



HAL
open science

\mathcal{D} -modules arithmétiques et transformées de Fourier-Mukai

Florian Viguié

► **To cite this version:**

Florian Viguié. \mathcal{D} -modules arithmétiques et transformées de Fourier-Mukai. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Strasbourg, IRMA UMR 7501, 2021. Français. NNT : . tel-03854375v1

HAL Id: tel-03854375

<https://theses.hal.science/tel-03854375v1>

Submitted on 4 Jan 2022 (v1), last revised 15 Nov 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Ecole Doctorale MSII

Soutenue le 16 décembre 2021, par

Florian Viguié

Sous la direction de

Christine Huyghe

D-modules arithmétiques
et transformées de Fourier-Mukai

Devant la commission d'examen composée de :

Ahmed Abbes	Examineur
Daniel Caro	Rapporteur
Carlo Gasbarri	Examineur
Michel Gros	Examineur
Christine Huyghe	Directrice de thèse
Mauro Porta	Examineur
Matthias Strauch	Rapporteur

Remerciements

Les travaux présentés dans le présent manuscrit n'auraient jamais pu voir le jour sans l'aide et le soutien de toutes les personnes que j'ai eu la joie de rencontrer pendant ces trois dernières années - et parfois depuis bien plus longtemps pour certains - et que je ne remercierai jamais assez pour leur présence tout au long de ma thèse.

La première personne que je souhaite remercier est bien évidemment Christine Huyghe, qui a toujours su se montrer disponible et très impliquée dans ma thèse. Je souhaite la remercier pour tout le temps qu'elle m'a accordé, pour toutes nos discussions hebdomadaires particulièrement enrichissantes, pour ses cours accélérés sur la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules et pour le regard à la fois critique et bienveillant qu'elle a porté sur mes travaux ces trois dernières années. J'aimerais aussi la remercier pour les quelques discussions moins mathématiques et plus humaines que nous avons eues dans ces moments où les problèmes personnels empiètent sur la vie professionnelle.

Ensuite, j'aimerais remercier Matthias Strauch et Daniel Caro pour avoir accepté de se porter rapporteurs de cette thèse, pour leur relecture attentive de ce manuscrit ainsi que pour leurs commentaires bienvenus. J'aimerais également remercier Michel Gros, Ahmed Abbes, Carlo Gasbarri et Mauro Porta d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'aimerais remercier les membres de l'IRMA de Strasbourg, qu'ils soient chercheurs ou membres du personnel, qui ont fait de mon séjour dans ce laboratoire un passage agréable de ma vie. J'en profite aussi pour remercier tout particulièrement Charles Frances, Loïc Teyssier et Amaury Bittmann pour leur implication dans leurs enseignements, allégeant ainsi ma propre charge de travail en me permettant de me concentrer sur ma thèse. Enseigner sous votre direction est vraiment un régal.

Je remercie aussi les membres moins permanents de l'IRMA, anciens doctorants et futurs docteurs, avec qui les moments de convivialité ont toujours le don d'éclipser les problèmes. Merci en particulier à Raoul, dit le violet, et à Basile, dit le tigre, pour toute l'animation dans le bureau qui aura rendu cette fin de thèse beaucoup moins morose qu'elle aurait pu l'être. Merci à tous ceux qui ont toujours accepté une "dernière" partie de tarot : Laura, Victoria, Antoine, Clarence, Mickael, Clément, Alexander, Briec, Adam, Marianne... Merci aussi à ceux qui jouent moins mais dont la compagnie a été tout aussi agréable : Thibault, Marie, Martin, Romane et j'en oublie sûrement.

Un grand merci aussi à Yohann pour tous les moments qu'on a passés ensemble depuis sept ans déjà, que ce soit du soutien mutuel autour d'un verre, des discussions mathématiques en pleine fête d'anniversaire, des digressions philosophiques sur ce qui est le meilleur entre un canard à l'orange et une tarte au citron meringué ou encore des matchs sur Showdown au goût plutôt salé.

Je remercie aussi Vincent pour m'avoir permis de co-organiser le parcours mathématique, Ana pour m'avoir intégré au projet du calendrier mathématique et Nicolas et Xiaolin pour ce qu'on a partagé dans le cadre du programme Math en Jeans. Toutes ces occasions de faire découvrir les mathématiques au plus grand nombre ont vraiment été riches d'enseignements.

J'aimerais aussi remercier ces enseignants qui m'ont marqué pendant mes études : Jean-Yves et Isabelle Coquan, Vincent Perhirin, Gilles Jaurou et Nicolas Prime à Albi, Chantal Cohen et Guillaume Brevet à Toulouse ainsi qu'Hubert Rubenthaler à Strasbourg. C'est en grande partie grâce à vous que j'en suis là aujourd'hui.

Je remercie aussi les membres de ma famille qui, malgré l'éloignement, ont toujours été présent à mes côtés et m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Enfin, je ne peux pas terminer ces remerciements sans en adresser à celle qui vit avec moi depuis bientôt neuf ans. Comme il y aurait bien trop de choses à lister, je me contenterai de cette simple phrase : Laura, merci pour tout.

Table des matières

Introduction	3
1 Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{O}-modules sur un schéma formel	9
1.1 Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel	9
1.1.1 Outils de dévissage	9
1.1.2 Caractérisation des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel	13
1.1.3 Foncteurs agissant sur les faisceaux quasi-cohérents	17
1.2 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas formels	23
1.2.1 Un résultat de commutativité du produit tensoriel et de la limite projective .	23
1.2.2 La construction de la variété duale commute au changement de base	24
1.2.3 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas formels	25
1.3 Cas des faisceaux cohérents sur une variété analytique rigide avec bonne réduction .	31
1.3.1 Quelques propriétés du morphisme de spécialisation	31
1.3.2 Dual de la fibre générique	32
1.3.3 Transformée de Fourier-Mukai rigide sur les faisceaux cohérents	33
2 Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D}-modules sur une variété abélienne	35
2.1 \mathcal{D} -modules relatifs	35
2.1.1 Définitions	35
2.1.2 Morphismes d'adjonction	43
2.1.3 Formules de la projection	44
2.1.4 Compatibilité des foncteurs relatifs avec les foncteurs classiques	46
2.1.5 Principe de la bascule	48
2.1.6 Changement de base	49
2.2 Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules	52
2.2.1 Variété abélienne \mathcal{D} -duale	52
2.2.2 Transformées de Fourier-Mukai de noyau quelconque	57
2.2.3 Transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré	60
3 Transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$-modules sur un schéma formel	71
3.1 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules	71
3.1.1 Quelques propriétés de $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$	71
3.1.2 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules quasi-cohérents	72
3.1.3 Produit tensoriel, image inverse et image directe	73
3.2 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules relatifs	74
3.2.1 Définitions	74
3.2.2 Morphismes d'adjonction	77
3.2.3 Formules de la projection	78
3.2.4 Compatibilité des foncteurs relatifs avec les foncteurs classiques	78
3.2.5 Principe de la bascule	79

3.2.6	Changement de base	79
3.3	Transformée de Fourier-Mukai généralisée	80
3.3.1	Variété abélienne \mathcal{D} -duale	80
3.3.2	Transformées de Fourier-Mukai de noyau quelconque	81
3.3.3	Transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré	83
A	Complexes de Spencer	92
B	Formule de Künneth formelle	95

Introduction

La transformée de Fourier-Mukai, introduite par Shigeru Mukai dans [Muk81], est un outil très puissant permettant d'étudier les faisceaux quasi-cohérents sur une variété abélienne. Plus précisément, si on fixe A une variété abélienne sur un schéma S localement noethérien pour laquelle on notera m, ϵ et $\langle -1 \rangle$ respectivement la multiplication, l'élément neutre et l'inverse, et T un S -schéma localement noethérien, on peut munir $A \times_S T$ d'une structure de variété abélienne sur T en étendant m, ϵ et $\langle -1 \rangle$. On dira alors qu'un $\mathcal{O}_{A \times T}$ -faisceau inversible \mathcal{L} vérifie le théorème du carré si

$$m_T^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L},$$

où $m_T, p_1, p_2 : (A \times_S T) \times_T (A \times_S T) \rightarrow A \times_S T$ sont respectivement la multiplication et les projections canoniques. On note $Pic^0(A \times_S T/T)$ le groupe abélien des classes d'isomorphie des faisceaux de $\mathcal{O}_{A \times T}$ -modules inversibles satisfaisant le théorème du carré. On a alors le théorème suivant, dû à Grothendieck dans le cas où A est projectif sur S et à Artin et Raynaud en général.

Théorème. *Le foncteur $Pic^0(A \times \bullet/\bullet) : T \mapsto Pic^0(A \times_S T/T)$ de la catégorie des S -schémas localement noethériens dans la catégorie des groupes abéliens est représentable par un S -schéma abélien de même dimension que A .*

On renvoie à [Ray70], section I, pour plus de détails.

On note A^\vee ce schéma abélien, qui sera appelé variété abélienne duale. La représentabilité du foncteur $Pic^0(A \times \bullet/\bullet)$ donne un élément universel \mathcal{P} de $Pic^0(A \times A^\vee/A^\vee)$, correspondant à $id_{A^\vee} \in Hom(A^\vee, A^\vee)$. Le faisceau \mathcal{P} est donc un $\mathcal{O}_{A \times A^\vee}$ -module inversible vérifiant le théorème du carré pour la A^\vee -variété abélienne $A \times A^\vee$, qui est appelé faisceau de Poincaré. On pose les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ & | & \\ & A \times A^\vee & \\ \swarrow p & & \searrow p^\vee \\ A & & A^\vee \end{array}$$

Définition. *On définit la transformée de Fourier-Mukai $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee})$ en posant*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = Rp_*^\vee(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\vee}}^\mathbb{L} p^* \mathcal{E}).$$

On définit de même la transformée de Fourier-Mukai duale $\mathcal{F}^\vee : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A)$ en posant

$$\mathcal{F}^\vee(\mathcal{E}) = Rp_*(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\vee}}^\mathbb{L} p^{\vee*} \mathcal{E}).$$

Les propriétés les plus importantes de la transformée de Fourier-Mukai sont les suivantes

Théorème ([Muk81]). *1. Si $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee})$.*

2. $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee})$ réalise une équivalence de catégories.

3. \mathcal{F} est involutive, dans le sens où $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \simeq \langle -1 \rangle^ \bullet [-\dim(A)]$ et $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\vee \simeq \langle -1 \rangle^{\vee*} \bullet [-\dim(A)]$.*

Dans sa prépublication [Lau96], Gérard Laumon propose une façon d'étendre la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les \mathcal{D} -modules sur une variété abélienne sur un corps de caractéristique nulle.

L'idée générale est, pour une variété abélienne A sur S localement noethérien de caractéristique nulle, de considérer les faisceaux de \mathcal{D}_A -modules \mathcal{O}_A -inversibles rigidifiés qui vérifient le théorème du carré. On note $Pic^{\natural}(A/S)$ le groupe abélien dont les éléments sont les classes d'isomorphie de ces faisceaux. De même, pour T un S -schéma localement noethérien, on peut construire la T -variété abélienne $A \times T$ et regarder le groupe $Pic^{\natural}(A \times T/T)$ des classes d'isomorphie des faisceaux $\mathcal{D}_{A \times T/T}$ -modules $\mathcal{O}_{A \times T}$ -inversibles qui vérifient le théorème du carré.

Attention : il est important de voir qu'il s'agit de $\mathcal{D}_{A \times T/T}$ -modules et non pas de $\mathcal{D}_{A \times T/S}$ -modules ! Cela vient du fait qu'on regarde $A \times T$ comme une T -variété et non pas une S -variété, et c'est ce détail qui va compliquer le travail d'extension de la transformée de Fourier-Mukai aux \mathcal{D} -modules. Dans ce contexte, et sans hypothèse sur la caractéristique de S , on dispose du théorème de représentabilité de Mazur-Messing.

Théorème ([MM74]). *Le foncteur $Pic^{\natural}(A \times \bullet/\bullet) : T \mapsto Pic^{\natural}(A \times T/T)$ est représentable par un S -schéma en groupes abélien lisse de dimension $2\dim(A)$.*

On notera ce schéma A^{\natural} . De même que dans le cas des \mathcal{O} -modules, la représentabilité de $Pic^{\natural}(A \times \bullet/\bullet)$ donne un objet canonique \mathcal{P} de $Pic^{\natural}(A \times A^{\natural}/A^{\natural})$ associé à $id_{A^{\natural}}$, qu'on appellera encore faisceau de Poincaré. Il est cependant important de remarquer que \mathcal{P} est un $\mathcal{D}_{A \times A^{\natural}/A^{\natural}}$ -module, de sorte que la transformée de Fourier-Mukai d'un \mathcal{D}_A -module ne pourra être qu'un $\mathcal{O}_{A^{\natural}}$ -module.

On peut alors construire une transformée de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}_{A/S}$ -modules

$$\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural}})$$

et sa transformée duale

$$\mathcal{F}^{\natural} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural}}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$$

de manière analogue à celle sur les \mathcal{O}_A -modules. On trouve alors le résultat attendu :

Théorème (Laumon-Rothstein). *La transformation \mathcal{F} préserve la cohérence, est involutive et induit une équivalence de catégories entre $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$ (resp. $D_{coh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$) et $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural}})$ (resp. $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural}})$).*

Ce résultat a été publié en premier par Rothstein dans [Rot96, Rot97], ce qui explique que [Lau96] soit resté à l'état de prépublication.

L'objectif des travaux exposés ici est d'étendre la définition de la transformée de Fourier-Mukai, définie sur les \mathcal{O} -modules (Mukai) et les \mathcal{D} -modules (Laumon-Rothstein) sur une variété abélienne classique, pour en faire un foncteur sur les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules sur une variété abélienne formelle \mathcal{A} , où $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ est le complété p -adique du faisceau des opérateurs différentiels cristallins (engendré par les dérivations) de Berthelot. La principale motivation de l'obtention d'une telle transformation est que la catégorie des $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ -modules cohérents ne dépend que de la fibre spéciale, donc de la variété abélienne sur k , qui est sous-jacente. D'autre part, toute variété abélienne A_0 sur un corps fini k se relève en une variété abélienne formelle \mathcal{A} sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. La catégorie des $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ -modules cohérents est en fait attachée à A_0 et toute opération sur cette catégorie donne des informations sur la variété abélienne A_0 sur k .

On utilisera un analogue formel du foncteur Pic^{\natural} qui puisse inclure des informations sur les structures de $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules des faisceaux et qui puisse être représentable, ce qui fournira un analogue de la variété duale et du faisceau de Poincaré. On pourra alors construire une transformée de Fourier-Mukai à l'aide de ces objets. Il faudra ensuite s'assurer que cette transformée vérifie les propriétés fondamentales attendues d'une transformée de Fourier-Mukai.

Pour réussir à étendre la transformée de Fourier-Mukai aux \mathcal{D} -modules arithmétiques, on va d'abord comprendre comment l'étendre aux \mathcal{O} -modules sur une variété formelle, puis aux \mathcal{D} -modules

sur une variété classique au-dessus d'un corps de caractéristique nulle (construction de Laumon), avant d'adapter les outils utilisés pour construire une transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques.

Dans un premier temps, on donnera une méthode pour étendre la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les complexes quasi-cohérents de \mathcal{O} -modules sur une variété formelle. Pour ce faire, la première chose à prendre en compte sera la construction des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel.

Soit \mathcal{X} un schéma formel, limite du système inductif $(X_i)_i$.

Définition. On définit $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ comme étant la sous-catégorie de $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dont les objets \mathcal{E}^\bullet vérifient

- $\mathcal{E}_0^\bullet \in D_{qcoh}^-(X_0)$.
- $\mathcal{E}^\bullet = R\varprojlim_i \left(\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}^\bullet \right)$.

On peut voir les faisceaux quasi-cohérents sur \mathcal{X} comme des faisceaux dont les restrictions sur chaque X_i sont compatibles entre elles en plus d'être quasi-cohérentes.

Théorème ([Ber02]). *Le foncteur $R\varprojlim$ réalise une équivalence de catégorie entre la catégorie $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ formée des complexes de systèmes projectifs $(\mathcal{E}_i^\bullet)_i$ tels que :*

- Le complexe \mathcal{E}_0^\bullet appartient à $D_{qcoh}^-(X_0)$.
- Pour tout entier i le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{E}_{i+1}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}_i^\bullet$$

est un isomorphisme.

La définition des faisceaux quasi-cohérents sur \mathcal{X} est alors plus rigide que celle naïve qui consisterait à prendre la limite projective d'une famille de faisceaux quasi-cohérents. Ce faisant il n'est pas clair que les constructions usuelles des foncteurs classiques comme le produit tensoriel, l'image inverse et l'image directe par un morphisme possèdent de bonnes propriétés. En fait, on montrera que le foncteur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} f^{-1}\bullet$ ne préserve pas la quasi-cohérence sur les schémas formels. Ce qui nous amènera à définir les foncteurs produit tensoriel, image inverse et image directe formels comme la limite projective des mêmes foncteurs sur les X_i .

Définition. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$. On pose

$$\mathcal{E}^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{F}^\bullet = R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{F}_i^\bullet),$$

$$f^b \mathcal{E}^\bullet = R\varprojlim_i Lf_i^* \mathcal{E}_i^\bullet$$

et

$$f_+ \mathcal{G}^\bullet = R\varprojlim_i Rf_{i*} \mathcal{G}_i^\bullet.$$

Ce sont les mêmes définitions que celles de [Ber02], adaptées au cas des \mathcal{O} -modules. Ainsi, par construction, ces foncteurs sont compatibles aux réductions sur les X_i et préservent donc la quasi-cohérence. On pourra alors construire les transformées de Fourier-Mukai \mathcal{F} et \mathcal{F}^\vee sur une variété abélienne formelle \mathcal{A} et sur \mathcal{A}^\vee , sa variété abélienne duale. Comme tous les foncteurs utilisés pour les construire seront compatibles aux réductions sur les A_i , on en déduira le résultat suivant.

Propriété.

$$\mathcal{F} \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} \mathcal{F}_i \text{ et } \mathcal{F}^\vee \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} \mathcal{F}_i^\vee.$$

Ce résultat permet de transporter les propriétés importantes des transformées de Fourier-Mukai depuis le monde des variétés classiques vers le monde des variétés formelles.

Théorème (Théorème 1.2.21). *La transformation \mathcal{F} est involutive, et réalise une équivalence de catégories entre $D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ et $D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\vee})$.*

On pourra ensuite se servir de ces résultats pour construire une transformée de Fourier-Mukai sur une variété analytique rigide avec bonne réduction. Plus précisément, si on note $K = \mathrm{Frac}(V)$ le corps des fraction de V et \mathcal{A}_K la fibre générique de la variété abélienne formelle \mathcal{A} (\mathcal{A}_K est donc une variété analytique rigide sur K), on peut construire sa variété abélienne duale \mathcal{A}_K^\vee et lui associer un faisceau de Poincaré \mathcal{P}_K sur $\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee$. On peut alors construire la transformée de Fourier-Mukai rigide $\mathcal{F}_K : D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}) \rightarrow D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K^\vee})$. Étant donné que \mathcal{F}_K va commuter aux morphismes de spécialisation, on va pouvoir transporter les propriétés importantes des transformées de Fourier-Mukai dans le monde des variétés analytiques rigides avec bonne réduction.

Théorème (Théorème 1.3.10). *La transformation \mathcal{F}_K est involutive et réalise une équivalence de catégories entre $D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$ et $D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K^\vee})$.*

Dans le second chapitre, on donnera plus de détails sur la construction de la transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules sur une variété sur le spectre d'un corps de caractéristique nulle donnée dans [Lau96]. En effet, afin de comprendre comment construire une transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules (sur une variété formelle), il faut comprendre précisément comment on la construit pour les \mathcal{D} -modules sur une variété classique pour essayer d'adapter la méthode.

Comme dit précédemment, étant donnée une variété abélienne A sur un corps de caractéristique nulle, on peut construire un schéma en groupes abéliens \mathcal{D} -dual, A^\natural , et un faisceau de $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -modules universel \mathcal{P} sur $A \times A^\natural$. Ce faisant, le caractère relatif à A^\natural de \mathcal{P} nous force à travailler avec des dérivations relatives à A^\natural , ce qui soulève plusieurs questions d'ordre pratique, à commencer par : comment construit-on le $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -module image inverse d'un $\mathcal{D}_{A/S}$ -module par la projection $p : A \times A^\natural \rightarrow A$? Et réciproquement pour construire l'image directe d'un $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -module. On va donc introduire des foncteurs image inverse et image directe relatifs. Plus précisément, si $f = \mathrm{id}_X \times g : X \times Y \rightarrow X \times Z$ est un morphisme de variétés, on va construire des foncteurs

$$f^{!(Y,Z)} : D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/Z}) \rightarrow D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/Y})$$

et

$$f_+^{(Y,Z)} : D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/Y}) \rightarrow D_{\mathrm{co}h}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/Z}).$$

Ces foncteurs seront en réalité très proches des foncteurs sur les \mathcal{O} -modules.

Propriété. *On a les isomorphismes de \mathcal{O} -modules suivants :*

$$f^{!(Y,Z)}(\mathcal{E}^\bullet) \simeq Lf^*(\mathcal{E}^\bullet)$$

et

$$f_+^{(Y,Z)}(\mathcal{F}^\bullet) \simeq Rf_*(\mathcal{F}^\bullet).$$

Les foncteurs relatifs vont aussi vérifier de nombreux résultats classiques comme la formule de la projection, le théorème du changement de base ou encore le principe de la bascule, en plus d'être compatibles avec foncteurs classiques sur les \mathcal{D} -modules.

Munis de ces constructions sur les \mathcal{D} -modules relatifs, on pourra alors donner une autre définition de la transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules.

Définition. On définit la transformée de Fourier-Mukai sur les \mathcal{D}_A -modules comme le foncteur $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_A) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural})$ donné par

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = p_{+/A^\natural}^{\natural}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{!(A^\natural)} \mathcal{E}^\cdot).$$

De même, on définit sa transformée \mathcal{D} -duale comme le foncteur $\mathcal{F}^{\natural} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_A)$ donné par

$$\mathcal{F}^{\natural}(\mathcal{E}^\cdot) = p_+^{(A^\natural)}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{\natural*} \mathcal{E}^\cdot).$$

Ces définitions sont totalement équivalentes à celle de [Lau96], mais elles seront plus pratiques à utiliser pour montrer les résultats fondamentaux attendus. De plus, il sera plus facile dans la suite d'étendre cette définition au cas arithmétique.

On récrit ensuite la démonstration du théorème de Laumon-Rothstein (Théorème 2.2.21).

Enfin, la troisième partie de ce travail consiste à utiliser les outils des deux chapitres précédents pour obtenir une transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules sur une variété formelle \mathcal{A} . On considère V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π , V_i sa réduction modulo π^i , (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur les V_i et \mathcal{A} leur limite.

Si la quasi-totalité des constructions du chapitre 2 n'utilisent pas l'hypothèse sur la caractéristique nulle de la base S et peuvent donc être faites sur les A_i , ce n'est pas le cas de la preuve de l'involutivité de la transformée de Fourier-Mukai, qui utilise de façon cruciale le théorème de Kashiwara et l'acyclicité du complexe de Koszul. Ainsi, il est fort peu probable que la transformée de Fourier-Mukai sur A_i soit involutive, malgré le fait qu'on puisse la construire. C'est pourquoi il faut considérer la transformée de Fourier-Mukai sur le schéma formel \mathcal{A} . De même, la construction du foncteur Pic^{\natural} est intimement liée aux modules à connexion intégrable, qui dans le cadre arithmétique correspondent aux $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules, c'est pourquoi on restreindra la construction aux $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ -modules, $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ étant le complété du faisceau d'opérateurs différentiels sur \mathcal{A} engendré par les dérivations.

Pour pouvoir définir la transformée de Fourier-Mukai sur les $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ -modules on va utiliser le même genre d'astuce que dans le premier chapitre, à savoir construire les foncteurs sur les variétés abéliennes formelles comme limite projective de ceux sur les réductions modulo π^i . Ces constructions sont déjà présentes dans [Ber02] pour les foncteurs classiques, mais on aura aussi besoin des foncteurs relatifs. On constatera aussi que la quasi-totalité des résultats qu'on a évoqués sur les foncteurs relatifs sur une variété classique vont s'étendre au cas des schémas formels. Une fois tous les résultats nécessaires obtenus dans le cadre arithmétique, on peut définir la transformée de Fourier-Mukai sur les $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ -modules.

Définition. On définit la transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S}^{(0)}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural})$ en posant

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = p_{+/A^\natural}^{\natural}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{!(A^\natural)} \mathcal{E}^\cdot).$$

On définit aussi la transformée de Fourier-Mukai \mathcal{D} -duale $\mathcal{F}^{\natural} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S}^{(0)})$ en posant

$$\mathcal{F}^{\natural}(\mathcal{E}^\cdot) = p_+^{(A^\natural)}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{\natural*} \mathcal{E}^\cdot).$$

Les travaux présentés dans ce manuscrit ne sont pas assez avancés pour montrer que cette transformée de Fourier-Mukai est involutive, cependant on peut prouver une des deux formules d'involutivité, qui conduit au résultat final.

Théorème (Théorème 3.3.15). *1. La transformation \mathcal{F} est essentiellement surjective*

2. La transformation \mathcal{F}^\natural est fidèle.

Pour terminer, voici quelques questions encore ouvertes.

Il est naturel de penser que \mathcal{F} réalise effectivement une équivalence de catégories entre $D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)})$ (resp. $D_{coh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)})$) et $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural})$ (resp. $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural})$), mais l'existence de $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules arithmétiques mettant en défaut le théorème de Kashiwara nous empêche de le montrer sans une compréhension plus approfondie de la structure de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}$ -module de \mathcal{P} . Il est aussi possible que la transformée de Fourier-Mukai ne réalise pas une équivalence de catégories avec les $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)}$ -modules mais plutôt avec les $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^\dagger$ -modules. Un pas dans cette direction serait de déterminer si la structure de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}$ -module de \mathcal{P} peut s'étendre en une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^\dagger$ -module, autrement dit si \mathcal{P} est surconvergent.

Chapitre 1

Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{O} -modules sur un schéma formel

Dans ce chapitre, on va étendre la définition classique de la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les schémas formel. Pour ce faire, on va avoir besoin de plusieurs outils pour faire commuter des résultats connus sur les variétés classiques à la limite projective, et ainsi obtenir leur équivalent sur les schémas formels.

Dans un premier temps, on va étudier plus en détail le comportement des faisceaux quasi-cohérents sur les schémas formels, ce qui nous poussera à définir une version formelle du foncteur image inverse. On pourra alors définir la transformée de Fourier-Mukai formelle, qui possèdera les propriétés voulues.

1.1 Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel

Dans cette section, on considère un schéma formel $\mathcal{X} = \varinjlim_i X_i$ sur $\mathrm{Spf}(V)$.

1.1.1 Outils de dévissage

Étant donnée une catégorie abélienne \mathcal{C} , on notera $D(\mathcal{C})$ la catégorie dérivée de \mathcal{C} , $D^+(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés inférieurement, $D^-(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés supérieurement et $D^b(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés.

On aura besoin dans la suite d'outils de dévissage, en particulier du résultat suivant :

Définition 1.1.1. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories abéliennes et soit $F : D(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ un δ -foncteur covariant.*

- *On dit que F est way-out à droite si pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$ il existe $n_2 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $X \in D(\mathcal{C})$ qui vérifie $H^i(X) = 0$ pour tout $i < n_2$ alors $H^i(F(X)) = 0$ pour tout $i < n_1$.*
- *On définit de même way-out à gauche en renversant les inégalités, ainsi que way-out dans les deux directions.*
- *On dit que F est de dimension cohomologique finie si il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout objet $X \in D(\mathcal{C})$ qui vérifie $H^i(X) = 0$ pour tout $i < n$ (resp. $i > n$) alors $H^i(F(X)) = 0$ pour tout $i < n - d$ (resp. $i > n + d$).*

Remarques :

- Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur exact à gauche, alors le foncteur dérivé RF est way-out à droite (il suffit de prendre $n_2 = n_1$). De même, si $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est exact à droite, LG est way-out à gauche.
- Tout foncteur de dimension cohomologique finie est way-out dans les deux directions.
- Tout foncteur de dimension cohomologique finie envoie $D^-(\mathcal{C})$ dans $D^-(\mathcal{C}')$, $D^+(\mathcal{C})$ dans $D^+(\mathcal{C}')$ et $D^b(\mathcal{C})$ dans $D^b(\mathcal{C}')$.

Lemme 1.1.2. Soient \mathcal{C} une catégorie abélienne et $D(\mathcal{C})$ sa catégorie dérivée. Pour toute suite exacte d'objets de $D(\mathcal{C})$

$$0 \rightarrow X^\cdot \rightarrow Y^\cdot \rightarrow Z^\cdot \rightarrow 0$$

il existe un morphisme $Z^\cdot \rightarrow T(X^\cdot)$ tel que $(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot)$ soit un triangle, où T est le foncteur de translation.

Démonstration. Cette preuve est une reformulation de la remarque qui suit la proposition I.6.1 de [Har66].

Par les axiomes des catégories triangulées, on sait qu'il existe un objet W^\cdot de $D(\mathcal{C})$ qui complète $X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ en un triangle.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & W^\cdot & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & \\
 0 & \longrightarrow & X^\cdot & \xrightarrow{f} & Y^\cdot & \xrightarrow{g} & Z^\cdot \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \nearrow h \\
 & & & & & & W^\cdot
 \end{array}$$

Nous allons montrer l'existence du morphisme h puis qu'il s'agit d'un quasi-isomorphisme.

On sait ([Har66] Prop I.1.1) que $Hom(\cdot, Z^\cdot)$ est un foncteur cohomologique, en particulier on a la suite exacte suivante

$$Hom(W^\cdot, Z^\cdot) \rightarrow Hom(Y^\cdot, Z^\cdot) \rightarrow Hom(X^\cdot, Z^\cdot).$$

Or g est un élément de $Hom(Y^\cdot, Z^\cdot)$ qui est envoyé sur $g \circ f = 0$ dans $Hom(X^\cdot, Z^\cdot)$, il provient donc d'un élément $h \in Hom(W^\cdot, Z^\cdot)$.

Pour montrer que h est un quasi-isomorphisme, on écrit les suites exactes longues de cohomologie de la suite exacte courte et du triangle :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^i(X^\cdot) & \longrightarrow & H^i(Y^\cdot) & \longrightarrow & H^i(Z^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+1}(X^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y^\cdot) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \downarrow H^i(h) & & \parallel & & \parallel & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^i(X^\cdot) & \longrightarrow & H^i(Y^\cdot) & \longrightarrow & H^i(W^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+1}(X^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y^\cdot) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

On en déduit par le lemme des cinq morphismes que $H^i(h)$ est un isomorphisme, pour tout i . Donc h est bien un quasi-isomorphisme. □

Propriété 1.1.3. Soient F et G deux δ -foncteurs de $D^*(\mathcal{C})$ dans $D(\mathcal{C}')$ (où "*" désignera tour à tour "b", "-", "+" et " "). Soit X^\cdot un objet de $D^*(\mathcal{C})$. On suppose l'existence d'un morphisme de foncteurs $\eta : F \rightarrow G$ tel que pour tout n , η induit un quasi-isomorphisme $F(X^n) \simeq G(X^n)$.

On suppose de plus l'une des conditions suivantes :

1. $F, G : D^b(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$.
2. $F, G : D^-(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out à gauche.

3. $F, G : D^+(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out à droite.

4. $F, G : D(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out dans les deux directions.

Alors η induit un quasi-isomorphisme $F(X^\cdot) \simeq G(X^\cdot)$.

Démonstration. Avant de commencer il faut introduire quelques outils.

Pour tout n , on définit les troncations naïves

$$\tau_{>n}(X^\cdot) : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \dots$$

$$\tau_{\leq n}(X^\cdot) : \quad \dots \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

ainsi que les troncations cohomologiques

$$\sigma_{>n}(X^\cdot) : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{im}(d^n) \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \dots$$

$$\sigma_{\leq n}(X^\cdot) : \quad \dots \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \ker(d^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

On a alors les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \sigma_{>n}(X^\cdot) \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow \sigma_{\leq n}(X^\cdot) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \tau_{>n}(X^\cdot) \longrightarrow \tau_{>n-1}(X^\cdot) \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$$

qui donnent lieu à deux triangles

$$\sigma_{>n}(X^\cdot) \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow \sigma_{\leq n}(X^\cdot) \tag{1.1}$$

$$\tau_{>n}(X^\cdot) \longrightarrow \tau_{>n-1}(X^\cdot) \longrightarrow X^n \tag{1.2}$$

d'après le lemme précédent.

Il est aussi important de remarquer que les troncations cohomologiques vérifient

$$H^i(\sigma_{\leq n}(X^\cdot)) = \begin{cases} H^i(X^\cdot) & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

et

$$H^i(\sigma_{>n}(X^\cdot)) = \begin{cases} H^i(X^\cdot) & \text{si } i > n \\ 0 & \text{si } i \leq n. \end{cases}$$

1. On commence par le cas où X^\cdot est borné. On montre alors par récurrence descendante sur n que

$$F(\tau_{>n}(X^\cdot)) \simeq G(\tau_{>n}(X^\cdot)).$$

Pour n très grand, $\tau_{>n}(X^\cdot)$ est le complexe trivial et l'isomorphisme est clair.

Supposons à présent l'isomorphisme établi pour un indice n fixé. Grâce au triangle (1.2), on trouve deux triangles

$$\begin{array}{ccccc} F(\tau_{>n}(X^\cdot)) & \longrightarrow & F(\tau_{>n-1}(X^\cdot)) & \longrightarrow & F(X^n) \\ \downarrow \eta(\tau_{>n}(X^\cdot)) & & \downarrow \eta(\tau_{>n-1}(X^\cdot)) & & \downarrow \eta(X^n) \\ G(\tau_{>n}(X^\cdot)) & \longrightarrow & G(\tau_{>n-1}(X^\cdot)) & \longrightarrow & G(X^n). \end{array}$$

Or $\eta(\tau_{>n}(X^\cdot))$ est un isomorphisme par hypothèse de récurrence et $\eta(X^n)$ l'est aussi par hypothèse. Ainsi, $\eta(\tau_{>n-1}(X^\cdot))$ est un isomorphisme (on renvoie à [Har66] Prop I.1.1 pour ce résultat).

Remarque : Ce raisonnement fonctionne au niveau des catégories triangulées : si les $\eta(X^n)$ sont des isomorphismes de complexes, les isomorphismes trouvés le sont aussi.

2. On traite à présent le cas où X^\cdot est borné supérieurement.

Pour montrer que $\eta(X^\cdot)$ est un isomorphisme (dans $D(\mathcal{C}')$), il suffit de le montrer pour tous les

$$H^i(\eta(X^\cdot)) : H^i(F(X^\cdot)) \rightarrow H^i(G(X^\cdot)).$$

On fixe $j \in \mathbb{Z}$. Comme F et G sont tout les deux way-out à gauche, il existe n_0 tel que

$$\forall Y^\cdot \in D^-(\mathcal{C}), \left(\forall i > n_0, H^i(Y^\cdot) = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall i > j - 2, H^i(F(Y^\cdot)) = H^i(G(Y^\cdot)) = 0 \right).$$

Comme $H^i(\sigma_{\leq n_0}(X^\cdot)) = 0$ si $i > n_0$,

$$\forall i > j - 2, H^i(F(\sigma_{\leq n_0}(X^\cdot))) = H^i(G(\sigma_{\leq n_0}(X^\cdot))) = 0.$$

En appliquant le foncteur F au triangle (1.1) et en prenant la suite exacte longue de cohomologie, on trouve

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{j-1}(F(\sigma_{\leq n_0}(X^\cdot))) & \longrightarrow & H^j(F(\sigma_{>n_0}(X^\cdot))) & \longrightarrow & H^j(F(X^\cdot)) \longrightarrow H^j(F(\sigma_{\leq n_0}(X^\cdot))) \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

D'où $H^j(F(\sigma_{>n_0}(X^\cdot))) \simeq H^j(F(X^\cdot))$, et il en va de même pour G . Or $\sigma_{>n_0}(X^\cdot)$ est borné et on sait déjà que dans ce cas $H^j(F(\sigma_{>n_0}(X^\cdot))) \simeq H^j(G(\sigma_{>n_0}(X^\cdot)))$. On en conclut donc que

$$H^i(\eta(X^\cdot)) : H^i(F(X^\cdot)) \rightarrow H^i(G(X^\cdot))$$

est un isomorphisme, et donc $\eta(X^\cdot)$ est un quasi-isomorphisme.

3. Le cas où X^\cdot est supposé inférieurement borné se démontre de la même façon.

4. Dans le cas général où X^\cdot est non-nécessairement borné, on sait que $\sigma_{\leq 0}(X^\cdot) \in D^-(X^\cdot)$, donc

$$F(\sigma_{\leq 0}(X^\cdot)) \simeq G(\sigma_{\leq 0}(X^\cdot)).$$

De même, $\sigma_{>0}(X^\cdot) \in D^+(X^\cdot)$ et

$$F(\sigma_{>0}(X^\cdot)) \simeq G(\sigma_{>0}(X^\cdot)).$$

On a donc un isomorphisme entre triangles (obtenus à partir du triangle (1.1))

$$\begin{array}{ccccc} F(\sigma_{>0}(X^\cdot)) & \longrightarrow & F(X^\cdot) & \longrightarrow & F(\sigma_{\leq 0}(X^\cdot)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ G(\sigma_{>0}(X^\cdot)) & \longrightarrow & G(X^\cdot) & \longrightarrow & G(\sigma_{\leq 0}(X^\cdot)), \end{array}$$

d'où $F(X^\cdot) \simeq G(X^\cdot)$.

□

Remarque : On a un résultat similaire dans le cas où η induit des isomorphismes sur les groupes de cohomologie. On renvoie à [Har66] Prop I.7.1 pour plus de détails.

On rappelle aussi les deux lemmes classiques suivants.

Lemme 1.1.4 (Formule de la projection). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schéma quasi-compact et quasi-séparé. Pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}(\mathcal{O}_X)$ on a un isomorphisme*

$$Rf_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \simeq Rf_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} Lf^* \mathcal{F}).$$

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 08EU]. □

Lemme 1.1.5 (Changement de base). *Soient $g : S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $f : X \rightarrow S$ quasi-compact et quasi-séparé. Soit le diagramme de changement de base suivant*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

Si X et S' sont Tor-indépendants sur S (en particulier, si X ou S' est plat sur S) alors pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}(\mathcal{O}_X)$ on a $Rf'_ L(g')^* \mathcal{E} \simeq Lg^* Rf_* \mathcal{E}$.*

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 08IB]. □

1.1.2 Caractérisation des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel

Dans la suite, on notera $D(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ la catégorie dérivée de la catégorie $Mod(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules, et $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ sa sous-catégorie dont les objets sont les complexes bornés supérieurement.

Avant toute chose, on rappelle la définition des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel.

Définition 1.1.6. *On définit $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ comme étant la sous-catégorie de $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dont les objets \mathcal{E} vérifient*

- $\mathcal{E}_0 \in D_{qcoh}^-(X_0)$.
- $\mathcal{E} = \varprojlim_i \mathcal{E}_i$.

Où $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}$.

Définition 1.1.7. *On désigne par $D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$ la catégorie des complexes (\mathcal{E}_i) où pour tout i , \mathcal{E}_i est dans $D^-(\mathcal{O}_{X_i})$. Un élément (\mathcal{E}_i) de $D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$ est dit quasi-consistant si pour tout i le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{E}_i$$

est un isomorphisme.

On a la caractérisation suivante, tirée de [Ber02].

Théorème 1.1.8 (Berthelot). *Le foncteur \varprojlim réalise une équivalence de catégorie entre la catégorie $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$ formée des complexes de systèmes projectifs $(\mathcal{E}_i)_i$ tels que :*

- Le complexe \mathcal{E}_0 appartient à $D_{qcoh}^-(X_0)$.

- $(\mathcal{E}_i)_i$ est quasi-consistant.

Dans la suite cette catégorie sera notée $\widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_X)$.

Démonstration. Pour tout \mathcal{E} faisceau sur \mathcal{X} , on note $S(\mathcal{E})$ le complexe de faisceaux $(\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})_i$. Ainsi, le foncteur dérivé de S est $LS : \mathcal{E} \in D^-(\mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{E})_i$.

Nous allons montrer que la restriction du foncteur LS et le foncteur $R\varprojlim$ sont quasi-inverses.

Par définition de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$, il est clair que $R\varprojlim \circ LS \simeq id_{D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)}$. Pour ce qui est de l'autre sens, il découle du lemme suivant.

Lemme 1.1.9. *Soit $(\mathcal{E}_i)_i \in D^-(\mathcal{O}_X)$. Il y a équivalence entre :*

- $(\mathcal{E}_i)_i$ est quasi-consistant.
- Le morphisme naturel $LS \circ R\varprojlim_i(\mathcal{E}_i) \rightarrow (\mathcal{E}_i)_i$ est un isomorphisme.

