



HAL
open science

Invariants des variations infinitésimales de structures de Hodge et géométrie des surfaces de type général

Axel Supersac

► **To cite this version:**

Axel Supersac. Invariants des variations infinitésimales de structures de Hodge et géométrie des surfaces de type général. Géométrie algébrique [math.AG]. Université d'Angers, 2021. Français. NNT : 2021ANGE0037 . tel-03860603

HAL Id: tel-03860603

<https://theses.hal.science/tel-03860603v1>

Submitted on 18 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS

ÉCOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Spécialité : Mathématiques*

Par

Axel SUPERSAC

Invariants des variations infinitésimales de structures de Hodge et géométrie des surfaces de type général

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 16 Décembre 2021

Unité de recherche : LAREMA

Rapporteurs avant soutenance :

Samuel BOISSIERE Professeur, Université de Poitiers
Philippe EYSSIDIEUX Professeur, Université de Grenoble-Alpes

Composition du Jury :

Attention, en cas d'absence d'un des membres du Jury le jour de la soutenance, la composition du jury doit être revue pour s'assurer qu'elle est conforme et devra être répercutée sur la couverture de thèse

Président :	Vladimir ROUBTSOV	Professeur Emérite, Université d'Angers
Examineurs :	Ekaterina AMERIK	Professeur, Université de Paris-Sud
	Samuel BOISSIERE	Professeur, Université de Poitiers
	Philippe EYSSIDIEUX	Professeur, Université de Grenoble-Alpes
Dir. de thèse :	Igor REIDER	Professeur, Université d'Angers
Co-dir. de thèse :		

Invité(s) :

Prénom NOM Fonction et établissement d'exercice

REMERCIEMENTS

SOMMAIRE

Introduction	7
1 Variations infinitésimales des structures de Hodge	9
1.1 Structures de Hodge	9
1.1.1 Structures de Hodge associées à une variété complexe projective . .	9
1.1.2 Structures de Hodge polarisées associées à une variété complexe projective	11
1.1.3 Domaine des périodes	13
1.2 Variations infinitésimales de Structures de Hodge	16
1.2.1 Familles de variétés	16
1.2.2 L'application des périodes	17
1.2.3 Variations infinitésimales des structures de Hodge	18
1.3 Deux théorèmes de type-Torelli	19
1.3.1 Noyau du coitéré de δ et hypersurfaces quadriques	19
1.3.2 Un théorème de Torelli pour les courbes génériques de genre supérieur à 5	21
1.3.3 Invariant associé à une classe de Hodge	22
1.3.4 Un théorème de Torelli pour les surfaces de Fermat	24
2 Surfaces quintiques de Togliatti	27
2.1 Droites sur la cubique de \mathbb{P}^5	28
2.1.1 La variété de Fano d'une hypersurface cubique	28
2.1.2 Droites du premier et du deuxième type	29
2.1.3 Droites sur les cubiques de \mathbb{P}^5	33
2.2 La construction de la quintique de Togliatti	37
2.3 Invariant numériques de la résolution de Σ_5	47
2.4 Ensemble pair de points doubles	48
2.4.1 Définition et premières propriétés	48
2.4.2 Cardinal d'un ensemble pair de points doubles	52
2.4.3 Conséquences du théorème 2.4.3 et de la proposition 2.4.4.	55
2.4.4 Unicité de la courbe de contact	56
2.5 Variétés déterminantales	58
2.5.1 Tout ensemble pair sur Σ_5 provient d'une projection à la Togliatti .	58
2.5.2 Lissité des courbes de contact	63

3	La VISH détermine les quintiques de Togliatti	65
3.1	VISH de X détermine $Sing(\Sigma_5)$	68
3.2	Ensemble pairs de points doubles et cônes de contact	75
3.3	Un théorème de type Torelli pour les quintiques de Togliatti	79
3.4	Une équation explicite de Σ_5 associée à un plan de V_X	80
	Bibliographie	89

INTRODUCTION

Une courbe complexe projective de genre supérieur ou égal à 2 est déterminée par sa Jacobienne et son diviseur théta. Il s'agit du théorème de Torelli. La démonstration de ce théorème fait appel à une analyse du dit diviseur restreignant les chances d'obtenir un résultat similaire pour les variétés complexes projectives de dimension supérieure. C'est l'une des motivations qui ont conduit P.A. Griffiths dans une série de papiers (regroupés dans [C H]) à développer la théorie des variations des structures de Hodge comprenant notamment l'étude de l'application des périodes. Si l'on considère une variété complexe projective lisse en tant que fibre centrale d'une famille projective, cette application associe à chaque point de l'espace-base, les décompositions de Hodge associées aux groupes de cohomologie de De Rham à coefficients complexes de la fibre correspondante à ce point. On obtient ainsi une famille de structures de Hodge sur la variété que l'on étudie. Par analogie avec le résultat de R. Torelli, on cherche ainsi à savoir si l'application des périodes détermine ou non la variété étudiée. Cette application est-elle injective? Est-elle une immersion? De nombreux résultats ont été établis dès lors, et une nomenclature des problèmes de Torelli a été mise en place. On parle de problèmes de Torelli global, générique ou infinitésimal suivant que l'on veut montrer l'injectivité de l'application des périodes ou bien que cette dernière est génériquement injective ou bien que sa différentielle est injective. [Col87]. Parmi les résultats connus, on sait que le théorème de Torelli global est vérifié pour les surfaces $K3$ [LP80] et pour une hypersurface lisse (excepté quelques cas) [Don83]. En 1986, C.Voisin montre un théorème de Torelli pour les hypersurfaces cubiques dans \mathbb{P}^5 [Voi86] (cet exemple faisait parti des cas non-traités dans [Don83]).

L'objet de cette thèse est de montrer un théorème de type Torelli pour une surface quintique de \mathbb{P}^3 comportant de nombreux points doubles (= 31). Il s'agit de la quintique de Togliatti [Tog40]. Plus précisément, nous montrons que cette dernière est entièrement déterminée par les données cohomologiques contenues dans sa variation infinitésimale de structures de Hodge ($VISH$). Le théorème montré est le suivant :

Théoreme. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et soit X sa résolution minimale . Alors $VISH(X)$ détermine Σ_5 .*

L'idée principale pour démontrer ce théorème est d'utiliser la configuration des nombreux points doubles situés sur la quintique. En effet cette configuration peut être lue dans la donnée de sa $VISH$ associée et permet de reconstruire la surface.

Cette thèse comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre on énonce les principaux résultats concernant les familles de variétés et l'application des périodes. On y définit

en quoi consiste la *VISH* et on donne l'exemple de deux invariants contenus dans ces dernières. Ce chapitre se termine par un théorème de type-Torelli montré par P.A. Griffiths et Joe Harris ([GH83]) et qui fait appel au deuxième invariant défini auparavant. Dans le deuxième chapitre on étudie la surface quintique de Togliatti. Pour cela, il faut comprendre la géométrie des droites contenues dans une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 , il s'agit de la première section de ce chapitre. Puis nous expliquons comment on obtient la quintique selon la construction originale de E. Togliatti et donnons les invariants numériques de sa résolution. Ce chapitre se termine par l'étude de la configuration des points doubles de la surface en s'appuyant sur l'article de A. Beauville [Bea79b] (dans lequel l'auteur montre qu'une quintique de \mathbb{P}^5 ne peut avoir plus de 31 points doubles) et celui de F. Catanese [Cat81]. On y explique alors que parmi les 31 singularités de la quintique il y a 31 sous-ensembles de 16 points qui ont la particularité suivante : tous les points d'un même sous-ensemble sont situés sur une courbe de tangence entre un cône et la surface. Le troisième chapitre est la preuve du théorème proprement dit et se termine par la détermination d'une équation de la quintique de Togliatti connaissant sa *VISH* associée.

VARIATIONS INFINITÉSIMALES DES STRUCTURES DE HODGE

L'objectif de ce chapitre est d'introduire ce que l'on appelle par Variations Infinitésimales de Structures de Hodge (VISH) tels que définies par P. A. Griffiths et d'expliquer deux invariants clés contenus dans ces VISH. L'idée principale est que, dès lors que l'on fait varier une variété complexe projective sur un espace de déformations, on peut récupérer des invariants algébriques liés à la différentielle de l'application des périodes associée à cette déformation. L'application des périodes est l'application qui à chaque point de l'espace-base associe la structure de Hodge associée au groupe de cohomologie de De Rham de la fibre correspondante. Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous définissons ce que l'on entend par structures de Hodge associées à une variété complexe projective, X . On y rappelle le théorème de décomposition de Hodge et le théorème de décomposition de Lefschetz. Nous y définissons également ce que sont les espaces classifiants. La deuxième partie a pour but de définir ce qu'est la Variation Infinitésimale de Structure de (VISH) associée à X . Pour cela on commence par définir ce qu'est l'application des périodes et on énonce le théorème de transversalité de P.A. Griffiths. Dans la dernière partie on exhibe deux invariants contenus dans $VISH(X)$ et on donne deux exemples pour lesquels ces invariants permettent de montrer un théorème de type-Torelli. Le premier de ces exemples concerne les courbes génériques de genre supérieur à 5 et le deuxième les surfaces de Fermat de degré supérieur à 5.

Dans tout ce chapitre X est une variété complexe projective de dimension n .

1.1 Structures de Hodge

1.1.1 Structures de Hodge associées à une variété complexe projective

Soit X une variété complexe projective. On rappelle que X est une variété kählérienne et que tous ses groupes de cohomologie de De Rham complexes se décomposent de la façon suivante

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \text{ pour } 0 \leq k \leq n \quad (1.1)$$

avec

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X).$$

$H^{p,q}(X)$ désigne l'ensemble des classes de cohomologie des (p, q) -formes différentielles fermées sur X . Plus précisément il s'agit des formes fermées engendrées localement par les $dz_I \wedge \overline{dz_J}$ avec I et J des sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\text{card}(I) = p$ et $\text{card}(J) = q$.

De cette décomposition, on dispose d'une filtration décroissante (dite de Hodge) sur chaque groupe de cohomologie, définie par :

$$F^p H^k := \bigoplus_{l+q=k, l \geq p} H^{l,q}(X) \quad \text{pour tout } 0 \leq p \leq k+1. \quad (1.2)$$

Par construction on a

$$0 = F^{k+1} H^k \subset F^k H^k \subset F^{k-1} H^k \subset \dots \subset F^0 H^k = H^k(X, \mathbb{C})$$

et

$$F^p H^k \oplus \overline{F^{k-p+1} H^k} = H^k(X, \mathbb{C}).$$

Par la suite on note par $h^{p,q} := \dim H^{p,q}(X)$ et par $f^{p,k} := \dim F^p H^k$. Puisque pour tout p entier tel que $p \leq k$, on a $F^p H^k \cap \overline{F^{k-p}} = H^{p,q}(X)$, on remarque que la donnée d'une telle filtration sur $H^k(X, \mathbb{C})$ est équivalente à la donnée de la décomposition de Hodge (1.1). Par ailleurs on rappelle que l'on dispose de l'isomorphisme de Dolbeault :

$$H^{p,q}(X) \cong H^q(\Omega_X^p) \quad (1.3)$$

où $\Omega_X^p = \wedge^p \Omega_X$ avec Ω_X le fibré cotangent holomorphe de X .

Définition 1.1.1. On appelle structure de Hodge de poids k associée à X , notée $HS(X)$, la paire

$$HS(X) := \{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}\}$$

où $H_{\mathbb{Z}} := H^k(X, \mathbb{Z})/\text{tor}$ est la partie libre du groupe abélien $H^k(X, \mathbb{Z})$ et où $(H^{p,q})_{p+q=k}$ sont les éléments de la décomposition de Hodge de $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ telle que définie par (1.1).

Exemple 1.1.2. Soit C une courbe projective complexe de genre $g \geq 1$. La structure de Hodge de poids 1 associée à C est $HS(C) = \{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=1}\}$ avec $H_{\mathbb{Z}} := H^1(C, \mathbb{Z})$, $H^{1,0} = H^{1,0}(C) \cong H^0(\Omega_C)$ et $H^{0,1} = H^{0,1}(C) \cong (H^0(\Omega_C))^*$.

Exemple 1.1.3. Soit S une surface projective complexe. La structure de Hodge de poids 2 associée à S est $HS(S) = \{H_{\mathbb{Z}}, (H^{2,0}, H^{1,1}, H^{0,2})\}$, avec $H_{\mathbb{Z}} = H^2(S, \mathbb{Z})/\text{tor}$ et $(H^{p,q})_{p+q=2}$ sont les éléments apparaissant dans la décomposition de $H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$. Dans ce cas la filtration

de Hodge est

$$F^3 H^2 = (0) \subset F^2 H^2 = H^{2,0} \subset F^1 H^2 = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \subset F^0 H^2 = H_{\mathbb{C}}.$$

1.1.2 Structures de Hodge polarisées associées à une variété complexe projective

Soit X une variété complexe projective de dimension n et soit $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k})$ une structure de Hodge de poids k associée à X . On dispose d'une forme bilinéaire sur $H_{\mathbb{Z}}$ définie par

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k} \quad (1.4)$$

où $[\omega]$ est la classe (entière) de Kähler associée à X . Q s'étend par extension des scalaires pour donner une forme bilinéaire définie sur $H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}}$. Q est symétrique si k est pair et antisymétrique sinon. De plus, pour des raisons de type, la forme Q vérifie la première relation de Hodge-Riemann :

$$Q(\alpha, \beta) = 0 \text{ pour } \alpha \in H^{p,q} \text{ et } \beta \in H^{p',q'} \text{ avec } p' \neq q. \quad (1.5)$$

On pose la définition suivante

Définition 1.1.4. On appelle structure de Hodge polarisée de poids k associée à X , la donnée de $SHP(X) := \{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q\}$ où $\{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}\}$ est la structure de Hodge de poids k associée à X et où Q est la forme bilinéaire

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

définie par (1.4)

On veut vérifier que Q est non dégénérée et établir quelques propriétés sur cette forme. Pour cela on doit considérer la partie primitive de chaque groupe de cohomologie. On rappelle que si X est une variété kählérienne compacte, la forme de Kähler ω est une forme polarisante, c'est à dire que cette forme est la première classe de Chern d'un fibré ample sur X . On peut définir, pour tout k compris entre 1 et $2n$, l'opérateur de Lefschetz :

$$L : \begin{array}{ccc} H^k(X, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^{k+2}(X, \mathbb{C}) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \wedge \omega \end{array} \quad (1.6)$$

Et on a le théorème suivant

Théoreme 1.1.5 (de Lefschetz difficile). *L'opérateur $L^k : H^{n-k}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+k}(X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme pour tout $0 \leq k \leq n$.*

On définit de cette façon la cohomologie primitive en degré $n - k$, notée $H_{\text{prim}}^{n-k}(X, \mathbb{C})$,

$$H_{\text{prim}}^{n-k}(X, \mathbb{C}) := \ker(L^{k+1} : H^{n-k}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+k+2}(X, \mathbb{C}))$$

et on a

Théoreme 1.1.6 (de décomposition de Lefschetz). *Pour tout k compris entre 1 et n ,*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{0 \leq r \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} L^r H_{\text{prim}}^{k-2r}(X, \mathbb{C}).$$

Cette décomposition est compatible avec la décomposition (1.1), dans le sens suivant. Si pour $p + q = k$ on pose $H_{\text{prim}}^{p,q}(X) := H_{\text{prim}}^k(X) \cap H^{p,q}(X)$, alors

$$H_{\text{prim}}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{prim}}^{p,q}(X).$$

Remarque. La signification géométrique de la cohomologie primitive est la suivante. Par la dualité de Poincaré, considérons un $n + k$ -cycle dans $H_{n+k}(X, \mathbb{C})$, et supposons que ω est la classe d'une section hyperplane. Dire que ce cycle est primitif, c'est dire qu'il n'intersecte pas un espace linéaire général de dimension $n - k - 1$.

On a (voir par exemple [Voi] pour une démonstration),

Proposition 1.1.7. *La forme Q est non dégénérée sur $H_{\text{prim}}^{p,q}(X)$ puisqu'elle vérifie la deuxième relation bilinéaire de Hodge-Riemann,*

$$(-1)^{k(k-1)/2} i^{p-q} Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0 \text{ pour } \alpha \neq 0 \in H_{\text{prim}}^{p,q}(X). \quad (1.7)$$

En utilisant le théorème 1.1.6 on a en fait :

Proposition 1.1.8. *La forme Q vérifie*

$$(-1)^{k(k-1)/2} i^{p-q} Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0 \text{ pour } \alpha \neq 0 \in H^{p,q}(X). \quad (1.8)$$

En termes de filtrations, les relations de Hodge-Riemann, (1.5) et (1.8) s'écrivent

$$Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0 \quad (1.9)$$

et

$$(-1)^{k(k-1)/2} Q(C\alpha, \bar{\alpha}) > 0 \text{ pour } \alpha \neq 0 \in H^k(X, \mathbb{C}) \quad (1.10)$$

avec C l'opérateur de Weil défini par : $C|_{H^{p,q}} \alpha = i^{p-q} \alpha$.

1.1.3 Domaine des périodes

On veut maintenant faire varier les structures de Hodge polarisées associées à X . Il faut donc définir dans quel espace ambiant on veut définir cette variation. C'est l'objet de cette sous-section.

Définition 1.1.9. Soit $\{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q\}$ une structure de Hodge polarisée de poids k associée à X , on appelle domaine des périodes, pour les structures de Hodge polarisées de type $\{H_{\mathbb{Z}}, (h^{p,q})_{p+q=k}, Q\}$, l'ensemble noté D des filtrations

$$H_{\mathbb{C}} = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^{k+1} = (0)$$

pour lesquelles $\dim F^p = h^{k,0} + \dots + h^{p,k-p}$ et pour lesquelles la forme Q satisfait les relations de Hodge-Riemann (1.9) et (1.10).

En notant, $f^{p,k}$ la dimension de chaque F^p , D est un sous-ensemble de $\Pi_{p=0}^k Gr(f^{p,k}, H_{\mathbb{C}})$ où $Gr(f^{p,k}, H_{\mathbb{C}})$ est la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $f^{p,k}$ dans $H_{\mathbb{C}}$. En notant par \check{D} le compact dual de D , défini comme l'ensemble des filtrations

$$H_{\mathbb{C}} = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^{k+1} = (0)$$

pour lesquelles $f^{p,k} = h^{k,0} + \dots + h^{p,k-p}$ et pour lesquelles la forme Q satisfait la première relation de Hodge-Riemann (1.9) uniquement. On a $D \subset \check{D}$.

La relation (1.9) étant une relation algébrique et (1.10) étant une condition ouverte, on voit que \check{D} est une sous-variété fermée (donc compacte) de $\Pi_{p=0}^k Gr(f^{p,k}, H_{\mathbb{C}})$ et que D est un ouvert dans \check{D} . Par ailleurs, \check{D} et D ont une structure de variété complexe. En effet on peut montrer

Proposition 1.1.10. *Le groupe*

$$G_{\mathbb{C}} := \{\phi \in Aut(H_{\mathbb{C}}) \mid \forall \alpha \text{ et } \beta \in H_{\mathbb{C}}, Q(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = Q(\alpha, \beta)\}$$

agit transitivement sur \check{D} .

Le groupe

$$G_{\mathbb{R}} := \{\phi \in Aut(H_{\mathbb{R}}) \mid \forall \alpha \text{ et } \beta \in H_{\mathbb{R}}, Q(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = Q(\alpha, \beta)\}$$

agit transitivement sur D avec $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$.

En conséquence, en notant par F_0 une filtration fixée dans \check{D} et par $B_{\mathbb{C}}$ le stabilisateur dans $G_{\mathbb{C}}$ de F_0 , $\check{D} \cong G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$. Le même raisonnement pour D donne $D \cong G_{\mathbb{R}}/B_{\mathbb{R}}$ où $B_{\mathbb{R}}$ est le stabilisateur dans $G_{\mathbb{R}}$ d'un élément fixé dans D . Ainsi D et \check{D} sont des variétés complexes.

Exemple 1.1.11 (Suite de l'exemple 1.1.2). Soit C une courbe complexe de genre g supérieur à 1. La structure de Hodge de poids 1 associée à C est $H_{\mathbb{Z}} := H^1(C, \mathbb{Z})$ et $H_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$ avec $\dim H^{1,0} = g$. Q est alors une forme bilinéaire non dégénérée et antisymétrique. Il existe donc une base de $H_{\mathbb{C}}$ sur \mathbb{Z} telle que la matrice associée à Q s'écrive dans cette base

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

avec I_g la matrice identité de taille $g \times g$. Les relations de Hodge-Riemann s'écrivent dans ce cas

$$Q(F^1, F^1) = 0 \tag{1.11}$$

et

$$Q(C\alpha, \bar{\alpha}) > 0 \text{ pour } \alpha \neq 0 \in H^1(X, \mathbb{C}). \tag{1.12}$$

Mais alors une filtration $F \in \check{D}$, est donnée par un élément $F^1 \in Gr(g, H_{\mathbb{C}})$ qui vérifie (1.11). Or tout élément de $Gr(g, H_{\mathbb{C}})$ est la donnée d'une matrice M de rang g et de taille $2g \times g$ et deux matrices M et N représentent le même élément de $Gr(g, H_{\mathbb{C}})$ si et seulement si $MG = N$ avec $G \in GL_g(\mathbb{C})$. Un élément de \check{D} est donc représenté par une matrice de la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix}$$

vérifiant $Q(\Omega, \Omega) = 0$. En notant par ${}^t Z$ la matrice transposée de Z , on obtient

$$\begin{aligned} \Omega \in \check{D} &\Leftrightarrow (I_g, {}^t Z) \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} = 0 \\ \Omega \in \check{D} &\Leftrightarrow (I_g, {}^t Z) \begin{pmatrix} Z \\ -I_g \end{pmatrix} = 0 \\ \Omega \in \check{D} &\Leftrightarrow Z - {}^t Z = 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi une identification $\check{D} \cong \{g \times g \text{ matrices complexes symétriques}\}$. Un élément de D est un élément de \check{D} satisfaisant la deuxième relation (1.12). C'est à dire en notant $Z = X + iY$ et en utilisant le fait que ${}^t Z = Z$,

$$\begin{aligned} \Omega \in D &\Leftrightarrow (iI_g, iX - Y) \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ X - iY \end{pmatrix} > 0 \\ \Omega \in D &\Leftrightarrow (iI_g, iX - Y) \begin{pmatrix} X - iY \\ -I_g \end{pmatrix} > 0 \\ \Omega \in D &\Leftrightarrow 2Y > 0. \end{aligned}$$

On a donc $D \cong \{g \times g \text{ matrices complexes symétriques, } Z = X + iY \text{ et } Y \text{ définie positive}\}$.

Remarque. L'ensemble

$$H_g := \{g \times g \text{ matrices complexes symétriques, } Z = X + iY \text{ et } Y \text{ définie positive} \}$$

est le demi-espace supérieur de Siegel. En notant par $Sp(2g, \mathbb{R})$ le groupe symplectique réel, c'est à dire l'ensemble des matrices laissant invariant la forme Q , $Sp(2g, \mathbb{R})$ agit sur H_g de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Sp(2g, \mathbb{R}) \times H_g &\rightarrow H_g \\ \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z \right) &\mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \end{aligned}$$

Cette action est transitive. Considérons maintenant la matrice $Z_0 := iI_g \in H_g$. Le stabilisateur de Z_0 dans $Sp(2g, \mathbb{R})$ est $\text{Stab}_{Sp(2g, \mathbb{R})}(Z_0)$. On a

$$\text{Stab}_{Sp(2g, \mathbb{R})}(Z_0) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{R}) \right\}.$$

On a donc

$$D = Sp(2g, \mathbb{R})/U(g).$$

où $U(g)$ est le groupe unitaire identifié à $\text{Stab}_{Sp(2g, \mathbb{R})}(Z_0)$ via l'application

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{Sp(2g, \mathbb{R})}(Z_0) &\rightarrow U(g) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} &\mapsto A + iB \end{aligned}$$

Exemple 1.1.12 (Suite de l'exemple 1.1.3). Soit S une surface complexe projective et soit $SHP(S) = (H_{\mathbb{Z}}, H_{p+q=2}^{p,q}, Q)$ sa structure de Hodge polarisée de poids 2. On a

$$H_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}.$$

La forme Q est symétrique et vérifie pour tout $\alpha \in H^{2,0}$,

$$Q(\alpha, \alpha) = 0 \text{ et } Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0.$$

Maintenant la donnée d'une filtration appartenant à D , c'est à dire la donnée d'une structure de Hodge polarisée par Q , est équivalente à la donnée d'un espace de dimension $h^{2,0}$ dans $Gr(h^{2,0}, H_{\mathbb{C}})$ totalement isotrope pour la forme Q et qui vérifie $Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$. En effet si on note par $W^{2,0}$ un tel espace, en posant

$$W^{0,2} := \overline{W^{2,0}} \text{ et } W^{1,1} := (W^{2,0} \oplus W^{0,2})^{\perp},$$

on obtient une telle filtration.

1.2 Variations infinitésimales de Structures de Hodge

1.2.1 Familles de variétés

Considérons maintenant la situation suivante :

$$\psi : \mathfrak{X} \rightarrow (B, 0)$$

où ψ est une submersion holomorphe propre entre variétés complexes projectives et 0 un point de référence. On suppose que $X = \psi^{-1}(0)$ et que B est contractile, de sorte qu'il existe une trivialisatation difféomorphe de \mathfrak{X} :

$$(\psi, \pi) : \mathfrak{X} \cong X \times B. \quad (1.13)$$

Pour chaque $t \in B$, $\psi_t : X_t \rightarrow X$ est un difféomorphisme entre la fibre au-dessus de t et X . De cette situation on obtient une famille de structures complexes sur X . Ainsi, de la déformation (1.13), on obtient pour k tel que $1 \leq k \leq n$, et pour tout t suffisamment proche de 0, une nouvelle décomposition de Hodge :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_t^{p,q}(X).$$

où $H_t^{p,q}(X)$ désigne les formes de types (p, q) relativement à la structure complexe induite par I_t .

