



HAL
open science

Arithmétique des corps de fonctions abéliens

Tiphaine Beaumont

► **To cite this version:**

Tiphaine Beaumont. Arithmétique des corps de fonctions abéliens. Théorie des nombres [math.NT]. Normandie Université, 2022. Français. NNT : 2022NORMC236 . tel-03880980

HAL Id: tel-03880980

<https://theses.hal.science/tel-03880980v1>

Submitted on 1 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Arithmétique des corps de fonctions abéliens

Présentée et soutenue par
TIPHAINE BEAUMONT

Thèse soutenue le 04/11/2022
devant le jury composé de

M. FABIEN PAZUKI	Professeur des universités, COPENHAGUE - UNIVERSITE DE COPENHAGUE	Rapporteur du jury
MME CÉCILE ARMANA	Maître de conférences, Université de Franche-Comté	Membre du jury
M. XAVIER-FRANÇOIS ROBLLOT	Maître de conférences, Université Lyon 1 Claude Bernard	Membre du jury
M. FLORIC TAVARES RIBEIRO	Maître de conférences, Université de Caen Normandie	Membre du jury
M. CHRISTOPHE DELAUNAY	Professeur des universités, Université de Franche-Comté	Président du jury
M. BRUNO ANGLES	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Directeur de thèse
M. TUAN NGO DAC	Directeur de recherche, Université de Caen Normandie	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par **BRUNO ANGLES** (Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)) et **TUAN NGO DAC** (Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen))



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



Table des matières

Introduction	3
1 Modules et unités	9
1.1 Notations	9
1.2 Idéaux de Fitting	10
1.3 Modules d'Anderson	10
1.3.1 Définitions	10
1.3.2 Modules de Drinfeld	12
1.4 Réseaux	15
1.5 Unités	17
1.6 Unités de Stark	19
2 Formule de classe équivariante : le cas $A = \mathbb{F}_q[\theta]$	27
2.1 Notations	27
2.2 Anneaux de groupes de caractéristique p	28
2.3 Modules projectifs particuliers	31
2.4 Elements unitaires et idéaux de Fitting	34
2.4.1 Eléments unitaires	34
2.4.2 Idéaux de Fitting	36
2.5 Formule de trace équivariante	38
2.5.1 Opérateurs nucléaires	38
2.5.2 Quelques bonnes bases	41
2.5.3 Formule de traces	47
2.6 Volume	51

2.6.1	Définition et premières propriétés	52
2.6.2	Application tangente à l'identité	58
2.6.3	Endomorphismes de $L_{\infty, \ell}^n / \Lambda$	60
2.6.4	Relation volume-déterminant	65
2.7	Formules de classes équivariantes	69
2.7.1	Formule de classes équivariante pour la z -déformation	69
2.7.2	Déterminant	72
2.7.3	Formule de classes équivariante partielle	74
2.7.4	Exemple	78
3	Formule de classe équivariante : le cas A général	85
3.1	Généralités	85
3.1.1	Notations	85
3.1.2	Idéaux de Fitting	87
3.1.3	Régulateurs	88
3.2	Facteurs locaux équivariants	92
3.3	Module admissible	98
3.4	Ecriture des unités et des régulateurs	100
3.5	Formule de classes équivariante avec une variable	104
3.6	Formules de classes équivariante	111
3.7	Modules d'Anderson Δ -admissibles	114
3.8	Modules d'Anderson Δ -admissibles pour \mathcal{O}_L	125
3.8.1	Modules d'Anderson A -fini	125
3.8.2	Modules d'Anderson abéliens	127
3.8.3	Formule de classes équivariante	128

Introduction

Au début du 18^{ème} siècle, Euler s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. Il conjecture sa valeur en 1735 et le démontre en 1743. Il introduit ensuite pour les nombres complexes s de partie réelle strictement supérieure à 1 la fonction qu'on appelle désormais fonction zêta de Riemann pour $n \geq 2$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction a été ensuite généralisée par Dedekind pour tout corps de nombres, c'est-à-dire toute extension finie de \mathbb{Q} .

Soit K/\mathbb{Q} une extension finie. On appelle fonction zêta de Dedekind la fonction suivante, définie pour les nombres complexes s de partie réelle strictement supérieure à 1 :

$$\zeta(s) = \sum_{I \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(I)^s}$$

où $N_{K/\mathbb{Q}}$ est l'application norme. En particulier, lorsque $K = \mathbb{Q}$, on retrouve bien la fonction zêta de Riemann. De plus, on a le théorème suivant, appelé "formule du nombre de classes", reliant cette fonction zêta ainsi que les invariants du corps de nombres en question (voir [23][Chapter 7, Corollary 5.11] pour plus de détails).

Théorème 0.0.1. *Soit K/\mathbb{Q} une extension finie. Alors $\zeta_K(s)$ converge absolument pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$. De plus, elle se prolonge en une fonction méromorphe définie pour tout nombre complexe s avec un seul pôle simple en $s = 1$, de*

résidu

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2} \cdot \text{Reg}_K \cdot h_K}{w_K \cdot \sqrt{|D_K|}}.$$

Ces notions présentes dans les corps de nombres ont ensuite été développées dans les corps de fonctions. On commence par rappeler certaines des analogies entre ces corps globaux.

Dans le cadre des corps de nombres, on travaille avec des \mathbb{Z} -modules. Le corps de fractions de cet anneau \mathbb{Z} est \mathbb{Q} et si l'on complète ce corps pour la norme infinie, on retrouve \mathbb{R} . Le corps \mathbb{C} est une clôture algébrique de \mathbb{R} et reste complet.

Pour le cas des corps de fonctions, on fixe p un nombre premier et q une puissance de p . On prend θ une indéterminée sur le corps fini \mathbb{F}_q . On pose $A = \mathbb{F}_q[\theta]$, l'anneau des polynômes en θ à coefficients dans \mathbb{F}_q . Dans ce cadre, on va considérer des A -modules. Le corps de fractions de cet anneau est $k = \mathbb{F}_q(\theta)$ et le complété par rapport à la norme infinie qu'on note k_∞ est $k_\infty = \mathbb{F}_q((\theta^{-1}))$. Les clôtures algébriques de ce corps ne sont pas complètes, on pose alors \mathbb{C}_∞ , le complété d'une clôture algébrique de k_∞ .

On donne un tableau récapitulatif de ces analogies.

Analogies corps de nombres/corps de fonctions	
\mathbb{Z}	$A = \mathbb{F}_q[\theta]$
\mathbb{Q}	$k = \mathbb{F}_q(\theta)$
\mathbb{R}	$k_\infty = \mathbb{F}_q((\theta^{-1}))$
\mathbb{C}	$\mathbb{C}_\infty = \hat{k}_\infty$
\mathbb{N}^*	$A^+ = \{a \in A, \text{unitaire}\}$

En 1935, dans [10], Carlitz a développé un analogue à la fonction zêta de Riemann en caractéristique positive : pour $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta_A(s) = \sum_{a \in A^+} \frac{1}{a^s}$$

qui converge dans k_∞ .

Dans cet article, Carlitz a également introduit le module de Carlitz C et développé l'application exponentielle notée \exp_C . De nouveau, on retrouve de nombreuses analogies entre corps de nombres et corps de fonctions : l'exponentielle usuelle et l'exponentielle de Carlitz, $2\pi i$ et $\tilde{\pi}$ qui engendrent le noyau de ces applications comme \mathbb{Z} -module et A -module (voir [18][Chapter 3]).

On note τ l'élevation à la puissance q et on pose $\mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ l'anneau des polynômes non commutatifs en τ à coefficients dans \mathbb{C}_∞ qui vérifie $a\tau^i b\tau^j = ab^q \tau^{i+j}$ pour a et b des éléments de \mathbb{C}_∞ et $i, j \in \mathbb{N}$. On rappelle la définition du module de Carlitz comme étant le morphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $C : A \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tel que $C_\theta = \theta + \tau$.

Ce module a été généralisé par Drinfeld en 1974 dans [13]. Soit L une extension finie de $k = \mathbb{F}_q(\theta)$. On note \mathcal{O}_L la fermeture intégrale de A dans L . Un module de Drinfeld défini sur \mathcal{O}_L est un morphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $\phi : A \rightarrow \mathcal{O}_L\{\tau\}$ tel que $\phi_\theta = \sum_{i=0}^r a_i \tau^i$ où $a_0 = \theta$ et $a_i \in \mathcal{O}_L$ pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On renvoie le lecteur à [18][Chapter 4] pour plus de détails.

Ce module de Drinfeld permet de munir une A -algèbre B d'une structure de A -module induite par ϕ . On la note $\phi(B)$. En 2010, Taelman a introduit les notions de modules de classes et de modules des unités associés aux modules de Drinfeld. Il a énoncé une conjecture lorsque $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ (voir [25][Conjecture 1]). Le cas particulier où $L = k = \mathbb{F}_q(\theta)$ et où le module de Drinfeld considéré est le module de Carlitz était déjà connu (voir [10]) et correspond à l'égalité

$$\zeta_A(1) = \log_C(1).$$

En 2012, Taelman a démontré cette conjecture en reliant la fonction L associée à un module de Drinfeld aux précédents modules introduits. C'est ce qu'on appelle la "formule du nombre de classes" en caractéristique positive. Soient L une extension finie de $k = \mathbb{F}_q(\theta)$ et ϕ un module de Drinfeld défini sur \mathcal{O}_L . On définit alors la fonction L de la manière suivante :

$$L(\phi(\mathcal{O}_L)) = \prod_{P \text{ idéal premier de } A} \frac{\text{Fitt}_A(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L)}{\text{Fitt}_A(\phi(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L))}.$$

Théorème 0.0.2. [26][Theorem 1] On a

$$L(\phi(\mathcal{O}_L)) = [\mathcal{O}_L : U(\phi(\mathcal{O}_L))] \text{Fitt}_A(H(\phi(\mathcal{O}_L)))$$

où $U(\phi(\mathcal{O}_L))$ et $H(\phi(\mathcal{O}_L))$ correspondent respectivement au module des unités et au module de classes.

L'élément $\text{Fitt}_A(H(\phi(\mathcal{O}_L)))$ correspond à l'idéal de Fitting du module de classes. C'est l'analogue en caractéristique positive du cardinal h_L du groupe de classes d'idéaux d'un corps de nombres L .

La formule de classes a ensuite été prouvée par Fang [15] pour les modules d'Anderson qui sont une généralisation des modules de Drinfeld et par Demeslay dans [12] pour les modules d'Anderson avec variables. Les méthodes utilisées sont différentes, celles de Demeslay reprenant les idées de Taelman. Cette formule de classes a également été étendue par Mornev pour certains modules de Drinfeld dans le cadre où A est général (voir [22]).

L'étude de cette formule de classes dans le cadre équivariant a d'abord été faite lorsque Δ est d'ordre premier à p , en utilisant la décomposition en caractères, comme par Anglès et Taelman dans [6] et Anglès et Tavares Ribeiro dans [7] pour les modules de Drinfeld. Cela a ensuite été généralisé par Fang dans [16] aux modules d'Anderson.

En 2020, dans [17], Ferrara, Green, Higgins et Popescu ont traité le cas où G est un groupe abélien fini sans restriction sur son cardinal en utilisant la même ligne de preuve que celle de Taelman et en généralisant tous les objets introduits dans le contexte équivariant.

En 2021, dans [5], Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro ont démontré une formule de classes lorsque A est général et plus nécessairement principal pour certains modules d'Anderson, notamment pour les modules de Drinfeld. Leur approche est différente des précédentes et utilise les unités de Stark, notion développée par eux mêmes dans [3, 7, 4]

L'objectif de cette thèse est l'obtention de formules de classes équivariantes dans différents contextes : d'une part lorsque $A = \mathbb{F}_q[\theta]$, G est un groupe abélien fini et E est un module d'Anderson et d'autre part lorsque A est général, $d_\infty = 1$, Δ est un groupe d'ordre premier à p et E est un module d'Anderson admissible (voir Définition 3.3.1).

Pour ce faire, dans un premier chapitre, nous rappelons d'abord les définitions d'idéal de Fitting, de réseaux puis celles de modules d'Anderson ainsi que les objets associés en regardant plus précisément le cas du module de Carlitz. Ensuite, nous rappelons les objets définis par Taelman tels que le module de classes et le module des unités associés à un réseau et à un module d'Anderson dans [25] puis les notions introduites par Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro dans [4] telles que la z -déformation associée à un module d'Anderson et le module des unités de Stark associé à un module d'Anderson et à un réseau.

Dans le Chapitre 2, on démontre une formule de classes équivariante pour la z -déformation (voir Théorème 2.7.3) lorsque $A = \mathbb{F}_q[\theta]$, G est un groupe abélien quelconque et E est un module d'Anderson. Cette démonstration reprend les idées développées par Ferrara, Green, Higgins et Popescu dans [17] pour les modules de Drinfeld et pour $\ell = \mathbb{F}_q$. On montre que les arguments utilisés fonctionnent également dans le cas des modules d'Anderson où $\ell = \mathbb{F}_q$ ou $\ell = \mathbb{F}_q(z)$. Pour cela, on rappelle les notions d'anneaux de groupes de caractéristique p , la formule de trace équivariante, les idéaux de Fitting équivariants, les volumes et les régulateurs équivariants. Grâce à cette formule de classes pour la z -déformation, nous allons donner une formule de classes partielle (voir Théorème 2.7.11) et nous étudierons certains cas où nous obtenons cette formule de classes (voir Proposition 2.7.13 et Corollaire 2.7.16). Dans cette partie, on utilise le fait qu'on travaille sur un anneau principal. Le prochain chapitre n'utilise pas les mêmes techniques, la généralisation n'étant pas possible dans le cadre d'une étude sur un anneau plus général.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous travaillons dans le cadre où A est général, $d_\infty = 1$, Δ est d'ordre premier à p . On démontre une formule de classes équivariante pour la z -déformation (voir Théorème 3.5.4) et une formule de classes équivariante (voir Théorème 3.8.5) pour certains modules d'Anderson, notamment pour les modules de Drinfeld. Cette démonstration reprend les idées développées par Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro dans [5].

CHAPITRE 1

Modules et unités

1.1 Notations

Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On prend k un corps global de fonctions sur \mathbb{F}_q . On fixe une place ∞ de k de degré d_∞ . On pose A l'anneau des éléments de k qui sont réguliers en dehors de ∞ . On note k_∞ la complétion ∞ -adique de k . Elle est munie de la valuation $v_\infty : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. On note \mathbb{C}_∞ le complété d'une clôture algébrique de k_∞ et on garde la notation v_∞ pour l'unique valuation définie sur \mathbb{C}_∞ qui étend v_∞ . On définit le morphisme continu de \mathbb{F}_q -algèbres

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C}_\infty &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ x &\mapsto x^q. \end{aligned}$$

Soit L une extension finie de k . On note \mathcal{O}_L la fermeture intégrale de A dans L . On pose $L_\infty = L \otimes_k k_\infty$. Soit π une uniformisante de k_∞ . On a alors $k_\infty = \mathbb{F}_q((\pi))$.

Soit z une indéterminée sur k_∞ . On note v_∞ pour la valuation ∞ -adique de Gauss sur $k_\infty(z)$ c'est-à-dire la valuation telle que pour $P \in k_\infty[z]$ où $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ avec $a_i \in k_\infty$ on ait $v_\infty(P) = \min\{v_\infty(a_i)\}$. On note $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ la complétion de $k_\infty[z]$ pour v_∞ c'est-à-dire $\mathbb{T}_z(k_\infty) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \mid a_n \in k_\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} v_\infty(a_n) = +\infty \right\}$. C'est l'algèbre de Tate en une variable z à coefficients dans k_∞ . On peut montrer que $\mathbb{T}_z(k_\infty) = \mathbb{F}_q[[z]]((\pi))$. On pose $\mathbb{T}_z(L_\infty) = L_\infty \otimes_{k_\infty} \mathbb{T}_z(k_\infty)$. On note \tilde{k}_∞ la complétion de $k_\infty(z)$ pour v_∞ et

$\tilde{A} = A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q(z)$. Le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ est dense dans \tilde{k}_∞ . On pose $\tilde{L}_\infty = L \otimes_k \tilde{k}_\infty$. On note $\tilde{\mathcal{O}}_L$ le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par \mathcal{O}_L dans \tilde{L}_∞ . $\tilde{\mathcal{O}}_L$ est la fermeture intégrale de \tilde{A} dans \tilde{L}_∞ .

1.2 Idéaux de Fitting

Dans cette section, on rappelle d'abord la définition d'un idéal de Fitting sur R un anneau commutatif ainsi que quelques propriétés. Nous verrons par la suite dans §2.4.2 le cas particulier où $R = \mathbb{F}_q[\theta][G]$ et G est un groupe abélien quelconque et dans §3.1.2 celui où $R = A[\Delta]$ et Δ est un groupe de cardinal premier à p .

Soit R un anneau commutatif.

Définition 1.2.1. Soit M un R -module de type fini où $R^a \rightarrow R^b \rightarrow M \rightarrow 0$ est une présentation. On pose X la matrice de $R^a \rightarrow R^b$. Alors $\text{Fitt}_R(M)$ est l'idéal de R engendré par les mineurs de taille $b \times b$ si $b \leq a$ et $\text{Fitt}_R(M) = 0$ si $b \geq a$.

L'idéal $\text{Fitt}_R(M)$ est indépendant du choix de la présentation de M . Nous donnons une liste de certaines propriétés de ces idéaux, présentes dans [21, Appendix :Fitting ideals]

- Si $M \cong M_1 \times M_2$ est le produit direct de deux R -modules de présentation finie alors $\text{Fitt}_R(M) = \text{Fitt}_R(M_1) \text{Fitt}_R(M_2)$.
- Si $\text{Ann}_R(M)$ est l'idéal annulateur de M alors $\text{Fitt}_R(M) \subset \text{Ann}_R(M)$. De plus, si M est engendré par b éléments, alors $\text{Ann}_R(M)^b \subset \text{Fitt}_R(M)$.
- Si $I \subset R$ est un idéal alors $\text{Fitt}_{R/I}(M/IM)$ est l'image de $\text{Fitt}_R(M)$ dans R/I .
- Si $M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ est exacte, alors $\text{Fitt}_R(M_1) \text{Fitt}_R(M_2) \subset \text{Fitt}_R(M)$.

On a également que pour $R \rightarrow R'$ un homomorphisme d'anneaux alors $\text{Fitt}_{R'}(R' \otimes_R M) = R' \otimes_R \text{Fitt}_R(M)$ (voir [14, Corollary 20.5]).

Si en plus R est un anneau de Dedekind et M est un R -module de torsion et de type fini, alors il existe I_1, \dots, I_n des idéaux de R tels que $M \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_n$.

Dans ce cas, on a $\text{Fitt}_R(M) = \prod_{i=1}^n I_i$. De plus, si $M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ est exacte, alors $\text{Fitt}_R(M_1) \text{Fitt}_R(M_2) = \text{Fitt}_R(M)$.

1.3 Modules d'Anderson

1.3.1 Définitions

Soit R une \mathbb{F}_q -algèbre. On note $\mathcal{M}_n(R)$ les matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans R . On pose $\mathcal{M}_n(R)\{\tau\}$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathcal{M}_n(R)$ tel que

pour $B, C \in \mathcal{M}_n(R)$ et $i, j \in \mathbb{N}$, on ait

$$B\tau^i C\tau^j = BC^{(i)}\tau^{i+j}$$

où $C^{(i)} = (C_{r,s}^{q^i})$.

On regarde maintenant la définition de t -modules, introduite par Anderson en 1986 dans [1]. Pour cela, on se donne R une extension de \mathbb{F}_q , munie de l'homomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $\iota : A \rightarrow R$.

Définition 1.3.1. Un A -module d'Anderson E de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ sur R est un morphisme de \mathbb{F}_q -algèbres

$$\begin{aligned} E : A &\rightarrow \mathcal{M}_d(R)\{\tau\} \\ a &\mapsto \sum_{i=0}^{r_a} E_{a,i}\tau^i \end{aligned}$$

qui vérifie $(E_{a,0} - \iota(a)I_d)^d = 0_d$ et il existe $a \in A$ tel que $E_a \neq E_{a,0}$.

On dit que ce module est défini sur \mathcal{O}_K où $k \subset K$ si pour tout $a \in A$ et $i \in \llbracket 0; r_a \rrbracket$, $E_{a,i}$ est à coefficients dans \mathcal{O}_K .

Les modules de Drinfeld sont les t -modules de dimension 1.

On se fixe E un module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K où K est une extension finie de k . Soit B une \mathcal{O}_K -algèbre. On note $E(B)$ le A -module B^d muni de la structure of A -module induite par E et $\text{Lie}_E(B)$ le A -module B^d dont la structure de A -module est donnée par

$$\begin{aligned} \delta_E : A &\rightarrow \mathcal{M}_d(\mathcal{O}_K) \\ a &\mapsto E_{a,0} \end{aligned}$$

On peut étendre ce morphisme

$$\begin{aligned} \delta_E : k_\infty &\rightarrow \mathcal{M}_d(K_\infty) \\ \sum_{i \geq m} b_i a^{-i} &\mapsto \sum_{i \geq m} b_i E_{a,0}^{-i} \end{aligned}$$

et munir ainsi $\text{Lie}_E(L_\infty)$ d'une structure de k_∞ -espace vectoriel (voir [12, Section 2.1.2]).

De plus, Anderson a montré dans [1] qu'à chaque module d'Anderson, on peut lui associer une fonction exponentielle.

Théorème 1.3.2. [18, Theorem 5.9.6] Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K de dimension d . Il existe une unique série entière à coefficients dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}_\infty)$ qu'on note \exp_E vérifiant :

$$- e_0 = I_d,$$

— pour tout $a \in A$, $\exp_E \delta_E(a) = E_a \exp_E$.

De plus, Anderson a montré qu'elle converge sur $\text{Lie}_E(K_\infty)$. De la même manière, il a montré l'existence d'une unique série entière à coefficients dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}_\infty)$ notée \log_E vérifiant $l_0 = I_d$ et pour tout $a \in A$, $\delta_E(a) \log_E = \log_E E_a$. De plus, on a la relation $\exp_E \log_E = \log_E \exp_E = I_d$. Ces séries sont appelées l'exponentielle et le logarithme associés au module d'Anderson E . Contrairement à l'exponentielle, le logarithme ne converge que dans un voisinage de 0 .

On regarde comme exemple la n -ième puissance tensorielle du module de Carlitz, notée $C^{\otimes n}$, introduite par Anderson dans [2]. Pour cet exemple, $A = \mathbb{F}_q[\theta]$.

Définition 1.3.3. La n -ième puissance tensorielle du module de Carlitz est l'homomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $C^{\otimes n} : A \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_\infty)\{\tau\}$ tel que $C_\theta^{\otimes n} = \delta_\theta + N\tau$ où

$$\delta_\theta = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \theta \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 1.3.2, il existe une unique série exponentielle associée à ce module et elle est partout convergente. Il existe une unique série logarithme associée à ce module. De plus, elle converge pour tout élément $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_\infty$ tel que $v_\infty(x_i) > n - i - \frac{nq}{q-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (voir [2][Proposition/Definition 2.4.3]). On renvoie à [12][Section 1.1.2] pour plus de détails sur ces séries.

Nous allons maintenant voir plus en détails les modules d'Anderson de dimension un : les modules de Drinfeld.

1.3.2 Modules de Drinfeld

Définition 1.3.4. Un A -module de Drinfeld ϕ sur R est un morphisme de \mathbb{F}_q -algèbres

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow R\{\tau\} \\ a &\mapsto \sum_{i=0}^{r_a} a_i \tau^i \end{aligned}$$

qui vérifie $a_0 = a$ et il existe $a \in A$ tel que $\phi_a \neq a$.

Soit ϕ un module de Drinfeld défini sur \mathcal{O}_K où K est une extension finie de k . Soit B une \mathcal{O}_K -algèbre. On a alors que $\text{Lie}_\phi(B)$ correspond au A -module B dont la structure de A -module est donnée par la multiplication standard.

Lemme 1.3.5. *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur \mathcal{O}_K . Soit $a \in A$. On note*

$$\phi_a = \sum_{i=0}^r a_i \tau^i \text{ où } r \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathcal{O}_K. \text{ Alors l'exponentielle associée à } \phi \text{ notée } \exp_\phi =$$

$$\sum_{i \geq 0} e_i \tau^i \text{ où } e_i \in K_\infty \text{ vérifie}$$

$$- e_0 = 1,$$

$$- \text{pour } i \in \mathbb{N}^*, e_i = \frac{\sum_{k=1}^{\max(r,i)} a_k e_{i-k}^{q^k}}{a^{q^i} - a},$$

$$- \exp_\phi \text{ converge sur } \mathbb{C}_\infty.$$

Démonstration. L'exponentielle associée à ϕ vérifie $\exp_\phi(a) = \phi_a(\exp_\phi)$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} e_i a^{q^i} \tau^i &= \sum_{k=0}^r a_k \tau^k \left(\sum_{j \geq 0} e_j \tau^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^r a_k \left(\sum_{j \geq 0} e_j^{q^k} \tau^{k+j} \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^r a_k e_j^{q^k} \tau^{k+j} \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\max(r,i)} a_k e_{i-k}^{q^k} \tau^i \right). \end{aligned}$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On regarde les coefficients devant τ^i . On a $e_i a^{q^i} = \sum_{k=0}^{\max(r,i)} a_k e_{i-k}^{q^k}$. De plus,

$a_0 = a$. On obtient bien le résultat souhaité.

Pour montrer la convergence de \exp_ϕ , on reprend les éléments de la preuve de [18, Theorem 4.6.9]. On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}_\infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} e_i x^{q^i} = 0$, c'est-à-dire,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (v_\infty(e_i) + q^i v_\infty(x)) = \infty \text{ et donc } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v_\infty(e_i)}{q^i} = \infty.$$

Soit $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ tel que $\phi_a = \sum_{i=0}^r a_i \tau^i$. D'après ce qu'on vient de montrer, pour

$m \geq r$, on a alors $(a^{q^m} - a)e_m = \sum_{k=1}^r a_k e_{m-k}^{q^k}$. Cela implique que

$$v_\infty((a^{q^m} - a)e_m) = v_\infty\left(\sum_{k=1}^r a_k e_{m-k}^{q^k}\right) \geq \min(v_\infty(a_k) + q^k v_\infty(e_{m-k})).$$

Comme $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, $v_\infty((a^{q^m} - a)e_m) = q^m v_\infty(a) + v_\infty(e_m)$. On obtient

$$\frac{v_\infty(e_m)}{q^m} \geq \min\left(\frac{v_\infty(a_k)}{q^m} + q^{k-m} v_\infty(e_{m-k})\right) - v_\infty(a).$$

On prend b tel que $v_\infty(a) < b < 0$. Pour m suffisamment grand, on a $\min\left(\frac{v_\infty(a_k)}{q^m}\right) > -b + v_\infty(a)$. Cela nous donne alors

$$\frac{v_\infty(e_m)}{q^m} \geq \min\left(\frac{v_\infty(e_{m-k})}{q^{m-k}}\right) - b.$$

En utilisant la formule de manière récursive et comme $\lim_{m \rightarrow \infty} (-mb) = \infty$, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{v_\infty(e_m)}{q^m} = \infty, \text{ ce qui entraîne la convergence de l'exponentielle.} \quad \square$$

On va maintenant s'intéresser plus particulièrement à un module de Drinfeld, le module de Carlitz. Pour ce qui suit, $A = \mathbb{F}_q[\theta]$.

Définition 1.3.6. Le module de Carlitz est l'homomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $C : A \rightarrow \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ tel que $C_\theta = \theta + \tau$.

D'après le lemme 1.3.5, on peut montrer que $\exp_C = \sum_{i \geq 0} \frac{\tau^i}{D_i}$ où $D_0 = 1$ et $D_i = (\theta^{q^i} - \theta)D_{i-1}^q$ pour $i > 0$. On pose $[i] = \theta^{q^i} - \theta$. On a alors $D_i = [i][i-1]^q \dots [1]^{q^{i-1}}$.

De la même manière que dans le lemme 1.3.5, en utilisant la relation $\theta \log_C = \log_C C_\theta$, on peut montrer que $\log_C = \sum_{i \geq 0} \frac{\tau^i}{L_i}$ où $L_0 = 1$ et $L_i = -(\theta^{q^i} - \theta)L_{i-1}$. Cela nous donne alors que $L_i = (-1)^i [i][i-1] \dots [1]$.

Dans la prochaine proposition, on retrouve bien le résultat souhaité du rayon de convergence du logarithme associé à $C^{\otimes n}$ lorsque n vaut 1.

Proposition 1.3.7. [18, Proposition 3.4.1] *Le rayon de convergence du logarithme associé au module de Carlitz est $\frac{-q}{q-1}$.*

Démonstration. On a

$$v(L_i) = \sum_{l=1}^i v([l]) = \sum_{l=1}^i -q^l = -q \frac{1 - q^i}{1 - q}.$$

Donc $\log_C(x)$ converge si et seulement si $v\left(\frac{x^{q^i}}{L_i}\right)$ tend vers ∞ pour i assez grand.

Comme $v\left(\frac{x^{q^i}}{L_i}\right) = q^i v(x) - v(L_i) > 0$, $\log_C(x)$ converge si et seulement si $v(x) > \frac{v(L_i)}{q^i} = \frac{-q}{1 - q} \frac{1 - q^i}{q^i} = \frac{q}{q - 1} \frac{1 - q^i}{q^i}$ pour tout i . Comme $\frac{1 - q^i}{q^i}$ tend vers -1 quand i tend vers ∞ , $\log_C(x)$ converge si et seulement si $v(x) > \frac{-q}{q - 1}$. \square

1.4 Réseaux

Soit \mathbb{F} une extension finie de \mathbb{F}_q . On pose $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}(z)((\pi))$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}((\pi))$ si $\ell = \mathbb{F}_q$. De la même manière, on définit $\ell(\mathbb{F})$ par $\mathbb{F}(z)$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et juste \mathbb{F} si $\ell = \mathbb{F}_q$ et $A_\ell = \ell \otimes_{\mathbb{F}_q} A$.

Définition 1.4.1. Soit \mathbb{F} une extension finie de \mathbb{F}_q . Soit V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie. Un $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseau de V est un $A_\ell(\mathbb{F})$ -sous-module de V qui est discret dans V et qui contient une base de V comme $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel.

Lemme 1.4.2. Soient V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie et M un sous- $A_\ell(\mathbb{F})$ -module de V . Alors M est discret dans V si et seulement si il existe $e_1, \dots, e_m \in M$ sont linéairement indépendants sur $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ et tels que le quotient $M / \bigoplus_{i=1}^m A_\ell(\mathbb{F})e_i$ est un $\ell(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. Soit $\theta \in A_\ell(\mathbb{F}) \setminus \ell(\mathbb{F})$.

Si on écrit $A_\ell(\mathbb{F}) = \bigoplus_{j=1}^s \ell(\mathbb{F})[\theta]f_j$, alors

$$k_{\infty, \ell}(\mathbb{F}) = \bigoplus_{j=1}^s \ell(\mathbb{F})\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)f_j.$$

On suppose que M est discret dans V . Soit W le $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel engendré par M . Il existe alors $e_1, \dots, e_m \in M$ tels que

$$W = \bigoplus_{i=1}^m k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})e_i = \bigoplus_{i,j} \ell(\mathbb{F})\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)e_i f_j.$$

On pose

$$N = \bigoplus_{i=1}^m A_{\ell}(\mathbb{F})e_i = \bigoplus_{i,j} \mathbb{F}_q[\theta]e_i f_j.$$

Comme M est discret dans W (car M discret dans V et W sous-espace vectoriel de V), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M \cap \bigoplus_{i,j} \frac{1}{\theta^n} \ell(\mathbb{F})\left[\left[\frac{1}{\theta}\right]\right]e_i f_j = \{0\}.$$

On a alors l'injection suivante de $\ell(\mathbb{F})$ -espaces vectoriels

$$\frac{M}{N} \longrightarrow \frac{W}{N} \oplus \left(\bigoplus_{i,j} \frac{1}{\theta^n} \ell(\mathbb{F})\left[\left[\frac{1}{\theta}\right]\right]e_i f_j \right).$$

De plus, $\ell(\mathbb{F})\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) = \ell(\mathbb{F})[\theta] \oplus \frac{1}{\theta} \ell(\mathbb{F})\left[\left[\frac{1}{\theta}\right]\right]$. Donc $\frac{W}{N} \oplus \left(\bigoplus_{i,j} \frac{1}{\theta^n} \ell(\mathbb{F})\left[\left[\frac{1}{\theta}\right]\right]e_i f_j \right)$ est un $\ell(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie. Comme on a l'injection ci-dessus, cela implique que c'est également le cas pour $\frac{M}{N}$.

On suppose maintenant qu'il existe $e_1, \dots, e_m \in M$ sont linéairement indépendants sur $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ et tels que le quotient $M / \bigoplus_{i=1}^m A_{\ell}(\mathbb{F})e_i$ est un $\ell(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie. Il existe alors $a \in \ell(\mathbb{F})[\theta]$ non nul tel que $aM \subset \bigoplus_{i=1}^m A_{\ell}(\mathbb{F})e_i$. On pose $d = \deg_{\theta}(a)$. On a alors

$$M \cap \bigoplus_{i,j} \frac{1}{\theta^{n+1}} \ell(\mathbb{F})\left[\left[\frac{1}{\theta}\right]\right]e_i f_j = \{0\}.$$

D'où M est discret dans V . □

Proposition 1.4.3. *Soient V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie et M un sous- $A_{\ell}(\mathbb{F})$ -module de V . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- M est un $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseau de V .
- M est discret dans V , de type fini comme $A_\ell(\mathbb{F})$ -module et $\dim_{\text{Frac}(A_\ell(\mathbb{F}))} M \otimes_{A_\ell(\mathbb{F})} \text{Frac}(A_\ell(\mathbb{F})) = \dim_{k_{\infty,\ell}(\mathbb{F})} V$.
- Il existe une base $e_1 \dots e_n$ de V sur $k_{\infty,\ell}(\mathbb{F})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_i \in M$ et $\frac{M}{\bigoplus_{i=1}^n A_\ell(\mathbb{F})e_i}$ est un $\ell(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. Les deux premières assertions sont équivalentes de par la définition de réseau. On obtient celle des deux dernières par le lemme précédent. \square

En particulier, lorsque $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ et $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, la définition 1.4.1 est équivalente à la suivante. Soit V un $k_{\infty,\ell}$ -espace vectoriel de dimension n .

Définition 1.4.4. Un A_ℓ -sous-module de V est un A_ℓ -réseau de V s'il contient une base de V comme $k_{\infty,\ell}$ -espace vectoriel et s'il est discret.

Soient L/k une extension finie et E un module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K où $k \subset K \subset L$.

D'après [12, Proposition 2.1.6], $\text{Lie}_E(\mathcal{O}_L)$ est un A -réseau de $\text{Lie}_E(L_\infty)$. On va voir dans la partie suivante un autre exemple de réseau de $\text{Lie}_E(L_\infty)$.

1.5 Unités

En 2010, dans [25], Taelman a introduit le module de classes et le module des unités associés à l'anneau des entiers pour un module de Drinfeld. Ces définitions ont ensuite été généralisées par Demeslay dans [11] et par Fang dans [15] pour les modules d'Anderson. Soient L/k une extension finie et E un module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K où $k \subset K \subset L$. Soit M un sous- A -module de L_∞^d tel que $\text{Lie}_E(M)$ (M muni de la structure de A -module induit par δ_E) est un A -réseau de $\text{Lie}_E(L_\infty)$ et M est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. On note $E(M)$ le A -module M muni de la structure de A -module donnée par ϕ_E .

Définition 1.5.1. On pose

$$H(E(M)) = \frac{E(L_\infty)}{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}$$

le module de classes associé à M et

$$U(E(M)) = \{x \in \text{Lie}_E(L_\infty), \exp_E(x) \in E(M)\}$$

le module des unités associé à M .

Soit z une indéterminée sur k_∞ . On rappelle que $\tau : L_\infty \rightarrow L_\infty$ associe x à x^q . On note encore $\tau : \mathbb{T}_z(L_\infty) \rightarrow \mathbb{T}_z(L_\infty)$ l'unique extension de ce morphisme à un morphisme continu de $\mathbb{F}_q[z]$ -algèbres. On rappelle également que $\tilde{\mathcal{O}}_L$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par \mathcal{O}_L dans \tilde{L}_∞ . La z -déformation d'un module d'Anderson a d'abord été introduite dans [7] pour les modules de Drinfeld puis dans [4] pour les modules d'Anderson.

Si E s'écrit $\phi_E(a) = \sum_{i=0}^r E_{a,i} \tau^i$ pour tout $a \in A$ alors on appelle \tilde{E} la z -déformation de E l'homomorphisme de $\mathbb{F}_q(z)$ -algèbres :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_E &: \tilde{A} \rightarrow \mathcal{M}_n(\tilde{\mathcal{O}}_K)\{\tau\} \\ a &\mapsto \sum_{i=0}^r z^i E_{a,i} \tau^i . \end{aligned}$$

Pour R un $\mathcal{O}_K[z]$ -module, on a les deux structures de $A[z]$ -module sur R^d :

- $\text{Lie}_{\tilde{E}}(R)$ où pour tout $a \in A$, a agit sur R^d via $\delta_E(a)$ et
- $\tilde{E}(R)$ où a agit via $\phi_{\tilde{E}}(a)$.

Ces structures de $A[z]$ -modules peuvent être étendues à des structures de \tilde{A} -modules par linéarité si R est une $\mathbb{F}_q(z)$ -algèbres.

On peut montrer (voir [5, Lemma 2.1]) que si $\exp_E = \sum_{i \geq 0} e_i \tau^i$ alors $\exp_{\tilde{E}} = \sum_{i \geq 0} z^i e_i \tau^i$ est l'unique élément de $I_d + \mathcal{M}_d(K[z])\{\{\tau\}\}\tau$ vérifiant

$$\forall a \in A, \exp_{\tilde{E}} \delta_E(a) = \phi_{\tilde{E}}(a) \exp_{\tilde{E}} .$$

De la même manière, si $\log_E = \sum_{i \geq 0} \ell_i \tau^i$ alors $\log_{\tilde{E}} = \sum_{i \geq 0} z^i \ell_i \tau^i$ est l'unique élément de $I_d + \mathcal{M}_d(K[z])\{\{\tau\}\}\tau$ vérifiant

$$\forall a \in A, \delta_E(a) \log_{\tilde{E}} = \log_{\tilde{E}} \phi_{\tilde{E}}(a) .$$

On pose $\tilde{M} = M \otimes_A \tilde{A}$. On définit alors comme Demeslay dans [11]

$$U(\tilde{E}(\tilde{M})) = \left\{ x \in \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty), \exp_{\tilde{E}}(x) \in \tilde{E}(\tilde{M}) \right\} ,$$

$$H(\tilde{E}(\tilde{M})) = \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))} .$$

Par la suite, on va prendre $\ell = \mathbb{F}_q$ ou $\mathbb{F}_q(z)$ et on va poser :

- $E_\ell = E$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et \tilde{E} sinon,

- $M_\ell = M$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et \tilde{M} sinon,
- $A_\ell = A$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et \tilde{A} sinon,
- $L_{\infty,\ell} = L_\infty$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et \tilde{L}_∞ sinon.

