



**HAL**  
open science

# Etude numérique du problème de couplage de l'équation de Darcy avec l'équation de convection-diffusion-réaction instationnaire

Rebecca El Zahlaniyeh

► **To cite this version:**

Rebecca El Zahlaniyeh. Etude numérique du problème de couplage de l'équation de Darcy avec l'équation de convection-diffusion-réaction instationnaire. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Nord - Paris XIII; Université Saint-Joseph (Beyrouth). Faculté des Sciences, 2021. Français. NNT : 2021PA131059 . tel-03874950

**HAL Id: tel-03874950**

**<https://theses.hal.science/tel-03874950v1>**

Submitted on 28 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD  
École Doctorale Sciences, Technologies, Santé Galilée

et

UNIVERSITÉ SAINT-JOSEPH DE BEYROUTH  
École Doctorale Sciences, d'Ingénierie et de Technologie

---

Étude numérique du problème de  
couplage de l'équation de Darcy avec  
l'équation de convection–diffusion–  
réaction instationnaire

---

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

**Rebecca EL ZAHLANIYEH**

pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR EN MATHÉMATIQUE

soutenue le 07 Décembre 2021 devant le jury d'examen composé de :

**BENKHALDOUN Fayssal**, Université Sorbonne Paris Nord ..... Président du jury  
**BECKER Roland**, Université de Pau et des Pays de l'Adour ..... Rapporteur  
**HILD Patrick**, Université Paul Sabatier-Toulouse 3 ..... Rapporteur  
**EL ALAOUI Linda**, Université Sorbonne Paris Nord ..... Examinatrice  
**MANSOUR Gihane**, Université Saint-Joseph de Beyrouth ..... Examinatrice  
**OMNES Pascal**, Université Sorbonne Paris Nord ..... Directeur de thèse  
**SAYAH Toni**, Université Saint-Joseph de Beyrouth ..... Directeur de thèse  
**CHALHOUB Nancy**, Université Saint-Joseph de Beyrouth ... Co-directrice de thèse



# Résumé

On considère le couplage de l'équation de Darcy avec l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire. On présente deux formulations variationnelles continues.

On s'intéresse à la dérivation des estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori* pour la discrétisation des équations du problème par deux méthodes d'éléments finis en espace “RT<sub>0</sub>” et “Mini-élément” et un schéma d'Euler implicite en temps.

Les estimations d'erreur *a priori* démontrent une précision d'ordre 1 du schéma.

Les estimations d'erreurs *a posteriori* sont établies avec deux types d'indicateurs d'erreur : de discrétisation en temps et de discrétisation en espace. Par la suite, on démontre que l'estimation d'erreur *a posteriori* est efficace.

Enfin, on montre des résultats numériques de validation à l'aide du logiciel FreeFem++.

**Mots clés :** Équation de Darcy, équation de convection–diffusion–réaction instationnaire, méthode des éléments finis, mini élément, Raviart-Thomas, estimation d'erreur *a priori*, estimation d'erreur *a posteriori*, algorithme adaptatif.



# Abstract

We consider the Darcy equation coupled with the time dependent convection–diffusion–reaction equation. We present two continuous variational formulations. We derive *a priori* and *a posteriori* error estimates for the discretization of the equations of the problem by two finite element methods in space “RT<sub>0</sub>” and “Mini-element” and the implicit Euler method for the discretization in time.

The *a priori* error estimates demonstrate the first-order convergence of the schemes.

The *a posteriori* error estimates are obtained with two types of computable error indicators, the first one linked to the time discretization and the second one to the space discretization. We prove the optimality of the *a posteriori* error estimates.

Numerical investigations are performed and presented with the FreeFem++ software.

**Keywords :** Darcy’s equation, convection–diffusion–réaction equation, finite element method, Mini-element, Raviart-Thomas, *a priori* error estimates, *a posteriori* error estimates, adaptive algorithm.



# Remerciements

C'est avec plaisir que je réserve cette page en signe de remerciements et de profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidée dans l'achèvement de ce mémoire.

Ce travail de thèse a été réalisé grâce aux efforts de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude : "L'homme seul ne compte pas".

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Professeur Pascal Omnes et Professeur Toni Sayah, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de parrainer ce travail doctoral.

Je voudrais remercier Pr. Toni Sayah pour sa patience, son aide, sa disponibilité malgré toutes les responsabilités dont il a la charge. C'est grâce à sa persévérance et à sa rigueur que j'ai été initiée et formée au métier de la recherche. Ses compétences et son dynamisme ont suscité en moi une grande admiration et un profond respect pour sa personne. Vos conseils ont été une source d'appui pour mener à bien ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements au Pr. Pascal Omnes pour son accueil au sein du Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, pour sa bonne humeur, pour sa gentillesse et pour son amabilité. Je lui suis profondément reconnaissante pour son encadrement scientifique, pour sa disponibilité à répondre à toutes mes questions et sûrement pour ses conseils. Ses qualités au niveau professionnel et humain me serviront d'exemple à imiter dans l'avenir.

J'adresse de chaleureux remerciements à ma codirectrice de thèse, Madame Nancy Chalhoub Nawfal pour l'attention qu'elle portait à mes travaux à tout instant, pour sa perspicacité et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec elle.

Je remercie le conseil de la recherche de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth d'avoir financé ce travail doctoral.

Merci à tous les professeurs du département de mathématiques à l'université Saint-Joseph de Beyrouth, en particulier Madame Gihane Mansour Abou Jaoudeh, directrice du département, Madame Bodgi Tarazi, responsable du master EDP et monsieur Rami El Haddad, responsable du master Science actuarielle et financière.



J'exprime ma gratitude à tous mes amis : Nelly, Ghina, Rim, Anna-Maria, Rancy, Hussein, Rassoul, Sally, Hassan, Maria, Stéphanie, Mireille, Estrella, Gaele, Souraya et Eliane. Je vous remercie de m'avoir soutenue et encouragée dans les moments difficiles. Un merci particulier à Rim Dbaiassy qui a toujours répondu à mes questions avec une patience infinie.

À titre personnel, je remercie chaleureusement Nelly Makary pour son encouragement continu depuis le début de notre amitié. Je tiens à la remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout au long de ma thèse. Je lui suis infiniment reconnaissante de m'avoir accueillie en France et pour son hospitalité.

Enfin, j'arrive à ceux dont la présence dépasse largement le contexte de la thèse. Merci à mes parents, à mes soeurs et à mon frère. Sans eux, je n'aurais sans doute pas réussi à aller jusqu'au bout. Je les remercie pour leur amour infini et leur encouragement continu tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Maman, je savais toujours que tes prières et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de cette période.

Papa, dans ce mémoire, vous pouvez trouver le fruit de toutes vos peines et tous vos efforts.

Que celles et ceux que j'aurais oubliés ici me pardonnent !

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Problème continu et discret</b>	<b>9</b>
1.1 Notations . . . . .	9
1.2 Rappel . . . . .	12
1.3 Étude du problème continu . . . . .	13
1.3.1 Formulations variationnelles . . . . .	13
1.3.2 Première formulation variationnelle . . . . .	15
1.3.3 Deuxième formulation variationnelle . . . . .	17
1.4 Étude du problème discret . . . . .	17
1.4.1 Cadre discret . . . . .	17
1.4.2 Première formulation variationnelle discrète . . . . .	20
1.4.3 Deuxième formulation variationnelle discrète . . . . .	21
1.4.4 Existence et unicité de la solution discrète . . . . .	23
<b>2 Estimation d'erreur <i>a priori</i></b>	<b>25</b>
2.1 Opérateurs d'interpolation . . . . .	25
2.2 Estimation <i>a priori</i> de l'erreur de la première formulation variationnelle . .	27
2.3 Estimation <i>a priori</i> de l'erreur de la deuxième formulation variationnelle .	36
<b>3 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i></b>	<b>41</b>
3.1 Construction des indicateurs d'erreurs . . . . .	41
3.2 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> du premier schéma . . . . .	43
3.2.1 Résidus pour le problème de Darcy . . . . .	44
3.2.2 Résidu pour l'équation de convection-diffusion-réaction . . . . .	45
3.2.3 Définition des indicateurs . . . . .	47
3.2.4 Borne supérieure de l'erreur . . . . .	49
3.2.5 Efficacité des indicateurs . . . . .	65
3.3 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> du deuxième schéma . . . . .	81
3.3.1 Résidus pour le problème de Darcy . . . . .	81
3.3.2 Résidu pour l'équation de convection-diffusion-réaction . . . . .	83
3.3.3 Borne supérieure de l'erreur . . . . .	89
3.3.4 Efficacité des indicateurs . . . . .	101

<b>4 Simulations numériques adaptatives</b>	<b>113</b>
4.1 Premier cas test numérique . . . . .	118
4.1.1 Premier schéma . . . . .	118
4.1.2 Deuxième schéma . . . . .	121
4.1.3 Comparaison des deux schémas . . . . .	134
4.2 Deuxième cas test numérique . . . . .	136
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>

# Introduction

## Motivations

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent par exemple en dynamique des structures, en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en thermique, etc. Quelques-unes de leurs solutions exactes sont connues mais dans la très grande majorité des cas les solutions de ces équations sont inconnues. C'est dans ce but que de nombreuses recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour pouvoir approcher les solutions de ces équations. Le but de ces méthodes numériques est d'approcher les solutions par des fonctions appartenant à un espace fonctionnel de dimension finie.

Plusieurs problèmes se présentent dans la résolution approchée de ces équations. Tout d'abord, il est important de trouver une bonne estimation de la solution exacte ; en d'autres termes, il faut que la solution approchée soit de bonne qualité. Ainsi, si la solution approchée est de bonne qualité alors l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est petite. Cette question est liée à la précision de la méthode numérique.

De plus, il est nécessaire de bien utiliser les ressources informatiques. Effectivement, la solution d'un problème physique peut présenter un comportement local dû par exemple à des conditions de bord, à la présence de termes sources ou de singularités entre autres causes. Pour cette raison, on raffine ou on déraffine le maillage dans les régions nécessaires de manière que l'erreur globale soit uniformément répartie sur tout le domaine.

Afin de traiter ces questions, l'analyse d'erreur *a posteriori* est un outil particulièrement adapté. En effet, les estimations d'erreur *a posteriori* ont pour but de donner des bornes sur l'erreur entre l'approximation numérique et la solution exacte, ce qui garantit la qualité de l'approximation numérique. Ces bornes peuvent être calculées en pratique puisqu'elles ne dépendent que de la solution numérique calculée et du maillage. De plus, ces bornes sont composées de quantités locales qui permettent de distinguer les zones où l'on doit raffiner le maillage. Cette analyse peut aussi fournir des critères d'arrêt lorsque des méthodes itératives sont utilisées pour résoudre les systèmes linéaires et non-linéaires d'équations algébriques qui résultent de la discrétisation.

En outre, pour réaliser des calculs efficaces, il est important de distinguer différentes composantes de l'erreur. En d'autres termes, dans le cas d'un problème instationnaire, il faut ajuster les paramètres de calcul de sorte que l'erreur provenant de la discrétisation

en espace et en temps soient de grandeur similaire et distribuées de façon équilibrée, cf. Verfürth [51] et Ern et Vohralík [33].

## Problème de Darcy

L'étude des milieux poreux est un domaine de recherche très actif du fait du large champ de ses applications. Par exemple, en mécanique des fluides, l'étude de transport, de l'écoulement de la propagation d'agent polluant, dans l'industrie du pétrole, en génie chimique .... La loi expérimentale de Darcy a été établie en 1856 par Henry Darcy, après qu'il eut réalisé diverses expérimentations visant à déterminer les lois régissant "l'écoulement de l'eau à travers le sable".

La loi de Darcy ainsi établie est une loi physique qui reste jusqu'à présent un élément essentiel de la description mathématique de l'écoulement des fluides dans un milieu poreux. Cette loi peut enfin éclairer des phénomènes biologiques et processus de type biomécanique impliquant la circulation d'un fluide dans des tissus vivants et poreux.

Nous écrivons ci-dessous l'équation de Darcy dont les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  et où  $\nu$ , représentant la viscosité du fluide et  $\mathbf{f}$ , représentant la densité volumique des forces extérieures peuvent dépendre d'une variable  $C$  représentant selon les circonstances soit une concentration soit la température :

$$\nu(C(\mathbf{x}, t))\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, C(\mathbf{x}, t)). \quad (1)$$

Le problème de Darcy est le sujet de nombreuses publications. Par exemple, les équations de Darcy non linéaires avec viscosité dépendant de la pression ont été étudiées par Rajagopal [46] ou Ahusborde, Azaïez, Belgacem et Bernardi [5]. De plus, un couplage du système de Darcy avec l'équation de la chaleur, où la viscosité est constante mais la force extérieure dépend de la température (modèle de type Boussinesq [17]), a été analysé par Bernardi, Maarouf et Yacoubi [16] et discrétisé par la méthode spectrale.

Un couplage similaire mais dans lequel la viscosité et la force extérieure dépendaient de la température (ou de la concentration) a été analysé récemment par Bernardi et al. [12].

## Équation de convection–diffusion–réaction

L'équation de convection–diffusion–réaction exprime la conservation d'une certaine quantité (concentration d'une certaine substance dans un milieu par exemple) au cours de ses variations en espace et en temps. Cette équation se rencontre également dans la modélisation du transfert de chaleur à travers un milieu conducteur, ou du transport d'un polluant dans le sous-sol ou dans l'atmosphère. C'est l'un des modèles les plus fréquemment rencontrés dans les sciences et l'ingénierie. Il décrit comment la température ou la concentration d'une ou de plusieurs substances (par exemple des polluants) dans un milieu change sous l'influence de trois processus, à savoir, la convection, la diffusion et la

réaction. La convection se réfère au déplacement par advection d'une substance dans un milieu avec un mouvement d'ensemble (par exemple le courant d'une rivière ou le vent dans l'atmosphère). La diffusion est le mouvement de la substance à partir d'une zone de forte concentration vers une zone de faible concentration, ce qui a pour effet de tendre vers la distribution uniforme de la substance. Une réaction chimique est un processus local qui aboutit à l'interconversion des substances chimiques. Dans les modèles les plus simples, on ne considère que la disparition de la substance considérée avec un taux proportionnel à la concentration.

L'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire dont l'inconnue est la concentration  $C$ , est donnée par

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \alpha \Delta C(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla C(\mathbf{x}, t) + r_0 C(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

où  $\alpha$  est la constante de diffusion,  $r_0$  est un réel positif et  $g$  est une fonction donnée.

Dans cette équation,  $-\alpha \Delta C$  représente le terme de diffusion,  $\mathbf{u} \cdot \nabla C$  représente le terme de convection et  $r_0 C$  représente le terme de réaction.

## Problème de Darcy couplé avec l'équation de convection–diffusion instationnaire

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude théorique et numérique du problème de couplage de l'équation de Darcy avec l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire. Soit  $\Omega$  un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière lipschitzienne qu'on notera  $\Gamma = \partial\Omega$ . On considère un intervalle  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  où  $T$  est une constante positive.

Le système d'équations est le suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \nu(C(\mathbf{x}, t))\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, C(\mathbf{x}, t)) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \alpha \Delta C(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) C(\mathbf{x}, t) \\ + r_0 C(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ C(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ C(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant sur  $\Gamma$ . Les inconnues de ce système sont : le vecteur vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}$ , la pression  $p$ , et la concentration  $C$  du fluide. La fonction  $\mathbf{f}$  représente la densité volumique des forces extérieures qui dépend de la concentration  $C$ ,

et  $g$  représente une source de concentration externe. On suppose que  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$ ,  $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , et que les coefficients  $\alpha$  et  $r_0$  sont des constantes positives. La viscosité  $\nu$  est une fonction positive, bornée et minorée par une constante strictement positive, qui dépend de la concentration  $C$ .

Pour simplifier, une condition aux limites de Dirichlet homogène est prescrite sur la concentration  $C$ , mais l'analyse effectuée peut être facilement étendue à une condition aux limites non-homogène.

Ce problème possède plusieurs applications pratiques comme la propagation au cours du temps des déchets nucléaires dans un milieu souterrain (milieu poreux).

## Méthode des éléments finis

En pratique, la solution exacte de ces équations est très difficile à trouver, d'où la nécessité des méthodes permettant d'approcher cette solution, comme la méthode des éléments finis. Cette méthode est l'une des nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles modélisant des problèmes de la physique, de la biologie, etc.

Le nom de la méthode a été proposé par Clough (1960). On trouve dans l'introduction des articles de Oden [44, 45], l'historique du développement de cette méthode du point de vue des ingénieurs.

La discrétisation consiste à découper le domaine  $\Omega$  en des sous-domaines polygonaux ou polyédriques par morceaux (dans le cas où  $\Omega$  n'est lui-même pas polygonal ou polyédrique il y a donc une approximation de la géométrie). Ce pavage du domaine se nomme "maillage" et les pavés sont les éléments du maillage. Une fois le maillage défini, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la méthode des éléments finis, cet espace est déterminé par des fonctions définies sur les éléments du maillage du domaine.

## Estimation d'erreur *a priori* et *a posteriori*

Une simulation réalisée par une méthode numérique peut prendre beaucoup de temps. Un élément déterminant dans ce processus est la finesse du maillage. En effet, si le maillage est grossier uniformément dans le domaine, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas forcément satisfaisant en terme de précision de l'approximation obtenue. En revanche, si le maillage est très fin de façon uniforme, le temps de calcul peut se révéler prohibitif, alors que dans certaines régions du domaine où la solution recherchée ne présente pas de variations importantes, on aurait pu se contenter d'un maillage grossier. Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit fin uniquement là où cela est nécessaire.

## Estimation d'erreur *a priori*

Les estimations d'erreur *a priori* majorent l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour une norme appropriée. Elles sont en général de la forme suivante :

$$\|(\mathbf{u}^n, p^n) - (\mathbf{u}_h^n, p_h^n)\| \leq C_1(\mathbf{u}, p, C, h, \tau), \quad (3)$$

et

$$\|C^n - C_h^n\| \leq C_2(\mathbf{u}, p, C, h, \tau). \quad (4)$$

Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique. Elles sont établies en imposant certaines régularités supplémentaires sur la solution exacte (ces régularités peuvent ne pas être vérifiées en pratique, par exemple à cause de la présence de discontinuités, de singularités géométriques, ...). De plus, les constantes génériques  $C_1$  et  $C_2$  qui apparaissent dans les estimations (3) et (4) dépendent en général de la solution exacte, et sont donc non calculables.

Pour pouvoir développer une méthode avec maillage adaptatif, on va avoir recours à des estimations d'erreur *a posteriori*.

## Estimation d'erreur *a posteriori*

L'intérêt de ces estimations est de fournir des bornes sur l'erreur qui peuvent être évaluées dès que la solution approchée a été calculée. L'erreur entre les solutions exacte et approchée est majorée par la somme de quantités locales en espace et en temps. Si on note  $\mathcal{T}_{nh}$  le maillage à l'instant  $t_n$  et  $N = \frac{T}{\tau}$  le nombre d'intervalles  $[t_{n-1}, t_n]$  de temps utilisés, l'estimation d'erreur *a posteriori* sera exprimée de la manière suivante :

$$\|(\mathbf{u}, p, C) - (\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)\|^2 \leq c \left( \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{n,k}^h)^2 + (\eta_{n,k}^\tau)^2) \right), \quad (5)$$

où  $\eta_{n,k}^h$  et  $\eta_{n,k}^\tau$  sont respectivement les indicateurs en espace et en temps qui dépendent uniquement de la solution approchée  $(\mathbf{u}_{h,\tau}, p_{h,\tau})$ . La constante  $c$  est en général indépendante de la solution exacte dans les problèmes linéaires mais dans le cas des systèmes d'équations non-linéaires (comme notre cas ici), elle dépend en général de  $(\mathbf{u}, p, C)$ . Dans ce cas on ne peut pas la calculer, mais ceci ne nous empêche pas d'appliquer la technique d'adaptation du maillage, qui se base uniquement sur les indicateurs  $\eta$ . En fait, la majoration (5) nous permettra de réadapter (raffiner ou déraffiner) certaines régions du maillage et aussi de réadapter à chaque itération le pas de temps utilisé. L'objectif est toujours de faire diminuer les  $\eta$  les plus élevés par raffinement local, et de déraffiner là où les  $\eta$  sont faibles. Un autre objectif est d'équilibrer l'estimateur temporel et l'estimateur en espace, de telle sorte que le pas de temps ne soit ni trop faible ni trop important. L'objectif est d'aboutir à une précision meilleure avec le même nombre de degrés de liberté.



Un autre intérêt de l'estimation d'erreur *a posteriori* est que les indicateurs fournissent une borne inférieure de l'erreur locale, ce qu'on appelle efficacité locale. Ainsi, il faut prouver que les indicateurs d'erreur obéissent à l'estimation suivante :

$$\eta_{n,k}^2 \leq \|(\mathbf{u}, p, C) - (\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)\|_{\Delta k, [t_{n-1}, t_n]}^2, \quad (6)$$

où l'indice  $\Delta k, [t_{n-1}, t_n]$  signifie que la norme est locale dans un voisinage de l'élément  $k$  et sur l'intervalle temporel  $[t_{n-1}, t_n]$ . Cette estimation s'interprète comme propriété d'efficacité ou d'optimalité (locale) puisqu'elle garantit que l'indicateur d'erreur ne surévalue pas trop l'erreur.

Il y a dans la littérature plusieurs techniques connues d'adaptation de maillage que nous pourrions utiliser dans notre cas. Nous nous référons aux travaux effectués dans [13, 15, 31] pour les estimations d'erreur *a posteriori* appliquées au problème de Stokes instationnaire. Dans [14], C. Bernardi et T. Sayah ont étudié les estimations d'erreur *a posteriori* associées au problème de Navier-Stokes instationnaire avec des conditions aux bords mixtes.

## Plan de la thèse

Dans le chapitre 1, on fixe les notations et on rappelle quelques théorèmes et propositions utiles pour l'obtention des estimations *a priori* et *a posteriori* des chapitres suivants. On note que le système  $(P)$  possède au moins deux formulations variationnelles  $(V_1)$  et  $(V_2)$ . Par la suite, on introduit les problèmes variationnels discrets correspondants à  $(V_1)$  et  $(V_2)$  que l'on note par  $(V_{n,h,1})$  et  $(V_{n,h,2})$ . La discrétisation en espace dans le premier schéma est faite par les éléments finis "RT<sub>0</sub>/P<sub>0</sub>" en vitesse-pression ("Raviart-Thomas") et dans le deuxième schéma par les éléments finis P<sub>1</sub> + bulle/P<sub>1</sub> en vitesse-pression ("Mini-élément"). Les deux schémas utilisent une discrétisation P<sub>1</sub> conforme pour la concentration. Dans les deux cas on discrétise en temps par le schéma d'Euler implicite. Puis, on montre l'existence et l'unicité des solutions  $(V_{n,h,1})$  et  $(V_{n,h,2})$  respectivement.

Dans le chapitre 2, on établit les estimations d'erreur *a priori* correspondant aux deux schémas numériques. Tout d'abord, on commence par présenter les opérateurs d'interpolation qui seront utiles pour la démonstration des théorèmes. Par la suite, on établit les estimations d'erreur *a priori* correspondant à la vitesse et à la pression et on termine par établir celle correspondant à la concentration pour les deux schémas  $(V_{n,h,1})$  et  $(V_{n,h,2})$ .

Dans le chapitre 3, on établit les estimations d'erreur *a posteriori* pour les deux schémas selon l'inégalité (5). Ensuite, on démontre que l'estimation d'erreur *a posteriori* établie est optimale pour les deux schémas selon l'inégalité (6). Les principales difficultés rencontrées sont liées au fait que les équations sont couplées (l'erreur en vitesse/pression dépend de l'erreur en concentration, et réciproquement) et au caractère non-linéaire du problème. En particulier, nous sommes amenés à effectuer des hypothèses sur la régularité de la solution exacte.

Dans le chapitre 4, on valide les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3 par des simulations numériques en utilisant le logiciel FreeFem++. On considère un cas-test dont on connaît la solution analytique. Ceci nous permet de comparer l'erreur exacte avec l'erreur estimée. On fait des tests sur un maillage uniforme et on raffine en temps d'une façon uniforme sur des versions de difficultés croissantes de ce cas-test, ce qui permet de valider un par un les différents aspects du couplage entre Darcy et convection-diffusion-réaction ; les ordres de convergence mesurés sont conformes aux ordres théoriques démontrés dans le chapitre 2. On compare ensuite les erreurs et les estimateurs obtenus avec ceux issus d'une méthode basée sur l'adaptation du maillage et du pas de temps. Ceci permet de constater que la stratégie de raffinement adaptatif est plus efficace que le raffinement uniforme car l'erreur mesurée est plus faible pour un même nombre de degrés de liberté. On termine en comparant les deux schémas numériquement.



# Chapitre 1

## Problème continu et discret

Dans ce chapitre, on introduit tout d'abord quelques notations puis on présente deux formulations variationnelles correspondant au problème. Finalement, on introduit les problèmes variationnels discrets et on montre l'existence et l'unicité de leurs solutions.

### 1.1 Notations

Dans cette partie, on donne quelques notations et on introduit les espaces fonctionnels ainsi que les normes correspondantes qu'on l'utilisera dans la suite.

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un vecteur d'entiers positifs et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , on définit la dérivée partielle  $\partial^\alpha$  par :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

1. En coordonnées cartésiennes, dans un espace euclidien de dimension  $d$ , on a  $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right), \quad (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)C(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t),$$

$$\Delta C(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}, t),$$

et

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t).$$

2. • Pour un nombre  $p$  supérieur ou égal à 1, on introduit l'espace de Lebesgue suivant :

$$L^p(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable dans } \Omega; \int_{\Omega} |v(x)|^p d\mathbf{x} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Le produit scalaire associé à  $L^2(\Omega)$  sera noté simplement  $(.,.)$ .

$L_0^2(\Omega)$  désigne le sous-espace de  $L^2(\Omega)$  des fonctions dont l'intégrale sur  $\Omega$  est nulle :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

et on le munit de la norme de  $L^2(\Omega)$ .

- Pour un entier  $m$  positif et un nombre  $p$  supérieur ou égal à 1, on introduit l'espace de Sobolev suivant (cf. Adams [2], Nečas [43]) :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\},$$

qu'on munit de la semi-norme

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p},$$

et de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \right\}^{1/p}.$$

Pour  $p = 2$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  sera noté  $H^m(\Omega)$  et sera muni de la semi-norme

$$|v|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

et de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{k,\Omega}^2 \right\}^{1/2}.$$

Finalement,  $H_0^1(\Omega)$  désigne le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  des fonctions dont la trace est nulle sur  $\partial\Omega$  :

$$H_0^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega); \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0\}.$$

Il est muni de la semi-norme de  $H^1(\Omega)$  qui est une norme équivalente à la norme complète.

- L'espace  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  désigne l'espace engendré par les fonctions à valeurs vectorielles dont la divergence faible est de carré intégrable :

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

$H_0(\operatorname{div}, \Omega)$  est le sous-espace de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  suivant :

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \}.$$

On note

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \}, \quad (1.1)$$

qu'on munit également de la norme de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ .

- Pour un espace de Sobolev  $W$  de norme associée  $\|\cdot\|_W$ , on introduit l'espace suivant pour  $r \in [1; +\infty[$  :

$$L^r(a, b; W) = \left\{ f \text{ mesurable sur } ]a, b[; \int_a^b \|f(t)\|_W^r dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^r(a, b; W)} = \left( \int_a^b \|f(t)\|_W^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Si  $r = \infty$ , alors

$$L^\infty(a, b; W) = \left\{ f \text{ mesurable sur } ]a, b[; \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_W < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(a, b; W)} = \inf \{ c; \|f(t)\|_W \leq c, \text{ p.p sur } ]a, b[ \}$$

3. On introduit l'ensemble  $D(\Omega)$  des fonctions à support compact dans  $\Omega$  et infiniment dérivables sur  $\Omega$  et l'ensemble  $D'(\Omega)$  des distributions dans  $\Omega$ .

Le crochet de dualité associé à  $D(\Omega)^d$  sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d}$ .

4. Soient  $a, a', b$  trois nombres réels et  $\xi$  une constante strictement positive, on a

$$ab \leq \frac{\xi}{2} a^2 + \frac{1}{2\xi} b^2, \quad (1.2)$$

$$a(a-b) = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} (a-b)^2, \quad (1.3)$$

et

$$\sum (a + a')b \leq \sqrt{2} \left( \sum (a^2 + a'^2) \right)^{1/2} \left( \sum b^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

5. Pour toute fonction  $h : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, T]$ ,  $h(t)$  désigne l'application partielle

$$\begin{aligned} h(t) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(t, x) \end{aligned}$$

## 1.2 Rappel

Dans cette partie, on énonce quelques théorèmes et propositions qui seront utiles pour la suite.

**Théorème 1.1** (cf. Roberts et Thomas [47]). *Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière Lipschitzienne. La condition inf-sup entre  $L_0^2(\Omega)$  et  $H_0(\text{div}, \Omega)$  est vérifiée. Ce qui s'écrit ainsi : il existe une constante  $\beta > 0$  qui ne dépend que du domaine  $\Omega$ ,*

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta. \quad (1.5)$$

La condition inf-sup entre  $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)^d$  est également vérifiée et s'écrit :

$$\inf_{q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d} \|q\|_{H^1(\Omega)}} \geq 1. \quad (1.6)$$

**Proposition 1.2** (Inégalité de Hölder, cf. Lambert [42]). *Si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $p$  et  $q$  conjugués  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ , alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et on a l'inégalité de Hölder suivante :*

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.7)$$

On rappelle les inégalités de Poincaré et Sobolev suivantes :

**Lemme 1.3** (Injection de Sobolev, cf. Adams [2]). *Pour tout réel  $p \geq 1$  lorsque  $d = 1$  ou 2, ou pour tout réel  $p$  vérifiant  $1 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$  lorsque  $d \geq 3$ , il existe des constantes positives  $S_p$  et  $S_p^0$  telles que*

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p^0 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d},$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

On rappelle le théorème de Lax-Milgram suivant :

**Théorème 1.4** ( cf. Chen [19]). *Soient  $X$  un espace de Hilbert,  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, continue et coercive pour la norme de  $X$  et  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors, il existe un unique  $u \in X$  vérifiant*

$$\forall v \in X, a(u, v) = l(v).$$

La forme standard du lemme de Gronwall-Bellman est donnée dans le lemme suivant :

**Lemme 1.5** (Gronwall-Bellman, cf. Vidyasagar [53](p. 292), cf. Desoer et al. [26](p. 252)).

Soient  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  et  $\bar{k}$ , des fonctions intégrables et définies de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que

1.  $\bar{g} \geq 0$ ,  $\bar{k} \geq 0$ ,
2.  $\bar{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,
3.  $\bar{g} \times \bar{k}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $y : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  satisfait la condition suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, y(t) \leq \bar{f}(t) + \bar{g}(t) \int_0^t \bar{k}(\tau) y(\tau) d\tau, \quad (1.8)$$

alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$y(t) \leq \bar{f}(t) + \bar{g}(t) \int_0^t \bar{k}(\tau) \bar{f}(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \bar{k}(s) \bar{g}(s) ds\right) d\tau. \quad (1.9)$$

**Lemme 1.6** (Lemme de Gronwall discret). Soient  $(y_n)_n$ ,  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  trois suites positives qui vérifient :

$$\forall n \geq 0, y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} g_k y_k.$$

Alors, on a

$$\forall n \geq 0, y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + g_j),$$

et

$$\forall n \geq 0, y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \exp\left(\sum_{j=k}^{n-1} g_j\right).$$

## 1.3 Étude du problème continu

### 1.3.1 Formulations variationnelles

Dans cette section, on établit deux formulations variationnelles associées au problème  $(P)$ . Tout d'abord, on commence par donner quelques hypothèses, puis on introduit les deux formulations variationnelles.



**Hypothèses 1.7.** *On suppose que les données  $\mathbf{f}, g$  et  $\nu$  vérifient :*

- $\mathbf{f}$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T], \forall C \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, C) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, C), \quad (1.10)$$

avec  $\mathbf{f}_0 \in C^0(0, T; H^1(\Omega)^d)$  et  $\mathbf{f}_1$  est dérivable par rapport à sa deuxième variable et que sa dérivée partielle par rapport à  $\mathbf{x} : \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)^d$  uniformément en  $C$ ,  $\mathbf{f}_1(C)$  est de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $c_{\mathbf{f}_1}^*$ -lipschitzienne, par rapport à la deuxième variable, uniformément en  $\mathbf{x}$ . De plus, on suppose qu'il existe une constante positive  $c_{\mathbf{f}_1}$  tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \xi)\|_{\mathbb{R}^d} \leq c_{\mathbf{f}_1} |\xi|. \quad (1.11)$$

- $g \in C^0(0, T, L^2(\Omega))$ .

- $\nu$  est de classe  $C^1$  et est  $\lambda$ -Lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  et il existe deux constantes strictement positives  $\nu_1$  et  $\nu_2$  telles que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\nu_1 \leq \nu(\theta) \leq \nu_2. \quad (1.12)$$

Pour obtenir une formulation faible de  $(P)$ , on multiplie chacune des équations par une fonction test adaptée et on intègre (formellement) par partie la seconde et la troisième égalités obtenues en tenant compte des conditions aux limites et de la condition initiale. On obtient la formulation faible suivante : Trouver  $(\mathbf{u}, p, C) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \times L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  tel que

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega \times ]0, T[)^d, \quad \int_0^T \int_\Omega \nu(C) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt = \int_0^T \int_\Omega \mathbf{f}(C) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt, \\ \forall q \in C^\infty(\bar{\Omega} \times ]0, T[), \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla q \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt = 0, \\ \forall S \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, T]), \quad - \int_0^T \int_\Omega C \frac{\partial S}{\partial t} \, d\mathbf{x} \, dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla C \cdot \nabla S \, d\mathbf{x} \, dt \\ \quad + \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla C) S \, d\mathbf{x} \, dt + r_0 \int_0^T \int_\Omega C S \, d\mathbf{x} \, dt = \int_0^T \int_\Omega g S \, d\mathbf{x} \, dt. \end{array} \right.$$

Un argument simple montre que tout triplet de fonctions  $(\mathbf{u}, p, C)$  solution de  $(W)$  est solution de  $(P)$  au sens des distributions. Inversement, toute solution  $(\mathbf{u}, p, C)$  du problème  $(P)$  vérifiant  $(\mathbf{u}, p, C)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \times L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  vérifie les équations de  $(W)$ .

Les travaux de Feng [35], Girault et Rivière [38], Chen et Ewing [20] et Fabrie et Gallouet [34], Cheng et al [23], Droniou et al. [30] étudient l'existence d'une solution faible associée à des problèmes très étroitement liés au problème  $(W)$ ; de plus Feng [35] démontre l'unicité des solutions suffisamment régulières. Par conséquent, on suppose dans



**Remarque 1.9.** Le terme de convection  $\mathbf{u} \cdot \nabla C$  n'appartient pas nécessairement à  $H^1(\Omega)$ , il est uniquement dans  $L^1(\Omega)$ . C'est pour cette raison que, pour pouvoir donner un sens au terme de convection, on choisit les fonctions tests dans  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

**Remarque 1.10.** Sous les hypothèses 1.7 et si  $C \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ , alors la solution  $(\mathbf{u}, p)$  est continue en temps.

**Théorème 1.11.** Toute solution de  $(V_1)$  telle que  $C \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$  vérifie :

$$\|C\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \alpha \|C\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + 2r_0 \|C\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq 2 \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \quad (1.13)$$

et

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (\|\mathbf{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} + c_{\mathbf{f}_1} \|C\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}). \quad (1.14)$$

*Démonstration.* On prend  $S = C(t)$  dans la dernière équation du problème  $(V_1)$ . En remarquant que  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla C) C = 0$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + r_0 \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|g(t)\|_{L^2(\Omega)} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On applique l'inégalité (1.2) avec  $\xi = \frac{\alpha}{(S_2^0)^2}$  ainsi que le lemme 1.3, puis on intègre entre 0 et  $t$ , et on obtient

$$\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|C\|_{L^2(0, t; H_0^1(\Omega))}^2 + 2r_0 \|C\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2.$$

Comme  $C$  vérifie

$$\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

donc la norme de  $C$  vérifie

$$\|C\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

On obtient donc immédiatement la majoration (1.13).

