



HAL
open science

Commande distribuée de réseaux de systèmes dynamiques : application à un réseau d'échangeurs de chaleur à contre-courant

Bertrand Zitte

► To cite this version:

Bertrand Zitte. Commande distribuée de réseaux de systèmes dynamiques : application à un réseau d'échangeurs de chaleur à contre-courant. Automatique / Robotique. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1168 . tel-03865370

HAL Id: tel-03865370

<https://theses.hal.science/tel-03865370>

Submitted on 22 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2021LYSE1168

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Opérée au sein de :

l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale 160

Électronique Électrotechnique et Automatique

Spécialité de doctorat : Automatique

Discipline : Génie des systèmes automatisés et des procédés

Soutenue publiquement le 03/09/2021, par :

Bertrand David Zitte

Commande distribuée de réseaux de systèmes dynamiques

Application à un réseau d'échangeurs de chaleur à contre-courant

Devant le jury composé de :

Bernhard MASCHKE

Examineur

Professeur des universités, Université Claude Bernard Lyon 1

Catherine CADET

Rapporteuse

Maître de conférence, Université Grenoble Alpes

Gilles HETREUX

Examineur

Maître de conférence, INP-ENSIAC Toulouse

Yann LE GORREC

Rapporteur

Professeur, FEMTO-ST Besançon

Laurent LEFEVRE

Examineur

Professeur, INP-ESISAR Grenoble

Françoise COUENNE

Directrice de thèse

Chargée de Recherche CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1

Boussad HAMROUN

Invité / Co-encadrant

Maître de Conférences, Université Claude Bernard Lyon 1

Isabelle PITAULT

Invitée / Co-encadrante

Chargée de Recherche CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1

Université Claude Bernard – LYON 1

Président de l'Université	M. Frédéric FLEURY
Président du Conseil Académique	M. Hamda BEN HADID
Vice-Président du Conseil d'Administration	M. Didier REVEL
Vice-Président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	Mme Céline BROCHIER
Vice-Président de la Commission de Recherche	M. Petru MIRONESCU
Directeur Général des Services	M. Pierre ROLLAND

COMPOSANTES SANTE

Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directrice : Mme Anne-Marie SCHOTT
Faculté d'Odontologie	Doyenne : Mme Dominique SEUX
Faculté de Médecine et Maïeutique Lyon Sud - Charles Mérieux	Doyenne : Mme Carole BURILLON
Faculté de Médecine Lyon-Est	Doyen : M. Gilles RODE
Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation (ISTR)	Directeur : M. Xavier PERROT
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques (ISBP)	Directrice : Mme Christine VINCIGUERRA

COMPOSANTES & DEPARTEMENTS DE SCIENCES & TECHNOLOGIE

Département Génie Electrique et des Procédés (GEP)	Directrice : Mme Rosaria FERRIGNO
Département Informatique	Directeur : M. Behzad SHARIAT
Département Mécanique	Directeur M. Marc BUFFAT
Ecole Supérieure de Chimie, Physique, Electronique (CPE Lyon)	Directeur : Gérard PIGNAULT
Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA)	Directeur : M. Nicolas LEBOISNE
Institut National du Professorat et de l'Education	Directeur : M. Pierre CHAREYRON
Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1	Directeur : M. Christophe VITON
Observatoire de Lyon	Directrice : Mme Isabelle DANIEL
Polytechnique Lyon	Directeur : Emmanuel PERRIN
UFR Biosciences	Administratrice provisoire : Mme Kathrin GIESELER
UFR des Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives (STAPS)	Directeur : M. Yannick VANPOULLE
UFR Faculté des Sciences	Directeur : M. Bruno ANDRIOLETTI

Remerciements

Les travaux détaillés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Automatique, de Génie des Procédés et de Génie Pharmaceutique dirigé par sa directrice Madame Stéphanie BRIANÇON. Les différents résultats présentés ici ont été effectués au sein de l'équipe de Dynamique, Commande et Observation des Procédés dont les responsables sont Monsieur Vincent ANDRIEU et Madame Melaz TAYAKOUT-FAYOLLE. Je souhaite remercier tous les membres de cette équipe qui ont su m'apporter leurs conseils, leur aide et leur soutien durant ces années.

Je voudrais particulièrement exprimer toute ma gratitude à ma directrice de thèse, Madame Françoise COUENNE, Chargée de Recherche CNRS à l'Université Claude Bernard Lyon 1, qui a toujours été présente à mes côtés pour me guider. Elle m'a permis de développer au maximum mes compétences de recherches afin de pouvoir être fier aujourd'hui du travail réalisé.

Je souhaite également remercier mes deux autres encadrant·e·s Boussad HAMROUN, Maître de conférence à l'Université Claude Bernard Lyon 1, et Isabelle PITAULT, Chargée de Recherche CNRS à l'Université Claude Bernard Lyon 1, avec qui j'ai découvert qu'il était possible de penser la même chose mais le dire totalement différemment. J'ai également une pensée pour Daniele ASTOLFI, Chargé de Recherche CNRS, qui a été d'une grande aide en apportant son point de vue éclairé sur la partie commande et réseaux. Je n'oublie pas les autres doctorant·e·s du laboratoire que j'ai pu croiser durant ces 54 mois et qui m'ont permis d'aller plus loin que ce que je pensais. Parmi elles·eux : Alexandre, Marc-Aurèle, Lucas, Joëlle, Aline, Maroua, Mattia, Greta...

Pareillement, je tiens à remercier les membres de mon jury d'avoir accepté de faire partie de cette soutenance qui conclut quatre années fortes en émotions et d'avoir validé ces recherches. Mes rapporteur·euse·s, Catherine CADET, Maître de conférence à l'Université Grenoble Alpes, et Yann LE GORREC, Professeur à FEMTO-ST de Besançon, d'avoir pris le temps de réaliser ce travail de relecture et de m'avoir fourni leurs remarques constructives qui m'ont permis de faire évoluer mon manuscrit. Une attention particulière au président de jury Bernhard MASCHKE, Professeur des universités, avec qui j'ai également partagé des enseignements. Je souhaite dire un grand merci aussi aux autres membres du jury : Gilles HETREUX, Maître de conférence à l'INP-ENSIAC de Toulouse et enfin Laurent LEFEVRE, Professeur à l'INP-ESISAR de Grenoble.

Je remercie enfin mes parents et mes ami·e·s : Juliette, Anne-Marie, Cloé, Baptiste, Etienne, Thibault, Kim et encore tant d'autres qui ont été à mes côtés pendant cette thèse qui m'ont toujours encouragé, et permis de me vider la tête quand j'en avais besoin.

Résumé

Pour économiser de l'énergie, l'optimisation des réseaux d'échangeurs en temps réel grâce aux lois de commande dynamiques devient une nécessité. Dans ces travaux, notre approche se base sur une représentation compartimentale en dimension finie des échangeurs de chaleur.

Les principales contributions sur la modélisation concernent une construction itérative des modèles d'échangeurs de chaleur sur la base de l'interconnexion de blocs élémentaires. Cette approche permet de représenter l'interconnexion en série de deux échangeurs ainsi que des interconnexions en parallèle : collecteurs et répartiteurs.

Pour la partie commande, nous proposons des lois sur le débit d'entrée du flux chaud, l'autre débit étant supposé fixé. La représentation d'état des échangeurs ou du réseau d'échangeurs conduit à des modèles bilinéaires.

Deux types de commandes ont été étudiées :

- La stabilisation robuste autour d'un point de fonctionnement d'un échangeur thermique en utilisant la méthode de forwarding sur un modèle à n blocs. Des simulations utilisant un observateur d'état utilisent comme mesures la température des deux fluides en sortie de l'échangeur.
- La maximisation de l'énergie totale fournie aux clients. Les synthèses de commande sont basées sur la méthode d'Extremum-Seeking avec un estimateur distribué. Le critère global est estimé à partir des informations locales de chaque agent et de leurs voisins définis par un graphe de communication . Les synthèses sont basées sur deux scénarii différents du graphe de communication : complet et connexe. Des simulations générant des perturbations intervenant sur les paramètres du modèle, sont proposées pour deux réseaux.

Mots clés

- Commande distribuée
- Modélisation dynamique
- Échangeurs thermiques
- Réseau thermodynamique
- Commande optimale
- Commande par action intégrale
- Observateur
- Modélisation générale d'un réseau
- Systèmes multi-agents
- Extremum-Seeking
- Forwarding

Distributed control of dynamical network systems - Application to a counter-current heat exchangers network

Abstract :

The current industrial context tends to find the most efficient ways to save energy. In this perspective, real-time optimization of heat-exchanger networks and control synthesis use become a necessity. Here, our approach is based on a heat-exchanger compartmental representation in finite dimension.

Our main modeling contributions concern an iterative construction of heat-exchanger models based on cascade interconnections of elementary blocks. The interconnections are represented for a two-exchanger series as well as for collectors and splitters, the most common topologies in heat exchanger networks.

The proposed control laws are of the inlet flow of the hot fluid, the other inlet being assumed to be fixed. The state representation of heat-exchanger networks leads to bilinear models.

Two types of control are studied :

- Robust stabilization around an operating point using the forwarding method on a n-block model. Simulations are proposed on a three-block exchanger model using a state observer. The latter uses the measure of the outlet temperature of the two fluids.
- The maximization of the total energy supplied to the customers. The syntheses are based on the Extremum-Seeking method with a distributed estimator. The latter allows to compute locally for each agent an estimate of the global criterion from the information available at its level and at its neighbor level as defined by the communication graph. The syntheses are based on two different scenarios of the communication graph, for complete and connected graphs. Simulations are proposed on a network of three exchangers for the first scenario and five exchangers for the second.

Keywords

- Distributed control
- Dynamic modelisation
- Heat Exchanger
- Thermodynamic Network
- Optimal control
- Control by integral action
- Observator
- Global modelisation for network
- Multi-agent systems
- Extremum-Seeking
- Forwarding

Laboratoire d'Automatique, de Génie des Procédés et de Génie Pharmaceutique (LAGEPP)



Université Lyon 1,
LAGEPP,
43 Boulevard du 11 Novembre 1918,
Bâtiment CPE
69622 Villeurbanne Cedex

Table des matières

Remerciements	v
Résumé / Mots clés	vii
Abstract / Keywords	viii
Table des figures	xvii
Introduction Générale	1
Contexte : Diminution de la consommation d'énergie	1
Motivation : Economie d'énergie/ Utilisation de la chaleur fatale	2
Objectif : Commande distribuée de réseaux de systèmes dynamiques thermiques	3
Contributions de la thèse	4
Plan de la thèse	5
1 Échangeur de chaleur : technologie et représentation dynamique	7
1.1 Technologie de l'échangeur de chaleur : principe et structure	7
1.1.1 Classification selon le type de fluides	7
1.1.2 Classification selon la forme géométrique de l'échangeur	9
1.1.3 Classification selon le sens de l'écoulement des fluides	11
1.1.4 Choix pour mes travaux de thèse.	12
1.2 Bibliographie sur la modélisation d'un échangeur thermique	12
1.2.1 Modélisation dynamique en dimension infinie	13
1.2.2 Modélisation stationnaire	15
1.2.3 Modélisation dynamique en dimension finie	15
1.3 Modélisation dynamique d'un Échangeur Thermique à Contre-Courant : les dif- férentes représentations étudiées durant la thèse	16
1.3.1 Hypothèses choisies	17
1.3.2 Représentation avec l'enthalpie comme variable d'état : Modèle A	18

1.3.3	Représentation avec comme vecteur d'état l'entropie : Modèle B	21
1.3.4	Représentation hamiltonienne à port irréversible : Modèle C	23
1.3.5	Représentation sous forme bilinéaire : Modèle D	26
1.4	Conclusion	29
2	Commande d'un Échangeur Thermique à Contre-Courant	31
2.1	Introduction	31
2.1.1	État de l'art de la commande d'un échangeur thermique	31
2.1.2	Plan du chapitre	32
2.2	Modèle dynamique pour la commande	32
2.2.1	Hypothèses de travail	32
2.2.2	Modèle dynamique en température	33
2.2.3	Présentation du problème de commande	33
2.3	Présentation de la méthode de forwarding	34
2.3.1	La méthode de forwarding avec un système non-linéaire	34
2.3.2	Application à un système bilinéaire	36
2.4	Analyse du modèle bilinéaire de l'échangeur	36
2.4.1	Formulation du modèle bilinéaire pour la commande	36
2.4.2	Propriétés du modèle de l'échangeur	37
2.4.3	Robustesse de la loi de commande par action intégrale	42
2.4.4	Fonction de saturation de l'entrée	42
2.5	Loi de commande	42
2.6	Application à l'ETCC	45
2.6.1	Conditions opératoires	45
2.6.2	Régulation de la température	46
2.6.3	Robustesse de la loi de commande	46
	Variation sur la température d'entrée T_{in}	47
	Variation du débit du fluide non commandé	47
	Limites de la commande	48
2.7	Application à l'ETCC en utilisant un observateur	50
2.7.1	Observateur : Rappel et synthèse	50
2.7.2	Propriétés d'observabilité de l'échangeur à contre-courant	51
2.7.3	Observateur	53
2.7.4	Loi de commande sur l'ensemble système & observateur	55
2.7.5	Simulations de commande	58
2.8	Conclusion	60

3	Modélisation systématique d'échangeurs thermiques en série	63
3.1	Introduction	63
3.1.1	État de l'art de la modélisation de réseau simple	63
3.1.2	Plan du chapitre	64
3.2	Représentation d'un bloc élémentaire d'un échangeur thermique	65
3.2.1	Hypothèses sur l'échangeur de chaleur	65
3.2.2	Équation de bilan de masse pour le bloc élémentaire	66
3.2.3	Équation de bilan d'enthalpie pour le bloc élémentaire	66
3.3	Liaison en cascade de blocs élémentaires	68
3.3.1	Liaison en cascade de deux blocs élémentaires	68
3.3.2	Connexion d'un système : deux blocs élémentaires avec un troisième	74
3.3.3	Connexion d'un système : i blocs élémentaires avec un autre bloc	79
3.3.4	Connexion d'un système : i blocs élémentaires avec j blocs additionnels	82
3.4	Conclusion	84
4	Modélisation systématique d'un réseau d'échangeurs thermiques	85
4.1	Introduction	85
4.2	Généralisation du modèle d'échangeur thermique et définitions pour le modèle de réseau d'échangeurs thermiques	86
4.2.1	Généralisation du modèle d'échangeur de chaleur	86
4.2.2	Définitions pour le modèle de réseau d'échangeurs de chaleur	90
4.3	Collecteurs : ajout d'un flux issu d'un échangeur de chaleur en parallèle	90
4.3.1	Ajout d'un échangeur de chaleur en parallèle sur le flux Q :	91
4.3.2	Ajout d'un $n^{ième}$ échangeurs en chaleur en parallèle sur le flux Q	95
4.4	Répartiteurs : déviation d'une fraction d'un flux vers un échangeur de chaleur en parallèle	99
4.4.1	Ajout d'un échangeur de chaleur en parallèle sur le flux Q :	99
4.4.2	Ajout de plusieurs échangeurs de chaleur successivement sur le flux Q	103
4.5	Conclusion	107
5	Commande d'un réseau d'échangeurs thermiques	109
5.1	Introduction	109
5.2	Bibliographie de la commande de réseau	110
5.2.1	Réseau, agents et systèmes multi-agents	111
	Réseau	111
	Agent	111

Système multi-agents	112
5.2.2 Commande de système multi-agents	112
Objectif de commande	113
Architecture de commande	113
Algorithme de commande	114
5.3 Méthode par la recherche d'extremum (ou Extremum-Seeking) : Aperçu et bibliographie	116
5.3.1 Première implémentation de l'Extremum-Seeking : Krstić and Wang (2000)	116
5.3.2 Implémentation : amplitude du signal d'excitation dépendant du temps :Tan et al. (2009)	117
5.3.3 Implémentation : amplitude du signal d'excitation dépendant de la sortie :Wang et al. (2016)	117
5.3.4 Implémentation : gradient calculé avec les "moindres carrés récursifs" : Chioua et al. (2016)	118
5.4 Commande avec un graphe de communication complet	118
5.4.1 Réseau étudié	119
5.4.2 Objectif de commande	120
5.4.3 Résultat de commande	120
5.5 Commande avec un graphe de communication connexe	120
5.5.1 Réseau étudié	121
5.5.2 Réseau de communication connexe et commande distribuée	121
5.5.3 Estimateur PIDACE	123
5.5.4 Résultat de commande	125
5.6 Conclusion	126
6 Conclusion générale et perspectives	129
Partie Modélisation	129
Conclusion	129
Perspectives	130
Partie Commande	131
Conclusion	131
Perspectives	132
Bibliographie	133

A	Articles de conférence	141
A.1	Représentation d'un réseau d'échangeurs de chaleur basée sur le formalisme des graphes	141
A.2	Commande robuste d'une classe de systèmes bilinéaires basée sur le forwarding .	148
A.3	Optimisation distribuée d'un réseau d'échangeurs thermiques basée sur la méthode d'Extremum-Seeking	155
A.4	Représentation hamiltonienne à ports d'un échangeur de chaleur	162

Table des figures

1.1	Exemple de réseau avec des échangeurs thermiques	9
1.2	Deux exemples d'échangeurs thermiques tubulaires	10
1.3	Deux exemples d'échangeurs thermiques à plaque	11
1.4	Illustration de l'échangeur à contre-courant et co-courant	12
1.5	Échangeur thermique : bloc de base	17
1.6	Échangeur thermique comme une cascade de n blocs de base	17
2.1	Échangeur thermique comme une cascade de n blocs de base.	32
2.2	Domaine de la sortie en fonction de l'entrée normalisée	46
2.3	Température en Kelvin de la sortie (bleu), de la valeur souhaitée (vert) et de l'entrée de commande normalisée (rouge)	47
2.4	Perturbation sur la variable $x_{in} = T_{in}$	48
2.5	Perturbation sur la variable \bar{q}	48
2.6	Perturbation de \bar{q} qui entraîne une saturation de la commande	49
2.7	Perturbation sur \bar{q} qui entraîne une instabilité de la commande	49
2.8	Comparaison des courbes de commande	50
2.9	Résultats de simulation de l'observateur	59
2.10	Système simulé en boucle fermée avec observateur et commande par forwarding .	60
2.11	Système simulé avec une perturbation sur \bar{q} à $t = 5.10^4s$	60
3.1	Bloc élémentaire pour la représentation d'un échangeur de chaleur avec les flux convectifs entrants et sortants (flèches horizontales) et le flux de transfert de chaleur (flèche vertical)	65
3.2	Deux blocs élémentaires et leurs flux massique d'entrée et de sortie	68
3.3	Deux blocs élémentaires avec leurs flux d'enthalpie et les transferts de chaleur. .	68
3.4	Deux blocs élémentaires et les relations de connexion de flux de matière	68
3.5	Deux blocs élémentaires et les relations de connexion des flux d'enthalpie	68

3.6	Représentation graphique des interconnexions en débit massique de deux blocs élémentaires	69
3.7	Représentation graphique des connexions en enthalpie entre deux blocs élémentaires.	69
3.8	La relation d'interconnexion des sous-systèmes $1:2$, $\bar{1}:\bar{2}$ et $3,\bar{3}$ avec les flux de masse	74
3.9	La relation d'interconnexion des sous-systèmes avec les flux d'enthalpie	75
3.10	Relation des flux de matière entre les système à i blocs et celui à 1 bloc	79
3.11	Relation des flux d'enthalpie entre les système à i blocs et celui à 1 bloc	79
3.12	La relation d'interconnexion des sous-systèmes $1:i$, $\bar{1}:\bar{i}$ et $1:j$, $\bar{1}:\bar{j}$ suivant les flux d'enthalpie.	82
4.1	Flux convectifs dans un collecteur pour les compartiments $\{1:k\}$, $\{k+1:i\}$ et $\{1:j\}$. Les notations des flux sont la référence pour les définitions des matrices et vecteurs ci-après.	91
4.2	Flux convectifs dans un collecteur. Généralisation. Les notations des flux sont la référence pour les définitions des matrices et vecteurs ci-après.	95
4.3	Flux convectifs dans un répartiteur sur le courant Q	99
4.4	Flux convectifs dans un répartiteur sur un seul courant de convection Q . Les notations des flux sont la référence pour les définitions des matrices et vecteurs.	104
5.1	Exemple d'architecture de commande	114
5.2	Schéma d'Extremum-Seeking tiré de Krstić and Wang (2000)	117
5.3	Schéma d'Extremum-Seeking tiré de Tan et al. (2009)	117
5.4	Schéma d'Extremum-Seeking tiré de Wang et al. (2016)	118
5.5	Schéma d'Extremum-Seeking basé sur Chioua et al. (2016)	118
5.6	Réseau de trois échangeurs thermiques en parallèle	119
5.7	Sortie du système $y(\alpha, \beta)$	120
5.8	Bloc-diagramme de la commande du réseau	120
5.9	Commandes α , β et fonction coût $J = T_{client,1} + \frac{Q_{c,2}}{Q_{c,1}} T_{client,2}$ du système	121
5.10	Réseau de 5 échangeurs thermiques à contre courant	122
5.11	Définition des agents par les objectifs de commande	122
5.12	Bloc-diagramme de la commande du réseau	123
5.13	Profil des températures des sources	126
5.14	Gradients des estimées de la fonction coût : $\frac{d\hat{J}_i}{\alpha_i}$	126
5.15	Résultats de simulation	127

Introduction Générale

Contexte : Diminution de la consommation d'énergie

Aujourd'hui, nous utilisons le terme *consommation* quotidiennement pour évoquer des sujets aussi divers que variés : l'énergie, les ressources, les biens... Depuis les différentes crises : sanitaires, économiques et surtout l'accentuation des enjeux environnementaux, la tendance est à réduire au maximum celle en relation avec l'énergie ou du moins à mieux l'exploiter. Il est communément admis que cette dernière est en hausse, du fait de l'augmentation démographique et du nombre croissant d'outils nécessitant de l'énergie plus particulièrement électrique et/ou thermique. De plus, de nombreux systèmes, notamment industriels, n'ont pas ou ont peu évolué au cours des dernières décennies car ce n'était pas légalement nécessaire et/ou financièrement intéressant. En effet, il n'est pas rare de voir des procédés opérés en utilisant des logiciels et des interfaces de commande datant de plus de 20 ans dont la stabilité n'est plus à démontrer mais pour lesquels l'efficacité énergétique peut être améliorée. Ce retard peut aussi être expliqué par le fait que la mise à jour des systèmes d'exploitation pourrait entraîner un arrêt de l'activité. Mais également par la frilosité vis-à-vis d'un changement de logiciels stables qui ont fait leurs preuves face à d'éventuels bugs qui pourraient être des freins à la production. Cela pourrait donc occasionner, au delà de la perte financière, des désagréments pour les usagers, plus ou moins importants en fonction du temps de remise en route du processus avec de nouvelles versions. Il faut rajouter aussi l'aspect réglementaire qui parfois n'oblige pas les industriels à améliorer l'efficacité énergétique de leurs systèmes de production. Ce dernier aspect peut toutefois être un accélérateur d'innovation, poussant les industriels à se mettre en accord avec les nouvelles normes. En parallèle de cela, nous pouvons voir que les réseaux de distribution d'énergie se complexifient afin de répondre à la demande croissante en énergie (électrique et/ou thermique). Nous savons également, grâce aux différentes études (Foda et al. (2020) ; Anxionnaz et al. (2008)), qu'il est possible d'améliorer l'efficacité des systèmes (nous entendons par là, consommer moins pour produire autant). Cela passerait par la modernisation des procédés en utilisant des méthodes de conception plus novatrices intégrant dès le départ des objectifs d'amélioration de l'effica-

cit  nerg  tique. Un autre levier consiste à mettre en place des techniques de récupération des énergies thermiques pour les réinjecter dans le processus industriel ou les valoriser par ailleurs. La récupération des énergies thermiques, habituellement qualifiées de "chaleur fatale" (détails donnés dans le chapitre 1), est en soi un sujet d'actualité faisant l'objet d'un durcissement des réglementations incitant les industriels à se pencher sur des solutions techniques de récupération d'énergie thermique et de son exploitation par la suite. Un troisième levier technologique pour améliorer l'efficacité énergétique sera le développement de nouvelles méthodes de pilotage des systèmes énergétiques de sorte à ce que ces derniers fonctionnent autours de régimes efficaces énergétiquement. Cela devient une évidence avec les réseaux énergétiques incluant plusieurs sources dont certaines peuvent avoir un caractère intermittent (par exemple l'énergie solaire et l'énergie éolienne) qui impacte la stabilité du réseaux. Au delà de cet aspect critique concernant la stabilité, les méthodes de pilotage automatique permettent de gagner en flexibilité et en robustesse dans le fonctionnement des réseaux énergétiques.

Les travaux de cette thèse, sont axés autour de ce dernier levier qu'est la commande automatique des réseaux énergétiques et plus précisément les réseaux thermiques, dits passifs, composés essentiellement d'échangeurs de chaleur. Nous avons donc développé des modèles dynamiques allant de l'échelle de l'échangeur de chaleur simple jusqu'au réseau thermique. Pour le premier, nous avons développé un modèle dynamique structuré sous une forme bilinéaire puis l'avons utilisé pour la synthèse d'observateur et de commande non linéaire robuste. Pour le deuxième (le réseau), nous avons proposé un formalisme générique de modélisation dynamique codifié par la topologie du graphe formé par le réseau et nous avons par la suite proposé une méthode d'optimisation distribuée sur un exemple académique de réseau thermique.

Motivation : Economie d'énergie/ Utilisation de la chaleur fatale

Depuis les années 70, notamment depuis la première crise pétrolière, les pays non producteurs de pétrole ont cherché à développer d'autres alternatives énergétiques telle que l'énergie nucléaire ou à diversifier l'approvisionnement en énergies fossiles pour assurer leur indépendance énergétique. Ceci a aussi amené les industriels des secteurs dépendant du pétrole ou, de manière générale des énergies fossiles, à revoir les technologies de transformation d'énergie afin de les rendre plus efficaces. L'utilisation optimale des énergies fossiles est ainsi devenue un objectif à atteindre et l'indépendance énergétique, un enjeu stratégique pour lequel des moyens de recherche et développement ont été mis en place afin d'y parvenir (Waide et al. (1997)). En France, ceci s'est traduit par le recours à l'énergie nucléaire et l'accélération du programme d'installation de centrales nucléaires pour produire de l'électricité (plan Messmer Percebois (2013)). Par

ailleurs, de nouvelles réglementations et normes, notamment dans le secteur du bâtiment, ont été mises en place dans un objectif d'économie d'énergie (Foda et al. (2020)). Ces recherches et développements ont été étendus à la transformation des énergies renouvelables (hydraulique, solaire, biomasse ...) dans le contexte plus récent du réchauffement climatique. En effet, la prise en compte de ce dernier a conduit à la mise en place de mesures environnementales pour aller vers des industries décarbonées et de programmes de recherche qui visent à développer de nouveaux outils technologiques pour plus d'efficacité énergétique.

L'échangeur de chaleur ou les réseaux d'échangeurs de chaleur font partie de ces outils permettant de transférer la chaleur et jouant un rôle clé dans l'optimisation énergétique des procédés. Ils sont au cœur même des systèmes thermodynamiques. Ils ont fait l'objet de nombreuses études tant sur leur conception que sur leur caractérisation (Anxionnaz et al. (2008)) (structure, efficacité d'échange de chaleur, quantité et nature des matériaux nécessaires à sa fabrication) ou sur la représentation de leur comportement (modèle dynamique, synthèse de réseau) (Roetzel et al. (2020a)). Les échangeurs thermiques ou les réseaux d'échangeurs thermiques sont utilisés afin de modifier la température d'un fluide. Cependant, ils sont majoritairement dimensionnés pour fonctionner efficacement dans un ou deux régimes permanents. Dès lors que les fluides, les débits ou les températures évoluent, le système n'est plus optimal au niveau de l'échange de chaleur. Néanmoins, certains systèmes peuvent prendre plusieurs heures pour atteindre le régime permanent. Il est alors intéressant d'accorder une attention particulière à la partie transitoire (c'est à dire à dynamique) qui est souvent laissée libre (non commandée) lors de la mise en route. De plus, l'étude des trajectoires du système pourrait permettre d'ajuster le fonctionnement lorsque les échangeurs subissent un encrassement interne en mettant en place des commandes tolérantes aux défauts. Cela fait partie de la commande dite "en ligne" qui s'effectue de manière autonome à chaque instant. Il est possible d'automatiser celle d'un ou plusieurs échangeurs dans un réseau et ainsi adapter leur fonctionnement en temps réel. Les machines thermiques en sont un exemple (Kim et al. (2003)), elles sont constituées d'un réseau d'échangeurs. Le fluide froid devra passer successivement dans différents échangeurs afin de récupérer de l'énergie des différentes sources chaudes. De même, lorsque les réseaux sont conçus, ils sont généralement optimisés pour deux à trois modes de fonctionnement. Cependant, leur commande n'est pas prévue en cas d'encrassement ou de perturbations trop importantes autour de leur point de fonctionnement optimal. Une commande en ligne permettrait à l'ensemble du système de s'adapter aux variations de flux mais également au vieillissement qui, ensemble, peuvent induire de très grandes différences sur le ou les régimes permanents prévu à l'origine.

Objectif : Commande distribuée de réseaux de systèmes dynamiques thermiques

Afin d'optimiser le pilotage d'un système, un réseau, il est nécessaire de bien connaître son comportement dynamique. Modéliser un réseau d'échangeurs thermiques est une tâche qui peut être extrêmement compliquée en fonction du degré de précision qui est recherché pour le modèle et les hypothèses adoptées. Une fois ce choix effectué, il est possible, à partir de lois physiques, de donner des équations qui permettront de décrire le comportement du système (Roetzel et al. (2020d)). Ces équations seront calculées en fonction des variations de paramètres et de l'état du réseau. Une fois celles-ci établies, leur analyse permettra de connaître l'étendue des possibilités en termes de régulation. Pour cela, le système peut être réécrit dans l'objectif d'obtenir des équations permettant l'application des lois de commande. Dans notre cas, nous avons cherché à structurer la représentation d'un échangeur thermique afin que le modèle puisse s'appliquer aux différents types et ainsi avoir une même forme pour tous les éléments qui composent le réseau. Une fois cette structuration faite, nous pouvons nous concentrer sur la synthèse de lois de commande de ce dernier. Les travaux de cette thèse se positionnent sur des réseaux préconçus que nous cherchons à automatiser. Pour cela, nous pouvons soit utiliser les commandes en place soit en rajouter d'autres afin d'en permettre l'optimisation. Cela dépend des capacités et de la modularité qu'offre la configuration matérielle du réseau. Nous avons développé deux lois de commande distinctes. La première, basée sur l'extremum seeking, est une commande à appliquer sur chacun des actionneurs (ici les vannes d'entrées des échangeurs) avec un partage des informations avec leurs voisins (le sens du voisinage est défini dans le chapitre 5). Nous avons un réseau de communication connexe qui est sous forme distribuée : les informations d'un actionneur ne sont transmises qu'à une partie des autres et, grâce au caractère connexe du réseau de communication, l'information se propage au fur et à mesure dans le système. Grâce au partage de l'information de proche en proche, des actions locales peuvent être décidées de manière à contribuer à l'optimisation d'une "fonction coût globale". La deuxième loi de commande est basée sur une approche qui se situe à mi-chemin entre le mode distribué (défini précédemment) et le mode centralisé. Tous les actionneurs auront les informations venant d'un point principal. Celui-ci ne verra pas tous les états mais uniquement les données importantes pour calculer l'action à effectuer en local. Cette approche permet de résoudre l'un des principaux désavantages d'un réseau centralisé, souvent lent pour une commande en ligne et très gourmand en terme de ressources de calcul.

Contributions de la thèse

Les principales contributions de la thèse concernent :

1. La représentation dynamique générique des échangeurs à contre-courant en cascade.
2. La représentation dynamique générique des principales configurations topologiques qui interviennent dans les réseaux d'échangeurs en considérant des éléments d'interconnexion tels les collecteurs et les répartiteurs.
3. La synthèse d'observateur permettant la reconstruction des températures internes d'un échangeur thermique à contre-courant en mesurant les températures d'entrées et de sorties.
4. La synthèse de lois de commande permettant la stabilisation robuste autour d'un point de fonctionnement d'un échangeur thermique à contre-courant (cf. article de conférence Zitte et al. (2020) - annexe A.2).
5. La synthèse de lois de commande distribuée basée sur la méthode d'extremum seeking permettant d'optimiser une fonction coût sur un réseau d'échangeurs thermiques (cf. article de conférence Zitte et al. (2018) - annexe A.3).

Plan de la thèse

Dans le Chapitre 1, nous faisons un état de l'art sur l'échangeur thermique, son fonctionnement, les technologies utilisées et les principaux modèles dynamiques utilisés. Ensuite nous passons en revue les différentes représentations du modèle dynamique d'un échangeur thermique. Pour chacune d'entre elles, nous donnons leurs avantages et inconvénients, ainsi que leurs propriétés intrinsèques. Enfin nous étudions en détail différentes représentations structurées d'un échangeur à contre courant.

Le Chapitre 2 est orienté sur la synthèse de commande d'un échangeur modélisé par une cascade de compartiments. Après une bibliographie concernant la commande des échangeurs, nous proposons une loi de commande stabilisante autour d'un point de fonctionnement basée sur la méthode du forwarding donnée sous la forme d'un retour d'état non linéaire incluant un état intégrateur. Grâce à la synthèse d'un observateur, une commande est reformulée comme un retour de sortie. Enfin, nous donnons des résultats de simulation de cette dernière sur un modèle d'échangeur thermique.

Dans les Chapitres 3 et 4, nous nous concentrons sur la modélisation systématique (ou générique) de réseaux d'échangeurs thermiques sur la base de blocs élémentaires. Le Chapitre 3 se rapporte aux réseaux en série de plusieurs blocs élémentaires. Eux-même peuvent correspondre

à une discrétisation fine d'un volume important au sein d'un même échangeur. Le Chapitre 4 se concentre sur les connexions parallèles dans les réseaux. Pour ce faire, nous introduisons les collecteurs et les répartiteurs qui sont utiles pour décrire la quasi totalité des configurations de réseaux thermiques.

Le Chapitre 5 traite de la commande distribuée de réseau d'échangeurs thermiques. Nous commençons avec un état de l'art sur les différentes architectures de commande possibles pour les systèmes dynamiques en réseaux (commande distribuée, coopérative, etc.) ainsi que la définition de la terminologie utilisée. Puis nous présentons deux commandes, l'une basée sur l'Extremum-Seeking, l'autre sur l'action intégrale. Ces deux méthodes de commande visent à réaliser une optimisation distribuée d'une fonction "coût" globale.

Enfin, le Chapitre 6 donne les conclusions et les nombreuses perspectives des travaux réalisés durant cette thèse.

Chapitre 1

Échangeur de chaleur : technologie et représentation dynamique

1.1 Technologie de l'échangeur de chaleur : principe et structure

Les échangeurs de chaleur permettent de transférer l'énergie thermique d'un fluide à un ou plusieurs autres fluides, à travers une ou plusieurs parois. En effet, qu'ils soient l'élément principal ou secondaire d'un procédé, ils sont utilisés pour chauffer ou refroidir un fluide, impliquant ou pas un changement de phase en interne. Plusieurs ouvrages traitent du sujet, tels que Shah and Sekulic (2003), Kakaç et al. (2020), Klemes et al. (2015), Hesselgreaves et al. (2016) ou encore Ranganayakulu and Seetharamu (2018).

Une classification des échangeurs thermiques peut être faite selon trois critères :

- le type de fluides qui les parcourent,
- la forme géométrique de l'échangeur,
- les directions et le sens d'écoulement des fluides à l'intérieur de l'échangeur.

1.1.1 Classification selon le type de fluides

Dans les échangeurs thermiques, les fluides qui les traversent peuvent être en phase liquide, en phase gaz ou en mélange biphasique gaz/liquide dans le cas des évapo-condenseurs. Lorsque les fluides ne changent pas de phase durant leur traversée de l'échangeur ou au cours du temps, nous parlerons d'échangeurs monophasiques. Cependant, différents fluides peuvent parcourir le même échangeur monophasique. Ce dernier peut mettre en œuvre soit des phases identiques comme par exemple des échangeurs gaz-gaz ou liquide-liquide, soit des phases différentes comme par exemple les échangeurs gaz-liquide. Des échangeurs thermiques avec un seul fluide peuvent

exister. Ils récupèrent ou restituent de l'énergie à un solide qui fait office d'accumulateur de chaleur.

Le type d'échangeurs à utiliser ainsi que le choix des fluides se font en fonction des volumes à traiter, des gammes de flux et de puissance visées. Pour les fluides, le choix s'appuie sur les propriétés thermodynamiques de ces derniers et les conditions opératoires (Al-Zubaydi and Hong (2018), Davies and Hrnjak (2020)).

Les échangeurs de chaleur peuvent se retrouver aussi bien dans un réseau domestique que dans une installation industrielle. Ils sont incontournables pour réaliser un transfert d'énergie thermique pour chauffer ou refroidir un fluide ou un espace dans le cas d'un réseau domestique. La Figure 1.1a nous donne un exemple de réseau domestique dans lequel les échangeurs thermiques sont utilisés pour récupérer l'énergie venant du sol, ou pour transmettre l'énergie thermique dans une pièce de la maison. Nous pouvons les retrouver dans une installation industrielle afin d'assurer les conditions opératoires données par le procédé en action. Dans le cas des réacteurs chimiques (Richalet et al. (2014)), les températures de réactions sont contrôlées à l'aide d'un fluide caloporteur qui échange de la chaleur avec l'intérieur du réacteur. Cela peut être aussi le cas d'un réacteur nucléaire contrôlé à l'aide d'un échange thermique avec de l'eau pour maintenir une température à une valeur de référence tout en faisant attention à ce que la température de l'eau évacuée dans des cours d'eau ne dépasse pas des valeurs seuils (Michel and Kugi (2014)). Dans l'exemple en Figure 1.1b, quatre échangeurs sont mis en œuvre, deux liquide-liquide, un gaz-liquide et un gaz-gaz, chacun répondant à un besoin spécifique : réchauffer le liquide avant une réaction chimique par exemple.

Les échangeurs liquide-liquide sont souvent utilisés comme intermédiaires entre un circuit dit principal en contact avec une source d'énergie thermique toxique ou polluante et un circuit secondaire à partir duquel l'énergie sera exploitée. Ils représentent dans ce cas-là des éléments de couplage permettant de transférer de l'énergie thermique avec la possibilité d'avoir des conditions différentes (telle que la pression) entre les deux circuits.

Parmi les échangeurs gaz-gaz, les échangeurs air-air peuvent être associés à des systèmes de ventilation de bâtiments afin de récupérer de l'énergie thermique d'un flux d'air sortant avec un flux d'air entrant comme dans la Figure 1.1a.

Enfin, les radiateurs à bain d'huile constituent un exemple d'un échangeur liquide-gaz. Le liquide (l'huile) est chauffé à l'aide de résistances électriques (ou autre) et, par l'intermédiaire d'une paroi, échange de l'énergie thermique avec la phase gaz (l'air ambiant) (Liu et al. (2013)).

Si un des fluides ou tous les fluides d'un échangeur changent de phases à l'intérieur de l'échangeur, nous parlons alors d'échangeurs diphasiques ou multiphasiques. Des exemples simples sont les condenseurs dans lesquels un des fluides entrant en phase gaz va se liquéfier le long de la

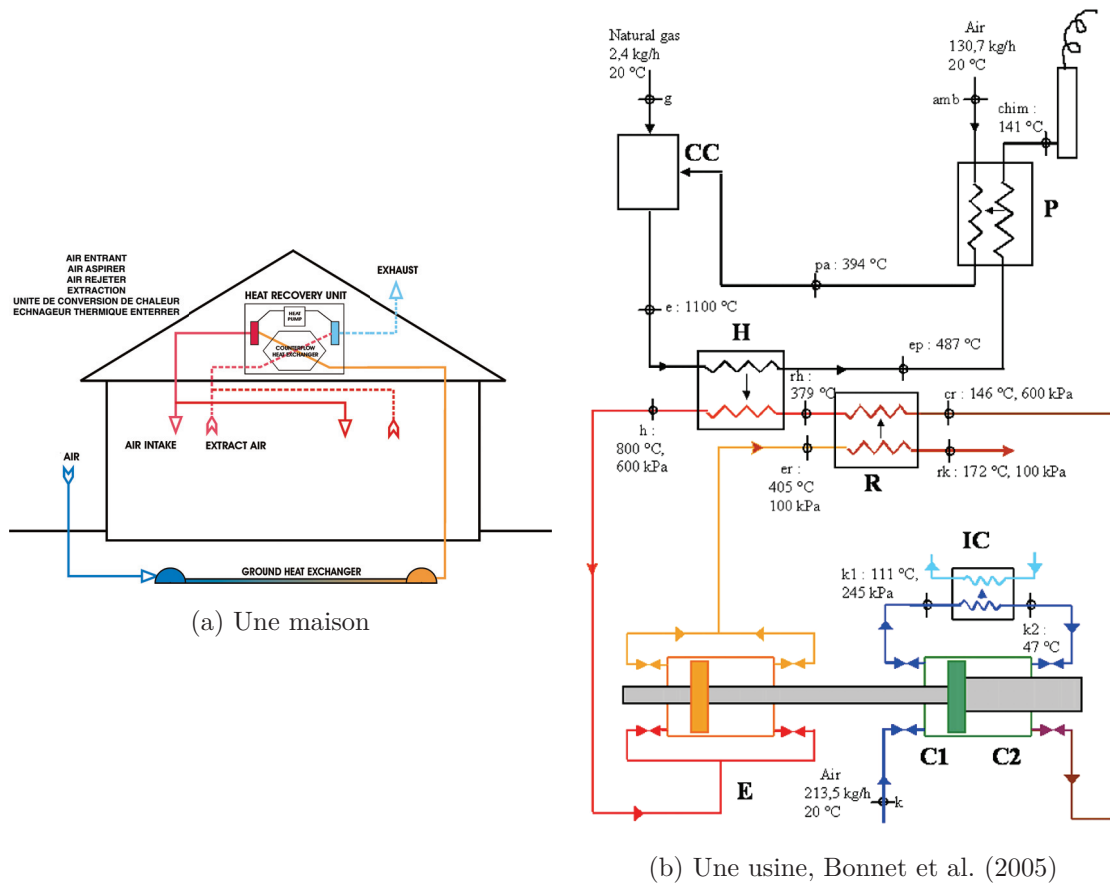


FIGURE 1.1 – Exemple de réseau avec des échangeurs thermiques

paroi d'échange et ressortir en phase liquide. Inversement, pour le cas des évaporateurs, le fluide entre en phase liquide, s'évapore le long de l'échangeur de chaleur et ressort en phase gaz. Dans ces deux cas, il y a une zone intermédiaire à l'intérieur des échangeurs dans laquelle le fluide est diphasique avec un mélange liquide/gaz. Selon la dynamique et les conditions opératoires au sein de l'échangeur, la frontière entre les zones monophasiques et diphasiques est mobile le long de l'échangeur. De nombreuses études ont été réalisées afin de modéliser ces échangeurs avec changement de phase (Grald and MacArthur (1992), Jensen and Tummescheit (2002), Bonilla et al. (2015), Jain and Alleyne (2015), Chu and Zhang (2019)). Cependant, ce sujet n'était pas le cœur de notre étude, il ne sera pas développé dans la suite de ce manuscrit.

1.1.2 Classification selon la forme géométrique de l'échangeur

Pour la partie technologique, les échangeurs de chaleur peuvent être classifiés en deux catégories : les échangeurs tubulaires et les échangeurs à plaques. Des photographies d'échangeurs prises à CPE Lyon, l'école d'ingénieur qui abrite le LAGEPP (Figure 1.2 et 1.3), illustrent ces deux catégories.

Les échangeurs tubulaires sont généralement composés de tubes cylindriques ou de faisceaux de tubes cylindriques insérés dans des cylindres plus grands permettant le déplacement des fluides le long de l'échangeur. Il en existe de nombreuses variantes en fonction des besoins et des choix des constructeurs. Deux exemples d'échangeurs à tubes spiralés (Figure 1.2a) et tube-calandre (Figure 1.2b) sont donnés en Figure 1.2. Les calandres sont les plaques semi-circulaires mises en quinconce pour faire cheminer le fluide en zig-zag à l'extérieur des tubes droits dans lesquels circulent le second fluide. Les échangeurs à tubes concentriques, qui sont les échangeurs technologiquement les plus simples, les échangeurs à tubes parallèles et d'autres variantes sont présentés dans les articles de Zavala-Río et al. (2009), Maldi et al. (2009), Richalet et al. (2014) ou encore Jain and Alleyne (2015).



(a) Échangeur thermique tubulaire à spirales



(b) Échangeur thermique tube-calandre

FIGURE 1.2 – Deux exemples d'échangeurs thermiques tubulaires

L'avantage principal des échangeurs à plaques est leur compacité. Ceci s'explique par la superposition des plaques qui induisent des surfaces d'échange plus importantes que les échangeurs tubulaires. La géométrie des plaques est une caractéristique importante car elle va induire la répartition des flux à l'intérieur de l'échangeur. Suivant la géométrie, les flux peuvent être plus ou moins linéaires et peuvent induire des zones de turbulences. Les propriétés de l'écoulement des fluides peuvent changer, entre autres, en fonction du débit à l'entrée de l'échangeur. Des

exemples de géométrie de plaques sont donnés en Figure 1.3 ainsi que dans les articles de Michel and Kugi (2014), Wang et al. (2018) ou encore Heo (2019).

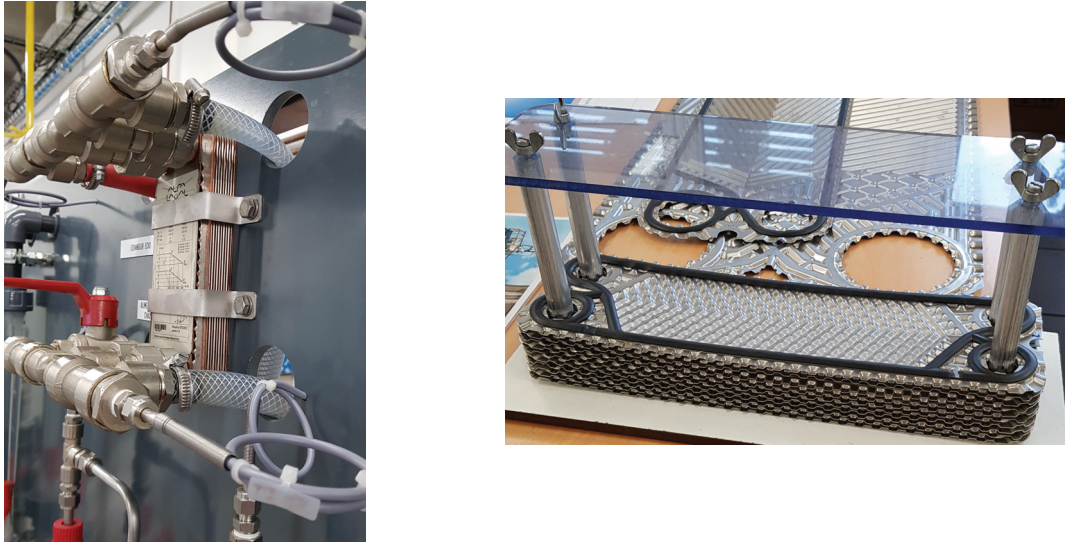


FIGURE 1.3 – Deux exemples d'échangeurs thermiques à plaque

Basés sur la technologie des échangeurs à plaques, des échangeurs thermiques à micro-canaux, utilisés pour refroidir les composants électroniques, ont fait l'objet d'études récentes qui sont une reprise des travaux de Tuckerman and Pease (1981). Un état de l'art de ce type d'échangeur est disponible dans la publication de Naqiuddin et al. (2018). Il nous montre la possibilité d'accroître drastiquement la surface d'échange d'un échangeur de chaleur. Cependant, cela augmente également la difficulté à gérer l'homogénéité de l'échange thermique lié à la distribution des fluides entre les canaux.

1.1.3 Classification selon le sens de l'écoulement des fluides

Il est également possible de caractériser les échangeurs thermiques en fonction du sens de l'écoulement relatif des fluides à l'intérieur de celui-ci. Si les fluides s'écoulent dans le même sens selon deux axes parallèles le long de l'échangeur, ils sont appelés "échangeurs co-courant" (Figure 1.4b). Si les fluides s'écoulent dans des sens opposés sur des axes parallèles, ils sont appelés "échangeurs contre-courant" (Figure 1.4a). Si les deux fluides s'écoulent sur deux axes non parallèles, ils sont appelés "échangeurs à courants croisés". De plus, il existe des échangeurs dont les fluides changent de direction et de sens le long de l'échangeur, comme par exemple les échangeurs tube-calandres dans lesquels les flux pourront être co-courants puis contre-courants ou encore courants croisés alternativement. Un deuxième exemple est donné en Figure 1.2a avec un flux suivant une spirale.

Cette caractérisation des échangeurs de chaleur est importante car elle va impacter d'une

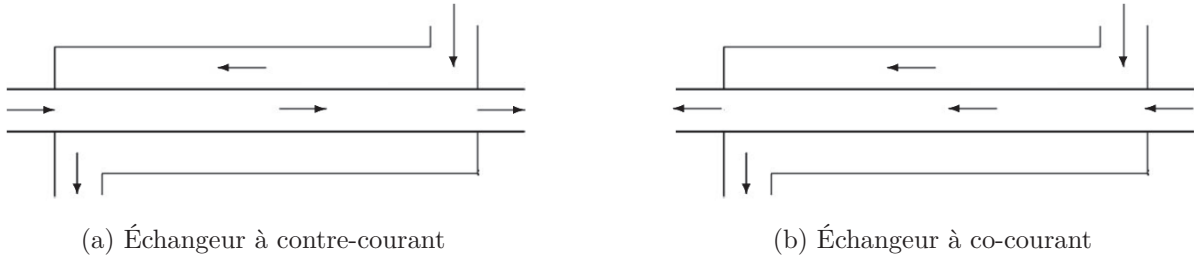


FIGURE 1.4 – Illustration de l'échangeur à contre-courant et co-courant

part le choix et la structure des modèles ainsi que les conditions limites de ces modèles et d'autre part les faiblesses et les forces de l'échangeur. En effet, les performances énergétiques d'un échangeur dépendent en partie du sens de l'écoulement (Jin et al. (2017)). C'est à partir des avantages et des inconvénients des différents échangeurs que de nouveaux types d'échangeurs sont conçus afin de répondre à des besoins spécifiques. Des exemples sont présentés dans Genié et al. (2018) et Ghani and Iranshahi (2019).

1.1.4 Choix pour mes travaux de thèse.

Dans la suite de ce manuscrit, nous allons nous restreindre à l'étude des échangeurs thermiques monophasiques liquide-liquide, pour lesquels les fluides sont considérés incompressibles. En effet, le gaz est une phase plus instable caractérisée par une grande sensibilité de sa masse volumique vis-à-vis des conditions thermodynamiques (température, pression). Nous allons aussi supposer des écoulements des fluides chauds et froids co-axiaux et à contre-courants. C'est une hypothèse de travail car de nombreuses parties de cette thèse, dont en particulier les parties concernant la modélisation, pourraient facilement être adaptées pour un fonctionnement à co-courant ou à courants croisés.

1.2 Bibliographie sur la modélisation d'un échangeur thermique

L'objectif de la modélisation est de traduire, avec des équations mathématiques, certains aspects du comportement physique du système étudié, représenté dans notre cas par l'échangeur thermique. Dans la littérature, les variables d'intérêts choisies, qui donnent l'état du système, sont, par exemple, la masse, l'énergie, la température, la pression ou l'entropie. Dans cette étape, il est primordial de préciser la perspective ou l'objectif dans lequel la modélisation est faite, ainsi que l'ensemble des hypothèses admises afin de définir le modèle et de délimiter son domaine de validité. La nature du modèle peut être définie par le choix de la variable spatiale (dimension finie, EDP...). Parmi les objectifs, nous pouvons citer celui d'avoir un modèle

mathématique permettant soit l'analyse d'un système à travers des scénarios de simulation, soit le dimensionnement des différents paramètres du système dans une démarche de conception, ou encore, la synthèse de lois de commande assurant la régulation, le suivi de trajectoire, etc.

Dans cette section, nous donnons un état de l'art sur les modèles qui ont été décrits dans la littérature pour les échangeurs thermiques. Nous commencerons par la modélisation dynamique en dimension infinie, qui est celle la plus proche de la réalité. Puis nous verrons la modélisation stationnaire en dimension infinie qui est utilisée pour le dimensionnement. Enfin, nous verrons la modélisation dynamique en dimension finie qui est utile pour la commande en ligne, étant moins lourde en terme de calculs. Dans cette thèse, nous nous limiterons à la description des modèles 1D.

1.2.1 Modélisation dynamique en dimension infinie

De par la nature distribuée dans l'espace des échangeurs de chaleur, les modèles dynamiques en dimension infinie sont principalement utilisés pour synthétiser les lois de commande. Soit un domaine spatial 1D représenté par un axe $(0, L)$ correspondant au sens d'écoulement des deux fluides à contre-courant dans l'échangeur. L'enthalpie massique des deux fluides est noté $h(x, t)$ et $\bar{h}(x, t)$ respectivement (t représente le temps et $x \in (0, L)$), leur vitesse d'écoulement v et \bar{v} et leur masse volumique ρ et $\bar{\rho}$. Les relations de bilan sur h et \bar{h} le long de l'espace sont définies comme suit :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v h + \Phi_D) + \Phi_{ech} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{h}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \bar{v} \bar{h} + \bar{\Phi}_D) + \bar{\Phi}_{ech} \quad (1.2)$$

avec Φ_D et $\bar{\Phi}_D$ les flux d'énergie dus à la dispersion thermique axiale dans le fluide, Φ_{ech} et $\bar{\Phi}_{ech}$ les flux de transfert de chaleur entre les deux fluides. Ces équations traduisent clairement le caractère non uniforme du système mais elles sont peu utilisées pour les calculs de dimensionnement et pour faire de la commande en ligne.

Dans la littérature portant sur le dimensionnement et la modélisation des échangeurs thermiques en dimension infinie, les hypothèses suivantes sont souvent admises (Michel and Kugi (2014)) :

- Un écoulement piston : la vitesse d'écoulement dans l'échangeur est uniforme $v(t)$,
- Une température constante au niveau des parois extérieures,
- Une absence de changement de phase pour les fluides,
- Une absence d'échange d'énergie avec l'extérieur : processus adiabatique,
- Une dispersion axiale de chaleur négligeable en comparaison avec la convection dans la direction du flux,

— Une absence d'accumulation d'énergie dans la paroi séparant les fluides.

En posant ces hypothèses, Michel and Kugi (2014) ont simplifié les équations (1.1) et (1.2) comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \Phi_{ech} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\Phi}_{ech} \quad (1.4)$$

Les premiers termes des membres à droite des égalités correspondent aux flux convectifs des enthalpies des fluides avec v et \bar{v} pour les débits des fluides en $m^3.s^{-1}$; les termes suivants correspondent à l'échange thermique entre les deux fluides. Les flux d'échanges thermiques sont modélisés par une relation de conduction thermique en fonction de la différence de température des deux fluides comme suit :

$$\Phi_{ech} = UA(\bar{T} - T) \quad (1.5)$$

$$\bar{\Phi}_{ech} = -\Phi_{ech} \quad (1.6)$$

Avec UA le coefficient de conduction thermique surfacique : U pour le coefficient d'échange en $W.m^{-2}.K^{-1}$ et A pour la surface d'échange en m^2 . Sur le modèle précédent, un changement de variable peut être effectué pour écrire les équations, non pas en fonction de l'enthalpie mais en fonction de la température des deux fluides. Ceci est d'un intérêt très pratique à partir du moment où la température est finalement la variable effectivement observée ou mesurée. La relation définissant l'enthalpie du fluide et la température, à pression constante, est :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_p(T) \quad (1.7)$$

avec $c_p(T)$ la capacité thermique des fluides en $J.K^{-1}.kg^{-1}$ qui est une fonction de la température.

En considérant que la capacité thermique des fluides est constante le long de l'échangeur de chaleur, l'équation 1.7 peut s'écrire de la façon suivante :

$$h(t) = c_p(T(t) - T_{ref}) + h_{ref} \quad (1.8)$$

avec T_{ref} et h_{ref} qui sont respectivement la température de référence et l'enthalpie de référence du fluide. Avec ce changement de variable (1.8), nous obtenons l'équation (1.9) :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \frac{UA}{\rho c_p} [\bar{T}(x,t) - T(x,t)] \\ \frac{\partial \bar{T}(x,t)}{\partial t} = +\bar{v}(t) \frac{\partial \bar{T}(x,t)}{\partial x} + \frac{UA}{\bar{\rho} c_p} [\bar{T}(x,t) - T(x,t)] \end{cases} \quad (1.9)$$

Cet exemple de représentation issu de Maidi et al. (2009) a été utilisé afin de faire la commande en température de l'échangeur. D'autres exemples sont également proposés dans Michel and Kugi (2014) ou Heo (2019).