Par ailleurs, on dispose également de l'application de Kodaira-Spencer. Cette dernière application provient de la suite exacte

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathfrak{X}|_X} \rightarrow \psi^*T_{B|X} \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

où $T_{\mathfrak{X}|_X}$ désigne le fibré tangent holomorphe de $T_{\mathfrak{X}}$ restreint à la fibre X et où $\psi^*T_{B|X}$ est la restriction sur X du tiré en arrière sur \mathfrak{X} du fibré tangent holomorphe à B . La suite exacte longue associée à (1.14) est

$$0 \rightarrow H^0(T_X) \rightarrow H^0(X, T_{\mathfrak{X}|_X}) \rightarrow H^0(X, \psi^*T_{B|X}) \xrightarrow{\rho} H^1(T_X) \rightarrow \dots \quad (1.15)$$

Comme $H^0(X, \psi^*T_{B|X})$ s'identifie naturellement via ψ à T_0B , on a

$$\rho : T_0B \rightarrow H^1(T_X).$$

Définition 1.2.1. Le morphisme ρ ci-dessus est appelé application de Kodaira-Spencer.

On peut calculer explicitement ce morphisme, c'est à dire pour chaque direction $\frac{\partial}{\partial t}$ de T_0B , calculer le cocycle dans $H^1(T_X)$ correspondant à cette direction. Cela se calcule en différentiant par rapport à t les fonctions de transition f_{ij} associées à des cartes locales de \mathfrak{X} au voisinage de la fibre X (voir [MK06] pour les détails).

1.2.2 L'application des périodes

On peut maintenant définir l'application qui à chaque point t de la base B associe la décomposition de Hodge associée au k -ième groupe de cohomologie de De Rham de la fibre X_t . Plus précisément à chaque point t de B on va associer la filtration du k -ème groupe de cohomologie associée à X_t .

Définition 1.2.2. Soit k un entier entre 0 et $\dim X = n$, l'application des périodes, \mathcal{P}^k est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^k & : B \rightarrow \Pi_{p=1,\dots,k} Gr(f^{p,k}, H^k(X, \mathbb{C})) \\ b & \mapsto (F^1 H^k(X_b), \dots, F^k H^k(X_b)) \end{aligned}$$

A priori, pour tout $1 \leq p \leq k$, $F^p H^k(X_b) \subset H^k(X_b, \mathbb{C})$. Mais comme X_b et X sont diféomorphes, on considère chacun de ces espaces comme un élément de $Gr(f^{p,k}, H^k(X, \mathbb{C}))$. Comme précédemment, $Gr(f^{p,k}, H^k(X, \mathbb{C}))$ désigne les sous-espaces vectoriels de $H^k(X, \mathbb{C})$ de dimension $f^{p,k}$.

Remarque. Par l'exemple 1.1.12, si S est une surface complexe projective, l'application des périodes en poids 2, est entièrement déterminée par la dernière coordonnée de son image. En d'autres termes on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 & : B \rightarrow Gr(f^{2,2}, H^2(S, \mathbb{C})) \\ b & \mapsto F^2 H^2(S_b) \end{aligned}$$

Le reste de la section est de donner des résultats concernant la différentielle de \mathcal{P}^k . Tout d'abord on rappelle que si W est un espace vectoriel de dimension n , $Gr(k, W)$ a une structure de variété complexe projective de dimension $k(n - k)$. Plus précisément pour tout K appartenant à $Gr(k, W)$, si l'on choisit V un supplémentaire de K dans W on pose

$$G_V := \{K' \in Gr(k, W), K' \cap V = \{0\}\}$$

et les G_V forment un recouvrement ouvert de $Gr(k, W)$ qui fournissent une structure de variété différentiable. Par ailleurs chaque G_V est canoniquement isomorphe à $Hom(K, V)$ et donc si $K \in Gr(k, W)$, l'espace tangent à $Gr(k, W)$ en K est $T_K Gr(k, W) \cong Hom(K, W/K)$ (une fois que l'on a montré que cet espace ne dépend pas du V choisi). De sorte que la différentielle de \mathcal{P}^k en b est *a priori* à valeurs dans $\bigoplus_{1 \leq p \leq k} Hom(F^p H^k(X_b), H^k(X_b, \mathbb{C})/F^p H^k(X_b))$.

En fait on a :

Théoreme 1.2.3. *De transversalité de Griffiths*

La différentielle de l'application des périodes vérifie, pour b dans B et $u \in T_b B$,

$$d\mathcal{P}^k(b)(u) \in \bigoplus_{1 \leq p \leq k} \text{Hom}(F^p H^k(X_b)/F^{p+1} H^k(X_b), F^{p-1} H^k(X_b)/F^p H^k(X_b)).$$

C'est à dire, en utilisant l'isomorphisme de Dolbeault (1.3), on a

$$d\mathcal{P}^k(b)(u) \in \bigoplus_{1 \leq p \leq k, p+q=k} \text{Hom}(H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p), H^{q+1}(X_b, \Omega_{X_b}^{p-1})).$$

Le théorème suivant du à P.A. Griffiths nous dit comment calculer cette différentielle :

Théoreme 1.2.4. *La p -ième coordonnée de la différentielle de l'application des périodes*

$$d\mathcal{P}^{p,k}(b)(u) \in \text{Hom}(H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p), H^{q+1}(X_b, \Omega_{X_b}^{p-1}))$$

vérifie : $\forall \sigma \in H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p)$, $d\mathcal{P}^{p,k}(b)(u)(\sigma) = \rho(u) \cup \sigma$ où $\rho : T_b B \rightarrow H^1(T_{X_b})$ est l'application de Kodaira-Spencer et $\cdot \cup \cdot$ désigne le cup-produit cohomologique entre $H^1(T_{X_b})$ et $H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p)$:

$$H^1(T_{X_b}) \otimes H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p) \rightarrow H^{q+1}(X_b, \Omega_{X_b}^{p-1}).$$

1.2.3 Variations infinitésimales des structures de Hodge

L'objectif de cette section est de donner une définition des *VISH*. On commence par

Définition 1.2.5. Soit X une variété complexe projective de dimension n . On appelle variation infinitésimale de structures de Hodge de poids k associée à la déformation $(\psi, \pi) : \mathfrak{X} \cong X \times B$, la donnée $VISH_B(X) = \{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q, \delta\}$ où

- $\{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q\}$ est une structure de Hodge polarisée de poids k .
- $\delta : T_0 B \rightarrow T_{\mathcal{P}(0)} D$ est la différentielle de l'application des périodes en $0 \in B$.

Proposition 1.2.6. *En particulier δ vérifie*

$$\begin{cases} \delta(\xi_1) \circ \delta(\xi_2) & = \delta(\xi_2) \circ \delta(\xi_1) & \text{pour } \xi_1 \text{ et } \xi_2 \text{ dans } T_0 B \\ Q(\delta(\xi)\varphi, \psi) + Q(\varphi, \delta(\xi)\psi) & = 0 & \text{pour } \xi \in T_0 B \text{ et } \varphi \in F^p \text{ et } \psi \in F^{n-p+1} \end{cases} \quad (1.16)$$

Définition 1.2.7. Soit X une variété complexe projective de dimension n . On appelle variation infinitésimale de structures de Hodge de poids k associée à X , la donnée de $VISH(X) := (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q, H^1(T_X), \delta)$ où

- $\{H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=k}, Q\}$ est une structure de Hodge polarisée de poids k .
- $\delta : H^1(T_X) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq p \leq k, p+q=k} \text{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1, q+1})$ l'application induite par les cups produits entre $H^1(T_X)$ et les $(H^{p,q})_{p+q=k}$.

Remarque. Dans la définition de $VISH(X)$, certaines données sont redondantes puisque contenue dans la définition de δ . C'est pourquoi on note dès à présent

$$VISH(X) = \{H_{\mathbb{Z}}, Q, \delta\}.$$

Exemple 1.2.8. Soit S une surface complexe projective, on note par $VISH(S)$ la donnée de sa variation infinitésimale de structure de Hodge en poids 2. Plus précisément,

$$VISH(S) := (H^2(X, \mathbb{Z})/\text{tor}, Q, \delta)$$

avec

$$\delta : H^1(T_X) \rightarrow \text{Hom}(H^{2,0}, H^{1,1})$$

l'application induite par le cup-produit entre $H^1(T_X)$ et $H^{2,0}$.

1.3 Deux théorèmes de type-Torelli

L'objectif est désormais d'exhiber deux invariants algébriques contenus dans $VISH(X)$ et voir que dans certains cas, ces invariants permettent d'obtenir des informations géométriques sur X susceptibles de la déterminer entièrement. Lorsque c'est le cas on obtient un théorème de type-Torelli.

1.3.1 Noyau du coitéré de δ et hypersurfaces quadriques

Soit X une variété complexe projective de dimension n . Soit $VISH_B(X) := \{H_{\mathbb{Z}}, Q, \delta\}$ sa variation infinitésimale de structures de Hodge de poids n associée à une déformation de base B . On considère ξ_1, \dots, ξ_n , n vecteurs de $T := T_0B$.

On a

$$\delta(\xi_1) \circ \dots \circ \delta(\xi_n) : H^{n,0} \rightarrow H^{0,n}$$

et grâce aux conditions (1.16), on définit :

$$\delta^n : \text{Sym}^n T \rightarrow \text{Hom}(H^{n,0}, H^{0,n})$$

le n -ième itéré de δ . Mais toujours grâce à (1.16), pour tout φ et ψ dans $H^{n,0}$, on a

$$Q(\delta(\xi_1) \circ \dots \circ \delta(\xi_n)(\varphi), \psi) = (-1)^n Q(\varphi, \delta(\xi_1) \circ \dots \circ \delta(\xi_n)(\psi))$$

$$Q(\delta(\xi_1) \circ \dots \circ \delta(\xi_n)(\varphi), \psi) = Q(\delta(\xi_1) \circ \dots \circ \delta(\xi_n)(\psi), \varphi).$$

Et

$$\delta^n : \text{Sym}^n T \rightarrow \text{Sym}^2 H^{n,0*},$$

où

$$\text{Sym}^2 H^{n,0*} := \{\varphi \in \text{Hom}(H^{n,0}, H^{0,n}) \mid Q(\varphi(\omega_1), \omega_2) = Q(\varphi(\omega_2), \omega_1)\}.$$

L'application duale à δ^n vérifie :

$$\delta^{*n} : \text{Sym}^2 H^{n,0} \rightarrow \text{Sym}^n T^*$$

Son noyau est donc un sous-espace vectoriel de $\text{Sym}^2 H^{n,0}$. Ce dernier espace est l'espace des formes quadratiques sur $(H^{n,0})^*$. $\ker(\delta^{*n})$ définit donc un système linéaire de quadriques dans $\mathbb{P}H^{0,n} \cong \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_X(K_X))^*)$ (c'est à dire l'espace où vit l'image de X par l'application canonique). On note par $\mathcal{I}(V(X))$ l'invariant

$$\mathcal{I}(V(X)) := \ker \delta^{*n}.$$

Grâce au théorème 1.2.4, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^n T & \xrightarrow{\delta^n} & \text{Sym}^2 H^{n,0*} \\ & \searrow \rho^n & \nearrow \cdot \cup \\ & H^n(X, \wedge^n T_X) & \end{array} \quad (1.17)$$

où ρ est l'application de Kodaira-Spencer. (1.17) donne après dualisation

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^2 H^0(\mathcal{O}_X(K_X)) & \xrightarrow{\delta^{*n}} & \text{Sym}^n T^* \\ & \searrow \mu & \nearrow \lambda := (\rho^n)^* \\ & H^0(\mathcal{O}_X(2K_X)) & \end{array} \quad (1.18)$$

où l'application μ est donnée par multiplication des sections globales du fibré $\mathcal{O}_X(K_X)$. On obtient la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \ker \mu \rightarrow \mathcal{I}(V(X)) \rightarrow \ker \lambda \cap \text{Im } \mu \rightarrow 0. \quad (1.19)$$

Considérons maintenant l'application canonique associée à X :

$$\begin{aligned} \varphi_{K_X} : X &\rightarrow \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_X(K_X))^* = \mathbb{P}H^{0,n} \\ p &\mapsto [\omega_1(p), \dots, \omega_{p_g}(p)] \end{aligned}$$

avec $(\omega_1, \dots, \omega_{p_g})$ une base de $H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$. Soit Q une hypersurface quadrique contenant $\varphi_{K_X}(X)$, c'est-à-dire donnée par les zéros d'une forme quadratique $f \in \text{Sym}^2 H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ s'annulant en $[\omega_0(p), \dots, \omega_g(p)]$, $\forall p \in X$. On a pour tout i et j entier compris entre 0 et g ,

$\mu(\omega_i\omega_j) = \omega_i\omega_j \in H^0(\mathcal{O}_X(2K_X))$. En particulier $\ker \mu$ est \mathcal{Q}_X où

$$\mathcal{Q}_X := \{\text{Hyperquadriques contenant l'image canonique de } X\}$$

et donc $I(V(X))$ contient \mathcal{Q}_X . Si on veut montrer un théorème de type Torelli grâce à l'invariant $I(V(X))$, il faut répondre aux questions suivantes :

- Pour quelles variétés projectives complexes X a-t-on $I(V(X)) = \mathcal{Q}_X$?
- Pour quelles variétés X à-t-on $\varphi_{K_X}(X) = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}_X} Q$?

Remarque. D'après (1.19), la réponse à la première question est affirmative dès que ρ (et donc λ) est un isomorphisme.

Voyons ce qu'il en est pour les courbes.

1.3.2 Un théorème de Torelli pour les courbes génériques de genre supérieur à 5

Soit C une courbe lisse de genre supérieur à 2. Alors $H^2(T_C) = 0$ pour des raisons de dimensions. Par le théorème de Kodaira-Nirenberg-Spencer, il existe un voisinage B de 0 dans $H^1(T_X)$ tel que l'application de Kodaira-Spencer ρ pour la déformation au dessus de B soit bijective. Mais dans ce cas la différentielle de l'application des périodes est injective si et seulement si l'application induite par le cup-produit

$$\cdot \cup \cdot : H^1(T_C) \cong H^0(\mathcal{O}_C(2K_C))^* \rightarrow \text{Hom}(H^{1,0}, H^{0,1})$$

l'est. Le dual de cette application est $\mu : \text{Sym}^2(H^0(\mathcal{O}_C(K_C))) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(2K_C))$.

Or cette application vérifie

Théorème 1.3.1 (de M. Noether). *Soit l un entier positif et soit C une courbe non hyperelliptique. Alors*

$$\mu : \text{Sym}^l(H^0(\mathcal{O}_C(K_C))) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(lK_C))$$

est surjective.

En particulier on obtient le théorème de Torelli infinitésimal (i.e. l'application des périodes \mathcal{P} restreinte à un ouvert dense de B est une immersion) pour les courbes non hyperelliptiques.

Intéressons nous maintenant à l'invariant $I(V(C))$. Pour C une courbe lisse de genre supérieur à 2 on a

$$I(V(C)) = \ker \mu = \mathcal{Q}_C. \tag{1.20}$$

On pose $C' := \varphi_{K_C}(C)$. On a

Théoreme 1.3.2 (de Babbage-Enriques-Petri). *Soit C une courbe non-hyperelliptique. Soit C' son image par l'application canonique. Si C' est ni trigonale ni une quintique plane, alors $C' = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}_C} Q$.*

La démonstration de cette proposition repose sur l'analyse du lieu de base S du système linéaire des hyperquadriques contenant C' . Si $S \neq C'$, on étudie son intersection avec des hyperplans génériques. On obtient ainsi des conditions précises sur sa géométrie. Soit S est le plongement de Veronese de \mathbb{P}^2 dans \mathbb{P}^5 , soit C' est trigonale et dans ce cas S est l'union des droites rejoignant les points d'une même fibre du revêtement triple $\pi : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$. (cf [Gri, Linear system of curves] pour une démonstration précise de la proposition 1.3.2).

De la proposition 1.3.2 on obtient

Théoreme 1.3.3. *Soit \mathcal{P}_g l'application des périodes associées aux courbes de genre g ($g \geq 5$). Alors \mathcal{P}_g est génériquement injective.*

Démonstration. Quitte à se placer sur un ouvert dense de B on sait déjà que \mathcal{P}_g est une immersion. Une courbe générique de genre $g \geq 5$ vérifie les conditions du théorème 1.3.2. Soit C_1 et C_2 deux telles courbes telles que $\mathcal{P}_g(C_1) = \mathcal{P}_g(C_2)$. Comme \mathcal{P}_g est une immersion, on a $VISH(C_1) = VISH(C_2)$. (1.20) et le théorème 1.3.2 donnent $C_1 \cong C_2$. \square

1.3.3 Invariant associé à une classe de Hodge

On présente ici un deuxième invariant algébrique contenu dans les données des $VISH$. Cet invariant est étudié en détails dans [GH83]. Soit X une variété complexe projective de dimension $n = 2k$. Et soit $\psi : \mathfrak{X} \rightarrow (B, 0)$ une déformation projective de fibre centrale X . On note par $VISH_B(X) := \{H_{\mathbb{Z}}, Q, \delta\}$ la variation infinitésimale de structures de Hodge de poids n associée à cette famille. On va s'intéresser, une classe γ dans $H^{k,k}(X) \cap H_{\mathbb{Z}}$ étant fixée, aux directions de déformation du premier ordre qui préserve cette classe. Soit U un voisinage de 0 dans B . On note $T = T_0U$.

Définition 1.3.4. On appelle lieu de Hodge associé à γ , l'ensemble

$$U_{\gamma} := \{t \in U \mid \gamma \in H^{k,k}(X_t, \mathbb{Z})\}. \quad (1.21)$$

Pour $0 \leq l \leq k$ on définit l'invariant suivant :

$$H^{k+l,k-l}(-\gamma) := \{\psi \in H^{k+l,k-l} \mid Q(\delta(\xi)\psi, \gamma) = 0, \forall \xi \in T\}. \quad (1.22)$$

Définition 1.3.5. On appelle annihilateur de γ le sous-espace vectoriel $H^{k+1,k-1}(-\gamma)$.

On pose $T_0U_{\gamma} \subset T_0U$, l'espace tangent à U_{γ} au point $0 \in B$. En utilisant la première relation de Hodge-Riemann (1.9), on a $\gamma \in H^{k,k}(X_t, \mathbb{C})$ si et seulement si $Q(\psi, \gamma) = 0$ pour tout $\psi \in F^{k+1}H^n(X_t, \mathbb{C})$. Le lieu de Hodge défini par (1.21) est donc :

$$U_\gamma = \{t \in U \mid Q(\psi, \gamma) = 0, \forall \psi \in F^{k+1}H^n(X_t, \mathbb{C})\}.$$

Par définition, l'espace tangent en 0 de U_γ consiste en l'ensemble des vecteurs $\xi \in T$ de sorte que γ reste de type (k, k) après déformation infinitésimale dans la direction ξ . On a

$$TU_\gamma := T_0U_\gamma = \{\xi \in T \mid Q(\delta(\xi)\psi, \gamma) = 0, \forall \psi \in H^{k+1, k-1}\}.$$

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} Q(\xi \cdot, \gamma) &: H^{k+1, k-1} \rightarrow (T_0U)^* \\ \omega &\mapsto (\xi \in T_0U \mapsto Q(\delta(\xi)(\omega), \gamma)) \end{aligned}$$

Son noyau est par définition l'annihilateur $H^{k+1, k-1}(-\gamma)$ et son image est incluse dans $(TU_\gamma)^\perp$. En particulier le lieu de Hodge est de codimension au plus $h^{k+1, k-1} - h^{k+1, k-1}(-\gamma)$.

Exemple 1.3.6. Soit S une surface complexe projective et $\Gamma \in \text{Pic } S$ un diviseur effectif de cette surface. Soit γ la classe de Γ dans $H_{\mathbb{Z}} \cap H^{1,1}$. Dire que le lieu de Hodge associé à Γ est une hypersurface dans l'espace base de déformation revient à dire que $h^{2,0}(-\gamma)$ est soit un hyperplan dans $h^{2,0}$ soit $h^{2,0}$ lui même.

L'information géométrique contenue dans l'annihilateur de γ est donnée par

Proposition 1.3.7. Soit S , Γ et γ comme ci-dessus. On a :

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S(-\Gamma))) \subset H^{2,0}(-\gamma).$$

où le terme à gauche de l'inclusion désigne l'ensemble des sections du fibré canonique s'annulant le long du support de Γ .

Démonstration. Soit ω une section de $\mathcal{O}_S(K_S)$ s'annulant le long du support de Γ . Soit $\xi \in T$. Il s'agit de montrer que $Q(\delta(\xi)\omega, \gamma) = 0$. On a

$$\begin{aligned} Q(\delta(\xi)\omega, \gamma) &= \int_S \rho(\xi) \cdot \omega \wedge \gamma \\ Q(\delta(\xi)\omega, \gamma) &= \int_{\text{supp}\Gamma} \rho(\xi) \cdot \omega|_{\text{supp}\Gamma} \\ Q(\delta(\xi)\omega, \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque ω s'annule sur le support de Γ . □

Supposons que l'inclusion dans la proposition 1.3.7 est en fait une égalité et que $\mathcal{O}_S(K_S) = \mathcal{O}_S(m)$ pour m un entier strictement positif. Alors $VISH(S)$ permet de récupérer les hypersurfaces de degré m contenant le support de Γ . Dans certains cas, cela permet de déterminer la surface S , c'est-à-dire obtenir un théorème de type-Torelli infinitésimal pour S .

1.3.4 Un théorème de Torelli pour les surfaces de Fermat

On va désormais voir un exemple pour lequel on a égalité dans la proposition 1.3.7 et en déduire un théorème de type-Torelli pour les surfaces de Fermat. On rappelle ici l'énoncé de ce théorème dû à P. A. Griffiths et J. Harris :

Théorème 1.3.8. *Soit d un entier supérieur ou égal à 5. Soit F_d la surface de Fermat de degré d dans \mathbb{P}^3 , c'est à dire définie par l'équation :*

$$\{[x_0, \dots, x_3] \in \mathbb{P}^3 \mid f_d(x_0, \dots, x_3) := x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0\}.$$

Soit S une surface de degré d dans \mathbb{P}^3 vérifiant $VISH(F_d) \cong VISH(S)$ alors $S = F_d$ (à automorphisme de \mathbb{P}^3 près).

Pour montrer ce théorème on admet

Théorème 1.3.9 (voir [GH83]). *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse de degré $d \geq 3$. Soit Λ une droite de S et λ la classe de cette droite dans $H_{\mathbb{Z}} \cap H^{1,1}$. Alors*

$$H^{2,0}(S, \mathcal{O}_S(K_S(-\Lambda))) = H^{2,0}(-\lambda).$$

Les étapes de la démonstration du théorème 1.3.8 sont

- Une surface de Fermat contient un nombre fini de droites qui sont dans des configurations particulières (en étoiles). Dans un premier temps, on récupère les droites situées sur la surface via leur caractéristiques numériques : on en déduit que la structure de Hodge polarisée associée à F_d permet de récupérer les droites et leurs incidences mais non leur configurations en étoiles.
- Il est possible de récupérer ces configurations via la donnée de l'invariant (1.22) et cela suffit à retrouver F_d .

On commence par donner quelques propriétés des droites sur les surfaces de Fermat avant de donner la preuve du théorème. Soit S une surface de degré d dans \mathbb{P}^3 . On note par H la classe hyperplane sur S .

Définition 1.3.10. On appelle droite de Hodge toute classe $\lambda \in H_{\mathbb{Z}} \cap H^{1,1}$ vérifiant $\lambda.H = 1$ et $\lambda^2 = 2 - d$.

Lemme 1.3.11. *Soit Λ une droite de S , alors sa classe associée λ est une droite de Hodge.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\lambda^2 = 2 - d$. Soit H une section hyperplane de S

contenant λ . On a

$$\begin{aligned}\lambda.H &= 1 \\ \lambda(\lambda + R) &= 1 \\ \lambda^2 + d - 1 &= 1 \\ \lambda^2 &= 2 - d\end{aligned}$$

où R est la classe de la courbe (plane) résiduelle (et donc de degré $d - 1$). \square

On a en fait la réciproque :

Proposition 1.3.12. *Soit $\lambda \in H_{\mathbb{Z}} \cap H^{1,1}$ une droite de Hodge. Alors il existe une droite Λ contenue dans S telle que $[\Lambda] = \lambda$.*

La démonstration de cette proposition fait appel au théorème de Lefschetz pour les classes de type $(1, 1)$. Celui-ci nous assure en effet l'existence d'un diviseur Λ sur S tel que $[\Lambda] = \lambda$. On vérifie ensuite que ce diviseur est effectif.

Définition 1.3.13. — On appelle *étoile* de S tout ensemble de d droites coplanaires et concourantes contenues dans S (c'est à dire que ces d droites s'intersectent toutes en un même point).

— On appelle *étoile spéciale* de S toute étoile telle que dans des coordonnées affines du plan les droites ont comme équation $y_i = \mu_i x_i$ pour $i \in \{1 \dots d\}$ et où μ_i sont les racines d -ième de l'unité.

Sur une surface de Fermat on a $6d$ ensembles d'étoiles spéciales et chaque droite appartient à exactement deux étoiles spéciales. Une surface de Fermat contient donc $3d^2$ droites.

Démonstration du théorème 1.3.8, voir [GH83] pour les détails. Soit S telle que

$$VISH(F_d) \cong VISH(S).$$

En particulier ces deux surfaces ont même structures de Hodge polarisées et donc toute droite de Hodge pour l'une des surfaces est droite de Hodge pour l'autre. Grâce à la proposition 1.3.12, on a donc deux ensembles de droites $(L_i)_{i=1 \dots 3d^2}$ et $(D_i)_{i=1 \dots 3d^2}$ telles que pour tout $1 \leq i \leq 3d^2$, $L_i \subset S$, $D_i \subset F_d$ et pour tout i et j compris entre 1 et $3d^2$, $L_i.L_j = D_i.D_j$.

Maintenant si l'on considère d droites D_1, \dots, D_d de F_d appartenant à la même étoile, par ce qui précède les droites correspondantes sur S , L_1, \dots, L_d , s'intersectent deux à deux mais ne sont pas nécessairement concourantes. Elles sont par contre coplanaires. En effet considérons trois droites parmi L_1, \dots, L_d :

- Si elles ne sont pas concourantes, comme $L_i L_j = 1$ pour tout $i \neq j$, ces trois droites sont nécessairement coplanaires.
- Si elles sont concourantes chacune de ces droites appartient au plan tangent à S au point de concours (puisque S est lisse).

