

LE MONDE DE LA CONVEXITÉ DISCRÈTE
VERSION RÉSUMÉE DE "FINDING DIGITAL CONVEXITY"

By

LOÏC CROMBEZ

A dissertation submitted in partial fulfillment of
the requirements for the degree of

DOCTOR OF INFORMATICS

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE
LIMOS
ED SPI

Jury:

Devillers Olivier, Président du jury
Coeurjolly David, Rapporteur
Fekete Sándor, Rapporteur
Feschet Fabien, Rapporteur
Silveira Rodrigo, Rapporteur
Sivignon Isabelle, Rapporteur
Guilherme Dias Da Fonseca, Directeur de thèse
27 MAI 2021

© Copyright by LOÏC CROMBEZ, 2021
All Rights Reserved

ACKNOWLEDGMENT

This work has been sponsored by the French government research program “Investissements d’Avenir” through the IDEX-ISITE initiative 16-IDEX-0001 (CAP 20-25).

Table des matières

| | Page |
|--|-----------|
| ACKNOWLEDGMENT | 2 |
| LIST OF FIGURES | 4 |
| 1 Introduction | 6 |
| 1.1 Resultats | 9 |
| 2 Reconnaissance d'ensemble convexe digital | 10 |
| 2.1 Tester la convexité digitale | 10 |
| 2.2 Polygone convexe digital optimal | 12 |
| 3 Sous-ensembles convexes digitaux | 15 |
| 3.1 Digital Potato Peeling | 16 |
| 3.2 k-Digital Potato Peeling | 20 |
| 4 Conclusion | 24 |
| REFERENCES | 31 |

Table des figures

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Ensembles convexes digitaux déplaisants | 8 |
| 2 | Représentation de l'algorithme <code>QuickHull</code> | 12 |
| 3 | Régions pendant l'algorithme <code>QuickHull</code> | 13 |
| 4 | Séparation polygonale | 14 |
| 5 | Représentation des joyaux | 15 |
| 6 | Triangulation en éventail | 17 |
| 7 | Graphe du "peeling" enraciné | 19 |
| 8 | Exemple de solutions du k -peeling | 21 |
| 9 | Exemple d'enveloppe supérieure et inférieure | 21 |
| 10 | Calcul de la surface | 23 |
| 11 | Algorithme du k -peeling | 24 |

Dedication

1 Introduction

La géométrie algorithmique étudie les algorithmes qui cherchent à résoudre les problèmes géométriques, et par conséquent n'importe quel problème qui peut être exprimé sous des termes géométriques. Quelques-unes des applications de la géométrie algorithmique sont l'infographie, la robotique, la CAO, l'apprentissage ou encore la réalité augmentée. Les premières études liées à la géométrie algorithmique remontent à la seconde moitié du 19^e siècle avec des travaux sur les formes quadratiques par Dirichlet [13] et Sylvester [29]. Cependant la géométrie algorithmique n'a réellement émergé que dans les années 70 à partir de milieu tel que l'optimisation mathématique [7] et la CAO [16]. Les enveloppes convexes ont été parmi les premiers sujets abordés en géométrie algorithmique avec un premier papier en 1970 par Chand et Kapur [7], suivi d'un autre en 1970 par Graham [17]. La notion de convexité est aujourd'hui encore très présente en géométrie algorithmique et sera le centre d'attention de cette thèse.

La géométrie digitale, qui est étroitement liée à la géométrie algorithmique, quant à elle étudie la géométrie des points à coordonnées entières. La géométrie digitale a été motivée par le fait que les outils numériques tels que les appareils photographiques, les lidars, ou les scanners en imagerie médicale capturent des données sous forme digitales. En conséquence, la géométrie continue n'est pas adaptée pour travailler sur des données de cette forme, et son application implique souvent une adaptation des données, ce qui engendre nécessairement des approximations. Dans ce contexte, l'ambition de la géométrie digitale est de construire une géométrie alternative qui se base sur l'arithmétique entière

ainsi que sur un ensemble restreint d'objets tel que les pixels, les voxels ou encore les réseaux. De ce fait, la géométrie digitale s'intéresse à de nombreuses questions sur les liens existant entre le monde digital et le monde continu. Bien que des études datant de la fin de la 19^e siècle tels que les travaux de Minkowski sur la géométrie des nombres [25] ou la formule de Pick [26] soient liés à la géométrie digitale, elle n'a réellement débuté que dans les années 60 avec l'infographie et des algorithmes tels que celui de Bresenham [5] pour le tracé de ligne. En effet, un écran n'est jamais qu'un réseau ou une grille de pixels. À partir de là, de nombreuses questions ont été posées, et une communauté de recherche s'est formée autour de sujets tels que la topologie numérique, les variétés discrètes, l'étude des propriétés d'ensembles digital ou encore la tomographie. Aujourd'hui, certaines des principales applications de la géométrie digitale sont en analyse d'image [23] (notamment en imagerie médicale [15]), en infographie [22], ou encore en programmation linéaire entière [27].

De manière similaire à la géométrie algorithmique, la notion de convexité est centrale en géométrie digitale. Certains des premiers travaux liés à la géométrie digitale sont sur le comptage de points à l'intérieur de polytopes convexes. Le théorème de Minkowski [25] établit un lien entre le nombre de points entiers à l'intérieur d'un polytope convexe disposant d'une symétrie centrale et son volume. En deux dimensions, le théorème de Pick [26] donne une égalité reliant l'aire d'un polygone simple P dont les sommets sont à coordonnées entières aux nombres de points à coordonnées entières à l'intérieur et sur le contour. L'étude des questions de comptage de points entiers à l'intérieur de polytopes convexes a continué tout au long du 20^e siècle et est aujourd'hui

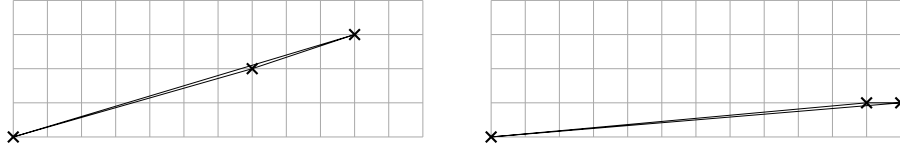


FIGURE 1 Ensemble convexes digitaux. Exemple de deux ensembles convexes digitaux qui ne sont pas connectés en termes de sous-graphe induit par la grille.