Démonstration. Ce résultat se trouve dans [BO78], proposition B.5 en annexe B. □

□

Définition 1.1.10. *On pose $A = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_X)$ et pour tout i $A_i = A/\mathcal{I}^i A$. On définit alors $D_{qcoh}^-(A)$ comme la sous-catégorie de $D^-(A)$ dont les éléments M^\cdot vérifient $M^\cdot \simeq R\varprojlim_i M_i$, où $M_i = M^\cdot \otimes_A^{\mathbb{L}} A_i$.*

La caractérisation du théorème précédent s'applique aussi dans ce cas et donne une équivalence de catégories entre $D_{qcoh}^-(A)$ et la sous-catégorie pleine de $D^-(A)$, notée $\widetilde{D_{qcoh}^-}(A)$, dont les objets $(M_i)_i$ vérifient

$$\forall i, A_i \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} M_{i+1} \simeq M_i.$$

Théorème 1.1.11. *On suppose que $\mathcal{X} = Spf(A)$ où A est un anneau π -adiquement complet.*

Le foncteur $\Lambda : D^-(A) \rightarrow D^-(\mathcal{O}_X)$ défini par

$$\Lambda(M^\cdot) = R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M^\cdot)$$

est à image dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$.

De plus, $\Lambda : D_{qcoh}^-(A) \rightarrow D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$ réalise une équivalence de catégories de quasi-inverse $R\Gamma$.

Pour la démonstration nous allons avoir besoin du résultat suivant, tiré de [Sta21, Lemme 0D60].

Lemme 1.1.12. *Le foncteur $R\varprojlim$ commute avec le foncteur $R\Gamma$.*

Remarque : Le foncteur $R\Gamma$ est bien défini sur $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$ car pour tout i , $R\Gamma$ est de dimension cohomologique finie sur $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X_i})$ et $R\Gamma$ commute à $R\varprojlim$ qui est de dimension cohomologique 1 (voir par exemple [Sta21, Lemme 091D]), donc $R\Gamma$ est de dimension cohomologique finie sur $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_X)$.

Démonstration. Soit $M^\cdot \in D^-(A)$. Pour montrer que $\Lambda(M^\cdot)$ est quasi-cohérent, on utilise la caractérisation du théorème précédent en posant $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M^\cdot$ pour tout i .

- $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{X_0} \otimes_A^{\mathbb{L}} M^\cdot$ est clairement dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{X_0})$.

- Pour tout i , on a

$$\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{O}_{X_{i+1}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M \simeq \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M = \mathcal{E}_i.$$

Ainsi, $\Lambda(M)$ est quasi-cohérent.

Pour la suite on va procéder par dévissage. Pour ce faire, on va en grande partie s'appuyer sur la propriété 1.1.3.

Pour montrer l'équivalence de catégorie on va passer par des catégories intermédiaires. On a alors les foncteurs suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
& & R\Gamma & & \\
& \swarrow & & \searrow & \\
D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) & \xrightarrow{LS} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\Psi} & D_{qcoh}^-(A) & \xrightarrow{R\varprojlim} & D_{qcoh}^-(A) \\
& \nwarrow & \xleftarrow{\Phi} & \xleftarrow{LS} & \nwarrow & \swarrow & \\
& & \Lambda & & & &
\end{array}$$

où

$$\Psi((\mathcal{E}_i)_i) = (R\Gamma(\mathcal{E}_i))_i$$

et

$$\Phi((M_i)_i) = (\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} M_i)_i.$$

Remarque : Comme les X_i sont affines, $R\Gamma(\mathcal{E}_i)$ est le complexe constitué des $\Gamma(\mathcal{E}_i^n)$. De même, \mathcal{O}_{X_i} est plat sur A_i , donc $\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} M_i$ est le complexe constitué des $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} M_i^n$.

Comme $R\Gamma$ et $R\varprojlim$ commutent, on a les isomorphismes suivants :

$$R\varprojlim_i \circ \Psi \circ LS(\mathcal{E}) = R\varprojlim_i (R\Gamma(X_i, \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i})) \simeq R\Gamma(\mathcal{X}, R\varprojlim_i (\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i})) = R\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}).$$

$$R\varprojlim_i \circ \Phi \circ LS(M) = R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} A_i \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M) \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M) = \Lambda(M).$$

Ainsi, pour montrer que $R\Gamma$ et Λ réalisent une équivalence de catégorie, il suffit de montrer que c'est le cas pour Ψ et Φ .

1. Dans un premier temps, il faut s'assurer que les foncteurs Ψ et Φ sont bien définis, dans le sens où il faut que leurs images vérifient les conditions des catégories $\widetilde{D_{qcoh}^-}^*$.

Soit $(M_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A)$. Alors

- $\Phi((M_j)_j)_0 = \mathcal{O}_{X_0} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_0} M_0$ est clairement un objet de $D_{qcoh}^-(X_0)$.
- Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \Phi((M_j)_j)_{i+1} &= \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{O}_{X_{i+1}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_{i+1}} M_{i+1} \simeq \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_{i+1}} M_{i+1} \\
&\simeq \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} A_i \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_{i+1}} M_{i+1} \simeq \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} M_i = \Phi((M_j)_j)_i,
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme venant du fait que $(M_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A)$.

Ainsi, $\Phi((M_j)_j) \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_X)$.

2. Soit $(\mathcal{E}_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_X)$. Soit $i \in \mathbb{N}$, alors la condition à vérifier est

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i).$$

Or on sait que $\mathcal{E}_i \simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1}$, donc il faut vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1}).$$

Comme $X_{i+1} = \text{Spec}(R_{i+1})$ est une variété affine, tout faisceau quasi-cohérent est quotient d'un $\mathcal{O}_{X_{i+1}}$ -module libre. Ainsi, \mathcal{E}_{i+1} est quasi-isomorphe à un complexe \mathcal{L}_{i+1} de faisceaux libres. Il suffit alors de vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}_{i+1}).$$

Ici X_{i+1} est lisse et donc le foncteur $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \bullet$ est de dimension cohomologique finie. On cherche donc à comparer $F(\mathcal{L}_{i+1})$ et $G(\mathcal{L}_{i+1})$ où F et G sont de dimension cohomologique finie. D'après la propriété 1.1.3 (p.10), il suffit de vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{L}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}),$$

où \mathcal{L} est un faisceau libre sur X_{i+1} .

Remarque : Dans le cas général, le foncteur $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \bullet$ est way-out à gauche, ce qui suffit à appliquer le lemme pour \mathcal{E}_i qui est supérieurement borné.

De plus, X_{i+1} est quasi-compact donc Γ commute aux limites inductives ([Kem80] Prop 6). Comme tout faisceau libre s'écrit comme limite inductive de faisceaux libres de rang fini, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k$. Dans ce cas, on a clairement

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq A_i^k \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k).$$

$\Psi(\mathcal{E}_i)$ est alors bien un objet de $\widetilde{D_{qcoh}^-}(A)$.

3. On va maintenant vérifier que Ψ et Φ réalisent une équivalence de catégorie.

Soit $(M_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A)$. Pour montrer que $\Psi \circ \Phi((M_i)_i) \simeq (M_i)_i$, on montre pour tout i que

$$R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} M_i) \simeq M_i.$$

De même que précédemment, comme tout A_i -module est quotient d'un A_i -module libre, M_i est quasi-isomorphe à un complexe de A_i -modules libres L_i et il suffit de montrer que

$$R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} L_i) \simeq L_i.$$

A nouveau, les deux foncteurs qui apparaissent sont de dimension cohomologique finie (on rappelle que $(\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} L_i)^n = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} L_i^n$), donc d'après la propriété 1.1.3 il suffit de montrer que

$$\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} L) \simeq L,$$

où L est un A_i -module libre. Enfin, comme Γ commute aux limites inductives, il suffit de vérifier que

$$\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} A_i^k) \simeq A_i^k,$$

ce qui est vrai.

4. Soit $(\mathcal{E}_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_X)$. Pour montrer que $\Phi \circ \Psi((\mathcal{E}_i)_i) \simeq (\mathcal{E}_i)_i$, on montre pour tout i que

$$\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{A_i} R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{E}_i.$$

Pour les mêmes raisons qu'au point 2, il suffit de vérifier l'isomorphisme dans le cas où \mathcal{E}_i est réduit à $\mathcal{O}_{X_i}^k$. Dans ce cas on a bien

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}^k) \simeq \mathcal{O}_{X_i}^k.$$

Ainsi, Ψ et Φ réalisent une équivalence de catégorie et il en est donc de même pour $R\Gamma$ et Λ . \square

1.1.3 Foncteurs agissant sur les faisceaux quasi-cohérents

La définition des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel est beaucoup plus rigide que celle sur les variétés classiques. Ce faisant, la définition naturelle du pull-back sur $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$ ne garantit pas que le pull-pack d'un quasi-cohérent soit quasi-cohérent, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π .

Soit $\mathcal{X} = \text{Spf}(V\{t\})$ avec $V\{t\} = \left\{ \sum_{k \geq 0} a_k t^k \mid v_\pi(a_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \right\}$. On considère la projection sur la première coordonnée $p : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Grâce au théorème précédent, on définit un objet $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{X})$ par

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \left\{ \sum_{k,l \geq 0} a_{k,l} t^k \partial^l \mid a_{k,l} \in V, v_\pi(a_{k,l}) \xrightarrow[k,l \rightarrow \infty]{} \infty \right\}.$$

Remarque : \mathcal{E} est le faisceau $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ de Berthelot. On renvoie à [Ber02] pour plus de détails sur ce faisceau.

Dans ce cas, les sections globales du faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} p^{-1}\mathcal{E}$ (le pull-back classique) sont données par

$$\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F}) = V\{s, t\} \otimes_{V\{t\}} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}),$$

c'est à dire les éléments de la forme $\sum_{k < \infty} b_k(s, t) \otimes c_k(t, \partial)$, où les b_k et les c_k sont des séries respectivement en s, t et en t, ∂ à coefficients dans V et à décroissance π -adique.

Montrons maintenant par l'absurde que \mathcal{F} n'est pas quasi-cohérent. Si \mathcal{F} était quasi-cohérent, il serait par définition séparé et π -adiquement complet et il en serait de même pour $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$. Dans ce cas, $Q = \sum_{n \geq 0} \pi^n s^n \otimes \partial^n$ devrait être un élément de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$.

Remarquons avant de poursuivre que grâce à la complétude de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$, on peut écrire tout élément

$$\sum_{k=1}^K \left(\sum_{l \geq 0} \alpha_l^k s^l \otimes \sum_{n \geq 0} \beta_n^k \partial^n \right) \quad (\alpha_l, \beta_n \in V\{t\})$$

sous la forme

$$\sum_{l, n \geq 0} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_l^k \beta_n^k \right) s^l \otimes \partial^n.$$

Lemme 1.1.13. *Si $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ est séparé π -adiquement complet, tout élément de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\sum_{l,m,n \geq 0} \alpha_{l,m,n} t^m s^l \otimes \partial^n,$$

où les $\alpha_{l,m,n}$ sont des éléments de V à décroissance π -adique.

Démonstration. Dans un premier temps il faut remarquer que pour tout i ,

$$\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F}) / \pi^i \Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F}) \simeq V / \pi^i V[t, s, \partial].$$

Ainsi, tout élément de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ se réduit modulo π^i en

$$\sum_{0 \leq l+m+n \leq A} \overline{\alpha_{l,m,n}} t^m s^l \partial^n,$$

où $\bar{\alpha}$ est la réduction de α modulo π^i dans V et

$$A = \min\{a \in \mathbb{N} \mid \forall n + m + l > a, v_\pi(\alpha_{l,m,n}) \geq i\}.$$

Or on sait que dans $V / \pi^i V[t, s, \partial]$ une telle écriture est unique. Ainsi, si un élément de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ s'écrit de deux façons différentes

$$\sum_{l,m,n \geq 0} \alpha_{l,m,n} t^m s^l \otimes \partial^n = \sum_{l,m,n \geq 0} \alpha'_{l,m,n} t^m s^l \otimes \partial^n,$$

alors modulo π^i , on trouve que $\overline{\alpha_{l,m,n}} = \overline{\alpha'_{l,m,n}}$.

Comme $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ est séparé, on en déduit que $\alpha_{l,m,n} = \alpha'_{l,m,n}$. □

Ainsi, l'appartenance de Q à $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$ est équivalente à l'existence d'un entier positif K et de $2K$ suites d'éléments de $V\{t\}$ $\alpha^1, \beta^1, \alpha^2, \dots, \beta^K$ telles que pour tous $n, l \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \alpha_l^k \beta_n^k = \pi^n \delta_{n,l},$$

où $\delta_{n,l} = 1$ si $n = l$ et $\delta_{n,l} = 0$ sinon.

Lemme 1.1.14. *Soient $f \in V\{t\}$, $K \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ soient $(\alpha_l^k)_l$ et $(\beta_n^k)_n$ deux suites d'éléments de $V\{t\}$. On notera α^\bullet la famille $(\alpha^1, \dots, \alpha^K)$. On notera de même β^\bullet . Enfin, on dira que $(K, \alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ est une solution au problème $P(f)$ lorsque pour tous $n, l \geq 0$ on a*

$$\sum_{k=1}^K \alpha_l^k \beta_n^k = f \pi^n \delta_{n,l}.$$

Avec ces notations, on a l'équivalence suivante :

$$\exists (K, \alpha^\bullet, \beta^\bullet) \text{ solution au problème } P(f) \Leftrightarrow f = 0.$$

Démonstration. Le sens réciproque est trivial. Pour le sens direct nous allons le montrer par récurrence sur K .

Soit $f \in V\{t\}$, $f \neq 0$. L'hypothèse de récurrence au rang K sera H_K : "Il n'existe aucune paire de familles de taille K $(\alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ telle que $(K, \alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ est une solution au problème $P(f)$."

Pour démontrer H_1 , on raisonne par l'absurde. Si deux telles suites α^0 et β^0 existaient, on aurait les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_0^0 \beta_0^0 &= f, \text{ avec } n = l = 0, \\ \alpha_0^0 \beta_1^0 &= 0, \text{ avec } n = 0, l = 1, \\ \alpha_1^0 \beta_1^0 &= f\pi, \text{ avec } n = l = 1.\end{aligned}$$

Or comme $f \neq 0$, la première équation donne $\alpha_0^0 \neq 0$ et la troisième donne $\beta_1^0 \neq 0$, ce qui contredit la deuxième équation (du fait de l'intégrité de V). Ainsi, H_1 est vraie.

Pour démontrer l'hérédité, l'idée est de modifier les équations pour enlever deux suites et ainsi se ramener au rang précédent. Soit $K \in \mathbb{N}^*$ tel que H_K est vraie. Pour montrer H_{K+1} , on raisonne à nouveau par l'absurde. Supposons qu'il existe α^\bullet et β^\bullet telles que $(K+1, \alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ est une solution au problème $P(f)$. Comme

$$\sum_{k=1}^{K+1} \alpha_0^k \beta_0^k = f \neq 0,$$

il existe un produit $\alpha_0^i \beta_0^i$ non nul. Supposons, quitte à renuméroter, que $i = 1$. Pour tout $n > 0$ on trouve alors

$$\alpha_0^1 \beta_n^1 = - \sum_{k=2}^{K+1} \alpha_0^k \beta_n^k.$$

Ce faisant, en multipliant par α_0^1 toutes les équations que doivent vérifier les α_l^k et les β_n^k , on trouve pour tout $n > 0$ et tout $l \geq 0$

$$\alpha_0^1 \beta_n^1 \alpha_l^1 + \alpha_0^1 \sum_{k=2}^{K+1} \alpha_l^k \beta_n^k = \alpha_0^1 f \pi^n \delta_{n,l},$$

soit, en remplaçant $\alpha_0^1 \beta_n^1$ et en factorisant par rapport aux β_l^k ,

$$\sum_{k=2}^{K+1} (\alpha_0^1 \alpha_l^k - \alpha_0^k \alpha_l^1) \beta_n^k = \alpha_0^1 f \pi^n \delta_{n,l}.$$

Posons alors pour tous $k \in \{2, \dots, K+1\}$, $l, n > 0$ $\gamma_{l-1}^k = \alpha_0^1 \alpha_l^k - \alpha_0^k \alpha_l^1$ et $\tilde{\beta}_{n-1}^k = \beta_n^k$. Nous venons ainsi de mettre en évidence que $(K, \gamma^\bullet, \tilde{\beta}^\bullet)$ est une solution au problème $P(\alpha_0^1 f \pi)$ alors que $\alpha_0^1 f \pi \neq 0$. On aboutit donc à une contradiction avec H_K . \square

Ce lemme montre alors que $Q = \sum_{n \geq 0} \pi^n s^n \otimes \partial^n$ n'est pas un élément de $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F})$. \mathcal{F} n'est donc pas quasi-cohérent.

Ce constat pousse à définir autrement le tiré en arrière d'un objet de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$.

Définition 1.1.15. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels. On pose*

$$f^! \mathcal{E}^\bullet = R\varprojlim_i (L f_i^* \mathcal{E}_i^\bullet).$$

Remarque : Si tous les f_i sont plats, $f^! \mathcal{E}^\bullet \simeq R\varprojlim_i (f_i^* \mathcal{E}_i^\bullet)$.

Propriété 1.1.16. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels p -adiques sur $\mathrm{Spf}(V)$. On suppose que pour tout i X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} ainsi que $X_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i$. Alors pour tout $\mathcal{E}^\bullet \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_Y)$ on a $f^! \mathcal{E}^\bullet \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_X)$.*

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on utilise la caractérisation donnée par le théorème 1.1.8 (p.13).

- \mathcal{E}_0 étant quasi-cohérent, il en est de même pour $Lf_0^* \mathcal{E}_0$, du fait qu'il s'agit cette fois de faisceaux sur des variétés classiques.
- Pour montrer que $(\mathcal{E}_i)_i$ est quasi-consistant il faut faire plus attention. En effet, quand on énonce la caractérisation du théorème 1.1.8, on commet un abus de langage en écrivant $\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{O}_{X_i} \simeq \mathcal{E}_i$ car les faisceaux ne sont pas tous sur la même variété. La condition s'écrit plus précisément

$$\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i,*} \mathcal{O}_{Y_i} \simeq \psi_{i,*} \mathcal{E}_i,$$

avec $\psi_i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ donné par le système inductif $(Y_i)_i$. Ce détail nous force à utiliser la formule du changement de base (lemme 1.1.5) et donc à avoir des conditions supplémentaires pour le morphisme f .

Les conditions imposées dans l'énoncé permettent d'utiliser la formule du changement de base dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ X_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & Y_{i+1} \end{array}$$

et permettent de trouver que $\phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{E}_i \simeq Lf_{i+1}^* \psi_{i,*} \mathcal{E}_i$, $\phi_{i,*}$ et $\psi_{i,*}$ étant des immersions fermées.

Ainsi

$$\phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{E}_i \simeq Lf_{i+1}^* (\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i,*} \mathcal{O}_{Y_i}) \simeq Lf_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{O}_{Y_i} \simeq Lf_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i,*} \mathcal{O}_{X_i}.$$

□

Corollaire 1.1.17. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels plats sur $\mathrm{Spf}(V)$. Alors pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ on a $f^! \mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.*

Démonstration. Tout repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.1.18. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels plats sur $\mathrm{Spf}(V)$. Alors pour tout i*

- $X_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i$
- X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} .

Démonstration. • Comme les schémas sont sur $\mathrm{Spf}(V)$, on a les isomorphismes suivants

$$X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} (Y_{i+1} \times_{S_{i+1}} S_i) \simeq X_{i+1} \times_{S_{i+1}} S_i \simeq X_i,$$

où $S_i = \mathrm{Spec}(V/\pi^i V)$ avec π une uniformisante de V .

- On a la suite exacte de V -modules suivante

$$\cdots \xrightarrow{\times \pi^i} V/\pi^{i+1} V \xrightarrow{\times \pi} V/\pi^{i+1} V \xrightarrow{\times \pi^i} V/\pi^{i+1} V \twoheadrightarrow V/\pi^i V \longrightarrow 0.$$

On fixe $x \in \mathcal{X}$ et $y = f(x)$. Par platitude de \mathcal{Y} , en appliquant le foncteur $\cdot \otimes_V \mathcal{O}_{Y,y}$ à la suite exacte précédente on trouve la suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Y_i,y} \longrightarrow 0.$$

Ainsi on vient d'exhiber une résolution projective plate sur $\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}$ de $\mathcal{O}_{Y_i,y}$.

En appliquant le foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}} \mathcal{O}_{X_{i+1},x}$ on trouve un complexe quasi-isomorphe à $\text{Tor}_{\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}}(\mathcal{O}_{Y_i,y}, \mathcal{O}_{X_{i+1},x})$:

$$\dots \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \longrightarrow 0.$$

Comme \mathcal{X} est plat, ce complexe est quasi-isomorphe au complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_i,x} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

qui n'a de cohomologie qu'en degré 0. Ainsi, X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} . □

□

□

On conserve aussi certaines propriétés du pull-back classique.

Propriété 1.1.19. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$.

1. Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$, on a $f^!g^!\mathcal{E} \simeq (f \circ g)^!\mathcal{E}$.
2. Pour tout \mathcal{E} faisceau cohérent sur \mathcal{Y} , $f^!\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur \mathcal{X} .
3. Pour tout \mathcal{E} faisceau inversible sur \mathcal{Y} , $f^!\mathcal{E}$ est un faisceau inversible sur \mathcal{X} .

Démonstration. 1. Par définition, $\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i$. Ainsi :

$$f^!g^!\mathcal{E} = R\varprojlim_i f_i^*g_i^*\mathcal{E}_i \simeq R\varprojlim_i (f_i \circ g_i)^*\mathcal{E}_i = (f \circ g)^!\mathcal{E}.$$

2. On sait que dans ce cas $\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i$ où les $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{E}$ sont cohérents. Ainsi, les $f_i^*\mathcal{E}_i$ sont cohérents aussi, et il en va donc de même pour $f^!\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i f_i^*\mathcal{E}_i$.

3. On fixe un point x dans \mathcal{X} et $y = f(x)$. \mathcal{E} étant inversible, il existe un ouvert U de \mathcal{Y} contenant y et trivialisant \mathcal{E} , et donc $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{E}$ pour tout i . On pose $V = f^{-1}(U)$, de sorte que pour tout i $(f_i^*\mathcal{E}_i)|_V \simeq \mathcal{O}_{X_i|V}$. Ainsi, $f^!\mathcal{E}|_V \simeq \varprojlim_i (f_i^*\mathcal{E}_i)|_V \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}|V}$. □

Remarque : Attention : tous les résultats ne sont pas conservés ! Par exemple il n'est plus vrai que $f^!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \simeq f^!\mathcal{E} \otimes f^!\mathcal{F}$ (sauf si un des deux faisceaux est inversible, par exemple). La raison étant que \otimes ne commute en général pas avec $R\varprojlim$.

On peut aussi construire un analogue à l'image directe sur les schémas formels.

Définition 1.1.20. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels. On pose

$$f_+\mathcal{E} = R\varprojlim_i (Rf_{i,*}\mathcal{E}_i).$$

Contrairement au cas de l'image inverse, cette définition n'apporte en réalité pas grand chose, étant donné la propriété suivante.

Propriété 1.1.21.

$$f_+ \simeq Rf_*.$$

Démonstration. Il s'agit d'un résultat de [Sta21, Lemme 0BKP]. □

Si la plupart des résultats classiques de l'image directe découlent de ce résultat, ce n'est pas le cas de celui-ci :

Propriété 1.1.22. *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels sur $\mathrm{Spf}(V)$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, alors $f_+ \mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$.*

Démonstration. Comme on l'a fait pour l'image inverse, on utilise la caractérisation donnée par le théorème 1.1.8 (p.13).

A nouveau, il est clair que $Rf_{0*} \mathcal{E}_0$ est quasi-cohérent, il faut donc montrer que l'isomorphisme

$$\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i*} \mathcal{O}_{X_i} \simeq \phi_{i*} \mathcal{E}_i$$

induit un isomorphisme

$$Rf_{i+1*} \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i*} \mathcal{O}_{Y_i} \simeq \psi_{i*} Rf_{i*} \mathcal{E}_i.$$

Comme dans le cas de l'image inverse, il s'agit d'utiliser la formule du changement de base dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ X_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & Y_{i+1} \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_{i*} Rf_{i*} \mathcal{E}_i &\simeq Rf_{i+1*} \phi_{i*} \mathcal{E}_i \\ &\simeq Rf_{i+1*} \left(\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i*} \mathcal{O}_{X_i} \right) \\ &\simeq Rf_{i+1*} \left(\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i*} Lf_i^* \mathcal{O}_{Y_i} \right) \\ &\simeq Rf_{i+1*} \left(\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} Lf_{i+1}^* \psi_{i*} \mathcal{O}_{Y_i} \right) \\ &\simeq Rf_{i+1*} \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i*} \mathcal{O}_{Y_i}, \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme provenant de la formule de la projection. □

Pour finir avec les foncteurs agissant sur les faisceaux quasi-cohérents formels, notons aussi le résultat suivant, qui se démontre de la même manière à partir de la caractérisation des faisceaux quasi-cohérents.

Propriété 1.1.23. *Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in D_{\mathrm{qcoh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. On définit le produit tensoriel complété de \mathcal{E} et \mathcal{F} par*

$$\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} = R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i).$$

Alors $\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \in D_{\mathrm{qcoh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

1.2 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas formels

1.2.1 Un résultat de commutativité du produit tensoriel et de la limite projective

De manière générale, le produit tensoriel et la limite projective ne commutent pas. Cependant, on peut tout de même avoir un morphisme en imposant la platitude d'un des deux systèmes projectifs.

Lemme 1.2.1. *Soit $(R_i)_i$ un système projectif d'anneaux (ou de faisceaux d'anneaux) et soit $R = \varprojlim_i R_i$. On fixe $(L_i)_i \in \text{Mod}(R.)$ un système projectif de modules et $L = \varprojlim_i L_i$ (qui est donc un R -module). On fixe aussi $(K_i)_i \in D^-(\text{Mod}(R.))$ et $K = R\varprojlim_i K_i$. On suppose enfin que pour tout i L_i est plat sur R_i et que L est plat sur R .*

Alors on a un morphisme

$$K \otimes_R L \rightarrow R\varprojlim_i (K_i \otimes_{R_i} L_i)$$

dans la catégorie $D^-(\text{Mod}(R))$.

Démonstration. Par définition (ou caractérisation) de \varprojlim (voir dans [Sta21, Lemme 0CQD]), on a le triangle distingué suivant

$$K \rightarrow \prod K_i \rightarrow \prod K_i,$$

où le second morphisme est donné par $\phi : (k_i)_i \mapsto (k_i - f_{i+1}(k_{i+1}))_i$, si on note $f_i : K_i \rightarrow K_{i-1}$ les morphismes du système projectif $(K_i)_i$.

Comme L est plat sur R , le foncteur $\cdot \otimes_R L$ est un δ -foncteur (il est son propre foncteur dérivé) et ainsi on a le triangle distingué suivant

$$K \otimes_R L \rightarrow \left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow \left(\prod K_i \right) \otimes_R L.$$

Or pour tout i on a un morphisme $p_i \otimes q_i : \left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow K_i \otimes_{R_i} L_i$ où p_i est la projection donnée par la propriété universelle du produit et q_i est donné par celle de la limite projective. Ainsi, par propriété universelle du produit, on trouve un morphisme $\left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow \prod (K_i \otimes_{R_i} L_i)$.

De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod K_i \right) \otimes L & \xrightarrow{\phi \otimes id} & \left(\prod K_i \right) \otimes L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod (K_i \otimes L_i) & \xrightarrow{\psi} & \prod (K_i \otimes L_i) \end{array}$$

avec $\psi : (k_i \otimes l_i)_i \mapsto (k_i \otimes l_i - (f_{i+1} \otimes g_{i+1})(k_{i+1} \otimes l_{i+1}))_i$, où les $g_i : L_i \rightarrow L_{i-1}$ sont les morphismes du système $(L_i)_i$.

On trouve alors un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccc} K \otimes L & \longrightarrow & \left(\prod K_i \right) \otimes L & \longrightarrow & \left(\prod K_i \right) \otimes L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\varprojlim_i (K_i \otimes L_i) & \longrightarrow & \prod (K_i \otimes L_i) & \longrightarrow & \prod (K_i \otimes L_i). \end{array}$$

L'existence de ce morphisme de triangles à partir des deux morphismes de complexes de faisceaux est donnée par un axiome de la définition des catégories dérivées (dans [Har66], il est appelé (TR3)).

Le morphisme de complexes en pointillés est le morphisme souhaité. \square

Corollaire 1.2.2. Soient (X_i) un système inductif de variétés sur les S_i et $\mathcal{X} = \varinjlim X_i$ le schéma formel associé. On fixe (\mathcal{L}_i) un système projectif de faisceaux inversibles sur les X_i et $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{L}_i$ tels que \mathcal{L} est inversible sur \mathcal{X} . On fixe aussi (\mathcal{E}_i) un système projectif d'objets de $D^-(\mathcal{O}_{X_i})$ et $\mathcal{E} = R\varprojlim \mathcal{E}_i$.

Alors on a un isomorphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{L} \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{L}_i).$$

Démonstration. La propriété précédente assure qu'on a un morphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{L} \rightarrow R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{L}_i).$$

Il reste alors à montrer que ce morphisme réalise un isomorphisme au voisinage de chaque point x de \mathcal{X} . \mathcal{L} étant inversible, il existe un ouvert U tel que $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_{\mathcal{X}|U}$. Comme $\mathcal{L}_i \simeq \mathcal{L}/\pi^i$, l'ouvert U trivialisait aussi les \mathcal{L}_i . Ainsi, le morphisme se réduit à

$$\mathcal{E}|_U \rightarrow R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i|_U),$$

qui est un isomorphisme (voir par exemple [Sta21, Section 009E]). □

1.2.2 La construction de la variété duale commute au changement de base

On fixe une variété abélienne A sur S et on note A^\vee la variété abélienne duale de A .

Propriété 1.2.3. Soit T un S -schéma. On pose $A' = A \times_S T$.

Alors $A'^\vee \simeq A^\vee \times_S T$.

Démonstration. Par définition, la variété duale X^\vee représente le foncteur $\text{Pic}^0(X \times \bullet/\bullet)$. Ainsi, pour tout T -schéma T' ,

$$\text{Pic}^0(A' \times_T T'/T') \simeq \text{Hom}_{T\text{-sch}}(T', A'^\vee).$$

Or

$$\text{Pic}^0(A' \times_T T'/T') \simeq \text{Pic}^0(A \times_S T'/T')$$

et, par définition,

$$\text{Pic}^0(A \times_S T'/T') \simeq \text{Hom}_{S\text{-sch}}(T', A^\vee).$$

Lemme 1.2.4.

$$\text{Hom}_{S\text{-sch}}(T', A^\vee) \simeq \text{Hom}_{T\text{-sch}}(T', A^\vee \times_S T).$$

Démonstration. Le résultat découle de la propriété universelle du produit $A^\vee \times_S T$:

$$\begin{array}{ccc}
 T' & & \\
 \swarrow & \dashrightarrow & \\
 & A^\vee \times_S T & \longrightarrow & A^\vee \\
 \downarrow & & & \downarrow \\
 T & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

Fixer l'un des deux morphismes en pointillés est équivalent à fixer l'autre. □

En combinant ces isomorphismes on trouve alors que

$$\mathrm{Hom}_{T\text{-sch}}(T', A'^{\vee}) \simeq \mathrm{Hom}_{T\text{-sch}}(T', A^{\vee} \times_S T)$$

pour tout T -schéma T' . Ainsi, on en déduit par le lemme de Yoneda que $A'^{\vee} \simeq A^{\vee} \times_S T$. \square

Corollaire 1.2.5. *Notons $\alpha_i : A_i \times_{S_i} A_i^{\vee} \hookrightarrow A_{i+1} \times_{S_{i+1}} A_{i+1}^{\vee}$ l'immersion fermée canonique. Si \mathcal{P}_i désigne le faisceau de Poincaré associé à A_i , alors $\mathcal{P}_i \simeq \alpha_i^* \mathcal{P}_{i+1}$.*

1.2.3 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas formels

A partir de maintenant on considère V un anneau à valuation discrète d'inégale caractéristique $(0, p)$ ($p > 0$) d'uniformisante π . On note $S = \mathrm{Spec}(V)$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $V_i = V/\pi^i V$ et $S_i = \mathrm{Spec}(V_i)$. On fixe (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur les V_i .

On va s'intéresser à la variété formelle $\mathcal{A} = \varinjlim_i A_i$ sur $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}(V)$.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Propriété 1.2.6. *La famille $(A_i^{\vee})_i$ est un système inductif.*

Définition 1.2.7. *On définit la variété duale de \mathcal{A} par $\mathcal{A}^{\vee} = \varinjlim_i A_i^{\vee}$.*

Propriété 1.2.8. *La famille $(\mathcal{P}_i)_i$ des faisceaux de Poincaré associés aux variétés A_i est un système projectif.*

Définition 1.2.9. *On définit le faisceau de Poincaré associé à \mathcal{A} comme $\mathcal{P} = \varprojlim_i \mathcal{P}_i$, qui est donc un faisceau cohérent (et même inversible) sur $\mathcal{A} \times_S \mathcal{A}^{\vee}$.*

Cas des faisceaux cohérents

On va dans un premier temps construire la transformée de Fourier-Mukai formelle sur les faisceaux cohérents. Cette décision est motivée par le fait qu'un faisceau cohérent sur \mathcal{A} est isomorphe à la limite projective de ses réductions sur les A_i .

Définition 1.2.10. *On note $p : \mathcal{A} \times_S \mathcal{A}^{\vee} \rightarrow \mathcal{A}$ et $p^{\vee} : \mathcal{A} \times_S \mathcal{A}^{\vee} \rightarrow \mathcal{A}^{\vee}$ les deux projections canoniques.*

Pour tout faisceau cohérent \mathcal{E} sur \mathcal{A} , on définit la transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{E} par

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = R p_*^{\vee} (L p^* \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times_S \mathcal{A}^{\vee}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{P}) \in D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}}).$$

Remarques :

- p est plat, donc $L p^* = p^*$.
- $\otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P} = \otimes \mathcal{P}$ (car \mathcal{P} est inversible donc plat).
- Comme \mathcal{E} est cohérent, il est π -adiquement complet et

$$\mathcal{E} \simeq R \varprojlim_i \mathcal{E}_i \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i,$$

où $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}/\pi^i \mathcal{E}$.

Lemme 1.2.11. *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\varprojlim_i (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i) \simeq p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P},$$

où $p_i : A_i \times_S A_i^\vee \rightarrow A_i$ est la projection canonique.

Démonstration. $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$ est cohérent, donc $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \simeq \varprojlim_i (p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} /_{\pi^i})$.

De plus, $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} /_{\pi^i} \simeq p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i$. □

Propriété 1.2.12. Rp_*^\vee commute avec $R\varprojlim$.

En particulier,

$$Rp_*^\vee \varprojlim_i (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i) \simeq R\varprojlim_i Rp_{i,*}^\vee (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i).$$

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 0BKP]. □

Propriété 1.2.13. *Pour tout faisceau cohérent \mathcal{E} sur \mathcal{A} ,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

où \mathcal{F}_i désigne la transformée de Fourier-Mukai sur A_i .

Démonstration. Il suffit de mettre tous les résultats précédents bout à bout. □

Cas des faisceaux quasi-cohérents

Pour les faisceaux quasi-cohérent, on va utiliser les foncteurs image inverse et image directe formels construits dans la partie précédente. On définit la transformée de Fourier-Mukai formelle de la façon suivante.

Définition 1.2.14. *Soit $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$. On définit la transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{E} par*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = p_+^\vee (p^! \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P}).$$

On définit symétriquement \mathcal{F}^\vee pour les objets de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\vee})$.

Avant de poursuivre, remarquons le résultat suivant, induit par la définition du foncteur image inverse sur les schémas formels.

Propriété 1.2.15. *Soient $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$, $p : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\vee \rightarrow \mathcal{A}$ et pour tout i , $p_i : A_i \times A_i^\vee \rightarrow A_i$. Dans ce cas,*

$$p^! \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P} \simeq R\varprojlim_i (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P}_i).$$

Démonstration. On sait que \mathcal{P} est inversible et par définition, $p^! \mathcal{E} = R\varprojlim_i p_i^* \mathcal{E}_i$. Ainsi, on peut appliquer le corollaire 1.2.2 (p.24). □

Ce résultat permet de montrer que la transformée de Fourier-Mukai définie plus haut commute à la limite projective.

Corollaire 1.2.16. *Pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_{\leftarrow i} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

où \mathcal{F}_i est la transformée de Fourier-Mukai sur A_i .

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat précédent et la propriété 1.1.21 (p.21). \square

Grâce à ce résultat, on peut déduire les propriétés importantes de la transformée de Fourier-Mukai formelle à partir de celles déjà connues sur la transformée de Fourier-Mukai classique.

Propriété 1.2.17. *Pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$.*

Démonstration. On va utiliser le corollaire précédent et montrer que le système $(\mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i))_i$ est dans $\widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_A)$ en utilisant la caractérisation du théorème 1.1.8 (p.13).

On sait déjà par construction de \mathcal{F}_0 que $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}_0) \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_0})$. Il reste alors à montrer que pour tout i

$$\mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}} \mathcal{O}_{A_i^\vee} \simeq \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i).$$

Plus précisément, avec les notations du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xleftarrow{p_i} & A_i \times A_i^\vee & \xrightarrow{p_i^\vee} & A_i^\vee \\ \downarrow \beta_i & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i^\vee \\ A_{i+1} & \xleftarrow{p_{i+1}} & A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee & \xrightarrow{p_{i+1}^\vee} & A_{i+1}^\vee \end{array}$$

il faut montrer que

$$\mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{O}_{A_i^\vee} \simeq \beta_{i,*}^\vee \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

en sachant que

$$\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i} \simeq \beta_{i,*} \mathcal{E}_i.$$

Remarquons aussi que comme β_i est une injection fermée le foncteur $\beta_{i,*}$ est exact et est donc son propre foncteur dérivé. Pour montrer l'isomorphisme ci-dessus on va s'appuyer sur le lemme suivant qui est une conséquence directe du lemme 1.1.5 (p.13) car p_{i+1} est plat.

Lemme 1.2.18. *Pour tout $\mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_i})$, $p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i \simeq \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{E}_i$.*

Grâce à ce lemme et à la formule de la projection (lemme 1.1.4 en page 13), on trouve

$$\begin{aligned} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq \beta_{i,*}^\vee R p_{i,*}^\vee (\mathcal{P}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}} p_i^* \mathcal{E}_i) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\alpha_{i,*} (\alpha_i^* \mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}} p_i^* \mathcal{E}_i)) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} R \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{E}_i) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i). \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse :

$$\begin{aligned}
\beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^*(\mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i})) \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}) \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{O}_{A_i}) \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} \alpha_{i,*} \mathcal{O}_{A_i \times A_i^{\vee}}).
\end{aligned}$$

D'un autre côté, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^{\vee}}} \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{O}_{A_i^{\vee}} &\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^{\vee}}} \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{O}_{A_i^{\vee}} \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{O}_{A_i^{\vee}}) \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{O}_{A_i^{\vee}}) \\
&\simeq R p_{i+1,*}^{\vee}(\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^{\vee}}} \alpha_{i,*} \mathcal{O}_{A_i \times A_i^{\vee}}).
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^{\vee}}} \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{O}_{A_i^{\vee}}.$$

□

Propriété 1.2.19. *Pour tout $\mathcal{E} \in D_{coh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \in D_{coh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}})$.*

Démonstration. Comme tout faisceau cohérent sur \mathcal{A} est π -adiquement complet, $\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i$, où les \mathcal{E}_i sont cohérents. Ainsi,

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq R \varprojlim_i \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

avec $\mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i)$ cohérent pour tout i . Dans ce cas, la limite projective est donc acyclique et

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq \varprojlim_i \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) \in D_{coh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}}).$$

□

Propriété 1.2.20. $\mathcal{F} : D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}) \rightarrow D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}})$ réalise une équivalence de catégorie de quasi-inverse

$$\mathcal{G} = \langle -1 \rangle^! \mathcal{F}^{\vee}(\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \pi^! \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}[g],$$

où :

- $\langle -1 \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est le morphisme d'inversion.
- $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ est le morphisme structural.
- $\epsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ est le morphisme neutre.
- g est la dimension relative de \mathcal{A} (et donc des A_i).
- $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{S}} = \varprojlim_i \omega_{A_i/S_i}$ avec $\omega_{A_i/S_i} = \pi_{i,*} \Omega_{A_i/S_i}^g \simeq \epsilon_i^* \Omega_{A_i/S_i}^g$.

Démonstration. Pour tout i on note

$$\mathcal{G}_i = \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{F}_i^\vee(\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i} [g].$$

On sait que \mathcal{F}_i et \mathcal{G}_i réalisent une équivalence de catégorie entre $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_i})$ et $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_i^\vee})$ (voir par exemple [Lau96]). Pour montrer qu'ils induisent une équivalence de catégorie entre $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$ et $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$ il suffit de vérifier que si $(\mathcal{E}_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})}$ alors $(\mathcal{G}_i(\mathcal{E}_i))_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)}$. Pour ce faire, il suffit de le montrer pour $\tilde{\mathcal{G}}_i$ défini par

$$\tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) = \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i},$$

pour tout $(\mathcal{E}_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)}$.