Il s'agit de montrer que la première situation ci-dessus ne peut pas se produire et donc que L_1, \dots, L_d sont d droites d'une même étoile. Supposons par l'absurde que L_1, L_2 et L_3 n'appartiennent pas à une même étoile. On a alors

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S(-L_1))) + H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S(-L_2))) + H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S(-L_3))) = H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)).$$

(quitte à choisir des coordonnées de \mathbb{P}^3 telles que $L_1 := \{x_0 = x_1 = 0\}$, $L_2 := \{x_0 = x_2 = 0\}$, $L_3 := \{x_0 = x_3 = 0\}$, on voit que tout polynôme homogène de degré $(d-4)$, est bien la somme de trois polynômes homogènes de degré $d-4$ appartenant à l'un des idéaux associés aux droites).

On utilise alors l'invariant défini par (1.22). En effet, grâce au théorème 1.3.9, en notant Λ_i la classe de chaque L_i , on a

$$H^{2,0}(-\Lambda_1) + H^{2,0}(-\Lambda_2) + H^{2,0}(-\Lambda_3) = H^{2,0}.$$

Mais ceci n'est pas possible car par hypothèse on aurait la même égalité pour les droites D_1, D_2 et D_3 sur F_d . Or celles-ci appartiennent à la même étoile et donc toute section de $H^0(F_d, \mathcal{O}_{F_d}(K_{F_d}(-D_1)))$, $H^0(F_d, \mathcal{O}_{F_d}(K_{F_d}(-D_2)))$ ou $H^0(F_d, \mathcal{O}_{F_d}(K_{F_d}(-D_3)))$ doit s'annuler en $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ et donc on sait que

$$H^{2,0}(-\Lambda_1) + H^{2,0}(-\Lambda_2) + H^{2,0}(-\Lambda_3) \neq H^{2,0}.$$

A ce stade on sait donc que les $3d^2$ droites de S appartiennent également à $6d$ étoiles. Par la suite l'auteur montre qu'il existe un automorphisme de \mathbb{P}^3 alignant les droites de S avec celles de F_d . On a donc $S \cap F_d$ contient un diviseur de degré $3d^2 > d^2$. Ce qui montre que $S = F_d$. □

QUINTIQUES DE TOGLIATTI, ENSEMBLE PAIRS DE POINTS DOUBLES ET CÔNES DE CONTACT

L'objet de ce chapitre est de construire puis étudier en détails la géométrie de la quintique de Togliatti, Σ_5 . La construction est la suivante : on considère $V = V_3 \subset \mathbb{P}^5$ une hypersurface cubique et $L \subset V$ une droite générale. La projection de centre L sur \mathbb{P}^3 restreinte à V définit un fibré en coniques. Σ_5 est alors définie comme le lieu de dégénérescence de cette fibration. Plus précisément on a

Théoreme (2.2.8). *Soit V_3 une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 générale ayant comme uniques singularités n points doubles ordinaires. Si L est une de ses droites générales alors la projection de centre L , restreinte à V_3 , définit un fibré en coniques sur \mathbb{P}^3 . Le lieu où les fibres dégénèrent est une surface quintique de \mathbb{P}^3 . Cette quintique admet $16 + n$ points doubles.*

Ainsi à chaque point de Σ_5 correspond deux droites coplanaires dans V incidentes à L . Plus précisément, Σ_5 est la variété des droites de V incidentes à L , $F_L(V)$, que l'on a quotientée par l'involution ι_L (voir définition 2.14). Cette involution n'est bien définie que si L est du premier type, i.e. s'il existe un unique plan tangent à V le long de L . C'est pourquoi, la première section de ce chapitre est consacrée à la géométrie des droites dans une cubique de \mathbb{P}^5 . On vérifie notamment qu'une droite générale de V est de premier type. Par la suite, on s'intéresse à la répartition des fibres qui sont des droites doubles, c'est à dire les droites dans $F_L(V)$ fixées par l'involution ι_L . En effet ces fibres correspondent à des points doubles de Σ_5 qui ont la particularité de tous se situer sur un cône de contact. Dans la deuxième section on effectue la construction de Σ_5 et on démontre le théorème 2.2.8. La deuxième moitié de ce chapitre consiste à étudier la configuration des points doubles de la quintique en s'appuyant sur les articles de A. Beauville [Bea79b] et de F. Catanese [Cat81]. L'un des objectifs est de montrer que pour une quintique de Togliatti, il existe 31 cônes de contacts provenant tous de projections à la Togliatti.

2.1 Quelques résultats sur les droites d'une hypersurface cubique dans \mathbb{P}^5

2.1.1 La variété de Fano d'une hypersurface cubique

On commence par étudier la variété des droites (ou variété de Fano) d'une hypersurface lisse de degré d dans \mathbb{P}^{n+1} . Cette hypersurface est notée X . Pour se faire on rappelle tout d'abord qu'une droite L dans \mathbb{P}^{n+1} peut être vue comme un élément $[L]$ dans $Gr(2, n+2)$, où $Gr(2, n+2)$ désigne l'ensemble des plans de \mathbb{C}^{n+2} . On rappelle également que $Gr(2, n+2)$ est une variété complexe projective de dimension $2n$.

Définition 2.1.1. Soit X une hypersurface lisse de \mathbb{P}^{n+1} . On appelle variété des droites de X (ou variété de Fano de X) l'ensemble

$$F(X) := \{[L] \in Gr(2, n+2) \mid L \subset X\}.$$

On veut vérifier que cet ensemble est bien une sous-variété de $Gr(2, n+2)$ et calculer sa dimension. Pour cela on va réaliser $F(X)$ comme le zéro d'une section à valeurs dans un fibré au dessus de $Gr(2, n+2)$. Sur $Gr(2, n+2)$, on considère le sous-fibré tautologique S . Il s'agit du sous-fibré du fibré trivial $Gr(2, n+2) \times \mathbb{C}^{n+2}$ dont chaque fibre en $[L] \in Gr(2, n+2)$ est $L \subset \mathbb{C}^{n+2}$.

Afin d'alléger les notations, posons $V := \mathbb{C}^{n+2}$, de telle sorte qu'un polynôme homogène de degré d soit un élément de $S^d(V^*) \cong H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d))$. Par définition de S , on a la suite exacte courte suivante, appelée, suite exacte courte universelle :

$$0 \rightarrow S \rightarrow V \times \mathcal{O}_{Gr(2, n+2)} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

\mathcal{Q} est le sous-fibré de $Gr(2, n+2) \times V$ dont la fibre en $[L]$ est $V/[L]$. En dualisant (2.1), puis en prenant la d -ème puissance symétrique on obtient la surjection :

$$S^d(V^*) \times \mathcal{O}_{Gr(2, n+2)} \rightarrow S^d(S^*) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

En prenant les sections globales dans (2.2) on obtient

$$s : S^d(V^*) \rightarrow H^0(Gr(2, n+2), S^d(S^*)). \quad (2.3)$$

Explicitement si $f \in S^d(V^*)$, $s(f)$ est la section globale de $S^d(S^*)$ qui à chaque $[L] \in Gr(2, n+2)$ associe la restriction de f à $[L]$, ie.

$$s(f)([L]) = f|_{[L]}.$$

Si maintenant X est une hypersurface définie par le polynôme homogène f , par défi-

dition, on a

$$F(X) = \{[L] \in Gr(2, n+2) \text{ tel que } s(f)([L]) = 0\}.$$

$F(X)$ est donc le lieu des zéros de la section globale $s(f)$, ou autrement dit $F(X)$ est donné par l'intersection entre la section nulle et la section globale $s(f)$. Dans $S^d(S^*)$, l'image de chacune de ces sections a comme dimension celle de l'espace base (c'est-à-dire $Gr(2, n+2)$). En supposant que $F(X) \neq \emptyset$, comme

$$\dim S^d(S^*) = \dim Gr(2, n+2) + \text{rang } S^d(S^*).$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dim F(X) &\geq 2\dim Gr(2, n+2) - \dim Gr(2, n+2) - \text{rang}(S^d(S^*)). \\ \dim F(X) &\geq 2n - \binom{d+1}{d}. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus devenant une égalité lorsque $s(f)$ et la section nulle s'intersectent transversalement. On peut montrer que c'est le cas pour une hypersurface générale de degré d , dès lors que la variété de Fano correspondante est non vide. On renvoie à [HL10] pour plus de détails. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1.2. *Soit X une hypersurface cubique générale de dimension n . Si X contient une droite alors $\dim F(X) = 2n - 4$.*

Remarque. Soit m tel que $1 \leq m \leq n$. On peut définir de la même manière la variété de Fano $F(X, m)$ de X . Cette variété est l'ensemble des espaces linéaires de dimension m contenues dans X (vue cette fois-ci comme une sous variété de $Gr(m+1, n+2)$). Le même raisonnement que ci-dessus mène à

$$\dim F(X, m) \geq (m+1)(n+1-m) - \binom{m+d}{d}.$$

Comme précédemment, l'inégalité est une égalité pour une hypersurface générale.

Proposition 2.1.3 (voir [Huy], pour une démonstration). *Soit $n < 5$. Une hypersurface cubique générale de dimension n ne contient pas de plans.*

Remarque. En fait on peut montrer que toute hypersurface cubique de dimension $n \geq 2$ contient effectivement une droite et on a $\dim F(X) = 2n - 4$. En particulier la variété des droites d'une cubique irréductible de \mathbb{P}^5 est une variété de dimension 4.

2.1.2 Droites du premier et du deuxième type

L'objet de cette section est de montrer que le fibré normal d'une droite dans l'hypersurface cubique la contenant ne peut prendre que deux formes différentes, séparant ainsi

les droites de la cubique entre droites du *premier type* et droites du *second type*.

Intéressons nous d'abord au cas un peu plus général des fibrés normaux d'une hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ restreint le long d'un élément de $F(X, m)$. Soit $d = \deg X$ dans \mathbb{P}^{n+1} et $m \leq n$ de sorte que $F(X, m) \neq \emptyset$. Soit $L \in F(X, m)$ et supposons que X soit lisse le long de L . Soit $\mathcal{N}_{L/X}$ (resp. $\mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^{n+1}}$) le fibré normal de L dans X (resp. dans \mathbb{P}^{n+1}). Soit $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^{n+1}|_L}$ la restriction sur L du fibré normal de X dans \mathbb{P}^{n+1} . On a alors la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{N}_{L/X} \rightarrow \mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^{n+1}|_L} \rightarrow 0$ qui donne

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{L/X} \rightarrow \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(n+1-m)} \rightarrow \mathcal{O}_L(d) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Les invariants numériques de $\mathcal{N}_{L/X}$ sont :

$$\det(\mathcal{N}_{L/X}) = \mathcal{O}_L(n+1-m-d). \quad (2.5)$$

$$\text{rang}(\mathcal{N}_{L/X}) = \dim X - m = n - m. \quad (2.6)$$

$$\chi(\mathcal{N}_{L/X}) = (n+1-m)\chi(\mathcal{O}_L(1)) - \chi(\mathcal{O}_L(d)).$$

$$\chi(\mathcal{N}_{L/X}) = (n+1-m) \binom{m+1}{m} - \binom{m+d}{d} = (n+1-m)(m+1) - \binom{m+d}{d}.$$

Proposition 2.1.4. *Soit X une hypersurface cubique de dimension n . Soit L une droite de $F(X)$ de sorte que X soit lisse le long de L . Alors $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(n-3)} \oplus \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$ ou $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(n-2)} \oplus \mathcal{O}_L(-1)$.*

Démonstration. Par le théorème de Grothendieck sur les fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^1 , $\mathcal{N}_{L/X}$ est décomposable en somme directe de fibrés en droites. (2.6) pour $m = 1$ donne l'existence de $n - 1$ entiers (a_1, \dots, a_{n-1}) tels que $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_L(a_{n-1})$. (2.5) pour $m = 1$ et $d = 3$ dit que

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = n - 3. \quad (2.7)$$

Comme $\mathcal{N}_{L/X} \hookrightarrow \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n}$, on sait que pour tout i compris entre 1 et $n - 1$, $a_i \leq 1$. On en déduit qu'au moins $n - 3$ termes de la somme valent 1 exactement ce qui montre la proposition. \square

On peut alors définir les droites de premier et de deuxième type.

Définition 2.1.5. Soit L et X comme ci-dessus. Si $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(n-3)} \oplus \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$, alors L est dite du premier type. Sinon c'est une droite du deuxième type.

Nous continuons cette section par démontrer la caractérisation suivante pour les droites de premier et second type.

Proposition 2.1.6. *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface cubique lisse le long de l'une de ses droites $L \in F(X)$.*

- *L est une droite du premier type si et seulement si il existe un unique espace linéaire P de dimension $n - 2$ tel que P soit tangent à X le long de L .*
- *L est une droite du deuxième type si et seulement si il existe un unique espace linéaire P de dimension $n - 1$ tel que P soit tangent à X le long de L .*

Démonstration. On revient à la suite exacte courte (2.4) dans laquelle on a posé $d = \deg(X) = 3$ et $m = 1$. On obtient

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{L/X} \rightarrow \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_L(3) \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

On se place dans des coordonnées telles que $L := \{x_2 = \dots = x_{n+1} = 0\}$ et on note par f le polynôme définissant X . On pose également la notation $\partial f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Il s'agit de remarquer que la surjection dans (2.8) est donnée par

$$(P_2(x_0, x_1), \dots, P_{n+1}(x_0, x_1)) \mapsto \sum_{i=2}^{n+1} P_i(x_0, x_1) \partial f_i(x_0, x_1, 0, 0, 0),$$

où P_2, \dots, P_{n+1} sont des polynômes homogènes de degré 1. Après avoir tensorisé par $\mathcal{O}_L(-1)$, (2.8) devient :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{L/X}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_L^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{O}_L(2) \rightarrow 0.$$

En cohomologie on a :

$$0 \rightarrow H^0(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1)) \rightarrow H^0(L, \mathcal{O}_L^{\oplus n}) \rightarrow H^0(L, \mathcal{O}_L(2)) \rightarrow H^1(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1)) \rightarrow 0.$$

Si L est du premier type, i.e. $\mathcal{N}_{L/X}(-1) = \mathcal{O}_L^{\oplus n-3} \oplus \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-1)$, alors $H^0(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1))$ est de dimension $n - 3$ et $H^1(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1)) = 0$. On en déduit que les dérivées partielles de f restreintes à L engendrent $H^0(L, \mathcal{O}_L(2))$.

Si L est de deuxième type on a $\mathcal{N}_{L/X}(-1) = \mathcal{O}_L^{\oplus n-2} \oplus \mathcal{O}_L(-2)$ et $H^0(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1))$ est de dimension $n - 2$. Les dérivées partielles de f restreintes à L engendrent un sous-espace de dimension 2 dans $H^0(L, \mathcal{O}_L(2))$. En effet on a $\partial f_0(p) = \partial f_1(p) = 0$ pour tout $p \in L$ (car $L \subset X$), et

$$\dim \langle \partial f_i|_L \rangle_{i \geq 2} = h^0(L, \mathcal{O}_L^{\oplus n}) - h^0(L, \mathcal{N}_{L/X}(-1)).$$

Dans ce cas précis, on obtient donc l'existence de deux formes quadratiques Q et Q' tel que pour tout i , $\partial f_i(x_0, x_1, 0, 0, 0) = a_i Q(x_0, x_1, 0, 0, 0) + a'_i Q'(x_0, x_1, 0, 0, 0)$.

Mais alors, pour tout $p \in L$, l'espace tangent à X en p est donné par

$$T_p(X) := \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i x_i \right) Q(p) + \left(\sum_{i=0}^{n+1} a'_i x_i \right) Q'(p) = 0 \right\}.$$

Cet espace contient le sous-espace linéaire de dimension $n - 1$: $H := \{ \sum_{i=0}^{n+1} a_i x_i = \sum_{i=0}^{n+1} a'_i x_i = 0 \}$. La construction de l'espace de dimension $n - 2$ tangent à X le long de L si L est du premier type est similaire. Voir [Huy] pour les détails. \square

On se place désormais dans le cas qui nous intéresse pour la thèse, c'est à dire le cas où l'hypersurface est de dimension 4 et on va expliquer pourquoi les droites de premier type sont générales. Soit V_3 une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^5 donnée par l'équation $\{f_3 = 0\}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^5 &\rightarrow (\mathbb{P}^5)^* \\ p &\mapsto \left[\frac{\partial f_3(p)}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f_3(p)}{\partial x_5} \right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Soit γ_{V_3} , la restriction de γ à V_3 . γ_{V_3} est l'application qui à chaque point de l'hypersurface associe l'hyperplan tangent en ce point, vu comme élément de $(\mathbb{P}^5)^*$. Cette application est de degré 2 et génériquement injective. En vue d'exploiter la proposition 2.1.6, on s'intéresse à l'image de L par γ .

Lemme 2.1.7. *Soit $L \in F(V_3)$. Alors*

1. *L est de premier type si et seulement si son image par γ est une conique plane.*
2. *L est de deuxième type si et seulement si son image par γ est une droite. Dans ce cas L est un revêtement double sur son image.*

Démonstration. On note γ_L la restriction de γ à L . Il s'agit de remarquer que si H et H' sont des espaces linéaires dans \mathbb{P}^5 tels que $H \subset H'$, alors leurs représentants respectifs h et h' dans $(\mathbb{P}^5)^*$ vérifient $h' \subset h$. Ici h est l'espace linéaire dans $(\mathbb{P}^5)^*$ défini par

$$h = [H] := \{p = [H_p] \in (\mathbb{P}^5)^* \mid \text{hyperplan } H_p \subset \mathbb{P}^5 \text{ contient } H\}.$$

Ainsi, si h est un espace linéaire dans $(\mathbb{P}^5)^*$ contenant $Im \gamma_L$, alors l'espace correspondant H est contenu dans $\cap_{p \in L} T_p V_3$.

Par la proposition 2.1.6, si L est de premier type, le fait que $\cap_{p \in L} T_p V_3$ soit un plan Π_L se traduit sur $(\mathbb{P}^5)^*$ par le fait que $Im \gamma_L$ est incluse dans un plan et ce plan est le plus petit espace linéaire de $(\mathbb{P}^5)^*$ contenant $Im \gamma_L$. En particulier $Im \gamma_L$ n'est pas une droite. Comme γ_L est de degré 2, on en déduit que $Im \gamma_L$ est une conique plane.

Si L est du deuxième type $Im \gamma_L$ est une droite : c'est la droite image de $\cap_{p \in L} T_p V_3$ qui est de dimension 3. \square

Comme l'application γ est génériquement injective, on en déduit

Corollaire 2.1.8. *Une droite générale de $F(V_3)$ est de premier type.*

2.1.3 Droites sur les cubiques de \mathbb{P}^5

Cette section a pour objectif de donner quelques propriétés sur les droites incidentes à L . On y définit notamment l'hypersurface quadrique singulière, Q_L dont l'image par la projection de centre L est un cône de contact à Σ_5 . On donne également des propriétés vérifiées par les génératrices de cette hypersurface quadrique.

Soit V_3 une cubique irréductible de \mathbb{P}^5 et soit L une de ses droites. On choisit des coordonnées telles que

$$L := \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, 0] \mid x_0 \neq 0 \text{ ou } x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^5,$$

de sorte que V_3 soit défini par un polynôme homogène de degré 3, noté par f_3 et tel que

$$f_3(x_0, \dots, x_5) = \sum_{i=2}^5 x_i f_i(x_0, \dots, x_5)$$

avec f_i des polynômes homogènes de degré 2. De manière équivalente,

$$\begin{aligned} f_3 &= l_0(x_2, \dots, x_5)x_0^2 + l_1(x_2, \dots, x_5)x_1^2 + 2l_{01}(x_2, \dots, x_5)x_0x_1 \\ &\quad + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5). \end{aligned}$$

où l_0 , l_1 et l_{01} sont des polynômes homogènes de degré 1, Q_i , pour $i, j = 0, 1$, sont des polynômes homogènes de degré 2 et P est un polynôme homogène de degré 3. De plus, tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{C}[x_2, \dots, x_5]$. Dans son article, E. Togliatti suppose que les hyperplans $\{l_0 = 0\}$, $\{l_1 = 0\}$ et $\{l_{01} = 0\}$ ne font pas partis d'un même pinceau. En fait, et c'est l'objet du prochain lemme, cela revient à dire que l'on choisit L du premier type.

Lemme 2.1.9. *Soit V_3 et L comme ci-dessus, alors si L est du premier type, $H := \{l_0 = l_1 = l_{01} = 0\}$ définit un plan de \mathbb{P}^5 . Si L est du second type cette intersection est un espace linéaire de dimension 3.*

Démonstration. On utilise la caractérisation de la proposition 2.1.6 : il est alors suffisant de montrer que $\bigcap_{p \in L} T_p V_3 = H$. Soit $p_t = [1, t, 0, 0, 0, 0]$ un point de L . On a

$$T_{p_t} V_3 = \{[x_0, \dots, x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid \sum_{i=0}^5 x_i \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(p_t) = 0\}.$$

De plus pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_0}(p_t) &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(p_t) = 0 \\ \text{et pour tout } i \geq 2, \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(p_t) &= \frac{\partial l_0}{\partial x_i} + \frac{\partial l_1}{\partial x_i} t^2 + 2 \frac{\partial l_{01}}{\partial x_i} t. \end{aligned}$$

En utilisant la relation d'Euler on obtient

$$T_{p_t} V_3 = \{[x_0, \dots, x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid l_0(x_2, \dots, x_5) + l_1(x_2, \dots, x_5)t^2 + 2l_{01}(x_2, \dots, x_5)t = 0\}. \quad (2.10)$$

L'intersection de tous ces hyperplans tangents à V_3 est donc l'espace linéaire défini par $\{l_0 = l_1 = l_{01} = 0\}$. Cet espace est tangent à V_3 le long de L et la proposition 2.1.6 permet de conclure le lemme. \square

Supposons que l'intersection des trois hyperplans $\{l_0 = 0\}$, $\{l_1 = 0\}$ et $\{l_{01} = 0\}$ forme un plan, c'est à dire que L soit du premier type. Ce plan est le plan tangent à V_3 le long de L et est noté Π_L . On peut alors choisir des coordonnées telles que

$$f_3 = x_2 x_0^2 + x_3 x_1^2 + 2x_4 x_0 x_1 + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5),$$

c'est à dire telles que

$$\Pi_L = \{x_2 = x_3 = x_4 = 0\}.$$

Avec ce choix, (2.10) devient

$$T_{p_t} V_3 = \{[x_0, \dots, x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid x_2 + x_3 t^2 + 2x_4 t = 0\}. \quad (2.11)$$

Lemme 2.1.10. *Soit Π un plan contenant L différent de Π_L . Soit C la conique résiduelle définie par $\Pi \cap V_3 := L \cup C$. Alors*

$$p \in C \cap L \Leftrightarrow \Pi \subset T_p V_3.$$

Démonstration. Comme Π contient L , un système d'équations définissant Π est de la forme

$$\Pi : \begin{cases} h_1(x_2, \dots, x_5) = 0 \\ h_2(x_2, \dots, x_5) = 0 \\ h_3(x_2, \dots, x_5) = 0 \end{cases}$$

Les formes linéaires h_i étant indépendantes on peut supposer qu'il existe trois scalaires μ_2, μ_3 et μ_4 tels que

$$\Pi : \begin{cases} x_2 = \mu_2 x_5 \\ x_3 = \mu_3 x_5 \\ x_4 = \mu_4 x_5 \end{cases}$$

Comme $\Pi \neq \Pi_L$, les trois scalaires μ_2, μ_3 et μ_4 ne sont pas tous nuls. On a

$$\Pi \cap V_3 : \begin{cases} x_2 = \mu_2 x_5 \\ x_3 = \mu_3 x_5 \\ x_4 = \mu_4 x_5 \\ \mu_2 x_5 x_0^2 + \mu_3 x_5 x_1^2 + 2\mu_4 x_5 x_0 x_1 + 2x_5^2 Q_0(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1)x_0 \\ + 2x_5^2 Q_1(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1)x_1 + x_5^3 P(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1) = 0. \end{cases}$$

$\Pi \cap V_3$ contient la droite L et la conique définie par

$$C : \begin{cases} x_2 = \mu_2 x_5 \\ x_3 = \mu_3 x_5 \\ x_4 = \mu_4 x_5 \\ \mu_2 x_0^2 + \mu_3 x_1^2 + 2\mu_4 x_0 x_1 + 2x_5 Q_0(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1)x_0 \\ + 2x_5 Q_1(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1)x_1 + x_5^2 P(\mu_2, \mu_3, \mu_4, 1) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Cette conique intersecte L aux points définis par

$$C \cap L : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ \mu_2 x_0^2 + \mu_3 x_1^2 + 2\mu_4 x_0 x_1 = 0. \end{cases}$$

On a

$$p_t = [1, t, 0, 0, 0, 0] \in C \cap L \Leftrightarrow \mu_2 + \mu_3 t^2 + 2\mu_4 t = 0. \quad (2.13)$$

Par (2.11), $T_{p_t} V_3 = \{x_2 + x_3 t^2 + 2x_4 t = 0\}$. Et

$$\Pi \subset T_{p_t} V_3 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}, \mu_2 \lambda + \mu_3 \lambda t^2 + 2\mu_4 \lambda t = 0.$$

On a bien

$$p_t = [1, t, 0, 0, 0, 0] \in C \cap L \Leftrightarrow \Pi \subset T_{p_t} V_3.$$

□

On considère maintenant le discriminant de l'équation (2.11). Celui-ci définit l'hyper-surface quadrique

$$Q_L := \{x_4^2 - x_2 x_3 = 0\}$$

qui est un cône dont le sommet est le plan Π_L . Par construction il s'agit de la variété "enveloppe" à V_3 le long de L . Ce cône possède la propriété suivante :

Lemme 2.1.11. *Soit p un point de L alors*

1. $T_p V_3$ est tangent à Q_L le long d'un espace linéaire de dimension 3. Cet espace est noté H_p .
2. On a la caractérisation suivante de Q_L : Soit $A \notin L$.

$$A \in Q_L \Leftrightarrow \text{il existe un unique } p \in L \text{ tel que } A \in T_p V_3.$$

3. Pour tout plan $P \neq \Pi_L$ qui contient L , on a

$$P \subset H_p \Leftrightarrow \text{la conique résiduelle } C \text{ vérifie } C \cap L = \{p\}.$$

Autrement dit, H_p paramètre tous les plans contenant L pour lesquels la conique résiduelle C vérifie $\text{mult}_p(C, L) = 2$. Ici, $\text{mult}_p(C, L)$ désigne la multiplicité d'intersection entre C et L en p .