encore considérée avec des travaux liés à l'étude des polynômes d'Ehrhart [14, 24] et l'algorithme de Barvinok [2]. Une définition naturelle de la *convexité digitale* qui en découle est la suivante :

Un ensemble entier $S \in \mathbb{Z}^d$ est dit *convexe digitale* s'il existe un polytope convexe $P \in \mathbb{R}^d$ tel que $P \cap \mathbb{Z}^d = S$. On remarquera que si un tel polytope P existe, alors l'enveloppe convexe de S (que l'on dénotera $\text{conv}(S)$) satisfait elle aussi la propriété $\text{conv}(S) \cap \mathbb{Z}^d = S$. Par conséquent, une définition équivalente mais plus simple de la convexité digitale est la suivante :

Un ensemble entier $S \in \mathbb{Z}^d$ est dit *convexe digitale* si $\text{conv}(S) \cap \mathbb{Z}^d = S$. Cette définition de la convexité digitale est celle que l'on utilisera tout au long de cette thèse. D'autres définitions de la convexité digitale ont cependant été étudiées au fil des années [9, 11, 19, 20, 21]. Ces définitions ont été créées afin de garantir qu'un ensemble convexe digital soit connecté (en termes de sous-graphes induit par la grille), ce qui simplifie certains problèmes algorithmiques. En effet, dans un ensemble convexe digital S de n points, la distance entre un point p et son plus proche voisin $p_1 \in S$ n'est bornée par aucune fonction de n . Par conséquent, le diamètre d'un ensemble convexe digital de deux points ou plus peut être arbitrairement large (Fig. 1).

La présence d'ensembles convexes digitaux au sein de problèmes fondamentaux, ainsi que leurs propriétés géométriques atypiques motivent l'étude de leurs propriétés.

1.1 Resultats

Les principaux résultats de ce manuscrit sont de nouveaux algorithmes liés à la reconnaissance d'ensembles convexes digitaux.

Dans un premier temps, pour n'importe quel ensemble entier non trié S de n points, nous présentons un algorithme pour tester la convexité digitale en temps linéaire par rapport à n . D'autres algorithmes testant la convexité digitale en temps linéaire existent déjà dans la littérature [6, 12], mais ils requièrent une représentation spécifique des données en entrée et ne peuvent pas être utilisés sur des ensembles quelconques non ordonnés. Dans un second temps, nous utilisons ce résultat afin de résoudre le problème du polygone convexe digital optimal : pour un ensemble convexe digital S , trouver un polygone $P \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $P \cap \mathbb{Z}^2 = S$ et qui minimise le nombre de sommet de P . L'algorithme présenté à une complexité en temps linéaire.

Enfin, nous considérons la version digitale du "potato peeling problem" [8] proposée en 2005 dans [10]. Nous présentons un algorithme polynomial en fonction de n qui trouve, pour n'importe quel ensemble digital S les plus grand sous-ensembles convexes digitaux $C \in S$. Nous avons étudié une extension du problème : étant donné un ensemble digital S et un entier $k > 1$, le problème est de trouver le plus grand sous-ensemble $C \in S$, $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k \in S$ tel que pour tout $i \in 1..k$ C_i est convexe digital. Nous présentons un algorithme

de complexité polynomiale pour ce problème.

2 Reconnaissance d'ensemble convexe digital

Dans ce chapitre, nous présentons des algorithmes de reconnaissance d'ensembles convexes digitaux.

Dans la Section 2.1, nous présentons un algorithme linéaire pour tester la convexité digitale d'un ensemble. Cet algorithme se base sur l'algorithme `QuickHull`.

Dans la Section 2.2, nous présentons un algorithme linéaire qui à partir d'un ensemble convexe digital S retourne un polygone P avec un nombre de sommet minimal tel que $P \cap \mathbb{Z}^2 = S$.

2.1 Tester la convexité digitale

Dans cette section, nous considérons des ensembles de points entiers qui ne sont pas structurés.

Problem Test Convexité

Entrée : Un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points entiers donnés par leurs coordonnées.

Sortie : Détermine si S est un ensemble convexe digital ou non.

Nous présentons un algorithme qui résout le problème **Test Convexité** en $O(n + h \log r)$ où h est le nombre de sommets de $\text{conv}(S)$, et r est le diamètre de S .

Theorem 1. *L'algorithme `QuickHull` calcule l'enveloppe convexe d'un ensemble convexe digital en $O(n)$.*

Démonstration. L'idée ici est de considérer ce qui se passe lorsqu'un point est ajouté à l'enveloppe convexe par l'algorithme `QuickHull`. A tout instant, il est possible de diviser l'espace en trois régions : (Fig. 2).

- L'intérieur de l'enveloppe convexe partielle qui est connu par l'algorithme : Les points à l'intérieur de cette région n'ont plus besoin d'être considéré par l'algorithme et sont donc éliminés
- Une région dans laquelle nous savons qu'aucun point de l'ensemble d'entrée ne peut se trouver.
- Une région dans laquelle peuvent se trouver les points de l'ensemble d'entrée.

Quand un point est ajouté à l'enveloppe convexe, la région à l'intérieur de l'enveloppe convexe dans laquelle les points sont éliminés est agrandie. Il est facile de montrer que la taille de cet incrément est supérieure à la taille totale de la région dans laquelle se trouvent les points restants (Fig. 3). Par symétrie, on peut alors voir qu'à chaque itération de la routine de `QuickHull`, plus de la moitié des points restants est éliminée. Chaque itération prenant un temps linéaire, le temps total de calcul est donc proportionnel à $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots = 2n$.