1.2.2 Modélisation stationnaire

Pour dimensionner les échangeurs de chaleur ou optimiser les systèmes énergétiques (Roetzel et al. (2020c)), les thermiciens établissent généralement des modèles de bilans d'énergie stationnaires prenant en compte uniquement les phénomènes de convection et d'échanges thermiques entre les deux fluides. Ce type de modèles permet de calculer le flux d'énergie thermique échangé entre deux fluides d'un échangeur, en régime stationnaire, par une relation de type résistif. Celle-ci est exprimée comme un coefficient d'échange que multiplie une force motrice de l'échange thermique donnée en fonction des températures d'entrées et de sorties des deux fluides (équation (1.11)). Cette force motrice est connue sous le nom de moyenne logarithmique; elle est communément notée ΔT_{LM} et donnée par l'expression suivante (équation (1.10)) :

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_{out} - \bar{T}_{in}) - (T_{in} - \bar{T}_{out})}{\ln \frac{T_{out} - \bar{T}_{in}}{T_{in} - \bar{T}_{out}}} \quad (1.10)$$

où T_{out} et T_{in} sont respectivement les températures de sortie et d'entrée du fluide 1 et \bar{T}_{out} et \bar{T}_{in} celles du fluide 2. Ainsi le flux de chaleur moyen échangé entre les deux fluides, noté Φ , s'écrit comme suit :

$$\Phi = UA\Delta T_{LM} = UA \frac{T_{out} - \bar{T}_{in} - (T_{in} - \bar{T}_{out})}{\ln \frac{T_{out} - \bar{T}_{in}}{T_{in} - \bar{T}_{out}}} \quad (1.11)$$

Cette relation est généralement utilisée pour dimensionner les échangeurs thermiques vis-à-vis des conditions opératoires, dites nominales, en terme de températures d'entrée et de sortie ainsi que de puissance échangée (Roetzel et al. (2020b)). Elle permet alors de calculer le coefficient d'échange thermique global, noté UA , qui inclut les transferts de chaleur dans les couches limites de chaque côté de la paroi d'échange, le transfert de chaleur par conduction dans la paroi et la surface d'échange. Cela permet in fine de choisir une géométrie des parois d'échange adéquate, des matériaux adaptés et de dimensionner la surface d'échange.

1.2.3 Modélisation dynamique en dimension finie

Les modèles dynamiques en dimension finie ont été utilisés à la fois avec des objectifs de simulation et des objectifs de commande.

Modélisation dynamique pour la simulation La modélisation en dimension finie permet de répondre à un objectif de développement des modèles dynamiques 1D discrets (Horst et al. (2013), Jain and Alleyne (2015)). C'est une approche qui induit un compromis sur l'échelle minimale des phénomènes physiques que nous pouvons représenter par ce type de modèles, à partir du moment où nous faisons le choix d'une représentation en cascade de compartiments

homogènes. Moyennant une intégration en temps, ces modèles sont rapidement exploitables en simulation. Dans cette approche, l'échangeur thermique est représenté, en général, comme une cascade de volumes élémentaires interconnectés par des relations de flux convectifs ou conductifs (pour l'échange de chaleur). Ces volumes sont aussi considérés parfaitement agités avec un contenu homogène en terme de conditions thermodynamiques.

Modélisation dynamique pour la commande Les modèles dynamiques en dimension finie sont aussi utilisés pour un objectif de commande (par exemple Michel and Kugi (2014)). Il y a alors moins d'éléments dans la cascade et/ou des paramètres moins complexes, linéarisés ou invariants.

Le développement d'un modèle dynamique consiste à préciser, en plus des variables d'état du système, des variables de commande grâce auxquelles il est possible d'agir sur le comportement de celui-ci. À cela se rajoute aussi les variables mesurées, définies comme étant des sorties du système. Pour le cas de l'échangeur thermique en dimension finie, des modèles peuvent être développés dans lesquels les variables d'état sont l'ensemble des températures le long de l'échangeur ou bien d'autres grandeurs comme l'enthalpie (ou encore l'entropie). Pour les variables de commande, il est possible de considérer les débits et/ou les températures des deux fluides aux entrées de l'échangeur. Comme variables de sorties, les températures des deux fluides sortant de l'échangeur sont considérées. Dans les articles de Horst et al. (2013), de Michel and Kugi (2014), de Richalet et al. (2014) ou encore de Jain and Alleyne (2015), nous avons des exemples de commande d'échangeurs thermiques avec différentes possibilités pour les variables d'état et de commande.

Dans la section suivante, nous allons proposer différentes représentations d'un échangeur thermique en utilisant des variables d'état différentes telles que l'enthalpie ou encore l'entropie. Nous verrons également les avantages et inconvénients de ces différentes représentations.

1.3 Modélisation dynamique d'un Échangeur Thermique à Contre-Courant : les différentes représentations étudiées durant la thèse

Dans cette partie, nous allons voir les différentes représentations sur lesquelles nous avons travaillé. Afin de modéliser un Échangeur Thermique à Contre-Courant (ETCC), nous avons tout d'abord développé le modèle dynamique d'un bloc de base qui nous servira de repère pour le modèle dynamique global de l'échangeur. Ce bloc de base (Figure 1.5) est composé de deux compartiments séparés par une paroi à travers laquelle s'établit un flux de chaleur. Chacun de

ces deux compartiments est alimenté par un flux convectif. Les deux flux circulent à contre-courant. Le fluide s'écoule de droite à gauche pour le compartiment du bas et de gauche à droite pour le compartiment du haut. L'échange thermique s'effectue au niveau de la paroi et est représenté par la double flèche.

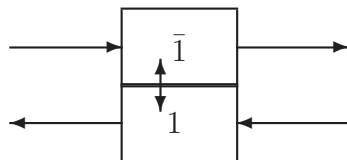


FIGURE 1.5 – Échangeur thermique : bloc de base

Pour chaque représentation, nous verrons son écriture pour le bloc de base (Figure 1.5), puis celle de l'échangeur considéré comme une cascade de n blocs (Figure 1.6).

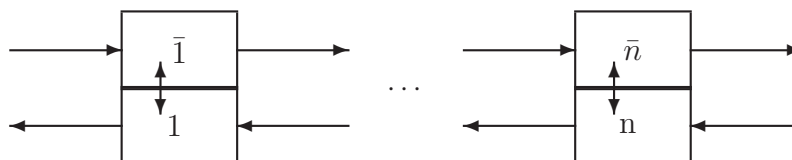


FIGURE 1.6 – Échangeur thermique comme une cascade de n blocs de base

1.3.1 Hypothèses choisies

Comme la modélisation avait pour objectif la commande, les hypothèses suivantes ont été utilisées dans cette partie :

- Les fluides *chaud* et *froid* sont en phase liquide,
- La pression P est constante et uniforme le long de l'échangeur,
- Le coefficient de transfert de chaleur est constant et uniforme le long de l'échangeur : $UA = \lambda$,
- Les masses volumiques des deux fluides, notées ρ et $\bar{\rho}$, ainsi que leurs capacités thermiques c_p et \bar{c}_p peuvent être différentes mais sont constantes,
- Les débits massiques Q et \bar{Q} peuvent être différents mais uniformes,
- Chaque compartiment a un volume $V = \bar{V}$ fixé : il s'agit d'une discrétisation uniforme,
- La paroi entre les deux fluides n'accumule pas d'énergie,
- Les parois extérieures de l'échangeur sont parfaitement isolées de l'environnement qui l'entoure : il n'y a pas de déperdition de chaleur.

Nous allons donner, dans les sous-sections 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5, quatre représentations différentes de l'échangeur.

1.3.2 Représentation avec l'enthalpie comme variable d'état : Modèle A

Représentation de 1 bloc : En considérant la pression constante et uniforme le long de l'échangeur et les volumes de chaque compartiment égaux et fixés, l'enthalpie peut être considérée comme une variable d'état. En effet, en écrivant le bilan d'énergie (1.12) avec U l'énergie interne du système, V le volume et P la pression du compartiment, nous voyons que la dérivée temporelle de l'enthalpie est égale à la dérivée temporelle de l'énergie interne :

$$H = U + PV \quad (1.12)$$

La quantité totale d'enthalpie dans le compartiment 1 que nous notons H_1 est donnée par :

$$H_1 = \rho V h_1(T_1) \quad (1.13)$$

avec $h_1(T_1)$ l'enthalpie spécifique qui dépend de la température du fluide. De plus, nous avons la relation suivante entre l'enthalpie spécifique et la température du fluide :

$$h(t) = c_p(T(t) - T_{ref}) + h_{ref} \quad (1.14)$$

Les variables T_{ref} et h_{ref} sont respectivement la température et l'enthalpie dans les conditions de référence. Ces dernières dépendent du fluide que nous considérons et peuvent être trouvées dans des tables de données thermodynamiques. Ainsi, grâce aux équations (1.12), (1.13) et (1.14), nous pouvons écrire l'équation de bilan (Sandler (1999)) pour le compartiment 1 :

$$\dot{H}_1 = \lambda(\bar{T}_1 - T_1) + Qh_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1 \quad (1.15)$$

avec h_{in} l'enthalpie spécifique massique du flux en entrée du compartiment. Le premier terme correspond au transfert d'énergie avec le compartiment $\bar{1}$. Le deuxième et le troisième termes correspondent respectivement aux flux convectifs d'entrée et de sortie du compartiment. Nous avons fait l'hypothèse que le fluide est homogène dans le compartiment et que le flux en sortie est dans les mêmes conditions thermodynamiques que le fluide à l'intérieur du compartiment. De la même manière, nous pouvons écrire l'équation pour le compartiment $\bar{1}$:

$$\dot{\bar{H}}_1 = -\lambda(\bar{T}_1 - T_1) + \bar{Q}\bar{h}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}V} \bar{H}_1 \quad (1.16)$$

Dans l'équation (1.16), le terme d'échange thermique est le même que dans l'équation (1.15), mais comptabilisé avec un signe négatif. En effet, il y a une égalité entre des flux de chaleur échangés à travers la paroi car cette dernière n'accumule pas d'énergie. Nous cherchons à écrire ces équations en remplaçant la température par l'enthalpie, afin de les écrire sous forme matricielle. Cela permettra une analyse et des manipulations simplifiées lors de la synthèse de la loi

de commande du système. En reprenant les équations (1.13) et (1.14), nous pouvons exprimer les températures en fonction des enthalpies comme suit :

$$T_1 = \frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{\rho V} H_1 - h_{ref} \right) + T_{ref} \quad (1.17)$$

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{\bar{c}_p} \left(\frac{1}{\bar{\rho} V} \bar{H}_1 - \bar{h}_{ref} \right) + \bar{T}_{ref} \quad (1.18)$$

En faisant l'hypothèse que les fluides qui circulent de chaque côté de l'échangeur ont les mêmes propriétés, nous obtenons les égalités suivantes sur les paramètres : $c_p = \bar{c}_p$, $\rho = \bar{\rho}$, $h_{ref} = \bar{h}_{ref}$ et enfin $T_{ref} = \bar{T}_{ref}$. Nous avons alors le terme d'échange thermique des équations (1.15) et (1.16) qui s'écrit :

$$\lambda(\bar{T}_1 - T_1) = \lambda \left(\frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{\rho V} \bar{H}_1 - h_{ref} \right) + T_{ref} - \left(\frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{\rho V} H_1 - h_{ref} \right) + T_{ref} \right) \right) \quad (1.19)$$

$$= \frac{\lambda}{c_p \rho V} (\bar{H}_1 - H_1) \quad (1.20)$$

Le système d'équations peut donc s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + Q h_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1 \\ \dot{\bar{H}}_1 &= -\frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + \bar{Q} \bar{h}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nous pouvons ainsi avoir le système d'équations sous forme matricielle (équation (1.22)). Nous le complétons par la définition d'une sortie y , ou d'un vecteur de sortie, à travers une matrice de mesure C :

$$\dot{\mathbb{H}} = A\mathbb{H} + B\mathbb{H}_{in} \quad (1.22)$$

$$y = C\mathbb{H} \quad (1.23)$$

\mathbb{H} est le vecteur d'état égal à $[H_1, \bar{H}_1]^T$ et $\mathbb{H}_{in} = [h_{in}, \bar{h}_{in}]^T$ est le vecteur des entrées. La matrice A regroupe le terme d'échange et les termes convectifs internes. La matrice B correspond à la convection des flux d'entrée. Enfin, la matrice C donne les sorties du système. Nous les écrivons comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{Q}{\rho V} & \frac{\lambda}{\rho V c_p} \\ \frac{\lambda}{\rho V c_p} & -\frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Représentation d'une cascade de n blocs : Maintenant que nous avons la représentation pour un bloc de base, considérons l'échangeur comme n blocs en cascade. Nous avons des relations d'interconnexion entre ces différents blocs, données par des équations de continuité de flux de matière à chaque interface entre les blocs (équations (1.25) et (1.26)), ainsi que des relations de continuité de flux d'enthalpie (équations (1.27) et (1.28)) :

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q \quad (1.25)$$

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = \dots = \bar{Q}_n = \bar{Q} \quad (1.26)$$

$$Q_i h_{in}^i = \frac{Q_{i+1}}{\rho V} H_{i+1} \quad \forall i \in [1, n-1] \quad (1.27)$$

$$\bar{Q}_i \bar{h}_{in}^i = \frac{\bar{Q}_{i-1}}{\rho V} \bar{H}_{i-1} \quad \forall i \in [2, n] \quad (1.28)$$

En utilisant les relations des flux matière (équations (1.25) et (1.26)), celles des flux d'enthalpie peuvent être simplifiées et exprimées comme suit :

$$h_{in}^i = \frac{1}{\rho V} H_{i+1} \quad \forall i \in [1, n-1] \quad (1.29)$$

$$\bar{h}_{in}^i = \frac{1}{\rho V} \bar{H}_{i-1} \quad \forall i \in [2, n] \quad (1.30)$$

Le modèle de l'échangeur thermique peut donc être écrit avec la même forme matricielle que précédemment (équations (1.22) et (1.23)) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{H}} &= A\mathbb{H} + B\mathbb{H}_{in} \\ y &= C\mathbb{H} \end{aligned}$$

Cependant, les vecteurs et matrices changent de dimension afin de considérer le nouveau vecteur d'état. En effet, nous avons $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{2n}$ et le vecteur d'entrée $\mathbb{H}_{in} \in \mathbb{R}^2$, tels que :

$$\mathbb{H}^T = [H_1 \quad H_2 \quad \cdots \quad H_n \quad \bar{H}_1 \quad \bar{H}_2 \quad \cdots \quad \bar{H}_n] \quad (1.31)$$

$$\mathbb{H}_{in} = \begin{bmatrix} h_{in}^n \\ \bar{h}_{in}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{in} \\ \bar{h}_{in} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Les matrices $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ et $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2n}$ sont données comme suit :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} -\frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{Q}{\rho \bar{V}} & \frac{Q}{\rho \bar{V}} & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \frac{Q}{\rho \bar{V}} \\ -\frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{Q}{\rho \bar{V}} & & \frac{\lambda}{\rho V c_p} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\lambda}{\rho V c_p} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} \frac{\lambda}{\rho V c_p} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{array} & \begin{array}{ccc} -\frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} & & \frac{\lambda}{\rho V c_p} \\ \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ \frac{\lambda}{\rho V c_p} & & \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} - \frac{\lambda}{\rho V c_p} - \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \end{array} \end{array} \right] \quad (1.33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

L'avantage de ce modèle dynamique en dimension finie est que les matrices mises en évidence (A , B et C) présentent une forme structurée commode pour prendre en compte, de manière systématique, un nombre quelconque n de blocs élémentaires. Cependant, elle représente l'inconvénient d'avoir une matrice A dépendante de tous les paramètres de l'échangeur. Dans le cas d'une synthèse de loi de commande, par exemple avec le débit Q , le modèle ne sera plus linéaire mais bilinéaire. La représentation de cette section a été publiée dans Zitte et al. (2018).

Remarque 1 Dans le Chapitre 3, nous avons écrit un modèle en faisant la même démarche, mais la disposition des variables d'état dans les vecteurs \mathbb{H} et \mathbb{H}_{in} est différente et va induire des changements dans la structure des matrices.

1.3.3 Représentation avec comme vecteur d'état l'entropie : Modèle B

Nous pouvons aussi nous intéresser à l'entropie comme variable d'état pour décrire la dynamique d'un échangeur. En effet, l'entropie est la variable thermodynamique conjuguée en puissance à la température dans l'équation de Gibbs (Sandler (1999)). Elle est également la variable qui est utilisée dans le cadre de la représentation hamiltonienne à port dès que l'hamiltonien est l'énergie interne Duindam et al. (2009). La représentation avec l'entropie fait apparaitre

de manière explicite les termes de production irréversible d'entropie dans le bilan d'entropie. Nous présentons dans cette section un modèle dynamique de l'échangeur thermique en utilisant l'entropie comme variable d'état. De la même manière que précédemment, nous pouvons écrire les équations de bilans d'entropie sur chaque compartiment. Nous notons s_1 l'entropie spécifique (donnée en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et S_1 (donnée en $J.K^{-1}$) l'entropie du compartiment 1 alors :

$$S_1 = \rho V s_1(T_1) \quad (1.35)$$

Pour le compartiment 1, le bilan d'entropie s'écrit :

$$\dot{S}_1 = \frac{\Phi_1}{T_1^*} + Q s_{in} - \frac{Q}{\rho V} S_1 + \sigma_1 \quad (1.36)$$

Dans cette équation, nous retrouvons le transfert de chaleur entre les compartiments 1 et $\bar{1}$ (écrit comme flux d'entropie associée) qui correspond au premier terme et qui est donné par :

$$\frac{\Phi_1}{T_1^*} = \frac{\lambda(\bar{T}_1 - T_1)}{T_1^*} \quad (1.37)$$

Le deuxième et troisième termes correspondent au flux convectif d'entrée et de sortie du compartiment. Enfin, σ_1 correspond à la production irréversible d'entropie qui est composée de deux termes : celle due à la convection (précisément due à un mélange convectif instantané de deux fluides à des températures différentes) et celle due à l'échange de chaleur entre les compartiments 1 et $\bar{1}$. Cette dernière dépendra de la définition de T_1^* qui est la température de référence du flux d'entropie. En effet, cette température peut être associée à la paroi qui interface les deux fluides et à travers laquelle le flux de chaleur s'établit. Nous pouvons donc choisir arbitrairement $T_1^* = \bar{T}_1$, ce qui veut dire que l'interface est en équilibre thermodynamique avec le compartiment $\bar{1}$. Ainsi, la production irréversible d'entropie à l'échange sera entièrement comptabilisée dans le compartiment 1 (le choix opposé est aussi possible sans altérer la production totale d'entropie) et nous obtenons :

$$\dot{S}_1 = \frac{\lambda(\bar{T}_1 - T_1)}{\bar{T}_1} + Q s_{in} - \frac{Q}{\rho V} S_1 + \sigma_1 \quad (1.38)$$

avec la production irréversible d'entropie calculée à partir de l'équation de Gibbs égale à :

$$\sigma_1 = \Phi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{\bar{T}_1} \right) + \frac{Q}{T_1} (h_{in} - T_1 s_{in} - \frac{1}{\rho V} (H_1 - T_1 S_1)) \quad (1.39)$$

Pour le compartiment $\bar{1}$:

$$\dot{\bar{S}}_1 = -\frac{\lambda(\bar{T}_1 - T_1)}{\bar{T}_1} + \bar{Q} \bar{s}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} \bar{V}} \bar{S}_1 + \bar{\sigma}_1 \quad (1.40)$$

avec la production irréversible d'entropie qui n'a que les termes dûs au mélange par convection telle que :

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{Q}}{\bar{T}_1} (\bar{h}_{in} - \bar{T}_1 \bar{s}_{in} - \frac{1}{\bar{\rho} \bar{V}} (\bar{H}_1 - \bar{T}_1 \bar{S}_1)) \quad (1.41)$$

Avec le même raisonnement, nous pouvons définir la cascade de n blocs élémentaires qui représentent un échangeur sous forme discrétisée. Nous avons les mêmes égalités de flux de matière (équations (1.25) et (1.26)) et de chaleur (équations (1.29) et (1.30)) que précédemment. Pour les compartiments du bas, la convection allant de droite à gauche, les équations s'écrivent :

$$\dot{S}_i = \frac{\lambda(\bar{T}_i - T_i)}{\bar{T}_i} + \frac{Q}{\rho V}(S_{i+1} - S_i) + \sigma_i \quad i \in [1, n] \quad (1.42)$$

avec la production irréversible d'entropie qui est égale à :

$$\sigma_i = \Phi\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{\bar{T}_i}\right) + \frac{Q}{T_i \rho V}(H_{i+1} - T_i S_{i+1} - (H_i - T_i S_i)) \quad i \in [1, n] \quad (1.43)$$

Pour les compartiments du haut, la convection allant de gauche à droite, nous avons :

$$\dot{\bar{S}}_i = -\frac{\lambda(\bar{T}_i - T_i)}{\bar{T}_i} + \frac{\bar{Q}}{\rho V}(\bar{S}_{i-1} - \bar{S}_i) + \bar{\sigma}_i \quad i \in [1, n] \quad (1.44)$$

avec la production irréversible d'entropie qui est égale à :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\bar{Q}}{\bar{T}_i \rho V}(\bar{H}_{i-1} - \bar{T}_i \bar{S}_{i-1} - (\bar{H}_i - \bar{T}_i \bar{S}_i)) \quad i \in [1, n] \quad (1.45)$$

avec les termes \bullet_{n+1} et $\bar{\bullet}_0$ correspondant aux flux d'entrée de l'échangeur. Nous avons exactement les mêmes équations entre le bloc élémentaire et la cascade de n blocs.

L'avantage de ce modèle est la mise en évidence du terme de production irréversible d'entropie, qui permet une analyse de la passivité du système. Cependant, l'inconvénient est que ce terme est non-linéaire en température. La représentation de cette section a été publiée dans Zitte et al. (2018).

1.3.4 Représentation hamiltonienne à port irréversible : Modèle C

Dans cette partie, nous allons donner une représentation hamiltonienne à port irréversible de l'échangeur. La représentation hamiltonienne à port permet d'aborder aisément la modélisation de systèmes complexes avec plusieurs domaines de la physique tels que le domaine thermique, électrique, magnétique, mécanique, etc. (Duindam et al. (2009)). Ce formalisme de modélisation introduit dans les années 90 par Maschke and van der Schaft (1992) permet de décrire précisément la structure de l'interconnexion interne des différents éléments qui composent un système. Il permet aussi de distinguer clairement les éléments dits conservatifs et ceux dit dissipatifs via des lois constitutives adaptées mais aussi de montrer d'une manière directe des propriétés intéressantes telle que la passivité (Khalil and Dombre (2002)). Ce formalisme a été appliqué avec succès pour la modélisation de plusieurs types de systèmes. Il permet le développement de schémas numériques conservant les propriétés physiques ainsi que la synthèse de lois de commande utilisant la propriété de passivité. Il permet également de maintenir la structure géométrique

des systèmes qui est mise en évidence de cette façon. Ce formalisme a été étendu aux systèmes thermodynamiques irréversibles de manière à satisfaire à la fois le premier et second principe de la thermodynamique (Ramirez Estay (2012)); nous parlons alors de Représentation hamiltonienne à port irréversible. Nous allons donc utiliser ce formalisme pour décrire la dynamique d'un échangeur thermique en prenant l'hamiltonien défini par la somme des enthalpies de l'ensemble des compartiments et le vecteur des enthalpies (par compartiment) comme vecteur de variables d'état, et en rajoutant à cela les variables d'entrée et de sortie.

Proposition 1 *En réorganisant l'écriture obtenue avec les bilans d'enthalpie (1.21), nous pouvons écrire, pour un bloc, le système et ses sorties dans la forme hamiltonienne irréversible suivante :*

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = R(\mathbb{H})J\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbb{H}}(\mathbb{H}) + (B_1 + B_2\mathbb{H})u + (\bar{B}_1 + \bar{B}_2\mathbb{H})\bar{u} \quad (1.46)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^T + \mathbb{H}^T B_2^T \\ \bar{B}_1^T + \mathbb{H}^T \bar{B}_2^T \end{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{H_1}{\rho V} + h_{in} \\ -\frac{\bar{H}_1}{\rho V} + \bar{h}_{in} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

avec \mathbb{H} le vecteur d'enthalpie, $R(\mathbb{H}) = \lambda(T - \bar{T})$ le terme d'échange thermique, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -J^T$ une matrice antisymétrique, $\mathcal{H} = H_1 + \bar{H}_1$ l'Hamiltonien, les vecteurs et matrices B_1 , B_2 , \bar{B}_1 et \bar{B}_2 comme suivant :

$$B_1 = \begin{bmatrix} h_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{h}_{in} \end{bmatrix} \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

et enfin $u = Q$ et $\bar{u} = \bar{Q}$, les flux de convection pour les deux fluides, qui sont dans notre cas les variables de commande de l'échangeur.

Nous pouvons ainsi calculer la variation au cours du temps de l'enthalpie totale :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial\mathcal{H}^T}{\partial\mathbb{H}} \frac{d\mathbb{H}}{dt} = \mathbf{1}^T \frac{d\mathbb{H}}{dt} \\ &= \mathbf{1}^T \lambda(T_1 - \bar{T}_1) J \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbb{H}} + \mathbf{1}^T (B_1 + B_2\mathbb{H})u + \mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2\mathbb{H})\bar{u} \\ &= \lambda(T_1 - \bar{T}_1) \underbrace{\mathbf{1}^T J \mathbf{1}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{1}^T (B_1 + B_2\mathbb{H})}_{y^T} u + \underbrace{\mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2\mathbb{H})}_{\bar{y}^T} \bar{u} \\ &= y^T u + \bar{y}^T \bar{u}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

avec $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ le vecteur ne contenant que des 1.

Proposition 2 *Maintenant, pour une cascade de n blocs, avec les relations d'interconnexion (1.25) à (1.30), nous obtenons les équations suivantes :*

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbb{H}) J_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{H}}(\mathbb{H}) + (B_1 + B_2 \mathbb{H})u + (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 \mathbb{H})\bar{u} \quad (1.50)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^T + \mathbb{H}^T B_2^T \\ \bar{B}_1^T + \mathbb{H}^T \bar{B}_2^T \end{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{H_1}{\rho V} + h_{in} \\ -\frac{\bar{H}_n}{\rho V} + \bar{h}_{in} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

avec le terme d'échange thermique pour chaque bloc élémentaire qui s'écrit : $R_i = \lambda(T_i - \bar{T}_i)$, et la matrice anti-symétrique

$$J_i = \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{in} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -\delta_{i1} \\ \vdots \\ -\delta_{in} \end{matrix} & \end{array} \right] \quad (1.52)$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 dans les autres cas. Cette matrice anti-symétrique nous permet d'écrire le système sous la forme hamiltonienne à port.

Les vecteurs et les matrices B_1 , B_2 , \bar{B}_1 et \bar{B}_2 sont donnés comme suit avec leur dimensions :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_{in} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 0_{n \times n} \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{array} \right] \quad (1.53)$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{h}_{in} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline 0_{n \times n} & & 0_{n \times n} \\ \hline & -1 & \\ 0_{n \times n} & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -1 \end{array} \right] \quad (1.54)$$

Comme précédemment pour le bloc élémentaire, nous pouvons vérifier la passivité du système en calculant la dérivée temporelle de l'Hamiltonien donné par la somme des enthalpies des

différents compartiments : $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n (H_i + \bar{H}_i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbb{H}} \frac{d\mathbb{H}}{dt} = \mathbf{1}^T \frac{d\mathbb{H}}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}^T \lambda (T_i - \bar{T}_i) J_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{H}} + \mathbf{1}^T (B_1 + B_2 \mathbb{H}) u + \mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 \mathbb{H}) \bar{u} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda (T_i - \bar{T}_i) \underbrace{\mathbf{1}^T J_i \mathbf{1}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{1}^T (B_1 + B_2 \mathbb{H})}_{y^T} u + \underbrace{\mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 \mathbb{H})}_{\bar{y}^T} \bar{u} \\
&= y^T u + \bar{y}^T \bar{u}.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Cela permet donc, quelque soit la dimension du système, de dériver naturellement la passivité à partir du modèle dynamique.

L'avantage de ce modèle est que le terme de production irréversible d'entropie, dû aux phénomènes internes du réacteur, apparaît directement lorsque nous écrivons le bilan total d'entropie comme : $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S^T}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ (avec $\frac{\partial S^T}{\partial x} = [\frac{1}{T_1} \frac{1}{T_1}]$ pour le cas d'un bloc élémentaire). La représentation de cette section a été publiée dans Zitte et al. (2019).

1.3.5 Représentation sous forme bilinéaire : Modèle D

Pour la représentation bilinéaire, nous nous basons toujours sur la Figure 1.6. Cette représentation non-linéaire d'un échangeur thermique est un compromis entre une représentation trop compliquée à calculer et une représentation trop simple qui ne serait pas proche de la réalité. Elle sera intéressante, comme nous le verrons dans le Chapitre 2, pour synthétiser des lois de commande. C'est une forme bilinéaire car nous avons un terme dans lequel la ou les commandes sont multipliées au vecteur d'état. Commençons par donner la représentation dans le cas où nous faisons une commande symétrique sur les deux flux, et à la suite nous donnerons la représentation que nous avons développée dans un article avec une seule commande. Nous allons repartir des équations (1.22) et (1.23) et choisir comme variable de commande les débits de convection des flux $u_1 = Q$ et $u_2 = \bar{Q}$. Elles deviennent alors :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbb{H}} &= \Lambda \mathbb{H} + \sum_{i=1}^2 (\Gamma_i \mathbb{H} + \beta_i) u_i \\
y &= C \mathbb{H}
\end{aligned} \tag{1.56}$$

avec la matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ qui correspond à l'échange thermique à travers la paroi, les matrices $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et les vecteurs $\beta_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ qui correspondent à la convection, comme suit :

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho V c_p} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} h_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{h}_{in} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

Comme dit précédemment, nous faisons comme hypothèse de travail qu'un des deux débits est fixé et l'autre servira de commande. Nous choisissons ainsi de fixer $u_2 = \bar{Q}$ et de garder $u = Q$ comme variable de commande. Ainsi \bar{Q} devient un paramètre de l'échangeur pouvant varier ou être perturbé tout comme l'étaient déjà les enthalpies d'entrée de l'échangeur h_{in} et \bar{h}_{in} . Le système peut se réécrire comme suit :

$$\dot{\mathbb{H}} = F\mathbb{H} + (B\mathbb{H} + b)u + g \quad (1.59)$$

$$y = C\mathbb{H} \quad (1.60)$$

avec les matrices $F = \Lambda + \bar{Q}\Gamma_2$ et $B = \Gamma_1$ et les vecteur $b = \beta_1$ et $g = \bar{Q}\beta_2$

Pour la cascade de n blocs élémentaires, avec les relations d'interconnexions des flux de matière :

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q \quad (1.61)$$

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = \dots = \bar{Q}_n = \bar{Q} \quad (1.62)$$

et des flux enthalpiques :

$$Qh_i^{in} = \frac{1}{\rho V} Q H_{i+1} \quad \forall i \in [1, n-1] \quad (1.63)$$

$$\bar{Q}\bar{h}_i^{in} = \frac{1}{\rho V} \bar{Q} \bar{H}_{i-1} \quad \forall i \in [2, n] \quad (1.64)$$

avec h_i^{in} et \bar{h}_i^{in} , les enthalpies spécifiques qui entrent respectivement dans les compartiments i et \bar{i} .

Le système s'écrit toujours sous la même forme, ici pour le cas symétrique avec les deux commandes $u_1 = Q$ et $u_2 = \bar{Q}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{H}} &= \Lambda\mathbb{H} + \sum_{i=1}^2 (\Gamma_i\mathbb{H} + \beta_i)u_i \\ y &= C\mathbb{H} \end{aligned} \quad (1.65)$$

avec cette fois, les matrices $\Lambda \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2n}$ et $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et les vecteurs $\beta_i \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$

tels que :

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho V c_p} \begin{bmatrix} -1 & & & 1 \\ & \ddots & & \ddots \\ & & -1 & & 1 \\ 1 & & & -1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & & 1 & & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\rho V} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & -1 & & \\ \hline & & & & 0_{n \times n} & \\ & 0_{n \times n} & & & & 0_{n \times n} \end{array} \right] \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_{in} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{\rho V} \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & 0_{n \times n} & & & 0_{n \times n} & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0_{n \times n} & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & -1 \end{array} \right] \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{h}_{in} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Avec le même raisonnement que précédemment, nous pouvons écrire le système d'équations avec le débit \bar{Q} fixé pour obtenir :

$$\dot{\mathbb{H}} = F\mathbb{H} + (B\mathbb{H} + b)u + g \quad (1.69)$$

$$y = C\mathbb{H} \quad (1.70)$$

Les matrices et vecteurs gardent les même formes à savoir : $F = \Lambda + \bar{Q}\Gamma_2$, $B = \Gamma_1$, $b = \beta_1$ et $g = \bar{Q}\beta_2$. Nous avons ainsi exactement la même écriture matricielle dans le cas d'un bloc élémentaire que pour une cascade de n blocs.

La représentation de cette section a été publiée dans Zitte et al. (2020).

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents aspects technologiques des échangeurs de chaleur ainsi que les différents types de modèles, utilisés à des fins de dimensionnement, d'optimisation énergétique ou de commande. Nous avons en particulier abordé les modèles d'échangeur de dimension finie avec une représentation par compartiments en utilisant comme variable d'état l'enthalpie ou l'entropie. Suivant les cas, nous obtenons :

- une représentation linéaire : avec l'enthalpie et les débits constants. Les variables d'entrée sont les enthalpies spécifiques des fluides d'entrée.
- une représentation non linéaire : avec l'entropie. Les termes de production irréversible d'entropie sont non linéaires.
- une représentation bilinéaire : avec l'enthalpie et les débits comme variables d'entrée ou encore avec la représentation hamiltonienne à port irréversible.

Dans le Chapitre 2, nous utiliserons la forme bilinéaire en température car c'est elle que nous avons choisie afin de créer une loi de commande sur un échangeur. La représentation en température est obtenue à partir de celle en enthalpie à laquelle nous ajoutons quelques hypothèses que nous verrons dans le chapitre.

Dans le Chapitre 3, nous reprendrons la modélisation d'un d'échangeur de manière systématique avec des hypothèses moins restrictives sur les paramètres. Cela permettra d'aborder les réseaux d'échangeurs et d'écrire de façon systématique l'interconnexion en série de deux échangeurs.

Chapitre 2

Commande d'un Échangeur Thermique à Contre-Courant

2.1 Introduction

2.1.1 État de l'art de la commande d'un échangeur thermique

Nous avons vu dans le premier chapitre que la modélisation peut être très différente suivant les besoins et les objectifs fixés. Pour la synthèse de commande, la complexité de cette dernière suit en général celle du modèle dynamique utilisé. Plusieurs commandes ont déjà été développées pour la régulation de la température en sortie de l'échangeur thermique et parmi celles-ci nous pouvons citer : une rétroaction de linéarisation avec Alsop and Edgar (1989), une commande non linéaire dynamique basée sur la sortie pour un modèle simplifié d'une cellule à deux compartiments avec Zavala-Río et al. (2009), ou la commande prédictive de modèle (MPC) (Oravec et al. (2019); Sridhar et al. (2016)). Enfin, la commande classique PID reste une des privilégiées par de nombreux chercheurs (laboratoires et industriels) comme nous pouvons le voir dans Diaz-Mendez et al. (2014). Dans l'ensemble des exemples cités précédemment, la variable de commande est soit le débit, soit la température en entrée de l'échangeur. De plus, nous voyons que le sujet reste d'actualité avec de nombreuses publications récentes sur la commande d'échangeur. En effet, les articles traitent de plus en plus de cas particuliers avec des commandes plus efficaces car plus adaptées aux besoins du cas étudié. Dans l'article de Oravec et al. (2019), nous pouvons voir une commande à modèle prédictif qui permet une diminution de la consommation d'énergie dans l'échangeur thermique à plaque. L'article de Jia et al. (2020) décrit l'amélioration des commandes proportionnelle intégrale avec l'utilisation de la dynamique de l'échangeur de chaleur. Enfin, dans Jin et al. (2020), nous voyons que la commande d'un cycle Rankine peut permettre de maximiser l'efficacité thermique en maintenant le

système à un certain point d'équilibre.

2.1.2 Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous verrons la commande d'un échangeur thermique à contre-courant. Nous allons reprendre le modèle dynamique (1.65) développé dans le Chapitre 1, que nous allons reformuler en température pour des besoins de synthèse de commande. Puis, nous ferons un rappel sur la méthode de forwarding car elle nous permettra d'utiliser un modèle bilinéaire pour synthétiser une commande non linéaire. Elle permet également d'aboutir à des commandes non linéaires avec une action intégrale robuste. Nous allons ensuite présenter la synthèse de commande sur le modèle de l'échangeur thermique sous la forme d'un retour d'état et montrer les propriétés dynamiques du système en boucle fermée. La commande obtenue n'est pas applicable en pratique à cause des mesures nécessaires le long de l'échangeur, une possibilité est donc d'utiliser un observateur. Nous développerons un observateur en utilisant seulement des températures mesurées aux sorties des fluides de l'échangeur. Cet observateur sera couplé avec la synthèse par forwarding pour aboutir ainsi à une commande par retour de sortie. Nous donnerons une analyse de stabilité du système en boucle fermée. Des simulations sont données pour les deux lois de commande afin de les valider expérimentalement.

Les travaux concernant la commande par forwarding ont été publiés dans Zitte et al. (2020), joint en annexe (cf. A.2)

2.2 Modèle dynamique pour la commande

Dans cette section, nous avons choisi comme vecteur d'état la température. Nous considérons un échangeur comme une cascade de n blocs de base comme illustrée dans la Figure 2.1 :

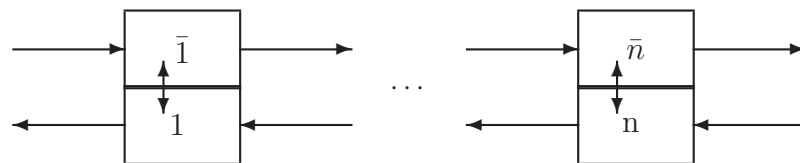


FIGURE 2.1 – Échangeur thermique comme une cascade de n blocs de base.

2.2.1 Hypothèses de travail

En utilisant le bilan d'énergie, nous avons les équations pour une cascade de n blocs de base représentant un échangeur sous forme discrète. Nous faisons les mêmes hypothèses que précédemment (§1.3.1) et nous rajoutons les hypothèses suivantes :

- tous les blocs de base ont le même coefficient de transfert de chaleur λ ,
- la dispersion thermique entre deux compartiments d'un même fluide est négligeable,
- Les densités (ρ) et les capacités thermiques (c_p) sont identiques et constantes pour les deux fluides.

2.2.2 Modèle dynamique en température

Avec ces hypothèses, nous pouvons réécrire le système de l'échangeur en utilisant les équations de bilans avec comme variables d'état les températures des compartiments (nous écrivons ici les débits comme $q = Q$ et $\bar{q} = \bar{Q}$). Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_1 - T_1) + \frac{q}{\rho V} T_2 - \frac{q}{\rho V} T_1 \\ \dot{T}_2 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_2 - T_2) + \frac{q}{\rho V} T_3 - \frac{q}{\rho V} T_2 \\ \dots \\ \dot{T}_n = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_n - T_n) + \frac{q}{\rho V} T_{in} - \frac{q}{\rho V} T_n \\ \dot{\bar{T}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_1 - T_1) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{in} - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_1 \\ \dots \\ \dot{\bar{T}}_{n-1} = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_{n-1} - T_{n-1}) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{n-2} - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{n-1} \\ \dot{\bar{T}}_n = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_n - T_n) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{n-1} - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_n \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons le vecteur d'état $x = (T_1, \dots, T_n, \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$, la température des fluides en entrée de l'échangeur $x_{in} = T_{in}$ et $\bar{x}_{in} = \bar{T}_{in}$. Nous pouvons écrire le système (2.1) sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{x} = Ax + (b_1 x_{in} + Bx)q + (\bar{b}_1 \bar{x}_{in} + \bar{B}x)\bar{q} \quad (2.2)$$

Cette égalité est proche de l'écriture bilinéaire (1.65) du Chapitre 1. Nous pouvons constater que la partie linéaire de l'équation est l'échange thermique et que la partie bilinéaire correspond à la convection.

2.2.3 Présentation du problème de commande

L'objectif de commande est de réguler la température de sortie d'un des deux fluides de l'échangeur thermique. Pour ce faire, nous définissons une entrée de commande qui est le débit q d'un des deux fluides (nommé fluide commandé par la suite). Grâce à ce débit, nous réglons la température de sortie du deuxième fluide (nommé fluide non commandé par la suite), cette dernière étant mesurée. Cette régulation doit être robuste aux différentes perturbations et à l'usure que peut subir le système.

2.3 Présentation de la méthode de forwarding

La méthode de forwarding permet une synthèse de lois de commande sous forme d'un retour d'état étendu avec une partie intégrale assurant la robustesse. Elle est principalement basée sur l'approche directe de Lyapunov. Nous allons donner la méthode dans le cas d'un système non linéaire, puis nous l'appliquerons à une classe de systèmes bilinéaires.

2.3.1 La méthode de forwarding avec un système non-linéaire

Soit un système non linéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ \dot{z} &= h(x)\end{aligned}\tag{2.3}$$

avec l'état $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et la commande $u \in \mathbb{R}$. La méthode permet de synthétiser une loi de commande rétroactive en état assurant la stabilité asymptotique de l'origine du système (2.3). La méthode a été développée dans Praly et al. (2001) (voir aussi Poulain and Praly (2010)). Deux hypothèses sont nécessaires pour pouvoir l'appliquer :

Hypothèse 1 *L'origine de $\dot{x} = f(x)$ est globalement asymptotiquement stable. Il existe donc une fonction de Lyapunov définie positive $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $V(0) = 0$ qui satisfait :*

$$\dot{V} = \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) < 0\tag{2.4}$$

cela pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$

Hypothèse 2 *Il existe une fonction $\mathcal{M}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{M}(0) = 0$ et qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} f(x) = h(x), \quad \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(0) \neq 0.\tag{2.5}$$

En utilisant ces deux hypothèses, nous avons le Théorème 3 qui présente la commande par retour d'état que nous obtenons avec la méthode de forwarding :

Théorème 3 *Praly et al. (2001) Soit le système non linéaire (2.3), qui satisfait les conditions des hypothèses 1 et 2, l'origine est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée avec la loi de commande suivante :*

$$u(x, z) = - \left[\frac{\partial V^T}{\partial x} g(x) - (z - \mathcal{M}(x)) \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(x) \right]\tag{2.6}$$

Nous rappelons aussi la preuve de ce théorème afin de voir comment cette fonction \mathcal{M} est utilisée.

Preuve : Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$W(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}(z - \mathcal{M}(x))^2 \quad (2.7)$$

Nous calculons la dérivée de la fonction de Lyapunov W le long des trajectoires du système en boucle fermée et en utilisant les hypothèses des Lemmes 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, z) &= \dot{V}(x) + (z - \mathcal{M}(x))(\dot{z} - \dot{\mathcal{M}}(x)) \quad (2.8) \\ &= \frac{\partial V^T}{\partial x} \dot{x} + (z - \mathcal{M}(x))\left(\dot{z} - \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} \dot{x}\right) \\ &= \frac{\partial V^T}{\partial x} (f(x) + g(x)u(x, z)) + (z - \mathcal{M}(x))(h(x) - \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} (f(x) + g(x)u(x, z))) \\ &= \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V^T}{\partial x} g(x)u(x, z) + (z - \mathcal{M}(x))(h(x) - h(x) - \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(x)u(x, z)) \\ &= \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) + \left[\frac{\partial V^T}{\partial x} g(x) - (z - \mathcal{M}(x))\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(x)\right]u(x, z) \\ &= \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) - u(x, z)^2 < 0 \quad (\forall (x, z) \neq (0, 0)) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Avec cette dernière expression, nous savons grâce à l'hypothèse 1 que le premier terme est strictement négatif pour tout x différent de 0. Ensuite par construction de la commande $u(x, z)$, nous savons que $\dot{W}(x, z)$ est strictement négatif. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\dot{W}(x, z) = 0$ uniquement si $(x, z) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, z) &= 0 \quad (2.10) \\ \underbrace{\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x)}_{\leq 0} - u(x, z)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux termes sont négatifs ou nuls, ainsi, nous allons voir dans quel cas nous pouvons les annuler. Avec l'hypothèse 1, nous savons que le premier terme est nul lorsque $x = 0$, nous regardons alors ce qui se passe pour le deuxième terme dans ce cas :

$$\begin{aligned} u(0, z) &= 0 \\ -\left[\frac{\partial V^T}{\partial x} g(0) - (z - \mathcal{M}(0))\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(0)\right] &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial V^T}{\partial x} g(0)}_{=0} - z\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(0) &= 0 \\ z\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(0) &= 0 \quad (2.11) \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse 2, nous avons $\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial x} g(0) \neq 0$ donc $\dot{W}(x, z) = 0$ uniquement pour $(x, z) = (0, 0)$. \square

2.3.2 Application à un système bilinéaire

Nous allons maintenant transposer la méthode de forwarding pour un système bilinéaire monovarié qui est un cas particulier du non-linéaire. Soit un système bilinéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_o x + (B_o x + b_o)u \\ \dot{z} &= C_o x\end{aligned}\tag{2.12}$$

avec les mêmes dimensions de variable que pour le système (2.2). L'hypothèse 1 se traduit dans ce cas là par le fait que la matrice F_o est Hurwitz, ce qui correspond à une origine du système autonome ($u = 0$) asymptotiquement stable. Nous savons qu'il existe des matrices P et Q définies positives tel que :

$$PF_o + F_o^T P = -Q\tag{2.13}$$

De plus, la fonction $\mathcal{M}(x)$ de l'hypothèse 2 se transforme en une matrice M . Ainsi les conditions qui en découlent sont :

$$MF_o = C_o \quad \text{et} \quad Mb_o \neq 0 \Leftrightarrow C_o F_o^{-1} b_o \neq 0\tag{2.14}$$

Ainsi :

Corollaire 4 *Soit un système bilinéaire donné par les relations (2.12) et qui satisfait les conditions des Lemmes 1 et 2, l'origine en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable avec la loi de commande :*

$$u = -(2x^T P - (z - Mx)^T)M(B_o x + b_o)\tag{2.15}$$

La démonstration se fait de la même manière que pour le cas non-linéaire. Nous allons par la suite montrer que l'échangeur thermique peut s'écrire sous une forme bilinéaire (2.12) qui nous permet d'appliquer la méthode de forwarding.

2.4 Analyse du modèle bilinéaire de l'échangeur

2.4.1 Formulation du modèle bilinéaire pour la commande

En reprenant l'équation

$$\dot{x} = Ax + (b_1 x_{in} + Bx)q + (\bar{b}_1 \bar{x}_{in} + \bar{B}x)\bar{q}\tag{2.16}$$

nous voyons que nous avons quatre paramètres libres sur lesquels nous pouvons agir : la température d'entrée des fluides x_{in} et \bar{x}_{in} ainsi que le débits des deux fluides avec q et \bar{q} . Nous avons choisi de faire une loi de commande sur le débit $q(t) = u(t)$ et supposons les trois autres

paramètres fixés à des valeurs nominales permettant un fonctionnement nominal du système. Nous considérons que le débit du fluide commandé est borné entre sa valeur minimale $u_m > 0$ et sa valeur maximale u_M et satisfait l'inégalité suivante :

$$u \in \mathcal{D}_u := [u_m, u_M] = \{u \in \mathbb{R}^+ : u_m \leq u \leq u_M\}, \quad (2.17)$$

Nous donnons la notation suivante : pour tout ensemble compact \mathcal{A} , l'ensemble des points à l'intérieur de \mathcal{A} s'écrit $\text{int}(\mathcal{A})$. Ainsi nous avons :

$$\text{int}(\mathcal{D}_u) = (u_m, u_M) = \{u \in \mathbb{R}^+ : u_m < u < u_M\},$$

Avec tout cela, nous pouvons réécrire le système (2.16) sous une forme plus compacte telle que :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Fx + (b + Bx)u + G \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.18)$$

avec $F = A + \bar{q}\bar{B}$, $b = b_1x_{\text{in}}$, $G = b_1\bar{x}_{\text{in}}\bar{q}$ et C est tel que la sortie du système est $y = \bar{T}_n$

2.4.2 Propriétés du modèle de l'échangeur

Nous allons voir trois propriétés importantes sur le modèle de l'échangeur (2.18) pour des conditions opératoires fixées. Soient u et G bornés, ce qui correspondent aux températures T_{in} et \bar{T}_{in} ainsi qu'aux débits q et \bar{q} dans le modèle (2.2). Nous montrerons que les trajectoires du système (2.18) évoluent dans un ensemble compact invariant pour lequel toutes les températures le long de l'échangeur thermique sont positives (voir Lemme 5). Ensuite, nous analyserons les propriétés de stabilité du système (2.18), et montrerons que la matrice d'état est Hurwitz, donc que la partie autonome du système est stable (voir Lemme 6). Enfin, nous caractériserons l'ensemble des points d'équilibres accessibles pour une régulation du système (voir Lemme 7). Dans la suite du chapitre nous choisissons, sans perte de généralité, que les températures T_{in} et \bar{T}_{in} correspondent, respectivement, aux températures d'entrées des fluides chaud et froid de l'échangeur. Ainsi nous avons les résultats suivants :

Lemme 5 *Pour tout $u \in \mathcal{D}_u$ et dans des conditions opératoires fixées T_{in} et \bar{T}_{in} , le domaine compact $\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^6 : \bar{T}_{\text{in}} \leq x_i \leq T_{\text{in}}\}$ est invariant le long des trajectoires du système (2.18)*

Preuve : Considérons les $i^{\text{èmes}}$ compartiments de l'échangeur pour lequel la dynamique des températures est donnée par les équations suivantes :

$$\dot{T}_i = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_i - T_i) + \frac{q}{\rho V} T_{i+1} - \frac{q}{\rho V} T_i \quad (2.19)$$

$$\dot{\bar{T}}_i = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_i - T_i) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{i-1} - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_i \quad (2.20)$$

Nous allons montrer que le domaine

$$\mathcal{D}_i = \{T_i, \bar{T}_i \text{ t.q. } \bar{T}_{\text{in}} \leq T_i \leq T_{\text{in}}, \bar{T}_{\text{in}} \leq \bar{T}_i \leq T_{\text{in}}\} \quad (2.21)$$

est invariant le long des trajectoires du système (2.19) et (2.20) dès que nous avons $\bar{T}_{\text{in}} \leq \bar{T}_{i+1} \leq T_{\text{in}}$ et $\bar{T}_{\text{in}} \leq T_{i-1} \leq T_{\text{in}}$. Pour ce faire, nous allons analyser le signe de la dynamique au bord du domaine. Nous verrons que les trajectoires restent dans les limites du domaine qui incluent les températures d'entrées des fluides (T_{in} et \bar{T}_{in}). Il y a quatre cas différents, deux à deux ressemblant. Il est possible que les températures soit toutes les deux égales à l'une des entrées ou alors quelles soient différentes. Nous allons voir un cas où elles sont toutes les deux égales à T_{in} puis nous verrons le cas où $T_i = \bar{T}_{\text{in}}$ et $\bar{T}_i = T_{\text{in}}$. Dans le premier cas, les dynamiques se simplifient et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{T}_i &= \frac{q}{\rho V} (T_{i+1} - T_i) \\ \dot{\bar{T}}_i &= \frac{\bar{q}}{\rho V} (\bar{T}_{i-1} - \bar{T}_i) \end{aligned}$$

Considérons les quatre possibilités pour les températures T_{i+1} et \bar{T}_{i-1} à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_{i-1} = T_{i+1} = T_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i = 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i = 0 \\ \bar{T}_{i-1} = T_{i+1} = \bar{T}_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i < 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \\ \bar{T}_{i-1} = T_{\text{in}} \ \& \ T_{i+1} = \bar{T}_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i < 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i = 0 \\ \bar{T}_{i-1} = \bar{T}_{\text{in}} \ \& \ T_{i+1} = T_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i = 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \end{array} \right.$$

Dans les quatre cas, nous avons une dynamique négative ou nulle, ce qui signifie que les températures T_i et \bar{T}_i diminuent ou restent à la limite du domaine. Ceci conclut donc que le domaine \mathcal{D}_i est invariant le long des trajectoires du système. Dans le cas où les deux températures sont égales à l'autre limite du domaine (\bar{T}_{in}), nous obtiendrons un résultat similaire. Maintenant voyons un cas où les deux températures sont différentes, par exemple si $T_i = \bar{T}_{\text{in}}$ et $\bar{T}_i = T_{\text{in}}$. Sachant que $T_{\text{in}} > \bar{T}_{\text{in}}$, le terme de transfert thermique $\bar{T}_i - T_i$ est positif. Il nous reste à voir le signe du terme de convection, comme précédemment il y a quatre cas dépendant des températures en entrée des compartiments :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_{i-1} = T_{i+1} = T_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i > 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \\ \bar{T}_{i-1} = T_{i+1} = \bar{T}_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i > 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \\ \bar{T}_{i-1} = T_{\text{in}} \ \& \ T_{i+1} = \bar{T}_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i > 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \\ \bar{T}_{i-1} = \bar{T}_{\text{in}} \ \& \ T_{i+1} = T_{\text{in}} \rightarrow \dot{T}_i > 0 \ \& \ \dot{\bar{T}}_i < 0 \end{array} \right.$$

À chaque fois nous voyons que la dynamique est telle que les trajectoires restent à l'intérieur du domaine décrit précédemment. Nous pouvons faire le même raisonnement pour les températures aux limites inversées, et également pour chaque compartiment de 1 à n . \square

Maintenant considérons x^* l'état d'équilibre du système (2.18) pour une entrée u^* constante définie par :

$$\begin{aligned} 0 &= Fx^* + (Bx^* + b)u^* + G \\ y^* &= Cx^* \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec y^* la sortie correspondante. Nous avons le résultat suivant pour la stabilité de la matrice $F + Bu^*$ dans le domaine d'intérêt :

Lemme 6 *Pour tout $u^* \in \mathcal{D}_u$, avec \mathcal{D}_u définie par (2.17), la matrice $\hat{F} = F + Bu^*$ définie comme :*

$$\hat{F} = A + \bar{B}\bar{q} + Bu^* = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -k - u^* & u^* & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & u^* & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k - u^* & 0 & 0 & 0 & k \\ \hline k & 0 & 0 & 0 & -k - \bar{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \bar{q} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & \bar{q} & -k - \bar{q} \end{array} \right] \quad (2.23)$$

est Hurwitz, c'est-à-dire que la partie réelle de ses valeurs propres est strictement négative (stabilité de la partie autonome).

Preuve : Pour la preuve de ce lemme, nous utilisons le théorème de Gershgorin (Gershgorin (1931)) : les valeurs propres de la matrice \hat{F} sont dans l'union des cercles décrits ci-après :

$$\phi_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \hat{F}_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} |\hat{F}_{ij}|\}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (2.24)$$

Avec \hat{F}_{ii} le $i^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de la matrice, et \hat{F}_{ij} l'élément de la matrice à la ligne i , colonne j .