Démonstration. On vérifie le point 1).

Soit p_t un point de L dont les coordonnées sont $[1, t, 0, 0, 0]$. On a

$$Q_L \cap T_{p_t} V_3 = \{x_3 t^2 + 2x_4 t + x_2 = x_4^2 - x_2 x_3 = 0\}$$

$$Q_L \cap T_{p_t} V_3 = \{x_3 t^2 + 2x_4 t + x_2 = (x_3 t + x_4)^2 = 0\}$$

et Q_L et $T_{p_t} V_3$ sont tangents le long du 3-espace

$$H_p := \{x_3 t^2 + 2x_4 t + x_2 = (x_3 t + x_4) = 0\}.$$

On démontre maintenant le point 2).

Soit $A = [a_0, \dots, a_5] \notin L$. (2.10) donne

$$\exists! p \in L \text{ tel que } A \in T_p V_3 \Leftrightarrow \exists! t_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } a_2 + a_3 t_0^2 + 2a_4 t_0 = 0.$$

$$\exists! p \in L \text{ tel que } A \in T_p V_3 \Leftrightarrow a_4^2 - a_2 a_3 = 0.$$

$$\exists! p \in L \text{ tel que } A \in T_p V_3 \Leftrightarrow A \in Q_L.$$

On reprend les notations du lemme 2.1.10 pour démontrer le point 3). On a

$$\Pi : \begin{cases} x_2 = \mu_2 x_5 \\ x_3 = \mu_3 x_5 \\ x_4 = \mu_4 x_5 \end{cases}$$

La courbe C est définie par $V_3 \cap \Pi = L \cup C$ et d'après (2.13),

$$p_t = [1, t, 0, 0, 0] \in C \cap L \Leftrightarrow \mu_2 + \mu_3 t^2 + 2\mu_4 t = 0.$$

Donc il existe un unique t_0 tel que $C \cap L = \{p_{t_0}\}$ si et seulement si $\mu_4^2 - \mu_2\mu_3 = 0$, avec μ_2 , μ_3 et μ_4 non tous nuls. Donc il existe un unique t_0 tel que $C \cap L = \{p_{t_0}\}$ si et seulement si $\Pi \subset Q_L$. Comme dans ce cas $\Pi \subset T_{p_0}V_3$, on a bien l'équivalence

$$\text{il existe un unique } t_0 \text{ tel que } C \cap L = \{p_{t_0}\} \Leftrightarrow \Pi \subset H_{p_0}.$$

□

Lemme 2.1.12. *Soit p dans L et H_p le trois-espace linéaire associé. Alors, parmi la famille de plans contenant L et contenus dans H_p (mais toujours différents de Π_L), au plus deux ont une conique résiduelle associée dégénérée.*

Démonstration. On montre ce lemme pour le point $p_0 := [1, 0, 0, 0, 0]$. Dans ce cas,

$$H_{p_0} : \{x_2 = x_4 = 0\}.$$

Et d'après (2.12), l'équation d'une conique résiduelle située sur un plan contenu dans H_{p_0} est donnée par

$$C : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = \mu_3 x_5 \\ x_4 = 0 \\ \mu_3 x_1^2 + 2Q_0(0, \mu_3, 0, 1)x_0x_5 + 2Q_1(0, \mu_3, 0, 1)x_1x_5 + P(0, \mu_3, 0, 1)x_5^2 = 0. \end{cases}$$

Et cette conique est dégénérée si et seulement si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2Q_0(0, \mu_3, 0, 1) \\ 0 & \mu_3 & 2Q_1(0, \mu_3, 0, 1) \\ 2Q_0(0, \mu_3, 0, 1) & 2Q_1(0, \mu_3, 0, 1) & P(0, \mu_3, 0, 1) \end{pmatrix} \leq 2$$

Comme $\mu_3 \neq 0$, cette conique est dégénérée si et seulement si $Q_0(0, \mu_3, 0, 1) = 0$. Comme $Q_0(0, t, 0, 1)$ a au plus deux racines, on a montré le lemme. □

2.2 La construction de la quintique de Togliatti

L'objectif de cette section est de construire la quintique de Togliatti, c'est à dire la quintique de \mathbb{P}^3 ayant le nombre maximal (= 31) de points doubles ordinaires (ou nœuds) pour une surface de degré 5 dans \mathbb{P}^3 . Suivant la terminologie de Du Val il s'agit de singularités de type A_1 . On commence par définir

Définition 2.2.1. On appelle variété des droites incidentes à L dans V_3 la sous-variété de $F(V_3)$ définie par

$$F_L(V_3) = \{[l] \in F(V_3) \mid l \cap L \neq \emptyset\}.$$

Soit $[l] \in F_L(V_3)$ tel que $l \neq L$. Soit $\Pi_{L,l}$ le plan engendré par L et l . On remarque que $\Pi_{L,l} \cap V_3$ est constitué des droites L , l et d'une droite résiduelle l' . Si L est du premier type, on munit $F_L(V_3)$ de l'involution naturelle

$$\begin{aligned} \iota_L : F_L(V_3) &\rightarrow F_L(V_3) \\ l &\mapsto \begin{cases} l' & \text{si } l \neq L \\ L' & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ici, L' est la droite résiduelle donnée par l'intersection entre le plan tangent à V_3 le long de L et V_3 .

Si maintenant l est un point fixé par l'involution ceci que signifie que le plan $\Pi_{L,l}$ est tangent à V_3 le long de l . En particulier si L est elle-même fixée par l'involution, cela signifie que le plan Π_L tangent à V_3 le long de L vérifie $\Pi_L \cap V_3 = 3L$.

Remarque 2.2.1. Soit $l \in F_L(V_3)$ une droite différente de L et fixée par l'involution ι_L . Soit $p := L \cap l$. Alors grâce au lemme 2.1.11, $l \subset H_p$.

On procède maintenant à la construction de Σ_5 . Soit V_3 une cubique lisse de \mathbb{P}^5 et soit L une de ses droites. On veut effectuer la projection de centre L . On se place dans des coordonnées telles que

$$L := \{[x_0, x_1, 0, \dots, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\}$$

et on choisit un 3-espace linéaire complémentaire à L . Par exemple $H_3 := \{x_0 = x_1 = 0\} \cong \mathbb{P}^3$. On pose :

$$\begin{aligned} \pi_L : V_3 \subset \mathbb{P}^5 &\dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x_0, x_1, \dots, x_5] &\mapsto [x_2, \dots, x_5]. \end{aligned}$$

L'application π_L n'est pas défini en L . On éclate donc \mathbb{P}^5 le long de L pour lever l'indétermination et on se retrouve dans la situation suivante où $V_{3,L}$ est la transformée stricte de V_3 après éclatement.

$$\begin{array}{ccc} V_{3,L} \subset Bl_L \mathbb{P}^5 & & \\ \downarrow Bl_L & \searrow \tilde{\pi}_L & \\ L \subset V_3 \subset \mathbb{P}^5 & \dashrightarrow \pi_L & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Dès à présent, on suppose que L est une droite du premier type et comme dans la section précédente on choisit des coordonnées telles qu'une équation de V_3 soit :

$$f_3 = x_2x_0^2 + x_3x_1^2 + 2x_4x_0x_1 + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5) = 0.$$

Nous obtenons donc un fibré en coniques au-dessus de \mathbb{P}^3 , dont chaque fibre au dessus de $p = [x_2, \dots, x_5]$ est la conique dont la matrice associée est

$$M(p) = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & Q_0(p) \\ x_4 & x_3 & Q_1(p) \\ Q_0(p) & Q_1(p) & P(p) \end{pmatrix}.$$

On remarque que le déterminant de cette matrice est un polynôme homogène de degré 5 : l'ensemble des points dans \mathbb{P}^3 pour lesquels la fibre est dégénérée est donc une surface quintique que l'on note par Σ_5 . Pour tout point de cette surface, la fibre au dessus de ce point est donc constituée de l'union de deux droites coplanaires intersectant L .

Cette surface quintique est donc la surface obtenue en quotientant la variété des droites de V_3 incidentes à L par ι_L :

$$\Sigma_5 := \{p \in \mathbb{P}^3 \mid \det M(p) = 0\} = F_L(V_3)/\iota_L.$$

Autrement dit, $F_L(V_3)$ est la surface, revêtement double de Σ_5 , ramifiée au-dessus des points où la fibre est une droite fixée par ι_L . En vue de montrer le théorème 2.2.8, on commence par montrer

Proposition 2.2.2. *Soit V_3 une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^5 générale. Si L est une de ses droites générales alors la projection de centre L restreinte à V_3 définit un fibré en coniques sur \mathbb{P}^3 . Le lieu où les fibres dégénèrent est une surface quintique de \mathbb{P}^3 . Cette quintique admet 16 points doubles ordinaires.*

Commençons par montrer

Lemme 2.2.3. *Soit*

$$\begin{array}{c} \widehat{S} \\ \pi \downarrow \\ S := \widehat{S}/\iota \end{array}$$

avec \widehat{S} une surface lisse munie d'une involution ι et $S := \widehat{S}/\iota$. Si $\widehat{p} \in \widehat{S}$ est un point fixe isolé pour ι , alors $p = \pi(\widehat{p})$ est un point double ordinaire de S , c'est à dire une singularité résolvable en un seul éclatement.

Démonstration. On considère la situation suivante.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S} & \xleftarrow{Bl_{\widehat{p}}} & \widehat{X}_1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ S = \widehat{S}/\iota & \xleftarrow{Bl_p} & X_1 \end{array}$$

où X_1 (resp \widehat{X}_1) est l'éclatement de S en p (respectivement de \widehat{S} en \widehat{p}). Comme \widehat{p} est un point lisse de \widehat{S} , le diviseur exceptionnel sur \widehat{X}_1 correspondant est une (-1) -courbe notée \widehat{E}_1 . Considérons E_1 le diviseur exceptionnel correspondant à p sur X_1 . \widehat{X}_1 est un revêtement double de X_1 ramifié le long de E_1 et il s'agit de montrer que X_1 est lisse le long de E_1 . On pose alors r le nombre d'éclatements nécessaires pour résoudre la singularité de S en p et on a

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{S} & \xleftarrow{Bl_{\widehat{p}}} & \widehat{X}_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{Bl_{\widehat{p}_r}} & \widehat{X}_r \\ \pi \downarrow & & & & & & \downarrow \pi_r \\ S = \widehat{S}/\iota & \xleftarrow{Bl_p} & X_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{Bl_{p_r}} & X_r \end{array}$$

où X_r est une surface lisse résolution minimale de S et r le nombre d'éclatements nécessaires pour obtenir X_r . Sur \widehat{X}_r on a donc une collection de r diviseurs exceptionnels $\widehat{E}_1, \dots, \widehat{E}_r$ que l'on suppose à croisement normaux. Ils vérifient :

- Pour tout i entre 1 et r , $\widehat{E}_i^2 = -1$.
- $\widehat{E}_i \cdot \widehat{E}_j = 0$ si $j \neq i + 1$ et $(\widehat{E}_i \cdot \widehat{E}_{i+1}) = 1$.

\widehat{X}_r étant un revêtement double de X_r ramifié le long de E_1, \dots, E_r on a :

$$2\left(\sum_{i=1}^r \widehat{E}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^r E_i\right)^2. \quad (2.15)$$

En supposant que les diviseurs $(E_i)_{i=1\dots r}$ sont aussi à croisement normaux on a :

$$\begin{aligned} E_i E_{i+1} &= 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r \\ E_i E_j &= 0 \text{ pour tout } j \neq i + 1 \\ E_i^2 &= -n \text{ avec } n \geq 2. \end{aligned}$$

Dans ce cas (2.15) donne :

$$\begin{aligned} 2(-r + r - 1) &= -nr + r - 1 \\ r(1 - n) &= -1 \end{aligned}$$

C'est à dire $r = 1$ et $n = 2$. □

On veut appliquer ce lemme au revêtement

$$F_L(V_3) \rightarrow \Sigma_5.$$

Pour cela il faut s'assurer que $F_L(V_3)$ est une variété lisse. D'après [Voi86] on a :

Proposition 2.2.4. *Soit V_3 une hypersurface cubique lisse et soit L une de ses droites. Si les quatre conditions suivantes sont réalisées*

- a) L est une droite de premier type.
- b) L n'est pas fixée par l'involution.
- c) L n'est pas droite résiduelle du second type.
- d) L n'est pas dans le plan de deux droites de second type coplanaires.

alors $F_L(V_3)$ est lisse.

Lemme 2.2.5. *Les conditions données par la proposition 2.2.4 sont vérifiées pour une cubique de \mathbb{P}^5 et une de ses droites en positions générales.*

Démonstration. Soit $V_3 := \{f_3 = 0\}$ une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^5 et L une de ses droites. On vérifie que les conditions sont vérifiées en général. Par le corollaire (2.1.8), le point a) est vérifié. Pour le point b), on vérifie directement que b) impose des conditions sur les coefficients de f_3 non vérifiés généralement. Sans perte de généralités, on se place dans des coordonnées telles que

$$f_3 = x_2x_0^2 + x_3x_1^2 + 2x_4x_0x_1 + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5) = 0.$$

On a

$$L := \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\}$$

et le plan tangent à V_3 le long de L est

$$\Pi_L := \{x_2 = x_3 = x_4 = 0\}.$$

L est fixé par l'involution si et seulement si Π_L intersecte V_3 avec multiplicité 3 le long de L , c'est à dire si et seulement si le polynôme

$$2Q_0(0, 0, 0, x_5)x_0 + 2Q_1(0, 0, 0, x_5)x_1 + P(0, 0, 0, x_5)$$

n'a que des termes en x_5^3 , c'est à dire si et seulement si $Q_0(0, 0, 0, 1) = Q_1(0, 0, 0, 1) = 0$.

Les conditions c) et d) sont équivalentes à : si L' est une droite de second type intersectant L son image par ι_L est de premier type. Le point c) étant le cas particulier où $\iota_L(L') = L'$. On commence donc par montrer qu'une droite intersectant L et fixée par ι_L n'est en général pas du deuxième type. Comme précédemment on suppose que

$$L := \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\}.$$

Soit L' une droite intersectant L et fixée par ι_L . On se place dans des coordonnées telles que $L' := \{[x_0, 0, x_2, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_2) \neq (0, 0)\}$. Comme L et L' sont incluses dans V_3 ,

tous les trinômes de f_3 contiennent soit un terme parmi x_2, x_3, x_4, x_5 soit un terme parmi x_1, x_3, x_4, x_5 , c'est à dire f_3 est de la forme

$$f_3 = l_0(x_3, x_4, x_5)x_0^2 + l_1(x_2, x_3, x_4, x_5)x_1^2 + 2l_{01}(x_2, x_3, x_4, x_5)x_0x_1 + 2Q_0(x_2, x_3, x_4, x_5)x_0 \\ + 2Q_1(x_2, x_3, x_4, x_5)x_1 + P(x_2, x_3, x_4, x_5)$$

avec $Q_0(1, 0, 0, 0) = P(1, 0, 0, 0) = 0$ et l_0, l_1, l_{01} trois formes linéaires indépendantes (car L est de premier type). Le plan engendré par L et L' est

$$\Pi_{L,L'} := \{x_3 = x_4 = x_5 = 0\}.$$

L'intersection de ce plan avec V_3 est donné par

$$\{x_3 = x_4 = x_5 = l_1(x_2, 0, 0, 0)x_1^2 + 2l_{01}(x_2, 0, 0, 0)x_0x_1 + 2Q_1(x_2, 0, 0, 0)x_1 = 0\}.$$

Comme L' est fixée par l'involution on en déduit que $l_{01}(1, 0, 0, 0) = Q_1(1, 0, 0, 0) = 0$ et $l_1(1, 0, 0, 0) \neq 0$. En résumé, une hypersurface cubique contenant deux droites s'intersectant en $[1, 0, 0, 0, 0]$ dont l'une (L) est de premier type et l'autre est fixée par l'involution ι_L , est définie par un polynôme de la forme

$$f_3 = l_0(x_3, x_4, x_5)x_0^2 + l_1(x_2, x_3, x_4, x_5)x_1^2 + l_{01}(x_3, x_4, x_5)x_0x_1 + 2Q_0(x_2, x_3, x_4, x_5)x_0 \\ + 2Q_1(x_2, x_3, x_4, x_5)x_1 + P(x_2, x_3, x_4, x_5),$$

avec l_0, l_1 et l_{01} des formes linéaires indépendantes vérifiant $l_1(1, 0, 0, 0) \neq 0$ et $Q_0(1, 0, 0, 0) = Q_1(1, 0, 0, 0) = P(1, 0, 0, 0) = 0$.

Il s'agit de vérifier que la condition L' est de deuxième type ajoute une condition sur le polynôme f_3 . Par le lemme 2.1.9, L' est de deuxième type si et seulement si les formes linéaires apparaissant devant les termes en x_0^2 , x_2^2 et x_0x_2 sont liées, c'est à dire si et seulement si $l_0(x_3, x_4, x_5)$, $l_{02}(x_3, x_4, x_5)$ et $l_2(x_3, x_4, x_5)$ le sont, avec l_{02} et l_2 les formes linéaires vérifiant

$$Q_0(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2l_{02} + Q'_0(x_3, x_4, x_5)$$

et

$$P(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2^2l_2 + P'(x_3, x_4, x_5).$$

On effectue le même raisonnement pour montrer qu'une hypersurface cubique $V_3 := \{f_3 = 0\}$ et L une de ses droites en positions générales vérifient la condition d). Pour cela on va écrire l'équation générale d'une cubique contenant trois droites coplanaires (notées L, L_1 et L_2), avec L du premier type et L_1 du deuxième type. Puis on vérifie que la condition " L_2 est du deuxième type" ajoute une condition sur les coefficients du polynôme f_3 non vérifiés dans le cas général.

On note $(\lambda_{ijk})_{0 \leq i \leq j \leq k}$ les coefficients devant le trinôme $x_i x_j x_k$ dans le polynôme f_3 . On se place dans des coordonnées telles que

$$\begin{aligned} L &:= \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\}, \\ L_1 &:= \{[x_0, 0, x_2, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\} \\ L_2 &:= \{[0, x_1, x_2, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\} \end{aligned}$$

Comme toutes ces droites sont incluses dans V_3 on a :

$$\lambda_{000} = \lambda_{001} = \lambda_{011} = \lambda_{111} = \lambda_{002} = \lambda_{022} = \lambda_{222} = \lambda_{112} = \lambda_{122} = 0.$$

Toujours en utilisant le lemme 2.1.9, L est de premier type si et seulement si les trois formes linéaires apparaissant devant les coefficients en x_0^2 , x_1^2 et $x_0 x_1$ dans le polynôme f_3 sont indépendantes c'est à dire

$$L \text{ est de premier type} \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{003} & \lambda_{004} & \lambda_{005} \\ 0 & \lambda_{113} & \lambda_{114} & \lambda_{115} \\ \lambda_{012} & \lambda_{013} & \lambda_{014} & \lambda_{015} \end{pmatrix} = 3. \quad (2.16)$$

De même

$$L_1 \text{ est de deuxième type} \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{003} & \lambda_{004} & \lambda_{005} \\ 0 & \lambda_{223} & \lambda_{224} & \lambda_{225} \\ \lambda_{012} & \lambda_{023} & \lambda_{024} & \lambda_{025} \end{pmatrix} = 2. \quad (2.17)$$

Et

$$L_2 \text{ est de deuxième type} \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{113} & \lambda_{114} & \lambda_{115} \\ 0 & \lambda_{223} & \lambda_{224} & \lambda_{225} \\ \lambda_{012} & \lambda_{123} & \lambda_{124} & \lambda_{125} \end{pmatrix} = 2. \quad (2.18)$$

Comme (2.16) et (2.17) n'impliquent pas (2.18), on a montré le lemme. \square

En appliquant les lemmes 2.2.4 et 2.2.3 à $S = F_L(V_3)$ et $\Sigma_5 = F_L(V_3)/\iota_L$ on obtient

Lemme 2.2.6. *Si V_3 et L sont en position générale, un point p de Σ_5 est singulier si et seulement si $\text{rang}(M(p)) = 1$. Par ailleurs ce point est un point double ordinaire.*

Démonstration. Le lemme 2.2.3 nous dit exactement que p est une singularité de Σ_5 si et seulement si la droite correspondante dans $F_L(V_3)$ est fixée par l'involution et que dans ce cas p est un point double ordinaire. C'est à dire p est une singularité de Σ_5 si et seulement si la matrice $M(p)$ est la matrice associée à une droite double, c'est à dire si et seulement si cette matrice est de rang 1. \square

On peut tout de même vérifier par le calcul qu'au point où la matrice M est de rang 1, Σ_5 admet une singularité. Il s'agit du calcul suivant :

Vérification par le calcul. Soit f_5 un polynôme définissant Σ_5 , c'est à dire $f_5(p) := \det(M(p))$ pour tout $p \in \mathbb{P}^3$. On a

$$f_5(x_2, \dots, x_5) = x_2A(x_2, \dots, x_5) - x_4B(x_2, \dots, x_5) + Q_0(x_2, \dots, x_5)C(x_2, \dots, x_5)$$

où A , B et C sont les mineurs suivants

$$\begin{aligned} A(x_2, \dots, x_5) &= x_3P(x_2, \dots, x_5) - Q_1^2(x_2 \dots x_5) \\ B(x_2, \dots, x_5) &= x_4P(x_2, \dots, x_5) - Q_0(x_2 \dots x_5)Q_1(x_2 \dots x_5) \\ C(x_2, \dots, x_5) &= x_4Q_1(x_2, \dots, x_5) - x_3Q_0(x_2, \dots, x_5) \end{aligned}$$

On note par $g^{[i]}$ la dérivée d'un polynôme g par rapport à la variable x_i . On obtient :

$$\begin{aligned} f_5^{[2]} &= A + x_2A^{[2]} - x_4B^{[2]} + Q_0^{[2]}C + Q_0C^{[2]} \\ f_5^{[3]} &= A + x_2(x_3P^{[2]} - 2Q_1Q_1^{[2]}) - x_4(x_4P^{[2]} - Q_0^{[2]}Q_1 - Q_0Q_1^{[2]}) \\ &\quad + Q_0^{[2]}C + Q_0(x_4Q_1^{[2]} - x_3Q_0^{[2]}) \\ f_5^{[4]} &= A + (x_2x_3 - x_4^2)P^{[2]} + 2Q_0^{[2]}C + 2(x_4Q_0 - x_2Q_1)Q_1^{[2]} \end{aligned}$$

Et si le rang de la matrice en un point p vaut 1, alors $f_5^{[2]}(p) = 0$ et on vérifie qu'il en est de même pour les autres dérivées partielles.

On peut désormais montrer la proposition 2.2.2.

Démonstration de la proposition 2.2.2. Soit V_3 une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^5 et L une de ses droites. On choisit L et V_3 de sorte que les conditions de la proposition 2.2.4 soient respectées. Comme précédemment on note Π_L l'unique plan tangent à V_3 le long de L . On rappelle que la variété Σ_5 est définie comme le quotient $F_L(V_3)/\iota_L$ et que l'on a choisi des coordonnées de tel sorte que

$$L := \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, 0] \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\}.$$

On rappelle également que, comme L est du premier type, une équation de V_3 est de la forme : $V_3 = \{f_3 = 0\}$ avec

$$f_3 = x_2x_0^2 + x_3x_1^2 + 2x_4x_0x_1 + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5).$$

Et donc que Σ_5 est définie comme $\{p = [x_2, \dots, x_5] \in \mathbb{P}^3 \mid \det(M(p)) = 0\}$ avec

$$M(p) = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & Q_0(p) \\ x_4 & x_3 & Q_1(p) \\ Q_0(p) & Q_1(p) & P(p) \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 2.2.6, on compte le nombre de points p pour lesquels $\text{rang } M(p) = 1$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on suppose qu'aucune droite de V_3 et fixée par l'involution ne coupe L en $p_0 := [1, 0, 0, 0, 0]$. Par la remarque 2.2.1, cela est équivalent à dire que le 3-espace H_{p_0} ne contient aucune droite de $F(V_3)$ fixée par l'involution. Sur Σ_5 cela implique que la droite de \mathbb{P}^3 définie par $l := \{x_2 = x_4 = 0\}$ ne contient aucun point double de Σ_5 (sauf peut-être le point $[0, 0, 0, 1]$ qui est l'image de Π_L par la projection). On se ramène donc à calculer le nombre de points de $\mathbb{P}^3 \setminus \{l\}$ pour lesquels $\text{rg}(M(p)) = 1$, de sorte que l'annulation de tous les mineurs 2×2 de $M(p)$ devient équivalent à

$$\begin{cases} x_2x_3 - x_4^2 = 0 & (2.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2Q_1 - x_4Q_0 = 0 & (2.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2P - Q_0^2 = 0 & (2.21) \end{cases}$$

La première ligne de ce système correspond à l'équation d'une surface quadrique singulière (ie un cône) noté Q et la seconde ligne est celle d'une surface cubique de \mathbb{P}^3 que l'on note X_3 . La troisième ligne est l'équation d'une surface quartique notée X_4 . L'intersection $Q \cap X_3$ est constituée de la droite l et d'une courbe de degré 5 notée par C_5 . C_5 vérifie

$$C_5 = \{[x_2, x_3, x_4, x_5] \mid \text{rang} \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & Q_0 \\ x_4 & x_3 & Q_1 \end{pmatrix} = 1\}.$$

C_5 coupe donc l en trois points : le sommet s de Q , et les points P_1 et P_2 données par $x_2 = x_4 = Q_0 = 0$. Par hypothèse les points P_1 et P_2 sont lisses. On a donc : si $p \notin L$, p est un point double de Σ_5 si et seulement si il appartient à l'intersection de la courbe C_5 avec la surface quartique X_4 . Cette intersection est constituée de 20 points (comptés avec multiplicité). Mais celle-ci contient les points P_1 et P_2 . Ces points doivent être comptés avec multiplicité 2 dans l'intersection $C_5 \cap X_4$. En effet l'intersection $(l \cup C_5) \cap X_4$ est constitué de 24 points comptés avec multiplicité. Comme $X_4 \cap l = \{P_1, P_2\}$ on a bien $\text{mult}_{P_1}(C_5, X_4) = \text{mult}_{P_2}(C_5, X_4) = 2$. Il reste donc 16 points comptés avec multiplicité et non situés sur la droite l qui sont points doubles de Σ_5 . Pour un choix général des formes quadratiques Q_0, Q_1 et de la cubique P , toutes ces multiplicités valent 1. En admettant temporairement que le sommet s est un point lisse de Σ_5 on a donc démontré la proposition. \square

Remarque. D’après la remarque 2.1.12, toute droite de Q coupe la courbe C_5 en au plus 2 points.