Pour la majoration de  $\mathbf{u}$ , on prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$  dans la première équation de  $(V_1)$  et on utilise la deuxième équation de  $(V_1)$ . En utilisant les hypothèses (1.10), (1.11) et (1.12), on obtient la majoration suivante de la norme de  $\mathbf{u}$  :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (\|\mathbf{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} + c_{\mathbf{f}_1} \|C\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}). \quad (1.15)$$

□

### 1.3.3 Deuxième formulation variationnelle

Le problème variationnel ( $V_1$ ) est bien adapté à un schéma discret localement conservative. Cependant, la mise en oeuvre numérique de tels schémas n'est pas simple et peut-être simplifiée en éliminant le terme de divergence dans les deux premières équations de ( $V_1$ ) à l'aide de la formule de Green, réduisant ainsi la régularité de  $\mathbf{u}$ . Cela conduit à une deuxième formulation variationnelle donnée par : pour tout  $t \in [0, T]$

$$(V_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}(t), p(t), C(t)) \in L^2(\Omega)^d \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que } C(0) = 0 \text{ et} \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\cdot, t, C(t)) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{u}(t) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \frac{d}{dt} \int_{\Omega} C(t) S \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C(t) \cdot \nabla S \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) C(t) S \, d\mathbf{x} \\ + r_0 \int_{\Omega} C(t) S \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(t) S \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

**Remarque 1.12.** *Sous l'hypothèse (1.7) et si la concentration est continue à  $t = 0$ , les deux premières équations de ( $V_2$ ) déterminent de manière unique la vitesse  $\mathbf{u}(0)$  et la pression  $p(0)$  tel que  $C(0) = 0$ , le système correspondant s'écrira comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}(0), p(0)) \in L^2(\Omega)^d \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \int_{\Omega} \nu(0) \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(0) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\cdot, 0, 0) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{u}(0) \, d\mathbf{x} = 0, \end{array} \right.$$

## 1.4 Étude du problème discret

Dans cette partie, on introduit les formulations variationnelles discrètes correspondant à chacune des formulations variationnelles continues, et on démontre l'existence et l'unicité de leurs solutions.

### 1.4.1 Cadre discret

Tout d'abord, on précise la construction des pas de temps et des maillages en espace. Ensuite, on précise quelques notations reliées aux inconnues et aux données du problème.

### 1.4.1.1 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps, on introduit une partition de l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  intervalles de la forme  $[t_{n-1}, t_n]$  où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . On désigne par  $\tau_n$  la longueur de l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$  pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et par  $\tau$  le maximum des  $\tau_n$ . Finalement, on note  $\sigma_\tau$  le paramètre de régularité en temps défini par :

$$\sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}.$$

Dans ce qui suit, on suppose que la partition en temps est régulière, c'est-à-dire  $\sigma_\tau$  est borné indépendamment de  $\tau$ .

On introduit l'opérateur d'interpolation  $\pi_\tau$  défini comme suit :

Pour tout espace de Banach  $X$  et pour toute fonction  $g$  continue de  $]0, T]$  dans  $X$ ,  $\pi_\tau g$  désigne la fonction constante par morceaux en temps qui vaut  $g(t_n)$  sur chaque intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ . De même, à toute fonction  $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in X^m$ , on associe la fonction constante par morceaux en temps  $\pi_\tau \phi_\tau$  qui est constante égale à  $\phi_n$  sur chaque intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

De plus, à toute famille  $(v^n)_{0 \leq n \leq N} \in X^{N+1}$ , on associe la fonction  $v_\tau$  sur  $[0, T]$  qui est affine sur chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$  et égale à  $v^n$  au temps  $t_n$ . Plus précisément, cette fonction est donnée par

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad v_\tau(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (v^n - v^{n-1}) + v^{n-1}.$$

### 1.4.1.2 Discrétisation en espace

Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(\mathcal{T}_{nh})_h$  désigne une triangulation du domaine  $\Omega$ . Ces triangulations doivent vérifier les conditions suivantes :

- l'intersection de deux éléments distincts est soit vide, soit un sommet, soit une arête, soit une face en  $3d$ .
- $\bar{\Omega} = \bigcup_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} K_n$ .
- le quotient du diamètre d'un élément  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  noté  $h_{K_n}$ , sur le diamètre du cercle (en dimension 2) ou de la boule (en dimension 3) inscrit(e) dans  $K_n$  noté  $\rho_{K_n}$ , est majoré par une constante  $\sigma$  qui ne dépend ni de  $n$  ni de  $h$ . Autrement dit,

$$\max_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \frac{h_{K_n}}{\rho_{K_n}} \leq \sigma. \quad (1.16)$$

Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $h_n$  désigne le diamètre maximal des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$ . On note de plus

$$h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n.$$

On désigne par  $[u]_{e_n}$  le saut sur une arête  $e_n$  d'une fonction  $u$  qui est défini de la manière suivante :

$$[u]_{e_n} = u|_{K_n} - u|_{K'_n}$$

où  $K_n$  et  $K'_n$  sont deux éléments qui ont  $e_n$  comme arête (ou face) commune.

**Notation 1.13.** Dans la suite, on note  $\mathbf{u}^n$ ,  $p^n$  et  $C^n$  les quantités respectives  $\mathbf{u}(t_n)$ ,  $p(t_n)$  et  $C(t_n)$ .

**Définition 1.14.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on considère la fonction affine par morceaux en temps  $C_h$  définie sur  $[t_{n-1}, t_n]$  par :

$$\forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad C_h(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + C_h^{n-1} = \frac{t - t_n}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + C_h^n. \quad (1.17)$$

De plus, on définit la fonction constante par morceaux  $\mathbf{u}_h$  égale à  $\mathbf{u}_h^n$  sur l'intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , et la fonction constante par morceaux  $p_h$  égale à  $p_h^n$  sur l'intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

**Remarque 1.15** (Discrétisation de la dérivée en temps). Pour la discrétisation de  $\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ , on utilise le schéma d'Euler implicite d'ordre 1 donné par

$$\frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n}, \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , la fonction  $g$  sera approchée sur tout intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$  par

$$g^n = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t) dt,$$

et la fonction  $\mathbf{f}^n(C_h^{n-1})$  est donnée sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}),$$

où

$$\mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n).$$

**Propriété 1.16.** On a l'inégalité inverse suivante : pour tout nombre  $p \geq 2$ , pour toute dimension  $d$  et pour tout entier naturel  $r$ , il existe des constantes  $c_I^0(p)$  et  $c_I^1(p)$  telles que, pour toute fonction polynomiale  $v_h$  de degré  $r$  sur  $K_n$ , on a

$$\|v_h\|_{L^p(K_n)} \leq c_I^0(p) h_{K_n}^{\frac{d}{p} - \frac{d}{2}} \|v_h\|_{L^2(K_n)}, \quad (1.18)$$

$$|v_h|_{H^1(K_n)} \leq c_I^1(p) h_{K_n}^{\frac{d}{2} - \frac{d}{p} - 1} \|v_h\|_{L^p(K_n)}, \quad (1.19)$$

et pour  $p = \infty$  (cf. Ern et Guermond [32]),

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} c(1 + |\log(h)|) \|v_h\|_{1,\Omega} & \text{si } d = 2 \\ h^{-1/2} \|v_h\|_{1,\Omega} & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (1.20)$$

On va discrétiser le problème ( $P$ ) en utilisant deux types d'éléments finis :

- Dans le premier schéma, on approche  $\mathbf{u}$  par des éléments finis de Raviart-Thomas, la concentration  $C$  par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et la pression  $p$  par des éléments finis  $\mathbb{P}_0$ .
- Dans le deuxième schéma, on approche  $\mathbf{u}$  par des éléments "P<sub>1</sub> + bulle", la concentration  $C$  par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et la pression  $p$  par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ .

### 1.4.2 Première formulation variationnelle discrète

Dans cette première formulation variationnelle, on discrétise la vitesse  $\mathbf{u}$  avec les éléments finis de Raviart-Thomas définis par l'espace discret suivant :

$$X_{nh} = \{\mathbf{v}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega); \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, \exists a_{K_n} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{o}_{K_n} \in \mathbb{R}^d; \mathbf{v}_h|_{K_n}(\mathbf{x}) = a_{K_n} \mathbf{x} + \mathbf{o}_{K_n}\}.$$

On pose

$$X_{n,h,1} = X_{nh} \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega).$$

On discrétise  $p$  avec les éléments finis  $\mathbb{P}_0$ . On note  $M_{n,h,1}$  l'espace discret correspondant :

$$M_{n,h,1} = M_{nh} \cap L_0^2(\Omega),$$

où

$$M_{nh} = \{q_h \in L^2(\Omega); \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, q_h|_{K_n} \text{ est constant}\}.$$

On discrétise  $C$  avec les éléments finis de Lagrange de degré 1 et on note  $Y_{n,h}$  l'espace discret correspondant :

$$Y_{n,h} = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, v_h|_K \in \mathbb{P}_1\} \cap H_0^1(\Omega).$$

Finalement, On désigne par  $\mathcal{V}_{n,h,1}$  l'espace discret suivant :

$$\mathcal{V}_{n,h,1} = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}; \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0 \right\}.$$

**Remarque 1.17.** Les espaces  $X_{n,h,1}$  et  $M_{n,h,1}$  considérés vérifient la condition inf-sup discrète (cf. Roberts et Thomas [47]) suivante :

$$\forall q_h \in M_{n,h,1}, \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta_1 \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.21)$$

où  $\beta_1$  est une constante positive indépendante du maillage.

La première formulation variationnelle discrète associée à la formulation variationnelle continue  $(V_1)$  s'écrit : pour  $C_h^0 = 0$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,

$$(V_{n,h,1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,1} \times M_{n,h,1}, \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}, \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^n (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,1}, \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ \qquad \qquad \qquad + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g^n S_h \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

**Remarque 1.18.** Le problème  $(V_{n,h,1})$  permet de calculer  $\mathbf{u}_h^n$ ,  $p_h^n$  et  $C_h^n$  pour chaque  $n \in \{1, \dots, N\}$  à partir  $C_h^0 = 0$ . Pour compléter cet algorithme, on doit calculer les valeurs initiales de la vitesse  $\mathbf{u}_h^0$  et la pression  $p_h^0$ .

Ces valeurs peuvent être déterminées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) \in X_{0,h,1} \times M_{0,h,1} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{0,h,1}, \int_{\Omega} \nu(0) \mathbf{u}_h^0 \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^0 (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^0(0) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{0,h,1}, \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^0) \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right.$$

### 1.4.3 Deuxième formulation variationnelle discrète

Dans cette formulation, on discrétise la vitesse  $\mathbf{u}$  avec les éléments finis " $\mathbb{P}_1$  + bulle". On introduit l'espace discret suivant :

$$X_{n,h,2} = \{ \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega})^d; \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, \mathbf{v}_h|_{K_n} \in \mathcal{P}(K_n)^d \},$$

où pour tout  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$ ,

$$\mathcal{P}(K_n) = \mathbb{P}_1 \oplus \operatorname{vect} b_{K_n},$$

est l'espace associé à la discrétisation dans l'espace par le "mini-élément" introduit par Arnold et al dans [6] où  $b_{K_n}$  désigne le produit des coordonnées barycentriques de l'élément  $K$ .

On discrétise  $p$  avec les éléments finis de Lagrange de degré 1. On note  $M_{n,h,2}$  l'espace discret correspondant :

$$M_{n,h,2} = \{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega); \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, q_h|_{K_n} \in \mathbb{P}_1 \}.$$



Finalement, on désigne par  $\mathcal{V}_{n,h,2}$  l'espace discret suivant :

$$\mathcal{V}_{n,h,2} = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}; \forall q_h \in M_{n,h,2}, \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

**Remarque 1.19.** Les espaces  $X_{n,h,2}$  et  $M_{n,h,2}$  considérés vérifient la condition inf-sup discrète (cf. Roberts et Thomas [47]) suivante :

$$\forall q_h \in M_{n,h,2}, \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}} \frac{\int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \beta_2 |q_h|_{1,\Omega}, \quad (1.22)$$

où  $\beta_2$  est une constante positive qui ne dépend pas du maillage.

**Remarque 1.20.** Pour effectuer l'analyse numérique du schéma précédent, on va ajouter un terme de stabilisation au terme  $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla C_h^n, S_h)$  pour assurer l'existence de la solution discrète. On introduit alors la forme trilinéaire suivante :

$$d(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, S_h) = (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n, S_h) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n, S_h).$$

Comme,

$$d(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, S_h) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla S_h) C_h^n \, d\mathbf{x} \right),$$

le terme non linéaire est donc antisymétrique.

En utilisant la formule de Green-Riemann, on peut vérifier le résultat suivant :

**Proposition 1.21.** Pour tous  $\mathbf{u} \in X_{n,h,2}$  et  $C \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$d(\mathbf{u}, C, C) = 0.$$

La deuxième formulation variationnelle discrète associée à la formulation variationnelle continue  $(V_2)$  s'écrit : pour  $C_h^0 = 0$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,

$$(V_{n,h,2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^n \cdot S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

**Remarque 1.22.** Le problème  $(V_{n,h,2})$  permet calculer  $\mathbf{u}_h^n$ ,  $p_h^n$  et  $C_h^n$  pour chaque  $n \in \{1, \dots, N\}$  à partir  $C_h^0 = 0$ . Pour compléter cet algorithme, on doit calculer les valeurs initiales de la vitesse  $\mathbf{u}_h^0$  et la pression  $p_h^0$ .

Ces valeurs peuvent être déterminées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) \in X_{0,h,2} \times M_{0,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{0,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu(0) \mathbf{u}_h^0 \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^0 \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^0(0) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{0,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^0 \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right.$$

#### 1.4.4 Existence et unicité de la solution discrète

**Théorème 1.23.** Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , le problème  $(V_{n,h,1})$  admet une unique solution  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n) \in X_{n,h,1} \times M_{n,h,1} \times Y_{n,h}$ . De plus,  $\mathbf{u}_h^n \in \text{RT}_0$  et donc  $\text{div } \mathbf{u}_h^n \in M_{n,h,1}$ , ainsi la deuxième équation de  $V_{n,h,1}$  implique que  $\text{div } \mathbf{u}_h^n = 0$ .

**Démonstration.** On introduit la forme bilinéaire  $\tilde{a}_1$  définie sur  $\mathcal{V}_{n,h,1} \times \mathcal{V}_{n,h,1}$  par

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h).$$

Puisque  $\mathbf{u}_h^n \in \mathcal{V}_{n,h,1}$ , la première équation de  $(V_{n,h,1})$  implique qu'on résout, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{n,h,1}$ ,

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h).$$

Or  $\tilde{a}_1$  est une forme bilinéaire, coercive et continue sur  $\mathcal{V}_{n,h,1}$ . On déduit alors l'existence et l'unicité de  $\mathbf{u}_h^n \in \mathcal{V}_{n,h,1}$  par le théorème de Lax-Milgram. De plus, la condition inf-sup discrète entre  $X_{n,h,1}$  et  $M_{n,h,1}$  étant vérifiée, le théorème de Babuška-Brezzi permet de conclure que le problème  $(V_{n,h,1})$  admet une solution  $p_h^n \in M_{n,h,1}$ .

Pour l'existence et l'unicité de la concentration  $C_h^n$ , on considère pour tous  $c, r \in Y_{n,h}$  la forme bilinéaire suivante :

$$\tilde{a}_2(c, r) = \frac{1}{\tau_n}(c, r) + \alpha(\nabla c, \nabla r) + r_0(c, r).$$

On vérifie que  $\tilde{a}_2$  est une forme bilinéaire coercive et continue. Par le théorème de Lax-Milgram, on a donc l'existence et l'unicité de  $C_h^n \in Y_{n,h}$ .

**Théorème 1.24.** Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , et pour  $C_h^{n-1} \in Y_{n,h}$ , toute solution  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n) \in X_{n,h,1} \times M_{n,h,1} \times Y_{n,h}$  de  $(V_{n,h,1})$  donnée, vérifie pour tout  $m = 1, \dots, N$ , les majorations suivantes :

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (\|\mathbf{f}_0\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} + c_{\mathbf{f}_1} \|C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}) \quad (1.23)$$

et

$$\|C_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2r_0 \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (1.24)$$

**Démonstration.** On commence par la majoration de  $\mathbf{u}_h^n$ . On remplace  $\mathbf{v}_h$  par  $\mathbf{u}_h^n$  dans l'équation de Darcy discrétisée. Comme pour tout  $q_h \in M_{n,h,1}$ ,  $(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n, q_h) = 0$ , on obtient alors la majoration (1.23).

Pour la majoration de la concentration  $C_h^n$ , on suit les mêmes étapes que la preuve du Théorème 1.11. On remplace  $S_h$  par  $C_h^n$  dans la dernière équation du problème  $(V_{n,h,1})$  puis, on utilise les injections de Sobolev pour obtenir

$$\frac{1}{2}(\|C_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{\alpha}{2}\tau_n|C_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \tau_n r_0 \|C_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{2\alpha} \tau_n \|g^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En sommant sur  $n$  allant de 1 jusqu'à  $m$ , on obtient la majoration (1.24).

On suit la même démarche que dans le théorème 1.24 pour obtenir le théorème suivant :

**Théorème 1.25.** Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour  $C_h^{n-1} \in Y_{n,h}$ , le problème  $(V_{n,h,2})$  admet une unique solution  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \times Y_{n,h}$ , donnée, vérifiant pour tout  $m = 1, \dots, N$  les majorations suivantes :

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (\|\mathbf{f}_0\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} + c_{\mathbf{f}_1} \|C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}) \quad (1.25)$$

et

$$\|C_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n |C_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + 2r_0 \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (1.26)$$

## Chapitre 2

### Estimation d'erreur *a priori*

Dans ce chapitre, on établit les estimations d'erreur *a priori* correspondant au schéma numérique. Tout d'abord, on commence par présenter les opérateurs d'interpolation qui seront utiles pour la démonstration des théorèmes. Par la suite, on établit les estimations d'erreur *a priori* correspondant à la vitesse et à la pression et on termine par établir celle correspondant à la concentration pour les deux schémas  $(V_{n,h,1})$  et  $(V_{n,h,2})$ . Dans une dernière section, on effectue des simulations numériques de validation en utilisant le logiciel FreeFem++.

#### 2.1 Opérateurs d'interpolation

Dans le premier schéma, pour l'estimation de l'erreur de  $\mathbf{u}$ , on introduit l'opérateur d'interpolation  $\xi_{nh}^1 : H^1(\Omega)^d \cap H_0(\text{div}, \Omega) \rightarrow X_{n,h,1}$  (cf. Roberts and J. Thomas[47]) vérifiant

$$\forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \text{div } \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \text{div } (\xi_{nh}^1 \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1)$$

**Proposition 2.1.** *L'opérateur  $\xi_{nh}^1$  vérifie les majorations suivantes :*

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \|\mathbf{v} - \xi_{nh}^1 \mathbf{v}\|_{L^2(K_n)^d} \leq c_1 h_n |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d},$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \text{ tel que } \text{div } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \|\text{div}(\mathbf{v} - \xi_{nh}^1 \mathbf{v})\|_{L^2(K_n)^d} \leq c_2 h_n |\text{div } \mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d},$$

où  $c_1, c_2$  sont deux constantes indépendantes de  $h_n$ .

Pour l'estimation d'erreur *a priori* de la pression  $p$ , on utilise le résultat suivant :

**Proposition 2.2.** Soit l'opérateur  $\varphi_{nh}$  donné par :  $\varphi_{nh} : L^2(\Omega) \rightarrow M_{n,h}$  et  $\varphi_{nh} : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_{n,h,1}$ , tel que :

$$\varphi_{nh}q|_{K_n} = \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} q(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh},$$

et vérifiant la majoration suivante :

$$\forall q \in H^1(\Omega), \|q - \varphi_{nh}q\|_{0,K_n} \leq ch_n|q|_{1,K_n}, \quad (2.2)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h_n$ .

Pour l'estimation d'erreur *a priori* de la concentration  $C$ , on utilise le résultat suivant (Pour  $d = 2$ , cf. Bernardi et Girault [10] ou cf. Clément [24] pour  $d = 2$  ou  $d = 3$ , voir aussi cf. Scott and Zhang, [48]) :

**Proposition 2.3.** Soit l'opérateur d'approximation linéaire et continu

$R_{nh} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow Y_{n,h}$  où  $p$  est un nombre supérieur ou égal à 2 vérifiant la majoration suivante :

$$\forall S \in W^{l+1,p}(\Omega), |S - R_{nh}S|_{W^{m,p}(K_n)} \leq ch_{K_n}^{l+1-m} |S|_{W^{l+1,p}(\Delta_{K_n})}, \quad (2.3)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h$ , et  $m$  et  $l$  deux entiers dans  $\{0, 1\}$ .

De plus, cet opérateur  $R_{nh}$  est stable en norme  $H^1(\Omega)$ . En d'autres termes, il existe une constante  $c$  telle que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), |R_{nh}w|_{1,\Omega} \leq c|w|_{1,\Omega}. \quad (2.4)$$

Cet opérateur vérifie pour toute fonction  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$  les approximations locales suivantes :

$$\|\mathbf{v} - R_{nh}\mathbf{v}\|_{L^2(K_n)^d} \leq ch_{K_n}|\mathbf{v}|_{1,\Delta_{K_n}} \quad (2.5)$$

et

$$\|\mathbf{v} - R_{nh}\mathbf{v}\|_{L^2(e_n)^d} \leq ch_{e_n}^{1/2}|\mathbf{v}|_{1,\Delta_{e_n}} \quad (2.6)$$

où  $\Delta_{K_n}$  et  $\Delta_{e_n}$  désignent l'union des éléments  $\mathcal{T}_{nh}$  dont l'intersection avec  $K_n$  et  $e_n$  respectivement est non vide.

Dans le deuxième schéma  $(V_{n,h,2})$ , pour dériver une estimation d'erreur *a priori* de la vitesse  $\mathbf{u}$ , on introduit l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{F}_{nh} : L^2(\Omega)^d \rightarrow X_{n,h,2}$  défini par

$$\mathcal{F}_{nh}\mathbf{v} = \pi_{nh}\mathbf{v} + \sum_{K \in \mathcal{T}_{nh}} \alpha_K b_K,$$

où  $\pi_{nh}$  est une variante de l'opérateur de Scott-Zhang (cf. Badia [7] ou cf. Badia et al. [8] ou cf. Girault et al. [39] ou cf. Scott et al [48]),

$$\alpha_{K_n} = \frac{1}{\int_{K_n} b_{K_n}(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \int_{K_n} (\mathbf{v} - \pi_{nh}\mathbf{v})(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

**Proposition 2.4.** *L'opérateur  $\mathcal{F}_{nh}$  vérifie la majoration suivante :*

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \|\mathbf{v} - \mathcal{F}_{nh}(\mathbf{v})\|_{L^2(K)^d} \leq ch_n \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Delta_{K_n})^d}, \quad (2.7)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h_n$ .

Pour l'estimation d'erreur *a priori* de la pression  $p$ , on utilise le résultat suivant, (cf. Abboud, Girault, et Sayah[1]) :

**Proposition 2.5.** *Soit l'opérateur  $r_{nh} : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_{n,h,2}$  vérifiant la majoration suivante :*

$$\forall q \in H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \|q - r_{nh}q\|_{m,K} \leq ch_n^{s-m} |q|_{s,K_n}, \quad (2.8)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h_n$ ,  $m = 0$  ou  $1$ .

Dans ce qui suit,  $c, c', c_1, \dots$  représentent des constantes génériques qui peuvent varier d'une ligne à une autre mais qui sont toujours indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

## 2.2 Estimation *a priori* de l'erreur de la première formulation variationnelle

On commence, tout d'abord, par établir l'estimation d'erreur *a priori* correspondante à la vitesse et à la pression et on termine par établir celle de la concentration.

Dans la suite, on note par

$$\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{et} \quad C' = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

**Théorème 2.6.** *Soit  $(\mathbf{u}, p, C)$  la solution du problème (P) et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  la solution de  $(V_{n,h,1})$ . Si  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^d) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ ,  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^4(\Omega)^d)$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $C \in L^\infty(0, T; W^{2,4}(\Omega))$  et  $C' \in L^2(0, T; W^{1,4}(\Omega))$  et sous l'hypothèse 1.7, il existe des constantes positives  $c, c_1, c', c''$  dépendantes de  $\mathbf{u}, p$  et  $\alpha$  tel que,*

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (ch + (c_{\mathbf{f}_1}^* + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}) \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}), \quad (2.9)$$

$$\|p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c'h + \frac{\nu_2}{\beta_1} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\beta_1} (c_{\mathbf{f}_1}^* + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}) \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^n - C^n|_{1,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N \|(C_h^n - C^n) - (C_h^{n-1} - C^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + r_0 \sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c''(h^2 + \tau^2) + c_1 \sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

*Démonstration.* Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{n,h,1})$ . Tout d'abord, on commence à démontrer (2.9), puis (2.10), et finalement (2.11).

On commence par établir la majoration de l'erreur sur  $\mathbf{u}$ .

En prenant la différence entre les premières équations de  $(V_1)$  pour  $t = t_n$  et de  $(V_{n,h,1})$  et pour  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{n,h,1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) - \nu(C^n(\mathbf{x}))) \mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On intercale  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) \xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  dans le membre de gauche de l'équation (2.12) et on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))(\mathbf{u}^n - \xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))(\xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) - \nu(C^n(\mathbf{x}))) \mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comme  $\mathbf{u}_h^n \in X_{n,h,1}$  et d'après la deuxième équation du problème  $(V_{n,h,1})$ , on a que  $\mathbf{u}_h^n \in \mathcal{V}_{n,h,1}$ . De plus,  $\xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n \in X_{n,h,1}$  et comme  $\xi_{nh}^1$  vérifie (2.1), alors  $\xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n \in \mathcal{V}_{n,h,1}$ . Par suite, on prend  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^n - \xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n$ , puis on applique l'inégalité triangulaire et les propriétés de  $\mathbf{f}_1$  et de  $\nu$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{u}_h^n - \xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \nu_2 \|\xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \lambda \|C_h^{n-1} - C^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}^n - \xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\xi_{nh}^1 \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}$$

Ainsi, on obtient

$$\nu_1 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq ch_n \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}.$$

D'où, on déduit (2.9).

Pour la majoration de l'erreur sur  $p$ , on prend la différence entre les premières équations de  $(V_1)$  pour  $t = t_n$  et de  $(V_{n,h,1})$ , on intercale  $\varphi_{nh} p^n$ , en prenant  $\mathbf{v}_h$  dans  $X_{n,h,1}$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi_{nh} p^n - p_h^n)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\varphi_{nh} p^n - p^n)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\nu(C^n(\mathbf{x})) - \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'après la condition inf-sup (1.21), il existe un  $\mathbf{v}_h$  dans  $X_{n,h,1}$  tel que

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_h = \varphi_{nh} p^n - p_h^n \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \leq \frac{1}{\beta_1} \|\varphi_{nh} p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où, l'égalité (2.14) devient

$$\begin{aligned} \|\varphi_{nh} p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\beta_1} \|\varphi_{nh} p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_{nh} p^n - p^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{\beta_1} \left( \nu_2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|C^n - C_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \right. \\ &\quad \left. + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\varphi_{nh} p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\|p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|p^n - \varphi_{nh} p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_{nh} p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on obtient l'inégalité (2.10).

On passe maintenant à la démonstration de (2.11). On choisit  $S_h = r_h^n = C_h^n - R_{nh} C^n$  dans la troisième équation du problème  $(V_1)$ , et on intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \left( C^n - C^{n-1}, r_h^n \right) + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha \nabla C(t) dt, \nabla r_h^n \right) + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u} \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) \\ + r_0 \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) = \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t) dt, r_h^n \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

La solution discrète  $C_h^n$  vérifie

$$(C_h^n - C_h^{n-1}, r_h^n) + \tau_n \alpha (\nabla C_h^n, \nabla r_h^n) + \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n, r_h^n) + \tau_n r_0 (C_h^n, r_h^n) = \tau_n (g^n, r_h^n). \quad (2.17)$$

Sachant que  $\tau_n g^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t) dt = 0$ , on retranche (2.16) et (2.17) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left( (C_h^n - C_h^{n-1}) - (C^n - C^{n-1}), r_h^n \right) + \alpha \left( \tau_n \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla C(t) dt, \nabla r_h^n \right) \\ + \left( \tau_n \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u} \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) + r_0 \left( \tau_n C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

On commence par majorer le premier terme de gauche de l'égalité (2.18). Tout d'abord, on intercale  $\pm (R_{nh} C^n, r_h^n)$  et  $\pm (R_{nh} C^{n-1}, r_h^n)$  et on obtient

$$\left( (C_h^n - C_h^{n-1}) - (C^n - C^{n-1}), r_h^n \right) = (r_h^n - r_h^{n-1}, r_h^n) + \left( (C^{n-1} - R_{nh} C^{n-1}) - (C^n - R_{nh} C^n), r_h^n \right).$$



Or,  $(a - b, a) = \frac{1}{2}\|a\|^2 - \frac{1}{2}\|b\|^2 + \frac{1}{2}\|a - b\|^2$ , pour tous  $a, b \in Y_{n,h}$  alors

$$\begin{aligned} \left( (C_h^m - C_h^{m-1}) - (C^m - C^{m-1}), r_h^n \right) &= \frac{1}{2}\|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|r_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|r_h^n - r_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left( (C^{m-1} - R_{nh}C^{m-1}) - (C^n - R_{nh}C^n), r_h^n \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

On remarque que

$$\left| \left( (C^{m-1} - R_{nh}C^{m-1}) - (C^n - R_{nh}C^n), r_h^n \right) \right| = \left| - \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (R_{nh}C' - C')(t)dt, r_h^n \right) \right|,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \left( (C^{m-1} - R_{nh}C^{m-1}) - (C^n - R_{nh}C^n), r_h^n \right) \right| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(R_{nh}C' - C')(t)\|_{L^2(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)} dt.$$

Par la majoration (2.5) sur l'opérateur  $R_{nh}$ , l'inégalité (1.2) et le Lemme 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (R_{nh}C' - C')(t)dt, r_h^n \right) &\leq \frac{c^2 h^2}{2\xi_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C'(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{\tau_n \xi_1}{2} \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{c^2 h^2}{2\xi_1} \|C'\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Omega))}^2 + (S_2^0)^2 \frac{\tau_n \xi_1}{2} |r_h^n|_{1, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'où, en choisissant  $\xi_1 = \frac{\alpha}{25(S_2^0)^2}$ , on aura

$$\left| \left( (C^{m-1} - R_{nh}C^{m-1}) - (C^n - R_{nh}C^n), r_h^n \right) \right| \leq c_1 h^2 \|C'\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{50} \tau_n |r_h^n|_{1, \Omega}^2, \quad (2.21)$$

où  $c_1$  est une constante positive indépendante de  $h$  et  $\tau_n$ .

Le second membre de l'égalité (2.18) se majore de la manière suivante : tout d'abord, on ajoute et on retranche  $\tau_n(\nabla R_{nh}C^n, \nabla r_h^n)$  et  $\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla R_{nh}C(t), \nabla r_h^n)dt$  ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \left( \tau_n \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla C(t)dt, \nabla r_h^n \right) - \alpha \tau_n |r_h^n|_{1, \Omega}^2 &= \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_{nh}C^n - R_{nh}C(t)), \nabla r_h^n)dt \\ &\quad + \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_{nh}C(t) - C(t)), \nabla r_h^n)dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour la majoration du premier terme du membre de droite de (2.22), on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sachant que  $C^n - C(t) = \int_t^{t_n} C'(s)ds$ , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_{nh}C^n - R_{nh}C(t)), \nabla r_h^n)dt &= \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} (\nabla R_{nh}C'(s), \nabla r_h^n)dsdt \\ &\leq \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} |R_{nh}C'(s)|_{1, \Omega} |r_h^n|_{1, \Omega} dsdt. \end{aligned}$$

Le Théorème de Fubini et la majoration (2.4) sur l'opérateur  $R_{nh}$  permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} |R_{nh}C'(s)|_{1,\Omega} |r_h^n|_{1,\Omega} ds dt &\leq \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^s |R_{nh}C'(s)|_{1,\Omega} |r_h^n|_{1,\Omega} dt ds \\ &\leq \alpha c |r_h^n|_{1,\Omega} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |C'(s)|_{1,\Omega} (s - t_{n-1}) ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.2) et on obtient la majoration suivante :

$$\left| \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_{nh}C^n - R_{nh}C(t)), \nabla r_h^n) dt \right| \leq \frac{\alpha c^2 \tau_n^2 \xi_2}{2\sqrt{3}} \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n \alpha}{2\sqrt{3} \xi_2} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \quad (2.24)$$

Pour la majoration du second terme de membre de droite de (2.22), on applique la majoration (2.3) sur l'opérateur  $R_{nh}$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.2) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_{nh}C(t) - C(t)), \nabla r_h^n) dt \right| &\leq \frac{\alpha \xi_3}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(R_{nh}C - C)(t)|_{1,\Omega}^2 dt + \frac{\tau_n \alpha}{2\xi_3} |r_h^n|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{\alpha c^2 h^2 \xi_3}{2} \|C\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n \alpha}{2\xi_3} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

D'où, en regroupant l'égalité (2.22) et les inégalités (2.24) et (2.25), et en choisissant  $\xi_2 = \frac{25}{\sqrt{3}}$  et  $\xi_3 = 25$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \alpha \left( \tau_n \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla C(t) dt, \nabla r_h^n \right) - \alpha \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2 \right| &\leq c_1 h^2 \|C\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + c_2 \tau_n^2 \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{25} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes indépendantes de  $h$  et  $\tau_n$ .

On note le troisième terme de l'égalité (2.18) par  $b$  tel que

$$b = \left( \tau_n \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right).$$

On intercale  $\pm \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right)$  et  $\pm \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla R_{nh}C^n, r_h^n)$  dans  $b$  et en remarquant que  $(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla r_h^n, r_h^n) = 0$ , on obtient

$$b = b_1 + b_2 = \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (R_{nh}C^n - C(t)) dt, r_h^n \right) + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right). \quad (2.27)$$

On commence par majorer  $b_1$ , on intercale  $\pm\tau_n(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C^n, r_h^n)$  dans  $b_1$  et on obtient

$$b_1 = \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(R_{nh}C^n - C^n)dt, r_h^n \right) + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C^n - C(t))dt, r_h^n \right). \quad (2.28)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration (2.3) sur l'opérateur  $R_{nh}$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(R_{nh}C^n - C^n)dt, r_h^n \right) \right| &\leq \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|R_{nh}C^n - C^n\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq c\tau_n h \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|C^n\|_{W^{2,4}(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq c\tau_n h \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Par l'inégalité (1.2) et le Lemme 1.3, on a

$$\left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(R_{nh}C^n - C^n)dt, r_h^n \right) \right| \leq \frac{c\xi_4 h^2 \tau_n}{2} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_4^0)^2}{2\xi_4} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \quad (2.30)$$

En choisissant  $\xi_4 = 25(S_4^0)^2/\alpha$ , on obtient

$$\left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(R_{nh}C^n - C^n)dt, r_h^n \right) \right| \leq c_3 h^2 \tau_n \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{50} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \quad (2.31)$$

où  $c_3$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\tau_n$ .

De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C^n - C(t))dt, r_h^n \right) &= \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C'(s)ds dt, r_h^n \right) \\ &= \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^s \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C'(s)dt ds, r_h^n \right) \\ &\leq \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla C'(s)\|_{L^4(\Omega)} (s - t_{n-1}) ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C^n - C(t))dt, r_h^n \right) \leq \frac{\tau_n^{3/2}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; W^{1,4}(\Omega))}. \quad (2.33)$$

D'où, par l'inégalité (1.2)

$$\left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C^n - C(t))dt, r_h^n \right) \leq \frac{\tau_n^2 \xi_5}{6} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; W^{1,4}(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_4^0)^2}{2\xi_5} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \quad (2.34)$$

On déduit en regroupant les inégalités (2.30) et (2.34) (pour  $\xi_5 = 25(S_4^0)^2/\alpha$ ) que

$$|b_1| \leq c_3 \tau_n h^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))}^2 + c_4 \tau_n^2 \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; W^{1,4}(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{25} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \quad (2.35)$$

avec  $c_3$  et  $c_4$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\tau_n$ .

On intercale  $\mathbf{u}^n$  dans  $b_2$  et on obtient

$$\begin{aligned} |b_2| &= \left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} \mathbf{u}'(s) \cdot \nabla C(t) ds dt, r_h^n \right) \right| \\ &\leq \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \tau_n^{3/2} \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^4(\Omega)^d)} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

En utilisant (1.2) et en prenant  $\xi = 25(S_4^0)^2/\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |b_2| &\leq c_{51} \tau_n \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad + c_{52} \tau_n^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^4(\Omega)^d)}^2 + \frac{\alpha}{25} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Finalement, on regroupe (2.35) et (2.37), et on obtient que

$$\begin{aligned} |b| &= \left| \left( \tau_n \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) \right| \leq c_3 h^2 \tau_n \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))}^2 + c_4 \tau_n^2 \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;W^{1,4}(\Omega))}^2 \\ &\quad + c_{51} \tau_n \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad + c_{52} \tau_n^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^4(\Omega)^d)}^2 \\ &\quad + \frac{2\alpha}{25} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_{51}$  et  $c_{52}$  sont des constantes positives indépendantes de  $h$  et  $\tau_n$ .