On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} S_i & \xrightleftharpoons[\pi_i]{\epsilon_i} & A_i & \xleftarrow{\langle -1 \rangle_i} & A_i \\ \downarrow \iota_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \beta_i \\ S_{i+1} & \xrightleftharpoons[\pi_{i+1}]{\epsilon_{i+1}} & A_{i+1} & \xleftarrow{\langle -1 \rangle_{i+1}} & A_{i+1} \end{array}$$

Dans un premier temps, remarquons que

$$\iota_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} = \iota_i^* \epsilon_{i+1}^* \Omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}^g \simeq \epsilon_i^* \beta_i^* \Omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}^g \simeq \epsilon_i^* \Omega_{A_i/S_i}^g = \omega_{A_i/S_i}.$$

Ainsi, on trouve grâce à la formule de la projection (lemme 1.1.4, p.13)

$$\begin{aligned} \beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) &= \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \iota_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \beta_i^* \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}. \end{aligned}$$

Pour continuer il faut appliquer un changement de base (lemme 1.1.5). On peut le faire car le morphisme $\langle -1 \rangle_i$ est un isomorphisme et est donc plat. On trouve alors que $\beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* (\beta_{i,*} \mathcal{E}_i) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \\ &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* (\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \\ &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{O}_{A_i} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}, \end{aligned}$$

en appliquant à nouveau le changement de base. Enfin, comme $\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{O}_{A_i} \simeq \mathcal{O}_{A_i}$, on trouve

$$\beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \tilde{\mathcal{G}}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}.$$

On en conclut alors que le foncteur $(\mathcal{G}_i)_i$ est bien un foncteur de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$ dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$ et qu'il induit ainsi une équivalence de catégorie de quasi-inverse $(\mathcal{F}_i)_i$ (car pour chaque i , \mathcal{G}_i en induit une de quasi-inverse \mathcal{F}_i). Ainsi, \mathcal{F} réalise bien une équivalence de catégorie.

Il reste maintenant à expliciter le quasi-inverse de \mathcal{F} . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \mathcal{F} & & & \\
& & & \curvearrowright & & & \\
D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A) & \xrightarrow{LS} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A) & \xrightarrow{(\mathcal{F}_i)_i} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}) & \xrightarrow{R\varprojlim} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}) \\
& \xleftarrow{R\varprojlim} & & \xleftarrow{(\mathcal{G}_i)_i} & & \xleftarrow{LS} & \\
& & & \mathcal{G} & & & \\
& & & \curvearrowleft & & &
\end{array}$$

Il faut donc montrer que la composition $R\varprojlim (\mathcal{G}_i)_i \circ LS$ est bien le foncteur \mathcal{G} .

On a vu plus haut qu'on a un isomorphisme canonique

$$l_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \simeq \omega_{A_i/S_i}.$$

Ainsi, si on note e_i la section de ω_{A_i/S_i} telle que $\omega_{A_i/S_i} \simeq \mathcal{O}_{S_i} e_i$, on sait que l'image de e_{i+1} par le morphisme canonique est e_i , donc $\omega_{A/S}$ est inversible. Il en est donc de même pour $\pi^! \omega_{A/S}$.

Soit à présent $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$. Par le corollaire 1.2.16 (p.27) on peut écrire

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i (\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{F}_i^\vee(\mathcal{E}_i)) \otimes_{\mathcal{O}_A} \varprojlim_i \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}[-g].$$

On peut alors appliquer le corollaire 1.2.2 (p.24) :

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{G}_i(\mathcal{E}_i)).$$

Ceci finit de prouver que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont quasi-inverse. □

Remarque : Dans notre cas, les faisceaux ω_{A_i/S_i} et $\omega_{A/S}$ sont libres de rang 1.

Théorème 1.2.21. *On a les formules d'involativité suivantes :*

$$\forall \mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A), \mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq \langle -1 \rangle^! \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_A} \pi^! \omega_{A/S}^{-1}[-g],$$

$$\forall \mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}), \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\vee(\mathcal{E}) \simeq \langle -1 \rangle^{!} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{A^\vee}} \pi^{!} \omega_{A/S}^{-1}[-g].$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$. Le corollaire 1.2.16 (p.27) donne l'isomorphisme suivant

$$\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i^\vee \circ \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i).$$

Or sur A_i on a la formule d'involativité

$$\mathcal{F}_i^\vee \circ \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1}[-g].$$

Pour montrer le résultat il suffit alors de prouver l'isomorphisme

$$R\varprojlim_i \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1}[-g] \right) \simeq \left(R\varprojlim_i \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \right) \otimes_{\mathcal{O}_A} \left(\varprojlim_i \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1} \right) [-g].$$

A nouveau, on applique le corollaire 1.2.2 (p.24) pour conclure. □

1.3 Cas des faisceaux cohérents sur une variété analytique rigide avec bonne réduction

Dans cette partie, on considère $K = \text{Frac}(V)$ le corps des fractions de V . On se fixe \mathcal{X} une variété abélienne formelle sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$ et on note \mathcal{X}_K sa fibre générique (qui est donc une variété analytique rigide sur K) et $sp : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation.

On rappelle le résultat suivant, tiré de [Ber96a] (résultats 0.2.3.3 et 0.2.3.4)

Lemme 1.3.1.

$$sp_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_V K$$

et pour tout ouvert quasi-compact \mathcal{U} de \mathcal{X} ,

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_V K \simeq \Gamma(\mathcal{U}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}),$$

avec $\mathcal{U}_K = sp^{-1}\mathcal{U}$.

On muni \mathcal{X}_K d'une structure de variété abélienne de la façon suivante :
Comme \mathcal{X} est une variété abélienne, on a les morphismes

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}},$$

qui correspondent respectivement à la multiplication, l'inverse et l'élément neutre. En les tensorisant par K et en appliquant le foncteur sp^* , on obtient la multiplication, l'inverse et l'élément neutre sur \mathcal{X}_K .

Remarque : Par construction, les morphismes m_K , $\langle -1 \rangle_K$ et ϵ_K de multiplication, inverse et élément neutre sur \mathcal{X}_K commutent à la spécialisation. On renvoie à [Ber96a], proposition 0.2.3 pour plus de détails.

En particulier, $\langle -1 \rangle \circ sp = sp \circ \langle -1 \rangle_K$.

1.3.1 Quelques propriétés du morphisme de spécialisation

Avant de construire la transformée de Fourier-Mukai sur les variétés analytiques rigides avec bonne réduction, il faut comprendre un peu mieux le morphisme $sp : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$.

Lemme 1.3.2.

1. Si E est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent, alors $sp_* E$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -cohérent.
2. Si \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -module cohérent, alors $sp^* \mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -cohérent.

Démonstration. Comme la cohérence se vérifie localement, on peut supposer que $\mathcal{X} = \text{Spf}(A)$ et $\mathcal{X}_K = \text{Spm}(A_K)$. Dans ce cas, un théorème de Kiehl (voir par exemple [Bos14], Théorème 4 de la partie 6.1) assure que pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{X}

$$sp_* E(\mathcal{U}) = \Gamma(\mathcal{U}_K, E) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}(\mathcal{U}_K) \otimes_{A_K} \Gamma(\mathcal{X}_K, E).$$

Or le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}} \otimes_{A_K} \Gamma(\mathcal{X}_K, E)$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -cohérent et

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}} \otimes_{A_K} \Gamma(\mathcal{X}_K, E)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}(\mathcal{U}) \otimes_{A_K} \Gamma(\mathcal{X}_K, E) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}(\mathcal{U}_K) \otimes_{A_K} \Gamma(\mathcal{X}_K, E) = sp_* E(\mathcal{U}).$$

Donc $sp_* E$ est bien $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -cohérent.

Pour ce qui est de $sp^* \mathcal{E}$, le résultat est une conséquence du fait que $sp^* = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K} \otimes_{sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}} sp^{-1}$.
est exact à droite. □

Propriété 1.3.3. *Les foncteurs $sp_* : \text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \rightarrow \text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ et $sp^* : \text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ sont exacts.*

Démonstration. On sait déjà que $sp^* = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K} \otimes_{sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} sp^{-1}$ est exact à droite. Or, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}(\mathcal{U}_K)$ est plat sur $A_K = \Gamma(\mathcal{X}_K, sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = \Gamma(\mathcal{X}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, sp^* est exact.

Pour sp_* , on calcule $R^i sp_*(\mathcal{U}, E) = H^i(\mathcal{U}_K, E)$ pour E un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent et \mathcal{U} un ouvert affine. Or, dans ce cas, le théorème de Tate dit que $H^i(\mathcal{U}_K, E) = 0$ pour $i > 0$. Donc E est acyclique pour sp_* , i.e. sp_* est exact. □

Propriété 1.3.4. *sp_* et sp^* réalisent des équivalences quasi-inverses de catégories entre $\text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ et $\text{Coh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. On a les morphismes canoniques $\mathcal{E} \rightarrow sp_* sp^* \mathcal{E}$ et $sp^* sp_* E \rightarrow E$. Il suffit de montrer que ces morphismes sont des isomorphismes pour \mathcal{E} et E cohérents.

Comme \mathcal{E} est cohérent, il existe une résolution

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^a \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^b \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Comme sp_* et sp^* sont exacts, on a la résolution

$$sp_* sp^* \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^a \rightarrow sp_* sp^* \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^b \rightarrow sp_* sp^* \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \simeq sp_* sp^* \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, on trouve que $sp_* sp^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$.

Le second isomorphisme fonctionne exactement pareil. □

1.3.2 Dual de la fibre générique

Comme \mathcal{X}_K est une variété abélienne, elle admet une variété abélienne duale, notée $(\mathcal{X}_K)^\vee$. On peut relier $(\mathcal{X}_K)^\vee$ à \mathcal{X}^\vee (la variété abélienne duale de \mathcal{X}) grâce au résultat suivant, tiré de [Lüt16] (Théorème 6.1.1).

Propriété 1.3.5.

$$(\mathcal{X}_K)^\vee \simeq (\mathcal{X}^\vee)_K.$$

On notera donc cette variété \mathcal{X}_K^\vee dans la suite. De même, on dispose d'un morphisme de spécialisation $sp^\vee : \mathcal{X}_K^\vee \rightarrow \mathcal{X}^\vee$. On peut alors construire le morphisme $\tilde{sp} = sp \times sp^\vee : \mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}^\vee$. On peut alors compléter la propriété précédente.

Propriété 1.3.6. *Le faisceau de Poincaré \mathcal{P}_K sur $\mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{sp}^* \mathcal{P}$, où \mathcal{P} est le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^\vee$.*

Remarquons aussi le fait suivant.

Propriété 1.3.7. *\tilde{sp} est le morphisme de spécialisation de $\mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee$.*

Démonstration. On renvoie à [Ber96a], résultat 0.2.4 (iv). □

1.3.3 Transformée de Fourier-Mukai rigide sur les faisceaux cohérents

On a maintenant tous les outils nécessaires pour définir une transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{X}_K .

Définition 1.3.8. *Pour tout $E \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, on définit la transformée de Fourier-Mukai de E , notée $\mathcal{F}_K(E)$, par*

$$\mathcal{F}_K(E) = Rq_*^\vee(\mathcal{P}_K \otimes q^*E).$$

De même, pour tout $F \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^\vee})$, on définit la transformée de Fourier-Mukai duale de F , notée $\mathcal{F}_K^\vee(F)$, par

$$\mathcal{F}_K^\vee(F) = Rq_*(\mathcal{P}_K \otimes q^{\vee*}F).$$

Avec cette définition, on peut exprimer \mathcal{F}_K en fonction de \mathcal{F} , la transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{X} .

Propriété 1.3.9. *On a l'isomorphisme de foncteurs de $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ dans $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\vee, \mathbb{Q}})$,*

$$sp_*^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq \mathcal{F} \circ sp_*.$$

De même, on a l'isomorphisme de foncteurs de $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^\vee})$ dans $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}})$,

$$sp_* \circ \mathcal{F}_K^\vee \simeq \mathcal{F}^\vee \circ sp_*^\vee.$$

Démonstration. On rappelle que dans le cas des faisceaux cohérents, les foncteurs $p^!$ et p_+ définis dans la partie précédente pour les schémas formels sont exactement les foncteurs p^* et Rp_* .

On s'appuie sur le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_K & \xleftarrow{q} & \mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee & \xrightarrow{q^\vee} & \mathcal{X}_K^\vee \\ \downarrow sp & & \downarrow \tilde{sp} & & \downarrow sp^\vee \\ \mathcal{X} & \xleftarrow{p} & \mathcal{X} \times \mathcal{X}^\vee & \xrightarrow{p^\vee} & \mathcal{X}^\vee \end{array}$$

On ne montrera que le premier isomorphisme, l'autre se montrant exactement de la même manière. Soit $E \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. Par définition,

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) = sp_*^\vee Rq_*^\vee(\mathcal{P}_K \otimes q^*E).$$

Comme $sp_*^\vee \circ q^\vee = p^\vee \circ \tilde{sp}$, on a $sp_*^\vee \circ q_*^\vee \simeq p_*^\vee \circ \tilde{sp}_*$. Comme sp_*^\vee et \tilde{sp}_* sont exacts, on trouve l'isomorphisme de foncteurs dérivés $sp_*^\vee \circ Rq_*^\vee \simeq Rp_*^\vee \circ \tilde{sp}_*$.

On en déduit donc

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) \simeq Rp_*^\vee \tilde{sp}_*(\mathcal{P}_K \otimes q^*E).$$

Ensuite, on montre que pour $F \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee})$, $\tilde{sp}_*(F \otimes \mathcal{P}_K) \simeq \tilde{sp}_*F \otimes \mathcal{P}$.

En fait, comme \tilde{sp}_* est exact, que F est cohérent et que les faisceaux de Poincaré sont inversibles et donc plats, il suffit de trouver un morphisme entre $\tilde{sp}_*(F \otimes \mathcal{P}_K)$ et $\tilde{sp}_*F \otimes \mathcal{P}$, puis montrer l'isomorphisme pour $F = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee}$.

Le morphisme se trouve en appliquant le morphisme d'adjonction $\mathcal{E} \rightarrow \tilde{sp}_* \tilde{sp}^* \mathcal{E}$ au faisceau $\tilde{sp}_*F \otimes \mathcal{P}$. On trouve alors un morphisme

$$\tilde{sp}_*F \otimes \mathcal{P} \rightarrow \tilde{sp}_*(\tilde{sp}^* \tilde{sp}_*F \otimes \mathcal{P}_K),$$

car $\mathcal{P}_K = \tilde{sp}^* \mathcal{P}$. En utilisant l'autre morphisme d'adjonction, on trouve un morphisme

$$\tilde{sp}_*(\tilde{sp}^* \tilde{sp}_* F^\cdot \otimes \mathcal{P}_K) \rightarrow \tilde{sp}_*(F^\cdot \otimes \mathcal{P}_K).$$

La composée de ces deux morphismes donne le morphisme voulu. Dans le cas où $F^\cdot = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K \times \mathcal{X}_K^\vee}$, l'isomorphisme est immédiat.

On trouve alors

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E^\cdot) \simeq Rp_*^\vee(\mathcal{P} \otimes \tilde{sp}_* q^* E^\cdot).$$

Il suffit alors de montrer que $\tilde{sp}_* q^* E^\cdot \simeq p^* sp_* E^\cdot$. A nouveau, comme tous les foncteurs sont exacts et que E^\cdot est cohérent, il suffit de trouver un morphisme entre ces deux faisceaux et de montrer l'isomorphisme dans le cas où $E^\cdot = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$.

De la même manière que précédemment on a retrouvé le morphisme utilisé pour montrer la formule de la projection sur les \mathcal{O} -modules, ici, en usant des morphismes d'adjonction, on retrouve le morphisme utilisé pour montrer le théorème du changement de base (voir par exemple [Sta21, Remarque 08HY]). Dans le cas où $E^\cdot = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$, l'isomorphisme est immédiat

On conclut que

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E^\cdot) \simeq Rp_*^\vee(\mathcal{P} \otimes p^* sp_* E^\cdot) = \mathcal{F}(sp_* E^\cdot).$$

□

Théorème 1.3.10. *Les foncteurs \mathcal{F}_K et \mathcal{F}_K^\vee réalisent une équivalence de catégorie entre $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ et $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^\vee})$. De plus, on a les formules d'involutivité suivantes*

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq \langle -1 \rangle_K^* \cdot \otimes \pi_K^* \omega_{\mathcal{X}_K}^{-1}[-g],$$

$$\mathcal{F}_K \circ \mathcal{F}_K^\vee \simeq \langle -1 \rangle_K^{\vee*} \cdot \otimes \pi_K^{\vee*} \omega_{\mathcal{X}_K}^{-1}[-g].$$

Où $\langle -1 \rangle_K$ et $\langle -1 \rangle_K^\vee$ sont les morphismes d'inversion sur \mathcal{X}_K et \mathcal{X}_K^\vee respectivement, g est la dimension de \mathcal{X}_K , π_K et π_K^\vee les morphismes structuraux de \mathcal{X}_K et \mathcal{X}_K^\vee et $\omega_{\mathcal{X}_K} = \pi_{K*} \Omega_{\mathcal{X}_K/K}^g \simeq \epsilon_K^* \Omega_{\mathcal{X}_K/K}^g$, en notant ϵ_K l'élément neutre de \mathcal{X}_K .

Démonstration. Avec les isomorphismes de la propriété précédente, on peut écrire

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq sp^* \circ (\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}) \circ sp_*.$$

Le théorème 1.2.21 (p.30) permet d'écrire

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq sp^* \circ (\langle -1 \rangle^* \cdot \otimes \pi^* \omega_{\mathcal{X}}^{-1}[-g]) \circ sp_*,$$

où $\langle -1 \rangle$ est le morphisme d'inversion de \mathcal{X} , π son morphisme structural, g sa dimension et $\omega_{\mathcal{X}} = \pi^* \Omega_{\mathcal{X}/V}^g \simeq \epsilon^* \Omega_{\mathcal{X}/V}^g$, en notant ϵ l'élément neutre de \mathcal{X} .

Or g est aussi la dimension de \mathcal{X}_K , $sp^* \circ \langle -1 \rangle^* \circ sp_* \simeq \langle -1 \rangle_K^*$ (voir la remarque en page 31) et $sp^* \pi^* \omega_{\mathcal{X}}^{-1} \simeq \pi_K^* \omega_{\mathcal{X}_K}^{-1}$ (car ω commute au changement de base).

Ainsi, on trouve le résultat attendu. A nouveau, l'autre isomorphisme se prouve de la même manière.

□

Chapitre 2

Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules sur une variété abélienne

Dans ce chapitre, on va construire la transformée de Fourier-Mukai sur les \mathcal{D} -modules sur une variété abélienne classique. Pour ce faire, on va avoir besoin d'une théorie des \mathcal{D} -modules relatifs, étant donné que l'analogie du faisceau de Poincaré pour les \mathcal{D} -modules sera un module à connexion intégrable sur un S -schéma produit $A \times A^\natural$ mais dont les constantes seront les fonctions sur A^\natural . Une fois ces \mathcal{D} -modules relatifs introduits, on construira les analogues pour les \mathcal{D} -modules de la variété abélienne duale, du faisceau de Poincaré, ainsi que de la transformée de Fourier-Mukai.

Pour tout le chapitre on fixe S un schéma localement noethérien de caractéristique nulle.

2.1 \mathcal{D} -modules relatifs

2.1.1 Définitions

Dans cette section on considère X, Y_1 et Y_2 trois schémas lisses sur S . On fixe aussi T un schéma localement noethérien de caractéristique nulle.

On rappelle la définition des modules d'opérateurs différentiels donnée dans [HTT08].

Définition 2.1.1. *Pour tout T -schéma Z , on définit le faisceau $\mathcal{D}_{Z/T}$ comme le faisceau des opérateurs différentiels de \mathcal{O}_Z dans \mathcal{O}_Z .*

Ainsi, le faisceau $\mathcal{D}_{X \times Y_i/S}$ est le faisceau des opérateurs différentiels de $\mathcal{O}_{X \times Y_i}$ dans lui-même où $X \times Y_i$ est vu comme un S -schéma ; il s'agit du faisceau classiquement noté $\mathcal{D}_{X \times Y_i}$. Le faisceau $\mathcal{D}_{X \times Y_i/Y_i}$ est le faisceau des opérateurs différentiels de $\mathcal{O}_{X \times Y_i}$ dans lui-même où $X \times Y_i$ est vu comme un Y_i -schéma ; on parlera alors de faisceau d'opérateurs différentiels relatif à Y_i .

On peut voir le faisceau $\mathcal{D}_{Z/T}$ comme le faisceau des dérivations dont les sections de \mathcal{O}_T sont les constantes. Ainsi, le passage de $\mathcal{D}_{X \times Y_i/S}$ à $\mathcal{D}_{X \times Y_i/Y_i}$ peut être vu comme une extension des constantes des sections de \mathcal{O}_S aux sections de \mathcal{O}_{Y_i} .

On rappelle aussi les définitions classiques des foncteurs image inverse et image directe :

Définition 2.1.2. *Soit $f : Z \rightarrow Z'$ un morphisme de T -schémas.*

On définit le module de transfert $\mathcal{D}_{Z \rightarrow Z'/T}$ (ou $\mathcal{D}_{Z \rightarrow Z'}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible) par

$$\mathcal{D}_{Z \rightarrow Z'/T} = f^* \mathcal{D}_{Z'/T} = \mathcal{O}_Z \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_{Z'}} f^{-1} \mathcal{D}_{Z'/T},$$

qu'on peut munir d'une structure de $(\mathcal{D}_{Z/T}, f^{-1} \mathcal{D}_{Z'/T})$ -bimodule.

On note $f_{/T}^b$ (ou f^b lorsqu'aucune confusion n'est possible) le foncteur sur les catégories dérivées défini par

$$f_{/T}^b \mathcal{E} = \mathcal{D}_{Z \rightarrow Z'/T} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{Z'/T}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{E}.$$

On précisera plus bas les catégories de départ et d'arrivée des foncteurs définis ici.

On définit le foncteur image inverse $f_{/T}^!$ (ou $f^!$ lorsqu'aucune confusion n'est possible) par

$$f_{/T}^! \mathcal{E} = f^b \mathcal{E} [\dim_T(Z) - \dim_T(Z')].$$

On définit le module de transfert $\mathcal{D}_{Z' \leftarrow Z/T}$ (ou $\mathcal{D}_{Z' \leftarrow Z}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible) par

$$\mathcal{D}_{Z' \leftarrow Z/T} = \omega_{Z/T} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_{Z \rightarrow Z'/T} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{Z'}} f^{-1} \omega_{Z'/T}^{\otimes -1},$$

où $\omega_{Z/T}$ (resp. $\omega_{Z'/T}$) désigne le faisceau canonique de Z (resp. Z') vue comme une variété sur T . Ce faisceau possède une structure de $(f^{-1}\mathcal{D}_{Z'/T}, \mathcal{D}_{Z/T})$ -bimodule.

On définit enfin le foncteur image directe $f_{+/T}$ (ou f_+ lorsqu'aucune confusion n'est possible) par

$$f_{+/T}(\mathcal{E}) = Rf_*(\mathcal{D}_{Z' \leftarrow Z/T} \otimes_{\mathcal{D}_{Z'/T}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}).$$

Pour plus de détails sur ces constructions, on renvoie à [HTT08], chapitres 1.3 et 1.5. On y trouve aussi les résultats synthétisés dans la propriété suivante.

Propriété 2.1.3. Soit $f : Z \rightarrow Z'$ un morphisme de T -schémas. Alors

$$f_{/T}^b : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z'/T}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z/T}),$$

$$f_{/T}^! : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z'/T}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z/T})$$

et

$$f_{+/T} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z/T}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z'/T}).$$

Remarque : Comme $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ est un sous-anneau de $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$, tout $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -module possède une structure de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -module. On peut donc construire un foncteur oubli

$$Res_X : D(\mathcal{D}_{X \times Y/S}) \rightarrow D(\mathcal{D}_{X \times Y/Y})$$

qui conserve seulement l'information de l'action des dérivations par rapport à X sur le $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -module. Ainsi, pour $f = g \times id_Y : X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y$ et $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S})$, on peut définir $f_{/Y}^b(\mathcal{E})$ comme étant $f_{/Y}^b(Res_{X_2}(\mathcal{E}))$. On définit de la même manière $f_{/Y}^!(\mathcal{E})$ et $f_{+/Y}(\mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S})$.

Notons aussi que le foncteur oubli Res_X préserve la quasi-cohérence.

Propriété 2.1.4. Soient X_1, X_2 et Y trois S -schémas et $f = g \times id_Y : X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y$ un morphisme de S -schémas. On note

- Pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S})$, $Res_{X_1}(f_{/S}^b(\mathcal{E})) \simeq f_{/Y}^b(Res_{X_2}(\mathcal{E}))$ en tant que $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -module.
- Pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S})$, $Res_{X_1}(f_{/S}^!(\mathcal{E})) \simeq f_{/Y}^!(Res_{X_2}(\mathcal{E}))$ en tant que $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -module.
- Pour tout $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S})$, $Res_{X_2}(f_{+/S}(\mathcal{F})) \simeq f_{+/Y}(Res_{X_1}(\mathcal{F}))$ en tant que $\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -module.

Démonstration. • A gauche, on a

$$f_{/S}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S}} f^{-1}\mathcal{E}.$$

A droite, on a

$$f_{/Y}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}} f^{-1}\mathcal{E}.$$

Or on a les isomorphismes canoniques $\mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S} \simeq f^*\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S}$ et $\mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} \simeq f^*\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$. Ainsi, du point de vue des $\mathcal{O}_{X_1 \times Y}$ -modules, les faisceaux $f_{/S}^b(\mathcal{E})$ et $f_{/Y}^b(\mathcal{E})$ sont isomorphes à $Lf^*\mathcal{E}$.

Pour ce qui est des structures de $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -module, elles dérivent des structures de $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -module sur les faisceaux de transfert, et donc sur $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}$ et sur $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ respectivement. Ce sont donc les mêmes structures de $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -module.

- Comme on a déjà montré le premier point, il reste à comparer les décalages.

$$f_{/S}^1(\mathcal{E}) = f_{/S}^b(\mathcal{E})[d_S],$$

avec $d_S = \dim_S(X_1 \times Y) - \dim_S(X_2 \times Y) = \dim_S(X_1) - \dim_S(X_2)$ et

$$f_{/Y}^1(\mathcal{E}) = f_{/Y}^b(\mathcal{E})[d_Y],$$

avec $d_Y = \dim_Y(X_1 \times Y) - \dim_Y(X_2 \times Y) = \dim_S(X_1) - \dim_S(X_2)$.

Ainsi, $d_S = d_Y$.

- A gauche, on a

$$f_{+/S}\mathcal{F} = Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \times Y \leftarrow X_1 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}} \mathcal{F}).$$

A droite, on a

$$f_{+/Y}\mathcal{F} = Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \times Y \leftarrow X_1 \times Y/Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{F}).$$

Le but est alors de s'assurer que, en tant que foncteurs de la catégorie des $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -modules (à gauche) dans celle des $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -modules (à gauche),

$$\mathcal{D}_{X_2 \times Y \leftarrow X_1 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}} \bullet \simeq \mathcal{D}_{X_2 \times Y \leftarrow X_1 \times Y/Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \bullet.$$

Pour éviter de s'encombrer des faisceaux canoniques dans la définition des faisceaux de transfert, on va plutôt montrer le même résultat mais sur les $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}$ -modules à droite, i.e.

$$\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S} \simeq \bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y}.$$

Ces résultats sont équivalents car on a une équivalence de catégories

$$\omega_{X_1 \times Y/Y} \otimes \bullet : D_{qcoh}^b({}^g\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}^d)$$

entre les modules à gauche et les modules à droite. On renvoie à [HTT08], la discussion avant la définition 1.3.3, pour plus de détails.

La propriété universelle du produit tensoriel permet d'écrire un morphisme de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -modules

$$\mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} \rightarrow \mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S}.$$

Pour s'assurer que c'est un isomorphisme on peut se restreindre au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}$. En effet, comme \mathcal{F} est $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}$ -quasi-cohérent (à droite), il est limite inductive de $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}$ -cohérents (à droite), donc on peut se restreindre au cas où \mathcal{F} est cohérent, et dans ce cas localement $\mathcal{F} \simeq \mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}$. Il reste alors seulement à montrer l'isomorphisme

$$\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} \simeq \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S}.$$

Comme localement $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S} \simeq \bigoplus_{\underline{k}, \underline{l}} \mathcal{O}_{X_1 \times Y} \partial_x^{\underline{k}} \partial_y^{\underline{l}}$ et $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y} \simeq \bigoplus_{\underline{k}} \mathcal{O}_{X_1 \times Y} \partial_x^{\underline{k}}$, avec $\partial_x^{\underline{k}}$ les dérivations selon X_1 et $\partial_y^{\underline{l}}$ celles selon Y , effectuer le produit tensoriel $\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \bullet$ revient à rajouter l'action des dérivations selon Y au faisceau auquel on applique ce foncteur. Ainsi, par construction des faisceaux de transfert,

$$\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} \simeq \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S}.$$

On a donc un isomorphisme

$$\mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S} \simeq \mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1 \times Y/Y}} \mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y}$$

pour tout $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1 \times Y/S}^d)$.

Remarque : Par construction, la structure de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -module à droite de

$$\mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/Y} = \mathcal{O}_{X_1 \times Y/Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_2 \times Y/Y}} f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$$

est donnée par celle de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$. De même, la structure de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -module à droite de $\mathcal{D}_{X_1 \times Y \rightarrow X_2 \times Y/S}$ est donnée par celle de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/S}$, qui est donc la même que celle de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$. Ainsi, les deux faisceaux de transfert ont bien la même structure de $f^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \times Y/Y}$ -module à droite. \square

Remarque : En réalité, si on voit f comme un morphisme de variétés sur Y , on perd seulement les dérivations sur Y quand on tire en arrière via f . C'est pour cette raison que même si \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -module, $f^!_Y \mathcal{E}$ ne peut être qu'un $\mathcal{D}_{X \times Y \times Z/Y}$ -module : on a perdu l'information de l'action des dérivations sur Y .

Par convention, comme toutes les variétés seront sur S , on écrira dans la suite du texte $p^b, p^!$, etc. pour $p^b_S, p^!_S$, etc.

A partir d'ici, on considère $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ et $f = id_X \times g : X_1 = X \times_S Y_1 \rightarrow X_2 = X \times_S Y_2$. Le but est d'établir des foncteurs image inverse et image directe entre les \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -modules et les \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -modules. Pour la construction de la transformée de Fourier-Mukai sur les \mathcal{D} -modules, f sera la plupart du temps une projection (dans ce cas $Y_2 = S$ et g est le morphisme structural de Y_1) et parfois une immersion fermée (dans ce cas $Y_1 = S$ et g est un S -point de Y_2).

Image inverse relative

Définition 2.1.5. On définit le faisceau de transfert relatif à Y_1 et Y_2 par

$$\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} = f^* \mathcal{D}_{X_2/Y_2} = \mathcal{O}_{X_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_2}} f^{-1} \mathcal{D}_{X_2/Y_2}.$$

Si f est une projection $X \times Y_1 \rightarrow X$, on notera ce module simplement $\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X}^{(Y_1)}$, quand on ne le confondra pas avec $\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X}$ (qui dans ce cas a la même définition).

Si f est une immersion fermée $X \rightarrow X \times Y_2$ associée à un S -point de Y_2 $g : S \rightarrow Y_2$, on notera ce module simplement $\mathcal{D}_{X \rightarrow X_2}^{(Y_2)}$.

Remarque : Le faisceau \mathcal{O}_{X_1} possède une structure naturelle de \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -module, donc $\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)}$ est un $(\mathcal{D}_{X_1/Y_1}, f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$ -bimodule.

Définition 2.1.6. Soit $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$. On définit l'image inverse relative à Y_1 et Y_2 de \mathcal{E} par f

$$f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{E} = \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E} \in D(\mathcal{D}_{X_1/Y_1}).$$

Si f est une projection $X \times Y_1 \rightarrow X$, on notera ce foncteur simplement $f^{!(Y_1)}$.

Si f est une immersion fermée $X \rightarrow X \times Y_2$ associée à un S -point de Y_2 $g : S \rightarrow Y_2$, on notera ce foncteur simplement $f^{!(Y_2)}$.

Remarques :

- Il s'agit des définitions classiques, à l'exception du fait que les \mathcal{D} -modules sont à présent tous relatifs : on a remplacé S par Y_1 et Y_2 .
- Si $f : X \times Y_1 \rightarrow X$ est une projection, alors $\text{Res}_X(f_{/S}^b \mathcal{E}) \simeq f^{!(Y_1)}\mathcal{E}$. Dit autrement, en restreignant la structure de $\mathcal{D}_{X_1/S}$ -module de $f^b \mathcal{E}$ en une structure de \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -module on obtient $f^{!(Y_1)}\mathcal{E}$.

Propriété 2.1.7. Si $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$, alors $f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$.

Démonstration. Il s'agit de la même démonstration que dans le cas classique (voir par exemple [HTT08] Prop. 1.5.8) : Comme complexe de \mathcal{O} -modules,

$$f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{E} = \mathcal{O}_{X_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_2}} f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E} \simeq Lf^*\mathcal{E},$$

et on sait que $Lf^* : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X_2}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X_1})$. □

Propriété 2.1.8. On considère les morphismes

$$f_1 = id \times g_1 : X_1 = X \times Y_1 \rightarrow X_2 = X \times Y_2$$

et

$$f_2 = id \times g_2 : X_2 = X \times Y_2 \rightarrow X_3 = X \times Y_3.$$

Pour tout $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$,

$$(f_2 \circ f_1)^{!(Y_1, Y_3)}\mathcal{E} \simeq (f_1^{!(Y_1, Y_2)} \circ f_2^{!(Y_2, Y_3)})\mathcal{E}.$$

Démonstration. A nouveau, il s'agit d'une réécriture de la démonstration dans le cas classique (voir [HTT08] Prop 1.5.11 par exemple). Tout d'abord, en utilisant la platitude de $\mathcal{D}_{Z/T}$ sur \mathcal{O}_Z , on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2 \rightarrow X_3}^{(Y_2, Y_3)} \\ &= \left(\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{f_1^{-1}\mathcal{O}_{X_2}} f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2} \right) \otimes_{f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1} \left(\mathcal{O}_{X_2} \otimes_{f_2^{-1}\mathcal{O}_{X_3}} f_2^{-1}\mathcal{D}_{X_3/Y_3} \right) \\ &\simeq \left(\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{f_1^{-1}\mathcal{O}_{X_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2} \right) \otimes_{f_1^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1} \left(\mathcal{O}_{X_2} \otimes_{f_2^{-1}\mathcal{O}_{X_3}}^{\mathbb{L}} f_2^{-1}\mathcal{D}_{X_3/Y_3} \right) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_1} \otimes_{(f_2 \circ f_1)^{-1}\mathcal{O}_{X_3}}^{\mathbb{L}} (f_2 \circ f_1)^{-1}\mathcal{D}_{X_3/Y_3} \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_1} \otimes_{(f_2 \circ f_1)^{-1}\mathcal{O}_{X_3}} (f_2 \circ f_1)^{-1}\mathcal{D}_{X_3/Y_3} = \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_3}^{(Y_1, Y_3)}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1)^!(Y_1, Y_3) \mathcal{E} &= \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_3}^{(Y_1, Y_3)} \otimes_{(f_2 \circ f_1)^{-1} \mathcal{D}_{X_3/Y_3}}^{\mathbb{L}} (f_2 \circ f_1)^{-1} \mathcal{E} \\
&\simeq \left(\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f_1^{-1} \mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1} \mathcal{D}_{X_2 \rightarrow X_3}^{(Y_2, Y_3)} \right) \otimes_{(f_2 \circ f_1)^{-1} \mathcal{D}_{X_3/Y_3}}^{\mathbb{L}} (f_2 \circ f_1)^{-1} \mathcal{E} \\
&\simeq \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f_1^{-1} \mathcal{D}_{X_2/Y_2}}^{\mathbb{L}} f_1^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_2 \rightarrow X_3}^{(Y_2, Y_3)} \otimes_{f_2^{-1} \mathcal{D}_{X_3/Y_3}}^{\mathbb{L}} f_2^{-1} \mathcal{E} \right) \\
&\simeq \left(f_1^{!(Y_1, Y_2)} \circ f_2^{!(Y_2, Y_3)} \right) \mathcal{E}.
\end{aligned}$$

□

Propriété 2.1.9.

$$f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_2/Y_2} \simeq \mathcal{D}_{X_1/Y_1}.$$

Démonstration. On commence par le montrer pour $p : X \times Y \rightarrow X$ une projection. Dans ce cas, du point de vue des \mathcal{O} -modules, la platitude de p assure qu'on a un isomorphisme

$$p^{!(Y)} \mathcal{D}_{X/S} \simeq Lp^* \mathcal{D}_{X/S} \simeq p^* \mathcal{D}_{X/S}.$$

La structure de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -modules de $p^{!(Y)} \mathcal{D}_{X/S}$ donne un morphisme

$$\mathcal{D}_{X \times Y/Y} \rightarrow p^b \mathcal{D}_{X/S}.$$

Localement, on a la filtration suivante sur $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$:

$$F_l \mathcal{D}_{X \times Y/Y} = \sum_{|k| \leq l} \mathcal{O}_{X \times Y} \underline{\partial}_X^k.$$

De même, $p^* F_l \mathcal{D}_{X/S}$ réalise une filtration de $p^* \mathcal{D}_{X/S}$ car p est plat. Ainsi, localement

$$p^* F_l \mathcal{D}_{X/S} = p^* \sum_{|k| \leq l} \mathcal{O}_X \underline{\partial}_X^k \simeq \sum_{|k| \leq l} \mathcal{O}_{X \times Y} \underline{\partial}_X^k = F_l \mathcal{D}_{X \times Y/Y}.$$

Comme localement les filtrations coïncident, on en déduit que $\mathcal{D}_{X \times Y/Y} \simeq p^{!(Y)} \mathcal{D}_{X/S}$. Dans le cas général, on s'appuie sur le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
X \times Y_1 & \xrightarrow{f} & X \times Y_2 \\
& \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\
& & X.
\end{array}$$

La propriété précédente assure que $p_1^{!(Y_1)} \simeq f^{!(Y_1, Y_2)} \circ p_2^{!(Y_2)}$. Si on évalue cet isomorphisme de foncteurs en $\mathcal{D}_{X/S}$, on trouve

$$f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_2/Y_2} \simeq \mathcal{D}_{X_1/Y_1}.$$

□

Corollaire 2.1.10. *Si f est lisse et $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$, alors $f^{!(Y_1/Y_2)} \mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$.*

Démonstration. Le problème est local sur X_1 et X_2 et tout \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module cohérent est localement quotient de \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -modules libres de rang fini (voir par exemple [HTT08], définition 1.4.8 et proposition 1.4.9).

Ainsi, il suffit de montrer que $f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_2/Y_2}$ est \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -cohérent, ce qui est le cas d'après la propriété précédente.

□

Image directe relative

Définition 2.1.11. On définit le faisceau de transfert relatif à Y_1 et Y_2 par

$$\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} = \omega_{X_1/Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_2}} f^{-1}\omega_{X_2/Y_2}^{-1}.$$

Si f est une projection $X \times Y_1 \rightarrow X$, on notera ce module simplement $\mathcal{D}_{X \leftarrow X_1}^{(Y_1)}$.

Si f est une immersion fermée $X \rightarrow X \times Y_2$ associée à un S -point de Y_2 $g : S \rightarrow Y_2$, on notera ce module simplement $\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X}^{(Y_2)}$.

Remarque : $\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)}$ est un $(f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}, \mathcal{D}_{X_1/Y_1})$ -bimodule.

Définition 2.1.12. Soit $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$. On définit l'image directe relative à Y_1 et Y_2 de \mathcal{E} par f par

$$f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} = Rf_* \left(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{E} \right) \in D(\mathcal{D}_{X_2/Y_2}).$$

Si f est une projection $X \times Y_1 \rightarrow X$, on notera ce foncteur simplement $f_+^{(Y_1)}$.

Si f est une immersion fermée $X \rightarrow X \times Y_2$ associée à un S -point de Y_2 $g : S \rightarrow Y_2$, on notera ce foncteur simplement $f_+^{(Y_2)}$.

Remarque : A nouveau, il s'agit des définitions classiques, à l'exception du fait que les \mathcal{D} -modules sont à présent tous relatifs : on a remplacé S par Y_1 et Y_2 .