Proposition 1.5.2. [11, Proposition 2.6] *Le A_ℓ -module $H(E_\ell(M_\ell))$ est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Soit V un voisinage de 0 dans $L_{\infty,\ell}^d$ tel que $\exp_{E,\ell}$ est une isométrie sur V et tel que $\exp_{E_\ell}(V) = V$. On a alors que $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{M_\ell + V}$ est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie. Par choix de V , $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{M_\ell + V} = \frac{L_{\infty,\ell}^d}{M_\ell + \exp_{E,\ell}(V)}$. Comme $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{M_\ell + \exp_{E,\ell}(V)} \rightarrow \frac{L_{\infty,\ell}^d}{M_\ell + \exp_{E,\ell}(\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell}))}$ est surjective, $H(E_\ell(M_\ell))$ est également un ℓ -espace vectoriel de dimension finie. \square

En particulier, $H(E(M))$ est un A -module fini.

Proposition 1.5.3. [11, Proposition 2.6] *Le A_ℓ -module $U(E_\ell(M_\ell))$ est un A_ℓ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$.*

Démonstration. Comme $\text{Lie}_{E_\ell}(M_\ell)$ est un A_ℓ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$, il est discret. De plus, le noyau de l'exponentielle qu'on note Λ est également discret. Il existe donc V un voisinage de 0 dans $L_{\infty,\ell}^d$ tel que \exp_{E_ℓ} est une isométrie sur V , $\exp_{E_\ell}(V) = V$, $M_\ell \cap V = \{0\}$ et $V \cap \Lambda = \{0\}$. On a donc $\exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell \cap V) = \{0\}$ et $\exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell \cap V) = \exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell) \cap \exp_{E_\ell}^{-1}(V) = \exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell) \cap V$. D'où $\exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell) \cap V = \{0\}$. Donc $U(E_\ell(M_\ell))$ est discret dans $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$.

Par choix de V , on a l'injectivité de $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{V + \exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell)} \rightarrow \frac{L_{\infty,\ell}^d}{V + M_\ell}$. De plus, on a vu que $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{V + M_\ell}$ est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie. Cela implique que $\frac{L_{\infty,\ell}^d}{V + \exp_{E_\ell}^{-1}(M_\ell)}$ est également un ℓ -espace vectoriel de dimension finie et donc que $U(E_\ell(M_\ell))$ contient une base de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$.

Donc $U(E_\ell(M_\ell))$ est bien un A_ℓ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$. \square

1.6 Unités de Stark

On garde les notations de la partie précédente.

On pose

$$H(\tilde{E}(M[z])) = \frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)))}$$

et

$$U(\tilde{E}(M[z])) = \left\{ x \in \text{Lie}_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)), \exp_{\tilde{E}}(x) \in \tilde{E}(M[z]) \right\}.$$

Proposition 1.6.1. [7, Proposition 1] *On a les assertions suivantes :*

- $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$,
- $U(\tilde{E}(M[z]))$ est un $A[z]$ -module de type fini.

Démonstration. 1) On note W le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$. Soient $x \in U(\tilde{E}(M[z]))$ et $\lambda \in \mathbb{F}_q(z)$. Comme $\exp_{\tilde{E}}$ est un morphisme de $\mathbb{F}_q(z)$ -algèbres, $\exp_{\tilde{E}}(\lambda x) = \lambda \exp_{\tilde{E}}(x)$. Par choix de x , $\exp_{\tilde{E}}(x) \in \tilde{E}(M[z])$. D'où $\exp_{\tilde{E}}(\lambda x) \in \tilde{E}(\tilde{M})$ et $W \subset U(\tilde{E}(\tilde{M}))$.

Soit V un voisinage ouvert de 0 dans \tilde{L}_∞^d qui est un $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel tel que $\exp_{\tilde{E}}(V) = V$. On note W' le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. On a alors $\tilde{L}_\infty^d = W' + V$. Soit $x \in U(\tilde{E}(\tilde{M}))$. Il existe donc $a \in W'$ et $b \in V$ tels que $x = a + b$. On a alors $\exp_{\tilde{E}}(x) = \exp_{\tilde{E}}(a) + \exp_{\tilde{E}}(b)$. Par choix de V , $\exp_{\tilde{E}}(b) \in V$. De plus, comme $\exp_{\tilde{E}}(x)$ et $\exp_{\tilde{E}}(a) \in W'$ (car $\exp_{\tilde{E}} : \mathbb{T}_z(L_\infty)^d \rightarrow \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$), on a $\exp_{\tilde{E}}(b) \in W'$. D'où $\exp_{\tilde{E}}(b) \in W' \cap V$. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{F}_q(z)$ tel que $\gamma \exp_{\tilde{E}}(b) \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d \cap V$. Comme $\exp_{\tilde{E}}$ est une isométrie sur V et que $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ est complet, on a $\gamma b \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d \cap V$. Donc $b \in W'$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{F}_q(z)$ et $c \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $x = \lambda c$. Comme $\exp_{\tilde{E}}(x) \in \tilde{M}$ et $\exp_{\tilde{E}}(\lambda c) = \lambda \exp_{\tilde{E}}(c)$, $\exp_{\tilde{E}}(c) \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d \cap \tilde{M} = M[z]$. D'où $c \in U(\tilde{E}(M[z]))$ et $x \in W$. On a bien l'inclusion suivante $U(\tilde{E}(\tilde{M})) \subset W$. Donc $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$.

2) Comme $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$ et $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est discret dans \tilde{L}_∞^d (car réseau), $U(\tilde{E}(M[z]))$ est discret dans $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. De plus, par définition de réseau, il existe $e_1, \dots, e_m \in U(\tilde{E}(M[z]))$ tels que $\tilde{L}_\infty^d = \bigoplus_{i=1}^m \tilde{k}_\infty e_i$.

On pose $N = \bigoplus_{i=1}^m A[z]e_i$ et $V = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{T}_z(k_\infty)e_i$. On note W le $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ -module engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$. Comme les $e_i \in U(\tilde{E}(M[z]))$, $V \subset W \subset \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. W est donc un $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ -module libre de rang inférieur ou égal à m car $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ est un module principal et $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ est de rang m sur $\mathbb{T}_z(k_\infty)$. Comme V est libre de rang m et $V \subset W$, W est libre de rang m . On note f_1, \dots, f_m une base de W comme $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ -module. Comme $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$ et

$\mathbb{F}_q(z)N = U(\tilde{E}(\tilde{M}))$, on a $U(\tilde{E}(M[z])) \subset \mathbb{F}_q(z)N$. Donc pour tout $i = 1, \dots, m$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{F}_q[z]$ non nuls tels que $\lambda_i f_i \in N$. On note λ le ppcm des λ_i . On a donc $\lambda W \subset V$. D'où $\lambda U(\tilde{E}(M[z])) \subset V \cap \mathbb{F}_q(z)N = N$. Donc $U(\tilde{E}(M[z]))$ est un $A[z]$ -module de type fini. \square

Proposition 1.6.2. [7, Proposition 2]

Le $A[z]$ -module $H(\tilde{E}(M[z]))$ est un $\mathbb{F}_q[z]$ -module de type fini et de torsion, sans z -torsion. De plus, $H(\tilde{E}(\tilde{M})) = \{0\}$.

Démonstration. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tel que $\exp_{\tilde{E}}$ est une isométrie sur V et tel que $\exp_{\tilde{E}}(V) = V$. Par choix de V , $\frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + V} = \frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + \exp_{\tilde{E}}(V)}$ et $\frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + V}$ est un $\mathbb{F}_q[z]$ -module de type fini. Comme $\frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + \exp_{\tilde{E}}(V)} \longrightarrow \frac{\tilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\tilde{E}(M[z]) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)))}$ est surjectif, $H(\tilde{E}(M[z]))$ est également un $\mathbb{F}_q[z]$ -module de type fini.

On a $\exp_{\tilde{E}} \equiv I_n \pmod{z}$. D'où $\mathbb{T}_z(L_\infty)^d = z\mathbb{T}_z(L_\infty)^d + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)$. Donc pour $x \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$, il existe $a, b \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $x = za + \exp_{\tilde{E}}(b)$. On a alors $za \pmod{(M[z] + \exp_E(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d))} = x \pmod{(M[z] + \exp_E(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d))}$. Cela implique que la multiplication par z est surjective. On obtient alors la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \left\{ x \in H(\tilde{E}(M[z])), zx = 0 \right\} \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \xrightarrow{\times z} H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow 0.$$

Cela implique que $\left\{ x \in H(\tilde{E}(M[z])), zx = 0 \right\} = \{0\}$. Donc $H(\tilde{E}(M[z]))$ n'a pas de z -torsion.

Comme $H(\tilde{E}(M[z]))$ est un module de type fini sur $\mathbb{F}_q[z]$ qui est un anneau principal, il existe $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ et $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{F}_q[z]$ tels que $H(\tilde{E}(M[z])) \cong \mathbb{F}_q[z]^r \times \mathbb{F}_q[z]/Q_1 \times \dots \times \mathbb{F}_q[z]/Q_s$. Comme la multiplication par z est surjective, cela implique que $r = 0$ et donc que $H(\tilde{E}(M[z]))$ est un $\mathbb{F}_q[z]$ -module de torsion. De plus, le $\mathbb{F}_q(z)$ -module engendré par $\mathbb{T}_z(L_\infty)$ est dense dans \tilde{L}_∞ . Cela implique que $H(\tilde{E}(M)) \cong H(\tilde{E}(M[z])) \otimes_{\mathbb{F}_q[z]} \mathbb{F}_q(z)$. D'où $H(\tilde{E}(M)) = \{0\}$. \square

On pose $\text{ev} : \text{Lie}_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)) \longrightarrow \text{Lie}_E(L_\infty)$ l'évaluation en $z = 1$. On définit les unités de Stark de M de la manière suivante :

$$U_{St}(E(M)) = \text{ev}(U(\tilde{E}(M[z]))).$$

On peut voir que $\text{ev}(\exp_{\tilde{E}}) = \exp_E$.

Soit $x \in U_{St}(E(M))$. Par définition, il existe $y \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ et $P \in M[z]$ tels que $\exp_{\tilde{E}}(y) = P$ et $x = \text{ev}(y)$. On obtient alors $\exp_E(x) = P(1) \in M$. Cela implique que $U_{St}(E(M))$ est un A -sous module de $U(E(M))$.

On définit l'homomorphisme de $\mathbb{F}_q[z]$ -modules suivant $\alpha : \mathbb{T}_z(L_\infty)^d \rightarrow \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ qui à x associe $\frac{\exp_{\tilde{E}}(x) - \exp_E(x)}{z - 1}$.

Pour $f \in A[z]$, on pose

$$H(\tilde{E}(M[z]))[f] = \left\{ x \in H(\tilde{E}(M[z])), fx = 0 \right\}.$$

Proposition 1.6.3. [7, Proposition 3] *On a l'isomorphisme de A -modules induit par α :*

$$\bar{\alpha} : \frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \cong H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1].$$

Démonstration. On veut montrer que α induit un homomorphisme surjectif de A -modules $U(E(M)) \rightarrow H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1]$ de noyau $U_{St}(E(M))$.

Soit $x \in U(E(M))$. On a alors $(z - 1)x = \exp_{\tilde{E}}(x) - \exp_E(x)$. Comme $\exp_E(x) \in E(M)$ par définition et $L_\infty \subset \mathbb{T}_z(L_\infty)$, $(z - 1)x \in M + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)$. D'où $(z - 1)\alpha(U(E(M))) \subset M + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)$. Donc l'application est bien définie.

Soient $a \in A$ et $x \in U(E(M))$. On a

$$\begin{aligned} \alpha(ax) - \tilde{E}_a(\alpha(x)) &= \frac{\exp_{\tilde{E}}(ax) - \exp_E(ax)}{z - 1} - \tilde{E}_a \left(\frac{\exp_{\tilde{E}}(x) - \exp_E(x)}{z - 1} \right) \\ &= \frac{(\tilde{E}_a - E_a)(\exp_E(x))}{z - 1} \end{aligned}$$

Comme $E_a = \sum_{i=0}^r b_i \tau^i$ et $\tilde{E}_a = \sum_{i=0}^r b_i z^i \tau^i$, on a $\alpha(ax) - \tilde{E}_a(\alpha(x)) \in M[z]$. Donc c'est un homomorphisme de A -modules.

Soit $\bar{x} \in H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1]$. On prend $x \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ un représentant de \bar{x} . Il existe $(a; b) \in M[z] \times \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tel que $(z - 1)x = a + \exp_{\tilde{E}}(b)$ par définition de $H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1]$. Il existe également $(c; d) \in M \times M[z]$ tel que $a = c + (z - 1)d$. De même, il existe $(e; f) \in L_\infty^d \times \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tel que $b = e + (z - 1)f$. En remplaçant a et b par les égalités ci-dessus on a alors

$$(z - 1)x = c + (z - 1)d + \exp_{\tilde{E}}(e + (z - 1)f).$$

En évaluant en $z = 1$, on obtient $0 = c + \exp_E(e)$. Comme $\exp_E(e) = -c \in M$, $e \in U(E(M))$. De plus,

$$(z - 1)(x - d - \exp_{\tilde{E}}(f)) = \exp_{\tilde{E}}(e) - \exp_E(e) = (z - 1)\alpha(e).$$

D'où $x - d - \exp_{\tilde{E}}(f) = \alpha(e)$. L'image de x dans $H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1]$ est la même que celle de $\alpha(e)$. Donc l'application est surjective. Comme $U_{St}(E(M)) = \text{ev}(U(\tilde{E}(M[z]))) = \text{ev}\left(\left\{x \in \text{Lie}_E(\mathbb{T}_z(L_\infty)), \exp_{\tilde{E}}(x) \in \tilde{E}(M[z])\right\}\right)$, pour $x \in U_{St}(E(M))$, il existe $a \in U(\tilde{E}(M[z]))$ et $b \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $x = a + (z - 1)b$. On a $\exp_{\tilde{E}}(x) = \exp_{\tilde{E}}(a) + (z - 1)\exp_{\tilde{E}}(b)$. En évaluant en $z = 1$, on a

$$\exp_E(x) = \text{ev}(\exp_E(x)) = \text{ev}(\exp_{\tilde{E}}(x)) = \text{ev}(\exp_{\tilde{E}}(a)).$$

D'où $\text{ev}(\exp_{\tilde{E}}(a) - \exp_E(x)) = 0$. De plus, $\exp_{\tilde{E}}(a) - \exp_E(x) \in M[z]$ car $a \in U(\tilde{E}(M[z]))$ et $x \in U_{St}(E(M))$. Donc $\exp_{\tilde{E}}(a) - \exp_E(x) \in (z - 1)M[z]$. On a alors

$$\exp_{\tilde{E}}(x) - \exp_E(x) = \exp_{\tilde{E}}(a) + (z - 1)\exp_{\tilde{E}}(b) - \exp_E(x) \in (z - 1)(M[z] + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)).$$

On a donc $\alpha(x) \in M[z] + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)$. Cela implique $U_{St}(E(M)) \subset \text{Ker}(\alpha)$.

Réciproquement, soit $x \in U(E(M))$ tel que $\alpha(x) \in M[z] + \exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d)$. Comme $\alpha(x) = \frac{\exp_{\tilde{E}}(x) - \exp_E(x)}{z - 1}$, on a alors

$$\exp_{\tilde{E}}(x) = (z - 1)\alpha(x) + \exp_E(x) \in M[z] + (z - 1)\exp_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty)^d).$$

D'où $x \in U(\tilde{E}(M[z])) + (z - 1)\mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. Comme $x \in L_\infty^d$, $x = \text{ev}(x)$ et donc $x \in \text{ev}(U(\tilde{E}(M[z]))) = U_{St}(E(M))$.

On a donc l'isomorphisme suivant

$$\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \cong H(\tilde{E}(M[z]))[z - 1].$$

□

Théorème 1.6.4. [7, Theorem 1] *Le A -module $\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))}$ est un A -module fini. De plus,*

$$\text{Fitt}_A\left(\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))}\right) = \text{Fitt}_A(H(E(M))).$$

Démonstration. Par la proposition précédente, on a l'isomorphisme de A -modules

$$\tilde{\alpha} : \frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \cong H(\tilde{E}(M[z]))[z-1].$$

D'après la preuve de la proposition 1.6.2, il existe $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{F}_q[z]$ tels que $H(\tilde{E}(M[z])) \cong \mathbb{F}_q[z]/Q_1 \times \dots \times \mathbb{F}_q[z]/Q_s$. Donc $H(\tilde{E}(M[z]))$ est un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension finie. En particulier, il est fini. Donc $H(\tilde{E}(M[z]))$ est un A -module fini. Cela implique que $H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]$ et $\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))}$ sont également des A -modules finis.

On veut maintenant montrer que $\text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \right) = \text{Fitt}_A(H(E(M)))$. La multiplication par $z-1$ induit la suite exacte de A -modules :

$$0 \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow \frac{H(\tilde{E}(M[z]))}{(z-1)H(\tilde{E}(M[z]))} \longrightarrow 0.$$

L'évaluation en $z=1$ nous donne une nouvelle suite exacte de A -modules :

$$0 \longrightarrow (z-1)H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow H(E(M)) \longrightarrow 0.$$

Ces deux suites nous donnent une troisième :

$$0 \longrightarrow \frac{H(\tilde{E}(M[z]))}{H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]} \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow H(E(M)) \longrightarrow 0.$$

De cette suite exacte, comme A est un anneau de Dedekind, on en déduit

$$\text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z])) \right) = \text{Fitt}_A \left(\frac{H(\tilde{E}(M[z]))}{H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]} \right) \text{Fitt}_A(H(E(M))).$$

De plus, comme $\text{Fitt}_A \left(\frac{H(\tilde{E}(M[z]))}{H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]} \right) = \frac{\text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z])) \right)}{\text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \right)}$, on a bien

$$\text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \right) = \text{Fitt}_A(H(E(M))).$$

Comme on a l'isomorphisme de A -modules finis $\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \cong H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]$, on a bien

$$\text{Fitt}_A \left(\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \right) = \text{Fitt}_A \left(H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \right) = \text{Fitt}_A(H(E(M))).$$

□

On regarde l'exemple suivant, traité par Tavares Ribeiro dans [27, Section 7.5.3], lorsqu'on est avec $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ et le module de Drinfeld ϕ tel que $\phi_\theta = \theta + (-\theta)^d \tau$. Lorsque $d \not\equiv 1 \pmod{q-1}$ alors $H(\phi(A)) = \{0\}$ et $U(\phi(A)) = U_{St}(\phi(A))$. Si $d = 1$ alors $H(\phi(A)) = \{0\}$ et $U(\phi(A)) = \frac{\tilde{\pi}}{(-\theta)^{1/(q-1)}\theta}A$ où $\tilde{\pi}$ est ce qu'on appelle la période du module de Carlitz et $(-\theta)^{1/(q-1)}$ est la racine $(q-1)$ -ième fixée de $-\theta$ dans \mathbb{C}_∞ apparaissant dans sa définition. On renvoie à [18, Section 3.2] pour plus de détails. Dans le cas où $d \equiv 1 \pmod{q-1}$ et $d \neq 1$, alors $U(\phi(A)) = \frac{\tilde{\pi}}{(-\theta)^{1/(q-1)}\theta^{(d-1)/(q-1)}}A$ et il existe $B_d \in A$ de degré $\frac{d-1}{q-1}$ tel que $|H(\phi(A))|_A = B_d$.

CHAPITRE 2

Formule de classe équivariante : le cas $A = \mathbb{F}_q[\theta]$

Le but de ce chapitre est de montrer une formule de classe équivariante. La formule de classes a été introduite par Taelman pour les modules de Drinfeld dans [26] puis a été généralisée par Fang (voir [15]) pour les modules d'Anderson et par Demeslay (voir [11, 12]) pour les modules d'Anderson avec variables. Cette partie se base sur l'article [17] de Ferrara, Green, Higgins et Popescu. On introduit en plus la notion de module presque modéré et l'on travaille sur \tilde{k} . Cela nous permet d'avoir la proposition 2.7.1 et le théorème 2.7.3. Ce chapitre fait l'objet d'un article, actuellement en soumission.

2.1 Notations

Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On prend θ une indéterminée sur \mathbb{F}_q . On pose $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ l'anneau des polynômes de θ à coefficients dans \mathbb{F}_q et $k = \mathbb{F}_q(\theta)$ son corps des fractions. On a $k_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)$. On note \mathbb{C}_∞ le complété d'une clôture algébrique de k_∞ . On pose $v_\infty : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ la valuation normalisée de sorte que $v_\infty(\theta^{-1}) = 1$. Soit z une indéterminée sur \mathbb{C}_∞ . On note également $v_\infty : \mathbb{C}_\infty(z) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ la valuation telle que pour $P \in \mathbb{C}_\infty[z]$ où $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ avec $a_i \in \mathbb{C}_\infty$ on ait $v_\infty(P) = \min\{v_\infty(a_i)\}$.

Soit K un sous-corps de \mathbb{C}_∞ contenant k_∞ et complet pour v_∞ . On note $\mathbb{T}_z(K)$ la

complétion de K pour v_∞ , c'est-à-dire les éléments $\sum_{i \geq 0} a_i z^i$ où $a_i \in K$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} v_\infty(a_i) = \infty$. On a $\mathbb{T}_z(k_\infty) = \mathbb{F}_q[z][(\frac{1}{\theta})]$. On note \tilde{K} la complétion de $K(z)$ pour v_∞ . En particulier, $\tilde{k}_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{\theta}))$. Le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $\mathbb{T}_z(K)$ est dense dans \tilde{K} .

Soit K/k une extension finie. On note $K_\infty = K \otimes_k k_\infty$, \mathcal{O}_K la fermeture intégrale de A dans K et $S_\infty(K)$ les places de K au dessus de ∞ . Pour $\nu \in S_\infty(K)$, on pose $\iota_\nu : K \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ le morphisme de k -algèbres correspondant à ν .

On note K_ν le corps engendré par $\iota_\nu(K)$ par k_∞ . On a $K_\infty = \prod_{\nu \in S_\infty(K)} K_\nu$. On pose $\tilde{K}_\infty = K \otimes_k \tilde{k}_\infty$. De la même manière, on a $\tilde{K}_\infty = \prod_{\nu \in S_\infty(K)} \tilde{K}_\nu$. On note $\tau : \tilde{K}_\infty \rightarrow \tilde{K}_\infty$ le morphisme continu de $\mathbb{F}_q(z)$ -algèbres qui envoie $x \in K_\infty$ sur x^q . On note $\tilde{\mathcal{O}}_K$ le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par \mathcal{O}_K dans \tilde{K}_∞ . On note $\tilde{A} = \mathbb{F}_q(z)[\theta]$. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est la fermeture intégrale de \tilde{A} dans \tilde{K}_∞ .

2.2 Anneaux de groupes de caractéristique p

Dans cette section, on rappelle les résultats de [17, Section 7.1]. Si G est un groupe fini et M est un $\mathbb{Z}[G]$ -module, on note $\hat{H}^i(G, M)$ le i -ème groupe de cohomologie de Tate pour le groupe M pour $i \in \mathbb{Z}$. On dit que M est G -cohomologiquement trivial si pour tout H sous-groupe de G et tout $i \in \mathbb{Z}$, $\hat{H}^i(H, M) = 0$.

Dans ce qui suit, A est un anneau commutatif de caractéristique p , G est un groupe fini et abélien et M est un $A[G]$ -module.

On note I_G l'idéal augmentation de l'anneau de groupe $A[G]$, c'est-à-dire le noyau du morphisme augmentation de A -algèbres $s_G : A[G] \rightarrow A$ qui envoie g sur 1 pour tout $g \in G$.

Lemme 2.2.1. [17, Lemma 7.1.1] *Si G est un p -groupe alors*

— *il y a une correspondance qui préserve les idéaux maximaux :*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A) &\rightarrow \text{Spec}(A[G]) \\ P &\mapsto P_G = (P, I_G) \end{aligned}$$

où I_G est l'idéal augmentation.

— *Si A est local (par exemple un corps) alors $A[G]$ est local.*

— *Pour tout $P \in \text{Spec}(A)$, on a $A[G]_{P_G} = A_P[G]$ et $M_{P_G} = M_P$.*

Démonstration. (1) On montre d'abord que tout élément de I_G est nilpotent et donc I_G inclus dans tout idéal premier de A . Soit $x \in I_G$. On peut donc écrire $x = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma(\sigma - 1)$, $a_\sigma \in A$ comme $I_G = \langle \sigma - 1, \sigma \in G \rangle$ par définition. Comme A est de caractéristique p et G est un p -groupe, $x^{|G|} = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma^{|G|}(\sigma^{|G|} - 1) = 0$. Donc tout élément de I_G est nilpotent. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ qui appartient à chaque idéal premier de A donc x est dans chaque premier de A . D'où I_G est inclus dans chaque premier de A . $A[G]/A$ est une extension entière d'anneaux (car G est un groupe fini). Donc chaque idéal premier (maximal) de $A[G]$ contient un unique idéal premier (maximal) de A . De plus, on a les isomorphismes suivants $A[G]/P_G \cong A/P$ et $A[G]/I_G \cong A$.

(2) D'après 1), il y a une correspondance 1-1 entre les premiers de A et ceux de $A[G]$. Donc si A local, alors $A[G]$ est local.

3) Soit $P \in \text{Spec}(A)$. On a l'inclusion $A_P[G] \subset A[G]_{P_G}$. On s'intéresse maintenant à l'inclusion inverse. Soit $x \in A[G] \setminus P_G = A[G] \setminus (P, I_G)$. On a alors $s_G(x) \in A[G] \setminus P$. Comme G est un p -groupe,

$$x^{|G|^a} = s_G(x)^{|G|^a}$$

pour $a \in \mathbb{N}$ grand. Donc x est inversible dans $A_P[G]$ d'inverse $\frac{x^{|G|^{a-1}}}{s_G(x)^{|G|^a}}$. D'où $A[G]_{P_G} \subset A_P[G]$. On a $M_{P_G} = M_P$ de la même manière. \square

Lemme 2.2.2. [17, Lemma 7.1.2] Soit G un p -groupe. On suppose que A est un anneau de valuation discrète et M de type fini ou A est un corps et M quelconque. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- M est $A[G]$ -libre.
- M est $A[G]$ -projectif.
- M est A libre et G -cohomologiquement trivial.

Démonstration. Comme $A[G]$ local car A est local, les deux premières sont équivalentes. Les deux dernières équivalences se montrent de la même manière que [8, Theorem 6] si A est un corps et [8, Theorem 8] si A est un anneau de valuation discrète. \square

Lemme 2.2.3. [17, Lemma 7.1.3] Soit G un p -groupe. On suppose que A est anneau de Dedekind et M de type fini sur $A[G]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- M est $A[G]$ -projectif.
- M est A projectif et G -cohomologiquement trivial.

Démonstration. Comme M est de type fini, d'après le lemme 2.2.1, M est $A[G]$ -projectif si et seulement si M_m est $A_m[G]$ -projectif pour tout $m \in \text{MSpec}(A)$. Comme A_m est un anneau de valuation discrète, on peut appliquer le lemme précédent. D'où M est

$A[G]$ -projectif si et seulement si M_m est A_m -projectif et G -cohomologiquement trivial pour tout $m \in \text{MSpec}(A)$. On a pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et H sous-groupe de G l'isomorphisme de R_m -modules $\widehat{H}^i(H, M)_m \cong \widehat{H}^i(H, M_m)$. D'où M_m est A_m -projectif et G -cohomologiquement trivial pour tout $m \in \text{MSpec}(A)$ si et seulement si M est A -projectif et G -cohomologiquement trivial. \square

On regarde maintenant le cas où G n'est pas un p -groupe. On pose $G = H \times \Delta$ où H est le p -Sylow de G . On suppose que A est un anneau de Dedekind. Pour $\chi : \Delta \rightarrow Q(\bar{A})$ à valeurs dans la clôture séparable du corps des fractions de A , on note $\widehat{\chi}$ sa classe d'équivalence sous la relation d'équivalence suivante $\chi \sim \sigma \circ \chi$ pour σ dans le groupe de Galois absolu $G_{Q(\bar{A})}$. On a alors que les idempotents de $A[G]$ sont indexés par ces classes d'équivalence et sont donnés par

$$e_{\widehat{\chi}} = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\psi \in \widehat{\chi}, \delta \in \Delta} \psi(\delta) \delta^{-1}$$

pour tout $\widehat{\chi} \in \widehat{\Delta}(A)$ où $\widehat{\Delta}(A)$ représente les classes d'équivalence de caractères décrites au dessus.

On a l'isomorphisme d'anneaux :

$$A[G] = \bigoplus_{\widehat{\chi} \in \widehat{\Delta}(A)} e_{\widehat{\chi}} A[G] \cong \bigoplus_{\widehat{\chi} \in \widehat{\Delta}(A)} A(\chi)[H]$$

où $A(\chi)$ est l'anneau de Dedekind obtenu en ajoutant les valeurs de χ . On se sert de l'isomorphisme $e_{\widehat{\chi}} A[G] \cong A(\chi)[H]$ avec l'évaluation en χ . Pour chaque $A[G]$ -module M , on a de la même manière

$$M = \bigoplus_{\widehat{\chi} \in \widehat{\Delta}(A)} e_{\widehat{\chi}} M \cong \bigoplus_{\widehat{\chi} \in \widehat{\Delta}(A)} M^\chi$$

où $M^\chi = M \otimes_{A[G]} A(\chi)[H]$. On pose $I_{\widehat{\chi}} = \ker(s_\chi)$ où s_χ est la composition des morphismes de A -algèbres suivants :

$$s_\chi : A[G] \xrightarrow{x} A(\chi)[H] \xrightarrow{s_H} A(\chi).$$

Pour chaque $P_\chi \in \text{Spec}(A(\chi))$, on pose $P_{\chi, G} = s_\chi^{-1}(P_\chi)$. On a donc d'après le lemme 2.2.1

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A[G]) &= \cup_{\widehat{\chi}} \text{Spec}(A(\chi)[H]), \\ \text{Spec}(A(\chi)[H]) &= \{P_{\chi, G} | P_\chi \in \text{Spec}(A(\chi))\}, \end{aligned}$$

$$A[G]_{P_{\chi,G}} = A(\chi)_{P_{\chi}}[P],$$

et

$$M_{P_{\chi,G}} = M_{P_{\chi}} = (M^{\chi})_{P_{\chi}}.$$

Les idéaux premiers minimaux de $A(\chi)[H]$ sont les $I_{\bar{\chi}}$. Donc les composantes connexes de $\text{Spec}(A[G])$ sont les $\text{Spec}(A(\chi)[H])$.

Corollaire 2.2.4. [17, Corollary 7.1.7] Soient A un anneau de Dedekind ou un corps de caractéristique p , G un groupe fini abélien et M de type fini sur $A[G]$.

- M est $A[G]$ -projectif si et seulement si M est A projectif et H -cohomologiquement trivial si et seulement si M est A projectif et G -cohomologiquement trivial.
- Si A est un anneau de valuation discrète ou un corps alors $A[G]$ est un anneau semi-local où pour tout $\bar{\chi}$, $A(\chi)[H]$ est local.
- Si A est un anneau de valuation discrète ou un corps alors M est un $A[G]$ -module libre si et seulement si M est un $A[G]$ -module projectif de rang constant.

2.3 Modules projectifs particuliers

Soient L/k une extension finie, E un t -module défini sur \mathcal{O}_K où K vérifie $k \subset K$ et L/K est une extension abélienne de groupe de Galois G .

Définition 2.3.1. Soit V un $k_{\infty,\ell}$ -espace vectoriel de dimension finie. On a les définitions suivantes :

- Un $\ell[\theta][G]$ -réseau de V est un $\ell[\theta][G]$ -sous module de V qui est un $\ell[\theta]$ -réseau de V .
- Un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif (respectivement libre) dans V est un $\ell[\theta][G]$ -réseau de V qui est projectif (respectivement libre) comme $\ell[\theta][G]$ -module.

Proposition 2.3.2. [17, Prop. 7.2.1] On a les assertions suivantes :

- $\text{Lie}_{E_{\ell}}(L_{\infty,\ell})$ est un $\ell((\theta^{-1}))[G]$ module libre.
- Si Λ est un $\ell[\theta][G]$ -réseau de $\text{Lie}_{E_{\ell}}(L_{\infty,\ell})$, $\ell(\theta)\Lambda$ est un $\ell(\theta)[G]$ -module libre.
- Pour deux $\ell[\theta][G]$ -réseaux Λ_1, Λ_2 de $\text{Lie}_{E_{\ell}}(L_{\infty,\ell})$ tels que $\ell(\theta)\Lambda_1 = \ell(\theta)\Lambda_2$ il existe un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre Λ tels que $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda$.

Démonstration. 1) On a $\text{Gal}(L_{\ell}/K_{\ell}) = G$. On a donc $L_{\ell} \cong K_{\ell}[G]$ comme $K_{\ell}[G]$ -modules d'après le théorème de la base normale. D'où $L_{\infty,\ell} = L_{\ell} \otimes_{K_{\ell}} K_{\infty,\ell} = K_{\infty,\ell}[G]$.

De plus, on a $K_{\infty,\ell} \cong K_{\ell} \otimes_{\ell(\theta)} \ell((\theta^{-1})) \cong \prod_{v \in K_{\ell}, v|\infty} \ell((\theta^{-1}))$. Si on pose $n = |\{v \in K_{\ell}, v|\infty\}|$, on obtient alors

$$L_{\infty,\ell}^m \cong (\ell((\theta^{-1}))[G])^{nm}.$$

2) On pose $V = \ell(\theta) \cdot \Lambda$. Par définition de réseau, on a

$$V \otimes_{\ell(\theta)} \ell_\infty \cong \ell_\infty \cdot V = L_{\infty, \ell}^m \cong (\ell((\theta^{-1}))[G])^{nm}.$$

Donc $V \otimes_{\ell(\theta)} \ell_\infty$ est G -cohomologiquement trivial. D'où pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et H sous-groupe de G , on a $\widehat{H}^i(H, V \otimes_{\ell(\theta)} \ell_\infty) = 0$. De plus, $\widehat{H}^i(H, V \otimes_{\ell(\theta)} \ell_\infty) = \widehat{H}^i(H, V) \otimes_{\ell(\theta)} \ell_\infty$ car ℓ_∞ est un $\ell(\theta)$ -module plat. On en déduit $\widehat{H}^i(H, V) = 0$. D'où V est un $\ell(\theta)[G]$ -module G -cohomologiquement trivial.

De plus, le rang local de V sur $\text{Spec}(\ell(\theta)[G])$ est le même que celui de $V \otimes_{\ell(\theta)} \ell(\theta^{-1})$ sur $\text{Spec}(\ell(\theta^{-1})[G])$. Donc le rang local est constant de valeur nm . Par le corollaire 2.2.4, V est un $\ell(\theta)[G]$ -module libre de rang nm .

3) Soit $V = \ell(\theta)\Lambda_1 = \ell(\theta)\Lambda_2$. D'après 2), c'est un $\ell(\theta)[G]$ -module libre de rang nm . On prend e_1, \dots, e_{nm} une base de V sur $\ell(\theta)[G]$. Il existe f_1, \dots, f_{nm} et f'_1, \dots, f'_{nm} dans $L_{\infty, \ell}^m$ tels que $\Lambda_1 = \bigoplus_{i=1}^{nm} \ell[\theta]f_i$ et $\Lambda_2 = \bigoplus_{i=1}^{nm} \ell[\theta]f'_i$ par définition de réseau. On a $f_i \in \Lambda_1 \subset$

V . Comme e_1, \dots, e_{nm} est une $\ell(\theta)[G]$ -base de V , on peut écrire $f_i = \sum_{r=1}^{nm} \left(\sum a_{i,j} \sigma_j \right) e_r$

avec $a_{i,j} \in \ell(\theta)$ et $\sigma_j \in G$. On a donc $a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{c_{i,j}}$, où $b_{i,j}, c_{i,j} \in \ell[\theta]$ et sont premiers entre

eux. On pose $h_1 = \text{ppcm}(c_{i,j}) \in \ell[\theta]$. D'où $f_1, \dots, f_{nm} \in \bigoplus_{i=1}^{nm} \ell[\theta][G] \frac{e_i}{h_1}$. De la même

manière, il existe $h_2 \in \ell[\theta]$ tel que $f'_1, \dots, f'_{nm} \in \bigoplus_{i=1}^{nm} \ell[\theta][G] \frac{e_i}{h_2}$. On pose $h = h_1 h_2$ et

$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{nm} \ell[\theta][G] \frac{e_i}{h}$. C'est bien un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre contenant Λ_1 et Λ_2 . \square

Dans ce qui suit, pour v un premier de k , on note k_v et \widehat{A}_v la complétion de k en v et son anneau des entiers. On a $K_v = \prod_{w|v} K_w$ et $\mathcal{O}_{K_v} = \prod_{w|v} \widehat{A}_w$

Définition 2.3.3. [17, Def. 7.2.3]

Soit \mathcal{R} un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est K . Soit \mathcal{S} sa fermeture intégrale dans L . Un $\mathcal{R}\{\tau\}[G]$ -sous module \mathcal{M} de \mathcal{S} est appelé module modéré pour \mathcal{S}/\mathcal{R} si

- \mathcal{M} est $\mathcal{R}[G]$ -projectif de rang constant local 1,
- \mathcal{S}/\mathcal{M} est fini et $\mathcal{S}/\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\mathcal{R}}_v = 0$ lorsque $v \in \text{MSpec}(\mathcal{R})$ est modéré dans L/K .

Définition 2.3.4. [17, Def. 7.2.7] Un module modéré pour $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ est appelé un module modéré pour L/K .