On traite le dernier terme de (2.18) de la façon suivante : on intercale  $\pm(\tau_n R_{nh} C^m, r_h^n)$  et  $\pm\tau_n(C^m, r_h^n)$  et on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left( \tau_n C_h^m - \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) \right| &= \left| \tau_n (C_h^m - R_{nh} C^m, r_h^n) + \tau_n (R_{nh} C^m - C^m, r_h^n) \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C^m - C(t)) dt, r_h^n \right) \right|, \end{aligned} \quad (2.39)$$

d'où,

$$\left| \left( \tau_n C_h^m - \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) - \tau_n \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \leq \tau_n \left| (R_{nh} C^m - C^m, r_h^n) \right| + \left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C^m - C(t)) dt, r_h^n \right) \right|. \quad (2.40)$$

Pour le terme  $\tau_n (R_{nh} C^m - C^m, r_h^n)$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration (2.5), pour obtenir

$$\begin{aligned} \tau_n (R_{nh} C^m - C^m, r_h^n) &\leq \tau_n \|R_{nh} C^m - C^m\|_{L^2(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tau_n h \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)} |C^m|_{1,\Omega} \\ &\leq \tau_n h \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Par l'inégalité (1.2) et le Lemme 1.3, on obtient

$$\left| \tau_n (R_{nh} C^n - C^n, r_h^n) \right| \leq \frac{c^2 h^2 \tau_n \xi_6}{2} \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_2^0)^2}{2\xi_6} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \quad (2.42)$$

Pour le terme  $\left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C^n - C(t)) dt, r_h^n \right)$ , on utilise le théorème de Fubini et l'inégalité (1.2) et on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C^n - C(t)) dt, r_h^n \right) \right| &= \left| \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} C'(s) ds dt, r_h^n \right) \right| \\ &\leq \frac{\tau_n^{3/2}}{\sqrt{3}} \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{\xi_7 \tau_n^2}{6} \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_2^0)^2}{2\xi_7} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En regroupant les inégalités (2.40), (2.42) et (2.43) pour  $\xi_6 = \xi_7 = \frac{25(S_2^0)^2}{\alpha}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left( \tau_n C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) - \tau_n \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| &\leq c_6 h^2 \tau_n \|C\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 + c_7 \tau_n^2 \left\| \frac{\partial C}{\partial t} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{25} \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $c_6$  et  $c_7$  sont des constantes positives indépendantes de  $\tau$  et  $h$ .

On somme l'égalité (2.18) sur  $n$  de 1 jusqu'à  $m$ , pour tout  $m \leq N$ , et on utilise (2.19), (2.21), (2.26), (2.38) et (2.44), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|r_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \|r_h^n - r_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2 + r_0 \sum_{n=1}^m \tau_n \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq c(h^2 + \tau^2) + c' \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{9\alpha}{50} \sum_{n=1}^m \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $h$  et  $\tau$ .

Donc, on applique l'inégalité triangulaire et on utilise les propriétés de  $R_{nh}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|C_h^m - C^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n |C_h^n - C^n|_{1,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^m \|(C_h^n - C^n) - (C_h^{n-1} - C^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + r_0 \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(h^2 + \tau^2) + c' \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^n - C^n|_{1,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N \|(C_h^n - C^n) - (C_h^{n-1} - C^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + r_0 \sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(h^2 + \tau^2) + c' \sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \end{aligned}$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes positives indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

□

**Remarque 2.7.** Si la viscosité  $\nu$  est constante, indépendante de  $C$ , on peut se passer de l'hypothèse  $\mathbf{u}$  dans  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et ne garder que  $\mathbf{u}$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^d)$  dans le Théorème 2.6.

En effet, l'égalité (2.12) devient

$$\int_{\Omega} \nu(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

**Corollaire 2.8.** Sous les hypothèses du Théorème 2.6, on a les estimations a priori correspondantes à  $(V_{n,h,1})$  :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq c(h + \tau), \\ \sup_{0 \leq n \leq N} \|p^n - p_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq c'(h + \tau), \\ \sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^m - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^m - C^n|_{1,\Omega}^2 &\leq c''(h^2 + \tau^2), \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $c, c'$  et  $c''$  sont indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

*Démonstration.* On considère la majoration (2.9). En insérant  $C^{n-1}$  dans (2.9) et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \left( \sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h^{n-1} - C^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n \int_{\Omega} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} C'(s) ds \right|^2 d\mathbf{x} \right). \quad (2.47)$$

On déduit des inégalités (2.45) et (2.47) la majoration suivante

$$\|C_h^m - C^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n |C_h^m - C^n|_{1,\Omega}^2 \leq c(h^2 + \tau^2) + c' \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^{n-1} - C^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.48)$$

On déduit d'après le lemme de Gronwall discret que

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^n - C^n|_{1,\Omega}^2 \leq c(h^2 + \tau^2). \quad (2.49)$$

On note, dans le terme de droite de l'équation (2.48), que  $\sum_{n=1}^N$  est majoré par  $T$ , qui est une quantité indépendante de  $N$ , d'où la constante  $c$  qui apparaît dans l'équation (2.49) ne dépend pas de  $\tau$ .

L'inégalité (2.49) et les inégalités (2.9) et (2.10) aboutissent aux majorations de (2.46). □

## 2.3 Estimation *a priori* de l'erreur de la deuxième formulation variationnelle

**Théorème 2.9.** *Soit  $(\mathbf{u}, p, C)$  la solution du problème  $(V_2)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  la solution du problème  $(V_{n,h,2})$ . Si  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^d) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ ,  $C \in L^\infty(0, T; W^{2,4}(\Omega))$  et  $C' \in L^2(0, T; W^{1,4}(\Omega))$ , il existe des constantes positives  $c, c_1, c', c''$  dépendantes de  $\mathbf{u}, p$  et  $\alpha$  tel que,*

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\nu_1} (ch + (c_{\mathbf{f}_1}^* + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}) \|C^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}), \quad (2.50)$$

$$|p^n - p_h^n|_{1,\Omega} \leq c'h + \frac{\nu_2}{\beta_2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\beta_2} (c_{\mathbf{f}_1}^* + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}) \|C^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.51)$$

et

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^n - C^n|_{1,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N \|(C_h^m - C^m) - (C_h^{n-1} - C^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + r_0 \sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h^n - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c''(h^2 + \tau^2) + c_1 \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}_n^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

*Démonstration.* Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$ . Tout d'abord, on commence à établir (2.50), puis (2.51), et finalement (2.52).

On commence par établir la majoration de l'erreur sur  $\mathbf{u}$ . En prenant la différence entre les premières équations de  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$  et en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{n,h,2}$  et comme

$$\int_{\Omega} \nabla r_{nh} p^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0, \text{ alors on a}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) - \nu(C^n(\mathbf{x}))) \mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} (\nabla p^n - \nabla r_{nh} p^n) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

En intercalant  $\mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))(\mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))(\mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})) - \nu(C^n(\mathbf{x})))\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&- \int_{\Omega} (\nabla p^n - \nabla r_{nh}p^n) \cdot \mathbf{v}_hd\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

On prend  $\mathbf{v}_h = \mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n$  dans  $\mathcal{V}_{n,h,2}$  et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
\nu_1 \|\mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \nu_2 \|\mathcal{F}_{nh}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \lambda \|C_h^{n-1} - C^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(\Omega)^d} + |p^n - r_{nh}p^n|_{1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de  $\mathcal{F}_{nh}$  et  $r_{nh}$ , on obtient (2.50). On démontre à présent la majoration de l'erreur sur  $p$ . On prend la différence des premières équations des problèmes  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$ , puis on intercale  $\nabla r_{nh}p^n$ , en prenant  $\mathbf{v}_h$  in  $X_{n,h,2}$ , et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla(p_h^n - r_{nh}p^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla(p^n - r_{nh}p^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} (\nu(C^n(\mathbf{x})) - \nu(C_h^{n-1}(\mathbf{x})))\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&- \int_{\Omega} (\mathbf{f}_1(C^n(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x})d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

D'après la condition inf-sup (1.22), il existe un  $\mathbf{v}_h$  dans  $X_{n,h,2}$  tel que

$$\mathbf{v}_h = \nabla(r_{nh}p^n - p_h^n) \quad \text{and} \quad \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\beta_2} |r_{nh}p^n - p_h^n|_{1,\Omega}.$$

Pour ce choix de  $\mathbf{v}_h$  et sous l'hypothèse 1.7 on obtient une estimation de  $|p_h^n - r_{nh}p^n|_{1,\Omega}$  :

$$\begin{aligned}
|p_h^n - r_{nh}p^n|_{1,\Omega} &\leq \frac{1}{\beta_2} \left[ |p^n - r_{nh}p^n|_{1,\Omega} + \nu_2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\
&\quad \left. + (c_{\mathbf{f}_1}^* + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)}) \|C^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \right].
\end{aligned}$$

Par une inégalité triangulaire, on obtient (2.51) en utilisant les propriétés de  $r_{nh}$ . À présent, on démontre (2.52). On choisit la fonction test  $S_h = r_h^n = C_h^n - R_{nh}C^n$  dans la troisième équation de  $(V_2)$ . Puis, on l'intègre sur  $[t_{n-1}; t_n]$ , ensuite on la retranche avec la



troisième équation de  $(V_{n,h,2})$  multipliée par  $\tau_n$ . Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} & \left( (C_h^n - C_h^{n-1}) - (C^n - C^{n-1}), r_h^n \right) + \alpha \left( \tau_n \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla C(t) dt, \nabla r_h^n \right) \\ & + \left( \tau_n \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n, r_h^n) \\ & + r_0 \left( \tau_n C_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t) dt, r_h^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tous les termes de l'égalité (2.57) sont traités dans la preuve du Théorème 2.6 précédent (voir (2.21), (2.26), (2.44)) sauf le terme non-linéaire que l'on note par  $b_n$ .

En intercalant  $\pm \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla R_{nh} C^n, r_h^n)$ ,  $\pm \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n R_{nh} C^n, r_h^n)$ ,  $b_n$  devient :

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - R_{nh} C^n), r_h^n) + \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla R_{nh} C^n, r_h^n) - \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right) \\ & + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n (C_h^n - R_{nh} C^n), r_h^n) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n R_{nh} C^n, r_h^n). \end{aligned}$$

Puis, on intercale  $\pm \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C^n, r_h^n)$ ,  $\pm \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C(t) dt, r_h^n \right)$  et  $\pm \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C^n, r_h^n)$  dans  $b_n$  et en remarquant d'après la proposition 1.21 que

$$\tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - R_{nh} C^n), r_h^n) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n (C_h^n - R_{nh} C^n), r_h^n) = 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_n (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (R_{nh} C^n - C^n), r_h^n) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r_h^n) \\ & + \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C^n - C(t)) dt, r_h^n \right) \\ & + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n (R_{nh} C^n - C^n), r_h^n) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n (C^n), r_h^n) \end{aligned} \quad (2.58)$$

On note par  $b_{n,1}, \dots, b_{n,5}$  respectivement les termes de droite de l'équation (2.58). Les premiers termes ( $b_{n,i}, i = 1, \dots, 3$ ) sont traités exactement comme dans la preuve du Théorème 2.6 précédent. Les termes qui restent se traitent comme suit :

$$\begin{aligned} b_{n,4} &= \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n (R_{nh} C^n - C^n), r_h^n) \\ &= -\frac{\tau_n}{2} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (R_{nh} C^n - C^n), r_h^n) - \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla r_h^n, (R_{nh} C^n - C^n)) \\ &= b_{n,4}^1 + b_{n,4}^2, \end{aligned}$$

où, en utilisant le Lemme 1.3, l'inégalité (1.2) et la majoration (2.3), on a pour tout  $\bar{\xi}_1 > 0$

$$\begin{aligned} |b_{n,4}^1| &\leq \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla (R_{nh} C^n - C^n)\|_{L^4(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{ch^2 \tau_n \bar{\xi}_1}{8} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{2,4}(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_4^0)^2}{2\bar{\xi}_1} |r_h^n|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

et en utilisant (1.18) avec  $d \leq 3$  et l'inégalité (2.3) pour  $l = 1$ ,  $p = 4$  et  $m = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} |b_{n,4}^2| &\leq \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^4(\Omega)^d} \|\nabla r_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|R_{nh} C^n - C^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{ch^2}{2} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \times h^{-d/4} |r_h^n|_{1,\Omega} \|C^n\|_{W^{2,4}(\Omega)} \\ &\leq \frac{c\bar{\xi}_2}{8} h^{\frac{8-d}{2}} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n}{2\bar{\xi}_2} |r_h^n|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

En suivant la même demarche, le terme  $b_{n,5}$  se décompose et se majore comme suit : (où  $\operatorname{div} \mathbf{u}^n = 0$ )

$$\begin{aligned} b_{n,5} &= \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) C^n, r_h^n) \\ &= -\frac{\tau_n}{2} ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla C^n, r_h^n) - \frac{\tau_n}{2} ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla r_h^n, C^n) \\ &= b_{n,5}^1 + b_{n,5}^2, \end{aligned}$$

où, en utilisant le Lemme 1.3, l'inégalité (1.2), on a pour tout  $\bar{\xi}_3 > 0$

$$\begin{aligned} |b_{n,5}^1| &= \left| \frac{\tau_n}{2} ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla C^n, r_h^n) \right| \\ &\leq \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{\tau_n \bar{\xi}_3}{8} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega))}^2 + \frac{\tau_n (S_0^4)^2}{2\bar{\xi}_3} |r_h^n|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

et pour tout  $\bar{\xi}_4 > 0$

$$\begin{aligned} |b_{n,5}^2| &= \left| \frac{\tau_n}{2} ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla r_h^n, C^n) \right| \\ &\leq \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|C^n\|_{L^\infty(\Omega)} |r_h^n|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{\tau_n \bar{\xi}_4}{8} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C\|_{L^\infty([0,T] \times \Omega)}^2 + \frac{\tau_n}{2\bar{\xi}_4} |r_h^n|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

En utilisant les majorations obtenues précédemment pour un choix convenable de  $\bar{\xi}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , et en sommant sur  $n$  de 1 à  $m \leq N$ , on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|r_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \|r_h^n - r_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^m \tau_n |r_h^n|_{1,\Omega}^2 + r_0 \sum_{n=1}^m \|r_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c(h^2 + \tau^2) + c \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \end{aligned}$$

et on déduit finalement (2.52).

□

**Corollaire 2.10.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.9, on a l'estimation a priori correspondant au problème  $(V_{n,h,2})$  :*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq c(h + \tau), \\ \sup_{0 \leq n \leq N} |p^n - p_h^n|_{H^1(\Omega)} &\leq c'(h + \tau), \\ \sup_{0 \leq n \leq N} \|C_h^m - C^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^m - C^n|_{1,\Omega}^2 &\leq c''(h^2 + \tau^2), \end{aligned} \tag{2.59}$$

où  $c, c'$  et  $c''$  sont indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

## Chapitre 3

# Estimation d'erreur *a posteriori*

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir un estimateur calculable de l'erreur, qui permettra de construire un algorithme de raffinement adaptatif des maillages spatio-temporels.

On prouve les estimations d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte du problème  $(V_1)$  (resp.  $(V_2)$ ) et la solution numérique du problème  $(V_{n,h,1})$  (resp.  $(V_{n,h,2})$ ). On commence par construire les indicateurs, puis on prouve l'estimation d'erreur *a posteriori* et finalement on établit l'optimalité correspondante.

### 3.1 Construction des indicateurs d'erreurs

On définit l'espace :

$$Z_{nh} = \{g_h \in L^2(\Omega); \forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, g_h|_{K_n} \in P_l(K_n)\},$$

où  $l \leq 1$ . On fixe une approximation  $g_h^n$  de  $g^n$  dans  $Z_{nh}$ .

Pour tout élément  $K_n$  dans  $\mathcal{T}_{nh}$ , on note par :

- $\mathcal{E}_{nh}$  l'ensemble de toutes les arêtes  $e_n$  si  $d = 2$  ou faces  $e_n$  si  $d = 3$  du maillage,
- $\mathcal{E}_{nh}^i$  l'ensemble des  $e_n$  qui sont contenues dans  $\Omega$  mais qui n'appartiennent pas à  $\Gamma$ ,
- $\mathcal{E}_{nh}^b$  l'ensemble des  $e_n$  qui appartiennent à  $\Gamma$ ,
- $\Delta_{K_n}$  l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui ont un sommet commun avec  $K_n$ ,
- $\Delta_{e_n}$  l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui ont  $e_n$  comme arête ( $d = 2$ ) ou comme face ( $d = 3$ ),
- $[\cdot]_{e_n}$  le saut sur chaque arête  $e_n$  dans  $\mathcal{E}_{nh}^i$ ,

- $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal sortant de  $K_n$  sur  $\partial K_n$ .

Afin d'établir les estimations d'erreur *a posteriori*, on aura besoin d'une condition supplémentaire quasi-uniforme du maillage. On suppose qu'on a l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.1.** *Le pas d'espace  $h$  et le pas de temps  $\tau$  vérifient les inégalités suivantes :*

$$\tau \leq ch \quad \text{et} \quad h_{K_n} \geq c'h,$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes indépendantes de  $\tau$  et  $h$ .

Pour la démonstration des théorèmes suivants, on définit pour un élément  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$ , la fonction bulle  $\psi_{K_n}$  (resp.  $\psi_{e_n}$  pour  $e_n$ ) qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées de  $K_n$  (resp. des deux coordonnées barycentriques associées aux sommets de  $e_n$ ).

Pour toute partie  $A$  de  $\Omega$ , on désigne par  $\mathbb{P}_r(K_n)$  l'ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal à  $r$  sur  $A$ .

**Proposition 3.2.** (cf. Verfürth [52]). *On a pour tout  $v \in \mathbb{P}_r(K_n)$  on a*

$$\begin{cases} C_1 \|v\|_{L^2(K_n)} \leq \|v\psi_{K_n}^{1/2}\|_{L^2(K_n)} \leq C'_1 \|v\|_{L^2(K_n)}, \\ |v|_{1,K_n} \leq c_1 h_{K_n}^{-1} \|v\|_{L^2(K_n)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\psi_{K_n} = \prod_{i=1}^{d+1} \lambda_i$  avec  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, d+1$ , sont les coordonnées barycentriques de l'élément  $K_n$  et  $h_{K_n}$  le diamètre de  $K_n$  et  $C_1, C'_1, c_1$  sont des constantes.

On considère un opérateur de relèvement  $\mathcal{L}_{e_n}$  défini sur l'ensemble des polynômes sur  $e_n$  qui s'annulent sur  $\partial e_n$  en des polynômes sur les deux éléments  $K_n$  et  $K'_n$  contenant  $e_n$ , qui s'annulent sur  $\partial(K_n \cap K'_n) \setminus e_n$ . Cet opérateur est réalisé par une transformation affine à partir de l'opérateur fixe sur l'élément de référence.

**Proposition 3.3.** *On a pour tout  $v \in \mathbb{P}_r(e_n)$*

$$C_1 \|v\|_{L^2(e_n)} \leq \|v\psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)} \leq C'_1 \|v\|_{L^2(e_n)}, \quad (3.2)$$

où  $\psi_{e_n} = \prod_{i=1}^d \lambda_i$  avec  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , sont les coordonnées barycentriques de l'élément  $K_n$  associées aux sommets de  $e_n$  et  $C_1$  et  $C'_1$  sont des constantes.

Pour tout polynôme  $v \in \mathbb{P}_r(e_n)$  qui s'annule sur  $\partial e_n$ , si  $K_n$  est un élément qui contient  $e_n$ , on a

$$\|\mathcal{L}_{e_n}(v)\|_{L^2(K_n)} + h_{e_n} |\mathcal{L}_{e_n}(v)|_{1,K_n} \leq c_1 h_{e_n}^{1/2} \|v\|_{L^2(e_n)}, \quad (3.3)$$

où  $c_1$  est une constante et  $h_{e_n}$  le diamètre de l'arête  $e_n$ .

Pour chaque arête  $e_n$  du maillage et pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \phi_h^{e_n}|_{[t_{n-1}, t_n]} = \begin{cases} 0 & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_{nh}^i, \\ \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n} & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_{nh}^b. \end{cases} \quad (3.4)$$

L'erreur de discrétisation correspondante à la concentration sera mesurée par la norme suivante :

$$\begin{aligned} \llbracket C - C_h \rrbracket(t_n) = & \left( \|C(t_n) - C_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \alpha \max \left( \int_0^{t_n} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 dt, \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} |C(t) - \pi_\tau C_h(t)|_{1,\Omega}^2 dt \right) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cette norme a été utilisée par C. Bernardi et T. Sayah dans [13]. Les deux premiers termes sont classiquement utilisés dans ce genre de problème tandis que le troisième a été introduit afin de pouvoir assurer l'optimalité de l'estimation *a posteriori* correspondante. Pour la vitesse et la pression, on utilise les normes classiques pour mesurer l'erreur.

## 3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du premier schéma

On dérive une estimation d'erreur *a posteriori* de la discrétisation  $\text{RT}_0, \mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1$  du problème

$$(V_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}(t), p(t), C(t)) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que, } C(0) = 0 \text{ et} \\ \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(t) (\text{div } \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\cdot, t, C(t)) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q (\text{div } \mathbf{u}(t)) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} C(t) S \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C(t) \cdot \nabla S \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) C(t) S \, d\mathbf{x} \\ \quad \quad \quad + r_0 \int_{\Omega} C(t) S \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(t) S \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

On s'intéresse à la discrétisation du problème  $(V_1)$  en espace par le schéma  $\text{RT}_0, \mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1$  où on discrétise en espace la vitesse  $\mathbf{u}$  avec les éléments finis  $\text{RT}_0$ , la pression  $p$  avec les éléments finis  $\mathbb{P}_0$  et la concentration  $C$  avec les éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , et en temps avec la méthode d'Euler implicite. On note les espaces discrets correspondants respectivement par  $X_{n,h,1}$ ,  $M_{n,h,1}$  et  $Y_{n,h}$ . On obtient la formulation variationnelle discrète suivante : Pour

tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$(V_{n,h,1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,1} \times M_{n,h,1} \text{ tel que } C_h^0 = 0, \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}, \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^n (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,1}, \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

### 3.2.1 Résidus pour le problème de Darcy

Dans cette section, on écrit les équations des résidus correspondant au problème de Darcy. On rappelle qu'à partir de la solution  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n)$  du problème  $(V_{n,h,1})$ , on construit des fonctions constantes par morceaux  $\mathbf{u}_h(t)$  et  $p_h(t)$  selon la Définition 1.14.

**Définition 3.4.** *Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ , on définit le résidu  $R_1^n(\mathbf{v})$  sur  $]t_{n-1}, t_n]$  par*

$$\forall t \in ]t_{n-1}, t_n], \quad R_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} (p - p_h)(t) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

**Remarque 3.5.** *En utilisant la première équation du problème continu  $(V_1)$ , on obtient une définition équivalente du résidu, donnée pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  par*

$$R_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, C(t)) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

**Lemme 3.6.** *Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , le résidu  $R_1^n$  vérifie l'égalité suivante : pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ , pour tout  $\mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,  $R_1^n(\mathbf{v})(t) = \tilde{R}_1^n(\mathbf{v})(t)$ , où*

$$\tilde{R}_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \quad (3.8)$$

*Démonstration.* Il suffit d'ajouter et de retrancher  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  dans (3.7), et d'utiliser la première équation du système discret  $(V_{n,h,1})$  pour obtenir le résultat.  $\square$

**Définition 3.7.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $q \in L_0^2(\Omega)$ , on définit le résidu  $R_2^n(q)$  sur  $]t_{n-1}, t_n]$  par :

$$R_2^n(q)(t) = \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) dx. \quad (3.9)$$

**Lemme 3.8.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $q \in L_0^2(\Omega)$ , le résidu  $R_2^n$  est nul.

*Démonstration.* La deuxième équation du problème  $(V_1)$  implique que  $\operatorname{div} \mathbf{u}(t) = 0$ . De plus, on réfère au Théorème 1.23 et on a donc :

$$R_2^n = 0. \quad (3.10)$$

□

### 3.2.2 Résidu pour l'équation de convection-diffusion-réaction

Dans cette section, on écrit l'équation du résidu correspondant à l'équation de convection–diffusion–réaction, qui est la somme des résidus temporels et spatiaux. L'utilité de cette forme du résidu réside dans le fait qu'elle permet de distinguer les deux sources d'erreur de discrétisation : l'erreur temporelle et l'erreur spatiale.

**Lemme 3.9.** La concentration exacte  $C$  solution du problème  $(V_1)$  vérifie pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $C_h \in Y_{n,h}$ , et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + \alpha (\nabla (C - C_h)(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) \\ & + r_0((C - C_h)(t), S) \\ & = (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) - r_0(C_h(t), S) - \alpha (\nabla C_h(t), \nabla S). \end{aligned} \quad (3.11)$$

*Démonstration.* On part de la troisième équation du problème  $(V_1)$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} C(t), S \right) + \alpha (\nabla C(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + r_0(C(t), S) = (g(t), S)$$

On intercale  $\left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right)$ ,  $\alpha (\nabla C_h(t), \nabla S)$ ,  $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla C_h(t), S)$ ,  $r_0(C_h(t), S)$  respectivement dans les termes de l'égalité précédente et on obtient l'égalité (3.11). □

**Définition 3.10.** On introduit le résidu total  $R(C_h) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , défini pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  et pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \langle R(C_h)(t), S \rangle & = (g(t), S) - \left( \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) \\ & - r_0(C_h(t), S) - \alpha (\nabla C_h(t), \nabla S). \end{aligned} \quad (3.12)$$



**Lemme 3.11.** *Pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , pour  $S_h \in Y_{n,h}$ , pour  $C_h$  solution du problème  $(V_{n,h,1})$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ , le résidu  $R(C_h)$  vérifie*

$$\langle R(C_h)(t), S \rangle = \langle g(t) - g^n, S \rangle + \langle g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle + \langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle, \quad (3.13)$$

où  $R_h$  est le résidu spatial défini par

$$\begin{aligned} \langle R^h(C_h)(t), S \rangle = & \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) (\mathbf{x}) \times S(\mathbf{x}) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}(\sigma) \cdot S(\sigma) d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

et  $R^\tau$  est le résidu temporel défini par

$$\begin{aligned} \langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle = & \frac{t_n - t}{\tau_n} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) dx \right. \\ & \left. + r_0 \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) dx + \int_{K_n} \alpha \nabla (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

*Démonstration.* On intercale  $C_h^n$  dans le troisième et le quatrième termes et on intercale  $\nabla C_h^n$  dans le dernier terme de l'équation (3.12), et on obtient

$$\begin{aligned} \langle R(C_h)(t), S \rangle = & (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla (C_h(t) - C_h^n), S) \\ & - r_0 ((C_h(t) - C_h^n), S) - \alpha (\nabla (C_h(t) - C_h^n), \nabla S) \\ & - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h^n, S) - r_0 (C_h^n, S) - \alpha (\nabla C_h^n, \nabla S). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ainsi, en utilisant la troisième égalité de la formulation variationnelle  $(V_{n,h,1})$  et en appliquant la formule de Green sur le terme  $\alpha (\nabla C_h^n, \nabla S)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle R(C_h)(t), S \rangle = & (g(t) - g^n, S) + (g^n - g_h^n, S - S_h) \\ & + \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n, S - S_h \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}(\sigma) \cdot (S - S_h) d\sigma - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla (C_h(t) - C_h^n), S) \\ & - r_0 ((C_h(t) - C_h^n), S) - \alpha (\nabla (C_h(t) - C_h^n), \nabla S). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comme pour tout  $t \in [t_{n-1}, t_n]$

$$C_h(t) - C_h^n = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}),$$

et

$$\mathbf{u}_h(t)|_{]t_{n-1}, t_n]} = \mathbf{u}_h^n,$$

on a le résultat souhaité.  $\square$

### 3.2.3 Définition des indicateurs

Pour établir une borne supérieure des indicateurs, on a besoin de travailler avec des polynômes pour pouvoir appliquer l'inégalité inverse dont on a besoin. Il convient d'approximer la viscosité  $\nu$  par  $\nu_h$ . On note par  $\nu(f) = \nu \circ f$ . On choisit  $\nu_h : f \in H^1(K_n) \rightarrow \nu_h(f) \in \mathbb{P}_1(K_n)$  définie par

$$\nu_h(f)|_{K_n}(\mathbf{x}) := \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} (\nu(f))(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \left[ \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} \nabla(\nu(f))(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}), \forall \mathbf{x} \in K_n, \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{c}$  est le centre de l'élément  $K_n$ . On a donc  $|\mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq h_{K_n}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in K_n$ .

Il est clair que si  $\nu(f)|_{K_n} \in \mathbb{P}_1$ , alors  $\nu_h(f) = \nu(f)$  sur  $K_n$ . On a, pour tous  $\nu$  et  $f$  vérifiant  $\nu(f) \in W^{l,p}(K_n)$  avec  $l = 1, 2$ , et pour tout  $p \geq 2$ ,

$$\|\nu_h(f) - \nu(f)\|_{L^p(K_n)} + h_{K_n} \|\nabla(\nu_h(f) - \nu(f))\|_{L^p(K_n)} \leq ch_{K_n}^l |\nu(f)|_{W^{l,p}(K_n)}, \quad (3.19)$$

où  $c$  est une constante qui dépend de  $p$  mais qui est indépendante de  $h_{K_n}$  et de  $K_n$ .

Lorsque  $\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ , sa dérivée  $\nu'$  est majorée par un réel qu'on note  $\nu'_2$  et elle est  $\lambda'$ -lipschitzienne pour un certain réel  $\lambda'$ . Puisque  $\nu$  vérifie l'inégalité (1.12), le polynôme  $\nu_h(f)$  vérifie pour tout  $f \in H^1(K_n)$ , l'inégalité suivante :

$$\|\nu_h(f)\|_{L^\infty(K_n)} \leq \nu_2 + \nu'_2 h_{K_n} |K_n|^{-1/2} \|\nabla f\|_{L^2(K_n)}. \quad (3.20)$$

En outre, pour tout  $p \geq 2$ ,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_{L^p(K_n)^d} \leq |K_n|^{1/p} h_{K_n}, \quad (3.21)$$

On déduit facilement que pour tous  $f_1$  dans  $H^1(K_n)$  et  $f_2$  dans  $W^{1,6}(K_n)$ , on a pour tout  $p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} & \|\nu_h(f_1) - \nu_h(f_2)\|_{L^p(K_n)} \\ & \leq \lambda |K_n|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|f_1 - f_2\|_{L^2(K_n)} \\ & \quad + h_{K_n} |K_n|^{\frac{1}{p} - 1} \left[ \nu'_2 |K_n|^{1/2} \|f_1 - f_2\|_{H^1(K_n)} + \lambda' |K_n|^{1/3} \|f_1 - f_2\|_{L^2(K_n)} \|f_2\|_{W^{1,6}(K_n)} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour la même raison qu'on a approché  $\nu$  par  $\nu_h$ , on a besoin de travailler avec une approximation  $\mathbf{f}_h^n$  de  $\mathbf{f}^n$  qui doit être  $\mathbb{P}_1$ .

Tout d'abord, on rappelle que

$$\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}).$$

On définit l'opérateur  $\mathbf{f}_h^n$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) = \mathbf{f}_{0,h}^n + \mathbf{f}_{1,h}(C_h^{n-1}).$$

On note par  $f_0^{n,i}$  est la  $i$ -ème composante de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_0^n = (f_0^{n,1}, \dots, f_0^{n,d})$ . On pose alors

$$f_{0,h}^{n,i} = \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} f_0^{n,i} d\mathbf{x}.$$

On note par  $f_1^i$  la  $i$ -ème composante de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_1 = (f_1^1, \dots, f_1^d)$ . Pour une fonction  $\xi$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , on note par  $f_1^i(\xi)$  la fonction qui à  $\mathbf{x} \in \Omega$  associe  $f_1^i(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}))$ . On pose alors

$$f_{1,h}^i(\xi)|_{K_n}(\mathbf{x}) := \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} (f_1^i(\xi))(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \left[ \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} \nabla(f_1^i(\xi))(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

On suppose que la dérivée de  $\mathbf{f}_1$  par rapport à sa variable de concentration, dont la  $i$ -ème composante est notée par  $\frac{\partial f_1^i}{\partial C}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\frac{\partial f_1^i}{\partial C}$  est bornée uniformément en  $\mathbf{x}$  et en  $C$  par un réel (indépendant de  $\mathbf{x}$ ) que l'on note  $\|\mathbf{f}'_2\|_\infty$ , où  $\|\mathbf{f}'_2\|_\infty = \max(|\frac{\partial f_1^1}{\partial C}|, \dots, |\frac{\partial f_1^d}{\partial C}|)$ . De plus, on suppose que cette dérivée est  $\lambda'$ -lipschitzienne (avec  $\lambda'$  indépendant de  $\mathbf{x}$ ).

**Définition 3.12.** On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,0}^h$ ,  $\eta_{n,K_n,1}^h$ ,  $\eta_{n,K_n,2}^h$  et  $\eta_{n,K_n,3}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,0}^h)^2 = \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 &= h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[p_h^n \mathbf{n}]\|_{L^2(e_n)}^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 &= h_{K_n}^2 \|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)^p}^2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{où } p = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 2 \\ 3 & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 &= h_{K_n}^2 \|g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(e_n)}^2, \end{aligned}$$

ainsi que l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2. \quad (3.26)$$

**Remarque 3.13.** En général, pour une estimation d'erreur a posteriori du problème de Darcy, on introduit l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  qui provient de la forme du résidu standard. Or, pour l'élément fini  $H_0(\text{div}, \Omega)$ , on n'obtient pas l'optimalité avec seulement cet indicateur, d'où l'utilité d'introduire l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,2}^h)^2$  qui provient du fait d'appliquer l'opérateur rot à l'équation de Darcy discrète. La justification de l'introduction de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,2}^h)^2$  pour l'obtention de l'optimalité sera expliquée plus tard.

### 3.2.4 Borne supérieure de l'erreur

Dans cette partie, on va dériver une borne supérieure de l'erreur exprimée à l'aide des indicateurs spatiaux et temporel.

Tout d'abord, on établit la borne supérieure de l'erreur correspondant à l'équation de Darcy où on majore l'erreur de la vitesse et l'erreur de la pression par les indicateurs spatio-temporels et par l'erreur de la concentration.

On commence par rappeler un lemme classique pour  $d = 2$  (cf. Girault et al [37]) et démontré dans Dib et al [28] pour  $d = 3$ .

**Lemme 3.14.** (cf. Dib et al [28]) Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de bord lipschitz  $\partial\Omega$ . Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , où  $\mathcal{V}$  est défini par (1.1), on a une unique fonction  $\eta \in H_0^1(\Omega)^p$ , où  $p = 1$  si  $d = 2$  et  $p = 3$  si  $d = 3$ , tel que

$$\mathbf{v} = \text{rot } \eta, \quad (3.27)$$

et il existe une constante  $c$  indépendante de  $\mathbf{v}$  et  $\eta$ , tel que

$$\|\eta\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (3.28)$$

**Remarque 3.15.** Le Lemme 3.14 sera utile car dans la démonstration du Lemme 3.16, on va choisir  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  et  $\mathbf{v}_h = \text{rot}(R_{nh}\eta)$  pour éliminer les termes impliquant la pression. Il faut donc vérifier que  $\mathbf{v}_h \in X_{n,h,1}$ . Ceci est vrai pour les raisons suivantes (démonstration en dimension 2; la démonstration en dimension 3 est donnée en annexe) : Tout d'abord, puisque  $R_{nh}\eta$  est une fonction  $\mathbb{P}_1$  par morceaux, alors  $\mathbf{v}_h$  est constante par morceaux et donc a fortiori  $\mathbb{P}_1$  sur chaque élément. De plus,  $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \text{rot}(R_{nh})\eta \cdot \mathbf{n} = \nabla(R_{nh})\eta \cdot \mathbf{t}$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la face et  $\mathbf{t}$  est un vecteur unitaire tangent à la face. Or, cette composante du gradient dans la direction de l'arête ne dépend que des valeurs de  $R_{nh}\eta$  aux sommets de celle-ci, et, la fonction  $R_{nh}\eta$  étant continue sur le maillage, ces valeurs sont les mêmes de part et d'autre. Ainsi,  $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}$  est continue sur les interfaces. Enfin, sur la frontière extérieure,  $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = \nabla(R_{nh})\eta \cdot \mathbf{t} = 0$  puisque  $R_{nh}\eta|_\Gamma = 0$ . D'où,  $\mathbf{v}_h$  est bien dans l'espace  $X_{n,h,1}$ .