Propriété 2.1.13. Si $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$, alors $f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} = f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_2/Y_2} \simeq \mathcal{D}_{X_1/Y_1}$. Donc on peut identifier $\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} = \omega_{X_1/Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_2}} f^{-1}\omega_{X_2/Y_2}^{-1}$ avec le bimodule \mathcal{D}_{X_1/Y_1} dont on a inversé les structures de module à droite et à gauche. Ainsi, comme \mathcal{O}_{X_2} -modules,

$$f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \simeq Rf_* \left(\mathcal{D}_{X_1/Y_1} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{E} \right) \simeq Rf_* \mathcal{E}.$$

Le résultat est alors une conséquence du fait que Rf_* conserve la quasi-cohérence. □

Propriété 2.1.14. On considère les morphismes

$$f_1 = id \times g_1 : X_1 = X \times Y_1 \rightarrow X_2 = X \times Y_2$$

et

$$f_2 = id \times g_2 : X_2 = X \times Y_2 \rightarrow X_3 = X \times Y_3.$$

Pour tout $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$,

$$(f_2 \circ f_1)_+^{(Y_1, Y_3)} \mathcal{E} \simeq \left(f_{2+}^{(Y_2, Y_3)} \circ f_{1+}^{(Y_1, Y_2)} \right) \mathcal{E}.$$

Démonstration. A nouveau, il s'agit d'un calcul similaire à celui du cas classique (voir [HTT08] Prop 1.5.21 par exemple). □

Lemme 2.1.15. Soient Z un S -schéma, $Y = \mathbb{P}^n \times Z$ et $p : X \times Y \rightarrow X \times Z$ la projection. Alors

$$p_+^{(Y)} \mathcal{D}_{X \times Y/Y} \simeq \mathcal{D}_{X \times Z/Z}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
p_+^{(Y)} \mathcal{D}_{X \times Y/Y} &= R p_* \mathcal{D}_{X \times Z \leftarrow X \times Y}^{(Y,Z)} \\
&= R p_* \left(\omega_{X \times Y/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} p^* \mathcal{D}_{X \times Z/Z} \otimes_{p^{-1} \mathcal{O}_X} p^{-1} \omega_{X \times Z/Z}^{-1} \right) \\
&\simeq R p_* p^* \mathcal{D}_{X \times Z/Z} \simeq R p_* (\mathcal{D}_{X \times Z/Z} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}).
\end{aligned}$$

Si on note $\pi : \mathbb{P}^n \rightarrow S$ le morphisme structural de \mathbb{P}^n , alors $p = id_{X \times Z} \times \pi$ et

$$R p_* (\mathcal{D}_{X \times Z/Z} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq \mathcal{D}_{X \times Z/Z} \boxtimes R \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

Comme le faisceau structural de \mathbb{P}^n n'a de cohomologie qu'en degré 0, on trouve

$$\mathcal{D}_{X \times Z/Z} \boxtimes R \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathcal{D}_{X \times Z/Z} \boxtimes \mathcal{O}_S = \mathcal{D}_{X \times Z/Z}.$$

□

Propriété 2.1.16. *On rappelle que pour $i = 1, 2$, $X_i = X \times Y_i$. Si X est quasi-projectif, f est propre et $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$, alors $f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$.*

Démonstration. X étant quasi-projectif, f est propre entre deux schémas quasi-projectifs, donc projectif et on peut le décomposer en

$$X_1 \xrightarrow{i} X_2 \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} X_2,$$

où i est une immersion fermée définie par $i(x) = (f(x), j(x))$ avec $j : X_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n$ (qui existe par quasi-projectivité de X_1) et p est la projection.

On remarque que i peut s'écrire sous la forme $id_X \times (g \times j)$. On a alors l'isomorphisme

$$f_+^{(Y_1, Y_2)} \simeq p_+^{(Y_2 \times \mathbb{P}^n)} \circ i_+^{(Y_1, Y_2 \times \mathbb{P}^n)}.$$

Il suffit alors de montrer le résultat pour les immersions fermées et pour les projections.

- Soit $i : X \times Y_1 \hookrightarrow X \times Y_2$ une immersion fermée de la forme $id_X \times j$.

De la même manière que dans le cas classique (voir [HTT08] Théorème 2.5.1), il suffit de montrer que $i_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_1/Y_1}$ est cohérent sur \mathcal{D}_{X_2/Y_2} . Or

$$\begin{aligned}
i_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_1/Y_1} &= R i_* \mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \\
&\simeq \mathcal{D}_{X_2/Y_2} \otimes_{\mathcal{O}_{X_2}} \left(\omega_{X_2/Y_2}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_2}} i_* \omega_{X_1/Y_1} \right) \\
&\simeq \mathcal{D}_{X_2/Y_2} \otimes_{\mathcal{O}_{X_2}} \left(\omega_{X_2/Y_2}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_2}} \omega_{X_1/Y_1} / I_i \right) \\
&\simeq \mathcal{D}_{X_2/Y_2} / I_i,
\end{aligned}$$

où I_i désigne l'idéal de l'immersion i . Il s'agit donc bien d'un \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module cohérent.

- Soit $p : X \times Y \times \mathbb{P}^n \rightarrow X \times Y$ une projection.

A nouveau, de la même manière que dans le cas classique (voir [HTT08] Théorème 2.5.1), il suffit de montrer que $p_+^{(Y, Y \times \mathbb{P}^n)} \mathcal{D}_{X \times Y \times \mathbb{P}^n / Y \times \mathbb{P}^n}$ est cohérent sur $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$. Or, par le lemme précédent,

$$p_+^{(Y, Y \times \mathbb{P}^n)} \mathcal{D}_{X \times Y \times \mathbb{P}^n / Y \times \mathbb{P}^n} \simeq \mathcal{D}_{X \times Y/Y},$$

qui est clairement cohérent.

□

Propriété 2.1.17. Soient X, Y, Z_1 et Z_2 quatre S -schémas noethériens et $f : X \times Y \times Z_1 \rightarrow X \times Y \times Z_2$ un morphisme de la forme $\text{id}_{X \times Y} \times g$. On notera pour simplifier $X_i = X \times Y \times Z_i$ et $Y_i = Y \times Z_i$. On rappelle enfin que le foncteur $\text{Res}_X : D(\mathcal{D}_{X \times Y_i/Z_i}) \rightarrow D(\mathcal{D}_{X \times Y_i/Y_i})$ est défini par l'oubli de l'action des dérivations sur Y (on ne conserve que celles de X).

- Pour tout $\mathcal{E}^\cdot \in D_{\text{qcoh}}^b(\mathcal{D}_{X_2/Z_2})$, $\text{Res}_X(f^{!(Z_1, Z_2)} \mathcal{E}^\cdot) \simeq f^{!(Y_1, Y_2)} \text{Res}_X(\mathcal{E}^\cdot)$ dans la catégorie $D_{\text{qcoh}}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$.
- Pour tout $\mathcal{F}^\cdot \in D_{\text{qcoh}}^b(\mathcal{D}_{X_1/Z_1})$, $\text{Res}_X(f_+^{(Z_1, Z_2)} \mathcal{F}^\cdot) \simeq f_+^{(Y_1, Y_2)} \text{Res}_X(\mathcal{F}^\cdot)$ dans la catégorie $D_{\text{qcoh}}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$.

En d'autres termes, si on oublie l'action des dérivations selon Y , les foncteurs relatifs à (Y_1, Y_2) coïncident avec les foncteurs relatifs à (Z_1, Z_2) .

Démonstration. • On a déjà vu qu'en tant que \mathcal{O} -modules $f^{!(Z_1, Z_2)} \mathcal{E}^\cdot \simeq Lf^* \mathcal{E}^\cdot \simeq f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E}^\cdot$.

De plus, les structures de \mathcal{D} -module de ces faisceaux sont données par celles de \mathcal{O}_{X_1} . Comme la structure de \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -module de \mathcal{O}_{X_1} correspond à celle de \mathcal{D}_{X_1/Z_1} -module restreinte aux éléments de \mathcal{D}_{X_1/Y_1} , $f^{!(Z_1, Z_2)} \mathcal{E}^\cdot$ et $f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E}^\cdot$ sont isomorphes en tant que \mathcal{D}_{X_1/Y_1} -modules.

- De même, $f_+^{(Z_1, Z_2)} \mathcal{F}^\cdot \simeq Rf_* \mathcal{F}^\cdot \simeq f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{F}^\cdot$ comme \mathcal{O} -module. A nouveau, par construction, les structures de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -modules sont les mêmes.

□

Dans la suite on notera $f_{+/Y}^{!(Z_1, Z_2)}$ pour $f^{!(Y \times Z_1, Y \times Z_2)}$. De même, on notera $f_{+/Y}^{(Z_1, Z_2)}$ pour $f_+^{(Y \times Z_1, Y \times Z_2)}$.

Ces notations seront plus pratiques dans le cas où f sera une projection, ce qui représentera la quasi-totalité des situations de ce chapitre.

2.1.2 Morphismes d'adjonction

Pour la suite nous allons avoir besoin de morphismes d'adjonction pour les \mathcal{D} -modules relatifs. L'avantage, c'est que du point de vue des \mathcal{O} -modules $f^{!(Y_1, Y_2)} \simeq Lf^*$ et $f_+^{(Y_1, Y_2)} \simeq Rf_*$. Il suffit donc de s'assurer que les morphismes d'adjonction sur les \mathcal{O} -modules sont bien \mathcal{D} -linéaires. Dans un premier temps, remarquons le fait fondamental suivant :

Lemme 2.1.18. Soient X et Y deux S -schémas, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur X , \mathcal{B} un faisceau d'anneaux sur Y et $\mathcal{B} \rightarrow f_* \mathcal{A}$ une structure de \mathcal{B} -module sur $f_* \mathcal{A}$ de sorte qu'on ait des foncteurs

$$f_* : \text{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{B}),$$

$$\mathcal{A} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}} f^{-1} : \text{Mod}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A}).$$

Alors le foncteur $\mathcal{A} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}} f^{-1}$ est adjoint à gauche au foncteur f_* . En d'autres termes, si on a \mathcal{E} un \mathcal{B} -module et \mathcal{F} un \mathcal{A} -module, on a une bijection canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}} f^{-1} \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}, f_* \mathcal{F}).$$

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation du résultat d'adjonction entre f^* et f_* sur les catégories $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ et $\text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$. On renvoie à [Sta21, Lemme 0096] pour plus de détails. Cela revient à considérer le morphisme d'espaces annelés $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$.

□

Corollaire 2.1.19. Soient X, Y_1 et Y_2 trois S -schémas et $f : X_1 = X \times Y_1 \rightarrow X_2 = X \times Y_2$ un morphisme de S -schémas de la forme $id_X \times g$. Alors le foncteur $f^{!(Y_1, Y_2)}$ est adjoint à droite au foncteur $f_+^{(Y_1, Y_2)}$. En d'autres termes, pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$ et tout $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$ on a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}}(f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}}(\mathcal{E}, f_+^{(Y_1, Y_2)}\mathcal{F}).$$

En particulier, on a des morphismes canoniques

$$f^{!(Y_1, Y_2)}f_+^{(Y_1, Y_2)}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \rightarrow f_+^{(Y_1, Y_2)}f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{F}$$

respectivement des catégories $D^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$ et $D^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$.

Démonstration. L'idée est la suivante : On va appliquer le résultat précédent avec $\mathcal{A} = \mathcal{D}_{X_1/Y_1}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{D}_{X_2/Y_2}$ pour obtenir l'adjonction entre $\mathcal{D}_{X_1/Y_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}$ et f_* , avant de remarquer que les foncteurs dérivés de ces deux foncteurs sont précisément $f^{!(Y_1, Y_2)}$ et $f_+^{(Y_1, Y_2)}$.

Dans un premier temps, il faut munir $f_*\mathcal{D}_{X_1/Y_1}$ d'une structure de \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module. Pour ce faire, rappelons qu'on peut identifier le faisceau de transfert $\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)}$ au faisceau \mathcal{D}_{X_1/Y_1} dont on a inversé les structures à gauche et à droite. Ce faisant, le \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module $f_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{D}_{X_1/Y_1})$ a pour \mathcal{O}_{X_2} -module sous-jacent le faisceau $f_*\mathcal{D}_{X_1/Y_1}$. On peut ainsi munir $f_*\mathcal{D}_{X_1/Y_1}$ d'une structure de \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module.

On peut donc appliquer le lemme précédent : les foncteurs $\mathcal{D}_{X_1/Y_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}$ et f_* sont adjoints (entre les catégories $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$ et $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$). Par la discussion précédente sur la structure de \mathcal{D}_{X_2/Y_2} -module de $f_*\mathcal{D}_{X_1/Y_1}$, le foncteur $f_* : \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_1/Y_1}) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$ est défini comme le foncteur $f_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \bullet)$.

On sait de plus que le foncteur $\mathcal{D}_{X_1/Y_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}$ est exact à droite. Quant au foncteur $f_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \bullet)$, il est exact à gauche par platitude de $\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)}$ sur \mathcal{D}_{X_1/Y_1} .

On a donc deux foncteurs adjoints dont l'un est exact à droite et l'autre est exact à gauche, donc leurs foncteurs dérivés existent et sont adjoints (voir [Sta21, Lemme 09T5]). Par construction, le foncteur dérivé de $\mathcal{D}_{X_1/Y_1} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}$ est $f^{!(Y_1, Y_2)}$ et le foncteur dérivé de $f_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \bullet)$ est $f_+^{(Y_1, Y_2)}$. □

2.1.3 Formules de la projection

On a la formule de la projection suivante, tirée de [HTT08] (Cor 1.7.5).

Propriété 2.1.20 (Formule de la projection). Soient $f : X \rightarrow Y$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S})$ un morphisme de variétés lisses et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y/S})$. Alors

$$f_+(f^b\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}) \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} f_+\mathcal{E}.$$

On a aussi une formule de la projection pour les \mathcal{D} -modules relatifs.

Propriété 2.1.21 (Formule de la projection). Soient $f : X \times Y_1 \rightarrow X \times Y_2$ un morphisme de la forme $id_X \times g$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y_2/Y_2})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y_1/Y_1})$. Alors

$$f_+^{(Y_1, Y_2)}(f^{!(Y_1, Y_2)}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}) \simeq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y_2}}^{\mathbb{L}} f_+^{(Y_1, Y_2)}\mathcal{F}.$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on remarque que la preuve du même résultat pour des \mathcal{O} -modules consiste à construire un morphisme

$$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} Rf_* \mathcal{F} \rightarrow Rf_*(Lf^* \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F})$$

à partir des morphismes d'adjonction, puis de montrer que ce morphisme est un isomorphisme.

Comme on l'a montré plus haut (corollaire 2.1.19 p.44), les morphismes d'adjonction sur les \mathcal{O} -modules s'étendent en des morphismes d'adjonction sur les \mathcal{D} -modules relatifs. Ainsi, les morphismes d'adjonction nous donnent un morphisme

$$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X \times Y_2}} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{F} \rightarrow f_+^{(Y_1, Y_2)} (f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X \times Y_1}} \mathcal{F})$$

qui coïncide du point de vue des \mathcal{O} -modules avec le morphisme précédent. Remarquons enfin qu'une fois qu'on a un morphisme, la structure de \mathcal{D} -module des objets n'intervient pas pour montrer que c'est un isomorphisme : il suffit de savoir que c'est un isomorphisme comme morphisme de \mathcal{O} -modules, ce qui est exactement l'énoncé de la formule de la projection pour les \mathcal{O} -modules. \square

Dans cette version de la formule de la projection les produits tensoriels sont pris au-dessus de \mathcal{O} , mais pour la suite on aura besoin d'un résultat similaire pour des produits tensoriels au-dessus de \mathcal{D} . Pour obtenir un tel résultat on va s'appuyer sur le résultat suivant.

Propriété 2.1.22. *Soient $f : X \times Y_1 \rightarrow X \times Y_2$ un morphisme de la forme $id_X \times g$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$, $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$. Alors*

$$Rf_*(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}\mathcal{E}) \simeq Rf_* \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} \mathcal{E}$$

et

$$Rf_*(f^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} \mathcal{F}) \simeq \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} Rf_* \mathcal{F}.$$

Démonstration. Ce résultat se trouve dans [HTT08], dans la démonstration de la propriété 1.5.21. \square

Propriété 2.1.23 (Formule de la projection). *Soient $f : X \times Y_1 \rightarrow X \times Y_2$ un morphisme de la forme $id_X \times g$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$. Alors*

$$f_+^{(Y_1, Y_2)} (\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E}) \simeq f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} \mathcal{E}$$

et

$$f_+^{(Y_1, Y_2)} (f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{F}) \simeq \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{F}.$$

Démonstration. On rappelle (propriété 2.1.9 p.40) que $f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{D}_{X_2/Y_2} = \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \simeq \mathcal{D}_{X_1/Y_1}$. Comme les deux isomorphismes se démontrent de la même manière, on ne montrera que le premier. On déduit de la propriété précédente que

$$\begin{aligned} f_+^{(Y_1, Y_2)} (\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{E}) &= Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}\mathcal{E}) \\ &\simeq Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} f^{-1}\mathcal{E}) \\ &\simeq Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_1/Y_1}} \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} \mathcal{E} \\ &= f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{X_2/Y_2}} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

\square

Propriété 2.1.24 (Formule de la projection). Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, $\mathcal{E}^\cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y/S})$ et $\mathcal{F}^\cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S})$. Alors

$$f_+(\mathcal{F}^\cdot \otimes_{f^b \mathcal{D}_{Y/S}}^{\mathbb{L}} f^b \mathcal{E}^\cdot) \simeq f_+ \mathcal{F}^\cdot \otimes_{\mathcal{D}_{Y/S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^\cdot$$

et

$$f_+(f^b \mathcal{E}^\cdot \otimes_{f^b \mathcal{D}_{Y/S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^\cdot) \simeq \mathcal{E}^\cdot \otimes_{\mathcal{D}_{Y/S}}^{\mathbb{L}} f_+ \mathcal{F}^\cdot.$$

Démonstration. La preuve est similaire à la précédente. \square

2.1.4 Compatibilité des foncteurs relatifs avec les foncteurs classiques

Propriété 2.1.25. Soient X, \tilde{X}, Y_1 et Y_2 quatre S -schémas et $h : X \rightarrow \tilde{X}$ et $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ deux morphismes de S -schémas. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times Y_1 & \xrightarrow{h_1 = h \times id_{Y_1}} & \tilde{X} \times Y_1 \\ \downarrow f = id_X \times g & & \downarrow \tilde{f} = id_{\tilde{X}} \times g \\ X \times Y_2 & \xrightarrow{h_2 = h \times id_{Y_2}} & \tilde{X} \times Y_2. \end{array}$$

Alors pour $\mathcal{E}^\cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\tilde{X} \times Y_2 / Y_2})$ on a $f^{!(Y_1, Y_2)} \circ h_{2/Y_2}^b(\mathcal{E}^\cdot) \simeq h_{1/Y_1}^b \circ \tilde{f}^{!(Y_1, Y_2)}(\mathcal{E}^\cdot)$ (dans la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y_1 / Y_1})$).

Démonstration. On notera $X_i = X \times Y_i$ et $\tilde{X}_i = \tilde{X} \times Y_i$.

Par définition

$$f^{!(Y_1, Y_2)} \circ h_{2/Y_2}^b(\mathcal{E}^\cdot) = \mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 \rightarrow \tilde{X}_2 / Y_2} \otimes_{(h_2 \circ f)^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} (h_2 \circ f)^{-1} \mathcal{E}^\cdot.$$

Or, par un calcul similaire à celui permettant de calculer la composée de deux images inverses, on trouve

$$\mathcal{D}_{X_1 \rightarrow X_2}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 \rightarrow \tilde{X}_2 / Y_2} \simeq \mathcal{O}_{X_1} \otimes_{(h_2 \circ f)^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}_2}} (h_2 \circ f)^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 / Y_2}.$$

De même,

$$h_{1/Y_1}^b \circ \tilde{f}^{!(Y_1, Y_2)}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq \left(\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{(\tilde{f} \circ h_1)^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}_2}} (\tilde{f} \circ h_1)^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 / Y_2} \right) \otimes_{(\tilde{f} \circ h_1)^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} (\tilde{f} \circ h_1)^{-1} \mathcal{E}^\cdot.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $h_2 \circ f = \tilde{f} \circ h_1 = h \times g$. \square

Corollaire 2.1.26. On considère les projections suivantes

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{\pi_{YZ}} & Y \times Z \\ \pi_{XZ} \downarrow & & \downarrow f \\ X \times Z & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Alors pour $\mathcal{E}^\cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z/S})$ on a $\pi_{XZ/S}^{!(Y)} \circ g_{/S}^b(\mathcal{E}^\cdot) \simeq \pi_{YZ/Y}^b \circ f_{/S}^{!(Y)}(\mathcal{E}^\cdot)$ (dans la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y})$).

Remarque : Il s'agit simplement d'une réécriture de la propriété précédente dans le cas où tous les morphismes sont des projections. C'est cette version que l'on va utiliser dans la suite.

Propriété 2.1.27. Soient X, \tilde{X}, Y_1 et Y_2 quatre S -schémas et $h : X \rightarrow \tilde{X}$ et $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ deux morphismes de S -schémas. On considère à nouveau le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times Y_1 & \xrightarrow{h_1 = h \times id_{Y_1}} & \tilde{X} \times Y_1 \\ \downarrow f = id_X \times g & & \downarrow \tilde{f} = id_{\tilde{X}} \times g \\ X \times Y_2 & \xrightarrow{h_2 = h \times id_{Y_2}} & \tilde{X} \times Y_2. \end{array}$$

Alors pour $\mathcal{E} \cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y_1 / Y_1})$ on a $h_{2+ / Y_2} \circ f_+^{(Y_1, Y_2)}(\mathcal{E} \cdot) \simeq \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \circ h_{1+ / Y_1}(\mathcal{E} \cdot)$ (dans la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\tilde{X} \times Y_2 / Y_2})$).

Démonstration. On notera $X_i = X \times Y_i$ et $\tilde{X}_i = \tilde{X} \times Y_i$.

D'une part, la formule de la projection donne

$$\begin{aligned} h_{2+ / Y_2} \circ f_+^{(Y_1, Y_2)}(\mathcal{E} \cdot) &= Rh_{2*}(\mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow X_2 / Y_2} \otimes_{\mathcal{D}_{X_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} Rf_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \cdot)) \\ &\simeq Rh_{2*} Rf_*(f^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow X_2 / Y_2} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \cdot). \end{aligned}$$

D'autre part, elle donne

$$\begin{aligned} \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \circ h_{1+ / Y_1}(\mathcal{E} \cdot) &= R\tilde{f}_*(\mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow \tilde{X}_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} Rh_{1*}(\mathcal{D}_{\tilde{X}_1 \leftarrow X_1 / Y_1} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \cdot)) \\ &\simeq R\tilde{f}_* Rh_{1*}(h_1^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow \tilde{X}_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{h_1^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_1 \leftarrow X_1 / Y_1} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \cdot). \end{aligned}$$

On pose

$$\mathcal{T}_1 = f^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow X_2 / Y_2} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_{X_2 / Y_2}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1}^{(Y_1, Y_2)}$$

et

$$\mathcal{T}_2 = h_1^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 \leftarrow \tilde{X}_1}^{(Y_1, Y_2)} \otimes_{h_1^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_1 / Y_1}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_1 \leftarrow X_1 / Y_1}.$$

Comme $Rh_{2*} Rf_* \simeq R(h \times g)_* \simeq R\tilde{f}_* Rh_{1*}$, il suffit de montrer que $\mathcal{T}_1 \simeq \mathcal{T}_2$.

Or, de la même manière que précédemment, ces deux faisceaux sont isomorphes à

$$\omega_{X_1 / Y_1} \otimes_{(h \times g)^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}_2}} (h \times g)^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_2 / Y_2} \otimes_{(h \times g)^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}_2}} (h \times g)^{-1} \omega_{\tilde{X}_2 / Y_2}^{-1}.$$

□

Corollaire 2.1.28. Soient les projections suivantes

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{\pi_{YZ}} & Y \times Z \\ \pi_{XZ} \downarrow & & \downarrow f \\ X \times Z & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Alors pour $\mathcal{E} \cdot \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y})$ on a $g_{+ / S} \circ \pi_{XZ+ / S}^{(Y)}(\mathcal{E} \cdot) \simeq f_{+ / S}^{(Y)} \circ \pi_{YZ+ / Y}(\mathcal{E} \cdot)$ (dans la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z / S})$).

2.1.5 Principe de la bascule

Propriété 2.1.29 (Principe de la bascule - 1ère version). *Soient X et T deux variétés algébriques, X complète, et \mathcal{L} un faisceau de $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules, $\mathcal{O}_{X \times T}$ -inversible.*

On pose $q : X \times T \rightarrow T$ la projection, pour tout $t \in T$ $\iota_t : X \simeq X \times \{t\} \hookrightarrow X \times T$ et pour tout $x \in X$, $\tilde{\iota}_x : T \simeq \{x\} \times T \hookrightarrow X \times T$.

- *Si $\forall t \in T$, $\iota_t^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ (comme \mathcal{O}_X -modules), alors il existe un $\mathcal{D}_{T/S}$ -module \mathcal{O}_T -inversible \mathcal{M} tel que $\mathcal{L} \simeq q^{!(X)} \mathcal{M}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules).*
- *Si de plus $\exists x \in X$, $\tilde{\iota}_x^{!(X)} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_T$ (comme $\mathcal{D}_{T/S}$ -modules), alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X \times T}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules).*

Démonstration. La première hypothèse permet d'appliquer le principe de la bascule classique (voir [Mum85], Cor 5.6), qui dit que \mathcal{L} est isomorphe à $q^* \mathcal{M}$ pour \mathcal{M} un \mathcal{O}_T -module inversible. En réalité, si on regarde en détail la preuve, \mathcal{M} peut être pris comme étant le faisceau $q_* \mathcal{L}$.

L'objectif est alors de munir $q_* \mathcal{L}$ de la bonne structure de $\mathcal{D}_{T/S}$ -module. Posons

$$\mathcal{M} = q_*(\mathcal{D}_{T \leftarrow X \times T}^{(X)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times T/X}} \mathcal{L}).$$

Il est important de noter que ni le foncteur image directe, ni le produit tensoriel ne sont dérivés, de sorte que \mathcal{M} soit bien un faisceau et non un complexe. De plus, \mathcal{M} possède une structure canonique de $\mathcal{D}_{T/S}$ -module (définie de manière similaire à celle de $q_+^{(X)} \mathcal{L}$). Enfin, comme on identifie $\mathcal{D}_{T \leftarrow X \times T}^{(X)}$ avec le faisceau $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ dont on a intervertie les structures de module à gauche et à droite, on a clairement un isomorphisme de \mathcal{O}_T -modules $\mathcal{M} \simeq q_* \mathcal{L}$, qui induit l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times T}$ -modules $q^* \mathcal{M} \simeq \mathcal{L}$ via le principe de la bascule classique.

Comme le morphisme d'adjonction $q^* q_* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme de $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules, il conserve la structure de $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules. Ainsi, l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times T}$ -modules $q^* q_* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules, et donc $\mathcal{L} \simeq q^{!(X)} \mathcal{M}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules).

Si de plus il existe $x \in X$ tel que $\tilde{\iota}_x^{!(X)} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_T$ (comme $\mathcal{D}_{T/S}$ -modules), alors comme $(q \circ \tilde{\iota}_x) = id_T$,

$$\mathcal{M} \simeq \tilde{\iota}_x^{!(X)} q^{!(X)} \mathcal{M} \simeq \tilde{\iota}_x^{!(X)} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_T \text{ (comme } \mathcal{D}_{T/S}\text{-modules).}$$

Ainsi, $\mathcal{L} \simeq q^{!(X)} \mathcal{O}_T \simeq \mathcal{O}_{X \times T}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times T/X}$ -modules). □

Remarque : Comme tout $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -module possède une structure de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -module (on "oublie" l'action des dérivations selon Y), on peut trouver le résultat suivant :

Si \mathcal{L} est un $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -module $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -inversible qui vérifie

- $\forall y \in Y$, $\iota_y^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ (comme \mathcal{O}_X -modules)
- $\exists x \in X$, $\tilde{\iota}_x^{!(X)} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y$ (comme $\mathcal{D}_{Y/S}$ -modules)
- $\exists y \in Y$, $\tilde{\iota}_y^{!(Y)} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ (comme $\mathcal{D}_{X/S}$ -modules)

alors, en faisant jouer alternativement le rôle de T par Y puis X , le principe de la bascule donne les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X \times Y} \text{ (comme } \mathcal{D}_{X \times Y/X}\text{-modules),}$$

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X \times Y} \text{ (comme } \mathcal{D}_{X \times Y/Y}\text{-modules).}$$

A priori, rien ne garantit qu'on puisse trouver un isomorphisme de $\mathcal{D}_{X \times Y/S}$ -modules. Cependant, je pense que c'est le cas dans de nombreux cas qu'il reste à déterminer.

Cette première version du principe de la bascule est intéressante pour bien comprendre comment il fonctionne. Cependant, dans les faits on préférera utiliser la version plus générale suivante :

Propriété 2.1.30 (Principe de la bascule - 2ème version). *Soient X, Y et Z trois variétés algébriques, X et Y complètes, et \mathcal{L} un faisceau de $\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y \times Z}$ -modules $\mathcal{O}_{X \times Y \times Z}$ -inversible.*

On pose $\pi_{XY} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$ la projection, pour tout $(x, y) \in X \times Y$,

$$\iota_{(x,y)} : Z \simeq \{x\} \times \{y\} \times Z \hookrightarrow X \times Y \times Z$$

et pour tout $z \in Z$,

$$\tilde{\iota}_z : X \times Y \simeq X \times Y \times \{z\} \hookrightarrow X \times Y \times Z.$$

- *Si $\forall (x, y) \in X \times Y$, $\iota_{(x,y)}^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Z$ (comme \mathcal{O}_Z -module), alors il existe un $\mathcal{D}_{X \times Y / Y}$ -module $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -inversible \mathcal{M} tel que $\mathcal{L} \simeq \pi_{XY/Y}^{!(Z)} \mathcal{M}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y \times Z}$ -modules).*
- *Si de plus $\exists z \in Z$, $\tilde{\iota}_z^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X \times Y}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times Y / Y}$ -modules), alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X \times Y \times Z}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y \times Z}$ -modules).*

Démonstration. La preuve est similaire en tout point à celle de la première version, en faisant jouer à Y le rôle de la base S . Il faut simplement poser

$$\mathcal{M} = \pi_{XY*}(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow X \times Y \times Z / Y}^{(Z)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y \times Z}} \mathcal{L}),$$

qui est à nouveau isomorphe en tant que $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -module à $\pi_{XY*} \mathcal{L}$. Ainsi, le principe de la bascule pour les \mathcal{O} -modules et le morphisme d'adjonction permettent de conclure que $\pi_{XY/Y}^{!(Z)} \mathcal{M} \simeq \mathcal{L}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times Y \times Z / Y \times Z}$ -modules).

Le deuxième point fonctionne exactement comme pour la première version. □

Remarques :

- En prenant $Y = S$, on retrouve l'énoncé de la première version du principe de la bascule.
- En prenant $X = S$, on retrouve l'énoncé du principe de la bascule pour les \mathcal{O} -modules (car $\mathcal{D}_{T/T} = \mathcal{O}_T$ pour toute variété T et dans ce cas $f^! = f^*$ pour tout morphisme plat f).
- Par contre, en prenant $Z = S$, l'énoncé est trivial.

2.1.6 Changement de base

On rappelle le théorème de changement de base classique pour les \mathcal{D} -modules.

Théorème 2.1.31 (Changement de base). *Soient X, Y et Z trois S -schémas lisses, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de S -schémas et $g : Z \rightarrow X$ un morphisme de S -schémas propre. On considère le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Alors on a un isomorphisme de foncteurs $g^! f_+ \simeq \tilde{f}_+ \tilde{g}^!$.

Démonstration. On renvoie à [HTT08], théorème 1.7.3. □

Remarque : En oubliant les décalages, on trouve un isomorphisme de foncteurs $g^b f_+ \simeq \tilde{f}_+ \tilde{g}^b$.

Corollaire 2.1.32. *Si $Z = X \times \tilde{Z}$ et que g est la projection, i.e.*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_S \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ X \times \tilde{Z} & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

alors on a un isomorphisme de foncteurs $g^{!(\tilde{Z})} f_+ \simeq \tilde{f}_{+/\tilde{Z}} \tilde{g}^{!(\tilde{Z})} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times \tilde{Z}/\tilde{Z}})$.

Démonstration. On sait déjà que pour $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y/S})$, $g^! f_+ \mathcal{E} \simeq \tilde{f}_+ \tilde{g}^! \mathcal{E}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times \tilde{Z}/S}$ -modules). Or, si on ne s'intéresse qu'à la structure de \mathcal{D} -module relative à \tilde{Z} , par construction $\tilde{g}^! \mathcal{E} \simeq \tilde{g}^{!(\tilde{Z})} \mathcal{E}$ et $g^! f_+ \mathcal{E} \simeq g^{!(\tilde{Z})} f_+ \mathcal{E}$ (voir la remarque après la définition 2.1.5 p.38), et la propriété 2.1.4 (p.36) donne $\tilde{f}_+ \tilde{g}^{!(\tilde{Z})} \mathcal{E} \simeq \tilde{f}_{+/\tilde{Z}} \tilde{g}^{!(\tilde{Z})} \mathcal{E}$. □

Remarque : On devrait pouvoir montrer ce résultat dans le cas où g est de la forme plus générale $id_X \times h : X \times \tilde{Z}_1 \rightarrow X \times \tilde{Z}_2$, mais dans la suite nous n'aurons besoin de formules de changement de base que pour les projections.

On va avoir besoin d'un théorème similaire avec les projections relatives $f_+^{(Y_1, Y_2)}$. Le plus gros avantage des projections relatives par rapport aux projections classiques sur les \mathcal{D} -modules, c'est qu'on conserve des morphismes d'adjonction similaires à ceux sur les \mathcal{O} -modules. On peut donc retranscrire certains résultats connus sur les \mathcal{O} -modules en résultats sur les \mathcal{D} -modules relatifs.

Théorème 2.1.33 (Changement de base). *Soient X, \tilde{X}, Y_1 et Y_2 quatre S -schémas lisses, $g : \tilde{X}_2 = \tilde{X} \times Y_2 \rightarrow X_2 = X \times Y_2$ un morphisme propre de la forme $g' \times id_{Y_1}$ et $f : X_1 = X \times Y_1 \rightarrow X_2 = X \times Y_2$ un morphisme de la forme $id_X \times f'$. On considère le diagramme cartésien suivant*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{g}} & X_1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{X}_2 & \xrightarrow{g} & X_2 \end{array}$$

Alors on a un isomorphisme de foncteurs $g'_{/Y_2} f_+^{(Y_1, Y_2)} \simeq \tilde{f}_{+/\tilde{X}_2}^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}'_{/Y_1} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\tilde{X}_2/Y_2})$.

Démonstration. Cette preuve s'appuie en grande partie sur la preuve du théorème du changement de base pour les \mathcal{O} -modules qu'on trouve dans [Sta21, Lemme 08IB]. Soit \mathcal{E} un élément de $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_1/Y_1})$.

Le but est de construire un morphisme de changement de base dans la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\tilde{X}_2/Y_2})$

$$g'_{/Y_2} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \rightarrow \tilde{f}_{+/\tilde{X}_2}^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}'_{/Y_1} \mathcal{E}.$$

En effet, si un tel morphisme existe, il coïncide du point de vue des \mathcal{O} -modules et au décalage près avec le morphisme

$$Lg^* Rf_* \mathcal{E} \rightarrow R\tilde{f}_* L\tilde{g}'^* \mathcal{E},$$

qu'on sait être un isomorphisme (voir [Sta21, Lemme 08IB]). Ainsi, le morphisme de changement de base sera bien un isomorphisme de \mathcal{D} -modules.

Pour construire le morphisme de changement de base, on procède comme dans [Sta21, Remarque 08HY] : on part du morphisme d'adjonction $f^{!(Y_1, Y_2)} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ (voir Cor 2.1.19 p.44). On lui applique ensuite le foncteur $\tilde{g}_{/Y_1}^!$ pour obtenir un morphisme $\tilde{g}_{/Y_1}^! f^{!(Y_1, Y_2)} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \rightarrow \tilde{g}_{/Y_1}^! \mathcal{E}$.

La propriété 2.1.25 (p.46) permet alors d'écrire

$$\tilde{g}_{/Y_1}^! f^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{F} \simeq \tilde{f}^{!(Y_1, Y_2)} g_{/Y_2}^! \mathcal{F},$$

avec $\mathcal{F} = f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_2/Y_2})$.

Ainsi, le morphisme précédemment construit est un morphisme $\tilde{f}^{!(Y_1, Y_2)} g_{/Y_2}^! f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \rightarrow \tilde{g}_{/Y_1}^! \mathcal{E}$. Finalement, en appliquant $\tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)}$ et en utilisant le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \tilde{f}^{!(Y_1, Y_2)} \mathcal{F}$, on trouve un morphisme $g_{/Y_2}^! f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \rightarrow \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^! \mathcal{E}$, qui est le morphisme de changement de base souhaité. \square

Remarque : A nouveau, en oubliant les décalages, on trouve un isomorphisme $g_{/Y_2}^b f_+^{(Y_1, Y_2)} \simeq \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^b$.

Corollaire 2.1.34. *Si $\tilde{X} = X \times Z$ et que g est la projection, i.e.*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y_1 \times Z & \xrightarrow{\tilde{g}} & X \times Y_1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ X \times Y_2 \times Z & \xrightarrow{g} & X \times Y_2 \end{array}$$

alors on a un isomorphisme de foncteurs $g_{/Y_2}^{!(Z)} f_+^{(Y_1, Y_2)} \simeq \tilde{f}_{+/Z}^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^{!(Z)}$.

Démonstration. On sait déjà que pour tout $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y_1/Y_1})$, $g_{/Y_2}^b f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \simeq \tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^b \mathcal{E}$ (comme $\mathcal{D}_{X \times Y_2 \times Z/Y_2}$ -modules). Or, si on ne s'intéresse qu'à la structure de \mathcal{D} -module relative à $Y_2 \times Z$, par définition $\tilde{g}_{/Y_1}^b \mathcal{E} \simeq \tilde{g}_{/Y_1}^{!(Z)} \mathcal{E}$ et $g_{/Y_2}^b f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E} \simeq g_{/Y_2}^{!(Z)} f_+^{(Y_1, Y_2)} \mathcal{E}$, et la propriété 2.1.17 (p.43) donne $\tilde{f}_+^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^{!(Z)} \mathcal{E} \simeq \tilde{f}_{+/Z}^{(Y_1, Y_2)} \tilde{g}_{/Y_1}^{!(Z)} \mathcal{E}$. \square

On en déduit la reformulation suivante dans le cas des projections.

Corollaire 2.1.35. *Soient les projections suivantes :*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{\tilde{g}} & X \times Y \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times Z & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

On a un isomorphisme de foncteurs $g^{!(Z)} \pi_+^{(Y)} \simeq \tilde{\pi}_{+/Z}^{(Y)} \tilde{g}_{/Y}^{!(Z)}$.

2.2 Transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules

Dans cette section nous considérerons A une variété abélienne sur S de dimension d , où S est un schéma localement noethérien. A partir de la section 2.2.3 on posera $S = \text{Spec}(k)$ avec k un corps de caractéristique nulle.

On notera $m : A \times A \rightarrow A$ la multiplication, $\epsilon : S \rightarrow A$ l'élément neutre et $\langle -1 \rangle : A \rightarrow A$ l'inverse.

2.2.1 Variété abélienne \mathcal{D} -duale

De la même manière que l'on construit la variété abélienne duale de A , notée A^\vee , on peut construire un S -schéma en groupes abéliens, noté A^\natural , qui va induire une dualité sur les modules à connexion intégrable sur A .

On s'efforce ici de donner une synthèse de la construction de ce S -schéma. Pour plus de détails, on renvoie à [Lau96], partie 2.

Définition 2.2.1. Soient $p_1, p_2 : A \times A \rightarrow A$ les projections, $m : A \times A \rightarrow A$ la multiplication et $\epsilon : S \rightarrow A$ l'élément neutre. Pour tout module à connexion intégrable \mathcal{O}_A -inversible \mathcal{E} , on pose

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = m^b \mathcal{E} \otimes p_1^b \mathcal{E}^{-1} \otimes p_2^b \mathcal{E}^{-1},$$

qui est un $\mathcal{D}_{A \times A/S}$ -module $\mathcal{O}_{A \times A}$ -inversible.

On dit que \mathcal{E} satisfait le théorème du carré si la trivialisation canonique de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ le long de $(\epsilon(S) \times A) \cup (A \times \epsilon(S))$ s'étend à $A \times A$ de sorte qu'on ait un isomorphisme de $\mathcal{D}_{A \times A}$ -modules

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{O}_{A \times A},$$

où le faisceau structural est muni de sa structure canonique de \mathcal{D} -module.

Remarques :

- On a déjà une telle notion pour les \mathcal{O}_A -modules inversibles. Il se trouve que ces deux notions coïncident. On renvoie à [Lau96] pour plus de détails.
- m est un morphisme plat. On peut le voir en l'écrivant $m = p_1 \circ (m, \langle -1 \rangle \circ p_2)$, où p_1 est plat et $(m, \langle -1 \rangle \circ p_2)$ est un isomorphisme (il est son propre inverse), donc plat. De fait, $Lm^* = m^*$ et $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est bien un faisceau de $\mathcal{D}_{A \times A/S}$ -modules $\mathcal{O}_{A \times A}$ -inversible.
- Dans le cas où S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, comme ce sera le cas dans la suite du chapitre, les modules à connexion intégrable sont exactement les \mathcal{D} -modules. Dans le cas où S est le spectre d'un anneau à valuation discrète d'inégale caractéristique, ce sont les $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules (au sens de Berthelot).

