long du chapitre, nous considérerons une géométrie de Klein complexe  $(G, P)$  et une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur une paire  $(M, D)$ , formée d'une variété complexe  $M$  et d'un diviseur  $D$ . Ses composantes irréductibles seront notées  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ . L'image réciproque de  $D$  (resp.  $D_\alpha$ ) par  $p: E \rightarrow M$  sera noté  $\tilde{D}$  (resp.  $\tilde{D}_\alpha$ ).

**Définition 3.1.1.** *Le sous-ensemble  $V \subset D$  est l'union des parties lisses de  $D$  privée des intersections deux à deux des composantes  $D_\alpha$ . On note aussi  $\tilde{V}$  son pullback à  $E$ .*

## 3.2 Rôle des automorphismes infinitésimaux

Dans cette section, nous décrivons les ingrédients de la preuve du résultat annoncé. Le premier est une extension directe d'un résultat de S. Dumitrescu ([22]) qui relie la dimension de l'algèbre de Lie des germes de champs de Killing locaux pour une géométrie de Cartan méromorphe à la dimension algébrique de la variété complexe compacte support. En particulier, il implique que toute géométrie de Cartan méromorphe de *type algébrique* (Définition 3.2.3) sur une variété complexe compacte de *dimension algébrique nulle* (Définition 3.2.1) est quasi-homogène (Définition 1.5.20).

Le second ingrédient est une hypothèse à vérifier sur les automorphismes infinitésimaux de la géométrie : *propriété d'extension des champs de Killing*. Elle assure que si la variété support est simplement connexe, les germes obtenus précédemment se prolongent globalement comme champs méromorphes.

Ces deux arguments sont les analogues méromorphes de ceux utilisés dans la preuve du résultat principal de [7]. Nous donnons donc aussi une idée de la preuve du résultat principal de [7], et mettons en évidence que le dernier argument ne s'adapte au cas méromorphe. Nous donnons une alternative pour ce dernier grâce à un résultat de [6].

### 3.2.1 Dimension algébrique d'une variété complexe compacte

K. Ueno a prouvé que le corps  $\mathbb{C}(M)$  des fonctions méromorphes sur une variété complexe compacte  $M$  de dimension  $n \geq 1$  est une extension de  $\mathbb{C}$  de degré de transcendance fini majoré par  $n$  (voir [50], Théorème 3.1). L'invariant géométrique d'intérêt dans cette thèse est le suivant :

**Définition 3.2.1.** *La dimension algébrique  $a(M)$  de  $M$  est le degré de transcendance de  $\mathbb{C}(M)$  sur  $\mathbb{C}$ .*

Nous intéressons comme dans [7] aux variétés complexes compactes avec  $a(M) = 0$ .

### 3.2.2 Germes d'automorphismes infinitésimaux en dimension algébrique nulle

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel complexe. Alors la structure d'espace vectoriel complexe de  $\mathbb{V}$  induit naturellement une structure de variété algébrique, que l'on note  $\mathbb{V}^{alg}$ . Cette structure est obtenue de la manière suivante : on identifie d'abord  $\mathbb{V}$  à  $\mathbb{C}^m$  via une base  $(e_1, \dots, e_m)$  et on note  $(z_1, \dots, z_m)$  les coordonnées correspondante. Les ouverts de  $\mathbb{V}^{alg}$  sont les complémentaires  $U_Q$  du lieu de zéros d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ . Le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\mathbb{V}^{alg}}$  est alors défini comme suit. Pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{V}^{alg}}(U_Q)$  est l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{V}$  de la forme  $\frac{P}{R}$  où  $R$  est un polynôme n'appartenant pas à l'idéal engendré par  $Q$ .

En particulier, la variété  $Aut(\mathbb{V}^{alg})$  des automorphismes de cette variété est une variété algébrique. Par définition, il s'agit de l'ensemble des biholomorphisme de  $\mathbb{V}$  tels que la composition à droite préserve la sous-algèbre des polynômes.

**Définition 3.2.2.** *Un groupe algébrique est groupe de Lie  $K$  muni d'une structure de variété algébrique pour laquelle les opérations  $R_g$  et  $L_g$  sont des morphismes de variétés algébriques pour tout  $g \in K$ .*

Par exemple, on vérifie facilement que  $Aut(\mathbb{V}^{alg})$  est un groupe algébrique.

**Définition 3.2.3.**  *$(G, P)$  est de type algébrique si et seulement si  $ad(P)$  est un sous-groupe algébrique de  $Aut(\mathfrak{g}^{alg})$ .*

Nous donnons ici une adaptation directe d'un résultat de S. Dumitrescu (Théorème 1.2, [22]) dans la catégorie méromorphe : la quasihomogénéité d'une géométrie de Cartan méromorphe de type algébrique sur une variété complexe compacte  $M$  de dimension algébrique nulle (Définition 3.2.1).

D'abord, considérons la restriction  $(E', \omega) = (E|_{M \setminus D}, \omega_0)$  qui est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M' = M \setminus D$ . Pour une telle géométrie de Cartan holomorphe, définissons la  $\text{fill}^{loc}$ -orbite d'un point  $x \in M'$  comme la sous-variété minimale contenant  $x$  et qui soit stable par les flots de tous les champs de Killing locaux de  $(E', \omega)$  définis au voisinage de  $x$ . Notons  $\mathcal{D}^r k_\omega$  la dérivée invariante absolue d'ordre  $r$  de la représentation de courbure  $k_\omega$  (voir Définition 1.5.11 et Définition 1.5.15). Nous avons alors le résultat suivant de V.Pecastaing (voir [42]) :

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $M'$  une variété complexe. Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe effective de dimension  $\dim(G/P) = \dim(M)$  et  $N = \dim(G)$ . Soit  $(E', \omega)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe sur  $M'$ . Il existe un ouvert Zariski dense  $U \subset M'$  de  $M'$  avec la propriété suivante. Soit  $x \in U$ , et  $O_x$  la  $\text{fill}^{loc}$ -orbite de  $x$ . Alors :*

$$U \cap O_x = U \cap p((\mathcal{D}^N k_\omega)^{-1}(\mathcal{D}^N k_\omega(e))) \quad (3.1)$$

pour tout  $e \in p^{-1}(x)$ .

L'hypothèse sur le modèle nous permet par ailleurs d'utiliser le résultat suivant de Rosenlicht.

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $\mathbb{V}$  un  $P$ -module, et supposons que l'image de  $P$  par la représentation correspondante est un sous-groupe algébrique de  $\text{Aut}(\mathbb{V}^{alg})$ . Deux  $P$ -orbites distinctes génériques dans  $\mathbb{V}$  sont séparées par une fonction rationnelle  $f \in \mathbb{C}(\mathbb{V}^{alg})$  qui est  $P$ -invariante.*

*Démonstration.* Voir [43] □

Si  $(G, P)$  est de type algébrique, alors  $P$  agit algébriquement sur les  $P$ -modules  $\mathbb{J}^N \mathbb{W}$ , dans lesquelles les dérivées invariantes  $\mathcal{D}^r k_{\omega_0}$  prennent leurs valeurs (voir Définition 1.5.11 et Définition 1.5.15). Nous pouvons alors prouver l'analogie méromorphe du Théorème 1.2 dans [22] :

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe effective, de type algébrique et de dimension  $\dim(G/P) = N$ . Soit  $M$  une variété complexe compacte (connexe),  $D$  un diviseur effectif et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ . Si  $a(M) = 0$  alors toute  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  est quasihomogène (Définition 1.5.20).*

*Démonstration.* Soit  $U \subset M \setminus D$  l'ouvert du Théorème 3.2.1. Soit  $x \in U$  et  $O_x$  son orbite par  $\text{fill}^{loc}$ . Alors  $O_x \cap U = p((\mathcal{D}^N k_{\omega_0})^{-1}(\mathcal{D}^N k_{\omega_0}(e)))$  pour tout  $e \in p^{-1}(x)$ . Par  $P$ -équivariance de  $\mathcal{D}^N k_{\omega_0}$ , si  $O_x \neq O_{x'}$  pour deux points  $x, x' \in U$ , alors pour tout choix de relevés  $e, e'$  à  $E$ , les orbites  $P \cdot \mathcal{D}^N k_{\omega_0}(e)$  et  $P \cdot \mathcal{D}^N k_{\omega_0}(e')$  sont disjointes dans  $\mathbb{J}^N \mathbb{W}$ . Par le Théorème 3.2.2, il existe une fonction rationnelle  $f$  sur  $\mathbb{J}^N \mathbb{W}$  séparant ces orbites. En particulier,  $f$  est non constante et  $f \circ \mathcal{D}^N k_{\omega_0}$  est une fonction méromorphe non constante sur  $E$ , et  $P$ -invariante. Par  $P$ -équivariance de  $\mathcal{D}^N k_{\omega_0}$ ,  $f$  descend donc en une fonction méromorphe non constante sur  $M$ , contredisant  $a(M) = 0$ . □

**Exemple 3.2.1.** *Soit  $P \subset GL_n(\mathbb{C})$  un sous-groupe fermé, défini par des équations sur les coefficients des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Le modèle  $(G, P)$  où  $G = P \times \mathbb{C}^n$  est de type algébrique. En particulier, le modèle affine et le modèle euclidien sont de type algébriques.*

*Démonstration.* Nous avons vu que le choix d'une base de  $\mathfrak{g}$  le munit d'une structure de variété affine. Choisissons une base de la forme  $(e_1, \dots, e_N)$  telle que  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n \subset \mathfrak{g}$ , et notons  $\mathfrak{g}^{alg}$  la structure correspondante.

Le sous-espace  $\mathbb{C}^n \subset \mathfrak{g}$  est un  $P$ -module, et par conséquent l'action adjointe  $ad : P \rightarrow Aut(\mathfrak{g}^{alg})$  est à valeurs dans le produit  $Aut((\mathbb{C}^n)^{alg}) \times Aut(\mathfrak{p}^{alg})$  où  $\mathfrak{p} = Lie(P)$ . Il suffit de vérifier que la projection de son image sur chaque facteur est un sous-groupe algébrique. Pour le premier facteur, rappelons qu'un automorphisme de  $(\mathbb{C}^n)^{alg}$  est un automorphisme linéaire de  $\mathbb{C}^n$ . Par conséquent,  $Aut((\mathbb{C}^n)^{alg}) = GL_n(\mathbb{C})$  coïncide avec l'image de la représentation canonique de  $P$ , i.e la projection sur le premier facteur.

Pour le second, par l'hypothèse sur  $P$ , l'inclusion  $P \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une inclusion de variétés algébriques. Considérons les actions de  $P$  sur  $\mathfrak{p}$  par multiplications à droite et à gauche. Cette action préserve la structure de variété affine car pour tout  $b \in P$ , et  $A \in \mathfrak{p}$ , les coefficients de  $bA$  (resp.  $Ab$ ) sont des polynômes des coefficients de  $A$ . Les coefficients de ces polynômes sont eux mêmes des polynômes des coefficients de  $b \in P$ . Cela signifie que  $P \rightarrow Aut(\mathfrak{p}^{alg})$  est un morphisme de variétés algébriques, en particulier son image est un sous-groupe algébrique de  $Aut(\mathfrak{p}^{alg})$ .  $\square$

### 3.2.3 Propriété d'extension des champs de Killing

Dans [41], K. Nomizu a prouvé que tout germe de champ de Killing d'une métrique riemannienne sur une variété simplement connexe est le germe d'un champ de Killing global. Nous avons vu également que le faisceau des champs de Killing d'une géométrie de Cartan holomorphe sur une variété complexe  $M$  est un système local sur cette dernière (Lemme 1.5.4.3). Le but ici est de définir une propriété sur une géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur une paire  $(M, D)$  qui suffit à retrouver le résultat de Nomizu lorsque  $M$  est simplement connexe.

Le faisceau  $\mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{loc}$  des champs de Killing locaux de  $(E, \omega_0)$  est un système local sur  $M \setminus D$  (voir Lemme 1.5.4.3). Ainsi, pour tout  $x_0 \in M \setminus D$ , il existe un espace vectoriel  $K$  et un isomorphisme de faisceaux  $\varphi_{x_0}$  entre  $\mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{loc}|_{U_{x_0} \setminus D}$  et le faisceau constant  $\underline{K}_{U_{x_0} \setminus D}$ . Posons alors la définition suivante :

**Définition 3.2.4.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ .

1.  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété locale d'extension des champs de Killing en  $x_0 \in D$  si il existe un voisinage  $U_{x_0}$  de ce point et un faisceau constant  $\mathcal{K}_{x_0} \subset TM[\star D]|_{U_{x_0}}$  dont la restriction à  $U_{x_0} \setminus D$  coïncide avec  $\mathfrak{kil}_{U_{x_0} \setminus D, \omega_0}^{loc}$ .
2.  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing si elle vérifie la propriété locale d'extension en tout  $x_0 \in W$ , où  $W$  est un ouvert dense de  $D$ .

Nous obtenons :

**Lemme 3.2.3.1.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ , vérifiant la propriété d'extension des champs de Killing. Si  $M$  est simplement connexe, alors tout germe  $X_x \in \mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{loc}(x)$  de champ de Killing local en un point  $x \in M \setminus D$  se prolonge en un champ de vecteur méromorphe  $X$  sur  $M$ .

*Démonstration.* Si  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing, alors les faits précédents sont vrais aussi pour  $x_0 \in W$ , i.e pour tout  $x_0$  dans l'ouvert  $U = M \setminus (D \setminus W)$ . Nous en déduisons qu'il existe un recouvrement  $(U_\beta)_{\beta \in J}$  de  $U$  par des ouverts, et pour tout  $\beta \in J$ , un isomorphisme  $\varphi_\beta$  entre  $\mathfrak{kil}_{M, \omega_0}^{loc}|_{U_\beta \setminus D}$  et  $\underline{K}_{U_\beta \setminus D}$ . Les morphismes de transition  $(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)_{\alpha, \beta \in J}$  associés à ces derniers définissent donc un élément de  $\check{H}^1(U, \underline{Aut}(K)_M) \simeq H^1(U, \mathbb{C}) \otimes Aut(K)$ . Comme  $M$  est simplement connexe, et que  $D \setminus W$  est de codimension

supérieure à 2 dans  $M$ ,  $\check{H}^1(U, \mathbb{C})$  est trivial. Il existe par conséquent un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux entre  $\check{\text{Hil}}_{M, \omega_0}^{loc}$  et le faisceau constant de fibre  $K$  sur  $M \setminus D$ . De plus,  $Kill_{M, \omega_0}^{loc}$  est la restriction d'un sous-faisceau de  $TM[\star D]$ .  $\square$

### 3.2.4 Preuve dans le cas holomorphe

Nous donnons à présent un aperçu de la preuve contenue dans [7]. Soit  $M$  une variété complexe compacte, simplement connexe et avec  $a(M) = 0$  et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe de type algébrique (Définition 3.2.3). De manière équivalente, il s'agit d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$  avec  $D = \emptyset$ , donc elle vérifie automatiquement la propriété d'extension des champs de Killing. Le Théorème 3.2.3 implique qu'il existe un point  $x \in M$  et  $n$  germes  $X_{1,x}, \dots, X_{n,x}$  de champs de Killing indépendants en ce point. Le Lemme 3.2.3.1 montre que ces germes sont ceux de  $n$  champs de vecteurs méromorphes  $X_1, \dots, X_n$  sur  $M$ , indépendants. Ce sont des champs de Killing de  $(E, \omega_0)$ , et ils sont par conséquent holomorphes.