**Lemme 3.16** (Erreur de la vitesse et de la pression). Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{n,h,1})$ . Sous les hypothèses du Théorème 2.6, on a la borne supérieure suivante pour l'erreur en vitesse et pression : pour tout  $m = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} \\ & \leq c \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} + \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \right)^{1/2} \\ & \quad + c' \left( \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,K_n,0}^h)^2 + \tau_n(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + \tau_n(\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes indépendantes de  $h_{K_n}$  et  $\tau_n$ .

*Démonstration. Majoration de l'erreur de discrétisation de la vitesse*

Par la Définition 3.4 et le Lemme 3.6, on a pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pour obtenir une majoration de l'erreur de la vitesse, on élimine tout d'abord la pression de l'équation précédente, en prenant  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Grâce au Lemme 3.14, il existe  $\eta \in H_0^1(\Omega)^p$ , où  $p = 1$  si  $d = 2$  et  $p = 3$  si  $d = 3$  tel que

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \eta$$

et par la Remarque 3.15, on peut choisir

$$\mathbf{v}_h = \operatorname{rot}(R_{nh})\eta,$$

où  $R_{nh}$  est l'interpolation de Clément ou de Scott-Zhang qui satisfait (2.3), ainsi on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

On intercale les termes  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}$  dans l'égalité précédente, on simplifie en tenant compte de l'égalité  $\mathbf{u}_h(t) = \mathbf{u}_h^n$  sur  $]t_{n-1}; t_n]$  et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

On majore le premier terme du membre de droite de l'égalité (3.32) comme suit : on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \| \mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)^d} \| \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (3.33)$$

On intercale  $\mathbf{f}(t, C_h(t))$  et on utilise les propriétés de  $\mathbf{f}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| \\ & \leq c_{\mathbf{f}_1}^* \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

On passe à la majoration du deuxième terme : on effectue une intégration par parties, ainsi on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \\ & = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} \text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \cdot (\eta - R_{nh}\eta) d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n} \cdot (\eta - R_{nh}\eta) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

On note que pour tout vecteur  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w} \times \mathbf{n}$  est un scalaire en dimension 2. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right| \\ & \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n} \|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p} |\eta|_{H^1(\Delta_{K_n})^d} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n}^{1/2} \|[(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)^p} |\eta|_{H^1(\Delta_{e_n})^d} \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec  $c$  une constante indépendante de  $h$  et de  $\tau$ .

On utilise le fait que  $|\eta|_{H^1(\Delta_{e_n})^d} \leq |\eta|_{H^1(\Delta_{K_n})^d}$  et que  $\|\eta\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}$  ; on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right| \\ & \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[ (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n} \|_{L^2(e_n)^p}^2 \right] \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans la majoration  $(\sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |\eta|_{1, \Delta_{K_n}}^2)^{1/2} \leq c |\eta|_{1, \Omega}$ , on s'assure qu'un même triangle n'apparaît qu'un nombre borné de fois ceci grâce à la propriété (1.16) ainsi la constante  $c$  est indépendante de  $n$  et  $h$ .

Pour la majoration du troisième terme de l'égalité (3.32), on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right| \\
& \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(K_n)^d} \\
& \leq \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

En utilisant les définitions de  $\mathbf{v}$  et de  $\mathbf{v}_h$ , et par l'inégalité (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} & \leq c_1 |\eta - \eta_h|_{H^1(\Omega)^d} \\
& \leq c_2 |\eta|_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité (3.28), on obtient

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{3.39}$$

On passe maintenant à la majoration du quatrième terme de l'égalité (3.32).

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\left| \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| \leq \lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{3.40}$$

On intercale  $C_h(t)$  dans  $\|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(\Omega)}$  et on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| & \leq \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \quad \times \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

On termine par la majoration du dernier terme de l'équation (3.32). Ainsi le dernier terme de l'équation (3.32) se majore de la même manière qu'on a majoré le troisième terme :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right| \\
& \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n \in \mathcal{V}_{n,h,1}$  dans l'égalité (3.32) car  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et  $\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n = 0$  d'après le Théorème 1.23, ainsi on utilise les inégalités obtenues (3.34), (3.37), (3.39), (3.41) et (3.42) et on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \frac{1}{\nu_1} \left[ c_1 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad + c_3 \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( h_{K_n}^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}^2 \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)^p}^2 \\
&\quad \left. \left. + \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right) \right)^{1/2} \\
&\quad \left. + c_4 \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \right].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalement, on élève au carré l'inégalité (3.43), on intègre sur  $[t_{n-1}, t_n]$ , on somme sur  $n \in \{1, \dots, m\}$  et on utilise la définition de  $(\eta_{n,K_n,2}^h)^2$  et de  $(\eta_{n,K_n}^\tau)^2$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt &\leq c \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad + c' \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t_{n-1} - t)^2}{\tau_n^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad + c'' \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{n,K_n,0}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,2}^h)^2) dt + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 &\leq c \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \\
&\quad + c' \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n (\eta_{n,K_n,0}^h)^2 + \tau_n (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

### Majoration de l'erreur de discrétisation de la pression :

On reprend (3.30), on intercale  $\int_\Omega \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} dx$ ,  $\int_\Omega \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx$  et



$\int_{\Omega} \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x}$  et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour le terme du membre de gauche de l'égalité (3.46), on utilise la condition inf-sup usuelle entre  $H_0^1(\Omega)^d$  et  $L^2(\Omega)$ , où il existe  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ , tel que

$$\int_{\Omega} (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \|p_h - p\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.47)$$

et

$$|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\beta_1} \|p_h - p\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.48)$$

Dans le but de bien choisir  $\mathbf{v}_h$ , on introduit l'opérateur d'interpolation  $\Pi_{nh}$  de  $H^1(\Omega)^d$  dans  $X_{n,h,1}$  défini dans [22] et dans [47] qui vérifie l'estimation suivante : pour tout  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$

$$\forall K_n \in \mathcal{T}_{nh}, \quad \|\mathbf{v} - \Pi_{nh} \mathbf{v}\|_{L^2(K_n)^d} \leq ch_{K_n} |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d} \quad (3.49)$$

et

$$\forall e_n \in \mathcal{E}_{nh}^i \cup \mathcal{E}_{nh}^b, \quad \|\mathbf{v} - \Pi_{nh} \mathbf{v}\|_{L^2(e_n)^d} \leq \tilde{c} h_{e_n}^{1/2} |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d}, \quad (3.50)$$

où  $c$  et  $\tilde{c}$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

Pour la majoration du membre de droite de l'égalité (3.46), on traite les trois premiers termes comme précédemment et pour la majoration du quatrième terme et du dernier terme, que l'on note par  $T_1$ , on prend  $\mathbf{v}_h = \Pi_{nh} \mathbf{v}$  et on obtient

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_{nh} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [p_h^n \mathbf{n}]_{e_n} \cdot (\mathbf{v} - \Pi_{nh} \mathbf{v}) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

**N.B :** Le terme  $\nabla p_h^n$  est nul sur chaque triangle  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  comme  $p_h^n \in \mathbb{P}_0$  sur  $K_n$ , mais on préfère le garder pour la forme de l'indicateur de discrétisation.

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les inégalités (3.49) et (3.50) ; on a

$$|T_1| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n} \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d} |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d} + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n}^{1/2} \|[p_h^n \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d} \right]. \quad (3.52)$$

Pour la majoration du cinquième et sixième terme de l'égalité (3.46) que l'on note par  $T_2$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.49) :

$$|T_2| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n} \left[ \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d} + \|\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)} \right] |\mathbf{v}|_{H^1(K_n)^d}. \quad (3.53)$$

En regroupant les majorations des termes de (3.46) (cf (3.34), (3.41)) et en utilisant l'inégalité (3.48), on obtient

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_1 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_3 \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} + c_4 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + c_5 \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}^n(C_h^{m-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|(\nu(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[p_h^n \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right] \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Finalement, on élève au carré l'inégalité (3.54), on intègre sur  $]t_{n-1}, t_n]$ , on somme sur  $n \in \{1, \dots, m\}$  et on utilise la définition de  $(\eta_{n,K_n}^\tau)^2$  et  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 &\leq c \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + c' \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n (\eta_{n,K_n,0}^h)^2 + \tau_n (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right) \\ &\quad + c'' \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 + \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalement, on regroupe les majorations (3.45) et (3.55) pour obtenir la majoration (3.29).  $\square$

Maintenant, on passe au traitement de l'erreur de la concentration. L'objectif des deux lemmes suivants est de majorer le résidu spatial et le résidu temporel par les indicateurs d'erreurs.

**Lemme 3.17.** *Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$ , on a :*

$$|\langle R^h(C_h), S - S_h \rangle| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \quad (3.56)$$

où  $S_h = R_{nh}S$  où  $R_{nh}$  est l'opérateur de Clément.

*Démonstration.* En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'égalité (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)} \|S - S_h\|_{L^2(K_n)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \|S - S_h\|_{L^2(e_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Par les propriétés (2.5) et (2.6) de l'opérateur de Clément  $R_{nh}$ , on a

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ ch_{K_n} \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)} |S|_{1,\Delta K_n} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} ch_{e_n}^{1/2} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} |S|_{1,\Delta e_n} \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $|S|_{1,\Delta e_n} \leq |S|_{1,\Delta K_n}$ , on utilise l'inégalité (1.4) avec

$$\begin{aligned} a &= \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}, \\ a' &= \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n}^{1/2} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}, \end{aligned}$$

et

$$b = |S|_{1,\Delta K_n},$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ h_{K_n}^2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right\} \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\eta_{n,K_n,3}^h$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 3.18.** *On suppose que la solution  $(\mathbf{u}, p, C)$  du problème  $(V_1)$  vérifie les conditions du Théorème 2.6 et sous l'hypothèse 3.1, on a pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :*

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad |\langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle| \leq c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \quad (3.57)$$

*Démonstration.* On commence par la majoration des deuxième et troisième termes de l'égalité (3.15), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les injections de Sobolev, on aura

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{\Omega} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \\ &\leq (S_2^0)^2 |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega} |S|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

d'où,

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq (S_2^0)^2 \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) \nabla S d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{\Omega} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) \nabla S d\mathbf{x} \right| \\ &\leq |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega} |S|_{1,\Omega} \\ &\leq \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Pour la majoration du premier terme de l'égalité (3.15)  $\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x}$ , on intercale le terme  $\mathbf{u}^n$  (voir Remarque 3.19 ci-dessous qui justifie cette façon de procéder).

$$\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} = \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} + \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x}$$

Ainsi, en appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz ( $L^2 - L^3 - L^6$ ) et l'inégalité inverse (1.18), on obtient

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} h_{K_n}^{-d/6} \|S\|_{L^6(K_n)}.$$

D'après l'estimation d'erreur *a priori* (2.6), on a

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c(h + \tau).$$

D'où, par l'hypothèse 3.1 ( $\tau \leq ch$ ), on obtient :

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h h_{K_n}^{-d/6} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^6(K_n)}.$$

Finalement, on utilise l'hypothèse 3.1 ( $h_{K_n} \geq c'h$ ), l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète et l'injection de Sobolev, et on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ( $L^\infty$ - $L^2$ - $L^2$ ), on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^2(K_n)}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les injections de Sobolev, on aura

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq \tilde{c} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

Ainsi, en regroupant les majorations précédentes et en multipliant et divisant par  $\tau_n^{1/2}$ , on obtient (3.57).  $\square$

**Remarque 3.19.** *L'estimation d'erreur a priori dit qu'une stratégie cohérente est de faire tendre  $\tau$  à la même vitesse que  $h$  et donc  $\tau \leq ch_{K_n}^{d/6}$  ne constitue pas une contrainte supplémentaire pour obtenir le résultat précédent. Si on n'avait pas intercalé  $\mathbf{u}^n$  dans*

*$\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x}$ , on aurait dû majorer ce terme comme suit :*

$$\begin{aligned} \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} &\leq \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^\infty(K_n)^d} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^2(K_n)} \\ &\leq h^{-d/2} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^2(K_n)}, \end{aligned}$$

*On obtient donc une contrainte  $h \geq h_0$ , qui est une mauvaise contrainte.*

Le lemme suivant donne une borne supérieure de l'erreur de la concentration à l'aide des indicateurs spatiaux et temporel et à l'aide de l'erreur de la vitesse.

**Lemme 3.20** (Erreur de la concentration). *Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{n,h,1})$ . Sous les hypothèses du Théorème 2.6, on a l'estimation d'erreur suivante :  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \tilde{c}_1 \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{c}_2 \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 + \tilde{c}_3 \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ &\quad + \tilde{c}_4 \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \tilde{c}_5 \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

*Démonstration.* D'après l'égalité (3.11) et la définition 3.10, on a pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t), S \right) + \alpha(\nabla(C - C_h)(t), \nabla S) + r_0((C - C_h)(t), S) \\ & = \langle R(C_h(t)), S \rangle + (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t) - \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S), \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in ]t_{n-1}, t_n]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

On note

$$T = (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t) - \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S). \quad (3.60)$$

On intercale dans  $T$  le terme  $(\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C(t), S)$  et on obtient :

$$T = ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla(C - C_h)(t), S). \quad (3.61)$$

En prenant  $S = C - C_h$  et en tenant compte du fait que  $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla S, S) = 0$ ,  $T$  devient :

$$T = ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S). \quad (3.62)$$

D'où, l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée donne

$$|T| \leq S_6^0 \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)} |S|_{1,\Omega}. \quad (3.63)$$

En prenant  $S = C - C_h$  dans l'égalité (3.59), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle R(C_h)(t), S \rangle + T. \quad (3.64)$$

Or, en utilisant l'égalité (3.13), les inégalités (3.56) et (3.57), on obtient, pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$  et pour tout  $S_h = R_{nh}S$ ,

$$\begin{aligned} |\langle R(C_h)(t), S \rangle| & \leq \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega} \\ & + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega} + c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Finalement, on regroupe les majorations (3.63) et (3.65), l'égalité (3.64) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq S_2^0 \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} \\ & + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} \\ & + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right)^{1/2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} \\ & + c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} \\ & + S_6^0 \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

En appliquant l'inégalité (1.2) pour  $\xi_i = \frac{\alpha}{4}$  avec  $i = 1, \dots, 4$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{4(S_2^0)^2}{2\alpha} \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4c^2}{2\alpha} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 + \frac{4c^2}{2\alpha} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ & \quad + \frac{4c^2}{2\alpha} \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \frac{4(S_6^0)^2}{2\alpha} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ainsi, on obtient le résultat voulu.  $\square$

Pour majorer l'erreur de discrétisation de la concentration, il faut qu'on majore le dernier terme de la norme de l'erreur donnée par l'équation (3.5).

**Lemme 3.21.** *La solution exacte  $C$  et la solution approchée  $C_h$  vérifient la majoration suivante :*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |C(s) - \pi_\tau C_h(s)|_{1,\Omega}^2 ds \leq c \left( \int_0^{t_m} |C(s) - C_h(s)|_{1,\Omega}^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right), \quad (3.68)$$

où  $\pi_\tau$  est défini dans la page 18 et  $c$  est une constante positive indépendante de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t$  dans  $]t_{n-1}, t_n]$ , on a

$$\begin{aligned} |C(t) - \pi_\tau C_h(t)|_{1,\Omega}^2 & \leq \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} + |C_h(t) - C_h^n|_{1,\Omega} \right)^2 \\ & \leq \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} + \frac{t_n - t}{\tau_n} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega} \right)^2 \\ & \leq 2 \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + \left( \frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega}^2 \right). \end{aligned}$$

On intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et on somme sur  $n$ . L'estimation découle de la définition de  $\eta_{n,K_n}^\tau$ .  $\square$

Les lemmes 3.16, 3.20 et 3.21 permettent de montrer dans le théorème suivant la borne d'erreur totale correspondante à nos estimations d'erreur *a posteriori*.

**Théorème 3.22.** *Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{n,h,1})$  et soit  $\llbracket \cdot \rrbracket$  la norme définie par (3.5). Sous les hypothèses du Théorème 2.6, on a l'esti-*

ation d'erreur suivante pour tout  $m \in \{1, \dots, N\}$  :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m;H_0^1(\Omega))} + \llbracket C - C_h \rrbracket(t_m) \\
& \leq C \left( \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + C' \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n \left( (\eta_{n,K_n,0}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right) + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + C'' \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.69}$$

où  $C$ ,  $C'$  et  $C''$  sont des constantes indépendantes de  $h_{K_n}$  et  $\tau_n$ .

*Démonstration.* On remplace (3.43) dans l'inégalité (3.58), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq K \left( \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right. \\
& \quad + \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \frac{(t - t_{n-1})^2}{\tau_n^2} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& \quad + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\text{rot}(\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \left\| [(\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n} \right\|_{L^2(e_n)^d}^2 \right] \\
& \quad \left. + \bar{K} \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \right)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

On note par

$$\begin{aligned}
f & : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\
& \quad t \mapsto f(t)
\end{aligned}$$



tel que

$$\begin{aligned}
f(t)|_{[t_{n-1}, t_n]} = & K \left( \|g - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n, K_n, 3}^h)^2 \right. \\
& + \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n, K_n}^\tau)^2 + \frac{(t - t_{n-1})^2}{\tau_n^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\text{rot}(\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \\
& + \left. \left\| (\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n \right\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \left\| [(\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n} \right\|_{L^2(e_n)^d}^2 \right] \Big).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

On intègre l'inégalité (3.70) entre 0 et  $t$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t |C(\tau) - C_h(\tau)|_{1,\Omega}^2 d\tau + r_0 \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\
& \leq \int_0^t f(\tau) d\tau + \bar{K} \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

On désigne par  $\bar{f}$  la fonction :

$$\bar{f} : t \rightarrow \bar{f}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.5 de Gronwall-Bellman pour

$$y(t) = \frac{1}{2} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t |C(\tau) - C_h(\tau)|_{1,\Omega}^2 d\tau + r_0 \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

$$\bar{g}(t) = 1,$$

et

$$\bar{k}(\tau) = \bar{K},$$

on obtient :

$$y(t) \leq \bar{f}(t) + \bar{K} \exp(\bar{K}T) \int_0^t \bar{f}(\tau) d\tau. \tag{3.73}$$

Soit  $\tau$  entre 0 et  $t$ ,  $\bar{f}$  étant croissante, on a

$$\bar{f}(\tau) \leq \bar{f}(t).$$

D'où, l'inégalité (3.73) s'écrit :

$$y(t) \leq \bar{f}(t) + t\bar{K} \exp(\bar{K}T) \bar{f}(t).$$

Pour  $t = t_m$ , on obtient

$$y(t_m) \leq (1 + T\bar{K} \exp(\bar{K}T))\bar{f}(t_m) \leq \bar{C}\bar{f}(t_m). \quad (3.74)$$

Or,

$$\bar{f}(t_m) = \int_0^{t_m} f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) d\tau.$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{f}(t_m) = & K \left( \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} [\tau_n ((\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,3}^h)^2) + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2] \\ & \left. + \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 \right). \end{aligned}$$

Comme  $\|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,\Omega}^2$ , par la définition de  $(\eta_{n,K_n}^\tau)^2$  et d'après l'inégalité (3.74), on obtient finalement la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \|C(t_m) - C_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;H_0^1(\Omega))}^2 + 2r_0 \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq c \left( \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \tau_n \left( (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right) + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right] + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

On obtient un estimateur d'erreur *a posteriori* qui est indépendant de la pression vu qu'on résout la vitesse dans  $\mathcal{V}_{n,h,1}$ , où la pression n'apparaît pas. Ainsi, en regroupant les inégalités (3.75) et (3.29), on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 3.23.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, les solutions  $(\mathbf{u}, C)$  et  $(\mathbf{u}_h, \pi_\tau C_h)$  des problèmes  $(V_1)$  et  $(V_{n,h,1})$  respectivement vérifient l'inégalité suivante pour tout  $m \in \{1, \dots, N\}$  :*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h + r_0 (C - \pi_\tau C_h) \right\|_{L^2(0,t_m;H^{-1}(\Omega))} \\ & \leq c \left( \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} [\tau_n (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2] + \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \int_0^{t_m} |C(s) - C_h(s)|_{1,\Omega}^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

où  $c$  est une constante qui ne dépend pas de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* On part de la troisième équation de  $(V_1)$  : pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} C(t), S \right) + \alpha(\nabla C(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + r_0(C(t), S) = (g(t), S),$$

où  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

Les hypothèses du Théorème 2.6 impliquent que cette équation a un sens aussi pour  $S \in H_0^1(\Omega)$ .

On rappelle que  $\pi_\tau C_h(t)|_{]t_{n-1}, t_n]} = C_h^n$ . On intercale  $C_h(t)$  dans le premier terme,  $\pi_\tau C_h(t)$  dans le second terme,  $\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t)$  dans le troisième terme et  $\pi_\tau C_h(t)$  dans le quatrième terme, on obtient ainsi en utilisant l'équation (3.14) :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + \alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) \\ & + r_0((C - \pi_\tau C_h)(t), S) \\ & = (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - \alpha(\nabla \pi_\tau C_h(t), \nabla S) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) \\ & - r_0(\pi_\tau C_h(t), S). \end{aligned}$$

On utilise la définition de  $R^h(C_h)$  donnée par (3.14) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t), S) \\ & = -\alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + \langle g(t) - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\langle R^h(C_h)(t), S_h \rangle = 0$ , pour tout  $S_h \in Y_{n,h}$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ & \leq \sup_{S \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{\|S\|_{H_0^1(\Omega)}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t), S \right) \right] \\ & \leq \sup_{S \in H_0^1(\Omega)} \frac{-\alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + \langle g(t) - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle}{\|S\|_{H_0^1(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme du second membre de l'inégalité précédente, on a

$$|(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S)| \leq |C - \pi_\tau C_h|_{1,\Omega} |S|_{1,\Omega}.$$

Pour le second et le troisième terme, on intercale  $g^n$ , on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on utilise l'inégalité (3.56), on obtient

$$\begin{aligned} |\langle g(t) - g^n + g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle| & \leq \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|S - S_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité suivante  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ & \leq c \left( |C - \pi_\tau C_h|_{1,\Omega}^2 + \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On élève au carré, on intègre par rapport à  $t$  sur  $]t_{n-1}, t_n]$  puis on somme sur  $n$  allant de 0 à  $m$ . On utilise le résultat du lemme 3.21 et on obtient finalement le résultat voulu.  $\square$

Le Théorème 3.22 et le Lemme 3.23 résument notre estimation d'erreur *a posteriori* qui donne une borne supérieure globale, en utilisant les indicateurs définis par la définition 3.12.

### 3.2.5 Efficacité des indicateurs

Dans cette section, on montre l'efficacité de l'estimation d'erreur *a posteriori*, cela en bornant localement chaque indicateur par l'erreur entre la solution exacte et numérique. Ces bornes sont appelées bornes inférieures de l'erreur.

On commence par majorer les indicateurs liés à la concentration.

**Théorème 3.24.** *Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , on a*

$$\begin{aligned} & \tau_n (\eta_{n,K_n,3}^h)^2 \\ & \leq c \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta_{K_n}))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} |C - \pi_\tau C_h|_{1,\Delta_{K_n}}^2 + h_{K_n}^2 \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta_{K_n}))}^2 + \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(\Delta_{K_n})}^2 \right). \end{aligned} \tag{3.77}$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* On part de la troisième équation du problème  $(V_1)$ , on intercale le terme  $(g^n + g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0 C_h^n, S)$  et  $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla S)$ , ainsi en appliquant la

formule de Green pour  $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla S)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) S d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla(C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) S d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n S d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} (C(t) - C_h^n) S d\mathbf{x} \\
& = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (g(t) - g^n) S d\mathbf{x} + \int_{K_n} (g^n - g_h^n) S d\mathbf{x} \right. \\
& + \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - r_0 C_h^m + \alpha \Delta C_h^m \right) S d\mathbf{x} \\
& \left. - \frac{\alpha}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} S ds \right]. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

**N.B** : on a intercalé  $g_h^n$  pour la même raison donnée dans la remarque 3.48.

On choisit un  $K_n$  particulier, on prend  $S = S_{K_n}$  dans l'égalité précédente, tel que  $S_{K_n} \in H_0^1(K_n)$ , avec

$$S_{K_n} = \begin{cases} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - r_0 C_h^m + \alpha \Delta C_h^m \right) \psi_{K_n} & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \tag{3.79}$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
& \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - r_0 C_h^m + \alpha \Delta C_h^m \right)^2 \psi_{K_n} d\mathbf{x} \\
& = \int_{K_n} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) S_{K_n} d\mathbf{x} + \alpha \int_{K_n} \nabla(C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) S_{K_n} d\mathbf{x} \\
& - \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n S_{K_n} d\mathbf{x} + r_0 \int_{K_n} (C(t) - C_h^n) S_{K_n} d\mathbf{x} \\
& - \int_{K_n} (g(t) - g^n) S_{K_n} d\mathbf{x} - \int_{K_n} (g^n - g_h^n) S_{K_n} d\mathbf{x}. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned}
& \left\| \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - r_0 C_h^m + \alpha \Delta C_h^m \right) \psi_{K_n}^{1/2} \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m + r_0 (C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)} |S_{K_n}|_{1, K_n} \\
& + \alpha |C(t) - C_h^n|_{1, K_n} |S_{K_n}|_{1, K_n} + \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \tag{3.81}
\end{aligned}$$

On applique les inégalités de la proposition 3.2, on aura

$$\begin{aligned}
& \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq c_1 \left( h_{K_n}^{-1} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)} \right. \\
& \quad \times \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n}^{-1} \alpha |C(t) - C_h^n|_{1,K_n} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \\
& \quad \left. + \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \right). \quad (3.82)
\end{aligned}$$

On factorise par  $\|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)}$ , on utilise la première inégalité de la proposition 3.2 et comme  $|\psi_{K_n}| \leq 1$ , on obtient

$$\|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \leq c_2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}.$$

On simplifie les deux membres de (3.82) par ce terme, puis on élève l'inégalité ainsi obtenue au carré et on multiplie par  $h_{K_n}^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& h_{K_n}^2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq c_3 \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2 |C(t) - C_h^n|_{1,K_n}^2 + h_{K_n}^2 \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right). \quad (3.83)
\end{aligned}$$

D'où, la majoration du premier terme de  $(\eta_{n,K_n,3}^h)^2$ .

Pour la majoration du deuxième terme de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,3}^h)^2$ , on choisit une face interne  $e_n$  du maillage, on prend dans l'égalité (3.78)  $S = S_{e_n}$  avec

$$S_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}(\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{sur } K_n \cup K'_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n \cup K'_n. \end{cases} \quad (3.84)$$

où  $K_n$  et  $K'_n$  sont les éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui contiennent  $e_n$ . On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
& \alpha \int_{e_n} [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}^2 \psi_{e_n} ds \\
& = \int_{K_n \cup K'_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) S_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad - \int_{K_n \cup K'_n} \left( \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right) S_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{K_n \cup K'_n} (g(t) - g^n) S_{e_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n \cup K'_n} (g^n - g_h^n) S_{e_n} d\mathbf{x} + \alpha \int_{K_n \cup K'_n} \nabla(C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S_{e_n} d\mathbf{x}. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \\
& \quad + \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{(H_0^1(K_n \cup K_n'))'} |S_{e_n}|_{1, K_n \cup K_n'} \\
& \quad + \|g(t) - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K_n')} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \\
& \quad + \alpha |C(t) - C_h^n|_{1, K_n \cup K_n'} |S_{e_n}|_{1, K_n \cup K_n'}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

On applique les inégalités de la proposition 3.3 et le fait que  $\psi_{e_n}^2 \leq \psi_{e_n}$ , il en résulte que :

$$\begin{aligned}
& \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq c_4 \left[ h_{e_n}^{1/2} \|g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \times \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \right. \\
& \quad + h_{e_n}^{-1/2} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n \cup K_n')} \\
& \quad \times \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \\
& \quad + h_{e_n}^{1/2} \|g(t) - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} + h_{e_n}^{1/2} \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')} \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \\
& \quad \left. + \alpha h_{e_n}^{-1/2} |C(t) - C_h^n|_{1, K_n \cup K_n'} \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \right].
\end{aligned} \tag{3.87}$$

On simplifie par  $\|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}$ , on élève au carré puis on multiplie par  $h_{e_n}$ , on obtient la majoration du second terme de  $(\eta_{n, K_n, 3}^h)^2$  :

$$\begin{aligned}
& h_{e_n} \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq \left[ \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n \cup K_n')}^2 \right. \\
& \quad \left. + h_{e_n}^2 \|g(t) - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')}^2 + h_{e_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K_n')}^2 + \alpha^2 |C(t) - C_h^n|_{1, K_n \cup K_n'}^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Finalement, en regroupant les majorations (3.83) et (3.88) et le fait que  $h_{e_n} \leq h_{K_n}$  et en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  sur  $t$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Théorème 3.25.** *Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , on a l'estimation suivante :*

$$(\eta_{n, K_n}^\tau)^2 \leq \tilde{c} (\|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2), \tag{3.89}$$

où  $\tilde{c}$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\tau$ .

*Démonstration.* On part de la définition (1.17) de  $C_h$  et celle de  $\pi_\tau C_h$  à la page 18 tel que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ ,

$$C_h(t) - \pi_\tau C_h(t) = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}),$$

d'où, en intercalant  $C(t)$  dans le membre de gauche de l'égalité précédente, on obtient

$$\left| \frac{t - t_n}{\tau_n} \right| |\nabla(C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x})| \leq |\nabla(C - C_h)(t, \mathbf{x})| + |\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t, \mathbf{x})|, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

On utilise l'inégalité  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et on intègre sur chaque triangle  $K_n$  du maillage  $\mathcal{T}_{nh}$ , on a

$$\left( \frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{1,K_n}^2 \leq 2 (\|C(t) - C_h(t)\|_{1,K_n}^2 + \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_{1,K_n}^2).$$

On intègre sur  $t$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on obtient

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \leq 6 \left( \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 \right).$$

D'où, on obtient le résultat voulu.  $\square$

Pour les estimateurs concernant la vitesse et la pression, tout d'abord, on commence par majorer le premier terme de l'indicateur  $\eta_{n,K_n,0}^h$ .

**Lemme 3.26.** *On suppose que  $\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ . On a*

$$\begin{aligned} & \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \leq c(h_{K_n}^{1/2}|C_h^{n-1} - C_h^n|_{1,K_n} + h_{K_n}^{1/2}|C(t) - C_h(t)|_{1,K_n} + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \quad + \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(K_n)} + \|C_h^{n-1} - C_h^n\|_{L^2(K_n)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(K_n)}). \end{aligned} \quad (3.90)$$

*Démonstration.* On désigne par  $T$  le terme de gauche de l'inégalité (3.90).

On intercale  $\nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}$  et  $\nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}$  dans  $T$  et on obtient

$$T \leq \underbrace{\|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))\|_{L^2(K_n)^d}}_{T_1} + \underbrace{\|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}}_{T_2}. \quad (3.91)$$

Par l'application de l'inégalité (3.19) pour  $p = \infty$  et  $l = 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} T_1 & \leq \|\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \leq ch_{K_n}^2 \|\nabla(\nabla(\nu(C_h^{n-1})))\|_{L^\infty(K_n)^{d \times d}} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Comme  $C_h^{n-1}$  est un polynôme de degré 1 sur  $K_n$ , on a

$$\|\nabla(\nabla(\nu(C_h^{n-1})))\|_{L^\infty(K_n)^{d \times d}} \leq \|\nu''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\nabla C_h^{n-1}\|_{L^\infty(K_n)^d}^2.$$



Comme la norme  $W^{1,\infty}$  n'est pas convenable pour  $C_h^{m-1}$ , on intercale l'opérateur  $R_h(C)$ , on utilise l'inégalité inverse et on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla(\nabla(\nu(C_h^{m-1})))\|_{L^\infty(K_n)^{d \times d}} &\leq 2\|\nu''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla(C_h^{m-1} - R_h(C))\|_{L^\infty(K_n)^d}^2 + 2\|\nu''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla R_h(C)\|_{L^\infty(K_n)^d}^2 \\ &\leq 2\|\nu''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(|K_n|^{-1}|C_h^{m-1} - R_h(C)|_{1,K_n}^2 + |K_n|^{-2/3}|R_h(C)|_{W^{1,3}(K_n)}^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T_1 \leq ch_{K_n}^2 \|\nu''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( |K_n|^{-1}|C_h^{m-1} - R_h(C)|_{1,K_n}^2 + |K_n|^{-2/3}|R_h(C)|_{W^{1,3}(K_n)}^2 \right) \times \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}.$$

Pour la majoration du terme  $|C_h^{m-1} - R_h(C)|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}$ , on intercale les termes  $C$  et  $C_h$  et on obtient :

$$\begin{aligned} &|C_h^{m-1} - R_h(C)|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ &\leq |C_h^{m-1} - C_h|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} + |C_h - C|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ &\quad + |C - R_h(C)|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

Le premier et le second terme du membre de droite de l'inégalité précédente se majorent en utilisant l'estimation d'erreur *a priori*

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c(h + \tau),$$

et par l'hypothèse 3.1 :  $\tau \leq ch$  et  $h_{K_n} \geq c'h$ .

Le troisième terme du membre de droite se majore en utilisant l'inégalité (2.3).

On utilise aussi l'inégalité (2.3) pour la majoration du terme  $|R_h(C)|_{W^{1,3}(K_n)}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}$ , par  $c\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}$  comme  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ . Ainsi, en regroupant ces majorations, et comme  $\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)^2 \leq 1$ , on a

$$T_1 \leq c \left( |C_h^{m-1} - C_h^n|_{1,K_n}^2 + |C(t) - C_h(t)|_{1,K_n}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} \right). \quad (3.93)$$

Le premier terme de l'inégalité (3.93) :  $|C_h^n - C_h^{m-1}|_{1,K_n}|C_h^n - C_h^{m-1}|_{1,K_n}$  se majore comme suit ; grâce à l'inégalité (3.89), on a

$$\begin{aligned} |C_h^m - C_h^{m-1}|_{1,K_n} &\leq \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{1,K_n} \\ &\leq \frac{c}{\tau_n^{1/2}} \left( \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))} + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))} \right) \end{aligned}$$

Par suite, à l'aide de l'estimation d'erreur *a priori* donnée par l'inégalité (2.46) et sous l'hypothèse 3.1, de plus, comme  $C$  est suffisamment régulière en tout temps,  $\|C - C_h\|_{H^1(K_n)} + \|C - \pi_\tau C_h\|_{H^1(K_n)}$  est majoré par  $ch_{K_n}^{1/2}$ , ainsi,

$$\|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))} = \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C - C_h\|_{H^1(K_n)}^2 \right)^{1/2} \leq c\tau_n^{1/2} h_{K_n}^{1/2}.$$

De même, pour le second terme de l'inégalité (3.93), on utilise l'estimation d'erreur *a priori*, et on obtient que

$$|C(t) - C_h(t)|_{1,K_n}^2 \leq h_{K_n}^{1/2} |C(t) - C_h(t)|_{1,K_n}.$$

Ainsi, en regroupant les majorations, on a

$$T_1 \leq c \left( h_{K_n}^{1/2} |C_h^{n-1} - C_h^m|_{1,K_n} + h_{K_n}^{1/2} |C(t) - C_h(t)|_{1,K_n} + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} \right). \quad (3.94)$$

Pour majorer  $T_2$ , on intercale les termes  $\nu_h(C(t))\mathbf{u}$  et  $\nu(C(t))\mathbf{u}$  et on obtient

$$\begin{aligned} T_2 \leq & \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} + \|(\nu_h(C(t)) - \nu(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ & + \|(\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Les deux derniers termes de  $T_2$  sont facilement majorés en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\|(\nu_h(C(t)) - \nu(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(K_n)^d)},$$

et

$$\|(\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \leq \lambda \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(K_n)^d)}. \quad (3.96)$$

Finalement, pour la majoration du premier terme de  $T_2$ , on utilise l'inégalité (3.22) et on obtient

$$\begin{aligned} & \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \leq \|\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(K_n)^d)} \\ & \leq [\lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |K_n|^{-1/2} (\nu_2' |K_n|^{1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} \\ & \quad + \lambda' |K_n|^{1/3} \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} |C(t)|_{W^{1,6}(K_n)}] \times \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(K_n)^d)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

On intercale  $C_h(t)$  dans les termes  $\|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)}$  et  $|C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n}$  et puisque  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$  et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , on a

$$\begin{aligned} & \|(\nu_h(C_h^{n-1}) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \leq c \left[ \|C_h^{n-1} - C_h^m\|_{L^2(K_n)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |C_h^{n-1} - C_h^m|_{1,K_n} + h_{K_n} |C_h(t) - C(t)|_{1,K_n} \right]. \end{aligned}$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient le résultat voulu.  $\square$

On majore maintenant le deuxième terme de l'indicateur  $\eta_{n,K_n,0}^h$ .