Nous avons alors $2n$ cercles avec deux centres différents : $c_1 = -k - u^*$ et $c_2 = -k - \bar{q}$ et 4 rayons différents dont les plus grands sont respectivement $r_1 = k + u^*$ et $r_2 = k + \bar{q}$. Les cercles font donc partie du coté gauche du plan complexe et incluent l'origine (0,0). Nous savons donc que les valeurs propres de \hat{F} sont à partie réelle négative ou nulle, et la seule possibilité pour qu'une valeur propre soit à partie réelle nulle c'est qu'elle soit égale à $0 + i0$. Or nous pouvons montrer que ce n'est pas une valeur propre de la matrice. Pour cela, nous allons montrer que le seul vecteur (v) qui vérifie l'égalité $\hat{F}v = 0$ est le vecteur nul. La matrice \hat{F} peut s'écrire comme suit :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -\Lambda & \Lambda \\ \Lambda & -\Lambda \end{bmatrix} + u^* \begin{bmatrix} S^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{q} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

avec les matrices $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Lambda = k \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Alors $\hat{F} v = 0$ est égale à :

$$\begin{bmatrix} -\Lambda + u^* S^T & \Lambda \\ \Lambda & -\Lambda + bS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (-\Lambda + u^* S^T)v_1 + \Lambda v_2 = 0 \\ \Lambda v_1 + (-\Lambda + bS)v_2 = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

En faisant la somme des deux lignes, nous avons :

$$u^* S^T v_1 + \bar{q} S v_2 = 0 \iff v_2 = -\frac{u^*}{\bar{q}} S^{-1} S^T v_1 \quad (2.27)$$

car S est de rang plein et que \bar{q} est strictement positif. Nous pouvons réécrire ((2.26)) comme :

$$\begin{bmatrix} -\Lambda + u^* S^T & \Lambda \\ \Lambda & -\Lambda + bS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ -\frac{u^*}{\bar{q}} S^{-1} S^T \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} (-\Lambda + u^* S^T - \Lambda \frac{u^*}{\bar{q}} S^{-1} S^T) v_1 = 0 \\ (\Lambda - (-\Lambda + bS) \Lambda \frac{u^*}{\bar{q}} S^{-1} S^T) v_1 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

en regardant la première ligne, nous avons :

$$\begin{aligned} \Lambda(-I_n + u^* \Lambda^{-1} S^T - \frac{u^*}{\bar{q}} S^{-1} S^T) v_1 &= 0 \\ \Lambda S^{-1}(-S + u^* S S^T \Lambda^{-1} - \frac{u^*}{\bar{q}} S^T) v_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Or $\Theta = -S + u^* S S^T \Lambda^{-1} - \frac{u^*}{\bar{q}} S^T$ est une matrice tridiagonale comme suit :

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + u^* \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{u^*}{\bar{q}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{2u^*}{k} + 1 & -\frac{u^*}{k} - \frac{u^*}{\bar{q}} & & & \\ -1 - \frac{u^*}{k} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{u^*}{k} - \frac{u^*}{\bar{q}} & \\ & & & -1 - \frac{u^*}{k} & \frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{2u^*}{k} + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cette matrice est tridiagonale et Toeplitz ; nous avons alors une équation qui permet de calculer les valeurs propres ζ explicitement :

$$\zeta(j) = \frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{2u^*}{k} + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{u^*}{k} + 1\right)\left(\frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{u^*}{k}\right)} \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad j = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

avec n la dimension de la matrice. Sachant que le cosinus varie entre -1 et 1 , les valeurs propres sont toutes positives si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{2u^*}{k} + 1 &\geq 2\sqrt{\left(\frac{u^*}{k} + 1\right)\left(\frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{u^*}{k}\right)} \\
\left(\frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{2u^*}{k} + 1\right)^2 &\geq 4\left(\frac{u^*}{k} + 1\right)\left(\frac{u^*}{\bar{q}} + \frac{u^*}{k}\right) \\
\frac{(u^*k + 2u^*\bar{q} + \bar{q}k)^2}{(\bar{q}k)^2} &\geq 4\left(\frac{u^* + k}{k}\right)\left(\frac{u^*k + u^*\bar{q}}{\bar{q}k}\right) \\
&\geq \frac{4}{\bar{q}k^2}(u^{*2}k + u^*k^2 + u^{*2}\bar{q} + u^*\bar{q}k) \\
&\geq \frac{4}{(\bar{q}k)^2}(u^{*2}\bar{q}k + u^*\bar{q}k^2 + (u^*\bar{q})^2 + u^*\bar{q}^2k) \\
(u^*k)^2 + 4(u^*\bar{q})^2 + (\bar{q}k)^2 + 2u^*\bar{q}k^2 + 4u^{*2}\bar{q}k + 4u^*\bar{q}^2k &\geq 4u^{*2}\bar{q}k + 4u^*\bar{q}k^2 + 4(u^*\bar{q})^2 + 4u^*\bar{q}^2k \\
(u^*k)^2 + (\bar{q}k)^2 - 2u^*\bar{q}k^2 &\geq 0 \\
(u^*k - \bar{q}k)^2 &\geq 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ce qui est toujours vrai. Nous avons ainsi une matrice Θ de rang plein. Donc le seul vecteur qui peut l'annuler est le vecteur nul : $v_1 = 0$. En reprenant les équations (2.27) et (2.26) nous trouvons que le seul vecteur tel que $\hat{F}v = 0$ est le vecteur $v = 0$. Cela nous permet d'affirmer que le nombre complexe $0 + i0$ ne fait pas partie des valeurs propres de la matrice \hat{F} . Ainsi nous excluons le seul élément à partie réelle positive ou nulle dans l'union des cercles ϕ_i .

Ainsi nous montrons que toutes les valeurs propres de \hat{F} sont à partie réelle strictement négative. \square

Nous allons maintenant analyser le domaine admissible concernant les valeurs de référence ou points d'équilibres pour la sortie que nous voulons réguler.

Lemme 7 *Pour toutes conditions opératoires fixées \bar{q} , x_{in} et \bar{x}_{in} , (ce qui est équivalent à fixer F et G), il existe $y_M > y_m > 0$ tel que pour tout $r \in (y_m, y_M)$ il existe (x^*, u^*) , avec $u \in \text{int}(\mathcal{D}_u)$ tel que $y^* = r$ avec y^* donnée par le modèle stationnaire (2.22)*

Preuve : Au vu du Lemme 6, nous savons que la matrice $\hat{F} = F + Bu^*$ est inversible pour tout $u^* \in \mathcal{D}_u$. Ainsi pour tout u^* , il existe un unique point d'équilibre x^* satisfaisant le système (2.22). Pour le trouver il faut faire le calcul suivant $x^* = -(F + Bu^*)^{-1}(bu^* + G)$. Soit la fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dépendant de u^* telle que $\Phi(u^*) = -C(F + Bu^*)^{-1}(bu^* + G)$. Nous savons que cette fonction est continue dans l'ensemble compact \mathcal{D}_u et nous notons son minimum et son maximum comme suit :

$$y_m = \inf_{u^* \in \mathcal{D}_u} \Phi(u^*), \quad y_M = \sup_{u^* \in \mathcal{D}_u} \Phi(u^*) \tag{2.34}$$

Comme la fonction est surjective sur $[y_m, y_M]$ nous pouvons conclure que pour $r \in [y_m, y_M]$ nous trouvons (x^*, u^*) tel que $y^* = r = \phi(u^*)$. \square

2.4.3 Robustesse de la loi de commande par action intégrale

Malgré des perturbations sur le système, nous souhaitons assurer une régulation robuste de la température de sortie. Pour ce faire, nous allons étendre le système par un état intégrateur sur le terme d'erreur e exprimé avec r la température de référence comme suit :

$$e = Cx - r \quad (2.35)$$

Nous pouvons ainsi redéfinir le système (2.18) étendu avec un nouvel état z comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + (Bx + b)u + G \\ \dot{z} &= Cx - r \end{aligned} \quad (2.36)$$

Afin de satisfaire les hypothèses 1 et 2, nous avons besoin des matrices P et Q symétriques définies positives solutions de l'équation :

$$(F + Bu^*)^T P + P(F + Bu^*) = -Q \quad (2.37)$$

De plus fixons u^* la commande. Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$ solution de :

$$M(F + Bu^*) = C \quad (2.38)$$

Nous savons que la matrice $(F + Bu^*)$ est inversible, il est donc possible de calculer M avec $M = C(F + Bu^*)^{-1}$.

2.4.4 Fonction de saturation de l'entrée

Nous définissons la fonction de saturation sur la commande $sat_{\mathcal{D}_u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$sat_{\mathcal{D}_u} = \begin{cases} u_m & \text{if } 0 < u \leq u_m, \\ u & \text{if } u_m < u \leq u_M, \\ u_M & \text{if } u_M \leq u. \end{cases} \quad (2.39)$$

Ainsi, nous avons toujours un débit minimum u_m du fluide qui parcourt l'échangeur, et nous ne dépassons pas le maximum physique u_M .

2.5 Loi de commande

Nous avons le théorème suivant qui utilise la méthode de forwarding sur le modèle bilinéaire (2.18) de l'échangeur de chaleur présenté précédemment :

Théorème 8 *Soit F , G fixés, avec une température de sortie de référence choisie $r \in (y_m, y_M)$ avec y_m et y_M données par le Lemme 7. Soit (x^*, u^*) solution de l'état d'équilibre (2.22) avec*

$y^* = r$, soit P et M calculés selon les équations (2.37) et (2.38) respectivement. Alors, pour toutes conditions initiales $(x(0), z(0)) \in \text{int}(\mathcal{D}_x) \otimes 0$, avec \mathcal{D}_x donné dans le Lemme 5, les trajectoires correspondantes au système (2.36) en boucle fermée avec

$$u(x, z) = \text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - [2(x - x^*)^T P - (z - M(x - x^*))^T M](Bx + b)) \quad (2.40)$$

satisfont $x \in \mathcal{D}_x$ pour tout $t \geq 0$ et la température de sortie $y = \bar{T}_1$ converge asymptotiquement vers la température de référence r

Preuve : Tout d'abord, nous faisons un changement de coordonnées $x \mapsto \tilde{x} := x - x^*$. Le système (2.18) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \hat{F}\tilde{x} + (B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*) \\ \dot{z} &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec la matrice $\hat{F} = A + \bar{q}\bar{B} + u^*B$ et le vecteur $\hat{b} = b + Bx^*$. Nous pouvons remarquer que $(Bx + b) = (B\tilde{x} + \hat{b})$. La loi de commande peut se réécrire d'une manière équivalente comme suit :

$$u = \text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) \quad (2.42)$$

avec

$$\alpha(\tilde{x}, z) = (2\tilde{x}^\top P - (z - M\tilde{x})M)(B\tilde{x} + \hat{b}) \quad (2.43)$$

Grâce aux résultats des Théorème 3, et Corollaire 4, nous considérons la fonction de Lyapunov du système étendu (2.41)

$$W(\tilde{x}, z) = \tilde{x}^\top P\tilde{x} + \frac{1}{2}(z - M\tilde{x})^2. \quad (2.44)$$

Nous pouvons calculer sa dérivée en boucle fermée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{\tilde{x}}^\top P\tilde{x} + \tilde{x}^\top P\dot{\tilde{x}} + (z - M\tilde{x})^\top (\dot{z} - M\dot{\tilde{x}}) \\ &= -\tilde{x}^\top Q\tilde{x} + 2\tilde{x}^\top P(B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*) + (z - M\tilde{x})^\top (C\tilde{x} - M\hat{F}\tilde{x} - M(B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*)) \\ &= -\tilde{x}^\top Q\tilde{x} + (2\tilde{x}^\top P(B\tilde{x} + \hat{b}) - (z - M\tilde{x})^\top (M(B\tilde{x} + \hat{b}))) (u - u^*) + (z - M\tilde{x})^\top \underbrace{(C\tilde{x} - M\hat{F}\tilde{x})}_{=0} \\ &= -\tilde{x}^\top Q\tilde{x} + U(\tilde{x}, z, u) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Avec

$$U(\tilde{x}, z, u) = \alpha(\tilde{x}, z)[u - u^*] \quad (2.46)$$

$$= \alpha(\tilde{x}, z)[\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) - u^*] \quad (2.47)$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que, pour tout \tilde{x}, z, u , nous avons $U(\tilde{x}, z, u) < 0$

Il faut identifier trois cas, avec $u_m < u^* < u_M$; la fonction saturation aura des effets différents si $\alpha(\tilde{x}, z)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ensemble $[u^* - u_M, u^* - u_m]$

1) $\alpha(\tilde{x}, z) \in [u^* - u_M, u^* - u_m]$. Dans ce cas, la saturation n'intervient pas :

$$\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u^* - \alpha(\tilde{x}, z) \quad (2.48)$$

et donc

$$U(\tilde{x}, z, u) = -\alpha(\tilde{x}, z)^2 \quad (2.49)$$

2) $\alpha(\tilde{x}, z) \in [u^* - u_m, +\infty)$. Ici la fonction α est positive et nous avons $-\alpha(\tilde{x}, z) < u_m - u^*$. Ainsi la fonction saturation nous donne :

$$\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u_m$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, z, u) &= \alpha(\tilde{x}, z)(u_m - u^*) \\ &= -\alpha(\tilde{x}, z)(u^* - u_m) \\ &< 0 \end{aligned}$$

car : $\alpha(\tilde{x}, z) > 0$ et $u^* - u_m > 0$.

3) $\alpha(\tilde{x}, z) \in (-\infty, u^* - u_M]$. Pour ce cas, nous avons $\alpha(\tilde{x}, z) < 0$ et donc $-\alpha(\tilde{x}, z) > u_M - u^*$. La fonction de saturation nous donne ainsi :

$$\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u_M$$

Et pour la fonction U :

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, z, u) &= \alpha(\tilde{x}, z)(u_M - u^*) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Car : $\alpha(\tilde{x}, z) < 0$ et $(u_M - u^*) > 0$.

Nous pouvons résumer les trois cas sous la forme suivante :

$$U(\tilde{x}, z, u) \leq -|\alpha(\tilde{x}, z)| \min \{ |\alpha(\tilde{x}, z)|, (u^* - u_m), (u_M - u^*) \}$$

et donc

$$\dot{W} \leq -\tilde{x}^\top Q \tilde{x} - |\alpha(\tilde{x}, z)| \min \{ |\alpha(\tilde{x}, z)|, (u^* - u_m), (u_M - u^*) \}$$

En utilisation le principe d'invariance de LaSalle, nous pouvons conclure que les solutions convergent vers le plus grand ensemble invariant à l'intérieur de :

$$\mathcal{I} = \{(\tilde{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \tilde{x} = 0, \alpha(\tilde{x}, z) = 0\}$$

Dans l'ensemble \mathcal{I} , la dynamique de z satisfait les égalités suivantes :

$$\dot{z} = 0, \quad zM\hat{b} = 0. \quad (2.50)$$

En utilisant la définition de M , nous avons : $M\hat{b} = C\hat{F}^{-1}\hat{b}$. Nous savons que \hat{F} est une matrice de rang plein et les vecteurs \hat{b} et C s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{b}^\top &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} (x_2^* - x_1^*) & (x_3^* - x_2^*) & (x_{\text{in}}^* - x_3^*) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \\ C &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x^* \in \text{int}(\mathcal{D}_x)$ la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{F} & \hat{b} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

est de rang plein et donc par équivalence : $M\hat{b} = C\hat{F}^{-1}\hat{b} \neq 0$.

Le plus grand invariant contenant \mathcal{I} ne peut être que l'origine $(\tilde{x}, z) = (0, 0)$. Nous savons donc que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Pour conclure, nous savons par le Lemme 5 que le domaine \mathcal{D}_x est invariant pour le système (2.36), en boucle fermée avec la loi de commande (2.40). Donc toute solution initialisée dans $\text{int}(\mathcal{D}_x)$ restera dans \mathcal{D}_x et convergera asymptotiquement vers l'équilibre $(\tilde{x}, z) = 0$. Comme $\dot{z} = 0$ nous avons $r = Cx^*$. \square

2.6 Application à l'ETCC

2.6.1 Conditions opératoires

Nous allons maintenant montrer des résultats de simulation obtenus via le logiciel Matlab pour la loi de commande donnée ci-dessus. Pour minimiser le temps de calcul, nous avons choisi $n = 3$, ainsi nous avons six volumes à considérer. Il s'agit du nombre minimal de compartiments afin de visualiser l'entrée, la sortie et la partie interne d'un échangeur. Les valeurs numériques des variables du modèle sont données dans la Table 2.1. Nous avons la variable de commande u qui correspond au débit du fluide chaud, et la sortie du système y qui correspond à la température de sortie de l'échangeur du fluide froid. Le système est initialisé à un état stationnaire correspondant à une entrée $u = 0.17u_M$. De plus, pour les valeurs données des différentes variables, nous avons un domaine $\phi = [y_m, y_M]$ pour un débit $u \in \mathcal{D}_u$ donné par la Figure 2.2. Il est donc possible d'atteindre des températures entre $300K$ et $316K$.

$\lambda = 10J/K/s$	$\rho = 997kg/m^3$
$V = 0.002m^3$	$c_p = 4185J/kg/K$ (pour l'eau)
$\bar{q} = 0.02kg/s$	$u_M = 0.05kg/s$
$T_{in} = x_{in} = 360K$	$\bar{T}_{in} = \bar{x}_{in} = 300K$

TABLE 2.1 – Valeur des paramètres du modèle de l'échangeur de chaleur (2.2).

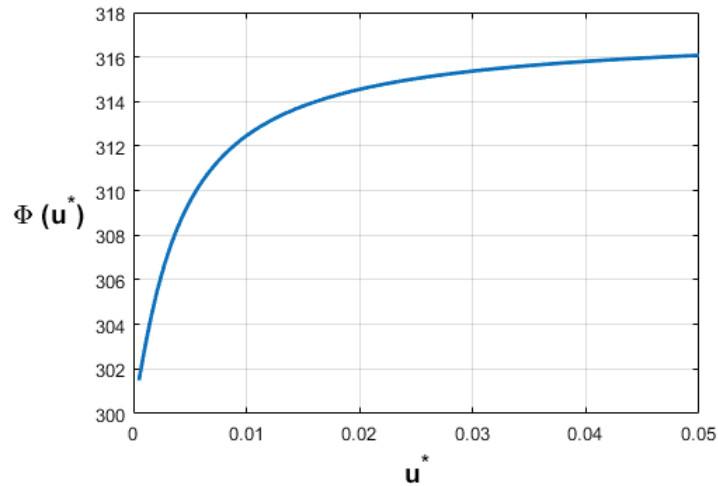


FIGURE 2.2 – Domaine de la sortie en fonction de l'entrée normalisée

2.6.2 Régulation de la température

Pour rappel, notre premier objectif est de réguler la température de sortie du fluide froid. Nous avons donc créé un profil de température de référence avec des valeurs comprises entre $300K$ et $316K$, avec deux changements à $t = 1.10^4s$ et à $t = 2.10^4s$. Dans la Figure 2.3, nous voyons en vert le profil de température de référence, et en bleu la température de sortie du fluide froid. Sur le même graphe, et afin de se rendre compte des variations de l'entrée de commande, nous la traçons avec une échelle normalisée entre 0 et 1 (fraction par rapport à la valeur maximale u_M) au lieu de u_m et u_M . Nous observons que l'entrée n'arrive pas en saturation grâce au choix des températures ainsi que des paramètres fixés pour la loi de commande.

2.6.3 Robustesse de la loi de commande

Afin de valider la robustesse de la loi de commande, nous présenterons des simulations avec des variations sur les autres degrés de liberté du modèle, à savoir la température d'entrée du

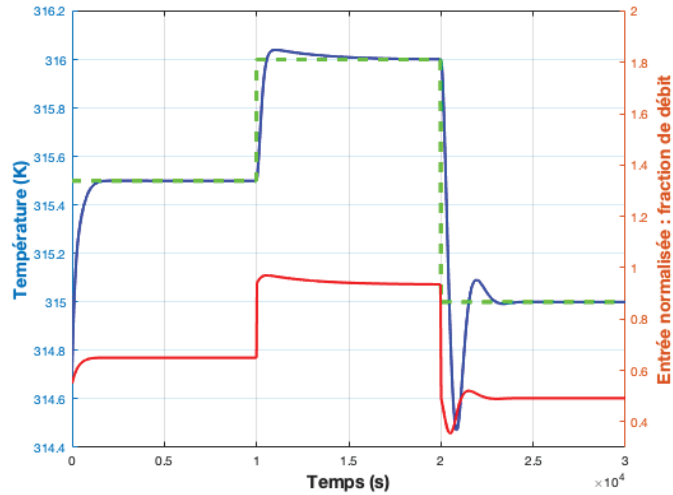


FIGURE 2.3 – Température en Kelvin de la sortie (bleu), de la valeur souhaitée (vert) et de l’entrée de commande normalisée (rouge)

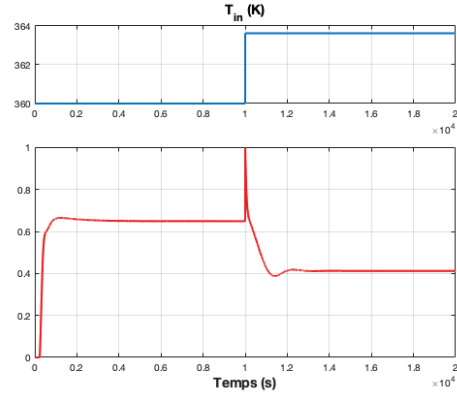
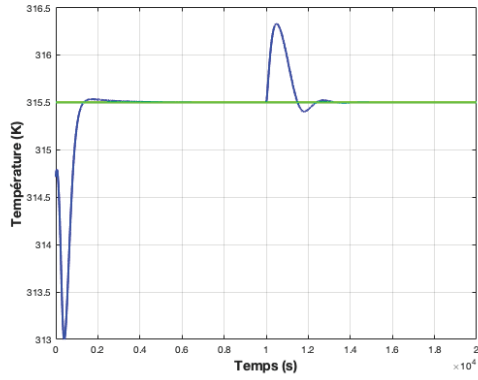
fluide commandé T_{in} ou encore le débit du fluide non commandé \bar{q} .

Variation sur la température d’entrée T_{in}

Pour cette simulation, le système est toujours initialisé à l’état stationnaire correspondant à $u = 0.17 u_M$. Nous introduisons une augmentation (de 4% en degré Celsius) de type échelon sur T_{in} à partir de $t = 10000s$. Nous avons tracé sur la Figure 2.4a la valeur de la température de sortie ainsi que la valeur cible en vert. La commande calculée avec la boucle fermée est tracée sur la Figure 2.4b ainsi que la valeur de la température que nous avons augmenté sous la forme d’un échelon. Grâce à l’action intégrale de la boucle fermée, la température retourne à la valeur désirée en 4000s ce qui correspond au temps qu’il a fallu au système pour se stabiliser au départ. En partant d’un point d’équilibre stable, nous arrivons à rejeter la perturbation et retrouver la valeur désirée en sortie.

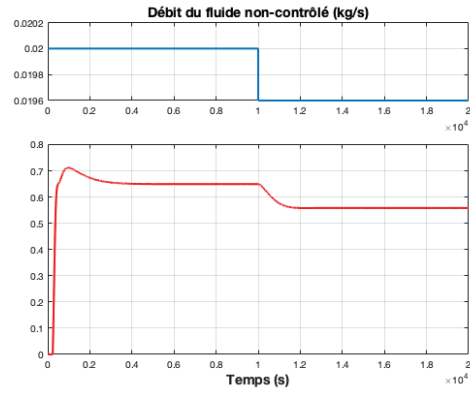
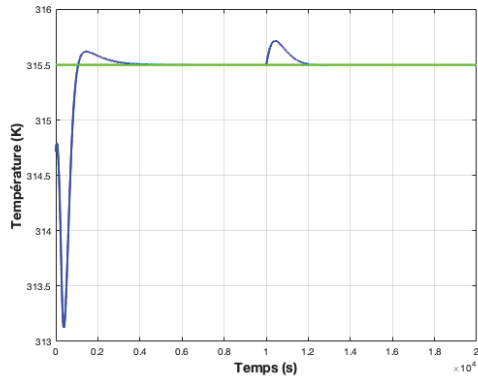
Variation du débit du fluide non commandé

Cette fois-ci à $t = 1.10^4s$, nous introduisons une erreur de 2% sur le second débit \bar{q} . Comme précédemment trois graphiques sont donnés afin de visualiser la température de sortie (Figure 2.5a), la perturbation et la commande (Figure 2.5b). Nous voyons que la diminution du débit augmente la température de sortie du fluide et que grâce à la commande en boucle fermée, nous revenons à une température de sortie en adéquation avec la consigne.



(a) Température en Kelvin de la sortie \bar{T}_n (bleu) et de la valeur souhaitée (vert) (b) Température du fluide en entrée et entrée de commande normalisée

FIGURE 2.4 – Perturbation sur la variable $x_{in} = T_{in}$



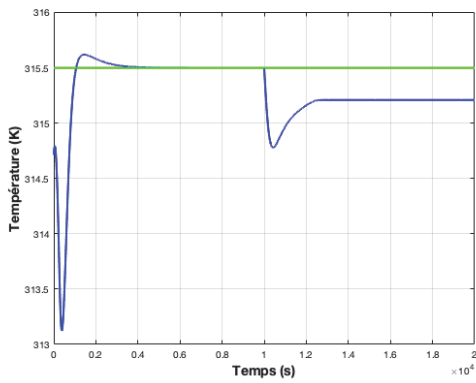
(a) Température en Kelvin de la sortie \bar{T}_n (bleu) et de la valeur souhaitée (vert) (b) Débit du fluide non commandé et valeur de commande normalisée

FIGURE 2.5 – Perturbation sur la variable \bar{q}

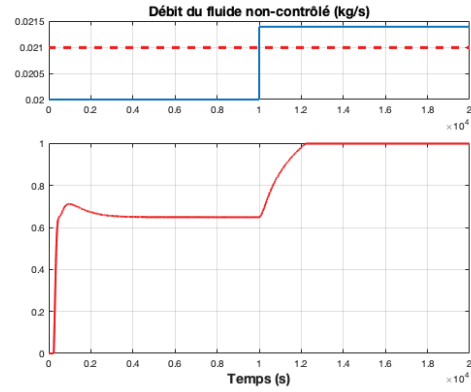
Limites de la commande

Dans les exemples précédents, nous ne voyons pas les limites de la commande. Nous allons présenter des simulations dans lesquelles nous verrons quelques limites.

Saturation supérieure de la commande : La perturbation sur le débit est de 7% alors que la valeur désirée est atteignable pour une perturbation allant jusque 5%. La perturbation nous donne un débit qui dépasse la valeur limite (pointillé rouge) pour laquelle le système peut atteindre la valeur de consigne.



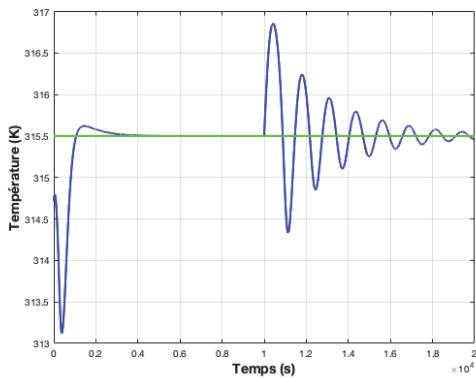
(a) Température en Kelvin de la sortie \bar{T}_n (bleu) et de la valeur souhaitée (vert)



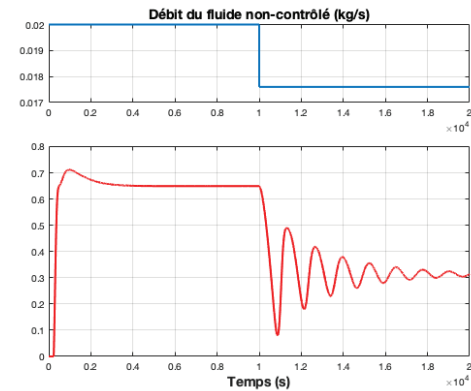
(b) Débit du fluide non commandé avec sa valeur maximale atteignable et entrée de commande normalisée

FIGURE 2.6 – Perturbation de \bar{q} qui entraîne une saturation de la commande

Sensibilité de la commande : Dans le second exemple, nous avons toujours une perturbation sur le débit mais, cette fois, qui l'a fait diminuer. Nous avons le graphe de la commande en boucle fermée sur la Figure 2.7b. Il y a des oscillations décroissantes qui sont visibles également sur la température de sortie (Figure 2.7a). La température atteint la valeur désirée mais après



(a) Température en Kelvin de la sortie \bar{T}_n (bleu) et de la valeur souhaitée (vert)

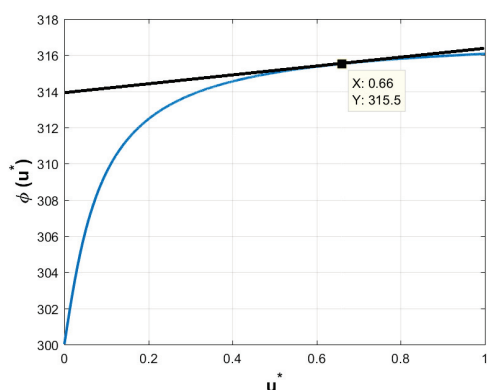


(b) Débit du fluide non commandé et entrée de commande normalisée

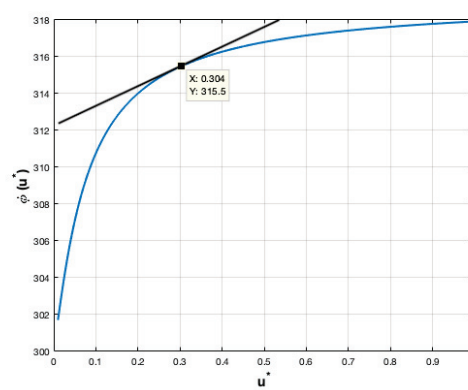
FIGURE 2.7 – Perturbation sur \bar{q} qui entraîne une instabilité de la commande

beaucoup plus de temps et avec des oscillations décroissantes. Des simulations non présentées ici nous montrent que si la perturbation diminue encore le débit, nous aurons tendance à avoir des oscillations de plus en plus importantes. Nous pouvons l'expliquer par la sensibilité de la commande à la fonction de sortie $\phi(u)$. En effet, plus la pente de la fonction est grande, plus la commande va osciller et inversement. Nous voyons sur les deux graphes de la Figure 2.8

que les pentes correspondantes à la valeur désirée sont différentes. Lorsque la pente est trop importante, la commande va avoir tendance à osciller. Nous voyons ainsi qu'avec le domaine de



(a) Fonction $\phi(u)$ pour $\bar{q} = 0.02\text{kg/s}$



(b) Fonction $\phi(u)$ pour $\bar{q} = 0.0175\text{kg/s}$

FIGURE 2.8 – Comparaison des courbes de commande

la fonction $\phi(u)$, nous pouvons déjà savoir les valeurs que nous pourrions facilement atteindre. De plus, il serait intéressant de trouver une commande qui permette d'adapter la commande en fonction de la pente de la fonction $\phi(u)$, ce qui permettra d'assigner par exemple des temps d'établissement à la sortie régulée.

2.7 Application à l'ETCC en utilisant un observateur

Nous avons validé une commande permettant de réguler la température de sortie de l'échangeur. Elle est donnée sous la forme d'un retour d'état nécessitant une connaissance de l'ensemble des variables d'état du système. En pratique, cette solution n'est pas effective car il faudrait disposer plusieurs capteurs le long de l'échangeur (ce qui représente un problème physique et économique). Afin de remédier à cet inconvénient, nous allons développer une commande permettant d'assurer l'objectif de régulation en utilisant un retour de sortie uniquement. Comme la commande par la méthode de forwarding a nécessairement besoin de la connaissance de tout l'état, nous allons donc utiliser un observateur afin de reconstruire les variables manquantes à partir de la mesure des températures des fluides aux sorties de l'échangeur.

2.7.1 Observateur : Rappel et synthèse

Les observateurs sont souvent utilisés sur des échangeurs thermiques, dans le cadre de la détection et l'isolation de défauts (Astorga-Zaragoza et al. (2008)) ou pour l'estimation de paramètres tels que le coefficient d'échange thermique, en prenant en compte les variations de

températures et d'usures (Escobar et al. (2011), Astorga-Zaragoza et al. (2007)). Compte tenu des hypothèses, les observateurs utilisés sont souvent des observateurs grand gain (Gauthier et al. (1992)). Comme le modèle de l'échangeur est bilinéaire, nous proposons d'utiliser un observateur de Kalman (filtre de Kalman) avec facteur d'oubli. Ce type d'observateur est en général utilisé pour les systèmes linéaires variants dans le temps. De plus, la convergence asymptotique de l'observateur est soumise à la positivité du grammien d'observabilité (Fossard and Normand-Cyrot (1995)). Pour les systèmes bilinéaires, cette propriété va dépendre de l'entrée appliquée (Sontag et al. (2009)). Pour assurer la convergence de l'observateur, il faut assurer que le système linéaire, variant dans le temps, c'est-à-dire correspondant à toute fonction d'entrée $u(t)$, possède un grammien d'observabilité défini positif. Dans un premier temps, nous allons donc analyser l'observabilité du système ainsi que les entrées singulières (soit celles qui rendent le système inobservable) puis nous donnerons l'observateur et enfin nous montrerons la stabilité de la loi de commande avec l'observateur.

2.7.2 Propriétés d'observabilité de l'échangeur à contre-courant

Avant d'analyser l'observabilité, nous récrivons le modèle précédent comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -k-u & u & & & & \\ & -k-u & u & & & \\ & & -k-u & k & & \\ \hline & & & -k-\bar{q} & \bar{q} & \\ & & k & & -k-\bar{q} & \bar{q} \\ & k & & & & -k-\bar{q} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ x_{in}u \\ \\ \bar{x}_{in}\bar{q} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.53)$$

avec le vecteur de sortie $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ tel que :

$$y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x \quad (2.54)$$

Le système est clairement observable puisque, par exemple, l'entrée constante $u(t)=1$ donne un système linéaire qui vérifie la condition du rang d'observabilité. Néanmoins, il existe des entrées qui rendent le système inobservable, comme $u(t)=0$, cependant cette entrée n'est pas dans le domaine opératoire admissible. Afin d'identifier toutes les entrées singulières, nous allons calculer le Jacobien du vecteur \mathcal{S} composé des sorties et de leurs dérivées de Lie successives ($L_f(y_1)$, $L_f^2(y_1)$, $L_f(y_2)$ et $L_f^2(y_2)$), puis nous allons identifier les entrées u qui rendent cette matrice singulière. Bien sûr, dans le cas multi-sorties, le choix du vecteur \mathcal{S} n'est pas unique. L'option choisie est celle qui limite l'ordre de dérivation par rapport à y_1 . Ce calcul nécessite que l'entrée u soit au moins deux fois différentiable : nous faisons donc cette hypothèse.

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} y_1 \\ L_f(y_1) \\ L_f^2(y_1) \\ y_2 \\ L_f(y_2) \\ L_f^2(y_2) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Pour la première sortie y_1 , nous avons la dérivée de Lie et la dérivée deuxième de Lie qui valent :

$$L_f(y_1) = L_f(x_1) = (-k - u)x_1 + u x_2 + k \bar{x}_1 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} L_f^2(y_1) &= L_f(L_f(y_1)) = L_f((-k - u)x_1 + u x_2 + k \bar{x}_1) \\ &= (-k - u)((-k - u)x_1 + u x_2 + k \bar{x}_1) + \dot{u}(x_2 - x_1) \\ &\quad + u((-k - u)x_2 + u x_3 + k \bar{x}_2) + k(k x_1 + (-k - \bar{q})\bar{x}_1 + \bar{x}_{in}\bar{q}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour la seconde, y_2 , nous avons les dérivées première et deuxième de Lie qui s'écrivent :

$$L_f(y_2) = L_f(\bar{x}_3) = (-k - \bar{q})\bar{x}_3 + \bar{q} \bar{x}_2 + k x_3 \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} L_f^2(y_2) &= L_f(L_f(y_2)) = L_f((-k - \bar{q})\bar{x}_3 + \bar{q} \bar{x}_2 + k x_3) \\ &= (-k - \bar{q})((-k - \bar{q})\bar{x}_3 + \bar{q} \bar{x}_2 + k x_3) \\ &\quad + \bar{q}((-k - \bar{q})\bar{x}_2 + \bar{q} \bar{x}_1 + k x_2) + k(k \bar{x}_3 + (-k - u)x_3 + x_{in}u) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Nous obtenons la matrice jacobienne de \mathcal{S} suivante :

$$\nabla \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(k+u) & u & 0 & 0 & 0 & k \\ (k+u)^2 + k^2 - \dot{u} & -2(k+u)u + \dot{u} & u^2 & 0 & ku & -k(2k+u+\bar{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -(k+\bar{q}) & \bar{q} & 0 \\ 0 & k\bar{q} & -k(2k+u+\bar{q}) & (k+\bar{q})^2 + k^2 & -2(k+\bar{q})\bar{q} & \bar{q}^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Le déterminant de cette matrice est le suivant :

$$\det(\nabla \mathcal{S}) = u\bar{q}k^2(\bar{q}^2 + k^2) - 4u^2\bar{q}^2k^2 + u^3\bar{q}(\bar{q}^2 + k^2) + k^2\dot{u}(\bar{q}^2 - \bar{q}u) \quad (2.61)$$

Ainsi, chaque trajectoire de l'entrée u qui satisfait l'égalité suivante :

$$\dot{u} = u \frac{k^2(\bar{q}^2 + k^2) - 4u\bar{q}k^2 + u^2(\bar{q}^2 + k^2)}{k^2(\bar{q} - u)} \quad (2.62)$$

correspond à une entrée singulière.

Regardons si il existe des entrées constantes qui sont admissibles pour le système. Nous avons déjà regarder le cas $u = 0$. Voyons les autres valeurs de u qui annule le numérateur, tel que :

$$k^2(\bar{q}^2 + k^2) - 4u\bar{q}k^2 + u^2(\bar{q}^2 + k^2) = 0 \quad (2.63)$$

Le discriminant Δ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (4k^2\bar{q})^2 - 4(k^4 + k^2\bar{q}^2)(k^2 + \bar{q}^2) \\ &= -4k^2(\bar{q}^2k^2 + \bar{q}^4 + 4k^4) \end{aligned}$$

Il est toujours négatif ce qui signifie que les valeurs de u sont imaginaires, elles sont donc en dehors du domaine de commande. Nous ne pouvons pas conclure que le système est uniformément observable pour toutes les entrées du domaine \mathcal{D}_u . Nous pouvons uniquement conclure qu'il l'est pour les états stationnaires.

2.7.3 Observateur

Nous allons, dans cette section, définir un observateur permettant de reconstruire asymptotiquement le vecteur des températures internes du système. Cet observateur est donné comme une

copie du système bilinéaire auquel se rajoute une correction en fonction de l'erreur d'observation de la sortie du système. Nous pouvons le voir dans l'équation (2.64).

$$\dot{\hat{x}} = (F + uB)\hat{x} + bu + G + K(\hat{y} - y) \quad (2.64a)$$

$$\dot{S} = -S(F + uB) - (F + uB)^T S + 2C_1^T C_1 - \alpha S, \quad \alpha > 0, \quad S = S^T \quad (2.64b)$$

$$\hat{y} = C_1 \hat{x} \quad (2.64c)$$

$$K = -S^{-1} C_1^T \quad (2.64d)$$

K représente le gain de l'observateur qui dépend de la matrice S ; solution de l'équation différentielle de Riccati (2.64b). Cette dernière est paramétrée par un coefficient α agissant sur les performances temporelles de l'observateur. Pour montrer la stabilité de l'observateur et la convergence asymptotique de l'erreur d'observation, nous utilisons l'approche de Lyapunov en prenant comme fonction de Lyapunov, la fonction quadratique suivante :

$$V(e) = e^T S e \quad (2.65)$$

Avec l'erreur d'observation donnée par : $e = x - \hat{x}$. Afin de calculer la variation de la fonction V , le long des trajectoires du système étendu par la dynamique de l'observateur, nous allons d'abord écrire la dynamique de l'erreur d'observation $e(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= (F + uB)x + bu + G - (F + uB)\hat{x} - bu - G - K(\hat{y} - y) \\ &= (F + uB)(x - \hat{x}) + S^{-1} C_1^T (\hat{y} - y) \\ &= (F + uB)e - S^{-1} C_1^T C_1 e \\ &= [(F + uB) - S^{-1} C_1^T C_1] e \end{aligned} \quad (2.66)$$

Il est intéressant de noter que la dynamique de l'erreur est aussi sous forme bilinéaire et dépend de l'entrée de commande. Ainsi les performances de convergence de l'erreur d'observation dépendront de l'entrée de commande u . Nous pouvons donc calculer la dérivée de la fonction de Lyapunov :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T S \dot{e} + \dot{e}^T S e + e^T \dot{S} e \\ &= e^T S [(F + uB) - S^{-1} C_1^T C_1] e + e^T [(F + uB)^T - C_1^T C_1 S^{-T}] S e + e^T \dot{S} e \\ &= e^T [S(F + uB) - C_1^T C_1 + (F + uB)^T S - C_1^T C_1 + \dot{S}] e \\ \dot{V} &= -\alpha e^T S e \end{aligned} \quad (2.67)$$

Vu que α est positif, la relation (2.67) implique que \dot{V} est strictement négative. Nous pouvons conclure que la dynamique de l'erreur d'observation (2.66) est stable et converge asymptoti-

quement vers 0. Ceci implique que le vecteur estimé \hat{x} converge aussi asymptotiquement vers x .

2.7.4 Loi de commande sur l'ensemble système & observateur

Nous allons maintenant nous intéresser à la commande en boucle fermée en utilisant l'état estimé \hat{x} donné par l'observateur synthétisé dans la section précédente dans la lois de commande basée sur la méthode de forwarding. Cette architecture de commande peut donc être qualifiée de commande par retour de sortie. Définissons d'abord le système en boucle fermée obtenu par une dynamique étendue (système et observateur) auquel se rajoute la lois de commande :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Fx + (b + Bx)u + G \\ y = C_1x \\ \dot{\hat{x}} = (F + uB)\hat{x} + bu + G + S^{-1}C_1^T(y - \hat{y}) \\ \dot{S} = -S(F + uB) - (F + uB)^T S + 2C_1^T C_1 - \alpha S, \\ \hat{y} = C_1\hat{x} \\ \dot{z} = Cz - r \\ u = u^* - 2a\hat{x}^T P(B\hat{x} + \tilde{b}) + c(z - M\hat{x})^T M(B\hat{x} + \tilde{b}) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Théorème 9 *Pour le système en boucle fermée (2.68), dont le vecteur d'état est donné par (x, \hat{x}) , le point (x^*, x^*) est asymptotiquement stable.*

Preuve : Nous allons montrer ce résultat en utilisant la fonction de Lyapunov W donnée comme suit :

$$W = a\hat{x}^T P\hat{x} + be^T Se + \frac{c}{2}(z - M\hat{x})^2 \quad (2.69)$$

$$= a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 \quad (2.70)$$

Elle est écrite en fonction de ces nouvelles variables $\hat{\hat{x}} = \hat{x} - x^*$ et $e = x - \hat{x}$. La matrice P correspond à la solution d'équation de Lyapunov donnée dans (2.37) et M solution de l'équation (2.38). Les coefficients a , b et c sont réels positifs. Par la suite, nous calculons la dynamique des

termes ω_1 , ω_2 et ω_3 le long des trajectoires du système en boucle fermée (2.68). Pour ω_1 :

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\hat{x}}^T P \hat{x} + \hat{x}^T P \dot{\hat{x}} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\tilde{F} \hat{x} + (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - S^{-1} C_1^T C_1 e \right)^T P \hat{x} \\ &\quad + \hat{x}^T P \left(\tilde{F} \hat{x} + (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - S^{-1} C_1^T C_1 e \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{x}^T \tilde{F}^T P \hat{x} + (u - u^*)^T (B \hat{x} + \tilde{b})^T P \hat{x} - (S^{-1} C_1^T C_1 e)^T P \hat{x} \\ &\quad + \hat{x}^T P \tilde{F} \hat{x} + \hat{x}^T P (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - \hat{x}^T P S^{-1} C_1^T C_1 e \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$= -\hat{x}^T Q \hat{x} + 2\hat{x}^T P (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - 2\hat{x}^T P S^{-1} C_1^T C_1 e \quad (2.74)$$

Pour ω_2 :

$$\dot{\omega}_2 = (\dot{e}^T S e + e^T S \dot{e} + e^T \dot{S} e) \quad (2.75)$$

$$= -\alpha e^T S e \quad (2.76)$$

Pour ω_3 :

$$\dot{\omega}_3 = (z - M \hat{x})^T (\dot{z} - M \dot{\hat{x}}) \quad (2.77)$$

$$= (z - M \hat{x})^T \left(C \hat{x} - M (\tilde{F} \hat{x} + (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - S^{-1} C_1^T C_1 e) \right) \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} &= (z - M \hat{x})^T \underbrace{(C \hat{x} - M \tilde{F} \hat{x})}_{=0} - (z - M \hat{x})^T M (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) + (z - M \hat{x})^T M S^{-1} C_1^T C_1 e \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$= -(z - M \hat{x})^T M (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) + (z - M \hat{x})^T M S^{-1} C_1^T C_1 e \quad (2.80)$$

Ainsi, en sommant les trois expressions, nous obtenons la dynamique de W :

$$\dot{W} = a \dot{\omega}_1 + b \dot{\omega}_2 + c \dot{\omega}_3 \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} &= -a \hat{x}^T Q \hat{x} + 2a \hat{x}^T P (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) - 2a \hat{x}^T P S^{-1} C_1^T C_1 e - b \alpha e^T S e \\ &\quad - c (z - M \hat{x})^T M (B \hat{x} + \tilde{b})(u - u^*) + c (z - M \hat{x})^T M S^{-1} C_1^T C_1 e \end{aligned} \quad (2.82)$$

En injectant l'expression de la commande rappelée ci-dessous :

$$u - u^* = -2a \hat{x}^T P (B \hat{x} + \tilde{b}) + c (z - M \hat{x})^T M (B \hat{x} + \tilde{b}) \quad (2.83)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= -a\hat{x}^T Q \hat{x} - 4a^2 \hat{x}^T P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P \hat{x} - 2a\hat{x}^T P S^{-1} C_1^T C_1 e - b\alpha e^T S e \\
&\quad - c^2 (z - M\hat{x})^T M (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T (z - M\hat{x}) + c(z - M\hat{x})^T M S^{-1} C_1^T C_1 e \quad (2.84) \\
&\leq -a\hat{x}^T Q \hat{x} - 4a^2 \hat{x}^T P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P \hat{x} + \frac{a^2}{2} \hat{x}^T P \hat{x} + 2e^T C_1^T C_1 S^{-T} P S^{-1} C_1^T C_1 e - b\alpha e^T S e \\
&\quad - c^2 (z - M\hat{x})^T M (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T (z - M\hat{x}) \\
&\quad + \frac{c}{4} (z - M\hat{x})^T (z - M\hat{x}) + e^T C_1^T C_1 S^{-T} M^T M S^{-1} C_1^T C_1 e \quad (2.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\hat{x}^T (aQ + 4a^2 P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P - \frac{a^2}{2} P) \hat{x} \\
&\quad - (z - M\hat{x})^T [c^2 M (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T - \frac{c}{4}] (z - M\hat{x}) \\
&\quad - e^T (b\alpha S - 2C_1^T C_1 S^{-T} P S^{-1} C_1^T C_1 - C_1^T C_1 S^{-T} M^T M S^{-1} C_1^T C_1) e \quad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\hat{x}^T [aQ + 4a^2 P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P - \frac{a^2}{2} P] \hat{x} \\
&\quad - (z - M\hat{x})^T [c^2 M (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T - \frac{c}{4}] (z - M\hat{x}) \\
&\quad - e^T [b\alpha S - C_1^T C_1 S^{-T} (2P + M^T M) S^{-1} C_1^T C_1] e \quad (2.87)
\end{aligned}$$

Nous pouvons trouver a , b , et c tels que¹ :

$$aQ + 4a^2 P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P - \frac{a^2}{2} P > 0 \quad (2.88)$$

$$c^2 M (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T - \frac{c}{4} > 0 \quad (2.89)$$

$$b\alpha S - C_1^T C_1 S^{-T} (2P + M^T M) S^{-1} C_1^T C_1 > 0 \quad (2.90)$$

En effet, $4a^2 P (B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T P$ est un terme quadratique donc positif. Il suffit donc de choisir a tel que

$$aQ - \frac{a^2}{2} P > 0 \quad (2.91)$$

Sachant que $a > 0$, nous obtenons :

$$Q - \frac{a}{2} P > 0 \quad (2.92)$$

$$aI < 2QP^{-1} \quad (2.93)$$

$$a < 2 \left\| QP^{-1} \right\|_{inf} \quad (2.94)$$

Avec la notation $\|\cdot\|_{inf}$, correspondant à la plus petite valeur propre de QP^{-1} , sachant que les deux matrices sont définies positives, a doit satisfaire l'encadrement suivant :

$$0 < a < 2 \left\| QP^{-1} \right\|_{inf} \quad (2.95)$$

1. Une matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite définie positive ou bien $H > 0$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T H x > 0$

Pour le terme $c^2 M(B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T - \frac{c}{4}$, nous devons respecter :

$$c > \frac{1}{4} \left(M(B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T \right)^{-1} \quad (2.96)$$

Pour satisfaire cela, il suffit de trouver une valeur de c qui satisfait la condition (suffisante) ci-dessous :

$$c > \frac{1}{4} \max_{\hat{x}} \left(M(B\hat{x} + \tilde{b})(B\hat{x} + \tilde{b})^T M^T \right) \quad (2.97)$$

Enfin, pour $b\alpha S - C_1^T C_1 S^{-T} (2P + M^T M) S^{-1} C_1^T C_1$, nous trouvons la condition suivante pour b :

$$b > \frac{1}{\alpha} \left\| S^{-1} C_1^T C_1 S^{-T} (2P + M^T M) S^{-1} C_1^T C_1 \right\|_{sup} \quad (2.98)$$

Avec la notation $\|\cdot\|_{sup}$ correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice. Pour les constantes a , b et c , telles que les équations (2.95), (2.98) et (2.97) sont satisfaites, nous obtenons :

$$\dot{W} \leq 0 \quad (2.99)$$

Ainsi, nous concluons sur la stabilité asymptotique de l'origine du vecteur (\hat{x}, e) le long des trajectoires du système en boucle fermée. Ceci est équivalent à la stabilité asymptotique du point (x^*, x^*) pour le vecteur (x, \hat{x}) . \square

2.7.5 Simulations de commande

Nous allons, dans un premier temps, montrer des résultats de simulation de l'observateur seul, en prenant une entrée de commande constante (débit constant du fluide) à $u = 0.649u_M$ (U_M déjà donné dans la tableau (2.1)), et à $t = 500s$ nous diminuons le débit de l'autre fluide pour passer de $\bar{q} = 0.02kg/s$ à $\bar{q} = 0.018kg/s$. Ce changement entraîne une augmentation de l'énergie échangée avec l'autre fluide. Sur la Figure 2.9, nous voyons en haut à gauche la sortie du système et la sortie issue de l'observateur. Sur la partie droite de la figure, nous voyons les températures du système et celles observées (en pointillés). Enfin, en bas à gauche, nous voyons l'erreur d'observateur pour l'ensemble du système.

Nous voyons que l'ensemble de l'état de l'observateur converge rapidement vers l'état du système. Il faut moins de temps à l'observateur pour converger que le système pour se stabiliser. De plus, il est possible d'améliorer la rapidité de l'observateur en augmentant le paramètre α dans la dynamique de la matrice S de l'observateur.

Nous allons maintenant montrer des résultats de commande en boucle fermée composée de l'observateur et de la commande synthétisée par forwarding. Nous faisons comme précédemment

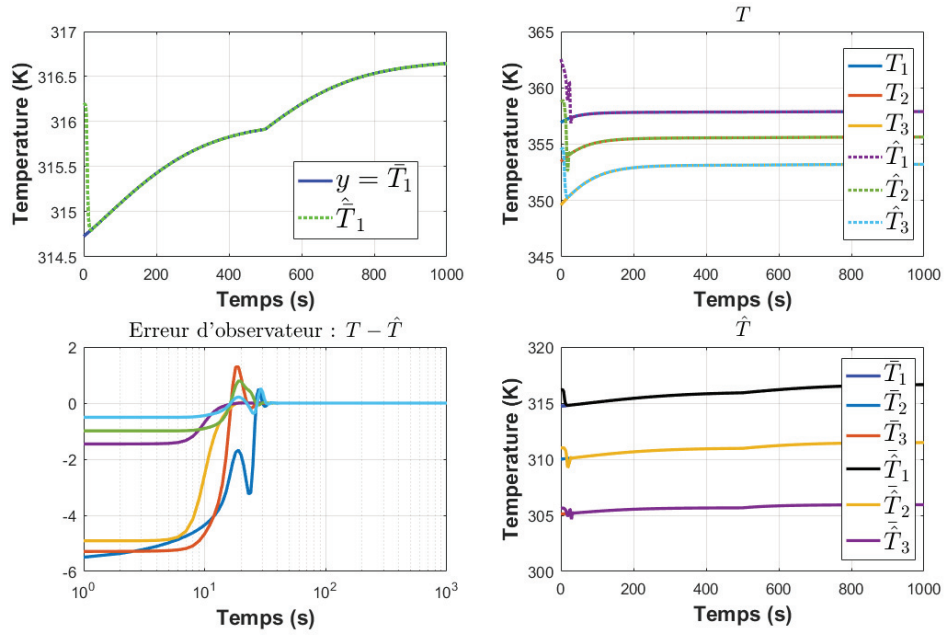
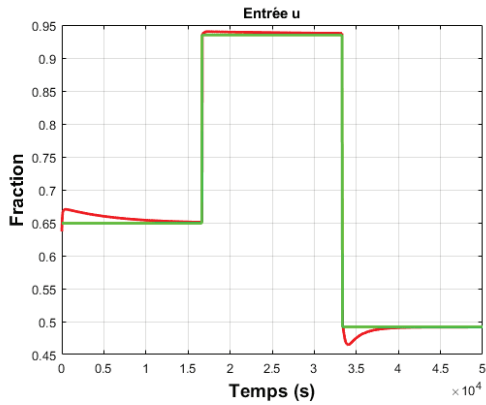


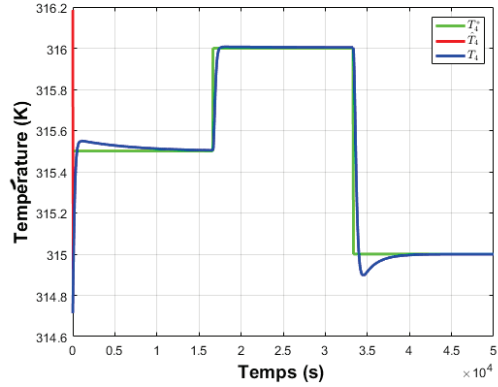
FIGURE 2.9 – Résultats de simulation de l'observateur

avec un profil de température à suivre pour la sortie du fluide non contrôlé. Sur la Figure 2.10a, nous voyons la valeur de la commande qui se stabilise à chaque valeurs de u^* , choisies comme une séquence de trois d'échelons correspondant aux trois échelons de températures cibles. La Figure 2.10b représente trois courbes : en bleu la température du fluide à sortie de l'échangeur pour le fluide non commandé, en rouge l'état de l'observateur qui, après quelques secondes, se confond totalement avec l'état du système, et enfin en vert les valeurs cibles choisies pour la température de sortie. Nous voyons que les trois courbes se confondent presque entièrement après quelques secondes, et malgré des changements brusques, le système converge rapidement vers le point d'équilibre.

Afin de valider la robustesse de la boucle fermée, nous avons fait une simulation en intégrant une perturbation sur le débit non contrôlé \bar{q} . La Figure 2.11a montre la commande obtenue sur le système perturbé, en comparaison avec la commande pré-calculée pour le système sans perturbation. La Figure 2.11b montre la température de sortie du fluide non commandé : la valeur du système (bleu), la valeur de l'observateur (rouge) et la valeur désirée (vert). Malgré une perturbation de 5% sur le débit du fluide non commandé, nous voyons que la commande par forwarding, utilisant l'observateur, rejette ladite perturbation et permet de retrouver la température désirée en sortie de l'échangeur.

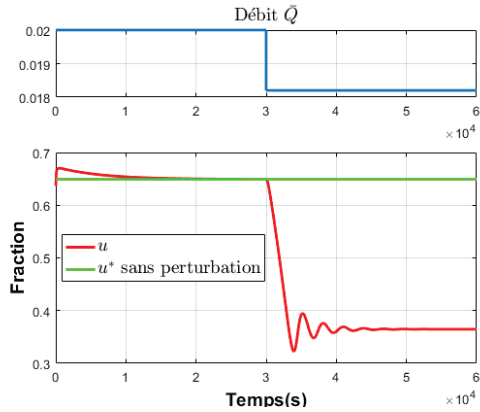


(a) Commande optimale (vert) et commande réelle (rouge)

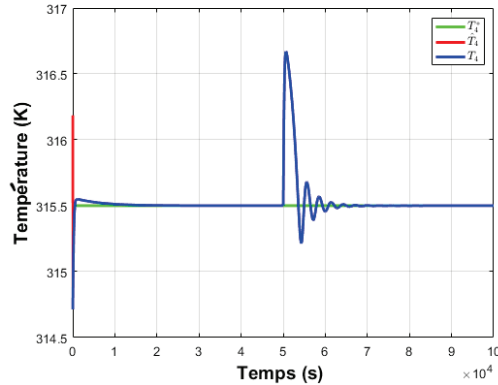


(b) Température de sortie de l'échangeur : mesurée (bleu), état de l'observateur (rouge), désirée/cible (vert)

FIGURE 2.10 – Système simulé en boucle fermée avec observateur et commande par forwarding



(a) Commande théorique sans perturbation (vert) et commande calculée (rouge)



(b) Température de sortie de l'échangeur : mesurée (bleu), état de l'observateur (rouge), désirée/cible (vert)

FIGURE 2.11 – Système simulé avec une perturbation sur \bar{q} à $t = 5.10^4s$

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi des propriétés du système dynamique bilinéaire de l'échangeur à contre-courant. En utilisant la méthode de forwarding, nous avons synthétisé une loi de commande sous la forme d'un retour d'état non linéaire, en tenant compte de la saturation de l'entrée qui permet de réguler la température de sortie du fluide non commandé. Nous avons, par la suite, donné des résultats de simulation montrant l'efficacité de cette loi de commande.

Afin de s'affranchir de la mesure complète du vecteur d'état du système, nous avons synthétisé un observateur permettant de reconstruire asymptotiquement les températures internes

de l'échangeur et ainsi proposer une commande par retour de sortie. Cette dernière est la composition de l'observateur et de la commande par forwarding dans laquelle l'état du système est remplacé par l'état de l'observateur. Nous avons montré, par l'approche de Lyapunov, la stabilité du système en boucle fermée et donné des résultats de simulations illustrant à la fois l'observateur seul puis le système en boucle fermée via un retour de sortie.

Nous avons aussi pu montrer quelques résultats numériques montrant la robustesse de la commande proposée.