Cela veut dire qu'un $\mathcal{O}_K\{\tau\}[G]$ -module \mathcal{M} de \mathcal{O}_L est dit modéré si

- \mathcal{M} est $\mathcal{O}_K[G]$ -projectif de rang constant local 1,
- $\mathcal{O}_L/\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{O}_L/\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K,v} = 0$ lorsque $v \in \text{MSpec}(\mathcal{O}_K)$ est modéré dans L/K .

On note $\mathcal{O}_{K,\infty}$ (respectivement $\mathcal{O}_{L,\infty}$) l'intersection des anneaux de valuation correspondant aux premiers infinis de K (respectivement L).

Définition 2.3.5. [17, Def. 7.2.7] Un module modéré pour $\mathcal{O}_{L,\infty}/\mathcal{O}_{K,\infty}$ est appelé un module ∞ -modéré pour L/K .

Cela veut dire qu'un module ∞ -modéré pour L/K est un $\mathcal{O}_{K,\infty}[G]$ -module projectif de rang local constant 1 qu'on note \mathcal{W}^∞ tel que $\mathcal{W}^\infty \subset \mathcal{O}_{L,\infty}$ et le quotient $\mathcal{O}_{L,\infty}/\mathcal{W}^\infty$ est fini.

On généralise la définition de module modéré introduite par Ferrara, Green, Higgins et D. Popescu dans [17] par la définition suivante.

Définition 2.3.6. Un module presque modéré pour L_ℓ/K_ℓ est un $\ell[\theta]$ -module M qui vérifie

- $\text{Lie}_{E_\ell}(M)$ est un $\ell[\theta]$ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$,
- M est $\ell[\theta][G]$ -projectif,
- M est un $\mathcal{O}_{K,\ell}\{\tau\}$ -module.

En particulier, si M est un module modéré alors M^n est presque modéré où n est la dimension de E .

On appelle une paire presque modérée le couple $(M_\ell, \mathcal{W}^\infty)$ où M_ℓ est un module presque modéré pour L_ℓ/K_ℓ et \mathcal{W}^∞ est ∞ -modéré.

Proposition 2.3.7. *Si M est un module modéré pour L/K , alors \widetilde{M} est un module modéré pour $\widetilde{L}/\widetilde{K}$.*

Démonstration. Par définition, M est $\mathcal{O}_K[G]$ -projectif de rang constant local 1, \mathcal{O}_L/M est fini et $\mathcal{O}_L/M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K,v} = 0$ lorsque $v \in \text{MSpec}(\mathcal{O}_K)$ est modéré dans L/K .

Il existe alors un $\mathcal{O}_K[G]$ -module N et $n \in \mathbb{N}$ tel que $M \oplus N \cong \mathcal{O}_K[G]^n$. En tensorisant par $\mathbb{F}_q(z)$, on obtient $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} \cong \widetilde{\mathcal{O}_K[G]}^n$. Donc \widetilde{M} est un $\widetilde{\mathcal{O}_K[G]}$ -module projectif.

De plus, M est $\mathcal{O}_K[G]$ -projectif de rang constant local 1. Pour $P \in \text{MSpec}(\mathcal{O}_K[G])$, on a donc $M_P \cong \mathcal{O}_K[G]_P$. Comme le produit tensoriel et la localisation commutent, on a pour $P \in \text{MSpec}(\widetilde{\mathcal{O}_K[G]})$, $\widetilde{M}_P \cong \widetilde{\mathcal{O}_K[G]}_P$. Cela implique que \widetilde{M} est $\widetilde{\mathcal{O}_K[G]}$ -projectif de rang constant local 1

$\widetilde{\mathcal{O}_L}/\widetilde{M}$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par les éléments de \mathcal{O}_L/M . C'est donc un $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel de dimension finie.

Pour $\mathcal{O}_L/M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K,v} = \widetilde{\mathcal{O}}_L/\widetilde{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{O}}_K} \widetilde{\widehat{\mathcal{O}}}_{K,v} = 0$ lorsque $v \in \text{MSpec}(\mathcal{O}_K)$ est modéré dans L/K .

Donc \widetilde{M} est modéré pour $\widetilde{L}/\widetilde{K}$. \square

De la même manière, on peut voir que si M est presque modéré pour L/K alors \widetilde{M} est presque modéré pour $\widetilde{L}/\widetilde{K}$.

2.4 Elements unitaires et idéaux de Fitting

2.4.1 Eléments unitaires

Toute cette section a été traitée par [17, Section 7.3] lorsque $\ell = \mathbb{F}_q$. Les mêmes arguments fonctionnent pour $\ell = \mathbb{F}_q(z)$.

Comme G est fini, on a $\ell[G][[\theta^{-1}]] = \ell[[\theta^{-1}]] [G]$ et $\ell[G][(\theta^{-1})] = \ell((\theta^{-1})) [G]$.

On pose $G = H \times \Delta$ où H est le p -Sylow de G .

Définition 2.4.1. On définit $\ell((\theta^{-1})) [H]^+$ comme sous-groupe des éléments unitaires de $\ell((\theta^{-1})) [H]^\times$ par

$$\ell((\theta^{-1})) [H]^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \theta^n (1 + \theta^{-1} \ell[H][[\theta^{-1}]]) .$$

On utilise la décomposition en caractère de $\ell[G]$ pour avoir la somme directe

$$\phi_\Delta : \ell[G][(\theta^{-1})] \cong \bigoplus_{\chi \in \widehat{\Delta}} \ell(\chi)[H][(\theta^{-1})] .$$

Cela nous permet d'avoir la définition suivante.

Définition 2.4.2. On définit $\ell((\theta^{-1})) [G]^+$, sous-groupe des éléments unitaires de $\ell((\theta^{-1})) [G]^\times$ par

$$\ell((\theta^{-1})) [G]^+ = \phi_\Delta^{-1} \left(\bigoplus_{\chi \in \widehat{\Delta}} \ell(\chi)[H][(\theta^{-1})]^+ \right) .$$

Remarque 2.4.3. On dit qu'un polynôme $f \in \ell[G][\theta]$ est unitaire si

$$f \in \ell[G][\theta]^+ = \ell[G][\theta] \cap \ell((\theta^{-1})) [G]^+ .$$

Théorème 2.4.4. *Soit (\mathcal{O}, m) un anneau local complet. Soit $f \in \mathcal{O}[[X]] \setminus m[[X]]$ tel que $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$. On suppose que n est le plus petit n tel que $a_n \notin m$. Alors f a l'unique décomposition de Weierstrass $f = (X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_0).u$ avec $b_i \in m$ et $u \in \mathcal{O}[[X]]^\times$.*

Cela nous permet d'avoir la proposition suivante.

Proposition 2.4.5. *On a*

$$\ell((\theta^{-1})) [G]^\times = \ell((\theta^{-1})) [G]^+ \times \ell[\theta][G]^\times.$$

Démonstration. Comme $\phi_\Delta(\ell[G][\theta]^\times) = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}} \ell(\chi)[H][\theta]^\times$, il suffit de montrer la proposition lorsque G est un p -groupe.

D'après le lemme 2.2.1, $(\ell[H], I_H)$ est local. De plus, d'après la preuve ce même lemme, I_H est nilpotent. Il y a donc une bijection entre $\ell[H]$ et $\varprojlim_n \ell[H]/I_H^n \ell[H]$. Cela implique que $\ell[H]$ est I_H -adiquement complet. Soit $g = \sum_{i \geq n} a_i \theta^{-i} \in \ell((\theta^{-1})) [H]^\times$ avec $a_i \in \ell[H]$ et $a_n \neq 0$. Soit $s : \ell((\theta^{-1})) [H] \rightarrow \ell((\theta^{-1}))$ le morphisme de $\ell((\theta^{-1}))$ -algèbres d'augmentation. Comme g est une unité, $s(g) = \sum_{i \geq n} s(a_i) \theta^{-i}$ l'est aussi. On pose r le plus petit entier supérieur ou égal à n tel que $s(a_r) \neq 0$. Cela veut dire que r est le plus petit entier supérieur ou égal à n tel que $a_r \notin I_H$. On applique le théorème précédent à $\tilde{g} \in \ell[H][[\theta^{-1}]]$ où $\tilde{g} = \theta^n g = \sum_{i \geq n} a_i \theta^{-(i-n)}$. On a donc l'unique décomposition $\tilde{g} = (b_0 + b_1 \theta^{-1} + \dots + b_{r-1} \theta^{-(r-1)} + \theta^{-r})u$ où $b_i \in I_H$ et $u \in \ell[[\theta^{-1}]] [H]^\times$.

D'où $u = \sum_{i \geq 0} u_i \theta^{-i}$ avec $u_i \in \ell[H]$ et $u_0 \notin I_H$. On obtient donc

$$g = \theta^{-n} \tilde{g} = (u_0 b_0 \theta^r + u_0 b_1 \theta^{r-1} + \dots + u_0 b_{r-1} \theta + u_0) \theta^{-n-r} (1 + u_0^{-1} u_1 \theta^{-1} + \dots).$$

On pose

$$x = \theta^{-n-r} (1 + u_0^{-1} u_1 \theta^{-1} + \dots) \in \ell((\theta^{-1})) [H]^+$$

et

$$y = (u_0 b_0 \theta^r + u_0 b_1 \theta^{r-1} + \dots + u_0 b_{r-1} \theta + u_0) \in \ell[\theta][H]^\times.$$

En effet, comme $s(b_i) = 0$ et $s(u_0) \in \ell^\times$, on a $s(y) = s(u_0) \in \ell^\times$. D'où $y \in (\ell^\times + I_H[\theta]) = \ell[\theta][H]^\times$ par le lemme 2.2.1. On a bien $g = xy$ avec $x \in \ell((\theta^{-1})) [H]^+$ et $y \in \ell[\theta][H]^\times$. L'écriture est unique comme $\ell((\theta^{-1})) [H]^+ \cap \ell[\theta][H]^\times = \{1\}$. On obtient alors le résultat souhaité. □

Corollaire 2.4.6. *On a l'isomorphisme*

$$\ell((\theta^{-1})) [G]^\times / \ell[\theta][G]^\times = \ell((\theta^{-1})) [G]^+$$

qui a \hat{g} associe g^+ .

2.4.2 Idéaux de Fitting

Dans ce qui suit R est un anneau noethérien semilocal, c'est-à-dire R noethérien tel que $R = \bigoplus_i R_i$ où R_i local pour tout i . Soit N un $R[\theta]$ -module de type fini et un R -module projectif. Par exemple, comme dans [17] $R = \mathbb{F}_q[G]$ et $N = \mathcal{M}/v$ pour \mathcal{M} un module modéré L/K et $v \in \text{MSpec}(A)$ ou $N = \Lambda_1/\Lambda_2$ où $\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1$ sont deux $A[G]$ -réseaux projectifs de L_∞ .

On peut aussi regarder $R = \mathbb{F}_q(z)[G]$ ou les mêmes objets avec \mathcal{M} un module presque modéré.

Proposition 2.4.7. [17, Prop. 7.4.1] *Soit N un R -module de type fini qui est un R -module projectif.*

- *Si R est local et $\text{rg}_R(N) = n$ alors $\text{Fitt}_{R[\theta]}(N)$ est principal et a un unique générateur $|N|_{R[\theta]} \in R[\theta]^+$ qui est de degré n et est donné par $|N|_{R[\theta]} = \det_{R[\theta]}(\theta I_n - A_\theta)$ où $A_\theta \in M_n(R)$ est la matrice du R -endomorphisme de N donné par la multiplication par θ dans n'importe quelle R -base de N .*
- *Si R est semilocal alors $\text{Fitt}_{R[\theta]}(N)$ est principal et a un unique générateur $|N|_{R[\theta]} \in R[\theta]^+$ donné par $|N|_{R[\theta]} = \sum_i |N \otimes_R R_i|_{R_i[\theta]}$.*

Démonstration. On suppose que R est local. Soit \mathcal{B} une base de N sur R . N est libre car projectif sur un anneau local. On a la suite exacte :

$$R[\theta]^n \xrightarrow{f} R[\theta]^n \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

où $f \in \text{End}(R[\theta])$ a comme matrice $\theta I_n - A_\theta$ où $A_\theta \in M_n(R)$ est la matrice du R -endomorphisme de N donné par la multiplication par θ dans \mathcal{B} et π envoie la base usuelle de $R[\theta]^n$ sur \mathcal{B} . En effet, π est surjective car N de type fini et $\pi \circ f = 0$ par choix de f .

On veut montrer que $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(f)$. On note e_1, \dots, e_n la base de $R[\theta]^n$ et f_1, \dots, f_n celle R^n et $i : R^n \longrightarrow R[\theta]^n$ qui envoie les f_j sur les e_j .

On va d'abord montrer que $\text{Im}(f) + \text{Im}(i) = R[\theta]^n$. On a $f(e_j) = (\theta I_n - A_\theta)e_j$ et A_j est à valeurs dans R . Cela implique que $\bigoplus_{i=1}^n \theta R[\theta]e_j \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(i)$. De plus,

$$\text{Im}(i) = \bigoplus_{i=1}^n R e_j. \text{ Donc } \text{Im}(f) + \text{Im}(i) = R[\theta]^n.$$

Comme N est libre de rang n sur R , $\pi \circ i$ est un isomorphisme de R^n dans N . D'où $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(i) = \{0\}$.

On a donc $\text{Im}(f) + \text{Im}(i) = R[\theta]^n$, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\pi)$ et $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(i) = \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(\pi)$. Il existe $x_f \in \text{Im}(f)$ et $x_i \in \text{Im}(i)$ tels que $x = x_f + x_i$. On a donc $0 = \pi(x) = \pi(x_f) + \pi(x_i) = \pi(x_i)$, ce qui entraîne que $x_i = 0$. On a donc bien $\text{Ker}(\pi) \subset \text{Im}(f)$ et donc $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(f)$. Par définition des idéaux de Fitting, $\text{Fitt}_{R[\theta]}(N) = \det_{R[\theta]}(\theta I_n - A_\theta)$.

Le générateur est bien unique comme $R[\theta]^+ \cap R[\theta]^\times = \{1\}$. \square

On rappelle que $\ell[G][\theta]^+ = \ell[G][\theta] \cap \ell[G][\theta]((\theta^{-1}))^+$. Cela nous permet d'avoir la prochaine définition, introduite dans [17] lorsque $R = \mathbb{F}_q[G]$.

Définition 2.4.8. Si M est un $\ell[\theta][G]$ -module qui est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie et G -cohomologiquement trivial (c'est-à-dire $\ell[G]$ -projectif et de rang fini), alors on pose

$$|M|_G = |M|_{\ell[\theta][G]} \in \ell[G][\theta]^+.$$

Comme $\ell[\theta]$ est un anneau principal, il existe un unique générateur unitaire de $\text{Fitt}_{\ell[\theta]}(X)$. On note cet élément $|X|_{\ell[\theta]}$.

Lemme 2.4.9. [17, Prop. 7.4.3] Soit R un anneau noethérien semi-local. Soient B, C, D des $R[\theta]$ -modules de type fini et projectif comme R -modules. Si on a une suite exacte de $R[\theta]$ -modules

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

alors on a l'égalité $|B|_{R[\theta]}|D|_{R[\theta]} = |C|_{R[\theta]}$.

Démonstration. De la même manière que pour la proposition 2.4.7, il suffit de le montrer pour R local. Si R local, alors B, C et D sont R libres. On prend \mathcal{B} et \mathcal{D} des bases pour B et D respectivement. On pose n le nombre d'éléments de \mathcal{B} et m le nombre d'éléments de \mathcal{D} . Pour simplifier les notations, on voit $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ comme une base de C . Par la proposition précédente, dans cette base, $|C|_{R[\theta]} = \det_{R[\theta]}(\theta I_{n+m} - A_\theta)$ où A_θ est la matrice de la multiplication par θ où $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$. De plus, comme A_θ est une matrice diagonale de blocs $A_{\mathcal{B}}$ et $A_{\mathcal{D}}$ qui sont respectivement les matrices de la multiplication par θ dans \mathcal{B} et \mathcal{D} . On a donc bien

$$|C|_{R[\theta]} = \det_{R[\theta]}(\theta I_n - A_{\mathcal{B}}) \det_{R[\theta]}(\theta I_m - A_{\mathcal{D}}) = |B|_{R[\theta]}|D|_{R[\theta]}.$$

□

2.5 Formule de trace équivariante

2.5.1 Opérateurs nucléaires

Dans ce qui suit, $R_\ell = \ell[G]$ où $\ell = \mathbb{F}_q$ ou $\mathbb{F}_q(z)$. Tout ce qui suit a été traité dans [17] pour le cas où $\ell = \mathbb{F}_q$. On vérifie que les mêmes arguments fonctionnent pour $\ell = \mathbb{F}_q(z)$.

Soit V un R_ℓ -module qui est R_ℓ -projective.

On regarde le déterminant de V comme R_ℓ -module et non pas comme ℓ -espace vectoriel. Dans ce cas, on regarde les déterminants d'endomorphismes continus de R_ℓ -modules de type fini et projectifs.

Définition 2.5.1. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \geq m}$ une suite de R_ℓ -sous modules de V ouverts qui vérifient :

- pour tout i , V/U_i est de type fini,
- chaque U_i est G -cohomologiquement trivial,
- pour tout $i \geq m$, $U_{i+1} \subset U_i$,
- \mathcal{U} est une base de voisinage d'ouverts de 0 dans V .

On suppose d'abord que \mathcal{U} existe et on définit tout ce qui suit pour (V, \mathcal{U}) . On verra ensuite que les prochaines définitions ne dépendent pas du \mathcal{U} choisi.

Définition 2.5.2. Soit ϕ un endomorphisme de V . On dit que ϕ est localement contractant pour \mathcal{U} s'il existe $I \in \mathbb{N}$ supérieur à M tel que $\phi(U_i) \subset U_{i+1}$ pour tout $i \geq I$. Un voisinage $U = U_I$ de 0 avec cette propriété est appelé un nucleus pour ϕ .

En particulier, si V est un R_ℓ -module de type fini, on peut prendre $U_i = \{0\}$ pour $i \geq 1$. Chaque endomorphisme de V est alors localement contractant dans ce cas.

Proposition 2.5.3. *Chaque ensemble fini d'endomorphismes localement contractants de V pour \mathcal{U} ont un nucleus commun.*

Démonstration. Chaque endomorphisme ϕ_i admet un nucleus qu'on note U_{I_i} . On pose $I = \max_i I_i$. L'ouvert U_I est un nucleus commun pour ces endomorphismes. □

Proposition 2.5.4. *Si ϕ et ψ sont localement contractants pour \mathcal{U} alors $\phi + \psi$ et $\phi \circ \psi$ le sont également.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on peut prendre U_I un nucléus commun pour ϕ et ψ . On a donc par définition $\phi(U_i) \subset U_{i+1}$ et $\psi(U_i) \subset U_{i+1}$ pour tout

$i \geq I$. D'où $(\phi + \psi)(U_i) \subset U_{i+1}$ pour tout $i \geq I$. Donc $\phi + \psi$ est localement contractant pour \mathcal{U} .

De même comme $\psi(U_i) \subset U_{i+1}$ pour tout $i \geq I$, $\phi \circ \psi(U_i) \subset \phi(U_{i+1}) \subset U_{i+2} \subset U_{i+1}$ pour tout $i \geq I$. Donc $\phi \circ \psi$ est localement contractant pour \mathcal{U} . \square

Soit $R_\ell[[Z]]$ l'anneau des séries formelles en Z à coefficients dans R_ℓ . On considère les $R_\ell[[Z]]$ -modules

$$V[[Z]]/Z^N = V \otimes_{R_\ell} R_\ell[[Z]]/Z^N \quad \text{et} \quad V[[Z]] = \varprojlim_N V[[Z]]/Z^N.$$

Chaque endomorphisme continu $R_\ell[[Z]]$ -linéaire ψ de $V[[Z]]$ (respectivement $R_\ell[[Z]]/Z^N$ endomorphisme linéaire de $V[[Z]]/Z^N$) est de la forme $\psi = \sum_{r \geq 0} \phi_r Z^r$ (respectivement

$$\psi = \sum_{r \geq 0}^{N-1} \phi_r Z^r) \text{ où les } \phi_r \text{ sont des endomorphismes de } V.$$

Si V est un R_ℓ -module de type fini et projectif alors $V[[Z]]/Z^N$ et $V[[Z]]$ sont respectivement des $R_\ell[[Z]]/Z^N$ et $R_\ell[[Z]]$ -modules projectifs de type fini. On note dorénavant

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(\psi|V) = \det_{R_\ell[[Z]]}(\psi|V[[Z]]) \text{ et } \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(\psi|V) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(\psi|V[[Z]]/Z^N).$$

Pour la suite, on suppose que V n'est pas nécessairement de type fini mais que c'est un R -module G -cohomologiquement trivial. On va voir comment prendre le déterminant dans ce cas. Pour $j \geq i \geq m$, V et les U_i sont G -cohomologiquement triviaux donc les V/U_i et U_i/U_j le sont également. Les R_ℓ -modules V/U_i et U_i/U_j sont donc de type fini et projectifs.

Définition 2.5.5. On dit qu'un endomorphisme $R_\ell[[Z]]$ -linéaire continu ϕ de $V[[Z]]$ (respectivement $V[[Z]]/Z^N$) est nucléaire si pour tout $r \geq 0$ (respectivement tout r tel que $N > r \geq 0$) les endomorphismes ϕ_r de V sont localement contractants.

Proposition 2.5.6. [17, Proposition 2.1.9] Soit $\psi : V[[Z]]/Z^N \rightarrow V[[Z]]/Z^N$ un endomorphisme nucléaire. Soient $U = U_J$ et $W = U_I$ des nuclei communs pour les ϕ_r . Alors

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/U) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/W).$$

Démonstration. On suppose que $I \leq J$, c'est-à-dire $U \subset W$. On a donc la suite suivante

$$W = U_I \supseteq U_{I+1} \supseteq \dots \supseteq U_{J-1} \supseteq U_J = U$$

où $\phi_r(U_i) \subseteq U_{i+1}$ pour $r \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket I; J-1 \rrbracket$. Alors $(1 + \psi)$ induit l'identité sur les U_i/U_{i+1} . On a donc

$$\begin{aligned} \det_{R[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/U) &= \det_{R[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/W) \prod_{i=I}^{J-1} \det_{R[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|U_i/U_{i+1}) \\ &= \det_{R[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/W). \end{aligned}$$

□

Par cette proposition, on voit que le déterminant ne dépend pas du nucléus choisi. On peut donc avoir la définition suivante.

Définition 2.5.7. Soit ψ un endomorphisme nucléaire de $V[[Z]]/Z^N$. On définit

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V/U)$$

où U est un nucléus commun aux ϕ_r .

De plus, si ψ est un endomorphisme nucléaire pour $V[[Z]]$, on définit le déterminant de $(1 + \psi)$ dans $R_\ell[[Z]] = \varinjlim_{\mathbb{N}} R_\ell[[Z]]/Z^N$ par

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V) = \lim_{\mathbb{N}} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V).$$

Proposition 2.5.8. [17, Proposition 2.1.12] Soient ϕ et ψ deux endomorphismes nucléaires de $V[[Z]]$. Alors l'endomorphisme $(1 + \phi)(1 + \psi) - 1$ est nucléaire et

$$\det_{R_\ell[[Z]]}((1 + \psi)(1 + \phi)|V) = \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V) \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \phi|V).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.5.4, $(1 + \phi)(1 + \psi) - 1$ est nucléaire. De plus, le déterminant est multiplicatif. □

Proposition 2.5.9. [17, Proposition 2.1.13] Soit $V' \subset V$ un R_ℓ -sous-module fermé de V qui est G -cohomologiquement trivial. On pose $V'' = V/V'$. Soient $\mathcal{U}' = \{U'_i\}_i$, où $U'_i = U_i \cap V'$ et $\mathcal{U}'' = \{U''_i\}_i$ où U''_i est l'image de U_i dans V/V' . On suppose que les U'_i et U''_i sont G -cohomologiquement triviaux. Soit $\psi = \sum \phi_r Z^r : V[[Z]] \rightarrow V[[Z]]$ un endomorphisme nucléaire tel que $\phi_r(V') \subset V'$ pour tout r . Alors les endomorphismes induits par ψ sur (V', \mathcal{U}') et (V'', \mathcal{U}'') sont nucléaires. De plus,

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V) = \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V') \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V'').$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui nous donne le résultat souhaité. \square

On suppose que V est un compact, R_ℓ -module G -cohomologiquement trivial. On veut montrer que le déterminant de V ne dépend pas du choix de la base. Soient $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ et $\mathcal{U}' = \{U'_i\}_i$ deux bases de V comme dans la définition 2.5.1. Soient $\psi \in \text{End}_{R_\ell}(V)$ et $\phi = \phi_r Z^r \in \text{End}_{R_\ell[[Z]]}(V[[Z]])$ tels que ψ est localement contractant et ϕ nucléaire en \mathcal{U} et \mathcal{U}' .

Définition 2.5.10. [17, Definition 2.2.1] On dit que \mathcal{U} domine \mathcal{U}' en ψ , on l'écrit $\mathcal{U} \succeq_\psi \mathcal{U}'$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $i \geq N$, il existe $j \geq N$ tels que $U_i \supseteq U'_j$ et $\psi(U_i) \subseteq U'_j$.

On dit que \mathcal{U} domine \mathcal{U}' en ϕ , on l'écrit $\mathcal{U} \succeq_\phi \mathcal{U}'$ si pour tout r , $\mathcal{U} \succeq_{\phi_r} \mathcal{U}'$.

Lemme 2.5.11. Soient V, ψ, \mathcal{U} et \mathcal{U}' tels que $\mathcal{U} \succeq_\psi \mathcal{U}'$. Alors

$$\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \psi|V) = \det'_{R_\ell[[Z]]} (1 + \psi|V).$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour i et j suffisamment grands, on a $U_i \supseteq U'_j$ et $\phi_r(U_i) \subseteq U'_j$ pour $r < N$ et U_i, U'_j des nucléi communs pour $\phi_0, \dots, \phi_{N-1}$. On regarde la suite exacte de R -modules de type fini et G -cohomologiquement triviaux :

$$0 \longrightarrow U_i/U'_j \longrightarrow V/U'_j \longrightarrow V/U_i \longrightarrow 0.$$

Comme ϕ_r est l'application nulle sur U_i/U'_j , on a

$$\det_{R[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|V/U_i) = \det_{R[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|V/U'_j),$$

ce qui nous donne le résultat souhaité en faisant tendre N vers ∞ . \square

2.5.2 Quelques bonnes bases

On va voir maintenant des exemples de R_ℓ -modules compacts et projectifs, ainsi que des bases d'ouverts et G -cohomologiquement triviaux associés que l'on pourrait utiliser pour calculer nos déterminants.

Soit (M, \mathcal{W}^∞) une paire presque modérée pour L/K . Pour $P \in \text{Spec}(A)$, on note $\widehat{A}_{P,\ell}$ la complétion P -adique de $\ell[\theta]$ et $\widehat{\ell(\theta)}_P$ la complétion P -adique de $\ell(\theta)$. On pose $M_\ell = M \otimes_{\mathbb{F}_q} \ell$. Cela veut dire que $M_\ell = M$ quand $\ell = \mathbb{F}_q$ et $M_\ell = \widetilde{M}$ quand $\ell = \mathbb{F}_q(z)$. De la même manière, $\mathcal{W}_\ell^\infty = \mathcal{W}^\infty \otimes_{\mathbb{F}_q} \ell$. On pose pour $i \geq 0$,

$$U_{i,P,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} P^i \widehat{A}_{P,\ell} \text{ et } U_{i,\infty,\ell} = \mathcal{W}_\ell^\infty \otimes_{\ell(z)[[\theta^{-1}]]} \theta^{-i} \ell[[\theta^{-1}]].$$

Ces $U_{i,P,\ell}$ et $U_{i,\infty,\ell}$ sont G -cohomologiquement triviaux par choix de M et \mathcal{W}^∞ et forment une suite décroissante pour l'inclusion.

Soit V un élément de la classe \mathcal{C} qui correspond aux $\ell[G]$ -modules compacts qui vérifie une suite exacte $0 \rightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})/\Lambda \rightarrow V \rightarrow H \rightarrow 0$ où Λ est un $\ell[\theta][G]$ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$ et H est un $\ell(\theta)$ -espace vectoriel de dimension finie qui est un $\ell[\theta][G]$ -module. On veut construire une base \mathcal{U} de V . Pour ce faire, on va utiliser des R_ℓ -sous-modules de $L_{\infty,\ell}$ qui sont G -cohomologiquement triviaux. Pour $i \geq 0$, on prend $U_{i,\infty,\ell} \subseteq L_{\infty,\ell}$.

Ce sont bien des R_ℓ -sous-modules G -cohomologiquement triviaux de $L_{\infty,\ell}$ et ils forment une base de voisinage ouverts de 0 dans $L_{\infty,\ell}$.

Comme Λ est discret, il existe $r \geq 0$ tel que $(U_{r,\infty,\ell})^n \cap \Lambda = \{0\}$. Pour $i \geq r$, on associe $(U_{i,\infty,\ell})^n$ avec son image dans la suite exacte. Si on définit $\mathcal{U} = \{U_{i,\infty,\ell}\}_{i \geq r}$, alors \mathcal{U}^n nous donne une bonne base de V .

Soit S un ensemble fini de premiers de k contenant ∞ . On pose V_ℓ le $\ell(\theta)$ -espace vectoriel engendré par M_ℓ (i.e., $V = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)$). Pour P un premier irréductible unitaire de $\ell[\theta]$, on note $V_{P,\ell} = V_\ell \otimes_{\ell(\theta)} \widehat{\ell(\theta)}_P$, $M_{P,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \widehat{\ell[\theta]}_P$. On définit également $V_{S,\ell} = \prod_{P \in S} V_{P,\ell}$ et $M_{S,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell[\theta]_S$ où $\ell[\theta]_S$ est l'anneau des S -entiers (i.e., $\ell[\theta]_S = \{a \in \ell(\theta) \mid \forall v \notin S, v(a) \geq 0\}$). On va d'abord voir que $M_{S,\ell}$ est un réseau de $V_{S,\ell}$.

Lemme 2.5.12. *Soit S un ensemble fini de premiers de k contenant ∞ . Alors $M_{S,\ell}$ est discret dans $V_{S,\ell}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le cardinal de S .

Pour $|S| = 1$. On a $M_{S,\ell} = M_\ell$ est bien discret dans

$$V_{\infty,\ell} = (M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)) \otimes_{\ell(\theta)} \ell((\theta^{-1})) = \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$$

car c'est un réseau.

On cherche à montrer que si pour tout S de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ $M_{S,\ell}$ est discret dans $V_{S,\ell}$ alors pour tout S' de cardinal $n + 1$, $M_{S',\ell}$ est discret dans $V_{S',\ell}$. Soit S' de cardinal $n + 1$. Il existe $S \subset S'$ de cardinal n et $P \neq \infty$ tels que $S' = S \cup \{P\}$. Soit U un

voisinage de 0 dans $V_{S',\ell}$ tel que $U \cap (M_{S,\ell} \times V_{P,\ell}) \subset \{0\} \times \{x | v_P(x) > 0\}$. C'est possible de prendre un tel U car $M_{S,\ell}$ est discret dans $V_{S,\ell}$.

On prend $\alpha \in U \cap M_{S',\ell}$ non nul. Alors $\alpha \in M_{S',\ell} \setminus M_{S,\ell}$. Cela veut dire que $v_P(\alpha) < 0$ ce qui est absurde par choix de U . Donc $\alpha = 0$ et $M_{S',\ell}$ est discret dans $V_{S',\ell}$. \square

Lemme 2.5.13. *Soit S un ensemble fini de premiers de k contenant ∞ . Alors $M_{S,\ell}$ est un réseau de $V_{S,\ell}$.*

Démonstration. Soit $S = \{\infty, P_1, \dots, P_s\}$. On construit de manière itérative pour $i = 1, \dots, s$, $\theta_i = \frac{P_i \theta_{i-1} - 1}{P_i}$ en considérant que $\theta_0 = \theta$. On pose pour $i = 1, \dots, s$, $\infty_i = \theta_i^{-1}$ et $\infty_0 = \infty$. Par choix de θ_i , pour $i = 1, \dots, s$, $v_{\infty_{i-1}}(\theta_i) = -1$ et $v_{P_i}(\theta_i) = -1$. Par construction, on a donc que les places au dessus de θ_s sont les éléments de S . On pose $k'_\ell = \ell(\theta_s)$ et $A'_\ell = \ell[\theta_s]$. La fermeture intégrale de $\ell[\theta_s]$ dans $\ell(\theta)$ correspond donc à $\ell[\theta]_S$. On prend e_1, \dots, e_n une base de $\ell[\theta]_S$ sur A'_ℓ , c'est-à-dire, $\ell[\theta]_S = \bigoplus_{i=1}^n A'_\ell e_i$. On pose $M'_\ell = M_\ell \otimes_{A_\ell} A'_\ell$. Soit f_1, \dots, f_m une base de M_ℓ sur A_ℓ .

On a donc

$$\begin{aligned} M_{S,\ell} &= M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} A_{S,\ell} \\ &= \left(\bigoplus_{j=1}^m \ell[\theta] f_j \right) \otimes_{\ell[\theta]} \left(\bigoplus_{i=1}^n A'_\ell e_i \right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^m \left(\bigoplus_{i=1}^n A'_\ell e_i f_j \right). \end{aligned}$$

$M_{S,\ell}$ est donc de rang nm sur A'_ℓ .

De la même manière,

$$\begin{aligned} V_{S,\ell} &= \prod_{Q \in S} V_{Q,\ell} \\ &= (M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)) \otimes_{\ell(\theta)} \prod_{Q \in S} \ell(\theta)_Q \\ &= (M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)) \otimes_{\ell(\theta)} (\ell(\theta) \otimes_{k'_\ell} k'_{\ell, \infty_s}) \\ &= \left(\bigoplus_{j=1}^m \ell(\theta) f_j \right) \otimes_{\ell(\theta)} \left(\bigoplus_{i=1}^n k'_{\ell, \infty_s} e_i \right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^m \left(\bigoplus_{i=1}^n k'_{\ell, \infty_s} e_i f_j \right). \end{aligned}$$

$V_{S,\ell}$ est donc un k'_{ℓ, ∞_s} espace vectoriel de dimension nm . $V_{S,\ell}$ est donc engendré par $M_{S,\ell}$ sur $\ell((\theta^{-1}))$. De plus, d'après le lemme 2.5.12, $M_{S,\ell}$ est discret dans $V_{S,\ell}$. Cela implique donc que $M_{S,\ell}$ est un réseau dans $V_{S,\ell}$. □

On peut voir que $V_{S,\ell}$ est G -cohomologiquement trivial comme les $V_{P,\ell}$ le sont et $V_{S,\ell} = \prod_{P \in S} V_{P,\ell}$.

Comme M_ℓ est $\ell[\theta][G]$ -projectif alors $M_{S,\ell}$ est $\ell[\theta]_S[G]$ -projectif. Donc $M_{S,\ell}$ est G -cohomologiquement trivial, ce qui implique que $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$ l'est également.

Donc $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$ est un R_ℓ -module projectif compact. Comme précédemment, on prend une base de R_ℓ -modules G -cohomologiquement triviaux de $V_{S,\ell}$ qui induit une base de R_ℓ -sous modules ouverts de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$. Pour $i \geq 0$ et $P \in S \cap \text{Spec}(\ell[\theta])$, on note $U_{i,P,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} P^i \widehat{\ell[\theta]}_P$. Pour $i \geq 0$, on a $U_{i,\infty,\ell} = \mathcal{W}_\ell^\infty \otimes_{\ell[[\theta^{-1}]]} \theta^{-i} \ell[[\theta^{-1}]]$. On pose

$$U_{i,S,\ell} = \prod_{v \in S \setminus \infty} U_{i,v,\ell} \times U_{i,\infty,\ell} \subseteq \prod_{v \in S} V_{v,\ell} = V_{S,\ell}.$$

$(U_{i,S,\ell})_{i \geq 0}$ forme une base de R_ℓ -modules projectifs de $V_{S,\ell}$. Comme $M_{S,\ell}$ est discret dans $V_{S,\ell}$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{r,S,\ell} \cap M_{S,\ell} = \{0\}$. Pour $i \geq r$, on identifie $U_{i,S,\ell}$ avec leur image dans $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$. On pose $\mathcal{U} = (U_{i,S,\ell})_{i \geq r}$. Cela nous donne une bonne base pour $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$.

On fixe d'abord une paire presque modérée (M, \mathcal{W}^∞) pour L/K . On va voir que le déterminant de dépend pas du choix de cette base. On pose $\mathcal{O}_{K,S,\ell} = \mathcal{O}_{K,S} \otimes_{\mathbb{F}_q} \ell$.

Lemme 2.5.14. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Soit $\phi = a\tau^s$ pour $a \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})$ et $s \geq 1$. Alors ϕ est un endomorphisme localement contractant de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$ pour la base induite par (M, \mathcal{W}^∞) .*

Démonstration. Comme $M_{S,\ell}$ est un $\mathcal{O}_{K,S,\ell}\{\tau\}$ -module, ϕ est un endomorphisme de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq (1 - v(a))$ pour tout $v \in S$. Par définition, on a $\tau(U_{v,\ell}) \subset U_{v,\ell}$. Donc pour $i \geq m$, on a $\phi(U_{i,v,\ell}) \subset U_{i+1,v,\ell}$. En effet, pour $v \in S$ et $x \in U_{i,v,\ell}$, $v(\phi(x)) = v(a) + q^s v(x) \geq 1 - m + q^s i \geq i + 1$. □

Corollaire 2.5.15. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Chaque $\phi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau$ est un endomorphisme localement contractant de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$ pour la base induite par (M, \mathcal{W}^∞) . De plus, $\psi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau[[Z]]$ est un endomorphisme nucléaire de $(V_{S,\ell}/M_{S,\ell})[[Z]]$ pour cette base.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, $\phi = a\tau^m$ avec $a \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})$ et $m \geq 1$ est un endomorphisme localement contractant de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$. Donc d'après la proposition 2.5.4, on a $\phi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau$ est un endomorphisme localement contractant de $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$. \square

Proposition 2.5.16. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Soient $a \in \text{Gl}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})$ et $b \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})$ et $\phi = b\tau^s$ pour $s \geq 1$. Alors pour tout $m \geq 1$,*

$$\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + a\phi Z^m | V_{S,\ell}/M_{S,\ell}) = \det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \phi a Z^m | V_{S,\ell}/M_{S,\ell}).$$

Démonstration. On suppose $b \neq 0$. On pose

$$\begin{array}{ccc} \phi_a & : & V_{S,\ell}/M_{S,\ell} \rightarrow V_{S,\ell}/M_{S,\ell} \\ & & x \mapsto ax \end{array}.$$

D'après le lemme 2.5.14, $\phi, \phi_a\phi$ et $\phi\phi_a$ sont localement contractants.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

- $U_{k,S,\ell} \cap M_{S,\ell} = \{0\}$,
- $U_{k,S,\ell}$ est un nucléus pour $\phi, \phi_a\phi$ et $\phi\phi_a$,
- $j = \min(\{k + v(b) | v \in S\}) > \max(\{0\} \cup \{-v(a) | v \in S\})$.