Notons  $S$  le diviseur des zéros de  $\bigwedge_{i=1}^n X_i$ . Alors  $(X_1, \dots, X_n)$  est un parallélisme holomorphe sur  $M \setminus S$ . De manière équivalente, il s'agit d'une action infinitésimale de  $\mathbb{C}^n$  sur  $M \setminus S$ , et on dit qu'un groupe de Lie complexe  $L$  de dimension  $n$  intègre le parallélisme  $(X_1, \dots, X_n)$  si il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de son algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$ , et une action holomorphe de  $L$  sur  $M$  avec la propriété suivante pour tout  $x \in M$  :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_L(t_1 e_1 + \dots + t_n e_n) \cdot x = t_1 X_1(x) + \dots + t_n X_n(x) \quad (3.2)$$

**Lemme 3.2.4.1.** *Soient  $(E, \omega_0)$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  comme ci-dessus. Alors  $(X_1, \dots, X_n)$  s'intègre en un groupe de Lie abélien  $L$  agissant transitivement sur  $M \setminus S$ .*

*Démonstration.* Par le Lemme 1.5.4.3, le sous-espace  $\mathfrak{l} \subset H^0(M, TM)$  engendré par  $X_1, \dots, X_n$  est une sous-algèbre de Lie de  $H^0(M, TM)$ . Par le troisième théorème de Lie,  $\mathfrak{l}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $L$ . Comme  $M$  est compacte et que les  $X_i$  sont holomorphes (la géométrie est holomorphe), ils sont complets. Cela signifie que pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $x \in M$ , le flot  $\phi_{X_i}^t(x)$  est défini pour tout temps  $t \in \mathbb{C}$ . Définissons l'application :

$$\exp_x(t_1 \epsilon_1 + \dots + t_n \epsilon_n) = \phi_{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n}^1(x) \quad (3.3)$$

Il est prouvé que  $L$  est abélien (Lemme 3.1, [7]), donc on obtient une action transitive de  $L$  sur  $M \setminus S$  en posant :

$$\exp_L(A) \cdot \exp_x(X) = \exp_x(A + X) \quad (3.4)$$

Cette action est transitive sur  $M \setminus S$ .  $M$  est donc munie d'une action d'un groupe de Lie abélien  $L$  admettant  $M \setminus S$  comme orbite dense dans  $M$ .  $\square$

La variété  $M$  est donc une compactification équivariante d'un groupe de Lie abélien  $L$ , et la géométrie de ces variétés possède de nombreuses propriétés (Lemme 4.2, [7]). Ces propriétés permettent de conclure que la courbure de la géométrie  $(E, \omega_0)$  est identiquement nulle. Comme  $M$  est simplement connexe, il existe une développante globale (Définition 1.5.13)  $dev : M \rightarrow G/P$  de la géométrie  $(E, \omega_0)$ . Il s'agit d'un revêtement, et comme  $G/P$  est simplement connexe c'est un biholomorphisme. Comme  $M$  est compacte,  $G/P$  doit être compacte et par conséquent  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  (supposé semi-simple). La variété homogène  $G/P$  est donc projective (Théorème 1.4.1), i.e  $a(G/P) = n$ , ce qui contredit  $a(M) = 0$ .

### 3.2.5 Argument dans le cas méromorphe

Soit maintenant  $(E, \omega_0)$  est une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe de type algébrique sur  $(M, D)$ . Par le [Théorème 3.2.3](#), il existe un point  $x \in M \setminus D$  et  $n$  germes de champs de Killing  $X_{1,x}, \dots, X_{n,x}$  comme précédemment. Supposons que  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing ([Définition 3.2.4](#)). Le [Lemme 3.2.3.1](#) nous permet d'obtenir un parallélisme méromorphe  $(X_1, \dots, X_n)$  sur  $M$  avec  $(X_i)_x = X_{i,x}$ , et tel que la restriction de chaque  $X_i$  à  $M \setminus D$  est un champ de Killing pour  $(E, \omega_0)$ .

Cependant, le [Lemme 3.2.4.1](#) n'est plus valable. Pour conclure, nous pouvons essayer d'utiliser le résultat suivant issu de [\[6\]](#) :

**Theorème 3.2.4.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte, de dimension algébrique nulle.*

1. *Si  $M$  possède un parallélisme méromorphe en  $D$ , alors il s'agit d'une structure de translation méromorphe plate modelée sur une algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$ . Les pôles sont situés sur  $D$ .*
2. *Si il s'agit d'un parallélisme branché, alors le groupe fondamental de  $M$  est infini.*

*Démonstration.* Considérons une 1-forme méromorphe  $\eta$  sur  $(M, D)$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  et définie par :

$$\eta = \sum_{i=1}^n X_i^* \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.5)$$

où  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , et  $(X_i^*)_{i=1, \dots, n}$  est la famille des 1-formes méromorphes définies par  $X_i^*(X_j) = \delta_i^j$ . Il s'agit donc d'une  $(\mathbb{C}^n, \{0\})$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(M, \eta)$  sur  $(M, D)$ . La représentation de courbure  $k_\eta$  ([Définition 1.5.15](#)) est donc une section méromorphe du module trivial  $\mathcal{O}_M \otimes \mathbb{W}$ .

Comme  $M$  ne possède que des fonctions méromorphes constantes, cette dernière est une section constante. Autrement dit, en désignant par  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  la base canonique et  $Y_i = \omega^{-1}(\mathbf{e}_i)$ , nous avons

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k^* \circ k_\eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) Y_k = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k Y_k \quad (3.6)$$

avec  $c_{i,j}^k \in \mathbb{C}$ . Ces constantes munissent  $\mathbb{C}^n$  d'une nouvelle structure d'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$  sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  donnée par le crochet  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]_{\mathfrak{g}} = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k \mathbf{e}_k$ . Par le troisième théorème de Lie, cet algèbre de Lie s'intègre en un groupe de Lie complexe  $L$ . Le couple  $(M, \eta)$  s'identifie donc à une  $(L, \{1\})$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ . La formule [\(3.6\)](#) signifie qu'elle est plate.

Supposons à présent que  $(M, \eta)$  est une géométrie de Cartan branchée sur  $(M, D)$  (i.e le parallélisme rationnel  $\eta$  est branché). Supposons aussi que le groupe fondamental de  $M$  est fini. On peut alors considérer un revêtement fini  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  simplement connexe et compact, et le pullback  $(\tilde{M}, \tilde{\pi}^* \eta)$ . Il s'agit à nouveau d'une structure de translation branchée, modelée sur  $L$ . Elle se développe donc ([Lemme 1.5.3.1](#)) via une application holomorphe  $dev : \tilde{M} \rightarrow L$  avec  $(\tilde{M}, \tilde{\pi}^* \eta) = dev^*(L, \omega_L)$ . Comme  $\tilde{\pi}^* \eta = dev^* \omega_L$  doit être de rang maximal sur  $\tilde{M} \setminus \tilde{\pi}^{-1}(D)$ ,  $dev$  ne peut pas être constante.

Par conséquent, l'image  $dev(\tilde{M})$  doit être compacte et d'intérieur non vide. On obtient  $dev(\tilde{M}) = L$  et  $L$  est un groupe de Lie compact. Par un résultat de H.Wang ([\[52\]](#), Corollaire 2), il est donc abélien. Cela signifie que les constantes de structures  $c_{i,j}^k$  de la formule [\(3.6\)](#) sont nulles. La forme  $\tilde{\pi}^* \eta$  est donc fermée, et comme  $\tilde{M}$  est simplement connexe, elle doit être exacte. Une 1-forme holomorphe exacte sur une variété complexe compacte est triviale, absurde.  $\square$

Pour appliquer le point 2. du [Théorème 3.2.4](#), nous devons étudier l'ordre des champs de Killing le long d'une composante irréductible  $D_\alpha$  du diviseur de branchement.

### 3.3 Propriété d'extension et géométries totalement géodésiques

Dans cette section, nous étudions une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sur une paire  $(M, D)$  formée d'une variété complexe  $M$  et un diviseur  $D$  arbitraires. Nous montrons que l'hypothèse que  $(E, \omega_0)$  est totalement géodésique ([Définition 1.7.2](#)) réduit le problème de prouver qu'elle vérifie la propriété d'extension de ses champs de Killing ([Définition 3.2.4](#)).

Le principe est le suivant : nous introduisons une connexion méromorphe sur le faisceau trivial  $\mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}$ , appelée *connexion de Killing*, dont les sections horizontales sont les images par  $\omega_0$  des automorphismes infinitésimaux. Cette connexion induit, pour tout  $A \in \mathfrak{g}$ , une connexion partielle le long du feuilletage en courbes  $A$ -distinguées sur  $E$  ([Définition 1.7.2](#)). Cette dernière correspond exactement à la connexion de Baum-Bott du feuilletage, et est par conséquent invariante par son holonomie. Nous obtiendrons ainsi que la monodromie est en grande partie triviale ([Proposition 3.3.2.1](#)). Nous introduisons alors la notion de *sous-espace caractéristique* ([Lemme 3.3.3.1](#)).

#### 3.3.1 Connexion de Killing

Nous allons décrire le sous-faisceau  $\mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc} \subset TE \setminus \tilde{D}$  à partir d'une connexion méromorphe sur  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}$ .

Soit  $\omega_0$  un parallélisme méromorphe  $\omega_0$  quelconque sur  $(E, \tilde{D})$ . Il est connu (voir par exemple [\[8\]](#), Définition 3.1) qu'il existe une connexion méromorphe  $\nabla^{rec}$  sur  $TE$  appelée *connexion réciproque* et dont les sections horizontales sont exactement les sections de  $\mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}$ . En effet, soit  $\nabla^0$  l'unique connexion méromorphe sur  $TE$  telle que  $\nabla^0(Y) = 0$  pour tout champ de vecteur  $Y$  avec  $\omega_0(Y)$  constant. Si  $\Phi_{\omega_0}$  désigne l'isomorphisme correspondant à  $\omega_0$  (voir [\(1.94\)](#)), alors  $\nabla^0 = \Phi_{\omega_0}^{-1}d$  où  $d$  est la connexion de module trivial sur  $\mathcal{V}$ . La torsion de la connexion affine holomorphe  $\nabla^0$  peut se décrire comme un morphisme de  $\mathcal{O}_E$ -modules :

$$\mathcal{T} : TE[\star \tilde{D}] \rightarrow \Omega_E^1[\star \tilde{D}] \otimes TE[\star \tilde{D}] \quad (3.7)$$

Alors :

**Lemme 3.3.1.1.** *Soient  $\nabla^{rec}$  et  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  les connexions méromorphes sur  $TE$  et  $\mathcal{V}$  respectivement définies par :*

$$\nabla^{rec} = \nabla^0 - \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \nabla_{\omega_0}^\kappa = \Psi_{\omega_0}^{-1} \nabla^{rec} \quad (3.8)$$

où  $\Psi_{\omega_0}$  est l'isomorphisme réciproque de  $\Phi_{\omega_0}$  ([Équation 1.94](#)). Alors :

1. Soit  $A \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  et  $\tilde{A} = \omega_0^{-1}(A)$ . Alors pour toute section  $s$  de  $\mathcal{V}[\star D]$ ,  $\tilde{A} \lrcorner \nabla_{\omega_0}^\kappa(s) = 0$  si et seulement si  $[\tilde{A}, X] = 0$  où  $\omega_0(X) = s$ . En particulier, les sections horizontales de  $\nabla^{rec}$  sont les champs de vecteurs holomorphes locaux préservant le parallélisme  $\omega_0$ . De manière équivalente,  $\Phi_{\omega_0}(\ker \nabla_{\omega_0}^\kappa) = \mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}$ .
2. Pour tout  $e \in E \setminus \tilde{D}$ , la fibre  $\mathcal{V}(e)$  (voir [Notation 1.2](#)) s'identifie canoniquement à  $\mathfrak{g}$  et la restriction de  $ev_e : \mathcal{V}_e \rightarrow \mathfrak{g}$  à  $(\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa))_e$  est une injection.

*Démonstration.* 1. Il est immédiat que  $\nabla_{\omega_0}^{rec}$  vérifie l'identité de Leibniz. Ensuite, la formule [\(3.10\)](#) implique que pour tout champ méromorphe  $X$  sur  $U \subset M$  :

$$\tilde{A} \lrcorner \nabla^{rec}(X) = 0 \iff \mathcal{L}_{\tilde{A}} \omega_0(X) - (\mathcal{L}_X(\omega_0(\tilde{A}))) - \mathcal{L}_{\tilde{A}} \omega_0(X) - [X, \tilde{A}] = 0 \iff [X, \tilde{A}] = 0$$

d'où le résultat.

2. Il s'agit du [Lemme 1.3.5.2](#)

□

Par le point 2. du [Lemme 3.3.1.1](#), l'image d'un lacet en  $e \in E \setminus \tilde{D}$  par la monodromie de  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  se factorise par un automorphisme  $\mu$  de  $F(e) = ev_e(\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)_e)$ . Comme nous avons fixé un produit hermitien sur  $\mathfrak{g} = \mathcal{V}(e)$ ,  $\mu$  s'étend canoniquement en un automorphisme de  $\mathfrak{g}$ .

**Définition 3.3.1.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ .

1. La connexion méromorphe  $(\mathcal{V}, \nabla_{\omega_0}^\kappa)$  définie dans le [Lemme 3.3.1.1](#) est appelée connexion de Killing de la géométrie de Cartan holomorphe  $(E, \omega_0)$ .
2. Sa monodromie en  $e \in E \setminus \tilde{D}$ , notée  $Mon^e(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$ , sera identifiée à une représentation à valeurs dans  $GL(\mathfrak{g})$  comme ci-dessus.

Par le [Lemme 3.3.1.1](#), nous pouvons reformuler la propriété d'extension des champs de Killing de manière purement algébrique :

**Corollaire 3.3.1.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors elle vérifie la propriété locale d'extension des champs de Killing en  $e_0 \in \tilde{D}$  si et seulement si il existe un voisinage  $U_{e_0}$  de  $e_0$  tel que la restriction de  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  à cet ouvert possède une monodromie triviale (voir [Définition 1.3.14](#)).