Lemme 2.2.7. *Sous les conditions de la proposition 2.2.4, le sommet s de Q est un point lisse de Σ_5 .*

Démonstration. Supposons que s soit un point double de Σ_5 . Nécessairement, $\text{rang}(M(s)) = 1$ et donc $Q_0(s) = Q_1(s) = 0$. Et $P(s) \neq 0$. Mais dans ce cas on vérifie que la droite de projection sur V_3 est fixée par l’involution, c’est à dire que Π_L intersecte V_3 le long de L avec multiplicité 3. En effet : dans \mathbb{P}^5 on a

$$\Pi_L = \{[x_0, \dots, x_5] \mid x_2 = x_3 = x_4 = 0\}.$$

Et donc

$$V_3 \cap \Pi_L = \{[x_0, x_1, 0, 0, 0, x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid P(0, 0, 0, 0, x_5) = 0\} = 3L.$$

s est donc un point lisse de Σ_5 . □

Désormais nous allons modifier nos hypothèses sur la cubique $V_3 \subset \mathbb{P}^5$ afin d’obtenir la surface quintique de Togliatti (i.e. celle avec 31 nœuds) c’est à dire montrer le théorème 2.2.8. Soit donc V_3 une hypersurface cubique irréductible de \mathbb{P}^5 avec cette fois-ci possiblement des singularités isolées de type A_1 seulement et soit L une de ses droites. Nous supposons que les hypothèses de la proposition 2.2.4 sont encore respectées et que Q_L ne contient aucun point double de V_3 .

Théorème 2.2.8. *Soit V_3 une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 générale ayant comme uniques singularités n points doubles ordinaires. Si L est une de ses droites générales alors la projection de centre L , restreinte à V_3 , définit un fibré en coniques sur \mathbb{P}^3 . Le lieu où les fibres dégèrent est une surface quintique de \mathbb{P}^3 . Cette quintique admet $16 + n$ points doubles.*

Démonstration. Grâce à la proposition 2.2.2, il suffit de montrer que dès lors que V_3 contient une singularité l’image de celle-ci par la projection de sommet la droite L reste une singularité sur Σ_5 . Sans pertes de généralités supposons que $p = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \in \mathbb{P}^5 \setminus Q_L$ soit un point double de V_3 et montrons que $p' = [0, 0, 1, 0]$ est point double de Σ_5 . $V_3 = V(f_3)$ avec

$$f_3(x_0, \dots, x_5) = x_2x_0^2 + x_3x_1^2 + 2x_4x_0x_1 + 2Q_0(x_2, \dots, x_5)x_0 + 2Q_1(x_2, \dots, x_5)x_1 + P(x_2, \dots, x_5)$$

On a $P(p') = 0$ (puisque $p \in V_3$) et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x_0}(p) &= 2Q_0(0, 0, 1, 0) = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(p) &= 2Q_1(0, 0, 1, 0) = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(p) &= \frac{\partial P}{\partial x_i}(0, 0, 1, 0) = 0 \text{ pour tout } i \geq 2\end{aligned}$$

Et si $\Sigma_5 = V(f_5)$, on a :

$$f_5 = x_2(x_3P - Q_1^2) - x_4(x_4P - Q_0Q_1) + Q_0(x_4Q_1 - Q_0x_3)$$

et f_5 a un point double en p' . □

Par ailleurs comme Togliatti le montre dans [Tog], une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 ne peut avoir plus de 15 points doubles et cette borne est atteinte : nous en concluons que nous pouvons construire une surface quintique de \mathbb{P}^3 contenant 31 nœuds. Une construction précise de la cubique de \mathbb{P}^5 à 15 nœuds est donnée dans [Kal86].

2.3 Invariant numériques de la résolution de Σ_5

Cette section a pour but de calculer les invariants principaux de la surface X , résolution minimale de Σ_5 , où Σ_5 est une quintique de Togliatti, c'est à dire calculer le diamant de Hodge associé à X .

Pour cela on s'appuie sur le résultat suivant de M.F. Atiyah [Ati58] :

Théoreme 2.3.1. *Soit X et Y deux surfaces algébriques de degré n dans \mathbb{P}^3 telles que Y soit lisse et X n'aie que des points doubles ordinaires comme singularités. Alors \widehat{X} , résolution minimale de X , est difféomorphe à Y .*

Proposition 2.3.2. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et X sa résolution minimale. Alors le diamant de Hodge associé à X est :*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & & 4 & & 45 & & 4 \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Démonstration. D'après le théorème énoncé précédemment, le diamant de Hodge de X sera le même que celui associé à une surface quintique lisse de \mathbb{P}^3 . Soit S_5 une telle surface. On note par K_{S_5} le diviseur canonique de S_5 . On a

$$\mathcal{O}_{S_5}(K_{S_5}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_{S_5}. \quad (2.22)$$

et donc $K_{S_5}^2 = 5$. Par ailleurs la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_{S_5} \rightarrow 0$$

donne directement $H^1(S_5, \mathcal{O}_{S_5}) = 0$. (2.22) et

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{S_5}(1) \rightarrow 0$$

nous dit que $h^{2,0}(S_5) = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ et $h^{2,0}(S_5) = \binom{4}{1} = 4$. Puis

$$\chi(\mathcal{O}_{S_5}) = 5. \quad (2.23)$$

Par ailleurs grâce à la formule de Noether (voir par exemple [Bea10, p. 14, I]), on a

$$\chi(\mathcal{O}_{S_5}) = \frac{1}{12}(K_{S_5}^2 + \chi_{top}(S_5))$$

où $\chi_{top}(S_5) = \sum_i (-1)^i b_i$ et $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S_5, \mathbb{R})$. (2.23) donne

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 55.$$

La dualité de Poincaré nous assure que $b_0 = b_4 = 1$ ainsi que $b_1 = b_3$. Comme S_5 est aussi une variété kählérienne, on a $2h^1(\mathcal{O}_{S_5}) = b_1 = 0$ puis $b_2 = 53$. Comme $b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}$ on a bien $h^{1,1} = 45$ ce qui conclut la démonstration. \square

2.4 Configuration des points doubles sur Σ_5 et ensembles pairs

2.4.1 Définition et premières propriétés

Nous avons vu dans les sections précédentes comment construire une surface de degré 5 dans \mathbb{P}^3 ayant 31 points doubles ordinaires. De cette construction, on a observé que, parmi ces 31 points, 16 étaient situés sur un cône tangent à la surface, appelé cône de contact. Nous notons par

$$Sing(\Sigma_5) := \{p_1, \dots, p_{31}\}$$

l'ensemble des points doubles de la quintique. L'objet de cette section est de comprendre plus en détails la configuration de ces points doubles. Pour cela, on va avoir besoin de travailler avec la surface résolue X explicitée auparavant. On rappelle que nous sommes

dans la situation suivante :

$$\varphi_{K_X} : X \rightarrow \Sigma_5$$

où X est une surface lisse et φ_{K_X} son application canonique.

A chaque point singulier p_i sur Σ_5 correspond une courbe rationnelle sur X , notée ici E_i et qui vérifie $K_X.E_i = 0$ et $E_i^2 = -2$.

On rappelle également que X est une surface de type générale et que son diamant de Hodge est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 0 & 0 \\ 4 & 45 & 4 \\ & 0 & 0 \\ & & 1 \end{array} \quad (2.24)$$

De plus K_X est donné par le tiré en arrière d'une section hyperplane : $\mathcal{O}_X(K_X) = \varphi_{K_X}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Nous aimerions établir le fait suivant :

Proposition 2.4.1. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti. Alors parmi les 31 singularités de Σ_5 , il y a 31 sous-ensembles de 16 points tels que, pour chacun de ces sous-ensembles, il existe un cône de contact à la surface et passant par les points considérés. Cette configuration peut être lue dans $VISH(X)$.*

Dans cette section nous allons voir :

- A chaque tel sous-ensemble de 16 points correspond un diviseur D dans $Pic X$ vérifiant certaines propriétés.
- En s'appuyant sur l'article de A. Beauville, que sur une quintique de Togliatti, il y a 31 tels diviseurs.

Dans la section suivante, nous vérifierons qu'à chacun de ces diviseurs correspond effectivement un cône de contact à la quintique le long d'une courbe *lisse* qui passe par 16 points doubles. Dans le chapitre 3, nous verrons que $VISH(X)$ détermine cette collection de cônes de contact, c'est à dire on aura montré la proposition 2.4.1. La proposition 2.4.1 sera reformulée sous la forme :

Proposition (3.2.4.). *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et soit X sa résolution minimale. Alors $VISH(X)$ détermine la collection $(Q_v)_{v \in V_X}$ des cônes de contact à Σ_5 . Chacun de ces cônes quadriques à la particularité de contenir les 16 points doubles de l'ensemble pair associé.*

L'espace V_X mentionné est défini dans cette présente section. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, 31\}$ tel que pour tout $i \in I$, $p_i \in Q$ où Q est un cône de contact avec Σ_5 . Par construction de Σ_5 , un tel sous-ensemble existe. Considérons \mathcal{C}_Q , la courbe de tangence

entre Q et Σ_5 . Il s'agit d'une courbe de degré 5 sur la quintique qui n'est pas donnée par les zéros d'une section hyperplane. Par contre en tant que diviseur, on a

$$2\mathcal{C}_Q \in |\mathcal{O}_{\Sigma_5}(2H)|.$$

Dans la section suivante nous expliquons pourquoi cette courbe est lisse (proposition 2.5.9) mais admettons ce fait pour le raisonnement suivant. Cette courbe étant lisse, pour tout i dans I , $\text{mult}_{p_i}(\mathcal{C}_Q) = 1$. L'éclatement de Σ_5 au points $(p_i)_{i=1\dots 31}$ donne l'égalité suivante dans $\text{Pic } X$, où par abus de notation on a identifié les diviseurs avec les faisceaux inversibles qui leur sont associés (et donc l'égalité est à équivalence linéaire près) :

$$2K_X = 2\Gamma_Q + \sum_{i \in I} E_i, \tag{2.25}$$

où Γ_Q désigne la transformée stricte de \mathcal{C}_Q sur X . En particulier, en posant $D_Q := K_X - \Gamma_Q$, on obtient

$$\sum_{i \in I} E_i = 2D_Q.$$

Ceci nous mène à poser la définition suivante :

Définition 2.4.2. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, 31\}$. On dit que $(p_i)_{i \in I} \subset \text{Sing}(\Sigma_5)$ est un ensemble pair de points doubles s'il existe $D \in \text{Pic } X$, tel que

$$\sum_{i \in I} E_i = 2D$$

ou de manière équivalente on a

$$\sum_{i \in I} E_i = 0 \text{ dans } H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Il s'agit désormais de montrer que sur une quintique de Togliatti, il y a 31 ensembles pairs de points doubles et chacun de ces sous-ensembles est constitué de 16 points. La clé est d'étudier l'espace vectoriel que l'on note ici par V_X et qui est défini par

$$V_X := \ker \psi$$

où

$$\begin{aligned} \psi &: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{31} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ (v_i)_{i=1\dots 31} &\mapsto \sum_{i, v_i \neq 0} E_i. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Cet espace vectoriel est en bijection avec l'ensemble des ensembles pairs de points doubles sur Σ_5 . On veut calculer sa dimension (= 5) pour voir que sur une quintique de Togliatti, il y a 31 ensembles pairs de points doubles. La suite de cette section a pour objectif d'expliquer les différentes étapes menant au théorème suivant :

Théoreme 2.4.3 ([Bea79b]). $\dim V_X = 5$.

La démonstration de ce théorème repose sur

Proposition 2.4.4. *Soit $(p_i)_{i \in I}$ un ensemble pair de points doubles sur une surface quintique de \mathbb{P}^3 (non nécessairement de Togliatti). Si cette surface ne contient que des points doubles isolés comme singularités, alors le cardinal de I vaut 16 ou 20.*

Pour comprendre comment cette proposition implique le théorème 2.4.3, on a besoin de résultats concernant la théorie des codes.

Définition 2.4.5. On appelle *code* tout sous-espace vectoriel V de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Si $v \in V$ est un vecteur de V , on appelle poids de v , le nombre de ses composantes non nulles. Si tous les vecteurs de V ont le même poids, on appelle cette quantité le poids de V .

L'espace vectoriel V_X est donc un code et la proposition 2.4.4 nous dit que tous les vecteurs de V_X sont de poids 16 ou 20. On veut maintenant comprendre le lien entre la dimension d'un code V et les poids des vecteurs $v \in V$ pour montrer le théorème 2.4.3. Pour cela on introduit la notion de *code dual*. Si V est un code, on considère

$$\Omega := \{f \in V^*, f \neq 0\},$$

l'ensemble des formes linéaires non nulles sur V . On a alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} V &\rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^d-1} \\ v &\mapsto (f(v))_{f \in \Omega} \end{aligned} \tag{2.27}$$

où $d = \dim V$.

Définition 2.4.6. L'image de l'application (2.27) est un code, appelé code dual à V . Il est noté par C_d .

A v fixé, parmi les $2^d - 1$ formes de Ω , seules 2^{d-1} ne s'annulent pas en v . Autrement dit, le poids de C_d vaut 2^{d-1} . On va montrer comment la proposition 2.4.4 entraîne que V_X est isomorphe à son code dual. Pour cela on admet le résultat suivant :

Lemme 2.4.7 ([Bea79b]). *Soit $V \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ un code de dimension d de sorte que tous les vecteurs de V soient de poids strictement supérieurs à $\frac{n}{2}$. Alors $n \geq 2^d - 1$, avec égalité si et seulement si V isomorphe à son code dual C_d .*

Voyons comment du lemme 2.4.7 et de la proposition 2.4.4, on en déduit le théorème.

Démonstration du théorème 2.4.3. Du diamant (2.24), on déduit $\dim H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 53$. Par construction, $\text{Im } \psi$ est un espace totalement isotrope pour la forme d'intersection. On en déduit que $\dim(\text{Im } \psi) \leq 26$ puis $\dim V_X \geq 5$. On affirme que $\dim V_X = 5$. On

raisonne par l'absurde. Supposons que $\dim V_X \geq 6$. On applique le lemme 2.4.7 à V_X . Dans ce cas $n = 31$. La proposition 2.4.4 nous dit que tous les poids de V_X sont 16 ou 20 et sont donc strictement supérieurs à $\frac{n}{2}$. Le lemme 2.4.7 donne $31 \geq 2^6 - 1$ ce qui est une contradiction. On a bien $\dim V_X = 5$. \square

Corollaire 2.4.8. *Sur une quintique de Togliatti, tout ensemble pair de points doubles contient 16 éléments et il y a 31 tels ensembles.*

Démonstration. Le nombre d'ensembles pairs est donné par le nombre de vecteurs non nuls de V_X . Celui-ci est de dimension 5. On a bien $31 = 2^5 - 1$. Par ailleurs, la deuxième partie du lemme 2.4.7 implique que V_X est isomorphe à son code dual. Tous ses vecteurs sont donc de poids $2^4 = 16$. \square

2.4.2 Cardinal d'un ensemble pair de points doubles

Nous continuons cette section en expliquant les points clés de la démonstration de la proposition 2.4.4. Tout d'abord on a le lemme suivant ([Bea79a] ou [Bar+04] par exemple) :

Lemme 2.4.9. *Soit X une surface complexe lisse. Soit C une courbe. Il existe un diviseur $D \in \text{Pic } X$, tel que $C = 2D$ si et seulement si X admet un revêtement double \widehat{X} ramifié le long de C .*

Soit S_5 satisfaisant les conditions de la proposition 2.4.4. On note par n le nombre de points doubles dans l'ensemble pair considéré et on applique le lemme précédent à la surface résolue de S_5 pour démontrer la proposition 2.4.4. C'est à dire, on considère le revêtement double

$$\pi : \widehat{X} \rightarrow X$$

ramifié le long des courbes exceptionnelles $\bigcup_{i=1}^n E_i$. La stratégie pour démontrer la proposition est la suivante.

- L'entier n est intrinsèquement lié aux propriétés de la surface \widehat{X} . On calcule donc les propriétés numériques liées à cette surface, à savoir la caractéristique d'Euler de son faisceau structural et l'auto-intersection $K_{\widehat{X}}^2$. Ces quantités dépendent de n et on remarque alors que n est divisible par 4.
- \widehat{X} n'est pas une surface minimale puisque l'image réciproque des (-2) courbes associées à l'ensemble pair sont d'auto-intersection (-1) . On utilise alors le théorème de Castelnuovo pour contracter \widehat{X} sur une surface minimale (et lisse), notée X_ϵ . On calcule alors les différents invariants numériques de cette surface et on remarque que $K_{X_\epsilon}^2$ ne dépend pas de l'entier n .
- Suivant les valeurs de n , l'application canonique de la surface X_ϵ est birationnel ou non. On montre que pour $n \leq 16$ c'est bien le cas. On utilise alors l'inégalité de

Castelnuovo pour les surfaces minimales dont l'application canonique est birationnel, à savoir,

$$K_{X_\epsilon}^2 \geq 3\chi(\mathcal{O}_{X_\epsilon}) - 10. \quad (2.28)$$

On déduit de cette inégalité que $n \geq 16$. Le cas $n > 20$ n'est pas expliqué dans cette thèse.

En vue de la troisième étape expliquée ci dessus on rappelle que :

Lemme 2.4.10. *Soit $\pi : \widehat{X} \rightarrow X$ un revêtement double ramifié le long d'un diviseur pair. Soit φ_{K_X} et $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$, leurs applications canoniques respectives. Si φ_{K_X} est birationnelle, et si*

$$h^0(\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}})) > h^0(\mathcal{O}_X(K_X))$$

alors $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$ est birationnelle.

Démonstration. Sur \widehat{X} , toute section de $\pi^*\mathcal{O}_X(K_X)$ fournit une section de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}})$. Comme φ_{K_X} est birationnelle, il existe un ouvert \widehat{U} dense dans \widehat{X} , pour lequel ces sections séparent tous les points $\hat{p} \neq \hat{p}' \in \widehat{U}$ non situés sur une même fibre de π . L'hypothèse $h^0(\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}})) > h^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ nous dit justement qu'il existe des sections de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}})$ qui séparent les points d'une même fibre. On a bien $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$ birationnelle. \square

Démonstration de la proposition 2.4.4, (voir [Bea79b] pour les détails). Soit X la surface résolue de S_5 . Soit n le nombre de points dans l'ensemble pair de points doubles considéré. Soit D le diviseur associé à cet ensemble pair. On a $\pi_*\mathcal{O}_{\widehat{X}} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D)$ et

$$K_{\widehat{X}} = \pi^*(K_X + D). \quad (2.29)$$

Par ailleurs on a

$$D^2 = \frac{1}{4}(-2n) = -\frac{n}{2} \quad (2.30)$$

Et le théorème de Riemann-Roch appliqué au faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ donne

$$\chi(\mathcal{O}_X(-D)) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(D^2 + K_X.D) = 5 - \frac{n}{4} \quad (2.31)$$

où on utilise le fait que $K_X.D = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_X) = 5$. (??) et (2.31) donnent

$$\chi(\mathcal{O}_{\widehat{X}}) = 10 - \frac{n}{4}. \quad (2.32)$$

En particulier n est divisible par 4. Par ailleurs, (2.29) donne

$$K_{\widehat{X}}^2 = 2(5 - \frac{n}{4}) = 10 - n. \quad (2.33)$$

car π est un revêtement double. Maintenant sur \widehat{X} , les courbes $\tilde{E}_i := \pi^{-1}(E_i)$ sont des courbes rationnelles d'auto-intersection -1 et sont les seules. On a n telles courbes qui se

contractent via un morphisme birationnel

$$\epsilon : \widehat{X} \rightarrow X_\epsilon$$

sur une surface lisse (théorème de contraction de Castelnuovo). On note par K_{X_ϵ} le diviseur canonique de X_ϵ . Si $|L|$ est un système linéaire sur l'une de ces surfaces, φ_L désigne l'application induite par le système $|L|$. L'image de X_ϵ par $\varphi_{K_{X_\epsilon}}$ est notée S .

On se retrouve donc dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi_{K_{\widehat{X}}} & \\
 & \curvearrowright & \\
 \sum_{i \in I} \tilde{E}_i \subset \widehat{X} & \xrightarrow{\epsilon} & X_\epsilon \ni (\tilde{p}_i)_{i \in I} \xrightarrow{\varphi_{K_{X_\epsilon}}} S \\
 \downarrow \pi & & \\
 \sum_{i \in I} E_i \subset X & \xrightarrow{\varphi_{K_X}} & S_5 \ni (p_i)_{i \in I}
 \end{array} \tag{2.34}$$

Sur \widehat{X} on a :

$$|\epsilon^*(K_{X_\epsilon})| = |K_{\widehat{X}} - \sum_{i \in I} \tilde{E}_i|. \tag{2.35}$$

Comme ϵ est birationnel (2.35) donne $(K_{X_\epsilon})^2 = K_{\widehat{X}}^2 + n$. Et (2.33) implique

$$(K_{X_\epsilon})^2 = 10. \tag{2.36}$$

Mais on a aussi

$$\chi(\mathcal{O}_{X_\epsilon}) = \chi(\mathcal{O}_{\widehat{X}}) = 10 - \frac{n}{4} \tag{2.37}$$

Il s'agit de comprendre pour quelles valeurs de n , $\varphi_{K_{X_\epsilon}}$ est birationnel pour appliquer l'inégalité (2.28). On affirme que cette condition est vérifiée dès que $h^0(\mathcal{O}_{X_\epsilon}(K_{X_\epsilon})) > h^0(\mathcal{O}_X(K_X))$. En effet on a $h^0(\mathcal{O}_{X_\epsilon}(K_{X_\epsilon})) = h^0(\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}}))$ et $\varphi_{K_{X_\epsilon}}$ est birationnel si et seulement si $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$ est birationnel. L'affirmation est donc vérifiée par le lemme 2.4.10. Supposons que $n \leq 16$. Dans ce cas, (2.37) donne $\chi(\mathcal{O}_{X_\epsilon}) \geq 6$ et donc

$$h^0(\mathcal{O}_{X_\epsilon}(K_{X_\epsilon})) \geq 5 + h^1(\mathcal{O}_{X_\epsilon})$$

Comme $H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ est de dimension 4, on en déduit que $\varphi_{K_{X_\epsilon}}$ est birationnelle. On peut alors appliquer l'inégalité de Castelnuovo (2.28). (2.36) et (2.37) donnent

$$10 \geq 20 - \frac{3n}{4}$$

puis comme n est divisible par 4, $n \geq 16$. Par la suite l'auteur montre que n ne peut être

plus grand que 20 strictement et conclut le théorème. \square

2.4.3 Conséquences du théorème 2.4.3 et de la proposition 2.4.4.

La démonstration ci-dessus est riche en nouvelles informations concernant la géométrie des ensembles pairs de points doubles. On va maintenant préciser ce que l'on peut en déduire dans notre cas. C'est à dire le cas où $S_5 = \Sigma_5$ est une quintique de Togliatti. On rappelle que Σ_5 est obtenue grâce à la variété incidente des droites d'une cubique de \mathbb{P}^5 comportant 15 points double ordinaires :

$$\Sigma_5 = F_L(V_3)/\iota_L.$$

$F_L(V_3)$ a les propriétés suivantes :

- $F_L(V_3)$ est ramifié au dessus de 16 points doubles de Σ_5 qui forment un ensemble pair de points doubles.
- Les points de branchement correspondants sur $F_L(V_3)$, c'est à dire ceux fixés par l'involution ι_L sont lisses.
- C'est une surface comportant 30 points doubles ordinaires.

Soit $v \in V_X$ un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 . *A priori*, on ne sait pas que cet ensemble pair provient d'une projection à la Togliatti. Les éléments contenus dans la démonstration de la proposition 2.4.4 nous donnent néanmoins un début de réponse. On note \widehat{X}_v le revêtement double au dessus de X correspondant à l'ensemble pair v . \widehat{X}_v est entièrement déterminé par v . On note S_v son image par l'application canonique. Tout d'abord comme on est dans le cas $n = 16$, $\varphi_{K_{\widehat{X}_v}}$ est birationnel, on obtient une application induite (notée encore π) qui est un revêtement double entre S_v et Σ_5 . En d'autre termes, on peut compléter le diagramme (2.34) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi_{K_{\widehat{X}_v}} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \tilde{E}_v \subset \widehat{X}_v & \xrightarrow{\epsilon} & X_{v,\epsilon} \ni \tilde{p}_v & \xrightarrow{\varphi_{K_{X_{v,\epsilon}}}} & S_v \\
 \downarrow \pi & & & & \downarrow \pi \\
 E_v \subset X & \xrightarrow{\varphi_{K_X}} & & & S_5 \ni p_v
 \end{array} \tag{2.38}$$

où p_v désigne l'ensemble des points de l'ensemble pair v et E_v les (-2) -courbes correspondantes sur X . Dans ce cas sur \widehat{X}_v , on a : 16 (-1) -courbes et 30 (-2) -courbes qui correspondent aux points doubles de Σ_5 n'appartenant pas à l'ensemble pair v . La surface S_v vérifie

- S_v est de type général.

- S_v admet donc 30 points doubles ordinaires. Ces points sont l'image par $\varphi_{K_{\widehat{X}_v}}$ des (-2) -courbes sur \widehat{X}_v .
- S_v est ramifié au-dessus de $p_v \subset \Sigma_5$.

Voici ce qu'on aimerait montrer

Proposition 2.4.11. *Pour tout vecteur non nul $v \in V_X$, il existe une paire $(V_{3,v}, L_v)$ où $V_{3,v}$ est une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 comportant 15 points doubles ordinaires et où L_v est une droite de $V_{3,v}$. Cette paire vérifie*

$$S_v = F_{L_v}(V_{3,v})$$

où S_v est la surface construite auparavant.