Chapitre 3

Modélisation systématique d'échangeurs thermiques en série

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu quels sont les modèles dynamiques qui ont été utilisés dans la littérature pour des échangeurs de chaleur seuls. Ces modèles peuvent être différents suivants les objectifs recherchés. Pour le cas des échangeurs de chaleur à contre-courant, ils peuvent être modélisés par des systèmes dynamiques bilinéaires pour la synthèse d'observateurs et de lois de commande, comme celle synthétisée au chapitre précédent, en utilisant la méthode de forwarding. Cependant, dans l'industrie chimique ou pour la distribution urbaine de la chaleur, les systèmes ne se limitent pas à un échangeur de chaleur mais forment des réseaux ou sous-réseaux de plusieurs échangeurs de chaleur qui peuvent être associés en série et en parallèle. Les réseaux pouvant être complexes et évolutifs, leur optimisation et/ou leur commande nécessitent de définir une méthode d'écriture systématique des systèmes d'équations différentielles. C'est ce qui va être l'objet des Chapitres 3 et 4.

3.1.1 État de l'art de la modélisation de réseau simple

La modélisation de réseau d'échangeurs thermiques (RET) est un sujet d'étude qui a été très étudié durant les années 70. Afin d'améliorer les performances des réseaux, il était nécessaire de les rendre plus flexibles. En effet, un réseau d'échangeurs thermiques peut être optimisé plus facilement si les possibilités opératoires sont nombreuses. Comme pour leur dimensionnement classique, l'étape préalable à leur étude de flexibilité est la modélisation.

Le dimensionnement et le design d'un RET sont généralement faits en utilisant un modèle stationnaire 1-D (voir état de l'art du Chapitre 2) avec comme hypothèses : des écoulements

supposés piston, des paramètres constants (coefficient de transfert thermique, surface d'échange, propriétés des fluides) et perte de chaleur vers l'environnement négligeable (Luo et al. (2002); Roetzel et al. (2020d)). La structure des RET est ensuite optimisée pour satisfaire des objectifs dans des conditions opératoires données, souvent en minimisant les coûts de fonctionnement des utilités ou la consommation d'énergie nécessaire à la production de chaleur (Jäschke and Skogestad (2014)).

Dès que les RET sont soumis à des perturbations sur leurs conditions opératoires, les variables d'état dans les échangeurs peuvent fluctuer et s'éloigner du domaine de fonctionnement pour lequel ils ont été dimensionnés. Cela induit, pour le réseau, une difficulté voire une impossibilité à revenir dans un état de fonctionnement optimal.

Depuis quelques années, nous pouvons voir que les recherches sur la modélisation des RET est en constance augmentation (Roetzel et al. (2020d)). Les RET sont plébiscités afin de réutiliser et ainsi valoriser la chaleur fatale que dégagent les unités de production principales. Cependant, une part importante des publications est basée sur des modèles stationnaires des échangeurs thermiques Roetzel et al. (2020d).

La contribution de ce chapitre concerne la modélisation dynamique des RET en série en se basant sur le graphe de flux d'énergie et en utilisant une approche itérative.

3.1.2 Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous proposons une approche systématique de construction d'un modèle dynamique à dimension finie d'un RET en partant d'une cascade de blocs élémentaires comme ceux présentés au Chapitre 2 (d'autres configurations seront développées dans le Chapitre 4). L'originalité de cette méthode vient de l'utilisation d'un bloc élémentaire composé de deux compartiments homogènes, un chaud et un froid et de l'utilisation de l'enthalpie comme variable d'état. Ainsi, les interconnexions des compartiments se font uniquement à l'aide des flux convectifs de matière et d'enthalpie chaud et froid. En section 3.2, nous allons réécrire le modèle d'un échangeur comme un bloc élémentaire à deux compartiments. Puis, en section 3.3, nous détaillerons le formalisme de l'automatisation pour la connexion entre deux blocs élémentaires. Enfin, en section 3.3.4, nous présentons la connexion entre deux échangeurs, considérés comme une succession de blocs élémentaires à deux compartiments.

3.2 Représentation d'un bloc élémentaire d'un échangeur thermique

Nous partons des équations de base établies à partir des hypothèses données en section 1.3. Afin de reprendre les notations pour ce chapitre, nous allons redonner l'ensemble des éléments nécessaires à l'établissement du modèle. Nous utilisons l'enthalpie d'un compartiment, pour la représentation d'un échangeur. Nous considérons un bloc élémentaire formé de deux compartiments homogènes avec des flux à contre-courant représentés en Figure 3.1. Les flèches horizontales orientées vers la droite ou la gauche représentent la convection des fluides. La double flèche verticale représente le transfert de chaleur entre les deux compartiments.

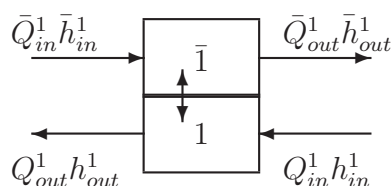


FIGURE 3.1 – Bloc élémentaire pour la représentation d'un échangeur de chaleur avec les flux convectifs entrants et sortants (flèches horizontales) et le flux de transfert de chaleur (flèche vertical)

3.2.1 Hypothèses sur l'échangeur de chaleur

Nous considérons les hypothèses suivantes :

1. Les deux compartiments sont parfaitement mélangés. Les volumes sont donc homogènes.
2. Les flux chaud et froid restent dans une seule phase idéale liquide.
3. Les pressions P , \bar{P} sont considérées constantes et uniformes.
4. Le coefficient de transfert de chaleur λ est constant et identique pour chaque bloc élémentaire. λ est un coefficient global : il inclut les coefficients de transferts de chaleur dans les couches limites proches de la paroi d'échange ainsi que de la conduction à travers la paroi elle-même et la surface d'échange.
5. Les masses volumiques $(\rho, \bar{\rho})$, les capacités thermiques (c_p, \bar{c}_p) et les débits massiques (Q, \bar{Q}) peuvent être différents entre les deux courants mais ils sont pris constants sur chacun des courants.
6. Les volumes V , \bar{V} sont constants et identiques pour tous les compartiments.
7. Il n'y a pas d'accumulation d'énergie dans la paroi entre les deux fluides.
8. Il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'environnement à travers les surfaces externes.

3.2.2 Équation de bilan de masse pour le bloc élémentaire

Avec l'hypothèse 5, les équations de bilan de masse pour chacun des deux compartiments sont réduites à :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{Q}_{in}^1 - \bar{Q}_{out}^1 \\ 0 &= Q_{in}^1 - Q_{out}^1 \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, nous définissons ainsi \bar{Q} et Q tels que $\bar{Q} = \bar{Q}_{in}^1 = \bar{Q}_{out}^1$ et $Q = Q_{in}^1 = Q_{out}^1$

3.2.3 Équation de bilan d'enthalpie pour le bloc élémentaire

Grâce à l'hypothèse de pression constante, hypothèse 3, le bilan d'énergie est équivalent au bilan d'enthalpie. Ainsi, nous choisissons les enthalpies H^1 et \bar{H}^1 comme variables d'état pour les compartiments 1 et $\bar{1}$. De plus, avec l'hypothèse 1, nous avons $\bar{H}_{out}^1 = \bar{H}^1$ et $H_{out}^1 = H^1$. Enfin, nous rappelons que pour chaque bloc * les enthalpies H^* et \bar{H}^* sont définies à partir des enthalpies spécifiques h et \bar{h} ($J.kg^{-1}$) des fluides circulant dans les compartiments comme :

$$H^* = \rho V h(T^*), \quad \bar{H}^* = \bar{\rho} \bar{V} \bar{h}(\bar{T}^*) \quad (3.1)$$

avec T^* et \bar{T}^* (K) les températures dans les compartiments.

Avec les hypothèses 2, 3 et 5, les enthalpies spécifiques sont données par :

$$h(T^*) = c_p(T^* - T_{ref}) + h_{ref}, \quad \bar{h}(\bar{T}^*) = \bar{c}_p(\bar{T}^* - \bar{T}_{ref}) + \bar{h}_{ref} \quad (3.2)$$

Avec h_{ref} , \bar{h}_{ref} et T_{ref} , \bar{T}_{ref} , les valeurs de référence thermodynamiques des deux fluides (Sandler (1999)).

Proposition 10 *Avec les hypothèses de 1 à 8, les bilans d'énergie dans les compartiments du bloc élémentaire s'écrivent :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\lambda(I_1 \otimes A_t) \mathbb{T} - \frac{Q}{\rho \bar{V}} (I_1 \otimes A_c + B_c) \mathbb{H} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} \bar{V}} (I_1 \otimes \bar{A}_c + \bar{B}_c) \mathbb{H} \\ \quad + \mathbb{B} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \bar{V}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} \bar{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in} \\ \bar{H}_{in} \end{bmatrix} \\ F_{out} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \bar{V}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} \bar{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \mathbb{H} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Où $\mathbb{H} = \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état d'enthalpie, $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} T^1 \\ \bar{T}^1 \end{bmatrix}$ est le vecteur de température. Q et \bar{Q} sont les débits massiques des compartiments 1 et $\bar{1}$ respectivement, $\frac{Q}{\rho \bar{V}} H_{in}$ et $\frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} \bar{V}} \bar{H}_{in}$ sont

les flux en enthalpie d'entrée des compartiments 1 et $\bar{1}$ respectivement. Le vecteur F_{out} est le flux de sortie en enthalpie. Enfin, \otimes correspond au produit de Kronecker. Nous notons les matrices comme suit :

$$\begin{aligned} A_t &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B & \bar{B} \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, I_1 = 1, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C \\ \bar{C} \end{bmatrix}, B_c = \bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Remarque 2 Dans (3.4), l'indice t correspond au transfert de chaleur à travers la paroi des compartiments et l'indice c à la convection. En prévision de la généralisation, nous introduisons les matrices B_c et \bar{B}_c . Ici, ce sont des matrices de zéros mais elles se rempliront par la suite lors de l'interconnexion des blocs élémentaires.

Preuve : Dans ce cas, la preuve est simple. Nous calculons l'équation de bilan d'enthalpie de chaque bloc :

$$\frac{dH^1}{dt} = \lambda(\bar{T}^1 - T^1) + \frac{Q}{\rho V}(H_{in}^1 - H^1) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\bar{H}^1}{dt} = -\lambda(\bar{T}^1 - T^1) + \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho V}}(\bar{H}_{in}^1 - \bar{H}^1) \quad (3.6)$$

avec $H_{in}^1 = \rho V h(T_{in}^1)$ et $\bar{H}_{in}^1 = \bar{\rho V} \bar{h}(\bar{T}_{in}^1)$. Nous prenons $H_{in} = H_{in}^1$ et $\bar{H}_{in} = \bar{H}_{in}^1$. Finalement nous identifions $F_{out} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{\rho V} H_{out} \\ \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho V}} \bar{H}_{out} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, le produit de Kronecker est immédiat (car I_1 est de dimension 1). \square

Remarque 3 Une autre possibilité d'écriture pour le système est la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\lambda \left(A'_t \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \end{bmatrix} + \Delta_{ref} \right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \left((-A_c - \bar{A}_c) \mathbb{H} + \mathbb{B} \mathbb{H}_{in} \right) \\ F_{out} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \mathbb{H} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $A'_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V c_p} & -\frac{1}{\bar{\rho V} \bar{c}_p} \\ -\frac{1}{\rho V c_p} & \frac{1}{\bar{\rho V} \bar{c}_p} \end{bmatrix}$ et le vecteur constant $\Delta_{ref} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$ avec

$$\beta = \left(T_{ref} - \frac{h_{ref}}{c_p} \right) - \left(\bar{T}_{ref} - \frac{\bar{h}_{ref}}{\bar{c}_p} \right)$$

3.3 Liaison en cascade de blocs élémentaires

3.3.1 Liaison en cascade de deux blocs élémentaires

Nous considérons ici l'interconnexion en cascade de deux blocs élémentaires. Les notations des blocs sont données dans les Figures 3.2 et 3.3.

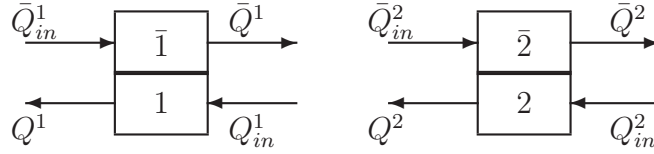


FIGURE 3.2 – Deux blocs élémentaires et leurs flux massique d'entrée et de sortie

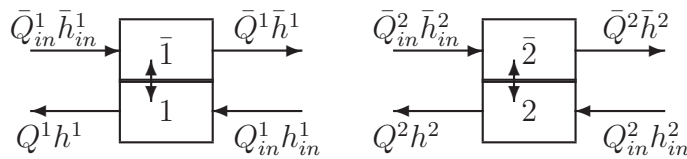


FIGURE 3.3 – Deux blocs élémentaires avec leurs flux d'enthalpie et les transferts de chaleur.

Les Figures 3.4 et 3.5 montrent l'interconnexion entre les deux blocs élémentaires. Le nouveau modèle qui en découle a pour variables de flux d'entrée et de sortie générales (Q_{in} , Q_{out} , \bar{Q}_{in} , \bar{Q}_{out}) pour la masse et ($Q_{in}h_{in}$, $Q_{out}h_{out}$, $\bar{Q}_{in}\bar{h}_{in}$, $\bar{Q}_{out}\bar{h}_{out}$) pour l'enthalpie. Ces interconnexions représentées dans les figures par un cercle blanc induisent donc des relations entre les variables d'entrée et de sortie de chaque compartiment. En effet, certaines de ces variables deviennent des variables internes du réseau et les autres des variables d'entrée et de sortie du système formé par la cascade des deux blocs.

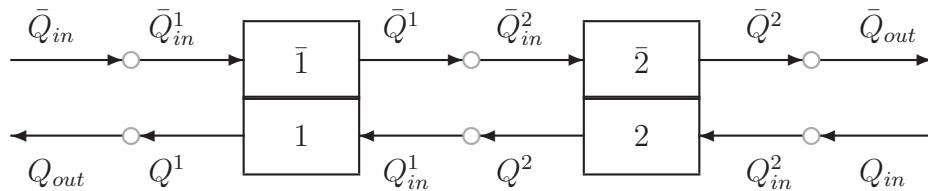


FIGURE 3.4 – Deux blocs élémentaires et les relations de connexion de flux de matière

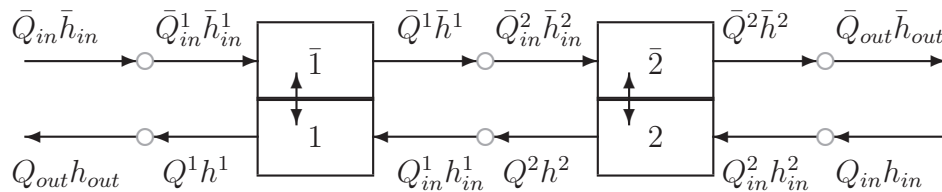


FIGURE 3.5 – Deux blocs élémentaires et les relations de connexion des flux d'enthalpie

Les représentations par graphe des systèmes des Figures 3.4 et 3.5 sont données respectivement en Figure 3.6 et en Figure 3.7.

Ainsi, nous obtenons pour le transport de masse un graphe à deux composantes connexes : une pour le flux froid et une pour le flux chaud. Les flèches correspondent aux flux de masse. Les cercles sont les nœuds du graphes. Pour une meilleure lecture du graphe nous avons différencié les nœuds avec deux couleurs : les cercles blancs sont les jonctions d'interconnexion ; elles correspondent à une égalité de flux. Les cercles gris sont les connecteurs avec accumulation puisqu'ils représentent un compartiment. Comme nous avons fait l'hypothèse qu'il n'y avait pas d'accumulation de matière dans les compartiments, ici il y a également égalité des débits sur les cercles gris.

Pour le transport de chaleur, nous ne prenons en compte que les flux convectifs. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, les flux de transfert de chaleur n'interviennent qu'au sein d'un bloc entre ses deux compartiments ; ils n'interviennent pas pour l'interconnexion de blocs. Nous ne représentons donc pas explicitement ce phénomène au niveau des graphes. Ainsi, nous obtenons aussi un graphe à deux composantes (une pour le flux froid et une pour le flux chaud). Cette fois les nœuds gris représentent l'accumulation d'enthalpie au sein d'un compartiment où se trouvent implicitement le transfert de chaleur entre les flux froid et chaud.

Nous utiliserons la notation $(*, \bar{*})$ pour définir les entrées et sortie du système formé par la cascade de deux blocs élémentaires.

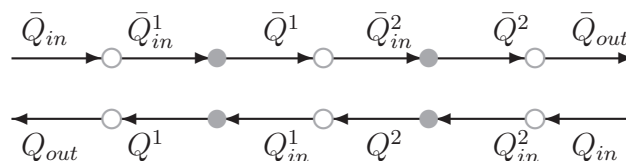


FIGURE 3.6 – Représentation graphique des interconnexions en débit massique de deux blocs élémentaires

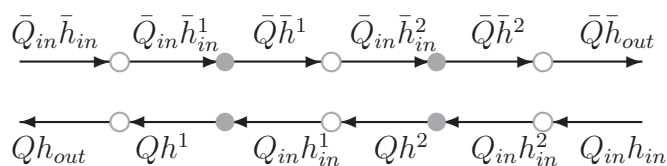


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des connexions en enthalpie entre deux blocs élémentaires.

À partir des graphes d'interconnexion de matière et d'énergie, nous pouvons écrire les matrices d'adjacence des nœuds blancs (c'est-à-dire ceux liés uniquement à la convection). Considérons dans un premier temps les vecteurs de flux de matière (3.8) et d'enthalpie (3.9) suivants. L'ordre des flux qui a été choisi ici est important et sera conservé pour les Chapitres 3 et 4. Nous commençons par les entrées de chaque compartiment (Q et ensuite \bar{Q}), puis viennent les sorties du RET, suivies par les sorties de chaque compartiment et enfin par les entrées du RET.

avec

$$A_d = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{d,D} & \mathbb{B}^{1:2} \\ \hline F & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D & \mathbb{B}^{1:2} \\ \hline 0_{2 \times 4} & \mathbb{B}^{1:2} \\ \hline \bar{D} & \\ \hline F & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] \quad (3.11)$$

Comme les fluides circulent entre les entrées et les sorties et que la matrice est symétrique, nous ne nous sommes intéressés qu'aux six premières égalités. Elles nous permettent de définir :

- la matrice F liée aux flux de sortie du RET (deux dernières lignes de la matrice A_d)
- la matrice $\mathbb{B}^{1:2}$ liant les flux d'entrée des compartiments et les flux d'entrées du RET (partie supérieure droite de la matrice A_d)
- la matrice $A_{d,D}$ liant les flux d'interconnexions entre les blocs 1 et 2 (partie supérieure gauche de la matrice A_d)

La matrice d'adjacence qui est ici égale à la matrice d'interconnexion A_d conduit donc aux relations triviales pour la matière. Ce sont deux égalités, une sur le débit Q , l'autre sur le débit \bar{Q} :

$$Q_{in} = Q^1 = Q_{in}^1 = Q^2 = Q_{in}^2 = Q_{out} = Q \quad (3.12)$$

$$\bar{Q}_{in} = \bar{Q}^1 = \bar{Q}_{in}^1 = \bar{Q}^2 = \bar{Q}_{in}^2 = \bar{Q}_{out} = \bar{Q} \quad (3.13)$$

De la même manière, en utilisant les égalités précédentes et en prémultipliant les flux en Q par $\frac{1}{\rho V}$ et ceux en \bar{Q} par $\frac{1}{\bar{\rho} V}$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \\ QH_{out} \\ \bar{Q}\bar{H}_{out} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A_d} \begin{bmatrix} QH^1 \\ \bar{Q}\bar{H}^1 \\ QH^2 \\ \bar{Q}\bar{H}^2 \\ QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Maintenant, considérons l'équation de bilan d'énergie de deux blocs avec leurs flux de sortie associés (même écriture que l'équation (3.3))

$$\begin{bmatrix} \dot{H}^1 \\ \dot{\bar{H}}^1 \end{bmatrix} = -\lambda(I_1 \otimes A_t) \begin{bmatrix} T^1 \\ \bar{T}^1 \end{bmatrix} - \frac{Q}{\rho V}(I_1 \otimes A_c + B_c) \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \end{bmatrix} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} V}(I_1 \otimes \bar{A}_c + \bar{B}_c) \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$+ \mathbb{B} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^1 \\ \bar{H}_{in}^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{H}^2 \\ \dot{\bar{H}}^2 \end{bmatrix} &= -\lambda(I_1 \otimes A_t) \begin{bmatrix} T^2 \\ \bar{T}^2 \end{bmatrix} - \frac{Q}{\rho V} (I_1 \otimes A_c + B_c) \begin{bmatrix} H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} V} (I_1 \otimes \bar{A}_c + \bar{B}_c) \begin{bmatrix} H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbb{B} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^2 \\ \bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{out}^1 &= \begin{bmatrix} Qh^1 \\ \bar{Q}\bar{h}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \end{bmatrix} \\ F_{out}^2 &= \begin{bmatrix} Qh^2 \\ \bar{Q}\bar{h}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \begin{bmatrix} H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous pouvons donner la proposition suivante :

Proposition 11 *Avec les hypothèses 1 à 8, les bilans d'énergie des différents compartiments d'une cascade de deux blocs élémentaires (3.15) et (3.16) s'écrivent :*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{H} &= -\lambda(I_2 \otimes A_t) \mathbb{T} - \frac{Q}{\rho V} (I_2 \otimes A_c - B_c^{1:2}) \mathbb{H} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho} V} (I_2 \otimes \bar{A}_c - \bar{B}_c^{1:2}) \mathbb{H} \\ &+ \mathbb{B}^{1:2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in} \\ \bar{H}_{in} \end{bmatrix} \\ F_{out} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho} V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} \mathbb{H} \end{aligned} \right. \quad (3.18)$$

où $\mathbb{H}^T = [H^1 \ \bar{H}^1 \ H^2 \ \bar{H}^2]$ est le vecteur d'état enthalpique, $\mathbb{T}^T = [T^1 \ \bar{T}^1 \ T^2 \ \bar{T}^2]$ est le vecteur des températures. Q, \bar{Q} sont les débits massiques d'entrée et de sortie du système général, h_{in}, \bar{h}_{in} sont les enthalpies spécifiques d'entrée et de sortie du système, F_{out} est le vecteur des flux d'enthalpie de sortie du système (voir (3.22)) avec :

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}^{1:2} = \begin{bmatrix} 0_2 & \bar{B} \\ B & 0_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_c^{1:2} &= \begin{bmatrix} B_c & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_c^{1:2} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_c & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \bar{B}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}^{1:2} = \begin{bmatrix} C & 0_2^T \\ 0_2^T & \bar{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Preuve : Nous ne ferons ici que la démonstration pour les interconnexions et les connexions entre les entrées et les sorties du système. Nous considérons le vecteur \mathbb{H} donné dans la proposition. Les termes contenant le produit de Kronecker dans l'équation (3.18) se calculent facilement (matrice de degré 2). Les autres sont calculés à l'aide de l'équation (3.14). Nous la réécrivons comme suit en utilisant les matrices définies dans (3.11) :

— Calcul des entrées globales du système

$$\begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} = \mathbb{B}^{1:2} \begin{bmatrix} QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

— Calcul sur les entrées de sous systèmes qui deviennent des variables internes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} &= A_{d,D} \begin{bmatrix} QH^1 \\ \bar{Q}\bar{H}^1 \\ QH^2 \\ \bar{Q}\bar{H}^2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} + \bar{Q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} + \bar{Q} \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} + \bar{Q} \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

— Calcul des variables de sortie globales

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} QH_{out} \\ \bar{Q}\bar{H}_{out} \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^F \begin{bmatrix} QH^1 \\ \bar{Q}\bar{H}^1 \\ QH^2 \\ \bar{Q}\bar{H}^2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QH^1 \\ \bar{Q}\bar{H}^1 \\ QH^2 \\ \bar{Q}\bar{H}^2 \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{1:2} \begin{bmatrix} QH^1 \\ \bar{Q}\bar{H}^1 \\ QH^2 \\ \bar{Q}\bar{H}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace d'état du système global : Pour ce cas trivial, la dimension du vecteur d'entrées internes est la même que celle du vecteur

d'état. Nous verrons, dans les cas suivants, l'intérêt de cette étape.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{B} & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & \mathbb{B} \end{array} \right] \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} B & \bar{B} & 0_{2 \times 2} & \\ \hline 0_{2 \times 2} & & B & \bar{B} \end{array} \right] \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \end{bmatrix} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.20), (3.21), (3.22) dans (3.15), (3.16) et (3.17) nous obtenons le résultat proposé. Nous pouvons noter que la matrice identité, de la relation (3.20), ainsi que les matrices D , \bar{D} et F sont des sous-matrices de A_d (voir (3.14)). À ce niveau du chapitre, la matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} = I_4$ est simple car tous les éléments du vecteur d'état sont des sorties. Elle prendra toute sa valeur à la prochaine étape. En effet, dans la section suivante, le vecteur de sortie ne correspond pas au vecteur d'état. \square

Remarque 4 Nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned}
B_c^{1:2} &= \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & A_c \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes A_c \\
\bar{B}_c^{1:2} &= \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \bar{A}_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \bar{A}_c
\end{aligned}$$

3.3.2 Connexion d'un système : deux blocs élémentaires avec un troisième

Les Figures 3.8 et 3.9 représentent la liaison entre deux systèmes : un système composé de deux blocs élémentaires avec un système d'un bloc élémentaire. Les figures nous donnent les notations.

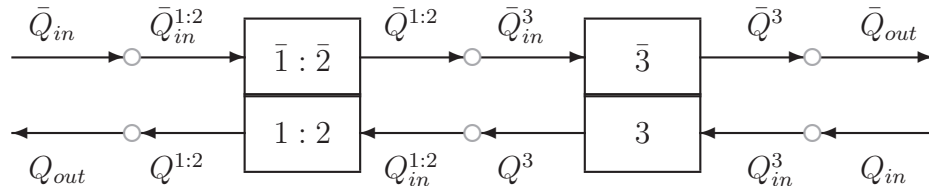


FIGURE 3.8 – La relation d'interconnexion des sous-systèmes $1 : 2$, $\bar{1} : \bar{2}$ et $3, \bar{3}$ avec les flux de masse

Avec le même raisonnement que dans les sections précédentes, nous avons l'égalité sur les débits :

$$Q_{in} = Q_{in}^{1:2} = Q^{1:2} = Q_{in}^3 = Q^3 = Q^{out} = Q \quad (3.24)$$

$$\bar{Q}_{in} = \bar{Q}_{in}^{1:2} = \bar{Q}^{1:2} = \bar{Q}_{in}^3 = \bar{Q}^3 = \bar{Q}^{out} = \bar{Q} \quad (3.25)$$

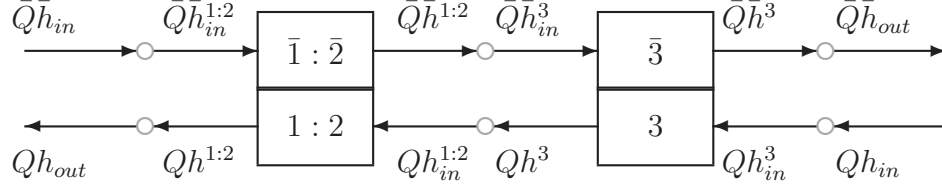


FIGURE 3.9 – La relation d'interconnexion des sous-systèmes avec les flux d'enthalpie

Comme précédemment, nous considérons la matrice d'interconnexion (correspondant aux nœuds blancs) pour la convection en enthalpie, notons :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} Qh_{in}^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{h}_{in}^{1:2} \\ Qh_{in}^3 \\ \bar{Q}\bar{h}_{in}^3 \\ Qh_{out} \\ \bar{Q}\bar{h}_{out} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \begin{bmatrix} Qh^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{h}^{1:2} \\ Qh^3 \\ \bar{Q}\bar{h}^3 \\ Qh_{in} \\ \bar{Q}\bar{h}_{in} \end{bmatrix}$$

Nous avons la même relation que précédemment :

$$\mathcal{F}_1 = A_d \mathcal{F}_2 \quad (3.26)$$

Cette relation reste vraie en prémultipliant des deux cotés de l'égalité les flux en Q par $\frac{1}{\rho V}$ et ceux en \bar{Q} par $\frac{1}{\bar{\rho} \bar{V}}$.

Avec les notations suivantes :

$$\mathbb{H}^{1:2T} = \begin{bmatrix} H^1 & \bar{H}^1 & H^2 & \bar{H}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H}^{3T} = \begin{bmatrix} H^3 & \bar{H}^3 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{T}^{1:2T} = \begin{bmatrix} T^1 & \bar{T}^1 & T^2 & \bar{T}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{T}^{3T} = \begin{bmatrix} T^3 & \bar{T}^3 \end{bmatrix}$$

les bilans d'énergies des sous-systèmes 1 : 2, $\bar{1} : \bar{2}$ et 3, $\bar{3}$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:2} = -\lambda(I_2 \otimes A_t) \mathbb{T}^{1:2} - \frac{Q}{\rho V} (I_2 \otimes A_c - B_c^{1:2}) \mathbb{H}^{1:2} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho V}} (I_2 \otimes \bar{A}_c - \bar{B}_c^{1:2}) \mathbb{H}^{1:2} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:2} \\ \bar{H}_{in}^{1:2} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} \mathbb{H}^{1:2} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^3 = -\lambda(I_1 \otimes A_t) \mathbb{T}^3 - \frac{Q}{\rho V} (I_1 \otimes A_c - B_c) \mathbb{H}^3 - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho V}} (I_1 \otimes \bar{A}_c - \bar{B}_c) \mathbb{H}^3 \\ \quad + \mathbb{B} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^3 \\ \bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} \\ F_{out}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \mathbb{H}^3 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 12 Avec les hypothèses 1 à 8, les bilans d'énergie des compartiments de la cascade des deux systèmes (3.27), (3.28) peuvent s'écrire comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\lambda(I_3 \otimes A_t) \mathbb{T} - \frac{Q}{\rho V} (I_3 \otimes A_c - B_c^{1:3}) \mathbb{H} - \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho V}} (I_3 \otimes \bar{A}_c - \bar{B}_c^{1:3}) \mathbb{H} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:3} \\ \bar{H}_{in}^{1:3} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:3} \mathbb{H} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

où $\mathbb{H}^T = [\mathbb{H}^{1:2T} \quad \mathbb{H}^{3T}]$ est le vecteur d'enthalpie, $\mathbb{T}^T = [\mathbb{T}^{1:2T} \quad \mathbb{T}^{3T}]$ est le vecteur des températures. Q, \bar{Q} sont les débits massiques généraux du système entier, $Qh_{in}, \bar{Q}\bar{h}_{in}$ sont les flux enthalpiques d'entrée du système, le vecteur F_{out} contient les flux enthalpiques de sortie avec :

$$0_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{B}^{1:3} = \begin{bmatrix} 0_4 & \bar{B} \\ B & 0_4 \end{bmatrix}, B_c^{1:3} = \begin{bmatrix} B_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\bar{B}_c^{1:3} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \bar{B}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix}, \mathbb{C}^{1:3} = \begin{bmatrix} C & 0_2^T & 0_2^T \\ 0_2^T & 0_2^T & \bar{C} \end{bmatrix}$$

Preuve : Comme précédemment, nous allons faire les démonstrations pour les interconnexions et les connexions entre les entrées et les sorties du système. Enfin, nous verrons l'intérêt du plongement dans la dimension du vecteur d'état lorsque celui-ci est plus grand que celle du vecteur \mathcal{F}_1 .

— Calcul des entrées du système global.

De nouveau, nous utilisons la partie haute de la matrice d'interconnexion $A_d : A_{d,D}$ (cf (3.11))

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} QH_{in}^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^{1:2} \\ QH_{in}^3 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} &=_{A_{d,D}} \begin{bmatrix} QH^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{H}^{1:2} \\ QH^3 \\ \bar{Q}\bar{H}^3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{1:2} \\ \bar{H}^{1:2} \\ H^3 \\ \bar{H}^3 \end{bmatrix} + \bar{Q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{1:2} \\ \bar{H}^{1:2} \\ H^3 \\ \bar{H}^3 \end{bmatrix} \\
&= Q \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \\ H^3 \\ \bar{H}^3 \end{bmatrix} + \bar{Q} \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ \bar{H}^1 \\ H^2 \\ \bar{H}^2 \\ H^3 \\ \bar{H}^3 \end{bmatrix} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

— Calcul des entrées des sous systèmes qui deviennent des variables internes.

Nous considérons le vecteur des entrées des deux sous systèmes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} QH_{in}^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^{1:2} \\ QH_{in}^3 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \mathbb{B}^{1:2} \begin{bmatrix} QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} = \mathbb{B}^{1:3} \begin{bmatrix} QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

— Calcul des variables de sortie globales.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} QH_{out} \\ \bar{Q}\bar{H}_{out} \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^F \begin{bmatrix} QH^{1:2} \\ \bar{Q}\bar{H}^{1:2} \\ QH^3 \\ \bar{Q}\bar{H}^3 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \\ QH_{in}^3 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{1:3} \begin{bmatrix} QH_{in}^1 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^1 \\ QH_{in}^2 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^2 \\ QH_{in}^3 \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace d'état du système global.

Pour plonger dans la dimension du vecteur d'état (6 éléments), nous avons l'égalité

suiivante :

$$\begin{bmatrix} H_{in}^1 \\ \bar{H}_{in}^1 \\ H_{in}^2 \\ \bar{H}_{in}^2 \\ H_{in}^3 \\ \bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:2} \\ \bar{H}_{in}^{1:2} \\ H_{in}^3 \\ \bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_2 & \bar{B} & & \\ B & 0_2 & 0_{4 \times 2} & \\ & 0_{2 \times 2} & B & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:2} \\ \bar{H}_{in}^{1:2} \\ H_{in}^3 \\ \bar{H}_{in}^3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Il suffit donc de pr multiplier la relation (3.32) pour obtenir le second terme de la matrice $B_c^{1:3}$.

En utilisant les relations (3.31), (3.32), (3.33) dans (3.27) , (3.28), nous obtenons le résultat proposé.

Remarque 5 *Nous pouvons noter que :*

$$\begin{aligned} B_c^{1:3} &= \begin{bmatrix} B_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0_{2 \times 2} & A_c & 0_{4 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \\ \hline \hline & 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0_{4 \times 4} & \begin{array}{c} 0_{2 \times 2} \\ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \\ \hline 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & A_c & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & A_c \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = S_3 \otimes A_c \end{aligned} \quad (3.35)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{B}_c^{1:3} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \bar{B}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c^{1:2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \bar{B}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ \hline \bar{A}_c & 0_{2 \times 2} & \\ \hline \hline & 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0_{4 \times 4} & \begin{array}{c} 0_{4 \times 2} \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{array} \\ \hline 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \bar{A}_c & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \bar{A}_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = S_3^T \otimes A_c \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\text{avec } S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Connexion d'un système : i blocs élémentaires avec un autre bloc

Les Figures 3.10 et 3.11 représentent les liaisons entre deux systèmes : un système de i blocs élémentaires et un système d'un bloc élémentaire. Les figures nous définissent les notations.

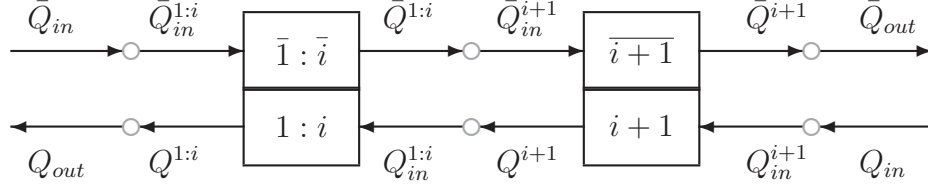


FIGURE 3.10 – Relation des flux de matière entre les système à i blocs et celui à 1 bloc

Avec le même raisonnement que les sections précédentes, nous avons directement :

$$\begin{aligned} Q_{in} &= Q_{in}^{1:i} = Q^{1:i} = Q_{in}^{i+1} = Q^{i+1} = Q_{out} = Q \\ \bar{Q}_{in} &= \bar{Q}_{in}^{1:i} = \bar{Q}^{1:i} = \bar{Q}_{in}^{i+1} = \bar{Q}^{i+1} = \bar{Q}_{out} = \bar{Q} \end{aligned}$$

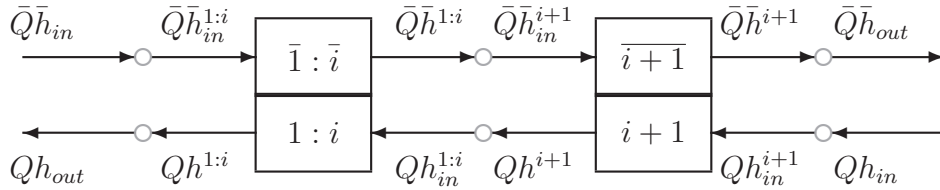


FIGURE 3.11 – Relation des flux d'enthalpie entre les système à i blocs et celui à 1 bloc

Comme dans les sections précédentes, nous regardons la matrice d'interconnexion (correspondant aux nœuds blancs) pour les flux d'enthalpie qui finalement aboutissent avec les pré-multiplications des deux cotés de l'égalité par $\frac{1}{\rho V}$ pour les flux en Q et par $\frac{1}{\rho V}$ pour ceux en \bar{Q} .

$$\begin{bmatrix} Qh^{1:i}H_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}^{1:i} \\ QH_{in}^{i+1} \\ \bar{Q}\bar{H}^{i+1} \\ QH_{out} \\ \bar{Q}\bar{H}_{out} \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} QH^{1:i} \\ \bar{Q}\bar{H}^{1:i} \\ QH^{i+1} \\ \bar{Q}\bar{H}^{i+1} \\ QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{1:iT} &= [H^1 \quad \bar{H}^1 \quad H^2 \quad \bar{H}^2 \quad \dots \quad H^i \quad \bar{H}^i], & \mathbb{H}^{i+1T} &= [H^{i+1} \quad \bar{H}^{i+1}], \\ \mathbb{T}^{1:iT} &= [T^1 \quad \bar{T}^1 \quad T^2 \quad \bar{T}^2 \quad \dots \quad T^i \quad \bar{T}^i], & \mathbb{T}^{i+1T} &= [T^{i+1} \quad \bar{T}^{i+1}]. \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 10 et à la Remarque 5, l'équation de bilan d'énergie d'un bloc élémentaire est de la forme (3.38)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{i+1} = -\lambda(I_1 \otimes A_t) \mathbb{T}^{i+1} - \frac{Q}{\rho V} ((I_1 - S_1) \otimes A_c) \mathbb{H}^{i+1} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} ((I_1 - S_1^T) \otimes \bar{A}_c) \mathbb{H}^{i+1} \\ \quad + \mathbb{B} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1+i} \\ \bar{H}_{in}^{1+i} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C} \mathbb{H}^{i+1} \end{array} \right. \quad (3.38)$$

avec $S_1 = 0$.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 13 *En respectant les hypothèses 1 à 8, l'équation de bilan d'énergie du système composé d'une cascade de i systèmes élémentaires s'écrit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:i} = -\lambda(I_i \otimes A_t) \mathbb{T}^{1:i} - \frac{Q}{\rho V} ((I_i - S_i) \otimes A_c) \mathbb{H}^{1:i} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} ((I_i - S_i^T) \otimes \bar{A}_c) \mathbb{H}^{1:i} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:i} \\ \bar{H}_{in}^{1:i} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{H}^{1:i} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

avec S_i la matrice $i \times i$ sur-diagonale, $\mathbb{B}^{1:i} = \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} & \bar{B} \\ B & 0_{2(i-1)} \end{bmatrix}$, $\mathbb{C}^{1:i} = \begin{bmatrix} C & 0_{2(i-1)}^T \\ 0_{2(i-1)}^T & \bar{C} \end{bmatrix}$

L'équation de bilan d'énergie du système global formé par les cascades des deux sous-systèmes (3.38) et (3.39) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\lambda(I_{i+1} \otimes A_t) \mathbb{T} - \frac{Q}{\rho V} ((I_{i+1} - S_{i+1}) \otimes A_c) \mathbb{H} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} ((I_{i+1} - S_{i+1}^T) \otimes \bar{A}_c) \mathbb{H} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:i+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:i+1} \\ \bar{H}_{in}^{1:i+1} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:i+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i+1} \mathbb{H} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

où $\mathbb{H}^T = [\mathbb{H}^{1:iT} \quad \mathbb{H}^{i+1T}]$ est le vecteur d'état enthalpique, $\mathbb{T}^T = [\mathbb{T}^{1:iT} \quad \mathbb{T}^{i+1T}]$ est le vecteur des températures, Q, \bar{Q} sont les débits massiques généraux du système entier, $Qh_{in}, \bar{Q}\bar{h}_{in}$ sont les flux enthalpiques d'entrée du système, le vecteur F_{out} contient les flux enthalpiques de sortie du système avec

$$\mathbb{B}^{1:i+1} = \begin{bmatrix} 0_{2i} & \bar{B} \\ B & 0_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}^{1:i+1} = \begin{bmatrix} C & 0_{2i}^T \\ 0_{2i}^T & \bar{C} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Preuve : Notons que la forme (3.39) est vraie pour $i = 1, 2$ et 3 . Nous pouvons également voir que les deux colonnes de $\mathbb{B}^{1:i+1}$ concernent les entrées du système global, et enfin, les

vecteurs $\begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_{2(i-1)} \\ \bar{B} \end{bmatrix}$ concernent les entrées des deux sous-systèmes. En utilisant l'équation (3.37) dans (3.38) et (3.39), et en réutilisant la remarque précédente nous avons :

$$B_c^{1:i+1} = \begin{bmatrix} B_c^{1:i} & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$= \begin{bmatrix} S_i \otimes A_c & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$= \begin{bmatrix} S_i \otimes A_c & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \\ 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$= \begin{bmatrix} S_i \otimes A_c & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & B_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$= S_{i+1} \otimes A_c \quad (3.46)$$

avec la matrice sur-diagonale $((i+1) \times (i+1))$

$$S_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

De la même manière nous avons :

$$\bar{B}_c^{1:i+1} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c^{1:i} & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & \bar{B}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_{2(i-1)} \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Donc pour résumer :

$$B_c^{1:i+1} = S_{i+1} \otimes A_c \quad \text{et} \quad \bar{B}_c^{1:i+1} = S_{i+1}^T \otimes \bar{A}_c \quad (3.49)$$

Le reste de la preuve est exactement la même que précédemment. \square

3.3.4 Connexion d'un système : i blocs élémentaires avec j blocs additionnels

Comme précédemment, nous avons les égalités des flux de matières. Ainsi, nous avons les débits Q et \bar{Q} . La Figure 3.12 représente les liaisons entre deux systèmes : un système de i blocs élémentaires et un de j blocs élémentaires. Nous avons les notations dans la figure.

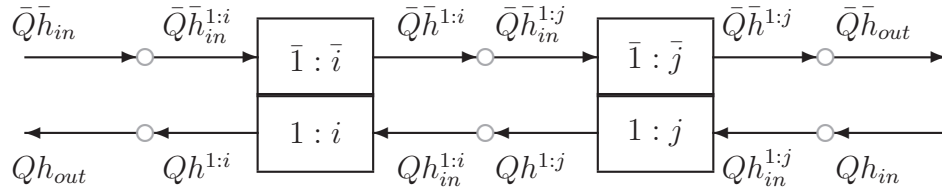


FIGURE 3.12 – La relation d'interconnexion des sous-systèmes $1:i$, $\bar{1}:\bar{i}$ et $1:j$, $\bar{1}:\bar{j}$ suivant les flux d'enthalpie.

Comme la section précédente, nous considérons la matrice d'interconnexion pour les flux d'enthalpie. En prémultipliant des deux cotés les équations d'égalité de flux par $\frac{1}{\rho V}$ pour les flux en Q et par $\frac{1}{\rho V}$ pour ceux en \bar{Q} , nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} QH_{in}^{1:i} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^{1:i} \\ QH_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in}^{1:j} \\ QH_{out} \\ \bar{Q}\bar{H}_{out} \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} QH^{1:i} \\ \bar{Q}\bar{H}^{1:i} \\ QH^{i:j} \\ \bar{Q}\bar{H}^{i:j} \\ QH_{in} \\ \bar{Q}\bar{H}_{in} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Avec les deux vecteurs d'enthalpies $\mathbb{H}^{1:i}$ et $\mathbb{H}^{1:j}$ et les vecteurs de températures $\mathbb{T}^{1:i}$ et $\mathbb{T}^{1:j}$ et

enfin les équations bilans correspondantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:i} = -\lambda(I_i \otimes A_t) \mathbb{T}^{1:i} - \frac{Q}{\rho V} \left((I_i - S_i) \otimes A_c \right) \mathbb{H}^{1:i} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \left((I_i - S_i^T) \otimes \bar{A}_c \right) \mathbb{H}^{1:i} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:i} \\ \bar{H}_{in}^{1:i} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{H}^{1:i} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:j} = -\lambda(I_j \otimes A_t) \mathbb{T}^{1:j} - \frac{Q}{\rho V} \left((I_j - S_j) \otimes A_c \right) \mathbb{H}^{1:j} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \left((I_j - S_j^T) \otimes \bar{A}_c \right) \mathbb{H}^{1:j} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:j} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:j} \\ \bar{H}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:j} \mathbb{H}^{1:j} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 14 Avec les hypothèses 1 à 8, l'équation de bilan d'énergie du système global composé d'une cascade de deux systèmes (3.51), (3.52) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\lambda(I_{i+j} \otimes A_t) \mathbb{T} - \frac{Q}{\rho V} \left((I_{i+j} - S_{i+j}) \otimes A_c \right) \mathbb{H} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \left((I_{i+j} - S_{i+j}^T) \otimes \bar{A}_c \right) \mathbb{H} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:i+j} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in} \\ \bar{H}_{in} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:i+j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i+j} \mathbb{H} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

où $\mathbb{H}^T = \left[\mathbb{H}^{1:i^T} \quad \mathbb{H}^{1:j^T} \right]$ est le vecteur d'état enthalpique, $\mathbb{T}^T = \left[\mathbb{T}^{1:i^T} \quad \mathbb{T}^{1:j^T} \right]$ est le vecteur des températures, Q, \bar{Q} sont les débits massiques du système entier, $Qh_{in}, \bar{Q}\bar{h}_{in}$ sont les flux enthalpiques d'entrée du système, le vecteur F_{out} contient les flux enthalpiques de sortie.

Avec $k = i + j - 1$,

$$\mathbb{B}^{1:i+j} = \begin{bmatrix} 0_{2k} & \bar{B} \\ B & 0_{2k} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}^{1:i+j} = \begin{bmatrix} C & 0_{2k}^T \\ 0_{2k}^T & \bar{C} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Preuve : Nous utilisons la relation de la matrice d'interconnexion (3.50) et nous avons les expressions de sortie des sous-systèmes, avec :

$$B_c^{1:i+j} = \begin{bmatrix} B_c^{1:i} & 0_{2i \times 2j} \\ 0_{2j \times 2i} & B_c^{1:j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \\ 0_{2j} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} = S_{i+j} \otimes A_c,$$

$$\bar{B}_c^{1:i+j} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c^{1:i} & 0_{2i \times 2j} \\ 0_{2j \times 2i} & \bar{B}_c^{1:j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2i} \\ \bar{B} \\ 0_{2(j-1)} \end{bmatrix} \bar{D} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} = S_{i+j}^T \otimes \bar{A}_c$$

□

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu la modélisation systématique d'un réseau d'échangeurs de chaleur reliés en série. Nous pouvons également considérer qu'il s'agit d'un seul échangeur avec un nombre n de compartiments. Nous faisons toujours l'interconnexion entre deux sous-systèmes, ces derniers peuvent être composés d'un seul ou bien d'une série de n blocs élémentaires. Quel que soit ce nombre, la matrice d'interconnexion reste inchangée. La différence se fait lors du plongement dans la dimension du vecteur d'état. Nous avons alors défini la matrice adéquate afin de passer des éléments de l'interconnexion, qui sont au nombre de quatre et correspondent aux entrées/sorties de chaque sous-système, vers le vecteur d'état qui a pour dimension le nombre total de blocs élémentaires des deux sous-systèmes.

Pour chacun des cas considérés, nous avons résolu le bilan de matière en amont de la modélisation. Ainsi, nous faisons disparaître une équation qui est triviale dans le cas d'une liaison série. Cependant, nous verrons dans le Chapitre 4 que pour celles de type répartiteur ou collecteur, prendre en compte cette équation devient nécessaire à la modélisation du réseau.

Chapitre 4

Modélisation systématique d'un réseau d'échangeurs thermiques

4.1 Introduction

Dans le Chapitre 3, nous avons présenté une méthode de modélisation dynamique systématique des réseaux d'échangeurs thermiques (RET) pour des échangeurs en série. Dans ce chapitre, nous allons généraliser la méthode à un réseau quelconque, c'est à dire mettant en oeuvre des échangeurs en série, mais aussi des connexions de type collecteurs et répartiteurs.

Dans la littérature scientifique, les réseaux d'échangeurs de chaleur sont généralement modélisés et optimisés pour un ou plusieurs points de fonctionnement stables. Les modèles utilisés sont donc souvent des modèles stationnaires (Kayange et al. (2020)), dans lesquels les connexions entre les échangeurs sont prises en compte par de simples bilans globaux sans accumulation de chaleur. Les graphes ont aussi souvent été utilisés pour représenter les connexions entre les échangeurs. En premier lieu, ils ont été employés pour la modélisation des systèmes thermodynamiques (Chandrashekar and Wong (1982) Chinneck and Chandrashekar (1984b) Chinneck and Chandrashekar (1984a)). Dans ces articles, l'accent est mis sur l'universalité de cette approche qui permet de représenter toutes sortes de flux multi-physiques. Ils ont également été utilisés afin de rendre systématique la modélisation des RET à l'état stationnaire et à paramètres constants (Luo et al. (2002); de Oliveira Filho et al. (2007)). Dans de Oliveira Filho et al. (2007), les auteurs utilisent la théorie des graphes pour obtenir un modèle basé sur la matrice d'incidence qui représente la connectivité du réseau. La structure de leur réseau est basée sur les connexions qu'il y a entre les éléments du réseaux (échangeur thermique, machine thermodynamique ...), tel qu'un collecteur ou encore un répartiteur.

Quant à l'utilisation des graphes pour les systèmes dynamiques, c'est une méthode usuelle (Harary and Gupta (1997)). Ils sont très utilisés pour la modélisation de réseaux très variés comme les systèmes biologiques et les systèmes physiques tels que les mousses métalliques (Scheuermann et al. (2019)). A. van der Schaft a montré dans van der Schaft (2017) comment les lois de conservations et les équations de bilans, pour les systèmes physiques en réseau, sont typiquement représentables à l'aide de la matrice d'incidence d'un graphe orienté. Enfin, dans Varga et al. (1995), des modèles structurés s'appuient sur la topologie du réseau.

Dans le cas d'une modélisation dynamique, les collecteurs et les répartiteurs deviennent des éléments actifs, car leur configuration évoluera tout au long du processus.

Dans ce chapitre, nous commencerons par réécrire le modèle du chapitre précédent en séparant le bilan de matière du bilan d'énergie. Ensuite, nous ferons la modélisation d'une connexion de type collecteur entre deux échangeurs, puis entre un réseau composé de plusieurs échangeurs avec un nouvel échangeur. Enfin, nous ferons les deux mêmes étapes pour la connexion de type répartiteur. Ainsi, nous pourrons lier, par une méthode simple, différents échangeurs qu'ils soient en parallèle les uns par rapport aux autres, ou en série.

4.2 Généralisation du modèle d'échangeur thermique et définitions pour le modèle de réseau d'échangeurs thermiques

4.2.1 Généralisation du modèle d'échangeur de chaleur

Dans le Chapitre 3, nous avons montré comment écrire les systèmes de bilans d'énergie permettant de modéliser des échangeurs de chaleur simples dans lesquels les débits massiques Q et \bar{Q} sont supposés constants le long de chaque échangeur car nous n'avons considéré que les interconnexions en série. Or, ces hypothèses ne sont pas toujours vraies pour les réseaux d'échangeurs de chaleur qui peuvent mettre en œuvre des courants de différentes natures chimiques avec des débits variables, des échangeurs de différents types et des collecteurs ou des répartiteurs qui les relient entre eux. Nous allons donc montrer ici comment généraliser l'écriture des bilans d'énergie pour tout type d'échangeur pouvant être intégré dans un réseau.

Ici, nous allons considérer des hypothèses plus larges que dans le Chapitre 3, même si en définitive des simplifications vont apparaître suite à l'écriture des matrices d'interconnexions. Nous allons supposer ici que chaque compartiment est indépendant avec ses propriétés propres :

1. Tous les compartiments sont parfaitement mélangés et les volumes (V_i, \bar{V}_i) peuvent varier d'un compartiment à l'autre. Cela implique une homogénéité des volumes.
2. Il n'y a ni accumulation de matière dans les compartiments, ni dispersion de matière entre les compartiments.

3. Les fluides *chauds* et *froids* sont en phase liquide.
4. Les débits massiques (Q_i, \bar{Q}_i) peuvent varier d'un compartiment à l'autre et donc d'un échangeur thermique à un autre.
5. Les pressions P et \bar{P} sont constantes et uniformes le long de l'échangeur.
6. La paroi entre les deux compartiments d'un bloc élémentaire i n'accumule pas d'énergie.
7. Les parois extérieures des échangeurs sont parfaitement isolées de l'environnement qui l'entoure (pas de déperdition d'énergie)
8. Les coefficients de transfert de chaleur λ_i peuvent varier d'un compartiment à l'autre et donc d'un échangeur thermique à un autre.
9. Les masses volumiques des deux fluides, notées $(\rho_i, \bar{\rho}_i)$ ainsi que leurs capacités thermiques (c_{pi}, \bar{c}_{pi}) peuvent varier d'un compartiment à l'autre et donc d'un échangeur thermique à un autre.

Il faut remarquer que le système d'équations de bilans d'énergie est basé principalement sur l'interconnexion des flux d'énergie qui sont convectés par la matière et donc que de la même façon que nous avons écrit les bilans d'énergie dans le Chapitre 3, il est possible d'écrire les bilans de matière. En supposant donc qu'il n'y a pas d'accumulation de matière dans les compartiments et que la matière n'est pas dispersée le long de l'échangeur, nous avons écrit les égalités de matière comme suit :

$$\begin{aligned} Q &= Q_{in} = Q_{in}^{1:i} = Q^1 = \dots = Q^i = Q^{1:i} = Q_{out} \\ \bar{Q} &= \bar{Q}_{in} = \bar{Q}_{in}^{1:i} = \bar{Q}^1 = \dots = \bar{Q}^i = \bar{Q}^{1:i} = \bar{Q}_{out} \end{aligned}$$

avec Q^1, \dots, Q^i et $\bar{Q}^1, \dots, \bar{Q}^i$ les débits dans les compartiments. Or, ces égalités sont les résultats de la résolution du système d'équation de bilans de matière suivant :

$$\begin{cases} 0 = -A_{cq,i} \mathbb{Q}^{1:i} + \mathbb{E}_{in}^{1:i} \mathbb{Q}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:i} = \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{Q}^{1:i} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbb{Q}^{1:i}$ est le vecteur d'état des débits dans les compartiments, construit de façon similaire au vecteur $\mathbb{H}^{1:i}$, à savoir $\mathbb{Q}^{1:i} = [Q^1 \ \bar{Q}^1 \ \dots \ Q^i \ \bar{Q}^i]^T$, les vecteurs $\mathbb{Q}_{in}^{1:i}$ et $\mathbb{Q}_{out}^{1:i}$ sont définis comme étant les vecteurs des entrées et des sorties de matière dans le réseau d'échangeurs de chaleur :

$$\mathbb{Q}_{in}^{1:i} = \begin{bmatrix} Q_{in} \\ \bar{Q}_{in} \end{bmatrix}; \quad \mathbb{Q}_{out}^{1:i} = \begin{bmatrix} Q_{out} \\ \bar{Q}_{out} \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{cq,i}$ est la matrice d'interconnexion des compartiments entre eux suivant le chemin des courants dans les échangeurs simples telle que :

$$A_{cq,i} = ((I_i - S_i) \otimes A_c) + ((I_i - S_i^T) \otimes \bar{A}_c)$$

La matrice $\mathbb{E}_{in}^{1:i}$ est la matrice de connexion des entrées du système global (pour un échangeur simple, elle est égale à $\mathbb{B}^{1:i}$ et de dimension $2i \times 2$ et elle peut aussi être définie comme $\mathbb{E}_{in}^{1:i} = \begin{bmatrix} E^{1:i} & \bar{E}^{1:i} \end{bmatrix}$ où $E^{1:i} = \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} \\ B \end{bmatrix}$ et $\bar{E}^{1:i} = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0_{2(i-1)} \end{bmatrix}$ sont respectivement les premier et second vecteurs de la matrice $\mathbb{B}^{1:i}$).

La matrice $\mathbb{C}^{1:i}$ est la matrice de connexion des sorties du système global (pour un échangeur simple, elle est dimension $2 \times 2i$ et elle peut aussi être définie comme $\mathbb{C}^{1:i} = \begin{bmatrix} C^{1:i} \\ \bar{C}^{1:i} \end{bmatrix}$ où $C^{1:i} = \begin{bmatrix} C & 0_{2(i-1)} \end{bmatrix}$ et $\bar{C}^{1:i} = \begin{bmatrix} 0_{2(i-1)} & \bar{C} \end{bmatrix}$).