Donnons une formule explicite de cette connexion. Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, N}$  une base de  $\mathfrak{g}$ , avec  $(\mathbf{e}_i)_{i=1, \dots, n}$  engendrant un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$ . Notons  $Y_i = \omega_0^{-1}(\mathbf{e}_i)$ , et  $(Y_i^*)_{i=1, \dots, N}$  les 1-formes méromorphes duales des  $(Y_i)_{i=1, \dots, N}$ . Par définition de la torsion, nous avons :

$$\mathcal{T}(Y_i, Y_j) = - \sum_{k=1}^N \mathbf{e}_k^* \circ \omega_0([Y_i, Y_j]) Y_k \quad (3.9)$$

d'où la formule :

$$\mathcal{T} = - \sum_{i,j,k=1}^N \gamma_{i,j}^k Y_i^* \otimes Y_j^* \otimes Y_k \quad (3.10)$$

où  $\gamma_{i,j}^k = \mathbf{e}_k^*[-k_{\omega_0}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]_{\mathfrak{g}}] = Y_k^*([Y_i, Y_j])$  et  $Y_i^* = \mathbf{e}_i^* \circ \omega_0$ . Par la formule [\(3.10\)](#), nous obtenons la formule suivante pour la connexion de Killing :

$$\nabla_{\omega_0}^\kappa = d + \sum_{i,j,k=1}^N Y_i^* \otimes \gamma_{i,j}^k \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.11)$$

Dans le cas d'une géométrie de Klein holomorphe  $(G, P)$ , la géométrie de Cartan holomorphe  $(G, \omega_G)$  correspondante sur  $G/P$  a pour connexion de Killing la *tractor connection*  $\nabla^{\omega_G}$  de la [Définition 1.5.12](#). En général, l'isomorphisme  $\omega_0 : TE[\star\tilde{D}] \simeq \mathcal{V}[\star\tilde{D}]$  permet de donner une formule reliant ces deux connexions.

**Lemme 3.3.1.2.** On a  $\nabla_{\omega_0}^\kappa = p^* \nabla^{\omega_0} + K_{\omega_0}(\cdot, \cdot)$  où  $K_{\omega_0}(\cdot, \cdot)$  est la contraction à gauche de la courbure de  $\omega_0$  par un champ de vecteur, et  $p^* \nabla^{\omega_0}$  est le pullback de la tractor-connexion [\(Définition 1.3.3 et Définition 1.5.12\)](#).

*Démonstration.* Identifions d'abord les connexions  $d$ ,  $\nabla^{\omega_0}$  et  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  à des sections de  $Hom_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{V}[\star\tilde{D}], \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}[\star\tilde{D}])$  définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa &= (\omega_0^{-1} \otimes Id_{\mathcal{V}}) \dashv \nabla_{\omega_0}^\kappa \\ \tilde{\nabla}^{\omega_0} &= (\omega_0^{-1} \otimes Id_{\mathcal{V}}) \dashv \nabla^{\omega_0} \\ \tilde{d} &= (\omega_0^{-1} \otimes Id_{\mathcal{V}}) \dashv d \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le [Lemme 1.3.2.3](#) appliqué à  $\nabla^{\omega_0}$  nous permet de calculer :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa} &= \tilde{d} - \sum_{i,j,k} \gamma_{i,j}^k \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k \\
 &= \tilde{d} + \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_k^* (k_{\omega_0}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]_{\mathfrak{g}}) \\
 &= \tilde{d} + \tilde{\partial} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot) \\
 &= \tilde{\nabla}^{\omega_0} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

où  $\tilde{\partial} = Id_{\mathcal{O}_E} \otimes \partial$  est le morphisme obtenu en tensorisant la différentielle de Kostant (voir [Définition 1.4.5](#)), et  $k_{\omega_0}(\cdot, \cdot)$  est la contraction à gauche de la représentation de courbure par l'identité de  $\mathfrak{g}$ , i.e :  $k_{\omega_0}(\cdot, \cdot) \circ \omega_0 = K_{\omega_0}(\cdot, \cdot)$ .  $\square$

Un champ de Killing local de  $(E, \omega_0)$  commute avec les champs fondamentaux de l'action de  $P$  sur  $E$ . Il s'agit donc d'une section invariante par la linéarisation  $(dr_b)_{b \in P}$  de  $TE$ . Ceci peut être retrouvé comme une conséquence du [Lemme 3.3.1.2](#) :

- Lemme 3.3.1.3.** 1. La connexion de Killing  $\nabla_{\omega_0}^{\kappa}$  est invariante par la linéarisation  $(\phi_b^{\mathfrak{g}})_{b \in P}$  (voir [Définition 1.1.9](#)).
2. Si  $s$  est une section holomorphe locale de  $E(\mathfrak{g})$  sur un ouvert  $U \subset M$ , alors pour tout  $A \in \mathfrak{p}$ , la contraction  $\tilde{A} \dashv \nabla_{\omega_0}^{\kappa}(\tilde{s})$  est identiquement nulle.

*Démonstration.* Reprenons le [Lemme 3.3.1.2](#). Par définition,  $p^* \nabla^{\omega_0}$  est une connexion méromorphe  $P$ -invariante sur  $p^* E(\mathfrak{g}) = \mathcal{V}$ . Par  $P$ -équivariance de la courbure, nous en déduisons le point 1. Par le même lemme, nous obtenons :

$$\tilde{A} \dashv \nabla_{\omega_0}^{\kappa}(\tilde{s}) = \omega_0([\omega_0^{-1}(\tilde{s}), \tilde{A}]) \tag{3.14}$$

Comme  $\omega_0^{-1}(\tilde{s})$  est un champ holomorphe local  $P$ -équivariant par équivariance de  $\omega_0$ , cette contraction s'annule. Nous en déduisons le point 2.  $\square$

Enfin, le fait d'être localement homogène a une traduction algébrique en terme de connexion de Killing :

**Lemme 3.3.1.4.** Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur  $(M, D)$ ,  $\nabla_{\omega_0}^{\kappa}$  sa connexion de Killing et  $\bar{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}$  la connexion méromorphe induite par cette dernière sur  $E(\mathfrak{g})$  (voir [Lemme 3.3.1.3](#)). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(E, \omega_0)$  est localement homogène (resp. quasihomogène)
- (ii) Pour tout  $e \in E \setminus \tilde{D}$  (resp. pour tout  $e$  dans un ouvert dense de  $E$ ),  $\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa}(e)$  est de dimension  $r \geq n$  et possède une base  $(s_1(e), \dots, s_r(e))$  de  $\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa}(e) \subset \mathfrak{g}$  vérifiant  $s_i(e) = \mathbf{e}_i \pmod{\mathfrak{p}}$
- (iii) Pour tout  $x \in M \setminus D$  (resp. dans un ouvert dense de  $M$ ),  $\ker(\bar{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}(x))$  est de dimension  $r \geq n$  et il existe des sections  $(\bar{s}_i)_{i=1, \dots, r}$  de  $\ker \bar{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}$  au voisinage de  $x$  telles que les évaluations des sections  $(\phi_0(\bar{s}_i))_{i=1, \dots, r}$  en  $x$  engendrent  $\mathcal{E}(x)$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (ii) et (iii) est immédiate. Ensuite, fixons  $e \in E \setminus \tilde{D}$ . Alors les dimensions de  $\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa}(e)$  et de  $\mathfrak{k}ill_{E, \omega_0}^{loc}(e)$  coïncident. Par ailleurs,  $U \subset E$  est l'ouvert de locale homogénéité de  $(E, \omega_0)$  si et seulement si  $\mathfrak{k}ill_{E, \omega_0}^{loc}(e)$  engendre un supplémentaire de  $\ker(dp)(e) \subset T_e E$  pour tout  $e \in U$ .

Soit alors  $e \in U \setminus \tilde{D}$  et  $x = p(e)$ . Il existe par définition un voisinage  $U_x$  de  $x$  et des sections  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n \in \mathfrak{fil}_{M, \omega_0}^{loc}(U_{x_0})$  telles que  $TU_x[\star D]$  est engendré par ces sections comme  $\mathcal{O}_M[\star D]$ -module. Le [Lemme 3.3.1.3](#) montre que  $\nabla_{\omega_0}^{\kappa}$  passe au quotient par la  $P$ -linéarisation de  $\mathcal{V}$  en une connexion méromorphe  $\bar{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}$  sur  $E(\mathfrak{g})$ . Considérons alors  $s_i = p_{\star} \omega_0(X_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Notons  $\bar{\pi}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$  le passage au quotient par  $E(\mathfrak{p})$  dans  $E(\mathfrak{g})$ . Par définition, nous avons :

$$\phi_0(\bar{X}_i) = \bar{\pi}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(s_i) \quad (3.15)$$

Par conséquent, les sections  $(s_i)_{i=1, \dots, n}$  engendrent un module supplémentaire de  $E(\mathfrak{p})[\star D]|_{U_x}$  dans  $E(\mathfrak{g})[\star D]|_{U_x}$ . Or  $x \in M \setminus D$  donc les évaluations  $s_i(x)$  engendrent un supplémentaire de  $E(\mathfrak{p})(x)$  dans la fibre  $E(\mathfrak{g})(x)$ . De manière équivalente, les évaluations  $\phi_0(s_i)(x)$  engendrent  $\mathcal{E}(x)$ . Considérons les sections  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$  définies par  $\tilde{s}_i = \omega_0(X_i)$ . Alors les évaluations  $(\tilde{s}_i(e))_{i=1, \dots, n}$  engendrent un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$  dans  $\mathfrak{g} = \mathcal{V}(e)$ .  $\square$

Terminons par la construction d'un exemple de géométrie de Cartan méromorphe ne vérifiant pas la propriété d'extension des champs de Killing, inspiré par l'Exemple 3.8 dans [\[8\]](#) :

**Exemple 3.3.1.** Fixons  $M = \mathbb{C}^2$  munie des coordonnées canoniques globales  $(z_1, z_2)$ , le diviseur  $D = \{z_1 = 0\}$  et  $(G, P) = (\mathbb{C}^2, \{0\})$ . Le groupe  $G$  est le groupe additif de  $\mathbb{C}^2$ , agissant par translation à gauche sur l'espace affine  $G/P = \mathbb{C}^2$ . Nous considérons la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = \mathbb{C}^2$ . Soit  $(E, \omega_0)$  la  $(G, P)$ -géométrie méromorphe sur  $(M, D)$  définie par  $E = M \times P = M$  et

$$\omega_0(z_1, z_2) = \frac{dz_1}{z_1} \otimes (e_1 - \alpha z_2 e_2) + dz_2 \otimes e_2 \quad (3.16)$$

où  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Alors  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété locale d'extension des champs de Killing en  $x_0 \in D$  si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* D'abord, les champs  $\omega_0$ -constants  $(Y_1, Y_2)$  associés à la base  $(e_1, e_2)$  sont  $Y_1(z_1, z_2) = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \alpha z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$  et  $Y_2(z_1, z_2) = \frac{\partial}{\partial z_2}$ . On note  $(Y_1^*, Y_2^*)$  les formes duales. Le seul coefficient de structure (voir [Définition 1.5.16](#)) non nul est donc

$$\gamma_{1,2}^2 = Y_2^*([Y_1, Y_2]) = \alpha \quad (3.17)$$

Décrivons les sections de  $\mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}$  : soit  $X = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \in TM(U)$  sur un ouvert (non vide)  $U \subset M \setminus D$ . Alors par définition  $X \in \mathfrak{fil}_{E, \omega_0}^{loc}(U)$  si et seulement si  $[X, Y_1] = [X, Y_2] = 0$ . Cela équivaut à :

$$\begin{cases} 0 &= [a_1 Y_1 + a_2 Y_2, Y_1] &= -\mathcal{L}_{Y_1}(a_1)Y_1 - \gamma_{1,2}^2 a_2 Y_2 - \mathcal{L}_{Y_1}(a_2)Y_2 \\ 0 &= [a_1 Y_1 + a_2 Y_2, Y_2] &= \gamma_{1,2}^2 a_1 Y_2 - \mathcal{L}_{Y_2}(a_1)Y_1 - \mathcal{L}_{Y_2}(a_2)Y_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

Séparons les composantes des égalités de [\(3.18\)](#) le long de chaque  $Y_i$ . En réexprimant  $\mathcal{L}_{Y_1} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \alpha z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$  et  $\mathcal{L}_{Y_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}$ , nous obtenons que les coordonnées  $(a_1, a_2)$  sont solutions d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\nabla \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

où  $\nabla$  est la connexion méromorphe ([Définition 1.3.1](#)) sur  $\mathcal{V} = \mathcal{O}_M \otimes \mathfrak{g} = \mathcal{O}_M \otimes \mathbb{C}^2$  définie par :

$$\nabla = d + dz_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{z_1} \end{pmatrix} + dz_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Nous avons déjà vu que la monodromie ([Définition 1.3.14](#)) des solutions de  $\nabla$  est non triviale si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{Z}$  (voir [Exemple 1.3.2](#)).  $\square$

### 3.3.2 Monodromie des champs de Killing dans le cas totalement géodésique

Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ , et supposons la totalement géodésique (Définition 1.7.2). Par le Lemme 1.7.2.4, il existe un ouvert Zariski dense  $\tilde{W} \subset \tilde{V}$  (où  $\tilde{V}$  est l'ensemble de la Définition 3.1.1) avec la propriété suivante. Pour tout  $e_0 \in \tilde{W}$ , il existe un voisinage  $\bar{U}$  de  $x_0 = p(e_0)$ , une géométrie de Cartan méromorphe  $(E', \omega'_0)$  sur  $(\bar{U}, D)$  holomorphiquement totalement géodésique (Définition 1.7.2) et isomorphe à  $(E|_{\bar{U}}, \omega_0)$ . Comme nous étudions la monodromie locale de la connexion de Killing au voisinage de  $e_0$ , nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $(E, \omega_0)$  est holomorphiquement totalement géodésique.