Définition 2.2.2. On note $\text{Pic}^\natural(A/S)$ le groupe des classes d'isomorphie des \mathcal{O}_A -modules inversibles à connexion intégrable rigidifiés qui satisfont le théorème du carré. On construit alors un foncteur de la catégorie des S -schémas localement noethériens dans la catégorie des groupes abéliens

$$T \mapsto \text{Pic}^\natural(A \times T/T).$$

Ce foncteur est représentable par un S -schéma en groupes abéliens lisse de dimension $2d$ noté A^\natural .

De même que pour la transformée de Fourier-Mukai classique, on définit le faisceau de Poincaré $\mathcal{P} \in \text{Pic}^\natural(A \times A^\natural/A^\natural)$ comme l'élément correspondant à $\text{id}_{A^\natural} \in \text{Hom}(A^\natural, A^\natural)$.

Propriété 2.2.3. On définit $i : H^0(A, \Omega_{A/S}^1) \rightarrow \text{Pic}^{\natural}(A/S)$ et $p : \text{Pic}^{\natural}(A/S) \rightarrow \text{Pic}^0(A/S)$ par $i(\omega) = \mathcal{O}_A$ muni de la connexion intégrable $d + \omega$ et $p(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ vu comme \mathcal{O}_A -module. On a alors la suite exacte de groupes abéliens suivante :

$$E(A/S) = (0 \rightarrow H^0(A, \Omega_{A/S}^1) \rightarrow \text{Pic}^{\natural}(A/S) \rightarrow \text{Pic}^0(A/S)).$$

De plus, si S est affine, le morphisme p est surjectif.

On obtient alors un foncteur $T \mapsto E(A \times T/T)$ de la catégorie des S -schémas localement noethériens dans la catégorie des suites exactes de groupes abéliens. Ce foncteur est représentable par une suite exacte de S -schémas en groupes abéliens :

$$0 \rightarrow \mathbb{V}(\epsilon^* \mathcal{T}_{A/S}) \rightarrow A^{\natural} \rightarrow A^{\vee} \rightarrow 0,$$

où $\mathbb{V}(\mathcal{E}) = \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{E}))$. On notera θ le morphisme de A^{\natural} dans A^{\vee} .

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture des résultats des sections 2.6 et 3.2.3 du chapitre I de [MM74]. □

Remarque : On verra plus tard que θ est un torseur.

Propriété 2.2.4. On a l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{A \times A^{\natural}}$ -modules suivant

$$\mathcal{P} \simeq (id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee},$$

où \mathcal{P}^{\vee} désigne le faisceau de Poincaré sur $A \times A^{\vee}$.

Démonstration. Comme il s'agit de la définition de \mathcal{P} qui est donnée dans [Lau96], il faut justifier que les deux définitions coïncident. Notons $\Phi^{\natural} : \text{Hom}(\bullet, A^{\natural}) \rightarrow \text{Pic}^{\natural}(A \times \bullet/\bullet)$ le morphisme de foncteurs réalisant la représentabilité de $T \mapsto \text{Pic}^{\natural}(A \times T/T)$ par A^{\natural} . On notera Φ_T^{\natural} pour $\Phi^{\natural}(T)$. De même, on posera Φ^0 et Φ_T^0 pour les foncteurs relatifs à Pic^0 et A^{\vee} . On a alors par représentabilité de $T \mapsto (\text{Pic}^{\natural}(A \times T/T) \rightarrow \text{Pic}^0(A \times T/T))$ le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^{\natural}(A \times A^{\natural}/A^{\natural}) & \xrightarrow{\theta_{A^{\natural}}} & \text{Pic}^0(A \times A^{\natural}/A^{\natural}) \\ \Phi_{A^{\natural}}^{\natural} \uparrow & & \uparrow \Phi_{A^{\natural}}^0 \\ \text{Hom}(A^{\natural}, A^{\natural}) & \xrightarrow{\theta_{\bullet}} & \text{Hom}(A^{\natural}, A^{\vee}) \end{array}$$

où le morphisme $\theta_{A^{\natural}}$ consiste en l'oubli de la structure de $\mathcal{D}_{A \times A^{\natural}/A^{\natural}}$ -module. En l'évaluant en l'élément $id_{A^{\natural}} \in \text{Hom}(A^{\natural}, A^{\natural})$ on trouve

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} \\ \uparrow & & \uparrow \\ id_{A^{\natural}} & \xrightarrow{\quad} & \theta \end{array}$$

où le \mathcal{P} de gauche est un \mathcal{D} -module et celui de droite est un \mathcal{O} -module.

D'autre part, comme $\mathcal{P}^{\vee} = \Phi_{A^{\vee}}^0(id_{A^{\vee}})$, le lemme de Yoneda assure que

$$\Phi_{A^{\natural}}^0(\theta) = \left(\text{Pic}^0(A \times \bullet/\bullet)(\theta) \right) (\mathcal{P}^{\vee}) = (id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee}.$$

Ainsi, $\mathcal{P} = \Phi_{A^{\natural}}^0(\theta) = (id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee}$, à isomorphisme près et en tant que \mathcal{O} -module. □

Propriété 2.2.5. *Le morphisme $\theta : A^\natural \rightarrow A^\vee$ est affine.*

Démonstration. On voit $A^\vee \times \mathbb{V}(\epsilon^* \mathcal{T}_{A/S})$ comme le A^\vee -schéma en groupe $\mathbb{V}(\pi^{\vee*} \epsilon^* \mathcal{T}_{A/S})$. Il est affine par définition. Ainsi, θ munit A^\natural d'une structure de A^\vee -schéma. Comme on a aussi une injection $\mathbb{V}(\epsilon^* \mathcal{T}_{A/S}) \rightarrow A^\natural$, on peut voir A^\natural comme fibré principal homogène sous le A^\vee -schéma en groupes $A^\vee \times \mathbb{V}(\epsilon^* \mathcal{T}_{A/S})$. On peut alors appliquer le corollaire 4.3 de la partie XI de [Gro71] : A^\natural est affine sur A^\vee , i.e. θ est affine. □

Propriété 2.2.6. *On note $\mathcal{A}^\natural = \theta_* \mathcal{O}_{A^\natural}$. Le faisceau \mathcal{A}^\natural est muni d'une filtration exhaustive par des sous \mathcal{O}_{A^\vee} -modules localement libres de rang fini qui en fait une \mathcal{O}_{A^\vee} -algèbre filtrée, munie d'un isomorphisme de \mathcal{O}_{A^\vee} -algèbres graduées*

$$\varphi_\bullet : gr_\bullet \mathcal{A}^\natural \rightarrow \pi^{\vee*} Sym_\bullet^{\mathcal{O}_S}(\epsilon^* \mathcal{T}_{A/S}).$$

Démonstration. Ce résultat se trouve dans [Lau96] (partie 2.3). Cependant, on va donner quelques explications supplémentaires sur les constructions qui s'y trouvent. On fixe $\pi : X \rightarrow S$ un S -schéma et \mathcal{E} un \mathcal{O}_S -module. On considère le X -schéma en groupe $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\pi^* \mathcal{E}) = X \times \mathbb{V}(\mathcal{E})$.

Tout d'abord, on note \mathcal{C}_1 la catégorie des fibrés principaux homogènes (aussi appelés torseurs) $t : Y \rightarrow X$ sous le groupe \mathbb{V} . Comme dit précédemment, \mathbb{V} est affine, donc Y l'est aussi.

On considère ensuite la catégorie \mathcal{C}_2 des \mathcal{O}_X -algèbres quasi-cohérentes \mathcal{B} munies d'une filtration exhaustive par des sous \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang fini (\mathcal{B}_i) telles que $\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{i+j}$ et munies d'un isomorphisme de \mathcal{O}_X -algèbres graduées

$$\varphi_\bullet : gr_\bullet \mathcal{B} \rightarrow Sym_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^* \mathcal{E}) \simeq \pi^* Sym_\bullet^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}).$$

On considère enfin la catégorie \mathcal{C}_3 des extensions de $\pi^* \mathcal{E}$ par \mathcal{O}_X dans la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents.

On montre ensuite que ces catégories sont équivalentes. Pour ce faire on construit trois foncteurs. Le foncteur $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ est défini comme suit :

Soit $t : Y \rightarrow X$ un fibré principal homogène sous le groupe \mathbb{V} . On pose $\mathcal{B} = t_* \mathcal{O}_Y$, qui est \mathcal{O}_X -quasi-cohérent car t est affine. On note $\mu : Y \times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \rightarrow Y$ l'action de $\mathbb{V} = X \times_S \mathbb{V}(\mathcal{E})$ sur Y (les variétés sont des X -schémas). On note

$$\mu^\sharp : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_S} \pi^{-1} Sym_\bullet^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$$

l'homomorphisme d'algèbre associé. Ainsi, si on note

$$\mathcal{B}_i = (\mu^\sharp)^{-1} \left(\mathcal{B} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_S} \pi^{-1} \bigoplus_{j=0}^i Sym_j^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \right),$$

(\mathcal{B}_i) est une filtration exhaustive de \mathcal{B} . Il reste donc à construire l'isomorphisme φ_\bullet . Pour ce faire, on part du morphisme

$$\mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_S} \pi^{-1} \bigoplus_{j=0}^i Sym_j^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_S} \pi^{-1} Sym_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}),$$

où la seconde flèche est la projection. On va montrer que ce morphisme (qui se factorise clairement par \mathcal{B}_{i-1}) est à image dans $\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_S} \pi^{-1} Sym_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$. Pour se faire, on raisonne localement. Localement, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_S \bar{\partial}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S \bar{\partial}_r$, ainsi, $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \simeq Spec(\mathcal{O}_S[\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_r])$. De plus, comme localement $Y \simeq \mathbb{V}(\pi^* \mathcal{E})$, $\mathcal{O}_Y \simeq t^{-1} \mathcal{O}_X[\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_r]$ et donc

$$\mathcal{B} \simeq \mathcal{O}_X[\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_r] \simeq Sym_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^* \mathcal{E}) \simeq \pi^* Sym_\bullet^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}).$$

L'action est donc localement donnée par

$$\mu^\sharp : \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}) \rightarrow \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}) \otimes \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}).$$

Ainsi, pour toute section b de \mathcal{B}_i (localement isomorphe à $\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E})$),

$$\mu^\sharp b \in \bigoplus_{k+l=i} \text{Sym}_k^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}) \otimes \text{Sym}_l^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}).$$

La projection de $\mu^\sharp b$ sur $\mathcal{B} \otimes \pi^*\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \simeq \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}) \otimes \pi^*\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$ est donc contenue dans le terme $k=0$ et $l=i$, i.e. $\mathcal{O}_X \otimes \pi^*\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) = \pi^*\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$. On a ainsi obtenu un morphisme

$$\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1} \rightarrow \pi^*\text{Sym}_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}),$$

dont on montre facilement que c'est un isomorphisme, qui est le φ_i recherché.

Pour construire le foncteur $\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$, on fixe $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\bullet, \phi_\bullet)$ un élément de \mathcal{C}_2 . Par définition, on a une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0 \rightarrow 0,$$

avec $\mathcal{B}_0 \simeq \mathcal{O}_X$ (par φ_0) et $\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0 \simeq \pi^*\mathcal{E}$ (par φ_1). On trouve donc bien un élément de \mathcal{C}_3 .

Enfin, on construit un foncteur $\mathcal{C}_3 \rightarrow \mathcal{C}_1$ de la façon suivante : Pour

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \pi^*\mathcal{E} \rightarrow 0$$

un objet de \mathcal{C}_3 , comme $\pi^*\mathcal{E}$ est localement libre, la suite exacte est localement scindée. On va à présent construire ce qui est appelé le X -schéma des scindages dans [Lau96], qui sera le Y cherché. Tout d'abord, remarquons que si $s : \pi^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ réalise un scindage, il induit un isomorphisme $\mathcal{F} \simeq \pi^*\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X$ et vérifie $v \circ s = \text{id}_{\pi^*\mathcal{E}}$. Il est donc déterminé par ses valeurs sur \mathcal{O}_X , i.e. un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$. A présent, si on note $\mathcal{S} = \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E})$, on a $\text{Proj}(\mathcal{F}) \simeq \text{Proj}(\mathcal{S}[z])$ (où z est la coordonnée locale de \mathcal{O}_X dans la décomposition $\mathcal{F} \simeq \pi^*\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X$) et $\text{Spec}(\mathcal{S}) = \mathbb{V}$. D'après la partie 8.3 de [Gro61a], on a l'injection ouverte suivante $\iota : \mathbb{V} \hookrightarrow \text{Proj}(\mathcal{F})$, qui vérifie de plus $\iota(\mathbb{V}) \simeq \text{Proj}(\mathcal{F}) \setminus \text{Proj}(\mathcal{S})$. On note Y ce X -schéma. Par définition, un X -point de Y correspond à un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{V}$, i.e. un morphisme $f^\sharp : \text{Sym}_\bullet^{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_X$, qui est déterminé par un morphisme $\pi^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X$, i.e. un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$, donc un scindage de la suite exacte comme on l'a vu plus haut. Le schéma Y peut donc être considéré comme le schéma des scindages de la suite exacte. Par construction, il est muni d'une structure de \mathbb{V} -torseur, faisant de Y un objet de \mathcal{C}_1 .

On admettra que ces foncteurs réalisent des équivalences de catégories. La propriété se déduit alors en prenant $X = A^\vee$, $Y = A^\natural$ et $\mathcal{E} = \epsilon^*\mathcal{T}_{A/S}$ et en considérant l'image de l'objet $\theta : A^\natural \rightarrow A^\vee$ de la catégorie \mathcal{C}_1 dans la catégorie \mathcal{C}_2 . □

Remarque : Pour démontrer la propriété, on n'a en fait besoin que de la construction du foncteur $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$.

Propriété 2.2.7. *On se place dans le cas où S est de caractéristique nulle. Le morphisme d'adjonction $\mathcal{O}_S \rightarrow R\pi_*^\natural \mathcal{O}_{A^\natural}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. A nouveau, il s'agit d'un résultat de [Lau96] (Th. 2.4.1) dont on va détailler un peu plus la preuve. On rappelle que $\mathcal{A}^\natural = \theta_* \mathcal{O}_{A^\natural}$.

Comme \mathcal{A}^\natural est muni d'une filtration, on peut considérer la suite spectrale

$$E_1^{pq} = R^{p+q}\pi_*^\vee \text{gr}_{-p}\mathcal{A}^\natural \Rightarrow R^{p+q}\pi_*^\vee \mathcal{A}^\natural = R^{p+q}\pi_*^\natural \mathcal{O}_{A^\natural}.$$

Le but est de montrer que

$$E_2^{pq} = \begin{cases} \mathcal{O}_S & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui induira naturellement le résultat. Or, par définition, $E_2^{pq} = H^2(E_1^{pq})$ (voir [Gro61b], partie 11.1). De plus, E_1^{pq} est clairement nul pour $p > 0$ ou $p + q \notin [0, d]$, ainsi il suffit de montrer que pour tout entier $p < 0$ le complexe de \mathcal{O}_S -modules

$$0 \rightarrow E_1^{p,-p} \rightarrow E_1^{p+1,-p} \rightarrow \dots \rightarrow E_1^{p',-p},$$

où $p' = \text{Inf}(0, p + d)$, est acyclique.

Or, l'isomorphisme φ_{-p} construit plus haut donne un isomorphisme

$$E_1^{pq} = R^{p+q}\pi_*^\vee g_{r-p}\mathcal{A}^{\natural} \simeq R^{p+q}\pi_*^\vee \pi^{\vee*} \text{Sym}_{-p}^{\mathcal{O}_S}(\epsilon^*\mathcal{T}_{A/S}).$$

Dans la suite on notera $\mathcal{S} = \text{Sym}_{-p}^{\mathcal{O}_S}(\epsilon^*\mathcal{T}_{A/S})$. Comme π^\vee est plat, la formule de la projection s'écrit $R\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee} \otimes \mathcal{S} \simeq R\pi_*^\vee \pi^{\vee*} \mathcal{S}$, ainsi, en considérant le $(p+q)$ -ième groupe de cohomologie du complexe, on trouve

$$(R^{p+q}\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee}) \otimes \mathcal{S} \simeq R^{p+q}\pi_*^\vee \pi^{\vee*} \mathcal{S}.$$

On en déduit donc que

$$E_1^{pq} \simeq (R^{p+q}\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee}) \otimes \mathcal{S}.$$

On va à présent chercher à mieux comprendre le terme $R^{p+q}\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee}$. Pour ce faire, on dispose tout d'abord du résultat suivant

Lemme 2.2.8.

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_A \simeq \epsilon^{\vee*}\mathcal{T}_{A^\vee/S}.$$

Démonstration. On renvoie à [BLR90], Théorème 1 de la partie 8.4. □

Comme $(A^\vee)^\vee \simeq A$, on en déduit que

$$R^1\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee} \simeq \epsilon^*\mathcal{T}_{A/S}.$$

Enfin, le cup-produit donne un morphisme

$$\bigwedge_{\mathcal{O}_S}^{p+q} R^1\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee} \rightarrow R^{p+q}\pi_*^\vee \mathcal{O}_{A^\vee},$$

qui donne localement

$$\bigwedge^{p+q} H^1(A^\vee, \mathcal{O}_{A^\vee}) \rightarrow H^{p+q}(A^\vee, \mathcal{O}_{A^\vee}),$$

qu'on sait être un isomorphisme pour les variétés abéliennes (voir par exemple [EvdGM], théorème 6.12 et son corollaire). On en déduit donc que

$$E_1^{pq} \simeq \left(\bigwedge_{\mathcal{O}_S}^{p+q} \epsilon^*\mathcal{T}_{A/S} \right) \otimes \text{Sym}_{-p}^{\mathcal{O}_S}(\epsilon^*\mathcal{T}_{A/S}).$$

Le complexe qu'on étudie est donc un complexe de Koszul, qu'on sait acyclique car S est de caractéristique nulle. □

2.2.2 Transformées de Fourier-Mukai de noyau quelconque

Les résultats de cette section sont un ajout par rapport à [Lau96].

De la même manière qu'on peut construire des transformées de Fourier de noyau quelconque sur les \mathcal{O} -modules, on peut définir trois types de transformées de Fourier de noyau quelconque sur les \mathcal{D} -modules, selon que le noyau possède une structure de \mathcal{D} -module complète ou relative.

On rappelle tout d'abord la définition classique.

Définition 2.2.9. Soient X et Y deux variétés projectives lisses et $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X \times Y})$. On pose $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ les projections. La transformée de Fourier-Mukai de noyau \mathcal{P} est le foncteur $\Phi_{\mathcal{P}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_X) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_Y)$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}^\bullet) = Rq_*(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} p^* \mathcal{E}^\bullet).$$

Une des propriétés les plus utiles pour montrer l'involutivité de la transformée de Fourier-Mukai classique de noyau de Poincaré est la suivante :

Propriété 2.2.10. Soient X, Y et Z trois variétés projectives lisses. Soient de plus $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X \times Y})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{Y \times Z})$. On note π_{XY}, π_{YZ} et π_{XZ} les projections de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y, Y \times Z$ et $X \times Z$ respectivement. On pose enfin

$$\mathcal{R} = R\pi_{XZ*}(\pi_{XY}^* \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y \times Z}}^{\mathbb{L}} \pi_{YZ}^* \mathcal{Q}).$$

Alors $\Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}$.

Démonstration. On renvoie à [Huy06], proposition 5.10. □

Le but de cette section est de donner une définition des transformées de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules et de retrouver un résultat similaire au précédent.

Définition 2.2.11. Soient X et Y deux variétés projectives lisses. Soient de plus $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/S})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/Y})$. On pose $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ les projections.

- La transformée de Fourier-Mukai de noyau \mathcal{P} est le foncteur $\Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{D}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y/S})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^\bullet) = q_+(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} p^b \mathcal{E}^\bullet).$$

- La transformée de Fourier-Mukai de X dans Y de noyau \mathcal{Q} (relatif à Y) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_Y)$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}^\bullet) = q_{+/Y}(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} p^{!(Y)} \mathcal{E}^\bullet),$$

où la structure de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -module de $\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} p^! \mathcal{E}^\bullet$ est la structure classique du produit tensoriel sur la Y -variété $X \times Y$. On rappelle que $q_{+/Y}$ correspond à la restriction de q_+ aux \mathcal{D} -modules relatifs à Y (voir Prop 2.1.4 p.36), le faisceau ainsi obtenu est donc bien un module sur $\mathcal{D}_{Y/Y} = \mathcal{O}_Y$.

- La transformée de Fourier-Mukai de Y dans X de noyau \mathcal{Q} (relatif à Y) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \leftarrow Y} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_Y) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \leftarrow Y}(\mathcal{E}^\bullet) = p_+^{(Y)}(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} q^* \mathcal{E}^\bullet),$$

où la structure de $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}$ -module de $\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^{\mathbb{L}} q^* \mathcal{E}^\bullet$ est donnée par celle de \mathcal{Q} .

Remarques :

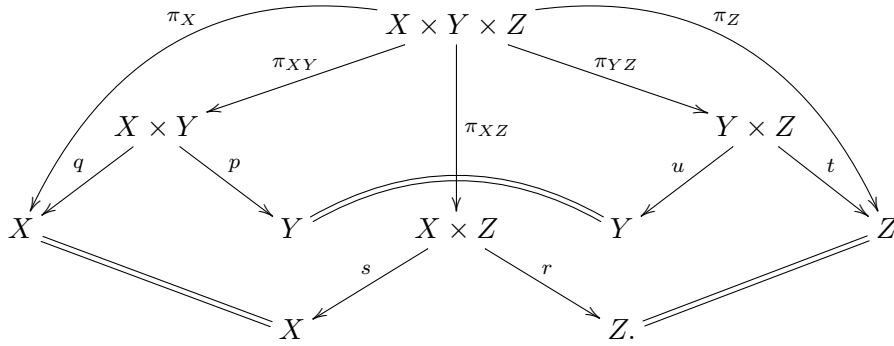
- Dans la définition de $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \leftarrow Y}$ on pourrait prendre $q^b_{/Y} \mathcal{E}$ au lieu de $q^* \mathcal{E}$ pour avoir une écriture similaire aux deux autres. Comme $\mathcal{D}_{Y/Y} = \mathcal{O}_Y$, les foncteurs $q^b_{/Y}$ et q^* sont égaux. \mathcal{E} étant un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules, on préférera q^* , mais il faut garder à l'esprit cette égalité de foncteurs pour les démonstrations à venir.
- Les transformées de Fourier-Mukai construites sont bien à images quasi-cohérentes. C'est une conséquence de la préservation de la quasi-cohérence par image inverse (propriété 2.1.7 p.39 dans le cas relatif), image directe (propriété 2.1.13 p.41 dans le cas relatif) et produit tensoriel sur $\mathcal{O}_{X \times Y}$ ([HTT08], section 1.5, sous-section "tensor product").

Propriété 2.2.12. Soient X, Y et Z trois S -schémas quasi-compacts et lisses avec X et Z propres. Soient $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/Y})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/Y})$. On note π_{XY}, π_{YZ} et π_{XZ} les projections de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y, Y \times Z$ et $X \times Z$ respectivement. On pose enfin

$$\mathcal{R} = \pi_{XZ+}^{(Y)} (\pi_{XY/Y}^b \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y \times Z}}^{\mathbb{L}} \pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/S}).$$

Alors $\Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \leftarrow Y} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$.

Démonstration. On pose les notations suivantes



Dans la suite, on notera $\otimes = \otimes_{\mathcal{O}}^{\mathbb{L}}$. On fixe $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X/S})$ et on calcule $\Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned}
r_+(\mathcal{R} \otimes s^b \mathcal{E}) &= r_+ \left(\pi_{XZ+}^{(Y)} (\pi_{XY/Y}^b \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q}) \otimes s^b \mathcal{E} \right) \\
&\simeq r_+ \left(\pi_{XZ+}^{(Y)} (\pi_{XY/Y}^b \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q} \otimes \pi_{XZ}^{!(Y)} s^b \mathcal{E}) \right) && \text{(Projection ; Propriété 2.1.21, p.44)} \\
&\simeq r_+ \pi_{XZ+}^{(Y)} (\pi_{XY/Y}^b \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/Y}^b q^{!(Y)} \mathcal{E}) && \text{(Propriété 2.1.26, p.46)} \\
&\simeq r_+ \pi_{XZ+}^{(Y)} (\pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/Y}^b (\mathcal{P} \otimes q^{!(Y)} \mathcal{E})) \\
&\simeq t_+^{(Y)} \pi_{YZ+ / Y} (\pi_{YZ/Y}^b \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/Y}^b (\mathcal{P} \otimes q^{!(Y)} \mathcal{E})) && \text{(Propriété 2.1.28, p.47)} \\
&\simeq t_+^{(Y)} (\mathcal{Q} \otimes \pi_{YZ+ / Y} \pi_{XY/Y}^b (\mathcal{P} \otimes q^{!(Y)} \mathcal{E})) && \text{(Projection ; Propriété 2.1.20, p.44)} \\
&\simeq t_+^{(Y)} (\mathcal{Q} \otimes u^b_{/Y} p_{+/Y} (\mathcal{P} \otimes q^{!(Y)} \mathcal{E})) && \text{(Théorème 2.1.31, p.49)} \\
&= t_+^{(Y)} (\mathcal{Q} \otimes u^* p_{+/Y} (\mathcal{P} \otimes q^{!(Y)} \mathcal{E})) && (u^b_{/Y} = u^*) \\
&= \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \leftarrow Y} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} (\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

□

Propriété 2.2.13. Soient X, Y et Z trois S -schémas quasi-compacts et lisses avec Y propre. Soient $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/X})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/Z})$. On note π_{XY}, π_{YZ} et π_{XZ} les projections de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y, Y \times Z$ et $X \times Z$ respectivement. On pose enfin

$$\mathcal{R} = \pi_{XZ+X \times Z}(\pi_{XY/X}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y \times Z}}^{\mathbb{L}} \pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X \times Y}).$$

$$\text{Alors } \Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow Z} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \leftarrow X} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}.$$

Démonstration. On conserve les notations de la preuve précédente. Remarquons qu'en voyant un $\mathcal{O}_{X \times Z}$ -module \mathcal{F} comme un $\mathcal{D}_{X \times Z/X \times Z}$ -module, on a $Rr_* \mathcal{F} = r_{+/Z}^{(X)} \mathcal{F}$ comme $\mathcal{D}_{Z/Z}$ -module, i.e. comme \mathcal{O}_Z -module. De même, $s^* \mathcal{E} = s_{/X}^{!(Z)} \mathcal{E}$ comme $\mathcal{O}_{X \times Z}$ -module.

On fixe $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_X)$ et on calcule $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} Rr_*(\mathcal{R} \otimes s^* \mathcal{E}) &= r_{+/Z}^{(X)} \left(\pi_{XZ+X \times Z}(\pi_{XY/X}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q}) \otimes s_{/X}^{!(Z)} \mathcal{E} \right) \\ &\simeq r_{+/Z}^{(X)} \left(\pi_{XZ+X \times Z}(\pi_{XY/X}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q} \otimes \pi_{XZ/X \times Z}^{!(Z)} \mathcal{E}) \right) \quad (\text{Proj. ; Prop. 2.1.20, p.44}) \\ &\simeq r_{+/Z}^{(X)} \pi_{XZ+X \times Z}(\pi_{XY/X}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/X}^{!(Z)} q_{/X}^b \mathcal{E}) \quad (\text{Propriété 2.1.26, p.46}) \\ &\simeq r_{+/Z}^{(X)} \pi_{XZ+X \times Z}(\pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/X}^{!(Z)} (\mathcal{P} \otimes q_{/X}^b \mathcal{E})) \\ &\simeq t_{+/Z} \pi_{YZ+Z}^{(X)}(\pi_{YZ/Z}^{!(X)} \mathcal{Q} \otimes \pi_{XY/X}^{!(Z)} (\mathcal{P} \otimes q_{/X}^b \mathcal{E})) \quad (\text{Propriété 2.1.28, p.47}) \\ &\simeq t_{+/Z} (\mathcal{Q} \otimes \pi_{YZ+Z}^{(X)} \pi_{XY/X}^{!(Z)} (\mathcal{P} \otimes q_{/X}^b \mathcal{E})) \quad (\text{Proj. ; Prop. 2.1.21, p.44}) \\ &\simeq t_{+/Z} (\mathcal{Q} \otimes u^{!(Z)} p_+^{(X)} (\mathcal{P} \otimes q_{/X}^b \mathcal{E})) \quad (\text{Corollaire 2.1.35, p.51}) \\ &\simeq t_{+/Z} (\mathcal{Q} \otimes u^{!(Z)} p_+^{(X)} (\mathcal{P} \otimes q^* \mathcal{E})) \quad (q_{/X}^b = q^*) \\ &= \Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow Z} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \leftarrow X}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

□

Remarque : Il est sûrement possible de déterminer les autres composées et il est naturel de penser que

- Dans le cas relatif à S , $\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{D}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$, avec $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/S})$, $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/S})$ et $\mathcal{R} = \pi_{XZ+X}(\pi_{XY}^b \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^b \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/S})$.
- Dans le cas relatif à X , $\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \leftarrow X} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{Z \leftarrow X}$, avec $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/X})$, $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/S})$ et $\mathcal{R} = \pi_{XZ+X}(\pi_{XY/X}^b \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^{!(X)} \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/X})$.
- Dans le cas relatif à Z , $\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow Z} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{D}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{X \rightarrow Z}$, avec $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/S})$, $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/Z})$ et $\mathcal{R} = \pi_{XZ+Z}(\pi_{XY}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Z}^b \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/Z})$.
- Dans le cas relatif à X et Y , $\Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \leftarrow Y} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{Z \leftarrow X}$, avec $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X \times Y})$, $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y \times Z/Y})$ et $\mathcal{R} = \pi_{XZ+X}^{(Y)}(\pi_{XY}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ/Y}^{!(X)} \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/X})$.
- Dans le cas relatif à Y et Z , $\Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{X \rightarrow Z}$, avec $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Y/Y})$, $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{Y \times Z})$ et $\mathcal{R} = \pi_{XZ+Z}^{(Y)}(\pi_{XY/Y}^{!(Z)} \mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^* \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X \times Z/Z})$.

Nous n'aurons cependant pas besoin de tous ces résultats dans la suite.

2.2.3 Transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré

A partir de maintenant, on suppose que S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle k . On fait cette hypothèse pour simplifier grandement les démonstrations. En rajoutant plus de détails il devrait être possible d'étendre les résultats à S localement noethérien de caractéristique nulle.

Définition 2.2.14. Soient A une variété abélienne sur S de dimension d , A^\natural son S -schéma en groupes abéliens \mathcal{D} -dual et \mathcal{P} le faisceau de Poincaré sur $A \times A^\natural$ (qui est un $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -module, $\mathcal{O}_{A \times A^\natural}$ -inversible). On note $p : A \times A^\natural \rightarrow A$ et $p^\natural : A \times A^\natural \rightarrow A^\natural$ les projections.

On définit la transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural})$ par

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\bullet) = \Phi_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow A^\natural}(\mathcal{E}^\bullet) = p_{+/A^\natural}^\natural(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{!(A^\natural)} \mathcal{E}^\bullet).$$

On définit aussi la transformée de Fourier-Mukai \mathcal{D} -duale $\mathcal{F}^\natural : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$ par

$$\mathcal{F}^\natural(\mathcal{E}^\bullet) = \Phi_{\mathcal{P}}^{A \leftarrow A^\natural}(\mathcal{E}^\bullet) = p_+^{(A^\natural)}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{\natural*} \mathcal{E}^\bullet).$$

On conserve une propriété d'involutivité sur ces transformées de Fourier-Mukai, mais pour la démontrer on va avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.15. On désigne par $\epsilon : S \rightarrow A$ et $\epsilon^\natural : S \rightarrow A^\natural$ les éléments neutres de A et A^\natural . On a les deux isomorphismes suivants

1. $p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P} \simeq \epsilon_*^\natural \mathcal{O}_S[-d]$ (comme complexes de \mathcal{O}_{A^\natural} -modules).
2. $p_+^{(A^\natural)} \mathcal{P} \simeq \epsilon_+ \mathcal{O}_S[-d]$ (comme complexes de $\mathcal{D}_{A/S}$ -modules).

Démonstration. Ce lemme est énoncé dans [Lau96] (Lemme 3.2.2), on va donc suivre la preuve qui y est proposée tout en donnant plus de détails.

1. Pour montrer le premier isomorphisme, on va chercher à construire un morphisme entre $p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P}$ et $\epsilon_*^\natural \mathcal{O}_S[-d]$. On considère le diagramme de changement de base suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A \times \epsilon^\natural} & A \times A^\natural \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^\natural \\ S & \xrightarrow{\epsilon^\natural} & A^\natural \end{array}$$

Comme on cherche un morphisme de \mathcal{O} -modules on peut oublier les structures de \mathcal{D} -modules. Ce faisant, $p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P} \simeq Rp_{*}^\natural(DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P}))$ (voir [HTT08] prop 1.5.28), où $DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P})$ est le complexe de de Rham de \mathcal{P} , concentré entre les degrés $-d$ et 0 :

$$DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P}) : 0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \Omega_{A \times A^\natural/A^\natural}^1 \otimes \mathcal{P} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{A \times A^\natural/A^\natural}^d \otimes \mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Le théorème du changement de base donne alors

$$(\epsilon^\natural)^\flat p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P} \simeq L\epsilon^{\natural*} Rp_{*}^\natural DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P}) \simeq R\pi_* L(id_A \times \epsilon^\natural)^* DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P}),$$

qui est isomorphe par platitude des termes de $DR_{A \times A^\natural/A^\natural}(\mathcal{P})$ à $R\pi_* DR_{A/S}(L(id_A \times \epsilon^\natural)^* \mathcal{P})$. Cependant, comme \mathcal{P} est inversible, il est plat sur \mathcal{O}_A , ainsi $L(id_A \times \epsilon^\natural)^* \mathcal{P} \simeq (id_A \times \epsilon^\natural)^* \mathcal{P} \simeq (id_A \times \epsilon^\natural)^{!(A^\natural)} \mathcal{P}$ (comme \mathcal{O}_A -modules).

Lemme 2.2.16. Comme $\mathcal{D}_{A/S}$ -modules,

$$(id_A \times \epsilon^{\natural})^{!(A^{\natural})} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_A.$$

Démonstration. Si on note $\Phi_T^{\natural} : Hom(T, A^{\natural}) \rightarrow Pic^{\natural}(A \times T/T)$ l'isomorphisme de groupes donnant la représentation du foncteur Pic^{\natural} par A^{\natural} , on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Pic^{\natural}(A \times A^{\natural}/A^{\natural}) & \xrightarrow{(id_A \times \epsilon^{\natural})^{!(A^{\natural})}} & Pic^{\natural}(A/S) \\ \uparrow \Phi_{A^{\natural}}^{\natural} & & \uparrow \Phi_S^{\natural} \\ Hom(A^{\natural}, A^{\natural}) & \xrightarrow{\epsilon^{\natural} \circ \bullet} & Hom(S, A^{\natural}). \end{array}$$

Comme $\mathcal{P} = \Phi_{A^{\natural}}^{\natural}(id_{A^{\natural}})$ par construction, $(id_A \times \epsilon^{\natural})^{!(A^{\natural})} \mathcal{P} = \Phi_S^{\natural}(\epsilon^{\natural})$. Or la structure de groupe de $Hom(T, A^{\natural})$ est donnée par $(f \times g)(x) = m^{\natural}(f(x), g(x))$ (où m^{\natural} est la multiplication de A^{\natural}), donc ϵ^{\natural} est l'élément neutre de $Hom(S, A^{\natural})$. Ainsi, $\Phi_S^{\natural}(\epsilon^{\natural})$ est l'élément neutre de $Pic^{\natural}(A/S)$, c'est à dire \mathcal{O}_A . \square

Ainsi, $\epsilon^{\natural} p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq R\pi_* DR_{A/S} \mathcal{O}_A$, qui est donc un complexe dont la cohomologie est concentré entre les degrés $-d$ et d . Or le d -ième groupe de cohomologie de $R\pi_* DR_{A/S} \mathcal{O}_A$ est $\mathcal{H}_{dR}^{2d}(A/S) = \mathcal{H}^d(\Omega_{A/S}^d)$ qui est isomorphe par le morphisme trace à $\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_A)^{\vee} \simeq \mathcal{O}_S$.

Si on pose $F^{\bullet} = R\pi_* DR_{A/S} \mathcal{O}_A$, on trouve un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{-d} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F^{d-1} & \xrightarrow{d_{d-1}} & F^d & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F^d / Im(d_{d-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \parallel & & \\ & & & & & & & & \mathcal{H}^d(F^{\bullet}) \simeq \mathcal{O}_S, & & \end{array}$$

c'est-à-dire un morphisme

$$\epsilon^{\natural} p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}_S[-d].$$

Par adjonction, on trouve un morphisme

$$p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d].$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, on procède par étapes. On étudie d'abord les points de A^{\natural} (i.e. les éléments de $Pic^{\natural}(A/S)$), puis on montre le résultat au-dessus de chaque point de A^{\natural} avant de conclure grâce à la cohérence des faisceaux.

Étape 1 : On va montrer le lemme suivant

Lemme 2.2.17. On rappelle que $S = Spec(k)$ avec k un corps de caractéristique nulle. Pour tout $\mathcal{L} \in Pic^{\natural}(A/S)$

$$H_{dR}^{i+d}(\mathcal{L}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_A \\ L_{d-i} \epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} k & \text{si } \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A \end{cases}.$$

Démonstration. Dans un premier temps, supposons que $\mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_A$. On va tout d'abord montrer que $H_{dR}^0(\mathcal{L})$ est nul.

Notons $H^0 = H_{dR}^0(\mathcal{L})$ ainsi que $r = \dim(H^0)$. On construit $\mathcal{O}_A \otimes_k H^0$ le module à connexion donné par $\partial(f \otimes e) = (\partial f) \otimes e$ et la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_A \otimes_k H^0 \xrightarrow{u} \mathcal{L} \xrightarrow{v} \mathcal{L}' \rightarrow 0,$$

de sorte que $u(\partial(f \otimes e)) = u(\partial f \otimes e) = \partial f \cdot e = \partial(f \cdot e) = \partial(u(f \otimes e))$. La catégorie des modules à connexion étant abélienne, il s'agit d'une suite exacte de modules à connexion. Ainsi, \mathcal{L}' est un module à connexion sur k de caractéristique nulle donc \mathcal{L}' est localement libre de rang r' . Or $\mathcal{O}_X \otimes_k H^0$ est localement libre de rang r par construction et \mathcal{L} est localement libre de rang 1 car il est dans $Pic^{\natural}(A/S)$. On déduit de la suite exacte que $1 = r + r'$. Cependant, si on avait $r = 1$ alors $H^0 = k$, $r' = 0$ et $\mathcal{L}' = 0$. On aurait alors $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_A \otimes_k H^0 \simeq \mathcal{L}$, ce qui est exclu. Ainsi, $r = 0$ et $H^0(\mathcal{L}) = 0$.

Supposons à présent qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $H^n(\mathcal{L}) \neq 0$. On prend n_0 le plus petit de ces entiers. Comme \mathcal{L} vérifie le théorème du carré, si on note $p_1, p_2, m : A \times A \rightarrow A$ les projections et la multiplication, on a

$$p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \simeq m^* \mathcal{L}.$$

La formule de Künneth donne alors pour tout entier n

$$H_{dR}^n(m^* \mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_{dR}^i(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^j(\mathcal{L}).$$

Or on peut aussi écrire $m = p_1 \circ (m, \langle -1 \rangle \circ p_2)$, où $(m, \langle -1 \rangle \circ p_2)$ est un isomorphisme (il est son propre inverse), de sorte que

$$H_{dR}^n(m^* \mathcal{L}) = H_{dR}^n((m, \langle -1 \rangle \circ p_2)^* p_1^* \mathcal{L}) \simeq H_{dR}^n(p_1^* \mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_{dR}^i(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^j(\mathcal{O}_A),$$

le dernier morphisme étant à nouveau donné par la formule de Künneth. Comme $H_{dR}^0(\mathcal{O}_A) = k \neq 0$, en $n_0 > 0$ on trouve

$$0 = \bigoplus_{i+j=n_0} H_{dR}^i(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^j(\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{i+j=n_0} H_{dR}^i(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^j(\mathcal{O}_A) \simeq H^{n_0}(\mathcal{L}) \neq 0,$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, si $\mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_A$, $H_{dR}^{i+d}(\mathcal{L}) = 0$.