On a le diagramme commutatif de R_ℓ -modules

$$\begin{array}{ccc} \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} & \xrightarrow{\phi_a} & \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{k,S,\ell}} \\ \downarrow \phi\phi_a & & \downarrow \phi_a\phi \\ \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} & \xrightarrow{\phi_a} & \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{k,S,\ell}}. \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des isomorphismes comme a est inversible.

On a choisi k de sorte que $\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell}) \cong U_{k,S,\ell}$ (car $U_{k,S,\ell} \cap M_{S,\ell} = \{0\}$). D'où $\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})$ est G -cohomologiquement trivial.

Donc $\det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi\phi_a Z^m \middle| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} \right)$ est bien défini. De par le diagramme, on obtient

$$\det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi\phi_a Z^m \middle| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} \right) = \det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi_a\phi Z^m \middle| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{k,S,\ell}} \right).$$

De plus, $U_{k,S,\ell}$ est un nucléus pour $\phi_a\phi$, donc

$$\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \phi_a\phi Z^m | V_{S,\ell}/M_{S,\ell}) = \det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi_a\phi Z^m \middle| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{k,S,\ell}} \right).$$

Comme $j = \min\{k + v(b) | v \in S\}$, $\phi\phi_a(\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})) \subset U_{k+j,S,\ell}$. De plus, $j > \max(\{0\} \cup \{-v(a) | v \in S\})$. D'où $U_{k+j,S,\ell} \subset \phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})$. Par ce choix de j , on a donc

$$\phi\phi_a(\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})) \subset U_{k+j,S,\ell} \subset \phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell}).$$

D'où $\det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi\phi_a Z^m \left| \frac{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})}{U_{k+j,S,\ell}} \right. \right) = 1$. On a la suite exacte de R_ℓ -modules projectifs de type fini :

$$0 \longrightarrow \frac{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})}{U_{k+j,S,\ell}} \longrightarrow \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{j+k,S}} \longrightarrow \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} \longrightarrow 0.$$

Comme $U_{k,S,\ell}$ est un nucléus pour $\phi\phi_a$ et $j > 0$, on a que $U_{j+k,S}$ l'est aussi. On a donc

$$\begin{aligned} \det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \phi\phi_a Z^m | V_{S,\ell}/M_{S,\ell}) &= \det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi\phi_a Z^m \left| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{U_{k+j,S}} \right. \right) \\ &= \det_{R_\ell[[Z]]} \left(1 + \phi\phi_a Z^m \left| \frac{V_{S,\ell}/M_{S,\ell}}{\phi_a^{-1}(U_{k,S,\ell})} \right. \right) \\ &= \det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \phi_a \phi Z^m | V_{S,\ell}/M_{S,\ell}). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.5.17. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Soit $\psi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau$ vu comme $R_\ell[[Z]]$ -endomorphisme de $R_\ell[[Z]]$. Alors le déterminant $\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \psi | V_{S,\ell}/M_{S,\ell})$ est indépendant du choix de la paire presque modérée.*

Démonstration. Soient $(M'', \mathcal{W}^\infty)$ et $(M', \mathcal{W}'^\infty)$ deux paires presque modérées pour L/K . Soient \mathcal{U} et \mathcal{U}' deux bases de voisinages ouverts de 0 dans V_S/M_S construits comme ce qu'on a vu. Soit $\psi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau$. On montre d'abord que $\mathcal{U} \succeq_\psi \mathcal{U}'$. Soit $v \in S$, il existe $a_v, b_v \in \mathbb{N}$ tels que $U'_{i+a_v, v, \ell} \subseteq U''_{i, v, \ell}$ et $U''_{i+b_v, v, \ell} \subseteq U'_{i, v, \ell}$ pour tout i suffisamment grand.

On pose $a = \max(a_v)$ et $b = \max(b_v)$. On a $U'_{i+a, S, \ell} \subseteq U''_{i, S, \ell}$ et $U''_{i+b, S, \ell} \subseteq U'_{i, S, \ell}$ pour i suffisamment grand. Comme $\psi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(U''_{i, S, \ell}) \subseteq U''_{i-k, S, \ell}$ pour i suffisamment grand.

Si i vérifie $iq - k > i + b + a$ et i suffisamment grand, alors

$$\psi(U''_{i, S, \ell}) \subseteq U''_{iq-k, S, \ell} \subset U''_{i+b+a, S, \ell} \subset U'_{i+a, S, \ell}.$$

Donc $U'_{i+a, S, \ell} \subseteq U''_{i, S, \ell}$ et $\psi(U_{i, S, \ell}) \subseteq U'_{i+a, S, \ell}$ pour i suffisamment grand et $i \gg a + b + k$. On a donc $\mathcal{U}'' \succeq_\psi \mathcal{U}'$. Dans ce cas, le déterminant est le même pour \mathcal{U}'' et \mathcal{U}' . On a donc le résultat souhaité pour les bases induites par deux paires presque modérées □

2.5.3 Formule de traces

Dans cette section, on prend (M, \mathcal{W}^∞) une paire presque modérée pour L/K . Cette section a été traitée dans [17] pour $\ell = \mathbb{F}_q$ et E un module de Drinfeld.

Lemme 2.5.18. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Soit $P \in \text{MSpec}(\ell[\theta]) \setminus S$ et $S' = S \cup \{P\}$. Alors pour $f \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$, on a*

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|M_\ell/PM_\ell) = \frac{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|V_{S',\ell}/M_{S',\ell})}{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|V_S/M_{S,\ell})}.$$

Démonstration. On rappelle que $V_\ell = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)$, $V_{P,\ell} = V_\ell \otimes_{\ell(\theta)} \widehat{\ell(\theta)}_P$, $V_{S,\ell} = \prod_{P \in S} V_{P,\ell}$,

$V_{S',\ell} = V_{S,\ell} \times V_{P,\ell}$, $\widehat{M}_{P,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \widehat{\ell[\theta]}_P$ et $M_{S,\ell} = M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell[\theta]_S$.

On veut d'abord montrer qu'on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \widehat{M}_{P,\ell} \xrightarrow{\psi} \frac{V_{S',\ell}}{M_{S',\ell}} \xrightarrow{\eta} \frac{V_{S,\ell}}{M_{S,\ell}} \longrightarrow 0$$

où pour $a \in \widehat{M}_{P,\ell}$, $\psi(a) = \overline{(0, a)} \in \frac{V_{S',\ell}}{M_{S',\ell}}$. Comme $\widehat{\ell(\theta)}_P = \ell[\theta]_{S'} + \widehat{\ell[\theta]}_P$, on a

$$\begin{aligned} V_P &= V_\ell \otimes_{\ell(\theta)} \widehat{\ell(\theta)}_P \\ &= (M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell(\theta)) \otimes_{\ell(\theta)} (\ell[\theta]_{S'} + \widehat{\ell[\theta]}_P) \\ &= M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} (\ell[\theta]_{S'} + \widehat{\ell[\theta]}_P) \\ &= M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \ell[\theta]_{S'} + M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} \widehat{\ell[\theta]}_P \\ &= M_{S',\ell} + \widehat{M}_{P,\ell}. \end{aligned}$$

Donc pour $b \in V_{P,\ell}$, il existe $a' \in M_{S',\ell}$ et $b' \in \widehat{M}_{P,\ell}$ tels que $b = a' + b'$. On définit η tel que pour $a \in V_{S,\ell}$ et $b \in V_{P,\ell}$, $\eta(\overline{(a, b)}) = \overline{a - a'}$.

On montre d'abord que η est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend ni du choix de l'écriture de b , ni du choix du représentant de la classe. On écrit $b = a' + b' = a'' + b''$ où $a', a'' \in M_{S',\ell}$ et $b', b'' \in M_{P,\ell}$. On a donc $a' - a'' = b'' - b' \in M_{S',\ell} \cap \widehat{M}_{P,\ell} = M_{S,\ell}$ comme $\ell[\theta]_{S'} \cap \widehat{\ell[\theta]}_P = \ell[\theta]_S$. Cela implique qu'on a bien $\overline{a - a'} = \overline{a - a''}$.

Soient $(a; b)$ et $(c; d)$ deux représentants de la même classe. Il existe donc $m \in M_{S',\ell}$ tel que $(c; d) = (a; b) + m = (a+m; b+m)$. On obtient alors que $d = a' + m + b'$ si $b = a + b'$.

Comme $a' + m \in M_{S',\ell}$, on a $\eta(\overline{(c, d)}) = \overline{c - (a' + m)} = \overline{a + m - a' - m} = \eta(\overline{(a, b)})$.
 Pour $b \in \widehat{M}_{P,\ell}$, on a bien $\eta(\psi(b)) = 0$.

Soit $(a, b) \bmod M_{S',\ell} \in \text{Ker}(\eta)$. Il existe donc $a' \in M_{S',\ell}$, $b' \in M_{P,\ell}$ tels que $b = a' + b'$.

Comme $a' \in M_{S',\ell}$, $b' \in M_{P,\ell}$, on a $(a, b) - (a', a') = (a - a', b - a') = (0, b')$. D'où $\text{Ker}(\eta) \subset \text{Im}(\psi)$.

On a les voisinages ouverts de 0 : \mathcal{U} et \mathcal{U}' sur $V_{S,\ell}/M_{S,\ell}$ et $V_{S',\ell}/M_{S',\ell}$, induits par la paire presque modérée (M, \mathcal{W}^∞) .

On a $\mathcal{U} = \prod_{v \in S \setminus \infty} \mathcal{U}_v \times \mathcal{U}_\infty^n$ et $\mathcal{U}' = \prod_{v \in S' \setminus \infty} \mathcal{U}_v \times \mathcal{U}_\infty^n$ où $\mathcal{U}_v = \{M_\ell \otimes_{\ell[\theta]} v^i \widehat{\ell[\theta]}_v\}_{i \geq 1}$ pour $v \in \text{Spec}(\ell[\theta])$ et $\mathcal{U}_\infty = \{\mathcal{W}_\ell \otimes_{\ell[\theta^{-1}]} \theta^{-i} \ell[\theta^{-1}]\}_{i \geq 1}$. On a $\eta(\mathcal{U}') = \mathcal{U}$ et $\psi^{-1}(\mathcal{U}') = \mathcal{U}_P$.

Comme $f \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$, on a $f_r \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}\tau$. Donc ils commutent avec ψ et η et sont localement contractants pour $\mathcal{U}_P, \mathcal{U}$ et \mathcal{U}' .

On obtient alors

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|V_{S',\ell}/M_{S',\ell}) = \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|M_{P,\ell}) \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \phi|V_{S,\ell}/M_{S,\ell}).$$

Comme $f \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$ et $P \notin S$, $f_r(P\widehat{M}_{P,\ell}) \subset P\widehat{M}_{P,\ell}$. Cela implique qu'on peut prendre $P\widehat{M}_{P,\ell}$ comme nucleus commun pour les f_r . De plus, $\widehat{M}_{P,\ell}/P\widehat{M}_{P,\ell} \cong M_\ell/PM_\ell$. On a donc

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|\widehat{M}_{P,\ell}) = \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|M_\ell/PM_\ell) = \frac{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|V_{S',\ell}/M_{S',\ell})}{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + f|V_{S,\ell}/M_{S,\ell})}.$$

□

Le prochain théorème est le même que [11, Proposition 3.5] mais pour $\ell[G]$ au lieu de ℓ , ou $\ell[G]$ à la place de $\mathbb{F}_q[G]$ pour [17, Theorem 3.0.2].

Théorème 2.5.19. *Soit S un ensemble fini de premiers de $\ell(\theta)$ contenant ∞ . Soit $P \in \text{Spec}(\ell[\theta]) \setminus S$ et $S' = S \cup \{P\}$. Soit $\psi \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$. On a*

$$\prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_S)} \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|M_\ell/vM_\ell) = \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \psi|V_{S,\ell}/M_{S,\ell})^{-1}.$$

Démonstration. Soit $\psi = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r Z^r \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,S,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$. On veut montrer qu'on a l'égalité

$$\prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_S)} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|M_\ell/vM_\ell) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \psi|V_S/M_{S,\ell})^{-1}.$$

Soit $D = D_N$ tel que $\deg_r \psi_r < \frac{rD}{N}$ pour tout $r < N$. On pose

$$T = T_D = S \cup \{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_S) \mid \forall w|v, [\mathcal{O}_{K,S,\ell}/w : \ell] < D\}.$$

En appliquant successivement le lemme précédent, on obtient

$$\prod_{v \in T \setminus S} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|M_\ell/vM_\ell) = \frac{\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|V_{T,\ell}/M_{T,\ell})}{\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|V_{S,\ell}/M_{S,\ell})}.$$

De plus, $\text{MSpec}(\ell[\theta]_S) = T \setminus S \cup \text{MSpec}(\ell[\theta]_T)$. On a donc

$$\prod_{v \in \text{Spec}(\ell[\theta]_S)} X_v = \prod_{v \in \text{Spec}(\ell[\theta]_T)} X_v \prod_{v \in T \setminus S} X_v \text{ où } X_v = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|M_\ell/vM_\ell).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_T)} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|M_\ell/vM_\ell) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi|V_T/M_{T,\ell})^{-1}.$$

On pose $\mathcal{S}_{D,N} \subset \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,T,\ell})\{\tau\}[[Z]]/Z^N$ de la manière suivante

$$\mathcal{S}_{D,N} = \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{N-1} \psi_r Z^r \pmod{Z^N} \mid \deg_r(\psi_r) < \frac{rD}{N} \text{ pour tout } r < N \right\}.$$

C'est un groupe multiplicatif auquel appartient $(1 + \psi) \pmod{Z^N}$ par choix de D .

On a choisi T de sorte que $\mathcal{O}_{K,T,\ell}$ n'ait pas de groupe résiduel de degré $d < D$ sur ℓ . Donc pour tout $d < D$, il existe $M_d \in \mathbb{N}$, $f_{dj}, a_{dj} \in \mathcal{O}_{K,T,\ell}$ pour $1 \leq j \leq M_d$ tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{M_d} f_{dj} (a_{dj}^{q^d} - a_{dj}).$$

En effet, pour $d < D$, on note I_d l'idéal de $\mathcal{O}_{K,T,\ell}$ engendré par $\{a^{q^d} - a, a \in \mathcal{O}_{K,T,\ell}\}$. On suppose que $I_d \neq \mathcal{O}_{K,T,\ell}$. Il existe donc m_d un idéal maximal tel que $I_d \subset m_d \subsetneq \mathcal{O}_{K,T,\ell}$. On a donc pour tout $a \in \mathcal{O}_{K,T,\ell}$, $a^{q^d} - a \equiv 0 \pmod{I_d}$ donc $a^{q^d} - a \equiv 0 \pmod{m_d}$. Cela implique que $\dim_\ell \mathcal{O}_{K,T,\ell}/m_d \leq d$. C'est absurde par choix de T . Donc $I_d = \mathcal{O}_{K,T,\ell}$.

Il existe donc $M_d \in \mathbb{N}$, $f_{dj}, a_{dj} \in \mathcal{O}_{K,T,\ell}$ pour $1 \leq j \leq M_d$ tels que $1 = \sum_{j=1}^{M_d} f_{dj} (a_{dj}^{q^d} - a_{dj})$.

On pose $F_{dj} = f_{dj}I_n$ et $A_{dj} = a_{dj}I_n$. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,T,\ell})$, $r < N$ et $d < D$. On a $1 - B\tau^d Z^r = 1 - \sum_{j=1}^{M_d} BF_{dj}(\tau^d A_{dj} - A_{dj}\tau^d)Z^r$ c'est-à-dire

$$1 - B\tau^d Z^r - \sum_{j=1}^{M_d} BF_{dj}A_{dj}\tau^d Z^r = 1 - \sum_{j=1}^{M_d} BF_{dj}\tau^d A_{dj}Z^r.$$

De plus, on a

$$1 - B\tau^d Z^d - \sum_{j=1}^{M_d} BF_{dj}A_{dj}\tau^d Z^r \equiv (1 - B\tau^d Z^r) \left(\prod_{j=1}^{M_d} 1 - A_{dj}(BF_{dj}\tau^d)Z^r \right) \pmod{Z^{r+1}}$$

et

$$1 - \sum_{j=1}^{M_d} BF_{dj}\tau^d A_{dj}Z^r \equiv \prod_{j=1}^{M_d} 1 - (BF_{dj}\tau^d)A_{dj}Z^r \pmod{Z^{r+1}}.$$

D'où $1 - B\tau^d Z^r \equiv \prod_{j=1}^{M_d} \frac{1 - (BF_{dj}\tau^d)A_{dj}Z^r}{1 - A_{dj}(BF_{dj}\tau^d)Z^r} \pmod{Z^{r+1}}$.

Cela implique que $\left\{ \frac{1 - (S\tau^d)AZ^r}{1 - A(S\tau^d)Z^r} \Big| A, S \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,T,\ell}) \right\}$ est un système de générateurs de $\mathcal{S}_{D,N}$.

On a $\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} \left(\frac{1 - (S\tau^d)AZ^r}{1 - A(S\tau^d)Z^r} \Big| M_\ell/vM_\ell \right) = 1$ pour $v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_T)$.

Par la proposition 2.5.16, on a également $\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} \left(\frac{1 - (S\tau^d)AZ^r}{1 - A(S\tau^d)Z^r} \Big| \frac{V_{T,\ell}}{M_{T,\ell}} \right) = 1$. On a donc bien

$$\prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]_T)} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi | M_\ell/vM_\ell) = 1 = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \psi | V_{T,\ell}/M_{T,\ell})^{-1}$$

qui nous donne le résultat souhaité. \square

On définit E_ℓ comme E si $\ell = \mathbb{F}_q$ et \tilde{E} si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$.

On définit ψ_ℓ comme $\frac{1 - \phi_E(\theta)Z}{1 - \delta_E(\theta)Z} - 1$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et $\frac{1 - \phi_{\tilde{E}}(\theta)Z}{1 - \delta_E(\theta)Z} - 1$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$.

Corollaire 2.5.20. ψ_ℓ est un opérateur nucléaire de $(L_{\infty,\ell}^n/M_\ell)[[Z]]$ et

$$\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \psi_\ell | L_{\infty,\ell}^n/M_\ell) = \prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta])} \frac{|\text{Lie}_{E_\ell}(M_\ell/v)|_G}{|E_\ell(M_\ell/v)|_G}.$$

Démonstration. On peut voir que

$$\begin{aligned}
\psi_\ell &= \frac{1 - \phi_{E_\ell}(\theta)Z}{1 - \delta_E(\theta)Z} - 1 \\
&= (1 - \phi_{E_\ell}(\theta)Z) \sum_{i \geq 0} (A_0 Z)^i - 1 \\
&= \sum_{i \geq 1} (A_0 Z)^i - \phi_{E_\ell}(\theta)Z \sum_{i \geq 0} (A_0 Z)^i \\
&= \sum_{r \geq 1} (\delta_E(\theta) - \phi_{E_\ell}(\theta)) Z^r \delta_E^{r-1}(\theta).
\end{aligned}$$

Donc $\psi_\ell \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{K,\ell})\{\tau\}[[Z]]\tau Z$. Par le corollaire 2.5.15, c'est donc un opérateur nucléaire sur $L_{\infty,\ell}^n/M_\ell$ et M_ℓ/vM_ℓ pour tout v .

On applique le théorème précédent dans le cas où $S = \{\infty\}$. Comme $V_{\infty,\ell} = L_{\infty,\ell}^n$ et

$$\text{pour } v \in \text{MSpec}(\ell[\theta]), \quad \frac{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 - \delta_E(\theta)Z | M_\ell/vM_\ell)}{\det_{R_\ell[[Z]]}(1 - \phi_{E_\ell}(\theta)Z | M_\ell/vM_\ell)} = \frac{|\text{Lie}_{E_\ell}(M_\ell/vM_\ell)|_{\ell[\theta][G]}}{|E_\ell(M_\ell/vM_\ell)|_{\ell[\theta][G]}} \text{ cela nous}$$

donne

$$\begin{aligned}
\det_{R_\ell[[Z]]}(1 - \psi_\ell | L_{\infty,\ell}^n/M_\ell) &= \prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta])} \det_{R_\ell[[Z]]}(1 - \psi_\ell | M_\ell/vM_\ell)^{-1} \\
&= \prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta])} \frac{|\text{Lie}_{E_\ell}(M_\ell/vM_\ell)|_{\ell[\theta][G]}}{|E_\ell(M_\ell/vM_\ell)|_{\ell[\theta][G]}}.
\end{aligned}$$

□

Cela nous permet d'avoir la définition suivante.

Définition 2.5.21. On définit les fonctions L -équivariantes

$$\mathcal{L}_G(E_\ell(M_\ell)) = \prod_{v \in \text{MSpec}(\ell[\theta])} \frac{|\text{Lie}_{E_\ell}(M_\ell/v)|_{\ell[\theta][G]}}{|E_\ell(M_\ell/v)|_{\ell[\theta][G]}}.$$

2.6 Volume

Dans cette section, on généralise les énoncés de [17, Section 5] à ℓ et aux modules d'Anderson.

Les arguments restent les mêmes mais il y a quelques changements dans les conditions à cause du fait que θ et $\delta_E(\theta)$ peuvent avoir des normes différentes.

2.6.1 Définition et premières propriétés

Soient Λ et Λ' deux $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$ de bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Par définition, ce sont des $\ell((\theta^{-1}))[G]$ -bases pour $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$. Il existe $X \in \text{Gl}_{mn}(\ell((\theta^{-1}))[G])$ ($m = [K : k]$) tel que $\mathcal{B}' = X\mathcal{B}$. Alors $\det(X)$ dépend des choix de \mathcal{B} et \mathcal{B}' mais pas $\det(X)^+$ qui est l'image de $\det(X)$ par

$$\ell((\theta^{-1}))[G]^\times \twoheadrightarrow \ell((\theta^{-1}))[G]^\times / \ell[\theta][G]^\times \cong \ell((\theta^{-1}))[G]^+$$

d'après le corollaire 2.4.6.

Définition 2.6.1. Pour Λ et Λ' deux $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres, on définit

$$[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta]G} = \det(X)^+.$$

Si Λ et Λ' sont des $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres et $\Lambda' \subset \Lambda$ alors Λ/Λ' est un $\ell[\theta][G]$ -module de type fini et G -cohomologiquement trivial. On peut montrer que

$$[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} = |\Lambda/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}.$$

De plus, si Λ'' , Λ' et Λ sont des $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres alors

$$[\Lambda : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]} = [\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} [\Lambda' : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]}.$$

On veut maintenant étendre cette notion aux $\ell[\theta][G]$ -réseaux projectifs. Pour ce faire, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.6.2. Soit Λ un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif dans $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$. Alors

- il existe un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})$ tel que $\Lambda \subset F$,
- pour ce F , F/Λ est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie et un $\ell[\theta][G]$ -module G -cohomologiquement trivial.

Démonstration. 1) On a cette assertion d'après la proposition 2.3.2.

2) Pour ce F , on a $\ell(\theta)\Lambda = \ell(\theta)F$. Soit e_1, \dots, e_n une base de F . Pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe $a_i, b_i \in \ell[\theta]$ tels que $e_i \in \frac{a_i}{b_i}\Lambda$. On pose $b = \text{ppcm}(e_i)$. D'où $bF \subset \Lambda$. De plus, Λ et F sont G -cohomologiquement triviaux et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow F \longrightarrow F/\Lambda \longrightarrow 0.$$

D'où F/Λ est G -cohomologiquement trivial. □

D'après la proposition 2.4.7, pour un tel F , $\text{Fitt}_{\ell[\theta][G]} \left(\frac{F}{\Lambda} \right)$ est principal et admet un unique générateur $|F/\Lambda|_{\ell[\theta][G]} \in \ell((\theta^{-1})) [G]^+$ qui est inversible. Cela nous permet d'avoir la prochaine définition.

Définition 2.6.3. Soient Λ, Λ' deux $\ell[\theta][G]$ -réseaux projectifs dans $\text{Lie}_{E_\ell}(L_\infty, \ell)$. On prend F, F' deux $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres tels que $\Lambda \subset F$ et $\Lambda' \subset F'$. On définit alors

$$[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} = [F : F']_{\ell[\theta][G]} \frac{|F'/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}}{|F/\Lambda|_{\ell[\theta][G]}}.$$

On vérifie maintenant que cette définition est indépendante du choix de F et F' et que l'on a les mêmes relations que pour les modules libres.

Lemme 2.6.4. On a les assertions suivantes :

- $[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]}$ est indépendant de F et F' .
- Si Λ, Λ' et Λ'' sont des $\ell[\theta][G]$ -réseaux projectifs alors

$$[\Lambda : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]} = [\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} [\Lambda' : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]}.$$

- Si $\Lambda' \subset \Lambda$ sont des $\ell[\theta][G]$ -réseaux projectifs alors $[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} = |\Lambda/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}$.

Démonstration. 1) D'après la proposition 2.3.2, pour F_1, F_2 des $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres qui contiennent Λ , il existe F_3 un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre qui contient F_1 et F_2 . On peut donc supposer qu'on prend des $\ell[\theta][G]$ -réseaux libres tel que $\Lambda \subset F_1 \subset F_2$ et $\Lambda \subset F'_1 \subset F'_2$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{F_1}{\Lambda} \longrightarrow \frac{F_2}{\Lambda} \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} \longrightarrow 0.$$

On en déduit d'après le lemme 2.4.9

$$\left| \frac{F_2}{\Lambda} \right|_{\ell[\theta][G]} = \left| \frac{F_1}{\Lambda} \right|_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F_2}{F_1} \right|_{\ell[\theta][G]}.$$

De la même manière, on obtient

$$\left| \frac{F'_2}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} = \left| \frac{F'_1}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F'_2}{F'_1} \right|_{\ell[\theta][G]}.$$

Cela implique

$$\begin{aligned} [F_1 : F'_1]_{\ell[\theta][G]} \frac{|F'_1/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}}{|F_1/\Lambda|_{\ell[\theta][G]}} &= [F_1 : F'_1]_{\ell[\theta][G]} \frac{\left| \frac{F_2}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F_2}{F_1} \right|_{\ell[\theta][G]}}{\left| \frac{F_2}{F_1} \right|_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F_2}{\Lambda} \right|_{\ell[\theta][G]}} \\ &= [F_2 : F'_2]_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F_2}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} / \left| \frac{F_2}{\Lambda} \right|_{\ell[\theta][G]}. \end{aligned}$$

Cela nous donne le résultat souhaité.

2) On a

$$\begin{aligned} [\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} [\Lambda' : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]} &= [F : F']_{\ell[\theta][G]} \frac{|F'/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}}{|F/\Lambda|_{\ell[\theta][G]}} [F' : F'']_{\ell[\theta][G]} \frac{|F''/\Lambda''|_{\ell[\theta][G]}}{|F'/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}} \\ &= [F : F'']_{\ell[\theta][G]} \frac{|F''/\Lambda''|_{\ell[\theta][G]}}{|F/\Lambda|_{\ell[\theta][G]}} \\ &= [\Lambda : \Lambda'']_{\ell[\theta][G]}. \end{aligned}$$

3) On peut prendre le même module libre pour Λ et Λ' , c'est-à-dire $F' = F$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\Lambda}{\Lambda'} \longrightarrow \frac{F}{\Lambda'} \longrightarrow \frac{F}{\Lambda} \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme 2.4.9 $\left| \frac{F}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} = \left| \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]} \left| \frac{F}{\Lambda} \right|_{\ell[\theta][G]}$. On a alors

$$[\Lambda : \Lambda']_{\ell[\theta][G]} = \frac{|F/\Lambda'|_{\ell[\theta][G]}}{|F/\Lambda|_{\ell[\theta][G]}} = \left| \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right|_{\ell[\theta][G]}.$$

□

On définit la classe \mathcal{C} comme celle des $\ell[\theta][G]$ -modules compacts V qui sont G -cohomologiquement triviaux et qui vérifient une suite exacte de $\ell[\theta][G]$ -modules

$$0 \longrightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$$

où Λ est un $\ell[\theta][G]$ -réseau de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})$ et H est un $\ell[\theta][G]$ -module qui est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie.

$L_{\infty, \ell}^n/\Lambda$ est $\ell[\theta]$ divisible donc $\ell[\theta]$ -injectif comme $\ell((\theta^{-1}))/\ell[\theta]$ l'est. Cela implique l'existence d'une section dans la catégorie des $\ell[\theta]$ -modules. On a l'isomorphisme de $\ell[\theta]$ -modules suivant, induit par (f, id)

$$L_{\infty, \ell}^n/\Lambda \times s(H) \cong V.$$

On s'intéresse à la structure de $L_{\infty, \ell}^n/\Lambda \times s(H)$ comme $\ell[\theta][G]$ -module. Pour un élément $(x, s(h)) \in L_{\infty, \ell}^n/\Lambda \times s(H)$ et $g \in G$, on pose $g.(x, s(h)) = (g.x + a_{g,h}; b_{g,h})$ où $(a_{g,h}; b_{g,h})$ est associé à $g.s(h)$ par l'isomorphisme $L_{\infty, \ell}^n/\Lambda \times s(H) \cong V$. On va montrer qu'on a les relations suivantes $b_{g,h} = s(gh)$ et $a_{g_1 g_2, h} = g_1 a_{g_2, h} + a_{g_1, g_2 h}$.

Comme s est une section de π , pour $h \in H$, on a $\pi \circ s(h) = h$. De plus, π est un morphisme de $\ell[\theta][G]$ -modules, donc pour $g \in G$, $g\pi \circ s(h) = \pi(g s(h)) = gh$. On en déduit $b_{g,h} = s(gh)$.

Soient $g \in G$, $(x_1, s(h_1)), (x_2, s(h_2)) \in L_{\infty, \ell}^n / \Lambda \times s(H)$. Comme V est un $\ell[\theta][G]$ -module et $s(h_1), s(h_2) \in V$, $g.(s(h_1) + s(h_2)) = g.s(h_1) + g.s(h_2)$. D'où $g.(0, s(h_1) + s(h_2)) = (a_{g, h_1} + a_{g, h_2}; b_{g, h_1} + b_{g, h_2})$. De plus, $L_{\infty, \ell}^n / \Lambda$ est un $\ell[\theta][G]$ -module d'où

$$g.[(x_1, s(h_1)) + (x_2, s(h_2))] = (g.x_1 + a_{g, h_1} + g.x_2 + a_{g, h_2}; b_{g, h_1} + b_{g, h_2}).$$

Soient $g_1, g_2 \in G$ et $h \in H$. On a alors

$$\begin{aligned} (g_1.(g_2 s(h))) &= g_1(a_{g_2, h} + s(g_2 h)) \\ &= g_1 a_{g_2, h} + a_{g_1, g_2 h} + s(g_1 g_2 h). \end{aligned}$$

D'où $g_1.(g_2(0; s(h))) = (g_1 a_{g_2, h} + a_{g_1, g_2 h}; s(g_1 g_2 h) = (g_1 g_2(0; s(h)))$. La loi définie ci-dessus est bien une structure de $\ell[\theta][G]$ -module sur $L_{\infty, \ell}^n / \Lambda \times s(H)$.

Avec cette nouvelle structure, on peut obtenir la prochaine définition.

Définition 2.6.5. Un $\ell[\theta][G]$ -réseau Λ' de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})$ est dit (V, Λ, H, s) -admissible s'il vérifie les conditions suivantes

- $\Lambda \subset \Lambda'$,
- Λ' est $\ell[\theta][G]$ -projectif,
- $\Lambda' / \Lambda \times s(H)$ est un $\ell[\theta][G]$ -sous module de V .

Un $\ell[\theta][G]$ -réseau Λ' est dit V -admissible s'il est (V, Λ, H, s) -admissible pour un certain s .

Proposition 2.6.6. *Il existe des réseaux (V, Λ, H, s) -admissibles qui sont $\ell[\theta][G]$ -libres.*

Démonstration. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell}) / \Lambda \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 2.3.2, il existe un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre Λ'' tel que $\Lambda \subset \Lambda''$. Soient $x \in H$ et $g \in G$. On a $g.(0, s(x)) = (a_{g, x}, b_{g, x}) \in L_{\infty, \ell}^n / \Lambda \times s(H) \cong V$.

Comme $\ell[\theta]$ est un anneau principal, H est un $\ell[\theta]$ -module de type fini et un ℓ -espace vectoriel de dimension finie. Cela implique que H est un $\ell[\theta]$ -module de torsion. Comme $s(H)$ est un module de torsion (car H l'est), il existe $f \in \ell[\theta]$ non nul tel que $f s(x) = 0$ pour tout $x \in H$. Comme l'action de G et $\ell[\theta]$ sur V commutent, $f a_{g, x} = 0$ pour tout x et g .

On pose $\Lambda' = \frac{1}{f} \Lambda''$. On a bien $\Lambda \subset \Lambda'$ et Λ' est un $\ell[\theta][G]$ -module libre. Soient $x \in H$ et $g \in G$. On a $g.(0, s(x)) = (a_{g, x}, b_{g, x})$. Par choix du f , il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $f a_{g, x} = \lambda$. D'où $a_{g, x} = \frac{\lambda}{f} \in \Lambda'$. De plus, Λ' est un $\ell[\theta][G]$ -module. D'où $\Lambda' / \Lambda \times s(H)$ est un $\ell[\theta][G]$ -sous module de V . Λ' est donc bien (V, Λ, H, s) admissible et libre. \square

Soit Λ' un réseau (V, Λ, H, s) -admissible. On a donc une suite exacte de $\ell[\theta][G]$ -modules

$$0 \longrightarrow \Lambda'/\Lambda \times s(H) \longrightarrow V \longrightarrow L_{\infty, \ell}^n/\Lambda' \longrightarrow 0.$$

Comme V et $L_{\infty, \ell}^n/\Lambda'$ sont G -cohomologiquement triviaux, alors $\Lambda'/\Lambda \times s(H)$ l'est aussi. C'est également un $\ell[\theta][G]$ -module qui est un ℓ -espace vectoriel de dimension finie. D'après la proposition 2.4.7, cela implique que $|\Lambda'/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}$ est bien défini et appartient à $\ell((\theta^{-1})[G]^+$.

On fixe maintenant un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif Λ_0 qui va nous permettre de définir le volume équivariant. Le quotient de deux volumes, ce qui va nous intéresser par la suite, ne dépend pas du choix de ce module.

Proposition 2.6.7. *Soit $V \in \mathcal{C}$ tel que $0 \longrightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda \longrightarrow V \longrightarrow H \longrightarrow 0$.*

— *Soit s une section pour V et Λ_1, Λ_2 deux (V, Λ, H, s) -réseaux admissibles. On a*

$$\frac{|\Lambda_1/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_1 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} = \frac{|\Lambda_2/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}}.$$

— *Soient s_1, s_2 deux sections pour V et Λ' un réseau qui est (V, Λ, H, s_1) et (V, Λ, H, s_2) -admissible. Alors*

$$\frac{|\Lambda'/\Lambda \times s_1(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda' : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} = \frac{|\Lambda'/\Lambda \times s_2(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda' : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}}.$$

Démonstration. 1) D'après la proposition 2.3.2, il existe Λ_3 un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre qui contient Λ_1 et Λ_2 . On suppose donc $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Cela nous donne la suite exacte de $\ell[\theta][G]$ -modules de type fini qui sont G -cohomologiquement triviaux :

$$0 \longrightarrow \Lambda_1/\Lambda \times s(H) \longrightarrow \Lambda_2/\Lambda \times s(H) \longrightarrow \Lambda_2/\Lambda_1 \longrightarrow 0.$$

On en déduit d'après le lemme 2.4.9,

$$|\Lambda_2/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]} = |\Lambda_1/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]} |\Lambda_2/\Lambda_1|_{\ell[\theta][G]}.$$

De plus, $|\Lambda_2/\Lambda_1|_{\ell[\theta][G]} = [\Lambda_2 : \Lambda_1]_{\ell[\theta][G]} = [\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]} [\Lambda_0 : \Lambda_1]_{\ell[\theta][G]}$ d'après le lemme 2.6.4.

On a bien

$$\begin{aligned} \frac{|\Lambda_2/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} &= \frac{|\Lambda_1/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]} |\Lambda_2/\Lambda_1|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} \\ &= \frac{|\Lambda_1/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]} [\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]} [\Lambda_0 : \Lambda_1]_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} \\ &= \frac{|\Lambda_1/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda_1 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}}. \end{aligned}$$

2) On choisit un réseau Λ' suffisamment grand pour qu'il soit à la fois (V, Λ, H, s_1) et (V, Λ, H, s_2) -admissible (c'est possible d'après la construction faite dans la preuve de la proposition 2.6.6) et de sorte que pour tout $x \in H$, $s_1(x) - s_2(x) \in \Lambda'/\Lambda$. On a alors l'isomorphisme de $\ell[\theta][G]$ -modules $\Lambda'/\Lambda \times s_1(H) \cong \Lambda'/\Lambda \times s_2(H)$. Cela nous donne bien le résultat souhaité, c'est-à-dire $|\Lambda'/\Lambda \times s_1(H)|_{\ell[\theta][G]} = |\Lambda'/\Lambda \times s_2(H)|_{\ell[\theta][G]}$. \square

Définition 2.6.8. Soit $V \in \mathcal{C}$ tel que $0 \rightarrow \text{Lie}_E(L_{\infty, \ell})/\Lambda \rightarrow V \rightarrow H \rightarrow 0$. Soient s une section et Λ' un (V, Λ, H, s) -réseau admissible. On définit

$$\text{Vol}_{\Lambda_0}(V) = \frac{|\Lambda'/\Lambda \times s(H)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda' : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}}.$$

D'après la proposition précédente, $\text{Vol}_{\Lambda_0}(M)$ est indépendant de la section choisie et du réseau (V, Λ, H, s) -admissible.