**Lemme 3.27.** *On suppose que  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ . On a*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d} \\ & \leq c \left[ \|C_h^{n-1} - C_h^m\|_{L^2(K_n)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |C_h^m - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \right. \\ & \quad \left. + h_{K_n} |C_h(t) - C(t)|_{1,K_n} + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \right]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

*Démonstration.* On désigne par  $T$  le terme de gauche de l'inégalité (3.98). On intercale les termes  $\mathbf{f}^n(C(t))$  et  $\mathbf{f}_h^n(C(t))$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient

$$|T| \leq \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} + \|\mathbf{f}^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}. \quad (3.99)$$

Pour la majoration du premier terme du membre de droite de l'inégalité (3.99), on utilise une inégalité analogue à (3.22) puisque  $\mathbf{f}_h^n$  vérifie les mêmes propriétés que  $\nu_h$  et on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} &\leq \lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |K_n|^{-1/2} \\ &\times \left( \|\mathbf{f}'_2\|_\infty |K_n|^{1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} + \lambda' |K_n|^{1/3} \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} |C(t)|_{W^{1,6}(K_n)} \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Ainsi, on déduit des propriétés de  $\mathbf{f}^n$  et  $\mathbf{f}_h^n$  et de l'inégalité (3.100) que

$$\begin{aligned} |T| &\leq c \left[ \lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |K_n|^{-1/2} (\|\mathbf{f}'_2\|_\infty |K_n|^{1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} \right. \\ &\quad \left. + \lambda' |K_n|^{1/3} \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} |C(t)|_{W^{1,6}(K_n)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} + \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} \right] \\ &\leq c \left[ \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

On intercale  $C_h(t)$  dans les deux premiers termes du membre de droite de l'inégalité précédente, et on obtient :

$$\begin{aligned} |T| &\leq c \left[ \|C_h^{n-1} - C_h^n\|_{L^2(K_n)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \right. \\ &\quad \left. + h_{K_n} |C_h(t) - C(t)|_{1,K_n} + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \right]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

D'où, le résultat voulu.  $\square$

En regroupant les lemmes 3.26 et 3.27, puis en intégrant sur  $[t_{n-1}, t_n]$  ensuite en utilisant le Théorème 3.25, on obtient la majoration de l'indicateur  $\eta_{n,K_n,0}^h$ .

**Théorème 3.28.** *On suppose que le maillage satisfait l'inégalité (1.16) et que  $\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  et que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ . Il existe une constante  $c$  indépendante de  $h_{K_n}$  et de  $\tau_n$  telle que pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,*

$$\begin{aligned} \tau_n (\eta_{n,K_n,0}^h)^2 &\leq c \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 + \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 \right). \end{aligned}$$

On passe maintenant au traitement de l'indicateur  $\eta_{n,K_n,1}^h$ .

**Théorème 3.29.** *On suppose que le maillage satisfait l'inégalité (1.16) et que  $\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  et que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ . Il existe des constantes  $c_1, c_2$  et  $c_3$  indépendantes de  $h_{K_n}$  et de  $\tau_n$  telle que pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,*

$$\begin{aligned} \tau_n(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 \leq & c_1 h_{K_n}^2 \left( \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n)^d)}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C) - \mathbf{f}^n(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n)^d)}^2 \right. \\ & + \|\nu_h(C) - \nu(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n))}^2 + \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta K_n))}^2 \\ & \left. + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta K_n))}^2 \right) + c_2 h_{K_n} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n)^d)}^2 \\ & + c_3 \|p - p_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n))}^2. \end{aligned} \quad (3.103)$$

*Démonstration.* D'après le lemme 3.6 et la définition 3.4 de  $R_1^n$  et comme  $\mathbf{u}_h|_{]t_{n-1}, t_n]} = \mathbf{u}_h^n$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^n \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

On prend  $\mathbf{v}_h = 0$ , on simplifie par  $\int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$  et par  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , on intercale les termes  $\int_{\Omega} \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(C(t)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , on effectue une intégration par parties, ainsi on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [p_h^n \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} ds \right] \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{K_n}$ , où

$$\mathbf{v}_{K_n} = \begin{cases} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \psi_{K_n} & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n, \end{cases} \quad (3.106)$$

on obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
& \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)^2 \psi_{K_n} d\mathbf{x} \\
&= \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} \nu_h(C_h^{n-1})(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} - \int_{K_n} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Le membre de gauche de l'égalité (3.107) est exactement  $\|(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)\psi_{K_n}^{1/2}\|_{L^2(K_n)}^2$  et est minoré par  $C_1^2 \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2$  en utilisant la proposition 3.2.

On note les termes de droite de l'égalité précédente par  $I_1, \dots, I_6$  respectivement.

On commence par majorer  $I_1$ ; pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ , on intercale  $\mathbf{f}(C_h(t))$  et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis on utilise les propriétés de  $\mathbf{f}$  et on obtient

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \right| \\
&\leq c_{\mathbf{f}_1}^* (\|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(K_n)}) \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \\
&+ \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Pour majorer  $I_2$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \|\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(K_n)} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \\
&\leq c \|\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

On passe à la majoration du terme  $I_3$ , on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{K_n} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\
&\leq \|\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (3.22), ainsi on a

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \left[ \lambda \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |K_n|^{-1/2} [\nu_2' |K_n|^{1/2} |C(t) - C_h^{n-1}|_{H^1(K_n)} \right. \\
&\quad \left. + \lambda' |K_n|^{1/3} \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} |C(t)|_{W^{1,6}(K_n)} \right] \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.
\end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ , et comme, de plus, l'inégalité (1.16) implique que  $h_{K_n}|K_n|^{-1/2} \leq ch_{K_n}^{-1/2}$ , alors on a

$$|I_3| \leq c \left[ \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n}|C(t) - C_h^{n-1}|_{H^1(K_n)} + h_{K_n}^{1/2}\|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} \right] \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \quad (3.110)$$

Pour majorer  $I_4$ , on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on utilise l'inégalité (3.20), on aura

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \|\nu_h(C_h^{n-1})\|_{L^\infty(K_n)} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \\ &\leq [\nu_2 + \nu_2' h_{K_n}|K_n|^{-1/2} \|\nabla C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}] \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

On intercale  $\nabla C$  dans  $\|\nabla C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}$  et on obtient

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq [\nu_2 + \nu_2' h_{K_n}|K_n|^{-1/2} (|C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} + |C|_{1,K_n})] \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \\ &\leq [\nu_2 + \nu_2' (h_{K_n}|K_n|^{-1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} + h_{K_n}|K_n|^{-1/2} |C|_{H^1(K_n)})] \\ &\quad \times \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

Le terme  $h_{K_n}|K_n|^{-1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}$  qui se trouve dans l'inégalité précédente se majore en utilisant l'estimation d'erreur *a priori*

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c(h + \tau),$$

et par l'hypothèse 3.1 :  $\tau \leq ch$  et  $h_{K_n} \geq c'h$ , ainsi on a

$$|I_4| \leq c \left[ h_{K_n}^{1/2} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} + h_{K_n}^{-1/2} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \right] \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \quad (3.111)$$

$I_5$  est majoré en utilisant l'inégalité (3.98), d'où

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c \left[ \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n}|C_h^{n-1} - C(t)|_{1,K_n} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \right] \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

On termine par la majoration du terme  $I_6$ . On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité inverse (1.19), on obtient :

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left| \int_{K_n} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq c_I^1(2) h_{K_n}^{-1} \|p - p_h\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

On regroupe l'égalité (3.107) et les majorations (3.108) à (3.113); de plus la Proposition 3.2 implique que  $\|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \leq C_1' \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}$ ; en outre, les normes de  $(C(t) - C_h^{n-1})$  se majorent en intercalant  $C_h(t)$  et en utilisant la forme de

$C_h(t)$  qui est donnée par (1.17). Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\
& \leq \bar{c} \left( \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right. \\
& \quad + \|C(t) - C_h(t)\|_{H^1(K_n)}^2 + \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(K_n)}^2 + h_{K_n}^{-2} \|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \quad \left. + h_{K_n}^{-1} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right). \tag{3.114}
\end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant par  $h_{K_n}^2$ , on obtient finalement la majoration du premier terme de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  :

$$\begin{aligned}
& h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq \bar{c} (h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|C(t) - C_h(t)\|_{H^1(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n}^2 \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(K_n)}^2 + \|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n} |C_h^{m-1}|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2).
\end{aligned}$$

Le terme  $h_{K_n} |C_h^{m-1}|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2$  se traite comme suit ; on intercale  $C$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
h_{K_n} |C_h^{m-1}|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 & \leq h_{K_n} (|C_h^{m-1} - C|_{1,K_n}^2 + |C(t)|_{1,K_n}^2) \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\
& \leq h_{K_n} |C_h^{m-1} - C|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\
& \quad + h_{K_n} |C(t)|_{1,K_n}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2.
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente se majore en utilisant l'estimation d'erreur *a priori*

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c(h + \tau),$$

et par l'hypothèse 3.1 :  $\tau \leq ch$  et  $h_{K_n} \geq c'h$ , on a

$$\begin{aligned}
& h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq \bar{c} (h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n}^2 \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|C(t) - C_h(t)\|_{H^1(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n}^2 \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(K_n)}^2 + \|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \quad + h_{K_n} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2). \tag{3.115}
\end{aligned}$$

On passe maintenant à la majoration du dernier terme de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$ . L'égalité (3.105) donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [p_h^n \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} ds \\
&= - \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} (\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

On prend dans (3.116),  $\mathbf{v}_h = 0$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{e_n}$ , où

$$\mathbf{v}_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}([p_h^n \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{sur } K_n \cup K'_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n \cup K'_n. \end{cases} \tag{3.117}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{e_n} |[p_h^n \mathbf{n}]|^2 \psi_{e_n} ds &= - \int_{K_n \cup K'_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} (\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} \nu_h(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x} \\
&- \int_{K_n \cup K'_n} (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v}_{e_n} d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Par les identités (3.2) et (3.3), on a

$$\|\mathbf{v}_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K'_n)^d} \leq ch_{e_n}^{1/2} \|[p_h^n \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}.$$

Ainsi, on regroupe les majorations des termes de l'égalité (3.118) et pour le membre de gauche de l'égalité (3.118) on utilise l'inégalité (3.2), ainsi on a que  $\|[p_h^n \mathbf{n}] \psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)}^2 \geq C_1 \|[p_h^n \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2$ , par suite on simplifie par  $\|[p_h^n \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}$  puis on élève au carré et on multiplie par  $h_{e_n}$ , et comme  $h_{e_n} \leq h_{K_n}$  et  $h_{e_n} \leq h_{K'_n}$ , on obtient la majoration du



deuxième terme de  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 &\leq c_1 h_{K_n}^2 \left( \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Delta K_n)^d}^2 + \|\nu_h(C(t)) - \nu(C(t))\|_{L^2(\Delta K_n)}^2 \right. \\ &\quad + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(\Delta K_n)^d}^2 + \|C(t) - C_h(t)\|_{H^1(\Delta K_n)}^2 \\ &\quad \left. + \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(\Delta K_n)}^2 \right) + c_2 \|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(\Delta K_n)}^2 \\ &\quad + c_3 h_{K_n} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(\Delta K_n)^d}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on intègre cette inégalité sur  $[t_{n-1}, t_n]$  et en utilisant le Théorème 3.25, on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Théorème 3.30.** *On suppose que le maillage satisfait l'inégalité (1.16) et que  $\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  et que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ . Il existe des constantes  $c$  et  $\tilde{c}$  indépendantes de  $h_{K_n}$  et de  $\tau_n$  telle que pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,*

$$\begin{aligned} \tau_n (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 &\leq c \left( \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(\Delta K_n)^d}^2 + \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta K_n))}^2 \right. \\ &\quad + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta K_n))}^2 + \|\nu_h(C) - \nu(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n))}^2 \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C) - \mathbf{f}^n(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n)^d)}^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta K_n)^d)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\text{où } p = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 2 \\ 3 & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

*Démonstration.* On repart de l'expression (3.104), on prend  $\mathbf{v}_h = 0$ , on simplifie par  $\int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , on intercale les termes  $\int_{\Omega} \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , ainsi, on choisit  $\eta \in H_0^1(\Omega)^p$  et  $\mathbf{v} = \text{rot } \eta \in \mathcal{V}$ ;

$$\begin{aligned} &\sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} \text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \cdot \eta d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} [(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n) \times \mathbf{n}]_{e_n} \cdot \eta ds \right] \\ &= \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \text{rot } \eta d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h(t) \cdot \text{rot } \eta d\mathbf{x} \right. \\ &\quad + \int_{K_n} \nu(C_h^{n-1}) (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \text{rot } \eta d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \text{rot } \eta d\mathbf{x} \\ &\quad \left. + \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \text{rot } \eta d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Pour majorer le premier terme de  $(\eta_{n,K_n,2}^h)^2$ , on teste l'égalité (3.120) avec  $\eta = \eta_{K_n}$  où

$$\eta_{K_n} = \begin{cases} \text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\psi_{K_n} & \text{sur } K_n, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \quad (3.121)$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{K_n} |\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)|^2 \psi_{K_n} d\mathbf{x} \\ &= \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h(t) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{K_n} \nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} \Big]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Le membre de gauche de l'égalité (3.122) est exactement  $\|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\psi_{K_n}^{1/2}\|_{L^2(K_n)^p}^2$  et est minoré par  $C_1\|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}^2$  en utilisant la Proposition 3.2.

On note les termes du membre de droite de l'équation (3.122) par  $I_1, \dots, I_5$ .

On commence par majorer  $I_1$ , on utilise l'inégalité (3.108) et l'inégalité inverse (1.19) ainsi on obtient

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c_I^1(2)h_{K_n}^{-1} \left( c_{\mathbf{f}_1}^* \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)} + c_{\mathbf{f}_1}^* \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(K_n)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d} \right) \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Pour le terme  $I_2$ , on utilise l'inégalité inverse (1.19), on a

$$\begin{aligned} |I_2| &= \int_{K_n} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h(t) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\leq c_I^1(2)h_{K_n}^{-1} \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$  et  $C \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$  et par l'inégalité (3.90), on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c_I^1(2)h_{K_n}^{-1} \left( h_{K_n}^{1/2} |C_h^{m-1} - C_h^m|_{1,K_n} + h_{K_n}^{1/2} |C_h(t) - C(t)|_{1,K_n} + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|\nu_h(C) - \nu(C)\|_{L^2(K_n)} + \|C_h^{m-1} - C_h^m\|_{L^2(K_n)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(K_n)} \right) \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p} \end{aligned} \quad (3.124)$$

On passe à la majoration de  $I_3$ , on utilise l'inégalité (1.12) et l'inégalité inverse (1.19) ainsi on obtient

$$\begin{aligned} |I_3| &= \int_{K_n} \nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \text{rot} \eta_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\leq c_I^1(2)h_{K_n}^{-1} \nu_2 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Pour la majoration de  $I_4$ , comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et par l'inégalité inverse (1.19), on a

$$\begin{aligned} |I_4| &= \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \text{rot } \eta_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\leq c_I^1(2) h_{K_n}^{-1} \lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

On passe à la majoration de  $I_5$ , on utilise l'inégalité inverse (1.19) et l'inégalité (3.112), ainsi on obtient

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c_I^1(2) h_{K_n}^{-1} \left[ \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n} |C_h^{n-1} - C(t)|_{1, K_n} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \right] \|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p} \end{aligned} \quad (3.127)$$

On regroupe l'égalité (3.122) et les majorations (3.123) à (3.127), de plus  $\|\eta_{K_n}\|_{L^2(K_n)^p} \leq \|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}$ ; on simplifie par  $\|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}$  puis on élève au carré, ainsi on obtient finalement la majoration de  $\|\text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n)\|_{L^2(K_n)^p}^2$ . On passe maintenant à la majoration du dernier terme de l'indicateur  $(\eta_{m, K_n, 2}^h)^2$ .

On prend dans (3.120),  $\eta = \eta_{e_n}$ , où

$$\eta_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{sur } K_n \cup K'_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n \cup K'_n. \end{cases} \quad (3.128)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{e_n} |([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n})|^2 ds \\ &= - \int_{K_n \cup K'_n} \text{rot}(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n) \cdot \eta_{e_n} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{K_n \cup K'_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \text{rot } \eta_{e_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n \cup K'_n} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbf{u}_h(t) \cdot \text{rot } \eta_{e_n} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{K_n \cup K'_n} \nu_h(C_h^{n-1})(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \text{rot } \eta_{e_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n \cup K'_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \text{rot } \eta_{e_n} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{K_n \cup K'_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \text{rot } \eta_{e_n} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Le membre de gauche de l'égalité (3.129) est exactement  $\|([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}^{1/2})\|_{L^2(e_n)^d}$  et est minoré par  $C_1 \|([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n})\|_{L^2(e_n)}$  par l'inégalité (3.3). Ainsi, pour la majoration des termes de droite de l'égalité (3.129); on vient de majorer le premier terme et pour le deuxième au sixième termes on réfère aux inégalités (3.108), (3.90), (3.111), (3.126), (3.112) respectivement; de plus, on utilise l'inégalité (3.3) pour la majoration de  $\|\text{rot } \eta_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K'_n)^p}$ , on simplifie par  $\|([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n})\|_{L^2(e_n)}$ , on élève au carré et on multiplie par  $h_{e_n}$ , on obtient la majoration de  $\|([\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n] \times \mathbf{n}]_{e_n})\|_{L^2(e_n)^d}^2$ .

Ainsi, on trouve le résultat voulu en regroupant les inégalités obtenues, en intégrant sur  $[t_{n-1}, t_n]$  et en utilisant le Théorème 3.25.  $\square$



**Définition 3.31.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$ , on définit le résidu  $R_1^n(\mathbf{v})$  sur  $]t_{n-1}, t_n]$  par

$$\forall t \in ]t_{n-1}, t_n], \quad R_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h(t) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \nabla p_h(t) \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (3.130)$$

**Remarque 3.32.** En utilisant la première équation du problème continu, on obtient une définition équivalente du résidu, donnée pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  par

$$R_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, C(t)) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (3.131)$$

**Lemme 3.33.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , le résidu  $R_1^n$  vérifie l'égalité : pour tout  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,  $R_1^n(\mathbf{v})(t) = \tilde{R}_1^n(\mathbf{v})(t)$ , où

$$\tilde{R}_1^n(\mathbf{v})(t) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, dx \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (3.132)$$

*Démonstration.* Il suffit d'ajouter et de retrancher  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, dx$  et  $\int_{\Omega} \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v} \, dx$  dans (3.131) pour obtenir le résultat.  $\square$

**Définition 3.34.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $q \in H^1(\Omega)$ , on définit le résidu  $R_2^n(q)$  sur  $]t_{n-1}, t_n]$  par :

$$R_2^n(q)(t) = \int_{\Omega} \nabla q \cdot (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) \, dx = \int_{\Omega} \nabla q \cdot (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \, dx. \quad (3.133)$$

**Lemme 3.35.** Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $q \in H^1(\Omega)$ , le résidu  $R_2^n$  vérifie l'égalité :  $R_2^n(q) = \tilde{R}_2^n(q)$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,

$$\tilde{R}_2^n(q)(t) = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (q - q_h) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \, dx - \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} \int_{e_n} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n})(q - q_h) \, ds \right], \quad \forall q_h \in M_{n,h,2}. \quad (3.134)$$

*Démonstration.* Soit  $q \in H^1(\Omega)$ . En utilisant la deuxième équation de  $(V_2)$ ,  $R_2^n(q)$  s'écrit :

$$R_2^n(q)(t) = - \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \nabla q \cdot \mathbf{u}_h^n \, dx. \quad (3.135)$$

Comme  $\int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n = 0$ , alors pour tout  $q_h \in M_{n,h,2}$ ,

$$R_2^n(q)(t) = - \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \nabla (q - q_h) \cdot \mathbf{u}_h^n \, dx. \quad (3.136)$$

On effectue une intégration par parties, et on obtient

$$R_2^n(q)(t) = - \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (q - q_h) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \, dx - \int_{\partial K_n} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n})(q - q_h) \, ds \right]. \quad (3.137)$$

Or,

$$\sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\partial K_n} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n})(q - q_h) \, ds = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n})(q - q_h) \, ds + \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} (q - q_h) \, ds,$$

mais  $[\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} = 0$  pour  $e_n \in \mathcal{E}_{nh}^i$  car  $\mathbf{u}_h^n$  est continu sur  $\Omega$ . D'où, on obtient le résultat voulu.  $\square$

### 3.3.2 Résidu pour l'équation de convection-diffusion-réaction

**Lemme 3.36.** *La concentration exacte  $C$  et la concentration approchée  $C_h$  vérifient pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$ , pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  :*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + \alpha (\nabla (C - C_h)(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) \\ & + r_0((C - C_h)(t), S) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S) \\ & = (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S) \\ & - r_0(C_h(t), S) - \alpha (\nabla C_h(t), \nabla S). \end{aligned} \quad (3.138)$$

*Démonstration.* On part de la troisième équation du problème  $(V_2)$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} C(t), S \right) + \alpha (\nabla C(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + r_0(C(t), S) = (g(t), S)$$

On intercale  $\left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right)$ ,  $\alpha (\nabla C_h(t), \nabla S)$ ,  $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla C_h(t), S)$ ,  $\frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h C_h(t), S)$ ,  $r_0(C_h(t), S)$  respectivement dans les termes de l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + \alpha (\nabla (C - C_h)(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) \\ & + r_0((C - C_h)(t), S) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S) + \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) \\ & + \alpha (\nabla C_h(t), \nabla S) + (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) + r_0(C_h(t), S) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S) \\ & = (g(t), S). \end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité voulue.  $\square$

**Définition 3.37.** On introduit le résidu total  $R(C_h) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , défini pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  et pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \langle R(C_h)(t), S \rangle &= (g(t), S) - \left( \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t), S) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S) - r_0(C_h(t), S) - \alpha(\nabla C_h(t), \nabla S). \end{aligned} \quad (3.139)$$

**Lemme 3.38.** Pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , pour tout  $S_h \in Y_{n,h}$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ , le résidu  $R(C_h)$  vérifie

$$\langle R(C_h)(t), S \rangle = \langle g(t) - g^n, S \rangle + \langle g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle + \langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle, \quad (3.140)$$

où  $R_h$  est le résidu spatial défini par

$$\begin{aligned} \langle R^h(C_h)(t), S \rangle &= \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \Delta C_h^n \right) (\mathbf{x}) \times S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}(\sigma) \cdot S(\sigma) d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

et  $R_\tau$  est le résidu temporel défini par

$$\begin{aligned} \langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + r_0 \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{K_n} \alpha \nabla (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) \nabla S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla S(\mathbf{x}) (C_h^n - C_h^{n-1})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

*Démonstration.* On intercale  $C_h^n$  dans le troisième, le quatrième et le cinquième termes de l'équation (3.139) et on intercale  $\nabla C_h^n$  dans le dernier terme, et on obtient

$$\begin{aligned} \langle R(C_h)(t), S \rangle &= (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla (C_h(t) - C_h^n), S) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) (C_h(t) - C_h^n), S) - r_0((C_h(t) - C_h^n), S) - \alpha(\nabla (C_h(t) - C_h^n), \nabla S) \\ &\quad - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h^n, S) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h^n, S) - r_0(C_h^n, S) - \alpha(\nabla C_h^n, \nabla S). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Ainsi, en utilisant la troisième égalité de la formulation variationnelle  $(V_{n,h,2})$ , en appliquant la formule de Green sur le terme  $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla S)$  et en intercalant  $g_h^n$ , pour tout

$S_h \in Y_{n,h}$ ,

$$\begin{aligned}
\langle R(C_h)(t), S \rangle &= (g(t) - g^n, S) + (g^n - g_h^n, S - S_h) \\
&+ (g_h^n - \frac{\partial}{\partial t} C_h(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h^n - r_0 C_h^n - \alpha \Delta C_h^n, S - S_h) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}(\sigma) \cdot (S - S_h) d\sigma - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla (C_h(t) - C_h^n), S) \\
&- \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) (C_h(t) - C_h^n), S) - r_0 ((C_h(t) - C_h^n), S) - \alpha (\nabla (C_h(t) - C_h^n), \nabla S).
\end{aligned} \tag{3.144}$$

Comme pour tout  $t \in [t_{n-1}, t_n]$

$$C_h(t) - C_h^n = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}),$$

et

$$\mathbf{u}_h(t)|_{[t_{n-1}, t_n]} = \mathbf{u}_h^n.$$

Ainsi, en effectuant une intégration par parties sur le terme  $\frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) (C_h(t) - C_h^n), S)$ , on aura le résultat souhaité.  $\square$

**Remarque 3.39.** *L'utilité de cette forme du résidu réside dans le fait qu'elle permet de distinguer les deux sources d'erreur de discrétisation : l'erreur temporelle et l'erreur spatiale.*

**Définition 3.40.** *On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :*

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \tag{3.145}$$

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini par (3.4),

$$\begin{aligned}
(\eta_{n,K_n,2}^h)^2 &= h_{K_n}^2 \|g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\
&- r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2,
\end{aligned}$$

ainsi que l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{1,K_n}^2.$$

### 3.3.2.1 Majorations des résidus pour l'équation de convection-diffusion-réaction

L'objectif de cette partie est de majorer le résidu spatial et le résidu temporel par les indicateurs d'erreurs.



**Lemme 3.41.** *Pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$ , on a :*

$$|\langle R^h(C_h), S - S_h \rangle| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \quad (3.146)$$

où  $S_h = R_{nh}S$  où  $R_{nh}$  est l'opérateur de Clément.

*Démonstration.* En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'égalité (3.141), on obtient :

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| g_h^n - \frac{\partial}{\partial t} C_h(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)} \|S - S_h\|_{L^2(K_n)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \|S - S_h\|_{L^2(e_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Par les propriétés (2.5) et (2.6) de l'opérateur de Clément  $R_{nh}$ , on a

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ ch_{K_n} \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)} |S|_{1,\Delta_{K_n}} + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} ch_{e_n}^{1/2} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} |S|_{1,\Delta_{e_n}} \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $|S|_{1,\Delta_{e_n}} \leq |S|_{1,\Delta_{K_n}}$ , on utilise l'inégalité (1.4) avec

$$a = \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)},$$

$$a' = \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n}^{1/2} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)},$$

et

$$b = |S|_{1,\Delta_{K_n}},$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & |\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \\ & \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ h_{K_n}^2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right\} \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Par la définition de  $\eta_{n,K_n,2}^h$ , on obtient

$$|\langle R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

□

**Lemme 3.42.** *On suppose que la solution  $(\mathbf{u}, p, C)$  du problème  $(V_2)$  vérifie les conditions du Théorème (2.9) et sous l'hypothèse 3.1, on a pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :*

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad |\langle R^\tau(C_h)(t), S \rangle| \leq c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \quad (3.147)$$

*Démonstration.* On commence par la majoration des deuxième et troisième termes de l'égalité (3.142), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} \|S\|_{L^2(K_n)},$$

ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les injections de Sobolev, on aura

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| &\leq \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|S\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (S_2^0)^2 |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega} |S|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

d'où,

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) S d\mathbf{x} \right| \leq (S_2^0)^2 \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

De plus,

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) \nabla S d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} |S|_{1,K_n},$$

ainsi par l'inégalité de Cauchy Schwarz discrète, on obtient :

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}) \nabla S d\mathbf{x} \right| \leq \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

Pour la majoration du terme  $\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x}$ , on intercale le terme  $\mathbf{u}^n$  (voir Remarque 3.19 qui justifie cette façon de procéder).

$$\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} = \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} + \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x}$$

Ainsi, en appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz ( $L^2 - L^3 - L^6$ ) et l'inégalité inverse

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} \right| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} h_{K_n}^{-d/6} \|S\|_{L^6(K_n)}.$$

D'après l'estimation d'erreur *a priori* (2.9), on a

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} \leq \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c(h + \tau),$$

D'où, par l'injection de Sobolev et par l'hypothèse 3.1 ( $\tau \leq ch$ ), on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} \right| \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h h_{K_n}^{-d/6} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^6(K_n)}.$$

Finalement, on utilise l'hypothèse 3.1 ( $h_{K_n} \geq c'h$ ) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on obtient

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} \right| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ( $L^\infty - L^2 - L^2$ ), on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n} \|S\|_{L^2(K_n)}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète et les injections de Sobolev, on aura

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})S d\mathbf{x} \right| \leq \tilde{c} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

Pour le terme  $\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x}$ , on intercale  $\int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x}$  et on obtient :

$$\int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x} = \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x} + \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x}.$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{L^2(K_n)^d} |S|_{1,K_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

Par l'inégalité inverse (1.20) et l'injection de Sobolev, on a

$$\|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{K}(h_n) |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega},$$

où,

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \mathcal{K}(h_n) = \begin{cases} c(1 + |\log(h_n)|) & \text{si } d = 2 \\ h_n^{-1/2} & \text{si } d = 3, \end{cases} \quad (3.148)$$

avec  $c$  une constante indépendante de  $h$  et de  $\tau$ .

Ainsi, par l'estimation d'erreur *a priori* et sous la condition  $\tau \leq ch$ , on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x} \right| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} h \mathcal{K}(h_n) |S|_{1,\Omega},$$

d'où par la condition  $h_{K_n} \geq c'h$ , on a

$$\left| \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{K_n} \mathbf{u}^n \cdot \nabla S(C_h^n - C_h^{n-1}) d\mathbf{x} \right| \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,K_n}^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.$$

Ainsi, en regroupant les majorations précédentes et en multipliant et divisant par  $\tau_n^{1/2}$ , on obtient (3.147).  $\square$

### 3.3.3 Borne supérieure de l'erreur

Dans cette partie, on va dériver une borne supérieure de l'erreur exprimée à l'aide des indicateurs spatiaux et temporel.

Tout d'abord, on établit la borne supérieure de l'erreur correspondante à l'équation de Darcy où on majore l'erreur de la vitesse et l'erreur de la pression par les indicateurs spatiaux temporel et par l'erreur de la concentration.

**Lemme 3.43** (Erreur de la vitesse et de la pression). *Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$ . On rappelle  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  et  $(\eta_{n,K_n}^\tau)^2$  définis par*

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (3.149)$$

et

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

Sous les hypothèses du Théorème 2.9, on a l'estimation d'erreur suivante, pour tout  $m = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m; L^2(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m; H_0^1(\Omega))} \\ & \leq c \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m; L^2(\Omega))} + c' \left( \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n ((\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2)) \right)^{1/2} \\ & \quad + \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes indépendantes de  $h_{K_n}$  et  $\tau_n$ .

*Démonstration.* Majoration de l'erreur de discrétisation de la vitesse

On prend  $q_h = R_{nh}q$  dans l'égalité (3.134) et on utilise les propriétés de l'opérateur de Clément, on obtient, pour tout  $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$

$$\tilde{R}_2^n(q) \leq c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)} |q|_{1, \Delta_{K_n}} + \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} h_{e_n}^{1/2} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)} |q|_{1, \Delta_{e_n}} \right], \quad (3.151)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h$ .

Comme  $|q|_{1, \Delta_{e_n}} \leq |q|_{1, \Delta_{K_n}}$ , en utilisant l'inégalité (1.4) avec

$$a = h_{K_n} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}, \quad a' = \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n}^{1/2} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}, \quad \text{et} \quad b = |q|_{1, \Delta_{K_n}},$$

on obtient,

$$\tilde{R}_2^n(q) \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right] \right)^{1/2} |q|_{1, \Omega}. \quad (3.152)$$

Par la condition inf-sup (1.22), il existe  $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^d$  tel que, pour tout  $q \in H^1(\Omega)$ ,

$$\tilde{R}_2^n(q) = (\nabla q, \mathbf{z})$$

avec

$$\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \sup_{q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)} \frac{\tilde{R}_2^n(q)}{|q|_{1, \Omega}}.$$

On obtient donc

$$\|\mathbf{z}'\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right] \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n, K_n, 1}^h)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.153)$$

On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{z}_0$  dans l'égalité (3.132), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(C(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On simplifie par  $\int_{\Omega} \nu(C_h(t)) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x}$ , on ajoute et on retranche le terme  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x}$  dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nu(C(t)) - \nu(C_h^{n-1})) \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{z}_0 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))) \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.154)$$

On note  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  respectivement les quatre termes du membre de droite de l'égalité (3.154).

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t))\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq \lambda \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On intercale  $C_h(t)$  dans  $\|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(\Omega)}$  et on obtient

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \lambda \|C_h^{n-1} - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ \lambda \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|I_1| \leq \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \nu_2 \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On intercale  $\mathbf{f}(C_h(t))$  et on utilise les propriétés de  $\mathbf{f}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq c_{\mathbf{f}_1}^* (\|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}) \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{z}_0 d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

En regroupant toutes les majorations obtenues, l'égalité (3.154) donne :

$$\begin{aligned}
\nu_1 \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \lambda \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \\
&\quad + \lambda \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} + \nu_2 \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_{\mathbf{f}_1}^* \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

D'où, avec  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}$ ,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \frac{1}{\nu_1} \left[ \lambda \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \right. \\
&\quad + \lambda \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} + (\nu_1 + \nu_2) \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + c_{\mathbf{f}_1}^* \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_{\mathbf{f}_1}^* \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \left. + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} \right].
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq c_1 \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} + c_3 \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + c_4 \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d} + c_5 \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Finalement, on utilise l'inégalité (3.153), on élève au carré, on intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et on somme sur  $n \in \{1, \dots, m\}$ , pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt &\leq c' \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad + c'' \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t_{n-1} - t)^2}{\tau_n^2} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + c''' \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Ainsi, comme  $C_h^n - C_h^{n-1} \in H_0^1$  donc  $\|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega}^2$ ,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 &\leq c' \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + c'' \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right) \\
&\quad + \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.158}$$

### Majoration de l'erreur de discrétisation de la pression

On part de l'égalité (3.132) du lemme 3.33, on intercale le terme  $\int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} dx$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(p - p_h^n) \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t)))\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{v} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Pour le terme à gauche de l'égalité (3.159), on applique la condition inf-sup (1.6) et on majore les termes de droite de l'égalité (3.159) comme précédemment, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} |p - p_h^n|_{1,\Omega} &\leq c_{\mathbf{f}_1}^* \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_{\mathbf{f}_1}^* \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \lambda \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^d)} \\ &\quad + \nu_2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} |p - p_h^n|_{1,\Omega} &\leq \tilde{c}_1 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \tilde{c}_2 \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \tilde{c}_3 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \tilde{c}_4 \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On élève au carré, on intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  puis on somme sur  $n = \{1, \dots, m\}$  et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |p - p_h^n|_{1,\Omega}^2 dt &\leq \tilde{c}_1 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \tilde{c}_2 \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,\Omega}^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt + \tilde{c}_3 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \\ &\quad + \tilde{c}_4 \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

D'où, la majoration suivante de l'erreur de discrétisation de la pression

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m;H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \tilde{c}_1 \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \tilde{c}_2 \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right) \\ &\quad + \tilde{c}_3 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 + \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Finalement, on regroupe les majorations (3.158) et (3.160) pour obtenir la majoration (3.150).  $\square$



Le lemme suivant donne une borne supérieure de l'erreur de la concentration à l'aide des indicateurs spatiaux et temporel et à l'aide de l'erreur de la vitesse.