Il existe donc  $A \in \mathfrak{g}$  et une courbe  $A$ -distinguée  $\Sigma$  avec  $\Sigma \cap \tilde{D} = \{e_0\}$ . L'intérêt de considérer cette situation géométrique réside dans le lien entre la connexion de Killing et la connexion de Baum-Bott  $\nabla^{\mathcal{T}_A}$  (voir (1.157)) associée à  $\mathcal{T}_A$ , et donc dans l'application du Lemme 1.7.2.2. Soit en effet  $\bar{\Phi}_{\omega_0}$  l'isomorphisme de faisceaux (1.94) défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} TE[\star\tilde{D}] & \xrightarrow{\Phi_{\omega_0}} & \mathcal{V}[\star\tilde{D}] \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A} \\ TE/\mathcal{T}_A[\star\tilde{D}] & \xrightarrow[\bar{\Phi}_{\omega_0}]{} & \mathcal{V}/\mathcal{V}_A[\star\tilde{D}] \end{array} \quad (3.21)$$

**Lemme 3.3.2.1.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$  et  $A \in \mathfrak{g}$ . La connexion  $\mathcal{T}_A$ -partielle méromorphe induite par  $\nabla_{\omega_0}^{\kappa}$  préserve le sous-module  $\mathcal{V}_A[\star\tilde{D}] = \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}]A$ . La connexion  $\mathcal{T}_A$ -partielle méromorphe  $\nabla^A$  sur  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_A$  ainsi obtenue vérifie :*

$$\nabla^{\mathcal{T}_A} = \bar{\Phi}_{\omega_0}^{-1} \nabla^A \quad (3.22)$$

où  $\bar{\Phi}_{\omega_0}$  est le morphisme défini par (3.21).

*Démonstration.* Par définition de  $\bar{\Phi}_{\omega_0}^{-1} \nabla^A$ , il suffit de prouver que pour tout ouvert  $U \subset M$  feuilleté pour  $\mathcal{T}_A$  et tout champ de vecteur holomorphe  $Z$  définissant sur  $U$ ,

$$\pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}(\nabla_{\omega_0, Z}^{\kappa}(\cdot)) = \nabla_Z^A(\bar{\Phi}_{\omega_0}(\cdot)) = \nabla_Z^{\mathcal{T}_A}(\cdot) = q([Z, \cdot])$$

où  $q: TE \rightarrow TE/\mathcal{T}_A$  et  $\pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}$  sont les projections naturelles. Ceci découle directement de la définition de la connexion de Killing et du diagramme commutatif (3.21).  $\square$

Nous en déduisons :

**Proposition 3.3.2.1.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Supposons qu'il existe une composante irréductible  $D_\alpha$  de  $D$  qui n'est pas invariante par  $\mathcal{T}_A$ . Alors pour un point générique  $e_0$  de  $D_\alpha$ , il existe un voisinage  $U$  de  $e_0$  dans  $M$  avec :*

1. *Pour tout  $e \in U \setminus \tilde{D}$ , l'automorphisme  $\mu \in GL(\mathfrak{g})$  image d'un lacet  $[\gamma] \in \pi_1(U \setminus \tilde{D}, e)$  par la monodromie de la connexion de Killing en  $e$  (voir Définition 3.3.1) vérifie :*

$$\pi_{A^\perp} \circ \mu = \pi_{A^\perp} \quad (3.23)$$

où  $\pi_{A^\perp}$  est la projection sur  $\mathcal{V}_{A^\perp}$  parallèlement au sous-module  $\mathcal{O}_E A \subset \mathcal{V}$ , et l'orthogonal  $A^\perp$  est pris pour un produit hermitien quelconque sur  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ .

2. Pour tout ouvert  $V \subset U$  une section de  $\pi_{A^+}(\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa))$  sur  $V \setminus \tilde{D}$  est la restriction d'une section de  $\mathcal{V}_{A^+}[\star\tilde{D}]$  sur  $V$ . Supposons de plus que  $(E, \omega_0)$  est une géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors, une section comme précédemment est la restriction d'une section de  $\mathcal{V}_{A^+}$  sur  $V$ .

*Démonstration.* 1. Par le [Lemme 1.7.2.1](#), pour  $e_0$  générique dans  $D_\alpha$ , il existe un voisinage  $U_0$  de  $e_0$ , telle que chaque feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}_A$  intersecte  $\tilde{D} \cap U$  en un unique point ([Lemme 1.7.2.1](#)). En particulier, il existe une feuille  $\Sigma$  avec  $\Sigma \cap \tilde{D} = \{e_0\}$ .

Soit  $s$  une section  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$ -horizontale sur un ouvert  $U' \subset U_0$ . Alors en reprenant les notations du [Lemme 3.3.2.1](#),  $\pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}(s)$  est une section  $\nabla^A$ -horizontale sur  $U'$ . Par le [Proposition 1.3.4.1](#), prouver [\(3.23\)](#) revient à prouver que le sous-faisceau  $\mathcal{K} := \pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}(\ker \nabla_{\omega_0}^\kappa)$  du faisceau des sections  $\nabla^A$ -horizontales est un faisceau constant en restriction à  $U \setminus \tilde{D}$  (où  $U \subset U_0$  est un voisinage de  $e_0$ ).

Fixons pour cela un point  $e \in \Sigma \setminus \{e_0\}$ . Comme les pôles de  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  sont supportés en  $\tilde{D}$ , le faisceau  $\mathcal{K}$  est un faisceau constant en restriction à un voisinage  $U'$  de  $e$ . Soit  $([s_1]_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}, \dots, [s_r]_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A})$  une base de  $\mathcal{K}(U')$ . Par le [Lemme 3.3.1.1](#), pour tout  $i = 1, \dots, r$ , on a  $[s_i]_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A} = \bar{\Phi}_{\omega_0}(q(X))$  où  $X$  est une section horizontale pour la connexion de Baum-Bott  $\nabla^{\mathcal{T}_A}$  et  $q$  la projection naturelle. Par le [Lemme 1.7.2.2](#) et le ??, les éléments de la base précédente se prolongent en des sections de  $\mathcal{K}$  sur un voisinage de la feuille  $\Sigma$ . Ces sections sont  $\mathcal{O}_E$ -indépendantes et forment donc en particulier une base de  $\mathcal{K}(U' \setminus \tilde{D})$  où  $U'$  est un voisinage de la feuille  $\Sigma$ . Cela prouve que  $\mathcal{K}$  est un faisceau constant sur  $\mathcal{K}(U' \setminus \tilde{D})$  et termine la preuve.

2. Soit  $s$  une section  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$ -horizontale définie sur un ouvert  $V \subset U$  et  $[s]_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}$  sa classe dans  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_A[\star\tilde{D}]$ . Il existe donc une section horizontale  $q(X)$  pour la connexion de Baum-Bott  $\nabla^{\mathcal{T}_A}$  telle que  $[s]_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A} = \bar{\Phi}_{\omega_0}(q(X))$  dans les notations du [Lemme 3.3.2.1](#). Comme  $q(X)$  est holomorphe au voisinage de tout point  $e \in V \setminus \tilde{D}$ , le [Lemme 1.7.2.2](#) implique que  $q(X)$  est holomorphe au voisinage de la feuille  $\Sigma$  passant par  $e \in V \setminus \tilde{D}$ . Comme l'union de ces feuilles recouvre  $V$ , on en déduit que  $q(X)$  est holomorphe sur  $V$ . Comme  $\omega_0$  est une connexion de Cartan holomorphe branchée, l'image d'une section holomorphe par le morphisme  $\bar{\Phi}_{\omega_0}$  est encore une section holomorphe de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_A$ . Enfin, le passage au quotient  $A^+ \simeq \mathfrak{g}/\mathcal{C}A$  induit clairement un isomorphisme entre les faisceaux  $\mathcal{V}_{A^+}$  et  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_A$ , compatible avec  $\pi_{A^+}$  et  $\pi_{\mathcal{V}/\mathcal{V}_A}$ . Nous obtenons que  $\pi_{A^+}(s)$  est une section holomorphe sur  $V$ .

### 3.3.3 Sous-espaces caractéristiques

La [Proposition 3.3.2.1](#) possède une conséquence immédiate pour certains modèles  $(G, P)$  :

**Corollaire 3.3.2.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Supposons que l'action projective de  $P$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  induite par l'action adjointe quotient ([Définition 1.4.2](#)) est sans point fixe, ou transitive.*

1. Si  $(E, \omega_0)$  est holomorphiquement totalement géodésique, alors elle vérifie la propriété d'extension des champs de Killing.
2. Si de plus  $(E, \omega_0)$  est branchée, alors toute section  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$ -horizontale sur un ouvert  $U \subset E$  est une section holomorphe de  $\mathcal{V}$ .

*Démonstration.* 1. Par définition, aucune composante irréductible  $\tilde{D}_\alpha$  de  $\tilde{D}$  n'est invariante par tous les feuilletages  $\mathcal{T}_A$  ([Lemme 1.7.2.3](#)). Cela signifie qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense  $\tilde{W} \subset \tilde{D}$  avec la propriété suivante : pour tout  $e_0 \in \tilde{W}$ , il existe  $A \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  et une feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}_A$  ([Lemme 1.7.2.3](#)) en  $e_0$  vérifie  $\Sigma \cap \tilde{D} = \{e_0\}$ .

Soit  $x_0 = p(e_0)$ . Le but est d'utiliser l'hypothèse sur  $P$  pour obtenir qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense  $W_{x_0} \subset p^{-1}(x_0)$  et une direction  $B \in \mathfrak{g} \setminus \mathbb{C}A$  avec la propriété suivante. Pour tout  $e'_0 \in W_{x_0}$ , les feuilles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  de  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}_B$  en  $e'_0$  vérifient  $\tilde{D} \cap \Sigma_1 = \tilde{D} \cap \Sigma_2 = \{e'_0\}$ . Cela permettra d'appliquer la Proposition 3.3.2.1 pour obtenir le résultat. D'abord, le Lemme 1.7.2.1 prouve qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense  $W_1 \subset p^{-1}(x_0)$  tel que pour tout  $e'_0 \in W_1$ ,  $\Sigma_1 \cap \tilde{D} = \{e'_0\}$ . Ensuite, comme  $P$  agit sans point fixe sur les droites de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ , il existe  $b \in P$  tel que  $ad(b^{-1})[A] = B$  avec  $B \in \mathfrak{g} \setminus \mathbb{C}A$ . Posons  $W'_1 = r_b(W_1)$  et considérons  $e''_0 \in W'_1$ . Alors  $e'_0 = r_{b^{-1}}(e''_0) \in W_1$ .

Par ailleurs, la feuille  $\Sigma_2$  de  $\mathcal{T}_B$  en  $e''_0$  s'envoie sur  $\Sigma_1$  de  $\mathcal{T}_A$  en  $e'_0$  par le biholomorphisme  $r_{b^{-1}}$ . En effet, si  $Z_A$  est un champ définissant  $\mathcal{T}_A$  sur un voisinage  $U$  de  $e'_0$ , alors par définition il existe une fonction méromorphe  $h$  telle que  $\omega_0(Z_A) = hA$ . Alors  $\omega_0(Tr_b(Z_A)) = ad(b^{-1})[\omega_0(Z_A)] = hB$ , et comme  $Z_B$  est l'image d'un champ holomorphe par un biholomorphisme, il est holomorphe sur  $r_b(U) \subset W'_1$ . Il s'agit donc d'un champ définissant  $\mathcal{T}_B$  sur  $r_b(U) \ni e''_0$ .

Comme  $\tilde{D}$  est invariant par l'action de  $P$  sur  $E$ , nous obtenons que  $\Sigma_2 \cap \tilde{D} = r_b(\Sigma_1 \cap \tilde{D}) = e''_0$ . A nouveau, le Lemme 1.7.2.1 implique qu'il existe un ensemble Zariski-dense  $W_2 \subset p^{-1}(x_0)$  avec cette propriété. Alors l'intersection  $W_{x_0} = W_1 \cap W_2$  vérifie la propriété désirée.

Soit  $e_0 \in W_{x_0}$ . Fixons un produit hermitien sur  $\mathfrak{g}$  tel que  $A$  et  $B$  sont orthogonaux. En appliquant la Proposition 3.3.2.1 à  $A$  et  $B$ , nous obtenons que les images de  $ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$  par le passage au quotient par  $\mathcal{V}_A$  et  $\mathcal{V}_B$  sont des faisceaux constants sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ . Leurs restrictions à  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$  s'étendent respectivement en deux sous-faisceaux de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_A[\star\tilde{D}]$  et de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_B[\star\tilde{D}]$  sur  $U_{e_0}$ . Or  $\mathcal{V}_A \cap \mathcal{V}_B = \{0\}_E$ . Par conséquent,  $ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$  est un faisceau constant en restriction à  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ , qui se prolonge en un sous-faisceau de  $\mathcal{V}[\star\tilde{D}]$  sur  $U_{e_0}$ . Cela signifie que  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension locale des champs de Killing en  $e_0$ . Ceci étant vrai pour tout  $e_0 \in W_{x_0}$  et  $x_0 \in p(\tilde{W})$ , la propriété d'extension est vérifiée.

2. Supposons maintenant que  $(E, \omega_0)$  est holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors par le point 2. du Proposition 3.3.2.1, les sous-faisceaux de  $\mathcal{V}_A[\star\tilde{D}]$  et  $\mathcal{V}_B[\star\tilde{D}]$  mentionnés ci-dessus sont inclus dans  $\mathcal{V}_A$  et  $\mathcal{V}_B$ . Il s'en suit que  $ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$  est inclus dans  $\mathcal{V}$ . □

Pour les autres modèles, il arrive qu'il existe un sous-espace  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  contrôlant en un certain sens toute la monodromie des champs de Killing (voir Théorème 3.4.2). Précisons ce que cela signifie.