□

En exécutant l'algorithme `QuickHull` sur un ensemble entier quelconque S , et en arrêtant les calculs si une étape de l'algorithme n'a pas supprimé au moins la moitié des points restants, nous obtenons un algorithme qui s'exécute en temps linéaire et qui aboutit toujours lorsque S est un ensemble convexe

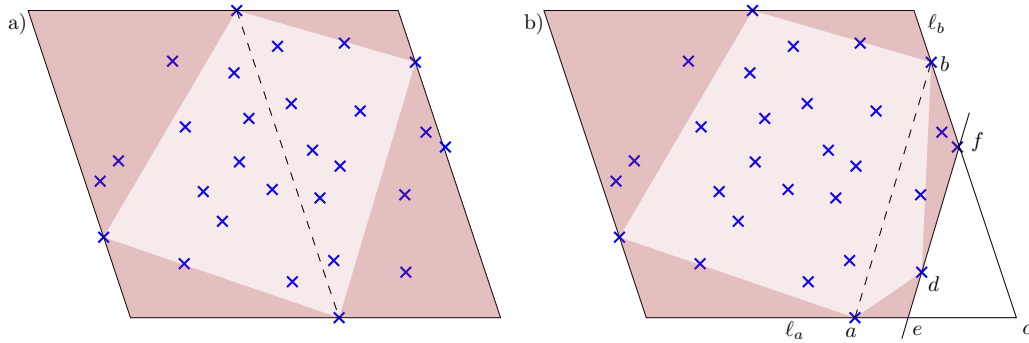


FIGURE 2 Régions de QuickHull. La région dans laquelle les points encore considérés se situent est une union de triangle. L’enveloppe convexe partielle grandit à chaque itération. Les points à l’intérieur ou sur les bords de la nouvelle enveloppe convexe sont alors oubliés.

digital. Cependant, lorsque le calcul se termine, il nous reste à déterminer si l’ensemble est convexe digital ou non. Ceci peut se faire simplement en calculant $|\text{conv}(S) \cap \mathbb{Z}^2|$ en utilisant la formule de Pick [26]. L’ensemble S est alors convexe digital si et seulement si $|\text{conv}(S) \cap \mathbb{Z}^2| = |S|$.

2.2 Polygone convexe digital optimal

Dans cette section, nous considérons la question de reconnaissance de polygone convexe digital. Dans cette version du problème, pour un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points et un entier q , l’objectif est de déterminer l’existence ou non d’un polygone convexe P à q côtés tel que $P \cap \mathbb{Z}^2 = S$. Nous proposons ici un algorithme linéaire permettant de répondre à cette question, et permettant même de trouver la valeur minimale de q tel que P existe.

Problem 1. Minimisation de côtés

Entrée : Un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points donnés par leurs coordonnées.

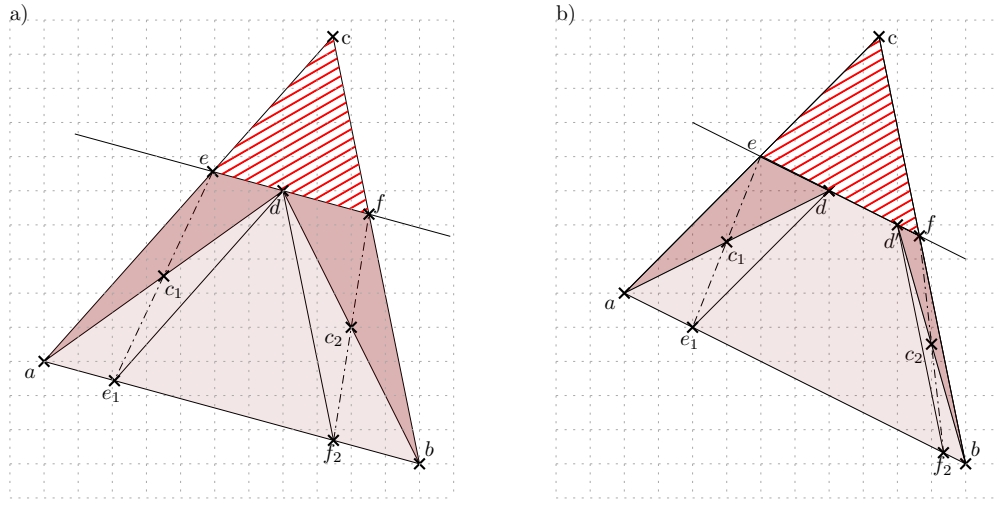


FIGURE 3 Régions symétriques. À chaque étape, on supprime tous les points qui sont à la fois à l'intérieur du triangle $\triangle abc$, et à l'extérieur des triangles $\triangle ade$ et $\triangle dbf$ ($\triangle d'bf$ dans b). En considérant les symétries centrales de centre c_1 et c_2 , chacun des points restants a un symétrique qui est un point entier à l'intérieur du triangle $\triangle abd$ où les points sont supprimés.

Sortie : Un polygone convexe P avec un nombre minimal q de côtés vérifiant $P \cap \mathbb{Z}^2 = S$.

Notons que le problème Minimisation de côtés peut être reformulé à l'aide du problème de séparation polygonale suivant où $IN = S$ et son complémentaire $OUT = \mathbb{Z}^2 \setminus S$ (Fig. 4).

Problem 2. séparation polygonale

Entrée : Un ensemble $IN \subset \mathbb{Z}^2$ et un ensemble $OUT \subset \mathbb{Z}^2$.

Sortie : Un polygone convexe $P \subset \mathbb{R}^2$ avec aussi peu de côtés que possible contenant en son intérieur tous les points de IN et aucun de OUT .

Afin de résoudre le problème de Minimisation de côtés, nous utilisons

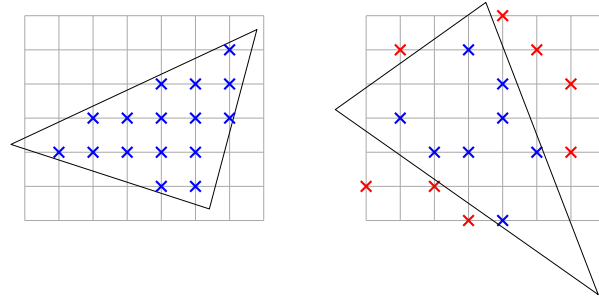


FIGURE 4 Minimisation de côté et Séparation polygonale. À gauche, un exemple représentant une solution au problème de minimisation de côté. L'ensemble représenté par les points bleus est séparé du reste de la grille par le triangle noir. A droite, un exemple du problème de séparation polygonale. Le triangle noir contient tous les points bleus, mais aucun point rouge.

la stratégie suivante qui se divise en trois étapes :

La première étape consiste à tester la convexité digitale de S en temps linéaire. Si S n'est pas un ensemble convexe digital, il n'y a alors pas de solution au problème.