**Lemme 3.44** (Erreur de la concentration). *Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$ . Sous les hypothèses du Théorème 2.9, on a l'estimation d'erreur suivante :  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c_1 \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + c_3 \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \\ & \quad + c_4 \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + c_5 \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (3.161)$$

*Démonstration.* D'après l'égalité (3.138) et la définition 3.37, on a pour tout  $S \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), S \right) + \alpha (\nabla(C - C_h)(t), \nabla S) + r_0 ((C - C_h)(t), S) \\ & = \left( R(C_h(t)), S \right) + (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t) - \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S), \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in ]t_{n-1}, t_n], \end{aligned} \quad (3.162)$$

On note

$$T = (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C_h(t) - \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C_h(t), S). \quad (3.163)$$

On intercale dans  $T$  les termes  $(\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C(t), S)$  et  $\frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C(t), S)$  et on obtient :

$$\begin{aligned} T & = (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla (C_h(t) - C(t)), S) + (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C(t), S) - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) (C_h - C)(t), S) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C(t), S). \end{aligned} \quad (3.164)$$

En prenant  $S = C - C_h$  et en tenant compte de la proposition 1.21,  $T$  devient :

$$T = (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla C(t), S) - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) C(t), S). \quad (3.165)$$

De plus, comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , alors on aura

$$T = ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) C(t), S). \quad (3.166)$$

On effectue une intégration par partie dans le deuxième terme de  $T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} T & = ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S) - \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S) \\ & \quad - \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla S, C(t)). \end{aligned} \quad (3.167)$$

D'où,

$$T = \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla C(t), S) - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t) \cdot \nabla S, C(t)). \quad (3.168)$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $L^2$ - $L^3$ - $L^6$  pour le premier terme et  $L^2$ - $L^2$ - $L^\infty$  pour le deuxième terme de  $T$ , donne

$$|T| \leq \frac{1}{2} S_6^0 \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)} |S|_{1,\Omega} + \frac{1}{2} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |S|_{1,\Omega} \|C(t)\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.169)$$

En prenant  $S = C - C_h$  dans l'égalité (3.162), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha |C - C_h|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle R(C_h(t)), S \rangle + T. \quad (3.170)$$

Or, en utilisant l'égalité (3.140), les inégalités (3.146) et (3.147), on obtient

$$\begin{aligned} |\langle R(C_h), S \rangle| &\leq \|g - g^n\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} + |\langle g^n - g_h^n, S - R_{nh}S \rangle| \\ &\quad + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega} + c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Finalement, on regroupe les majorations (3.169) et (3.171), l'égalité (3.170) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha |C - C_h|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (S_2^0) \|g - g^n\|_{L^2(\Omega)} |C - C_h|_{1,\Omega} + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} |C - C_h|_{1,\Omega} \\ &\quad + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2} |C - C_h|_{1,\Omega} + c \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} |C - C_h|_{1,\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} S_6^0 \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)} |C - C_h|_{1,\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|C(t)\|_{L^\infty(\Omega)} |C - C_h|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

En appliquant l'inégalité (1.2) pour  $\xi_1 = \frac{\alpha}{6(S_2^0)^2}$  et  $\xi_i = \frac{\alpha}{6}$  avec  $i = 2, \dots, 6$ , on aura

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C - C_h|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{3(S_2^0)^2}{\alpha} \|g - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{\alpha} c \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ &\quad + \frac{3c}{\alpha} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + \frac{3c}{\alpha} \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \\ &\quad + \frac{3S_6^0}{4\alpha} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 |C(t)|_{W^{1,3}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{3}{4\alpha} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \|C(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Ainsi, on obtient le résultat voulu.  $\square$

Pour majorer l'erreur de discrétisation de la concentration, il faut qu'on majore le dernier terme de l'erreur donnée par l'équation (3.5).

**Lemme 3.45.** *La solution exacte  $C$  et la solution approchée  $C_h$  vérifient la majoration suivante :*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |C(s) - \pi_\tau C_h(s)|_{1,\Omega}^2 ds \leq c \left( \int_0^{t_m} |C(s) - C_h(s)|_{1,\Omega}^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right), \quad (3.174)$$

où  $\pi_\tau$  est défini dans la page 18 et  $c$  est une constante positive indépendante de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t$  dans  $]t_{n-1}, t_n]$ , on a

$$\begin{aligned} |C(t) - \pi_\tau C_h(t)|_{1,\Omega}^2 &\leq \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} + |C_h(t) - C_h^n|_{1,\Omega} \right)^2 \\ &\leq \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega} + \frac{t_n - t}{\tau_n} |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega} \right)^2 \\ &\leq 2 \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,\Omega}^2 + \left( \frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 |C_h^n - C_h^{n-1}|_{1,\Omega}^2 \right). \end{aligned}$$

On intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et on somme sur  $n$ . L'estimation découle de la définition de  $\eta_{n,K_n}^\tau$ .  $\square$

Les lemmes 3.43, 3.44 et 3.45 permettent de montrer dans le théorème suivant la borne d'erreur totale correspondante à nos estimations d'erreur *a posteriori*.

**Théorème 3.46.** *Soient  $(\mathbf{u}, p, C)$  et  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$  et soit  $\llbracket \cdot \rrbracket$  la norme définie par (3.5). Sous les hypothèses du Théorème 2.9, on a l'estimation d'erreur suivante pour tout  $m \in \{1, \dots, N\}$  :*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(0,t_m;H_0^1(\Omega))} + \llbracket C - C_h \rrbracket(t_m) \\ &\leq C_1 \left( \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + C'_1 \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \tau_n ((\eta_{n,K_n,1}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,2}^h)^2) + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{f}_0(t) - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.175)$$

où  $C_1$  et  $C'_1$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\tau$ .

*Démonstration.* On remplace (3.155) dans l'inégalité (3.161), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C - C_h|_{1,\Omega}^2 + r_0 \|C - C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq c(\|g - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \\
& \quad + \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{(t - t_{n-1})^2}{\tau_n^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& \quad + \bar{c} \|C_h(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{3.176}$$

On note par

$$\begin{aligned}
f & : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\
t & \mapsto f(t)
\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
f(t)|_{[t_{n-1}, t_n]} & = c(\|g - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \\
& \quad + \frac{(t_n - t)^2}{\tau_n^3} \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{(t - t_{n-1})^2}{\tau_n^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2).
\end{aligned} \tag{3.177}$$

On intègre l'inégalité (3.176) entre 0 et  $t$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t |C(\tau) - C_h(\tau)|_{1,\Omega}^2 d\tau + r_0 \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\
& \leq \int_0^t f(\tau) d\tau + \bar{c} \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.178}$$

On désigne par  $\bar{f}$  la fonction :

$$\bar{f} : t \rightarrow \bar{f}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.5 de Gronwall-Bellman pour

$$y(t) = \frac{1}{2} \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t |C(\tau) - C_h(\tau)|_{1,\Omega}^2 d\tau + r_0 \int_0^t \|C(\tau) - C_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

$$\bar{g}(t) = 1,$$

et

$$\bar{k}(\tau) = \bar{c},$$

on obtient :

$$y(t) \leq \bar{f}(t) + \bar{c} \exp(\bar{c}T) \int_0^t \bar{f}(\tau) d\tau. \quad (3.179)$$

Soit  $\tau$  entre 0 et  $t$ ,  $\bar{f}$  étant croissante, on a

$$\bar{f}(\tau) \leq \bar{f}(t).$$

D'où, l'inégalité (3.179) s'écrit :

$$y(t) \leq \bar{f}(t) + t\bar{c} \exp(\bar{c}T) \bar{f}(t).$$

Pour  $t = t_m$ , on obtient

$$y(t_m) \leq (1 + T\bar{c} \exp(\bar{c}T)) \bar{f}(t_m) \leq \bar{C}_1 \bar{f}(t_m). \quad (3.180)$$

Or,

$$\bar{f}(t_m) = \int_0^{t_m} f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) d\tau.$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{f}(t_m) = & c(\|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \\ & + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2). \end{aligned}$$

Comme

$$\|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,\Omega}^2$$

et en utilisant la majoration (3.153) de  $\|\mathbf{z}\|$ , on a

$$\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq (\eta_{n,K_n,1}^h)^2,$$

et d'après l'inégalité (3.180), on obtient finalement la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \|C(t_m) - C_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;H_0^1(\Omega))}^2 + 2r_0 \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq c \left( \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \tau_n \left( (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 + (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 \right) + (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right] + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.181)$$

Ainsi, en regroupant les inégalités (3.181) et (3.150) et en utilisant le lemme 3.45, on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 3.47.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.9, les solutions  $(\mathbf{u}, C)$  et  $(\mathbf{u}_h, \pi_\tau C_h)$  des problèmes  $(V_2)$  et  $(V_{n,h,2})$  respectivement vérifient l'inégalité suivante pour tout  $m \in \{1, \dots, N\}$  :*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h \pi_\tau C_h + r_0(C - \pi_\tau C_h) \right\|_{L^2(0, t_m; H^{-1}(\Omega))} \\ & \leq c \left( \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} [\tau_n (\eta_{n, K_n, 2}^h)^2 + (\eta_{n, K_n}^\tau)^2] + \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0, t_m; L^2(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \int_0^{t_m} |C(s) - C_h(s)|_{1, \Omega}^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.182)$$

où  $c$  est une constante qui ne dépend pas de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* On part de la troisième équation de  $(V_2)$  : pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} C(t), S \right) + \alpha(\nabla C(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t), S) + r_0(C(t), S) = (g(t), S),$$

où  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

Les hypothèses du Corrolaire 2.10 impliquent que cette équation a un sens aussi pour  $S \in H_0^1(\Omega)$ .

On rappelle que  $\pi_\tau C_h(t)|_{]t_{n-1}, t_n]} = C_h^n$ . On intercale  $C_h(t)$  dans le premier terme,  $\pi_\tau C_h(t)$  dans le second terme,  $\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t)$  dans le troisième terme et  $\pi_\tau C_h(t)$  dans le quatrième terme et on intercale le terme  $\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau C_h(t), S)$ , on obtient ainsi en utilisant l'équation (3.141) :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t), S \right) + \alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) \\ & \quad + r_0((C - \pi_\tau C_h)(t), S) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau C_h(t), S) \\ & = (g(t), S) - \left( \frac{\partial}{\partial t} C_h(t), S \right) - \alpha(\nabla \pi_\tau C_h(t), \nabla S) - (\mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) \\ & \quad - r_0(\pi_\tau C_h(t), S) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_h \pi_\tau C_h(t), S). \end{aligned}$$

On utilise la définition de  $R^h(C_h)$  donnée par (3.141) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t), S \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), S) \\ & \quad + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t), S) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau C_h(t), S) \\ & = -\alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + (g(t) - g_h^n + R^h(C_h)(t), S). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau C_h(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
& \leq \sup_{S \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{\|S\|_{H_0^1(\Omega)}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau C_h(t), S \right) \right] \\
& \leq \sup_{S \in H_0^1(\Omega)} \frac{-\alpha(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S) + \langle g(t) - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle}{\|S\|_{H_0^1(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme du second membre de l'inégalité précédente, on a

$$|(\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t), \nabla S)| \leq |C - \pi_\tau C_h|_{1,\Omega} |S|_{1,\Omega}.$$

Pour le second terme, en utilisant la même démarche que dans le lemme 3.38, on intercale  $g^n$  et on obtient

$$\langle g(t) - g^n + g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle = \langle g(t) - g^n, S \rangle + \langle g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S - S_h \rangle,$$

où  $S_h \in Y_{n,h}$ .

D'où, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant l'inégalité (3.146), on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle g(t) - g^n + g^n - g_h^n + R^h(C_h)(t), S \rangle| & \leq \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|S - S_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + c \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2} |S|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

On prend  $S_h = R_{nh}C$  et on utilise l'inégalité suivante  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) + r_0(C - \pi_\tau C_h)(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h \pi_\tau C_h(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
& \leq c \left( |C - \pi_\tau C_h|_{1,\Omega}^2 + \|g(t) - g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On intègre par rapport à  $t$  sur  $[t_{n-1}, t_n]$  puis on somme sur  $n$  allant de 0 à  $m$ . On utilise le résultat du lemme 3.45 et on obtient finalement le résultat voulu.  $\square$

Le Théorème 3.46 et le Lemme 3.47 résument notre estimation d'erreur *a posteriori* qui donne une borne supérieure globale, en utilisant les indicateurs définis par la définition 3.40.

### 3.3.4 Efficacité des indicateurs

Dans cette section, on montre l'efficacité de l'estimation d'erreur *a posteriori*, cela peut-être fait en délimitant localement chaque indicateur avec l'erreur entre les solutions exactes et numériques. Ses bornes sont appelées bornes inférieures de l'erreur.

Pour accomplir la preuve d'efficacité souhaitée, on introduit des approximations  $\mathbf{f}_h^n$  de  $\mathbf{f}^n$  et  $\nu_h$  de  $\nu$  comme suit :

On approche la viscosité  $\nu$  par une constante sur chaque triangle  $K_n$  : On définit l'opérateur  $\nu_h$  sur  $L^p(K_n)$  par

$$\xi \in L^p(K_n), \quad \nu_h(\xi)|_{K_n} = \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} \nu(\xi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Cet opérateur  $\nu_h$  vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout  $\xi \in L^p(K_n)$ , d'après l'inégalité (1.12), on a :

$$\nu_1 \leq \nu_h(\xi) \leq \nu_2. \quad (3.183)$$

- Pour tout  $\xi_1, \xi_2$  appartenant à l'espace  $L^p(K_n)$ , comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, on a :

$$|\nu_h(\xi_1) - \nu_h(\xi_2)|_{K_n} \leq \frac{\lambda}{|K_n|} \int_{K_n} |\xi_1(\mathbf{x}) - \xi_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (3.184)$$

- Pour tout  $\xi_1, \xi_2$  appartenant à l'espace  $L^p(K_n)$ , on a :

$$\|\nu_h(\xi_1) - \nu_h(\xi_2)\|_{L^p(K_n)} \leq \lambda \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^p(K_n)}. \quad (3.185)$$

De même, on approche la fonction  $\mathbf{f}^n$  par une constante sur chaque triangle  $K_n$  : On définit l'opérateur  $\mathbf{f}_h^n$  sur  $L^p(K_n)$  par

$$\forall \xi \in L^p(K_n), \quad \mathbf{f}_h^n(\xi)|_{K_n} = \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n} \mathbf{f}^n(\xi(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

$\mathbf{f}_h^n$  vérifie les mêmes propriétés que celle de la viscosité  $\nu_h$  cité précédemment.

**Remarque 3.48.** *Il est important de noter que  $\mathbf{f}_h^n$  et  $\nu_h$  sont dans  $P_0(K_n)$  sur chaque triangle  $K_n$ , ainsi on peut utiliser les propositions 3.2 et 3.3 qui tiennent sur les fonctions polynomiales*

On commence par la majoration de l'indicateur  $\eta_{n,K_n}^\tau$  :

**Théorème 3.49.** *Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , on a l'estimation suivante :*

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \leq \tilde{c} (\|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2), \quad (3.186)$$

où  $\tilde{c}$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\tau$ .



*Démonstration.* On part de la définition (1.17) de  $C_h$  et celle de  $\pi_\tau C_h$  dans la page 18 tel que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ ,

$$C_h(t) - \pi_\tau C_h(t) = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}),$$

d'où, en intercalant  $C(t)$  dans le membre de gauche de l'égalité précédente, on obtient

$$\left| \frac{t - t_n}{\tau_n} \right| |\nabla(C_h^m - C_h^{m-1})(\mathbf{x})| \leq |\nabla(C - C_h)(t, \mathbf{x})| + |\nabla(C - \pi_\tau C_h)(t, \mathbf{x})|, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

On utilise l'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et on intègre sur chaque triangle  $K_n$  du maillage  $\mathcal{T}_{nh}$ , on a

$$\left( \frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{1,K_n}^2 \leq 2 (\|C(t) - C_h(t)\|_{1,K_n}^2 + \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_{1,K_n}^2).$$

On intègre sur  $t$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on obtient le résultat voulu :

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \leq 6 \left( \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 \right).$$

D'où, on obtient le résultat voulu.  $\square$

Dans ce qui suit, on majore les indicateurs  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$ . Tout d'abord, on commence par la majoration de  $\eta_{n,K_n,1}^h$ . On note que dans le théorème ci-dessous, le terme  $\tau_n \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}$  est majoré par l'indicateur  $(\eta_{n,K_n}^\tau)^2$ .

**Théorème 3.50.** *Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , on a*

$$\begin{aligned} \tau_n (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 &\leq \tilde{c} \left( \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H_0^1(K_n))}^2 + \tau_n \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 + \|\nu(C) - \nu_h(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n))}^2 \\ &\quad + \|p - p_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C) - \mathbf{f}^n(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.187)$$

où  $\tilde{c}$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\tau$ .

*Démonstration.* On commence par majorer le premier terme de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$ . En partant de la première équation de la formulation variationnelle continue  $(V_{n,h,2})$  et en intercalant les termes  $\int_\Omega \nu(C(t)) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} dx$ ,  $\int_\Omega \mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) \cdot \mathbf{v} dx$  et  $\int_\Omega \nu_h(C_h^{m-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} dx$ , on

obtient, en utilisant que  $\mathbf{u}_h(t) = \mathbf{u}_h^n$ , pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla(p - p_h)(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\nu(C(t)) - \nu(C_h(t)))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(C(t))(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nu(C_h(t)) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.188}$$

On prend  $\mathbf{v}$  égale à  $\mathbf{v}_{K_n}$  dans l'égalité précédente avec

$$\mathbf{v}_{K_n} = \begin{cases} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)\psi_{K_n} & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \tag{3.189}$$

Il est important de noter que  $\mathbf{v}_{K_n}$  est une fonction polynomiale grâce aux définitions de  $\mathbf{f}_h^n$  et  $\nu_h$ .

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
& \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)^2 \cdot \psi_{K_n} \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{K_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} + \int_{K_n} \nabla(p - p_h)(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h(t)))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{K_n} \nu(C(t))(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} + \int_{K_n} (\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{K_n} (\nu(C_h(t)) - \nu(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.190}$$

Le membre de gauche de l'égalité (3.190) est exactement  $\|(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)\psi_{K_n}^{1/2}\|_{L^2(K_n)^d}^2$  et est minoré par  $\|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2$  en utilisant la Proposition 3.2.

On note les termes de droite de l'égalité précédente par  $I_1, \dots, I_7$  respectivement. On commence par majorer  $I_1$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{K_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))) \cdot \mathbf{v}_{K_n} \, d\mathbf{x} \\
&\leq \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}(t, C(t))\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d},
\end{aligned}$$

On intercale  $\mathbf{f}(C_h(t))$  puis on utilise les propriétés de  $\mathbf{f}$  et on obtient

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq c_{\mathbf{f}_1}^* (\|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}) \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \\
&\quad + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.
\end{aligned}$$

Pour majorer  $I_2$  et  $I_3$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{K_n} \nabla(p - p_h)(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|p - p_h\|_{1, K_n} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |I_3| &= \int_{K_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{m-1})) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\leq \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{m-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{m-1})\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

On passe à la majoration du terme  $I_4$ , on intercale  $\mathbf{u}$  et on obtient

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\ &= \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h(t))) (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{K_n} (\nu(C(t)) - \nu(C_h(t))) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, on obtient

$$|I_4| \leq (\nu_2 - \nu_1) \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} + \lambda \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.$$

Pour majorer  $I_5$ , on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et comme  $\nu$  vérifie l'inégalité (1.11), on a

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_{K_n} \nu(C(t)) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \nu_2 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

Pour le terme  $I_6$ , on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left| \int_{K_n} (\nu(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|(\nu(C_h^{m-1}) - \nu_h(C_h^{m-1})) \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}. \end{aligned}$$

On termine par majorer  $I_7$ , on intercale  $\mathbf{u}$  et on obtient

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_{K_n} (\nu(C_h(t)) - \nu(C_h^{m-1})) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\ &= \int_{K_n} (\nu(C_h(t)) - \nu(C_h^{m-1})) (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{K_n} (\nu(C_h(t)) - \nu(C_h^{m-1})) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_{K_n} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les injections de Sobolev et comme  $\nu$  vérifie l'Hypothèse 1.7, on a

$$|I_7| \leq (\nu_2 - \nu_1) \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K_n)^d} \|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d}.$$

Pour majorer  $\mathbf{v}_{K_n}$ , on utilise la proposition 3.2 et le fait que  $\psi_{K_n}^2 \leq \psi_{K_n}$  comme  $\psi_{K_n} \leq 1$ , d'où

$$\|\mathbf{v}_{K_n}\|_{L^2(K_n)^d} \leq c \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d},$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h$ .

Ainsi, en regroupant les majorations précédentes, l'égalité (3.190) donne

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \leq \bar{c} \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \left(\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}\right)^2 \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 + |p - p_h|_{1,K_n}^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.191)$$

où  $\bar{c}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour la majoration du premier terme de  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  défini par (3.149), on utilise l'inégalité triangulaire et on aura

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \leq \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \quad + \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)^d}^2 \end{aligned}$$

On désigne par  $\varepsilon_{K_n}$  la quantité

$$\varepsilon_{K_n} = \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)^d}^2.$$

On ajoute et on retranche  $\nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}$  et  $\nu_h(C_h^{n-1})\mathbf{u}$  dans  $\varepsilon_{K_n}$  et on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{K_n} & \leq \|\nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \quad + \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2. \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente, comme  $\nu$  et  $\nu_h$  vérifient les inégalités (1.12) et (3.183) respectivement, alors

$$\|\nu(C_h^{n-1})(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 \leq (\nu_1 + \nu_2) \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2.$$

Pour le second terme, on intercale les termes  $\nu_h(C)\mathbf{u}$  et  $\nu(C)\mathbf{u}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 & \leq \|(\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 \\ & \quad + \|(\nu(C(t)) - \nu_h(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|(\nu(C_h^{n-1}) - \nu(C(t)))\mathbf{u}(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2. \end{aligned}$$

On intercale  $\nu_h(C_h(t))$  dans le premier terme et  $\nu(C_h(t))$  dans le dernier terme de l'inégalité précédente. On utilise le fait que  $\nu$  et  $\nu_h$  sont lipschitziennes et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ , on aura

$$\varepsilon_{K_n} \leq \tilde{c} \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \left( \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 \right).$$

On désigne par  $\tilde{\varepsilon}_{K_n}$  la quantité

$$\tilde{\varepsilon}_{K_n} = \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)}^2.$$

On ajoute et on retranche  $\mathbf{f}^n(C(t))$  et  $\mathbf{f}_h^n(C(t))$  dans  $\tilde{\varepsilon}_{K_n}$  et on obtient

$$\tilde{\varepsilon}_{K_n} \leq \|\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(K_n)}^2. \quad (3.192)$$

On déduit des propriétés de  $\mathbf{f}^n$  et  $\mathbf{f}_h^n$  que

$$\tilde{\varepsilon}_{K_n} \leq \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^2(K_n)} + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + \|C(t) - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}. \quad (3.193)$$

On intercale  $C_h(t)$  dans le premier et le troisième terme de (3.193), on obtient donc

$$\tilde{\varepsilon}_{K_n} \leq c \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{(t_{n-1} - t)^2}{\tau_n^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right). \quad (3.194)$$

Ainsi, on obtient finalement la majoration du premier terme de l'indicateur  $(\eta_{n, K_n, 1}^h)^2$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ & \leq \tilde{c} \left( \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \left( \frac{t_{n-1} - t}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + |p - p_h|_{1, K_n}^2 \\ & \quad \left. + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.195)$$

On passe maintenant à la majoration du deuxième terme de l'indicateur  $(\eta_{n, K_n, 1}^h)^2$ .

Pour  $K_n$  fixé, on définit

$$q_{K_n} = \begin{cases} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) \psi_{K_n} & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \quad (3.196)$$

On utilise que  $\int_{K_n} \nabla q_{K_n} \cdot \mathbf{u}(t) d\mathbf{x} = 0$ , donc,  $\int_{K_n} \nabla q_{K_n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) d\mathbf{x} = \int_{K_n} \nabla q_{K_n} \cdot \mathbf{u}_h(t) d\mathbf{x}$

$$\int_{K_n} \nabla q_{K_n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) d\mathbf{x} = \left[ \int_{K_n} q_{K_n} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n d\mathbf{x} - \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} \int_{e_n} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}) q_{K_n} d\mathbf{x} \right],$$

Or  $q_{K_n}|_{e_n} = 0$ , on obtient ainsi,

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \psi_{K_n}^{1/2}\|_{L^2(K_n)}^2 \leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} |q_{K_n}|_{1, K_n}.$$

On utilise les deux inégalités de la proposition 3.2, on obtient

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \leq h_{K_n}^{-1} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} \|q_{K_n}\|_{L^2(K_n)}. \quad (3.197)$$

Or, en utilisant la proposition 3.2, on a

$$\|q_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \leq c \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)},$$

d'où

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \leq c h_{K_n}^{-2} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2, \quad (3.198)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h_{K_n}$ .

Ainsi, en multipliant par  $h_{K_n}^2$ , on obtient la majoration du second terme de  $(\eta_{n, K_n, 1}^h)^2$  :

$$h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \leq c \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2. \quad (3.199)$$

On termine par la majoration du dernier terme de l'indicateur  $(\eta_{n, K_n, 1}^h)^2$ , c'est-à-dire  $h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2$ , où  $e_n$  est une arête (en  $d=2$ ) ou une face (en  $d=3$ ). Ce terme existe lorsque  $K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b$  est une arête (en  $d=2$ ) ou une face (en  $d=3$ ) noté par  $e_n$ .

On définit

$$q_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}(\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}) & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \quad (3.200)$$

Comme le support de  $q_{e_n}$  est  $K_n$  donc  $\int_{K_n} \nabla q_{e_n} \cdot \mathbf{u}(t) d\mathbf{x} = 0$ , et donc  $\int_{K_n} \nabla q_{e_n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) d\mathbf{x} = - \int_{K_n} \nabla q_{e_n} \cdot \mathbf{u}_h(t) d\mathbf{x}$ , ainsi en effectuant une intégration par parties,

$$\int_{K_n} \nabla q_{e_n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) d\mathbf{x} = \int_{K_n} q_{e_n} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n d\mathbf{x} - \int_{e_n} \phi_h^{e_n} q_{e_n} d\mathbf{x},$$

donc,

$$\int_{K_n} \phi_h^{e_n} \mathcal{L}_{e_n}(\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}) = \int_{e_n} (\phi_h^{e_n})^2 \psi_{e_n} = \int_{K_n} q_{e_n} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n d\mathbf{x} - \int_{K_n} \nabla q_{e_n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) d\mathbf{x}$$

Ainsi, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient

$$\|\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)}^2 \leq \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)} \|q_{e_n}\|_{L^2(K_n)} + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d} |q_{e_n}|_{1, K_n}.$$

On applique les inégalités de la proposition 3.3 et on aura :

$$\|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \leq \tilde{c} [h_{e_n}^{1/2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)} + h_{e_n}^{-1/2} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}] \|\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}\|_{L^2(e_n)}, \quad (3.201)$$

où  $\tilde{c}$  est une constante indépendante de  $h$ .

D'après l'inégalité (3.2) et comme  $|\psi_{e_n}| \leq 1$ , on a

$$\|\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \leq \|\phi_h^{e_n} \psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)} \leq c \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)},$$

on applique l'inégalité (1.2), puis on multiplie par  $h_{e_n}$ , ainsi on obtient la majoration du dernier terme de l'indicateur  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  :

$$h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \leq c(h_{e_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2), \quad (3.202)$$

où  $c$  est une constante qui ne dépend pas de  $h$ .

Pour obtenir le résultat du Théorème 3.50, tout d'abord, d'après les inégalités (3.195), (3.199) et (3.202), on a

$$\begin{aligned} & (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 \\ & \leq c \left( |C(t) - C_h(t)|_{1,K_n}^2 + \left(\frac{t_{n-1} - t}{\tau_n}\right)^2 \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|\nu(C(t)) - \nu_h(C(t))\|_{L^2(K_n)}^2 + |p - p_h|_{1,K_n}^2 \\ & \quad \left. + \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n)\|_{L^2(K_n)^d}^2 + \|\mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t))\|_{L^2(K_n)^d}^2 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  l'inégalité précédente, on obtient le résultat voulu :

$$\begin{aligned} \tau_n (\eta_{n,K_n,1}^h)^2 & \leq c \left( \|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{L^2(K_n)}^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 + \|\nu(C) - \nu_h(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n))}^2 \\ & \quad + \|p - p_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(K_n))}^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 \\ & \quad \left. + \|\mathbf{f}_h^n(C) - \mathbf{f}^n(C)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n)^d)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.203)$$

□

**Remarque 3.51.** *On remarque qu'on n'a pas  $h_{K_n}$  devant le premier terme  $\|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2$  dans l'expression (3.145) de l'indicateur en espace  $(\eta_{n,K_n,1}^h)^2$  parce que, tout d'abord, lorsqu'on établit la borne supérieure de l'erreur, on avait comme fonction test une fonction dans  $L^2$  et on voulait à droite une majoration en norme  $L^2$  de la même fonction, d'où on n'a pas introduit la fonction test  $\mathbf{v}_h$ , ainsi on n'a pas à majorer le terme  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)}$ , qui par le choix de  $\mathbf{v}_h$  fait apparaître  $h$  (voir la définition du résidu  $R_1$  dans le lemme 3.33). Au contraire, pour la majoration du résidu  $R^h(C_h)$  (voir lemme 3.41 pour la majoration de  $R^h$ ), où on choisit une fonction test  $S_h$  qui fait apparaître un  $h$  dans la majoration.*

*Inversement, lorsqu'on passe à établir l'efficacité de l'indicateur, comme les majorations sont dans  $L^2$  (voir les majorations  $I_1, \dots, I_7$  dans la démonstration du théorème 3.50), l'inégalité inverse ne joue pas un rôle dans la majoration, d'où on n'avait pas besoin d'un  $h_{K_n}$  pour y compenser le  $h_{K_n}^{-1}$  de l'inégalité inverse pour avoir l'optimalité.*

**Théorème 3.52.** *Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$ , on a*

$$\begin{aligned} & \tau_n (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 \\ & \leq c \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta_{K_n}))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} |C - \pi_\tau C_h|_{1, \Delta_{K_n}}^2 + h_{K_n}^2 \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(K_n))}^2 + \tau_n h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(\Delta_{K_n})}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.204)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\tau$  et  $h$ .

*Démonstration.* On part de la troisième équation du problème  $(V_2)$ , on intercale le terme  $(g^n + g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0 C_h^n, S)$  et  $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla S)$ , ainsi en appliquant la formule de Green pour  $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla S)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) S d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla (C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) S d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n S d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n S d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} (C(t) - C_h^n) S d\mathbf{x} \\ & = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left[ \int_{K_n} (g(t) - g^n) S d\mathbf{x} + \int_{K_n} (g^n - g_h^n) S d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) S d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} \int_{e_n} [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} S ds \right]. \end{aligned} \quad (3.205)$$

**N.B :** on a intercalé  $g_h^n$  pour la même raison donnée dans la remarque 3.48.

On prend  $S = S_{K_n}$  dans l'égalité précédente, tel que  $S_{K_n} \in H_0^1(K_n)$ , avec

$$S_{K_n} = \begin{cases} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) \psi_{K_n} & \text{sur } K_n \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n. \end{cases} \quad (3.206)$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{K_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right)^2 \psi_{K_n} d\mathbf{x} \\ & = \int_{K_n} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) S_{K_n} d\mathbf{x} + \alpha \int_{K_n} \nabla (C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S_{K_n} d\mathbf{x} + \int_{K_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) S_{K_n} d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{K_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n S_{K_n} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{K_n} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n S_{K_n} d\mathbf{x} + r_0 \int_{K_n} (C(t) - C_h^n) S_{K_n} d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{K_n} (g(t) - g^n) S_{K_n} d\mathbf{x} - \int_{K_n} (g^n - g_h^n) S_{K_n} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.207)$$



On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned}
& \left\| \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) \psi_{K_n}^{1/2} \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)} |S_{K_n}|_{1, K_n} \\
& \quad + \alpha |C(t) - C_h^n|_{1, K_n} |S_{K_n}|_{1, K_n} + \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)}.
\end{aligned} \tag{3.208}$$

On applique les inégalités de la proposition 3.2 et comme  $|\psi_{K_n}| \leq 1$ , on aura

$$\begin{aligned}
& \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq c_1 \left( h_{K_n}^{-1} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)} \right. \\
& \quad \times \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + h_{K_n}^{-1} \alpha |C(t) - C_h^n|_{1, K_n} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \\
& \quad \left. + \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)} \|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \right).
\end{aligned} \tag{3.209}$$

On factorise par  $\|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)}$  et on utilise la première inégalité de la proposition 3.2, on obtient

$$\|S_{K_n}\|_{L^2(K_n)} \leq c_2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)},$$

on élève au carré et on multiplie (3.209) par  $h_{K_n}^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& h_{K_n}^2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n)}^2 \\
& \leq c_3 \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2 |C(t) - C_h^n|_{1, K_n}^2 + h_{K_n}^2 \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.210}$$

D'où, la majoration du premier terme de  $(\eta_{n, K_n, 2}^h)^2$ .

Pour la majoration du deuxième terme de l'indicateur  $(\eta_{n, K_n, 2}^h)^2$ , on prend dans l'égalité (3.205),  $S = S_{e_n}$  avec

$$S_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}(\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{sur } K_n \cup K_n' \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K_n \cup K_n'. \end{cases} \tag{3.211}$$

où  $K_n$  et  $K'_n$  sont les éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui contiennent  $e_n$ . On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
& \alpha \int_{e_n} [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}^2 \psi_{e_n} ds \\
&= \int_{K_n \cup K'_n} \left( g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right) S_{e_n} d\mathbf{x} \\
&- \int_{K_n \cup K'_n} \left( \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right) S_{e_n} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{K_n \cup K'_n} (g(t) - g^n) S d\mathbf{x} + \int_{K_n \cup K'_n} (g^n - g_h^n) S d\mathbf{x} + \alpha \int_{K_n \cup K'_n} \nabla (C(t) - C_h^n) \cdot \nabla S_{e_n} d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.212}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
&\leq \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \\
&+ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n \cup K'_n)} |S_{e_n}|_{1, K_n \cup K'_n} \\
&+ \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} + \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \|S_{e_n}\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \\
&+ \alpha |C(t) - C_h^n|_{1, K_n \cup K'_n} |S_{e_n}|_{1, K_n \cup K'_n}.
\end{aligned} \tag{3.213}$$

On applique les inégalités de la proposition 3.3 et le fait que  $\psi_{e_n}^2 \leq \psi_{e_n}$ , il en résulte que :

$$\begin{aligned}
& \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
&\leq c_4 \left[ h_{e_n}^{1/2} \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \right\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \right. \\
&\quad \times \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \\
&+ h_{e_n}^{-1/2} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right\|_{(H_0^1(K_n \cup K'_n))'} \\
&\quad \times \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \\
&+ h_{e_n}^{1/2} \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} + h_{e_n}^{1/2} \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)} \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \\
&\left. + \alpha h_{e_n}^{-1/2} |C(t) - C_h^n|_{1, K_n \cup K'_n} \|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)} \right].
\end{aligned} \tag{3.214}$$

On simplifie par  $\|\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}$ , on multiplie par  $h_{e_n}$  puis on élève au carré, on

obtient la majoration du second terme de  $(\eta_{n,K_n,2}^h)^2$  :

$$\begin{aligned}
& h_{e_n} \|\alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq \left[ \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n + r_0(C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(K_n \cup K'_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + h_{e_n}^2 \|g(t) - g^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)}^2 + h_{e_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(K_n \cup K'_n)}^2 + \alpha^2 |C(t) - C_h^n|_{1,K_n \cup K'_n}^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.215}$$

Finalement, en regroupant les majorations (3.210) et (3.215) et en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  sur  $t$ , on obtient le résultat voulu.

□

## Chapitre 4

# Simulations numériques adaptatives

Afin de valider les résultats théoriques présentés auparavant, on exploite des résultats numériques en utilisant le logiciel Freefem++. On s'intéresse à l'adaptation du maillage qui consiste essentiellement à modifier un maillage afin qu'il distribue équitablement l'erreur associée à une solution sur l'ensemble du domaine de calcul. Ainsi, pour rendre la résolution efficace, autant au niveau de la charge de calculs à réaliser qu'au niveau de la précision, on adapte le maillage afin de traiter avec plus de soin les parties du domaine où la solution présente de fortes variations.

On considère une géométrie simple  $\Omega$ , un carré ; dans la suite on va faire deux types de calculs : le premier calcul sur un maillage uniforme où chaque arête de  $\Omega$  est décomposée en  $N$  segments et ainsi  $\Omega$  est décomposé en  $2N^2$  triangles et un deuxième type de calcul où l'on part d'un maillage initial uniforme et où on va ensuite utiliser les estimateurs étudiés dans ce mémoire et la fonction d'adaptation de maillage proposée par FreeFem++ pour produire des maillages bien adaptés. Afin de pouvoir mesurer les erreurs pour le premier et le deuxième schéma, on effectue des simulations numériques dans lesquelles on connaît des solutions exactes  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $C$ .

On présente respectivement le premier schéma et le deuxième schéma, ainsi que leurs



Les indicateurs correspondants au deuxième schéma sont les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et pour tout  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \nu(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^b} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\ & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \end{aligned}$$

ainsi que l'indicateur en temps :

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

Les indicateurs ci-dessus diffèrent légèrement des indicateurs utilisés dans la partie théorique ; ils sont plus simplement implémentés car ils ne font pas intervenir les approximations polynomiales  $\mathbf{f}_h^n$ ,  $\nu_h$  et  $g_h^n$ .