Proposition 2.6.9. La fonction $\text{Vol}_{\Lambda_0} : \mathcal{C} \rightarrow \ell((\theta^{-1}))$ vérifie :

- $\text{Vol}_{\Lambda_0}(\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_0) = 1$.
- Si $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$, $\frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}$ est indépendant du choix de Λ_0 .

Démonstration. 1) Λ_0 est $(\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_0, \Lambda_0, \{0\})$ -admissible. Ce qui nous donne le résultat souhaité.

2) Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$. On a

$$0 \rightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_1 \rightarrow V_1 \rightarrow H_1 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_2 \rightarrow V_2 \rightarrow H_2 \rightarrow 0.$$

Soient Λ'_1 et Λ'_2 des réseaux $(V_1, \Lambda_1, H_1, s_1)$ et $(V_2, \Lambda_2, H_2, s_2)$ -admissibles respectivement. D'après le lemme 2.6.4, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)} &= \frac{|\Lambda'_1/\Lambda_1 \times s_1(H_1)|_{\ell[\theta][G]}}{[\Lambda'_1 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}} \frac{[\Lambda'_2 : \Lambda_0]_{\ell[\theta][G]}}{|\Lambda'_2/\Lambda_2 \times s_2(H_2)|_{\ell[\theta][G]}} \\ &= \frac{|\Lambda'_1/\Lambda_1 \times s_1(H_1)|_{\ell[\theta][G]}}{|\Lambda'_2/\Lambda_2 \times s_2(H_2)|_{\ell[\theta][G]}} [\Lambda'_2 : \Lambda'_1]_{\ell[\theta][G]}. \end{aligned}$$

\square

2.6.2 Application tangente à l'identité

On rappelle que $R_\ell = \ell[G]$. Cette section est inspirée de [17] et [12].

On munit $L_{\infty,\ell}$ de la norme sup des normes locales qu'on note $\|\cdot\|$. On la normalise de sorte que $\|\theta\| = q$. On note encore $\|\cdot\|$ pour $L_{\infty,\ell}^n$. Soient $c, d \in \mathbb{N}$ tels que $\max_{i \in [0; q^n - 1]} \|\delta_E(\theta)^i\| = q^c$ et $\|\delta_E(\theta)\| = q^d$. On note $\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}$ les éléments de $L_{\infty,\ell}$ de norme inférieure à 1. On a pris la norme de sorte que $\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}$ soit un R_ℓ -module (sous l'action de G , la norme des éléments reste inférieure à 1 comme c'est le sup).

Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$ qui vérifient $0 \longrightarrow \text{Lie}_E(L_{\infty,\ell})/\Lambda_j \xrightarrow{\iota_j} V_j \xrightarrow{\pi_j} H_j \longrightarrow 0$ pour $j = 1, 2$.

Soit r suffisamment grand pour que $(\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})^n \cap \Lambda_j = \{0\}$ pour $i \geq r$ et $j = 1, 2$. On identifie $(\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})^n$ avec son image dans $\text{Lie}_E(L_{\infty,\ell})/\Lambda_j$. On fixe un module ∞ -modéré \mathcal{W}^∞ pour L_ℓ/K_ℓ .

On a vu précédemment que $\{\iota_s(\mathcal{U}_{i,\infty})^n\}_{i \geq r}$ est une bonne base de voisinages ouverts de 0 dans V_j qui sont R_ℓ -projectifs où $\mathcal{U}_{i,\infty} = \theta^{-i}\mathcal{W}^\infty$. Pour a suffisamment grand et $i \geq r$, $\theta^{-a-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}} \subset \mathcal{U}_{i,\infty} \subset \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}$. On munit $\iota_j(\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})$ de la norme de sorte que $\iota_j : \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}} \longrightarrow \iota_j(\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})$ soit une isométrie bijective pour $j = 1, 2$.

Définition 2.6.10. Soit $N \in \mathbb{N}$. Un R_ℓ -morphisme continu $\gamma : V_1 \longrightarrow V_2$ est dit N -tangent à l'identité s'il existe $i \geq r$ tel que

- γ induise une isométrie bijective $\gamma_i = (\iota_2^{-1} \circ \gamma \circ \iota_1) : \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \longrightarrow \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$,
- $\|\gamma_i(x) - x\| \leq \|\theta\|^{-N-a}\|x\|$ pour tout $x \in (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})^n$.

Si γ est N -tangent à l'identité pour tout $N \geq 0$, alors on dit que γ est ∞ -tangent à l'identité.

Proposition 2.6.11. Soit $\Gamma : L_{\infty,\ell}^n \longrightarrow L_{\infty,\ell}^n$ une application R_ℓ -linéaire qui est donnée par la série partout convergente qui appartient à $I_n + \tau\mathcal{M}_n(L_{\infty,\ell})\{\tau\}$. On suppose que $\Gamma(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$. On note $\bar{\Gamma} : (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda_1 \longrightarrow (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda_2$ l'application induite. On suppose que $\gamma : V_1 \longrightarrow V_2$ est un morphisme R_ℓ -linéaire tel que $\iota_2^{-1} \circ \gamma \circ \iota_1 = \bar{\Gamma}$ sur $(\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})^n$. Alors γ est ∞ -tangente à l'identité.

Démonstration. Soit $N \geq 0$. On veut montrer que γ est N -tangent à l'identité. On a Γ partout convergent donc ses coefficients qu'on note A_i sont bornés. On pose $\alpha = \sup_{i,r,s} \|(A_i)_{r,s}\|$. Pour $i \geq r$ suffisamment grand et $x \in (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}})^n$,

$$\|\gamma_i(x) - x\| = \|A_1x^q + A_2x^{q^2} + \dots\| \leq \alpha\|x\|^q.$$

Si i est suffisamment grand, γ_i est une isométrie différentiable telle que $\gamma_i'(0) = I_n$. Par le théorème des fonctions inverses non archimédiennes, pour i suffisamment grand

et $i \geq r$, $\gamma_i : (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n \longrightarrow (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$ est une isométrie bijective. De plus, pour $x \in (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$ non nul,

$$\frac{\|\gamma_i(x) - x\|}{\|x\|} \leq \alpha \|x\|^{q-1} \leq \alpha \|\theta\|^{-i(q-1)}.$$

On peut toujours choisir i de sorte que $\alpha \|\theta\|^{-i(q-1)} \leq \|\theta\|^{-N-a}$, ce qui nous donne le résultat souhaité. \square

En particulier, \exp_{E_ℓ} est ∞ -tangent à l'identité.

Définition 2.6.12. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$ et $\gamma : V_1 \longrightarrow V_2$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire. On définit l'endomorphisme Δ_γ de $V_1[[Z]]$ par

$$\Delta_\gamma = \frac{1 - \gamma^{-1}\delta_E(\theta)\gamma Z}{1 - \delta_E(\theta)Z} - 1 = \sum_{s \geq 1} \delta_s Z^s$$

où $\delta_s = (\delta_E(\theta) - \gamma^{-1}\delta_E(\theta).\gamma)\delta_E^{s-1}(\theta)$ pour $s \geq 1$.

On rappelle que $\max_{i=0, \dots, q^n-1} \|\delta_E^i(\theta)\| = q^c$.

Lemme 2.6.13. Soit $\gamma : V_1 \longrightarrow V_2$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire N' -tangent à l'identité. Si $N \in \mathbb{N}$ vérifie pour tout $m < N$, $N' - q^n \lfloor \frac{m}{q^n} \rfloor - c \geq 1$ et $N' - q^n \lfloor \frac{m-1}{q^n} \rfloor - 2c \geq 1$ alors $\Delta_\gamma \bmod Z^N$ est un endomorphisme nucléaire pour $V_1[[Z]]/Z^N$.

Si $\gamma : V_1 \longrightarrow V_2$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire ∞ -tangent à l'identité alors $(1 + \Delta_\gamma)$ est un endomorphisme nucléaire pour $V_1[[Z]]$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la condition précédente. On veut montrer que δ_m est localement contractante pour tout $m < N$. Soit $m < N$ qu'on écrit sous la forme $m = q^n \alpha + \beta$.

Soit $i \geq r$ qui vérifie γ induit une isométrie bijective $\gamma_i = (\iota_2^{-1} \circ \gamma \circ \iota_1) : (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n \rightarrow (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$ et $\|\gamma_i(x) - x\| \leq \|\theta\|^{-N'-a} \|x\|$ pour tout $x \in (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$. On pose $\delta_m^i = (\delta_E(\theta) - \gamma_i^{-1}\delta_E(\theta)\gamma_i)\delta_E(\theta)^{m-1}$. Comme γ_i est une isométrie bijective, pour montrer que δ_m est localement contractante, on va montrer que δ_m^i est localement contractante.

On montre d'abord que pour j suffisamment grand, pour $x \in (\theta^{-j}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$, $\delta_E^m(\theta)x \in (\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$.

$$\begin{aligned} \|\delta_E^m(\theta)x\| &= \|\delta_E(\theta)^{q^n \alpha + \beta} x\| \\ &= \|\delta_E(\theta)^{q^n \alpha}\| \|\delta_E(\theta)^\beta x\| \\ &\leq \|\theta\|^{q^n \alpha} \|\delta_E(\theta)^\beta\| \|x\| \\ &\leq \|\theta\|^{q^n \alpha + c} \|x\|. \end{aligned}$$

Soit $j \geq q^n \alpha + c + i$. De la même manière, quitte à prendre j encore plus grand, on peut supposer que $x \in (\theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$, $\delta_E^{m-1}(\theta)x \in (\theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$.

De plus, sur $(\theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$, comme dans [17, Lemma 5.1.5], on a les égalités suivantes

$$\delta_m = (\delta_E(\theta) - \gamma_i^{-1} \delta_E(\theta) \gamma_i) \delta_E(\theta)^{m-1} = \gamma_i^{-1} (\gamma_i - 1) \delta_E(\theta)^m + \gamma_i^{-1} \delta_E(\theta) (1 - \gamma_i) \delta_E(\theta)^{m-1}.$$

Par définition, γ_i est une isométrie et $\|\gamma_i(x) - x\| \leq \|\theta\|^{-N'-a} \|x\|$ pour tout $x \in (\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$. D'où pour $x \in (\theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$,

$$\begin{aligned} \|\delta_m^i(x)\| &\leq \max\{\|\gamma_i^{-1}(\gamma_i \delta_E(\theta)^m x - \delta_E(\theta)^m x)\|; \|\gamma_i^{-1}(\delta_E(\theta)^m x - \delta_E(\theta) \gamma_i \delta_E(\theta)^{m-1} x)\|\} \\ &\leq \max\{\|(\gamma_i \delta_E(\theta)^m x - \delta_E(\theta)^m x)\|; \|\delta_E(\theta)(\delta_E(\theta)^{m-1} x - \gamma_i \delta_E(\theta)^{m-1} x)\|\} \\ &\leq \max\{\|\theta\|^{-N'-a} \|(\delta_E(\theta)^m x)\|; \|\delta_E(\theta)\| \|\delta_E(\theta)^{m-1} x - \gamma_i \delta_E(\theta)^{m-1} x\|\} \\ &\leq \max\{\|\theta\|^{-N'-a} \|\theta\|^{q^n \alpha} \|\delta_E(\theta)^\beta\| \|x\|; q^c q^{-N'-a} \|\delta_E(\theta)^{m-1} x\|\} \\ &\leq \max\{\|\theta\|^{-N'-a} \|\theta\|^{q^n \alpha + c} \|x\|; \|\theta\|^c q^{-N'-a} \|\theta\|^{q^n \lfloor (m-1)/q^n \rfloor + c} \|x\|\} \\ &\leq q^{-1-a} \|x\|. \end{aligned}$$

Donc si $x \in U_{j, \infty, \ell}^n$, $\delta_m^i(x) \in (\theta^{-j-1-a} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n$. On rappelle que a est choisi de sorte que pour $j \geq r$, $\theta^{-a-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell} \subset \mathcal{U}_{j, \infty, \ell} \subset \theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}$. D'où $\delta_m^i(x) \in \mathcal{U}_{j+1, \infty, \ell}^n$. Donc δ_n^i est localement contractante. \square

2.6.3 Endomorphismes de $L_{\infty, \ell}^n / \Lambda$

On regarde le cas particulier où $V_1 = V_2 = (L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$ où Λ est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif. On rappelle que r et a sont fixés de sorte que $(\theta^{-r} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n \cap \Lambda = \{0\}$ et pour $j \geq r$,

$$\theta^{-a-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell} \subset \mathcal{U}_{j, \infty, \ell} \subset \theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}.$$

Définition 2.6.14. Un endomorphisme continu R_ℓ -linéaire $\phi : L_{\infty, \ell}^n / \Lambda \rightarrow L_{\infty, \ell}^n / \Lambda$ est appelé m -contraction locale pour $m \in \mathbb{N}$ s'il existe $i \geq r$ tel que

$$\|\phi(x)\| \leq \|\theta\|^{-m} \|x\| \text{ pour tout } x \in (\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell})^n.$$

Remarque 2.6.15. Si ϕ est une m -contraction locale pour $m > a$ alors ϕ est localement contractante sur $(L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$ pour \mathcal{U}^n et donc $\det(1 + \phi|(L_{\infty, \ell})^n / \Lambda)$ est bien défini. En effet, soit $i \geq r$ tel que $\|\phi(x)\| \leq \|\theta\|^{-m} \|x\|$ pour tout $x \in \theta^{-i} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}$. Pour $j \geq i$, on a

$$\phi(U_{j, \infty, \ell}^n) \subset \phi(\theta^{-j} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}^n) \subset \theta^{-j-m} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}^n \subset \theta^{-j-a-1} \mathcal{O}_{L_\infty, \ell}^n \subset U_{j+1, \infty, \ell}^n.$$

Donc ϕ est localement contractante pour \mathcal{U}^n et $U_{i, \infty}^n$ est un nucléus.

On rappelle que $\|\delta_E(\theta)\| = q^d$.

Proposition 2.6.16. *Soit $\gamma : (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \rightarrow (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire continu qui est N -tangent à l'identité pour $N > 0$. Soit $\psi : (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \rightarrow (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$ une m -contraction locale R_ℓ -linéaire pour $m > 2a + d$. Soit $f = \delta_E(\theta)\gamma$. Alors*

- $f\psi$ et ψf sont des $(m - d)$ -contractions locales de $(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$.
- $\det(1 + f\psi|(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda) = \det(1 + \psi f|(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda)$

Démonstration. 1) Soit $i > r$ tel que $\gamma : \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \rightarrow \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$ est une isométrie bijective et tel que $\|\psi(x)\| \leq \|\theta\|^{-m}\|x\|$ pour tout $x \in \theta^{-(i-c)}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$. (c'est possible car γ est N -tangent à l'identité et ψ est une m -contraction).

Pour $x \in \theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$, on a donc

$$\|\psi f(x)\| \leq \|\theta\|^{-m}\|\delta_E(\theta)\gamma(x)\| \leq \|\theta\|^{-m}\|\delta_E(\theta)\|\|x\| \leq \|\theta\|^{-m+d}\|x\|.$$

De la même manière, on a $\|f(x)\psi\| \leq \|\theta\|^{-m+d}\|x\|$. Donc $f\psi$ et ψf sont des $m - d$ -contractions sur $L_{\infty,\ell}^n/\Lambda$ par choix de m d'après la remarque 2.6.15.

2) D'après 1), $f\psi$ et ψf sont des $m - d$ -contractions sur $L_{\infty,\ell}^n/\Lambda$. Par choix de m ($m - d > a$), d'après la remarque, ils sont donc localement contractants donc le déterminant a du sens.

D'après cette même remarque, ψ , $f\psi$ et ψf sont localement contractantes de nuclei commun $U_{j,\infty,\ell}^n$ pour $j \geq i$ par choix de m .

Comme γ est un isomorphisme et $\delta_E(\theta)$ est inversible, f est surjective. On pose $V = (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$. Donc on a l'isomorphisme de R -modules : $V/f^{-1}(U_{i,\infty}^n) \cong V/U_{i,\infty}^n$. Comme $\Lambda \cap U_{i,\infty}^n = \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_{i,\infty}^n) &= \{x \in (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \mid \delta_E(\theta)\gamma(x) \in U_{i,\infty}^n\} \\ &= \{x \in (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \mid \gamma(x) \in \delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n \cup \delta_E(\theta)^{-1}\Lambda/\Lambda\} \\ &= \{x \in \gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n) \cup \gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}\Lambda/\Lambda)\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$f^{-1}(U_{i,\infty}^n) = \gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}\Lambda/\Lambda) \oplus \gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n).$$

On pose $f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* = \gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n)$. Comme γ est un isomorphisme R_ℓ -linéaire et que $U_{i,\infty}$ et Λ sont G -cohomologiquement triviaux, on en déduit que $\gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-1}\Lambda/\Lambda)$, $\gamma^{-1}(\delta_E(\theta)^{-i}U_{i,\infty}^n)$ et $f^{-1}(U_{i,\infty}^n)$ le sont également.

Comme γ^{-1} est une isométrie sur $\theta^{-(i+1)}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$ et par choix de a , on a

$$\delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-a}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \subset \delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n.$$

On obtient donc

$$\delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-a}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*.$$

Comme ψ est m -contractante sur $\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n$, $(\psi f)f^{-1}(U_{i,\infty}^n) = \psi(U_{i,\infty}^n) \subset \theta^{-i-m}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n$. Par choix de m , cela nous donne

$$(\psi f)f^{-1}(U_{i,\infty}^n) \subset \theta^{-i-2a-d}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-a}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n).$$

On a donc le diagramme commutatif suivant de R_ℓ -modules projectifs de type fini où les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)} & \xrightarrow{f} & \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{U_{i,\infty}^n} \\ \downarrow \psi f & & \downarrow f\psi \\ \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)} & \xrightarrow{f} & \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{U_{i,\infty}^n}. \end{array}$$

$$\text{On en déduit } \det \left(1 + f\psi \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{U_{i,\infty}^n} \right. \right) = \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)} \right. \right).$$

On a vu précédemment que $(\psi f)f^{-1}(U_{i,\infty}^n) \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n)$. On obtient alors $\psi f = 0$ sur $f^{-1}(U_{i,\infty}^n)/f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*$.

De plus, on a la suite de R_ℓ -modules projectifs :

$$0 \longrightarrow f^{-1}(U_{i,\infty}^n)/f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/f^{-1}(U_{i,\infty}^n) \longrightarrow 0$$

qui nous donne l'égalité

$$\det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) = \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)} \right. \right).$$

Comme ψf est une $m-d$ -contraction sur $\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n$, on a

$$\psi f(f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*) \subset \psi f(\delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n) \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-m+d}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n.$$

Par choix de m , on a donc,

$$\psi f(f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*) \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-m+d}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-2a}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset \theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*.$$

De la même manière,

$$\psi f(\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n) \subset \psi f(\delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n) \subset \delta_E(\theta)^{-1}\theta^{-i-m+d}\mathcal{O}_{L_\infty,\ell}^n \subset \theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*.$$

De plus, $\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \subset \delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n$ et $\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \subset f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*$. Cela implique que $\psi f = 0$ sur $\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*$ et sur $f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*$. On a donc les suites de R_ℓ -modules projectifs :

$$0 \longrightarrow \delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n \longrightarrow 0$$

qui nous donne l'égalité

$$\det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) = \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n} \right. \right)$$

et

$$0 \longrightarrow f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow V/f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^* \longrightarrow 0$$

qui nous donne l'égalité

$$\det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) = \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \det \left(1 + f\psi \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{U_{i,\infty}^n} \right. \right) &= \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) \\ &= \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) \\ &= \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{\theta^{-a}f^{-1}(U_{i,\infty}^n)^*} \right. \right) \\ &= \det \left(1 + \psi f \left| \frac{(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda}{\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n} \right. \right). \end{aligned}$$

On peut que montrer si $U_{i,\infty}^n$ est un nuclei alors $\delta_E(\theta)^{-1}U_{i,\infty}^n$ l'est aussi à partir d'un certain rang. Comme ce sont des nuclei, on a bien $\det(1 + f\psi|(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda) = \det(1 + \psi f|(L_{\infty,\ell})^n/\Lambda)$, ce qui nous donne le résultat souhaité. \square

Remarque 2.6.17. Soit $\gamma : (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \longrightarrow (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire continu qui est N -tangent à l'identité pour $N > 0$. Soit $\psi : (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda \longrightarrow (L_{\infty,\ell})^n/\Lambda$ une m -contraction locale R_ℓ -linéaire. Soit $f = \delta_E(\theta)\gamma$. Soit $\phi \in R_\ell\{f, \psi\}$ une somme de

monômes de degré au plus $r < m$ telle que chaque monôme contient un ψ . Alors ϕ est une $m - r + 1 - c$ contraction sur $L_{\infty, \ell}^n / \Lambda$. En effet, $\phi = \sum f^j \psi^k$ où $k > 0$ et $k + j \leq r$. Soit $i > r$ tel que $\gamma : \theta^{-(i-r)} \mathcal{O}_{L_{\infty, \ell}}^n \rightarrow \theta^{-(i-r)} \mathcal{O}_{L_{\infty, \ell}}^n$ est une isométrie bijective et tel que $\|\psi(x)\| \leq \|\theta\|^{-m} \|x\|$ pour tout $x \in \theta^{-(i-n)} \mathcal{O}_{L_{\infty, \ell}}^n$. Pour $x \in \theta^{-(i-r)} \mathcal{O}_{L_{\infty, \ell}}^n$, on a alors

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\| &\leq \max \|f^j \psi^k(x)\| \\ &\leq \|\delta_E(\theta) \gamma \dots \delta_E(\theta) \gamma \psi^k(x)\| \\ &\leq \|\delta_E(\theta)\|^j \|\psi(x)\|^k \\ &\leq \|\delta_E(\theta)\|^{r-1} \|\theta\|^{-km} \|x\| \\ &\leq \|\theta\|^{r-1+c} \|\theta\|^{-m} \|x\| \\ &\leq \|\theta\|^{-(m-r+1-c)} \|x\|. \end{aligned}$$

Corollaire 2.6.18. *Soit $\gamma : (L_{\infty, \ell})^n / \Lambda \rightarrow (L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire continu qui est $2N$ -tangent à l'identité pour $N > a + c - 1 + d$. Alors*

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma | V[[Z]]/Z^N) = 1.$$

Démonstration. On pose $f = \delta_E(\theta) \gamma$ et $\psi = \gamma^{-1} - 1$. Ce sont des endomorphismes R_ℓ -linéaires, continus de $(L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$. On a $1 + \Delta_\gamma = \frac{1 - (\psi + 1)fZ}{1 - f(\psi + 1)Z}$.

Comme γ^{-1} est $2N$ -tangente à l'identité, ψ est une $(2N + a)$ -contraction locale. En effet, il existe $i \geq r$ tel que $\|\gamma(x) - x\| \leq \|\theta\|^{-2N-a} \|x\|$ pour tout $x \in \theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty, \ell}}^n$ par définition. De plus, $\|x - \gamma^{-1}(x)\| = \|\gamma(x) - x\|$ comme γ est une isométrie.

On a $\frac{1 - (\psi + 1)fZ}{1 - f(\psi + 1)Z} \bmod Z^N = \prod_{s=1}^{N-1} \frac{1 - \psi_s f Z^s}{1 - f \psi_s Z^s} \bmod Z^N$ où les ψ_s sont des polynômes dans $R_\ell\{f, \psi\}$ de degré au plus s contenant au moins un facteur de ψ . D'après la remarque précédente, ψ_s est une $(2N + a - s - c + 1)$ -contraction locale. C'est donc une $(N + a - c + 1)$ -contraction locale sur $(L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$ pour $s < N$. Comme $m = N + a - c + 1 > 2a + d$ par choix de N , on applique la proposition 2.6.16 à f , ψ_s et m pour obtenir $\det(1 + f\psi_s) | (L_{\infty, \ell})^n / \Lambda = \det(1 + \psi_s f) | (L_{\infty, \ell})^n / \Lambda$. D'où

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma) | V[[Z]]/Z^N = \prod_{s=1}^{N-1} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} \left(\frac{1 - \psi_s f Z^s}{1 - f \psi_s Z^s} \right) | V[[Z]]/Z^N = 1.$$

□

2.6.4 Relation volume-déterminant

Le but de cette section est d'obtenir une relation entre volume et déterminant. Cela nous servira par la suite comme les idéaux de Fitting peuvent être exprimés comme des déterminants.

Lemme 2.6.19. *Soient $V_1, V_2 = \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_2$ où Λ_2 est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif de $\text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})$, deux modules dans la classe \mathcal{C} et $\gamma_1, \gamma_2 : V_1 \cong V_2$ deux isomorphismes R_ℓ -linéaires, continus qui sont $2N'$ -tangents à l'identité. Pour $N > a + c - 1 + d$ vérifiant pour tout $m < N$, $N' - q^n \lfloor \frac{m}{q^n} \rfloor - c \geq 1$ et $N' - q^n \lfloor \frac{m-1}{q^n} \rfloor - 2c \geq 1$, alors*

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_1}|V_1) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_2}|V_1).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \frac{1 + \Delta_{\gamma_1}}{1 + \Delta_{\gamma_2}} &= \frac{1 - \gamma_1^{-1} \delta_E(\theta) \gamma_1 Z}{1 - \gamma_2^{-1} \delta_E(\theta) \gamma_2 Z} \\ &= \frac{\gamma_2 - \gamma_2 \gamma_1^{-1} \delta_E(\theta) \gamma_1 Z}{\gamma_2 - \delta_E(\theta) \gamma_2 Z} \\ &= \frac{1 - \gamma_2 \gamma_1^{-1} \delta_E(\theta) \gamma_1 \gamma_2^{-1} Z}{1 - \delta_E(\theta) Z} \\ &= 1 + \Delta_{\gamma_1 \gamma_2^{-1}}. \end{aligned}$$

Comme γ_1 est $2N'$ -tangent à l'identité, il est N' -tangent à l'identité. De plus, la composition de deux applications N' -tangentes à l'identité reste N' -tangible à l'identité. En effet,

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(x) \gamma_2^{-1}(x) - x\| &= \|\gamma_1(x) \gamma_2^{-1}(x) - \gamma_2^{-1}(x) + \gamma_2^{-1}(x) - x\| \\ &\leq \max(\|\gamma_1(x) \gamma_2^{-1}(x) - \gamma_2^{-1}(x)\|; \|\gamma_2^{-1}(x) - x\|) \\ &\leq \max(\|\theta\|^{-N'-a} \|\gamma_2^{-1}(x)\|; \|\theta\|^{-N'-a} \|x\|) \\ &\leq \|\theta\|^{-N'-a} \|x\|. \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 2.6.13, $\Delta_{\gamma_1}, \Delta_{\gamma_2}, \Delta_{\gamma_1 \gamma_2^{-1}} \pmod{Z^N}$ sont nucléaires. Cela implique

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_1}|V_1) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_1 \gamma_2^{-1}}|V_2) \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_2}|V_1).$$

Comme γ_1, γ_2 sont $2N'$ -tangents à l'identité et $N' \geq N$, ils sont également $2N$ -tangents à l'identité. D'après le corollaire 2.6.18, on a $\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma_1 \gamma_2^{-1}}|V_2) = 1$, ce qui nous donne le résultat souhaité. \square

On rappelle que Λ_0 est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif fixé qui nous sert pour définir le volume et que le quotient de deux volumes ne dépend pas du choix de Λ_0 .

Lemme 2.6.20. *Soient $V_1 \in \mathcal{C}$ et Λ_1 le réseau associé, $V_2 = \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty,\ell})/\Lambda_2$. On suppose qu'il existe Λ un $\ell[\theta][G]$ -réseau contenant Λ_1 et Λ_2 . Soit $\gamma : V_1 \cong V_2$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire qui est $2N'$ -tangent à l'identité. Soit $N > a + c - 1 + d$ vérifiant pour tout $m < N$, $N' - q^n \lfloor \frac{m}{q^n} \rfloor - c \geq 1$ et $N' - q^n \lfloor \frac{m-1}{q^n} \rfloor - 2c \geq 1$, alors*

$$\det_{R_\ell[Z]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma|V_1) \equiv \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)} \pmod{Z^N}.$$

Démonstration. Soit s_1 une $\ell[\theta]$ -section pour π_1 . D'après la proposition 2.6.6 et sa preuve, on peut prendre Λ pour qu'il soit $(V_1, \Lambda_1, H_1, s_1)$ -admissible et $\ell[\theta][G]$ -libre. D'où $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$ est un $\ell[\theta][G]$ -module projectif de type fini. Soit e_1, \dots, e_m une $\ell[\theta][G]$ -base pour Λ . On pose $U = \bigoplus_{i=1}^m \theta^{-1} \ell[\theta^{-1}][G]e_i$ qui est un ouvert de $L_{\infty,\ell}^n$. Pour simplifier les notations, on voit f_1 comme l'identité, c'est-à-dire $V_1 = L_{\infty,\ell}^n/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$. On a

$$V_1 \cong L_{\infty,\ell}^n/\Lambda_1 \times s_1(H_1) = (\Lambda \oplus U)/\Lambda_1 \times s_1(H_1) = U \bigoplus (\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)).$$

De plus, $V_2 = L_{\infty,\ell}^n/\Lambda_2 = U \oplus \Lambda/\Lambda_2$. On a donc l'isomorphisme de R_ℓ -modules $\gamma : V_1 = U \bigoplus (\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)) \cong U \oplus \Lambda/\Lambda_2 = V_2$.

On va montrer que cela implique qu'il existe un R_ℓ -isomorphisme (pas nécessairement induit par γ) tel que $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong \Lambda/\Lambda_2$.

On prend $i \geq r$ suffisamment grand pour que $\gamma : \theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \cong \theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n$ soit une isométrie et $\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \subset U$. On a alors l'isomorphisme suivant

$$\gamma : U/\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \oplus \Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong U/\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n \oplus \Lambda/\Lambda_2.$$

De plus, on a $R_\ell = \bigoplus R_{\ell,j}$ où $R_{\ell,j}$ local pour tout j et pour M un R_ℓ -module, on a $M = \bigoplus M_j$ où $M_j = M \otimes_{R_\ell} R_{\ell,j}$. Pour tout j , γ induit un isomorphisme de $R_{\ell,j}$ -modules

$$\gamma_j : (U/\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n)_j \oplus (\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1))_j \cong (U/\theta^{-i} \mathcal{O}_{L_{\infty,\ell}}^n)_j \oplus (\Lambda/\Lambda_2)_j.$$

D'où $(\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1))_j$ et $(\Lambda/\Lambda_2)_j$ sont deux ℓ -espaces vectoriels de même dimension. On a alors $(\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1))_j \cong (\Lambda/\Lambda_2)_j$ comme $R_{\ell,j}$ -modules pour tout j . Cela implique $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong \Lambda/\Lambda_2$ comme R_ℓ -modules. On fixe ξ un isomorphisme : $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong \Lambda/\Lambda_2$ et on pose $\rho : U \oplus \Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong U \oplus \Lambda/\Lambda_2$ tel que $\rho|_U = \text{id}_U$ et $\rho_{\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)} = \xi$.

Comme $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$ est de dimension finie, on a ρ est ∞ -tangent à l'identité (on prend un voisinage ne contenant pas $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$, ρ est l'identité sur ce voisinage).

On peut donc appliquer le lemme précédent et obtenir

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\gamma|V_1) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\rho|V_1).$$

De plus, on a le diagramme commutatif qui représente deux modules de la classe \mathcal{C} , dont les lignes sont des applications $R_\ell[\theta]$ -linéaires (on travaille avec des modules admissibles) et les verticales sont des isomorphismes R_ℓ -linéaires, $2N'$ -tangents à l'identité :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & L_{\infty,\ell}^n/\Lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \xi & & \downarrow \rho & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda/\Lambda_2 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & L_{\infty,\ell}^n/\Lambda \longrightarrow 0. \end{array}$$

On obtient alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\rho|V_1) &= \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\xi|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)) \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_{\text{id}}|L_{\infty,\ell}^n/\Lambda) \\ &= \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\xi|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)). \end{aligned}$$

De plus, $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$ est un $\ell[\theta][G]$ -module projectif de type fini, on a l'isomorphisme $\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong \Lambda/\Lambda_2$. Cela implique

$$\det_{R_\ell[[\theta^{-1}]]}(1 + \Delta_\xi|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)) = \frac{|\Lambda/\Lambda_2|_G}{|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)|_G} = \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}$$

d'après la preuve de la proposition 2.6.9. On a bien

$$\begin{aligned} \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\gamma|V_1) &= \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\rho|V_1) \\ &= \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N}(1 + \Delta_\xi|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)) \\ &= \det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \Delta_\xi|\Lambda/\Lambda_1 \times s_1(H_1)) \pmod{Z^N} \\ &= \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)} \pmod{Z^N}. \end{aligned}$$

□

Ces deux lemmes nous permettent d'obtenir le théorème.

Théorème 2.6.21. *Soient $V_1, V_2 = \text{Lie}_{E_\ell}(L_{\infty, \ell})/\Lambda_2$ où Λ_2 est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif, deux modules dans la classe \mathcal{C} et $\gamma : V_1 \cong V_2$ un isomorphisme R_ℓ -linéaire, continu qui est ∞ -tangent à l'identité. Alors*

$$\det_{R_\ell[[Z]]}(1 + \Delta_\gamma|V_1) = \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}.$$

Démonstration. Soit s_1 une $\ell[\theta]$ -section pour π_1 . On prend Λ_1^* un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre qui est $(V_1, \Lambda_1, H_1, s_1)$ -admissible et Λ_2^* un $\ell[\theta][G]$ -réseau libre contenant Λ_2 . Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ une $\ell[\theta][G]$ -base de Λ_1^* et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_m)$ une $\ell[\theta][G]$ -base de Λ_2^* . On pose $X \in \text{Gl}_m(\ell((\theta^{-1}))[G])$ tel que $\mathcal{B}_2 = X\mathcal{B}_1$.

On munit $M_m(\ell((\theta^{-1}))[G])$ de la topologie induite par $\|\cdot\|$.

$\text{Gl}_m(\ell((\theta^{-1}))[G])$ est ouvert dans $M_m(\ell((\theta^{-1}))[G])$ et $(1 + \theta^{-i}M_m(\ell[[\theta^{-1}]][G]))_{i \geq 0}$ forme une base de voisinage de 1.

De plus, $\text{Gl}_m(\ell(\theta)[G])$ est dense dans $\text{Gl}_m(\ell((\theta^{-1}))[G])$ (comme $\ell((\theta^{-1}))$ est la complétion de $\ell(\theta)$ pour la norme infinie). Donc pour N' suffisamment grand, il existe $B \in \text{Gl}_m(\ell(\theta)[G])$ et $X_0 \in 1 + \theta^{-2N'}M_m(\ell[[\theta^{-1}]][G])$ tels que $X = BX_0$.

On pose ϕ_X, ϕ_{X_0} et ϕ_B les isomorphismes $\ell((\theta^{-1}))[G]$ -linéaires de $L_{\infty, \ell}^n$ dans lui-même dont les matrices dans la base \mathcal{B}_1 correspondent à X, X_0 et B . On rappelle que $V_1 \cong L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1 \times s_1(H_1)$. On pose $p = V_1 \rightarrow L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1$, $\Lambda_1' = \phi_{X_0}(\Lambda_1)$ et $V_1' = V_1 \times_{L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1} L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1' = \{(x; y) \in V_1 \times L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1' | p(x) = \phi_{X_0}^{-1}(y)\}$. ϕ_{X_0} induit un isomorphisme entre V_1 et V_1' qu'on note ϕ . En effet, si $m_1 \neq m_2$, $\phi(m_1) \neq \phi(m_2)$. ϕ est linéaire car p et ϕ_{X_0} le sont. Pour $x' = (x; y) \in V_1'$, $x' = \phi(x)$.

On a le diagramme commutatif suivant de $R_\ell[\theta]$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1 & \longrightarrow & V_1 & \xrightarrow{\pi_1} & H_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi_{X_0} & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & L_{\infty, \ell}^n/\Lambda_1' & \longrightarrow & V_1' & \xrightarrow{\pi_1'} & H_1 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Λ_1' est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif comme Λ_1 l'est et ϕ_{X_0} est un isomorphisme de $\ell[\theta][G]$ -modules. Donc V_1' appartient à la classe \mathcal{C} . De plus, ϕ est $2N'$ -tangent à l'identité par choix de X_0 . On a également $\gamma \circ \phi^{-1} : V_1' \cong V_2$ est $2N$ -tangent à l'identité car γ est ∞ -tangent à l'identité donc en particulier $2N'$ -tangent à l'identité. ϕ est $2'N$ -tangent à l'identité car la tangence à l'identité est stable par inverse et composition.

On a $\Lambda_1' = X_0\Lambda_1 \subset X_0\Lambda_1^*$ et $\Lambda_2 \subset \Lambda_2^* \subset BX_0\Lambda_1^*$. Comme $B \in \text{Gl}_m(\ell(\theta)[G])$, en utilisant la proposition 2.3.2, il existe un $\ell[\theta][G]$ -réseau Λ contenant Λ_1' et Λ_2 . Pour $N > a + c - 1 + d$ vérifiant pour tout $m < N$, $N' - q^n \lfloor \frac{m}{q^n} \rfloor - c \geq 1$ et $N' - q^n \lfloor \frac{m-1}{q^n} \rfloor - 2c \geq 1$, on applique le lemme précédent à $\gamma \circ \phi^{-1}$:

$$\det_{R_\ell[[Z]]} (1 + \Delta_{\gamma \circ \phi^{-1}} | V'_1) \equiv \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1)} \pmod{Z^N}.$$

Comme ϕ est $R_\ell[\theta]$ -linéaire, $\phi^{-1} \delta_E(\theta) \phi = \delta_E(\theta)$, donc $1 + \Delta_\phi = 1$ sur V_1 . D'après la preuve de la proposition 2.6.19,

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma | V_1) = \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_{\gamma \circ \phi^{-1}} | V'_1) \det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\phi | V_1).$$

D'où $\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma | V_1) = \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1)} \pmod{Z^N}$. Comme $\pi_1 \circ s_1 = \text{id}_{H_1}$ et $\pi_1 = \pi'_1 \circ \phi$, $s'_1 = \phi \circ s_1$ est une section pour π'_1 .

On pose $\Lambda_1^* = \phi_{X_0}(\Lambda_1^*)$. Comme $\Lambda_1 \subset \Lambda_1^*$, on a alors $\Lambda'_1 \subset \Lambda_1^*$. Λ_1^* est un $\ell[\theta][G]$ -réseau projectif comme Λ_1^* l'est et ϕ_{X_0} est un isomorphisme $\ell[\theta][G]$ -linéaire.