Considérons maintenant le cas où $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A$. On cherche donc à calculer $H_{dR}^i(A/k)$. Dans un premier temps, on sait que sur une variété abélienne

$$H_{dR}^i(A/k) \simeq \bigwedge^i H_{dR}^1(A/k)$$

(voir par exemple [Mum85], corollaire I.1). Or on sait que $H_{dR}^1(A/k)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de A^{\natural} , $Lie(A^{\natural})$ (voir [MM74], parties I.4.1 et I.4.2. Attention, dans cet ouvrage A^{\natural} est noté $\underline{Ext}^{\natural}$). On cherche donc à faire le lien entre l'algèbre de Lie de A^{\natural} et $L\epsilon^{\natural*} \epsilon_{*}^{\natural} k$. Pour ce faire, on va devoir s'appuyer sur le lemme suivant

Lemme 2.2.18.

$$(\epsilon^{\natural})^{-1} \mathcal{E}xt_{A^{\natural}}^i(\epsilon_{*}^{\natural} k, \epsilon_{*}^{\natural} k) \simeq \bigwedge^i Lie(A^{\natural}).$$

Démonstration. Notons \mathcal{I} l'idéal associé à l'injection ϵ^\natural , $\mathcal{I} = V(x_1, \dots, x_{2d})$ et $R = \bigoplus_{i=1}^{2d} \mathcal{O}_{A^\natural} e_i$. On a alors

$$\text{Lie}(A^\natural) = \epsilon^{\natural*} \mathcal{T}_{A^\natural/S} = \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \right)^\vee.$$

On considère à présent le complexe de Koszul suivant (qui est donc exact)

$$0 \rightarrow \bigwedge^n R \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^2 R \rightarrow R \rightarrow \mathcal{O}_{A^\natural} \rightarrow \epsilon_*^\natural k \rightarrow 0,$$

où la flèche $R \rightarrow \mathcal{O}_{A^\natural}$ est définie par $e_i \mapsto x_i$. En appliquant $\text{Hom}(\bullet, \epsilon_*^\natural k)$, on trouve le complexe

$$\begin{array}{ccccccc} \epsilon_*^\natural k & \longrightarrow & \text{Hom}(R, \epsilon_*^\natural k) & \longrightarrow & \text{Hom}(\bigwedge^2 R, \epsilon_*^\natural k) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \epsilon_*^\natural k \otimes_{\mathcal{O}_{A^\natural}} R^\vee & & \epsilon_*^\natural k \otimes_{\mathcal{O}_{A^\natural}} (\bigwedge^2 R)^\vee & & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ \epsilon_*^\natural k & \longrightarrow & \epsilon_*^\natural k \otimes \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \right)^\vee & \xrightarrow{d_0} & \epsilon_*^\natural k \otimes \left(\bigwedge^2 \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \right)^\vee & \xrightarrow{d_1} & \dots \end{array}$$

Si on note $(\partial_{l_1, \dots, l_i})$ la base duale de $(x_{l_1} \wedge \dots \wedge x_{l_i})$ dans $(\bigwedge^i \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$, les différentielles sont données par

$$d_i : \partial_{l_1, \dots, l_i} \mapsto \sum_k \bar{x}_k \otimes \partial_{k, l_1, \dots, l_i},$$

avec la convention $\partial_{i,j} = -\partial_{j,i}$, où \bar{x}_k est la coordonnée x_k vue dans $\epsilon_*^\natural k = \mathcal{O}_{A^\natural}/\mathcal{I}$, c'est à dire que $\bar{x}_k = 0$ et donc $d_i = 0$. Ainsi, le i -ème groupe de cohomologie de ce complexe est donc

$$\mathcal{E}xt^i(\epsilon_*^\natural k, \epsilon_*^\natural k) \simeq \epsilon_*^\natural k \otimes_k \bigwedge^i \text{Lie}(A^\natural),$$

qui induit l'isomorphisme

$$(\epsilon^\natural)^{-1} \mathcal{E}xt^i(\epsilon_*^\natural k, \epsilon_*^\natural k) \simeq \bigwedge^i \text{Lie}(A^\natural).$$

□

On déduit donc que $H_{dR}^i(A/k) \simeq (\epsilon^\natural)^{-1} \mathcal{E}xt^i(\epsilon_*^\natural k, \epsilon_*^\natural k)$. De plus, comme $\epsilon_*^\natural = R\epsilon_*^\natural$, l'adjonction donne un isomorphisme

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_A}(\epsilon_*^\natural k, \epsilon_*^\natural k) \simeq \epsilon_*^\natural R\mathcal{H}om_k(L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^\natural k, k).$$

On obtient alors un isomorphisme

$$H_{dR}^i(A/k) \simeq \mathcal{H}^i(R\mathcal{H}om_k(L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^\natural k, k)) = \mathcal{H}om_k(L_{2d-i} \epsilon^{\natural*} \epsilon_*^\natural k, k) \simeq L_{2d-i} \epsilon^{\natural*} \epsilon_*^\natural k.$$

□

Étape 2 : On montre que le morphisme $p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^\natural \mathcal{O}_S[-d]$ induit un isomorphisme sur chaque point de A^\natural .

Lemme 2.2.19. *Pour tout $x \in A^{\natural}$ on pose $\iota_x : S \simeq \{x\} \hookrightarrow A^{\natural}$ l'injection.*

Alors pour tout $x \in A^{\natural}$

$$L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota_x^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d].$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que le morphisme

$$L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow L\iota_x^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d],$$

est bien défini, étant donné que c'est le tiré en arrière du morphisme $p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d]$ précédemment construit par ι_x . Comme $\epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S = \epsilon_*^{\natural} k$ est à support dans $\epsilon^{\natural}(k) =: e^{\natural}$, il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \forall x \in A^{\natural} \setminus \{e^{\natural}\}, & L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} = 0. \\ L\iota_{e^{\natural}}^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota_{e^{\natural}}^* \epsilon_*^{\natural} k[-d]. \end{cases}$$

Or la formule du changement de base dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A \times \iota_x} & A \times A^{\natural} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^{\natural} \\ S & \xrightarrow{\iota_x} & A^{\natural} \end{array}$$

donne l'isomorphisme

$$L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq \pi_+ L(id_A \times \iota_x)^* \mathcal{P}.$$

Par définition de \mathcal{P} , $L(id_A \times \iota_x)^* \mathcal{P} = (id_A \times \iota_x)^* \mathcal{P}$ est l'élément de $Pic^{\natural}(A/S)$ correspondant à ι_x (et donc à $x \in A^{\natural}$). On note \mathcal{L} cet élément. Comme $\pi_+ \mathcal{L} \simeq H_{dR}^{\bullet-d}(\mathcal{L})$, le lemme précédent donne donc

$$L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_A \text{ i.e. } x \neq e^{\natural}. \\ L\epsilon_*^{\natural} \epsilon_*^{\natural} k[-d] & \text{si } \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A \text{ i.e. } x = e^{\natural}. \end{cases}$$

Enfin, par définition, $\iota_{e^{\natural}} = \epsilon^{\natural}$, donc $L\iota_{e^{\natural}}^* \epsilon_*^{\natural} k = L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} k$. On en déduit donc l'isomorphisme

$$L\iota_x^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota_x^* \epsilon_*^{\natural} k[-d].$$

□

Étape 3 : Pour conclure, on remarque que comme $p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq Rp_*^{\natural} DR_{A \times A^{\natural}/A^{\natural}}(\mathcal{P})$ et que

$$Rp_*^{\natural}(\Omega_{A \times A^{\natural}/A^{\natural}}^i \otimes \mathcal{P}) \simeq L\theta^* \mathcal{F}^{\vee}(\Omega_{A/S}^i)$$

est cohérent (avec \mathcal{F}^{\vee} la transformée de Fourier-Mukai sur les \mathcal{O} -modules, qui envoie les cohérents sur les cohérents), $p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}$ est un complexe de faisceaux cohérents. D'autre part, $\epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S$ est lui aussi cohérent car ϵ^{\natural} est une immersion fermée. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 2.2.20. *Soient X un schéma localement noethérien et $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_X)$ tel que pour tout point fermé $\{x\}$ de X*

$$L\iota_x^* \mathcal{E} = 0.$$

Alors $\mathcal{E} = 0$.

Démonstration. Par dévissage, on se ramène au cas où le complexe est réduit à un terme, i.e. \mathcal{E} un faisceau cohérent sur X . Dans ce cas, le lemme de Nakayama assure que si $l_x^* \mathcal{E} = 0$ pour tout point fermé $x \in X$ alors $\mathcal{E} = 0$. \square

Ainsi, on en déduit l'isomorphisme

$$p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P} \simeq \epsilon_*^\natural \mathcal{O}_S[-d].$$

2. Pour le second isomorphisme, on utilise le théorème d'équivalence de Kashiwara (voir [HTT08], théorème 1.6.1), de sorte qu'il nous suffit de montrer que $p_+^{(A^\natural)} \mathcal{P}$ est à support dans $\epsilon(S)$ et que $\epsilon^! p_+^{(A^\natural)} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_S[-d]$. La seconde condition peut se réécrire $L\epsilon^* R p_* \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_S$.

Montrons d'abord la seconde condition : la formule de changement de base donne

$$L\epsilon^* R p_* \mathcal{P} \simeq R\pi_*^\natural L(\epsilon \times id_{A^\natural})^* \mathcal{P}.$$

Or \mathcal{P} vérifie le théorème du carré car il est dans $Pic(A \times A^\natural/A^\natural)$, donc

$$L\tilde{p}_1^* \mathcal{P} \otimes L\tilde{p}_2^* \mathcal{P} \simeq L\tilde{m}^* \mathcal{P},$$

où $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{m} : (A \times A^\natural) \times_{A^\natural} (A \times A^\natural) \rightarrow A \times A^\natural$ sont les projections et la multiplication associées au A^\natural -schéma en groupes abéliens $A \times A^\natural$. On note

$$\varphi : A \times A^\natural \times A \simeq (A \times A^\natural) \times_{A^\natural} (A \times A^\natural)$$

l'isomorphisme canonique. On trouve alors l'isomorphisme de \mathcal{O}_{A^\natural} -modules

$$L(\epsilon \times id_{A^\natural} \times \epsilon)^* \varphi^* (L\tilde{p}_1^* \mathcal{P} \otimes L\tilde{p}_2^* \mathcal{P}) \simeq L(\epsilon \times id_{A^\natural} \times \epsilon)^* \varphi^* L\tilde{m}^* \mathcal{P}.$$

Comme $f \circ \varphi \circ (\epsilon \times id_{A^\natural} \times \epsilon) = \epsilon \times id_{A^\natural}$ pour $f \in \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{m}\}$, on trouve

$$L(\epsilon \times id_{A^\natural})^* \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_{A^\natural}.$$

Ainsi,

$$L\epsilon^* R p_* \mathcal{P} \simeq R\pi_*^\natural \mathcal{O}_{A^\natural}.$$

Maintenant, on applique la propriété 2.2.7 (p.55), qui donne

$$L\epsilon^* R p_* \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_S.$$

Il reste donc seulement à montrer que $R p_* \mathcal{P}$ est à support dans $\epsilon(S)$. On note $q : A \times A^\vee \rightarrow A$ et $q^\vee : A \times A^\vee \rightarrow A^\vee$ les projection et \mathcal{P}^\vee le faisceau de Poincaré classique sur $A \times A^\vee$. On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} R p_* \mathcal{P} &= R q_* R(id_A \times \theta)_* \mathcal{P} \\ &\simeq R q_* R(id_A \times \theta)_* (id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^\vee \\ &\simeq R q_* (\mathcal{P}^\vee \otimes R(id_A \times \theta)_* \mathcal{O}_{A \times A^\natural}) && \text{(Formule de la projection)} \\ &\simeq R q_* (\mathcal{P}^\vee \otimes R(id_A \times \theta)_* p^{\natural*} \mathcal{O}_{A^\natural}) \\ &\simeq R q_* (\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} R\theta_* \mathcal{O}_{A^\natural}) && \text{(Changement de base)} \\ &\simeq R q_* (\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}^\natural) && \text{(Propriété 2.2.5 (p.54) et } \mathcal{A}^\natural := \theta_* \mathcal{O}_{A^\natural}) \\ &= \mathcal{F}^\vee(\mathcal{A}^\natural), \end{aligned}$$

où \mathcal{F}^\vee désigne la transformée de Fourier-Mukai sur les \mathcal{O} -modules.

On rappelle que \mathcal{A} est muni d'une filtration exhaustive et on va s'appuyer sur la propriété 2.2.6 (p.54). On montre par récurrence sur k que pour tout i

$$R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural) \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq d. \\ \text{est à support dans } \epsilon(S) & \text{si } i = d. \end{cases}$$

Si $k = 0$, alors $gr_0 \mathcal{A}^\natural = \mathcal{A}_0^\natural \simeq \mathcal{O}_{A^\vee}$ et $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{O}_{A^\vee}) = Rq^\vee \mathcal{P}^\vee \simeq \epsilon_* \epsilon^* \omega_{A/S}^{-1}[-d]$ (voir [Lau96], lemme 1.2.5), qui est bien nul, sauf en rang d où il est à support dans $\epsilon(S)$.

Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai pour un entier k et on regarde la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_k^\natural \rightarrow \mathcal{A}_{k+1}^\natural \rightarrow gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural \rightarrow 0.$$

En lui appliquant le foncteur exact $\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \bullet$, on trouve

$$0 \rightarrow \mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural \rightarrow \mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_{k+1}^\natural \rightarrow \mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural \rightarrow 0.$$

On trouve alors la suite exacte longue de cohomologie de Rq_*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & R^{i-1} q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) \\ & & & & & & \swarrow \\ & & & & & & \\ R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural) & \longrightarrow & R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_{k+1}^\natural) & \longrightarrow & R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) & & \\ & & & & & & \swarrow \\ R^{i+1} q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural) & \longrightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural) = 0$ pour $i \neq d$. De plus, l'isomorphisme φ_{k+1} de la propriété 2.2.6 fournit un isomorphisme

$$Rq_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) = \mathcal{F}^\vee(gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) \simeq \mathcal{F}^\vee(\bigoplus \mathcal{O}_{A^\vee}) \simeq \bigoplus \mathcal{F}^\vee(\mathcal{O}_{A^\vee}) \simeq \bigoplus \epsilon_* \epsilon^* \omega_{A/S}^{-1}[-d].$$

On en déduit donc que pour tout $i \neq d$,

$$R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_{k+1}^\natural) \simeq R^i q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) = 0$$

et que pour $i = d$ on a la suite exacte

$$0 \rightarrow R^d q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_k^\natural) \rightarrow R^d q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_{k+1}^\natural) \rightarrow R^d q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} gr_{k+1} \mathcal{A}^\natural) \rightarrow 0,$$

où les termes extérieurs sont à support dans $\epsilon(S)$ par hypothèse de récurrence et par le calcul précédent, donc $R^d q_*(\mathcal{P}^\vee \otimes q^{\vee*} \mathcal{A}_{k+1}^\natural)$ est à support dans $\epsilon(S)$.

Les deux conditions étant vérifiées, on déduit par le théorème d'équivalence de Kashiwara que

$$p_+^{(A^\natural)} \mathcal{P} \simeq \epsilon_+ \mathcal{O}_S[-d].$$

□

Munis de ce lemme, on peut énoncer la propriété d'involutivité suivante :

Théorème 2.2.21. On note $\langle -1 \rangle : A \rightarrow A$ et $\langle -1 \rangle^\natural : A^\natural \rightarrow A^\natural$ les morphismes d'inversion de A et A^\natural respectivement et on pose $d = \dim_S(A)$. Alors

$$\mathcal{F}^\natural \circ \mathcal{F} \simeq \langle -1 \rangle^! \bullet [-d] : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$$

et

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\natural \simeq \langle -1 \rangle^{\natural*} \bullet [-d] : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\natural}).$$

Démonstration. Ce résultat se trouve déjà dans [Lau96] (Théorème 3.2.1), mais sa preuve manque de détails. On va donc la compléter.

On commence par le premier isomorphisme. Comme on l'a vu dans la section précédente,

$$\mathcal{F}^\natural \circ \mathcal{F} = \Phi_{\mathcal{P}}^{A \leftarrow A^\natural} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow A^\natural} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}},$$

avec $\mathcal{R} = \pi_{13+}^{(2)}(\pi_{12/2}^b \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^\natural \times A}} \pi_{23/2}^b \mathcal{P})$, en notant π_{ij} la projection sur les facteurs numéro i et j du produit $A \times A^\natural \times A$. Il faut alors montrer que $\Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} \simeq \langle -1 \rangle^! \bullet [-d]$. Pour ce faire, on va d'abord simplifier l'expression de \mathcal{R} au maximum.

Tout d'abord, comme \mathcal{P} est un élément de $Pic^\natural(A \times A^\natural/A^\natural)$, si on note

$$\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \text{ et } \tilde{m} : (A \times A^\natural) \times_{A^\natural} (A \times A^\natural) \rightarrow A \times A^\natural$$

les morphismes respectivement de projection sur la première coordonnée, sur la deuxième coordonnée et de multiplication, la condition selon laquelle \mathcal{P} satisfait le théorème du carré s'écrit

$$\tilde{\pi}_1^b \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{(A \times A^\natural) \times_{A^\natural} (A \times A^\natural)}} \tilde{\pi}_2^b \mathcal{P} \simeq \tilde{m}^b \mathcal{P}.$$

Or l'isomorphisme canonique $(A \times A^\natural) \times_{A^\natural} (A \times A^\natural) \simeq A \times A^\natural \times A$ induit les isomorphismes naturels

$$\tilde{\pi}_1 \simeq \pi_{12}, \tilde{\pi}_2 \simeq \pi_{23} \text{ et } \tilde{m} \simeq m_{13},$$

où $m_{13} : A \times A^\natural \times A \rightarrow A \times A^\natural$ dérive de la multiplication m dans A ($m_{13}(x, y, z) = (m(x, z), y)$).

On en déduit ainsi que $\mathcal{R} \simeq \pi_{13+}^{(2)} m_{13/2}^b \mathcal{P}$. On considère à présent le diagramme de changement de base suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \times A^\natural \times A & \xrightarrow{m_{13}} & A \times A^\natural \\ \pi_{13} \downarrow & & \downarrow p \\ A \times A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Le théorème de changement de base (Théorème 2.1.33, p.50) assure alors que $\mathcal{R} \simeq m^b p_+^{(A^\natural)} \mathcal{P}$. Le lemme précédent (Lemme 2.2.15, p.60) donne alors $\mathcal{R} \simeq m^b \epsilon_+ \mathcal{O}_S[-d]$. On considère maintenant le diagramme de changement de base suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\tilde{m}} & S \\ \tilde{\epsilon} \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ A \times A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

avec $\Gamma = (A \times A) \times_A S \simeq A$. On peut voir Γ comme l'anti-diagonale de $A \times A$, i.e. les éléments de la forme $(a, \langle -1 \rangle(a))$.

On peut appliquer de nouveau le changement de base (Théorème 2.1.31 cette fois, p.49), ainsi

$$\mathcal{R} \simeq \tilde{\epsilon}_+ \tilde{m}^b \mathcal{O}_S[-d] \simeq \tilde{\epsilon}_+ \mathcal{O}_\Gamma[-d],$$

étant donné que $\tilde{m}^b \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{O}_\Gamma$.

L'expression de \mathcal{R} est maintenant suffisamment simple pour calculer la transformée de Fourier-Mukai de noyau \mathcal{R} . Ainsi,

$$\Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq p_{1+}(\tilde{\epsilon}_+ \mathcal{O}_\Gamma[-d] \otimes p_2^b \mathcal{E}^\cdot) = p_{1+}(\tilde{\epsilon}_+ \mathcal{O}_\Gamma \otimes p_2^b \mathcal{E}^\cdot)[-d],$$

où $p_i : A \times A \rightarrow A$ désigne la projection selon la i -ème coordonnée.

On considère à présent les trois isomorphismes du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ p_1 \circ \tilde{\epsilon} \swarrow & & \searrow p_2 \circ \tilde{\epsilon} \\ A & \xrightarrow{\langle -1 \rangle} & A \end{array}$$

Par la formule de la projection (Propriété 2.1.20, p.44),

$$\Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq p_{1+} \tilde{\epsilon}_+ (\mathcal{O}_\Gamma \otimes \tilde{\epsilon}^b p_2^b \mathcal{E}^\cdot)[-d] \simeq p_{1+} \tilde{\epsilon}_+ \tilde{\epsilon}^b p_2^b \mathcal{E}^\cdot[-d] = (p_1 \circ \tilde{\epsilon})_+ (p_2 \circ \tilde{\epsilon})^b \mathcal{E}^\cdot[-d].$$

Comme $p_1 \circ \tilde{\epsilon}$ est un isomorphisme, $(p_1 \circ \tilde{\epsilon})_+ \simeq ((p_1 \circ \tilde{\epsilon})^{-1})^b$ (pour la même raison que $f_* \simeq (f^{-1})^*$ pour un isomorphisme f). On trouve finalement

$$\Phi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq ((p_2 \circ \tilde{\epsilon}) \circ (p_1 \circ \tilde{\epsilon})^{-1})^b \mathcal{E}^\cdot[-d] \simeq \langle -1 \rangle^b \mathcal{E}^\cdot[-d].$$

Comme $\langle -1 \rangle$ va de A dans A , il n'y a pas de décalage et $\langle -1 \rangle^b = \langle -1 \rangle^!$.

Pour le second isomorphisme, la preuve n'est pas complètement symétrique. On a toujours

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{\natural} = \Phi_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow A^{\natural}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{A^{\natural} \leftarrow A} \simeq \Phi_{\mathcal{R}},$$

avec $\mathcal{R} = \pi_{13+/(1,3)}(\pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times A^{\natural} \times A}} \pi_{23/3}^{!(1)} \mathcal{P})$, où cette fois les π_{ij} sont les projections de $A^{\natural} \times A \times A^{\natural}$ et $\mathcal{R} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural} \times A^{\natural}})$.

A nouveau, on veut simplifier \mathcal{R} au maximum avant de calculer la transformée. Cependant, il est beaucoup moins aisé de montrer que $\pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \otimes \pi_{23/3}^{!(1)} \mathcal{P} \simeq m_{13/3}^{!(1)} \mathcal{P}$. En effet, on n'a pas d'isomorphisme entre $A^{\natural} \times A \times A^{\natural}$ et $(A \times A^{\natural}) \times_{A^{\natural}} (A \times A^{\natural})$ (les dimensions ne correspondent pas). On va alors appliquer le principe de la bascule (Propriété 2.1.30, p.49).

Soit $\mathcal{Q} = \pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \otimes \pi_{23/3}^{!(1)} \mathcal{P} \otimes m_{13/3}^{!(1)} \mathcal{P}^{-1}$. On remarque qu'en tant que $\mathcal{O}_{A^{\natural} \times A \times A^{\natural}}$ -module,

$$\mathcal{Q} \simeq \pi_{12}^*(id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee} \otimes \pi_{23}^*(id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee} \otimes m_{13}^*(id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee-1},$$

où \mathcal{P}^{\vee} est le faisceau de Poincaré sur $A \times A^{\vee}$ et $\theta : A^{\natural} \rightarrow A^{\vee}$ (on rappelle que $\mathcal{P} \simeq (id_A \times \theta)^* \mathcal{P}^{\vee}$ en tant que \mathcal{O} -module). En notant π_{ij}^{\vee} les projections de $A^{\vee} \times A \times A^{\vee}$, on trouve alors

$$\mathcal{Q} \simeq (\theta \times id_A \times \theta)^*(\pi_{12}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee} \otimes \pi_{23}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee} \otimes m_{13}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee-1}).$$

Comme $A^{\vee\vee} \simeq A$, le faisceau \mathcal{P}^{\vee} est le faisceau de Poincaré sur $A^{\vee} \times A^{\vee\vee}$ et

$$\pi_{12}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee} \otimes \pi_{23}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee} \otimes m_{13}^{\vee*} \mathcal{P}^{\vee-1} \simeq \mathcal{O}_{A^{\vee} \times A \times A^{\vee}}$$

(par les résultats sur la transformée de Fourier-Mukai classique). Ainsi,

$$\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{A^{\natural} \times A \times A^{\natural}} \text{ (comme } \mathcal{O}\text{-modules)}.$$

En particulier, pour tout $(a, a^\natural) \in A \times A^\natural$, en notant $\iota_{(a, a^\natural)} : A^\natural \simeq A^\natural \times \{a\} \times \{a^\natural\} \rightarrow A^\natural \times A \times A^\natural$, $\iota_{(a, a^\natural)}^* \mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{A^\natural}$ (comme \mathcal{O} -modules). La première des deux conditions du principe de la bascule est donc vérifiée.

Il reste alors à vérifier qu'il existe $a^\natural \in A^\natural$ tel que $\tilde{\iota}_{a^\natural/3}^{!(1)} \mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{A \times A^\natural}$ (comme $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -modules) avec $\tilde{\iota}_{a^\natural} : A \times A^\natural \simeq \{a^\natural\} \times A \times A^\natural \rightarrow A^\natural \times A \times A^\natural$. Le choix naturel consiste à prendre $a^\natural = e^\natural$. Dans ce cas, on trouve que $\tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} \pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \simeq p^{!(A^\natural)}(\epsilon^\natural \times id_A)^{!(A^\natural)} \mathcal{P}$ avec les notations

$$\begin{array}{ccc} A \times A^\natural & \xrightarrow{\tilde{\iota}_{e^\natural}} & A^\natural \times A \times A^\natural \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_{12} \\ A & \xrightarrow{\epsilon^\natural \times id_A} & A^\natural \times A \end{array}$$

Or le lemme 2.2.16 (p.61) assure que $(\epsilon^\natural \times id_A)^{!(A^\natural)} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_A$, par conséquent $\tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} \pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_{A \times A^\natural}$ (comme $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -modules). Ainsi,

$$\tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} \mathcal{Q} \simeq \tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} (\pi_{23/3}^{!(1)} \mathcal{P} \otimes m_{13/3}^{!(1)} \mathcal{P}^{-1}).$$

Enfin, pour ϕ représentant alternativement π_{23} et m_{13} , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A \times A^\natural & \xrightarrow{\tilde{\iota}_{e^\natural}} & A^\natural \times A \times A^\natural \\ & \searrow id & \downarrow \phi \\ & & A \times A^\natural \end{array}$$

Ainsi $\tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} \phi^{!(1)} \mathcal{P} \simeq \mathcal{P}$, et donc $\tilde{\iota}_{e^\natural/3}^{!(1)} \mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{A \times A^\natural}$ (comme $\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}$ -modules).

On peut donc appliquer le principe de la bascule qui assure alors que

$$\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{A^\natural \times A \times A^\natural} \text{ (comme } \mathcal{D}_{A^\natural \times A \times A^\natural/A^\natural \times A^\natural}\text{-modules),}$$

et donc $\pi_{12/1}^{!(3)} \mathcal{P} \otimes \pi_{23/3}^{!(1)} \mathcal{P} \simeq m_{13/3}^{!(1)} \mathcal{P}$.

On peut donc réécrire \mathcal{R} sous la forme $\mathcal{R} \simeq \pi_{13+/(1,3)}^{!(1)} m_{13/3}^{!(1)} \mathcal{P}$. A partir d'ici, on peut se contenter d'isomorphismes de \mathcal{O} -modules. Ainsi, si on note $\pi_2 : A^\natural \times A \times A^\natural \rightarrow A$, comme $p \circ m_{13} = \pi_2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\simeq R\pi_{13*}(\omega_{A^\natural \times A \times A^\natural/A^\natural \times A^\natural} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{A^\natural \times A \times A^\natural/A^\natural \times A^\natural}} m_{13}^\natural \mathcal{P}) \\ &\simeq R\pi_{13*}(\pi_2^* \omega_{A/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\pi_2^* \mathcal{D}_{A/S}} Lm_{13}^* \mathcal{P}) \\ &\simeq R\pi_{13*}(Lm_{13}^* p^* \omega_{A/S} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{Lm_{13}^* p^* \mathcal{D}_{A/S}} Lm_{13}^* \mathcal{P}) \\ &\simeq R\pi_{13*} Lm_{13}^* (\omega_{A \times A^\natural/A^\natural} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}} \mathcal{P}) \\ &\simeq Lm_{13}^* R p_* (\omega_{A \times A^\natural/A^\natural} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{A \times A^\natural/A^\natural}} \mathcal{P}) \quad (\text{par changement de base}) \\ &\simeq Lm_{13}^* p_{+/A^\natural}^\natural \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Le lemme précédent permet alors d'écrire $\mathcal{R} \simeq Lm_{13}^* \epsilon_* \mathcal{O}_S[-d]$.

On utilise à nouveau la formule du changement de base, mais dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma^{\natural} & \xrightarrow{\tilde{m}^{\natural}} & S \\
 \tilde{\epsilon}^{\natural} \downarrow & & \downarrow \epsilon^{\natural} \\
 A^{\natural} \times A^{\natural} & \xrightarrow{m^{\natural}} & A^{\natural}
 \end{array}$$

où Γ^{\natural} est l'anti-diagonale de $A^{\natural} \times A^{\natural}$. On obtient alors $\mathcal{R} \simeq \tilde{\epsilon}_*^{\natural} \mathcal{O}_{\Gamma^{\natural}}[-d]$. Par le même raisonnement que précédemment (on rajoute juste des \cdot^{\natural} partout), on trouve que

$$\Phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}^{\cdot}) \simeq Rp_{1*}^{\natural}(\tilde{\epsilon}_*^{\natural} \mathcal{O}_{\Gamma^{\natural}} \otimes p_2^{\natural*} \mathcal{E}^{\cdot})[-d] \simeq \langle -1 \rangle^{\natural*} \mathcal{E}^{\cdot}[-d].$$

□

Corollaire 2.2.22. \mathcal{F} réalise une équivalence de catégories entre $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{A/S})$ et $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^{\natural}})$.

Chapitre 3

Transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules sur un schéma formel

Maintenant que nous avons bien compris comment on peut construire la transformée de Fourier-Mukai pour les \mathcal{D} -modules sur une variété abélienne sur un schéma de caractéristique nulle, on va reprendre toute la construction pour l'adapter au cas arithmétique.

Plus précisément, on se fixe V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π et $S = \text{Spec}(V)$. Pour tout i on pose $V_i = V/\pi^i V$ et $S_i = \text{Spec}(V_i)$. Enfin, on note $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$. Le but de ce chapitre est de construire la variété abélienne \mathcal{D} -duale d'une variété abélienne formelle \mathcal{A} sur \mathcal{S} puis la transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{A} . Cependant, dans le cadre arithmétique les \mathcal{D} -modules ne sont plus les \mathcal{O} -modules à connexion intégrable, c'est pourquoi on va préférer considérer les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules, voir même les $\hat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules.

3.1 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules

3.1.1 Quelques propriétés de $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$

On ne va pas ici rappeler la construction des faisceaux $\mathcal{D}^{(0)}$. Pour plus de détails, on renvoie à [Ber02] (chap 1). On rappellera simplement que se donner une structure de $\mathcal{D}^{(0)}$ -module à gauche sur un \mathcal{O} -module \mathcal{E} équivaut à se donner une connexion intégrable sur \mathcal{E} . De plus, pour X une variété sur S on peut exprimer localement $\mathcal{D}_X^{(0)}$ de la façon suivante :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(0)}) = \left\{ \sum_{\substack{\underline{k}, \text{ finie}}} a_{\underline{k}} \partial^{\underline{k}} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \right\},$$

où les ∂_i sont les dérivées associées à un système de coordonnées t_i de U .

On peut construire le module $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ de la même manière sur un schéma formel \mathcal{X} .

Définition 3.1.1. Soit \mathcal{X} un schéma formel lisse sur \mathcal{S} . On définit $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ comme étant le complété π -adique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}$:

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} = \varprojlim_i \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)} / \pi^i \simeq \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(0)}.$$

Remarque : Si on veut être plus précis, il faudrait préférer la notation $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{(0)}$ à la notation $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ (étant donné que \mathcal{X} est vu comme un schéma sur \mathcal{S}). On se permettra cet abus de notation uniquement dans le cas où les dérivations seront relatives au schéma de base \mathcal{S} , qui sera dans la suite $\text{Spf}(V)$.

Par contre, on peut toujours considérer un produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ comme une variété sur \mathcal{Y} . On notera alors $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^{(0)}$ le faisceau des différentielles de niveau 0 associé.

Localement, on a

$$\Gamma(U, \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) = \left\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \partial^{\underline{k}} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ et } v_{\pi}(a_{\underline{k}}) \xrightarrow{|\underline{k}| \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

On peut en déduire le résultat suivant, énoncé dans [Ber96b] proposition 3.3.9 et corollaire 3.3.10 :

Propriété 3.1.2. *Soit \mathcal{E} un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ -module. \mathcal{E} est cohérent si et seulement si il est localement de présentation finie.*

3.1.2 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules quasi-cohérents

On peut définir les faisceaux de $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules quasi-cohérents sur un schéma formel \mathcal{X} de la même manière que l'on a défini les faisceaux de \mathcal{O} -modules quasi-cohérents sur \mathcal{X} .

Définition 3.1.3. *Soit $\mathcal{E}^{\cdot} \in D^{-}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$. Pour tout i on pose $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}^{\cdot}$. \mathcal{E}^{\cdot} est dit quasi-cohérent si*

- $\mathcal{E}_0 \in D_{qcoh}^{-}(\mathcal{D}_{X_0}^{(0)})$,
- On a un isomorphisme canonique $\mathcal{E}^{\cdot} \simeq R\varprojlim \mathcal{E}_i$.

On note $D_{qcoh}^{-}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ la sous-catégorie pleine de $D^{-}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ dont les objets sont les complexes quasi-cohérents.

On a aussi une caractérisation des quasi-cohérents similaire à celle sur les \mathcal{O} -modules.

Théorème 3.1.4. *Si $(\mathcal{E}_i^{\cdot})_i$ est un système projectif de complexes dont le i -ème élément est dans $D^b(\mathcal{D}_{X_i}^{(0)})$ tel que*

- $\mathcal{E}_0^{\cdot} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_0}^{(0)})$,
- Pour tout i le morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{X_i}^{(0)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{i+1}}^{(0)}} \mathcal{E}_{i+1}^{\cdot} \rightarrow \mathcal{E}_i^{\cdot}$$

est un isomorphisme,

alors $\mathcal{E}^{\cdot} = R\varprojlim \mathcal{E}_i^{\cdot}$ est dans $D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$

Enfin, comme la quasi-cohérence se teste modulo π^i et qu'on regarde le faisceau comme un \mathcal{O} -module ou comme un \mathcal{D} -module, on a le résultat suivant.

Propriété 3.1.5. *Un complexe de $D^{-}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ est quasi-cohérent si et seulement s'il est quasi-cohérent en tant que complexe de $D^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.*

3.1.3 Produit tensoriel, image inverse et image directe

On se contentera ici de rappeler les définitions données dans [Ber02] (chap 3).

Définition 3.1.6. Soient $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0) d})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^-(g\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$, deux complexes de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ -modules respectivement à droite et à gauche.

On note comme d'habitude $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}$. De même pour \mathcal{F}_i .

On définit le produit tensoriel complété de \mathcal{E} et \mathcal{F} en posant

$$\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} = R\varprojlim_i \left(\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{D}_{X_i}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i \right).$$

Il s'agit d'un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ -module.

De plus, si les complexes sont à cohomologie bornée, $\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$.

Enfin, si l'un des deux complexes est cohérent, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{E} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{E} \hat{\otimes}_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}$.

Définition 3.1.7. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de \mathcal{S} -schémas formels lisses, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(0)})$.

Pour tout i , on construit $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ le morphisme de S_i -schémas associé à f .

On construit l'image inverse extraordinaire de \mathcal{F} par f en posant

$$f^! \mathcal{F} = R\varprojlim_i \left(f_i^! \mathcal{F}_i \right).$$

De même, on construit l'image directe de \mathcal{E} par f en posant

$$f_+ \mathcal{E} = R\varprojlim_i \left((f_i)_+ \mathcal{E}_i \right).$$

A nouveau, lorsque \mathcal{E} et \mathcal{F} sont cohérents, on a les isomorphismes canoniques

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}^{(0)} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{F} [d_{\mathcal{X}} - d_{\mathcal{Y}}] \simeq f^! \mathcal{F}$$

et

$$Rf_* \left(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{X}}^{(0)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \right) \simeq f_+ \mathcal{E},$$

où les faisceaux de transferts sont définis par $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}^{(0)} = \varprojlim \mathcal{D}_{X_i \rightarrow Y_i}^{(0)}$ et $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{X}}^{(0)} = \varprojlim \mathcal{D}_{Y_i \leftarrow X_i}^{(0)}$.

Comme dans le cas classique, les foncteurs $f^!$ et f_+ préservent la quasi-cohérence et vérifient les formules de transitivité. De plus, si f est lisse, $f^!$ préserve la cohérence. Si f est propre, f_+ préserve la cohérence.

Avant de construire les analogues de ces foncteurs pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules relatifs, remarquons qu'on a le résultat suivant :

Propriété 3.1.8. Soient \mathcal{X} un \mathcal{S} -schéma formel lisse et $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$. Alors

$$\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} = R\varprojlim_i \left(\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i \right) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

Démonstration. Ce résultat se montre de la même manière que sa version pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules : on utilise la caractérisation des $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ -modules quasi-cohérents. Il faut alors montrer que $\mathcal{E}_0 \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{F}_0 \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_0}^{(0)})$ et que la famille $(\mathcal{E}_i \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{F}_i)_i$ est compatible aux réductions modulo π^i .

Le premier point est énoncé dans [HTT08], section 1.5, sous-section "tensor product" : on écrit

$$\mathcal{E}_0 \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{F}_0 \simeq L\Delta_{X_0}^*(\mathcal{E}_0 \boxtimes \mathcal{F}_0),$$

avec $\Delta_{X_0} : X_0 \times X_0 \rightarrow X_0$ le morphisme diagonal, et on remarque que ces deux foncteurs préservent la quasi-cohérence.

Le second point est une conséquence directe de la construction de $\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}}$. □

3.2 $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules relatifs

3.2.1 Définitions

Dans cette section on considère \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels sur \mathcal{S} ainsi que $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $f = id_{\mathcal{X}} \times g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$. On notera X_i, Y_i, Z_i, g_i et f_i leurs réductions modulo π^i . De plus, pour simplifier les notations, on notera $\mathcal{X}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et $X_{Y,i} = X_i \times Y_i$. De même pour $\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}$ et $X_{Z,i}$.

Comme dans le cas non-arithmétique, un $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -module relatif sur l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est simplement un $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -module sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mais où l'on voit cet espace non pas comme un \mathcal{S} -schéma mais comme un \mathcal{X} -schéma ou un \mathcal{Y} -schéma. Un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}$ -module n'est donc en soit pas différent d'un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ -module et tous les résultats de cohérence et de quasi-cohérence de ces faisceaux sont les mêmes que pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules classiques, de même pour les résultats relatifs au produit tensoriel.

Là où il va y avoir des différences, c'est, comme dans le cas non-arithmétique, lorsqu'on va transporter ces structures par des morphismes qui changent l'espace des constantes : Comment se comporte un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}$ -module quand on le pousse en avant via f sur $\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}$ qui n'a pas de structure de \mathcal{Y} -schéma ?

La quasi-totalité des définitions et des résultats énoncés sur les \mathcal{D} -modules relatifs non-arithmétiques s'adaptent sans mal au cas arithmétique, de fait on ne donnera des précisions sur les preuves que lorsqu'elles présenteront de réelles différences avec celles du chapitre précédent.

Image inverse relative

Définition 3.2.1. Sur chaque niveau i , on définit le faisceau de transfert (de niveau 0) relatif à Y_i et Z_i par

$$\mathcal{D}_{X_{Y,i} \rightarrow X_{Z,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} = f_i^* \mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)} = \mathcal{O}_{X_{Y,i}} \otimes_{f_i^{-1} \mathcal{O}_{X_{Z,i}}} f_i^{-1} \mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)}.$$

On définit alors le faisceau de transfert (de niveau 0) relatif à \mathcal{Y} et \mathcal{Z} par

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Z}}}^{(0)(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} = \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_{Y,i} \rightarrow X_{Z,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)}.$$

Pour $\mathcal{E}_i \in D^b(\mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)})$, on définit l'image inverse relative à Y_i et Z_i de \mathcal{E}_i par f_i par

$$f_i^!(Y_i, Z_i) \mathcal{E}_i = \mathcal{D}_{X_{Y,i} \rightarrow X_{Z,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_i^{-1} \mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)}} f_i^{-1} \mathcal{E}_i \in D^b(\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)}).$$

Enfin, pour $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/\mathcal{Z}}^{(0)})$, on définit son image inverse relative à \mathcal{Y} et \mathcal{Z} par

$$f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} = R\varprojlim_i (f_i^!(Y_i, Z_i) \mathcal{E}_i).$$

Propriété 3.2.2. • $f_i^{!(Y_i, Z_i)}$ et $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$ vérifient les formules de transitivité.

- $f_i^{!(Y_i, Z_i)} \mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)} \simeq \mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)}$.
- $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)} \simeq \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Y/\mathcal{Y}}^{(0)}$.
- Si $\mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)})$, alors $f_i^{!(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)})$.
- Si $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)})$, alors $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Y/\mathcal{Y}}^{(0)})$.

Démonstration. Les résultats portant sur $f_i^{!(Y_i, Z_i)}$ sont des réécritures directes des preuves du chapitre précédent.

Le fait que $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$ vérifie les formules de transitivité et le troisième point se vérifient directement par passage à la limite projective des résultats sur $f_i^{!(Y_i, Z_i)}$.