De plus, on note par

$$\eta^\tau = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \eta_{n,K_n}^\tau \right)^2, \quad (4.5)$$

$$\eta_i^h = \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n \left( \eta_{n,K_n,i}^h \right)^2, \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}, \quad (4.6)$$

et pour le premier schéma

$$D_1 = \sum_{n=1}^N \tau_n \left( \|\mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2 + \|p_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2 + |C_h(t_n)|_{1,K_n}^2 \right). \quad (4.7)$$

et pour le deuxième schéma

$$D_2 = \sum_{n=1}^N \tau_n \left( \|\mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2 + |p_h(t_n)|_{1,K_n}^2 + |C_h(t_n)|_{1,K_n}^2 \right). \quad (4.8)$$

Ainsi, on définit l'indicateur d'erreur temporel relatif

$$E_\tau = \left( \frac{\sum_{n=0}^N \eta^\tau}{D_i} \right)^{1/2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}, \quad (4.9)$$

les indicateurs d'erreurs spatiaux relatifs

$$E_{h_i} = \left( \frac{\sum_{n=0}^N \eta_i^h}{D_j} \right)^{1/2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}, \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

et l'indicateur d'erreur total relatif pour le premier schéma est

$$E_{totale} = E_\tau + E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}, \quad (4.10)$$

et pour le deuxième schéma

$$E_{totale} = E_\tau + E_{h_1} + E_{h_2}. \quad (4.11)$$

On note par  $E_{\mathbf{u}}$  l'erreur relative de la vitesse, par  $E_p$  l'erreur relative de la pression, par  $E_C$  et  $E_c$  les erreurs relatives de la concentration, et par  $err$  l'erreur totale relative entre la solution exacte et la solution approchée.

- Pour le premier schéma :

$$E_{\mathbf{u}} = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_{ex}(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.12)$$

$$E_p = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n \|p_{ex}(t_n) - p_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n \|p_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.13)$$

$$E_C = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n |C_{ex}(t_n) - C_h(t_n)|_{1,K_n}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n |C_h(t_n)|_{1,K_n}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.14)$$

$$E_c = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n \|C_{ex}(t_n) - C_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.15)$$

$$err = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n (\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p(t_n) - p_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C(t_n) - C_h(t_n)|_{1,\Omega}^2)}{\sum_{n=1}^N \tau_n (\|\mathbf{u}(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C(t_n)|_{1,\Omega}^2)} \right)^{1/2}, \quad (4.16)$$

- Pour le deuxième schéma :

$$E_{\mathbf{u}} = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_{ex}(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.17)$$

$$E_p = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n |p_{ex}(t_n) - p_h(t_n)|_{1,K_n}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n |p_h(t_n)|_{1,K_n}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.18)$$

$$E_C = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n |C_{ex}(t_n) - C_h(t_n)|_{1,K_n}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n |C_h(t_n)|_{1,K_n}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.19)$$

$$E_c = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n \|C_{ex}(t_n) - C_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n \|C_h(t_n)\|_{L^2(K_n)}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.20)$$

$$err = \left( \frac{\sum_{n=1}^N \tau_n (\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |p(t_n) - p_h(t_n)|_{1,\Omega}^2 + |C(t_n) - C_h(t_n)|_{1,\Omega}^2)}{\sum_{n=1}^N \tau_n (\|\mathbf{u}(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |p(t_n)|_{1,\Omega}^2 + |C(t_n)|_{1,\Omega}^2)} \right)^{1/2}, \quad (4.21)$$

On définit l'ordre de convergence par

$$\beta = \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln(h_1/h_2)}, \quad (4.22)$$

où  $e_1, e_2$  sont les erreurs respectives sur les maillages de pas  $h_1$  et  $h_2$ .

On note

$$\eta_n^h = \left( \sum_i \eta_i^h \right)^{1/2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}, \quad (4.23)$$

$$\eta_n^\tau = \left( \sum_{K_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,K_n}^\tau)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.24)$$

et par  $\epsilon$  une tolérance fixée par l'utilisateur.

L'algorithme d'adaptation utilisé est représenté comme suit :

1. Connaissant  $C_h^{n-1}$  :

- On résout le problème pour calculer  $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$ .
- On calcule  $\eta_n^h$  et  $\eta_n^\tau$  définis en (4.23) et (4.24) respectivement.

2. Si  $\eta_n^h + \eta_n^\tau > \epsilon$  :

- Si  $\eta_n^h < \eta_n^\tau$  : on adapte en temps de façon que le prochain estimateur en temps soit légèrement inférieur à l'estimateur en espace.
- Si  $\eta_n^h > \eta_n^\tau$  :
  - Si le nombre maximal de raffinements du maillage n'est pas atteint, on adapte en espace.
  - Sinon, on garde le calcul.

3. Si  $\eta_n^h + \eta_n^\tau < \epsilon$  :

- Si  $\eta_n^h > \eta_n^\tau$ , on garde le calcul et on augmente le pas de temps quitte à raffiner en espace à l'itération suivante.
- Sinon, on garde le calcul sans modifier ni le pas de temps ni le maillage.



## 4.1 Premier cas test numérique

Tout d'abord, on considère une géométrie simple  $\Omega$ , le carré  $]0, 1[^2$ . On considère  $\alpha = 1$ ,  $r_0 = 1$ ,  $\mathbf{f}_1(C) = C + 1$  et  $\nu(C) = \sin(C) + 2$ .

On choisit  $\mathbf{f}_0$  et  $g$  tel que la solution théorique est  $(\mathbf{u}_{ex}, p_{ex}, C_{ex}) = (\exp(-t/4) \text{rot } \psi, p_{ex}, C_{ex})$ , telle que pour tout  $(x, y) \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= e^{-30((x-.5)^2+(y-.5)^2)}, \\ p_{ex}(x, y, t) &= (t + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y), \\ C_{ex}(x, y, t) &= \sin t x^2(x - 1)^2 y^2(y - 1)^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour les maillages uniformes, on teste le schéma pour  $N$  allant de 30 à 120, par un pas de 10 avec  $T = 1$ ,  $h = \frac{1}{N}$  et  $\tau = h$ . Pour la stratégie adaptative, on part d'un maillage uniforme avec  $N = 30$  et de  $\tau = \frac{1}{N}$  et on applique l'algorithme de la page 117 pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

### 4.1.1 Premier schéma

Les figures (4.1) et (4.2) comparent les solutions numérique et exacte de la pression du schéma  $(V_{n,h,1})$ . De même, les figures (4.3) et (4.4) illustrent une comparaison entre les vitesses numérique et exacte. Finalement, les solutions numérique et exacte de la concentration sont présentées dans les figures (4.5) et (4.6).

On remarque que la solution numérique calculée à partir du schéma  $(V_{n,h,1})$  représente une bonne approximation de la solution exacte pour les problèmes de Darcy et l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire.

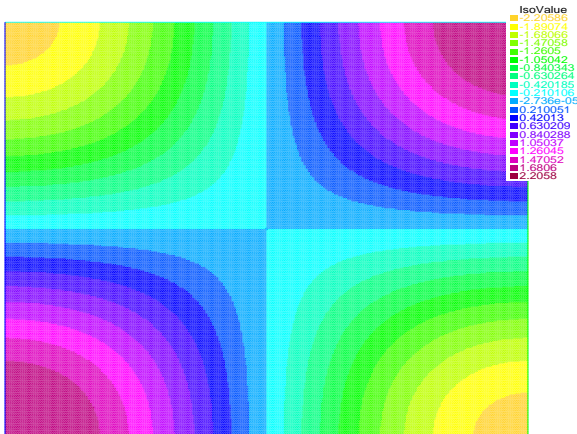


FIGURE 4.1 – Pression numérique.

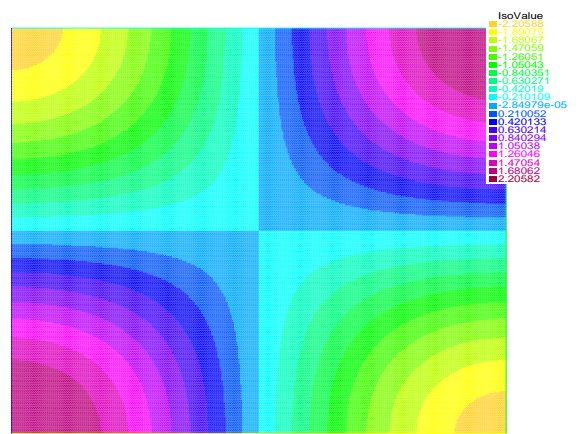


FIGURE 4.2 – Pression théorique.

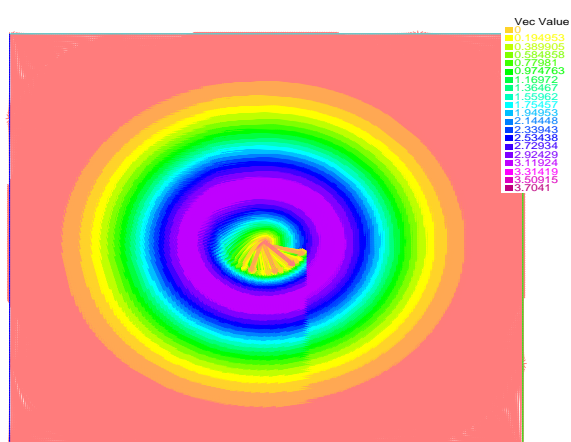


FIGURE 4.3 – Vitesse numérique.

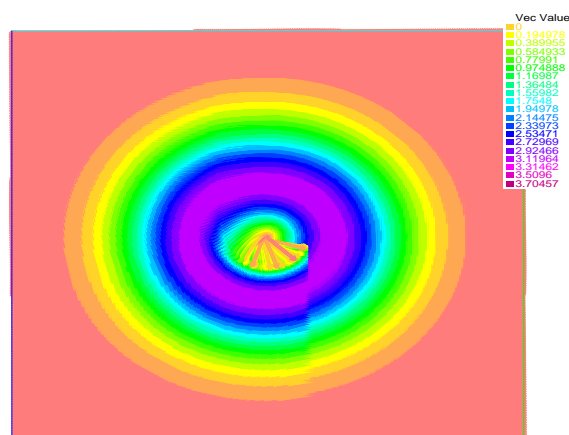


FIGURE 4.4 – Vitesse théorique.

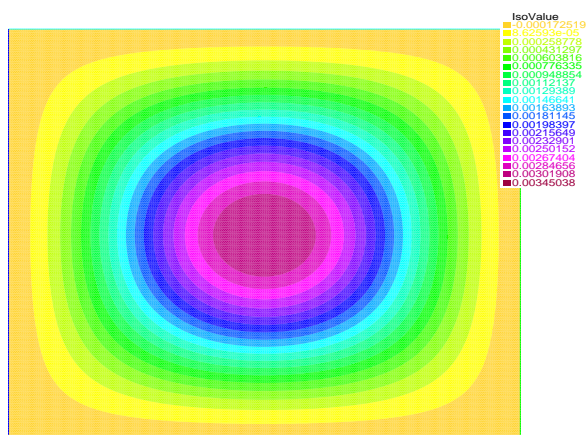


FIGURE 4.5 – Concentration numérique.

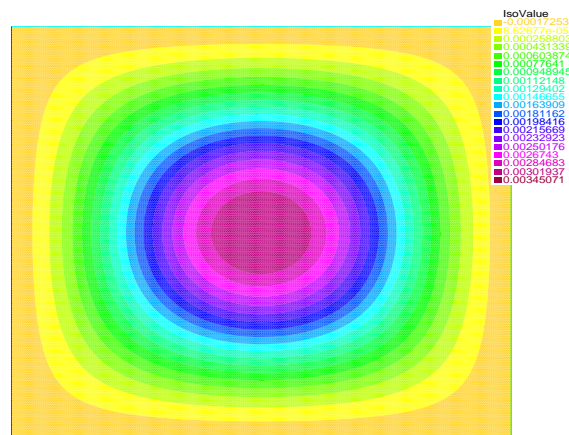


FIGURE 4.6 – Concentration théorique.

Les figures 4.7 et 4.8 présentent respectivement, en échelle logarithmique, l'erreur relative totale donnée par (4.16) et l'indicateur d'erreur total donné par (4.10) en fonction du nombre d'inconnues. Ces figures montrent clairement l'avantage de la méthode adaptative par rapport au raffinement uniforme puisque les erreurs sont plus petites.

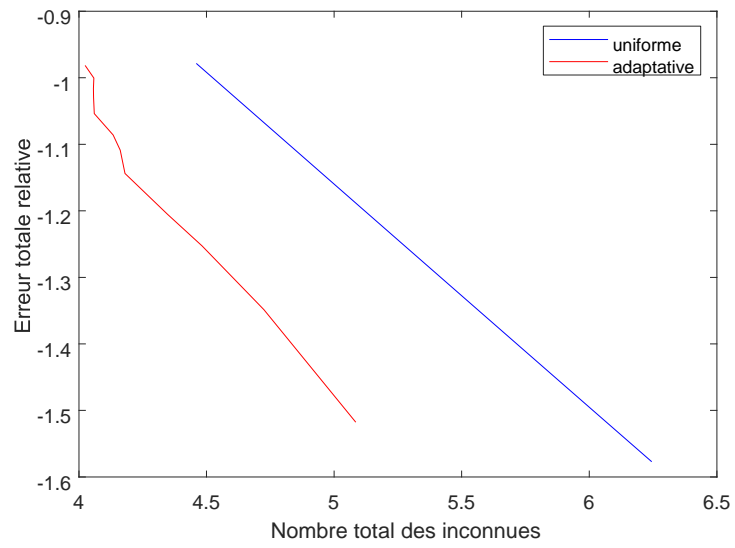


FIGURE 4.7

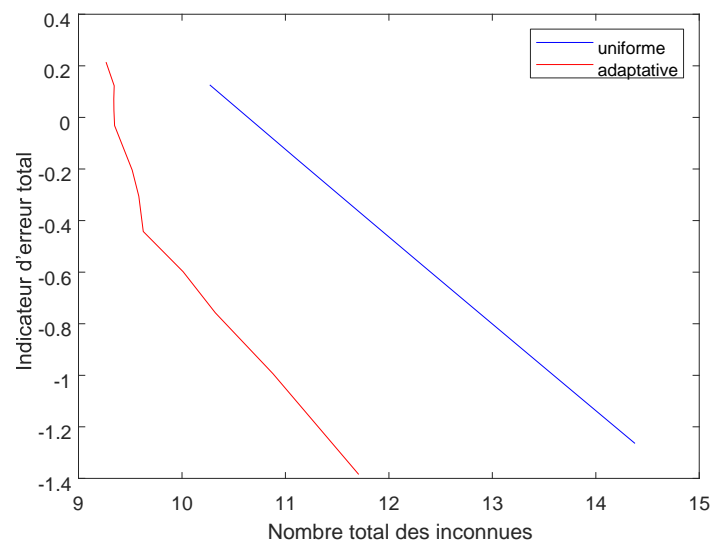


FIGURE 4.8

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.234	0.156	0.228	$3.952 \times 10^{-6}$
20	0.109	0.078	0.116	$1.109 \times 10^{-6}$
40	0.053	0.039	0.058	$3.632 \times 10^{-7}$
80	0.026	0.019	0.029	$1.356 \times 10^{-7}$

TABLE 4.1 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du premier essai du deuxième schéma

## 4.1.2 Deuxième schéma

On présente des cas tests de complexité croissante dans une démarche de validation systématique. Les interprétations des résultats obtenus sont présentées à la fin des tests dans la section 4.1.2.1.

### 1. Premier essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations, celle de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction découplées, c’est à dire, sans le terme de convection, avec  $\nu$  constant et le terme source  $\mathbf{f}$  indépendant de la concentration. On présente le problème de ces équations comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_1^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{m-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } C_h^m \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \quad \int_{\Omega} \frac{C_h^m - C_h^{m-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^m \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^m S_h \, d\mathbf{x} \\ \quad \quad \quad = \int_{\Omega} g_1^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

où  $\nu = 1$ ,  $\mathbf{f}_1^n = (\nu_1 \mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex})(t_n)$  et  $g_1^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex})(t_n)$ .

On présente dans le tableau 4.1 les erreurs (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20) de la vitesse, la pression et la concentration.

On présente l’ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.2, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans la définition (4.22) respectivement pour la vitesse, la pression et la concentration.

On présente dans la figure 4.9, en échelle logarithmique, la courbe d’erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage.

On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  qui interviennent

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.09	0.993	0.97	1.833
1.036	0.998	0.992	1.6102
1.016	0.999	0.998	1.421

TABLE 4.2 – Ordre de convergence du premier essai

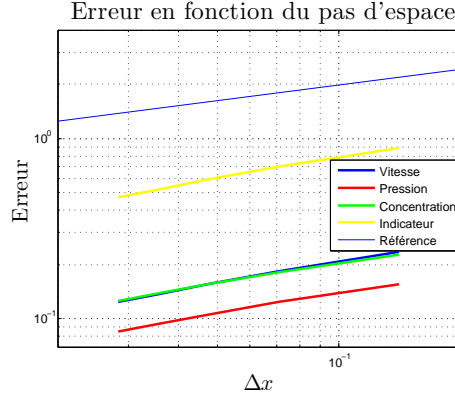


FIGURE 4.9

dans (4.6) pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_1^n - \nu_1 \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.26)$$

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,1}^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2. \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps qui intervient dans (4.5) par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

## 2. Deuxième essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction découplées, où  $\mathbf{u}$  dans le terme de convection est la solution exacte de l'équation de Darcy mais pas son approximation numérique. On présente le pro-

$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.491 \times 10^{-5}$	0.887	$1.4048 \times 10^{-3}$	0.887	2420	2.744
20	$4.37009 \times 10^{-5}$	0.417	$7.2355 \times 10^{-4}$	0.417	17640	9.239
40	$2.204 \times 10^{-5}$	0.205	$3.66365 \times 10^{-4}$	0.205	134480	71.375
80	$1.105 \times 10^{-5}$	0.101	$1.84192 \times 10^{-4}$	0.101	1049760	597.257

TABLE 4.3 – Indicateurs d'erreurs en fonction de  $N$  du premier essai

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.234	0.156	0.228	$3.952 \times 10^{-6}$
20	0.109	0.0785	0.116	$1.109 \times 10^{-6}$
40	0.0535	0.0392	0.0585	$3.632 \times 10^{-7}$
80	0.026495	0.0196436	0.0293028	$1.35637 \times 10^{-7}$

TABLE 4.4 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du deuxième essai

blème de ces équations comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_2^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \quad \int_{\Omega} \frac{C_h^m - C_h^{m-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{ex}) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^m S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_2^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

où  $g_2^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex} + \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex})(t_n)$  et  $\mathbf{f}_2^n = (\nu_2 \mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex})(t_n)$ .

On présente dans le tableau 4.4 les erreurs de la vitesse, la pression et la concentration.

On présente l'ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.5, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans l'équation (4.22).

On présente dans la figure 4.10, en échelle logarithmique, la courbe d'erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage. On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_2^n - \nu_2 \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.27)$$

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.0903	0.9931	0.9709	1.8335
1.0368	0.9989	0.9926	1.6103
1.01606	0.9999	0.9981	1.4211

TABLE 4.5 – Ordre de convergence du deuxième essai

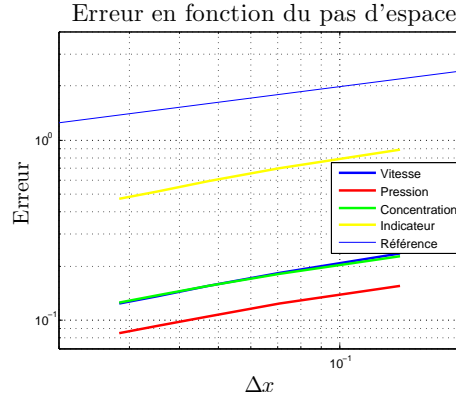


FIGURE 4.10

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned}
 (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,2}^n\|^2 - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_{ex} C_h^n \\
 & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2.
 \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

### 3. Troisième essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction dans laquelle la vitesse de convection est le champ élément fini

$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.4915 \times 10^{-5}$	0.8876	$1.405 \times 10^{-3}$	0.887	2420	1.575
20	$4.37009 \times 10^{-5}$	0.4176	$7.236 \times 10^{-4}$	0.417	17640	11.26
40	$2.2049 \times 10^{-5}$	0.20505	$3.663 \times 10^{-4}$	0.205	134480	89.363
80	$1.1059 \times 10^{-5}$	0.101	$1.841 \times 10^{-4}$	0.101	1049760	731.546

TABLE 4.6 – Indicateurs d'erreurs en fonction de N du deuxième essai

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.234	0.156	0.228	$4.006 \times 10^{-6}$
20	0.109	0.0785	0.116	$1.115 \times 10^{-6}$
40	0.0535	0.0392	0.0585	$3.642 \times 10^{-7}$
80	0.0264	0.0196	0.0293	$1.358 \times 10^{-7}$

TABLE 4.7 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du troisième essai

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.0903	0.9931	0.97096	1.8446
1.0368	0.9989	0.9926	1.6144
1.01606	0.9999	0.9981	1.4231

TABLE 4.8 – Ordre de convergence du troisième essai

issu du calcul de Darcy. Toutefois, ni la viscosité ni le terme source de l'équation de Darcy ne dépendent de la concentration. On présente le problème de ces équations comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_3^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h} \text{ et } \mathbf{u}_h^n \in X_{n,h,2}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \quad \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_3^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

où  $g_3^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex} + \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex})(t_n)$  et  $\mathbf{f}_3^n = (\nu_3 \mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex})(t_n)$ .

On présente dans le tableau 4.7 les erreurs de la vitesse, la pression et la concentration.

On présente l'ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.8, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans l'équation (4.22).

On présente dans la figure 4.11, en échelle logarithmique, la courbe d'erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage. On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$



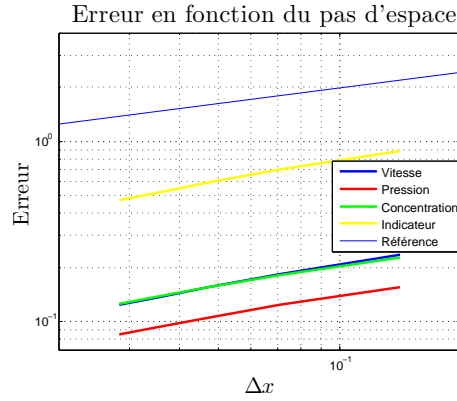


FIGURE 4.11

$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.491 \times 10^{-5}$	0.887	$1.52334 \times 10^{-3}$	0.887	2420	1.602
20	$4.37009 \times 10^{-5}$	0.417	$7.76838 \times 10^{-4}$	0.417	17640	11.001
40	$2.204 \times 10^{-5}$	0.205	$3.92216 \times 10^{-4}$	0.205	134480	88.728
80	$1.105 \times 10^{-5}$	0.10181	$1.96956 \times 10^{-4}$	0.101	1049760	709.894

TABLE 4.9 – Indicateurs d'erreurs en fonction de  $N$  du troisième essai

par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_3^n - \nu_3 \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.28)$$

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned} (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,3}^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\ & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2. \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

#### 4. Quatrième essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction. À présent, le terme source de l'équation de Darcy dépend de la

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.234	0.156	0.228	$4.006 \times 10^{-6}$
20	0.109	0.0785	0.116	$1.115 \times 10^{-6}$
40	0.0535	0.039	0.0585	$3.642 \times 10^{-7}$
80	0.0264	0.0196	0.0293	$1.358 \times 10^{-7}$

TABLE 4.10 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du quatrième essai

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.0903	0.9931	0.9709	1.8446
1.0368	0.9989	0.9926	1.6144
1.01606	0.9999	0.9981	1.4231

TABLE 4.11 – Ordre de convergence du quatrième essai

concentration. On présente le problème de ces équations comme suit

$$(V_{n,h,2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \int_{\Omega} \nu \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_4^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h} \text{ et } \mathbf{u}_h^n \in X_{n,h,2}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_4^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

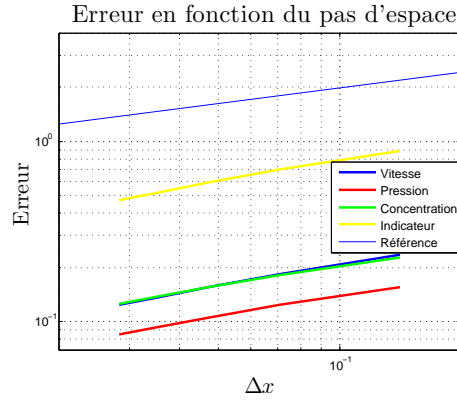
où  $g_4^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex} + \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex})(t_n)$  et  $\mathbf{f}_4^n = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1^n$  où  $\mathbf{f}_0^n = (\nu_4 \mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex} - (C_{ex} + 1))(t_n)$  et  $\mathbf{f}_1^n = C_h^{n-1} + 1$ .

On présente dans le tableau 4.10 les erreurs de la vitesse, la pression et la concentration :

On présente l'ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.11, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans l'équation (4.22).

On présente dans la figure 4.12, en échelle logarithmique, la courbe d'erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage. On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_4^n(C_h^{n-1}) - \nu_4 \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.29)$$



$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.491 \times 10^{-5}$	0.8858	$1.523 \times 10^{-3}$	0.8858	2420	1.738
20	$4.37009 \times 10^{-5}$	0.4171	$7.7683 \times 10^{-4}$	0.4171	17640	11.982
40	$2.204 \times 10^{-5}$	0.2049	$3.9221 \times 10^{-4}$	0.2049	134480	99.622
80	$1.105 \times 10^{-5}$	0.1017	$1.9695 \times 10^{-4}$	0.1017	1049760	869.904

TABLE 4.12 – Indicateurs d'erreurs en fonction de  $N$  du quatrième essai

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned}
 (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,4}^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\
 & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2.
 \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

##### 5. Cinquième essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction. À présent, la viscosité dépend de la concentration. On présente

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.126	0.156	0.2282	$3.979 \times 10^{-6}$
20	0.0561	0.0785	0.1164	$1.112 \times 10^{-6}$
40	0.0269	0.039	0.05853	$3.637 \times 10^{-7}$
80	0.0132	0.0196	0.0293	$1.357 \times 10^{-7}$

TABLE 4.13 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du cinquième essai

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.17215	0.9932	0.9709	1.8391
1.05873	0.9988	0.9926	1.6124
1.0194	0.9999	0.9981	1.4222

TABLE 4.14 – Ordre de convergence du cinquième essai

le problème de ces équations comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_5^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h} \text{ et } \mathbf{u}_h^n \in X_{n,h,2}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \quad \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_5^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

où  $\nu(C_h^{n-1}) = \sin(C_h^{n-1}) + 2$ ,  $\mathbf{f}_5^n = (\nu(C_{ex})\mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex})(t_n)$  et  $g_5^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex} + \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex})(t_n)$ .

On présente dans le tableau 4.13 les erreurs de la vitesse, la pression et la concentration.

On présente l'ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.14, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans l'équation (4.22).

On présente dans la figure 4.13, en échelle logarithmique, la courbe d'erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage. On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_5^n - \nu_5(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.30)$$

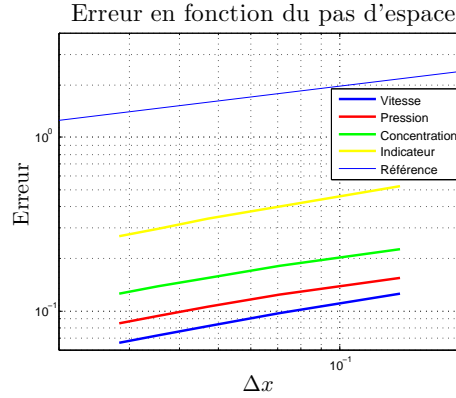


FIGURE 4.13

$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.518 \times 10^{-5}$	0.521	$1.45241 \times 10^{-3}$	0.5214	2420	1.746
20	$4.372 \times 10^{-5}$	0.2209	$7.38835 \times 10^{-4}$	0.2209	17640	12.113
40	$2.205 \times 10^{-5}$	0.1060	$3.73144 \times 10^{-4}$	0.10605	134480	101.017
80	$1.105 \times 10^{-5}$	0.0523	$1.87467 \times 10^{-4}$	0.0523	1049760	775.23

TABLE 4.15 – Indicateurs d'erreurs en fonction de  $N$  du cinquième essai

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned}
 (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,5}^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\
 & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2.
 \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

#### 6. Sixième essai :

Dans cet essai, on étudie les deux équations de Darcy et celle de la convection–diffusion–réaction. À présent, le couplage est total où  $\mathbf{f}_6$  et  $\nu_6$  dépendent de  $C$ . On

$N$	$E_{\mathbf{u}}$	$E_p$	$E_C$	$E_c$
10	0.1265	0.1562	0.22829	$3.9795 \times 10^{-6}$
20	0.0561	0.07851	0.11646	$1.1122 \times 10^{-6}$
40	0.0269	0.03928	0.05853	$3.6374 \times 10^{-7}$
80	0.01329	0.019648	0.029302	$1.3572 \times 10^{-7}$

TABLE 4.16 – Erreurs exactes relatives en fonction de  $N$  du sixième essai

$\beta_{\mathbf{u}}$	$\beta_p$	$\beta_C$	$\beta_c$
1.17215	0.9932	0.9709	1.8391
1.058731	0.9988	0.9926	1.61244
1.0194	0.9999	0.9981	1.4222

TABLE 4.17 – Ordre de convergence du sixième essai

présente le problème de ces équations comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h}, \text{ Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{n,h,2} \times M_{n,h,2} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu(C_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_6^n(C_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{n,h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h^n \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \text{Sachant que } C_h^{n-1} \in Y_{n-1,h} \text{ et } \mathbf{u}_h^n \in X_{n,h,2}, \text{ Trouver } C_h^n \in Y_{n,h} \text{ tel que} \\ \forall S_h \in Y_{n,h}, \quad \int_{\Omega} \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\tau_n} S_h \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla C_h^n \cdot \nabla S_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n) S_h \, d\mathbf{x} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n S_h \, d\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} C_h^n S_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_6^n S_h \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{f}_6^n = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1^n$  où  $\mathbf{f}_0^n = (\nu(C_{ex})\mathbf{u}_{ex} + \nabla p_{ex} - (C_{ex} + 1))(t_n)$  et  $\mathbf{f}_1^n = C_h^{n-1} + 1$  et  $g_6^n = (\partial_t C_{ex} + r_0 C_{ex} - \Delta C_{ex} + \mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex})(t_n)$ .

On présente dans le tableau 4.16 les erreurs de la vitesse, la pression et la concentration.

On présente l'ordre de convergence de la vitesse, la pression et la concentration dans le tableau 4.17, où  $\beta_{\mathbf{u}}$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_C$  et  $\beta_c$  sont définis comme la fonction  $\beta$  dans l'équation (4.22).

On présente dans la figure 4.14, en échelle logarithmique, la courbe d'erreur exacte de la vitesse, la pression et la concentration en fonction du pas de maillage. On définit les indicateurs locaux en espace  $\eta_{n,K_n,1}^h$  et  $\eta_{n,K_n,2}^h$  pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $K_n \in \mathcal{T}_{nh}$  par :

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \|\mathbf{f}_6^n(C_h^{n-1}) - \nu_6(C_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + h_{K_n}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n} h_{e_n} \|\phi_h^{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2, \quad (4.31)$$

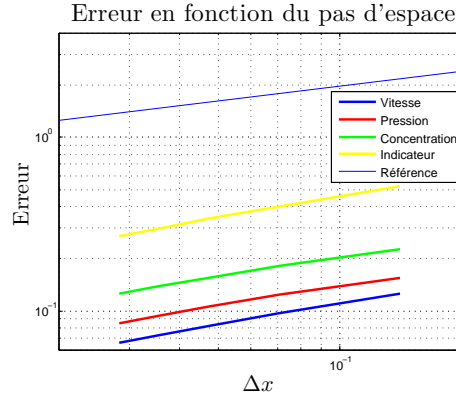


FIGURE 4.14

$N$	$E_\tau$	$E_{h_1}$	$E_{h_2}$	$E_{totale}$	DDL	CPU
10	$8.5185 \times 10^{-5}$	0.5214	$1.452 \times 10^{-3}$	0.52143	2420	1.918
20	$4.372 \times 10^{-5}$	0.2209	$7.3883 \times 10^{-4}$	0.22097	17640	12.805
40	$2.205 \times 10^{-5}$	0.106	$3.73144 \times 10^{-4}$	0.10605	134480	97.393
80	$1.105 \times 10^{-5}$	0.0523	$1.8746 \times 10^{-4}$	0.052396	1049760	818.503

TABLE 4.18 – Indicateurs d'erreurs en fonction de  $N$  du sixième essai

où  $\phi_h^{e_n}$  est défini dans (3.4), et

$$\begin{aligned}
 (\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = & h_{K_n}^2 \|g_{h,6}^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n \\
 & - r_0 C_h^n + \alpha \Delta C_h^n \|_{L^2(K_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \mathcal{E}_{nh}^i} h_{e_n} \|[\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}\|_{L^2(e_n)}^2.
 \end{aligned}$$

et l'indicateur en temps défini par

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{1,K_n}^2.$$

La figure 4.15 représente, en échelle logarithmique, l'erreur relative totale en fonction du nombre d'inconnues. Cette figure montre clairement l'avantage de la méthode adaptative contre l'uniforme puisque les erreurs sont plus petites.

#### 4.1.2.1 Interprétations des résultats

- On remarque que, dans les figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14, les courbes d'erreurs exactes de la vitesse, la pression et la concentration sont parallèles à la courbe de référence dont la pente est égale à 1, ce qui indique bien un schéma d'ordre 1.

Dans ces mêmes figures, on voit que la courbe de l'indicateur total en jaune est

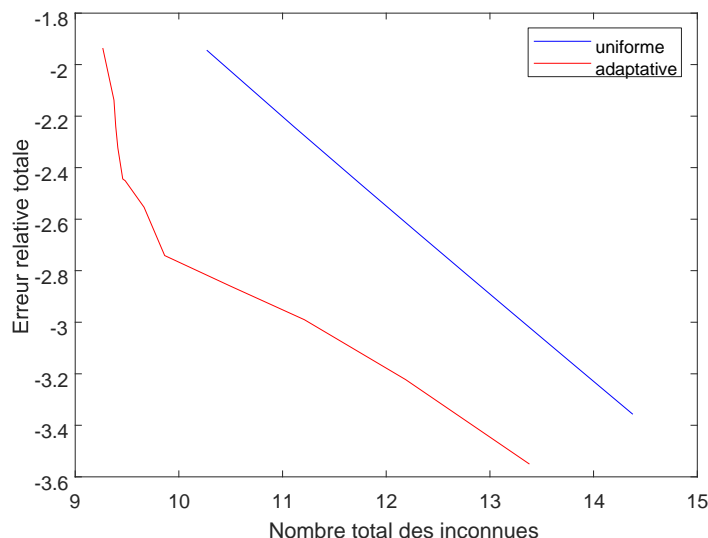


FIGURE 4.15

parallèle aux courbes des erreurs, ce qui indique que les vraies erreurs et l'estimateur se comportent de la même manière.

- Dans les tableaux 4.2, 4.5, 4.8, 4.11, 4.14, 4.17, on voit que l'ordre de convergence en norme  $L^2$  est proche de 1 pour la vitesse, en norme  $H_0^1$  pour la pression et en norme  $H_0^1$  pour la concentration.

On remarque que la concentration converge en norme  $L^2$  en ordre compris entre 1 et 2, plus précisément, cet ordre est proche de 2 au début pour un maillage grossier et se rapproche de 1 pour les maillages plus fins.

Si le problème était stationnaire et si le terme de convection avait été discrétisé par  $\mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_h$ , c'est un résultat standard d'élément fini  $\mathbb{P}_1$  que la concentration convergerait à l'ordre 2.

En revanche dans un problème instationnaire lorsqu'on discrétise la dérivée temporelle par un schéma d'Euler implicite, il apparaît de plus une erreur d'ordre 1 en  $\Delta t$  et après avoir approché  $\mathbf{u}_{ex} \cdot \nabla C_{ex}$  par  $\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m$  cela introduit une autre erreur d'ordre 1 puisque  $\mathbf{u}_h^n$  est aussi d'ordre 1.