**Définition 3.3.2.** *Un sous-espace  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  est dit caractéristique pour un sous-ensemble de géométries de Cartan méromorphes  $\mathcal{G}_{M,D}$  si il existe un supplémentaire  $\mathfrak{k}^\perp$  de  $\mathfrak{k}$  avec la propriété suivante. Pour tout objet  $(E, \omega_0)$  de  $\mathcal{G}_{M,D}$  :*

- (i) *La projection  $\pi_{\mathfrak{k}}$  sur  $\mathcal{V}_{\mathfrak{k}}$  parallèlement à  $\mathcal{V}_{\mathfrak{k}^\perp}$  se restreint à  $ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$  en un isomorphisme vers son image.*
- (ii) *L'isomorphisme réciproque s'étend en un morphisme de  $\mathbb{C}$ -faisceaux  $\mathcal{L} : \mathcal{V}_{\mathfrak{k}}[\star\tilde{D}] \longrightarrow \mathcal{V}[\star\tilde{D}]$ .*

**Exemple 3.3.2.** *Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein effective et  $\mathfrak{g}_-$  l'orthogonal de  $\mathfrak{p} = Lie(P)$  pour un produit hermitien sur  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{g}_-$  vérifie la condition (i) de la Définition 3.3.2.*

*Démonstration.* Soit  $(E, \omega_0)$  une géométrie de Cartan comme dans l'énoncé. Il s'agit de prouver que si un champ de Killing  $X$  défini au voisinage de  $e \in E \setminus \tilde{D}$  dans  $E \setminus \tilde{D}$  et vérifiant

que  $\omega_0(X)$  est à valeurs dans  $\mathfrak{p}$  est identiquement nul. Cela est une conséquence directe du [Corollaire 1.5.2](#).  $\square$

L'existence d'un tel sous-espace simplifie la preuve de la propriété d'extension des champs de Killing de la manière suivante :

**Lemme 3.3.3.1.** *Supposons que  $\mathfrak{k}$  est un sous-espace caractéristique pour une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$ , et notons  $\pi_{\mathfrak{k}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathfrak{k}}$  la projection parallèlement à un supplémentaire de  $\mathfrak{k}$ . Alors  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing si et seulement si il existe  $\tilde{W} \subset \tilde{D}$  dense avec la propriété suivante. Pour tout  $e_0 \in \tilde{W}$ , il existe un voisinage  $U_{e_0}$  de  $e_0$  tel que :*

- (i) *L'image  $\pi_{\mathfrak{k}}(\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa})$  est un faisceau constant sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ .*
- (ii) *La restriction de  $\pi_{\mathfrak{k}}(\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa})$  à  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$  se prolonge en un sous-faisceau de  $\mathcal{V}_{\mathfrak{k}}[\star \tilde{D}]$ .*

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat : si  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing, alors il existe un voisinage simplement connexe  $U_{e_0}$  tel que la restriction  $\ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa}|_{U_{e_0} \setminus \tilde{D}}$  est un faisceau constant. Or par définition d'un sous-espace caractéristique,  $\pi_{\mathfrak{k}}$  induit un isomorphisme entre ce faisceau et sa projection sur  $\mathfrak{k}$ , d'où (i). De plus, les champs de Killings définis sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$  sont des champs méromorphes, d'où (ii) car  $\pi_{\mathfrak{k}}$  préserve les sections méromorphes.

Réciproquement, supposons que (i) est vérifiée. L'image de  $\pi_{\mathfrak{k}}(\ker(\nabla_{\omega_0}^{\kappa}))$  par le morphisme  $\mathcal{L}$  de la [Définition 3.3.2](#) est donc un faisceau constant sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ . Par définition d'un sous-espace caractéristique, il s'agit de  $\ker(\nabla_{\omega_0}^{\kappa})|_{U_{e_0} \setminus \tilde{D}}$ . Comme le morphisme  $\mathcal{L}$  préserve les sections méromorphes, l'hypothèse (ii) implique que  $\ker(\nabla_{\omega_0}^{\kappa})$  se prolonge en un sous-faisceau de  $\mathcal{V}[\star \tilde{D}]$  en restriction à  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ . Ces deux propriétés signifient exactement que  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété locale d'extension des champs de Killing en  $e_0$ .  $\square$

$\square$

### 3.4 Propriété d'extension pour les géométries paraboliques régulières et totalement géodésiques

Dans cette section, nous appliquons les résultats de la [section 3.3](#) aux modèles paraboliques complexes  $(G, P)$  (voir [Définition 1.4.16](#)) et pour les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes régulières ([Définition 2.2.4](#)). Rappelons que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est alors graduée ([Définition 1.4.9](#)) :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-k}^k \mathfrak{g}_i \tag{3.24}$$

avec  $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$  et  $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ , et  $k$  est appelé degré parabolique de  $(G, P)$ .

Lorsque le degré parabolique est  $k = 1$  et  $G$  simple, nous obtenons immédiatement la propriété d'extension et une information sur l'ordre des champs de Killing le long des pôles car  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  est irréductible. Pour les autres modèles et  $G$  semi-simple, nous reprenons un résultat de A. Căp ([\[13\]](#)) impliquant l'existence d'un sous-espace caractéristique ([Théorème 3.4.2](#)), et appliquons le [Lemme 3.3.3.1](#). Nous perdons cependant l'information sur l'ordre des champs de Killing.

### 3.4.1 Modèles paraboliques simples de degré 1

Pour ces modèles, nous pouvons directement appliquer le [Corollaire 3.3.2](#). En effet :

**Lemme 3.4.1.1.** *Soit  $(G, P)$  un modèle parabolique de degré  $k = 1$  avec  $G$  simple. Alors la représentation adjointe quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  ([Définition 1.4.2](#)) est irréductible.*

*Démonstration.* Comme  $k = 1$ , le sous-espace  $\mathfrak{g}_{-1}$  est une sous-algèbre abélienne de  $\mathfrak{g}$ . Par conséquent, l'application qui à un idéal  $I \subset \mathfrak{g}$  associe la sous-représentation  $I/(I \cap \mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  est une bijection. Comme  $G$  est supposé simple, le seul idéal non trivial est  $\mathfrak{g}$ , d'où le résultat.  $\square$

Nous obtenons :

**Theorème 3.4.1.** *Soit  $M$  une variété complexe,  $D$  un diviseur effectif. Soit  $(G, P)$  un modèle parabolique de degré  $k = 1$  avec  $G$  simple, et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe et holomorphiquement totalement géodésique sur  $(M, D)$  ([Définition 1.7.2](#)). Alors :*

1.  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing.
2. Supposons de plus que  $(E, \omega_0)$  est branchée. Soit  $e_0 \in \tilde{V}$  appartenant à une composante irréductible  $\tilde{D}_\alpha$ ,  $U_{e_0}$  un voisinage de  $e_0$  et  $s$  une section horizontale de  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  sur  $U_{e_0} \setminus \tilde{D}$ . Alors  $s$  est la restriction d'une section holomorphe de  $\mathcal{V}$  sur  $U_{e_0}$ .

*Démonstration.* Par le [Lemme 3.4.1.1](#), les hypothèses du [Corollaire 3.3.2](#) sont vérifiées. Le point 2. de ce théorème correspond alors au point 2. du corollaire précédent.  $\square$

### 3.4.2 Sous-espace caractéristique pour les géométries paraboliques régulières

Pour  $k > 1$ , nous allons utiliser la conséquence suivante du résultat principal de [\[13\]](#) :

**Theorème 3.4.2.** *La composante  $\mathfrak{g}_{-k}$  est un sous-espace caractéristique ([Définition 3.3.2](#)) pour les  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes paraboliques régulières.*

*Démonstration.* Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe régulière sur  $(M, D)$ . Introduisons d'abord quelques notations. Définissons, pour tout  $i \in \{-k, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{V}^i = \mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}^i$ . Notons le premier module de Chevalley relatif associé à la représentation adjointe  $C^1 = C^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \text{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$  ([Définition 1.4.6](#)), ainsi sa graduation par les composantes  $(C_l^1)_{l \geq -(k-1)}$  de degré homogène  $l$  ([Définition 1.4.14](#)). La filtration correspondante sera notée  $(C^{1,l})_{l \geq -(k-1)}$ . Les projections sur les composantes graduées seront notées  $\pi_l$ . Nous définissons le module trivial  $\mathcal{C} = \mathcal{O}_E \otimes C^1$ , qui est filtré par les sous-modules :

$$\mathcal{C}^{1,l} = \mathcal{O}_E \otimes C^{1,l} \quad (3.25)$$

Nous définissons des morphismes de  $\mathcal{O}_E$ -modules par  $\tilde{\partial} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\tilde{\partial}^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}$  respectivement par  $\tilde{\partial} = \text{Id}_{\mathcal{O}_E[\star\tilde{D}]} \otimes \partial$  et  $\tilde{\partial}^* = \text{Id}_{\mathcal{O}_E[\star\tilde{D}]} \otimes \partial^*$  où  $\partial$  et  $\partial^*$  sont les différentielles et codifférentielles de Kostant  $\mathfrak{g}_-$ -relatives. En particulier,  $\ker(\partial) = \{A \in \mathfrak{g} \mid \forall B \in \mathfrak{g}, [A, B]_{\mathfrak{g}} = 0\} = \mathfrak{g}_{-k}$  donc  $\ker(\tilde{\partial}) = \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}_{-k}$ .

Nous avons :

$$\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa = \tilde{d} + \tilde{\partial} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot) \quad (3.26)$$

où  $k_{\omega_0}(\cdot, \cdot)$  désigne la contraction de la représentation de courbure de  $(E, \omega_0)$  par  $\text{Id}_{\mathfrak{g}_-}$  (à gauche), et  $\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa$ ,  $\tilde{\nabla}^{\omega_0}$  et  $\tilde{d}$  sont les morphismes introduits dans la preuve du [Lemme 3.3.1.2](#). Par conséquent :

**Lemme 3.4.2.1.** *Si  $\omega_0$  est régulière, on a pour tout  $l < 0$  :  $gr_l(\tilde{d} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot)) = 0$  i.e  $gr_l(\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa) = gr_l(\tilde{\partial})$ .*

*Démonstration.* Par définition d'une base filtrée, un élément  $\phi$  de  $C^1$  est degré homogène positif si et seulement si il existe  $l \geq 0$  tel que pour tout  $(i', j')$ ,  $\phi(\mathbf{e}_{j'}^{i'}) \in \mathfrak{g}^{i'+l}$ . Fixons donc  $l \leq 0$ . Par régularité de  $\omega_0$ , on a  $gr_l(k_{\omega_0}) = 0$ . Soit  $U \subset E$  un ouvert et  $s \in \mathcal{V}^{-k+l}[\star\tilde{D}](U)$ , et posons  $\phi = (\tilde{d} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot))(s)$ . Alors  $s = \sum_{i' \geq -k+l, j'} a_{j'}^{i'} \mathbf{e}_{j'}^{i'}$  pour des coefficients  $a_{j'}^{i'} \in \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}](U)$ .

Donc :

$$ds = \sum_{i' \geq -k+l, j'} d(a_{j'}^{i'}) \mathbf{e}_{j'}^{i'} \in \Omega_E^1[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}^{-k+l} \quad (3.27)$$

Considérons alors la section constante  $\mathbf{e}_j^{-i} \in \mathcal{V}^{-i}(U)$  ainsi que les champs  $\omega_0$ -constant associés à la base  $(\mathbf{e}_j^i)_{i=-k, \dots, k}$  que l'on notera  $Y_j^i$ . On a par définition :

$$\begin{aligned} k_{\omega_0}(s, \mathbf{e}_j^{-i}) + \tilde{d}s(\mathbf{e}_j^{-i}) &= \sum_{i' \geq -k+l} a_{j'}^{i'} [\mathbf{e}_{j'}^{i'}, \mathbf{e}_j^{-i}]_{\mathfrak{g}} + \sum_{i' \geq -k+l} -a_{j'}^{i'} \omega_0([Y_j^{-i}, Y_{j'}^{i'}]) + \mathcal{L}_{Y_j^{-i}}(a_{j'}^{i'}) \mathbf{e}_{j'}^{i'} \\ &= - \sum_{i' \geq -k+l} \mathcal{L}_{Y_j^{-i}}(a_{j'}^{i'}) \mathbf{e}_{j'}^{i'} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donc  $\phi(\mathbf{e}_j^{-i}) \in \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}^{-k+l}(U)$  pour tout  $i \geq 1$ . Donc  $\phi$  est de degré homogène supérieur à  $-k+l$ . On obtient le résultat.  $\square$

Nous fixons maintenant  $e_0 \in E$  et construisons un opérateur différentiel  $\mathcal{L}^{e_0} : \mathcal{V}_{\mathfrak{g}_{-k}} \rightarrow \mathcal{V}$  sur un voisinage  $U$  de  $e_0$  tel que  $\pi_{\mathfrak{e}} \circ \mathcal{L}^{e_0}$  est l'identité et :

$$Im(\mathcal{L}^{e_0}) \subset ker \tilde{\partial}^* \quad (3.29)$$

Soit  $\sigma : \bar{U} \rightarrow E$  une section holomorphe avec  $\sigma(p(e_0)) = e_0$ . La [Proposition 2.2.1.1](#) définit un morphisme  $P$ -équivariant :

$$\tilde{\chi}_l : \mathcal{C}^{1,l}|_{p^{-1}(U)} \rightarrow \mathcal{V}^l|_{p^{-1}(U)} \quad (3.30)$$

tel que pour toute section  $s$  de  $\mathcal{V}^{-k+l}$  sur  $U$  :

$$\tilde{\partial}^* \circ \tilde{\pi}_l[\tilde{\partial} \tilde{\chi}_l(X) - X] = 0 \quad (3.31)$$

Dans la suite, nous identifions  $\mathcal{V}/\mathcal{V}^{-k+l}$  à  $\mathcal{O}_E \otimes \bigoplus_{l'=0}^{l-1} \mathfrak{g}_{-k+l'}$  via la projection orthogonale.

**Lemme 3.4.2.2.** *Soit  $V \subset U$  où  $U = p^{-1}(\bar{U})$ . Pour toute section méromorphe  $a$  (avec pôle en  $\tilde{D}$ ) de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}^{-k+1}$  sur  $V$ , il existe une section méromorphe  $s$  (avec pôle  $\tilde{D}$ ) de  $\mathcal{V}$  sur  $U$  avec les propriétés suivantes :*

- (i)  $\tilde{\pi}_{\mathfrak{g}_{-k}}(s) = a$
- (ii) Si  $\tilde{\pi}_k \circ \tilde{\partial}^*(a) = 0$ , alors  $\tilde{\partial}^* \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s) = 0$

*Démonstration.* Nous supposons que  $a$  vérifie l'hypothèse (ii) et construisons par itération sur  $l = 0, \dots, 2k+1$  des sections  $s^l$  de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}^{-k+l+1}$  sur  $V$  vérifiant :

- (i)  $\tilde{\pi}_{\mathfrak{g}_{-k}}(s^l) = a$
- (ii) Si  $\tilde{\pi}_k \circ \tilde{\partial}^*(a) = 0$ , alors  $\forall l' \leq l, \pi_{-k+l'}[\tilde{\partial}^* \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s^l)] = 0$

Pour  $l = 0$ , on a  $\mathcal{V}/\mathcal{V}^{-k+1} = \mathcal{O}_E \otimes \mathfrak{g}_{-k}$  donc il suffit de poser  $s^0 = a$ . Ensuite, supposons que l'on a construit  $s^l$  pour  $l < 2k+1$ . On a donc  $s^l = \sum_{l' \leq l} s_{l'}$  avec  $s_{l'} \in \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}_{-k+l'}$ , et la condition (ii) s'écrit :

$$\forall l' \leq l, \tilde{\partial}^* \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s_1 + \dots + s_{l'}) = (\tilde{d} + \tilde{\partial} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot))[s_1 + \dots + s_{l'}] = 0 \quad (3.32)$$

Définissons alors  $s_{l+1} \in \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}](U) \otimes \mathfrak{g}_{-k+l+1}$  par :

$$s_{l+1} = - \sum_{l'=0}^l \tilde{\pi}_{l+1} \circ \tilde{\chi}_{l+1} \circ (\tilde{d} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot))[s_{l'}] \quad (3.33)$$

On a immédiatement  $s_{l+1} \in \mathcal{V}^{-k+l+1}[\star\tilde{D}](U)$  i.e  $\pi_{l'}(s_{l+1}) = 0$  pour tout  $l' < l+1$ .