La seconde étape de l'algorithme utilise les $h \leq O(n^{1/3})$ côtés de $\text{conv}(S)$ comme entrée et consiste à réduire l'ensemble de points à séparer de S de $OUT = \mathbb{Z}^2 \setminus S$ à un sous-ensemble fini $OUT' \subseteq OUT$ de $O(n)$ points que nous appelons les joyaux. Cet ensemble est en fait le résultat d'une dilatation un peu particulière de $\text{conv}(S)$. Il s'agit d'une dilatation dans laquelle pour chaque arête c_i de $\text{conv}(S)$ on considère la droite diophantienne parallèle à c_i la plus proche dans la direction opposée à l'emplacement de $\text{conv}(S)$. L'ensemble OUT' est alors égale aux points entiers se situant sur le contour de cette dilatation.

La troisième étape consiste à séparer OUT' de S en utilisant le plus petit

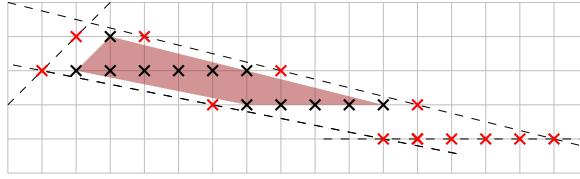


FIGURE 5 Joyaux. En noir, l'ensemble S , son enveloppe convexe est représentée en rouge foncé. La dilatation de $\text{conv}(S)$ permettant d'obtenir les joyaux est représentée en pointillé. Les joyaux sont quant à eux représentés en rouge.

nombre de côtés possible. Pour faire cela, il est possible d'utiliser un algorithme glouton qui ajoute un par un les côtés séparant le plus de points de OUT' en tournant autour de S . Il est possible de montrer qu'avec une stratégie de départs multiples (choisis judicieusement), cette méthode aboutit à une solution optimale après au plus trois départs.

3 Sous-ensembles convexes digitaux

Dans ce chapitre, nous développons des algorithmes qui permettent de détecter des sous-ensembles convexes digitaux. Plus précisément, on s'intéresse à la version digitale du "potato peeling problem" [8] que nous appelons "*digital potato peeling*" et dans lequel l'objectif est, étant donné un ensemble entier S , de trouver le plus grand sous-ensemble de S qui est convexe digital. Ce problème a été posé en 2004, et de premières heuristiques ont été présentées en 2005 [10].

Dans la Section 3.1, nous proposons un encodage du "digital potato peeling problem" dans un graphe orienté acyclique (DAG) qui amène à un algorithme

en $O(n^4 + n^2 \log r)$ qui permet de résoudre la "digital potato peeling problem". L'idée de base de l'algorithme peut être améliorée en abandonnant le DAG pour de la programmation dynamique, et l'algorithme qui en résulte offre une complexité de $O(n^3 + n^2 \log r)$.

Dans la Section 3.2, nous considérons le "*k-digital potato peeling problem*" dans lequel on cherche cette fois la plus grande union de k sous-ensembles convexes digitaux de S . Une fois de plus, nous proposons un encodage du problème dans un DAG. Il en résulte un algorithme de complexité $O(n^{4k+1} + n^2 \log r)$ qui peut être une fois encore améliorée en $O(n^{4k} + n^2 \log r)$ à l'aide de programmation dynamique.

Nous considérerons ici que "le plus grand" fait référence au nombre de points d'un ensemble. Cependant, les algorithmes présentés peuvent être très facilement adaptés pour maximiser l'aire de l'enveloppe convexe, ou même le périmètre.

3.1 Digital Potato Peeling

Dans cette section, nous présentons un algorithme qui permet de résoudre le "digital potato peeling problem" en $O(n^3 + n^2 \log r)$. Le "digital potato peeling problem" est défini comme suit :

Problem 3. *Digital potato peeling*

Entrée : *Un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points entiers donnés par leurs coordonnées.*

Sortie : *Le plus grand sous-ensemble $K \subseteq S$ qui est convexe digital (i.e.,*

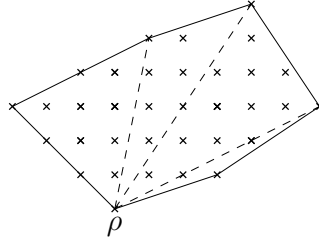


FIGURE 6 Triangulation en éventail. Un ensemble convexe digital, son enveloppe convexe, et la triangulation en éventail autour du point le plus bas de l'ensemble.

$\text{conv}(K) \cap \mathbb{Z}^2 = K$), où "plus grand" se réfère à $|K|$.

Nous remarquons qu'un ensemble convexe digital K peut être représenté par son enveloppe convexe $\text{conv}(K)$, et que les sommets de $\text{conv}(K)$ sont des points entiers appartenant à K . Afin de résoudre le "digital potato peeling problem", au lieu explicitement construire K notre algorithme construit $\text{conv}(K)$. Nous pouvons aussi noter que n'importe quel polygone convexe P possédant k côtés peut être triangulé en utilisant $k - 2$ triangles qui partagent tous un même sommet commun, le sommet le plus bas ρ de P par exemple. On nomme une telle triangulation : *triangulation en éventail* (Fig. 6). Afin de résoudre le problème 3 nous allons d'abord considérer la variante enracinée dans laquelle le point ρ est donné en entrée.

Problem 4. *Problem digital potato-peeling enraciné*

Entrée : *Un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points entiers donnés par leurs coordonnées. On définit ρ comme étant le point le plus bas de S .*

Sortie : *Le plus grand ensemble $K \subseteq S$ qui est convexe digital et qui possède ρ comme point le plus bas.*

L'idée ici est de résoudre la version enracinée du problème pour chacune des n racines possibles.