$\Lambda_1^*/\Lambda'_1 \times s'_1(H_1)$ est un sous- $\ell[\theta][G]$ -module de V'_1 comme $\Lambda_1^*/\Lambda_1 \times s'_1(H_1)$ est un sous- $\ell[\theta][G]$ -module de V_1 et ϕ est un isomorphisme $\ell[\theta][G]$ -linéaire. D'où Λ_1^* est un $(V'_1, \Lambda'_1, H_1, s'_1)$ -réseau admissible. On a donc l'isomorphisme $\ell[\theta][G]$ -linéaire

$$\phi : \Lambda_1^*/\Lambda_1 \times s_1(H_1) \cong \Lambda_1^*/\Lambda'_1 \times s'_1(H_1).$$

Cela implique donc

$$|\Lambda_1^*/\Lambda'_1 \times s'_1(H_1)|_{\ell[\theta][G]} = |\Lambda_1^*/\Lambda_1 \times s_1(H_1)|_{\ell[\theta][G]}.$$

D'après la preuve du lemme 2.6.9, $\frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1)} = \frac{|\Lambda_1^*/\Lambda_1 \times s_1(H_1)|_G}{|\Lambda_1^*/\Lambda'_1 \times s'_1(H_1)|_G} [\Lambda_1^* : \Lambda'_1]_G$. On en déduit

$$\frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1)} = [\Lambda_1^* : \Lambda'_1]_G = [\phi_{X_0}(\Lambda_1^*) : \Lambda_1^*]_G = \det(X_0) \equiv 1 \pmod{Z^{2N'}} \equiv 1 \pmod{Z^N}.$$

Cela entraîne

$$\det_{R_\ell[[Z]]/Z^N} (1 + \Delta_\gamma | V_1) \equiv \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2) \text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V'_1) \text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)} \pmod{Z^N} \equiv \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_2)}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(V_1)} \pmod{Z^N}.$$

Si on fait tendre N' vers l'infini, N peut lui être aussi grand que l'on veut et on obtient ainsi le résultat souhaité. \square

2.7 Formules de classes équivariantes

2.7.1 Formule de classes équivariante pour la z -déformation

Soient L/K une extension abélienne finie de groupe de Galois G et E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K . Soit M un module presque modéré pour L/K .

Proposition 2.7.1. *Le module $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est $\tilde{A}[G]$ -projectif.*

Démonstration. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/U(\tilde{E}(\tilde{M})) \longrightarrow \tilde{E}(\tilde{L}_\infty)/\tilde{E}(\tilde{M}) \longrightarrow H(\tilde{E}(\tilde{M})) \longrightarrow 0.$$

Comme $H(\tilde{E}(\tilde{M})) = \{0\}$, on a l'isomorphisme de $\tilde{A}[G]$ -modules

$$\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)/\tilde{E}(\tilde{M}) \cong \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/U(\tilde{E}(\tilde{M}))$$

induit par $\exp_{\tilde{E}}$.

$\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)/\tilde{E}(\tilde{M})$ est G -cohomologiquement trivial car L_∞ l'est (théorème de la base normale) et \tilde{M} également (car \tilde{M} est $\tilde{A}[G]$ -projectif). Donc $\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est G -cohomologiquement trivial. De plus, on a la suite exacte de $\tilde{A}[G]$ -modules,

$$0 \longrightarrow U(\tilde{E}(\tilde{M})) \longrightarrow \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty) \longrightarrow \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/U(\tilde{E}(\tilde{M})) \longrightarrow 0.$$

Cela implique que $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est G -cohomologiquement trivial. Comme \tilde{A} est un anneau de Dedekind et $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est un \tilde{A} -module projectif (car libre), par le corollaire 2.2.4, $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est bien $\tilde{A}[G]$ -projectif. \square

Théorème 2.7.2. *On a l'égalité dans $1 + \theta^{-1}\mathbb{F}_q(z)[[\theta^{-1}]] [G]$:*

$$\mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M})) = \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0} \left(\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)/\tilde{E}(\tilde{M}) \right)}{\text{Vol}_{\Lambda_0} \left(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) \right)}.$$

Démonstration. On pose $V_1 = \tilde{E}(\tilde{L}_\infty)/\tilde{E}(\tilde{M})$ et $V_2 = \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)/\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))} \xrightarrow{\iota_1} \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M})} \longrightarrow H(\tilde{E}(\tilde{M})) \longrightarrow 0.$$

Comme $H(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est trivial par la proposition 1.6.2, on a l'isomorphisme de $\tilde{A}[G]$ -modules

$$\frac{\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))} \cong \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M})}.$$

D'après la proposition 1.5.3, $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est un $\tilde{A}[G]$ -réseau. Donc V_1 et V_2 sont dans \mathcal{C} .

Ils ont la même $\mathbb{F}_q(z)[G]$ -structure mais l'action de θ est différente. θ agit sur V_2 via δ_E et via \tilde{E} sur V_1 . On pose $\gamma = \text{id} : V_1 \longrightarrow V_2$ l'application $\mathbb{F}_q(z)[G]$ -linéaire. On sait

que $\exp_{\tilde{E}} : \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty) \longrightarrow \tilde{E}(\tilde{L}_\infty)$ est convergente partout. On note $\overline{\exp}_{\tilde{E}} : V_2 \longrightarrow V_1$ l'application induite par $\exp_{\tilde{E}}$. Comme $\overline{\exp}_{\tilde{E}} = \gamma \circ \iota_1$, d'après la proposition 2.6.11, γ est ∞ -tangent à l'identité. On peut donc appliquer le théorème 2.6.21 pour obtenir

$$\det_{\mathbb{F}_q(z)[G][Z]} \left(1 + \Delta_\gamma | \tilde{E}(\tilde{L}_\infty) / \tilde{E}(\tilde{M}) \right) = \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0} \left(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty) / \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) \right)}{\text{Vol}_{\Lambda_0} \left(\tilde{E}(\tilde{L}_\infty) / \tilde{E}(\tilde{M}) \right)}.$$

Par définition de l'action de θ sur V_1 et V_2 et comme $\gamma = \text{id}$, on a

$$\det_{\mathbb{F}_q(z)[G][Z]} \left(1 + \Delta_\gamma | \tilde{E}(\tilde{L}_\infty) / \tilde{E}(\tilde{M}) \right) = \det_{\mathbb{F}_q(z)[G][Z]} \left(\frac{1 - \delta_E(\theta) \cdot Z}{1 - \phi_{\tilde{E}}(\theta) Z} \Big| \tilde{L}_\infty^n / \tilde{M} \right).$$

D'après le corollaire 2.5.20,

$$\det_{\mathbb{F}_q(z)[G][Z]} \left(\frac{1 - \delta_E(\theta) \cdot Z}{1 - \phi_{\tilde{E}}(\theta) Z} \Big| \tilde{L}_\infty^n / \tilde{M} \right) = \mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M}))^{-1}.$$

On a donc bien le résultat souhaité. \square

Cela nous permet d'obtenir la formule de classes équivariante suivante.

Théorème 2.7.3. *On a*

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[G]} = \mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Démonstration. Comme $H(\tilde{E}(\tilde{M})) = \{0\}$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))} \longrightarrow \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M})} \longrightarrow 0.$$

On a donc $\text{Vol}_{\Lambda_0} \left(\tilde{E}(\tilde{L}_\infty) / \tilde{E}(\tilde{M}) \right) = \frac{1}{\left[U(\tilde{E}(\tilde{M})) : \Lambda_0 \right]_{\tilde{A}[G]}}$. D'après le théorème précédent, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M})) &= \frac{\text{Vol}_{\Lambda_0}(\tilde{E}(\tilde{L}_\infty) / \tilde{E}(\tilde{M}))}{\text{Vol}_{\Lambda_0}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty) / \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}))} \\ &= \frac{1}{\left[U(\tilde{E}(\tilde{M})) : \Lambda_0 \right]_{\tilde{A}[G]}} \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \Lambda_0 \right]_{\tilde{A}[G]} \\ &= \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[G]}. \end{aligned}$$

\square

2.7.2 Déterminant

Soit G un groupe abélien fini. Soit $x \in k_\infty[G]$, on note M_x la matrice de la multiplication par x dans $k_\infty[G]$ vu comme un k_∞ -endomorphisme de $k_\infty[G]$. On note $\det_G(x) = \det(M_x)$.

Pour $i, j = 1, \dots, |G|$, on note $[i; j]$ l'entier $k \in \llbracket 1; |G| \rrbracket$ vérifiant $g_k g_j = g_i$.

En particulier, si $x = \sum_{i=1}^{|G|} x_i g_i$, on a pour $i, j = 1, \dots, |G|$, $(M_x)_{(i;j)} = x_{[i;j]}$.

Proposition 2.7.4. *x est inversible dans $A[G]$ si et seulement si $\det_G x \in \mathbb{F}_q^*$.*

Démonstration. On suppose que x est inversible dans $A[G]$. Il existe donc $y \in A[G]^*$ tel que $xy = \text{id}$. On a donc $M_x, M_y \in \mathcal{M}_{|G|}(A)$ telles que $M_x M_y = M_{\text{id}} = I_{|G|}$. D'où $\det_G(x) \det_G(y) = 1$. Cela implique que $\det_G(x) \in A^* = \mathbb{F}_q^*$.

Réciproquement, on suppose que $\det_G(x) \in \mathbb{F}_q^*$.

On a alors $M_x^{-1} = \frac{1}{\det_G(x)} \text{Com}(M_x) \in \mathcal{M}_{|G|}(A)$. Pour $i = 1, \dots, |G|$, on pose $y_i = (M_x^{-1})_{(i;1)}$ et $y = \sum_{i=1}^{|G|} y_i g_i$. Comme pour $i, j = 1, \dots, |G|$, $[i; j]$ est l'entier $k \in \llbracket 1; |G| \rrbracket$ vérifiant $g_k g_j = g_i$, on a alors

$$xy = \sum_{k=1}^{|G|} \sum_{j=1}^{|G|} x_k y_j g_k g_j = \sum_{i=1}^{|G|} \left(\sum_{j=1}^{|G|} y_j x_{[i;j]} \right) g_i.$$

Comme $\sum_{j=1}^{|G|} y_j x_{[i;j]}$ correspond au coefficient de la colonne 1 ligne i de la matrice $M_x M_x^{-1}$, on a $xy = \text{id}$. Donc x est bien inversible dans $A[G]$. \square

Le théorème suivant va nous permettre de relier les régulateurs et les idéaux de Fitting de $A[G]$ à ceux sur A .

Théorème 2.7.5. [19] *Soit R un anneau commutatif. On suppose que N est une matrice par blocs $m \times m$ de blocs $N^{i,j} \in \text{Mat}_n(R)$ qui commutent deux à deux. Alors*

$$|N| = \left| \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) N^{1,\sigma(1)} N^{2,\sigma(2)} \dots N^{m,\sigma(m)} \right|.$$

Proposition 2.7.6. *Soient P et Q deux $A[G]$ -réseaux libres de $\text{Lie}_E(L_\infty)$. On a alors*

$$\det_G [P : Q]_{A[G]} = [P : Q]_A.$$

Démonstration. Soient P et Q deux $A[G]$ -réseaux libres de rang m , de bases respectives e_1, \dots, e_m et f_1, \dots, f_m . Il existe $X \in \text{Gl}_m(k_\infty[G])$ qui envoie f_1, \dots, f_m sur e_1, \dots, e_m . On pose $(X)_{i,j} = x_{i,j}$. On a $[P : Q]_{A[G]} = \det X = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \dots x_{m,\sigma(m)}$.

D'où $\det_G [P : Q]_{A[G]} = \left| \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) M_{x_{1,\sigma(1)}} M_{x_{2,\sigma(2)}} \dots M_{x_{m,\sigma(m)}} \right|$. On note $e'_1, \dots, e'_{m|G|}$ et $f'_1, \dots, f'_{m|G|}$ les bases de P et Q comme A -modules. La matrice qui envoie $f'_1, \dots, f'_{m|G|}$ sur $e'_1, \dots, e'_{m|G|}$ est une matrice par blocs $m \times m$ où les blocs sont les $M_{x_{i,j}} \in \text{Mat}_{|G|}(k_\infty)$. Les blocs commutent deux à deux comme ils représentent les multiplications par les $x_{i,j}$. Comme $[P : Q]_A = \det M$, par le théorème précédent, on a bien

$$\det_G [P : Q]_{A[G]} = \left| \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) M_{x_{1,\sigma(1)}} M_{x_{2,\sigma(2)}} \dots M_{x_{m,\sigma(m)}} \right| = \det M = [P : Q]_A.$$

□

Proposition 2.7.7. *Soient N un $A[G]$ -module de type fini et projectif comme $\mathbb{F}_q[G]$ -module. Alors $\det_G |N|_G = |N|_A$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer lorsque $\mathbb{F}_q[G]$ est local. On pose $m = \text{rg}(N)$. Comme N est projectif et $\mathbb{F}_q[G]$ est local, N est libre. On a

$$|N|_G = \det_{A[G]} (\theta I_m - A_\theta) = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) (\theta I_m - A_\theta)_{1,\sigma(1)} (\theta I_m - A_\theta)_{2,\sigma(2)} \dots (\theta I_m - A_\theta)^{m,\sigma(m)}$$

où A_θ est la multiplication par θ dans une $\mathbb{F}_q[G]$ -base de N . On a alors

$$\det_G |N|_G = \det_G \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{|G|} (\theta I_m - A_\theta)_{i,\sigma(i)} \right) = \det \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{|G|} M_{(\theta I_m - A_\theta)_{i,\sigma(i)}} \right).$$

On note B_θ la matrice de la multiplication par θ dans une \mathbb{F}_q base de N . On a alors que $\theta I_{|G|m} - B_\theta$ est une matrice par blocs qui sont les $M_{(\theta I_m - A_\theta)_{i,\sigma(i)}}$. Comme ces blocs commutent deux à deux, on a par le théorème 2.7.5

$$|N|_A = \det(\theta I_{|G|m} - B_\theta) \left| \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{|G|} M_{(\theta I_m - A_\theta)_{i,\sigma(i)}} \right|.$$

On a bien $\det_G |N|_G = |N|_A$.

□

Proposition 2.7.8. *Soient P et Q deux $A[G]$ -réseaux projectifs de $\text{Lie}_E(L_\infty)$. On a alors*

$$\det_G [P : Q]_{A[G]} = [P : Q]_A.$$

Démonstration. Soient F et F' deux $A[G]$ -réseaux libres tels que $P \subset F$ et $Q \subset F'$. Par définition, on a

$$[P : Q]_{A[G]} = [F : F']_{A[G]} \frac{|F'/Q|_{A[G]}}{|F/P|_{A[G]}}.$$

Comme \det_G est multiplicatif,

$$\det_G [P : Q]_{A[G]} = \det_G [F : F']_{A[G]} \frac{\det_G |F'/Q|_{A[G]}}{\det_G |F/P|_{A[G]}}.$$

D'après les propositions précédentes, cela implique que

$$\det_G [P : Q]_{A[G]} = [F : F']_A \frac{|F'/Q|_A}{|F/P|_A} = [P : Q]_A.$$

□

Remarques 2.7.9. D'après la proposition 2.7.7, on a $\det_G(\mathcal{L}(E(M))) = \mathcal{L}(E(M))$.

De même, pour N et N' deux $A[G]$ -réseaux projectifs, d'après la proposition 2.7.8, on a $\det_G([N : N']_{A[G]}) = [N : N']_A$.

Remarques 2.7.10. Toutes ces propositions restent vraies en prenant $\mathbb{F}_q(z)$, \tilde{A} , \tilde{k}_∞ à la place de \mathbb{F}_q , A , k_∞

2.7.3 Formule de classes équivariante partielle

Théorème 2.7.11. *Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K . Soit Λ un $A[G]$ -réseau projectif contenu dans $U_{St}(E(M))$. Alors*

$$\mathcal{L}_G(E(M))^{-1} [\text{Lie}_E(M) : \Lambda]_{A[G]} \in A[G].$$

De plus,

$$\det_G \left(\frac{[\text{Lie}_E(M) : \Lambda]_{A[G]}}{\mathcal{L}_G(E(M))} \right) = [U_{St}(E(M)) : \Lambda]_A.$$

Démonstration. Soit P un premier irréductible unitaire de A . D'après la proposition 2.4.7, il existe $x_P \in A[G][z]$ tel que

$$\begin{aligned} & \text{— Fitt}_{\tilde{A}[G]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\tilde{M}}{P\tilde{M}} \right) \right) = x_P \tilde{A}[G], \\ & \text{— Fitt}_{A[G]} \left(\text{Lie}_E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(0)A[G], \\ & \text{— Fitt}_{A[G]} \left(E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(1)\tilde{A}[G]. \end{aligned}$$

Soit \mathcal{B} une base de $\text{Lie}_E(L_\infty)$ sur $k_\infty[G]$. C'est également une base de $\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)$ sur $\tilde{k}_\infty[G]$ et une base de $\text{Lie}_{\tilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty))$ sur $\mathbb{T}_z(k_\infty)[G]$. On note N le $A[G]$ -module engendré par \mathcal{B} .

On a $[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \tilde{N}]_{\tilde{A}[G]} = \mathbb{F}_q(z)[\text{Lie}_E(M) : N]_{A[G]}$ et

$$[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))]_{\tilde{A}[G]} = [\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \tilde{N}]_{\tilde{A}[G]} [\tilde{N} : U(\tilde{E}(\tilde{M}))]_{\tilde{A}[G]}.$$

De plus, d'après 1.6.1, $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$. D'après le théorème 2.7.3, on a

$$[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))]_{\tilde{A}[G]} \subset \mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Comme $\Lambda \subset U_{St}(E(M))$, le déterminant d'éléments de Λ dans la base \mathcal{B} provient de l'évaluation en $z = 1$ du déterminant d'éléments de $U(\tilde{E}(M[z]))$. Comme

$$[\tilde{N} : U(\tilde{E}(\tilde{M}))]_{\tilde{A}[G]} \subset [\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \tilde{N}]_{\tilde{A}[G]}^{-1} \mathcal{L}_G(\tilde{E}(\tilde{M})),$$

on a

$$[N : \Lambda]_{A[G]} \subset [M : N]_{A[G]}^{-1} \mathcal{L}_G(E(M)).$$

Cela implique que

$$[N : \Lambda]_{A[G]} [\text{Lie}_E(M) : N]_{A[G]} \subset \mathcal{L}_G(E(M)).$$

On a donc bien

$$[\text{Lie}_E(M) : \Lambda]_{A[G]} \subset \mathcal{L}_G(E(M)).$$

De plus, d'après le théorème 3.6.2, on a $[\text{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_A = \mathcal{L}(E(M))$. D'après la remarque 2.7.9, cela implique que

$$\det_G \left(\frac{[\text{Lie}_E(M) : \Lambda]_{A[G]}}{\mathcal{L}_G(E(M))} \right) = \frac{[\text{Lie}_E(M) : \Lambda]_A}{\mathcal{L}(E(M))} = [U_{St}(E(M)) : \Lambda]_A.$$

□

Remarque 2.7.12. En particulier, si $U_{St}(E(M))$ est $A[G]$ -projectif, alors $[\text{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M))$.

Proposition 2.7.13. Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K tel que $H(E(M))$ est G -cohomologiquement trivial. Alors $U(E(M))$ et $U_{St}(E(M))$ sont des $A[G]$ -modules projectifs. On a alors

$$[\text{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

De plus,

$$[\text{Lie}_E(M) : U(E(M))]_{A[G]} | H(E(M)) |_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

Démonstration. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\text{Lie}_E(L_\infty)}{U(E(M))} \longrightarrow \frac{E(L_\infty)}{E(M)} \longrightarrow H(E(M)) \longrightarrow 0.$$

Comme M est un module $A[G]$ -projectif, il est G -cohomologiquement trivial. De plus, L_∞ et $H(E(M))$ sont également G -cohomologiquement triviaux. Il en est alors de même pour $U(E(M))$. Comme A est un anneau de Dedekind et que $U(E(M))$ est A -projectif, il est $A[G]$ -projectif d'après le corollaire 2.2.4. On a les suites exactes

$$0 \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z]))[z-1] \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow (z-1)H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow (z-1)H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow H(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow H(E(M)) \longrightarrow 0.$$

Comme $H(E(M))$ est G -cohomologiquement trivial, $(z-1)H(\tilde{E}(M[z]))$ et $H(\tilde{E}(M[z]))$ ont la même cohomologie. Cela implique que $H(\tilde{E}(M[z]))[z-1]$ est lui aussi un A -module G -cohomologiquement trivial. De plus, on peut montrer que l'isomorphisme 1.6.3 est même un isomorphisme de $A[G]$ -modules. D'où $\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))}$ est également G -cohomologiquement trivial. Comme $U(E(M))$ l'est également, il en est de même pour $U_{St}(E(M))$. De la même manière que précédemment, A est un anneau de Dedekind et $U_{St}(E(M))$ est A -projectif, il est donc $A[G]$ -projectif d'après le corollaire 2.2.4.

Comme $U_{St}(E(M))$ est $A[G]$ -projectif, d'après le théorème 2.7.11, on obtient

$$[\text{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

Cela implique que

$$[\text{Lie}_E(M) : U(E(M))]_{A[G]} [U(E(M)) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

D'après le théorème [17, Theorem 6.2.1], on a

$$\frac{1}{[\mathrm{Lie}_E(M) : U(E(M))]_{A[G]}} \mathcal{L}_G(E(M)) \in \mathrm{Fitt}_{A[G]}(H(E(M))).$$

D'où $[U(E(M)) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \left| \frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \right|_{A[G]} \in \mathrm{Fitt}_{A[G]}(H(E(M)))$. De plus, d'après le théorème 1.6.4, $\left| \frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \right|_A = |H(E(M))|_A$. De la même manière que précédemment, on a alors $\left| \frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \right|_{A[G]} = |H(E(M))|_G$ et donc le résultat souhaité. \square

C'est le cas en particulier lorsque $H(E(M))$ est trivial.

On retrouve les théorèmes de Anglès et Tavares Ribeiro pour les modules de Drinfeld (voir [7, Théorème 2]) et de Fang pour les modules d'Anderson (voir [16, Théorème 1.12]).

Corollaire 2.7.14. *Si $p \nmid |G|$, alors*

$$[\mathrm{Lie}_E(\mathcal{O}_L) : U(E(\mathcal{O}_L))]_{A[G]} |H(E(\mathcal{O}_L))|_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(\mathcal{O}_L))$$

et

$$[\mathrm{Lie}_E(\mathcal{O}_L) : U_{St}(E(\mathcal{O}_L))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(\mathcal{O}_L)).$$

On va maintenant voir grâce au théorème suivant une condition suffisante pour que les modules de classes associé à M soit G -cohomologiquement trivial.

Théorème 2.7.15. [8, Theorem 6] *Soit G un p -groupe et soit N un $\mathbb{Z}[G]$ -module tel que $pN = 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- N est un $\mathbb{F}_p[G]$ -module libre ;
- N est un module induit ;
- N est cohomologiquement trivial ;
- $\widehat{H}^i(G, N) = \{0\}$ pour un entier i .

Corollaire 2.7.16. *On pose $N = \mathrm{Tr}_G(M)$. Si $H(E(N))$ est trivial alors $U(E(M))$ et $U_{St}(E(M))$ sont $A[G]$ -projectifs. On a alors*

$$[\mathrm{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

De plus,

$$[\mathrm{Lie}_E(M) : U(E(M))]_{A[G]} |H(E(M))|_{A[G]} = \mathcal{L}_G(E(M)).$$

Démonstration. On a supposé $H(E(N))$ trivial. On a donc $\exp_E(K_\infty^n) + N = K_\infty^n$. On veut montrer que $H(E(M))$ est G -cohomologiquement trivial. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow M + \exp_E(L_\infty^n) \longrightarrow L_\infty^n \longrightarrow H(E(M)) \longrightarrow 0.$$

Comme L_∞ est G -cohomologiquement trivial, pour montrer que $H(E(M))$ est G -cohomologiquement trivial, il suffit de montrer que $M + \exp_E(L_\infty^n)$ l'est.

On a

$$\mathrm{Tr}_G(M + \exp_E(L_\infty^n)) = N + \exp_E(K_\infty^n) = K_\infty^n.$$

De plus, si on regarde les G -invariants on obtient

$$(M + \exp_E(L_\infty^n))^G \subset (L_\infty^n)^G = K_\infty^n.$$

L'inclusion $\mathrm{Tr}_G(M + \exp_E(L_\infty^n)) \subset (M + \exp_E(L_\infty^n))^G$ implique que

$$\mathrm{Tr}_G(M + \exp_E(L_\infty^n)) = (M + \exp_E(L_\infty^n))^G = K_\infty^n.$$

On a donc $\widehat{H}^0(G, M + \exp_E(L_\infty^n)) = \{0\}$.

D'après le théorème 2.7.15, comme il y a un groupe de cohomologie qui est trivial, $M + \exp_E(L_\infty^n)$ est G -cohomologiquement trivial. On a donc $H(E(M))$ est G -cohomologiquement trivial. On obtient les résultats souhaités par la proposition 2.7.13. \square

Corollaire 2.7.17. *Soit M un module presque modéré. Soit ρ un module de Drinfeld tel que \log_ρ a pour rayon de convergence β . Si $\mathrm{Tr}_G(M) = \oplus A e_i$ où pour tout $w|_\infty$ et i , $w(e_i) \geq \beta - 1$ alors $H(\mathrm{Tr}_G(M))$ est trivial.*

Démonstration. On a $k_\infty = A \oplus \frac{1}{\theta} \mathbb{F}_q[[\theta^{-1}]]$. D'où

$$K_\infty = \oplus k_\infty e_i = \oplus \mathrm{Tr}_G(M) \oplus \frac{1}{\theta} \mathbb{F}_q[[\theta^{-1}]] e_i.$$

Si pour tout $w|_\infty$ et i , $w\left(\frac{e_i}{\theta}\right) \geq \beta$ c'est-à-dire $w(e_i) \geq \beta - 1$ alors $\frac{1}{\theta} \mathbb{F}_q[[\theta^{-1}]] e_i \subset \exp_\rho(K_\infty)$. On a donc $H(\mathrm{Tr}_G(M))$ est trivial, ce qui nous permet d'obtenir $\mathcal{L}(\rho(M)) = [M : U_{St}(\rho(M))]_{A[G]}$ et $\mathcal{L}(\rho(M)) = [M : U(\rho(M))]_{A[G]} | H(\rho(M))|_{A[G]}$. \square

2.7.4 Exemple

Dans cette section, on va voir un exemple de fonctions- L associées à un réseau qui n'est pas contenu dans l'anneau des entiers. On se place dans le cas où $q = p$.

D'abord, on rappelle la définition du d -ème symbole de puissance résiduelle.

Définition 2.7.18. Soient $b \in A$, $P \in A$ un polynôme irréductible unitaire et d un diviseur de $p - 1$

— Si $P \nmid b$, $\left(\frac{b}{P}\right)_d$ est l'unique élément de \mathbb{F}_p^* tel que

$$b^{\frac{p^{\deg(P)} - 1}{p - 1}} \equiv \left(\frac{b}{P}\right)_d \pmod{P}.$$

— si $P \mid b$, $\left(\frac{b}{P}\right)_d = 0$.

On peut étendre cette définition aux éléments non nuls de A . Si $c = \text{sgn}(c) \prod_{i=1}^s P_i^{f_i}$ où P_i sont des irréductibles unitaires deux à deux disjoints. Alors pour $b \in A$,

$$\left(\frac{b}{c}\right)_d = \prod_{i=1}^s \left(\frac{b}{P_i}\right)_d^{f_i}.$$

On renvoie à [24, Chapter 3] pour plus de détails.

Soit C le module de Carlitz

$$\begin{aligned} C : A &\rightarrow k_\infty\{\tau\} \\ \theta &\mapsto \theta + \tau \end{aligned}$$

On peut montrer que $\exp_C = \sum \frac{1}{D_i} \tau^i$ où $D_0 = 1$ et $D_i = (\theta^{q^i} - \theta) D_{i-1}^q$.

On peut écrire

$$C_P(x) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} [P, i] x^{p^i}$$

où $[P, i] \in A$, $[P, \deg(P)] = 1$ et $\forall i \in \llbracket 0; \deg(P) - 1 \rrbracket$, $P \mid [P, i]$ (voir [24, Chapter 12]). On a donc $C_P(x) \equiv x^{p^{\deg(P)}} \pmod{P}$.

Soient $Q(x) = x^p - x - \frac{1}{\theta} \in \mathbb{F}_p[\theta^{-1}]$ et L le corps de décomposition de Q sur k i.e., $L = \mathbb{F}_p(\alpha)$ où α est une racine de Q . On pose $G = \text{Gal}(L/k)$. On peut voir facilement que $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Par [9, Theorem 2.1], on peut montrer que $\mathcal{O}_L = A \bigoplus_{i=1}^{p-1} \theta A \alpha^i$ et θ est le seul premier ramifié dans L/k .

On veut d'abord montrer que $\theta \alpha^{p-1}$ est une base normale.

Pour $i \in \mathbb{F}_p$,

$$\sigma_i(\theta\alpha^{p-1}) = \theta(\alpha + i)^{p-1} = \theta \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1}{j} i^j \alpha^{p-1-j}.$$

En écrivant $\sigma_i(\theta\alpha^{p-1})$ en fonction de $1, \theta\alpha, \theta\alpha^2, \dots, \theta\alpha^{p-1}$, on obtient la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta \binom{p-1}{p-1} & \theta \binom{p-1}{p-1} 2^{p-1} & \dots & \theta \binom{p-1}{p-1} (p-1)^{p-1} \\ 0 & \binom{p-1}{p-2} & \binom{p-1}{p-2} 2^{p-2} & \dots & \binom{p-1}{p-2} (p-1)^{p-2} \\ 0 & \binom{p-1}{p-3} & \binom{p-1}{p-3} 2^{p-3} & \dots & \binom{p-1}{p-3} (p-1)^{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{1} 2 & \dots & \binom{p-1}{1} (p-1) \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme son déterminant est inversible dans k , on a $L = \theta k[G]\alpha^{p-1}$. On pose $M = \theta A[G]\alpha^{p-1}$. De cette matrice, on a $M = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \theta A\alpha^i$. On pose $\delta = \sqrt[p-1]{1 + \theta^{p-1}}$ et $M' = \delta M = \delta \theta A[G]\alpha^{p-1}$.

Par choix de δ , on remarque que $M' \not\subset \mathcal{O}_L$ et M' est un module presque modéré pour L/k .

On regarde d'abord la fonction L associée à M' .

On a $(\delta\theta\alpha^{p-1})^p = \delta^p\theta^p(\alpha + \frac{1}{\theta})^{p-1} = (1 + \theta^{p-1})\delta\theta(\theta\alpha + 1)^{p-1}$. D'où $\tau(\theta\delta\alpha^{p-1}) \equiv \theta\delta \pmod{\theta} M'$. D'après [9, Lemme 2.3] $\text{Tr}_G(\theta\alpha^{p-1}) = -\theta$. Cela implique que $C(M'/\theta M')$ est annulé $\theta + \text{Tr}_G$.

Soit P un premier irréductible de A , différent de θ et σ_P le morphisme de Frobenius associé à P .

On rappelle que $C_P \equiv \tau^{\deg(P)} \pmod{P}$. On a alors

$$\begin{aligned} C_P(\theta\delta\alpha^{p-1}) &\equiv \theta^{p^{\deg(P)}} \delta^{p^{\deg(P)}} (\alpha^{p-1})^{p^{\deg(P)}} \pmod{P} \\ &\equiv \theta(1 + \theta^{p-1})^{\frac{p^{\deg(P)}}{p-1}} \sigma_P(\alpha^{p-1}) \pmod{P} \\ &\equiv \theta\delta \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1} \sigma_P(\alpha^{p-1}) \pmod{P}. \end{aligned}$$

On obtient donc $|C(M'/PM')|_G = P1_G - \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1} \sigma_P$. Cela implique qu'on a la

fonction L -équivariante suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G(C(M')) &= \frac{|\mathrm{Lie}_C(M'/\theta M')|_G}{|C(M'/\theta M')|_G} \prod_{P \in \mathrm{MSpec}(A) \setminus \{\theta\}} \frac{|\mathrm{Lie}_C(M'/PM')|_G}{|C(M'/PM')|_G} \\
&= \frac{\theta}{\theta + \mathrm{Tr}_G} \prod_{P \in \mathrm{MSpec}(A) \setminus \{\theta\}} \frac{P}{P - \left(\frac{1+\theta^{p-1}}{P}\right)_{p-1} \sigma_P} \\
&= \left(1 - \frac{\mathrm{Tr}_G}{\theta}\right) \sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta)=1 \\ (a, 1+\theta^{p-1})=1}} \frac{\left(\frac{1+\theta^{p-1}}{a}\right)_{p-1} \sigma_a}{a} \\
&= \sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta)=1 \\ (a, 1+\theta^{p-1})=1}} \frac{\left(\frac{1+\theta^{p-1}}{a}\right)_{p-1} \sigma_a}{a} - \left(\sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta)=1 \\ (a, 1+\theta^{p-1})=1}} \frac{\left(\frac{1+\theta^{p-1}}{a}\right)_{p-1}}{a\theta} \right) \mathrm{Tr}_G.
\end{aligned}$$

Comme $k_\infty = A \oplus \theta^{-1}\mathbb{F}_p[[\theta^{-1}]]$, on a

$$L_\infty = M' \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p\left[\frac{1}{\theta}\right] \delta \alpha^i.$$

De plus, $\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p\left[\frac{1}{\theta}\right] \delta \alpha^i \subset \exp_C(L_\infty)$. On en déduit que $H(C(M')) = \{0\}$ et donc $U_{St}(C(M')) = U(C(M))$. Cela implique également que le module des unités est un module $A[G]$ -projectif. On obtient alors

$$[M : U(C(M))]_{A[G]} = \sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta)=1 \\ (a, 1+\theta^{p-1})=1}} \frac{\left(\frac{1+\theta^{p-1}}{a}\right)_{p-1} \sigma_a}{a} - \left(\sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta)=1 \\ (a, 1+\theta^{p-1})=1}} \frac{\left(\frac{1+\theta^{p-1}}{a}\right)_{p-1}}{a\theta} \right) \mathrm{Tr}_G.$$

On regarde maintenant la fonction L -équivariante associée à \widetilde{M} .

On a l'isomorphisme de $\widetilde{A}[G]$ -modules $\frac{\widetilde{M}'}{\widetilde{PM}'} \cong \frac{M'}{PM'}[z] \otimes_{\mathbb{F}_p[z]} \mathbb{F}_p(z)$. Comme $\frac{M'}{PM'}[z]$ est un $\frac{A}{PA}[z][G]$ -module libre, on a $\left| \frac{\widetilde{M}'}{\widetilde{PM}'} \right|_G = P1_G$.

Par les mêmes arguments utilisés précédemment, on obtient $\tilde{C}_P \equiv z^{\deg(P)} \tau^{\deg(P)} \pmod{P}$. De la même manière, pour P irréductible de A différent de θ on trouve

$$|\tilde{C}(\tilde{M}'/P\tilde{M}')|_G = P1_G - z^{\deg(P)} \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1} \sigma_P$$

et

$$|\tilde{C}(\tilde{M}'/\theta\tilde{M}')|_G = \theta 1_G + z \operatorname{Tr}_G.$$

On obtient donc

$$\mathcal{L}_G(\tilde{C}(\tilde{M}')) = \sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta) = 1 \\ (a, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{z^{\deg(a)} \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{a} \right)_{p-1} \sigma_a}{a} - \left(\sum_{\substack{a \in A^+, (a, \theta) = 1 \\ (a, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{z^{\deg(a)+1} \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{a} \right)_{p-1}}{a\theta} \right) \operatorname{Tr}_G.$$

Pour terminer cet exemple, on regarde les fonctions L -équivariantes associées à N où $N = \operatorname{Tr}_G(M')$. Comme $\operatorname{Tr}_G(\theta\alpha^{p-1}) = -\theta$ par [9, Lemma 2.3], $N = \theta A\delta$. Pour un premier qui ne divise pas $1 + \theta^{p-1}$, $C(N/PN)$ est annulé par $P - \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1}$. En effet, pour $x \in N$, on peut écrire $x = \theta a\delta$ où $a \in A$. D'où

$$\begin{aligned} C_{P - \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1}}(x) &\equiv x^{p^{\deg(P)}} - \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1} a\theta\delta \pmod{P} \\ &\equiv a\theta\delta^{p^{\deg(P)}} - \theta a^{p-1} \sqrt[p-1]{1 + \theta^{p-1}}^{p-1} \sqrt[p-1]{1 + \theta^{p-1}}^{p^{\deg(P)} - 1} \pmod{P} \\ &\equiv 0 \pmod{P}. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que si P divise $1 + \theta^{p-1}$, alors $C(N/PN)$ est annulé par P . On obtient alors la fonction L :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C(N)) &= \prod_{P \in \operatorname{MSpec}(A)} \frac{|\operatorname{Lie}_C(N/PN)|_A}{|C(N/PN)|_A} \\ &= \prod_{\substack{P \in \operatorname{MSpec}(A) \\ (P, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{P}{P - \left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{P} \right)_{p-1}} \\ &= \sum_{\substack{b \in A^+ \\ (b, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{\left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{b} \right)_{p-1}}{b}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.7.17, $U(C(N)) = U_{St}(C(N))$ et

$$U_{St}(C(\theta\mathbb{F}_p[\theta] \sqrt[p-1]{1 + \theta^{p-1}})) = \sum_{\substack{b \in A^+ \\ (b, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{\left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{b}\right)_{p-1}}{b} \theta\mathbb{F}_p[\theta] \sqrt[p-1]{1 + \theta^{p-1}}.$$

De la même manière, on obtient

$$\mathcal{L}(\tilde{C}(\tilde{N})) = \sum_{\substack{b \in A^+ \\ (b, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{\left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{b}\right)_{p-1} z^{\deg(b)}}{b}$$

et

$$U(\tilde{C}(\theta\mathbb{F}_q(z)[\theta]\delta)) = \sum_{\substack{b \in A^+ \\ (b, 1 + \theta^{p-1}) = 1}} \frac{\left(\frac{1 + \theta^{p-1}}{b}\right)_{p-1} z^{\deg(b)}}{b} \theta\mathbb{F}_q(z)[\theta]\delta.$$

CHAPITRE 3

Formule de classe équivariante : le cas A général

Le but de ce chapitre est de démontrer une formule de classe équivariante pour certains modules d'Anderson, en particulier pour les modules de Drinfeld. On généralise ainsi les résultats de Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro [5]. Pour ce faire, on généralise d'abord les notions de régulateurs et de facteurs locaux introduits dans [5][Section 1.3 et Section 3] dans le contexte équivariant en utilisant la méthode présente dans [7][Section 2.1]. On regarde ensuite si on peut étendre leurs résultats en travaillant sur $A[\Delta]$ en se servant encore de la décomposition en caractères, ce qui nécessite la condition " p ne divise pas le cardinal de Δ ."