Remarque 6 *Nous pouvons noter que résoudre ces équations revient à contraindre une ou plusieurs des variables de débit par rapport aux autres (par exemple Q_{in} et \bar{Q}_{in}).*

Reprenons maintenant le système d'équations (3.51) qui a été défini pour un échangeur de chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:i} = -\lambda(I_i \otimes A_t) \mathbb{T}^{1:i} - \frac{Q}{\rho V} \left((I_i - S_i) \otimes A_c \right) \mathbb{H}^{1:i} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \left((I_i - S_i^T) \otimes \bar{A}_c \right) \mathbb{H}^{1:i} \\ \quad + \mathbb{B}^{1:i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{in}^{1:i} \\ \bar{H}_{in}^{1:i} \end{bmatrix} \\ F_{out}^{1:i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{H}^{1:i} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En regroupant les termes 2 et 3 à droite de la première égalité, et en remplaçant les termes constants par les vecteurs adéquats, nous faisons apparaître les matrices suivantes qui sont ensuite utilisées dans la proposition 15. Les définitions, les indices ainsi que les formules des matrices utilisées dans ce chapitre sont donnés dans la Table 4.1 donnée ci-dessous. L'indice i donne le nombre de compartiments de l'échangeur.

Remarque 7 — *Nous pouvons noter que les matrices de la forme $I_x \odot (V_{ecteur,1} \times V_{ecteur,2})$ ¹ correspondent à des matrices diagonales avec les coefficients nécessaires (débits, paramètres des fluides).*

— *Les volumes V_{in} , \bar{V}_{in} associés aux flux d'entrée seront choisis égaux aux volumes du compartiment dans lequel ces flux entrent.*

Proposition 15 *Avec les hypothèses 1 à 9, les équations (4.1), (4.2) et la Table 4.1, le système*

1. \odot correspond au produit d'Hadamard : produit élément par élément des matrices (Liu and Trenkler (2008))

Vecteur des coefficients de transfert de chaleur	A_i^T	$A_i^T = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{i-1} \ \lambda_i]$
Vecteur des propriétés sur l'échangeur	$\mathbb{V}_{r,i}$	$\mathbb{V}_{r,i}^T = \left[\frac{1}{\rho_1 V_1} \quad \frac{1}{\bar{\rho}_1 V_1} \quad \dots \quad \frac{1}{\rho_i V_i} \quad \frac{1}{\bar{\rho}_i V_i} \right]$
Vecteur des propriétés sur l'échangeur à l'entrée	$\mathbb{V}_{r,i,in}$	$\mathbb{V}_{r,i,in}^T = \left[\frac{1}{\rho_{in} V_{in}} \quad \frac{1}{\bar{\rho}_{in} V_{in}} \right]$ $= (\mathbb{E}_{in}^{1:i})^T \times \mathbb{V}_{r,i}$
Matrice de transfert de chaleur entre les compartiments chaud et froid des blocs élémentaires. L'indice t signifie transfert	$A_{t,i}$	$A_{t,i} = (I_i \odot (A_i \times \mathbf{1}_i^T)) \otimes A_t$ avec $\mathbf{1}_i^T = [1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times i}$
Matrice de convection interne entre les blocs élémentaires d'un même courant. L'indice cc signifie Connect Convection	$A_{cc,i}$	$A_{cc,i} = A_{cq,i} \times (I_{2i} \odot (\mathbb{Q}^{1:i} \times \mathbb{V}_{r,i}^T))$
Matrice des débits de convection des flux d'énergie entrants. L'indice ic signifie Input Convection	$A_{ic,i}$	$A_{ic,i} = I_2 \odot (\mathbb{Q}_{in}^{1:i} \times \mathbb{V}_{r,i,in}^T)$

TABLE 4.1 – Notation des matrices et vecteurs utilisés dans ce chapitre pour un échangeur formé de i blocs élémentaires

des équations de bilans de matière et d'énergie d'un échangeur simple peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:i} = -A_{t,i} \mathbb{T}^{1:i} - A_{cc,i} \mathbb{H}^{1:i} + \mathbb{E}_{in}^{1:i} A_{ic,i} \mathbb{H}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{F}_{out}^{1:i} = \mathbb{C}^{1:i} A_{cc,i} \mathbb{H}^{1:i} \\ 0 = -A_{cq,i} \mathbb{Q}^{1:i} + \mathbb{E}_{in}^{1:i} \mathbb{Q}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:i} = \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{Q}^{1:i} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec les vecteurs et les matrices définis comme précédemment.

Preuve : Développons les matrices :

$$\begin{aligned} A_{t,i} &= (I_i \odot (A_i \times \mathbf{1}_i^T)) \otimes A_t = (I_i \odot \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \end{bmatrix} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_i \right)) \otimes A_t \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix} \otimes A_t \end{aligned}$$

Comme nous savons que la matrice A_t est la matrice de transfert pour un bloc élémentaire,

nous avons la bonne écriture.

$$\begin{aligned}
A_{cc,i} &= A_{cq,i} \times (I_{2i} \odot (\mathbb{Q}^{1:i} \times \mathbb{V}_{r,i}^T)) = A_{cq,i} \times (I_{2i} \odot \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \bar{Q}_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho V_1} & \cdots & \frac{1}{\rho_i V_i} \end{bmatrix} \right)) \\
&= A_{cq,i} \times \begin{bmatrix} \frac{Q_1}{\rho V_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\bar{Q}_i}{\rho_i V_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Avec $A_{cq,i}$ la matrice de connexion du réseau de blocs élémentaires, nous avons les débits qui correspondent pour chaque compartiment.

$$\begin{aligned}
A_{ic,i} &= I_2 \odot (\mathbb{Q}_{in}^{1:i} \times \mathbb{V}_{r,i,in}^T) = I_2 \odot \left(\begin{bmatrix} Q_{in} \\ \bar{Q}_{in} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_{in} V_{in}} & \frac{1}{\bar{\rho}_{in} V_{in}} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{Q_{in}}{\rho_{in} V_{in}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{Q}_{in}}{\bar{\rho}_{in} V_{in}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui correspond aux termes d'entrée du système 1 : i

Nous avons donc une nouvelle écriture de l'échangeur de chaleur. \square

4.2.2 Définitions pour le modèle de réseau d'échangeurs de chaleur

La modélisation d'un réseau d'échangeurs de chaleur va nécessiter d'apporter quelques extensions quant aux vecteurs d'entrées et de sorties du système global. En fait, la mise en parallèle d'échangeurs ou la mise en place d'interconnexions telles que les collecteurs ou les répartiteurs peut induire une augmentation du nombre d'entrées et de sorties. Comme les vecteurs \mathbb{H} , \mathbb{Q} et \mathbb{T} , ils seront incrémentés en fonction des numéros des entrées/sorties à ajouter. Par exemple, si l'entrée Q de l'échangeur 2 est connectée à l'intérieur du système et son entrée \bar{Q} à l'extérieur alors les vecteurs d'entrées du système deviendront $\mathbb{Q}_{in}^T = [Q_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,2}]$ et $\mathbb{H}_{in}^T = [H_{in,1} \quad \bar{H}_{in,1} \quad \bar{H}_{in,2}]$ ou si la sortie Q de l'échangeur 2 est connectée à l'extérieur du système et sa sortie \bar{Q} à l'intérieur alors les vecteurs de sorties du système deviendront $\mathbb{Q}_{out}^T = [Q_{out,1} \quad \bar{Q}_{out,1} \quad Q_{out,2}]$ et $\mathbb{F}_{out}^T = [F_{out,1} \quad \bar{F}_{out,1} \quad F_{out,2}]$.

4.3 Collecteurs : ajout d'un flux issu d'un échangeur de chaleur en parallèle

Dans cette section, nous allons présenter et expliquer la méthode qui est utilisée pour connecter un échangeur de chaleur dans un réseau d'échangeur de chaleur existant en amont du courant

Pour faire l'interconnexion entre les deux échangeurs, nous utilisons la même méthode que celle employée dans le Chapitre 3, à savoir nous connectons l'entrée de $1 : k$ et la sortie $1 : j$. Mais dans ce chapitre, nous allons uniquement effectuer l'opération sur la matière, les équations de bilans d'énergie découleront ensuite naturellement des bilans de matière.

Soit le vecteur de flux de matière $\mathcal{F}_M = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{M,1} \\ \mathcal{F}_{M,2} \end{bmatrix}$ et la matrice d'interconnexion A_d :

$$\mathcal{F}_{M,1} = A_d \mathcal{F}_{M,2}$$

Le vecteur de flux de matière est construit comme dans le Chapitre 3, tout d'abord les débits entrants des échangeurs ou les parties d'échangeurs à modifier en commençant par l'échangeur en aval du flux, ici $1 : k$ puis $1 : j$ (le courant $k + 1 : i$ n'est pas considéré dans la matrice d'interconnexion), puis les débits sortants du système liés à ces échangeurs considérés, ensuite les débits sortants des échangeurs considérés ($1 : k$ puis $1 : j$) et enfin les débits entrants dans le système liés à ces échangeurs considérés. De plus, nous prenons en compte les compartiments bar dans la matrice d'interconnexion, mais uniquement pour définir la matrice A_d comme elle a été définie dans le Chapitre 3 (sauf la dernière ligne et la dernière colonne qui sont liées aux sorties et entrées du système sur le courant \bar{Q}).

$$\mathcal{F}_{M,1} = \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \\ Q_{out,1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{M,2} = \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \\ Q_{in,2} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{d,D} & D^T \\ \hline A_{d,F} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D & D^T \\ \hline 0_{3 \times 4} & 0 \end{array} \right] \quad (4.6)$$

Comme précédemment, nous avons le vecteur $A_{d,F}$ correspond à la première ligne de la matrice F , D^T à la première colonne de la matrice $\mathbb{B}^{1:2}$ et comme dans la matrice A_d de l'équation (3.11) du Chapitre 3, nous retrouvons le vecteur D .

Par contre, contrairement au Chapitre 3, le système d'équations de bilans va se construire en concaténant les deux échangeurs $1 : i$ et $1 : j$ et non pas $1 : k$ et $1 : j$. De plus, l'entrée de l'échangeur $1 : i$ ne va pas disparaître pour être remplacée par l'entrée de $1 : j$ mais l'entrée de $1 : j$ va être ajoutée comme une nouvelle entrée du système global.

Proposition 16 Avec les hypothèses 1 à 9, le système d'équations de bilans d'énergie et de matière du système global composé d'un échangeur connecté en amont du $k^{\text{ème}}$ compartiment d'un second échangeur par un collecteur (équations (4.4) et (4.5)) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbb{H} &= -\mathbb{A}_{t,s}\mathbb{T} - \mathbb{A}_{cc,s}\mathbb{H} + \mathbb{E}_{in,s}\mathbb{A}_{ic,s}\mathbb{H}_{in} \\ \mathbb{F}_{out}^s &= \mathbb{C}_s\mathbb{A}_{cc,s}\mathbb{H} \\ 0 &= -\mathbb{A}_{cq,s}\mathbb{Q} + \mathbb{E}_{in,s}\mathbb{Q}_{in} \\ \mathbb{Q}_{out}^s &= \mathbb{C}_s\mathbb{Q} \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}^{1:i} \\ \mathbb{H}^{1:j} \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état des enthalpies du système $[1 : i] + [1 : j]$, $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{1:i} \\ \mathbb{T}^{1:j} \end{bmatrix}$

est le vecteur des températures internes du système $[1 : i] + [1 : j]$, $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}^{1:i} \\ \mathbb{Q}^{1:j} \end{bmatrix}$ est le vecteur des débits internes du système $[1 : i] + [1 : j]$.

$\mathbb{Q}_{in} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix}$ et $\mathbb{H}_{in} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{H}_{in}^{1:j} \end{bmatrix}$ sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques entrants du système global.

\mathbb{Q}_{out}^s et \mathbb{F}_{out}^s sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques sortants du système global.

Pour les entrées, elles sont ici toutes conservées donc $\mathbb{Q}_{in}^T = [Q_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,1} \quad Q_{in,2} \quad \bar{Q}_{in,2}]$ et $\mathbb{H}_{in}^T = [H_{in,1} \quad \bar{H}_{in,1} \quad H_{in,2} \quad \bar{H}_{in,2}]$. Par contre, la sortie sur le courant Q de $1 : j$ disparaît, donc $\mathbb{Q}_{out}^T = [Q_{out,1} \quad \bar{Q}_{out,1} \quad \bar{Q}_{out,2}]$ et $\mathbb{F}_{out}^T = [F_{out,1} \quad \bar{F}_{out,1} \quad \bar{F}_{out,2}]$.

Notons que l'indice s correspond à la somme des deux échangeurs tel que $s = i + j$. Ainsi, les matrices $\mathbb{A}_{t,s}$, $\mathbb{A}_{cc,s}$, $\mathbb{E}_{in,s}$, $\mathbb{A}_{ic,s}$, $\mathbb{A}_{cq,s}$ et \mathbb{C}_s s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{cq,s} &= \begin{bmatrix} A_{cq,i} & 0 \\ 0 & A_{cq,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E^{1:k} \\ 0_{2(i-k)} \\ 0_{2j} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_{cc,s} &= \mathbb{A}_{cq,s} \times (I_{2s} \odot (\mathbb{Q} \times \mathbb{V}_{r,s}^T)) \quad ; \\ \mathbb{A}_{t,s} &= \begin{bmatrix} A_{t,i} & 0_{2i \times 2j} \\ 0_{2j \times 2i} & A_{t,j} \end{bmatrix} \quad ; & \quad \mathbb{A}_{ic,s} &= \begin{bmatrix} A_{ic,i} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_{ic,j} \end{bmatrix} \\ \mathbb{E}_{in,s} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{in}^{1:i} & 0_{2i \times 2} \\ 0_{2j \times 2} & \mathbb{E}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} \quad ; & \quad \mathbb{C}_s &= \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2i}^T & \bar{\mathbb{C}}^{1:j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Preuve : Comme dans le chapitre précédent, nous allons utiliser A_d afin de retrouver la forme de la matrice $\mathbb{A}_{cq,s}$:

— Calcul sur les entrées des sous-systèmes qui deviennent des variables internes.

Nous utilisons le coin supérieur gauche de la matrice d'interconnexion $A_d : A_{d,D}$ (cf. eq (4.6))

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} &= A_{d,D} \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace de l'ensemble des débits du système.

Pour plonger dans la dimension du vecteur de tous les débits ($i + j$ éléments), nous introduisons les vecteurs $Q_{in}^{1:i}$ et $Q_{in}^{1:j}$. Ces vecteurs ont les mêmes dimensions que le vecteur des débits $Q^{1:i}$ et $Q^{1:j}$, respectivement. Ils correspondent aux entrées de chaque compartiment interne à l'échangeur. Nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ Q_{in}^{1:j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & 0_{2(i-k) \times 2} \\ 0_{2j \times 2} & \mathbb{B}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2(k-1)} & \bar{B} & & 0_{2k \times 2} \\ B & 0_{2(k-1)} & & \\ & 0_{2(i-k) \times 2} & & 0_{2(i-k) \times 2} \\ & 0_{2j \times 2} & 0_{2(j-1)} & \bar{B} \\ & & B & 0_{2(j-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

— En combinaison les équations (4.8) et (4.9), nous retrouvons le deuxième terme de la matrice $A_{eq,s}$ qui correspond aux liaisons entre les entrées et sorties des sous-systèmes : la sortie de l'échangeur $1 : j$ devient une entrée pour $1 : k$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ Q_{in}^{1:j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & 0_{2(i-k) \times 2} \\ 0_{2j \times 2} & \mathbb{B}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & 0_{2(i-k) \times 2} \\ 0_{2j \times 2} & \mathbb{B}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E^{1:k} \\ 0_{2(i-k)} \\ 0_{2j} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous notons également que la matrice de sortie \mathbb{C}_s ne prend plus en compte la sortie de l'échangeur $1 : j$, c'est pour cela que nous avons uniquement $\bar{C}^{1:j}$, qui correspond à la deuxième ligne de $\mathbb{C}^{1:j}$, la matrice de sortie de l'échangeur $1 : j$ relative au courant \bar{Q} . Enfin, pour les autres matrices, il s'agit d'une concaténation des matrices et vecteurs des deux échangeurs de base. \square

4.3.2 Ajout d'un $n^{\text{ième}}$ échangeurs en chaleur en parallèle sur le flux Q

La Figure 4.2 représente la généralisation du cas précédent, à savoir un $n^{\text{ième}}$ échangeur est connecté entre les connexions k et $k + 1$ de l'échangeur $1 : i$.

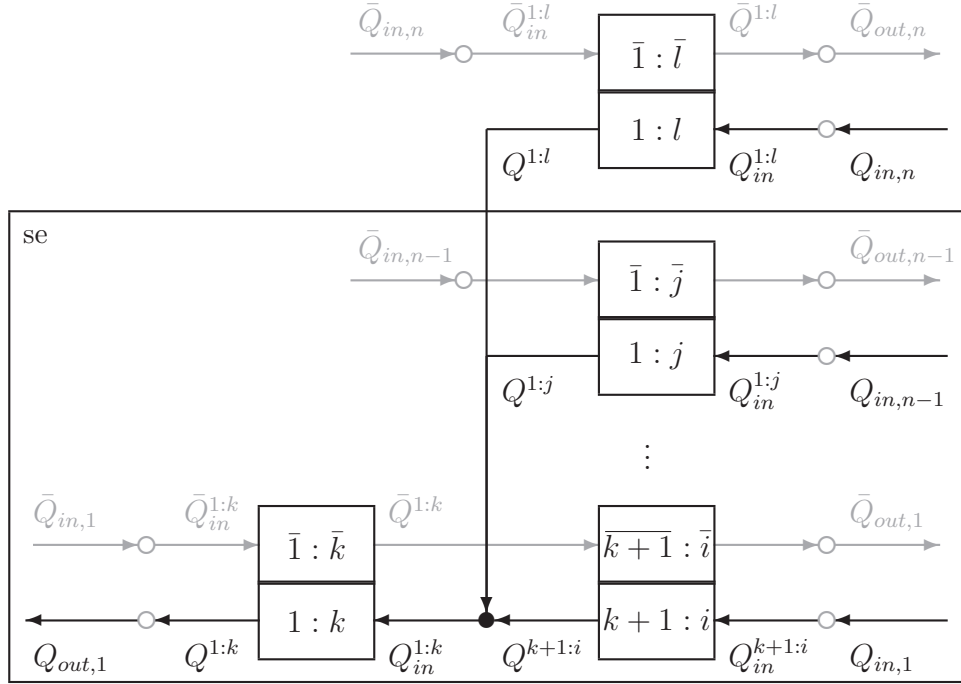


FIGURE 4.2 – Flux convectifs dans un collecteur. Généralisation. Les notations des flux sont la référence pour les définitions des matrices et vecteurs ci-après.

Comme précédemment, nous partons des systèmes d'équations d'un système existant se , qui inclut tous les échangeurs entre $1 : i$ et $1 : j$, et de l'échangeur $1 : l$. Les systèmes d'équations incluent à la fois les bilans de matière et les bilans d'énergie. Les équations sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{se} = -A_{t,se} \mathbb{T}^{se} - A_{cc,se} \mathbb{H}^{se} + \mathbb{E}_{in,se} A_{ic,se} \mathbb{H}_{in}^{se} \\ \mathbb{F}_{out}^{se} = \mathbb{C}_{se} A_{cc,se} \mathbb{H}^{se} \\ 0 = -A_{cq,se} \mathbb{Q}^{se} + \mathbb{E}_{in,se} \mathbb{Q}_{in}^{se} \\ \mathbb{Q}_{out}^{se} = \mathbb{C}_{se} \mathbb{Q}^{se} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:l} = -A_{t,l} \mathbb{T}^{1:l} - A_{cc,l} \mathbb{H}^{1:l} + \mathbb{E}_{in}^{1:l} A_{ic,l} \mathbb{H}_{in}^{1:l} \\ \mathbb{F}_{out}^{1:l} = \mathbb{C}^{1:l} A_{cc,l} \mathbb{H}^{1:l} \\ 0 = -A_{cq,l} \mathbb{Q}^{1:l} + \mathbb{E}_{in}^{1:l} \mathbb{Q}_{in}^{1:l} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:l} = \mathbb{C}^{1:l} \mathbb{Q}^{1:l} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Pour faire l'interconnexion entre le système se et l'échangeur $1 : l$, nous utilisons la même méthode que celle employée dans la section 4.3.1, à savoir nous connectons l'entrée de $1 : k$ et la sortie $1 : l$. Dans cette section, nous allons uniquement effectuer l'opération sur la matière, les équations de bilans d'énergie découlent ensuite naturellement des bilans de matière.

Soit le vecteur de flux de matière $\mathcal{F}_M = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{M,1} \\ \mathcal{F}_{M,2} \end{bmatrix}$ et la matrice d'interconnexion A_d :

$$\mathcal{F}_{M,1} = A_d \mathcal{F}_{M,2}$$

Le vecteur de flux de matière est construit comme dans la section 4.3.1, tout d'abord les débits entrants des échangeurs ou les parties d'échangeurs à modifier en commençant par l'échangeur en aval du flux, ici $1 : k$ puis $1 : l$ (les courants $k + 1 : i$ et ceux des échangeurs jusqu'à $1 : j$ ne sont pas considérés dans la matrice d'interconnexion), puis les débits sortants du système liés à ces échangeurs considérés, ensuite les débits sortants des échangeurs considérés ($1 : k$ puis $1 : l$) et enfin les débits entrants dans le système liés uniquement à ces échangeurs considérés. De plus, nous prenons en compte les compartiments bar dans la matrice d'interconnexion, mais uniquement pour définir la matrice A_d comme elle a été définie dans la section 4.3.1.

$$\mathcal{F}_{M,1} = \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \\ Q_{out,1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{M,2} = \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \\ Q_{in,n} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D & D^T \\ \hline 0_{3 \times 4} & A_{d,F} \\ \hline & 0 \end{array} \right] \quad (4.13)$$

Le vecteur $A_{d,F}$ correspond à la première ligne de la matrice F et D^T à la première colonne de la matrice $\mathbb{B}^{1:2}$ et comme dans la matrice A_d du Chapitre 3, on retrouve le vecteur D .

Comme dans la section 4.3.1, le système d'équations de bilans va se construire en concaténant le système existant *se* et l'échangeur $1 : l$ et non pas uniquement $1 : k$ et $1 : l$. De plus, les entrées de tous les échangeurs entre $1 : i$ et $1 : j$ ne vont pas disparaître pour être remplacées par l'entrée de $1 : l$ mais l'entrée de $1 : l$ va être ajoutée comme une nouvelle entrée du système global.

Proposition 17 *Avec les hypothèses 1 à 9, le système d'équations de bilans d'énergie et de matière du système global composé d'un échangeur connecté en amont du $k^{\text{ème}}$ compartiment*

d'un système existant par un collecteur (équations (4.11) et (4.12)) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbb{H} &= -\mathbb{A}_{t,s}\mathbb{T} - \mathbb{A}_{cc,s}\mathbb{H} + \mathbb{E}_{in,s}\mathbb{A}_{ic,s}\mathbb{H}_{in} \\ \mathbb{F}_{out}^s &= \mathbb{C}_s\mathbb{A}_{cc,s}\mathbb{H} \\ 0 &= -\mathbb{A}_{cq,s}\mathbb{Q} + \mathbb{E}_{in,s}\mathbb{Q}_{in} \\ \mathbb{Q}_{out}^s &= \mathbb{C}_s\mathbb{Q} \end{cases} \quad (4.14)$$

où pour le système $[se] + [1:l]$ (qui est aussi $[1:i] + \dots + [1:j] + [1:l]$)

$\mathbb{H}^T = [\mathbb{H}^{se} \quad \mathbb{H}^{1:l}]$ est le vecteur d'état enthalpique interne du système s , $\mathbb{T}^T = [\mathbb{T}^{se} \quad \mathbb{T}^{1:l}]$ est le vecteur des températures internes du système s , $\mathbb{Q}^T = [\mathbb{Q}^{se} \quad \mathbb{Q}^{1:l}]$ est le vecteur des débits internes du système s .

$\mathbb{Q}_{in}^T = [\mathbb{Q}_{in}^{se} \quad \mathbb{Q}_{in}^{1:l}]$ et $\mathbb{H}_{in}^T = [\mathbb{H}_{in}^{se} \quad \mathbb{H}_{in}^{1:l}]$ sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques entrants du système global.

\mathbb{Q}_{out}^s et \mathbb{F}_{out}^s sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques sortants du système global.

Pour les entrées, elles sont ici toutes conservées donc

$$\mathbb{Q}_{in}^T = [Q_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,1} \quad \dots \quad Q_{in,n-1} \quad \bar{Q}_{in,n-1} \quad Q_{in,n} \quad \bar{Q}_{in,n}] \text{ et}$$

$$\mathbb{H}_{in}^T = [H_{in,1} \quad \bar{H}_{in,1} \quad \dots \quad H_{in,n-1} \quad \bar{H}_{in,n-1} \quad H_{in,n} \quad \bar{H}_{in,n}].$$

Par contre, la sortie sur le courant Q de $1:l$ disparaît, donc

$$\mathbb{Q}_{out}^s = [Q_{out,1} \quad \bar{Q}_{out,1} \quad \dots \quad \bar{Q}_{out,n-1} \quad \bar{Q}_{out,n}] \text{ et } \mathbb{F}_{out}^s = [F_{out,1} \quad \bar{F}_{out,1} \quad \dots \quad \bar{F}_{out,n-1} \quad \bar{F}_{out,n}].$$

Notons que l'indice s correspond à la somme du nombre de compartiments du système existant et du nombre de compartiments de l'échangeur $1:l$ tel que $s = se + l$. Ainsi, les matrices $\mathbb{A}_{t,s}$, $\mathbb{A}_{cc,s}$, $\mathbb{E}_{in,s}$, $\mathbb{A}_{ic,s}$, $\mathbb{A}_{cq,s}$ et \mathbb{C}_s s'écrivent comme suit :

$$\mathbb{A}_{cq,s} = \begin{bmatrix} A_{cq,se} & 0 \\ 0 & A_{cq,l} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E^{1:k} \\ 0_{2(se-k)} \\ 0_{2l} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:se} & 0_{2 \times 2l} \\ 0_{2 \times 2se} & \mathbb{C}^{1:l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_{cc,s} = \mathbb{A}_{cq,s} \times (I_{2s} \odot (\mathbb{Q} \times \mathbb{V}_{r,s}^T)) \quad ;$$

$$\mathbb{A}_{t,s} = \begin{bmatrix} A_{t,se} & 0_{2se \times 2l} \\ 0_{2l \times 2se} & A_{t,l} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{A}_{ic,s} = \begin{bmatrix} A_{ic,se} & 0_{ne \times 2} \\ 0_{2 \times ne} & A_{ic,l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}_{in,s} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{in,se} & 0_{2se \times 2} \\ 0_{2l \times ne} & \mathbb{E}_{in}^{1:l} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{se} & 0_{ns \times 2l} \\ 0_{2se}^T & \bar{\mathbb{C}}^{1:l} \end{bmatrix}$$

où ne et ns sont respectivement le nombre d'entrées et le nombre de sorties du système existant se .

Preuve : Comme dans la section précédente, nous allons utiliser A_d afin de retrouver la forme de la matrice $\mathbb{A}_{cq,s}$:

— Calcul sur les entrées des sous-systèmes qui deviennent des variables internes.

Nous utilisons le coin supérieur gauche de la matrice d'interconnexion $A_d : A_{d,D}$ (cf. eq (4.13))

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \end{bmatrix} &= A_{d,D} \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} Q^{1:k} \\ \bar{Q}^{1:k} \\ Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:se} & 0_{2 \times 2l} \\ 0_{2 \times 2se} & \mathbb{C}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace de l'ensemble des débits du système.

Pour plonger dans la dimension du vecteur de tous les débits ($i + \dots + j + l$ éléments), nous introduisons les vecteurs $Q_{in}^{1:i}, \dots, Q_{in}^{1:j}$ et $Q_{in}^{1:l}$. Ces vecteurs ont les mêmes dimensions que le vecteur des débits $Q^{1:i}, \dots, Q^{1:j}$ et $Q^{1:l}$, respectivement. Ils correspondent aux entrées de chaque compartiment interne à l'échangeur. Nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ \vdots \\ Q_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{1:l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2se-k \times 2} & 0_{2se-k \times 2} \\ 0_{2l \times 2} & \mathbb{B}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

— En combinaison les équations (4.15) et (4.16), nous retrouvons le deuxième terme de la matrice $A_{cq,s}$ qui correspond aux liaisons entre les entrées et sorties des sous-systèmes : la sortie de l'échangeur $1 : j$ devient une entrée pour $1 : k$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ \vdots \\ Q_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{1:l} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2se-k \times 2} & 0_{2se-k \times 2} \\ 0_{2l \times 2} & \mathbb{B}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{1:k} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2se-k \times 2} & 0_{2se-k \times 2} \\ 0_{2l \times 2} & \mathbb{B}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:se} & 0_{2 \times 2l} \\ 0_{2 \times 2se} & \mathbb{C}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E^{1:k} \\ 0_{2(se-k)} \\ 0_{2l} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:se} & 0_{2 \times 2l} \\ 0_{2 \times 2se} & \mathbb{C}^{1:l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que la matrice de sortie du système (\mathbb{C}_s) récupère uniquement la deuxième ligne ($\bar{C}^{1:l}$) de la matrice de sortie de l'échangeur $1 : l$. Enfin, les autres matrices sont des concaténations des matrices et des vecteurs des systèmes existants. \square

4.4 Répartiteurs : déviation d'une fraction d'un flux vers un échangeur de chaleur en parallèle

4.4.1 Ajout d'un échangeur de chaleur en parallèle sur le flux Q :

Dans cette section, nous allons présenter et expliquer la méthode qui est utilisée pour connecter un échangeur de chaleur dans un réseau d'échangeur de chaleur existant en aval du courant principal. Nous appellerons ce type de connexion *un répartiteur*. Ici aussi, pour simplifier l'explication et clarifier le texte, nous ne travaillerons que sur un seul des deux types de flux, à savoir Q , sachant que la démarche et les démonstrations seront analogues pour les flux \bar{Q} .

Soit dans un système quelconque existant $1 : i$, ici sur la Figure 4.3 un échangeur de chaleur simple, il est raccordé l'entrée d'un échangeur $1 : j$ entre deux compartiments k et $k + 1$ de l'échangeur i . L'échangeur $1 : j$ est placé en aval du flux $k + 1 : i$ et donc en parallèle de l'échangeur $1 : k$. La liaison entre les deux systèmes i et j est donc un répartiteur. La Figure 4.3 représente les connexions entre les flux de matière convectifs. Les notations sont données sur la figure.

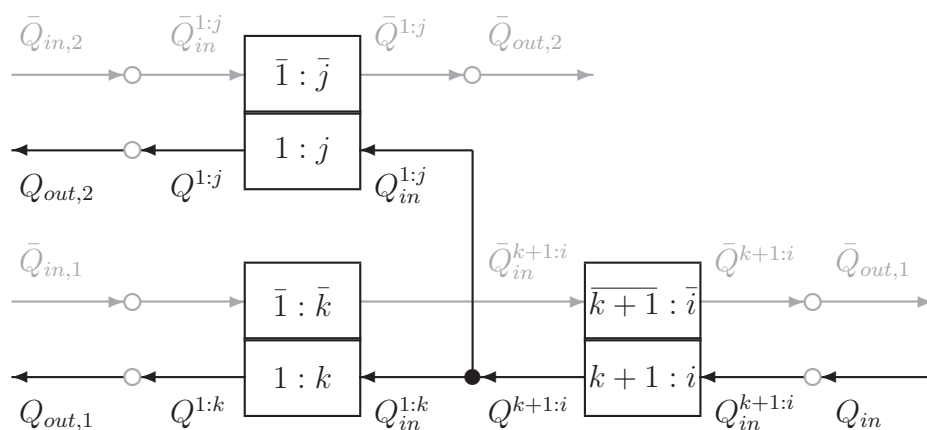


FIGURE 4.3 – Flux convectifs dans un répartiteur sur le courant Q .

Comme pour la section 4.3.1, nous partons des systèmes d'équations des deux échangeurs $1 : i$ et $1 : j$ suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:i} = -A_{t,i} \mathbb{T}^{1:i} - A_{cc,i} \mathbb{H}^{1:i} + \mathbb{E}_{in}^{1:i} A_{ic,i} \mathbb{H}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{F}_{out}^{1:i} = \mathbb{C}^{1:i} A_{cc,i} \mathbb{H}^{1:i} \\ 0 = -A_{cq,i} \mathbb{Q}^{1:i} + \mathbb{E}_{in}^{1:i} \mathbb{Q}_{in}^{1:i} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:i} = \mathbb{C}^{1:i} \mathbb{Q}^{1:i} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:j} = -A_{t,j} \mathbb{T}^{1:j} - A_{cc,j} \mathbb{H}^{1:j} + \mathbb{E}_{in}^{1:j} A_{ic,j} \mathbb{H}_{in}^{1:j} \\ \mathbb{F}_{out}^{1:j} = \mathbb{C}^{1:j} A_{cc,j} \mathbb{H}^{1:j} \\ 0 = -A_{cq,j} \mathbb{Q}^{1:j} + \mathbb{E}_{in}^{1:j} \mathbb{Q}_{in}^{1:j} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:j} = \mathbb{C}^{1:j} \mathbb{Q}^{1:j} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Pour faire l'interconnexion entre les deux échangeurs, nous utilisons la même méthode que celle employée dans la section 4.3.1. Cependant ici, nous inversons l'entrée et la sortie, à savoir nous connectons l'entrée de $1 : j$ et la sortie $k + 1 : i$. Dans cette section, nous allons uniquement effectuer l'opération sur la matière, les équations de bilans d'énergie découleront ensuite naturellement des bilans de matière.

Soit le vecteur de flux de matière $\mathcal{F}_M = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{M,1} \\ \mathcal{F}_{M,2} \end{bmatrix}$ et la matrice d'interconnexion A_d :

$$\mathcal{F}_{M,1} = A_d \mathcal{F}_{M,2}$$

Le vecteur de flux de matière est construit comme dans la section 4.3, tout d'abord les débits entrants des échangeurs ou les parties d'échangeurs à modifier en commençant par l'échangeur en aval du flux, ici $1 : j$ puis $k + 1 : i$ (le courant $1 : k$ n'est pas considéré dans la matrice d'interconnexion), puis les débits sortants du système liés à ces échangeurs considérés, ensuite les débits sortants des échangeurs considérés ($1 : j$ puis $k + 1 : i$) et enfin les débits entrants dans le système liés à ces échangeurs considérés. De plus, nous prenons en compte les compartiments bar dans la matrice d'interconnexion, mais uniquement pour faire apparaître la matrice A_d .

$$\mathcal{F}_{M,1} = \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \\ Q_{out,2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{M,2} = \begin{bmatrix} Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \\ Q_{in,1} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{d,D} & D^T \\ \hline A_{d,F} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D & D^T \\ \hline 0_{3 \times 4} & 0 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

Comme dans la matrice A_d de la section 4.3, le vecteur $A_{d,F}$ correspond à la première ligne de la matrice F et D^T à la première colonne de la matrice $\mathbb{B}^{1:2}$ et on retrouve le vecteur D .

Le système d'équations de bilans va aussi se construire en concaténant les deux échangeurs $1 : i$ et $1 : j$ et non pas $k + 1 : i$ et $1 : j$. De plus, la sortie de l'échangeur $1 : i$ ne va pas disparaître pour être remplacée par la sortie de $1 : j$ mais la sortie de $1 : j$ va être ajoutée comme une nouvelle sortie du système global.

Proposition 18 *Avec les hypothèses 1 à 9, le système d'équations de bilans d'énergie et de matière du système global composé d'un échangeur connecté en aval du $k + 1^{\text{ème}}$ compartiment d'un second échangeur par un répartiteur (équations (4.18) et (4.19)) peut s'écrire comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\mathbb{A}_{t,s} \mathbb{T} - \mathbb{A}_{cc,s} \mathbb{H} + \mathbb{E}_{in,s} \mathbb{A}_{ic,s} \mathbb{H}_{in} \\ \mathbb{F}_{out}^s = \mathbb{C}_s \mathbb{A}_{cc,s} \mathbb{H} \\ 0 = -\mathbb{A}_{cq,s} \mathbb{Q} + \mathbb{E}_{in,s} \mathbb{Q}_{in} \\ \mathbb{Q}_{out}^s = \mathbb{C}_s \mathbb{Q} \end{array} \right. \quad (4.21)$$

où $\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}^{1:i} \\ \mathbb{H}^{1:j} \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état enthalpique interne du système $[1 : i] + [1 : j]$, $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{1:i} \\ \mathbb{T}^{1:j} \end{bmatrix}$

est le vecteur des températures internes du système $[1 : i] + [1 : j]$, $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}^{1:i} \\ \mathbb{Q}^{1:j} \end{bmatrix}$ est le vecteur des débits internes du système $[1 : i] + [1 : j]$.

\mathbb{Q}_{in} et \mathbb{H}_{in} sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques entrants du système global.

\mathbb{Q}_{out}^s et \mathbb{F}_{out}^s sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques sortants du système global.

Pour les entrées, elles ne sont pas ici toutes conservées, l'entrée de $1 : j$ sur le courant Q n'apparaît pas, donc $\mathbb{Q}_{in}^T = [Q_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,1} \quad \bar{Q}_{in,2}]$ et $\mathbb{H}_{in}^T = [H_{in,1} \quad \bar{H}_{in,1} \quad \bar{H}_{in,2}]$. Par contre, toutes les sorties sur les courants Q sur les échangeurs $1 : i$ et $1 : j$ sont conservées, donc $\mathbb{Q}_{out}^s{}^T = [Q_{out,1} \quad \bar{Q}_{out,1} \quad Q_{out,2} \quad \bar{Q}_{out,2}]$ et $\mathbb{F}_{out}^s{}^T = [F_{out,1} \quad \bar{F}_{out,1} \quad F_{out,2} \quad \bar{F}_{out,2}]$.

Notons que l'indice s correspond à la somme des deux échangeurs tel que $s = i + j$. Ainsi,

les matrices $\mathbb{A}_{t,s}$, $\mathbb{A}_{cc,s}$, $\mathbb{E}_{in,s}$, $\mathbb{A}_{ic,s}$, $\mathbb{A}_{cq,s}$ et \mathbb{C}_s s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{cq,s} &= \begin{bmatrix} A_{cq,i} & 0 \\ 0 & A_{cq,j} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 0_{2i} \\ E^{1:j} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E^{1:k} \\ 0_{2(i-k)} \\ 0_{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{2i} \\ E^{1:j} \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{A}_{cc,s} &= \mathbb{A}_{cq,s} \times (I_{2s} \odot (\mathbb{Q} \times \mathbb{V}_{r,s}^T)) \quad ; \\ \mathbb{A}_{t,s} &= \begin{bmatrix} A_{t,i} & 0_{2i \times 2j} \\ 0_{2j \times 2i} & A_{t,j} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{A}_{ic,s} = \begin{bmatrix} A_{ic,i} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & \frac{\bar{Q}_{in,2}}{\bar{\rho}_{in,2} \bar{V}_{in,2}} \end{bmatrix} \\ \mathbb{E}_{in,s} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{in}^{1:i} & 0_{2i \times 1} \\ 0_{2j \times 2} & \bar{E}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:i} & 0_{2 \times 2j} \\ 0_{2 \times 2i} & \mathbb{C}^{1:j} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Preuve : Comme dans la section précédente, nous allons utiliser A_d afin de retrouver la forme de la matrice $\mathbb{A}_{cq,s}$:

— Calcul sur les entrées des sous-systèmes qui deviennent des variables internes.

Nous utilisons le coin supérieur gauche de la matrice d'interconnexion A_d : $A_{d,D}$ (cf. eq (4.20)). Nous ajoutons le coefficient α qui correspond à la fraction du débit qui va vers le second échangeur $1 : j$.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \end{bmatrix} &= \alpha A_{d,D} \begin{bmatrix} Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} Q^{1:j} \\ \bar{Q}^{1:j} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \quad (4.22)\end{aligned}$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace de l'ensemble des débits du système.

Pour plonger dans la dimension du vecteur de tous les débits ($i + j$ éléments), nous introduisons les vecteurs $\mathcal{Q}_{in}^{1:i}$ et $\mathcal{Q}_{in}^{1:j}$. Ces vecteurs ont les mêmes dimensions que le vecteur des débits $\mathbb{Q}^{1:i}$ et $\mathbb{Q}^{1:j}$, respectivement. Ils correspondent aux entrées de chaque compartiment interne à l'échangeur. Nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{in}^{1:i} \\ \mathcal{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ \mathbb{B}^{1:j} & 0_{2j \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

— En combinaison les équations (4.22) et (4.23), nous retrouvons le deuxième terme de la matrice $\mathbb{A}_{cq,s}$ qui correspond aux liaisons entre les entrées et sorties des sous-systèmes :

une fraction α de la sortie de l'échangeur $k + 1 : i$ devient une entrée pour $1 : j$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ Q_{in}^{1:j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ \mathbb{B}^{1:j} & 0_{2j \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:k} \\ \bar{Q}_{in}^{1:k} \\ Q_{in}^{1:j} \\ \bar{Q}_{in}^{1:j} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ \mathbb{B}^{1:j} & 0_{2j \times 2} \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} 0_{2i} \\ E^{1:j} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:i} \\ Q^{1:j} \end{bmatrix} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

De plus, le troisième terme de $A_{cq,s}$ permet de mettre en relation les entrées des échangeurs en parallèle, reliés au compartiment $k + 1$. Cela revient à soustraire le débit de l'échangeur $1 : j$ au débit de l'échangeur $k + 1 : i$ pour définir le débit de l'échangeur $1 : k$. Ainsi, nous avons les bilans matières adéquats ainsi que toutes les matrices qui en découlent.

Nous notons également que la matrice d'entrée $\mathbb{E}_{in,s}$ ne prend plus en compte l'entrée de l'échangeur $1 : j$. C'est pour cela que seul $\bar{E}_{in}^{1:j}$ est ajouté, ce qui correspond à la deuxième colonne de la matrice d'entrée de l'échangeur $1 : j$, à savoir $\mathbb{E}_{in}^{1:j}$. De même, pour la matrice $\mathbb{A}_{ic,s}$, elle ne prend que l'élément en $\bar{*}$ de l'échangeur $1 : j$. Enfin, pour les autres matrices, il s'agit d'une concaténation des matrices et vecteurs des deux échangeurs de base. \square

4.4.2 Ajout de plusieurs échangeurs de chaleur successivement sur le flux Q

La Figure 4.4 représente la généralisation du cas précédent, à savoir un $n^{ième}$ échangeur est connecté entre les connexions k et $k + 1$ de l'échangeur $1 : i$ pour former un répartiteur. Comme précédemment, nous partons des systèmes d'équations d'un système existant se , qui inclut tous les échangeurs entre $1 : i$ et $1 : j$, et de l'échangeur $1 : l$. Les systèmes d'équations incluent à la fois les bilans de matière et les bilans d'énergie. Les équations sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{se} = -A_{t,se} \mathbb{T}^{se} - A_{cc,se} \mathbb{H}^{se} + \mathbb{E}_{in,se} A_{ic,se} \mathbb{H}_{in}^{se} \\ \mathbb{F}_{out}^{se} = \mathbb{C}_{se} A_{cc,se} \mathbb{H}^{se} \\ 0 = -A_{cq,se} \mathbb{Q}^{se} + \mathbb{E}_{in,se} \mathbb{Q}_{in}^{se} \\ \mathbb{Q}_{out}^{se} = \mathbb{C}_{se} \mathbb{Q}^{se} \end{array} \right. \tag{4.25}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H}^{1:l} = -A_{t,l} \mathbb{T}^{1:l} - A_{cc,l} \mathbb{H}^{1:l} + \mathbb{E}_{in}^{1:l} A_{ic,l} \mathbb{H}_{in}^{1:l} \\ \mathbb{F}_{out}^{1:l} = \mathbb{C}^{1:l} A_{cc,l} \mathbb{H}^{1:l} \\ 0 = -A_{cq,l} \mathbb{Q}^{1:l} + \mathbb{E}_{in}^{1:l} \mathbb{Q}_{in}^{1:l} \\ \mathbb{Q}_{out}^{1:l} = \mathbb{C}^{1:l} \mathbb{Q}^{1:l} \end{array} \right. \tag{4.26}$$

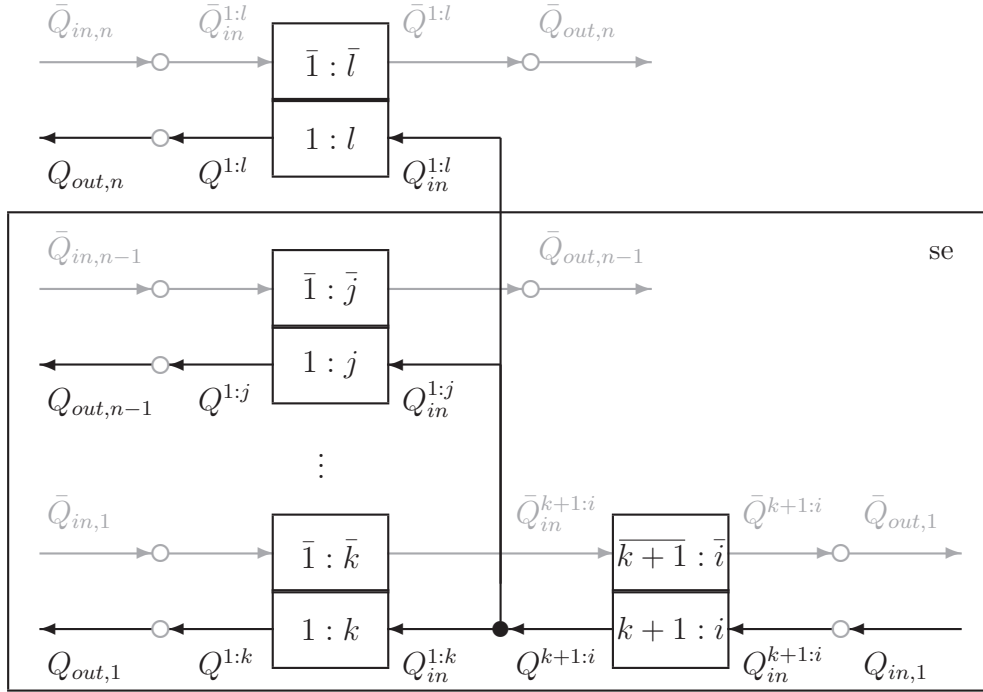


FIGURE 4.4 – Flux convectifs dans un répartiteur sur un seul courant de convection Q . Les notations des flux sont la référence pour les définitions des matrices et vecteurs.

Pour faire l'interconnexion entre le système se et l'échangeur $1 : l$, nous utilisons la même méthode que celle employée dans la section 4.4.1, à savoir nous connectons l'entrée de $1 : l$ et la sortie $k + 1 : i$. Comme précédemment, nous allons uniquement effectuer l'opération sur la matière, les équations de bilans d'énergie découlent ensuite naturellement des bilans de matière.

Soit le vecteur de flux de matière $\mathcal{F}_M = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{M,1} \\ \mathcal{F}_{M,2} \end{bmatrix}$ et la matrice d'interconnexion A_d :

$$\mathcal{F}_{M,1} = A_d \mathcal{F}_{M,2}$$

Le vecteur de flux de matière est construit comme dans la section 4.4.1, tout d'abord les débits entrants des échangeurs ou les parties d'échangeurs à modifier en commençant par l'échangeur en aval du flux, ici $1 : l$ puis $k + 1 : i$ (les courants $1 : k$ et ceux des échangeurs jusqu'à $1 : j$ ne sont pas considérés dans la matrice d'interconnexion), puis les débits sortants du système liés à ces échangeurs considérés, ensuite les débits sortants des échangeurs considérés ($1 : l$ puis $k + 1 : i$) et enfin les débits entrants dans le système liés à ces échangeurs considérés. De plus, nous prenons en compte les compartiments bar dans la matrice d'interconnexion, mais

uniquement pour faire apparaître la matrice A_d .

$$\mathcal{F}_{M,1} = \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \\ Q_{out,n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{M,2} = \begin{bmatrix} Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \\ Q_{in,1} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{d,D} & D^T \\ \hline A_{d,F} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D & D^T \\ \hline 0_{3 \times 4} & 0 \end{array} \right] \quad (4.27)$$

Le vecteur $A_{d,F}$ correspond à la première ligne de la matrice F et D^T à la première colonne de la matrice $\mathbb{B}^{1:2}$ et comme dans la matrice A_d du Chapitre 3, on retrouve le vecteur D .

Comme dans la section 4.4.1, le système d'équations de bilans va se construire en concaténant le système existant se et l'échangeur $1 : l$ et non pas uniquement $k + 1 : i$ et $1 : l$. De plus, les sorties de tous les échangeurs entre $1 : i$ et $1 : j$ ne vont pas disparaître pour être remplacées par la sortie de $1 : l$ mais la sortie de $1 : l$ va être ajoutée comme une nouvelle sortie du système global.

Proposition 19 *Avec les hypothèses 1 à 9, le système d'équations de bilans d'énergie et de matière du système global composé d'un échangeur connecté en aval du $k + 1^{\text{ème}}$ compartiment d'un système existant par un répartiteur (équations (4.25) et (4.26)) peut s'écrire comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbb{H} = -\mathbb{A}_{t,s} \mathbb{T} - \mathbb{A}_{cc,s} \mathbb{H} + \mathbb{E}_{in,s} \mathbb{A}_{ic,s} \mathbb{H}_{in} \\ \mathbb{F}_{out}^s = \mathbb{C}_s \mathbb{A}_{cc,s} \mathbb{H} \\ 0 = -\mathbb{A}_{cq,s} \mathbb{Q} + \mathbb{E}_{in,s} \mathbb{Q}_{in} \\ \mathbb{Q}_{out}^s = \mathbb{C}_s \mathbb{Q} \end{array} \right. \quad (4.28)$$

où pour le système $[se] + [1 : l]$ (qui est aussi $[1 : i] + \dots + [1 : j] + [1 : l]$)

$\mathbb{H}^T = [\mathbb{H}^{se} \quad \mathbb{H}^{1:l}]$ est le vecteur d'état enthalpique interne du système s , $\mathbb{T}^T = [\mathbb{T}^{se} \quad \mathbb{T}^{1:l}]$ est le vecteur des températures internes du système s , $\mathbb{Q}^T = [\mathbb{Q}^{se} \quad \mathbb{Q}^{1:l}]$ est le vecteur des débits internes du système s .

\mathbb{Q}_{in}^T et \mathbb{H}_{in}^T sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques entrants du système global.

\mathbb{Q}_{out}^s et \mathbb{F}_{out}^s sont respectivement les vecteurs des débits massiques et des flux enthalpiques sortants du système global.

L'entrée sur le courant Q de $1:l$ disparaît, donc

$$\mathbb{Q}_{in}^T = \begin{bmatrix} Q_{in,1} & \bar{Q}_{in,1} & \cdots & \bar{Q}_{in,n-1} & \bar{Q}_{in,n} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{H}_{in}^T = \begin{bmatrix} H_{in,1} & \bar{H}_{in,1} & \cdots & \bar{H}_{in,n-1} & \bar{H}_{in,n} \end{bmatrix}.$$

Pour les sorties, elles sont ici toutes conservées donc

$$\mathbb{Q}_{out}^s{}^T = \begin{bmatrix} Q_{out,1} & \bar{Q}_{out,1} & \cdots & Q_{out,n-1} & \bar{Q}_{out,n-1} & Q_{out,n} & \bar{Q}_{out,n} \end{bmatrix} \text{ et} \\ \mathbb{F}_{out}^s{}^T = \begin{bmatrix} F_{out,1} & \bar{F}_{out,1} & \cdots & F_{out,n-1} & \bar{F}_{out,n-1} & F_{out,n} & \bar{F}_{out,n} \end{bmatrix}.$$

Notons que l'indice s correspond à la somme du nombre de compartiments du système existant et du nombre de compartiments de l'échangeur $1:l$ tel que $s = se + l$. Ainsi, les matrices $\mathbb{A}_{t,s}$, $\mathbb{A}_{cc,s}$, $\mathbb{E}_{in,s}$, $\mathbb{A}_{ic,s}$, $\mathbb{A}_{cq,s}$ et \mathbb{C}_s s'écrivent comme suit :

$$\mathbb{A}_{cq,s} = \begin{bmatrix} A_{cq,se} & 0 \\ 0 & A_{cq,l} \end{bmatrix} - \alpha_n \begin{bmatrix} 0_{2se} \\ E^{1:l} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}^{1:k} \\ 0_{2(i-k)} \\ 0_{2(s-i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{2se} \\ E^{1:l} \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{A}_{cc,s} = \mathbb{A}_{cq,s} \times (I_{2s} \odot (\mathbb{Q} \times \mathbb{V}_{r,s}^T)) \quad ; \\ \mathbb{A}_{t,s} = \begin{bmatrix} A_{t,se} & 0_{2se \times 2l} \\ 0_{2l \times 2se} & A_{t,l} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{A}_{ic,s} = \begin{bmatrix} A_{ic,se} & 0_{ne \times 1} \\ 0_{1 \times ne} & \frac{\bar{Q}_{in,n}}{\bar{\rho}_{in,n} \bar{V}_{in,n}} \end{bmatrix} \\ \mathbb{E}_{in,s} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{in,se} & 0_{2se \times 1} \\ 0_{2l \times ne} & \bar{E}_{in}^{1:l} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{se} & 0_{ns \times 2l} \\ 0_{2 \times 2se} & \mathbb{C}^{1:l} \end{bmatrix}$$

où ne et ns sont respectivement le nombre d'entrées et le nombre de sorties du système existant se .

Preuve : Comme dans la section précédente, nous allons utiliser A_d afin de retrouver la forme de la matrice $\mathbb{A}_{cq,s}$:

— Calcul sur les entrées des sous-systèmes qui deviennent des variables internes.

Nous utilisons le coin supérieur gauche de la matrice d'interconnexion A_d : $A_{d,D}$ (cf. eq (4.27)). Nous ajoutons le coefficient α_n qui correspond à la fraction du débit qui va vers le dernier échangeur $1:l$.

$$\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \end{bmatrix} = \alpha_n A_{d,D} \begin{bmatrix} Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} = \alpha_n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} = \alpha_n \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} Q^{1:l} \\ \bar{Q}^{1:l} \\ Q^{k+1:i} \\ \bar{Q}^{k+1:i} \end{bmatrix} \\ = \alpha_n \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

— Plongement des entrées internes dans l'espace de l'ensemble des débits du système.

Pour plonger dans la dimension du vecteur de tous les débits ($i + \cdots + j + l$ éléments), nous

introduisons les vecteurs $Q_{in}^{1:i}, \dots, Q_{in}^{1:j}$ et $Q_{in}^{1:l}$. Ces vecteurs ont les mêmes dimensions que le vecteur des débits $Q^{1:i}, \dots, Q^{1:j}$ et $Q^{1:l}$, respectivement. Ils correspondent aux entrées de chaque compartiment interne à l'échangeur. Nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ \vdots \\ Q_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{1:l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ 0_{2(se-i) \times 2} & 0_{2(se-i) \times 2} \\ \mathbb{B}^{1:l} & 0_{2l \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

- En combinaison les équations (4.29) et (4.30), nous retrouvons le deuxième terme de la matrice $A_{cq,s}$ qui correspond aux liaisons entre les entrées et sorties des nouveaux sous-systèmes : une fraction α_n de la sortie de l'échangeur $k+1:i$ devient une entrée pour $1:l$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:i} \\ \vdots \\ Q_{in}^{1:j} \\ Q_{in}^{1:l} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ 0_{2(se-i) \times 2} & 0_{2(se-i) \times 2} \\ \mathbb{B}^{1:l} & 0_{2l \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}^{1:l} \\ \bar{Q}_{in}^{1:l} \\ Q_{in}^{k+1:i} \\ \bar{Q}_{in}^{k+1:i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2k \times 2} & 0_{2k \times 2} \\ 0_{2(i-k) \times 2} & \mathbb{B}^{k+1:i} \\ 0_{2(se-i) \times 2} & 0_{2(se-i) \times 2} \\ \mathbb{B}^{1:l} & 0_{2l \times 2} \end{bmatrix} \alpha_n \begin{bmatrix} B \\ 0_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \\ &= \alpha_n \begin{bmatrix} 0_{2se} \\ E^{1:l} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{1:k} & 0_{2 \times 2(s-k)} \\ 0_{2 \times 2k} & \mathbb{C}^{1:s-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1:se} \\ Q^{1:l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

De plus, le troisième terme de $A_{cq,s}$ permet de mettre en relation les entrées des échangeurs en parallèle, reliés au compartiment $k+1$. Cela revient à soustraire le débit de l'échangeur $1:l$ au débit de l'échangeur $k+1:i$ pour définir le débit de l'échangeur $1:k$. Ainsi, nous avons les bilans matières adéquats ainsi que toutes les matrices qui en découlent.

Nous notons également que la matrice d'entrée $\mathbb{E}_{in,s}$ ne prend plus en compte l'entrée de l'échangeur $1:l$. C'est pour cela que seul $\bar{E}_{in}^{1:l}$ est ajouté, ce qui correspond à la deuxième colonne de la matrice d'entrée de l'échangeur $1:l$, à savoir $\mathbb{E}_{in}^{1:l}$. De même, pour la matrice $\mathbb{A}_{ic,s}$, elle ne prend que l'élément en $\bar{*}$ de l'échangeur $1:l$. Enfin, pour les autres matrices, il s'agit d'une concaténation des matrices et vecteurs des deux échangeurs de base. \square

4.5 Conclusion

Nous avons ainsi les équations nécessaires pour modéliser un réseau d'échangeurs de chaleur avec les liaisons simples sur le flux en Q . Pour ce qui est du courant \bar{Q} , la méthode est la même,

il faut cependant définir la matrice d'interconnexion qui convient.