De plus, le [Lemme 3.4.2.1](#) implique :

$$\tilde{\partial}^* \pi_{l+1}[\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa s_{l+1}] = 0 \quad (3.34)$$

On obtient en utilisant [\(3.34\)](#) et [\(3.32\)](#) :

$$\pi_{l+1} \circ \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa [s_1 + \dots + s_{l+1}] = \pi_{l+1} \circ (\tilde{d} + k_{\omega_0}(\cdot, \cdot))[s_1 + \dots + s_l] + gr_0(\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa)[s_{l+1}] = 0 \quad (3.35)$$

On a obtenu l'hérédité.  $\square$

**Lemme 3.4.2.3.** Soit  $U \subset E$  un ouvert et  $s_1, s_2$  deux sections de  $\mathcal{V}[\star\tilde{D}]$  sur  $U$  telles que :

- (i)  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(s_1) = \pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(s_2)$
- (ii)  $\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s_1)$  et  $\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s_2)$  sont des sections de  $\ker \tilde{\partial}^*$ .

Alors  $s_1 = s_2$ .

*Démonstration.* Soient  $s_1, s_2$  deux sections vérifiant (i) et (ii). Considérons  $s = s_1 - s_2$ . Par (ii), on a :  $\tilde{\partial}^* \tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa s = 0$ . Considérons alors l'entier  $l_0$  minimal tel que  $\pi_{l_0}(s) \neq 0$ . Autrement dit,  $s \in \mathcal{V}^{-(k+l_0)}[\star\tilde{D}](\bar{U})$ . Par la condition (i),  $l_0 \geq 1$ . Par le [Lemme 3.4.2.1](#) on obtient :

$$0 = \tilde{\partial}^* \pi_{-k+l_0}(\tilde{\nabla}_{\omega_0}^\kappa(s)) = \tilde{\partial}^* gr_0(\tilde{\partial} \tilde{\pi}_{-k+l_0}(s)) \quad (3.36)$$

Par la décomposition de Hodge [\(1.62\)](#), cela implique  $\tilde{\partial} \circ \tilde{\pi}_{-k+l_0}(s) = 0$  Comme  $\ker \partial = \mathfrak{g}_{-k}$ , on obtient  $\ker \tilde{\partial} = \mathcal{O}_E[\star\tilde{D}] \otimes \mathfrak{g}_{-k}$  donc  $\ker \tilde{\partial} \cap \mathcal{V}^{-k+l_0} = \{0\}$ . Par conséquent  $s = 0$  i.e  $s_1 = s_2$ .  $\square$

Nous définissons alors  $\mathcal{L}^{e_0} : \mathcal{V}_{\mathfrak{g}_{-k}}[\star\tilde{D}]|_U \rightarrow \mathcal{V}[\star\tilde{D}]|_U$  en posant pour toute section méromorphe  $a$  de  $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}_{-k}}$  sur  $V \subset U_{e_0}$  :  $\mathcal{L}(a) = s$  où  $s$  est la section construite dans le [Lemme 3.4.2.2](#). Ce morphisme vérifie [\(3.29\)](#) et  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}} \circ \mathcal{L}^{e_0}$  est l'identité. En particulier, par le [Lemme 3.4.2.3](#), si  $s$  est une section horizontale pour  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$  sur un ouvert  $V \subset U_{e_0}$ , nous obtenons :

$$s = \mathcal{L}^{e_0}(\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(s)) \quad (3.37)$$

Ceci étant vrai pour tout  $e_0 \in E$ , nous obtenons que  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}$  se restreint à  $\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$  en un morphisme injectif de systèmes locaux. De plus, le [Lemme 3.4.2.3](#) montre que les opérateurs différentiels  $\mathcal{L}^{e_0}$  construits précédemment se recollent en un morphisme  $\mathcal{L} : \mathcal{V}_{\mathfrak{g}_{-k}}[\star\tilde{D}] \rightarrow \mathcal{V}[\star\tilde{D}]$ . Ce dernier se restreint à  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa))$  en l'isomorphisme réciproque de la restriction de  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}$  à  $\ker(\nabla_{\omega_0}^\kappa)$ . Cela montre que  $\mathfrak{g}_{-k}$  est caractéristique ([Définition 3.3.2](#)).  $\square$

Nous pouvons donc conclure :

**Theorème 3.4.3.** Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$  et  $D$  un diviseur effectif. Soit  $(G, P)$  un modèle parabolique de degré  $k > 1$ , de dimension  $n$ , et  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  la graduation associée [Théorème 1.4.2](#). Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe méromorphe régulière ([Définition 2.2.4](#)). Supposons que pour toute composante irréductible  $D_\alpha$  de  $D$ , il existe  $A \in \mathfrak{g}_{-} \setminus \mathfrak{g}_{-k}$  et une  $A$ -géodésique holomorphe  $\bar{\Sigma}$  de  $(E, \omega_0)$  ([Définition 1.7.2](#)) avec  $\bar{\Sigma} \cap D_\alpha = \{x_0\}$ . Alors  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing en tout point d'un ouvert  $W$  dense dans  $D$ .

*Démonstration.* Par le [Lemme 1.7.2.1](#), il existe en fait un ouvert Zariski-dense  $W$  de  $D$  tel que pour tout  $x_0 \in W$ , il existe  $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{-k}$  et une  $A$ -géodésique holomorphe intersectant  $D$  en  $x_0$ .

Prouvons la propriété d'extension en  $x_0 \in W$ . Par les remarques ci-dessus il existe  $A \in \mathfrak{g}_{-} \setminus \mathfrak{g}_{-k}$  et une  $A$ -géodésique  $\bar{\Sigma}$  de  $(E, \omega_0)$  intersectant  $D$  en  $x_0$ , et nous devons montrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  telle que  $\text{fill}_{M, \omega_0}$  se prolonge en un système local sur  $U$ . Puisque les systèmes locaux des automorphismes infinitésimaux de deux géométries de Cartan méromorphes isomorphes sont isomorphes, et que la régularité est invariante par isomorphismes, nous pouvons grâce au [Lemme 1.7.2.4](#) supposer sans perdre de généralité que  $\bar{\Sigma}$  est une  $A$ -géodésique holomorphe de  $(E, \omega_0)$ . Cela signifie qu'il existe une feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{T}_A$  ([Définition 1.7.2](#)) avec  $\Sigma \cap \tilde{D} = \{e_0\}$  où  $p(e_0) = x_0$ . En appliquant le [Proposition 3.3.2.1](#), nous obtenons que  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(\ker \nabla_{\omega_0}^k)$  se prolonge en un système local sur un voisinage  $\tilde{U}$  de  $e_0$ .

Par le [Théorème 3.4.2](#), il en va de même pour  $\ker(\nabla_{\omega_0}^k)$ . Par conséquent,  $\text{fill}_{M, \omega_0}$  se prolonge en un système local sur le voisinage  $U = p(\tilde{U})$  de  $x_0$ .  $\square$

### 3.5 Résultats en dimension algébrique nulle

Dans cette section, nous considérons une variété complexe compacte  $M$  simplement connexe de dimension  $n$  et de dimension algébrique nulle ([Définition 3.2.1](#)), et un diviseur effectif  $D$  de  $M$ . Nous prouvons deux extensions du résultat principal de [\[7\]](#) dans le cas totalement géodésique. La première ([Théorème 3.5.3](#)) concerne le modèle affine et utilise les résultats de la section [section 3.4](#), ainsi qu'un argument de géométrie complexe reposant sur la notion de degré relativement à une métrique de Gauduchon ([\[28\]](#)). La seconde ([Théorème 3.5.4](#)) concerne le modèle de la variété des drapeaux complets de  $\mathbb{C}^m$  pour  $m \geq 3$ , et repose sur un argument géométrique simple.

#### 3.5.1 Annulation de la première forme caractéristique du fibré adjoint

Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein et  $(M, D)$  une paire, où  $M$  est une variété complexe compacte simplement connexe, de dimension  $n = \dim(G/P)$  et avec  $a(M) = 0$  ([Définition 3.2.1](#)). Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Par le [Théorème 3.2.3](#), elle est donc quasihomogène sur  $M$ . Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (H1)  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing ([Définition 3.2.4](#))
- (H2) Les sections horizontales de  $\nabla_{\omega_0}^k$  définies sur  $E \setminus \tilde{D}$  sont les restrictions de sections holomorphes de  $\mathcal{V}$  sur  $E$  (nous savons que cela est vérifié lorsque  $P$  agit sans point fixe sur  $\mathbb{P}^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  voir [Corollaire 3.3.2](#)).
- (H3) Tout caractère additif  $\lambda : Z(P) \rightarrow \mathbb{C}$  du centre  $Z(P)$  de  $P$  est trivial.

Notons  $\nabla^{\omega_0}$  la tractor-connection sur  $E(\mathfrak{g})$  et  $R = R_{\nabla^{\omega_0}}$  sa courbure. Par le [??](#), et en appliquant le [Lemme 1.3.3.1](#), nous avons :

$$p^*R = R_{p^*\nabla^{\omega_0}} = d \text{Ad}(\omega_0) + \text{Ad}(\omega_0) \wedge \text{Ad}(\omega_0) \quad (3.38)$$

Rappelons que comme  $\nabla^{\omega_0}$  est holomorphe, la courbure  $R$  permet de calculer les classes de Chern de  $E(\mathfrak{g})$ , via la formule :

$$c_i(E(\mathfrak{g})) = [C_i(R)]_{H^{2i}(M, \mathbb{R})} \quad (3.39)$$

où  $C_i$  désigne le polynôme symétrique élémentaire de degré  $i$ . Nous prouvons en particulier :

**Lemme 3.5.1.1.** *Soit  $(M, D)$  une paire avec  $M$  une variété complexe compacte simplement connexe et de dimension algébrique nulle. Soit  $(G, P)$  une géométrie de Klein complexe, et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe méromorphe totalement géodésique sur  $(M, D)$ . Supposons que  $(E, \omega_0)$  vérifie les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessus. Alors on a  $C_1(R) = 0$ .*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.5.1.2.** *Soit  $P$  un groupe de Lie réel connexe et  $E \xrightarrow{p} M$  un fibré  $P$ -principal sur une variété (différentiable)  $M$ . Supposons que tout homomorphisme de groupes de Lie  $\chi : P \rightarrow (\mathbb{C}, +)$  est trivial. Soit  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction différentiable sur  $E$  telle que  $d\tilde{f}$  est  $P$ -invariante. Alors  $\tilde{f}$  est constante le long des fibres de  $p$ .*

*Démonstration.* Fixons un point  $x \in M$  et  $e \in p^{-1}(x)$ . Ce choix définit un isomorphisme  $P$ -équivariant de variétés différentiables entre  $p^{-1}(x)$  munie de l'action de  $P$  sur  $E$  et  $P$  muni de l'action à droite de  $P$ . Par conséquent,  $\tilde{f}$  s'identifie à une fonction différentiable sur  $P$  et  $d\tilde{f}$  à une forme invariante à droite sur  $P$ .

Or une forme fermée invariante à droite est aussi invariante à gauche. Il existe donc une forme linéaire  $\lambda$  sur  $\mathfrak{p}$  telle que pour tout  $e' \in p^{-1}(x)$  et  $B \in \mathfrak{p}$  :

$$d\tilde{f}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e' \cdot \exp_P(tB)\right) = \lambda(B) \quad (3.40)$$

Définissons à présent une application différentiable  $\chi_e : P \rightarrow \mathbb{C}$  en posant pour tout  $B \in \mathfrak{p}$  :

$$\chi_e(\exp_P(B)) = \tilde{f}(e \cdot \exp_P(B)) - \tilde{f}(e) \quad (3.41)$$

Soient  $B$  et  $B'$  deux vecteurs de  $\mathfrak{p}$ . Par (3.40), on a :

$$\begin{aligned} \chi_e(\exp_P(B) \cdot \exp_P(B')) &= \tilde{f}(e \cdot \exp_P(B) \cdot \exp_P(B')) - \tilde{f}(e \cdot \exp_P(B)) + \tilde{f}(e \cdot \exp_P(B)) - \tilde{f}(e) \\ &= \int_0^1 d\tilde{f}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e \cdot \exp_P(B) \cdot \exp_P(tB')\right) dt + \int_0^1 d\tilde{f}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e \cdot \exp_P(tB)\right) dt \\ &= \lambda(B') + \lambda(B) \\ &= \chi_e(\exp_P(B')) + \chi_e(\exp_P(B)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donc  $\chi_e$  est un homomorphisme de groupes de Lie réels entre  $P$  et  $(\mathbb{C}, +)$ . Par l'hypothèse,  $\chi_e$  est identiquement nulle ce qui équivaut à l'assertion sur  $\tilde{f}$ .  $\square$

*Preuve (du Lemme 3.5.1.1).* Comme  $a(M) = 0$ , le Théorème 3.2.3 implique que  $(E, \omega_0)$  est quasi-homogène. En particulier, il existe  $n$  germes de champs de vecteurs indépendants  $X_1, \dots, X_n$  en un point  $x \in M \setminus D$ , correspondant aux germes d'automorphismes infinitésimaux de  $(E, \omega_0)$ . Comme  $M$  est simplement connexe et  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing, les germes précédents sont les restrictions de  $n$  champs de vecteurs méromorphes globaux  $X_1, \dots, X_n$  sur  $M$  dont les restrictions à  $M \setminus D$  sont des automorphismes infinitésimaux de  $(E, \omega_0)$ . En reprenant les arguments de [7], l'hypothèse de la dimension algébrique nulle implique que la famille  $X_1, \dots, X_n$  peut être choisie telle que  $[X_j, X_k] = 0$  pour tous  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

Fixons alors  $i \in \{1, \dots, n\}$  et prouvons que la contraction  $X_i - C_1(R_{\nabla \omega_0})$  est identiquement nulle sur  $M$ . Par (3.38), nous avons :

$$\tilde{\eta}_i := p^* \eta_i = \tilde{\eta}_i^0 + \tilde{\eta}_i^1 \quad (3.43)$$

où  $p$  est la projection du fibré  $P$ -principal  $E$  et :

$$\tilde{\eta}_i^0 = \tilde{X}_i \lrcorner C_1(dAd(\omega_0)) = dC_1(Ad(\omega_0)) \quad \text{et} \quad \tilde{\eta}_i^1 = \tilde{X}_i \lrcorner C_1(Ad(\omega_0) \wedge Ad(\omega_0)) \quad (3.44)$$

Commençons par énoncé les propriétés des formes méromorphes  $\tilde{\eta}_i^j$  ( $j = 0, 1$ ) :

- (a) Les formes  $\tilde{\eta}_i^j$  sont  $P$ -invariantes. En effet,  $C_1$  est invariant par conjugaison et  $\tilde{X}_i$  est invariant par l'action de  $P$ , et par conséquent, pour  $b \in P$ , nous avons :

$$\begin{aligned} r_b^* \tilde{\eta}_i^0 &= \tilde{X}_i \lrcorner r_b^* dC_1(Ad(\omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner dC_1(Ad(r_b^* \omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner dC_1(Ad(ad(b^{-1}) \circ \omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner dC_1(ad(b^{-1}) \circ Ad(\omega_0) \circ ad(b)) \\ &= \tilde{\eta}_i^0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

et :

$$\begin{aligned} r_b^* \tilde{\eta}_i^1 &= \tilde{X}_i \lrcorner r_b^* C_1(Ad(\omega_0) \wedge Ad(\omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner C_1(r_b^* Ad(\omega_0) \wedge r_b^* Ad(\omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner C_1(Ad(r_b^* \omega_0) \wedge Ad(r_b^* \omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner C_1(Ad(ad(b^{-1}) \circ \omega_0) \wedge Ad(ad(b^{-1}) \circ \omega_0)) \\ &= \tilde{X}_i \lrcorner C_1(Ad(ad(b^{-1}) \circ \omega_0 \circ ad(b)) \wedge Ad(ad(b^{-1}) \circ \omega_0 \circ ad(b))) \\ &= \tilde{\eta}_i^1 \end{aligned} \quad (3.46)$$

- (b)  $\tilde{\eta}_i^1$  est une 1-forme holomorphe sur  $E$ . En effet,  $Ad(\omega_0)(\tilde{X}_i) = Ad(\tilde{s}_i)$  où  $\tilde{s}_i = \omega_0(\tilde{X}_i)$  est une section  $\nabla_{\omega_0}^\kappa$ -horizontale. Par l'hypothèse sur  $(E, \omega_0)$ ,  $\tilde{s}_i$  est une section holomorphe de  $\mathcal{V}$  sur  $E$ . Par suite,  $\tilde{\eta}_i^1$  est holomorphe sur  $E$ .