Dans la version enracinée du problème, il est suffisant de considérer les points de S qui se situe au-dessus de ρ . On dénote cet ensemble S_ρ et on appelle ρ la racine de S_ρ .

Nous considérons maintenant K_i , un sous-ensemble convexe digital de S_ρ dont la racine est ρ . Il est possible de construire $\text{conv}(K_i)$ en accolant les triangles de sa triangulation en éventail dans le sens horaire autour de ρ . Tous les triangles alors utilisés ont des sommets entiers, sont eux-mêmes convexes digitaux et possèdent ρ comme point le plus bas. Maintenant, afin de résoudre la version enracinée du "digital potato peeling problem", il nous faut trouver la série de collages qui amène au plus grand K_i possible.

Encodage dans un DAG Afin d'éviter la confusion avec les termes géométriques, nous appellerons les sommets du graphe *noeuds*, et les arêtes du graphe *arcs*.(Fig. 7).

Le graphe \mathcal{G} est construit de la manière suivante

- Chaque noeud \mathcal{N}_i de \mathcal{G} représente un triangle convexe digital. Réciproquement, tous les triangles convexes digitaux de S sont représentés dans \mathcal{G}
- Il y a un arc \mathcal{A}_{ij} du noeud \mathcal{N}_i vers le noeud \mathcal{N}_j si et seulement si :
 - (i) L'union du triangle Δ_i associé à \mathcal{N}_i et du triangle Δ_j associé à \mathcal{N}_j est un quadrilatère convexe q_{ij} , et si
 - (ii) Δ_i est le premier triangle des deux dans le sens horaire dans la

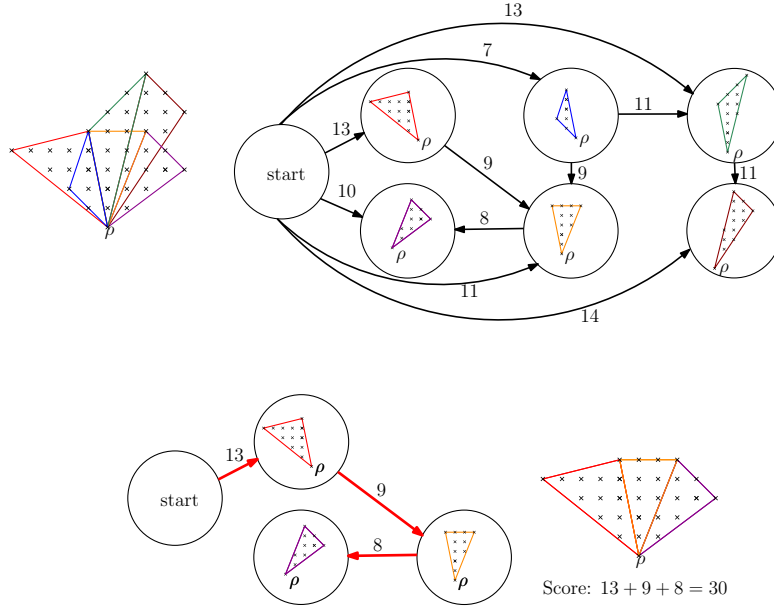


FIGURE 7 Graphe du "peeling" enraciné. Exemple d'un DAG construit pour résoudre le "potato peeling problem" enraciné pour six triangles. Afin que deux triangles soient connectés par un arc dans le graphe, ils doivent avoir une arête en commun qui part de la racine ρ , et leur union doit être un polygone convexe. Le poids de chaque arc est égal au nombre de points entiers ajouté par le triangle le plus à droite des deux.

triangulation en éventail de q_{ij} .

- Le poids d'un arc \mathcal{A}_{ij} est égal au nombre de points entiers dans Δ_j qui ne sont pas dans Δ_i , il s'agit du nombre de points entiers dans Δ_j moins le nombre de points entiers sur l'arête commune de Δ_i et Δ_j .
- Un noeud de départ \mathcal{A}_\emptyset est ajouté à \mathcal{G}
- Des arcs d'initialisations $\mathcal{A}_{\emptyset,i}$ sont ajoutés depuis le noeud de départ vers chaque autre noeud \mathcal{N}_i . Leur poids est égal au nombre de points entier dans Δ_i

Résoudre le "digital potato-peeling problem" enraciné est équivalent à trou-

ver le plus long chemin dans \mathcal{G} .

Maintenant, afin de résoudre le "digital potato peeling problem", il suffit de résoudre la version enracinée du problème pour chacune des n racines possibles.

3.2 k-Digital Potato Peeling

Dans cette section, nous nous intéressons et proposons un algorithme permettant de résoudre le problème du "k-digital potato peeling".

Problem 5. *k-digital potato-peeling*

Entrée : Un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ de n points entiers donnés par les coordonnées.

Sortie : k sous-ensembles $K_i \in S$ qui sont convexes digitaux (i.e., $\text{conv}(K) \cap \mathbb{Z}^2 = K$), tel que $K = \bigcup_i K_i$ soit le plus grand possible, où "plus grand" fait référence à $|K|$.

Nous présentons ici un algorithme qui permet de résoudre le "k-digital potato peeling" en $O(n^{4k} + n^2 \log r)$. le "k-potato peeling" introduit de nouvelles complications par comparaison au simple "potato peeling problem". Quelques-unes de ces complications viennent du fait que les enveloppes convexes de deux ensembles dans une solution peuvent s'intersecter un nombre arbitraire de fois. Aussi, des trous peuvent être présents au milieu de l'union de plusieurs enveloppes convexes(Fig. 8).

Une fois de plus, comme dans la Section 3.1, nous représentons un ensemble convexe digital par son enveloppe convexe. Nous remarquons que n'importe quel polygone convexe peut être séparé en deux lignes brisées x -monotone que nous appelons *Enveloppe supérieure* et *Enveloppe inférieure* (Fig. 9).