La méthode utilisée dans ce chapitre est une généralisation de celle du Chapitre 3. Nous avons intégré l'équation de bilan de masse directement dans le modèle dynamique de l'énergie des échangeurs. Cependant, cette méthode ne permettait pas de mettre en parallèle des échangeurs supplémentaire sans refaire tout le modèle. En écrivant le bilan de matière indépendamment du bilan d'énergie, nous avons pu ajouter facilement un échangeur, qu'il soit en amont ou en aval.

Cette méthode généralisée permet d'utiliser des paramètres différents pour chaque bloc élémentaire et ainsi rendre notre modèle plus précis vis-à-vis de la réalité. Nous pouvons également considérer des paramètres variables dans le temps, ce qui permettrait une flexibilité supplémentaire sur notre modèle. Il est intéressant de noter que le caractère bilinéaire du système est conservé quelle que soit la liaison que nous considérons.

Pour augmenter l'efficacité énergétique des systèmes, il est maintenant envisagé de mettre des by-pass aux échangeurs de chaleur dans les RET afin d'augmenter le nombre de points de fonctionnement optimal. Nous n'avons pas traité ce cas ici, mais l'ajout de by-pass ne présenterait pas de difficultés particulières. En fait, un by-pass peut être considéré comme un répartiteur et un collecteur en série sans ajout de compartiments et donc sans modification des vecteurs d'état et de dimension des matrices d'interconnexion.

Enfin, dans le chapitre 5, nous verrons une commande distribuée sur un réseau simple qui ne contient pas de liaisons collecteur ou répartiteur.

Chapitre 5

Commande d'un réseau d'échangeurs thermiques

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la commande d'un réseau d'échangeurs thermiques. Nous allons particulièrement nous intéresser à des objectifs d'optimisation distribuée au sens d'un critère donné. En effet, la commande d'un réseau est différente suivant les contraintes et le cahier des charges qui est mis en place. Lorsque nous parlons d'optimisation distribuée, cela s'oppose à l'optimisation centralisée ou encore décentralisée. Dans le cas de l'optimisation centralisée, nous avons une ou plusieurs unités principales qui vont centraliser les informations et les actions nécessaires pour le réseau ou le sous-réseau concerné. Alors que dans l'approche distribuée, les informations sont diffusées à travers un réseau de communication ce qui permet à chaque actionneur de prendre une décision en fonction des informations obtenues à travers le réseau de communication.

Afin d'appréhender au mieux cette approche distribuée, nous proposons dans la première section un recensement des principales caractéristiques et définitions de la commande distribuée. Nous commençons par définir les différents éléments qui composent les réseaux. Ensuite, nous voyons comment poser un problème de commande pour des systèmes dynamiques en réseau dit aussi multi-agents à travers : l'objectif de commande, son architecture, l'algorithme de commande utilisé et la topologie du réseau de communication.

Dans la section suivante, nous détaillons la méthode de commande par Extremum-Seeking que nous allons utiliser pour commander un réseau d'échangeur. Il s'agit d'une méthode de calcul en ligne du gradient d'une fonction coût à l'aide d'un signal extérieur injecté sur l'entrée du le système.

Nous appliquons cette méthode sur un exemple de réseau simple à deux échangeurs en parallèle. Nous avons ensuite proposé une synthèse de commande par Extremum-Seeking sur un réseau de cinq échangeurs en parallèle avec l'utilisateur d'un estimateur distribué. Pour cet exemple, chaque agent, l'échangeur avec sa commande, reçoit les informations de ses voisins directs à travers le graphe de communication. L'estimateur calcule alors la valeur du critère global que l'on cherche à maximiser avec uniquement les informations (partielles) disponibles pour chaque agent. L'Extremum-Seeking permet d'optimiser ce critère global. Des simulations sont proposées pour différents scénarii sur la graphe de communication.

5.2 Bibliographie de la commande de réseau

Un réseau peut être qualifié de système complexe, car il possède de nombreux sous-systèmes, indépendants ou dépendants (au sens du couplage physique). Ces derniers peuvent être aussi hétérogènes en terme de paramètres (Isidori et al. (2013)).

Plusieurs types de réseaux existent : les réseaux électriques (« power grid »), les procédés chimiques composés de dizaines d'unités, les chaînes de production des usines ou encore les réseaux d'échangeurs de chaleur (Jogwar and Daoutidis (2017), Fu et al. (2018), Zhou et al. (2016)).

Depuis l'évolution des moyens de communications et des microcontrôleurs, les systèmes peuvent communiquer, échanger et analyser des informations par le biais de réseaux de communication Eck et al. (2013).

Afin de définir le problème de commande du système « multi-agents », il faut spécifier :

- *L'objectif de commande recherché.* Celui-ci peut être commun à tous les agents : on parlera d'objectif global. A contrario, il peut être local : spécifique à chaque agent.
- *Les contraintes globales et/ou locales* qui doivent être satisfaites.
- *L'architecture de commande.* Plusieurs types sont possibles suivant le réseau de communication utilisé.
- *L'algorithme de commande.* Cela dépendra des informations disponibles, celles nécessaires et des lois de commande utilisées.

En respectant ces spécifications, nous pouvons définir les priorités et les actions à appliquer en fonction des perturbations qui se présenteront.

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir les notions de réseaux, d'agents et de systèmes multi-agents dans la section 5.2.1. La suivante (5.2.2) abordera les hypothèses nécessaires à la commande de ces derniers. Enfin, nous présenterons une application à un réseau d'échangeurs thermiques à contre-courant dans les sections 5.4 et 5.5.

5.2.1 Réseau, agents et systèmes multi-agents

Réseau

Le mot réseau apparaît dès 1180 (sous la forme "resel") pour nommer « un petit filet utilisé pour la chasse et la pêche »¹. L'image du réseau est posée : c'est un ensemble de lignes qui s'entrecroisent plus ou moins régulièrement. Par analogie, le mot est employé pour définir un entrecroisement de voies de circulation. Également, il est utilisé pour caractériser un ensemble de lieux (relais, stations) ou de personnes qui communiquent de façon directe ou indirecte les unes avec les autres.

Ainsi, de nombreux systèmes physiques sont qualifiés de réseaux, dès lors qu'il y a des flux de matière ou d'énergie qui circulent. De même, entre les différents éléments d'un système peuvent circuler des données : nous parlons alors d'un réseau d'informations.

Voici les définitions données par le Larousse (2018) pour le mot réseau :

- Ensemble formé de lignes ou d'éléments qui communiquent ou s'entrecroisent
- Ensemble de liens, d'attaches de tous ordres (Littéraire)
- Ensemble de moyens de nature homogène pouvant communiquer entre eux (Militaire)

Nous pouvons également regarder la définition mathématique suivante² : Un réseau Λ de \mathcal{R}^n est un sous-groupe discret de \mathcal{R}^n pour l'addition, tel que le sous-espace vectoriel engendré par Λ soit égal à \mathcal{R}^n .

Toutes ces définitions se recoupent : un réseau est un ensemble d'éléments homogènes liés naturellement (liaison ou interaction physique) et/ou artificiellement via un échange d'informations. Nous avons ajouté la notion d'homogénéité car nous nous concentrons sur les réseaux d'échangeurs thermiques (ils ont le même fonctionnement). Maintenant que nous avons décrit précisément la structure dans laquelle nous travaillons, nous allons définir de la notion d'agent.

Agent

Un agent est une entité réelle ou virtuelle qui agit en autonomie pour satisfaire ses objectifs. Il prend ses décisions en fonction des informations qu'il a sur son environnement et de celles qu'il reçoit des autres agents. Ce type de vocabulaire est souvent utilisé en informatique (Sutagundar and Sangulagi (2021)), dans le domaine de l'intelligence artificielle (Sinkovic and Lovrek (2000)), ou pour la commande de flotte de robots, de drones (Ma et al. (2019))... En effet, un agent est alors un logiciel ou un matériel équipé d'une capacité de calcul, capable de récupérer des

1. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Réseau>

2. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Réseau_\(géométrie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Réseau_(géométrie))

informations auprès de ses pairs, de faire des calculs et d’agir en conséquence. Il est donc nécessaire d’avoir un réseau de communication permettant d’avoir cet échange.

Dès lors que le système complexe a peu d’interactions physiques, comme c’est le cas pour une flotte de drones, les éléments (c’est-à-dire les drones) correspondent immédiatement à des agents (Fu et al. (2018)). Dans le cas d’un réseau avec de nombreux couplages physiques, la partition du système en agents s’avère complexe et non triviale Jogwar and Daoutidis (2017). Il faut alors séparer le réseau afin que chaque agent ait un ou plusieurs actionneurs à sa disposition (Rawlings and Stewart (2008); Scattolini (2009)).

Les réseaux, que nous avons étudiés, sont fortement couplés, ainsi, nous proposons la définition suivante pour la notion d’agent :

Définition 20 (Agent avec contrôleur) *Un agent A_i prend une décision locale pour un objectif (local ou global) à partir des informations locales et de celles des agents adjacents. L’adjacence est déterminée à partir du graphe associé au réseau de communication.*

$$A_i = (\mathcal{P}_i(u, y), X_i, Cp_i, Y_i)$$

avec

- $\mathcal{P}_i(u, y)$ une partition de l’ensemble des variables de commandes et de mesures associées du système
- X_i une partie de l’état interne que l’agent utilise
- Cp_i les contraintes physiques relatives à l’agent
- Y_i les informations transmises par les autres agents adjacents

Avec cette définition, nous pouvons avoir un agent possédant une ou plusieurs variables de commandes, une ou plusieurs variables mesurées, avec ou sans contraintes, avec ou sans variables d’état internes. Dans la suite, nous considérons toujours l’agent avec un contrôleur.

Systeme multi-agents

Un système multi-agents est donc une communauté qui évolue dans un environnement commun et dont les agents s’échangent des informations au travers d’un réseau de communication. Les agents prennent des décisions et agissent selon des modes de coopération, de concurrence ou de conflit, pour satisfaire un objectif global et/ou plusieurs objectifs locaux.

5.2.2 Commande de système multi-agents

Afin de commander un réseau, ou système multi-agents, nous avons besoin de définir la commande à travers son objectif, son architecture et son algorithme.

Objectif de commande

De manière générale, un objectif peut être global ou local, dépendant d'une ou plusieurs variables du système que nous souhaitons optimiser (maximiser ou minimiser).

Nous avons plusieurs possibilités pour définir un objectif global. La première possibilité, et la plus simple, est que tous les agents possèdent la même fonction à optimiser. Si ce n'est pas le cas nous pouvons identifier deux options : les fonctions indépendantes de chaque agent se complètent et chaque optimum conduit vers l'optimum global. La deuxième, chaque optimum concurrence les autres. Si cela arrive, il est alors nécessaire d'introduire une variable dans chacune des fonctions, qui permettra de prendre en compte les autres agents. Ainsi, les optimaux locaux seront adaptés pour un objectif global.

Pour un objectif local, chaque agent possède sa propre fonction et chacun fait de son mieux par lui-même.

Une fois l'objectif de commande fixé, nous devons voir comment les agents interagissent à travers l'architecture de commande.

Architecture de commande

L'architecture de commande ou réseau de communication, permet de qualifier l'interaction entre les différents agents. Il peut être décrit grâce à un graphe, ses propriétés sont visibles à travers l'association des matrices d'adjacence et Laplacienne (Gaeini et al. (2017)).

Topologie du réseau de communication Un graphe peut être complet : chaque couple d'agent est relié par une liaison directe (Köhler et al. (2018)). Il peut aussi être connexe : chaque agent est lié à tous les autres agents par des liaisons qui passent par d'autres agents (Lobel et al. (2010)). Concernant le flux d'information, il peut être orienté ou non. S'il est orienté nous parlons de graphe dirigé. Il est alors possible d'avoir un graphe non-connexe malgré l'existence d'arêtes reliant les agents.

Les caractéristiques du graphe doivent être décidées en fonction des objectifs qui ont été fixés, locaux ou globaux, centralisés ou décentralisés. Il est possible d'avoir des graphes centralisés, décentralisés, hiérarchisés, ou encore distribués. Nous allons voir une description succincte pour chacune des catégories présentées dans la Figure 5.1 :

Centralisée / Décentralisée Une architecture est dite centralisée lorsqu'il y a un unique agent qui optimise une fonction objectif obligatoirement global (Rawlings and Stewart (2008)). Toutes les informations lui sont donc envoyées, et il va faire le calcul pour l'ensemble des

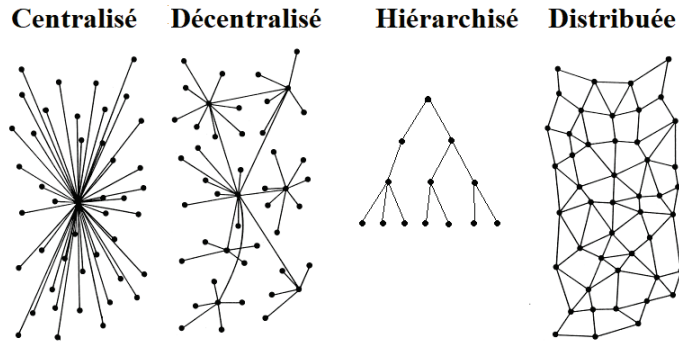


FIGURE 5.1 – Exemple d'architecture de commande

actionneurs du système. Pour l'architecture décentralisée, plusieurs agents optimisent la fonction objectif pour chaque sous-système. Toutes les deux sont efficaces lorsque la charge de données est suffisamment faible par rapport à la capacité de calcul de l'agent central ou des agents centraux.

Hiérarchisée L'architecture hiérarchisée peut avoir plusieurs niveaux. Il peut y avoir un seul agent-chef pour l'ensemble des agents ou un agent-chef et des agents-sous-chefs qui se partagent les calculs et propagent l'information dans l'ensemble du réseau.

Distribuée Une architecture distribuée est celle qui permet le plus d'échange avec un minimum d'interaction (Scattolini (2009)). Cette architecture est également plus robuste car les liens étant tous de même importance, la rupture de l'une des connexions impactera uniquement la communication directe entre les deux agents. Contrairement à une architecture hiérarchisée, qui sera partiellement ou totalement inopérante si la liaison avec le chef est rompue.

Comme précisé en introduction, c'est cette configuration distribuée que nous utilisons pour la commande d'un réseau d'échangeurs.

Bien-sûr, il est possible de mixer ces architectures en fonction des besoins de commande et également des interactions physiques qui lient les agents. Une fois cette structure choisie ou identifiée, nous passons à l'algorithme de commande.

Algorithme de commande

Plusieurs méthodes d'implémentation d'algorithmes de commande existent. Elles diffèrent en fonction des objectifs mais également des connaissances du modèle du système.

Nous avons la Commande Prédictive à base de Modèles, communément appelée MPC, (

MPC pour Model Predictive Controller) utilisée par Rawlings and Stewart (2008) ou encore Köhler et al. (2018). La commande MPC peut s'appliquer sur des architectures hiérarchisées ou distribuées.

Pour le premier cas, un exemple est donné dans Scattolini (2009). Nous pouvons voir que l'algorithme MPC hiérarchique peut utiliser un coordinateur afin de calculer en ligne la commande des différents agents. Une autre possibilité vient des systèmes multi-agents qui possèdent différentes échelles de temps. Il faut alors hiérarchiser les agents en fonction de ceux qui auront de l'influence sur les autres (Rawlings and Stewart (2008)). Pour le second type, dans Christofides et al. (2013), les auteurs proposent des algorithmes MPC distribués coopératifs ou non-coopératifs. Cette distinction se fait au niveau de la fonction à optimiser, elle sera globale dans le premier cas, locale dans le second. Il existe également des MPC à optimisation distribuée. Ces algorithmes combinent des fonctions objectifs locales avec un terme linéaire dépendant des autres agents Gaeini et al. (2017).

Une autre méthode, pour l'implémentation d'un algorithme de commande, est celle de la décomposition primal-dual utilisée par exemple par Feijer and Paganini (2010). Cette dernière est utilisée lorsque l'objectif dual à celui qui a été identifié, est plus simple à résoudre. Elle permet de regrouper l'objectif et les contraintes sous une même fonction qui malgré un nombre de variables plus important sera plus facile à optimiser. Utilisée lors de l'existence d'un point selle, cette méthode utilise les propriétés mathématiques du Lagrangien associé pour résoudre le problème d'optimisation.

Une troisième méthode d'implémentation de l'algorithme, celle du gradient, se base sur la dynamique distribuée du système et sur la recherche de l'optimum d'une fonction. Elle effectue un calcul en ligne du gradient de cette dernière et une adaptation de la commande permettant de converger vers l'optimum (Extremum-Seeking) (Khong et al. (2014)). Elle est utilisée lorsque la connaissance de la dynamique du système est imprécise, voire inconnue (système boîte grise) et/ou lorsque les variables mesurées ne sont pas celles que nous cherchons à optimiser. Nous pouvons alors trouver un fonction liant les mesures disponibles et les variables dont dépendent l'objectif.

Pour conclure, nous avons vu que pour commander un système multi-agents, plusieurs étapes étaient nécessaires

- L'objectif de commande doit être posé avec la fonction objectif à optimiser
- L'architecture de commande doit être déterminée
- L'algorithme de commande est choisie

5.3 Méthode par la recherche d'extremum (ou Extremum-Seeking) : Aperçu et bibliographie

La méthode par la recherche d'extremum ou Extremum-Seeking est une méthode de calcul de commande en boucle fermée. Elle permet d'atteindre l'extremum (minimum ou maximum) d'une fonction objectif, en estimant son gradient. Cette méthode nécessite un signal d'excitation extérieur au système afin de calculer numériquement le gradient de la fonction objectif. Le réglage de l'amplitude et la fréquence de ce signal extérieur, ainsi que des paramètres de la boucle de commande, demande quelques connaissances du système : constantes de temps (d'établissement du système, de réaction, etc.), amplitude des bruits de mesure, etc. C'est une méthode qui a été développée au début des années 2000 avec Krstić and Wang (2000), puis Tan et al. (2009), par la suite : Dürr et al. (2013), Chioua et al. (2016) et Wang et al. (2016). Dans ce qui suit nous faisons un bref rappel de la méthode d'Extremum-Seeking. Soit un système de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ avec x l'état, u l'entrée et f une fonction quelconque, considérons la sortie $y = h(x)$ avec $h(x)$ la fonction coût que nous cherchons à optimiser.

Notons θ la variable de décision telle que l'entrée est une fonction de cette dernière $u = \alpha(\theta)$. Implicitement, nous avons l'état qui dépend de cette variable θ .

L'Extremum-Seeking se décompose en plusieurs étapes : tout d'abord l'estimation en ligne du gradient de $h(x)$ par rapport à θ puis la loi de commande stabilisante α par retour d'état $u = \alpha(x, \theta)$ et enfin l'adaptation qui calcule θ optimal. Posons θ^* la valeur pour laquelle la sortie atteint son extremum $y^* = y(\theta^*)$. Les hypothèses prises par Krstić and Wang (2000) sont :

- Il existe une fonction $l \in C^\infty$ telle que $f(x, \alpha(x, \theta)) = 0$ si et seulement si $x = l(\theta)$
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'équilibre du système est localement exponentiellement stable avec une décroissance et un dépassement constant et uniforme en θ
- Il existe θ^* tel que la dérivée première de la fonction $h(x) = h(l(\theta^*))$ est nulle, et sa dérivée seconde est négative.

5.3.1 Première implémentation de l'Extremum-Seeking : Krstić and Wang (2000)

Le bloc diagramme de la Figure 5.2 donne la forme de la boucle de retour. Un filtre passe-haut paramétré par ω_h est suivi d'un filtre passe-bas dont le paramètre est ω_l et un intégrateur réglable avec k . Nous avons également le signal d'excitation de la forme sinusoïdale $a \sin(\omega t)$. Afin de régler les différentes variables, nous devons respecter les échelles de temps suivantes : la dynamique du système doit être plus rapide que la fréquence du signal d'excitation, elle-même plus rapide que les filtres de la boucle de retour.

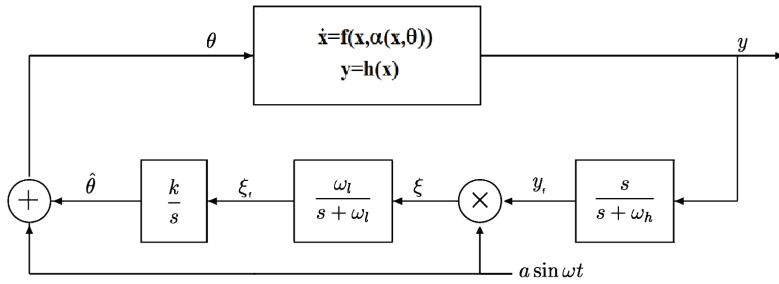


FIGURE 5.2 – Schéma d’Extremum-Seeking tiré de Krstić and Wang (2000)

En utilisant des résultats de Khalil (1996) et la méthode des perturbations singulières, les auteurs Krstić and Wang (2000) montrent que le système converge dans un voisinage de l’optimum qui dépend des paramètres choisis avec les hypothèses données précédemment.

5.3.2 Implémentation : amplitude du signal d’excitation dépendant du temps :Tan et al. (2009)

La première évolution que nous allons voir, vient de l’article de Tan et al. (2009). Les auteurs n’utilisent pas de filtres mais ils font dépendre l’amplitude du signal d’excitation des paramètres de la boucle de retour, comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.3. Cette modification

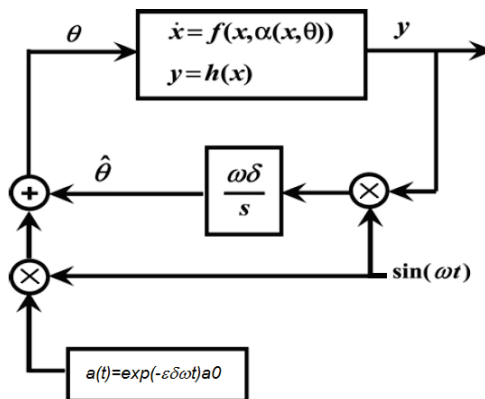


FIGURE 5.3 – Schéma d’Extremum-Seeking tiré de Tan et al. (2009)

permet d’atteindre le maximum global d’une fonction coût même si celle-ci n’est pas convexe. Cependant, le temps de convergence est plus long que pour la première méthode.

5.3.3 Implémentation : amplitude du signal d’excitation dépendant de la sortie :Wang et al. (2016)

Afin d’accélérer la précédente version, les auteurs de Wang et al. (2016) ont combiné l’utilisation de filtres avec la dépendance de l’amplitude du signal d’excitation. Le bloc diagramme de

la Figure 5.4 donne la nouvelle implémentation. Nous pouvons voir les même blocs que la première forme avec un signal d'excitation directement dépendant de la sortie y . Cette formulation de l'Extremum-Seeking permet de réduire fortement les oscillations et le temps de convergence, cependant, elle nécessite une connaissance plus fine du système afin d'avoir un réglage plus fin des paramètres.

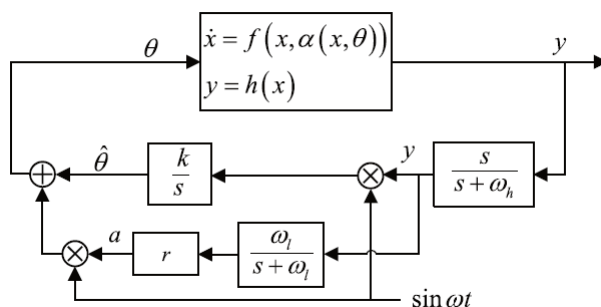


FIGURE 5.4 – Schéma d'Extremum-Seeking tiré de Wang et al. (2016)

5.3.4 Implémentation : gradient calculé avec les "moindres carrés récurrents" : Chioua et al. (2016)

Les auteurs utilisent la méthode des moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli pour estimer le gradient. Grâce à cela, ils parviennent à une convergence plus rapide vers l'optimum et des oscillations quasiment nulles. Dans la Figure 5.5, nous avons le système en boucle fermée représenté à l'aide du logiciel Simulink.

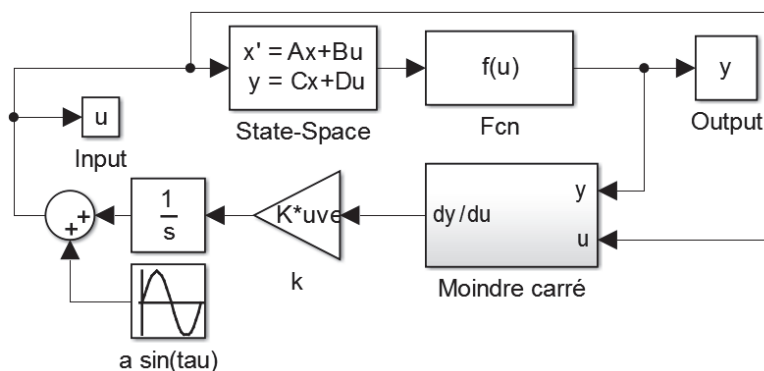


FIGURE 5.5 – Schéma d'Extremum-Seeking basé sur Chioua et al. (2016)

5.4 Commande avec un graphe de communication complet

5.4.1 Réseau étudié

Soit le réseau défini par trois échangeurs thermiques en parallèle comme visible en Figure 5.6. Nous avons deux échangeurs à double voies, et un à triple voies. Voici les hypothèses de travail :

- Les températures des sources (fluides chauds) sont inconnues mais toujours supérieures à celles des clients (fluides froids).
- Les fluides ont tous les même propriétés thermodynamiques
- Le client 1 récupère de l'énergie thermique des sources 1 et 2
- Le client 2 récupère de l'énergie thermique des sources 2 et 3
- Les débits massiques sont fixes : $Q_{p,1} = 0.02kg/s$ et $Q_{p,2} = 0.02kg/s$
- Le coefficient α correspond à la fraction du débit massique qui passe par l'échangeur 1 pour le client 1
- Le coefficient β correspond à la fraction du débit massique qui passe par l'échangeur 2 pour le client 2

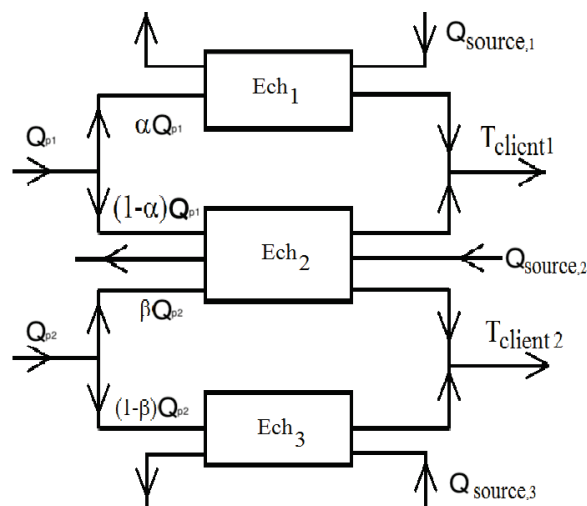


FIGURE 5.6 – Réseau de trois échangeurs thermiques en parallèle

L'objectif de la commande pour ce réseau est de maximiser la puissance totale fournie aux deux clients. Compte tenu des hypothèses sur les fluides, cela est équivalent à maximiser la combinaison linéaire des températures suivante : $\Xi = Q_{p,1}T_{client,1} + Q_{p,2}T_{client,2}$. Pour ce faire, nous jouons sur les fractions de débits $\Xi(\alpha, \beta)$. De plus, nous avons la sortie qui est égale à cette fonction : $y = \Xi(\alpha, \beta) = Q_{p,1}T_{client,1} + Q_{p,2}T_{client,2}$. Nous avons fait une cartographie de la sortie en fonction de la fraction des débits α , et β (Figure 5.7). Cela nous permet de voir que la fonction possède un optimum.

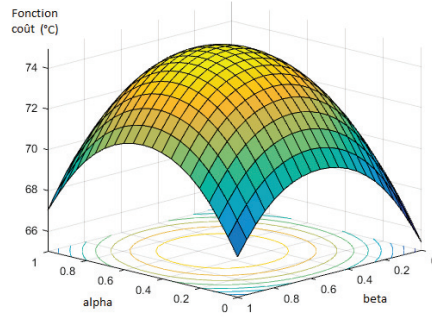


FIGURE 5.7 – Sortie du système $y(\alpha, \beta)$

5.4.2 Objectif de commande

Nous pouvons noter que le maximum est atteint pour $y_{max}(\alpha^*, \beta^*) = y(0.52, 0.51)$

5.4.3 Résultat de commande

Nous avons implémenté la loi de commande par Extremum-Seeking comme sur la Figure 5.8. Nous voyons que pour chaque entrée nous avons une boucle de retour qui utilise la méthode des moindres carrés récursifs. Nous avons utilisé des paramètres identiques des deux cotés sauf pour les signaux d'excitation. Nous amorçons le système dans les conditions pour lesquels nous

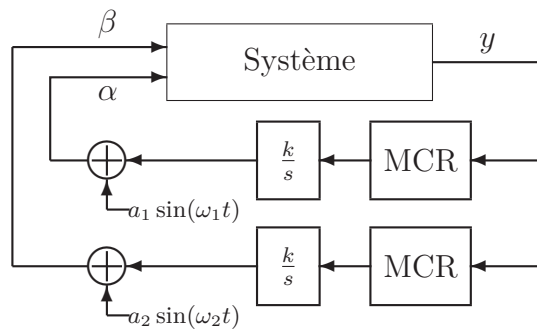


FIGURE 5.8 – Bloc-diagramme de la commande du réseau

avons identifié la Figure 5.7. En initialisant les valeurs de α et β au dessus de leur valeur idéale. Nous voyons dans la Figure 5.9 que les commandes convergent vers les valeurs qui optimisent la sortie $y = Q_{p,1}T_{client,1} + Q_{p,2}T_{client,2}$.

5.5 Commande avec un graphe de communication connexe

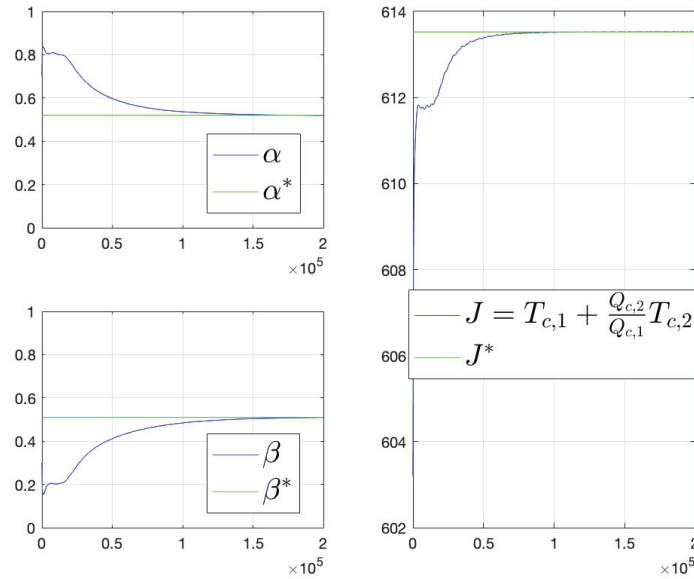


FIGURE 5.9 – Commandes α , β et fonction coût $J = T_{client,1} + \frac{Q_{c,2}}{Q_{c,1}}T_{client,2}$ du système

5.5.1 Réseau étudié

Dans le cas du réseau de la Figure 5.10, nous avons cinq échangeurs thermiques qui permettent le transfert de l'énergie thermique entre les 5 sources chaudes et les 4 clients qui sont identifiés comme des fluides froids. Les sources des échangeurs sont indépendantes, non réglables et surtout non mesurées. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- les débits des sources sont constants
- la température des fluides chauds est toujours supérieure à la température des fluides froids
- les fluides froids et les fluides chauds ont les mêmes caractéristiques
- la mesure des températures se fait en entrée et en sortie des fluides froids
- la commande se fait sur les fractions de débits d'entrées des fluides froids
- la température (T_{cin}) et le débit (Φ_p) d'entrée des fluides froids sont égaux et constants

Le schéma physique est visible dans la Figure 5.10, nous avons les fluides froids en bleu et les fluides chauds en rouge.

5.5.2 Réseau de communication connexe et commande distribuée

Pour ce réseau thermique, nous mettons en place un réseau de communication. Celui-ci est calqué sur les connexions physiques entre les clients. L'objectif de commande est toujours de maximiser la puissance absorbée par les clients. Une image de cette puissance est fournie par une combinaison linéaire des températures des fluides en sortie d'échangeur pondérés par

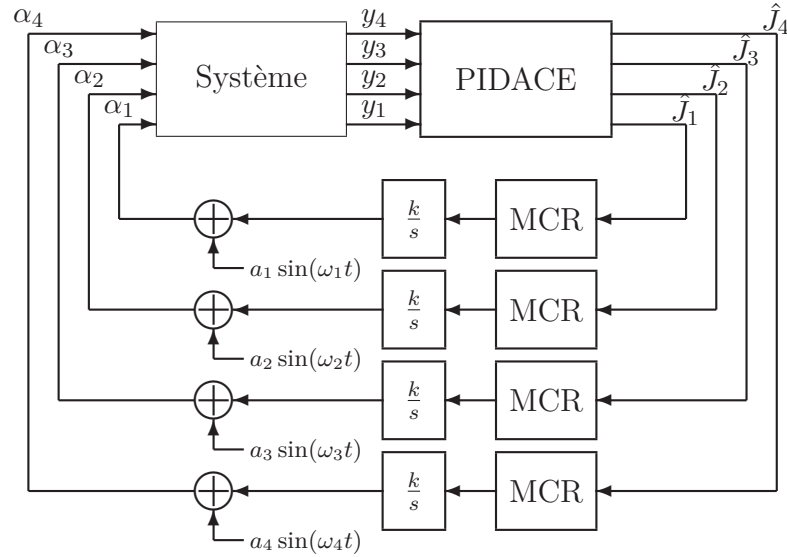


FIGURE 5.12 – Bloc-diagramme de la commande du réseau

chaque client. À travers les calculs que nous détaillons dans la section suivante, nous trouvons une fonction coût pour chaque agent $\hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \hat{J}_4$. Ces dernières seront utilisées dans les boucles d'E-S pour trouver les commandes adéquates.

5.5.3 Estimateur PIDACE

Grâce à l'égalité des débits d'entrées des quatre clients, la puissance absorbée peut être représentée d'une manière équivalente par une autre fonction coût égale à la somme des températures de sorties des clients : $J = \sum_{i=1}^4 T_{c,out,i}$. Dans le cas d'un réseau de communication complet, il est évident que cette fonction peut être évaluée par chaque client. Tandis que dans notre cas, nous assumons un réseau de communication incomplet mais connexe. Afin que chaque client (agent) puissent estimer la fonction J via des mesures partielles de températures, nous utilisons un estimateur pour chaque agent. Nous avons choisi d'utiliser celui proposé par Freeman et al. (2006). L'hypothèse d'un réseau de communication connexe suffit pour l'application de cet estimateur nommé PIDACE (*Proportional Integral Distributed Average Consensus Estimator*). Dans la suite, nous introduisons l'expression de l'estimateur PIDACE.

Nous allons estimer, pour chaque agent, la valeur moyenne de la fonction coût globale, à savoir : $\hat{J}_i = \frac{J}{4}$ (car nous avons un réseau thermique avec 4 agent). Nous avons besoin de définir la matrice Laplacienne L , qui se déduit du graphe de communication et de sa matrice

d'adjacence A telle que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad L = \text{diag}(A\mathbf{1}) - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Ainsi, nous avons la dynamique de l'estimateur (Freeman et al. (2006)) suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{J}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\mathbf{I} - k_p L & k_i L^T \\ -k_i L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c,out,1}(t) \\ T_{c,out,2}(t) \\ T_{c,out,3}(t) \\ T_{c,out,4}(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Nous avons trois paramètres : γ est le paramètre général de l'estimateur. k_p et k_i correspondent au poids que nous souhaitons mettre à la matrice Laplacienne en fonction des caractéristique du réseau. Nous pouvons voir que l'état d'équilibre de cette dynamique correspond à :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{J}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\hat{J}(t) - k_p L\hat{J}(t) + k_i L^T w(t) + \gamma\mathbf{T}_{c,out}(t) \\ -k_i L\hat{J}(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Nous savons également que la matrice laplacienne d'un graphe connexe a les propriétés suivantes : $L\mathbf{1} = 0$ et $\mathbf{1}^T L = 0$. Ainsi nous avons :

$$\begin{cases} \gamma\hat{J}(t) + k_p \underbrace{L\hat{J}(t)}_{=0} = k_i L^T w(t) + \gamma\mathbf{T}_{c,out}(t) & (a) \\ L\hat{J}(t) = 0 & (b) \end{cases} \quad (5.4)$$

Grâce à la propriété de L et à l'équation (5.4)(b) nous pouvons dire que

$$\hat{J}(t) = \lambda\mathbf{1} \quad (5.5)$$

Ainsi, en multipliant à gauche, la ligne (5.4)(a) par $\mathbf{1}^T$ et en simplifiant, nous trouvons :

$$\gamma\mathbf{1}^T \underbrace{\hat{J}(t)}_{=\lambda\mathbf{1}} = k_i \underbrace{\mathbf{1}^T L^T}_{=0} w(t) + \gamma \underbrace{\mathbf{1}^T \mathbf{T}_{c,out}(t)}_{=J} \quad (5.6)$$

$$\gamma\lambda\mathbf{1}^T \mathbf{1} = \gamma J \quad (5.7)$$

$$4\gamma\lambda = \gamma J \quad (5.8)$$

$$\lambda = \frac{J}{4} \quad (5.9)$$

Ainsi, en combinant les égalités (5.5) et (5.9), nous avons : $\hat{J}(t) = \frac{J}{4}\mathbf{1}$, ce qui implique que l'état d'équilibre arrive à une moyenne de la fonction coût que nous voulions estimer. \square

Maintenant que nous avons montré que l'état d'équilibre correspondait à la valeur qui nous intéresse, nous allons montrer la stabilité de l'estimateur. Pour ce faire, nous avons besoin de faire un changement de variables. Notons le vecteur $r = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\mathbf{1}$, et S la matrice telle que $[r \ S]$ soit une matrice orthogonale. Le changement de variables est le suivant :

$$z(t) = \begin{bmatrix} r^T \\ S^T \end{bmatrix} \hat{J}(t) \quad \text{et} \quad \mu(t) = S^T w(t)$$

Avec les nouvelles coordonnées et u la variable de commande, nous pouvons réécrire la dynamique de l'estimateur comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & \gamma r^T \\ 0 & -\gamma \mathbf{I} - k_p S^T L S & k_i S^T L^T S & \gamma S^T \\ 0 & -k_i S^T L S & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \mu(t) \\ u \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Nous notons l'état d'équilibre :

$$\bar{z} = [r^T u, 0, \dots, 0]^T \quad , \quad \bar{\mu} = -\gamma (k_i S^T L^T S)^{-1} S^T u$$

Ainsi, en changeant l'origine tel que $\zeta(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix}$, nous avons :

$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \mathbf{I} - k_p S^T L S & k_i S^T L^T S \\ 0 & -k_i S^T L S & 0 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

La matrice est Hurwitz dès le moment où γ et $\gamma + \epsilon$ sont positifs avec ϵ la deuxième valeur propre de la matrice L qui est positive pour un graphe connexe. L'estimateur est donc bien stable et cela assure la convergence vers le point d'équilibre donné par la moyenne de la fonction coût J . \square

5.5.4 Résultat de commande

Nous avons simulé le réseau avec un profil des températures des sources (Figure 5.13) qui change au milieu de la simulation ($t = 7.10^5 s$). Nous ne pouvons pas visualiser, comme pour le réseau précédent, les valeurs de commande correspondant à l'optimum car le problème considéré est multivariable. À la place, nous avons observé le gradient des estimées de la fonctions coût en fonction des commandes $\alpha_i : \frac{dJ_i}{d\alpha_i}$ (Figure 5.14). En effet, nous voyons que les courbes tendent toutes vers zéro (gradients nulles), cela signifie que nous avons atteint un point d'équilibre optimum de la fonction coût. \square

Les deux autres graphes de la simulation, Figure 5.15, représentent la commande (Figure 5.15a) et la température de sortie (Figure 5.15a) de chaque client (agent). Nous pouvons

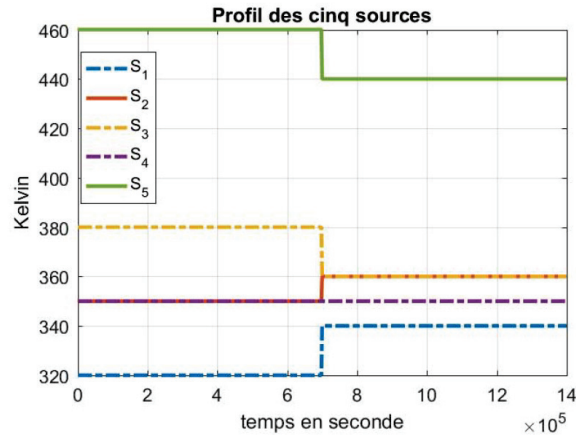


FIGURE 5.13 – Profil des températures des sources

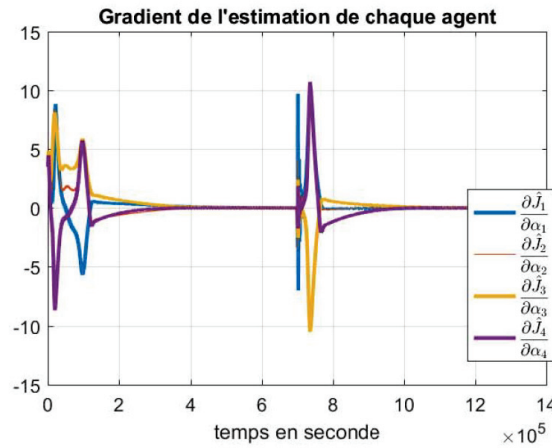


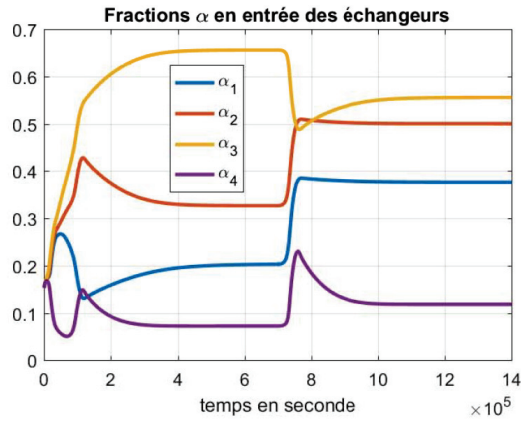
FIGURE 5.14 – Gradients des estimées de la fonction coût : $\frac{d\hat{J}_i}{d\alpha_i}$

voir que lors du changement des sources au milieu de la simulation, la variable de commande converge plus rapidement vers sa valeur finale. En effet, lors de la mise en route, l'estimation n'est pas la même pour les quatre agents, mais lorsque les sources évoluent, le critère est le même pour tous, ainsi le calcul est plus rapide que la première fois.

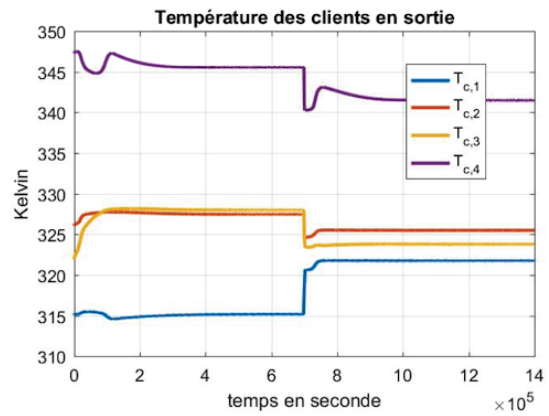
5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la commande distribuée d'un réseau de système multi-agents. Les termes d'agent, réseau, communication ou encore optimisation distribuée ont été définis et développés afin d'explicitier notre objectif. Nous avons vu que certaines notions nécessitent d'être posées en relation avec la nature du problème considéré. Après cela, nous devons connaître le cahier des charges afin d'adapter au mieux les outils utilisés.

Les réseaux d'échangeurs de chaleur, que nous avons étudié dans ce chapitre, représentent



(a) Fraction de débit pour les 4 clients α_i



(b) Températures des quatre clients $T_{c,i}$

FIGURE 5.15 – Résultats de simulation

des exemples académiques pris pour un objectif de validation de la méthodologie de commande distribuée proposée. La partie estimateur permet de calculer localement une estimation d'une variable global. C'est-à-dire que chaque agent a une estimation du critère global calculé à partir de ses informations locales et de celle issues de son voisinage direct. Tant dis que la partie Extremum-Seeking permet d'optimiser ce critère via l'implémentation d'un algorithme de type gradient.

Les simulations nous ont permis de valider les résultats théoriques, ainsi que de voir la finesse des réglages nécessaires à la méthode. En effet, le système, avec deux variables de commande, a d'abord été simulé en boucle ouverte afin d'identifier l'optimum, puis en boucle fermée avec l'estimateur et la boucle de commande. Nous avons pu affiner nos réglages avant de passer sur le système avec quatre variables de commande, et valider les résultats en analysant les valeurs de l'estimateur et de l'Extremum-Seeking.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Durant cette thèse, nous avons étudié la représentation dynamique des échangeurs de chaleur avec des modèles de dimension finie. Nous avons particulièrement mis en évidence une forme structurée de cette dynamique via une représentation d'état bilinéaire. Nous avons aussi développé des modèles dynamiques structurés pour la représentation de réseaux thermiques composés uniquement d'échangeurs de chaleur à contre courant. Ces modèles dynamiques ont, par la suite, été utilisés pour la synthèse d'observateur et de commande non linéaire pour l'échangeur thermique ainsi que la synthèse de commande distribuée pour le réseau d'échangeur. Cette commande distribuée permet d'optimiser une fonction coût globale.

L'apport d'une commande dynamique permet d'améliorer les performances des réseaux existant notamment en présence de perturbations des conditions opératoires pour lesquels ils ont été conçus initialement.

Nous allons, dans la suite, décliner les conclusions et les perspectives selon les travaux liés à la modélisation dynamique puis à la commande automatique.

Partie Modélisation

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les différentes représentations dynamiques d'un échangeur thermique. Celles-ci sont liées au choix des variables d'état : l'enthalpie, l'entropie ou la température. Ces représentations ont été étudiées dans le Chapitre 1.

L'enthalpie a été retenue comme variable d'état pour la représentation systématique des échangeurs. Son intérêt provient d'une lecture directe des flux convectifs d'enthalpie.

Alors que la représentation en entropie donne des modèles non-linéaires (via des lois constitutives non linéaires et des termes de production irréversible d'entropie), celles en enthalpie

et en température aboutissent à des modèles bilinéaires. Pour la synthèse de commande, nous avons opté pour la modélisation en température puisque la température est en général celle sur laquelle les objectifs de commande sont formulés et celle qui est pratiquement mesurée.

Dans le Chapitre 3, nous avons présenté la construction d'un modèle systématique pour un réseau d'échangeurs de chaleur pour des interconnexions en série. Cette modélisation est basée sur l'interconnexion de blocs élémentaires et l'utilisation de la matrice d'interconnexion entre ces blocs.

Ce chapitre permet de considérer des réseaux simples d'échangeurs en série mais également de considérer un échangeur discret avec un échantillonnage quelconque. Nous pouvons ainsi, en choisissant un très petit volume, nous rapprocher d'un modèle continu. Tout cela est rendu possible par l'utilisation de la matrice d'interconnexion qui est identique pour la cascade de deux blocs élémentaires ou de deux échangeurs.

Enfin, dans le Chapitre 4, nous avons donné la généralisation de la méthode de modélisation systématique aux réseaux d'échangeurs thermiques avec d'autres interconnexions qu'en série. Ceci est fait en considérant des interconnexions de type collecteur ou de type répartiteur avec la possibilité d'avoir un réseaux d'échangeurs hétérogènes, caractérisés par des paramètres thermodynamiques et/ ou géométriques. La matrice d'interconnexion précédemment citée, reste identique, cependant, les relations entre les matrices qui composent le modèle, diffèrent d'une liaison à l'autre. L'ensemble de ce chapitre nous permet de modéliser la grande majorité des réseaux thermiques uniquement composés d'échangeurs de chaleur.

Perspectives

Si les hypothèses que nous avons posées pour les réseaux sont respectées, il est envisageable d'utiliser notre modèle pour un échangeur à calandre. En effet, dans ces derniers nous avons une succession de blocs élémentaires avec un réseau d'interconnexion qui peut être décrit par un autre graphe convectif. Cependant, les blocs ne seront pas seulement à contre-courant mais il pourrait y avoir des flux à co-courant et/ou croisés. Il faut alors vérifier que les équations correspondent toujours aux phénomènes physiques qui se déroulent à l'intérieur de l'échangeur.

Dans les modèles dynamiques proposés dans ce manuscrit, nous avons supposé que les coefficients de transfert de chaleur, les densités et les capacités calorifiques étaient constants et donc indépendants de la température et de l'hydrodynamique locale. Or, pour les échangeurs de chaleur qui admettent d'importants gradients de chaleur entre l'entrée et la sortie, l'hypothèse de la constance des capacités calorifiques et des densités le long de l'échangeur est sujet à discussion. De plus, l'introduction dans les RET d'échangeurs de chaleur en parallèle ou des by-pass induisent des variations de débits internes qui sont susceptibles de fortement dégrader

les transferts de chaleur à la paroi et donc de faire varier les coefficients de transfert de chaleur. Ces phénomènes ne sont pas pris en compte actuellement dans les modèles dynamiques, mais il serait intéressant de les étudier.

Enfin, nous nous sommes pour le moment focalisé sur les éléments passifs que sont les échangeurs de chaleur. Nous pourrions envisager la systématisation des modèles pour d'autres éléments d'un réseau thermique, qu'ils soient passifs (les réservoirs thermiques) ou actifs (les machines thermodynamiques telles que les pompes à chaleur). Dans ce cas, nous devrions trouver une forme générale qui utiliserait la même variable d'état et ainsi permettre, via les sorties et les entrées, l'interconnexion des modèles. Un autre défi sera d'inclure des modèles dynamiques pour ces machines thermodynamiques de complexité réduite adaptés à la synthèse de lois de commande.

Partie Commande

Conclusion

Dans le Chapitre 2, nous avons synthétisé un observateur des températures internes d'un échangeur à contre courant composé de n blocs élémentaires en cascade. Ceci est réalisé en utilisant un modèle bilinéaire et en mesurant les températures d'entrées et de sorties des deux fluides. En utilisant toujours le modèle bilinéaire, nous avons synthétisé une commande non linéaire via la méthode de forwarding permettant une régulation robuste de la température de sortie d'un fluide via la variation du débit de l'autre fluide. Cette dernière est synthétisée en tenant compte de la saturation physique de l'entrée de commande (débit maximal). Comme en pratique il n'est pas possible de mesurer entièrement le profil de température interne au sein d'un échangeur, nous avons combiné la loi de commande avec l'observateur pour obtenir une commande par retour de sortie assurant le même objectif de régulation. Enfin, ces deux lois de commande (sans et avec observateur) ont été testées en simulation sur Matlab[®] et nous avons validé leur fonctionnement.

Dans le Chapitre 5, nous avons considéré le problème d'optimisation distribuée appliqué à un réseau d'échangeurs thermiques. Cela est fait en prenant une fonction coût assimilable à une puissance thermique absorbée par des fluides froids, dits fluides clients, à partir de fluides chauds, appelés sources chaudes. Les variables de commande considérées sont des fractions de débit des fluides clients.

Cette approche d'optimisation distribuée est basée sur un réseau de communication connexe entre les différents clients permettant d'échanger les températures de sorties autour de leur voisinage. Puis, grâce à ce réseau, un estimateur distribué permet à chaque client de reconstruire

la fonction coût globale en utilisant seulement des mesures partielles sur le réseau. A partir de cette estimation, chaque client calcule une adaptation de l'entrée de commande en utilisant un algorithme de type gradient numérique basé sur la méthode d'extremum seeking.

Après avoir validé celle-ci par des simulations sur un exemple de réseau simple à deux échangeurs, nous avons testé la loi de commande sur un réseau à cinq échangeurs en parallèle (cinq fluides clients). Ces simulations nous ont aussi permis de valider l'estimateur par consensus.

Perspectives

Une extension de la loi de commande par la méthode de forwarding appliquée aux réseaux est envisagée. Ceci impliquera de résoudre un problème de commande multivariable et cela que ce soit un problème de régulation ou d'optimisation. Ce dernier peut être fait en considérant l'état intégrateur de la méthode en lien avec le gradient de la fonction coût. Une autre perspective intéressante serait aussi d'utiliser les observateurs pour la détection du seuil d'en-crassement dans un échangeur thermique et d'adapter la commande pour assurer en temps réel un fonctionnement efficient.

Tout comme dans le cas de la modélisation, cette étude de commande automatique peut s'étendre sur des réseaux de chaleur intégrant d'autres éléments, tels que les chaudières, pompes à chaleurs (éléments actifs) et les réservoirs thermiques (éléments passifs).

Enfin, nous avons considéré des critères pour leur pertinence en terme de puissance transmise. Nous pouvons toutefois envisager l'utilisation de critères différents suivant les besoins du réseau. Si l'objectif se situe au niveau du volume de fluide utilisé par le système, le critère de commande peut être l'optimisation du volume, du débit du ou des fluides, ou tout simplement la minimisation du volume total. Nous pouvons également envisager un critère se basant sur un modèle entropique, qui aura donc pour objectif la minimisation de l'entropie créée lors de l'échange thermique ce qui se rapproche d'une approche dite "exergétique". Enfin, dans l'optique d'une réduction des énergies primaires, le critère pourrait être la minimisation de la quantité d'énergie de la source. Tout ceci n'inclut pas encore la partie financière qui doit être quantifiée et qui peut faire partie du critère. Nous aurions alors un critère multiple incluant les conditions physiques et thermodynamiques ainsi que les contraintes financières (coût sur les différentes utilités).

Bibliographie

- Al-Zubaydi, A. Y. T. and Hong, G. (2018). Experimental investigation of counter flow heat exchangers for energy recovery ventilation in cooling mode. *International Journal of Refrigeration*, 93 :132 – 143.
- Alsop, A. W. and Edgar, T. F. (1989). Nonlinear heat exchanger control through the use of partially linearized control variables. *Chemical Engineering Communications*, 75(1) :155–170.
- Anxionnaz, Z., Cabassud, M., Gourdon, C., and Tochon, P. (2008). Heat exchanger/reactors (HEX reactors) : Concepts, technologies : State-of-the-art. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 47(12) :2029–2050.
- Astorga-Zaragoza, C.-M., Alvarado-Martínez, V.-M., Zavala-Río, A., na, R.-M. M.-O., and Guerrero-Ramírez, G.-V. (2008). Observer-based monitoring of heat exchangers. *ISA Transactions*, 47(1) :15 – 24.
- Astorga-Zaragoza, C.-M., Zavala-Río, A., Alvarado, V., Méndez, R.-M., and Reyes-Reyes, J. (2007). Performance monitoring of heat exchangers via adaptive observers. *Measurement*, 40(4) :392 – 405.
- Bonilla, J., Dormido, S., and Cellier, F. E. (2015). Switching moving boundary models for two-phase flow evaporators and condensers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(3) :743 – 768.
- Bonnet, S., Alaphilippe, M., and Stouffs, P. (2005). Energy, exergy and cost analysis of a micro-cogeneration system based on an ericsson engine. *International Journal of Thermal Sciences*, 44(12) :1161 – 1168. A tribute to Bernard Spinner (1940-2004).
- Chandrashekar, M. and Wong, F. (1982). Thermodynamic systems analysis - i. a graph-theoretic approach. *Energy*, 7(6) :539 – 566.
- Chinneck, J. and Chandrashekar, M. (1984a). Models of large-scale industrial energy systems - ii : Optimization and synthesis. *Energy*, 9(8) :679 – 692.

- Chinneck, J. and Chandrashekar, M. (1984b). Models of large-scale industrial energy systems-i. simulation. *Energy*, 9(1) :21 – 34.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Guay, M., and Perrier, M. (2016). Performance Improvement of Extremum Seeking Control using Recursive Least Square Estimation with Forgetting Factor. *IFAC PAPERSONLINE*, 49(7).
- Christofides, P. D., Scattolini, R., noz de la Peña, D. M., and Liu, J. (2013). Distributed model predictive control : A tutorial review and future research directions. *Computers & Chemical Engineering*, 51 :21 – 41. CPC VIII.
- Chu, Z. and Zhang, W. (2019). Moving-boundary and finite volume coupling algorithm for heat exchanger with fluid phase change. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 131 :313 – 328.
- Davies, W. A. and Hrnjak, P. (2020). Heat transfer and flow regimes during counter-flow steam condensation in flattened-tube air-cooled condensers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 147 :118930.
- de Oliveira Filho, L. O., Queiroz, E. M., and Costa, A. L. (2007). A matrix approach for steady-state simulation of heat exchanger networks. *Applied Thermal Engineering*, 27(14) :2385 – 2393.
- Diaz-Mendez, S., no Carachure, C. P., and Herrera-Castillo, J. (2014). Reducing the energy consumption. *Energy Conversion and Management*, 77 :1 – 6.
- Duindam, V., Macchelli, A., Stramigioli, S., and Bruyninckx, H. (2009). *Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Dürr, H.-B., Stanković, M. S., Ebenbauer, C., and Johansson, K. H. (2013). Lie bracket approximation of extremum seeking systems. *AUTOMATICA*, 49(6) :1538–1552.
- Eck, D., Saalmüller, J., and Schilling, K. (2013). A distributed network of microcontrollers for mobile robots. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(29) :132–137.
- Escobar, R., Astorga-Zaragoza, C., Téllez-Anguiano, A., Juárez-Romero, D., Hernández, J., and Guerrero-Ramírez, G. (2011). Sensor fault detection and isolation via high-gain observers : Application to a double-pipe heat exchanger. *ISA Transactions*, 50(3) :480 – 486.
- Feijer, D. and Paganini, F. (2010). Stability of primal-dual gradient dynamics and applications to network optimization. *Automatica*, 46(12) :1974 – 1981.