- (c)  $\tilde{\eta}_i^0$  est exacte. En effet, Par le Lemme 3.3.1.2, nous avons  $\tilde{X}_i \lrcorner d\omega_0 = d\tilde{s}_i$  et par conséquent :

$$\tilde{\eta}_i^0 = C_1(Ad(\tilde{X}_i \lrcorner d\omega_0)) = C_1(Ad(d\tilde{s}_i)) = dC_1(Ad(\tilde{s}_i)) \quad (3.47)$$

où nous avons utilisé que  $d$  et  $C_1 \circ Ad$  commutent car  $C_1 \circ Ad$  est une application linéaire tensorisée avec  $Id_{\Omega_E^1}$ . Nous noterons dans la suite  $\tilde{f} = C_1(Ad(\tilde{s}_i))$ .

Par l'hypothèse (H3), la fonction  $\tilde{f}$  définie au point (c) vérifie l'hypothèse du Lemme 3.5.1.2. Par conséquent, la propriété (a) implique que  $\tilde{\eta}_i^0 = d\tilde{f}$  est une forme méromorphe basique sur  $E$ , c'est à dire le pullback d'une forme méromorphe exacte  $\eta_0^i$  sur  $M$ . Donc  $\tilde{\eta}_0^i = p^* \eta_0^i$  où  $\eta_0^i$  est une forme méromorphe exacte sur  $M$ . Comme  $a(M) = 0$ ,  $\eta_0^i$  doit être identiquement nulle et par conséquent  $\tilde{\eta}_0^i = 0$ .

Considérons à présent le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{\pi_G} & E \\ & \searrow p_G & \downarrow p \\ & & M \end{array} \quad (3.48)$$

où  $E_G = E \times_P G$  est un fibré  $G$ -principal holomorphe sur  $M$ . Comme  $(E, \omega_0)$  est supposée branchée, il est équipé d'une connexion  $G$ -principale holomorphe  $\tilde{\omega}$  (voir Définition 1.5.12). Par conséquent,  $\hat{\eta}_i^1 = \pi_G^* \tilde{\eta}_i^1$  se décompose de manière unique comme une somme directe  $\hat{\eta}_i^{1,H} \oplus \hat{\eta}_i^{1,V}$  où  $\hat{\eta}_i^{1,V}$  s'annule sur  $\ker(\tilde{\omega})$  et  $\hat{\eta}_i^{1,H}$  s'annule sur les vecteurs tangents aux fibres de  $p_G$ . En particulier  $\hat{\eta}_i^{1,H}$  est une forme basique, et elle est holomorphe par le point (b). Par conséquent, il s'agit du pullback d'une forme holomorphe  $\eta_i^1$  sur  $M$ . Nous concluons en reprenant un argument de [7] prouvant que  $\eta_0^1$  doit être fermée, et donc nulle. En effet, par la formule de Lie-Cartan et l'hypothèse faite sur la famille  $(X_1, \dots, X_n)$ , nous avons pour tout  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  :

$$d\eta_i^1(X_j, X_k) = \mathcal{L}_{X_j} \eta_i^1(X_k) - \mathcal{L}_{X_k} \eta_i^1(X_j) - \eta_i^1([X_j, X_k]) = \mathcal{L}_{X_j} \eta_i^1(X_k) - \mathcal{L}_{X_k} \eta_i^1(X_j) \quad (3.49)$$

Comme les fonctions méromorphes de  $M$  sont toutes constantes, nous obtenons que  $d\eta_i^1(X_j, X_k)$  est identiquement nulles pour tous  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Comme la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  engendre  $T_x M$  pour un point générique  $x \in M$ ,  $\eta_i^1$  est fermée, donc localement exacte. Comme  $M$  est simplement connexe, elle est exacte :  $\eta_i^1 = dh$  pour un fonction holomorphe sur  $M$ . Comme  $M$  est compacte,  $h$  est constante et  $\eta_i^1$  est nulle.

Finalement  $\eta_i$  est identiquement nulle. Ceci est vrai quelque soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  engendre  $T_x M$  au point générique  $x \in M$ . Par conséquent  $C_1(R_{\nabla \omega_0})$  est identiquement nulle.  $\square$

### 3.5.2 Notion de degré sur une variété complexe compacte et application pour les modèles affine

Nous allons utiliser la notion de degré introduite par P.Gauduchon (voir [28]) pour les variétés complexes compactes. Cette notion généralise celle du degré d'un module localement libre sur une variété kählérienne (voir [51]). Dans l'Exemple 1.2.2 nous avons observé que tout fibré vectoriel  $V$  sur  $M$  admet une métrique hermitienne  $h \in C^\infty(M, V^* \otimes V^*)$ . Cela est vrai en particulier pour  $TM$ , et le couple  $(TM, h)$  est appelé *structure hermitienne* sur  $M$ . Pour une telle section, on note  $Im(h) \in C^\infty(M, \Omega_M^2)$  la 2-forme définie par  $Im(h)(x) = Im(h(x))$ .

**Définition 3.5.1.** La 2-forme alternée  $\Omega_h = Im(h)$  est appelée *forme de Kähler de la structure hermitienne*. Une *métrique de Gauduchon* est une structure hermitienne  $h$  telle que  $\bar{\partial}\partial(\Omega_h^{n-1}) = 0$ .

**Theorème 3.5.1.** Il existe une métrique de Gauduchon sur toute variété complexe compacte.

*Démonstration.* Voir Théorème I.14 de [28].  $\square$

Soit  $L$  un fibré en droites sur  $M$ . Il existe toujours une métrique hermitienne  $h_L$  sur ce dernier (Exemple 1.2.2), et une connexion holomorphe  $\nabla$  compatible à cette dernière (la connexion de Chern, voir par exemple [51], Proposition 3.1.2). Notons  $\epsilon = C_1(R_\nabla)$  où  $C_1$  est le polynôme invariant élémentaire de degré 1 et  $R_\nabla$  la courbure de la connexion de  $\nabla$ . Si  $h_L, h'_L$  sont deux métriques hermitiennes sur  $L$ , la différence  $\epsilon - \epsilon'$  est de la forme  $\bar{\partial}\partial f$  pour une fonction  $f \in C^\infty(M)$  (voir [28], I.16). Par conséquent :

$$deg(L) = \int_M \epsilon \wedge \Omega_h^{n-1} = \int_M \epsilon' \wedge \Omega_h^{n-1} \quad (3.50)$$

est bien définie lorsque  $h$  est une métrique de Gauduchon sur  $M$ , et ne dépend que de  $L$  :

**Définition 3.5.2.** Soit  $\mathcal{V}$  un module localement libre de rang  $r$ , faisceau des sections du fibré vectoriel  $V$  sur une variété complexe compacte  $M$ . Soit  $h$  une métrique de Gauduchon sur  $M$ . Le degré de  $\mathcal{V}$  (resp.  $V$ ) relativement à  $h$  est l'intégrale

$$\deg(\mathcal{V}) = \deg(V) = \deg(\bigwedge^r V) \quad (3.51)$$

définie par (3.50).

Nous n'utiliserons que les propriétés suivantes :

**Theorème 3.5.2.** Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $h$  une métrique de Gauduchon sur  $M$ .

1. Si  $L_1, L_2$  sont deux fibrés en droites sur  $M$ , alors  $\deg(L_1 \otimes L_2) = \deg(L_1) + \deg(L_2)$ .
2. Soit  $L$  un fibré en droite sur  $M$  avec  $H^0(M, L) \neq \{0\}$  et  $\deg(L) = 0$ . Alors  $L$  est trivial et toute section globale holomorphe de  $L$  est sans zéro.

*Démonstration.* La propriété 1. est immédiate car si  $h_1, h_2$  sont des métriques hermitiennes sur  $L_1$  et  $L_2$ , alors  $h_1 h_2$  est une métrique hermitienne sur  $L_1 \otimes L_2$  et la courbure  $R_{\nabla_{h_1 h_2}}$  de la connexion de Chern est la somme des courbures des deux connexions de Chern pour  $h_1$  et  $h_2$ . Nous renvoyons le lecteur à [28], I.17 pour la propriété 2.  $\square$

Appliquons cela à la géométrie. Soit  $(G, P)$  un modèle affine, i.e  $P$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$  et  $G = P \ltimes \mathbb{C}^n$ , et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur une paire  $(M, D)$ . Par le Lemme 3.5.1.1, nous avons déjà  $\deg(E(\mathfrak{g})) = 0$ . Le résultat suivant, dû à I.Biswas et S.Dumitrescu ([4], Corollaire 4.2) va nous permet de conclure :

**Lemme 3.5.2.1.** Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension  $n$ , munie d'une métrique de Gauduchon. Soit  $P = GL_n(\mathbb{C})$  et  $E$  un fibré  $P$ -principal holomorphe sur  $M$ . On a  $E(\mathfrak{p}) \simeq E(\mathfrak{p})^*$ . En particulier  $\deg(E(\mathfrak{p})) = 0$ .

*Démonstration.* L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} = Lie(P) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \times & \mathfrak{p} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (A & , & B) & \rightarrow & Tr(AB) \end{array} \quad (3.52)$$

Elle est de plus invariante par l'action adjointe de  $P$ . Par conséquent, la section  $B_T \in H^0(E, \mathcal{O}_E \otimes (\mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*))$  définie par  $B_T = Id_{\mathcal{O}_E} \otimes T$  est invariante par la linéarisation  $(\phi_b^{\mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*})_{b \in P}$  (voir Définition 1.1.9). Par la Proposition 1.1.2.1, on obtient une section globale  $\bar{B}_T \in H^0(M, E(\mathfrak{p})^* \otimes E(\mathfrak{p}^*))$ . Par construction, il s'agit d'un isomorphisme entre  $E(\mathfrak{p})$  et  $E(\mathfrak{p})^*$ . On a donc  $-c_1(E(\mathfrak{p})) = c_1(E(\mathfrak{p})^*) = c_1(E(\mathfrak{p}))$  d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 3.5.1.** Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$ , compacte, de dimension algébrique nulle et simplement connexe. Soit  $(G, P)$  le modèle affine complexe de dimension  $n$  et  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors le fibré  $\mathcal{E} = E(\mathbb{C}^n)$  est trivial et  $(M, D)$  est munie d'un parallélisme holomorphe branché.

*Démonstration.* Fixons une métrique de Gauduchon sur  $M$  (Définition 3.5.1 et Théorème 3.5.1). Par le Lemme 3.5.1.1 et le Lemme 3.5.2.1, nous avons :  $\deg(\mathcal{E}) = \deg(E(\mathfrak{g})) - \deg(E(\mathfrak{p})) = 0$ . Soit  $(G_2, P_2)$  la géométrie de Klein projective complexe de dimension  $n$ , qui étend  $(G, P)$  (voir Exemple 1.4.11). Par le Lemme 1.4.7.1, il existe une  $(G_2, P_2)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée  $(E_1, \omega_1)$  sur  $(M, D)$ , telle que  $Aut_{M, \omega_1}^{loc}$  contient le sous-faisceau  $Aut_{M, \omega_0}^{loc}$ .

Par le [Théorème 3.4.1](#), nous obtenons que  $(E, \omega_0)$  vérifie la propriété d'extension des champs de Killing.

Par le [Théorème 3.2.3](#), il existe  $n$  sections méromorphes  $s_1, \dots, s_n$  de  $\ker \bar{\nabla}_{\omega_0}^k$  telles que les classes  $\bar{s}_i = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(s_i)$  modulo  $E(\mathfrak{p})$  engendrent  $\mathcal{E}[\star D]$ . Par le point 2. de la [Proposition 3.3.2.1](#), ce sont des sections holomorphes de  $\mathcal{E}$ . Elles trivialisent donc la restriction  $\mathcal{E}|_{M \setminus S}$  au complémentaire du diviseur  $S = (\bigwedge_{i=1}^n \bar{s}_i)_0$ . Or  $\bigwedge_{i=1}^n \bar{s}_i$  est une section holomorphe de  $\det(\mathcal{E})$ . Ce dernier est de degré nul, donc le point 2. du [Théorème 3.5.1](#) implique que  $S$  est vide.  $\square$

Appliquons nos résultats à la classification des connexions affines méromorphes sur les variétés complexes compactes de dimension algébrique nulle.