3.1 Généralités

3.1.1 Notations

On rappelle d'abord les notations du chapitre 1. Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On prend k un corps global de fonctions sur \mathbb{F}_q . On fixe une place ∞ de k de degré d_∞ . On supposera pour simplifier que $d_\infty = 1$. On pose A l'anneau des éléments de k qui sont réguliers en dehors de ∞ . On note k_∞ la complétion ∞ -adique de k . Elle est munie de la valuation $v_\infty : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. On note \mathbb{C}_∞ le complété d'une clôture algébrique de k_∞ et on garde la notation v_∞ pour l'unique valuation définie sur

\mathbb{C}_∞ qui étend v_∞ . On définit le morphisme continu de \mathbb{F}_q -algèbres

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C}_\infty &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ x &\mapsto x^q. \end{aligned}$$

Soient K une extension finie de k et L une extension finie abélienne de K de groupe de Galois Δ de cardinal premier à p . On note \mathcal{O}_K et \mathcal{O}_L les fermetures intégrales respectives de A dans K et L . On pose $L_\infty = L \otimes_k k_\infty$. Soit π une uniformisante de k_∞ . On a alors $k_\infty = \mathbb{F}_q((\pi))$.

Soit z une indéterminée sur k_∞ . On note la notation v_∞ pour la valuation ∞ -adique de Gauss sur $k_\infty(z)$ c'est-à-dire la valuation telle que pour $P \in k_\infty[z]$ où $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ avec $a_i \in k_\infty$ on ait $v_\infty(P) = \min\{v_\infty(a_i)\}$. On note $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ la complétion de $k_\infty[z]$ pour v_∞ . C'est l'algèbre de Tate en une variable z à coefficients dans k_∞ . On a $\mathbb{T}_z(k_\infty) = \mathbb{F}_q[z]((\pi))$. On pose $\mathbb{T}_z(L_\infty) = L_\infty \otimes_{k_\infty} \mathbb{T}_z(k_\infty)$.

On note \tilde{k}_∞ la complétion de $k_\infty(z)$ pour v_∞ et $\tilde{A} = A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q(z)$. Le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $\mathbb{T}_z(k_\infty)$ est dense dans \tilde{k}_∞ . On pose $\tilde{L}_\infty = L \otimes_k \tilde{k}_\infty$. On note $\tilde{\mathcal{O}}_L$ le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par \mathcal{O}_L dans \tilde{L}_∞ . $\tilde{\mathcal{O}}_L$ est la fermeture intégrale de \tilde{A} dans \tilde{L}_∞ .

On va garder les notations des parties précédentes (voir §1.4), c'est-à-dire $\ell = \mathbb{F}_q$ ou $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et $k_{\infty,\ell} = \ell((\pi))$, $A_\ell = \ell \otimes_{\mathbb{F}_q} A$.

On prend $\overline{\mathbb{F}_q}$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_q . On pose $\hat{\Delta} = \text{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{F}_q})$. Pour $\chi \in \hat{\Delta}$, on pose $e_\chi = \sum_{g \in \Delta} \chi(g)g^{-1}$. Soit \mathbb{F} un corps contenant $\chi(g)$ pour $\chi \in \hat{\Delta}$ et $g \in \Delta$. Pour

N un $A[\Delta]$ -module, on pose $N(\chi) = e_\chi(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$. On a $N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}} N(\chi)$.

Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$. On a $\sigma(e_\chi) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{g \in \Delta} \sigma \circ \chi(g)g^{-1} = e_{\sigma \circ \chi}$. Comme dans [7, Section 2.41], on pose $[\chi] = \{\psi \in \hat{\Delta}, \psi = \sigma \circ \chi \text{ pour un élément } \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
e_{[\chi]} &= \sum_{\psi \in [\chi]} e_{\psi} \\
&= \sum_{\sigma \in H} e_{\sigma \circ \chi} \\
&= \frac{1}{|\Delta|} \sum_{g \in \Delta, \sigma \in H} \sigma \circ \chi(g) g^{-1} \\
&= \frac{1}{|\Delta|} \sum_{g \in \Delta} \text{Tr}_{\mathbb{F}'/\mathbb{F}_q}(\chi(g)) g^{-1} \in \mathbb{F}_q[\Delta].
\end{aligned}$$

3.1.2 Idéaux de Fitting

Soit N un $A[G]$ -module de type fini. Soient

$$A[\mathbb{F}][\Delta]^a \longrightarrow A[\mathbb{F}][\Delta]^b \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \longrightarrow 0$$

une présentation de $N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ et X la matrice de $A[\mathbb{F}][\Delta]^a \longrightarrow A[\mathbb{F}][\Delta]^b$. On rappelle que $\text{Fitt}_{A[\mathbb{F}][\Delta]}(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$ est l'idéal de $A[\mathbb{F}][\Delta]$ engendré par les mineurs de taille $b \times b$ si $b \leq a$ et que c'est l'idéal trivial sinon. On a $X_{ij} = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} a_{\chi}^{ij} e_{\chi}$. On pose $X(\chi) = e_{\chi}(X) = (a_{\chi}^{ij} e_{\chi})_{ij}$. Comme les e_{χ} sont orthogonaux deux à deux, on a

$$\sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{idéal engendré par mineur de } X(\chi) e_{\chi} A[\mathbb{F}][\Delta] = \text{Fitt}_{A[\mathbb{F}][\Delta]}(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}).$$

De plus, $X(\chi)$ est une matrice de relation pour $N(\chi)$. Par définition, l'idéal engendré par les mineurs de $X(\chi)$ est $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(N(\chi))$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$. On observe que $\sigma(X(\chi))$ est une matrice de relation pour $\sigma(N(\chi)) = N(\sigma \circ \chi)$. Or $X(\sigma \circ \chi)$ est également une matrice de relation pour $N(\sigma \circ \chi)$. Ces matrices engendrent donc le même idéal $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(N(\sigma \circ \chi))$. On a donc $\sigma(\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(N(\chi))) = \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(N(\sigma \circ \chi))$. On a d'une part $\text{Fitt}_{A[\mathbb{F}][\Delta]}(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(N)A[\mathbb{F}][\Delta]$ et d'autre part $\text{Fitt}_{A[\mathbb{F}][\Delta]}(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}) = \left(\sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\chi)} N(\chi) e_{\chi} \right) A[\mathbb{F}][\Delta]$. Cela implique que

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(N) = \left(\sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\chi)} N(\chi) e_{\chi} A[\mathbb{F}][\Delta] \right)^{\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)} = \left(\sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\chi)} N(\chi) e_{\chi} \right) A[\Delta].$$

On obtient donc

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(N) = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\chi)}(N(\chi)) e_{\chi}.$$

Lemme 3.1.1. *Soit $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ une suite exacte de $A[\Delta]$ -modules. Alors*

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(M) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(M_1) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(M_2).$$

Démonstration. Soit \mathbb{F} tel que $\chi(g) \in \mathbb{F}$ pour tout $\chi \in \widehat{\Delta}$ et $g \in \Delta$. On a alors la suite de $A(\mathbb{F})$ -modules, $0 \rightarrow M_1(\chi) \rightarrow M(\chi) \rightarrow M_2(\chi) \rightarrow 0$. Comme $A(\mathbb{F})$ est un anneau de Dedekind, on obtient alors

$$\text{Fitt}_{A[\mathbb{F}]}(M(\chi)) = \text{Fitt}_{A[\mathbb{F}]}(M_1(\chi)) \text{Fitt}_{A[\mathbb{F}]}(M_2(\chi)).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{Fitt}_{A[\Delta]}(M) &= \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(M(\chi)) e_{\chi} \\ &= \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}} \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(M_1(\chi)) \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(M_2(\chi)) e_{\chi} \\ &= \text{Fitt}_{A[\Delta]}(M_1) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(M_2). \end{aligned}$$

On obtient donc bien le résultat souhaité. \square

3.1.3 Régulateurs

Régulateurs classiques

Cette partie reprend les ratio de co-volumes introduits dans [5, Section 1.3] lorsque A est général. Soit \mathbb{F} une extension finie de \mathbb{F}_q . On rappelle que $k_{\ell}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}(z)((\pi))$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et $k_{\ell}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}((\pi))$ si $\ell = \mathbb{F}_q$, que $A_{\ell} = \widetilde{A}$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et $A_{\ell} = A$ si $\ell = \mathbb{F}_q$ et que $\ell(\mathbb{F}) = \mathbb{F}(z)$ si $\ell = \mathbb{F}_q(z)$ et juste \mathbb{F} si $\ell = \mathbb{F}_q$.

On rappelle également la définition de réseau, énoncée dans §1.4. Soit V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie. Un A_{ℓ} -réseau de $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ est un sous- A_{ℓ} -réseau de V qui est discret dans V et qui contient une base de V comme $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel.

Soit V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension 1. On écrit $V = k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})e$. Soit M un $A_{\ell}(\mathbb{F})$ -réseau de V . D'après la proposition 1.4.3, il existe un idéal fractionnaire I_M de $A_{\ell}(\mathbb{F})$, $\alpha_M \in k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})^{\times}$ tels que $M = \alpha_M I_M e$. De la même manière, il existe pour M' un $A_{\ell}(\mathbb{F})$ -réseau de V $I_{M'}$ et $\alpha_{M'}$ tels que $M' = \alpha_{M'} I_{M'} e$. On définit alors

$$[M' : M]_{A_{\ell}(\mathbb{F})} = \alpha_M \alpha_{M'}^{-1} I_M I_{M'}^{-1}.$$

On peut voir facilement que cette définition ne dépend pas de la base. Si on prend $f = \beta e$ une autre base alors $M = \alpha_M I_M \beta^{-1} f$, $M' = \alpha_{M'} I_{M'} \beta^{-1} f$ et on retrouve bien $[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \alpha_M \beta^{-1} (\beta^{-1} \alpha_{M'})^{-1} I_M I_{M'}^{-1} = \alpha_M \alpha_{M'}^{-1} I_M I_{M'}^{-1}$. De plus, si $M \subset M'$, on a $M = \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(M'/M)M'$. On obtient alors $[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \alpha_M \alpha_{M'}^{-1} \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(M'/M) I_{M'} I_{M'}^{-1}$ c'est-à-dire

$$[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(M'/M).$$

Si M_1, M_2, M_3 sont trois $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseaux de V , alors on peut également montrer que

$$[M_1 : M_3]_{A_\ell(\mathbb{F})} = [M_1 : M_2]_{A_\ell(\mathbb{F})} [M_2 : M_3]_{A_\ell(\mathbb{F})}.$$

On regarde maintenant comment généraliser cette définition lorsque V n'est plus de dimension 1 sur $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$. Soit V un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T^n(V) = \{x_1 \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} \dots \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} x_n \mid x_i \in V\}$ et N le sous-espace de $T^n(V)$ tel que $N = \{x_1 \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} \dots \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} x_n \mid \exists x_i = x_j, i \neq j\}$. On pose $\bigwedge^n(V) = T^n(V)/N$. C'est un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ espace vectoriel de dimension 1 (si e_1, \dots, e_n est une base de V alors $e_1 \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} \dots \otimes_{k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})} e_n$ est une base de $\bigwedge^n(V)$). On pose $\bigwedge^n : V^n \rightarrow \bigwedge^n(V)$ l'application $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -linéaire. Soient M et M' deux $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseaux de V . On note N et N' les images respectives de M^n et M'^n dans $\bigwedge^n(V)$ via \bigwedge^n . on a alors que N et N' sont des $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseaux de $\bigwedge^n(V)$. On pose

$$[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = [N' : N]_{A_\ell(\mathbb{F})}.$$

Comme $A_\ell(\mathbb{F})$ est un anneau de Dedekind, il existe e_1, \dots, e_n et f_1, \dots, f_n des $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -bases de V et $I_M, I_{M'}$ des idéaux fractionnaires de $A_\ell(\mathbb{F})$ tels qu'on ait $M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})e_i \oplus I_M e_n$ et $M' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})f_i \oplus I_{M'} f_n$. On pose $\sigma : V \rightarrow V$ l'isomorphisme $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -linéaire tel que $\sigma(e_i) = f_i$. On a $N = I_M e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ et $N' = \det(\sigma) I_{M'} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. On a donc $[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \det(\sigma)^{-1} I_M I_{M'}^{-1}$. De la même manière, on peut montrer que

$$[M : M']_{A_\ell(\mathbb{F})} = \det(\sigma) I_M^{-1} I_{M'} = [M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})}^{-1}.$$

Proposition 3.1.2. *Soient M et M' deux $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseaux de V qui est un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie tels que $M' \subset M$. Alors M/M' est de torsion et*

$$[M : M']_{A_\ell(\mathbb{F})} = \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})} \left(\frac{M}{M'} \right).$$

Démonstration. Par la proposition 1.4.3, M est contenu dans un réseau libre sur $A_\ell(\mathbb{F})$ qu'on note F . On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow F/M \rightarrow 0.$$

Si e_1, \dots, e_n est une base de F , et N est l'image de M^n dans $\bigwedge^n(V)$ alors $N = Ie_1 \wedge \dots \wedge e_n$ où I est l'idéal de $A_\ell(\mathbb{F})$ engendré par les déterminants $n \times n$ des éléments de M écrits dans la base e_1, \dots, e_n . On a donc bien $[F : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(F/M)$.

De plus, on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow M/M' \longrightarrow F/M' \longrightarrow M/M \longrightarrow 0.$$

Comme $A_\ell(\mathbb{F})$ est un anneau de Dedekind, on a

$$\text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(M/M') = \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(F/M') \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(F/M)^{-1}.$$

D'où $\text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})}(M/M') = [F : M']_{A_\ell(\mathbb{F})} [F : M]_{A_\ell(\mathbb{F})}^{-1} = [M : M']_{A_\ell(\mathbb{F})}$. \square

Corollaire 3.1.3. *Soient M et M' deux $A_\ell(\mathbb{F})$ -réseaux de V qui est un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\sigma : V \longrightarrow V$ un $k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})$ -isomorphisme tel que $\sigma(M) \subset M'$. On a alors*

$$[M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \det \sigma^{-1} \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})} \left(\frac{M'}{\sigma(M)} \right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} [M' : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} &= [M' : \sigma(M)]_{A_\ell(\mathbb{F})} [\sigma(M) : M]_{A_\ell(\mathbb{F})} \\ &= \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})} \left(\frac{M'}{\sigma(M)} \right) \det \sigma^{-1} \end{aligned}$$

\square

Régulateurs équivariants

Dans cette partie, on définit la notion de régulateurs équivariants de la même manière que Anglès et Tavares Ribeiro dans [7, Section 2.1] pour $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ et on vérifie que ces régulateurs vérifient les propriétés espérées.

Soit V un $k_{\infty, \ell}[\Delta]$ -module libre. On dit que M est un $A_\ell[\Delta]$ -réseau de V si M est un A_ℓ -réseau et un $A_\ell[\Delta]$ -module.

On rappelle d'abord les notations suivantes. On pose \mathbb{F} un corps contenant $\chi(g)$ pour $\chi \in \widehat{\Delta}$ et $g \in \Delta$. Pour N un $A[\Delta]$ -module et $\chi \in \widehat{\Delta}$, on pose $N(\chi) = e_\chi(N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$. Comme pour $\delta \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$, $\delta(e_\chi) = e_{\delta \circ \chi}$, on a $\delta(N(\chi)) = N(\delta \circ \chi)$.

Soient M, M' deux $A_\ell[\Delta]$ -réseaux de V . On peut donc écrire

$$M(\chi) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})e_i \oplus I_{M(\chi)}e_n$$

et

$$M'(\chi) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})f_i \oplus I_{M'(\chi)}f_n.$$

Cela implique que

$$\delta(M(\chi)) = M(\delta \circ \chi) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})\delta(e_i) \oplus \delta(I_{M(\chi)})\delta(e_n)$$

et

$$\delta(M'(\chi)) = M'(\delta \circ \chi) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_\ell(\mathbb{F})\delta(f_i) \oplus \delta(I_{M'(\chi)})\delta(f_n).$$

De plus, si B est la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_n) à la base (f_1, \dots, f_n) alors $\delta(B) = (\delta(B_{i,j}))$ est celle de $(\delta(e_1), \dots, \delta(e_n))$ à $(\delta(f_1), \dots, \delta(f_n))$. On obtient alors

$$[M'(\delta \circ \chi) : M(\delta \circ \chi)]_{A_\ell(\mathbb{F})} = \delta(\det(\sigma)^{-1})\delta(I_{M(\chi)})\delta(I_{M'(\chi)}^{-1}) = \delta([M'(\chi) : M(\chi)]_{A_\ell(\mathbb{F})}).$$

Cela nous permet alors de définir

$$[M' : M]_{A_\ell[\Delta]} = \sum_{\chi \in \Delta} [M'(\chi) : M(\chi)]_{A_\ell(\mathbb{F})} e_\chi \in k_{\infty, \ell}[\Delta]^\times$$

car $[M' : M]_{A_\ell[\Delta]} \in (k_{\infty, \ell}(\mathbb{F})[\Delta]^\times)^{\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)} = k_{\infty, \ell}[\Delta]^\times$.

Corollaire 3.1.4. *Soient M et M' deux $A_\ell[\Delta]$ -réseaux de V tels que $M' \subset M$. Alors*

$$[M : M']_{A_\ell[\Delta]} = \text{Fitt}_{A_\ell[\Delta]} \left(\frac{M}{M'} \right).$$

Démonstration. Si M et M' sont deux $A_\ell[\Delta]$ -réseaux de V alors pour $\chi \in \hat{\Delta}$, $M(\chi)$ et $M'(\chi)$ sont deux réseaux de $V(\mathbb{F})$. On peut donc appliquer la proposition 3.1.2 pour obtenir

$$\begin{aligned} [M : M']_{A_\ell[\Delta]} &= \sum_{\chi \in \Delta} [M'(\chi) : M(\chi)]_{A_\ell(\chi)} e_\chi \\ &= \sum_{\chi \in \Delta} \text{Fitt}_{A_\ell(\mathbb{F})} \left(\frac{M(\chi)}{M'(\chi)} \right) e_\chi \\ &= \text{Fitt}_{A_\ell[\Delta]} \left(\frac{M}{M'} \right). \end{aligned}$$

□

3.2 Facteurs locaux équivariants

Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K de dimension d où L/K est une extension abélienne de groupe de Galois Δ de cardinal premier à p et $k \subset K$. Soit M un $A[\Delta]$ -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module.

Pour I un idéal non nul de A . On définit

$$Z_{I,\Delta}(E(M)) = \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/IM))}{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/IM))} \subset k_\infty[\Delta],$$

$$Z_{I,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})) = \frac{\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}/I\tilde{M}))}{\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]}(\tilde{E}(\tilde{M}/I\tilde{M}))} \subset \tilde{k}_\infty[\Delta].$$

Si P est un idéal premier non nul de A , on appelle $Z_{P,\Delta}$ le facteur local équivariant de P .

Lemme 3.2.1. *Soient I et J deux idéaux premiers entre eux non nuls de A . Alors on a*

$$\begin{aligned} Z_{IJ,\Delta}(E(M)) &= Z_{I,\Delta}(E(M))Z_{J,\Delta}(E(M)), \\ Z_{IJ,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})) &= Z_{I,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))Z_{J,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème des restes chinois, comme I et J sont premiers entre eux, on a l'isomorphisme de $A[\Delta]$ -modules

$$A/IJ \cong A/I \times A/J.$$

Cet isomorphisme nous donne

$$M/IJM \cong M/IM \times M/JM.$$

On obtient alors

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/IJM)) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/IM)) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/JM))$$

et

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/IJM)) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/IM)) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/JM)).$$

Cela implique que $Z_{IJ,\Delta}(E(M)) = Z_{I,\Delta}(E(M))Z_{J,\Delta}(E(M))$. De la même manière, on peut montrer que $Z_{IJ,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})) = Z_{I,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))Z_{J,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))$. \square

Lemme 3.2.2. *Soient I un idéal non nul de A et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$\begin{aligned} Z_{I,\Delta}(E(M)) &= Z_{I^n,\Delta}(E(M)), \\ Z_{I,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})) &= Z_{I^n,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})). \end{aligned}$$

Démonstration. On montre par récurrence que pour $n \geq 1$, on a $Z_{I,\Delta}(E(M)) = Z_{I^n,\Delta}(E(M))$. Pour $n = 1$, on a bien $Z_{I,\Delta}(E(M)) = Z_{I^1,\Delta}(E(M))$. On suppose que $Z_{I,\Delta}(E(M)) = Z_{I^n,\Delta}(E(M))$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à montrer que cela implique $Z_{I,\Delta}(E(M)) = Z_{I^{n+1},\Delta}(E(M))$. On a la suite exacte de $A[\Delta]$ -modules :

$$0 \longrightarrow I^n M / I^{n+1} M \longrightarrow M / I^{n+1} M \longrightarrow M / I^n M \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme 3.1.1, on obtient

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/I^{n+1}M)) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(I^n M / I^{n+1}M)) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(M/I^n M)),$$

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/I^{n+1}M)) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(I^n M / I^{n+1}M)) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(M/I^n M)).$$

Soient $x \in (I^n M)^d$ et $a \in A$. On a $E_a(x) \equiv \delta_E(a)x \pmod{I^{n+1}M}$. De plus, pour $g \in \Delta$, $gE = Eg$. D'où

$$E(I^n M / I^{n+1}M) \cong \text{Lie}_E(I^n M / I^{n+1}M)$$

comme $A[\Delta]$ -modules. En particulier,

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(I^n M / I^{n+1}M)) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(I^n M / I^{n+1}M)).$$

D'où $Z_{I^n,\Delta}(E(M)) = Z_{I^{n+1},\Delta}(E(M))$. De plus, par hypothèse de récurrence, on peut en déduire $Z_{I^n,\Delta}(E(M)) = Z_{I,\Delta}(E(M))$. On a donc bien $Z_{I^{n+1},\Delta}(E(M)) = Z_{I,\Delta}(E(M))$.

De la même manière, on peut montrer que $Z_{I,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) = Z_{I^n,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M}))$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. \square

Proposition 3.2.3. *Soit I un idéal non nul de A . Alors*

$$Z_{I,\Delta}(E(M)) = \prod_{P|I} Z_{P,\Delta}(E(M)),$$

$$Z_{I,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) = \prod_{P|I} Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})).$$

Démonstration. Soit I un idéal non nul de A . On écrit $I = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r}$ avec des idéaux premiers P_1, \dots, P_r . Par le lemme 3.2.1, $Z_{I,\Delta}(E(M)) = \prod_{i=1}^r Z_{P_i^{n_i},\Delta}(E(M))$. D'après le

lemme 3.2.2, cela donne alors $Z_{I,\Delta}(E(M)) = \prod_{i=1}^r Z_{P_i,\Delta}(E(M))$. \square

Soit $I = (\xi)$ un idéal de A . Il existe alors un unique module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K tel que pour tout $a \in A$, $\xi E'_a = E_a \xi$. En effet, si $E_a = \sum_{i=0}^r A_i \tau^i$ où $A_i \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$, on a

$$E'_a = \xi^{-1} E_a \xi = \xi^{-1} \sum_{i=0}^r A_i \tau^i \xi = \sum_{i=0}^r \xi^{q^i-1} A_i \tau^i.$$

Si M est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module, il est bien stable sous E' . En particulier, on remarque que $\xi^{q^0-1} A_0 = A_0$ et donc $\delta_E(a) = \delta_{E'}(a)$. Cela implique que les structures de A -modules sous Lie_E et $\text{Lie}_{E'}$ sont les mêmes.

Lemme 3.2.4. *Soit $I = (\xi)$ un idéal de A et E' le module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K tel que $\xi E'_a = E_a \xi$ pour tout $a \in A$. $IU(E'(M))$ est un sous- $A[\Delta]$ -module de $U(E(M))$. De plus, $IU(E'(M)) = U(E(IM))$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} U(E'(M)) &= \{x \in L_\infty^d \mid \exp_{E'}(x) \in M^d\} \\ &= \{x \in L_\infty^d \mid \xi^{-1} \exp_E(\xi x) \in M^d\} \\ &= \{x \in L_\infty^d \mid \exp_E(\xi x) \in \xi M^d\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} IU(E'(M)) &= \xi U(E'(M)) \\ &= \{\xi x \in L_\infty^d \mid \exp_E(\xi x) \in \xi M^d\} \\ &= \{y \in L_\infty^d \mid \exp_E(y) \in \xi M^d\} \\ &= \{y \in L_\infty^d \mid \exp_E(y) \in IM^d\}. \end{aligned}$$

Donc $IU(E'(M))$ est un sous- $A[\Delta]$ -module de $U(E(M))$ et $IU(E'(M)) = U(E(IM))$. \square

Lemme 3.2.5. *Soient $I = (\xi)$ un idéal de A et E' le module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K tel que $\xi E'_a = E_a \xi$ pour tout $a \in A$. On a alors*

$$Z_{I,\Delta}(E(M)) = [U(E'(M)) : U(E(M))]_{A[\Delta]} \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E(M)))}{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E'(M)))}.$$

Démonstration. Par définition de E' et comme il existe une unique série exponentielle associée à ce module d'Anderson, on peut montrer que $\exp_{E'} = \xi^{-1} \exp_E \xi$.

On a la suite de $A[\Delta]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \frac{U(E(M))}{IU(E'(M))} \xrightarrow{\exp_E} E \left(\frac{M}{\xi M} \right) \longrightarrow \frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} \longrightarrow 0.$$

En effet, soit $\bar{m} \in E\left(\frac{M}{\xi M}\right)$ tel que pour m un représentant, sa classe soit 0 dans $\frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}$. Il existe $b \in \text{Lie}_E(L_\infty)$ tel que $m = \exp_E(b)$. D'où $b \in U(E(M))$.

D'après le lemme 3.1.1, on en déduit

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(E\left(\frac{M}{\xi M}\right)\right) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{U(E(M))}{IU(E'(M))}\right) \text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}\right).$$

On a également la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} \rightarrow \frac{E(L_\infty)}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} \rightarrow \frac{E(L_\infty)}{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} \rightarrow 0.$$

De la même manière, on a l'égalité entre $\text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{E(L_\infty)}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}\right)$ et $\text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}\right) \text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{E(L_\infty)}{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}\right)$. De plus, comme $\xi L_\infty = L_\infty$ et $\exp_E = \xi \exp_{E'} \xi^{-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{E(L_\infty)}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} &= \frac{E(L_\infty)}{\xi E'(M) + \xi \exp_{E'}(\xi^{-1} L_\infty)} \\ &= \frac{E'(L_\infty)}{E'(M) + \exp_{E'}(L_\infty)} \\ &= H(E'(M)). \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}\right) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E'(M))) \text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E(M)))^{-1}.$$

Puisque $U(E'(M))$ et $\text{Lie}_E(M)$ sont deux réseaux de $\text{Lie}_E(L_\infty)$, cela implique que

$$\frac{U(E'(M))}{IU(E'(M))} \cong \text{Lie}_E\left(\frac{M}{IM}\right).$$

En particulier,

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\frac{U(E'(M))}{IU(E'(M))}\right) = \text{Fitt}_{A[\Delta]}\left(\text{Lie}_E\left(\frac{M}{IM}\right)\right).$$

On a donc bien

$$\begin{aligned}
Z_{I,\Delta}(E(M)) &= \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\text{Lie}_E \left(\frac{M}{IM} \right) \right)}{\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(E \left(\frac{M}{IM} \right) \right)} \\
&= \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\frac{U(E'(M))}{IU(E'(M))} \right)}{\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\frac{U(E(M))}{IU(E'(M))} \right) \text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\frac{E(M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))}{E(\xi M) + \exp_E(\text{Lie}_E(L_\infty))} \right)} \\
&= [U(E'(M)) : U(E(M))]_{A[\Delta]} \text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E'(M)))^{-1} \text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E(M))).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.6. *Soit $\xi \in A$ non nul. On note P_1, \dots, P_r les premiers de A apparaissant dans la décomposition de ξA . Soit E' le module de A -module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K vérifiant pour tout $a \in A$, $\xi E'_a = E_a \xi$. Alors*

$$\prod_{i=1}^r Z_{P_i, \Delta}(E(M)) = [U(E'(M)) : U(E(M))]_{A[\Delta]} \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E(M)))}{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E'(M)))}.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.2.3, $Z_{I,\Delta}(E(M)) = \prod_{P|I} Z_{P,\Delta}(E(M))$. D'après le lemme 3.2.5, $Z_{I,\Delta}(E(M)) = [U(E'(M)) : U(E(M))]_{A[\Delta]} \frac{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E(M)))}{\text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(E'(M)))}$. On a donc bien le résultat souhaité. □

Proposition 3.2.7. *Soit $\xi \in A$ non nul. Soit E' le module de A -module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K vérifiant pour tout $a \in A$, $\xi E'_a = E_a \xi$. Alors*

$$Z_{I,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})) = \left[U(\tilde{E}'(\tilde{M})) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]}.$$

Démonstration. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\tilde{E}(\tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))}{\tilde{E}(\xi \tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))} \longrightarrow \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\xi \tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))} \longrightarrow \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))} \longrightarrow 0.$$

De plus,

$$\frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\xi \tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty))} = \frac{\tilde{E}'(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}'(\tilde{M}) + \exp_{\tilde{E}'}(\text{Lie}_{\tilde{E}'}(\tilde{L}_\infty))}.$$

Par la proposition 1.6.2, on a donc

$$\frac{\widetilde{E}'(\widetilde{L}_\infty)}{\widetilde{E}'(\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}'}(\text{Lie}_{\widetilde{E}'}(\widetilde{L}_\infty))} = \frac{\widetilde{E}(\widetilde{L}_\infty)}{\widetilde{E}(\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}}(\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty))} = 0.$$

D'où

$$\frac{\widetilde{E}(\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}}(\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty))}{\widetilde{E}(\xi\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}}(\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty))} = 0.$$

On a également

$$0 \longrightarrow \frac{U(\widetilde{E}(\widetilde{M}))}{IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))} \xrightarrow{\exp_{\widetilde{E}}} \widetilde{E} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \longrightarrow \frac{\widetilde{E}(\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}}(\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty))}{\widetilde{E}(\xi\widetilde{M}) + \exp_{\widetilde{E}}(\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty))} \longrightarrow 0.$$

Comme $\exp_{\widetilde{E}}$ est un morphisme de $\widetilde{A}[\Delta]$ -modules, cela implique que

$$\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\widetilde{E} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \right) = \text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\frac{U(\widetilde{E}(\widetilde{M}))}{IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))} \right).$$

On s'intéresse maintenant à $\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\text{Lie}_{\widetilde{E}} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \right)$.

Comme $\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{M})$ et $U(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))$ sont deux $\widetilde{A}[\Delta]$ -réseaux de $\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{L}_\infty)$, ils ont le même rang. En particulier, on obtient $\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\text{Lie}_{\widetilde{E}} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \right) = \text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\frac{U(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))}{IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))} \right)$.

Cela implique

$$\begin{aligned} Z_{I,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) &= \frac{\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\text{Lie}_{\widetilde{E}} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \right)}{\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\widetilde{E} \left(\frac{\widetilde{M}}{\xi\widetilde{M}} \right) \right)} \\ &= \frac{\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\frac{U(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))}{IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))} \right)}{\text{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\frac{U(\widetilde{E}(\widetilde{M}))}{IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M}))} \right)} \\ &= \left[U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) : IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \left[IU(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \\ &= \left[U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.8. *Soit $\xi \in A$ non nul. Soit E' le module de A -module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K vérifiant pour tout $a \in A$, $\xi E'_a = E_a \xi$. Alors*

- si $\xi \in P$, $Z_{P,\Delta}(E'(M)) = A[\Delta]$ et $Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) = \widetilde{A}[\Delta]$,
- si $\xi \notin P$, $Z_{P,\Delta}(E'(M)) = Z_{P,\Delta}(E(M))$ et $Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) = Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M}))$.

Démonstration. On rappelle que pour $a \in A$, si $E_a = \sum_{i=0}^r A_i \tau^i$ alors on a $E'_a = \sum_{i=0}^r A_i \xi^{q^i-1} \tau^i$. Si $\xi \in P$, on a donc $E'_a(x) = \delta_E(x) \pmod{P}$. On a donc

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\text{Lie}_{E'} \left(\frac{M}{\xi M} \right) \right) = \text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(E' \left(\frac{M}{\xi M} \right) \right).$$

D'où $Z_{I,\Delta}(E'(M)) = A[\Delta]$. De la même manière, $Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) = \widetilde{A}[\Delta]$.

Si $\xi \notin P$, alors la multiplication par ξ induit l'isomorphisme sur $\frac{M}{PM}$. D'où

$$\begin{aligned} E \left(\frac{M}{PM} \right) &\cong E \left(\xi \frac{M}{PM} \right) \\ &\cong \xi E' \left(\frac{M}{PM} \right) \\ &\cong E' \left(\frac{M}{PM} \right). \end{aligned}$$

□

3.3 Module admissible

Soient L/k une extension finie et E un A -module d'Anderson dont le corps de définition de E noté K vérifie L/K est abélienne de groupe de Galois Δ d'ordre premier à p . Soit M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module.

Définition 3.3.1. On dit que E est un module Δ -admissible pour M si les conditions (P) et (C) sont vérifiées :

Condition (P) : il existe S un ensemble fini de premiers de A tels que pour tout premier \mathfrak{P} de A n'appartenant pas à S , il existe $x_P \in A[z][\Delta]$ tel que

- $\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\tilde{M}}{P\tilde{M}} \right) \right) = x_P \tilde{A}[\Delta],$
- $\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\text{Lie}_E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(0)A[\Delta],$
- $\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(1)A[\Delta].$

Condition (C) : Le produit infini $\prod_{P \notin S} \frac{x_P(0)}{x_P}$ converge dans $\tilde{k}_\infty[\Delta]$.

La condition (P) correspond au fait que pour presque tout premier \mathfrak{P} de A , les idéaux $\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\tilde{M}}{P\tilde{M}} \right) \right)$, $\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\text{Lie}_E \left(\frac{M}{PM} \right) \right)$ et $\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(E \left(\frac{M}{PM} \right) \right)$ soient principaux. La condition (C) nous donne la convergence du produit infini $\prod_{P \notin S} \frac{x_P(0)}{x_P}$, qui est presque égal à la fonction L -équivariante que l'on va définir ensuite.

On pose alors

- $x = \prod_{P \notin S} \frac{x_P(0)}{x_P}$ et
- $y = \prod_{P \notin S} \frac{x_P(0)}{x_P(1)}.$

Pour de tels modules, on peut donc définir

$$\mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})) = (x) \prod_{P \in S} Z_{P,\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))$$

et

$$\mathcal{L}_\Delta(E(M)) = (y) \prod_{P \in S} Z_{P,\Delta}(E(M)).$$

D'après le chapitre précédent, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.2. *On suppose $A = \mathbb{F}_q[\theta]$. Soient E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K et M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. Alors E est Δ -admissible pour M .*

Dans ce cas, on peut prendre $S = \{\infty\}$.

3.4 Ecriture des unités et des régulateurs

Dans cette partie, on rappelle d'abord le lemme [5, Lemma 4.4] ainsi que sa preuve qui correspond à l'écriture de certaines unités puis on vérifie que la proposition [5, Proposition 4.5] a bien une version équivariante.

Soient L/k une extension finie et E un A -module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K où L/K une extension abélienne finie de groupe de Galois Δ où $\text{pgcd}(|\Delta|, p) = 1$ et $k \subset K$. On pose $\mathbb{F}_q[z]_{(z)}$ la localisation de $\mathbb{F}_q[z]$ en z et $\exp_E = \sum_{k \geq 0} e_k \tau^k$.

Lemme 3.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $e_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$. Alors tout $x \in U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ non nul peut s'écrire de la manière suivante $z^a(\alpha + z^n\beta)$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}M[z])^d$ non divisible par z et $\beta \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}\mathbb{T}_z(L_\infty))^d$.*

On a également pour $\alpha \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}M[z])^d$, il existe $\beta \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}\mathbb{T}_z(L_\infty))^d$ tel que $(\alpha + z^n\beta) \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)}U(\tilde{E}(\tilde{M}))$.

Démonstration. On pose $\log_E = \sum_{k \geq 0} \ell_k \tau^k$. On peut montrer en regardant modulo les puissances de z que comme $e_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a également $\ell_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

On montre d'abord que tout $u \in U(\tilde{E}(M[z]))$ peut s'écrire de la manière suivante $u = z^a(x + z^n y)$ où $a \in \mathbb{N}$, $x \in M[z]^d$ non divisible par z et $y \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$.

Soit $u \in U(\tilde{E}(M[z]))$. On a donc $u = \log_{\tilde{E}} \exp_{\tilde{E}} u \in L_\infty \llbracket z \rrbracket^d$. Comme $\exp_{\tilde{E}} \in M[z]^d$ et $\ell_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $u \in M[z]^d \pmod{(z^n \mathbb{T}_z(L_\infty))^d}$.

Soit $u \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tel que $zu \in U(\tilde{E}(M[z]))$. Par définition, il existe $v \in U(\tilde{E}(M[z]))$ tels que $zu = v$. On a donc

$$z \exp_{\tilde{E}}(u) = \exp_{\tilde{E}}(v) \in M[z]^d.$$

D'où $z | \exp_{\tilde{E}}(v)$. Cela implique que $u \in U(\tilde{E}(M[z]))$.

Soit $u \in U(\tilde{E}(M[z]))$ non nul. Il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $u = z^a v$ où z ne divise pas v . De la même manière que précédemment, on peut montrer que $u \in U(\tilde{E}(M[z]))$ implique $v \in U(\tilde{E}(M[z]))$. D'où $v = x + z^n y$ où $x \in M[z]^d$ non divisible par z et $y \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. u s'écrit donc bien sous la forme $u = z^a(x + z^n y)$ où $x \in M[z]^d$ non divisible par z et $y \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$.