Le dernier point est une conséquence du fait que la quasi-cohérence peut se vérifier du point de vue des \mathcal{O} -modules, qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules entre $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E}$ et $R\varprojlim (Lf_i^* \mathcal{E}_i)$ (l'image inverse formelle pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules définie au chapitre 1) et du résultat sur les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ modules (corollaire 1.1.17, p.20). □

Propriété 3.2.3. Si $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)})$ alors on a l'isomorphisme canonique

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Y \rightarrow \mathcal{X}_Z}^{(0)(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{E} \simeq f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E}.$$

Démonstration. On montre l'isomorphisme de la même manière que dans le cas non-relatif : On a un morphisme canonique

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Y \rightarrow \mathcal{X}_Z}^{(0)(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{E} \rightarrow f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E}.$$

Déterminer si ce morphisme est un isomorphisme est une question locale sur \mathcal{X}_Z . Comme \mathcal{E} est cohérent, par un argument de dévissage standard on peut se restreindre au cas où $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_Z/\mathcal{Z}}^{(0)}$. Dans ce cas, l'isomorphisme est clair. □

Propriété 3.2.4. Si f_i (resp. f) est lisse, alors $f_i^{!(Y_i, Z_i)}$ (resp. $f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$) préserve la cohérence.

Démonstration. A nouveau, le résultat sur f_i se montre de la même manière qu'au chapitre précédent (corollaire 2.1.10, p.40). Quant au résultat sur f , il suffit de voir que si f est lisse alors tous les f_i le sont, ainsi

$$f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} = R\varprojlim f_i^{!(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i$$

est une limite projective de faisceaux cohérents et compatibles aux réductions modulo π^i , qui est donc cohérent. □

Image directe relative

Définition 3.2.5. Sur chaque niveau i , on définit le faisceau de transfert (de niveau 0) relatif à Y_i et Z_i par

$$\mathcal{D}_{X_{Z,i} \leftarrow X_{Y,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} = \omega_{X_{Y,i}/Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{Y,i}}} \mathcal{D}_{X_{Y,i} \rightarrow X_{Z,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_{Z,i}}} f^{-1} \omega_{X_{Z,i}/Z_i}^{-1}.$$

On définit alors le faisceau de transfert (de niveau 0) relatif à \mathcal{Y} et \mathcal{Z} par

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}} \leftarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}}^{(0)} = \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_{Z,i} \leftarrow X_{Y,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)}$$

Pour $\mathcal{E}_i \in D^b(\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)})$, on définit l'image directe relative à Y_i et Z_i de \mathcal{E}_i par f_i par

$$f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i = Rf_{i*} \left(\mathcal{D}_{X_{Z,i} \leftarrow X_{Y,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)}} \mathcal{E}_i \right) \in D(\mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)}).$$

Enfin, pour $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{(0)})$, on définit son image directe relative à \mathcal{Y} et \mathcal{Z} par

$$f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} = R\varprojlim_i \left(f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i \right).$$

Remarque : A nouveau, comme dans le cas non-arithmétique, on a les isomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}}$ -modules suivants :

$$\begin{aligned} f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i &\simeq Rf_{i*} \mathcal{E}_i. \\ f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} &\simeq Rf_* \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Le dernier est donné par la commutativité du foncteur Rf_* avec $R\varprojlim$.

Propriété 3.2.6. • $f_{i+}^{(Y_i, Z_i)}$ et $f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$ vérifient les formules de transitivité.

- Si $\mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)})$, alors $f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Z,i}/Z_i}^{(0)})$.
- Si $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)})$, alors $f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}/\mathcal{Z}}^{(0)})$.

Démonstration. A nouveau, les résultats portant sur $f_{i+}^{(Y_i, Z_i)}$ sont des réécritures directes des preuves du chapitre précédent.

Le fait que $f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$ vérifie les formules de transitivité se vérifie directement par passage à la limite projective de la transitivité sur $f_{i+}^{(Y_i, Z_i)}$.

Le dernier point est une conséquence de la commutativité des foncteurs Rf_{i*} avec $R\varprojlim$ ([Sta21, Lemme 0BKP]) et du fait que Rf_* préserve la quasi-cohérence (Propriété 1.1.22 p.22). □

Propriété 3.2.7. Si $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)})$ alors on a l'isomorphisme canonique

$$Rf_* \left(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}} \leftarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}}^{(0)(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}} \mathcal{E} \right) \simeq f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture de la définition. En effet,

$$f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} = R\varprojlim_i f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i = R\varprojlim_i Rf_{i*} \left(\mathcal{D}_{X_{Z,i} \leftarrow X_{Y,i}}^{(0)(Y_i, Z_i)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_{Y,i}/Y_i}^{(0)}} \mathcal{E}_i \right).$$

Comme Rf_* et $R\varprojlim$ commutent, on peut écrire en toute généralité l'isomorphisme

$$f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} \simeq Rf_* \left(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}} \leftarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}}^{(0)(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}} \mathcal{E} \right).$$

Enfin, comme par hypothèse \mathcal{E} est cohérent, on sait que $\bullet \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}} \mathcal{E} \simeq \bullet \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)}} \mathcal{E}$, ce qui permet de conclure. □

Propriété 3.2.8. Si f_i (resp. f) est propre, alors $f_{i+}^{(Y_i, Z_i)}$ (resp. $f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$) préserve la cohérence.

Démonstration. A nouveau, le résultat sur f_i se montre de la même manière qu'au chapitre précédent (propriété 2.1.16, p.42). Quant au résultat sur f , il suffit de voir que si f est propre alors tous les f_i le sont, puis on passe à la limite projective. □

3.2.2 Morphismes d'adjonction

Contrairement au cas non-arithmétique, on va avoir besoin de morphismes d'adjonction pour les $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules et $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules non-relatifs.

Propriété 3.2.9. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme propre de schémas formels lisses, $\mathcal{E} \in D_{coh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(0)})$. Alors pour tout i

$$Rf_{i*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_i}^{(0)}}(\mathcal{E}_i, f_i^! \mathcal{F}_i) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{Y_i}^{(0)}}(f_{i+} \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$$

et

$$Rf_* R\mathcal{H}om_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{E}, f^! \mathcal{F}) \simeq R\mathcal{H}om_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(0)}}(f_+ \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

En particulier, on a des morphismes

$$\mathcal{E}_i \rightarrow f_i^! f_{i+} \mathcal{E}_i \text{ et } \mathcal{E} \rightarrow f^! f_+ \mathcal{E}$$

et si $f^! \mathcal{F} \in D_{coh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(0)})$, on a des morphismes

$$f_{i+} f_i^! \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_i \text{ et } f_+ f^! \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Démonstration. Ce résultat se trouve dans [Vir04], sections IV.4 et IV.5. Il est important de noter qu'une coquille s'est glissée dans l'énoncé de la proposition 4.1 et du théorème 5.5 de [Vir04] : on n'a pas besoin de l'hypothèse de Tor-dimension finie sur le deuxième faisceau. En effet, si on regarde la preuve en détail, on se rend compte que c'est en fait le faisceau $\mathcal{D}_{X_i}^{(0)}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$) qu'on veut être de Tor-dimension finie, ce qui est le cas.

Il est aussi utile de remarquer que l'isomorphisme sur les schémas formel peut être obtenu comme limite projective des isomorphismes sur les réductions modulo π^i , ce faisant, les morphismes d'adjonction sont compatibles aux réductions modulo π^i . □

Pour ce qui est des morphismes d'adjonction relatifs, on préserve les résultats non-arithmétiques sur les réductions modulo π^i .

Propriété 3.2.10. Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels, $f : \mathcal{X}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ un morphisme de la forme $id_{\mathcal{X}} \times g$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}/\mathcal{Y}}}^{(0)})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}/\mathcal{Z}})$. Les morphismes d'adjonction

$$f_i^{!(Y_i, Z_i)} f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_i \text{ et } \mathcal{F}_i \rightarrow f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} f_i^{!(Y_i, Z_i)} \mathcal{F}_i$$

sont respectivement des morphismes des catégories $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Y_i}/Y_i}^{(0)})$ et $D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_{Z_i}/Z_i}^{(0)})$.

On a aussi des morphismes d'adjonction

$$f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{F} \rightarrow f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{F}$$

dans les catégories $D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}/\mathcal{Y}}}^{(0)})$ et $D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}/\mathcal{Z}}^{(0)})$.

Démonstration. Les morphismes d'adjonction sur les schémas formels s'obtiennent en remarquant que les morphismes d'adjonction sur les réductions modulo π^i sont compatibles aux réductions modulo π^j , il suffit donc de prendre la limite projective de ces morphismes. □

3.2.3 Formules de la projection

Malheureusement, pour la formule de la projection on ne peut pas adapter directement les résultats connus dans le cas non-arithmétique. En effet, la démonstration faite dans [HTT08] utilise la formule du changement de base, qui elle utilise le théorème de Kashiwara, or on ne dispose pas du théorème de Kashiwara pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules. Cependant, on peut trouver un tel résultat énoncé pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules (et même les $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -modules) dans [Vir04], section II.4.

Propriété 3.2.11 (Formule de la projection). *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme propre de schémas formels lisses, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/S}^{(0)})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}/S}^{(0)})$.*

Alors pour tout i on a un isomorphisme naturel

$$f_{i+}(f_i^b \mathcal{F}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{F}_i \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}}^{\mathbb{L}} f_{i+} \mathcal{E}_i.$$

(Comme dans le chapitre précédent, le foncteur f_i^b représente l'image inverse sans décalage.)

Cet isomorphisme est compatible aux réductions modulo π^j , de sorte qu'il induit naturellement un isomorphisme

$$f_+(f^b \mathcal{F} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}) \simeq \mathcal{F} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}}^{\mathbb{L}} f_+ \mathcal{E}.$$

Pour les formules de la projection relatives cependant, les démonstrations du chapitre précédent s'adaptent sans mal au cas arithmétique.

Propriété 3.2.12 (Formule de la projection). *Soient $f : \mathcal{X}_{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}$ un morphisme de la forme $id_{\mathcal{X}} \times g$, $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}/\mathcal{Z}}^{(0)})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{Y}}^{(0)})$. Alors*

$$f_{i+}^{(Y_i, Z_i)}(f_i^{!(Y_i, Z_i)} \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_{Y_i}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i) \simeq \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_{Z_i}}}^{\mathbb{L}} f_{i+}^{(Y_i, Z_i)} \mathcal{F}_i.$$

De plus,

$$f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}(f^{!(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}) \simeq \mathcal{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}}}^{\mathbb{L}} f_+^{(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})} \mathcal{F}.$$

Démonstration. Pour trouver le second isomorphisme il suffit de passer le premier à la limite projective. □

3.2.4 Compatibilité des foncteurs relatifs avec les foncteurs classiques

Les résultats de compatibilité entre les foncteurs classiques et les foncteurs relatifs restent vrais avec la même démonstration sur les restrictions modulo π^i . Quant aux résultats sur les schémas formels, ils s'obtiennent directement par passage à la limite du fait des définitions des foncteurs sur les schémas formels.

Comme on ne se servira de ces résultats que pour des projections, on ne les énoncera que dans ce cas, mais ils restent vrais dans un cadre plus général.

Propriété 3.2.13. *On considère les projections suivantes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}} & \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \\ \pi_{\mathcal{X}\mathcal{Z}} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Z} \end{array}$$

Soient $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Z}/S})$ et $\mathcal{F} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}/\mathcal{Y}})$. On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \pi_{X_i Z_i / S_i}^{!(Y_i)} \circ g_{i/S_i}^b(\mathcal{E}_i) &\simeq \pi_{Y_i Z_i / Y_i}^b \circ f_{i/S_i}^{!(Y_i)}(\mathcal{E}_i) \text{ (dans la catégorie } D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_i \times Y_i \times Z_i / Y_i}^{(0)})), \\ g_{i+/S_i} \circ \pi_{X_i Z_i + / S_i}^{(Y_i)}(\mathcal{F}_i) &\simeq f_{i+/S_i}^{(Y_i)} \circ \pi_{Y_i Z_i + / Y_i}(\mathcal{F}_i) \text{ (dans la catégorie } D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Z_i / S_i}^{(0)})), \\ \pi_{\mathcal{X} Z / S}^{!(\mathcal{Y})} \circ g_{+/S}^b(\mathcal{E}) &\simeq \pi_{\mathcal{Y} Z / \mathcal{Y}}^b \circ f_{+/S}^{!(\mathcal{Y})}(\mathcal{E}) \text{ (dans la catégorie } D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} / \mathcal{Y}}^{(0)})), \\ g_{+/S} \circ \pi_{\mathcal{X} Z + / S}^{(\mathcal{Y})}(\mathcal{F}) &\simeq f_{+/S}^{(\mathcal{Y})} \circ \pi_{\mathcal{Y} Z + / \mathcal{Y}}(\mathcal{F}) \text{ (dans la catégorie } D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} / S}^{(0)})). \end{aligned}$$

3.2.5 Principe de la bascule

Propriété 3.2.14. Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels, \mathcal{X} et \mathcal{Y} complets, et \mathcal{L} un faisceau de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} / \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}$ -inversible.

On pose $\pi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ la projection, pour tout $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$,

$$\iota_{(x,y)} : \mathcal{Z} \simeq \{x\} \times \{y\} \times \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$$

et pour tout $z \in \mathcal{Z}$,

$$\tilde{\iota}_z : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \simeq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \{z\} \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}.$$

- Si $\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\iota_{(x,y)}^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ (comme $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ -module), alors il existe un $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} / \mathcal{Y}}^{(0)}$ -module $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ -inversible \mathcal{M} tel que $\mathcal{L} \simeq \pi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^{!(\mathcal{Z})} \mathcal{M}$ (comme $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} / \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}^{(0)}$ -modules).
- Si de plus $\exists z \in \mathcal{Z}$, $\tilde{\iota}_z^{!(\mathcal{Z})} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ (comme $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} / \mathcal{Y}}^{(0)}$ -modules), alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}$ (comme $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} / \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}^{(0)}$ -modules).

Démonstration. A nouveau, on étend sans mal la preuve du cas non-arithmétique sur les réductions modulo π^i . Pour obtenir le résultat sur les schémas formels, il faut se souvenir que l'isomorphisme $\mathcal{L}_i \simeq \pi_{X_i Y_i / Y_i}^{!(Z_i)} \mathcal{M}_i$ provient du morphisme d'adjonction $\pi_{X_i Y_i / Y_i}^* \pi_{X_i Y_i^* / Y_i} \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_i$, qui est un morphisme de $\mathcal{D}_{X_i \times Y_i \times Z_i}^{(0)}$ -modules compatible aux réductions modulo π^j , il passe donc à la limite projective. En posant $\mathcal{M} = \varprojlim \mathcal{M}_i$, on trouve l'isomorphisme $\mathcal{L} \simeq \pi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^{!(\mathcal{Z})} \mathcal{M}$.

Quant au deuxième point, il est aussi immédiat que dans le cas non-arithmétique. \square

3.2.6 Changement de base

Comme dit précédemment, la preuve du théorème du changement de base présentée dans [HTT08] utilise le théorème de Kashiwara, qui est faux dans le cas arithmétique. Par contre, on n'utilise ce résultat que pour montrer la formule du changement de base pour des immersions fermées, ainsi, la preuve dans le cas des projections s'adapte sans mal.

Propriété 3.2.15. Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels lisses, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $\pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ et $\pi_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ les projections. On considère le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{X} \\ f \times id_{\mathcal{Z}} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}}} & \mathcal{Y} \end{array}$$

On a un isomorphisme de foncteurs $\pi_{\mathcal{Y}}^! f_+ \simeq (f \times id_{\mathcal{Z}})_+ \pi_{\mathcal{X}}^!$.

On a aussi un isomorphisme de foncteurs relatifs $\pi_{\mathcal{Y}}^{!(\mathcal{Z})} f_+ \simeq (f \times id_{\mathcal{Z}})_{+/Z} \pi_{\mathcal{X}}^{!(\mathcal{Z})}$.

Propriété 3.2.16. Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 et \mathcal{Z} quatre schémas formels lisses, $\pi_1 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_1$ et $\pi_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_2$ les projections et $f : \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_2$. On pose $g = id_{\mathcal{X}} \times f$ et $h = id_{\mathcal{X}} \times f \times id_{\mathcal{Z}}$. On considère le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_1 \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_2 \end{array}$$

Alors on a un isomorphisme de foncteurs $\pi_{2/\mathcal{Y}_2}^! g_+^{(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)} \simeq h_+^{(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)} \pi_{1/\mathcal{Y}_1}^!$.

On a aussi un isomorphisme de foncteurs $\pi_{2/\mathcal{Y}_2}^! g_+^{(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)} \simeq h_+^{(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)} \pi_{1/\mathcal{Y}_1}^!$.

Démonstration. A nouveau, la preuve s'adapte sans mal du cas non-arithmétique au cas des réductions modulo π^i . Pour passer au cas formel, on remarque que les isomorphismes proviennent de morphismes qui sont construits à partir des morphismes d'adjonction, ils sont donc compatibles aux réductions modulo π^j . On peut donc passer les isomorphismes à la limite projective. \square

Remarque : Il est important de remarquer que la preuve de cette propriété est très proche de celle du théorème de changement de base pour les \mathcal{O} -modules. En particulier, on n'a pas besoin du théorème d'équivalence de Kashiwara, ainsi ce résultat peut s'étendre sans mal au cas où π_1 et π_2 ne sont pas des projections, il suffit que π_2 soit propre.

Cependant, comme on travaillera principalement avec des projections, ce résultat sera suffisant.

3.3 Transformée de Fourier-Mukai généralisée

Soit V un AVD d'uniformisante π . Dans cette section nous considérerons (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur S_i de dimension d , où $S_i = \text{Spec}(V/\pi^i V)$, et $\mathcal{A} = \varinjlim A_i$, qui est donc une variété abélienne sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(S)$.

On notera m (resp. m_i) la multiplication, ϵ (resp. ϵ_i) l'élément neutre et $\langle -1 \rangle$ (resp. $\langle -1 \rangle_i$) l'inverse de \mathcal{A} (resp. A_i).

3.3.1 Variété abélienne \mathcal{D} -duale

La construction de la variété abélienne \mathcal{D} -duale donnée dans [MM74] (chapitre I; elle est notée $\underline{Ext}^{\mathfrak{d}}$ dans cette référence) est suffisamment générale pour s'adapter au cas arithmétique, à condition de ne pas considérer tous les \mathcal{D} -modules, mais seulement ceux munis d'une connexion intégrable, c'est à dire les $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules, ou les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules dans le cas d'un schéma formel. On va donc reprendre les mêmes définitions que dans le cas non-arithmétique.

Définition 3.3.1. Soit A_i (resp. \mathcal{A}) une variété abélienne sur $S_i = \text{Spec}(V_i)$ (resp. $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$) de dimension d .

On définit $\text{Pic}^{\mathfrak{d}}(A_i/S_i)$ (resp. $\text{Pic}^{\mathfrak{d}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$) comme étant le groupe des faisceaux de $\mathcal{D}_{A_i/S_i}^{(0)}$ -modules \mathcal{O}_{A_i} -inversibles (resp. $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ -inversibles) qui vérifient le théorème du carré, i.e.

$$m^{\flat} \mathcal{L} \simeq p_1^{\flat} \mathcal{L} \otimes p_2^{\flat} \mathcal{L},$$

avec m la multiplication et p_1, p_2 les projections de $A_i \times_{S_i} A_i$ (resp. $\mathcal{A} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{A}$).

Le foncteur $Pic^{\natural}(A_i \times \bullet / \bullet)$ (resp. $Pic^{\natural}(\mathcal{A} \times \bullet / \bullet)$) de la catégorie des S_i -schémas (resp. \mathcal{S} -schémas) noethériens dans celle des groupes est représentable par un S_i -schéma (resp. \mathcal{S} -schéma) en groupe lisse de dimension $2d$, noté A_i^{\natural} (resp. \mathcal{A}^{\natural}).

Enfin, l'élément de $Pic^{\natural}(A_i \times A_i^{\natural} / A_i^{\natural})$ (resp. $Pic^{\natural}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural} / \mathcal{A}^{\natural})$) associé à l'identité dans $Hom(A_i^{\natural}, A_i^{\natural})$ (resp. $Hom(\mathcal{A}^{\natural}, \mathcal{A}^{\natural})$) est appelé faisceau de Poincaré et est noté \mathcal{P}_i (resp. \mathcal{P}).

Comme la construction de \mathcal{A}^{\natural} et des A_i^{\natural} commute aux changements de base, tout comme celle des faisceaux de Poincaré, on en déduit le résultat suivant.

Propriété 3.3.2. *On a les isomorphismes canoniques $\mathcal{A}^{\natural} = \varinjlim A_i^{\natural}$ et $\mathcal{P} = \varinjlim \mathcal{P}_i$.*

Notons aussi que la représentabilité du foncteur Pic^{\natural} permet d'écrire le résultat suivant.

Propriété 3.3.3. *Pour tout $\mathcal{L} \in Pic^{\natural}(A_i \times T_i / T_i)$ (resp. $Pic^{\natural}(\mathcal{A} \times \mathcal{T} / \mathcal{T})$), il existe un unique morphisme $f_i : T_i \rightarrow A_i^{\natural}$ (resp. $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}^{\natural}$) tel que*

$$\mathcal{L} \simeq (id_{A_i} \times f_i)^{\flat} \mathcal{P}_i \text{ (resp. } \mathcal{L} \simeq (id_{\mathcal{A}} \times f)^{\flat} \mathcal{P}).$$

En particulier, les points de A_i^{\natural} (resp. \mathcal{A}^{\natural}) sont en bijection avec les $\mathcal{D}_{A_i/S_i}^{(0)}$ -modules \mathcal{O}_{A_i} -inversibles (resp. $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ -inversibles) qui satisfont le théorème du carré.

3.3.2 Transformées de Fourier-Mukai de noyau quelconque

On fixe pour toute cette section \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels quasi-compacts et lisses sur $\mathcal{S} = Spf(V)$.

On a déjà construit la transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré pour les \mathcal{O} -modules sur les variétés abéliennes formelles. On peut sans mal étendre cette définition à n'importe quel noyau quasi-cohérent.

Définition 3.3.4. *Soit $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}})$. On pose $p : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ et $q : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ les projections. La transformée de Fourier-Mukai de noyau \mathcal{P} est le foncteur $\Phi_{\mathcal{P}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ défini par*

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}^{\cdot}) = Rq_{*}(\mathcal{P} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}}^{\mathbb{L}} p^{*} \mathcal{E}^{\cdot}),$$

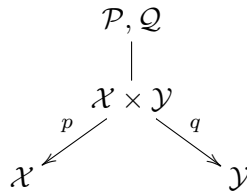
où le foncteur p^{} est défini par $p^{*} \mathcal{E}^{\cdot} = R\varprojlim p_i^{*} \mathcal{E}_i^{\cdot}$.*

Remarques :

- Dans la définition de la transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré on ne prenait pas le complété du produit tensoriel. C'est parce que le noyau de Poincaré est inversible (voir le corollaire 1.2.2 p.24). On va cependant avoir besoin de compléter le produit tensoriel si on se place dans un cadre plus général, notamment pour déterminer la composée de deux transformées de Fourier-Mukai.
- C'est la propriété 1.1.23 (p.22) qui assure que $\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}^{\cdot})$ est bien un complexe quasi-cohérent.

De même que dans le cas non-arithmétique, on peut définir des transformées de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules et pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules.

Définition 3.3.5. *Soient $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}/\mathcal{S}}^{(0)})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^{(0)})$. On pose $p : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ et $q : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ les projections.*



- La transformée de Fourier-Mukai de X_i dans Y_i de noyau \mathcal{P}_i est le foncteur $\Phi_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{D}^{(0)}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_i/S_i}^{(0)}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{Y_i/S_i}^{(0)})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{D}^{(0)}}(\mathcal{E}^\cdot) = q_{i+}(\mathcal{P}_i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_i \times Y_i}}^{\mathbb{L}} p_i^b \mathcal{E}^\cdot).$$

La transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} de noyau \mathcal{P} est le foncteur $\Phi_{\mathcal{P}}^{\hat{\mathcal{D}}^{(0)}} : D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/S}^{(0)}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}/S}^{(0)})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{\hat{\mathcal{D}}^{(0)}}(\mathcal{E}^\cdot) = q_+(\mathcal{P} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}}^{\mathbb{L}} p^b \mathcal{E}^\cdot) \simeq R \varprojlim \Phi_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{D}^{(0)}}(\mathcal{E}_i^\cdot).$$

- La transformée de Fourier-Mukai de X_i dans Y_i de noyau \mathcal{Q}_i (relatif à Y_i) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \rightarrow Y_i} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_i/S_i}^{(0)}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{Y_i})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \rightarrow Y_i}(\mathcal{E}^\cdot) = q_{i+/Y_i}(\mathcal{Q}_i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_i \times Y_i}}^{\mathbb{L}} p_i^{!(Y_i)} \mathcal{E}^\cdot).$$

La transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} de noyau \mathcal{Q} (relatif à \mathcal{Y}) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}(\mathcal{E}^\cdot) = q_{+/\mathcal{Y}}(\mathcal{Q} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}}^{\mathbb{L}} p^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^\cdot) \simeq R \varprojlim \Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \rightarrow Y_i}(\mathcal{E}_i^\cdot).$$

- La transformée de Fourier-Mukai de Y_i dans X_i de noyau \mathcal{Q}_i (relatif à Y_i) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \leftarrow Y_i} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{Y_i}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{X_i/S_i})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \leftarrow Y_i}(\mathcal{E}^\cdot) = p_{i+}^{(Y_i)}(\mathcal{Q}_i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_i \times Y_i}}^{\mathbb{L}} q_i^* \mathcal{E}^\cdot).$$

La transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{Y} dans \mathcal{X} de noyau \mathcal{Q} (relatif à \mathcal{Y}) est le foncteur $\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{Y}} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S})$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{Y}}(\mathcal{E}^\cdot) = p_+^{(\mathcal{Y})}(\mathcal{Q} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}}^{\mathbb{L}} q^* \mathcal{E}^\cdot) \simeq R \varprojlim \Phi_{\mathcal{Q}_i}^{X_i \leftarrow Y_i}(\mathcal{E}_i^\cdot).$$

Remarques :

- Si le noyau \mathcal{P} (ou \mathcal{Q}) est $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ -inversible alors on n'a pas besoin de compléter les produits tensoriels dans les définitions des transformées de Fourier-Mukai formelles. Ceci résulte du corollaire 1.2.2 (p.24).
- Les images des ces transformées de Fourier-Mukai sont bien quasi-cohérentes car les images inverses, images directes (classiques et relatives) et les produits tensoriels sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ préservent la quasi-cohérence (voir sections 3.1.3 et 3.2).

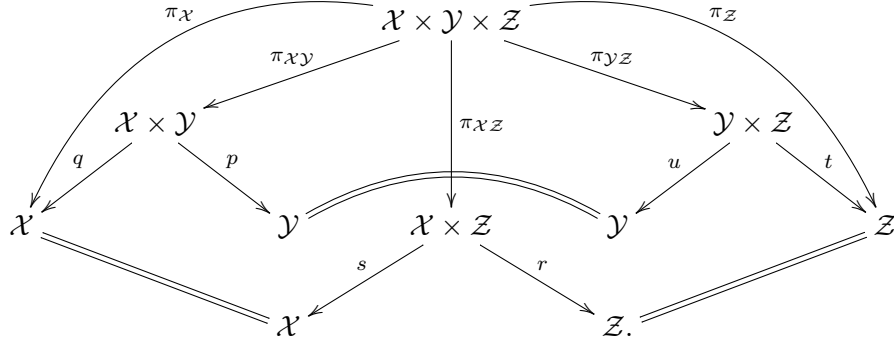
Propriété 3.3.6. Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels quasi-compacts et lisses avec \mathcal{X} et \mathcal{Z} propres. Soient $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^{(0)})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}/\mathcal{Y}}^{(0)})$. On note $\pi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$, $\pi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ et $\pi_{\mathcal{X}\mathcal{Z}}$ les projections de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ et $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ respectivement. On pose enfin

$$\mathcal{R} = \pi_{\mathcal{X}\mathcal{Z}}^{(\mathcal{Y})}(\pi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}/\mathcal{Y}}^b \mathcal{P} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}}^{\mathbb{L}} \pi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}/\mathcal{Y}}^b \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Z}/S}^{(0)}).$$

Alors pour tout $\mathcal{E}^\cdot \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/S}^{(0)})$, $\Phi_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{Z} \leftarrow \mathcal{Y}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq \Phi_{\mathcal{R}}^{\hat{\mathcal{D}}^{(0)}}(\mathcal{E}^\cdot)$.

Démonstration. Ce résultat se prouve de la même manière que dans le cas non-arithmétique, étant donné qu'on a énoncé dans le cas arithmétique toutes les règles de calcul dont on a besoin.

On pose les notations suivantes



Dans la suite, pour ne pas surcharger les calculs on notera les produits tensoriels $\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}^{\mathbb{L}}$ simplement $\hat{\otimes}$. On calcule $\Phi_{\mathcal{R}}^{\hat{\mathcal{D}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{\cdot})$ pour $\mathcal{E}^{\cdot} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}/S}^{(0)})$:

$$\begin{aligned}
r_+(\mathcal{R} \hat{\otimes} s^b \mathcal{E}^{\cdot}) &= r_+ \left(\pi_{\mathcal{X}Z+}^{(\mathcal{Y})} (\pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b \mathcal{P} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{Y}Z/Y}^b \mathcal{Q}) \hat{\otimes} s^b \mathcal{E}^{\cdot} \right) \\
&\simeq r_+ \left(\pi_{\mathcal{X}Z+}^{(\mathcal{Y})} (\pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b \mathcal{P} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{Y}Z/Y}^b \mathcal{Q} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{X}Z}^{!(\mathcal{Y})} s^b \mathcal{E}^{\cdot}) \right) && \text{(Projection; Propriété 3.2.12, p.78)} \\
&\simeq r_+ \pi_{\mathcal{X}Z+}^{(\mathcal{Y})} (\pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b \mathcal{P} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{Y}Z/Y}^b \mathcal{Q} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot}) && \text{(Propriété 3.2.13, p.78)} \\
&\simeq r_+ \pi_{\mathcal{X}Z+}^{(\mathcal{Y})} (\pi_{\mathcal{Y}Z/Y}^b \mathcal{Q} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b (\mathcal{P} \hat{\otimes} q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot})) \\
&\simeq t_+^{(\mathcal{Y})} \pi_{\mathcal{Y}Z+/\mathcal{Y}} (\pi_{\mathcal{Y}Z/Y}^b \mathcal{Q} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b (\mathcal{P} \hat{\otimes} q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot})) && \text{(Propriété 3.2.13, p.78)} \\
&\simeq t_+^{(\mathcal{Y})} (\mathcal{Q} \hat{\otimes} \pi_{\mathcal{Y}Z+/\mathcal{Y}} \pi_{\mathcal{X}Y/Y}^b (\mathcal{P} \hat{\otimes} q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot})) && \text{(Projection; Propriété 3.2.11, p.78)} \\
&\simeq t_+^{(\mathcal{Y})} (\mathcal{Q} \hat{\otimes} u_{/\mathcal{Y}}^b p_{+/\mathcal{Y}} (\mathcal{P} \hat{\otimes} q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot})) && \text{(Propriété 3.2.15, p.79)} \\
&= t_+^{(\mathcal{Y})} (\mathcal{Q} \hat{\otimes} u^* p_{+/\mathcal{Y}} (\mathcal{P} \hat{\otimes} q^{!(\mathcal{Y})} \mathcal{E}^{\cdot})) && (u_{/\mathcal{Y}}^b = u^*) \\
&= \Phi_Q^{\mathcal{Z} \leftarrow \mathcal{Y}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}(\mathcal{E}^{\cdot}).
\end{aligned}$$

□

Propriété 3.3.7. Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} trois schémas formels quasi-compacts et lisses avec \mathcal{Y} propre. Soient $\mathcal{P} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}/\mathcal{X}}^{(0)})$ et $\mathcal{Q} \in D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}/\mathcal{Z}}^{(0)})$. On note $\pi_{\mathcal{X}Y}$, $\pi_{\mathcal{Y}Z}$ et $\pi_{\mathcal{X}Z}$ les projections de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ et $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ respectivement. On pose enfin

$$\mathcal{R} = \pi_{\mathcal{X}Z+/\mathcal{X} \times \mathcal{Z}} (\pi_{\mathcal{X}Y/\mathcal{X}}^{!(\mathcal{Z})} \mathcal{P} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}}^{\mathbb{L}} \pi_{\mathcal{Y}Z/\mathcal{Z}}^{!(\mathcal{X})} \mathcal{Q}) \in D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Z}}).$$

$$\text{Alors } \Phi_Q^{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{X}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}}.$$

Démonstration. A nouveau, on a tous les outils pour écrire la preuve à partir de celle du cas non-arithmétique.

□

3.3.3 Transformée de Fourier-Mukai de noyau de Poincaré

On définit la transformée de Fourier-Mukai sur une variété abélienne formelle \mathcal{A} de la même manière que dans le cas non-arithmétique.

Définition 3.3.8. On rappelle qu'on peut associer à \mathcal{A} un schéma en groupe abélien \mathcal{D} -dual \mathcal{A}^\natural ainsi qu'un faisceau de Poincaré \mathcal{P} sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural$, qui est un faisceau de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural}$ -inversible.

On note $p : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}$ et $p^\natural : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}^\natural$ les projections.

On définit la transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural})$ par

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\natural}(\mathcal{E}^\cdot) = p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{!(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{E}^\cdot).$$

On définit aussi la transformée de Fourier-Mukai \mathcal{D} -duale $\mathcal{F}^\natural : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}^{(0)})$ par

$$\mathcal{F}^\natural(\mathcal{E}^\cdot) = \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A}^\natural \leftarrow \mathcal{A}}(\mathcal{E}^\cdot) = p_+^{(\mathcal{A}^\natural)}(\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural}}^{\mathbb{L}} p^{\natural*} \mathcal{E}^\cdot).$$

Pour ce qui est des formules d'involativité, on n'en conserve malheureusement qu'une seule des deux a priori, la seconde nécessitant le théorème de Kashiwara. Mais avant de l'énoncer, remarquons qu'on peut déterminer ici aussi les projections de \mathcal{P} sur \mathcal{A} et \mathcal{A}^\natural .

Lemme 3.3.9. On a les deux isomorphismes suivants

1. $p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P} \simeq \epsilon_*^\natural \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d] \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural})$.
2. $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}, \mathbb{Q}}^{(0)}} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \simeq \epsilon_+ \mathcal{O}_{\mathcal{S}, \mathbb{Q}}[-d] \in D_{qcoh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}, \mathbb{Q}}^\dagger)$.

Démonstration. 1. Pour montrer le premier isomorphisme, on va chercher à construire un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}$ -modules entre $p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P}$ et $\epsilon_*^\natural \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d]$. Remarquons d'ailleurs que comme \mathcal{P} est inversible, donc cohérent, et que p^\natural et ϵ^\natural sont propres, les faisceaux $p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P}$ et $\epsilon_*^\natural \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ sont cohérents.

On va construire le morphisme $p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^\natural \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d]$ par adjonction à partir d'un morphisme $\epsilon^{\natural*} p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d]$ (on rappelle que le complexe de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -modules $\epsilon^{\natural*} \mathcal{E}^\cdot$ est défini comme la limite projective $R\varprojlim \epsilon_i^{\natural*} \mathcal{E}_i$). Pour ce faire, on considère le diagramme de changement de base suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^\natural} & \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^\natural \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\epsilon^\natural} & \mathcal{A}^\natural. \end{array}$$

Comme on cherche un morphisme de \mathcal{O} -modules on peut oublier les structures de \mathcal{D} -modules, ainsi la formule du changement de base pour les \mathcal{O} -modules permet d'écrire

$$\epsilon^{\natural*} p_{+/\mathcal{A}^\natural}^\natural \mathcal{P} = \epsilon^{\natural*} R p_{*}^\natural(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}^\natural \leftarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}} \mathcal{P}) \simeq R \pi_* (id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^\natural)^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}^\natural \leftarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}} \mathcal{P}).$$

On note $DR_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}(\mathcal{P})$ le complexe de de Rham de \mathcal{P} (placé entre les degrés 0 et d) :

$$DR_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}(\mathcal{P}) : 0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \Omega_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^1 \otimes \mathcal{P} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^d \otimes \mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Le complexe de Spencer (voir annexe A) du faisceau de transfert $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}^\natural \leftarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural}^{(0)}$ permet alors de trouver un isomorphisme canonique

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}^\natural \leftarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}^{(0)}} \mathcal{P} \simeq DR_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\natural / \mathcal{A}^\natural}(\mathcal{P})[d],$$

où le deuxième complexe est donc placé entre les degrés $-d$ et 0 . On trouve alors un isomorphisme

$$\epsilon^{\natural} p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq R\pi_*(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b DR_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{A}^{\natural}}(\mathcal{P})[d].$$

Les termes du complexe de de Rham de \mathcal{P} étant plats, ils sont acycliques pour $(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b$ et $(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b \Omega_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{A}^{\natural}}^k \simeq \Omega_{\mathcal{A}/S}^k$. Ainsi,

$$(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b DR_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{A}^{\natural}}(\mathcal{P}) \simeq DR_{\mathcal{A}/S}((id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b \mathcal{P}).$$

On sait calculer le $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ -module $(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^b \mathcal{P}$. En fait, on a même un résultat plus précis :

Lemme 3.3.10. *Comme $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S}$ -modules,*

$$(id_{\mathcal{A}} \times \epsilon^{\natural})^{!(\mathcal{A}^{\natural})} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la représentabilité de Pic^{\natural} par \mathcal{A}^{\natural} et de la correspondance entre \mathcal{P} et $id_{\mathcal{A}^{\natural}}$. Pour plus de détails, on renvoie à la démonstration du lemme 2.2.16 (p.61). \square

On trouve donc l'isomorphisme canonique

$$\epsilon^{\natural} p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq R\pi_* DR_{\mathcal{A}/S}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})[d] \simeq R\pi_* DR(\mathcal{A}/S)[d],$$

qui est donc un complexe concentré entre les degrés $-d$ et 0 .

On sait que le $2d$ -ième groupe de cohomologie de $R\pi_* DR(\mathcal{A}/S)$ est $\mathcal{H}_{dR}^{2d}(\mathcal{A}/S)$.

Lemme 3.3.11.

$$H_{dR}^n(\mathcal{A}/S) \simeq \varprojlim H_{dR}^n(A_i/S_i) \simeq \bigwedge^n Lie(\mathcal{A}^{\natural}).$$

Démonstration. On sait que les foncteurs $R\Gamma$ et $R\varprojlim$ commutent, donc

$$R\Gamma R\varprojlim DR(A_i/S_i) \simeq R\varprojlim R\Gamma DR(A_i/S_i).$$

Comme les éléments de $DR(A_i/S_i)$ sont les réductions modulo π^i des éléments de $DR(A_{i+1}/S_{i+1})$, $R\varprojlim DR(A_i/S_i)$ est le complexe dont les éléments sont les limites projectives des éléments des $DR(A_i/S_i)$, c'est à dire $DR(\mathcal{A}/S)$. Ainsi, les groupes de cohomologie du terme de gauche sont les $H_{dR}^n(\mathcal{A}/S)$. Il suffit donc de calculer les groupes de cohomologie du terme de droite.

A priori, la suite spectrale des foncteurs composés nous donne deux parties pour le n -ième groupe de cohomologie du terme de droite : $\varprojlim H_{dR}^n(A_i/S_i)$ et $R^1 \varprojlim H_{dR}^{n-1}(A_i/S_i)$, le foncteur $R\varprojlim$ étant de dimension cohomologique 1. Or on sait que $H_{dR}^n(A_i/S_i) \simeq \epsilon^{\natural*} \Omega_{A_i^{\natural}/S_i}^n$ ([Col98], théorème 2.2). Le $R^1 \varprojlim$ est donc trivial et on en déduit le premier isomorphisme.

Le second isomorphisme est une conséquence du fait que $H^1(A_i/S_i) \simeq Lie(\mathcal{A}_i^{\natural})$ (voir [MM74], parties I.4.1 et I.4.2). \square

Comme $H_{dR}^1(\mathcal{A}/S) \simeq Lie(\mathcal{A}^{\natural})$ est un \mathcal{V} -module libre de rang $2d$, on déduit que $H_{dR}^{2d}(\mathcal{A}/S) \simeq \mathcal{V}$.

Si on pose $F^\bullet = R\pi_* DR(\mathcal{A}/\mathcal{S})[d]$, on trouve un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{-d} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F^{d-1} \xrightarrow{d_{d-1}} F^d \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 \longrightarrow F^d / \text{Im}(d_{d-1}) \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \parallel \\
& & & & & & \mathcal{H}^d(F^\bullet) \simeq \mathcal{O}_S,
\end{array}$$

c'est-à-dire un morphisme

$$\epsilon^{\text{hb}} p_{+/\mathcal{A}^{\text{h}}}^{\text{h}} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}_S[-d].$$

Par adjonction, on trouve un morphisme

$$p_{+/\mathcal{A}^{\text{h}}}^{\text{h}} \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^{\text{h}} \mathcal{O}_S[-d].$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, on va se servir du fait que les faisceaux sont cohérents. L'idée sera alors de prouver l'isomorphisme sur chaque point de \mathcal{A}^{h} , de sorte que grâce à la cohérence des faisceaux et au lemme de Nakayama on puisse prouver l'isomorphisme voulu sur les variétés A_i , afin d'en déduire l'isomorphisme sur les schémas formels. Pour ce faire, il faut dans un premier temps comprendre les points de \mathcal{A}^{h} , c'est à dire les éléments de $\text{Pic}^{\text{h}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$.