**Theorème 3.5.3.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension algébrique nulle. Soit  $D$  un diviseur effectif de  $M$  et  $\nabla$  une connexion affine holomorphe branchée sur  $(M, D)$ . Alors soit il existe une composante irréductible  $D_\alpha$  de  $D$  qui est union de géodésiques pour  $\nabla$ , soit  $\pi_1(M)$  est infini.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  le sous-module de la [Définition 1.6.8](#). Soit  $(E, \omega_0)$  la géométrie de Cartan affine holomorphe branchée sur  $(M, D)$ , avec  $E = R(\mathcal{E})$  et induisant  $\nabla$ . Supposons qu'aucune composante  $D_\alpha$  n'est une union de géodésiques pour  $\nabla$ . Cela signifie exactement que  $(E, \omega_0)$  est totalement géodésique. Par le [Lemme 1.7.2.4](#), elle est même holomorphiquement totalement géodésique. Le théorème est alors une conséquence directe du [Corollaire 3.5.1](#) et [Théorème 3.2.4](#).  $\square$

### 3.5.3 Géométries modelées sur la variété des drapeaux complets

Pour un modèle parabolique général  $(G, P)$ , et pour une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée sur  $(M, D)$ , nous ne disposons pas d'information sur l'ordre d'un champ de Killing le long d'une composante irréductible du diviseur de branchement. En particulier les champs de Killing peuvent s'annuler sur  $M \setminus D$  comme le montre l'exemple des automorphismes de la géométrie de Klein projective complexe.

Considérons le cas particulier de la géométrie de Klein  $(G, P) = (SL_m(\mathbb{C}), B)$  où  $B$  est le sous-groupe de Borel standard ([Définition 1.4.12](#)), et  $m \geq 3$ . Donc  $\dim(G/P) = \frac{m(m-1)}{2} > 1$  et nous notons  $k$  la dimension de la sous-algèbre de Cartan standard de  $G$  et  $(\mathfrak{g}_i)_{i=-k, \dots, k}$  la graduation correspondant au sous groupe parabolique  $B$  ([Théorème 1.4.2](#)). Par le [Théorème 3.4.2](#), les automorphismes infinitésimaux d'une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe  $(E, \omega_0)$  sont donc totalement déterminés par des sections holomorphes du fibré en droite :

$$\bar{\mathcal{V}}_{\mathfrak{g}-k} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{-k+1}) \quad (3.53)$$

Nous avons donc une borne pour la dimension de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux globaux :

**Lemme 3.5.3.1.** *Soit  $(E, \omega_0)$  une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan méromorphe sur une paire  $(M, D)$ . Si  $a(M) = 0$  alors  $\dim \mathfrak{kill}^{loc}(M \setminus D) \leq 1$ .*

*Démonstration.* Par le [Lemme 3.3.1.3](#), les systèmes locaux  $\ker \bar{\nabla}_{\omega_0}^k$  et  $\mathfrak{kill}_{M, \omega_0}^{loc}$  sur  $M \setminus D$  sont isomorphes. Il suffit donc de montrer que  $\ker \bar{\nabla}_{\omega_0}^k(M \setminus D)$  est de dimension au plus 1. Le [Théorème 3.4.2](#) implique l'existence d'un morphisme de faisceaux  $\mathbb{C}$ -linéaire, équivariant pour les linéarisations  $(\phi_b^{\mathfrak{g}-k})_{b \in P}$  et  $(\phi_b^{\mathfrak{g}})_{b \in P}$  (voir [Définition 1.1.9](#)) :

$$\mathcal{L} : \mathcal{V}_{\mathfrak{g}-k}[\star D] \rightarrow \mathcal{V}[\star \tilde{D}] \quad (3.54)$$

tel que :

$$\forall s \in \ker \nabla_{\omega_0}^{\kappa}, s = \mathcal{L} \circ \pi_{\mathfrak{g}_{-k}}(s) \quad (3.55)$$

où  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}}$  est la projection sur  $\mathfrak{g}_{-k}$  parallèlement à  $\mathfrak{g}^{-k+1}$ . Par la [Proposition 1.1.2.1](#), il induit un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\overline{\mathcal{L}}^{\kappa} : \overline{\mathcal{V}}_{\mathfrak{g}_{-k}} \rightarrow E(\mathfrak{g})[\star D] \quad (3.56)$$

De même, le morphisme  $P$ -équivariant  $\pi_{\mathfrak{g}_{-k}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathfrak{g}_{-k}}$  induit un morphisme  $\overline{\pi}_{\mathfrak{g}_{-k}} : E(\mathfrak{g}) \rightarrow \overline{\mathcal{V}}_{\mathfrak{g}_{-k}}$  vérifiant :

$$\forall \overline{s} \in \ker \overline{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}(U), \overline{s} = \overline{\mathcal{L}}^{\kappa}(\overline{\pi}_{\mathfrak{g}_{-k}}(\overline{s})) \quad (3.57)$$

Considérons alors une base  $\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_r$  de  $\ker \overline{\nabla}_{\omega_0}^{\kappa}(M \setminus D)$  et  $f_i = \overline{\pi}_{\mathfrak{g}_{-k}}(\overline{s}_i)$ . On a donc  $\overline{s}_i = \overline{\mathcal{L}}^{\kappa}(f_i)$ . Comme  $\mathcal{L}$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, les sections méromorphes  $f_i$  de  $\overline{\mathcal{V}}_{\mathfrak{g}_{-k}}$  doivent être  $\mathbb{C}$ -indépendantes. On a donc  $r-1$  fonctions méromorphes non constantes  $\frac{f_i}{f_j}$  sur  $M$ . Par hypothèse,  $M$  n'admet que des fonctions méromorphes constantes, donc  $r = 1$ .  $\square$

Rappelons que l'on a un foncteur naturel  $\lambda \circ f$  de la catégorie des  $(G, P)$ -géométries de Cartan méromorphes régulières vers celle des structures lagrangiennes de contact méromorphes (??), obtenue comme composée du foncteur  $f$  de la [Théorème 1.6.1](#) et du foncteur  $\lambda$  défini dans la ???. Le [Corollaire 2.2.3](#) nous donne alors un moyen géométrique de vérifier l'hypothèse du [Théorème 3.4.3](#), et nous obtenons :

**Théorème 3.5.4.** *Soit  $(G, P)$  comme ci-dessus et  $(M, D)$  une paire avec  $M$  une variété de dimension complexe  $\dim(M) = \dim(G/P) = n$  et algébrique  $a(M) = 0$ . Supposons qu'il existe une  $(G, P)$ -géométrie de Cartan holomorphe branchée régulière  $(E, \omega_0)$  sur  $(M, D)$  et notons  $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\gamma_k})$  la structure lagrangienne de contact méromorphe image de  $(E, \omega_0)$  par  $\lambda \circ f$ . Alors l'une des assertions suivantes est vraie :*

- (a) *Le groupe fondamental de  $M$  est infini.*
- (b) *Pour toute composante irréductible  $D_{\alpha}$  de  $D$ , l'un des feuilletages  $\mathcal{L}_{\gamma_j}$  est partout tangent à  $D_{\alpha}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(E, \omega_0)$  et  $\mathbb{L}$  comme dans l'énoncé. Par le [Théorème 3.2.3](#),  $(E, \omega_0)$  est quasi-homogène. Donc il existe un point  $x \in M \setminus D$  et une famille de  $n$  champs de vecteurs locaux  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$  indépendants sur un voisinage  $U_x$  de  $x$ , avec  $\hat{X}_i \in \mathfrak{fil}^{loc}(U_x)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Supposons que l'assertion (a) soit fautive, i.e  $\pi_1(M)$  est fini. Sans perte de généralité (quitte à considérer le pullback de  $(E, \omega_0)$  via un revêtement fini de  $M$ ),  $M$  est simplement connexe.

Supposons de plus que (b) soit fautive. Par le [Corollaire 2.2.3](#), cela signifie que l'hypothèse du [Théorème 3.4.3](#) est satisfaite : cela implique que les champs  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$  s'étendent en une famille de  $n$  champs méromorphes globaux sur  $M$ , toujours notés  $(\hat{X}_i)_{i=1, \dots, n}$  et tels que  $\hat{X}_i|_{M \setminus D} \in \mathfrak{fil}^{loc}(M \setminus D)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Comme les  $\hat{X}_i|_{U_x}$  sont indépendants, les vecteurs  $\hat{X}_i \in \mathfrak{fil}^{loc}(M \setminus D)$  sont à fortiori  $\mathbb{C}$ -indépendants. Par le [Lemme 3.5.3.1](#), on obtient  $n = 1$  : absurde. Donc soit (a) soit (b) est vraie.  $\square$

# Bibliographie

- [1] M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(1) :181–181, 1957.
- [2] P. Baum and R. Bott. Singularities of holomorphic foliations. *Journal of Differential Geometry*, 7(3-4) :79–342, 1972.
- [3] J. Bernstein and V. Lunts. *Equivariant sheaves and functors*. Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [4] I. Biswas and S. Dumitrescu. Branched holomorphic Cartan geometries and Calabi-Yau manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 23(9) :7428–7458, 2019.
- [5] I. Biswas and S. Dumitrescu. Holomorphic riemaniann metric and fundamental group. *Bulletin de la Société Mathématiques de France*, 147(3), 2019.
- [6] I. Biswas and S. Dumitrescu. Rational parallelism on complex manifolds. *European Journal of Mathematics*, 7(4) :1329–1336, 2021.
- [7] I. Biswas, S. Dumitrescu, and B. McKay. Cartan geometries on complex manifolds of algebraic dimension zero. *Épjournal de Géométrie Algébrique*, 3(19), 2019.
- [8] D. Blázquez-Sanz and G. Casale. Parallelisms & lie connections. *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 13(87) :295–323, 2017.
- [9] A. Borel. Groupes linéaires algébriques. *Annals of Mathematics*, 64(1) :20–82, 1956.
- [10] A. Borel. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, 1991.
- [11] A. Borel and F. Hirzebruch. Characteristic classes and homogeneous spaces , I. *American Journal of Mathematics*, 80(2) :458–538, 1958.
- [12] M. Brunella. Birational geometry of foliations. In *IMPA Monographs*, volume 1, pages 1–20. Springer Cham, 2015.
- [13] A. Čap. Infinitesimal automorphisms and deformations of parabolic geometries. *Journal of the European Mathematical Society*, 10(2) :415–437, 2008.
- [14] A. Čap and J. Slovák. *Parabolic geometries I : background and general theory*, volume 14. American Mathematical Society., 2009.
- [15] E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). *Annales Scientifiques de l'ENS*, 40(7) :352–412, 1923.
- [16] E. Cartan. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. *Acta Mathematica*, 48(1-2) :1–42, 1926.
- [17] E. Cartan. Les problèmes d'équivalence. *Séminaires de Mathématiques de Julia*, 4(4) :1–40, 1936.
- [18] E. Cartan. Sur la structure des groupes infinis. *Séminaires de Mathématiques de Julia*, 4(6) :1–43, 1936.
- [19] C. Chevalley and S. Eilenberg. Cohomology theory of lie groups and lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 63(1) :85–124, 1948.

- [20] P. Deligne. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Springer Berlin Heidelberg, 1970.
- [21] S. Dumitrescu. Métriques riemanniennes holomorphes en petite dimension. *Annales de l'institut Fourier*, 51(6) :1663–1690, 2001.
- [22] S. Dumitrescu. Killing fields of holomorphic Cartan geometries. *Monatshefte für Mathematik*, 161 :145–154, 2010.
- [23] S. Dumitrescu. Meromorphic almost rigid geometric structures. In B. Farb and D. Fisher, editors, *Geometry, rigidity and group actions*, pages 32–58. Chicago Lectures in Mathematics, 2011.
- [24] S. Dumitrescu. An invitation to quasihomogeneous rigid geometric structures. In D. Ibadula and W. Veys, editors, *Bridging Algebra, Geometry, and Topology*, volume 96, pages 107–123. Springer proceedings in mathematics and statistics, 2014.
- [25] C. Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In *Séminaire Bourbaki*, volume 1, pages 153–168. Soc. Math. France, Paris, 1952.
- [26] J. Fogarty, F. Kirwan, and D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [27] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory*. Springer New York, 2004.
- [28] P. Gauduchon. La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte. *Mathematische Annalen*, 267(4) :495–518, 1984.
- [29] M. Gromov. Rigid transformation groups. In D. Bernard and Y. Choquet-Bruhat, editors, *Géométrie différentielle*, pages 65–139. Hermann Paris, 1986.
- [30] V. Guillemin and S. Sternberg. An algebraic model of transitive differential geometry. *Bulletins of the American Mathematical Society.*, 70(1) :16–47, 1964.
- [31] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [32] M. Inoue, S. Kobayashi, and T. Ochiai. Holomorphic affine connections on compact complex surfaces. *Journal of the Faculty of Sciences, University of Tokyo*, 1980.
- [33] A.W. Knap. *Representation theory of semisimple groups*. Princeton University Press, 1986.
- [34] S. Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry*. Springer, 1972.
- [35] S. Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton University Press, 1987.
- [36] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Wiley-Interscience, 1996.
- [37] B. Kostant. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem. *The Annals of Mathematics*, 74(2) :329–387, 1961.
- [38] B. McKay. Characteristic forms of complex Cartan geometries. *Advances in Geometry*, 11(1) :138–168, 2007.
- [39] K. Melnick. A Froebnius theorem for Cartan geometries, with applications. *L'Enseignement Mathématique (Série II)*, 57(2) :57–89, 2011.
- [40] T. Morimoto. Geometric structures on filtered manifolds. *Hokkaido Mathematical Journal*, 22(3) :263–347, 1993.
- [41] K. Nomizu. On local and global existence of killing vector fields. *Annals of Mathematics*, 72(1) :105–120, 1960.
- [42] V. Pecastaing. On two theorems about local automorphisms of geometric structures. *Annales de l'institut Fourier*, 66(1) :175–208, 2016.

- 
- [43] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, 35 :487–489, 1963.
- [44] C. Sabbah. *Isomonodromic deformations and Frobenius manifolds*. Springer London, 2008.
- [45] R . W. Sharpe. *Differential geometry*. Springer New York, 2000.
- [46] I. Singer and S. Sternberg. The infinite groups of Lie and Cartan Part I, (The transitive groups). *Journal d'Analyse Mathématique*, 15(1) :1–114, 1965.
- [47] N. Steenrod. *The topology of fibre Bundles*. University Press of Mississippi, 2016.
- [48] N. Tanaka. On differential systems, graded lie algebras and pseudo-groups. *Journal of Mathematics of Koyto University*, 10(1) :1–82, 1970.
- [49] N. Tanaka. On the equivalence problems associated with simple graded lie algebras. *Hokkaido Mathematical Journal*, 8(1) :23–84, 1979.
- [50] K. Ueno. *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces*. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
- [51] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours Avancés de la SMF, 2002.
- [52] H.C. Wang. Complex parallelisable manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(5) :771–776, 1954.
- [53] J. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Providence, AMS Chelsea Pub, 2011.
- [54] K. Yamaguchi. Differential systems associated with simple graded lie algebras. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 22(26) :413–494, 1993.