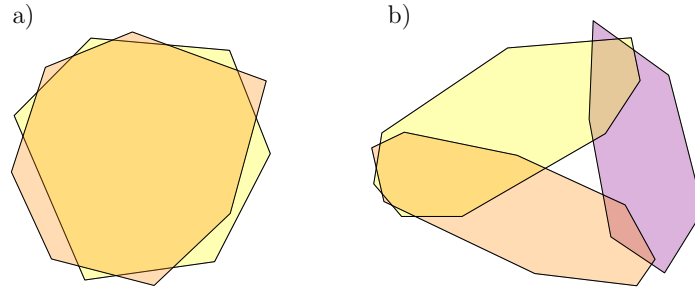


FIGURE 8 solutions du k-peeling. Les enveloppes convexes peuvent s'intersecter un nombre arbitraire de fois comme montré en a). De plus, pour trois polygones convexes ou plus, des trous peuvent apparaître comme montré en b).

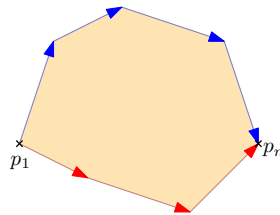


FIGURE 9 Exemple d'enveloppe supérieure et inférieure. L'enveloppe supérieure (en bleu) et l'enveloppe inférieure (en rouge). Toutes deux vont du point le plus à gauche (p_1) jusqu'au point le plus à droite (p_n).

Pour que deux lignes brisées x -monotone PL_1, PL_2 allant de p_1 vers p_n représentent une enveloppe convexe, il est nécessaire et suffisant qu'une ligne brisée tourne toujours à droite tandis que l'autre tourne toujours à gauche. En utilisant cette représentation, il est possible de construire incrémentalement n'importe quel polygone convexe. Au cours de la construction incrémentale des enveloppes convexes supérieures et inférieures, il est possible d'assurer la convexité à partir d'informations locales en testant simplement l'orientation de l'angle formé lors de l'accolement de deux arêtes. Cela signifie qu'il est possible de s'assurer de la construction d'un polygone convexe à l'aide de

cette représentation en ne connaissant à n'importe quel instant qu'au plus un nombre fini d'arêtes. Nous savons que la construction est terminée lorsque les deux lignes brisées terminent au même point.

Calcul du nombre de point à l'intérieur de l'enveloppe convexe

Lorsque l'on choisit d'accoler une arête à une des deux lignes brisées, nous choisissons d'ajouter une arête à la ligne brisée la *moins avancée* des deux. Nous définissons *moins avancée* de la manière suivante :

Étant donné deux arêtes e_1 and e_2 respectivement délimitées par les points $(p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2))$, et $(p_3(x_3, y_3), p_4(x_4, y_4))$ tel que $xmax_{e_1} = Max(x_1, x_2)$ et $xmax_{e_2} = Max(x_3, x_4)$. e_1 (resp. e_2) est l'arête la moins avancée si et seulement si $xmax_{e_1} \leq xmax_{e_2}$ (resp. $xmax_{e_2} \leq xmax_{e_1}$). En d'autres termes, l'arête la moins avancée est celle avec la plus petite coordonnée maximale pour x .

Nous appelons *envergure horizontale* d'un objet géométrique O le plus petit intervalle I tel que pour chaque point $p(x, y) \in O$, $x \in I$.

Considérons notre représentation arête par arête d'un polygone convexe à l'aide des enveloppes supérieures et inférieures. A chaque étape seulement deux arêtes sont connues : Une pour l'enveloppe supérieure, et une pour l'inférieure. On définit I_u (resp. I_l) comme étant l'envergure horizontale de l'arête connue pour l'enveloppe supérieure (resp. inférieure), et $I = I_u \cap I_l$. Dénotons H_u (resp. H_l) le demi-plan situé en dessous de l'arête supérieure (resp. au-dessus de l'arête inférieure), et dénotons V la bande verticale de hauteur ∞ dont l'envergure horizontale est I . Afin de calculer la surface à l'intérieur de P ,

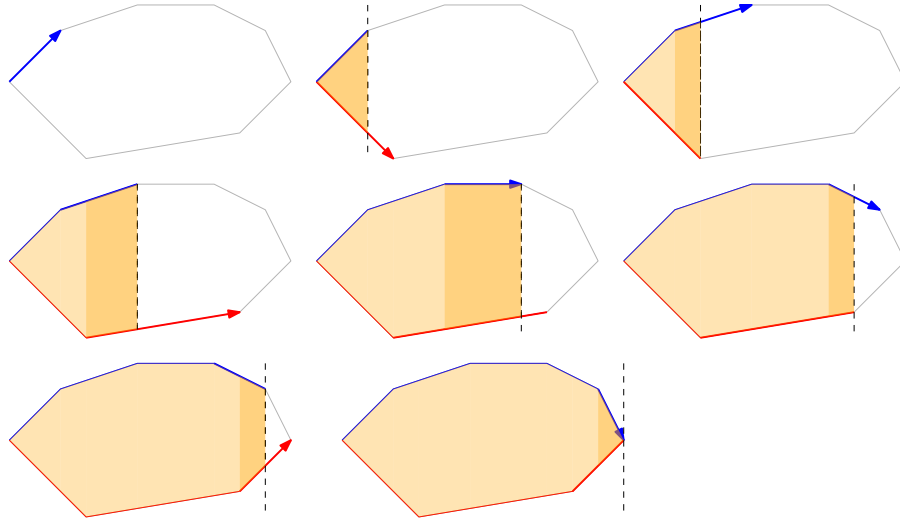


FIGURE 10 Calcul de la surface. Des deux arêtes, seule la moins avancée est modifiée. Ensuite, le trapèze (en orange foncé) situé entre l'arête inférieure et supérieure est calculé.

nous pouvons, lorsqu'une nouvelle arête est ajoutée, calculer le trapèze défini par $H_u \cap H_l \cap V$ (Fig. 10). P est égal à l'union de ces trapèzes.

Cette méthode peut être généralisée pour calculer l'union de k polygones convexes (Fig. 11).

Il est possible d'encoder cette représentation dans un DAG dans lequel chaque noeud représente k couples d'arêtes et dont les arcs représentent les changements d'une arête, nécessairement l'arête la moins avancée. Une attention particulière doit être portée aux points entiers à l'intérieur de chaque tranche représentée par chaque noeud afin de s'assurer que le résultat final est bien une union d'ensembles convexes digitaux. Le DAG obtenu contient alors $O(n^{4k})$ noeuds et $O(n^{4k+1})$ arcs.