Supposons maintenant que l'on choisisse $v \in V_X$ de sorte que l'on sait que cet ensemble pair provient d'une projection à la Togliatti. Alors comme S_v est entièrement déterminée par v , on obtient immédiatement une paire $(V_{3,v}, L_v)$ satisfaisant les conditions de 2.4.11. La proposition 2.4.11 est donc équivalente à

Théoreme 2.4.12. *Tout ensemble pair de points doubles $v \in V_X$, provient d'une projection à la Togliatti.*

La preuve de ce théorème est brièvement expliquée à la section 2.5.

Nous terminons cette section par expliciter les différents invariants numériques donnés dans la démonstration de la proposition 2.4.4 dans le cas $n = 16$. (2.32) donne $\chi(\mathcal{O}_{\widehat{X}_v}) = \chi(\mathcal{O}_{X_{v,\epsilon}}) = 6$ et donc $h^0(\mathcal{O}_{X_{v,\epsilon}}(K_{X_{v,\epsilon}})) \geq 5$. Par ailleurs comme S_v n'est pas une surface réglée, on peut appliquer l'inégalité [Bea79a, Theorem 5.5]

$$K_{X_\epsilon}^2 \geq 3h^0(\mathcal{O}_{X_{v,\epsilon}}(K_{X_{v,\epsilon}})) - 7.$$

Le terme à gauche de cette inégalité vaut 10. On obtient

$$h^0(\mathcal{O}_{\widehat{X}_v}(K_{\widehat{X}_v})) = h^0(\mathcal{O}_{X_{v,\epsilon}}(K_{X_{v,\epsilon}})) = 5. \quad (2.39)$$

Remarque. S_v étant l'image par l'application canonique de \widehat{X}_v , on obtient que $S_v \subset \mathbb{P}^4$.

2.4.4 Unicité de la courbe de contact

Nous terminons cette section par démontrer un résultat essentiel par la suite.

Proposition 2.4.13. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et soit X sa résolution minimale. Si v est un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 et D_v son diviseur associé,*

$$D_v = \frac{1}{2}E_v$$

on a

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) = 1 \text{ et } h^1(\mathcal{O}_X(D_v)) = 0 \quad (2.40)$$

Démonstration. On applique la formule de projection pour le revêtement correspondant à $v : \pi : \hat{X} \rightarrow X$. Comme ici v est fixé on n'écrit plus \hat{X}_v mais simplement \hat{X} . On a

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\hat{X}} \otimes \pi^*(\mathcal{O}_X(K_X + D_v))) = \pi_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \otimes \mathcal{O}_X(K_X + D_v) \quad (2.41)$$

Puisque $\pi_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D_v)$ et $\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}}) = \pi^*(\mathcal{O}_X(K_X + D_v))$, (2.41) donne

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}})) = \mathcal{O}_X(K_X + D_v) \oplus \mathcal{O}_X(K_X).$$

Par ailleurs π est un morphisme fini, on a donc :

$$H^0(\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}})) = H^0(X, \pi_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}}))) = H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D_v)) \oplus H^0(\mathcal{O}_X(K_X)). \quad (2.42)$$

On utilise l'égalité (2.39) et le fait que $h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = 4$ pour en déduire

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X + D_v)) = 1.$$

Le calcul effectué dans la démonstration de la proposition 2.4.4 montre que $\chi(\mathcal{O}_X(D_v)) = 1$. Puisque D_v n'est pas effectif, on a

$$-h^1(\mathcal{O}_X(D_v)) + h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) = 1.$$

et donc

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) \geq 1.$$

Mais $2D_v$ est un diviseur effectif et donc $h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) \leq h^0(\mathcal{O}_X(K_X + D_v)) = 1$. On a bien $h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) = 1$ et $h^1(\mathcal{O}_X(D_v)) = 0$. \square

Corollaire 2.4.14. *Soit v un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 . Il existe une unique courbe dans le système linéaire $|K_X - D_v|$.*

Démonstration. Tout courbe dans ce système linéaire est donnée par le lieu d'annulation des sections globales de $\mathcal{O}_X(K_X - D_v)$. Par la proposition 2.4.13, toutes ces sections ont même lieu d'annulation. \square

Remarque. Pour le corollaire, nous n'avons pas eu besoin de la deuxième partie de la proposition 2.4.13. L'annulation de $H^1(\mathcal{O}_X(K_X - D_v))$ est par contre utile pour montrer le théorème 2.4.12.

2.5 Quelques propriétés des variétés déterminantales et des courbes de contact

2.5.1 Tout ensemble pair sur Σ_5 provient d’une projection à la Togliatti

Cette section a pour but d’expliquer brièvement quelques étapes de la démonstration du théorème 2.4.12 et d’en tirer quelques conséquences. Les résultats de cette section sont issus de [Cat81]. Plus précisément l’auteur montre le théorème suivant.

Théorème 2.5.1. *Soit S_5 une surface quintique de \mathbb{P}^3 (non nécessairement de Togliatti). Si S_5 admet un ensemble pair de points doubles alors S_5 est une variété déterminantale.*

Commençons par expliquer comment le théorème 2.5.1 implique le théorème 2.4.12. Ce dernier affirme que tout ensemble pair sur Σ_5 provient d’une projection à la Togliatti. Ceci est équivalent à dire

Théorème 2.5.2. *Pour tout ensemble pair $v \in V_X$, il existe 3 formes linéaires h_1, h_2, h_3 , 2 formes quadriques Q_1 et Q_2 et un polynôme homogène de degré 3 tel que $\det M(p) = 0$ définit la surface Σ_5 où*

$$M(p) = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & Q_1 \\ h_3 & h_2 & Q_2 \\ Q_1 & Q_2 & P \end{pmatrix}$$

et les points de l’ensemble pair v sont exactement ceux qui vérifient $\text{rang}(M(p)) = 1$.

Le point clé est que le déterminant construit dans le théorème 2.5.1 vérifie automatiquement les conditions du théorème 2.5.2.

Définition 2.5.3. Soit S une surface complexe de \mathbb{P}^3 . On dit que S est une surface symétrique si son équation peut-être mise sous la forme d’un déterminant d’une matrice symétrique M de taille $n \times n$ et dont les entrées sont des polynômes homogènes.

Une surface symétrique contient donc des points doubles donnés par l’annulation des mineurs d’ordre $n - 1$. Si $(p_i)_{i \in I}$ est un ensemble pair de points doubles provenant de cette construction on dit que cet ensemble est symétrique.

Les étapes pour montrer le théorème 2.5.1 sont les suivantes.

- A un ensemble pair de points doubles, on peut construire un revêtement double de S_5 ramifié au-dessus des points doubles de l’ensemble pair considéré.
- Sur le revêtement $\pi : S \rightarrow S_5$, on considère $R := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, \pi^*(\mathcal{O}_S(m)))$. L’involutions induite par le revêtement partage R en deux sous espace propres : une partie invariante R^+ et une partie anti-invariante R^- . Et on a

$$R = R^+ \oplus R^-$$

où $R^+ = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S_5, \mathcal{O}_{S_5}(m))$. Le point clé ici est que R^- est déterminé par l'ensemble pair considéré et on voit R^- comme un $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ -module gradué. Plus précisément on a

$$R^- \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X - D))$$

où l'on a repris les notations du paragraphe précédent, c'est à dire X est la résolution minimale de S_5 et D est le diviseur sur X tel que $2D$ soit la somme des diviseurs exceptionnels correspondant à l'ensemble pair considéré. On a alors :

Proposition 2.5.4. *L'ensemble pair de points doubles est symétrique si et seulement si R^- est un $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ -module de Cohen-Macaulay.*

— La condition d'être Cohen-Macaulay pour R^- signifie $H^1(X, \mathcal{O}_{K_X}(D)) = 0$.

La compréhension de la preuve de la proposition 2.5.4, fait appel au lemme suivant

Lemme 2.5.5. *Soit A est un anneau noethérien intègre et factoriel. Soient L, M, N trois A -modules de type fini tels que*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0. \tag{2.43}$$

avec $N \neq (0)$ et L et M libres. Alors $\dim N = \dim A - 1$ si et seulement si $\text{rang } L = \text{rang } M$.

Démonstration. On rappelle que la dimension d'un module N est donné par la dimension de $A/\text{Ann}(N)$, c'est à dire par la longueur de la plus grande chaîne d'idéaux premiers contenant $\text{Ann}(N)$. On montre d'abord $\dim N = (\dim A) - 1 \Leftrightarrow \text{rang } L = \text{rang } M$.

Par hypothèse comme $\text{rang } L = \text{rang } M =: n$ l'injection dans (2.43) est donnée par la multiplication par un n -uplet (a_1, \dots, a_n) . On a donc

$$N \cong A^n / (a_1, \dots, a_n)$$

puis

$$\text{Ann}(N) = \bigcap_{i=1}^n (a_i)$$

Comme $N \neq 0$, il existe au moins un terme parmi les a_i qui ne soit pas inversible. On peut donc écrire

$$\text{Ann}(N) = \bigcap_{i=1}^k (a_i)$$

de sorte que pour tout $1 \leq i \leq k, (a_i) \neq A$. **Affirmation :** $\text{Ann}(N)$ ne contient aucun idéal premier strictement (autre que l'idéal nul).

En effet supposons qu'il existe $\mathfrak{p} \subset \bigcap_{i=1}^k (a_i)$, tel que $\mathfrak{p} \neq \bigcap_{i=k}^n (a_i)$. En particulier, quitte à réindexer les termes on peut supposer que $a_1 \notin \mathfrak{p}$. Soit $f \in \mathfrak{p}$. Comme $f \in (a_1)$,

il existe f_1 tel que $f = a_1 f_1$. En particulier on a $(f) \subset (f_1)$. Comme $a_1 \notin \mathfrak{p}$ et que \mathfrak{p} est premier on en déduit que $f_1 \in \mathfrak{p}$. On obtient ainsi une chaîne infinie d'idéaux ascendante

$$(f) \subset (f_1) \subset (f_2) \dots$$

où pour entier i , $f_i = a_i f_{i+1}$. Comme A est noethérien, il existe un rang tel que $(f_i) = (f_{i+1})$, c'est à dire tel que $(f_{i+1}) = (a_i f_{i+1})$. Comme A est factoriel et que a_i est non inversible, l'unicité de la décomposition de f_{i+1} en facteurs premiers donne $f_{i+1} = 0$ puis, $f = 0$. Ce qui démontre l'affirmation.

Soit

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{Ann(N) \subset \mathfrak{p} \in Spec A} \mathfrak{p}.$$

Comme \mathfrak{q} ne contient que 0 comme idéal premier il est de hauteur 1 et comme A est factoriel, \mathfrak{q} est principal. Soit f tel que $\mathfrak{q} = (f)$. Alors comme toute chaîne d'idéaux premiers contenant $Ann(M)$ contient nécessairement (f) , on a

$$\dim N = \dim A / (f) = d - 1.$$

Montrons le sens direct de la proposition. Soit $l := \text{rang}(L)$ et $m := \text{rang}(M)$. On a $l \leq m$. Comme $\dim N < \dim A$, il existe $f \neq 0$ dans $Ann(N)$. Par définition pour tout $n \in N$, $f.n = 0$ et donc pour tout $x \in M$, il existe $y(x) \in L$, tel que $f.x = \iota(y(x))$, où ι est l'injection de (2.43). On a donc une application :

$$\begin{array}{ccc} M \cong A^m & \rightarrow & L \cong A^l \\ x & \mapsto & y(x) \end{array} .$$

Comme $f \neq 0$ et que M est sans torsion, cette application est injective. On a bien $l = m$. □

Corollaire 2.5.6. *Soit A un anneau local, noethérien intègre et factoriel. Soient L , M et N comme dans le lemme 2.5.5 avec $\text{rang } L = \text{rang } M$ et tels que*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0.$$

soit une résolution minimale projective. Alors N est un module de Cohen-Macaulay, c'est à dire $\text{prof } N = \dim N$.

Démonstration. Par le lemme 2.5.5, on a $\dim N = \dim A - 1$. Par ailleurs d'après la formule d'Auslander-Buchsbaum on a

$$\dim_{\text{proj}}(N) + \text{prof}(N) = \dim A,$$

où $\dim_{\text{proj}}(N)$ désigne la dimension projective de N et $\text{prof}(N)$ sa profondeur. Par hypo-

thèse on a $\dim_{\text{proj}}(N) = 1$ et donc $\text{prof } N = \dim N$. □

Soit maintenant S_5 une surface quintique de \mathbb{P}^3 possédant un ensemble pair de points doubles $(p_i)_{i \in I}$. Par la proposition 2.4.4, cet ensemble pair contient 16 ou 20 éléments. On note par n ce nombre d'éléments. La démonstration de cette même proposition nous donnait la situation suivante pour le cas $n = 16$:

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\varphi_{K_X}} & S_5 \end{array}$$

Dans ce cas, S est le revêtement double ramifié au dessus des points $(p_i)_{i \in I}$. Commençons dans un premier temps, en vue de comprendre la situation, supposer que $S_5 = \Sigma_5$ est une surface donnée par une projection à la Togliatti. Soit v l'ensemble pair correspondant à cette projection. On explique pourquoi le $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_5]$ -module gradué R^- correspondant à v est de Cohen-Macaulay. En d'autres termes, on explique les étapes de la preuve du sens direct de la proposition 2.5.4 dans ce cas particulier. En reprenant les notations des sections précédentes, Σ_5 est donnée par :

$$\Sigma_5 := \{[p_0, \dots, p_3] \in \mathbb{P}^3 \mid \det(M(p)) = 0\}$$

avec

$$M(p) = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & Q_0(p) \\ x_4 & x_3 & Q_1(p) \\ Q_0(p) & Q_1(p) & P(p) \end{pmatrix}$$

$(Q_i)_{i=1,2}$ sont des formes quadratiques et P est un polynôme homogène de degré 3. On considère B_{ij} les mineurs de la matrice M obtenus en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Alors pour tout i compris entre 1 et 3, chaque B_{ii} s'annule aux points doubles de l'ensemble pair v et fournit des éléments w_i appartenant à R^- . Plus précisément sur la résolution X de Σ_5 , la transformée stricte de $\text{div}(B_{ii})$ est une courbe C_i comptée avec multiplicité 2. On définit alors w_i par $C_i = \text{div}(w_i)$.

Par construction, $w_i \in H^0(\mathcal{O}_X(mK_X)(-D_v))$ pour un certain entier m dépendant du degré de B_{ii} et où $2D_v = E_v$ est la somme des diviseurs exceptionnels correspondant à v . Par exemple, le mineur B_{33} fournit la courbe de contact C_v et $w_3 \in H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v))$. On a alors (voir [Cat81, Théorème 2.16, appliqué au cas particulier de la quintique de Togliatti])

Proposition 2.5.7.

1. R^- est engendré par les w_i .
- 2.

$$0 \rightarrow \mathcal{A}[-3, -3, -4] \rightarrow \mathcal{A}[-2, -2, -1] \rightarrow R^- \rightarrow 0$$

est exacte, où \mathcal{A} est l'anneau gradué $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ et où $\mathcal{A}[i, j, k] := \mathcal{A}[i] \oplus \mathcal{A}[j] \oplus \mathcal{A}[k]$.

3. La deuxième flèche est donnée par la multiplication par M et l'avant dernière par le choix des w_i .
4. Par ailleurs cette résolution de R^- est minimale. Par le corollaire 2.5.6, R^- est de Cohen-Macaulay.

Réciproquement, supposons que S_5 soit une surface quintique de \mathbb{P}^3 et que l'on dispose d'un ensemble pair de points doubles v sur cette surface. On note R^- le \mathcal{A} -module gradué associé à v . On suppose que R^- soit de Cohen-Macaulay. Pour montrer que v est un ensemble pair symétrique, l'auteur utilise le fait qu'il existe une résolution libre minimale de longueur 1 du module R^- . Le deux premiers termes de cette résolution ont alors le même rang. A partir de cette résolution, F. Catanese retrouve l'équation de S_5 sous forme d'un déterminant pour lequel v est un ensemble pair symétrique. A ce stade, on a donc une équivalence entre v est un ensemble pair symétrique et R^- est de Cohen-Macaulay. Il montre par la suite l'équivalence suivante

$$R^- \text{ est de Cohen-Macaulay} \Leftrightarrow H^1(\mathcal{O}_X(D_v)) = 0.$$

et vérifie que sur une surface quintique de \mathbb{P}^3 , que l'ensemble pair v ait 16 ou 20 éléments, on a $H^1(\mathcal{O}_X(D_v)) = 0$. Dans cette thèse nous avons vérifié le dernier fait uniquement pour $n = 16$ (lemme 2.40).

Remarque. Le fait que pour $n = 20$, on ait $H^1(\mathcal{O}_X(D_v)) = 0$, implique que $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$ n'est pas birationnelle. En effet dans la démonstration de la proposition 2.4.4, l'égalité (2.31) devient

$$\chi(\mathcal{O}_X(-D_v)) = 0.$$

On en déduit alors que

$$\dim H^0(\mathcal{O}_X(-D_v)) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D_v)) = 0.$$

et (2.42) donne

$$\dim H^0(\mathcal{O}_{\widehat{X}}(K_{\widehat{X}})) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(K_X)).$$

En particulier, $\varphi_{K_{\widehat{X}}}$ ne sépare pas les points d'une même fibre et le diagramme 2.34 devient

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \xrightarrow{\epsilon} & X_\epsilon \\ \downarrow \pi & \searrow \varphi_{K_{\widehat{X}}} & \downarrow \varphi_{K_{X_\epsilon}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_{K_X}} & S = S_5 \end{array}$$

Une telle surface S_5 existe et est construite dans [Bea79a]. Elle contient exactement 20 points doubles ordinaires.

2.5.2 Lissité des courbes de contact

On termine ce chapitre par montrer la lissité des courbes de contact C_v pour le cas qui nous intéresse ici, à savoir la quintique de Togliatti. En conséquence immédiate du théorème 2.4.12, on a

Corollaire 2.5.8. *Pour tout $v \in V_X$, l'unique courbe C_v du système $|K_X - D_v|$ provient d'une courbe d'intersection entre un cône de contact Q_v et Σ_5 . Ce cône de contact provient d'une projection à la Togliatti.*

Ce fait nous permet maintenant d'affirmer que C_v est lisse. En effet maintenant que l'on peut écrire Σ_5 comme un déterminant pour lequel l'ensemble pair v est symétrique, il suffit de montrer

Proposition 2.5.9. *Soit $\Sigma_5 := \{p \in \mathbb{P}^3 \mid \det(M(p)) = 0\}$ où*

$$M([x_0, \dots, x_3]) = \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & Q_0 \\ x_2 & x_1 & Q_1 \\ Q_0 & Q_1 & P \end{pmatrix}$$

Soit Q le cône défini par $\{x_0x_1 - x_2^2 = 0\}$. Alors, pour un choix générique des formes quadratiques $(Q_i)_{i=0,1}$ et du polynôme homogène P (de degré 3), la courbe de contact entre Q et Σ_5 est une courbe lisse.

Démonstration. On considère le système linéaire $|x_0Q_1 - x_2Q_0|$ sur le cône Q où l'on fait varier les quadriques Q_0 et Q_1 . La partie fixe de ce système linéaire est la droite $d := \{x_0 = x_2 = 0\}$. La courbe de tangence C_5 entre Σ_5 et Q étant la courbe résiduelle de ce système, le théorème de Bertini nous assure que pour un choix générique de Q_0 et Q_1 cette courbe est lisse aux points n'appartenant pas à la droite d . Or ces points sont exactement le sommet s du cône et en reprenant les notations précédentes les points P_1 et P_2 définis par $\{x_0 = x_2 = Q_0 = 0\}$. Mais C_5 est également la courbe résiduelle du système $|x_2Q_1 - x_1Q_0|$ où cette fois-ci la partie fixe est la droite $\{x_1 = x_2 = 0\}$. On en déduit que pour un choix générique de Q_0 et de Q_1 , C_5 est une courbe lisse sauf peut-être au sommet s du cône. Considérons alors le plan tangent à Q donné par $\{x_0 = 0\}$. Ce plan intersecte C_5 en 5 points comptés avec multiplicité et qui sont donnés par l'intersection avec la droite d . On a $5 = \text{mult}_s(d, C_5) + \text{mult}_{P_1}(d, C_5) + \text{mult}_{P_2}(d, C_5)$. Or d et C_5 sont tangents en P_1 et P_2 et on en déduit que $\text{mult}_{P_1}(d, C_5) = \text{mult}_{P_2}(d, C_5) = 2$. L'intersection entre d et C_5 est donc transverse en s . C_5 est bien une courbe lisse en s donc une courbe lisse. \square

LA VISH DÉTERMINE LES QUINTIQUES DE TOGLIATTI

L'objet de ce chapitre est de donner la démonstration du théorème principal de cette thèse, à savoir que les quintiques de Togliatti sont déterminées par les données contenues dans leurs Variations Infinitésimales de Structure de Hodge. Les notations utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

- Σ_5 : Une quintique de Togliatti, c'est à dire une surface de degré 5 dans \mathbb{P}^3 avec 31 points doubles ordinaires.
- $(p_i)_{i=1,\dots,31}$: Les points doubles de Σ_5 . Ces points définissent l'ensemble $Sing(\Sigma_5)$.
- (X, σ) : La résolution minimale de Σ_5

$$\sigma : X := Bl_{Sing(\Sigma_5)}\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 \subset \mathbb{P}^3. \quad (3.1)$$

- K_X le diviseur canonique de X . Par abus de notation K_X désignera aussi sa classe $[K_X]$ dans $H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$. On a $\mathcal{O}_X(K_X) = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|_X$ et

$$\varphi_{K_X} : X \rightarrow \Sigma_5 \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_X(K_X)^*) \cong \mathbb{P}^3)$$

où φ_{K_X} est le morphisme canonique (ie. $\varphi_{K_X} = \sigma$). En particulier on a

$$K_X^2 = 5.$$

Le diamant de Hodge associé à X est :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 4 & 45 & 4 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{array}$$

où sur la partie supérieure, on a placé la dimension de l'espace $H^{p,q}(X)$ à la $(p+q+1)$ -ième ligne et à la $(p+1)$ -ième colonne.

- Si D est un diviseur sur X , $[D]$ désigne sa classe dans $H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$, ie

$[D] = c_1(\mathcal{O}_X(D))$ où $c_1(\mathcal{O}_X(D))$ est la première classe de Chern du fibré en droite associé à D .

L'objectif est de montrer que de telles surfaces sont déterminées par les données cohomologiques contenues dans leurs VISH associées (Variations Infinitésimales de Structures de Hodge). Dans notre situation nous considérons donc les données suivantes comme *connues* :

- (i) $H_{\mathbb{Z}} := H^2(X, \mathbb{Z})$ avec sa forme d'intersection Q et le choix de la classe canonique $[K_X]$.
- (ii) $H^2(X, \mathbb{C})$ et sa décomposition de Hodge

$$H^2(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(X). \quad (3.2)$$

(iii) $H^1(T_X)$.

(iv) $\delta : H^1(T_X) \rightarrow \text{Hom}(H^{2,0}(X), H^{1,1}(X)) \oplus \text{Hom}(H^{1,1}(X), H^{0,2}(X))$,

où T_X (resp. Ω_X) est le fibré tangent (resp. co-tangent) holomorphe de X . Le morphisme δ est donné par le cup-produit :

$$\delta(\xi)(\omega) = \xi \cdot \omega, \quad \forall \xi \in H^1(T_X) \text{ and } \omega \in H^0(\mathcal{O}_X(K_X)).$$

Ce cup-produit provient de l'isomorphisme de faisceaux suivant :

$$T_X \otimes \mathcal{O}_X(K_X) \cong \Omega_X.$$

Ainsi si X est la résolution minimale d'une quintique de Togliatti Σ_5 on note par $VISH(X)$ les données mentionnées ci-dessus c'est à dire :

$$VISH(X) := \{H_{\mathbb{Z}}, Q, K_X, \delta\} \quad (3.3)$$

Le résultat démontré dans ce chapitre est le suivant :

Théorème *La surface X (et Σ_5) dans (3.1) est déterminée par $VISH(X)$ dans (3.3).*

La preuve de ce théorème procède en trois étapes :

— **Etape 1 : VISH détermine $Sing(\Sigma_5)$.**

La résolution d'une singularité sur Σ_5 donne une (-2) -courbe C rationnelle sur X . Cette courbe est lisse et vérifie : $K_X \cdot C = 0$ et $C^2 = -2$. Nous commençons par s'assurer que l'inverse est vrai, c'est à dire toutes classes dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ ayant les mêmes propriétés numériques provient effectivement d'une telle courbe. Pour cela

notons par Λ_X l'ensemble

$$\Lambda_X := \{[\lambda] \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \lambda^2 = -2, K_X \cdot \lambda = 0\}. \quad (3.4)$$

Par le théorème de Lefschetz sur les classe de type $(1, 1)$, on sait qu'il existe un diviseur λ tel que $[\lambda] = c_1(\mathcal{O}_X(\lambda))$. On montre alors que pour chaque $[\lambda] \in \Lambda_X$, soit λ , soit $-\lambda$ est effectif et correspond ainsi à un point double sur Σ_5 ou de manière équivalente à une (-2) -courbe sur X . En notant $E_{|\lambda|}$ cette (-2) -courbe, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_X| := \Lambda_X / \{\pm 1\} &\cong \text{Sing}(\Sigma_5) \\ |\lambda| &\mapsto \varphi_{K_X}(E_{|\lambda|}) =: p_{|\lambda|} \end{aligned}$$

A ce stade on a identifié $\text{Sing} \Sigma_5$ en tant qu'ensemble et il faut récupérer les points $(p_{|\lambda|})_{[\lambda] \in \Lambda_X}$. On montre que pour tout $[\lambda] \in \Lambda_X$, le cup-produit par cette classe :

$$\begin{aligned} \cdot[\lambda] : H^1(X, T_X) &\rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))^* \\ \alpha &\mapsto \alpha \cdot \lambda \end{aligned}$$

a comme image une droite. Cette droite est p_λ dans $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))^*)$.