- Foda, E., El-Hamalawi, A., and Dréau, J. L. (2020). Computational analysis of energy and cost efficient retrofitting measures for the french house. *Building and Environment*, 175 :106792.
- Fossard, A. J. and Normand-Cyrot, D., editors (1995). *Nonlinear Systems*. Springer US.
- Freeman, R. A., Yang, P., and Lynch, K. M. (2006). Stability and convergence properties of dynamic average consensus estimators. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 338–343.
- Fu, Q., Du, L., Xu, G., Wu, J., and Yu, P. (2018). Consensus control for multi-agent systems with distributed parameter models. *Neurocomputing*, 308 :58 – 64.
- Gaeini, N., Amani, A. M., Jalili, M., and Yu, X. (2017). Cooperative secondary frequency control of distributed generation : The role of data communication network topology. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 92 :221 – 229.
- Gauthier, J.-P., H, H., and S, O. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :875–880.
- Genić, S., Jaćimović, B., and Petrovic, A. (2018). A novel method for combined entropy generation and economic optimization of counter-current and co-current heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 136 :327 – 334.
- Gershgorin, S. (1931). Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Bull. Acad. Sci. URSS*, 1931(6) :749–754.
- Ghani, R. and Iranshahi, D. (2019). Comparison of co-current and counter-current flow in a bifunctional reactor containing ammonia synthesis and 2-butanol dehydrogenation to mek. *International Journal of Hydrogen Energy*, 44(5) :2905 – 2917.
- Grald, E. W. and MacArthur, J. (1992). A moving-boundary formulation for modeling time-dependent two-phase flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 13(3) :266 – 272.
- Harary, F. and Gupta, G. (1997). Dynamic graph models. *Mathematical and Computer Modeling*, 25(7) :79 – 87.
- Heo, S. (2019). Nonlinear control of high duty counter-current heat exchangers using reduced order model. *Applied Thermal Engineering*, 157 :113720.
- Hesselgreaves, J., Law, R., and Reay, D. (2016). *Compact Heat Exchangers : Selection, Design and Operation*. Elsevier Science.

- Horst, T. A., Rottengruber, H.-S., Seifert, M., and Ringler, J. (2013). Dynamic heat exchanger model for performance prediction and control system design of automotive waste heat recovery systems. *Applied Energy*, 105 :293 – 303.
- Isidori, A., Marconi, L., and Casadei, G. (2013). Robust Output Synchronization of a Network of Heterogeneous Nonlinear Agents Via Nonlinear Regulation Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59.
- Jain, N. and Alleyne, A. (2015). Exergy-based optimal control of a vapor compression system. *Energy Conversion and Management*, 92 :353 – 365.
- Jäschke, J. and Skogestad, S. (2014). Optimal operation of heat exchanger networks with stream split : Only temperature measurements are required. *Computers & Chemical Engineering*, 70 :35 – 49. Manfred Morari Special Issue.
- Jensen, J. M. and Tummescheit, H. (2002). Moving boundary models for dynamic simulations of two-phase flows. In *Proc. of the 2nd Int. Modelica Conference*, volume 3. Oberpfaffenhofen Germany.
- Jia, Y., Chai, T., Wang, H., and Su, C.-Y. (2020). A signal compensation based cascaded pi control for an industrial heat exchange system. *Control Engineering Practice*, 98 :104372.
- Jin, Y., Gao, N., and Wang, T. (2020). Influence of heat exchanger pinch point on the control strategy of organic rankine cycle (orc). *Energy*, 207 :118196.
- Jin, Y., Hu, R., Wang, Y., Cui, Y., Liu, Y., and Huang, Q. (2017). The effect of dixon rings on direct contact heat transfer performance : Comparison of counter and co-current evaporation. *Applied Thermal Engineering*, 117 :762 – 772.
- Jogwar, S. S. and Daoutidis, P. (2017). Community-based synthesis of distributed control architectures for integrated process networks. *Chemical Engineering Science*, 172 :434 – 443.
- Kakaç, S., Liu, H., and Pramuanjaroenkij, A. (2020). *Heat Exchangers : Selection, Rating, and Thermal Design, Fourth Edition*. CRC Press.
- Kayange, H. A., Cui, G., Xu, Y., Li, J., and Xiao, Y. (2020). Non-structural model for heat exchanger network synthesis allowing for stream splitting. *Energy*, 201 :117461.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, second edition.
- Khalil, W. and Dombre, E. (2002). Chapter 14 - motion control. In Khalil, W. and Dombre, E., editors, *Modeling, Identification and Control of Robots*, pages 347 – 376. Butterworth-Heinemann, Oxford.

- Khong, S. Z., Tan, Y., Manzie, C., and Nešić, D. (2014). Multi-agent source seeking via discrete-time extremum seeking control. *Automatica*, 50(9) :2312 – 2320.
- Kim, M.-H., Lee, S. Y., Mehendale, S. S., and Webb, R. L. (2003). Microchannel heat exchanger design for evaporator and condenser applications. In *Advances in Heat Transfer*, volume 37 of *Advances in Heat Transfer*, pages 297–429. Elsevier.
- Klemes, J., Arsenyeva, O., Kapustenko, P., and Tovazhnyansky, L. (2015). *Compact Heat Exchangers for Energy Transfer Intensification : Low Grade Heat and Fouling Mitigation*. CRC Press.
- Köhler, P. N., Müller, M. A., and Allgöwer, F. (2018). A distributed economic mpc framework for cooperative control under conflicting objectives. *Automatica*, 96 :368 – 379.
- Krstić, M. and Wang, H.-H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *AUTOMATICA*, 36(4) :595–601.
- Larousse, P. (2018). *Larousse*. Isabelle Jeuge-Maynard.
- Liu, S. and Trenkler, G. (2008). Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and Other Matrix Products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 4(1) :160–177.
- Liu, T.-L., Fu, B.-R., and Pan, C. (2013). Boiling heat transfer of co- and counter-current microchannel heat exchangers with gas heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 56(1) :20 – 29.
- Lobel, I., Ozdaglar, A., and Feijer, D. (2010). Distributed multi-agent optimization with state-dependent communication.
- Luo, X., Li, M., and Roetzel, W. (2002). A general solution for one-dimensional multistream heat exchangers and their networks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(13) :2695 – 2705.
- Ma, F., Yin, Y., and Chen, W. (2019). Reliability Analysis of Power and Communication Network in Drone Monitoring System. *IEICE Transactions on Communications*, E102.B(10) :1991–1997.
- Maidi, A., Diaf, M., and Corriou, J.-P. (2009). Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, 19(2) :297 – 313.
- Maschke, B. and van der Schaft, A. (1992). Port-controlled hamiltonian systems : Modelling origins and systemtheoretic properties. *IFAC Proceedings Volumes*, 25(13) :359 – 365. 2nd IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design 1992, Bordeaux, France, 24-26 June.

- Michel, A. and Kugi, A. (2014). Model based control of compact heat exchangers independent of the heat transfer behavior. *Journal of Process Control*, 24(4) :286 – 298.
- Naqiuddin, N. H., Saw, L. H., Yew, M. C., Yusof, F., Ng, T. C., and Yew, M. K. (2018). Overview of micro-channel design for high heat flux application. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 82 :901 – 914.
- Oravec, J., Bakošová, M., Galčíková, L., Slávik, M., Horváthová, M., and Mészáros, A. (2019). Soft-constrained robust model predictive control of a plate heat exchanger : Experimental analysis. *Energy*, 180 :303 – 314.
- Percebois, J. (2013). The French Paradox. In *Evolution of Global Electricity Markets*, pages 59–91. Elsevier.
- Poulain, F. and Praly, L. (2010). Robust asymptotic stabilization of nonlinear systems by state feedback. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(14) :653 – 658. 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems.
- Praly, L., Ortega, R., and Kaliora, G. (2001). Stabilization of nonlinear systems via forwarding mod LgV. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46 :1461 – 1466.
- Ramirez Estay, H. (2012). *Control of irreversible thermodynamic processes using port-Hamiltonian systems defined on pseudo-Poisson and contact structures*. PhD thesis, Lyon 1. Thèse de doctorat dirigée par Maschke, Bernhard et Sbarbaro, Daniel.
- Ranganayakulu, C. and Seetharamu, K. (2018). *Compact Heat Exchangers : Analysis, Design and Optimization using FEM and CFD Approach*. Wiley-ASME Press Series. Wiley.
- Rawlings, J. B. and Stewart, B. T. (2008). Coordinating multiple optimization-based controllers : New opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, 18(9) :839 – 845. Selected Papers From Two Joint Conferences : 8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems and the 10th Conference Applications in Biotechnology.
- Richalet, J., Darure, T., and Mallet, J. (2014). Predictive functional control of counter current heat exchangers. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :5345 – 5350. 19th IFAC World Congress.
- Roetzel, W., Luo, X., and Chen, D. (2020a). Chapter 1 - heat exchangers and their networks : A state-of-the-art survey. In Roetzel, W., Luo, X., and Chen, D., editors, *Design and Operation of Heat Exchangers and their Networks*, pages 1 – 12. Academic Press.

- Roetzel, W., Luo, X., and Chen, D. (2020b). Chapter 3 - steady-state characteristics of heat exchangers. In *Design and Operation of Heat Exchangers and their Networks*, pages 71–147. Elsevier.
- Roetzel, W., Luo, X., and Chen, D. (2020c). Chapter 5 - optimal design of heat exchangers. In *Design and Operation of Heat Exchangers and their Networks*, pages 191–229. Elsevier.
- Roetzel, W., Luo, X., and Chen, D. (2020d). *Design and Operation of Heat Exchangers and their Networks*. Academic Press.
- Sandler, S. I. (1999). *Chemical and Engineering Thermodynamics*. Third edition, Wiley and Sons.
- Scattolini, R. (2009). Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control - A review. *Journal of Process Control*, 19(5) :723 – 731.
- Scheuermann, T. M., Kotyczka, P., Zanota, M.-L., Pitault, I., Louati, H., and Maschke, B. (2019). Numerical approximation of heat transfer on heterogenous media. *PAMM*, 19(1) :e201900372.
- Shah, R. and Sekulic, D. (2003). *Fundamentals of Heat Exchanger Design*. Wiley.
- Sinkovic, V. and Lovrek, I. (2000). Generic model of a mobile agent network suitable for performance evaluation. In *KES'2000. Fourth International Conference on Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems and Allied Technologies. Proceedings (Cat. No.00TH8516)*, volume 2, pages 675–678 vol.2.
- Sontag, E. D., Wang, Y., and Megretski, A. (2009). Input Classes for Identifiability of Bilinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :195–207.
- Sridhar, U. M., Govindarajan, A., and Rhinehart, R. R. (2016). Demonstration of leapfrogging for implementing nonlinear model predictive control on a heat exchanger. *ISA Transactions*, 60 :218 – 227.
- Sutagundar, A. and Sangulagi, P. (2021). Fog computing based information classification in sensor cloud-agent approach. *Expert Systems with Applications*, 182 :115232.
- Tan, Y., Nešić, D., Mareels, I. M. Y., and Astolfi, A. (2009). On global extremum seeking in the presence of local extrema. *AUTOMATICA*, 45(1) :245–251.
- Tuckerman, D. and Pease, R. (1981). High-performance heat sinking for VLSI. *IEEE Electron Device Letters*, 2(5) :126–129.

- van der Schaft, A. (2017). Modeling of physical network systems. *Systems & Control Letters*, 101 :21 – 27. Jan C. Willems Memorial Issue, Volume 2.
- Varga, E., Hangos, K., and Szigeti, F. (1995). Controllability and observability of heat exchanger networks in the time-varying parameter case. *Control Engineering Practice*, 3(10) :1409 – 1419.
- Waide, P., Lebot, B., and Hinnells, M. (1997). Appliance energy standards in europe. *Energy and Buildings*, 26(1) :45–67.
- Wang, L., Chen, S., and Ma, K. (2016). On stability and application of extremum seeking control without steady-state oscillation. *AUTOMATICA*, 68(1) :18–26.
- Wang, Y., You, S., Zheng, W., Zhang, H., Zheng, X., and Miao, Q. (2018). State space model and robust control of plate heat exchanger for dynamic performance improvement. *Applied Thermal Engineering*, 128 :1588 – 1604.
- Zavala-Río, A., Astorga-Zaragoza, C., and Hernández-González, O. (2009). Bounded positive control for double-pipe heat exchangers. *Control Engineering Practice*, 17(1) :136 – 145.
- Zhou, B., Liao, X., Huang, T., Wang, H., and Chen, G. (2016). Distributed multi-agent optimization with inequality constraints and random projections. *Neurocomputing*, 197 :195 – 204.
- Zitte, B., Hamroun, B., Astolfi, D., and Couenne, F. (2020). Robust Control of a Class of Bilinear System by Forwarding : Application to Counter Current Heat Exchanger. *IFAC-PapersOnLine*.
- Zitte, B., Hamroun, B., Couenne, F., and Pitault, I. (2018). Representation of heat exchanger networks using graph formalism. *IFAC-PapersOnLine*, 51(3) :44 – 49. 6th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2018.
- Zitte, B., Hamroun, B., Couenne, F., and Pitault, I. (2019). Port Hamiltonian representation of heat exchanger. *IFAC-PapersOnLine*.

Annexe A

Articles de conférence

- A.1 Représentation d'un réseau d'échangeurs de chaleur basée sur le formalisme des graphes

Representation of heat exchanger networks using graph formalism

B. Zitte B. Hamroun F. Couenne I. Pitault

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, LAGEP UMR
5007, VILLEURBANNE, France (e-mails:
{bertrand.zitte;boussad.hamroun;francoise.couenne;
isabelle.pitault}@univ-lyon1.fr).

Abstract:

This contribution addressed the systematic representation of heat exchanger networks thanks to graph formalism. The energy representation of one heat exchanger is presented based on the incidence matrices of the graph related to heat transfer and the graph of the heat convection. Then the global heat exchanger network is obtained from the heat exchanger graph models as well as the incidence matrices of the interconnection obtained by adding additional vertices corresponding to the connector elements. The Port Hamiltonian representation of the heat network exchanger is given in the case of constant pressure. Then we show the incremental passivity of one compartment of the heat exchanger.

© 2018, IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Port Hamiltonian systems, Thermal systems, Network, Passivity

1. INTRODUCTION

Cogeneration plants use primal energy to produce electricity and recover the waste heat at the same time. Cogeneration systems are also called "Combined Heat and Power" (CHP) systems. The recovered thermal energy can be used for many and varied uses like cooling, heating or producing additional electricity through Organic Rankine Cycle Wang et al. (2017). Thus the global energy efficiency of the cogeneration system is clearly higher than the electrical one, which generally does not exceed 40%.

In general waste heat energy is recovered through heat exchangers.

Some thermodynamic processes like, heat pumps, absorption chillers, desalination processes can be part of the cogeneration process. All these components form what we can call a "thermal grid". As a first and simple approach of modeling of this thermal grid, consists to represent it as a heat exchangers network which brings thermal energy from sources (waste heat) and provides some consumers (end utilities).

One important issue for cogeneration is a good control of these heat exchangers network face with intermittent electrical power generation (e.g. solar energy), intermittent demand or any perturbations occurring in some devices of the plant Wang et al. (2017); Calise et al. (2017, 2015); Weber et al. (2014); Sun et al. (2015); Scholten et al. (2017). One interesting way to respond these issues is the use of the port Hamiltonian framework by the use of passivity based control method (Ortega et al. (2002)). This framework is intensively used in electrical, mechanical and electromechanical domains since the initial works of Maschke et al. (2000) has also been used with success

for some thermodynamical systems Hoang et al. (2011); Ramirez et al. (2016); Zhou et al. (2017).

In this contribution we present in section 2 the model of the heat exchanger using graph representation thank to the adjacency and Laplacian matrices of the graph of the heat transfer flux and the graph of the convective heat flux of the spatial compartment representation of the heat exchanger. Identifying the network with a directed graph we associate with every vertex of the graph a state variable corresponding to storage, and with every edge the flow variable. Thanks to this graph representation, the energy balance of the heat exchanger is proposed. Then in section 3, the heat exchanger network model is presented on a simple series-parallel network using the incidence matrix of the heat exchanger network. It is constructed based on the subgraph related to each exchanger and the graphic representation of the interconnection where the interconnections are based on some connector vertices. The enthalpy model of any network is then proposed. In section 4 we present the Port Hamiltonian representation of the heat exchanger. This result is the first step towards the Port Hamiltonian representation of the network of heat exchangers. Finally in section 5 we show the incremental passivity of one compartment of the heat exchanger in the case of constant pressure.

2. DYNAMIC MODELING A HEAT EXCHANGER

We will consider a counter-current heat exchanger. For simplicity we will consider that the hot stream and the cold stream are divided in 3 homogeneous compartments as represented in Figure 1. The pressure P is assumed to be constant and uniform. Moreover we will assume that there is no energy accumulation in the wall between the two fluids. The heat transfer coefficients are constant. The hot and cold fluids remain in a single ideal fluid phase. Their

density ρ and heat capacity c_p are assumed to be constant. Finally there is no heat exchange with the environment through the wall.

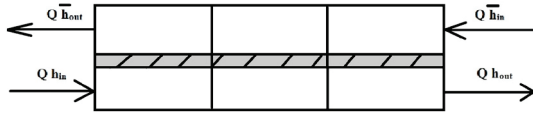


Fig. 1. Counter current exchanger with inlet and outlet heat flux

The compartment representation of the heat exchanger is given in Figure 2. The red and green arrows correspond to the convective flows and inlet convective ones respectively. The heat transfer flux is represented by the yellow arrow.

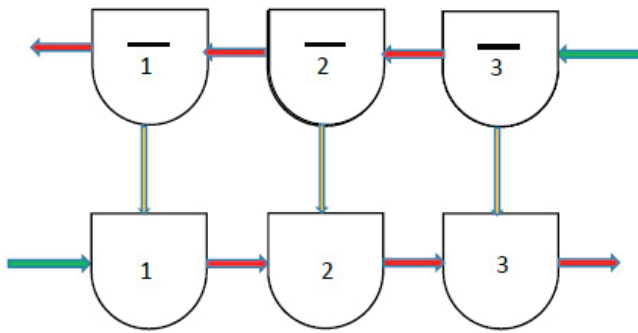


Fig. 2. Counter current exchanger with 3 compartments

2.1 Energy balance on compartment 1

Let us consider the compartment 1 containing a constant volume V of liquid (m^3) of constant density ρ and constant pressure P . This implies that the inlet and outlet flow rates change instantaneously in the same manner. Let us denote by h the specific enthalpy of the fluid. The total energy present in the compartment follows the same dynamics as the enthalpy since the term PV remains constant. For this reason we will write the enthalpy balance equation. The total amount of enthalpy H_1 in the compartment 1 is given by:

$$H_1 = \rho V h(T_1) \quad (1)$$

with h the specific enthalpy (J/kg). The specific enthalpy is assumed to be as :

$$h(T) = c_p(T - T_{ref}) + h_{ref} \quad (2)$$

with T the temperature of the fluid under consideration (K), T_{ref} and h_{ref} the thermodynamic reference values associated to the fluids.

With the previous assumptions, the energy balance is obtained as (see Sandler (1999)):

$$\dot{H}_1 = \lambda(\bar{T}_1 - T_1) + Qh_{in} - \frac{Q}{\rho V}H_1 \quad (3)$$

with λ the heat transfer coefficient ($J/K/s$), Q the mass flow rate (kg/s) and $h_{in} = h(T_{in})$ the specific enthalpy at the inlet. The right first term corresponds to the energy transfer flux with the cold compartment of temperature \bar{T}_1 . The second and the third terms correspond to the inlet

convective flux and outlet convective flux respectively. Assuming the fluid homogeneity in each compartment, the outlet enthalpy is equal to the inside one.

2.2 Graph representation of a heat exchanger

First let us give the energy balance over each compartment of the heat exchanger:

$$\begin{cases} \dot{H}_1 = \frac{\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_1 - H_1) + Qh_{in} - \frac{Q}{\rho V}H_1 \\ \dot{H}_2 = \frac{\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_2 - H_2) + \frac{Q}{\rho V}H_1 - \frac{Q}{\rho V}H_2 \\ \dot{H}_3 = \frac{\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_3 - H_3) + \frac{Q}{\rho V}H_2 - \frac{Q}{\rho V}H_3 \\ \dot{\bar{H}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_1 - H_1) + \frac{Q}{\rho V}\bar{H}_2 - \frac{Q}{\rho V}\bar{H}_1 \\ \dot{\bar{H}}_2 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_2 - H_2) + \frac{Q}{\rho V}\bar{H}_3 - \frac{Q}{\rho V}\bar{H}_2 \\ \dot{\bar{H}}_3 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p}(\bar{H}_3 - H_3) + \frac{Q}{\rho V}\bar{h}_{in} - \frac{Q}{\rho V}\bar{H}_3 \end{cases} \quad (4)$$

The objective is to rewrite these equations using incidence and laplacian matrices of the graphs representing the different phenomena (heat transfer and convection) appearing in the process. For this purpose let us recall some basic definition about graphs.

Preliminaries A directed graph G consists of a pair (V_e, \mathcal{E}) , where V_e is the vertex set and $\mathcal{E} \subseteq V_e \times V_e$ is the edge set formed by ordered pairs of vertices.

Let G be a directed graph with n vertices, m edges. This directed graph without self loop is completely characterized its incidence matrix B .

Definition: The matrix $B = [b_{ij}]$ is a $n \times m$ matrix associated with a chosen orientation of the edges of G in which for each $e = (v_i, v_j)$, one of the vertices v_i or v_j is taken as positive end and the other as negative end, and is defined by: $b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{if the edge } e \text{ is directed from } v_i \text{ to } v_j \\ 1, & \text{if the edge } e \text{ is directed from } v_j \text{ to } v_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

Several graphic representations of the heat exchanger are possible. First we present the graph representation by distinguishing the convective flow terms and the heat transfer flow terms. Secondly we present an alternative graph representation by considering a global incidence matrix including convective and heat transfer flow terms.

Graph representation Let us consider the graph of the exchanger as presented in Figure 3.

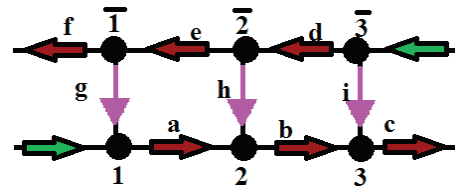


Fig. 3. Graph of the Exchanger

In this graph, the vertex corresponds to the accumulation of enthalpy and the edge to the enthalpy flow. The green and red big arrows correspond to inlet and internal convective flow respectively. The small arrow corresponds to heat transfer flow.

Let us consider two graphs: the first one corresponding to heat transfer with incidence matrix B_t and the other one to convective flux with incidence matrix B_c . The incidence matrices are given by :

$$B_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Then the energy balance equations become:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = (-B_t R_t B_t^T) \mathbf{H} + B_c R_c \mathbf{H} + Gu \\ y_1 = C \mathbf{H} = \begin{bmatrix} Q h_3 \\ \bar{Q} \bar{h}_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

where $\mathbf{H}^t = (H_1 \ H_2 \ H_3 \ \bar{H}_1 \ \bar{H}_2 \ \bar{H}_3)$ is the enthalpy vector, $G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $u = \begin{bmatrix} Q h_{in} \\ \bar{Q} \bar{h}_{in} \end{bmatrix}$. R_t and R_c are diagonal matrices related to heat transfer and convective flows respectively, and given by:

$$R_t = \frac{1}{\rho V c_p} R \text{ with } R = \text{diag} [\lambda, \lambda, \lambda]$$

and

$$R_c = \frac{1}{\rho V} \text{diag} [Q, Q, Q, \bar{Q}, \bar{Q}, \bar{Q}]$$

with $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{Q}{\rho V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{Q}}{\rho V} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and with the notation $h_i = \frac{H_i}{\rho V}$.

The Laplacian matrix $B_t R_t B_t^T$ corresponds to the irreversible phenomena: the heat transfer.

Remark 1. The energy balance can be alternatively be written as:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (-B_t R B_t^T) \mathbf{H} + B_c R_c \mathbf{H} + Gu \quad (6)$$

Remark 2. Alternative Graph representation : In a first instance, it would be possible to consider all the phenomena on a single graph. The incidence matrix of this graph is given by

$$B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array}$$

The energy balances can be written as:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = -B R_{tc} (B - E)^T \mathbf{H} + Gu \quad (7)$$

where R_{tc} is a diagonal matrix with strictly positive diagonal elements:

$$R_{tc} = \frac{1}{\rho V} \text{diag} \left[Q, Q, Q, \bar{Q}, \bar{Q}, \bar{Q}, \frac{\lambda}{c_p}, \frac{\lambda}{c_p}, \frac{\lambda}{c_p} \right]$$

$$E = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

This representation has interest if the control vector is the inlet temperatures. But its main drawback is that the weighed Laplacian $B R_{tc} B^T$ has no significant physical meaning. It does not correspond to bilateral relations as stated in van der Schaft and Maschke (2008) since it is not the case for convective terms. So its use for passivity analysis is problematic.

3. DYNAMIC REPRESENTATION OF A HEAT EXCHANGERS NETWORK

In the co-generation systems (see Wang et al. (2017); Calise et al. (2017, 2015); Weber et al. (2014); Sun et al. (2015)), the exhaust gas temperature at the fuel or gas engine outlet can get up to 500° C and the one downstream of the waste heat recovering can get down 120°C for methane engine and 70°C for fuel engine (that corresponds to the condensation temperature of water contained in exhaust gases). To avoid the distortion of heat exchanger material due to an considerable inside temperature gradients, heat exchangers in series are advised to recover waste heats at several temperature levels. Some heat exchangers can also be designed in parallel at a same temperature level to have more degrees of freedom. This set-up would not be optimal in local minimal entropy lost point of view but would allow a better global heat recovery.

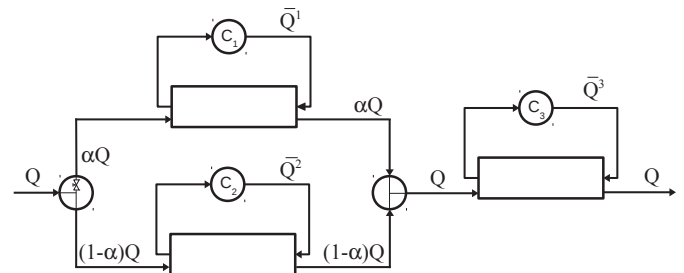


Fig. 4. Graph of the network of heat exchangers

First we consider the example of the network as proposed in the Figure 4. This network has two heat exchangers in parallel (E^1 and E^2) and then one in series (E^3); This network will furnish to clients C_1 , C_2 and C_3 some heated water at different temperatures and different quantity. We assume that the three exchangers are modeled with three compartments so the convection and heat transfer

incidence matrices B_c and B_t of the three exchangers are the same. α is a positive coefficient ($0 \leq \alpha \leq 1$) of distribution of the mass flow rate Q

3.1 Enthalpy model of the network of Fig. 4

Let us consider the enthalpy vector \mathbf{H} formed by the three enthalpy vectors \mathbf{H}^1 , \mathbf{H}^2 and \mathbf{H}^3 of the three heat exchangers. Let us call $A^i = -B_t R_t^i B_t^T + B_c R_c^i$ and $C^i = \frac{Q^i}{\rho V}$.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{H}}^1 \\ \dot{\mathbf{H}}^2 \\ \dot{\mathbf{H}}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{H}^2 \\ \mathbf{H}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{H}^2 \\ \mathbf{H}^3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

with $u^i = \begin{pmatrix} Q^i h_{in}^i \\ Q^i \bar{h}_1^i \end{pmatrix}$ and $y^i = \begin{pmatrix} Q^i h_3^i \\ Q^i \bar{h}_1^i \end{pmatrix}$ for $i=1$ to 3.

The interconnection are only on the section of compartments 1 to 3 corresponding to the first control u_1^i and output y_1^i of the different exchangers. The network can be represented as given in Figure 5. In this graph two

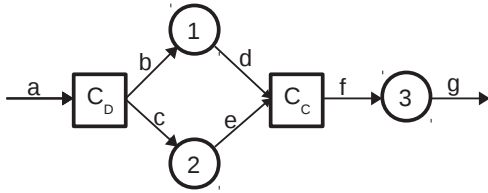


Fig. 5. Simplified graph of the heat exchangers network

connector vertices are represented: one corresponds to the distribution of heat fluxes C_D , the second to the collection of heat fluxes C_C . Let us consider the incidence matrices of these two connectors :

$$B_{C_D} = \begin{bmatrix} & a & b & c \\ 1 & -1 & -1 & \end{bmatrix}$$

$$B_{C_C} = \begin{bmatrix} & d & e & f \\ 1 & 1 & -1 & \end{bmatrix}$$

This incidence matrices are presented here without the weighting due to the splitting of the flow rate in α and $1-\alpha$ parts. The weighting appears below thanks the diagonal

$$\text{matrix } \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

The heat flux corresponding to edge a , b and c are Qh_{in} , u_1^1 and u_1^2 respectively. The connector corresponds to some distribution of the convective heat flux with the constitutive equations (given with the notation of the example) as

$$B_{C_D} \begin{pmatrix} Qh_{in} \\ u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix} = B_{C_D} \mathcal{P} Q \begin{pmatrix} h_{in} \\ h_{in} \\ h_{in} \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

The temperature at the connector is T_{in} . Qh_{in} represents the input flux of the network.

The second connector C_C corresponds to the collection of heat fluxes corresponding to edges d , e , f that are y_1^1 , y_1^2 and u_1^3 respectively. Its constitutive relation is given by:

$$B_{C_C} \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ u_1^3 \end{pmatrix} = B_{C_C} \mathcal{P} Q \begin{pmatrix} h_3^1 \\ h_3^2 \\ h_c \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

For this connector we obtain the specific enthalpy h_c . From the constitutive equation (2), the output temperature of the connector T_c is deduced.

Finally the edge g corresponds to the flux $y_1^3 = Qh_3^3$ which is the output of the network.

Gathering equations (8), (10) and (9) the incidence matrix of the global graph of the system can be obtained as well as the global representation of the heat exchangers network.

3.2 Enthalpy model of a general network

The reasoning can be generalized to any heat exchanger network. Let us assume a network of N heat exchangers. The model is then given by:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{H}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{H}}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & A^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & C^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^N \end{pmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

For the heat exchanger network let us consider connectors between each exchanger and also at the inputs and the outputs of the graph. These connectors are of type collectors or distributors with or without weighting. The input

and output vectors $\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix}$ can be extended if

necessary with the inputs and output of the graph (as Qh_{in} in the previous example) if these latter are not the inputs and outputs of exchangers. Let us note these vectors as U and Y . Then the constitutive relations of the connectors can be written as :

$$B_1 \phi_1 U + B_2 \phi_2 Y = 0 \quad (12)$$

The matrices B_1 and B_2 are parts of the incidence matrices of the connectors corresponding to inputs and outputs respectively; the matrices ϕ_1 , ϕ_2 permit to point to the right input, output with possible weighing.

4. THE PORT HAMILTONIAN REPRESENTATION OF THE EXCHANGER

In this section we present the port hamiltonian representation of one exchanger. Let us denote by \mathbf{S} the entropy vector $\mathbf{S}^t = (S_1 \ S_2 \ S_3 \ \bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \bar{S}_3)$.

Let us consider the Hamiltonian $\mathcal{H} = -\mathbf{1}^T \mathbf{S}$ with $\mathbf{1}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$. From thermodynamic consideration com-

ing from the Gibbs fundamental equation, the state vector is the enthalpy vector \mathbf{H} and the co vector $\nabla\mathcal{H}^T = -\left(\frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} \frac{1}{T_3} \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} \frac{1}{T_3}\right)$ with notation $\nabla. = \frac{\partial.}{\partial\mathbf{H}}$. Let us consider the vector $e_r^T = (e_{r_1} \ e_{r_2} \ e_{r_3} \ -e_{r_1} \ -e_{r_2} \ -e_{r_3})$ with $e_{r_i} = \frac{1}{T_i} - \frac{1}{\bar{T}_i}$ for $i=1$ to 3 and let us define the heat transfer vector f_r as $f_r^T = (f_{r_1} \ f_{r_2} \ f_{r_3} \ -f_{r_1} \ -f_{r_2} \ -f_{r_3})$ with $f_{r_i} = \frac{\lambda}{1-T} e_{r_i}$ for $i = 1$ to 3.

We obtain some Port Hamiltonian representation candidate :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{H}} \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_t \\ -B_t^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\mathcal{H} \\ f_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla W(\mathbf{H}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (13)$$

where $\nabla W(\mathbf{H})$ corresponds to the convective flow term $B_c R_c \mathbf{H}$. In the case as the mass flow is considered as an input the obtained representation is Port Hamiltonian as expected (see the alternative representation proposed in Ramirez et al. (2013)). In the case that the mass flow rate is considered as a constant parameter it has to be inserted in the port Hamiltonian structure.

5. TOWARDS THE PASSIVITY ANALYSIS OF ONE EXCHANGER

In order to study the passivity of this term we cannot use $\mathcal{H} = -\mathbf{1}^T \mathbf{S}$ as a storage function since it is not bounded from below. So we will use the shifted Hamiltonian around some steady state point that will have the nice property to be bounded from below and study incremental passivity of the heat exchanger Jayawardhana et al. (2007). This shifted Hamiltonian is nothing else than the thermodynamic availability as used in Ruszkowski et al. (2005); Hoang et al. (2013).

As a preliminary result we study this incremental passivity of one compartment that exchanges heat with the environment at temperature T_{ext} with the following energy balance:

$$\dot{H} = \lambda(T_{ext} - T) + Qh_{in} - Qh. \quad (14)$$

$-\frac{1}{T}$ is the co state variable $\nabla\mathcal{H}$ where in this simple case $\mathcal{H} = -S$ where S is the entropy of the compartment.

In order to write the shifted Hamiltonian let us recall some thermodynamical considerations. From Gibbs fundamental relation (de Groot and Mazur (1983)) and assumptions of the constant pressure and constant volume of matter with constant density, we have :

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{\mu}{T} dN \quad (15)$$

with μ the chemical potential and N the mole number.

We have $\nabla\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} \\ \frac{\mu}{T} \end{pmatrix}$. So from the Euler equation (de Groot and Mazur (1983)), the Hamiltonian \mathcal{H} is a function of the variables H and N

$$\mathcal{H}(H, N) = -\frac{1}{T}H + \frac{\mu}{T}N \quad (16)$$

So let us consider the shifted Hamiltonian :

$$\mathcal{A}(H, N) = \mathcal{H}(H, N) - \begin{pmatrix} H - H^* \\ N - N^* \end{pmatrix}^T \nabla\mathcal{H}(H^*, N^*) - \mathcal{H}(H^*, N^*) \quad (17)$$

where the superscript * corresponds to steady state H^* . Obviously we have $N = N^*$. So the shifted Hamiltonian can be rewritten as:

$$\mathcal{A}(H, N) = \left(\frac{-1}{T} - \frac{-1}{T^*}\right)H + \left(\frac{\mu}{T} - \frac{\mu^*}{T^*}\right)N \quad (18)$$

It can be checked that this shift Hamiltonian is strictly positive since it is the opposite of the difference between the entropy that is strictly concave and the tangent plan of the entropy at the steady state (H^*, N^*) (see Hoang et al. (2013) for details).

The system (14) can be written with $g^T = \begin{pmatrix} \lambda \\ Qc_p \end{pmatrix}$ and $u = \begin{pmatrix} T_{ext} \\ T_{in} \end{pmatrix}$ as:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -(\lambda + Qc_p)T + gu \\ &= f(H) + gu \end{aligned} \quad (19)$$

We define two conjugated outputs as follows: $y = g^T \nabla_H \mathcal{H}$.

The steady state obtained from (14) is given by $h^* = c_p(T^* - T_{ref}) + h_{ref}$ with $T^* = \frac{gu^*}{\lambda + Qc_p}$.

Let us define the incremental system with respect to the steady state H^* as:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= f(H) - f(H^*) + g\tilde{u} \\ &= -(\lambda + Qc_p)(T - T^*) + g\tilde{u} \\ \tilde{y} &= g^T \nabla \mathcal{A} \end{aligned} \quad (20)$$

with $\tilde{u} = u - u^*$.

In the remaining of the section we show that (20) is passive with respect to \mathcal{A} . From thermodynamics (see Ruszkowski et al. (2005); Hoang et al. (2013)) we have

$$\dot{\mathcal{A}} = \left(\frac{-1}{T} - \frac{-1}{T^*}\right)\dot{H} + \left(\frac{\mu}{T} - \frac{\mu^*}{T^*}\right)\dot{N} \quad (21)$$

So finally, since $\dot{N} = 0$, we obtain:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}} &= -\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^*}\right)\left((\lambda + Qc_p)(T^* - T) + g\tilde{u}\right) \\ &= \underbrace{-TT^*(\lambda + Qc_p)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^*}\right)^2}_{\leq 0} - \underbrace{\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^*}\right)g\tilde{u}}_{\tilde{y}^T} \end{aligned} \quad (22)$$

So we have

$$\dot{\mathcal{A}} \leq \tilde{y}^T \tilde{u} \quad (23)$$

So the model of a single compartment is incrementally passive.

6. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

In this contribution we propose the systematic mathematical representation of the energy balance of heat exchangers networks constructed from the incidence matrices of the graph of the heat fluxes. Furthermore we show that the

passivity of the incremental model of one generic compartment constituting the heat exchanger with respect to the thermodynamic availability. In perspective it remains to show that the total thermodynamic availability will permit to show the passivity of the incremental model of one exchanger.

REFERENCES

- Calise, F., Capuano, D., and Vanoli, L. (2015). A dynamic simulation and exergo-economic optimization of a hybrid solar-geothermal cogeneration plant. *Energies*, 8(4), 2606–2646.
- Calise, F., Dentice d’Accadia, M., Libertini, L., Quiriti, E., and Vicidomini, M. (2017). A novel tool for thermoeconomic analysis and optimization of trigeneration systems: A case study for a hospital building in Italy. *Energy*, 126, 64–87.
- de Groot, S. and Mazur, P. (1983). *Non-equilibrium thermodynamics*. Dover Publications inc. New York.
- Hoang, H., Couenne, F., Jallut, C., and Le Gorrec, Y. (2011). The port hamiltonian approach to modeling and control of continuous stirred tank reactors. *Journal of Process Control*, 21(10), 1449 – 1458.
- Hoang, N., Couenne, F., Jallut, C., and Le Gorrec, Y. (2013). Thermodynamics based stability analysis and its use for nonlinear stabilization of the cstr. *Computers & Chemical Engineering*, 58, 156 – 177.
- Jayawardhana, B., Ortega, R., Garca-Canseco, E., and Castaños, F. (2007). Passivity of nonlinear incremental systems: Application to PI stabilization of nonlinear RLC circuits. *Systems & Control Letters*, 56(910), 618 – 622.
- Maschke, B., Ortega, R., and van der Schaft, A.J. (2000). Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(8), 1498–1502.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., and Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment: passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 38, 585–596.
- Ramirez, H., Le Gorrec, Y., Maschke, B., and Couenne, F. (2016). On the passivity based control of irreversible processes: A port-hamiltonian approach. *Automatica*, 64, 105 – 111. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.07.002>.
- Ramirez, H., Maschke, B., and Sbarbaro, D. (2013). Irreversible port-hamiltonian systems: A general formulation of irreversible processes with application to the cstr. *Chemical Engineering Science*, 89, 223 – 234.
- Ruszkowski, M., Garcia-Osorio, V., and Ydstie, B. (2005). Passivity based control of transport reaction systems. *AIChE Journal*, 51, 3147–3166.
- Sandler, S. (1999). *Chemical and Engineering Thermodynamics*. Third edition, Wiley and Sons.
- Scholten, T., de Persis, C., and Tesi, P. (2017). Modeling and control of heat networks with storage: The single-producer multiple-consumer case. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25, 414–428.
- Sun, K., Tseng, C.T., Wong, D.S.H., Shieh, S.S., Jang, S.S., Kang, J.L., and Hsieh, W.D. (2015). Model predictive control for improving waste heat recovery in coke dry quenching processes. *Energy*, 80, 275–283.
- van der Schaft, A. and Maschke, B. (2008). Conservation laws and open systems on higher-dimensional networks. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008*, 799–804.
- Wang, X., Shu, G., Tian, H., Jing, P.L.D., and Li, X. (2017). Dynamic analysis of the dual-loop organic rankine cycle for waste heat recovery of a natural gas engine. *Energy Conversion and Management*, 148, 724–736.
- Weber, C., Berger, M., Mehling, F., Heinrich, A., and Nunez, T. (2014). Solar cooling with water ammonia absorption chillers and concentrating solar collector operational experience. *International Journal of Refrigeration*, 39, 57–76.
- Zhou, W., Hamroun, B., Couenne, F., and Le Gorrec, Y. (2017). Distributed port hamiltonian modeling for irreversible processes. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 23(1), 3–22.

A.2 Commande robuste d'une classe de systèmes bilinéaires basée sur le forwarding

Robust Control of a Class of Bilinear Systems by Forwarding: Application to Counter Current Heat Exchanger

Bertrand Zitte* Boussad Hamroun* Daniele Astolfi*
Françoise Couenne*

* *Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, LAGEPP UMR 5007, 43
boulevard du 11 novembre 1918, F-69100, Villeurbanne, France
(e-mail: (name.surname)@univ-lyon1.fr).*

Abstract: In this paper we propose a robust control for the counter-current heat exchanger. By using energy balance equations, we propose a model in structured bilinear system that allows to capture the heat transfer and convection phenomena. We study the problem of regulating the output temperature of the cold (or hot) fluid by controlling the flow rate of the hot (or cold) fluid. Using an integral action and a forwarding based control method, we derive a non linear control which achieves output temperature regulation. Numerical simulations confirm the effectiveness of the proposed control.

Copyright © 2020 The Authors. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>)

Keywords: Control, Bilinear Systems, Heat exchanger, Integral Action, Forwarding, Output Regulation.

1. INTRODUCTION

The heat exchanger (HEX) is a central module in processes where thermal energy is needed and transferred between two (or more) fluid streams. For example, they are intensively used in chemical industries Gu et al. (2015), urban heating and chilling networks Sakawa et al. (2002) and in the thermodynamic machines Wu et al. (2016).

A model for a HEX can be obtained in form of a distributed parameter system by writing energy balance equations, that is a partial differential equations (PDE) where the state variables are space and time dependent. Several authors addressed the control of a HEX based on a PDE model. See, among them, Maldi et al. (2009); Ozorio Cassol et al. (2019); Huhtala and Paunonen (2019). For control purposes, finite dimensional models are also often used in the literature, see, for instance, Varga et al. (1995); Scholten et al. (2017); Chandrashekar and Wong (1982). These models mainly fall into two classes. The first is based on thermodynamic phenomenological (possibly non linear) equations, while the second is based on a linear input output dynamic representation. The control problem of a HEX has been therefore addressed by using different techniques, that depend, in general, on the choice of the model. Among them, we recall the following: linearizing feedback, see Alsup and Edgar (1989); non linear output-based dynamical controller for a simplified one bi-compartmental cell model, see Zavala-Río et al. (2009); model predictive control techniques for a non linear model, see Sridhar et al. (2016). Furthermore, PID controllers are often used for the regulation of the output temperature of HEX Diaz-Mendez et al. (2014).

In this paper, we propose a new approach for the control of counter-current HEX based on a finite dimensional

model. The HEX is represented by a cascade of single-phase homogeneous compartments. The dynamical model is obtained by writing the energy balance equation on each compartment in which we considered heat convection, heat transfer phenomena between cold and hot fluids and uniform mass flow rates of the cold and hot streams. If the mass flow rate is considered as the manipulated variable for control, the HEX model turns out to be a bilinear system. Then, we analyze the bilinear dynamical model issued from energy balance equations and we show that it inherits some properties that will be used for control purpose. The control law is obtained by following the forwarding approach as proposed in Praly et al. (2001); Astolfi and Praly (2017). First, the HEX is extended by an integrator processing the desired output error. Then a stabilizing law for the extended system is derived by using a forwarding approach. The resulting bounded control law allows to stabilize asymptotically the system on an operating equilibrium while achieving the output regulation objective, such that the output temperature is regulated to a desired constant set-point. The derived control inherits a robustness property with respect to parameters variations as shown in Praly et al. (2001), Astolfi and Praly (2017).

Furthermore, the proposed saturated control law is given in terms of flow rate and the domain of attraction of the equilibrium is global with respect to the domain of validity of the model.

The paper is organized as follows. In Section 2, the bilinear model of the counter-current HEX is presented. In section 3 we recall the forwarding-based control approach in the context of output regulation on a general class of input affine non linear systems and its application to a class of bilinear systems. Then, in section 4, we give the main

results of the application of this control method on the HEX model. We present some numerical simulations in Section 5 and we derive conclusion and perspectives in Section 6.

2. MODELLING OF THE COUNTER-CURRENT HEAT EXCHANGER

We consider a counter-current HEX where single phase hot and cold stream exchange heat. We assume that the pressure P is constant and uniform along the HEX. Moreover we assume that there is no energy accumulation in the wall between the two fluids and there is no heat transfer through the external wall with the environment. We also assume that the convection velocity is uniform along the HEX. This convection velocity is considered as an input for the system, which achieves a spatially uniform steady-state in a neglected time scale compared to the heat transfer dynamics. Thus the dynamical model is derived mainly using an energy balance equation. Naturally, the HEX may be modelled by a distributed parameter system by writing where the state variables are space and time dependent. In this paper we consider a discrete space representation for the HEX. In doing so, the hot and cold side of the HEX are represented by a cascade of homogeneous and uniform compartments. Without loss of generality, and for simplicity of the presentation, we propose a spatial subdivision into 3 homogeneous compartments, see Figure 1. This space resolution may be arbitrarily chosen, while keeping valid the results of this paper.

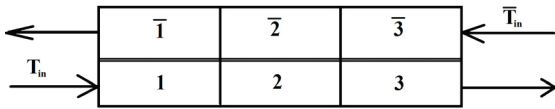


Fig. 1. Counter-current exchanger with inlet and outlet heat flux.

The heat transfer coefficient is denoted as λ ($J/K/s$) and considered constant. For the hot and the cold fluid, the mass density ρ (Kg/m^3) and heat capacity c_p ($J/Kg.K$) are assumed to be constant. The volume V (m^3) of the fluid in all the compartments is constant.

To derive the dynamical model, we write the energy balance equation for each compartment by taking into account an accumulation term, exchanged thermal energy through convection and heat transfer terms. Therefore, each compartment energy balance equation may be rewritten as a temperature differential equation, see Zitte et al. (2018) for more details. The dynamical model is given by

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_1 - T_1) + \frac{q}{\rho V} T_{in} - \frac{q}{\rho V} T_1 \\ \dot{T}_2 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_2 - T_2) + \frac{q}{\rho V} T_1 - \frac{q}{\rho V} T_2 \\ \dot{T}_3 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_3 - T_3) + \frac{q}{\rho V} T_2 - \frac{q}{\rho V} T_3 \\ \dot{\bar{T}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_1 - T_1) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_2 - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_1 \\ \dot{\bar{T}}_2 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_2 - T_2) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_3 - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_2 \\ \dot{\bar{T}}_3 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{T}_3 - T_3) + \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_{in} - \frac{\bar{q}}{\rho V} \bar{T}_3 \end{cases} \quad (1)$$

where $T_i, \bar{T}_i \in \mathbb{R}$ represent the temperature of the compartment i of the hot (cold) fluid and of the cold (hot) fluid, respectively, $T_{in}, \bar{T}_{in} \in \mathbb{R}$ represent the inlet temperatures of the hot (or cold) and cold (or hot) fluid respectively, and $q, \bar{q} \in \mathbb{R}$ (Kg/s) are the mass flow rate of the hot (or cold) fluid and of the cold (or hot) fluid respectively. By using the compact notation $x = (T_1, T_2, T_3, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3)^T \in \mathbb{R}^6$, $x_{in} = T_{in}$, $\bar{x}_{in} = \bar{T}_{in}$, we can thus compactly write the dynamical model (1) in the form

$$\dot{x} = Ax + (b_1 x_{in} + Bx)q + (\bar{b}_1 \bar{x}_{in} + \bar{B}x)\bar{q} \quad (2)$$

where

$$A = k \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \frac{1}{\rho V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

where $k = \frac{\lambda}{\rho V c_p}$. System (2) represents a multi-variable bilinear system with four degrees of freedom which are mass flow rates q, \bar{q} and inlet temperatures x_{in}, \bar{x}_{in} of the two fluids. To complete the system (2), we consider the outlet temperatures of the two fluids as a measured outputs $y, \eta \in \mathbb{R}$ defined as $y = \bar{T}_1$, $\eta = T_3$, that is

$$\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} x, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In the following section we recall the forwarding based approach for output regulation problem on a class of input affine non linear systems and applied on a class of bilinear systems. Then its application on the HEX will be given in section 4.

3. ROBUST CONTROL OF BILINEAR SYSTEMS VIA FORWARDING

Consider a non linear system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ \dot{z} = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

where $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ is the state and $u \in \mathbb{R}$ is the control input. A methodology that can be used to design a state-feedback control law ensuring asymptotic stability of the origin of (3) is the forwarding approach developed in Praly et al. (2001), Poulain and Praly (2010). For this, the following assumptions are needed.

Assumption 1. The origin of $\dot{x} = f(x)$ is globally asymptotically stable, that is, there exists a known positive definite Lyapunov function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfying

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0$$

for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Assumption 2. There exists a C^1 function $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\mathcal{M}(0) = 0$ and satisfying the following properties

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} f(x) = h(x), \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} g(0) \neq 0. \quad (4)$$

Then, under previous assumptions, we have the following result, Praly et al. (2001), Poulain and Praly (2010).

Proposition 1. Under Assumptions 1, 2, the origin of system (3) in closed loop with

$$u(x, z) = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} g(x) - (z - \mathcal{M}(x)) \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} g(x) \right] \quad (5)$$

is globally asymptotically stable.

Proof: A complete proof can be found in Praly et al. (2001) and references therein. We recall here only the main arguments. Using the following Lyapunov function

$$W(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}(z - \mathcal{M}(x))^2$$

with (4), we obtain: $\dot{W}(x, z) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - u(x, z)^2$.

Thus $\dot{W}(x, z) < 0$ for $(x, z) \neq (0, 0)$ and $\dot{W}(x, z) = 0$ only if $(x, z) = (0, 0)$ since $L_g \mathcal{M}(0) \neq 0$. \square

Now, let us specialize this result to bilinear systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_o x + (B_o x + b_o) u \\ \dot{z} &= C_o x \end{aligned} \quad (6)$$

with $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ and $u \in \mathbb{R}$.

Proposition 2. Suppose F_o is Hurwitz and $C_o F_o^{-1} b_o \neq 0$. Then, the origin of system (6) in closed loop with

$$u = -(2x^\top P - (z - Mx)^\top) M (B_o x + b_o) \quad (7)$$

is globally asymptotically stable, where M is a matrix satisfying

$$M F_o = C_o \quad (8)$$

and P is a positive definite matrix computed as solution to

$$P F_o + F_o^\top P = -Q \quad (9)$$

where Q is a positive definite matrix.

Proof: Since F_o is Hurwitz, Assumption 1 is verified with the Lyapunov function $V = x^\top P x$. Furthermore, with the definition of $M = C_o F_o^{-1}$ in (8), and the fact that $C_o F_o^{-1} b_o \neq 0$, also Assumption 2 is verified with $\mathcal{M}(x) = Mx$. Then, the result follows by Proposition 1 by noting that the control law (5) coincides with (7) since $L_g V = 2x^\top P (B_o x + b_o)$ and $L_g \mathcal{M} = M (B_o x + b_o)$. \square

Note that the condition $C_o F_o^{-1} b_o \neq 0$ corresponds to the fact that the transfer function $\mathcal{H}(s) = C_o (sI - F_o)^{-1} b_o$ has no zeros at the origin, see Astolfi and Praly (2017). Equivalently, this condition is verified if the following matrix $\begin{bmatrix} F_o & b_o \\ C_o & 0 \end{bmatrix}$ is full rank.

4. MAIN RESULTS

4.1 Control objective for heat exchanger

We consider as a manipulated control input the mass flow rate $u(t) = q(t)$ (even hot or cold fluid), and we

suppose that the three remaining degrees of freedom \bar{q} , x_{in} and \bar{x}_{in} are fixed at a nominal constant value (fixed operative conditions). The control objective is to regulate the output temperature $y = \bar{T}_1$ at a desired feasible temperature reference \bar{T}_1^* , denoted in the following as r . Towards potential unknown and bounded perturbations of the three fixed operative conditions \bar{q} , x_{in} and \bar{x}_{in} , we aim to derive a control law which ensures robust regulation. We assume that the the fluid flow rate $u(t)$ is bounded and satisfies

$$u \in \mathcal{D}_u := [u_m, u_M] = \{u \in \mathbb{R}^+ : u_m \leq u \leq u_M\}, \quad (10)$$

where u_m and u_M are the minimal and the maximal flow rate. In the rest of the paper, given a compact set \mathcal{A} , we define $\text{int}(\mathcal{A})$ as its interior, namely the set of all interior points of \mathcal{A} . According to this notation, we obtain, for instance,

$$\text{int}(\mathcal{D}_u) = (u_m, u_M) = \{u \in \mathbb{R}^+ : u_m < u < u_M\}.$$

Then system (2) can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + (Bx + b)u + G \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (11)$$

with $F = A + \bar{q}\bar{B}$, $b = b_1 x_{\text{in}}$ and $G = \bar{b}_1 \bar{x}_{\text{in}} \bar{q}$.

4.2 Analysis of the heat exchanger model

In this subsection we analyze three important properties of the HEX model (11) for fixed operative conditions. First, we show that for bounded inputs u and G , that is, input temperatures T_{in} , \bar{T}_{in} and flow rates q, \bar{q} in model (1), the trajectories of (11) evolve in an invariant compact set on which $x_i > 0$ for all $i = 1, \dots, 6$, see Lemma 1 below. Then, we analyze the properties of system (11) at a given equilibrium, showing the stability of a state matrix, see Lemma 2. Finally, we characterize the admissible output regulation set-points for system (12), see Lemma 3.

In the following, we consider, without loss of generality, the case in which T_{in} and \bar{T}_{in} are the hot inlet temperature and the cold inlet one respectively. We have the result:

Lemma 1. For any $u \in \mathcal{D}_u$ and fixed operative conditions, T_{in} and \bar{T}_{in} (equivalently x_{in} and \bar{x}_{in} , respectively) the compact domain $\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^6 : \bar{T}_{\text{in}} \leq x_i \leq T_{\text{in}}\}$ is invariant with respect to (11).

Proof: The sign of the dynamics on the boundary of the domain is analysed and we can show that the dynamics direction remains on the boundary or is such that it enters in the domain. \square

Now let x^* be the steady-state of system (11) at a given (constant) input u^* , defined by

$$\begin{aligned} 0 &= Fx^* + (Bx^* + b)u^* + G \\ y^* &= Cx^* \end{aligned} \quad (12)$$

with y^* being the corresponding output. We have the following result concerning the stability of the matrix $F + Bu^*$ in the domain of interest.

Lemma 2. For all $u^* \in \mathcal{D}_u$, with \mathcal{D}_u defined in (10), the matrix $\hat{F} = F + Bu^*$ defined as

$$\hat{F} = A + \bar{B} \bar{q} + B u^* = \begin{bmatrix} -k - u^* & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ u^* & -k - u^* & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & u^* & -k - u^* & 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 & -k - \bar{q} & \bar{q} & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -k - \bar{q} & \bar{q} \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -k - \bar{q} \end{bmatrix}$$

is Hurwitz, namely its eigenvalues have strictly negative real part.

Proof: Thanks to Gershgorin Theorem, see Gershgorin (1931), we know that eigenvalue of the matrix \hat{F} are in the union of the following circles:

$$\Phi_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \hat{F}_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 |\hat{F}_{ij}|\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

The previous expression gives 6 circles with two different centers: $c_1 = -k - u^*$ and $c_2 = -k - \bar{q}$ with radius $r_1 = k + u^*$ and $r_2 = k + \bar{q}$, respectively. This circles are on the left hand side of the complex plane including the origin. Hence all the eigenvalues of \hat{F} have non-positive real part. Furthermore, since the only point of the imaginary axes included in the circle is the origin, \hat{F} cannot have any imaginary eigenvalues with zero real part. Finally, it is possible to show that the origin cannot be an eigenvalue of \hat{F} since the only vector v satisfying $\hat{F}v = 0$ is $v = 0$. We conclude that all the eigenvalues of \hat{F} have strictly negative real parts. \square

Finally, we analyze the domain of admissible constant reference outputs for model (12).