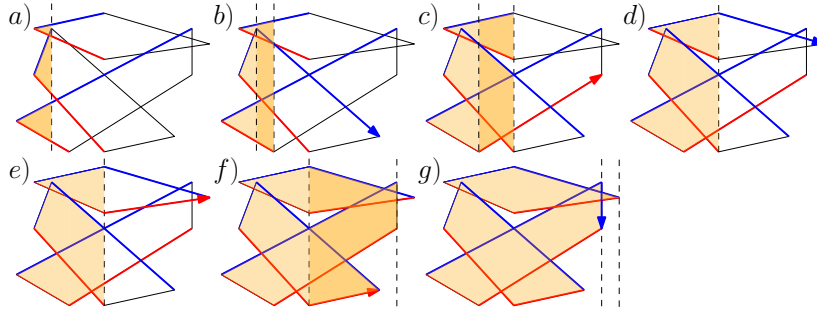


FIGURE 11 Visualisation de l'algorithme du k-peeling. Seule la surface dans le domaine d'abscisse commune à toutes les arêtes est calculée à chaque étape. Quand deux arêtes d'un même polygone partent du même point (comme dans *a*), on étend l'abscisse de ces arêtes jusqu'à $-\infty$. De même, quand deux arêtes d'un même polygone arrivent au même point (comme dans *f*) et *g*), on étend l'envergure de ces arêtes jusqu'à ∞ .

4 Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié le problème de détection de la convexité digitale. Nous avons aussi étudié deux problèmes liés à ce sujet et présenté le premier algorithme générique pour la détection d'ensembles convexes digitaux en temps linéaire, et la résolution du problème du polygone convexe digital optimal en deux dimensions. L'approche utilisée se base sur deux propriétés clés.

La première propriété est que l'algorithme `QuickHull` s'exécute en un temps linéaire par rapport au nombre de points en entrée pour un ensemble convexe digital. Une question qui émerge naturellement de ce résultat concerne la complexité de l'algorithme `QuickHull` sur les ensembles convexes digitaux en trois dimensions. Les résultats connus sur le nombre f de faces d'un ensemble convexe digital S en dimension trois, $f = O(V^{1/2})$, où V est le volume

de $\text{conv}(S)$ [1] constituent une piste prometteuse afin de prouver que le pire cas pour l'algorithme `QuickHull` sur des ensembles convexes digitaux en trois dimensions n'est pas $O(n^2)$, cette approche ne semble pas suffisante afin de prouver (ou contredire) le fait que l'enveloppe convexe d'un ensemble convexe digital en trois dimensions puisse être obtenue en temps linéaire.

La deuxième propriété utilisée a permis de réduire le problème de minimisation d'arêtes à un problème de séparation polygonale dont la taille est linéaire par rapport à la taille du problème d'origine. Cette propriété est étroitement liée aux équations diophantiennes linéaires et au théorème de Pick. Par conséquent, le manque de résultats similaires en trois dimensions rend l'aboutissement d'une approche similaire en trois dimensions peu probables.

Nous avons ensuite détourné notre attention de la recherche de plus petits polygones convexes englobant pour la porter vers celle de plus grands ensembles convexes inclus. Cela a abouti sur la présentation du premier algorithme polynomial qui s'exécute en approximativement $O(n^3)$ afin de résoudre le "digital potato peeling problem", ainsi que le premier algorithme polynomial pour le "k-digital potato peeling problem". L'approche utilisée pour résoudre le "digital potato peeling problem" est semblable à celle utilisée pour résoudre le "optimal island problem" [3], avec une adaptation liée au test de la convexité digitale. Cependant, en utilisant les mêmes méthodes d'encodage du problème dans un DAG, mais en changeant de représentation d'un ensemble convexe digital, nous avons pu proposer un algorithme polynomial permettant de résoudre le "k-digital potato peeling problem". Nous remarquons que l'approche utilisée peut être étendue afin de résoudre une extension du "optimal island

problem" où l'objectif serait de trouver le plus grand union de k îles monochromatiques au lieu de simplement la plus grande île monochromatique.

Curieusement, à notre connaissance, d'autres problèmes plus simples que le "digital potato peeling problem" et qui peuvent s'y réduire n'ont pas d'algorithmes plus efficaces que celui présenté ici afin de résoudre le "potato peeling problem". Étant donné un ensemble digital S , un de ces problèmes consiste à trouver le plus grand triangle convexe digital (c'est-à-dire un ensemble convexe digital dont l'enveloppe convexe n'est constituée que de trois sommets). Malgré l'apparente simplicité du problème, il n'est pas simple de trouver une approche plus efficace que celle consistant simplement à tester tous les triplets de points dans S . Cette méthode aboutit à la même complexité que l'algorithme présenté ici pour résoudre le "digital potato peeling problem".

Un autre exemple, pouvant être considéré comme plus intéressant, est celui de la reconnaissance d'ensembles égaux à l'union de deux ensembles convexes digitaux. Ce problème peut être résolu en approximativement $O(n^8)$ en utilisant l'algorithme destiné à résoudre le "2-digital potato peeling problem", il semble peu probable que cette méthode soit optimale. De plus, le problème équivalent en géométrie continue peut être résolu en $O(n)$ [28] alors même que le problème du "potato-peeling" dans le continu ne peut être résolu à ce jour qu'en $O(n^7)$ [8]. Bien que comparer les complexités algorithmiques des variantes digitales et continues d'un même problème n'est pas pertinent du fait de la nature très différente des entrées (un ensemble dans le monde digital, contre le contour d'un polygone dans le monde continu) l'apparente simplicité du problème en géométrie continue semble être une indication que

de meilleures approches doivent être possible dans le monde digital. De plus, bien que l'approche utilisée dans le continu afin de reconnaître l'union de deux polygones convexes ne puisse être directement appliquée pour résoudre le problème dans le monde digital, notamment parce qu'un contour unique n'est pas clairement défini pour un ensemble digital, des approches similaires méritent d'être explorées.