Étape 1 : On va montrer le lemme suivant

Lemme 3.3.12. *Pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}^{\text{h}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$*

$$H_{dR}^{i+d}(\mathcal{L}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \\ L_{d-i} \epsilon^{\text{h}*} \epsilon_*^{\text{h}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}} & \text{si } \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \end{cases}.$$

Démonstration. On peut appliquer un raisonnement similaire à celui utilisé dans le cas non-arithmétique pour calculer les groupes de cohomologie des éléments de $\text{Pic}^{\text{h}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$.

Soit $\mathcal{L} \in \text{Pic}^{\text{h}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$, $\mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. On note $H^0 = H_{dR}^0(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$, qui est donc un K -espace vectoriel, de dimension r . On sait ([Ked10], lemme 5.1.5) que $r = 0$ ou $r = 1$ et qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}} \otimes_K H^0 \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow 0,$$

où \mathcal{L}' est un $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -module cohérent muni d'une connexion intégrable. On sait, d'après la proposition 1.3.4, que les foncteurs sp^* et sp_* réalisent une équivalence de catégorie entre les $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -modules cohérents et les $\mathcal{O}_{\mathcal{A}K}$ -modules cohérents. D'après [Ber96a], proposition 2.2.3, \mathcal{L}' est donc localement libre de rang fini. On note r' son rang. On sait alors, comme $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ est inversible, que $r + r' = 1$. Or $r' \neq 0$ car sinon on aurait un isomorphisme $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}} \otimes H^0 \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$, ce qui est exclu. Donc $r' = 1$ et $r = 0$, i.e. $H^0 = 0$.

On sait donc que $H_{dR}^0(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}) = 0$, ce qui permet de dire que $H_{dR}^0(\mathcal{L})$ est de torsion. Or comme $H_{dR}^0(\mathcal{L}) \subset H^0(\mathcal{L})$ et qu'aucune section de \mathcal{L} ne peut être de torsion sur \mathcal{A} (car localement $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$), $H_{dR}^0(\mathcal{L})$ est sans torsion, donc $H_{dR}^0(\mathcal{L}) = 0$.

Supposons à présent qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $H_{dR}^n(\mathcal{L}) \neq 0$ et considérons le plus petit d'entre eux. Comme $\mathcal{L} \in \text{Pic}^{\text{h}}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$, il vérifie le théorème du carré : $m^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}$.

De plus, il existe toujours un isomorphisme ϕ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ tel que $m = p_1 \circ \phi$, de sorte que $\phi^* m^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L}$. Ainsi, la formule de Künneth (voir annexe B) donne

$$H_{dR}^n(m^* \mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{k+l=n} H_{dR}^k(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^l(\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{k+l=n} H_{dR}^k(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^l(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}).$$

Or comme pour tout $k < n$, $H_{dR}^k(\mathcal{L}) = 0$, on en déduit que

$$0 \simeq H_{dR}^n(\mathcal{L}) \otimes H_{dR}^0(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}) \simeq H_{dR}^n(\mathcal{L}),$$

ce qui est une contradiction. Donc pour tout n , $H_{dR}^n(\mathcal{L}) = 0$.

A présent, on traite le cas où $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. On a déjà vu dans la partie précédente que pour une variété abélienne A on a les isomorphismes

$$H_{dR}^n(A/S) \simeq \bigwedge^n \text{Lie}(A^{\natural}) \simeq \mathcal{H}^n \left(R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S) \right) \simeq L_{2d-n} \epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S.$$

La démonstration de ces isomorphismes n'utilise pas l'hypothèse de caractéristique nulle sur la base S et ils restent donc vrais sur les A_i . Ainsi, on en déduit à l'aide du lemme 3.3.11 (p. 85) que

$$H_{dR}^n(\mathcal{A}/S) \simeq R\varprojlim H_{dR}^n(A_i/S_i) \simeq L_{2d-n} \epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S.$$

□

Étape 2 : Comme on va vouloir appliquer le lemme de Nakayama sur les schémas A_i^{\natural} , il nous faut avoir un isomorphisme en restriction à chaque point fermé de chaque A_i^{\natural} , or on verra qu'un tel point peut être relevé en un $\text{Spf}(W(k))$ -point de \mathcal{A}^{\natural} . On montre alors le résultat suivant :

Lemme 3.3.13. *Soit k une extension finie du corps résiduel de V , $W(k)$ son anneau des vecteurs de Witt et $\mathcal{S}' = \text{Spf}(W(k))$. Pour tout \mathcal{S}' -point de \mathcal{A}^{\natural} , si on note $\iota : \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$ l'injection, on a*

$$L\iota^* p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d].$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que le morphisme

$$L\iota^* p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow L\iota^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d].$$

est bien défini, étant donné que c'est le tiré en arrière par ι du morphisme $p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d]$ précédemment construit.

De plus, si on note $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$ et $\mathcal{A}^{\natural'} = \mathcal{A}^{\natural} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$, alors ι se décompose naturellement en

$$\mathcal{S}' \xrightarrow{\iota'} \mathcal{A}^{\natural'} \xrightarrow{p^{\natural'}} \mathcal{A}^{\natural},$$

où $p^{\natural'}$ est la projection et $\iota' = \iota \times id_{\mathcal{S}'}$. De fait, en appliquant un changement de base dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}' & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ \epsilon^{\natural'} \downarrow & & \downarrow \epsilon^{\natural} \\ \mathcal{A}^{\natural'} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\natural} \\ & p^{\natural'} \searrow & \end{array}$$

on trouve un isomorphisme canonique

$$L\iota^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d] \simeq L\iota'^* \epsilon_*^{\natural'} \mathcal{O}_{S'}[-d].$$

Comme le faisceau de Poincaré commute lui aussi aux changements de base, on a aussi un isomorphisme canonique

$$L\iota^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota'^* p_{+/A^{\natural'}}^{\natural'} \mathcal{P}',$$

où \mathcal{P}' est le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}^{\natural'}$. Il faut donc montrer que le morphisme

$$L\iota'^* p_{+/A^{\natural'}}^{\natural'} \mathcal{P}' \rightarrow L\iota'^* \epsilon_*^{\natural'} \mathcal{O}_{S'}[-d]$$

est un isomorphisme. On peut donc supposer que $S' = S$. Il s'agit alors d'une ré-écriture du même résultat dans le cadre non-arithmétique :

Comme $\epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S$ est à support dans $\epsilon^{\natural}(S)$, il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \forall \iota : S \hookrightarrow \mathcal{A}^{\natural}, \iota \neq \epsilon^{\natural} & L\iota^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} = 0. \\ & L\epsilon^{\natural*} p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d]. \end{cases}$$

Or la formule du changement de base dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{id_{\mathcal{A}} \times \iota} & \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^{\natural} \\ S & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A}^{\natural} \end{array}$$

donne l'isomorphisme

$$L\iota^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq \pi_+ L(id_{\mathcal{A}} \times \iota)^* \mathcal{P}.$$

Cependant, $L(id_{\mathcal{A}} \times \iota)^* \mathcal{P} = (id_{\mathcal{A}} \times \iota)^* \mathcal{P}$ est par définition de \mathcal{P} l'élément de $Pic^{\natural}(\mathcal{A}/S)$ correspondant à ι . On note \mathcal{L} cet élément. Comme $\pi_+ \mathcal{L} \simeq H_{dR}^{\bullet}(\mathcal{L})[d]$, le lemme précédent donne donc

$$L\iota^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \text{ i.e. } \iota \neq \epsilon^{\natural}. \\ L\epsilon^{\natural*} \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d] & \text{si } \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \text{ i.e. } \iota = \epsilon^{\natural}. \end{cases}$$

On en déduit donc l'isomorphisme

$$L\iota^* p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq L\iota^* \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d].$$

□

Étape 3 : Pour conclure, on va utiliser la cohérence des faisceaux pour déduire un isomorphisme sur les schémas A_i^{\natural} . Pour ce faire on remarque que le morphisme

$$p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \rightarrow \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d]$$

induit un morphisme

$$p_{+/A_i^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}_i \rightarrow \epsilon_{i*}^{\natural} \mathcal{O}_{S_i}[-d]$$

sur les réductions modulo π^i . Fixons un point fermé x de A_i^{\natural} , qui est donc aussi un point fermé de A_0^{\natural} . On note k son corps résiduel, qui est donc une extension finie du corps résiduel de V .

Comme k est fini, il est parfait et on peut prendre son anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ et on note ω son uniformisante. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(W(k)/\omega) & \hookrightarrow & A_0^{\natural} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \text{Spec}(W(k)/\omega^2) & \xrightarrow{f} & A_1^{\natural} \end{array}$$

avec f qui existe par lissité formelle. Par une récurrence immédiate, on trouve que le point fermé x se relève sur toutes les variétés A_i^{\natural} , et donc sur le schéma formel \mathcal{A}^{\natural} . On note $\iota : \text{Spf}(W(k)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$ ce relevé. Le lemme précédent assure alors que les faisceaux $p_{+/A^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}$ et $\epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d]$ restreints à ι sont isomorphes. Ainsi, après réduction modulo π^i , les faisceaux $p_{+/A_i^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}_i$ et $\epsilon_{i*}^{\natural} \mathcal{O}_{S_i}[-d]$ sont isomorphes en restriction à x , et ce pour tout x .

Comme les faisceaux $p_{+/A_i^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}_i$ et $\epsilon_{i*}^{\natural} \mathcal{O}_{S_i}[-d]$ sont cohérents sur A_i^{\natural} et sont isomorphes sur chaque point fermé de A_i^{\natural} , le lemme de Nakayama permet d'affirmer qu'on a un isomorphisme

$$p_{+/A_i^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P}_i \simeq \epsilon_{i*}^{\natural} \mathcal{O}_{S_i}[-d],$$

et ce pour tout i . Comme tous ces isomorphismes proviennent d'un même morphisme sur le schéma formel \mathcal{A}^{\natural} , on en conclut que lui aussi est un isomorphisme, i.e.

$$p_{+/\mathcal{A}^{\natural}}^{\natural} \mathcal{P} \simeq \epsilon_*^{\natural} \mathcal{O}_S[-d].$$

2. Pour le second isomorphisme, on est obligé de tensoriser par $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S}^{\dagger}$ pour pouvoir utiliser le théorème d'équivalence de Kashiwara. Remarquons tout d'abord qu'on a un isomorphisme $\epsilon^! p_+^{(\mathcal{A}^{\natural})} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_S[-d]$.

En effet, la formule de changement de base dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\natural} & \xrightarrow{\epsilon \times id_{\mathcal{A}^{\natural}}} & \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural} \\ \pi^{\natural} \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{A} \end{array}$$

donne

$$\epsilon^! p_+^{(\mathcal{A}^{\natural})} \mathcal{P} \simeq \pi_+^{\natural(\mathcal{A}^{\natural})} (\epsilon \times id_{\mathcal{A}^{\natural}})^!_{/\mathcal{A}^{\natural}} \mathcal{P}.$$

Or \mathcal{P} vérifie le théorème du carré car il est dans $\text{Pic}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{A}^{\natural})$, donc

$$\tilde{p}_{1/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P} \otimes \tilde{p}_{2/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P} \simeq \tilde{m}_{/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P},$$

où $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{m} : (\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}) \times_{\mathcal{A}^{\natural}} (\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}$ sont les projections et la multiplication associées au \mathcal{A}^{\natural} -schéma en groupes abéliens $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}$. On note

$$\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural} \times \mathcal{A} \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}) \times_{\mathcal{A}^{\natural}} (\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural})$$

l'isomorphisme canonique. On trouve alors l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}$ -modules

$$(\epsilon \times id_{\mathcal{A}^{\natural}} \times \epsilon)^{\flat}_{/\mathcal{A}^{\natural}} \varphi^{\flat}_{/\mathcal{A}^{\natural}} (\tilde{p}_{1/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P} \otimes \tilde{p}_{2/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P}) \simeq (\epsilon \times id_{\mathcal{A}^{\natural}} \times \epsilon)^{\flat}_{/\mathcal{A}^{\natural}} \varphi^{\flat}_{/\mathcal{A}^{\natural}} \tilde{m}_{/\mathcal{A}^{\natural}}^{\flat} \mathcal{P}.$$

Comme $f \circ \varphi \circ (\epsilon \times id_{\mathcal{A}^\natural} \times \epsilon) = \epsilon \times id_{\mathcal{A}^\natural}$ pour $f \in \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{m}\}$, on trouve

$$(\epsilon \times id_{\mathcal{A}^\natural})_{/\mathcal{A}^\natural}^b \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}.$$

Ainsi,

$$\epsilon^! p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P} \simeq \pi_+^{\natural(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}[-d] = R\pi_*^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}[-d].$$

On se sert ici de l'hypothèse selon laquelle on a un isomorphisme $R\pi_*^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural} \simeq \mathcal{O}_S$ pour obtenir l'isomorphisme

$$\epsilon^! p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_S[-d].$$

De même, le complexe $p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P} \simeq Rp_* \mathcal{P}$ est à support dans $\epsilon(S)$ (il est aussi concentré en degré d). On le montre sur les restrictions modulo π^i de la même manière que dans le cas non-arithmétique et cette propriété commute à la limite projective.

Les faisceaux $p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}$ et $\epsilon_+ \mathcal{O}_S[-d]$ vérifient alors les conditions du théorème de Kashiwara, mais ce sont des $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S}^{(0)}$ -modules et il existe des contre-exemples à ce théorème dans ce cas. Il faut alors les transformer en $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules. $\epsilon_+ \mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}}[-d]$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module, mais pas $p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ a priori, c'est pourquoi on construit le complexe $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$. Ce complexe est lui aussi à support dans $\epsilon(S)$.

Il ne reste qu'à montrer que son image inverse par ϵ est bien $\mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}}[-d]$. On est ramenés à montrer un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}}$ -modules. Pour ce faire, on s'appuie sur le résultat 4.3.2 de [Ber02].

$$\begin{aligned} \epsilon^! \left(\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \right) &\simeq \mathcal{D}_{S \rightarrow \mathcal{A}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\epsilon^{-1} \mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger}^{\mathbb{L}} \epsilon^{-1} \left(\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \right) \\ &\simeq \mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}} \otimes_{\epsilon^{-1} \mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger}^{\mathbb{L}} \left(\epsilon^{-1} \mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\epsilon^{-1} \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}} \epsilon^{-1} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \right) \\ &\simeq \hat{\mathcal{D}}_{S/S, \mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\epsilon^{-1} \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}}^{\mathbb{L}} \epsilon^{-1} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \\ &\simeq \epsilon^! p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}}[-d] \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème d'équivalence de Kashiwara. On en déduit un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^{(0)}} p_+^{(\mathcal{A}^\natural)} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \simeq \epsilon_+ \mathcal{O}_{S, \mathbb{Q}}[-d].$$

□

A cause de la tensorisation par $\mathcal{D}_{\mathcal{A}/S, \mathbb{Q}}^\dagger$, on ne peut plus retrouver la formule d'involativité sur \mathcal{A} , par contre, on conserve celle sur \mathcal{A}^\natural .

Propriété 3.3.14.

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\natural \simeq \langle -1 \rangle^{\natural*} \bullet [-d] : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}).$$

Démonstration. Étant donné qu'on a adapté la totalité des résultats du cas non-arithmétique au cas arithmétique, la preuve de cet isomorphisme sera en tout point identique à celle de la propriété 2.2.21 (p.67) c'est pourquoi on ne donnera pas autant de détails.

On a vu dans la section précédente que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{\natural} = \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\natural}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}^{\natural}} \simeq \Phi_{\mathcal{R}},$$

avec $\mathcal{R} = \pi_{13+/(1,3)}(\pi_{12/1}^{\natural(3)} \mathcal{P} \otimes \pi_{23/3}^{\natural(1)} \mathcal{P})$, où les π_{ij} sont les projections de $\mathcal{A}^{\natural} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\natural}$.

Comme dans le cas non-arithmétique, le principe de la bascule permet de montrer que \mathcal{R} est isomorphe à $\pi_{13+/(1,3)} m_{13/3}^{\natural(1)} \mathcal{P}$, qui est lui-même isomorphe à $Lm^{\natural*} p_{+/\mathcal{A}^{\natural}} \mathcal{P}$ par le théorème du changement de base.

Le lemme précédent permet alors d'écrire $\mathcal{R} \simeq Lm^{\natural*} \epsilon_{*}^{\natural} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}[-d]$. Un autre changement de base permet de trouver que $\mathcal{R} \simeq \tilde{\epsilon}_{*}^{\natural} \mathcal{O}_{\Gamma^{\natural}}[-d]$, où Γ^{\natural} est l'anti-diagonale de \mathcal{A}^{\natural} (i.e. les éléments de la forme $(a, -a)$) et $\tilde{\epsilon} : \Gamma^{\natural} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\natural} \times \mathcal{A}^{\natural}$.

Ainsi, la composée $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{\natural}$ est la transformée de Fourier-Mukai de noyau $\tilde{\epsilon}_{*}^{\natural} \mathcal{O}_{\Gamma^{\natural}}[-d]$. La formule de la projection permet alors d'écrire

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{\natural}(\mathcal{E}^{\cdot}) \simeq (p_1 \circ \tilde{\epsilon})_{+} (p_2 \circ \tilde{\epsilon})^{*} \mathcal{E}^{\cdot}[-d],$$

avec $p_1, p_2 : \mathcal{A}^{\natural} \times \mathcal{A}^{\natural} \rightarrow \mathcal{A}^{\natural}$ les projections. Comme on a un diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma^{\natural} & \\ p_1 \circ \tilde{\epsilon} \swarrow & & \searrow p_2 \circ \tilde{\epsilon} \\ \mathcal{A}^{\natural} & \xrightarrow{\langle -1 \rangle^{\natural}} & \mathcal{A}^{\natural} \end{array}$$

on en déduit que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{\natural}(\mathcal{E}^{\cdot}) \simeq \langle -1 \rangle^{*} \mathcal{E}^{\cdot}[-d].$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3.3.15. \mathcal{F} est essentiellement surjective et \mathcal{F}^{\natural} est fidèle.

Annexe A

Complexes de Spencer

On rappelle tout d'abord la construction des complexes de Koszul.

Définition A.1. Soient A un anneau commutatif, M un A -module et $x_1, \dots, x_n \in A$. On pose $F = A^n = AX_1 \oplus \dots \oplus AX_n$.

Le complexe de Koszul associé à (x_1, \dots, x_n) et M est le complexe

$$0 \rightarrow M \otimes_A \bigwedge^n F \rightarrow \dots \rightarrow M \otimes_A \bigwedge^k F \rightarrow M \otimes_A \bigwedge^{k-1} F \rightarrow \dots \rightarrow M \rightarrow 0$$

dont la différentielle est donnée par

$$d(m \otimes X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} m x_{i_l} \otimes X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_{l-1}} \wedge X_{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge X_{i_k}.$$

Tout l'intérêt des complexes de Koszul est qu'ils permettent de trouver des résolutions grâce au théorème suivant.

Théorème A.2. Soient A un anneau commutatif, M un A -module et $x_1, \dots, x_n \in A$.

On suppose que la famille (x_1, \dots, x_n) est M régulière, c'est-à-dire que pour tout j x_{j+1} n'est pas un diviseur de zéro dans $M/(x_1, \dots, x_j)M$.

Dans ce cas le complexe de Koszul associé à (x_1, \dots, x_n) et M est quasi-isomorphe à $M/(x_1, \dots, x_n)M$ (ou plus précisément au complexe dont il est le seul élément non-nul, placé en degré 0).

On obtient ainsi une résolution de $M/(x_1, \dots, x_n)M$ par des A -modules, mais il faut que A soit commutatif. Dans notre cadre d'étude, le faisceau d'anneaux qui va jouer le rôle de A est le faisceau des différentielles de niveau 0, $\mathcal{D}^{(0)}$, qui n'est pas commutatif. On ne peut donc pas utiliser directement ce théorème pour trouver des résolutions de $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules. Cependant, on peut tout de même construire des complexes de $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules similaires, appelés complexes de Spencer, qui seront des résolutions de certains $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules.

On va ici construire le complexe de Spencer du faisceau de transfert $\mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)}$ d'une projection $p : X \times Y \rightarrow Y$ de variétés lisses sur S , qui pourra être $\text{Spec}(V)$, $\text{Spec}(V/\pi^i V)$ ou $\text{Spf}(V)$ avec V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π .

On considère le complexe S . de terme général

$$S_{-k} = \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \bigwedge^k q^* \mathcal{T}_X,$$

avec $q : X \times Y \rightarrow X$ la seconde projection, et muni de la différentielle d définie par

$$d(P \otimes \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} P \partial_{i_l} \otimes \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\partial}_{i_l} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k} \\ + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq k} (-1)^{l_1+l_2} P \otimes [\partial_{i_{l_1}}, \partial_{i_{l_2}}] \wedge \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\partial}_{i_{l_1}} \wedge \dots \wedge \hat{\partial}_{i_{l_2}} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k},$$

où $\hat{\partial}_{i_l}$ signifie qu'on a enlevé l'élément ∂_{i_l} du produit. Il s'agit donc d'un complexe compris entre les degrés $-\dim(X)$ et 0.

On va montrer que ce complexe est une résolution du faisceau de transfert $\mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)}$. Pour ce faire, on peut se placer sur un ouvert affine U de $X \times Y$ muni de coordonnées locales $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. On fixe $\partial_1, \dots, \partial_n$ la base de $(q^* \mathcal{T}_X)|_U$ associée aux coordonnées x_1, \dots, x_n . Comme les éléments ∂_i commutent entre eux, on trouve que

$$d(P \otimes \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} P \partial_{i_l} \otimes \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\partial}_{i_l} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}.$$

On va appliquer le théorème de Koszul au complexe S restreint à U en considérant l'anneau commutatif $A = V[\partial_1, \dots, \partial_n]$ et le A -module (à droite) $M = \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}(U)$. Pour ce faire, il faut vérifier que la famille $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ est M -régulière. Or, remarquons que pour tout i

$$M/M(\partial_1, \dots, \partial_{i-1}) = \bigoplus_{(\alpha_i, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)} \mathcal{O}_{X \times Y} \partial_i^{\alpha_i} \dots \partial_n^{\alpha_n} \tilde{\partial}_1^{\beta_1} \dots \tilde{\partial}_m^{\beta_m},$$

où les $\tilde{\partial}_j$ sont les éléments de la base de $(p^* \mathcal{T}_Y)|_U$ associés aux y_j . Les $\tilde{\partial}_j$ commutant aux ∂_i , on voit clairement que si R est un élément de ce quotient tel que $R \partial_i = 0$, alors $R = 0$.

Le théorème de Koszul permet alors d'affirmer que le complexe S restreint à U est quasi-isomorphe à

$$M/M(\partial_1, \dots, \partial_n) \simeq \bigoplus_{(\beta_1, \dots, \beta_m)} \mathcal{O}_{X \times Y} \tilde{\partial}_1^{\beta_1} \dots \tilde{\partial}_m^{\beta_m} \simeq p^* \mathcal{D}_Y^{(0)} = \mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)}.$$

Proposition A.3.

$$\mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)} \simeq \left(0 \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \bigwedge^{\dim(X)} q^* \mathcal{T}_X \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \bigwedge^2 q^* \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes q^* \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow 0 \right),$$

qui est un complexe placé entre les degrés $-\dim(X)$ et 0.

On peut déduire de ce résultat un complexe de Spencer pour $\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow Y}^{(0)}$ et pour $\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow Y}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}} \mathcal{E}$ avec \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}$ -module.

Pour ce faire on va identifier le faisceau $\omega_{X \times Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \omega_{X \times Y}^{-1}$ avec le faisceau $\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}$ dont les structures à gauche et à droite ont été inversées.

Proposition A.4.

$$\mathcal{D}_{Y \leftarrow X \times Y}^{(0)} \simeq \left(0 \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^2 \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^{\dim(X)} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow 0 \right),$$

qui est un complexe placé entre les degrés $-\dim(X)$ et 0.

De plus, si on note $DR_{X \times Y/Y}(\mathcal{E})$ le complexe de de Rham de \mathcal{E} (placé entre les degrés 0 et $\dim(X)$), alors $\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow Y}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}} \mathcal{E} \simeq DR_{X \times Y/Y}(\mathcal{E})[d]$.

Démonstration. Par définition, $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X \times Y}^{(0)} = \omega_{X \times Y/S} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)} \otimes \omega_{X \times Y/X}^{-1}$. Les faisceaux $\omega_{Z/T}$ étant inversibles, ils sont plats, on peut tensoriser le complexe de Spencer de $\mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y}^{(0)}$ à gauche par $\omega_{X \times Y/S}$ et à droite par $\omega_{X \times Y/X}^{-1}$. On obtient alors le complexe (placé entre les degrés $-dim(X)$ et 0) de terme général

$$\omega_{X \times Y/S} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \omega_{X \times Y/X}^{-1} \otimes \bigwedge^{-k} q^* \mathcal{T}_X \simeq \bigwedge^{-k} q^* \mathcal{T}_X \otimes \omega_{X \times Y/Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \simeq \Omega_{X \times Y/Y}^{dim(X)+k} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)},$$

en utilisant l'identification du faisceau $\omega_{X \times Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \otimes \omega_{X \times Y}^{-1}$ avec le faisceau $\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}$ dont les structures à gauche et à droite ont été inversées. On trouve alors une résolution de $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X \times Y}^{(0)}$ par le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^2 \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^{dim(X)} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)} \rightarrow 0.$$

Enfin, comme ce complexe est plat sur $\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}$, pour tout $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -module \mathcal{E} on en déduit la résolution suivante du faisceau $\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow Y}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)}} \mathcal{E}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^2 \otimes \mathcal{E} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^{dim(X)} \otimes \mathcal{E} \rightarrow 0 = DR_{X \times Y/Y}(\mathcal{E})[d],$$

qui est donc un complexe compris entre les degrés $-dim(X)$ et 0. □

On peut remarquer que ces résultats restent vrais si on considère des faisceaux relatifs à Y .

Proposition A.5.

$$\mathcal{D}_{X \times Y \rightarrow Y/Y}^{(0)} \simeq \left(0 \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \otimes \bigwedge^{dim(X)} q^* \mathcal{T}_X \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \otimes q^* \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \rightarrow 0 \right),$$

$$\mathcal{D}_{Y \leftarrow X \times Y/Y}^{(0)} \simeq \left(0 \rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X \times Y/Y}^{dim(X)} \otimes \mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)} \rightarrow 0 \right)$$

et pour tout $\mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)}$ -module \mathcal{E}

$$\mathcal{D}_{Y \leftarrow X \times Y/Y}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y/Y}^{(0)}} \mathcal{E} \simeq DR_{X \times Y/Y}(\mathcal{E})[d].$$

En particulier, on retrouve le résultat énoncé dans [HTT08] propriété 1.5.28.

Proposition A.6. Soient X et Y deux variétés lisses et $p : X \times Y \rightarrow Y$ la projection canonique. Pour tout $\mathcal{E} \in Mod(\mathcal{D}_{X \times Y}^{(0)})$ on a

$$p_+ \mathcal{E} \simeq Rp_* DR_{X \times Y/Y}(\mathcal{E}).$$

Annexe B

Formule de Künneth formelle

Avant toute chose, rappelons la formule de Künneth classique.

Proposition B.1 (Formule de Künneth). *Soient X et Y deux schémas propres et lisses sur S affine, \mathcal{F} un complexe borné de faisceaux \mathcal{O}_X -quasi-cohérents et S -plats dont les différentielles sont des opérateurs différentiels sur X et \mathcal{G} un complexe borné inférieurement de faisceaux \mathcal{O}_Y -quasi-cohérents et S -plats dont les différentielles sont des opérateurs différentiels sur Y . On note $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ et $\text{Tot}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$ le complexe total associé au double complexe $(\mathcal{F}^i \boxtimes \mathcal{G}^j)_{i,j}$. Alors*

$$R\Gamma(X \times Y, \text{Tot}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})) \simeq R\Gamma(X, \mathcal{F}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(Y, \mathcal{G}).$$

On renvoie à [Sta21, Section 0G4A] pour plus de détails.

Le but de cette annexe est d'énoncer un résultat similaire dans le cadre formel.

Proposition B.2 (Formule de Künneth formelle). *Soient V un anneau à valuation discrète, \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 deux schémas formels propres et lisses sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$ et \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux faisceaux inversibles respectivement sur \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 . Alors*

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2)) \simeq R\Gamma(\mathcal{X}_1, DR(\mathcal{L}_1)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(\mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_2)).$$

On ne l'énonce pas dans un cadre aussi général que la formule de Künneth classique uniquement parce que nous n'aurons pas besoin de version plus générale que celle-ci. Avant de montrer ce résultat, on démontre un lemme intermédiaire.

Lemme B.3. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on considère $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1})$ et $\mathcal{F} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_2})$. Alors*

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\mathcal{X}_1, \mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(\mathcal{X}_2, \mathcal{F}).$$

Démonstration. On pose les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{X}_1 \\ \downarrow p_2 & \searrow s & \downarrow s_1 \\ \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{s_2} & \mathcal{S} \end{array}$$

Remarquons dans un premier temps que comme les faisceaux sont cohérents et que les schémas sont propres, $R\Gamma(\mathcal{X}_1, \mathcal{E}) \simeq R s_{1*} \mathcal{E}$ et $R\Gamma(\mathcal{X}_2, \mathcal{F}) \simeq R s_{2*} \mathcal{F}$ sont cohérents. De plus, si \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2

sont deux complexes à cohomologie cohérente et bornée sur un schéma formel \mathcal{X} alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{G}_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{G}_2 \simeq \mathcal{G}_1 \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} \mathcal{G}_2 := R\varprojlim_i \left(\mathcal{G}_{1,i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{G}_{2,i} \right).$$

En effet, on a un morphisme canonique

$$\mathcal{G}_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1 \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} \mathcal{G}_2.$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme on peut se restreindre par dévissage au cas où les complexes sont concentrés en degré 0, donc des faisceaux cohérents. Dans ce cas, comme le résultat qu'on cherche à montrer est local sur \mathcal{X} , on peut se restreindre au cas où $\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, et dans ce cas l'isomorphisme est évident.

De plus, remarquons que les preuves de la formule de la projection (propriété 3.2.12 p.78) et du changement de base (propriété 3.2.16 p.80) pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ -modules relatifs (sur un schéma formel) s'adaptent sans mal au cas des \mathcal{O} -modules sur un schéma formel.

On déduit de ces deux remarques les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} Rs_*(p_1^* \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^* \mathcal{F}) &\simeq Rs_*(p_1^* \mathcal{E} \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} p_2^* \mathcal{F}) \\ &\simeq Rs_{1*} Rp_{1*}(p_1^* \mathcal{E} \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} p_2^* \mathcal{F}) \\ &\simeq Rs_{1*}(\mathcal{E} \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rp_{1*} p_2^* \mathcal{F}) \\ &\simeq Rs_{1*}(\mathcal{E} \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} s_1^* Rs_{2*} \mathcal{F}) \\ &\simeq Rs_{1*} \mathcal{E} \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_{2*} \mathcal{F} \\ &\simeq Rs_{1*} \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rs_{2*} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant prouver la formule de Künneth formelle.

Démonstration. On suit une démonstration en tout point similaire à celle de [Sta21, Section 0G4A].

Dans un premier temps, remarquons que comme les \mathcal{L}_j sont inversibles, les termes des complexes $DR(\mathcal{L}_j, \mathcal{X}_j)$ sont plats et les objets $(\mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/\mathcal{S}}^k) \boxtimes (\mathcal{L}_2 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_2/\mathcal{S}}^l)$ sont des faisceaux (malgré la présence du foncteur dérivé $\otimes^{\mathbb{L}}$ dans la définition de \boxtimes). On peut donc construire le double complexe composé de ces objets et dont les morphismes sont des opérateurs différentiels d'ordre fini sur $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ relatifs à \mathcal{S} . On note $Tot(DR(\mathcal{L}_1) \boxtimes DR(\mathcal{L}_2))$ le complexe total associé à ce double complexe.

On fixe les notations suivantes

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 & \\ p_1 \swarrow & \downarrow s & \searrow p_2 \\ \mathcal{X}_1 & & \mathcal{X}_2 \\ s_1 \searrow & & \swarrow s_2 \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

On déduit des morphismes d'adjonction les morphismes

$$Rs_{j*} DR(\mathcal{L}_j) \rightarrow Rs_{j*} p_{j*} p_j^{-1} DR(\mathcal{L}_j) \rightarrow Rs_{j*} Rp_{j*} p_j^{-1} DR(\mathcal{L}_j) = Rs_* p_j^{-1} DR(\mathcal{L}_j)$$

pour $j = 1, 2$. De plus, on peut construire pour tous deux complexes de $s^{-1}\mathcal{O}_S$ -modules \mathcal{E}^\cdot et \mathcal{F}^\cdot un morphisme

$$Rs_*\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_*\mathcal{F}^\cdot \rightarrow Rs_*(\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^\cdot).$$

Pour construire ce morphisme, on part du morphisme canonique

$$s^{-1}Rs_*\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} s^{-1}Rs_*\mathcal{F}^\cdot \rightarrow \mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^\cdot.$$

Comme il s'agit de produits tensoriels complétés, on a $s^{-1}Rs_*\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} s^{-1}Rs_*\mathcal{F}^\cdot \simeq s^{-1}(Rs_*\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_*\mathcal{F}^\cdot)$. On déduit alors le morphisme voulu par l'adjonction (Rs_*, s^{-1}) . Remarquons aussi qu'on a un morphisme canonique

$$\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^\cdot \rightarrow Tot(\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes} \mathcal{F}^\cdot),$$

où $Tot(\mathcal{E}^\cdot \hat{\otimes} \mathcal{F}^\cdot)$ désigne le complexe total associé au double complexe dont les éléments sont les $\mathcal{E}^i \hat{\otimes} \mathcal{F}^j$. Enfin, si \mathcal{E}_j^\cdot est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_j}$ -modules, les morphismes

$$p_1^{-1}\mathcal{E}_1^i \hat{\otimes}_{s^{-1}\mathcal{O}_S} p_2^{-1}\mathcal{E}_2^j \rightarrow p_1^*\mathcal{E}_1^i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}} p_2^*\mathcal{E}_2^j$$

induisent un morphisme entre les complexes totaux

$$Tot(p_1^{-1}\mathcal{E}_1^i \hat{\otimes}_{s^{-1}\mathcal{O}_S} p_2^{-1}\mathcal{E}_2^j) \rightarrow Tot(p_1^*\mathcal{E}_1^i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}} p_2^*\mathcal{E}_2^j).$$

En mettant tous ces morphismes bout à bout, on trouve donc un morphisme

$$Rs_{1*}DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_{2*}DR(\mathcal{L}_2) \rightarrow Rs_*Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes} p_2^*DR(\mathcal{L}_2)).$$

Cependant, on a un morphisme canonique

$$Rs_{1*}DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_{2*}DR(\mathcal{L}_2) \rightarrow Rs_{1*}DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_{2*}DR(\mathcal{L}_2).$$

De plus, comme les termes de $DR(\mathcal{L}_j)$ sont des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_j}$ -cohérents, on a un isomorphisme canonique

$$Rs_*Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes} p_2^*DR(\mathcal{L}_2)) \simeq Rs_*Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \otimes p_2^*DR(\mathcal{L}_2)).$$

On en déduit alors un morphisme

$$Rs_{1*}DR(\mathcal{L}_1) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} Rs_{2*}DR(\mathcal{L}_2) \rightarrow Rs_*Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \otimes p_2^*DR(\mathcal{L}_2)),$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1, DR(\mathcal{L}_1)) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} R\Gamma(\mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_2)) \rightarrow R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \otimes p_2^*DR(\mathcal{L}_2))).$$

Enfin, les éléments du double complexe $p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \otimes p_2^*DR(\mathcal{L}_2)$ sont les

$$p_1^*(\mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^i) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_2 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_2/S}^j) \simeq (p_1^*\mathcal{L}_1 \otimes p_2^*\mathcal{L}_2) \otimes (p_1^*\Omega_{\mathcal{X}_1/S}^i \otimes p_2^*\Omega_{\mathcal{X}_2/S}^j).$$

Ainsi,

$$Tot(p_1^*DR(\mathcal{L}_1) \otimes p_2^*DR(\mathcal{L}_2)) \simeq (\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2) \otimes Tot(\Omega_{\mathcal{X}_1} \boxtimes \Omega_{\mathcal{X}_2}) \simeq (\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2) \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2} = DR(\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2).$$

Finalement, on en déduit un morphisme (canonique)

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1, DR(\mathcal{L}_1)) \hat{\otimes}^{\mathbb{L}} R\Gamma(\mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_2)) \rightarrow R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2)).$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, on procède par dévissage en posant pour $0 \leq k \leq d_1 = \dim(\mathcal{X}_1)$

$$\mathcal{F}_k : 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k \rightarrow \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^{d_1} \rightarrow 0.$$

Notons que $\mathcal{F}_0 = DR(\mathcal{L}_1)$. On a alors les suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k[-k] \rightarrow \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}_{k+1} \rightarrow 0.$$

On peut alors montrer l'isomorphisme par récurrence descendante pour k allant de d_1 à 0. Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout k le morphisme

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(\mathcal{X}_2, DR(\mathcal{L}_2)) \rightarrow R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, (\mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k) \boxtimes DR(\mathcal{L}_2)),$$

construit de manière analogue au précédent, est un isomorphisme.

Par un raisonnement similaire sur $DR(\mathcal{L}_2)$, on peut se restreindre à montrer que pour tous k et l le morphisme

$$R\Gamma(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(\mathcal{X}_2, \mathcal{L}_2 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_2/S}^l) \rightarrow R\Gamma(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, (\mathcal{L}_1 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_1/S}^k) \boxtimes (\mathcal{L}_2 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_2/S}^l))$$

est un isomorphisme, ce qui est une conséquence du lemme précédent.

□

Bibliographie

- [Ber96a] Pierre Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres I. <https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis>, 1996.
- [Ber96b] Pierre Berthelot. \mathcal{D} -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 29(2) :185–272, 1996.
- [Ber02] Pierre Berthelot. *Introduction à la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules*. Number 279 in Astérisque. Société mathématique de France, 2002.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*. Springer-Verlag, 1990.
- [BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, 1978.
- [Bos14] Siegfried Bosch. *Lectures on Formal and Rigid Geometry*. Springer-Verlag, 2014.
- [Col98] Robert F. Coleman. Duality for the de Rham cohomology of an abelian scheme. *Annales de l'Institut Fourier*, 48(5) :1379–1393, 1998.
- [EvdGM] Bas Edixhoven, Gerard van der Geer, and Ben Moonen. Abelian varieties. <http://van-der-geer.nl/~gerard/AV.pdf>. Version préliminaire en ligne.
- [Gro61a] Alexander Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 8 :5–222, 1961.
- [Gro61b] Alexander Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : III. étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 11 :5–167, 1961.
- [Gro71] Alexander Grothendieck. Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1). 1971.
- [Har66] Robin Hartshorne. *Residues and Duality*. Springer-Verlag, 1966.
- [HTT08] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki. *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Birkhäuser Boston, 2008.
- [Huy06] Daniel Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford University Press, 2006.
- [Ked10] Kiran Kedlaya. *p -adic differential equations*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [Kem80] George R. Kempf. Some elementary proofs of basic theorems in the cohomology of quasi-coherent sheaves. *Rocky Mountain J. Math.*, 10(3) :637–646, 09 1980.

- [Lau96] Gérard Laumon. Transformation de Fourier généralisée. <https://arxiv.org/abs/alg-geom/9603004>, 1996.
- [Lüt16] Werner Lütkebohmert. *Rigid Geometry of Curves and Their Jacobians*. Springer-Verlag, 2016.
- [MM74] Barry Mazur and William Messing. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*. Springer-Verlag, 1974.
- [Muk81] Shigeru Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J.*, 81 :153–175, 1981.
- [Mum85] David Mumford. *Abelian Varieties*. Tata Institute of Fundamental Research, 1985. reprint of the second edition (1974).
- [Ray70] Michel Raynaud. Spécialisation du foncteur de Picard. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, 30 :27–76, 1970.
- [Rot96] Mitchell Rothstein. Sheaves with connection on abelian varieties. *Duke Mathematical Journal*, 84(3) :565–598, 1996.
- [Rot97] Mitchell Rothstein. Correction to : "Sheaves with connection on abelian varieties". *Duke Mathematical Journal*, 87(1) :205–211, 1997.
- [Sta21] The Stacks Project Authors. *Stacks project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2021.
- [Vir04] Anne Virrion. Trace et dualité relative pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Geometric aspects of Dwork theory*, II :1039–1112, 2004.