Lemma 3. For any fixed operative condition \bar{q} , x_{in} and \bar{x}_{in} (equivalently, for any given fixed F and G), there exist $y_M > y_m > 0$ such that for any $r \in (y_m, y_M)$ there exists (x^*, u^*) , with $u \in \text{int}(\mathcal{D}_u)$, such that $y^* = r$, with y^* given by (12).

Proof: In view of Lemma 2, the matrix $\hat{F} = F + Bu^*$ is invertible for any $u^* \in \mathcal{D}_u$. Hence, for any u^* , there exists a unique equilibrium point satisfying x^* (12). It is computed as $x^* = -(F + Bu^*)^{-1}(bu^* + G)$. Hence, define the function $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as $\phi(u^*) = -C(F + Bu^*)^{-1}(bu^* + G)$. It is continuous on the compact set \mathcal{D}_u and it has a maximum and a minimum defined as $y_m = \inf_{u^* \in \mathcal{D}_u} \phi(u^*)$, $y_M = \sup_{u^* \in \mathcal{D}_u} \phi(u^*)$. Hence ϕ is surjective on $[y_m, y_M]$ and the proof is completed. \square

4.3 Robust temperature regulation

For the output temperature reference r , we define the output error variable as follows:

$$e = Cx - r. \quad (13)$$

Based on this error variable we define an extended system with output error integral dynamics as follows

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + (Bx + b)u + G \\ \dot{z} &= Cx - r. \end{aligned} \quad (14)$$

In order to design a stabilizing control law for system (14) achieving the temperature regulation objective $y^* = r$, we follow the forwarding design procedure highlighted in

Section 3. For this, let P be a symmetric positive definite matrix solution of

$$\hat{F}^\top P + P\hat{F} = (F + Bu^*)^\top P + P(F + Bu^*) = -Q, \quad (15)$$

for some symmetric positive definite matrix Q and for some operative point u^* to be fixed. Then, let M be a matrix solution of

$$M\hat{F} = M(F + Bu^*) = C, \quad (16)$$

again, for some operative point u^* to be fixed. Note that in light of invertibility of \hat{F} , M can be computed as $M = C\hat{F}^{-1}$. Finally, let us define the following saturation function $\text{sat}_{\mathcal{D}_u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u) = \begin{cases} u_m & \text{if } 0 < u \leq u_m, \\ u & \text{if } u_m < u \leq u_M, \\ u_M & \text{if } u_M \leq u. \end{cases} \quad (17)$$

The following theorem presents the main result of this paper.

Theorem 1. Let F, G be fixed, and select any desired temperature reference $r \in (y_m, y_M)$, with y_m, y_M given by Lemma 3. Let (x^*, u^*) be a solution to (12) with $y^* = r$, and let P, M computed according to (15) and (16), respectively. Then, for any initial condition $(x(0), z(0)) \in \text{int}(\mathcal{D}_x) \times \{0\}$, with \mathcal{D}_x given by Lemma 1, the corresponding trajectory of system (14) in closed loop with

$$u = \text{sat}_{\mathcal{D}_u} \left(u^* - \begin{bmatrix} 2(x - x^*)^\top P \\ -(z - M(x - x^*))^\top M \end{bmatrix} (Bx + b) \right) \quad (18)$$

satisfies $x(t) \in \mathcal{D}_x$ for all $t \geq 0$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$.

Proof: First, by applying the following change of coordinates $x \mapsto \tilde{x} := x - x^*$, we can rewrite system (11) as

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \hat{F}\tilde{x} + (B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*) \\ \dot{z} &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (19)$$

with $\hat{F} = A + \bar{q}\bar{B} + u^*B$ and $\hat{b} = b + Bx^*$, in which we used the relation $(Bx + b) = (B\tilde{x} + \hat{b})$. The control law (18) can be rewritten equivalently as follows

$$u = \text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z))$$

with the compact notation

$$\alpha(\tilde{x}, z) = (2\tilde{x}^\top P - (z - M\tilde{x})M)(B\tilde{x} + \hat{b}).$$

Now, by following the results of Propositions 1, 2 let us consider the following Lyapunov function for the extended system (19)

$$W(\tilde{x}, z) = \tilde{x}^\top P\tilde{x} + \frac{1}{2}(z - M\tilde{x})^2. \quad (20)$$

The derivative of W along the closed loop system is given by

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\tilde{x}^\top Q\tilde{x} + 2\tilde{x}^\top P(B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*) \\ &\quad + (z - M\tilde{x})^\top (C\tilde{x} - M\hat{F}\tilde{x} - M(B\tilde{x} + \hat{b})(u - u^*)) \\ &= -\tilde{x}^\top Q\tilde{x} + U(\tilde{x}, z, u) \end{aligned} \quad (21)$$

where we defined

$$U(\tilde{x}, z, u) = \alpha(\tilde{x}, z) [\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) - u^*].$$

Next, we show that $U(\tilde{x}, z, u) < 0$ for all \tilde{x}, z, u . For this we consider the following three cases, in which we recall that $u_m < u^* < u_M$.

- 1) $\alpha(\tilde{x}, z) \in [u^* - u_M, u^* - u_m]$. In this case,

$$\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u^* - \alpha(\tilde{x}, z)$$
 and therefore $U(\tilde{x}, z, u) = -\alpha(\tilde{x}, z)^2$.
- 2) $\alpha(\tilde{x}, z) \in [u^* - u_m, +\infty)$. In this case, we have $\alpha(\tilde{x}, z) > 0$ and moreover, $-\alpha(\tilde{x}, z) < u_m - u^*$. We compute $\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u_m$, from which we obtain

$$U(\tilde{x}, z, u) = \alpha(\tilde{x}, z)(u_m - u^*) = -\alpha(\tilde{x}, z)(u^* - u_m) < 0$$
 since $\alpha(\tilde{x}, z) > 0$ and $(u^* - u_m) > 0$.
- 3) $\alpha(\tilde{x}, z) \in (-\infty, u^* - u_M]$. In this case, we have $\alpha(\tilde{x}, z) < 0$ and moreover, $-\alpha(\tilde{x}, z) > u_M - u^*$. We compute $\text{sat}_{\mathcal{D}_u}(u^* - \alpha(\tilde{x}, z)) = u_M$ and therefore

$$U(\tilde{x}, z, u) = \alpha(\tilde{x}, z)(u_M - u^*) < 0$$
 since $\alpha(\tilde{x}, z) < 0$ and $(u_M - u^*) > 0$.

Therefore, by combining the above three cases, we obtain $U(\tilde{x}, z, u) \leq -|\alpha(\tilde{x}, z)| \min\{|\alpha(\tilde{x}, z)|, (u^* - u_m), (u_M - u^*)\}$ and therefore

$$\dot{W} \leq -\tilde{x}^\top Q \tilde{x} - |\alpha(\tilde{x}, z)| \min\{|\alpha(\tilde{x}, z)|, (u^* - u_m), (u_M - u^*)\}.$$

Hence, by using LaSalle invariance principle, we conclude that solutions converge to the largest invariant set contained in $\mathcal{I} = \{(\tilde{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \tilde{x} = 0, \alpha(\tilde{x}, z) = 0\}$. In the set \mathcal{I} , the z -dynamics satisfy

$$\dot{z} = 0, \quad zM\hat{b} = 0. \quad (22)$$

By using the expression of M , we have $M\hat{b} = C\hat{F}^{-1}\hat{b}$. We recall that \hat{F} is full rank and that the expressions of \hat{b} and C are given by

$$\hat{b}^\top = \begin{bmatrix} (x_{\text{in}} - x_1^*) & (x_1^* - x_2^*) & (x_2^* - x_1^*) & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Therefore, it can be verified that for all $x^* \in \text{int}(\mathcal{D}_x)$ (excluding by fact the case where $x_{\text{in}} = x_1^* = x_2^* = x_3^*$)

the following matrix $\begin{bmatrix} \hat{F} \hat{b} \\ C \ 0 \end{bmatrix}$ is full rank and equivalently

$M\hat{b} \neq 0$. We conclude that the largest invariant set contained in \mathcal{I} is the origin $(\tilde{x}, z) = (0, 0)$. This shows that the origin is globally asymptotically stable.

Now, recall that the control law u is saturated in \mathcal{D}_u . Therefore, in light of Lemma 1, the set \mathcal{D}_x is invariant for solution of the closed-loop system (14), (18). Hence, any solution starting in $\text{int}(\mathcal{D}_x)$ remains in \mathcal{D}_x for all forward times and converges asymptotically to the equilibrium $(\tilde{x}, z) = 0$. Finally, on this equilibrium, $\dot{z} = 0$ and therefore $r = Cx^*$, which concludes the proof. \square

It is important to note that that even if x^*, u^* are explicitly used in the control law (18), all the results are robust to small variations of F, b and G (due to variations of the operative conditions) thanks to the robustness properties of the forwarding control method shown in Poulain and Praly (2010), Astolfi and Praly (2017),

5. SIMULATIONS

The following simulations are done on Matlab software. Numerical values are listed in Table 1. We choose the hot stream flow rate as the control input variable u and the output temperature of the cold stream \bar{T}_1 as the controlled output. Initial state vector corresponds to the steady state for $u = 0.17u_M$.

$\lambda = 10\text{J/K/s}$	$\rho = 997\text{Kg/m}^3$
$V = 0.002\text{m}^3$	$c_p = 4185\text{J/Kg/K}$ (for water)
$\bar{q} = 0.02\text{Kg/s}$	$u_M = 0.05\text{Kg/s}$
$T_{\text{in}} = x_{\text{in}} = 360\text{K}$	$\bar{T}_{\text{in}} = \bar{x}_{\text{in}} = 300\text{K}$

Table 1. Values of the parameters of the HEX

5.1 Output regulation simulation results

Figure 2 presents the output temperature \bar{T}_1 of the HEX (blue) and the regulation temperature reference (green). Figure 3 shows the corresponding closed loop control input expressed as a fraction of the maximal flow rate u_M .

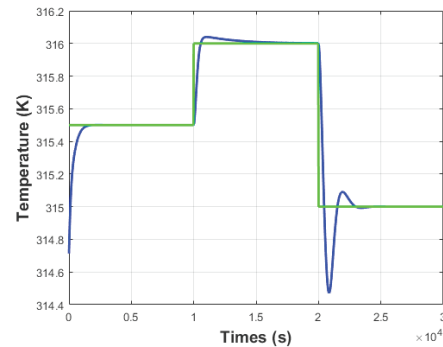


Fig. 2. Output (blue) and reference (green) temperatures

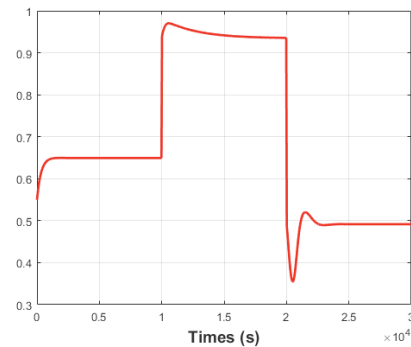


Fig. 3. Closed loop control as a fraction of u_M

The fixed closed loop simulation scenarios start at $t = 0$ with temperature target fixed to $\bar{T}_1 = 315.5\text{K}$. This reference is switched to $\bar{T}_1 = 316\text{K}$ at $t = 10000\text{s}$, and finally to $\bar{T}_1 = 315\text{K}$ at $t = 20000\text{s}$. We can observe the effectiveness of the the designed control law (18) and the effective asymptotic regulation of the output temperature.

5.2 Robustness: simulation results

Hereafter, we propose one simulation scenario to emphasize some robustness properties of the designed control law towards disturbed inlet temperature T_{in} . The results of the closed loop dynamics for a perturbation on the temperature T_{in} introduced at $t = 10000\text{s}$ are depicted in Figures 4 and 5, showing the rejection of this constant perturbation by the controller.

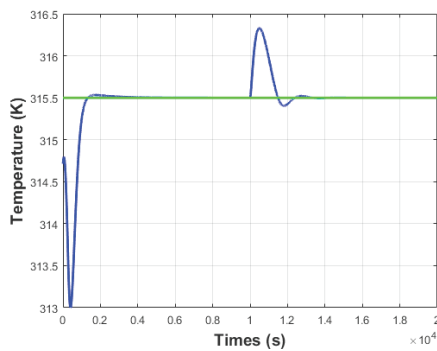


Fig. 4. Output (blue) and reference (green) temperatures

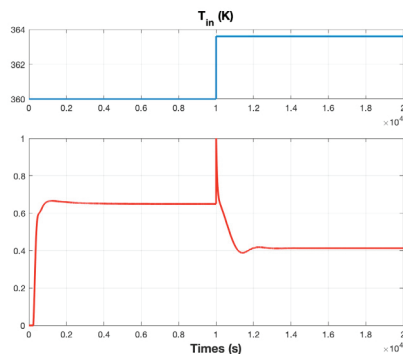


Fig. 5. Disturbed input T_{in} and the closed loop control as a fraction of u_M

6. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

We proposed a robust temperature output regulation control based on a bilinear dynamical model of the counter-current HEX. This control law is derived using forwarding approach through error integral extended system. Simulation results confirm the effectiveness and the robustness of the proposed control.

Moreover, since the proposed control law depends on all the state variables of the system, it will be interesting to design a state observer using only the boundary output measurements, so that to obtain an output feedback control law, in the same spirit of Astolfi and Praly (2017). It will be also interesting, from a practical point of view, to consider a HEX model with possible different phase changes along the exchanger (evaporators or condensers). Finally the proposed control design approach can also be studied using an infinite dimensional dynamical model of the HEX.

REFERENCES

- Alsop, A.W. and Edgar, T.F. (1989). Nonlinear heat exchanger control through the use of partially linearized control variables. *Chemical Engineering Communications*, 75(1), 155–170.
- Astolfi, D. and Praly, L. (2017). Integral action in output feedback for multi-input multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1559–1574.
- Chandrashekar, M. and Wong, F. (1982). Thermodynamic systems analysis - i. a graph-theoretic approach. *Energy*, 7(6), 539 – 566.
- Diaz-Mendez, S., Patiño Carachure, C., and Herrera-Castillo, J. (2014). Reducing the energy consumption of an earth-air heat exchanger with a PID control system. *Energy Conversion and Management*, 77, 1 – 6.
- Gershgorin, S. (1931). Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Bull. Acad. Sci. URSS*, 1931(6), 749–754.
- Gu, W., Chen, X., Liu, K., Zhang, B., Chen, Q., and Hui, C.W. (2015). Retrofitting of the heat exchanger network with steam generation in a crude oil distillation unit. *Chemical Engineering & Technology*, 38(2), 203–214.
- Huhtala, K. and Paunonen, L. (2019). Robust output regulation of counter-flow heat exchangers. *IFAC-PapersOnLine*, 52(2), 201 – 206. 3rd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations CPDE 2019.
- Maidi, A., Diaf, M., and Corriou, J.P. (2009). Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, 19(2), 297 – 313.
- Ozorio Cassol, G., Ni, D., and Dubljevic, S. (2019). Heat exchanger system boundary regulation. *AIChE Journal*, 65(8), e16623.
- Poulain, F. and Praly, L. (2010). Robust asymptotic stabilization of nonlinear systems by state feedback. In *8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 653–658.
- Praly, L., Ortega, R., and Kaliora, G. (2001). Stabilization of nonlinear systems via forwarding mod L/sub g/V. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9), 1461–1466.
- Sakawa, M., Kato, K., and Ushiro, S. (2002). Operational planning of district heating and cooling plants through genetic algorithms for mixed 0–1 linear programming. *European Journal of Operational Research*, 137(3), 677 – 687.
- Scholten, T., de Persis, C., and Tesi, P. (2017). Modeling and control of heat networks with storage: The single-producer multiple-consumer case. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25, 414–428.
- Sridhar, U.M., Govindarajan, A., and Rhinehart, R.R. (2016). Demonstration of leapfrogging for implementing nonlinear model predictive control on a heat exchanger. *ISA Transactions*, 60, 218 – 227.
- Varga, E., Hangos, K., and Szigeti, F. (1995). Controllability and observability of heat exchanger networks in the time-varying parameter case. *Control Engineering Practice*, 3(10), 1409 – 1419.
- Wu, J., Tremeac, B., Terrier, M.F., Charni, M., Gagnière, E., Couenne, F., Hamroun, B., and Jallut, C. (2016). Experimental investigation of the dynamic behavior of a large-scale refrigeration – pcm energy storage system. validation of a complete model. *Energy*, 116, 32 – 42.
- Zavala-Río, A., Astorga-Zaragoza, C., and Hernández-González, O. (2009). Bounded positive control for double-pipe heat exchangers. *Control Engineering Practice*, 17(1), 136 – 145.
- Zitte, B., Hamroun, B., Couenne, F., and Pitault, I. (2018). Representation of heat exchanger networks using graph formalism. *IFAC-PapersOnLine*, 51(3), 44 – 49. 6th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2018.

A.3 Optimisation distribuée d'un réseau d'échangeurs thermiques basée sur la méthode d'Extremum-Seeking

Extremum-Seeking Based Distributed Optimization of Heat Exchangers Network

B. Zitte B. Hamroun F. Couenne I. Pitault

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, LAGEP UMR 5007, VILLEURBANNE, France (e-mails: {bertrand.zitte; boussad.hamroun; francoise.couenne; isabelle.pitault}@univ-lyon1.fr).

Abstract: In this paper we develop a distributed optimization method for a Heat Exchangers Network. The considered network is given by an interconnected hot thermal sources flows and cold consumers flows through counter-current heat exchangers. The optimization problem corresponds to a maximization of the thermal power benefits, expressed as a heating utility function, of the different consumers flows from the overall sources flows through the network. This utility function is estimated using Proportional Integral Distributed Average Consensus Estimator on the base of partial information exchange between some consumers through a communication graph. By using the estimated utility function an extremum seeking scheme is implemented for each consumer decision variable (consumer mass flow rate fraction) to achieve the optimal state. Some simulations results are given on a network example which show the effectiveness of the proposed approach.

© 2018, IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Heat Exchangers Network, Distributed Optimization, Distributed Estimation, Extremum-Seeking

1. INTRODUCTION

In the last decades, there is a growing interests on energy distribution systems. This is especially the consequence of energy sources diversification from fossil to renewable energies and also their network integration. Since the development of modern communication technologies it makes possible the reduction of the capacity excess of the energy distribution systems with the consideration of a (quasi) real-time power consumption matching objective Gungor et al. (2011) and the implementation of sophisticated automation architectures. These technologies induce flexibility, reliability and resilience of the energy distribution systems or simply a *smart grids* Palensky and Dietrich (2011). From this side, the distributed and cooperative control approach offers many advantages since it gives a center-free control architecture. Distributed and cooperative approach continue to receive a great interest from theoretical development and also application point of view. It represents an intermediate paradigm between decentralized and centralized one. Mainly, this approach is based on a partial communication between agents over the network of information (measures, control decisions,...), without centralized collection. From this perspective, it makes flexible the network integration and easy to handle its growing complexity. Other than the energy distribution systems, the distributed and cooperative approach is successfully used in robotics in order to emerge a consensus behavior (see Olfati-Saber et al. (2007)) of a certain robots (or agents) populations through elementary interactions Bai et al. (2011).

In this paper we present a distributed optimization method for heat exchangers network. As for smart grid systems we can talk also on "smart thermal grids" where the trend

is also the construction of thermal energy distribution networks with possibly heterogeneous, renewable or fossil energy sources Lund et al. (2014). These networks, can in general incorporate some thermodynamic machines like heat pumps, absorption chillers, desalination processes and also a thermal storage modules. We consider in this paper an example of heat exchangers network which is represented by some consumer cold streams connected to some sources hot streams by means of counter current heat exchangers. Each consumer cold stream, qualified also in the sequel as agent, is divided at the inlet, into two parallels heat exchangers with variable and manipulated mass flow rate fraction and it is then collected at heat exchangers outlet Jaschke and Skogestad (2012). For this network, the considered optimization problem corresponds to the maximization of the global heating utility of the network. Using some hypothesis, this utility is expressed as a function of the consumer's outlet temperatures.

The adopted optimization method is based on distributed estimation by all agents of the global utility function using Proportional Integral Distributed Average Consensus Estimator (PIDACE) proposed in Freeman et al. (2006). This is combined with the extremum seeking method as a real-time implementation of a gradient based optimization algorithm since it has the advantage to be based on minimal knowledge of subsystems dynamics (see Ariyur and Krstic (2003)).

The paper is organized as follows. In section 2 we give the dynamical model describing the heat exchangers network and the used assumptions. In section 3, we give an overview of the extremum seeking method. We present in section 4 the Proportional Integral Distributed Average Consensus Estimator. In section 5, we give the overall

optimization structure which combines distributed estimation with extremum seeking method. We give in section 6 simulation results of the used heat exchangers network example. Finally, we give some conclusions and perspectives of the work.

2. MODEL DESCRIPTION AND MODELLING

We will consider a Heat Exchangers Network constructed upon a counter-current heat exchangers where we distinguish some hot sources streams and cold consumers streams. The mass flow rate of each consumer stream are considered constant and divided, using variable mass flow rate fraction, through parallel interconnected heat exchangers with two different hot sources Jaschke and Skogestad (2012). Along the network we use two different types of sources: sources connected with a single consumer using of two fluids heat exchangers and sources shared by two consumers using of three fluids heat exchangers (see Kavadiki et al. (2015); Giovannoni et al. (2017)). The considered network example is illustrated in Fig. 1 where we use an alternating parallel interconnection of sources and consumers through heat exchangers. The different sources are noted S_i for $i = 1, \dots, 5$, consumers C_i for $i = 1, \dots, 4$ and heat exchanger E_i for $i = 1, \dots, 5$.

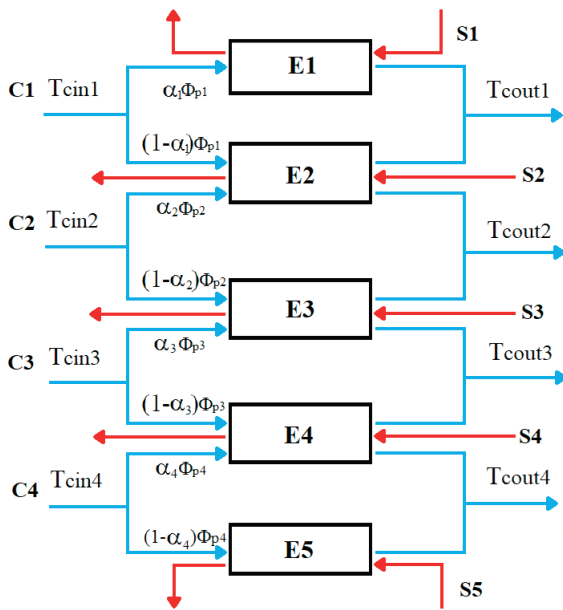


Fig. 1. Study case of heat exchangers network with four consumers and five sources

The variables α_i , $T_{c,in,i}$, $T_{c,out,i}$ and ϕ_i for $i = 1, \dots, 4$ represents, respectively, the controlled mass flow rate fractions, the inlet and the outlet temperatures, the constant mass flow rate and heat capacity of consumers C_i . For simplicity we will consider that the hot stream and the cold stream of the heat exchangers are divided in 3 homogeneous compartments as represented in Fig. 2. The pressure P is assumed to be uniform and constant. Moreover we will assume that there is no energy accumulation in the wall between the two fluids. The heat transfer coefficients are constant $\lambda(J/K/s)$. The hot and cold fluids remain as a single phase ideal fluids. Their density ρ and heat capacity

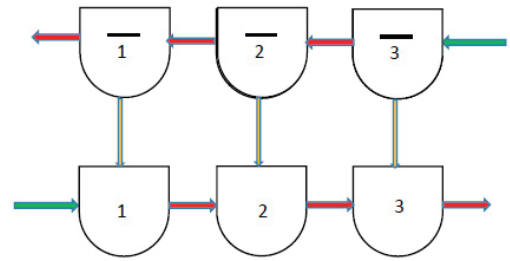


Fig. 2. Representation of counter current Exchanger with 3 homogeneous compartments

c_p are assumed to be constant. Finally there is no heat exchange with the environment through the wall.

In Fig. 2. The red and green arrows correspond to the convective flows and inlet convective ones respectively. The heat transfer flows is represented by the yellow arrows.

2.1 Energy balance on compartment 1

Let us consider the compartment 1 containing a constant volume V of liquid (m^3). This implies that the inlet and outlet flow rates change instantaneously in the same manner. Let us denote by $h(J/Kg)$ the specific enthalpy of the fluid. The total energy present in the compartment follows the same dynamics as the enthalpy since the term PV remains constant Sandler (1999). For this reason we will write the enthalpy balance. The total amount of enthalpy H_i in the compartment i is given by:

$$H_i = \rho V h(T_i) \quad (1)$$

with h the specific enthalpy (J/kg). The specific enthalpy is assumed to be as:

$$h(T_i) = c_p(T_i - T_{ref}) + h_{ref} \quad (2)$$

with $T_i(K)$ the temperature of the fluid in compartment i , $T_{ref}(K)$ and $h_{ref}(J/Kg)$ the temperature and enthalpy reference values associated to the fluid.

With the previous assumptions, the energy balance (of compartment 1) is obtained as (see Sandler (1999)):

$$\dot{H}_1 = \lambda(\bar{T}_1 - T_1) + Qh_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1 \quad (3)$$

with Q the mass flow rate (kg/s) and $h_{in} = h(T_{in})$ the specific enthalpy at the inlet. The right first term corresponds to the energy transfer flux with the cold compartment of temperature \bar{T}_1 . The second and the third terms correspond to the inlet convective flux and outlet convective flux respectively. This by assuming fluid homogeneity in each compartment which makes equal the outlet enthalpy to the inside compartment one. Writing the enthalpy balance for all compartments we obtain the following dynamical model of counter current two fluids heat exchanger:

$$\begin{cases} \dot{H}_1 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + Q h_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1 \\ \dot{H}_2 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2) + \frac{Q}{\rho V} H_1 - \frac{Q}{\rho V} H_2 \\ \dot{H}_3 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3) + \frac{Q}{\rho V} H_2 - \frac{Q}{\rho V} H_3 \\ \dot{\bar{H}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_2 - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_1 \\ \dot{\bar{H}}_2 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2) + \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_3 - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_2 \\ \dot{\bar{H}}_3 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3) + \bar{Q} \bar{h}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_3 \end{cases} \quad (4)$$

In the case of three-fluids heat exchangers where there is a heat exchange between a source and consumer i and $i + 1$, the dynamical model is extended by the third fluid enthalpy balance equations as follows:

$$\begin{cases} \dot{H}_1^i = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1^i) + Q h_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1^i \\ \dot{H}_2^i = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2^i) + \frac{Q}{\rho V} H_1^i - \frac{Q}{\rho V} H_2^i \\ \dot{H}_3^i = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3^i) + \frac{Q}{\rho V} H_2^i - \frac{Q}{\rho V} H_3^i \\ \dot{\bar{H}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1^i) - \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1^{(i+1)}) \\ \quad + \frac{\bar{Q}}{\rho V} (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \\ \dot{\bar{H}}_2 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2^i) - \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2^{(i+1)}) \\ \quad + \frac{\bar{Q}}{\rho V} (\bar{H}_3 - \bar{H}_2) \\ \dot{\bar{H}}_3 = \frac{-\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3^i) - \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3^{(i+1)}) \\ \quad + \bar{Q} \bar{h}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\rho V} \bar{H}_3 \\ \dot{H}_1^{(i+1)} = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1^{(i+1)}) + Q h_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1^{(i+1)} \\ \dot{H}_2^{(i+1)} = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2^{(i+1)}) + \frac{Q}{\rho V} H_1^{(i+1)} - \frac{Q}{\rho V} H_2^{(i+1)} \\ \dot{H}_3^{(i+1)} = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3^{(i+1)}) + \frac{Q}{\rho V} H_2^{(i+1)} - \frac{Q}{\rho V} H_3^{(i+1)} \end{cases} \quad (5)$$

To complete this dynamical model, the inlet splitters equations have to be defined as follows:

$$Q h_{c,in} = \alpha Q h_{e,in,i} + (1 - \alpha) Q h_{e,in,i+1} \quad (6)$$

where $h_{e,in,i}$ and $h_{e,in,i+1}$ is the specific enthalpies at the inlet of exchangers number i and $(i + 1)$ respectively. α represents the mass flow rate fraction which is the manipulated variable for control and optimization. We consider in our case that these two specific enthalpies are equal to the main inlet specific enthalpy $h_{c,in}$ since we do not consider a change of temperature $T_{c,in}$. The outlet collectors are modeled by the following equation:

$$Q h_{c,out} = \alpha Q h_{e,out,i} + (1 - \alpha) Q h_{e,out,i+1} \quad (7)$$

where $h_{e,out,i}$ and $h_{e,out,i+1}$ is the specific enthalpies at the output of exchangers number i and $(i+1)$ respectively. The consumer's output temperature is then derived from the output specific enthalpy as follows:

$$T_{c,out} = \frac{h_{c,out,i} - h_{ref}}{c_p} + T_{ref} \quad (8)$$

2.2 Optimization problem

We consider in this paper a heating utility optimization problem for the heat exchangers networks. The instantaneous extracted thermal power from the sources by the different agents (consumers) can be expressed using their input and output temperatures as follows:

$$U = \sum_{i=1}^n Q_i c_{p_i} (T_{c,out,i} - T_{c,in,i}) \quad (9)$$

where in general n represents the number of agents, Q_i the mass flow rate and c_{p_i} the heat capacity for the i th agent.

By assuming a constant consumer's inlet temperatures $T_{c,in,i}$, a constant and equal consumer's flow rate $Q_i = Q$ and heat capacity $c_{p_i} = c_p$ (for $i = 1, \dots, n$), an equivalent simplified utility function is given as follows:

$$J = \sum_{i=1}^n T_{c,out,i} \quad (10)$$

So the optimization problem can be written as follows:

$$\max_{\alpha} (J) \quad (11)$$

This optimization problem is considered along the possible trajectories of the dynamical model of the heat exchangers network.

3. EXTREMUM SEEKING BASED OPTIMIZATION: OVERVIEW

Extremum seeking is a real time method used to compute the extremum of a measured function without knowing explicitly its analytical form. It is based on an injected dithering (sinusoidal) signal in order to estimate in real time the gradient of the utility function. Originally, this method goes back to the work of Leblanc (1922) and since the stability demonstration given in Krstić and Wang (2000) there is a growing research interests on this method. Mainly, this method is composed by a gradient estimation step followed by an adaptation step in order to converge to either maximum or minimum of the function. There exists a different implementations of this method which depends on retained method for the cited two steps. The first one consists in the use of low and high pass filters for gradient estimation. This two filters are inter-mediated by a demodulation operation (see Fig. 3). A positive (negative) proportional adaptation gain k is then used in order to achieve the maximum (minimum) of the output function. The dithering signal is injected at the adaptation output signal.

Let us consider the following stable nonlinear system modeled as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (12)$$

where x is the state space vector, θ is the input (decision) variable of the system, y is the measured output. To apply the extremum seeking method in order to maximize the output y , we have to assume the following hypothesis Krstić and Wang (2000):

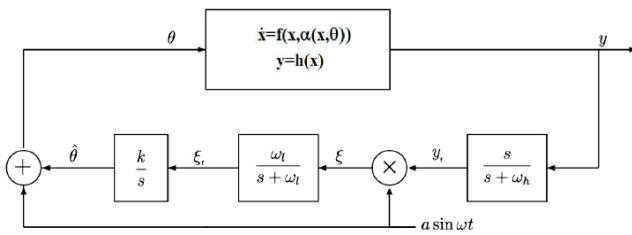


Fig. 3. Extremum-seeking scheme based on high and low pass filters Krstić and Wang (2000)

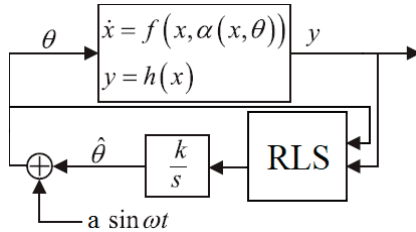


Fig. 4. Extremum-seeking scheme based on Recursive Least Square (RLS) for gradient estimation

- $\exists l(\theta)$, a continuous and derivable function s.t. $f(x, \theta) = 0 \iff x = l(\theta)$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$ the steady state $x = l(\theta)$ of the system is exponentially stable.
- $\exists \theta^*$ s. t. $(h \circ l)'(\theta^*) = 0$ and $(h \circ l)''(\theta^*) < 0$

There exists a different implementations of this method. We can cite the one given in Wang et al. (2016) where the dithering signal amplitude is dynamically adapted in order to remove the steady state oscillations. The third possible implementation of the extremum seeking consists in the use of least square algorithm for gradient estimation step (see Chioua et al. (2016)). This approach allows to reduce considerably the convergence time of the extremum seeking method (see figure 4).

This method has been applied successfully on different systems like waste-water chemical treatment plants Martínez (2007), air-source heat pump Dong et al. (2015), chemical reactors and bio-reactors Cougnon et al. (2011); Guay et al. (2004). The extremum seeking method is also used as a free model PID tuning method in Killingsworth and Krstić (2006) or for system stabilization perspective in Scheinker and Krstić (2013).

4. DISTRIBUTED AVERAGE ESTIMATION APPLIED ON THE HEAT EXCHANGER NETWORK

In this section we will apply the distributed average estimation technique on the heat exchangers network in order to estimate the global utility function expressed as a sum of a local ones. This is mainly based on a distributed average consensus algorithm extended with integral states and where the local utility functions are transmitted through a communication graph Freeman et al. (2006); Ebegbulem and Guay (2017). In the sequel we intend by agent A_i , a cold consumer stream C_i characterized by its dynamic behavior, decision variable α_i and its measured output temperatures $T_{c,out,i}$ for $i = 1, \dots, n$.

4.1 Proportional-Integral Distributed Average Consensus Estimator (PIDACE):

First, we define a communication graph between the different agents A_i . The Fig. 5 shows the considered communication graph where two agents are considered adjacent when they share a common thermal source. The considered communication is characterized by the

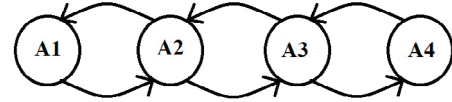


Fig. 5. Communication graph between agents

following symmetric laplacian matrix:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Each agent A_i will estimates the average value of the global utility function ($\frac{J}{n}$), noted \hat{J}_i . This estimation is made using its information $T_{c,out,i}$ as well as that of his neighborhood. The PIDACE state space equation is given as follows Freeman et al. (2006); Ebegbulem and Guay (2017):

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{J}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma \mathbf{I} - k_p L & k_i L^T \\ -k_i L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} T_{c,out}(t) \quad (14)$$

where γ , k_p and k_i are positive constants to be assigned, $[\hat{J}(t), w(t)]^T$ is the internal estimator state vector and $T_{c,out}(t)^T = [T_{c,out,1}(t), T_{c,out,2}(t), \dots, T_{c,out,n}(t)]$ the outlet agent's temperatures. We can check easily that the steady state of this estimator corresponds to the average value of utility function J .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma \hat{J}(t) - k_p L \hat{J}(t) + k_i L^T w(t) + \gamma T_{c,out}(t) \\ -k_i L \hat{J}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

For the laplacian matrix L , we have $L\mathbf{1} = 0$ and using its symmetry we have also $\mathbf{1}^T L = 0$. Where $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]_n^T$ then

$$\begin{cases} \gamma \hat{J}(t) = k_i L^T w(t) + \gamma T_{c,out}(t) \\ L \hat{J}(t) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

From the second equation we deduce that $\hat{J}(t) = \mu \mathbf{1}$ for $\mu \in \mathbb{R}$. By left multiplying the first equation by $\mathbf{1}^T$ we obtain:

$$\underbrace{\mathbf{1}^T \gamma \hat{J}(t)}_{\gamma \mu \mathbf{1}^T \mathbf{1}} = \underbrace{\mathbf{1}^T k_i L^T w(t)}_0 + \underbrace{\mathbf{1}^T \gamma T_{c,out}(t)}_{\gamma J} \quad (17)$$

Thus we have (with $\gamma > 0$)

$$\gamma \mu \mathbf{1}^T \mathbf{1} = \gamma J \quad \Rightarrow \quad n \gamma \mu = \gamma J \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{J}{n} \quad (18)$$

Finally, the steady state for the \hat{J} vector is given as follows:

$$\hat{J}(t) = \frac{J}{n} \mathbf{1} \quad (19)$$

which corresponds (for each vector components) to the average value of J . The complete proof of the stability of this steady state is given in Freeman et al. (2006) where a general case of possibly non symmetric laplacian matrices are used differently for the proportional and the integral part. Fig. 6 shows a simulation results of the implemented PIDACE on the heat exchangers network example given in Fig. 1. This simulation results are obtained for different scenarios of the sources temperatures.

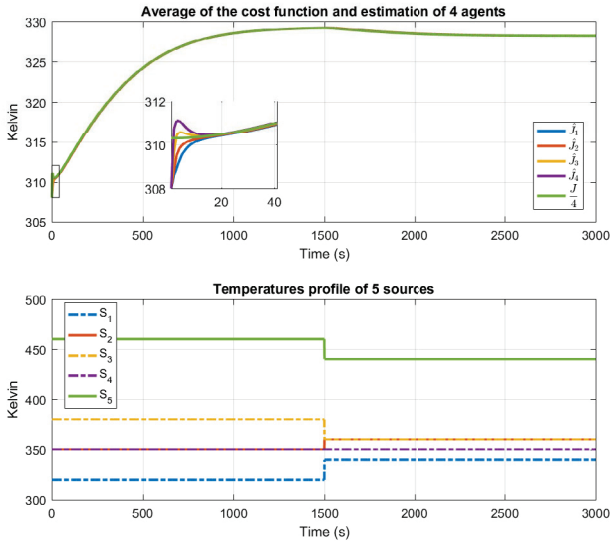


Fig. 6. Distributed estimation of the utility function by the agents, with variable source's temperatures

The obtained results shows the effectiveness of this distributed estimation.

5. EXTREMUM-SEEKING BASED DISTRIBUTED OPTIMIZATION

In this section we will give the whole structure of the optimization method using the extremum seeking method coupled with the presented distributed estimation of the utility function J . This approach consists in the implementation of the extremum seeking methods at the agent's level (in non cooperative way). So, each agent estimates the gradient of the utility function using recursive least square algorithm and use a positive proportional gain to update its decision variable α_i (see Fig. 7).

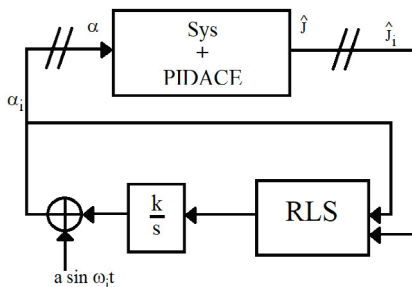


Fig. 7. Optimization method structure: PIDACE and least square based extremum seeking method

6. SIMULATIONS

For the simulation the used values for the different parameters of the system are give the table 1. The table 2

Parameter	Value	Parameter	Value
c_p	4185 J/kg/K	ρ	997kg/m ³
V	0.002 m ³	T_{ref}	298 K
Q	0.02 kg/s	\dot{Q}	0.05 kg/s
λ	10 W/m ² /K	h_{ref}	0 J/kg

Table 1. Heat Exchangers Network parameter's values

shows the used values for the PIDACE and Extremum Seeking parameters. Fig. 8 shows the time evolution of

Parameter	Value	Parameter	Value
$\omega_i, i = 1, \dots, 4$	$i.0.01(rad/s), i = 1, \dots, 4$	k	8.10^{-7}
k_p	10	k_i	10
γ	10	a	0.01

Table 2. PIDACE and Extremum Seeking parameter's values

decision variables α_i for $i = 1, \dots, 4$ and of the estimated gradients of the utility function by each agent. The vanishing estimated gradients shows a local convergence to the maximum of the utility function. The optimal values of the decision variables α_i are a priori computed using a stationary optimization routine. For the first scenario of the sources temperatures we obtain: $\alpha_1^* = 0.20, \alpha_2^* = 0.32, \alpha_3^* = 0.65, \alpha_4^* = 0.07$. For the second scenario we obtain: $\alpha_1^* = 0.37, \alpha_2^* = 0.5, \alpha_3^* = 0.55, \alpha_4^* = 0.12$

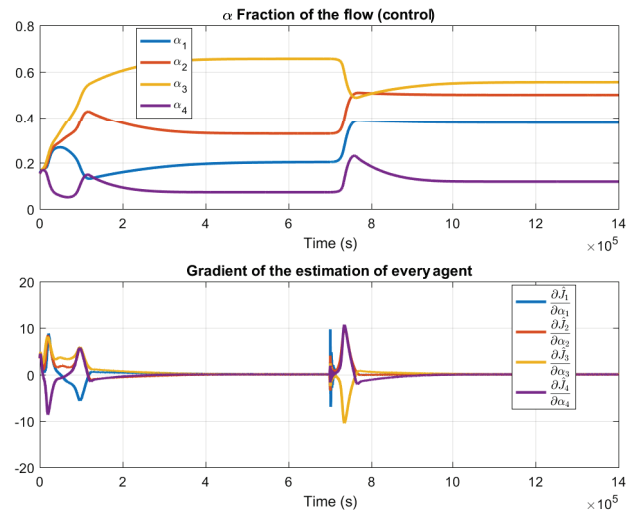


Fig. 8. Time evolution of the gradient of the estimated utility function

Fig. 8 shows the output temperatures of the agents and also the sources temperatures.

7. CONCLUSION

In this paper we present a distributed optimization method for heat exchangers network using proportional and integral distributed average consensus estimation together with extremum seeking method. The presented method has the inherited advantage from distributed estimation

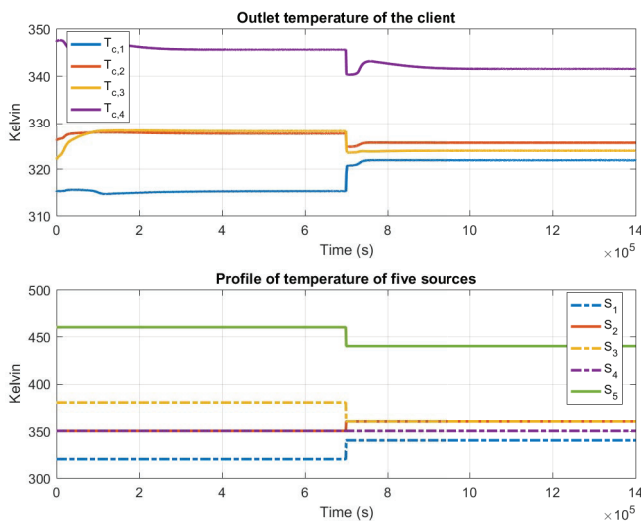


Fig. 9. Study case of heat exchanger network

where each agent reconstruct, using only his neighborhood measures, the global utility function. The extremum seeking method is then used to update in real-time the controlled variables in order to achieve (locally) the optimal state of the utility function using minimal knowledge on dynamical properties of the system. We intend in the future to complete this work by a cooperative structure for the extremum seeking control, and to characterize theoretically the stability and the convergence properties of this proposed methods using graph network tools.

REFERENCES

- Ariyur, K.B. and Krstic, M. (2003). *Real-time optimization by extremum-seeking control*. John Wiley & Sons.
- Bai, H., Arcak, M., and Wen, J. (2011). *Cooperative control design: a systematic, passivity-based approach*. Springer Science & Business Media.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Guay, M., and Perrier, M. (2016). Performance improvement of extremum seeking control using recursive least square estimation with forgetting factor. *IFAC-PapersOnLine*, 49(7), 424 – 429. 11th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems Including Biosystems DYCOPS-CAB 2016.
- Cougnon, P., Dochain, D., Guay, M., and Perrier, M. (2011). On-line optimization of fedbatch bioreactors by adaptive extremum seeking control. *Journal of Process Control*, 21(10), 1526 – 1532. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2011.05.004>.
- Dong, L., Li, Y., Mu, B., and Xiao, Y. (2015). Self-optimizing control of air-source heat pump with multi-variable extremum seeking. *Applied Thermal Engineering*, 84, 180 – 195.
- Ebegbulem, J. and Guay, M. (2017). Distributed extremum seeking control for wind farm power maximization. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 147 – 152. 20th IFAC World Congress.
- Freeman, R.A., Yang, P., and Lynch, K.M. (2006). Stability and convergence properties of dynamic average consensus estimators. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 338–343.
- Giovannoni, V., Sharma, R.N., and Raine, R.R. (2017). Numerical prediction of thermal performances in a concentric triple tube heat exchanger. *INTERNATIONAL JOURNAL OF THERMAL SCIENCES*, 120, 86–105.
- Guay, M., Dochain, D., and Perrier, M. (2004). Adaptive extremum seeking control of continuous stirred tank bioreactors with unknown growth kinetics. *Automatica*, 40(5), 881 – 888.
- Gungor, V.C., Sahin, D., Kocak, T., Ergut, S., Buccella, C., Cecati, C., and Hancke, G.P. (2011). Smart grid technologies: Communication technologies and standards. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 7(4), 529–539.
- Jaschke, J. and Skogestad, S. (2012). Control structure selection for optimal operation of a heat exchanger network. In *Proceedings of 2012 UKACC International Conference on Control*, 148–153.
- Kavadiki, V., Vinayakaraddy, Chaturvedi, M.H., Venkataram, K., and Seetharamu, K.N. (2015). Dynamic behaviour of a three fluid heat exchanger subjected to step change in inlet temperature of hot and cold fluids. *INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW*, 25(6, SI), 1311–1321.
- Killingsworth, N.J. and Krstić, M. (2006). Pid tuning using extremum seeking: online, model-free performance optimization. *IEEE Control Systems*, 26(1), 70–79.
- Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *AUTOMATICA*, 36(4), 595–601.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*, 12(8), 275–277. Cited By 58.
- Lund, H., Werner, S., Wiltshire, R., Svendsen, S., Thorsen, J.E., Hvelplund, F., and Mathiesen, B.V. (2014). 4th generation district heating (4gdh): Integrating smart thermal grids into future sustainable energy systems. *Energy*, 68, 1 – 11.
- Martínez, E. (2007). Extremum-seeking control of redox processes in wastewater chemical treatment plants. In V. Pleu and P. erban Agachi (eds.), *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, volume 24 of *Computer Aided Chemical Engineering*, 865 – 870. Elsevier.
- Olfati-Saber, R., Fax, J.A., and Murray, R.M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 215–233.
- Palensky, P. and Dietrich, D. (2011). Demand side management: Demand response, intelligent energy systems, and smart loads. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 7(3), 381–388.
- Sandler, S. (1999). *Chemical and Engineering Thermodynamics*. Third edition, Wiley and Sons.
- Scheinker, A. and Krstić, M. (2013). Minimum-seeking for cifs: Universal semiglobally stabilizing feedback under unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5), 1107–1122.
- Wang, L., Chen, S., and Ma, K. (2016). On stability and application of extremum seeking control without steady-state oscillation. *Automatica*, 68, 18 – 26.

A.4 Représentation hamiltonienne à ports d'un échangeur de chaleur

Présenté pour le "3rd IFAC Workshop on Thermodynamic Foundation of Mathematical Systems Theory" (TFMST2019)

Port Hamiltonian representation of heat exchanger

B. Zitte B. Hamroun F. Couenne I. Pitault

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, LAGEPP UMR
5007, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F-69100, VILLEURBANNE,
France (e-mails: {bertrand.zitte;boussad.hamroun;francoise.couenne;
isabelle.pitault}@univ-lyon1.fr).

Abstract:

In this contribution we present an irreversible port Hamiltonian representation of a heat exchanger. The approach is based on a compartment representation of the heat exchanger.

Keywords: Port Hamiltonian systems, Thermal systems

EXTENDED ABSTRACT

1. INTRODUCTION

In the context of energy, heat exchangers are fundamental and present in many energy saving processes such as desalination processes, cogeneration plants, large industrial plants or district heating and cooling systems. These heat exchangers are combined together in order to form Heat Exchanger Networks (HEN). If many efforts have been done in their conceptions in steady states, HEN are not robust with respect to perturbations of the operating conditions. So control design of these HEN is necessary in order to improve the efficiency of these processes in these degenerate conditions. These systems are naturally passive. So it is natural to use this property for control. In this context, the use of the port Hamiltonian framework is well suited for modeling and for passivity based control method. In this contribution we propose an irreversible port Hamiltonian model of a heat exchanger including heat transfer and convection phenomena. The approach is based on a compartment representation of the heat exchanger.

Irreversible port Hamiltonian systems (IPHS) are an extension of port Hamiltonian systems proposed in Ramirez et al. (2013). The dynamics of IPHS is defined by

$$\frac{dx}{dt} = R(x, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}) J \frac{\partial U}{\partial x}(x) + W \left(x, \frac{\partial U}{\partial x} \right) + g(x, \frac{\partial U}{\partial x}) u \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the thermodynamic state vector, $\frac{\partial U}{\partial x}$ is the co-state vector representing the intensive variables. The Hamiltonian function U and the entropy function S are $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. The function $R(x, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x})$ can be written as: $R(x, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}) = \gamma(x, \frac{\partial U}{\partial x}) \{S, U\}_J$ where γ is a positive function and $\{S, U\}_J$ denotes the Poisson bracket of S and U :

$$\{S, U\}_J = \frac{\partial S}{\partial x} J \frac{\partial U}{\partial x}$$

W and g are $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. They are associated with the ports of the systems. u is the input vector of the system.

Remark 1. The interest of IPHS representation with respect to other pseudo port Hamiltonian representation presented in the literature Hoang et al. (2011) is that the irreversible entropy production term due to internal phenomena (such reaction in some reactional volume of a reactor) directly appears when the total entropy balance is written as $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt}$. The term is given by the drift term $R(x, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}) \frac{\partial S}{\partial x} J \frac{\partial U}{\partial x}$.

2. THE CLASSICAL MODEL OF THE HEAT EXCHANGER

We consider a counter-current heat exchanger. For simplicity we will consider that the hot stream and the cold stream are divided in 3 homogeneous compartments as presented in Zitte et al. (2018) as represented in Figure 1 where the bar variables ($\bar{\cdot}$) are associated to the hot fluid. The pressure P is assumed to be constant and uniform.

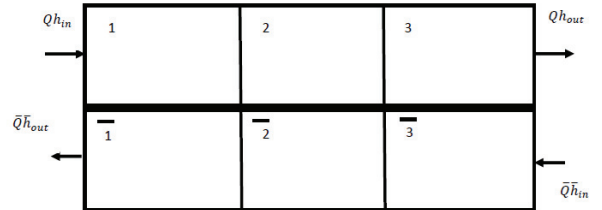


Fig. 1. Counter current exchanger with inlet and outlet heat flux

Moreover, we will assume that there is no energy accumulation in the wall between the two fluids. The heat transfer coefficient λ ($J/K/s$) is constant. The hot and cold fluids remain in a single ideal fluid phase. Their density ρ and heat capacity c_p , \bar{c}_p are assumed to be constant. The volume V , \bar{V} (m^3) of the matter in all the compartments is constant. Finally there is no heat exchange with the environment through the wall.

With these assumptions, the energy balance on each compartment of the heat exchanger can be expressed thanks to the enthalpy variable $H = U + PV$. It is given by (see Zitte et al. (2018)):

$$\begin{cases} \dot{H}_1 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + Q h_{in} - \frac{Q}{\rho V} H_1 \\ \dot{H}_2 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_2 - H_2) + \frac{Q}{\rho V} H_1 - \frac{Q}{\rho V} H_2 \\ \dot{H}_3 = \frac{\lambda}{\rho V c_p} (\bar{H}_3 - H_3) + \frac{Q}{\rho V} H_2 - \frac{Q}{\rho V} H_3 \\ \dot{\bar{H}}_1 = \frac{-\lambda}{\rho \bar{V} c_p} (\bar{H}_1 - H_1) + \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \bar{H}_2 - \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \bar{H}_1 \\ \dot{\bar{H}}_2 = \frac{-\lambda}{\rho \bar{V} c_p} (\bar{H}_2 - H_2) + \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \bar{H}_3 - \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \bar{H}_2 \\ \dot{\bar{H}}_3 = \frac{-\lambda}{\rho \bar{V} c_p} (\bar{H}_3 - H_3) + \bar{Q} \bar{h}_{in} - \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}} \bar{H}_3 \end{cases} \quad (2)$$

where H_i, \bar{H}_i represent the enthalpy of the compartment of the cold and of the hot fluids respectively, Q, \bar{Q} (kg/s) the mass flow rate of the cold and of the hot fluids respectively and $h_{in} = h(T_{in})$ and $\bar{h}_{in} = h(\bar{T}_{in})$ the specific enthalpy at the inlet of the cold and the hot fluids resp.

3. MAIN RESULT

Let us consider the vector of enthalpy

$$x^T = (H_1 \ H_2 \ H_3 \ \bar{H}_1 \ \bar{H}_2 \ \bar{H}_3)$$

as well as the Hamiltonian $\mathbb{H} = \sum_i x_i$, the total entropy

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i + \bar{S}_i \text{ and their conjugated variables } \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x} = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ \bar{T}_1 \ \bar{T}_2 \ \bar{T}_3], \quad \frac{\partial S}{\partial x} = [\frac{1}{T_1} \ \frac{1}{T_2} \ \frac{1}{T_3} \ \frac{1}{\bar{T}_1} \ \frac{1}{\bar{T}_2} \ \frac{1}{\bar{T}_3}].$$

We obtain:

Proposition *The heat exchanger dynamics defined by (2) admits a IPHS representation:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_i^3 R_i(x, \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}) J_i \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}(x) \\ &\quad + (B_1 + B_2 x)u + (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 x)\bar{u} \\ \begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_1^T + x^T B_2^T \\ \bar{B}_1^T + x^T \bar{B}_2^T \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x} = \begin{pmatrix} -x_3 + x_{in} \\ -\bar{x}_1 + \bar{x}_{in} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

with

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i3} \\ -\delta_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{i2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{i3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

with the Kronecker index such that $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$, 0 in the other cases, and the functions

$$R_i(x, \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}) = \gamma_i(x, \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}) \{S_i, \mathbb{H}\}_{J_i}$$

with

$$\gamma_i(x, \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}) = \lambda T_i \bar{T}_i.$$

Proof Let us consider the compact notations $k = \frac{\lambda}{\rho V c_p}$, $\bar{k} = \frac{\lambda}{\rho \bar{V} c_p}$, $u = \frac{Q}{\rho V}$, $\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V}}$, $x_{in} = \frac{Q}{\rho V h_{in}}$, $\bar{x}_{in} = \frac{\bar{Q}}{\rho \bar{V} h_{in}}$.

we obtain :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + uB_2x + \bar{u}\bar{B}_2x + B_1u + \bar{B}_1\bar{u} \quad (4)$$

with

$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k \\ \hline \bar{k} & 0 & 0 & -\bar{k} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k} & 0 & 0 & -\bar{k} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k} & 0 & 0 & -\bar{k} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1^T = (x_{in} \ 0 \ \dots \ 0) \text{ and } \bar{B}_1^T = (0 \ 0 \ \dots \ \bar{x}_{in}).$$

Then it can be easily seen that the heat transfer terms can be written as $\sum_i^3 R_i(x, \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}) J_i \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}(x)$. Furthermore the collocated outputs are also easily deduced. \square

These the collocated outputs correspond to the energy intake of the cold and of the hot fluids. They also correspond up to constants to the difference between outlet temperature and inlet temperature.

Finally let us compute the time derivative of the Hamiltonian with respect to time in order to check passivity:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathbb{H}^T}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \sum_i^3 \mathbf{1}^T k(T_i - \bar{T}_i) J_i \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x} + \mathbf{1}^T (B_1 + B_2 x)u \\ &\quad + \mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 x)\bar{u} \\ &= \sum_i^3 k(T_i - \bar{T}_i) \underbrace{\mathbf{1}^T J_i \mathbf{1}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{1}^T (B_1 + B_2 x)u}_{y^T} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{1}^T (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 x)\bar{u}}_{\bar{y}^T} \\ &= y^T u + \bar{y}^T \bar{u}. \end{aligned} \quad (5)$$

with $\mathbf{1}$ the vector of ones.

4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

In this contribution we propose the irreversible port Hamiltonian representation of heat exchangers. This approach gives rise to compact representation. The entropy production rate is naturally derived as well as passivity properties. This approach can be generalized to heat exchanger networks.

REFERENCES

Hoang, H., Couenne, F., Jallut, C., and Le Gorrec, Y. (2011). The port hamiltonian approach to modeling and

- control of continuous stirred tank reactors. *Journal of Process Control*, 21(10), 1449 – 1458.
- Ramirez, H., Maschke, B., and Sbarbaro, D. (2013). Irreversible port-hamiltonian systems: A general formulation of irreversible processes with application to the cstr. *Chemical Engineering Science*, 89, 223 – 234.
- Zitte, B., Hamroun, B., Couenne, F., and Pitault, I. (2018). Representation of heat exchanger networks using graph formalism. In *IFAC-PapersOnLine, 6th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, Valparaiso, Chile*, volume 51, 44 – 49.