Au-delà du fait que l'essence de la géométrie digitale qui consiste à traiter les problèmes avec des données digitales peut conduire à de meilleurs résultats, étudier les connexions entre les problèmes de géométrie algorithmique et de géométrie digitale, tels que les problèmes de couvertures et de packing [4, 18] par exemple pourrait aboutir à la création de nouveaux outils pour les deux communautés.

REFERENCES

- [1] George E ANDREWS. « A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 106.2 (1963), p. 270-279.
- [2] Alexander I BARVINOK. « A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed ». In : *Mathematics of Operations Research* 19.4 (1994), p. 769-779.
- [3] Crevel BAUTISTA-SANTIAGO et al. « Computing optimal islands ». In : *Operations Research Letters* 39.4 (2011), p. 246-251.
- [4] Peter BRASS, William OJ MOSER et János PACH. *Research problems in discrete geometry*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [5] Jack E BRESENHAM. « Algorithm for computer control of a digital plotter ». In : *IBM Systems journal* 4.1 (1965), p. 25-30.
- [6] Srečko BRLEK et al. « Lyndon + Christoffel = digitally convex ». In : *Pattern Recognition* 42.10 (2009). Selected papers from the 14th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery 2008, p. 2239-2246. ISSN : 0031-3203. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2008.11.010>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320308004706>.
- [7] Donald R CHAND et Sham S KAPUR. « An algorithm for convex polytopes ». In : *Journal of the ACM (JACM)* 17.1 (1970), p. 78-86.
- [8] Jyun S. CHANG et Chee K. YAP. « A polynomial solution for the potato-peeling problem ». In : *Discrete & Computational Geometry* 1.2 (1986), p. 155-182. ISSN : 1432-0444.
- [9] Jean-Marc CHASSERY. « Discrete convexity : Definition, parametrization, and compatibility with continuous convexity ». In : *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 21.3 (1983), p. 326-344. ISSN : 0734-189X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0734-189X\(83\)80047-4](https://doi.org/10.1016/S0734-189X(83)80047-4). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734189X83800474>.
- [10] Jean-Marc CHASSERY et David COEURJOLLY. « Optimal shape and inclusion ». In : *Mathematical Morphology : 40 Years On*. Springer, 2005, p. 229-248.

- [11] Bidyut Baran CHAUDHURI et Azriel ROSENFELD. « ON THE COMPUTATION OF THE DIGITAL CONVEX HULL AND CIRCULAR HULL OF A DIGITAL REGION ». In : *Pattern Recognition* 31.12 (1998), p. 2007-2016. ISSN : 0031-3203. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0031-3203\(98\)00065-X](https://doi.org/10.1016/S0031-3203(98)00065-X). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003132039800065X>.
- [12] Isabelle DEBLED-RENNESON, Jean-Luc RÉMY et Jocelyne ROUYER-DEGLI. « Detection of the discrete convexity of polyominoes ». In : *Discrete Applied Mathematics* 125.1 (2003). 9th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCi 2000), p. 115-133. ISSN : 0166-218X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(02\)00227-5](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(02)00227-5). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X02002275>.
- [13] G Lejeune DIRICHLET. « Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. » In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1850.40 (1850), p. 209-227.
- [14] Eugene EHRHART. « Geometrie diophantienne-sur les polyedres rationnels homothetiques an dimensions ». In : *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences* 254.4 (1962), p. 616.
- [15] Jiandong FANG et al. « Digital geometry image analysis for medical diagnosis ». In : *proceedings of the 2006 ACM symposium on applied computing*. 2006, p. 217-221.
- [16] AR FORREST. « Ii. current developments in the design and production of three-dimensional curved objects-computational geometry ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 321.1545 (1971), p. 187-195.
- [17] Ronald L. GRAHAM. « An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set ». In : *Info. Pro. Lett.* 1 (1972), p. 132-133.
- [18] Xiaodong JIA et al. « Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities ». In : *Powder Technology* 174.1-2 (2007), p. 10-13.
- [19] Chul E. KIM et Azriel ROSENFELD. « Convex Digital Solids ». In : *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 4.6 (1982), p. 612-618. DOI : [10.1109/](https://doi.org/10.1109/)

- TPAMI.1982.4767314. URL : <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1982.4767314>.
- [20] Chul E. KIM et Azriel ROSENFELD. « Digital Straight Lines and Convexity of Digital Regions ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 4.2 (1982), p. 149-153. DOI : [10.1109/TPAMI.1982.4767221](https://doi.org/10.1109/TPAMI.1982.4767221). URL : <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1982.4767221>.
- [21] Kazuo KISHIMOTO. « Characterizing Digital Convexity and Straightness in Terms of Length and Total Absolute Curvature ». In : *Computer Vision and Image Understanding* 63.2 (1996), p. 326-333. ISSN : 1077-3142. DOI : <https://doi.org/10.1006/cviu.1996.0022>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077314296900223>.
- [22] Gisela KLETTE. « A Comparative Discussion of Distance Transforms and Simple Deformations in Image Processing ». In : (2003).
- [23] Reinhard KLETTE et Azriel ROSENFELD. *Digital geometry : Geometric methods for digital picture analysis*. Morgan Kaufmann, 2004.
- [24] Fu LIU. « On positivity of Ehrhart polynomials ». In : *Recent trends in algebraic combinatorics*. Springer, 2019, p. 189-237.
- [25] H. MINKOWSKI. *Geometrie der Zahlen*. Geometrie der Zahlen vol. 2. B.G. Teubner, 1910. URL : <https://books.google.fr/books?id=MusGAAAAYAAJ>.
- [26] Georg PICK. « Geometrisches zur Zahlenlehre ». In : *Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medicinischen Vereines für Böhmen "Lotos" in Prag*. v.47-48 1899-1900 (1899).
- [27] Alexander SCHRIJVER. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998.
- [28] Thomas SHERMER. « On recognizing unions of two convex polygons and related problems ». In : *Pattern Recognition Letters* 14.9 (1993), p. 737-745.
- [29] James Joseph SYLVESTER. *The Laws of Verse : Or Principles of Versification Exemplified in Metrical Translations, Together with an Annotated Reprint of the Inaugural Presidential Address to the Mathematical and*

Physical Section of the British Association at Exeter. Longmans, Green,
1870.