— **Etape 2 : Ensembles pairs de points doubles et cônes de contact à Σ_5 .**

Comme expliqué dans le chapitre précédent, l'ensemble $\text{Sing}(\Sigma_5)$ vérifie la propriété suivante : dans $\text{Sing}(\Sigma_5)$, il y a 31 sous-ensembles pairs de points doubles, chacun constitués de 16 points. Cette propriété peut être lue dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, et donc fait partie de $VISH(X)$. Par ailleurs, on a également vu qu'il existe une bijection entre l'ensemble des ensembles pairs de points doubles et les vecteurs non-nuls d'un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension 5 (2.26). Cet espace vectoriel, noté V_X , est isomorphe à son code dual (voir démonstration du théorème 2.4.3). Ainsi, à la donnée de $VISH(X)$, on peut associer la paire $(|\Lambda_X|, V_X)$ munie d'une identification naturelle entre $|\Lambda_X|$ et $V_X^* \setminus \{0\}$. Plus précisément, pour chaque forme linéaire non nulle f sur V_X , on note E_f la (-2) -courbe associée. Le diviseur pair défini par v est :

$$E_v = \sum_{f(v) \neq 0} E_f.$$

On peut alors associer un cône quadrique à chacun de ces ensembles pairs :

$$\begin{aligned} V_X \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))) \cong \mathbb{P}(S^2 H^0(\mathcal{O}_X(K_X))) \\ v &\mapsto Q_v \end{aligned}$$

Cette surface, appelée *cône de contact associé à v* , est tangente à Σ_5 le long d'une courbe lisse. Cette courbe, appelée *courbe de contact*, passe par les 16 points de l'ensemble pair considéré. Cette quadrique est unique.

- **Etape 3 : Les cônes de contact associés aux ensembles pairs de points doubles déterminent Σ_5 .**

Cette étape consiste à vérifier qu’il existe une seule quintique de Togliatti ayant la collection de cônes quadriques $(Q_v)_{v \in V_X}$ comme surfaces de contact. Le théorème sera alors démontré mais on peut faire mieux : retrouver une équation explicite de Σ_5 .

- **Etape bonus : Trouver une équation de Σ_5 à partir d’un plan de l’espace vectoriel V_X .**

Cette section a pour but d’affiner le théorème et d’utiliser la correspondance entre sous-espaces vectoriels de V_X et géométrie de Σ_5 . On montre ici que la donnée d’un plan de V_X permet de retrouver une équation de Σ_5 . Cette équation sera sous forme déterminantale : on obtient par la même occasion les équations d’une hypersurface cubique V_3 dans \mathbb{P}^5 et d’une droite L contenue dans cette cubique. Ces derniers vérifient $\Sigma_5 = F_L(X)/\iota_L$ (voir la définition 2.2.1 et 2.14 pour les notations).

3.1 VISH de X détermine $Sing(\Sigma_5)$

On effectue l’étape 1 précisée auparavant : Le premier objectif de cette section est d’abord d’obtenir une caractérisation cohomologique des -2 -courbes rationnelles sur X contractées par l’application canonique. On commence par

Lemme 3.1.1. *Soit X une surface de Togliatti numérique telle que définie dans (3.1). Soit Λ_X l’ensemble défini par (3.4). Alors pour tout $[\lambda]$ dans Λ_X , soit λ soit $-\lambda$ est effectif.*

Démonstration. Le théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1, 1)$ nous garantit que les éléments de Λ_X proviennent d’un élément de $Pic X$. Supposons qu’il existe $[\lambda]$ dans Λ_X tel que ni λ ni $-\lambda$ ne soit effectif. On a

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(-\lambda)) = 0. \quad (3.5)$$

On applique le théorème de Riemann-Roch au faisceau $\mathcal{O}_X(\lambda)$ et on obtient

$$\chi(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda \cdot K_X) + \chi(\mathcal{O}_X) = 4. \quad (3.6)$$

(3.5) et (3.6) impliquent

$$h^2(\mathcal{O}_X(\lambda)) \geq 4.$$

Par la dualité de Serre on a

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - \lambda)) \geq 4. \quad (3.7)$$

On va montrer que ceci est impossible : comme $|K_X|$ est sans point base, un diviseur général de $|K_X|$ est une courbe lisse (Théorème de Bertini). Soit C une telle courbe. On

montre alors que (3.7) implique que le diviseur $(K_X - \lambda)|_C$ est spécial. L'inégalité de Clifford appliqué à ce diviseur, nous donnera alors la contradiction recherché.

Tout d'abord, C est une courbe de genre $g = 6$. En effet, la formule d'adjonction donne

$$\mathcal{O}_C(K_C) = \mathcal{O}_C(K_X + C).$$

En appliquant le théorème de Riemann-Roch au faisceau $\mathcal{O}_C(K_C)$, on obtient

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_C(K_C)) &= 2 + 2K_X \cdot K_X - h^0(\mathcal{O}_C(K_C)) \\ 2g &= 12 \\ g &= 6. \end{aligned}$$

On a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X - \lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X - \lambda) \rightarrow 0$$

et en appliquant une nouvelle fois (3.5) on obtient la suite exacte longue

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(K_X - \lambda)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) \rightarrow \dots$$

et (3.7) implique

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) \geq 4. \quad (3.8)$$

De plus

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) &= 1 + K_X(K_X - \lambda) - g \\ \chi(\mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $h^1(C, \mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) \geq 4 > 0$ et $(K_X - \lambda)|_C$ est un diviseur spécial sur C . On applique l'inégalité de Clifford et on trouve la contradiction

$$4 \leq h^0(C, \mathcal{O}_C(K_X - \lambda)) \leq \frac{5}{2} + 1.$$

On a montré : pour tout classe $[\lambda]$ dans Λ_X , soit λ , soit $-\lambda$ est un diviseur effectif. \square

On souhaite maintenant récupérer les singularités de Σ_5 grâce à $VISH(X)$. Grâce au lemme précédent on sait que toute classe $[\lambda] \in \Lambda_X$ correspond à une courbe $E_{|\lambda|}$ sur X et que cette courbe est envoyée sur un point double via l'application canonique. Ce point est noté $p_{|\lambda|}$. Il vérifie

$$p_{|\lambda|} \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_X(K_X))^*)$$

et correspond à la droite $H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|}))^\perp$ où $H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|}))$ désigne les sections

globales du faisceau canonique s'annulant le long du support de $E_{|\lambda|}$. Pour récupérer cette droite on utilise

$$\delta : H^1(T_X) \rightarrow \text{Hom}(H^{2,0}(X), H^{1,1}(X)) \oplus \text{Hom}(H^{1,1}(X), H^{0,2}(X))$$

et plus précisément sa deuxième partie.

Chaque $[\lambda] \in \Lambda_X$ induit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \cdot[\lambda] : H^1(T_X) &\rightarrow H^{0,2}(X) = H^0(\mathcal{O}_X(K_X))^* \\ \xi &\mapsto \xi \cdot [\lambda] \end{aligned} \quad (3.9)$$

On rappelle que par la proposition 1.3.7,

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_\lambda)) \subset H^{2,0}(-[\lambda]) \quad (3.10)$$

avec

$$H^{2,0}(-[\lambda]) := \{\omega \in H^{2,0} \mid \forall \xi \in T, Q(\xi \cdot \omega, [\lambda]) = 0\}$$

et que Q vérifie

$$Q(\xi \cdot \omega, [\lambda]) = -Q(\omega, \xi \cdot [\lambda]) \quad (3.11)$$

(3.10) et (3.11) impliquent donc

$$\text{Im}(\cdot[\lambda]) \subset H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|}))^\perp. \quad (3.12)$$

et on a la suite d'implications suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } [\lambda] \in \Lambda_X, \quad (3.9) \text{ n'est pas l'application nulle.} \\ \Rightarrow &\text{ Pour tout } [\lambda] \in \Lambda_X, \quad \text{Im}(\cdot[\lambda]) = H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|}))^\perp. \\ \Rightarrow & \text{ VISH}(X) \text{ détermine } \text{Sing } \Sigma_5. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Proposition 3.1.2. *Pour tout $[\lambda] \in \Lambda_X$, (3.9) n'est pas l'application nulle.*

Démonstration. (3.11) donne l'implication suivante

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } [\lambda] \in \Lambda_X, \quad \exists \xi_\lambda \in H^1(T_X) \text{ tel que } \text{Im}(\xi_\lambda \cdot) = \langle [\lambda] \rangle. \\ \Rightarrow & \text{ Pour tout } [\lambda] \in \Lambda_X, \quad (3.9) \text{ n'est pas l'application nulle.} \end{aligned}$$

La proposition 3.1.2 est donc une conséquence de la proposition 3.1.3 énoncée ci-dessous. \square

Proposition 3.1.3. *Soit X la résolution minimale d'une quintique de Togliatti et soit $[\lambda]$ la classe d'un diviseur effectif dans Λ_X . Alors il existe un élément $\xi_\lambda \in H^1(T_X)$ tel que*

1. Le noyau de l'application :

$$\begin{aligned} \delta(\xi_\lambda) : H^0(\mathcal{O}_X(K_X)) &\rightarrow H^1(\Omega_X) \\ \omega &\mapsto \xi_\lambda \cdot \omega \end{aligned}$$

soit exactement $H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|}))$

2. L'image de cette application soit la droite $\langle [\lambda] \rangle$ dans $H^1(\Omega_X)$.

Le reste de cette section a pour but de démontrer la proposition 3.1.3. Expliquons la stratégie employée. Tout d'abord on cherche un élément de $H^1(T_X)$ dont les propriétés sont liées à celle du diviseur λ . Il est naturel de s'intéresser aux deux suites exactes

$$0 \rightarrow H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, T_X(\lambda)) \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda)) \xrightarrow{c_{T_X}} H^1(X, T_X) \rightarrow \dots \quad (3.14)$$

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X(\lambda)) \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) \xrightarrow{c_{\Omega_X}} H^1(X, \Omega_X) \rightarrow \dots \quad (3.15)$$

Comme $H^0(X, T_X(\lambda)) = H^0(X, \Omega_X(-(K_X - \lambda))) = 0$ (car $q(X) = 0$ et $K_X - \lambda$ est effectif), (3.14) et (3.15) deviennent

$$0 \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda)) \xrightarrow{c_{T_X}} H^1(X, T_X) \rightarrow \dots \quad (3.16)$$

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X(\lambda)) \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) \xrightarrow{c_{\Omega_X}} H^1(X, \Omega_X) \rightarrow \dots \quad (3.17)$$

On va :

- Montrer que $\text{Im}(c_{\Omega_X}) = \langle [\lambda] \rangle$ et $H^0(X, \Omega_X(\lambda)) = 0$.
- Montrer que $H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda))$ est de dimension 1. Un élément dans l'image de c_{T_X} sera alors un candidat pour ξ_λ .
- Vérifier que ξ_λ ainsi construit vérifie les propriétés de la proposition.

On a donc besoin du

Lemme 3.1.4. *Soit X la résolution minimale d'une quintique de Togliatti et $[\lambda] \in \Lambda_X$ avec λ un diviseur effectif. Soit Ω_X le faisceau cotangent holomorphe de X . Alors $\text{Im}(c_{\Omega_X}) = \langle [\lambda] \rangle$ et $H^0(\Omega_X(\lambda)) = 0$.*

Démonstration. Afin de démontrer ce lemme, on considère le faisceau $\Omega_X(\log \lambda)$ défini comme le dual de $T_X(-\log \lambda)$. Ce dernier est constitué des germes de sections de T_X tangentes le long de la courbe $E_{|\lambda|}$. On note par T_λ le fibré tangent de $E_{|\lambda|}$ et par $\mathcal{N}_{\lambda|X}$

son fibré normal dans X . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & (3.18) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T_X(-\lambda) & \xlongequal{\quad} & T_X(-\lambda) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & T_X(-\log \lambda) & \longrightarrow & T_X & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\lambda|X} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & T_\lambda & \longrightarrow & T_{X|_{E_{|\lambda|}}} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\lambda|X} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

qui après dualisation donne

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & (3.19) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & \Omega_X(\log \lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{N}_{\lambda|X}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & \Omega_X(\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1(T_{X|_{E_{|\lambda|}}}, \mathcal{O}_X) = \Omega_X(\lambda)|_{E_{|\lambda|}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Affirmation : $H^0(\mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X)) = 0$.

En effet par la formule d'adjonction on a $T_\lambda = \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}((-K_X - \lambda))$ qui mène à :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-K_X - 2\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X(-K_X - \lambda) \rightarrow T_\lambda \rightarrow 0.$$

Après dualisation on a donc :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + \lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + 2\lambda) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}(K_X + 2\lambda) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)$$

et donc

$$H^0(\mathcal{E}xt^1(T_\lambda, \mathcal{O}_X)) = 0 \quad (3.20)$$

De (3.20) et (3.19) on déduit

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & (3.21) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\Omega_X(\log\lambda)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{N}_{\lambda|X}, \mathcal{O}_X)) & \longrightarrow & H^1(\Omega_X) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\Omega_X(\lambda)) & \longrightarrow & H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) & \longrightarrow & H^1(\Omega_X) \xrightarrow{c_{\Omega_X}} \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Par ailleurs

$$\mathcal{N}_{\lambda|X} = \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}(\lambda)$$

et donc la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(\lambda) \rightarrow \mathcal{N}_{\lambda|X} \rightarrow 0$$

donne après dualisation

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{N}_{\lambda|X}, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

De sorte que

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{N}_{\lambda|X}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}. \quad (3.22)$$

(3.22) et (3.21) donnent

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\Omega_X(\log\lambda)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}) \cong \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1(\Omega_X) \longrightarrow H^1(\Omega_X(\log\lambda)) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\Omega_X(\lambda)) & \longrightarrow & H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) \xrightarrow{c_{\Omega_X}} & H^1(\Omega_X) \xrightarrow{f} & H^1(\Omega_X(\lambda)) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (3.23)$$

Si on montre que $\text{Im } c_{\Omega_X} = \langle [\lambda] \rangle$, on a directement $H^0(\Omega_X(\lambda)) = 0$ (car c_{Ω_X} est non nulle) et le lemme sera démontré.

Pour cela on remarque que la classe de $[\lambda]$ dans $H^1(\Omega_X)$ est envoyée sur 0 par f . En effet soit η_λ une forme de type $(1, 1)$ représentant de $[\lambda]$. Par définition, cette forme vérifie

$$\forall \alpha \in H^{1,1}(X), \int_X \alpha \wedge \eta_\lambda = \int_{E_{|\lambda|}} \alpha|_{E_{|\lambda|}}.$$

L'image de η_λ dans $H^1(\Omega_X(\lambda))$ est donnée par la multiplication par f où $E_{|\lambda|} := \{f = 0\}$ sur X . Et donc pour tout $\beta \in H^1(\Omega_X)$ on a

$$\int_X \beta \wedge f \eta_\lambda = \int_{E_{|\lambda|}} f \beta_{|E_{|\lambda|}} = 0.$$

Et donc $[\lambda] \in \ker f$, puis $\text{Im } c_{\Omega_X} = \langle [\lambda] \rangle$. □

Démonstration de la proposition 3.1.3.. - Construction de ξ_λ

On calcule la dimension de $H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda))$. On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow T_\lambda \rightarrow T_{X|E_{|\lambda|}} \rightarrow \mathcal{N}_{\lambda|X} \rightarrow 0$$

Après avoir tensorisé par $\mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}(\lambda)$ on obtient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \otimes \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}}(\lambda) \rightarrow T_X(\lambda)|_{E_{|\lambda|}} \rightarrow \mathcal{N}_{\lambda|X}(\lambda) \rightarrow 0$$

Puis :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{E_{|\lambda|}} \rightarrow T_X(\lambda)|_{E_{|\lambda|}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4) \rightarrow 0$$

En particulier :

$$H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda)) \cong \mathbb{C}. \tag{3.24}$$

(3.16) et (3.24) donnent

$$0 \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda)) \cong \mathbb{C} \xrightarrow{c_{T_X}} H^1(X, T_X) \rightarrow \dots \tag{3.25}$$

On définit ξ_λ par :

Soit $\tau_0 := 1_{\mathbb{C}} \in H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda))$ et

$$\xi_\lambda := c_{T_X}(\tau_0).$$

Noyau et image du cup produit avec ξ_λ .

Le lemme précédent donne

$$0 \rightarrow H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) \cong \mathbb{C} \xrightarrow{c_{\Omega_X}} H^1(X, \Omega_X) \rightarrow \dots \tag{3.26}$$

Considérons maintenant une section globale de $\mathcal{O}_X(K_X)$, ω vérifiant $\omega(p) \neq 0$ pour tout $p \in E_{|\lambda|}$. Cette section existe et est donnée par le tiré en arrière d'une section hyperplane dans \mathbb{P}^3 ne passant pas par la singularité $p_{|\lambda|}$. Alors la restriction de ω à $E_{|\lambda|}$ fournit un isomorphisme entre $H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda))$ et $H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda))$.

Et on se retrouve dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(E_{|\lambda|}, T_X(\lambda)) \cong \mathbb{C} & \xrightarrow{c_{T_X}} & H^1(X, T_X) & \longrightarrow & H^1(X, T_X(\lambda)) \\
 & & \downarrow \cdot \omega_{|E_{|\lambda|}} & & \downarrow \cdot \omega & & \downarrow \cdot \omega \\
 0 & \longrightarrow & H^0(E_{|\lambda|}, \Omega_X(\lambda)) \cong \mathbb{C} & \xrightarrow{c_{\Omega_X}} & H^1(X, \Omega_X) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega_X(\lambda))
 \end{array}$$

Ce diagramme étant commutatif on a

$$c_{\Omega_X}(\tau_0 \cdot \omega_{|E_{|\lambda|}}) = \xi_\lambda \cdot \omega.$$

Et on a bien grâce au lemme 3.1.4

$$\begin{aligned}
 \ker(\xi_\lambda \cdot) &= H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|})). \\
 \text{Im}(\xi_\lambda \cdot) &= \langle [\lambda] \rangle.
 \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. □

Remarque. Le vecteur ξ_λ représente la direction normale au lieu de Hodge U_λ (définition 1.21) dans $H^1(T_X)$. On est dans le cas où (3.10) est une égalité : $H^0(\mathcal{O}_X(K_X - E_{|\lambda|})) = H^{2,0}(-[\lambda])$.

En corollaire immédiat, la proposition 3.1.2 est donc vérifiée et la suite d'implications (3.13) donne

Corollaire 3.1.5. $VISH(X)$ détermine $\text{Sing}(\Sigma_5)$.

3.2 Ensemble pairs de points doubles et cônes de contact

Maintenant que l'on sait récupérer les points doubles d'une quintique de Togliatti grâce aux données contenues dans $VISH(X)$, nous allons voir comment récupérer les cônes de contact. On rappelle la définition donnée dans le chapitre 2 :

Définition 3.2.1. [Bea79b]

Soit Σ_5 une surface quintique de \mathbb{P}^3 , contenant des points doubles notés $(p_i)_{i \in I}$. Un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 est un sous-ensemble $(p_i)_{i \in J} \subset (p_i)_{i \in I}$ tel que, après résolution de toutes les singularités de Σ_5 , les (-2) -courbes rationnelles correspondantes $(E_i)_{i \in J}$ vérifient :

$$\sum_{i \in J \subset I} E_i = 0 \in \text{Pic } X \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Cette condition pour les points $(p_i)_{i \in J}$ est équivalente aux deux assertions suivantes :

- Il existe $D \in \text{Pic}(X)$ tel que $\sum_{i \in J} E_i = 2D$
- Il existe \hat{X} , revêtement double de X ramifié le long de $\sum_{i \in J} E_i$

On rappelle également que les ensembles pairs de points doubles sont en bijection avec un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel défini par

$$V_X := \ker \psi$$

où

$$\begin{aligned} \psi &: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{31} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ (v_i)_{i=1\dots 31} &\mapsto \sum_{i, v_i \neq 0} E_i. \end{aligned}$$

Cet espace vectoriel est de dimension 5 et tout ensemble pair de points doubles sur Σ_5 comporte 16 éléments. V_X étant isomorphe à son code dual, on peut également indexer les points doubles d'un ensemble pair via les formes linéaires non nulles sur V_X . Plus précisément, si $v \in V_X$ est un ensemble pair de points doubles, l'ensemble

$$V_v^* := \{f \in V_X^* \mid f(v) \neq 0\}$$

contient exactement 16 éléments et on indexe les points correspondants à v sur Σ_5 par $(p_f)_{f \in V_v^*}$. Par ailleurs, si $v \in V_X \setminus \{0\}$ est un ensemble pair de points doubles on note par D_v l'élément de $\text{Pic}(X)$ vérifiant :

$$2D_v := \sum_{f \in V_v^*} E_f$$

où les $(E_f)_{f \in V_v^*}$ sont les -2 -courbes associées au points $(p_f)_{f \in V_v^*}$.

Dans le chapitre 2, on a vu que tout ensemble pair v de 16 éléments provient d'une projection à la Togliatti et qu'il existe donc un cône tangent à la surface Σ_5 passant par les points de l'ensemble considéré. Ici on va retrouver ce résultat à partir de l'étude du diviseur D_v et s'assurer qu'un tel cône est entièrement déterminé par la donnée de l'ensemble pair considéré. Soit donc v un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 et soit (\hat{X}, π) le revêtement double de X correspondant à v . On a (Proposition 2.4.13)

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) = 1. \tag{3.27}$$

Lemme 3.2.2. *Soit $v \in V$ un ensemble pair de points doubles sur Σ_5 . Alors il existe une surface quadrique tangente à Σ_5 passant par les 16 points de v .*

Démonstration. D'après (3.27), il existe une unique courbe C_v dans le système linéaire $|K_X - D_v|$. Mais alors $2C_v$ appartient à $|2K_X - \sum_{f \in V_v^*} E_f|$. Soit $2\Gamma_v := \varphi_{K_X}(2C_v)$. Pour montrer qu'il existe une surface quadrique Q_v de \mathbb{P}^3 tel que $\text{supp}(\Gamma_v) = Q_v \cap \Sigma_5$, il est suffisant de vérifier que toute section globale de $\mathcal{O}_X(2K_X)$ provient d'une quadrique de \mathbb{P}^3 , et donc vérifier que $h^0(\mathcal{O}_X(2K_X)) = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$. Cette surface quadrique vérifiera

$Q_v \cap \Sigma_5 = 2\Gamma_v$ et sera donc automatiquement tangente à Σ_5 .

Le théorème de Riemann-Roch appliqué à $\mathcal{O}_X(2K_X)$ donne :

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(2K_X)) - h^1(\mathcal{O}_X(2K_X)) + h^2(\mathcal{O}_X(2K_X)) &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(4K_X^2 - 2K_X^2) \\ h^0(\mathcal{O}_X(2K_X)) - h^1(\mathcal{O}_X(-K_X)) + h^2(\mathcal{O}_X(-K_X)) &= 5 + \frac{10}{2} = 10 \end{aligned}$$

Comme K_X est un diviseur effectif on a $H^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) = 0$. Par ailleurs K_X est nef et $K_X^2 > 0$. Le théorème d'annulation de Mumford-Ramanujam (voir par exemple. [Bar+04, page 179]) nous assure que $H^1(\mathcal{O}_X(-K_X)) = 0$ et on a bien :

$$h^0(\mathcal{O}_X(2K_X)) = 10.$$

Par ailleurs $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = \binom{5}{2} = 10$, ce qui démontre le lemme. \square

Remarque. Ici, on a montré que si v est un ensemble pair de points doubles, il existe une surface quadrique Q_v tangente à Σ_5 le long d'une courbe qui passe par les points $(p_f)_{f \in V_v^*}$. Dans le chapitre précédent on a vu que tout ensemble pair de points doubles sur Σ_5 provient d'une projection à la Togliatti, c'est à dire qu'il existe un cône tangent à Σ_5 contenant les points de l'ensemble pair considéré. Par ailleurs, on rappelle les faits suivants :

- Le cône et Σ_5 sont tangents le long d'une courbe lisse de degré 5.
- Cette courbe passe par le sommet du cône qui est un point lisse de Σ_5

Il s'agit maintenant de vérifier que la surface quadrique Q_v est déterminée par l'ensemble pair v (et donc il s'agit du cône tangent provenant d'une projection à la Togliatti).

Lemme 3.2.3. *Soit $v \in V_X$ un ensemble pair de points doubles. Soit Q une surface quadrique passant par les points $(p_f)_{f \in V_v^*}$ de l'ensemble pair v . Alors $Q = Q_v$.*

Démonstration. Tout d'abord on remarque qu'une surface quadrique de \mathbb{P}^3 est entièrement déterminée par son intersection avec Σ_5 . En effet considérons la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)|_{\Sigma_5} \rightarrow 0.$$

Celle-ci mène à l'isomorphisme

$$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \cong H^0(\Sigma_5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)|_{\Sigma_5}).$$

Il est donc suffisant de montrer qu'il existe une seule courbe dans le système linéaire $|2K_X - \sum_{f \in V_v^*} E_f|$ pour démontrer le lemme. C'est à dire grâce à (3.27), que $H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v))$ et $H^0(\mathcal{O}_X(2(K_X - D_v)))$ ont même dimension. Soit C_v l'unique courbe lisse dans $|K_X - D_v|$.

Alors

$$2C_v.C_v = 2(K_X - D_v)^2$$

$$2C_v.C_v = 2(5 - 8)$$

$$2C_v.C_v = -3 < 0.$$

En particulier

$$H^0(C_v, \mathcal{O}_{C_v}(2C_v)) = 0.$$

La suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(C_v) \rightarrow \mathcal{O}_X(2(C_v)) \rightarrow \mathcal{O}_{C_v}(2C_v) \rightarrow 0$$

conduit donc à l'isomorphisme recherché

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_v)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(2(K_X - D_v))).$$

Il existe bien une seule surface quadrique qui passe par les 16 points d'un ensemble pair. □

De ces lemmes on déduit

Proposition 3.2.4. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et soit X sa résolution minimale. Alors $VISH(X)$ détermine la collection $(Q_v)_{v \in V_X}$ des cônes de contact à Σ_5 . Chacun de ces cônes quadriques à la particularité de contenir les 16 points doubles de l'ensemble pair associé.*

Démonstration. Il s'agit de traduire la définition 2.4.2 grâce aux données contenues dans $VISH(X)$. On a $VISH(X)$ détermine l'ensemble Λ_X et les éléments de V_X sont ceux de deux-torsion dans $\langle |\Lambda_X| \rangle_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Plus explicitement on a

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{31} &\rightarrow \langle |\Lambda| = \{[\lambda_1], \dots, [\lambda_{31}]\} \rangle_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (a_1, \dots, a_{31}) &\mapsto \sum_{i=1}^{31} a_i [\lambda_i] \mapsto \sum_{i=1}^{31} a_i [\lambda_i] \end{aligned}$$

et

$$V = \ker \psi$$

$VISH(X)$ détermine donc l'espace V_X puis la collection de cônes $(Q_v)_{v \in V_X}$ grâce au lemme 3.2.3. □

3.3 Un théorème de type Torelli pour les quintiques de Togliatti

Nous allons maintenant voir comment la donnée des ensembles pairs de points doubles déterminent la quintique de Togliatti. Nous commençons d'abord par vérifier que si v et w sont deux ensembles pairs de points doubles différents, les cônes associés Q_v et Q_w sont différents.