- On remarque que les tableaux 4.1, 4.4, 4.7, 4.10, 4.13, 4.16 sont proches l'un de l'autre sauf lorsque  $\nu$  et  $\mathbf{f}$  dépendent de la concentration  $C$ . Dans ce cas,  $\nu(C) = \sin(C) + 2$  et puisque  $C_{ex}$  est compris entre  $-1/256$  et  $1/256$ ,  $\nu$  est très proche de 2, alors que  $\nu = 1$  dans les essais précédents. On remarque que les erreurs sur la vitesse dans les tableaux 4.13 et 4.16 valent la moitié de celles des tableaux 4.1, 4.4, 4.7 et 4.10, ceci est justifié par le fait que l'erreur est proportionnelle à  $1/\nu$ .



### 4.1.3 Comparaison des deux schémas

Afin de pouvoir comparer l'exactitude des schémas sur un nombre similaire d'inconnues et d'entrées non nulles dans les matrices associées aux systèmes linéaires, on utilise également  $N = 240$  pour le premier schéma et  $N = 30$  pour le second.

Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 montrent, en échelle logarithmique, les courbes des erreurs

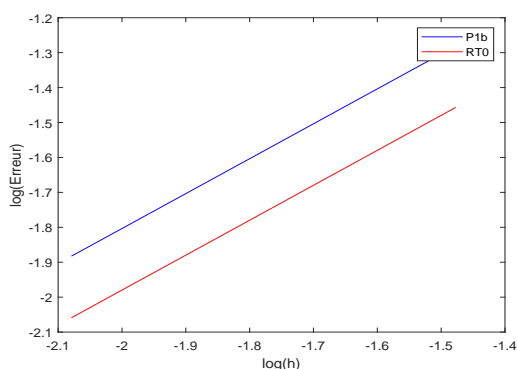


FIGURE 4.16 – Erreur de la pression en fonction du pas de maillage en échelle logarithmique.

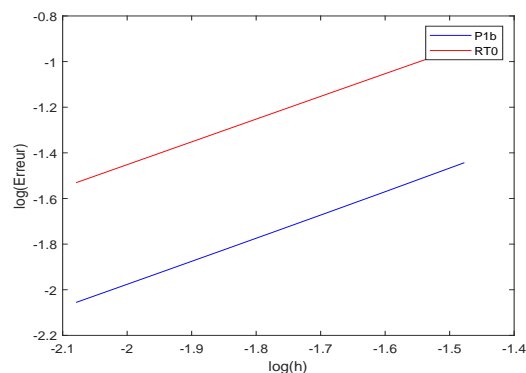


FIGURE 4.17 – Erreur de la vitesse en fonction du pas de maillage en échelle logarithmique.

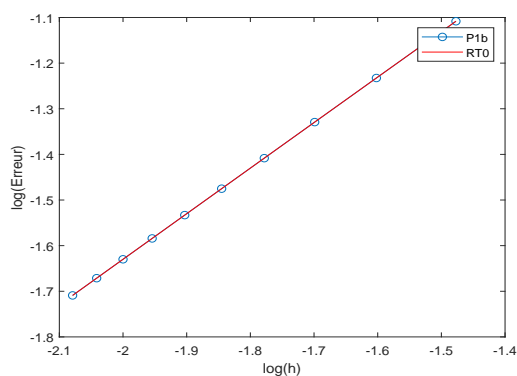


FIGURE 4.18 – Erreur de la concentration en fonction du pas de maillage en échelle logarithmique.

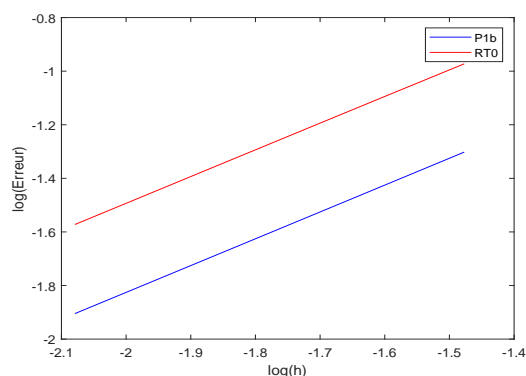


FIGURE 4.19 – Erreur totale relative en fonction du pas de maillage en échelle logarithmique.

sur le pression, la vitesse et la concentration, respectivement, selon le pas de maillage  $h$  pour les premier et second schémas ( $V_{n,h,1}$ ) et ( $V_{n,h,2}$ ).

La figure 4.19 représente, en échelle logarithmique, la courbe de l'erreur relative totale en fonction du pas de maillage  $h$  pour le premier et le second schémas discrets ( $V_{n,h,1}$ )

et  $(V_{n,h,2})$ . Leurs pentes respectives sont de 0,996 et 1,001, ce qui est conforme à l'ordre théorique de convergence des deux schémas. On note également que pour la pression, le schéma  $RT_0$  est plus précis que le schéma  $\mathbb{P}_1 + bulle$ .

Afin d'inclure une comparaison plus complète de la précision des deux schémas en ce

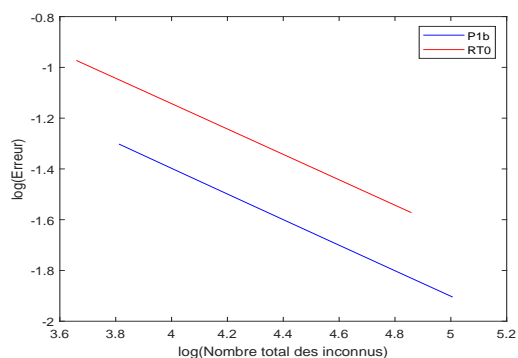


FIGURE 4.20 – Erreur totale relative en fonction de nombre d'inconnues.

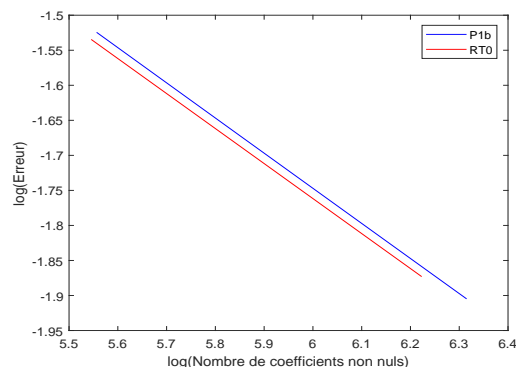


FIGURE 4.21 – Erreur totale relative en fonction du nombre de coefficients non nuls.

qui concerne leur complexité numérique, on montre sur les Figures 4.19, 4.20 et 4.21 leur erreurs totales relatives, non seulement en fonction du pas du maillage, mais aussi en fonction du nombre d'inconnues des systèmes linéaires à résoudre et du nombre de coefficients non nuls dans les matrices associées.

Sur les figures 4.19 et 4.20, la courbe du second schéma est en dessous de celle du premier schéma, ce qui signifie que, pour un nombre d'inconnues donné, le second schéma est plus précis que le premier pour cet exemple particulier. Il est probable que cet avantage est lié à la raideur élevée de la solution exacte, qui est mieux saisie par le second schéma qui utilise des polynômes d'ordre supérieur. En revanche, lorsque l'on mesure la précision en fonction du nombre de termes non nuls dans les matrices des systèmes linéaires, le premier schéma est très légèrement plus précis que le second. Ceci est dû au nombre de termes non nuls dans les matrices, qui est nettement plus élevé dans le second schéma que dans le premier.

De plus, afin de présenter une comparaison plus complète des deux schémas en ce qui concerne leur complexité numérique, on montre dans la figure 4.22, en échelle logarithmique, l'indicateur d'erreur total en fonction du nombre d'inconnues dans des simulations uniformes et adaptatives. Dans cette figure, les courbes du second schéma sont en dessous de celles du premier schéma, ce qui signifie que, pour un nombre d'inconnues donné, le second schéma est plus précis que le premier pour cet exemple particulier.

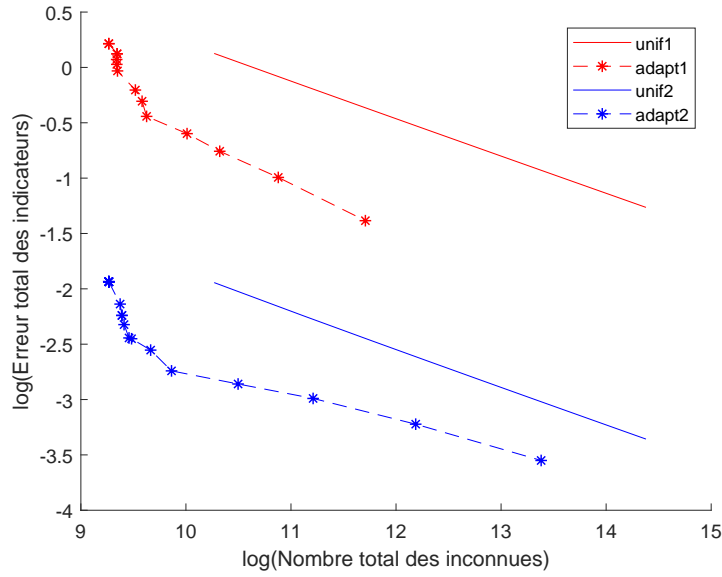


FIGURE 4.22

## 4.2 Deuxième cas test numérique

Dans ce cas test, on considère le problème  $(V_{n,h,2})$  sans la densité volumique des forces extérieures  $\mathbf{f}$ , et sans la source de concentration externe  $g$ .

On prend  $T = 3$  et  $\Omega = ]0, 4[^2$ .

Pour le problème de Darcy, on considère que la viscosité est indépendante de  $C$  et est égale à 1. On suppose que la vitesse du fluide vérifie les conditions aux bords suivants, où  $\varphi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  :

$$\varphi|_{[0,4] \times \{0\}} = -0.4, \quad \varphi|_{\{4\} \times [0,4]} = 0.4, \quad \varphi|_{[0,4] \times \{4\}} = 0.4, \quad \varphi|_{\{0\} \times [0,4]} = -0.4.$$

Pour l'équation de la concentration, on prend  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $r_0 = 10^{-6}$  et la condition initiale suivante :

$$C(x, y, 0) = e^{-50((x-1)^2 + (y-1)^2)},$$

qui est représenté par une boule centrée au point  $(1, 1)$ .

Le terme source du problème de Darcy étant nul et l'équation étant indépendante de la concentration, avec ces conditions limites, le champ de vitesse donné par Darcy est un champ uniforme qui vaut  $(0, 4; 0, 4)$  sur tout le domaine et la pression est nulle. Pour la concentration, comme le coefficient de diffusion et le coefficient de réaction sont très faibles, et comme le terme source est nul, on s'attend à ce que la concentration soit convectée avec la vitesse  $(0, 4; 0, 4)$ , c'est à dire le long de la diagonale, sans diffusion ni amortissement.

Dans ce cas, les indicateurs correspondants au problème sont les suivants : pour chaque

$K_n \in \mathcal{T}_{nh}, \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket,$

$$(\eta_{n,K_n,1}^h)^2 = \| -\mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n \|_{L^2(K_n)^d}^2 + h_{K_n}^2 \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \|_{L^2(K_n)}^2 + \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \Gamma_h^b} h_{e_n} \| \phi_h^{e_n} - \varphi \|_{L^2(e_n)}^2,$$

$$(\eta_{n,K_n,2}^h)^2 = h_{K_n}^2 \left\| -\frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^m - r_0 C_h^m + \alpha \Delta C_h^m \right\|_{L^2(K_n)}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \partial K_n \cap \Gamma_h^i} h_{e_n} \| [\alpha \nabla C_h^m \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \|_{L^2(e_n)}^2,$$

et

$$(\eta_{n,K_n}^\tau)^2 = \tau_n \| C_h^m - C_h^{m-1} \|_{1,K_n}^2.$$

Cet algorithme est testé pour un pas initial de temps  $\tau_1 = \frac{4\sqrt{2}}{N}$  et un maillage initial correspondant pour  $N = 40$ .

Les figures 4.23, 4.24, 4.25 et 4.26 montrent l'évolution du maillage au cours des itérations temporelles.

On remarque à partir des figures 4.23-4.26 et des figures 4.27-4.30 que la boule de la

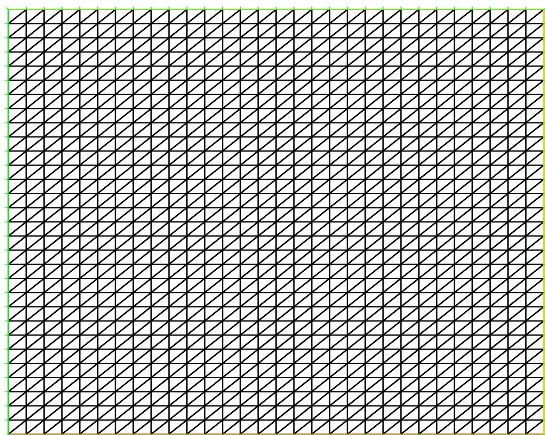


FIGURE 4.23 – Maillage à  $t = 0$

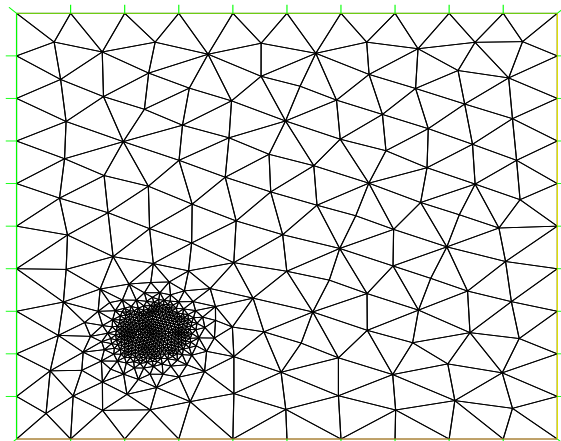
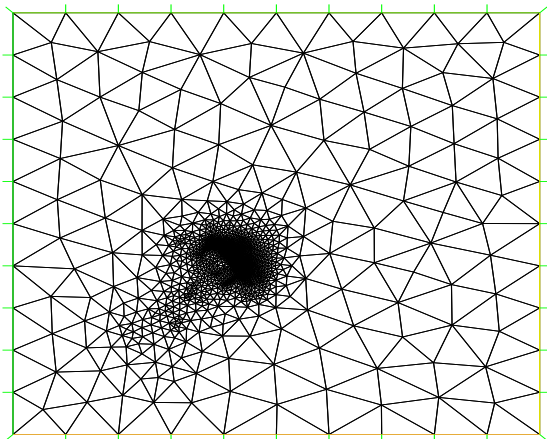
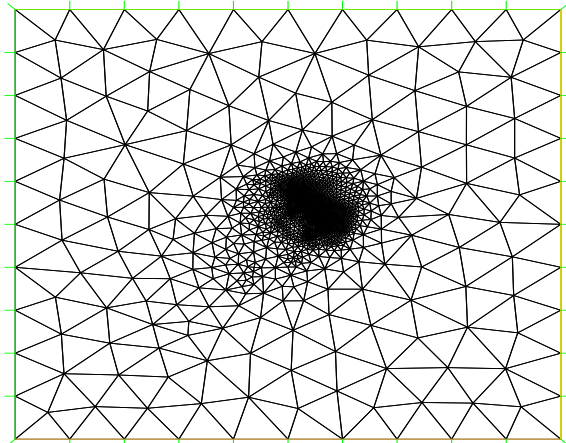
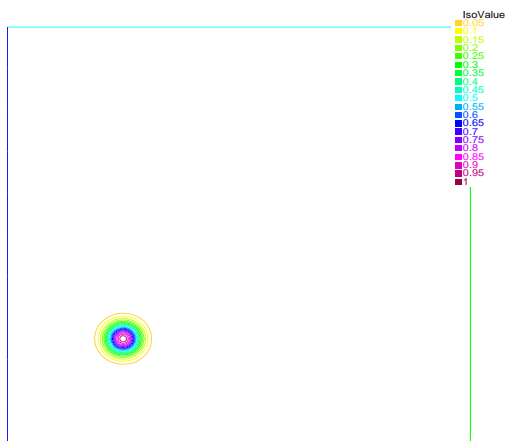
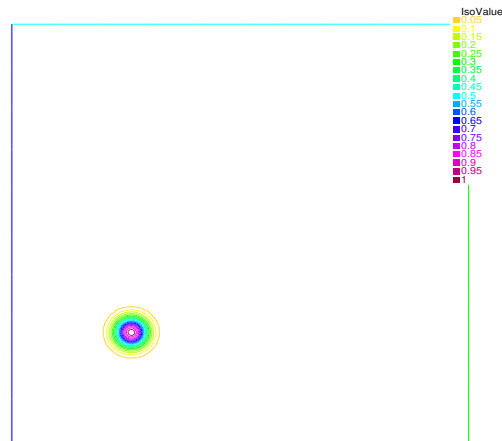
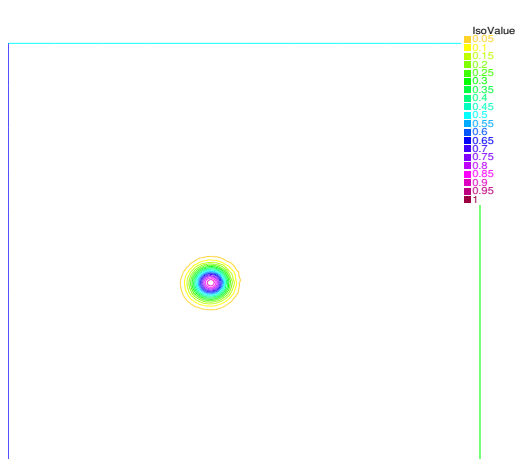
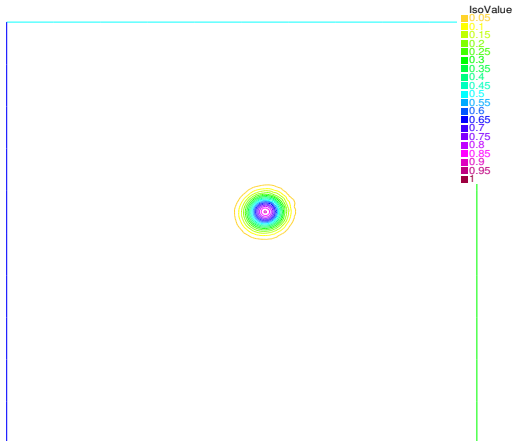


FIGURE 4.24 – Maillage à  $t = 0.128$

concentration se déplace à travers la diagonale pendant les pas de temps, sans être excessivement diffusée ni amortie, ce qui correspond au comportement attendu.

La figure 4.31 montre une comparaison de l'indicateur d'erreur total  $E_{totale}$ , par rapport au nombre d'inconnues, en échelle logarithmique, pour les méthodes de raffinement adaptatives et uniformes.

On peut clairement voir les avantages du raffinement adaptatif du maillage par rapport à l'uniformité puisque l'indicateur d'erreur total est beaucoup plus petite dans le cas de la méthode adaptative.

FIGURE 4.25 – Maillage à  $t = 1.767$ FIGURE 4.26 – Maillage à  $t = 3$ FIGURE 4.27 – Concentration à  $t = 0$ FIGURE 4.28 – Concentration à  $t = 0.128$ FIGURE 4.29 – Concentration à  $t = 1.767$ FIGURE 4.30 – Concentration à  $t = 3$

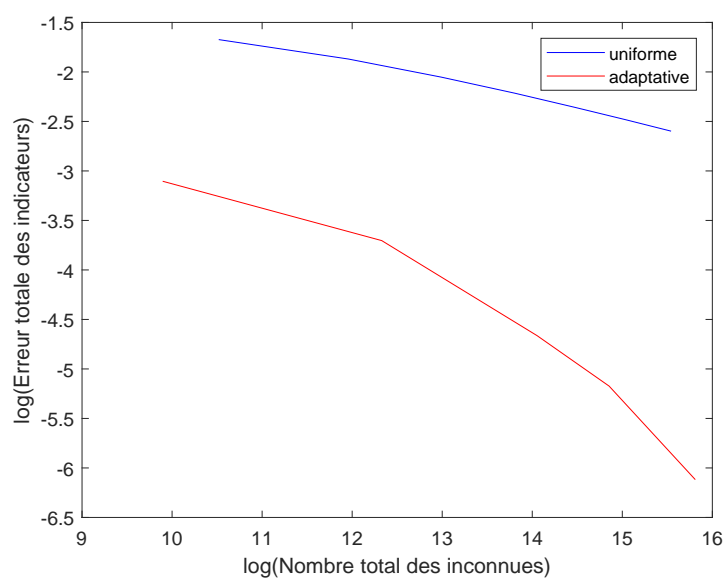


FIGURE 4.31



## Annexe

Dans cet annexe, on prouve tout d'abord que  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  est continu sur une interface du maillage, lorsque  $d = 3$  et  $\mathbf{f}$  est une fonction  $\mathbb{P}_1$  par cellule, continue globalement sur  $\Omega$  et  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à la face. On prouve ensuite que sur la frontière  $\Gamma$ , si  $\mathbf{f}$  est nulle, alors  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  aussi.

On se place dans un cas particulier, où la face est dans un plan horizontal où  $z = 0$ . C'est un cas particulier qui n'enlève rien au cas général, à un changement de repère près. Ainsi, le vecteur unitaire normal est  $(0, 0, 1)$  au plan  $z = 0$ .

On note par  $\mathbf{f}^g$  et  $\mathbf{f}^d$ , les fonctions à gauche et à droite de la face respectivement :

$$\mathbf{f}^g = \begin{pmatrix} a_1^g x + b_1^g y + c_1^g z + d_1^g \\ a_2^g x + b_2^g y + c_2^g z + d_2^g \\ a_3^g x + b_3^g y + c_3^g z + d_3^g \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{f}^d = \begin{pmatrix} a_1^d x + b_1^d y + c_1^d z + d_1^d \\ a_2^d x + b_2^d y + c_2^d z + d_2^d \\ a_3^d x + b_3^d y + c_3^d z + d_3^d \end{pmatrix}.$$

Comme  $\mathbf{f}$  est  $\mathbb{P}_1$  continue, donc sur la face  $z = 0$ , les fonctions  $\mathbf{f}^g$  et  $\mathbf{f}^d$  coïncident, d'où,  $a_i^g = a_i^d$ ,  $b_i^g = b_i^d$  et  $d_i^g = d_i^d$ , pour  $i = 1, \dots, 3$ .

Or,

$$\text{rot } \mathbf{f}^g \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} b_3^g - c_2^g \\ c_1^g - a_3^g \\ a_2^g - b_1^g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2^g - b_1^g,$$

et

$$\text{rot } \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} b_3^d - c_2^d \\ c_1^d - a_3^d \\ a_2^d - b_1^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2^d - b_1^d.$$

Comme  $a_2^g = a_2^d$  et  $b_1^g = b_1^d$ , ainsi  $\text{rot } \mathbf{f}^g \cdot \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n}$ . D'où,  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  est continu.

De plus, sur la frontière  $\Gamma$ , dans la cellule correspondante,  $\mathbf{f}$  s'écrit  $\begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{pmatrix}$

et comme  $\mathbf{f}|_{\Gamma} = 0$ , où  $\Gamma$  est dans le plan  $z = 0$ , donc  $a_i = b_i = d_i = 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, 3$ , d'où  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = a_2 - b_1 = 0$ .





---

## Conclusions et perspectives

Ce travail a porté d'une part, sur les estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori* pour l'équation de Darcy et l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire ; d'autre part, sur la validation numérique des résultats théoriques obtenus à travers des exemples académiques.

On a tout d'abord présenté et étudié le couplage de l'équation de Darcy avec l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire. Par la suite, on a établi deux formulations variationnelles continues associées au problème, puis on les a discrétisées en utilisant la méthode d'Euler semi-implicite pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace : élément fini “Raviart-Thomas” pour le premier schéma et “Mini-élément” pour le second schéma.

Ensuite, on a établi des estimations d'erreur *a priori* pour les deux schémas, qui indiquent l'ordre 1 pour leur précision lorsque les solutions sont suffisamment régulières.

On a ensuite obtenu des estimations d'erreur *a posteriori* dont le but est de contrôler globalement l'erreur par le biais de bornes calculables et de fournir des indicateurs permettant le raffinement adaptatif en espace et en temps.

La validation numérique des résultats théoriques est effectuée sur des cas-tests pour lesquels on connaît une solution exacte ; cela permet de s'assurer que les ordres de convergence de l'erreur mesurée sont conformes à ce qui a été démontré. D'autre part, on a proposé un algorithme adaptatif basé sur les estimations *a posteriori* et présenté des essais numériques qui montrent l'efficacité de la stratégie adaptative.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour cette thèse. Tout d'abord, il serait intéressant d'implémenter des cas-tests avec des applications physiques, biologiques, ... moins académiques. Ensuite, une autre étape importante serait d'étendre les simulations numériques en dimension 3. Pour se rapprocher plus de la réalité, il serait intéressant d'étudier le cas où le coefficient de diffusion  $\alpha$  dans l'équation convection–diffusion–réaction dépend de la concentration  $C$ . Dans ce cas le terme  $\alpha\Delta C$  sera remplacé par  $\text{div}(\alpha(C)\nabla C)$ .



---

## Bibliographie

- [1] H. ABBOUD, V. GIRAULT AND T. SAYAH, A SECOND ORDER ACCURACY IN TIME FOR A FULL DISCRETIZED TIME-DEPENDENT NAVIER-STOCKES EQUATIONS BY A TWO-GRID SCHEME. *Numer. Math*, 114,(2009), pp. 189–231.
- [2] R. A. ADAMS, SOBOLEV SPACES. *Academic Press, New York*, (1975).
- [3] R. AGROUM, C. BERNARDI AND J. SATOURI, SPECTRAL DISCRETIZATION OF THE TIME-DEPENDENT NAVIER-STOKES PROBLEM COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *Applied Mathematics and Computation*, 49, (2015), pp. 59–82.
- [4] R. AGROUM, S.M. AOUADI, C. BERNARDI AND J. SATOURI, SPECTRAL DISCRETIZATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49, 3, (2015), pp. 621–639.
- [5] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, F. B BELGACEM AND C. BERNARDI, AUTOMATIC SIMPLIFICATION OF DARCY’S EQUATIONS WITH PRESSURE DEPENDENT PERMEABILITY. *ESAIM : M2AN*, 47, (2013), pp. 1797–1820.
- [6] D. ARNOLD, F. BREZZI & M. FORTIN, A STABLE FINITE ELEMENT FOR THE STOKES EQUATIONS, *Calcolo* 21, (1984), pp. 337-344.
- [7] S. BADIA, ON STABILIZED FINITE ELEMENTS METHODS BASED ON THE SCOTT-ZHANG PROJECTOR. CIRCUMVENTING THE INF-SUP CONDITION FOR THE STOKES PROBLEM. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg*, 247, (2012), pp. 65–72.
- [8] S. BADIA AND A. HIERO, ON MONOTONICITY-PRESERVING STABILIZED FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS OF TRANSPORT PROBLEMS. *SIAM J. Sci. Comput.*, 36, (2014), pp. 2673–2967.
- [9] M. BEATRICE, M. RIVIÈRE AND N.J. WALKINGTON, CONVERGENCE OF A DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE MISCIBLE DISPLACEMENT EQUATION UNDER LOW REGULARITY. *SIAM J. NUMER. ANAL.*, 49(3), (2011), pp. 1085–1110.
- [10] C. BERNARDI AND V. GIRAULT, A LOCAL REGULARISATION OPERATION FOR TRIANGULAR AND QUADRILATERAL FINITE ELEMENTS. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, (1998), pp. 1893–1916.

- [11] C. BERNARDI, B. MÉTIVET AND B. PERNAUD-THOMAS, COUPLAGE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE LA CHALEUR : LE MODÈLE ET SON APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **29(7)**, (1995), pp. 871–921.
- [12] C. BERNARDI, S. DIB, V. GIRAULT, F. HECHT, F. MURAT, T. SAYAH, FINITE ELEMENT METHOD FOR DARCY’S PROBLEM COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *Numer. Math.*, **139 (2)**, (2018), pp. 315–348.
- [13] C. BERNARDI, T. SAYAH, A POSTERIORI ERROR ANALYSIS OF THE TIME-DEPENDENT STOKES EQUATIONS WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS. *IMA Journal of Numerical Analysis, Volume 35, Issue 1*, (2015), pp. 179–198.
- [14] C. BERNARDI AND T. SAYAH, A POSTERIORI ERROR ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS. *SeMA Journal*, **69 (1)**, (2015), pp. 1–23.
- [15] C. BERNARDI, R. VERFURTH, A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations, *Math. Model. and Numer. Anal.*, **38**, (2004), pp. 437–455.
- [16] C. BERNARDI, D. YAKOUBI AND S. MAAROUF, SPECTRAL DISCRETIZATION OF DARCY’S EQUATIONS COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *IMA Journal of Numerical Analysis*, (2015), pp. 1–24.
- [17] J. BOUSSINESQ, THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR, *Volume 2 of Lecture Notes in Mathematics. Gauthier-Villars, Paris*, (1903).
- [18] M. BULICEK, E. FEIREISL, J. MALEK, A NAVIER-STOKES-FOURIER SYSTEM FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS WITH TEMPERATURE DEPENDENT MATERIAL COEFFICIENTS, *Nonlinear Analysis : Real World Applications 10*, (2009), pp. 992–1015.
- [19] L. CHEN, INF-SUP CONDITIONS, (2014).
- [20] Z. CHEN AND R. EWING, MATHEMATICAL ANALYSIS FOR RESERVOIR MODELS. *SIAM J. Math. Anal.*, **30**, (1999), pp. 431–453.
- [21] P. G. CIARLET, BASIC ERROR ESTIMATES FOR ELLIPTIC PROBLEMS. *Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (Part I)*, **II**, North-Holland, (1991), pp. 17–343.
- [22] F. BREZZI AND M. FORTIN, MIXED AND HYBRID FINITE ELEMENTS. *Springer-Verlag, New York*, (1991).
- [23] H. CHENG, J. DRONIOU AND K. LE, Convergence analysis of a family of ELLAM schemes for a fully coupled model of miscible displacement in porous media. *Numer. Math.*, **141**, (2019), pp. 353–397 .
- [24] P. CLÉMENT, APPROXIMATION BY FINITE ELEMENT FUNCTIONS USING LOCAL REGULARIZATION. *RAIRO Anal. Numér.*, (1975), pp. 77–84.

- 
- [25] I. DANIALA, R. MOLGAN, F. HECHT AND S. LE MASSON, A NEWTON METHOD WITH ADAPTIVE FINITE ELEMENTS FOR SOLVING PHASE-CHANGE PROBLEMS WITH NATURAL CONVECTION. *Journal of computational physics*, 274, (2014), pp. 826–840.
- [26] C.A. DESOER AND M. VIDYASAGAR, FEEDBACK SYSTEMS INPUT-OUTPUT PROPERTIES. *Electrical Sciences. Academic Press, New York*, (1975).
- [27] J. DETEIX, A. JENDOUBI AND D. YAKOUBI, A COUPLED PREDICTION SCHEME FOR SOLVING THE NAVIER-STOKES AND CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(5), (2014), pp. 2415–2439.
- [28] S. DIB, V. GIRAULT, F. HECHT AND T. SAYAH, A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR DARCY’S PROBLEM COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *ESAIM : M2AN* 53, (2019) pp. 2121–2159
- [29] S. DIB, V. GIRAULT, F. HECHT ET T. SAYAH, MÉTHODES D’ÉLÉMENTS FINIS POUR LE PROBLÈME DE DARCY COUPLÉ AVEC L’ÉQUATION DE LA CHALEUR, (2017).
- [30] J. DROUNIOU, R. EYMARD, A. PRIGNET AND K. TALBOT, UNIFIED CONVERGENCE ANALYSIS OF NUMERICAL SCHEMES FOR A MISCIBLE DISPLACEMENT PROBLEM. *Found Comput Math* 19, (2019), pp. 333–374.
- [31] F. EL CHAMI AND T. SAYAH, A posteriori error estimators for the fully discrete time dependent Stokes problem with some different boundary conditions. *Calcolo*, 47, (2010), pp. 169–192.
- [32] A. ERN, J. GUERMOND : THEORY AND PRACTICE OF FINITE ELEMENTS. *Applied Mathematical Sciences, vol. 159*, (2004).
- [33] A.ERN, AND M. VOHRALÍK, A POSTERIORI ERROR ESTIMATION BASED ON POTENTIAL AND FLUX RECONSTRUCTION FOR THE HEAT EQUATION. *SIAM J. Numer. Anal.* 48, 1, pp. 198–223.
- [34] P. FABRIE, T. GALLOUET, MODELING WELLS IN POROUS MEDIA FLOWS. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, World Scientific Publishing, 2000* (10), numero 5, pp. 673–709.
- [35] X. FENG, ON EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS FOR A COUPLED SYSTEM MODELING MISCIBLE DISPLACEMENT IN POROUS MEDIA. *J. Math. Anal. Appl.*, 194, (1995), pp. 883–910.
- [36] M. GAULTIER AND M. LEZAUN, ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES COUPLÉES À DES ÉQUATIONS DE LA CHALEUR : RÉOLUTION PAR UNE MÉTHODE DE POINT FIXE EN DIMENSION INFINIE. *Ann. Sci. Math. Québec*, 13(1), (1989), pp. 1–17.
- [37] V. GIRAULT & P.-A. RAVIART, FINITE ELEMENT METHODS FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS. THEORY AND ALGORITHMS , in *Springer Series in Computational Mathematics* 5, Springer-Verlag, Berlin, (1986).

- [38] V. GIRAULT, J. LI AND B.M. RIVIÈRE, STRONG CONVERGENCE OF THE DISCONTINUOUS GALERKIN SCHEME FOR THE LOW REGULARITY MISCIBLE DISPLACEMENT EQUATIONS. *Numerical methods for partial differential equations*, **33**(2), (2017), pp. 489–513.
- [39] V. GIRAULT, J.-L. LIONS, TWO-GRID FINITE-ELEMENT SCHEMES FOR THE STEADY NAVIER-STOKES PROBLEM IN POLYHEDRA. *Portugaliae Mathematica, Nova Série* 58(1), (2001), pp. 25–57.
- [40] F. HECHT, NEW DEVELOPMENT IN FREEFEM++. *Journal of Numerical Mathematics*, **20**, (2012), pp. 251–266.
- [41] L. JIZHOU, B.M. RIVIÈRE AND N.J. WALKINGTON, CONVERGENCE OF A HIGH ORDER METHOD IN TIME AND SPACE FOR THE MISCIBLE DISPLACEMENT EQUATIONS. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **49**, (2015), pp. 953–976.
- [42] A. LAMBERT, THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION, (2011-2012).
- [43] J. NEČAS, LES MÉTHODES DIRECTES EN THÉORIE DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES. *Masson, Paris*, (1967).
- [44] J. T. ODEN, FINITE ELEMENTS OF NONLINEAR CONTINUUM. *McGraw-Hill, New York*, (1972).
- [45] J. T. ODEN, FINITE ELEMENTS : AN INTRODUCTION. HANDBOOK OF NUMERICAL ANALYSIS, II, ÉDITÉ PAR P. G CIARLET AND J. L. LIONS, *North-Holland*, (1991), pp. 3-15.
- [46] K. R. RAJAGOPAL, ON A HIERARCHY OF APPROXIMATE MODELS FOR FLOWS OF INCOMPRESSIBLE FLUIDS THROUGH POROUS SOLID. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17**, (2007), pp. 215–252.
- [47] J. E. ROBERTS AND J.-M. THOMAS, MIXED AND HYBRID METHODS. *Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (Part I)*, **II**, *North-Holland*, (1991), pp. 523–637.
- [48] L.R. SCOTT AND S. ZHANG, FINITE ELEMENT INTERPOLATION OF NON-SMOOTH FUNCTIONS SATISFYING BOUNDARY CONDITIONS. *Math. Comp.*, **54**, (1990), pp. 483–493.
- [49] M. SCHATZMAN, ANALYSE NUMÉRIQUE. *InterEditions, Paris*, (1991).
- [50] D. VASSILEV AND I. YOTOV, COUPLING STOKES-DARCY FLOW WITH TRANSPORT. *SIAM J. SCI. COMPUT.*, **31** (5), (2009), pp. 3661–3684.
- [51] R. VERFÜRTH, A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR FINITE ELEMENT DISCRETIZATIONS OF THE HEAT EQUATION. *Calcolo* **40**, **3**, (2003), pp. 195–212.

- [52] R. VERFÜRTH, A REVIEW OF A POSTERIORI ERROR ESTIMATION AND ADAPTIVE MESH-REFINEMENT TECHNIQUES. *Wiley New York* (1996) .
- [53] M. VIDYASAGAR, NONLINEAR SYSTEMS ANALYSIS. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition*, (1993).