Lemme 3.3.1. *Soit v et w deux ensembles pairs de points doubles différents sur Σ_5 . Alors Q_v et Q_w construits ci-dessus sont différents.*

Démonstration. Soit X la résolution minimale de Σ_5 . On suppose

$$Q_v = Q_w =: Q.$$

En particulier les deux courbes C_v et C_w définies par leur appartenance aux systèmes linéaires $|K_X - D_v|$ et $|K_X - D_w|$ sont les mêmes.

Et donc $\sum_{f \in V_v^*} E_f$ et $\sum_{f \in V_w^*} E_f$ sont linéairement équivalents. Mais ceci n'est pas possible : si f_0 est telle que $f_0 \in V_v^* \setminus V_w^*$, alors

$$\sum_{f \in V_v^*} E_f \cdot E_{f_0} = -2$$

et

$$\sum_{f \in V_w^*} E_f \cdot E_{f_0} = 0.$$

□

Supposons que deux surfaces quintiques de \mathbb{P}^3 soient tangentes à Q_v le long de deux courbes de contact. On compte le nombre maximum de points d'intersection entre ces courbes sans que celles-ci soient confondues. On a

Lemme 3.3.2. *Soit Σ_5 et Σ'_5 deux surfaces quintiques de \mathbb{P}^3 telle qu'il existe un cône quadrique Q tangent aux deux quintiques le long de courbes lisses notées Γ et Γ' . On suppose que chacune de ces courbes passe par le sommet s du cône. Alors si $\Gamma \neq \Gamma'$, Γ et Γ' s'intersectent en exactement 12 points.*

Démonstration. Afin de montrer ce lemme, on travaille avec la résolution minimale de Q notée F_2 . Soit $\hat{\Gamma}$ et $\hat{\Gamma}'$ les transformées strictes de Γ et Γ' sur F_2 . On a

$$\text{Pic } F_2 = \mathbb{Z}[h_\infty] \oplus \mathbb{Z}[f]$$

avec $h_\infty^2 = -2$, $h_\infty \cdot f = 1$ et $f^2 = 0$. La classe d'une section hyperplane est donnée par $H = h_\infty + 2f$.

Sur F_2 , les diviseurs $2\hat{\Gamma}$ et $2\hat{\Gamma}'$ appartiennent au même système linéaire à savoir $|5H - h_\infty|$. Ce système est celui paramétrant les courbes d'intersection entre une quintique passant par le sommet du cône et le cône en question. On a

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}.\hat{\Gamma}' &= \hat{\Gamma}.\hat{\Gamma} \\ \hat{\Gamma}.\hat{\Gamma}' &= \frac{1}{4}(5H - h_\infty)^2 \\ \hat{\Gamma}.\hat{\Gamma}' &= \frac{1}{4}(50 - 10H.h_\infty - 2) \\ \hat{\Gamma}.\hat{\Gamma}' &= \frac{48}{4} = 12.\end{aligned}$$

□

De ces lemmes on déduit :

Proposition 3.3.3. *La collection $(Q_v)_{v \in V_X}$ des cônes de contact à Σ_5 détermine Σ_5 .*

Démonstration. Supposons qu'il existe Σ'_5 tel que $Sing(\Sigma_5) = Sing(\Sigma'_5)$ et tel que la collection $(Q_v)_{v \in V_X}$ soit constituées de cônes de contacts pour Σ'_5 . Soit $v \in V_X$. Soit $\Gamma_v := \Sigma_5 \cap Q_v$ et $\Gamma'_v := \Sigma'_5 \cap Q_v$. Comme les points $(p_f)_{f \in V_v^*}$ appartiennent aux deux courbes Γ_v and Γ'_v , on a $\Gamma_v.\Gamma'_v \geq 16 > 12$. Le lemme 3.3.2, nous assure alors que $\Gamma_v = \Gamma'_v$ et donc que Σ_5 et Σ'_5 sont tangents à Q_v le long d'une même courbe. On répète le procédé avec deux autres cônes de contacts, disons Q_w et Q_{v+w} (lemme 3.3.1). On a alors que si Σ_5 et Σ'_5 sont différentes leur intersection contient le diviseur $2(\Gamma_v + \Gamma_w + \Gamma_{v+w})$ qui est de degré 30. Or cette intersection doit être une courbe de degré 25 et on en déduit que $\Sigma_5 = \Sigma'_5$ □

Du corrolaire 3.1.5 et des propositions 3.2.4 et 3.3.3, on déduit :

Théoreme 3.3.4. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et soit X sa résolution minimale. $VISH(X)$ détermine Σ_5 .*

3.4 Une équation explicite de Σ_5 associée à un plan de V_X .

On commence par rappeler les notations utilisées au chapitre précédent et on en introduit de nouvelles.

— Si v est un ensemble pair de points doubles, on note

$$D_v := \frac{1}{2} \sum_{f \in V_v^*} E_f$$

et

$$E_v := 2D_v.$$

E_v est l'ensemble des (-2) -courbes sur X associées aux points de l'ensemble pair v . Ces points sont notés $(p_f)_{f \in V_v^*}$.

- C_v est la courbe de contact entre Σ_5 et Q_v . C_v est lisse et passe par le sommet s_v de Q_v . C'est l'unique élément du système linéaire $|K_X - D_v|$. C'est à dire, et ce par soucis de lisibilité, on ne distingue plus la courbe Γ_v sur Σ_5 de sa transformée stricte C_v sur X .
- Si w est un autre ensemble pair de points doubles, on dispose automatiquement de l'ensemble pair $v + w$. On a

$$(p_f)_{f \in V_{v+w}^*} = (p_f)_{f \in V_v^*} \Delta (p_f)_{f \in V_w^*}$$

où Δ désigne la différence symétrique. Ainsi on a

$$C_v + C_w + C_{v+w} \in |3K_X - E_{v,w}|$$

où

$$E_{v,w} := \sum_{f \in V_X^* | f(v)+f(w) \neq 0} E_f.$$

$E_{v,w}$ est l'ensemble des (-2) -courbes sur X associées aux 24 points appartenant soit à v soit à w .

- On a

$$C_v \cdot C_w = (K_X - D_v)(K_X - D_w) = 1 \tag{3.28}$$

et

$$C_v^2 = (K_X - D_v)^2 = -3. \tag{3.29}$$

L'objectif ici est d'exploiter le deuxième niveau de la correspondance

$$\{\text{Sous-espaces vectoriels de } V_X\} \leftrightarrow \{\text{Géométrie de } X\}$$

et en déduire une équation de Σ_5 à partir d'un plan de V_X . Il s'agit de

Théoreme 3.4.1. *Soit Σ_5 une quintique de Togliatti et X sa résolution minimale. Soit Π un plan de V_X , l'espace vectoriel paramétrant les ensembles pairs de points doubles de Σ_5 . Alors les données contenues dans Π permettent de retrouver un polynôme homogène définissant Σ_5 .*

Avant toute chose on émet l'hypothèse suivante sur la collection de cônes de contact $(Q_v)_{v \in V_X}$.

Hypothèse 3.5. Soit Q_v et Q_w les deux cônes quadriques associés aux ensembles pairs v et w avec $v \neq w$. Alors les sommets s_v et s_w de ces cônes sont différents.

Cette hypothèse n'est pas restrictive dans le sens qu'elle est vérifiée pour une quintique de Togliatti générale. En effet supposons que cette hypothèse ne soit pas vérifiée et plaçons nous dans des coordonnées telles que

$$Q_v := \{x_2x_4 - x_3^2 = 0\}$$

et

$$Q_w := \{x_2x_3 - x_4^2 = 0\}$$

soient des cônes de contact pour Σ_5 avec même sommet. Alors comme chacun de ces cônes provient d'une projection à la Togliatti, il existe des formes quadratiques Q_0, Q_1, Q'_0, Q'_1 et deux polynômes homogènes de degré 3 notés P et P' , tels que les déterminants de

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & Q_0 \\ x_3 & x_4 & Q_1 \\ Q_0 & Q_1 & P \end{pmatrix}$$

et de

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_4 & Q'_0 \\ x_4 & x_3 & Q'_1 \\ Q'_0 & Q'_1 & P' \end{pmatrix}$$

définissent Σ_5 . On obtient alors des conditions sur les formes Q_0, Q_1 et P non vérifiés généralement.

Voyons comment on peut montrer le théorème 3.4.1. La donnée d'un plan $\Pi \subset V_X$ consiste en la donnée de trois cônes de contact Q_v, Q_w et Q_{v+w} . La stratégie est la suivante :

- A un plan de V_X , explicitement trois vecteurs v, w et $v + w$, on peut associer une surface cubique P contenant les trois courbes C_v, C_w et C_{v+w} .
- N'importe quelle surface cubique qui contient les 24 points des ensembles pairs v et w est nécessairement P .
- La multiplication

$$m_2 : \text{Sym}^2(H^0(\mathcal{O}_X(3K_X - E_{v,w}))) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(6K_X - 2E_{v,w}))$$

est un isomorphisme.

- Cet isomorphisme permet de lier les équations de P et des trois cônes Q_v, Q_w, Q_{v+w} à une équation de Σ_5 .

Voici les lemmes nécessaires à la démonstration du théorème 3.4.1.

Lemme 3.5.1. *Soit v et w deux ensembles pairs de points doubles différents. Sous les conditions fixées par l'hypothèse 3.5, Q_v et Q_w n'ont pas de génératrice en commun.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que la droite $(s_v s_w)$ soit incluse dans $Q_v \cap Q_w$. Dans ce cas le sommet s_v appartient à Q_w . Comme s_v appartient aussi à Σ_5 , on en déduit que $s_v \in C_w$ et donc $s_v \in C_v \cap C_w$. Par symétrie, on a aussi $s_w \in C_v \cap C_w$. Mais d'après (3.28), C_v et C_w ne s'intersectent qu'en un seul point lisse de Σ_5 . Nécessairement $s_v = s_w$ contredisant l'hypothèse 3.5. \square

Lemme 3.5.2. *Soit Π un plan de V_X , v , w et $v + w$ les vecteurs correspondants. Alors*

$$h^0(\mathcal{O}_X(3K_X - E_{v,w})) = 1.$$

En particulier l'application

$$\mu_3 : \bigotimes_{l=v,w,v+w} H^0(\mathcal{O}_X(C_l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(3K_X - E_{v,w}))$$

est un isomorphisme. Il existe donc une cubique P contenant les trois courbes de contact $(C_l)_{l=v,w,v+w}$ et toute surface cubique contenant les 24 points associés à v et w est P .

Lemme 3.5.3. *On a*

$$h^0(\mathcal{O}_X(6K_X - 2E_{v,w})) = 1.$$

En particulier la multiplication suivante

$$m_2 : \text{Sym}^2(H^0(\mathcal{O}_X(3K_X - E_{v,w}))) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(6K_X - 2E_{v,w}))$$

est un isomorphisme.

Admettons temporairement ces deux derniers lemmes pour démontrer le théorème.

Démonstration. du théorème 3.4.1

Soit v et w deux vecteurs non nuls de V_X . Soit Q_v (resp Q_w et Q_{v+w}) l'unique cône de contact à Σ_5 le long de la courbe C_v (resp C_w et C_{v+w}). Soit g_v , g_w , g_{v+w} les polynômes homogènes de degré 2 les définissant. En particulier, $g_v g_w g_{v+w}$ définit une surface sextique, notée S_6 intersectant Σ_5 le long d'une courbe appartenant au système linéaire $|6K_X - 2E_{v,w}|$. Soit P l'unique surface cubique contenant les points doubles de v et w (Lemme 3.5.2) et g_3 un polynôme homogène de degré 3 définissant P . Alors g_3^2 définit aussi une sextique de \mathbb{P}^3 intersectant Σ_5 le long d'une courbe de $|6K_X - 2E_{v,w}|$. Mais alors le lemme 3.5.3 nous assure qu'il existe une seule telle courbe dans ce système linéaire et il s'agit donc de $S_6 \cap \Sigma_5$.

En utilisant la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma_5}(6) \rightarrow 0$$

on a

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) \rightarrow H^0(\Sigma_5, \mathcal{O}_{\Sigma_5}(6)) \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Comme S_6 et la sextique définie par $\{g_3^2 = 0\}$ intersectent Σ_5 selon la même courbe, il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que le polynôme $kg_3^2 + g_v g_w g_{v+w}$ soit envoyé sur 0 via la troisième flèche de (3.30). Quitte à multiplier l'équation de P par une constante non nulle si nécessaire, on en déduit qu'il existe un plan $H := \{g_1 = 0\}$ dans \mathbb{P}^3 tel que :

$$g_v g_w g_{v+w} - g_3^2 = g_5 g_1 \quad (3.31)$$

où g_5 est un polynôme homogène de degré 5 définissant Σ_5 . (3.31) ne dépend que du choix de $\Pi \subset V_X$.

Considérons maintenant l'intersection entre la surface cubique P est l'un des cônes, par exemple Q_v . Cette intersection est une courbe de degré 6 qui contient C_v dont le degré est 5. Il existe donc une droite résiduelle notée l_v telle que $C_v \cup l_v = Q_v \cap P$. Cette droite est nécessairement contenue dans H . On dispose donc de trois droites l_v , l_w et l_{v+w} appartenant à H et qui sont données par l'intersection entre la surface cubique P et les cônes de contact. Le lemme 3.5.1 garantit que ces trois droites sont différentes et engendrent H .

Voyons désormais comment retrouver g_5 , c'est à dire une équation de Σ_5 , via les équations de H , Q_v , Q_w , Q_{v+w} et P .

On choisit des coordonnées telles que

$$H := \{x_0 = 0\}$$

et

$$Q_v := \{x_0 x_1 - x_2^2 = 0\}.$$

Puisque H est un plan tangent à la fois à Q_w et à Q_{v+w} , il existe des formes linéaires notées h_w , h_{v+w} , h'_w , h'_{v+w} telles que

$$\begin{aligned} Q_w &:= \{x_0 h_w - h_w'^2 = 0\} \\ Q_{v+w} &:= \{x_0 h_{v+w} + h'_{v+w}{}^2 = 0\} \end{aligned}$$

et les trois droites l_v , l_w , l_{v+w} sont données par

$$\begin{aligned} l_v &:= \{x_0 = x_2 = 0\} \\ l_w &:= \{x_0 = h'_w = 0\} \\ l_{v+w} &:= \{x_0 = h'_{v+w} = 0\}. \end{aligned}$$

Comme la cubique P contient chacune de ces droites et ne contient pas H , il existe un

polynôme homogène de degré 2, noté g_2 tel que

$$P = \{x_0 g_2 - x_2 h'_w h'_{v+w} = 0\}.$$

(3.31) donne

$$x_0 g_5 = (x_0 x_1 - x_2^2)(x_0 h_w - h'_w)^2 (x_0 h_{v+w} + h'^2_{v+w}) - (x_0 g_2 - x_2 h'_w h'_{v+w})^2$$

qui mène à

$$g_5 = (x_0 x_1 - x_2^2) (x_0 h_w h_{v+w} + h_w h'^2_{v+w} - h'^2_w h_{v+w}) - x_1 h'^2_w h'^2_{v+w} - x_0 g_2^2 + 2x_2 h'_w h'_{v+w}. \quad (3.32)$$

En notant par A_3 le polynôme homogène de degré 3 défini par

$$A_3 := x_0 h_w h_{v+w} + h_w h'^2_{v+w} - h'^2_w h_{v+w} = g_w h_{v+w} + h_w h'^2_{v+w},$$

(3.32) devient

$$g_5 = (x_0 x_1 - x_2^2) A_3 + h'_w h'_{v+w} (x_2 g_2 - x_1 h'_v h'_{v+w}) - g_2 (x_0 g_2 - x_2 h'_w h'_{v+w})$$

c'est à dire la forme déterminantale suivante :

$$g_5 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & h'_w h'_{v+w} \\ x_2 & x_1 & g_2 \\ h'_w h'_{v+w} & g_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

□

Remarque. Écrire le polynôme g_5 comme un déterminant à l'avantage de retrouver une équation pour une hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 dont la projection de centre l'une de ses droites donne la surface Σ_5 . Par exemple, soit F_3 l'hypersurface cubique de \mathbb{P}^5 définie par

$$g_3 := \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & h'_w h'_{v+w} \\ x_2 & x_1 & g_2 \\ h'_w h'_{v+w} & g_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ sont les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^5 . Alors la projection de F_3 de centre la droite $l := \{(0, 0, 0, 0, x_4, x_5) \in \mathbb{P}^5 \mid (x_4, x_5) \neq (0, 0)\}$ a comme image \mathbb{P}^3 et chaque fibre de cette projection est une conique. On voit que Σ_5 est le lieu de dégénérescence de ces fibres.

Il reste à démontrer les lemmes 3.5.2 et 3.5.3.

Démonstration du lemme 3.5.2.. On veut montrer que $h^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w})) = 1$.

(3.28) et (3.29) entraînent

$$(C_v + C_w + C_{v+w}).C_v = -1. \quad (3.33)$$

Comme C_v est lisse, (3.33) entraîne que

$$H^0(C_v, \mathcal{O}_{C_v}(C_v + C_w + C_{v+w})) = 0$$

et donc la suite exacte longue associée à

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(C_w + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_{C_v}(C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow 0$$

devient

$$H^0(\mathcal{O}_X(C_w + C_{v+w})) \cong H^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w})). \quad (3.34)$$

On calcule $h^0(\mathcal{O}_X(C_w + C_{v+w}))$. Toujours grâce à (3.28) et (3.29) on a

$$(C_w + C_{v+w}).C_w = -2 \quad (3.35)$$

et (3.35) entraîne

$$h^0(C_w, \mathcal{O}_{C_w}(C_w + C_{v+w})) = 0.$$

On a donc un isomorphisme : $H^0(\mathcal{O}_X(C_w)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w))$. Mais comme $h^0(\mathcal{O}_X(C_w)) = 1$, on a $h^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w)) = 1$ puis (3.34) entraîne

$$h^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w})) = 1. \quad (3.36)$$

□

Démonstration du lemme 3.5.3. On doit montrer que $h^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w + C_{v+w}))) = 1$.

On a la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_X(2(C_v + C_w + C_{v+w})) \rightarrow \mathcal{O}_{C_{v+w}}(2(C_v + C_w + C_{v+w})) \rightarrow 0.$$

Comme $(C_v + C_w + C_{v+w}).C_{v+w} = -1$ et C_{v+w} est une courbe irréductible on a l'isomorphisme

$$H^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w})) \cong H^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w + C_{v+w}))) \quad (3.37)$$

On calcule $h^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w}))$. On dispose des deux suites exactes courtes suivantes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_X(2C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_{C_v}(2C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow 0 \quad (3.38)$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(2C_v + C_w + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w}) \rightarrow \mathcal{O}_{C_w}(2(C_v + C_w) + C_{v+w}) \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

Comme $(2C_v + C_w + C_{v+w}).C_v = -4$, (3.38) entraîne

$$H^0(\mathcal{O}_X(C_v + C_w + C_{v+w})) \cong H^0(\mathcal{O}_X(2C_v + C_w + C_{v+w})). \quad (3.40)$$

Comme $2(C_v + C_w) + C_{v+w}.C_w = -3$, (3.39) entraîne

$$H^0(\mathcal{O}_X(2C_v + C_w + C_{v+w})) \cong H^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w})). \quad (3.41)$$

(3.36), (3.40) et (3.41) donnent $h^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w) + C_{v+w})) = 1$. (3.37) entraîne alors

$$h^0(\mathcal{O}_X(2(C_v + C_w + C_{v+w}))) = 1.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [Ati58] Michael F. ATIYAH. « On analytic surfaces with double points ». English. In : *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* 247 (1958), p. 237-244. ISSN : 0080-4630.
- [Bar+04] W. BARTH et al. « Complex compact surfaces ». In : *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag* (2004).
- [Bea10] A. BEAUVILLE. « Surfaces algébriques complexes ». In : *Algebraic surfaces*. Springer, 2010, p. 5-56.
- [Bea79a] A. BEAUVILLE. « L'application canonique pour les surfaces de type général ». In : *Invent. Math.* 55.2 (1979), p. 121-140. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01390086. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01390086>.
- [Bea79b] A. BEAUVILLE. « Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans P^3 ($\mu(5) = 31$) ». In : *Algebraic Geometry, Angers 207* (1979), p. 215.
- [C H] David R. Morrison C. HERBERT CLEMENS. *Variations of Hodge Structures (Selected works of Phillip A. Griffiths with Commentary, Volume 3)*. American Mathematical Society, 2003. ISBN : 0821820885.
- [Car+83] James CARLSON et al. « Infinitesimal variations of Hodge structure (I) ». en. In : *Compositio Mathematica* 50.2-3 (1983), p. 109-205.
- [Cat81] F CATANESE. « Babbage's conjecture, contact of surfaces, symmetric determinantal varieties and applications ». In : *Inventiones mathematicae* 63.3 (1981), p. 433-465.
- [Col87] COLLECTIF. « Le problème de Torelli ». fr. In : *Séminaire Bourbaki : volume 1985/86, exposés 651-668*. Astérisque 145-146. talk :651. Société mathématique de France, 1987. URL : http://www.numdam.org/item/SB_1985-1986__28__7_0/.
- [Don83] Ron DONAGI. « Generic Torelli for projective hypersurfaces ». en. In : *Compositio Mathematica* 50.2-3 (1983), p. 325-353. URL : http://www.numdam.org/item/CM_1983__50_2-3_325_0/.
- [GH83] Phillip A. GRIFFITHS et Joe HARRIS. « Infinitesimal variations of hodge structure (II) : an infinitesimal invariant of hodge classes ». en. In : *Compositio Mathematica* 50.2-3 (1983), p. 207-265. URL : http://www.numdam.org/item/CM_1983__50_2-3_207_0/.

- [Gri] P. GRIFFITHS. *Topics in Transcendental Algebraic Geometry*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press. ISBN : 9780691083391.
- [HL10] Daniel HUYBRECHTS et Manfred LEHN. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. 2^e éd. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2010. DOI : 10.1017/CB09780511711985.
- [Huy] Daniel HUYBRECHTS. *The geometry of cubic hypersurfaces*. Site internet personnel de l'auteur.
- [Kal86] A. KALKER. « Cubic fourfolds with fifteen ordinary double points ». Thèse de doct. Rijksuniversiteit Leiden, 1986.
- [Kur62] Masatake KURANISHI. « On the Locally Complete Families of Complex Analytic Structures ». In : *Annals of Mathematics* 75 (1962), p. 536.
- [LP80] Eduard LOOIJENGA et Chris PETERS. « Torelli theorems for Kähler K3 surfaces ». en. In : *Compositio Mathematica* 42.2 (1980), p. 145-186. URL : http://www.numdam.org/item/CM_1980__42_2_145_0/.
- [MK06] J.A. MORROW et K. KODAIRA. *Complex Manifolds*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2006. ISBN : 9780821840559.
- [Tog] E. TOGLIATTI. « Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi, in Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari ». In : *Istituto Matematico Universitario di Pavia* (), p. 577-593.
- [Tog40] E.G. TOGLIATTI. « Una notevole superficie di 5o ordine con soli punti doppi isolati ». In : *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich* 85 (1940), p. 127-132.
- [Voi] C. VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Collection SMF. Société Mathématique de France. ISBN : 9782856291290.
- [Voi86] C. VOISIN. « Théorème de Torelli pour les cubiques de P⁵ ». In : *Inventiones mathematicae* 172 (1986), p. 455-458.

Titre : Invariants infinitésimaux des variations de structures de Hodge et géométrie des surfaces de type général.

Mot clés : Problèmes de Torelli, VISH, Quintiques de Togliatti

Résumé : Si X est une variété complexe projective, on peut lui associer des données cohomologiques (comme par exemple ses groupes de cohomologie singulière, sa décomposition de Hodge, etc...). Si on arrive à tirer assez d'informations géométriques de ces données pour reconstruire X , on dit que l'on a résolu un problème de type-Torelli. Dans le problème de Torelli infinitésimal, on se donne comme données de départ les informations encodées par la différentielle de l'application des périodes. Ces données sont notées $VISH(X)$. L'objectif est de retrouver X à partir de $VISH(X)$. En 1983, R. Donagi montre

que si X est une hypersurface lisse générique, $VISH(X)$ détermine X . Cette thèse montre un résultat semblable où cette fois la variété étudiée est une surface quintique singulière de \mathbb{P}^3 : la quintique de Togliatti, Σ_5 . Cette quintique possède le nombre maximal de nœuds ($= 31$) qu'une telle surface peut admettre (A. Beauville, 1979). On montre que si X est la résolution minimale de Σ_5 , $VISH(X)$ détermine les 31 nœuds de Σ_5 . Par ailleurs, ces nœuds sont dans une configuration spéciale que l'on peut lire dans $VISH(X)$. Cela détermine Σ_5 , c'est-à-dire que l'on montre un théorème de type Torelli pour la quintique de Togliatti.

Title: Infinitesimal invariants of variations of Hodge structures and geometry of surfaces of general type

Keywords: Torelli problem, IVHS, Togliatti Quintics

Abstract: Let X be a complex projective manifold. One can associate to X its cohomological data (for instance, its singular cohomological groups, its Hodge decomposition, etc...). When it is possible to extract enough geometric information from these data to recover X , one says that a Torelli-type theorem holds. For the infinitesimal Torelli-type problem, one is given the information encoded by the differential of the period map. These data are $IVHS(X)$. The aim is to recover X from $IVHS(X)$. In 1983, R. Donagi shows that

if X is a generic smooth hypersurface then $IVHS(X)$ determines X . This thesis shows a similar result for a singular quintic surface in \mathbb{P}^3 : the Togliatti quintic, Σ_5 . This quintic has 31 nodes. This is the maximal number of ordinary double-points a quintic surface in \mathbb{P}^3 can have. We show that if X is the minimal resolution of Σ_5 , $IVHS(X)$ determines the double points. These double-points are in a special configuration which can be read in $IVHS(X)$. This determines Σ_5 , i.e. we show a Torelli type theorem for the Togliatti quintic.