On montre maintenant que cela implique que tout $x \in U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ non nul peut s'écrire comme $z^a(\alpha + z^n\beta)$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}M[z])^d$ non divisible par z et $\beta \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)}\mathbb{T}_z(L_\infty))^d$.

D'après la proposition 1.6.1, $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(E(M)[z])$. Pour $u \in U(\tilde{E}(\tilde{M}))$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{F}_q[z]$ tel que $\lambda u \in U(\tilde{E}(M[z]))$.

On écrit $\lambda = z^c Q(z)$ où Q n'est pas divisible par z . Comme $\lambda u \in U(\tilde{E}(M[z]))$, il existe $a \in \mathbb{N}$, $\alpha \in M[z]^d$ non divisible par z et $\beta \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $\lambda u = z^a(\alpha + z^n \beta)$. On a donc

$$u = z^{a-c} \left(\frac{\alpha}{Q(z)} + \frac{z^n \beta}{Q(z)} \right).$$

Il existe donc $a' \in \mathbb{Z}$, $\alpha' \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} M[z])^d$ et $\beta' \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty))^d$ tels que $u = z^{a'}(\alpha' + z^n \beta')$. On a donc la première partie du lemme.

On prend maintenant $\alpha \in M[z]^d$. Comme $e_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et M est un \mathcal{O}_K -module, il existe $x \in M[z]^d$ et $y \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $\exp_{\tilde{E}}(\alpha) = x + z^n y$. Par la proposition 1.6.2, il existe $f \in \mathbb{F}_q[z]$ non divisible par z , $y_1 \in M[z]^d$ et $y_2 \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $f y = y_1 + \exp_{\tilde{E}} y_2$. On veut montrer que $f \alpha - z^n y_2 \in U(\tilde{E}(M[z]))$ car dans ce cas, on a bien $\alpha - z^n \frac{y_2}{f} \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(\tilde{M}))$.

$$\begin{aligned} \exp_{\tilde{E}}(f \alpha - z^n y_2) &= f \exp_{\tilde{E}}(\alpha) - z^n \exp_{\tilde{E}} y_2 \\ &= f x + z^n f y - z^n \exp_{\tilde{E}} y_2 \\ &= f x + z^n (y_1 + \exp_{\tilde{E}} y_2) - z^n \exp_{\tilde{E}} y_2 \\ &= f x + z^n y_1. \end{aligned}$$

Comme $x, y_1 \in M[z]^d$ et $f \in \mathbb{F}_q[z]$, on a bien $\exp_{\tilde{E}}(f \alpha - z^n y_2) \in M[z]^d$ et donc $f \alpha - z^n y_2 \in U(\tilde{E}(M[z]))$.

Soit $\alpha' \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} M[z])^d$. Il existe $P \in \mathbb{F}_q[z]$, $Q \in \mathbb{F}_q[z]$ non divisible par z et $\alpha \in M[z]^d$ tels que $\alpha' = \frac{P}{Q} \alpha$. Il existe $f \in \mathbb{F}_q[z]$ non divisible par z et $y_2 \in \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$ tels que $\alpha - z^n \frac{y_2}{f} \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(\tilde{M}))$.

On a donc $\frac{P}{Q} \alpha - z^n \frac{P}{Q} \frac{y_2}{f} \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ où $\frac{P}{Q} \frac{y_2}{f} \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty)^d$. Ce qui nous donne bien le résultat souhaité. \square

Proposition 3.4.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $e_k \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$. Alors tout élément non nul de $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]}$ peut s'écrire comme $z^a(\alpha + z^n \beta)$ où $a \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} A[\Delta]$ non divisible par z et $\beta \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty)[\Delta]$.*

Démonstration. Soient N un sous- $A[\Delta]$ -réseau libre de $\text{Lie}_E(M)$ et \mathcal{B} une de ses bases comme $A[\Delta]$ -module. \mathcal{B} est également une base de \tilde{N} comme $\tilde{A}[\Delta]$ -module. On a

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \tilde{N} \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \left[\tilde{N} : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]}.$$

De plus, $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : \tilde{N} \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \mathbb{F}_q(z) [\text{Lie}_E(M) : N]_{A[\Delta]}$. On s'intéresse donc à l'écriture des éléments de $\left[\tilde{N} : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]}$.

Soit $m \in \text{Lie}_E(M)$. D'après le lemme 3.4.1, il existe $\beta \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty))^d$ tel que $(m + z^n \beta) \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(\tilde{M}))$. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow z\mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z])) \longrightarrow \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z])) \xrightarrow{\text{ev}_0} \text{Lie}_E(M) \longrightarrow 0.$$

De plus, M^d est un module A -module projectif car il est sans torsion et de type fini sur A qui est un anneau de Dedekind. Comme p ne divise pas le cardinal de Δ , c'est même un $A[\Delta]$ -module projectif. Il existe donc une section comme $A[\Delta]$ -module $\iota : M^d \longrightarrow \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ tel que pour $m \in \text{Lie}_E(M)$, $\iota(m) \equiv m \pmod{z}$. On montre par récurrence que pour $b \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z]))$, il existe $m_0, \dots, m_{b-1} \in \text{Lie}_E(M)$ tels que

$$\sum_{j=0}^{b-1} z^j \iota(m_j) \equiv u \pmod{z^b}.$$

Pour $n = 1$, on a bien l'existence de $m_0 \in \text{Lie}_E(M)$ tel que $\iota(m) \equiv u \pmod{z}$ par la suite exacte.

On suppose que pour $b \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z]))$, il existe $m_0, \dots, m_{b-1} \in \text{Lie}_E(M)$ tels que

$$\sum_{j=0}^{b-1} z^j \iota(m_j) \equiv u \pmod{z^b}.$$

Il existe donc $y \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z]))$ tel que $u - \sum_{j=0}^{b-1} z^j \iota(m_j) = z^b y$. De plus, il existe

$m_b \in \text{Lie}_E(M)$ tel que $\iota(m_b) \cong y \pmod{z}$. On a alors $u - \sum_{j=0}^b z^j \iota(m_j) \equiv 0 \pmod{z^{b+1}}$.

Soit s le rang de $\text{Lie}_E(M)$ sur $A[\Delta]$. Soient $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s \in U(\tilde{E}(\tilde{M}))$. On pose $u = (u_1, \dots, u_s)$ et $v = (v_1, \dots, v_s)$. On s'intéresse à $\det_{\mathbb{B}}(u) + \det_{\mathbb{B}}(v)$. Comme $U(\tilde{E}(\tilde{M}))$ est le $\mathbb{F}_q(z)$ -espace vectoriel engendré par $U(\tilde{E}(M[z]))$, on peut supposer que $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z]))$. On suppose que $\det_{\mathbb{B}}(u) + \det_{\mathbb{B}}(v)$ est non nul.

On pose a le plus grand entier tel que z^a divise $\det_{\mathbb{B}}(u) + \det_{\mathbb{B}}(v)$. En appliquant le raisonnement précédent aux u_i et v_i , $i \in \llbracket 1; s \rrbracket$, il existe $m_{i,0}, \dots, m_{i,a+n-1}$ et $n_{i,0}, \dots, n_{i,a+n-1} \in \text{Lie}_E(M)$ tels que

$$\sum_{j=0}^{a+n-1} z^j \iota(m_{i,j}) \equiv u_i \pmod{z^{a+n}}$$

et

$$\sum_{j=0}^{a+n-1} z^j \iota(n_{i,j}) \equiv v_i \pmod{z^{a+n}}.$$

On pose

$$u'_i = \sum_{j=0}^{a+n-1} z^j \iota(m_{i,j}) \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z])) \text{ et } v'_i = \sum_{j=0}^{a+n-1} z^j \iota(n_{i,j}) \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z])).$$

On a donc $\det_{\mathcal{B}}(u) + \det_{\mathcal{B}}(v) = \det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v') \pmod{z^{a+n}}$. De plus,

$$\det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v') = \sum_{j=0}^{a+n-1} z^j \sum_{i_1+\dots+i_s=j} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s}))) \pmod{z^{a+n}}.$$

On suppose que a est non nul.

On montre par récurrence forte que pour tout $0 \leq j < a$,

$$\sum_{i_1+\dots+i_s=j} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s}))) = 0.$$

Pour $j = 0$, comme z^a divise $(\det_{\mathcal{B}}(u) + \det_{\mathcal{B}}(v))$ et a non nul, l'évaluation en $z = 0$ donne $\text{ev} \left(\sum_{i_1+\dots+i_s=0} \det_{\mathcal{B}}(m_{1,0}, \dots, m_{s,0}) + \det_{\mathcal{B}}(n_{1,0}, \dots, n_{s,0}) \right) = 0$. On a donc

$$\sum_{i_1+\dots+i_s=0} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s}))) = 0.$$

Supposons que pour j tel que $0 \leq j < a - 1$ et

$$\sum_{i_1+\dots+i_s=n} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s}))) = 0$$

pour $0 \leq n \leq j$. On regarde

$$\frac{\det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v')}{z^{j+1}} = \sum_{k=j+1}^{a+n-1} z^{k-(j+1)} \sum_{i_1+\dots+i_s=k} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s}))).$$

De la même manière, par choix de j , l'évaluation en $z = 0$ nous donne encore 0.

Cela implique que quelque soit a , on a bien $\det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v')$ est congru à

$$\sum_{k=a}^{a+n-1} z^k \sum_{i_1+\dots+i_s=k} (\det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) + \det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s})))$$

modulo z^{a+n} .

D'après le lemme 3.4.1, pour $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$, on a $\iota(m_{i_j,j}) \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} U(\tilde{E}(M[z]))$ non nul peut s'écrire de la manière suivante $z^{a_j}(\alpha_j + z^n \beta_j)$ avec $a_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} M[z])^d$ non divisible par z et $\beta_j \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty))^d$. De plus, $\iota(m_{i_j,j}) \equiv m_{i_j,j} \pmod{z}$. D'où $\iota(m_{i_j,j}) = m_{i_j,j} + z^n \beta_j$. On a donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\iota(m_{1,i_1}), \dots, \iota(m_{s,i_s})) &= \det_{\mathcal{B}}(m_{i_1,1} + z^n \beta_1, \dots, m_{i_s,s} + z^n \beta_s) \\ &\equiv \det_{\mathcal{B}}(m_{i_1,1}, \dots, m_{i_s,s}) \pmod{z^n}. \end{aligned}$$

On applique le même raisonnement avec $\iota(n_{i_j,j})$ pour $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$ qui nous donne également

$$\det_{\mathcal{B}}(\iota(n_{1,i_1}), \dots, \iota(n_{s,i_s})) \equiv \det_{\mathcal{B}}(n_{i_1,1}, \dots, n_{i_s,s}) \pmod{z^n}.$$

On obtient alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v') = z^a \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{i_1+\dots+i_s=k} (\det_{\mathcal{B}}(m_{i_1,1}, \dots, m_{i_s,s}) + \det_{\mathcal{B}}(n_{i_1,1}, \dots, n_{i_s,s})) \pmod{z^{a+n}}.$$

Comme $\det_{\mathcal{B}}(m_{i_1,1}, \dots, m_{i_s,s}), \det_{\mathcal{B}}(n_{i_1,1}, \dots, n_{i_s,s}) \in [N : \text{Lie}_E(M)]_{A[\Delta]}$ et $\det_{\mathcal{B}}(u) + \det_{\mathcal{B}}(v) = \det_{\mathcal{B}}(u') + \det_{\mathcal{B}}(v') \pmod{z^{a+n}}$, on a l'existence de $\alpha \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} A[\Delta]$ et $\beta \in \mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty)[\Delta]$ tels que $\det_{\mathcal{B}}(u) + \det_{\mathcal{B}}(v) = z^a(\alpha + z^n \beta)$. □

3.5 Formule de classes équivariante avec une variable

Théorème 3.5.1. *Soit E un module d'Anderson Δ -admissible pour M défini sur \mathcal{O}_K . Alors*

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_{\Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Démonstration. On suit les deux étapes de la preuve de [5, Theorem 4.3]. La première consiste à montrer que l'inclusion est vrai pour les modules Δ -admissibles qui ont

tous leurs facteurs locaux principaux. La seconde est la généralisation à l'ensemble des modules Δ -admissibles.

Etape 1 :

Soit $\exp_E = \sum_{k \geq 0} e_k \tau^k$. Tout e_k est une matrice où les coefficients sont sous la forme

$\frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathcal{O}_K$. On pose $Q_k = \text{ppcm}(Q)$. Soit $t \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\xi_n = \prod_{i \leq n} Q_i D_n$ où $D_0 = 1$ et $D_i = (t^{q^i} - t) D_{i-1}^q$ pour $i \geq 1$.

On rappelle que pour $\xi \in A$ non nul, il existe un unique module d'Anderson E' vérifiant $\xi E' = E\xi$ et que l'exponentielle associée est $\sum_{k \geq 0} \xi^{q^k - 1} e_k \tau^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E^{[n]}$ comme étant le module d'Anderson vérifiant $\xi_n E^{[n]} = E\xi_n$. On a

$$\begin{aligned} \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} &= \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}^{[n]}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \left[U(\tilde{E}^{[n]}(\tilde{M})) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \\ &= \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}^{[n]}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \prod_{\xi_n \in P} Z_{P, \Delta}(\tilde{E}(\tilde{M})). \end{aligned}$$

Soit y_n le générateur de $\prod_{\xi_n \in P} Z_{P, \Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))$. Par choix de ξ_n ($\xi_i | \xi_{i+1}$ et tout premier P contient au moins un ξ_i) et le fait que c'est un module admissible, on a une suite (y_n) qui converge vers $y = \prod_P Z_{P, \Delta}(\tilde{E}(\tilde{M}))$. Il existe $x_n \in \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}^{[n]}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]}$ tel que $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = x_n y_n$. Cela implique la convergence de (x_n) vers un élément qu'on note x . Par choix de ξ_n , comme les coefficients $e_k^{[n]}$ de l'exponentielle de $\tilde{E}^{[n]}$ sont $\xi_n^{q^k - 1} e_k$, on a $e_k^{[n]}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Par la proposition 3.4.2, on peut écrire x_n de la manière suivante : $x_n = z^{a_n} (\alpha_n + z^n \beta_n)$ avec $a_n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} A[\Delta])^d$ non divisible par z et $\beta_n \in (\mathbb{F}_q[z]_{(z)} \mathbb{T}_z(L_\infty)[\Delta])^d$. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ comme \mathbb{Z} est discret.

De plus, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, comme x_n tend vers x , on a que $x_n \bmod z^{n_0}$ converge vers $x \bmod z^{n_0}$ dans $(\mathbb{F}_q[z]_{(z)} A[\Delta])^d$ qui est discret (comme $\mathbb{F}_q[z]_{(z)} / z^{n_0} \mathbb{F}_q[z]_{(z)}$ l'est). En regardant modulo z^a , on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + z^n \beta_n) \in (z^a \mathbb{F}_q[z]_{(z)} A[\Delta])^d$. Cela implique que $x \in \tilde{A}$. On a donc $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = xy \in \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M}))$. Ce qui donne bien le résultat souhaité :

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Etape 2 : On cherche maintenant à se ramener au cas précédent. Soit E un module Δ -admissible pour M . Par définition, il existe un ensemble fini S tels que les facteurs locaux des premiers contenus dans S ne sont pas principaux. Soit $\xi \in P$ pour tout $P \in S$. On pose E' le module d'Anderson vérifiant $\forall a \in A, \xi E'_a = E_a \xi$. D'après la proposition 3.2.8,

- si $\xi \in P$, $Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) = \widetilde{A}[\Delta]$,
- si $\xi \notin P$, $Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) = Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M}))$.

Cela implique

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(\widetilde{E}(\widetilde{M})) &= \prod_P Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \\ &= \prod_{\xi \notin P} Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \prod_{\xi \in P} Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \\ &= \mathcal{L}_\Delta(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) \prod_{\xi \in P} Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})). \end{aligned}$$

De plus, par choix de E' , tous ses facteurs locaux sont principaux. D'après l'étape 1, il vérifie donc

$$\left[\text{Lie}_{\widetilde{E}'}(\widetilde{M}) : U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_\Delta(\widetilde{E}'(\widetilde{M})).$$

D'après la proposition 3.2.7, $\prod_{\xi \in P} Z_{P,\Delta}(\widetilde{E}(\widetilde{M})) = \left[U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]}$. On rappelle que pour tout $a \in A$, $\delta_E(a) = \delta_{E'}(a)$. On a donc bien

$$\begin{aligned} \left[\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{M}) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} &= \left[\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{M}) : U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \left[U(\widetilde{E}'(\widetilde{M})) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \\ &\subset \prod_{\xi \in P} Z_P(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \mathcal{L}(\widetilde{E}'(\widetilde{M})), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\left[\text{Lie}_{\widetilde{E}}(\widetilde{M}) : U(\widetilde{E}(\widetilde{M})) \right]_{\widetilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_\Delta(\widetilde{E}(\widetilde{M})).$$

□

On cherche à montrer que cette inclusion est en fait une égalité. Pour ce faire, nous allons suivre la méthode de la preuve [5, Theorem 4.7] en utilisant le lemme suivant de Taelman (voir [25, Lemma 2]) dont nous voyons une preuve différente.

Lemme 3.5.2. Soient F un corps et t une indéterminée sur F . Soit V un $F((t^{-1}))$ -espace vectoriel de dimension finie, $U \subset V$ un ouvert compact, sous F -espace vectoriel et $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset V$ discrets et co-compacts sous $F[t]$ -modules. Soit $\sigma : V \rightarrow V$ qui envoie une base de Λ_1 sur Λ_2 . Pour $i = 1, 2$, on pose $\delta_i : \Lambda_i + U \rightarrow V$ qui à (λ, l) associe $\lambda - l$. On pose $\chi_i = \dim_F \ker(\delta_i) - \dim_F \operatorname{coker}(\delta_i)$.

On a alors

$$v_\infty(\det \sigma) = \chi_1 - \chi_2.$$

Démonstration. On montre d'abord que $\chi_1 - \chi_2$ ne dépend pas du choix de U . On prend U et U' deux ouverts compacts de V vérifiant les conditions du lemme et U'' un autre ouvert de V vérifiant les conditions du lemme et qui est contenu dans U et U' . On définit alors $\delta_1, \delta'_1, \delta''_1, \delta_2, \delta'_2$ et δ''_2 . On veut donc

$$\chi_1 - \chi_2 = \chi'_1 - \chi'_2 = \chi''_1 - \chi''_2.$$

On a les suites exactes

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + U''} \rightarrow \frac{V}{\Lambda_2 + U''} \rightarrow \frac{V}{\Lambda_2 + U} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap U''} \rightarrow \frac{U}{U''} \rightarrow \frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + U''} \rightarrow 0$$

qui nous donnent les égalités $\dim_F \left(\frac{V}{\Lambda_2 + U''} \right) = \dim_F \left(\frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + U''} \right) + \dim_F \left(\frac{V}{\Lambda_2 + U} \right)$ et $\dim_F \left(\frac{U}{U''} \right) = \dim_F \left(\frac{\Lambda_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap U''} \right) + \dim_F \left(\frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + U''} \right)$. Cela implique que

$$\dim_F(\operatorname{coker}(\delta''_2)) = \dim_F(\operatorname{coker}(\delta_2)) + \dim_F(\ker(\delta''_2)) - \dim_F(\ker(\delta_2)) + \dim_F \left(\frac{U}{U''} \right).$$

En remplaçant Λ_2 par Λ_1 , on obtient

$$\dim_F(\operatorname{coker}(\delta''_1)) = \dim_F(\operatorname{coker}(\delta_1)) + \dim_F(\ker(\delta''_1)) - \dim_F(\ker(\delta_1)) + \dim_F \left(\frac{U}{U''} \right).$$

Cela entraîne que $\chi_1 - \chi_2 = \chi''_1 - \chi''_2$. De la même manière, on trouve $\chi'_1 - \chi'_2 = \chi''_1 - \chi''_2$. Cela montre bien que le résultat souhaité ne dépend pas du choix de U .

On suppose d'abord que $\sigma(U)$ est inclus dans U . On verra ensuite comment se ramener à ce cas.

Si $\sigma(U) \subset U$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + \sigma(U)} \rightarrow \frac{V}{\Lambda_2 + \sigma(U)} \rightarrow \frac{V}{\Lambda_2 + U} \rightarrow 0. \quad (3.5.1)$$

On a aussi la suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap \sigma(U)} \rightarrow \frac{U}{\sigma(U)} \rightarrow \frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + \sigma(U)} \rightarrow 0. \quad (3.5.2)$$

De plus, $\frac{V}{\Lambda_1 + U} \simeq \frac{V}{\Lambda_2 + \sigma(U)}$ par σ . Comme $\text{coker}(\delta_1) \simeq \frac{V}{\Lambda_1 + U}$ et $\text{coker}(\delta_2) \simeq \frac{V}{\Lambda_2 + U}$, par 3.5.1 on a l'égalité

$$\dim_F \text{coker}(\delta_1) = \dim_F \text{coker}(\delta_2) + \dim_F \left(\frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + \sigma(U)} \right).$$

Par 3.5.2, on a

$$\dim_F \frac{U}{\sigma(U)} = \dim_F \frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + \sigma(U)} + \dim_F \frac{\Lambda_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap \sigma(U)},$$

c'est-à-dire,

$$v_\infty(\det \sigma) = \dim_F \left(\frac{\Lambda_2 + U}{\Lambda_2 + \sigma(U)} \right) + \dim_F \ker(\delta_2) - \dim_F \ker(\delta_1)$$

car $\ker(\delta_1) \simeq \sigma(U) \cap \Lambda_2 = \sigma(U \cap \Lambda_1)$.

On obtient bien

$$v_\infty(\det \sigma) = \dim_F \text{coker}(\delta_1) - \dim_F \text{coker}(\delta_2) + \dim_F \ker(\delta_2) - \dim_F \ker(\delta_1) = \chi_2 - \chi_1.$$

On cherche maintenant à se ramener au cas précédent. On a $\Lambda_1 = \bigoplus_{i=1}^n F[t]e_i$ et $\Lambda_2 =$

$$\bigoplus_{i=1}^n F[t]f_i, \quad U = \bigoplus_{i=1}^n \frac{1}{t} F\left[\frac{1}{t}\right]e_i.$$

Pour un m suffisamment grand, $\frac{1}{t^m} f_i \in U$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On pose $\Lambda'_2 = \frac{1}{t^m} \Lambda_2$, $\sigma' = 1/t^m \circ \sigma$ et $\delta'_2 : \Lambda'_2 + U \rightarrow V$ qui à (λ, l) associe $\lambda - l$.

On a donc $\sigma'(U) \subset U$ et $\sigma'(\Lambda_1) = \Lambda'_2$. De plus, $\det(\sigma') = \det(\sigma) * (1/t)^{mn}$. D'où $v_\infty(\det \sigma') = v_\infty(\det \sigma) + mn$.

Comme $\frac{1}{t^m}U \subset U$, on a les deux suites exactes

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda'_2 + U}{\Lambda_2 + U} \rightarrow \frac{V}{\Lambda_2 + U} \rightarrow \frac{V}{\Lambda'_2 + U} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \frac{\Lambda'_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap U} \rightarrow \frac{\Lambda'_2}{\Lambda_2} \rightarrow \frac{\Lambda'_2 + U}{\Lambda_2 + U} \rightarrow 0.$$

De la première, on obtient l'égalité $\dim_F \frac{V}{\Lambda_2 + U} = \dim_F \frac{V}{\Lambda'_2 + U} + \dim_F \frac{\Lambda'_2 + U}{\Lambda_2 + U}$.

Par la deuxième, on a $\dim_F \frac{\Lambda'_2}{\Lambda_2} = \dim_F \frac{\Lambda'_2 + U}{\Lambda_2 + U} + \dim_F \frac{\Lambda'_2 \cap U}{\Lambda_2 \cap U}$ c'est-à-dire $mn = \dim_F \frac{\Lambda'_2 + U}{\Lambda_2 + U} + \dim_F \ker(\delta'_2) - \dim_F \ker(\delta_2)$.

En regroupant ces deux égalités, on obtient

$$\dim_F \operatorname{coker}(\delta_2) = \dim_F \operatorname{coker}(\delta'_2) + mn - \dim_F \ker(\delta'_2) + \dim_F \ker(\delta_2),$$

c'est-à-dire, $\chi_2 = \chi'_2 - mn$.

On a alors bien $v_\infty(\det \sigma) = \chi_2 - \chi_1$. \square

Lemme 3.5.3. *Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K . Soit M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. Soit $t \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Pour tout $\chi \in \hat{\Delta}$, on a*

$$v_\infty \left(\left[\operatorname{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\mathbb{F}(z)[t]} \right) = 0.$$

Démonstration. On cherche à appliquer le lemme 3.5.2. Par restriction, on regarde E comme un $\mathbb{F}_q[t]$ -module d'Anderson. Soit $\chi \in \hat{\Delta}$. On prend U un ouvert suffisant petit de $L_\infty^d(\chi)$ pour que $\exp_{\tilde{E}}(U) = U$ et $U \cap \tilde{M}(\chi) = U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \cap U = \{0\}$. Dans ce cas, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\operatorname{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \oplus U} \xrightarrow{\exp_{\tilde{E}}} \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{\tilde{E}(\tilde{M}(\chi)) \oplus U} \rightarrow \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{\tilde{E}(\tilde{M}(\chi)) \oplus \exp_{\tilde{E}}(\operatorname{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)(\chi))}.$$

D'après la proposition 1.6.2, $H(\tilde{E}(\tilde{M})) = \{0\}$. On obtient alors

$$\frac{\operatorname{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \oplus U} \cong \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{\tilde{E}(\tilde{M}(\chi)) \oplus U}.$$

On veut appliquer le lemme 3.5.2 à $V = L_\infty^d(\chi)$, $\Lambda_1 = M^d(\chi)$ et $\Lambda_2 = U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi)$. Dans notre cas, $\text{coker}(\delta_1) = \frac{\tilde{E}(\tilde{L}_\infty)}{\tilde{E}(\tilde{M}) \oplus U}$, $\text{coker}(\delta_2) = \frac{\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{L}_\infty)(\chi)}{U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \oplus U}$ et $\text{ker}(\delta_1) = \text{ker}(\delta_2) = \{0\}$. On obtient alors

$$v_\infty \left(\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\mathbb{F}(z)[t]} \right) = \dim_{\mathbb{F}} \text{coker}(\delta_1) - \dim_{\mathbb{F}} \text{coker}(\delta_2) = 0.$$

□

Théorème 3.5.4. *Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K qui est Δ -admissible pour M . Soit M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. Alors*

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Démonstration. Comme on a supposé que E est Δ -admissible pour M , il existe u une unité de $\tilde{k}_\infty[\Delta]^\times$ tel que $\mathcal{L}(\tilde{E}(\tilde{M})) = u\tilde{A}[\Delta]$. On rappelle que

$$\mathcal{L}(\tilde{E}(\tilde{M})) = \prod_{P \in A} \frac{\text{Fitt}_{\tilde{A}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}/P\tilde{M}))}{\text{Fitt}_{\tilde{A}}(\tilde{E}(\tilde{M}/P\tilde{M}))} = \sum_{\chi \in \hat{\Delta}} \prod_{P \in A} \frac{\text{Fitt}_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}/P\tilde{M})(\chi))}{\text{Fitt}_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}(\tilde{E}(\tilde{M}/P\tilde{M})(\chi))} e_\chi.$$

On pose pour $\chi \in \hat{\Delta}$, $u_\chi = \prod_{P \in A} \frac{\text{Fitt}_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}(\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}/P\tilde{M})(\chi))}{\text{Fitt}_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}(\tilde{E}(\tilde{M}/P\tilde{M})(\chi))}$. D'après le théorème 3.5.1, on a

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

On rappelle que $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \sum_{\chi \in \hat{\Delta}} \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}} e_\chi$.

Soit $\chi \in \hat{\Delta}$. On a donc $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}} \subset u_\chi \tilde{A}_{\mathbb{F}}$. Comme $\tilde{A}_{\mathbb{F}}$ est un anneau de Dedekind, il existe $\alpha \in \tilde{A}_{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{1}{u_\chi^h} \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}^h = \alpha \tilde{A}_{\mathbb{F}}.$$

Soit $t \in \tilde{A}_{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}(z)$. D'après le lemme 3.5.3,

$$v_\infty \left(\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\mathbb{F}(z)[t]} \right) = 0.$$

Il existe donc $\beta \in \tilde{k}_\infty(\mathbb{F})$ de valuation nulle tel que

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\mathbb{F}(z)[t]} = \beta \mathbb{F}(z)[t].$$

Comme

$$N_{\tilde{k}(\mathbb{F})/\mathbb{F}(z)(t)}(\alpha) = N_{\tilde{k}(\mathbb{F})/\mathbb{F}(z)(t)} \left(\frac{1}{u_\chi^h} \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_\mathbb{F}}^h \right) \in \mathbb{F}^\times$$

et $\alpha \in \tilde{A}_\mathbb{F}$ non nul, cela implique que $\alpha \in \mathbb{F}(z)^\times$. D'où

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_\mathbb{F}}^h = u_\chi^h.$$

Comme on a également l'inclusion $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_\mathbb{F}} \subset u_\chi \tilde{A}_\mathbb{F}$, on obtient l'égalité $\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}_\mathbb{F}} = u_\chi \tilde{A}_\mathbb{F}$. Cela implique qu'on a bien le résultat souhaité

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

□

3.6 Formules de classes équivariante

De la même manière que la partie précédente, on va montrer que $[\text{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[\Delta]} = \mathcal{L}_\Delta(E(M))$ pour un module Δ -admissible pour M .

Théorème 3.6.1. *Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K . Soit M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. Soit $t \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Pour tout $\chi \in \hat{\Delta}$, on a*

$$v_\infty \left(\left[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U(E(M))(\chi) \right]_{\mathbb{F}[t]} \text{Fitt}_{\mathbb{F}[t]}(H(E(M))(\chi)) \right) = 0.$$

De plus,

$$v_\infty \left(\left[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi) \right]_{\mathbb{F}[t]} \right) = 0.$$

Démonstration. Soit $\chi \in \hat{\Delta}$. On cherche à montrer que

$$v_\infty \left(\left[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U(E(M))(\chi) \right]_{\mathbb{F}[t]} \right) = \dim_{\mathbb{F}} \left(\text{Fitt}_{\mathbb{F}[t]}(H(E(M))(\chi)) \right).$$

On prend U un ouvert suffisant petit pour que $U \cap M^d(\chi) = U(E(M))(\chi) \cap U = \{0\}$ et $\exp_E(U) = U$. Dans ce cas, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{Lie}_E(L_\infty)(\chi)}{U(E(M))(\chi) \oplus U} \xrightarrow{\exp_E} \frac{E(L_\infty)(\chi)}{E(M)(\chi) \oplus U} \longrightarrow \frac{E(L_\infty)(\chi)}{E(M)(\chi) \oplus \exp_E(\mathrm{Lie}_E(L_\infty))(\chi)}.$$

Cela implique que

$$\dim_{\mathbb{F}} \left(\frac{E(L_\infty)(\chi)}{E(M)(\chi) \oplus U} \right) = \dim_{\mathbb{F}} \left(\frac{\mathrm{Lie}_E(L_\infty)(\chi)}{U(E(M))(\chi) \oplus U} \right) + \dim_{\mathbb{F}} \left(\frac{E(L_\infty)(\chi)}{E(M)(\chi) \oplus \exp_E(\mathrm{Lie}_E(L_\infty))(\chi)} \right).$$

On applique maintenant le lemme 3.5.2 en prenant $\Lambda_1 = M^d(\chi)$ et $\Lambda_2 = U(E(M))$. Par choix de U , Λ_1 et Λ_2 , on a $\mathrm{coker}(\delta_1) = \frac{E(L_\infty)(\chi)}{E(M)(\chi) \oplus U}$, $\mathrm{coker}(\delta_2) = \frac{\mathrm{Lie}_E(L_\infty)(\chi)}{U(E(M))(\chi) \oplus U}$ et $\ker(\delta_1) = \ker(\delta_2) = \{0\}$.

D'après le lemme 3.5.2, on obtient

$$v_\infty \left([\mathrm{Lie}_E(M)(\chi) : U(E(M))(\chi)]_{\mathbb{F}[t]} \right) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{coker}(\delta_1) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{coker}(\delta_2).$$

Comme $\dim_{\mathbb{F}} (H(E(M))(\chi)) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{coker}(\delta_1) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{coker}(\delta_2)$, on a bien

$$v_\infty \left([\mathrm{Lie}_E(M)(\chi) : U(E(M))(\chi)]_{\mathbb{F}[t]} \right) = \dim_{\mathbb{F}} \left(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{F}[t]}(H(E(M))(\chi)) \right).$$

D'après le théorème 1.6.4, on a $\mathrm{Fitt}_A \left(\frac{U(E(M))}{U_{St}(E(M))} \right) = \mathrm{Fitt}_A(H(E(M)))$. On peut montrer en tensorisant par \mathbb{F} les mêmes suites exactes puis en regardant les χ -parties pour $\chi \in \widehat{\Delta}$ que $\mathrm{Fitt}_{A(\mathbb{F})} \left(\frac{U(E(M))(\chi)}{U_{St}(E(M))(\chi)} \right) = \mathrm{Fitt}_{A(\chi)}(H(E(M))(\chi))$. On a donc bien le résultat souhaité. \square

Théorème 3.6.2. *Soit E un module d'Anderson Δ -admissible défini sur \mathcal{O}_K . Soit M un A -réseau de L_∞ qui est un $\mathcal{O}_K\{\tau\}$ -module. Alors*

$$[\mathrm{Lie}_E(M) : U_{St}(E(M))]_{A[\Delta]} = \mathcal{L}_\Delta(E(M)).$$

Démonstration. Soit P un premier A . On a pris E un module Δ -admissible pour M . Il existe donc $x_P \in A[\Delta][z]$ tel que

$$\begin{aligned} & \text{— } \mathrm{Fitt}_{\widetilde{A}[\Delta]} \left(\widetilde{E} \left(\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{PM}} \right) \right) = x_P \widetilde{A}[\Delta], \\ & \text{— } \mathrm{Fitt}_{A[\Delta]} \left(\mathrm{Lie}_E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(0)A[\Delta], \end{aligned}$$

- $\text{Fitt}_{A[\Delta]} \left(E \left(\frac{M}{PM} \right) \right) = x_P(1)A[\Delta],$
- $\prod_{P \notin S} \frac{x_P(0)}{x_P}$ converge dans $\tilde{k}_\infty[\Delta].$

On prend \mathcal{B} une base de $\text{Lie}_E(L)$ sur $k[\Delta]$ contenue dans $\text{Lie}_E(M)$. On note $N = A[\Delta]\mathcal{B}$.

On a $\left[\tilde{N} : \text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} = \mathbb{F}_q(z) [N : \text{Lie}_E(M)]_{A[\Delta]}$. D'après le théorème 3.5.1, on a

$$\left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M}) : U(\tilde{E}(\tilde{M})) \right]_{\tilde{A}[\Delta]} \subset \mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})).$$

Soit $\chi \in \hat{\Delta}$. Cela entraîne

$$\left[\tilde{N}(\chi) : U(\tilde{E}(\tilde{M}))(\chi) \right]_{\tilde{A}(\mathbb{F})} \subset \left[\text{Lie}_{\tilde{E}}(\tilde{M})(\chi) : \tilde{N}(\chi) \right]_{\tilde{A}(\mathbb{F})}^{-1} e_\chi \left(\mathcal{L}_\Delta(\tilde{E}(\tilde{M})) \otimes 1 \right).$$

De plus, le déterminant d'éléments de $U_{St}(E(M))(\chi)$ dans la base de $\text{Lie}_E(L)(\chi)$ induite par \mathcal{B} provient de l'évaluation en $z = 1$ du déterminant d'éléments de $U(\tilde{E}(M[z]))(\chi)$. On obtient alors

$$[N(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})} \subset [\text{Lie}_E(M)(\chi) : N(\chi)]_{A(\mathbb{F})}^{-1} e_\chi \left(\mathcal{L}_\Delta(E(M)) \otimes 1 \right)$$

qui nous donne l'inclusion

$$[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})} \subset e_\chi \left(\mathcal{L}_\Delta(E(M)) \otimes 1 \right).$$

On écrit $e_\chi(\mathcal{L}_\Delta(E(M)) \otimes 1) = u_\chi A(\mathbb{F})$ où $u_\chi \in k_\infty(\chi)^\times$.

Comme $A(\mathbb{F})$ est un anneau de Dedekind, il existe $\alpha \in A(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{u_\chi^h} [\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})}^h = \alpha A(\mathbb{F})$. Soit $t \in A(\mathbb{F}) \setminus \mathbb{F}$. D'après le théorème 3.6.1, $v_\infty \left([\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{\mathbb{F}[t]} \right) = 0$. Il existe donc $\beta \in k_\infty(\mathbb{F})$ de valuation nulle tel que $[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{\mathbb{F}[t]} = \beta \mathbb{F}[t]$. Comme

$$N_{k(\mathbb{F})/\mathbb{F}(t)}(\alpha) = N_{k(\mathbb{F})/\mathbb{F}(t)} \left(\frac{1}{u_\chi^h} [\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})}^h \right) \in \mathbb{F}^\times$$

et $\alpha \in A(\mathbb{F})$ non nul, cela implique que $\alpha \in \mathbb{F}^\times$. On obtient alors

$$[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})}^h = u_\chi^h A(\mathbb{F})$$

et donc $[\text{Lie}_E(M)(\chi) : U_{St}(E(M))(\chi)]_{A(\mathbb{F})} = u_\chi A(\mathbb{F})$. Comme cette égalité est vrai pour tout χ , on a bien le résultat souhaité. \square

3.7 Modules d'Anderson Δ -admissibles

Lemme 3.7.1. *Soit L/K une extension cyclique de degré m telle que $\text{Gal}(L/K) = \langle \delta \rangle$. Soit z une indéterminée sur K . On a $\delta z = z\delta$. Soient $d \geq 1$ et $f \in \mathcal{M}_{d \times d}(L[z])\{\delta\}$*

tels que $f = \sum_{i=0}^r A_i z^i \delta^i$ avec $A_i \in \mathcal{M}_{d \times d}(L)$. On définit alors l'élément $\chi(X, z) = \det_{K(z)}(X \text{id} - f|_{L(z)^d}) \in K[X, z]$. On a

1. $\chi(X, z) \in K[X, z^m]$.
2. $\deg_X(\chi(X, z) - \chi(X, 0)) \leq \deg_X(\chi(X, z)) - \frac{m}{r}$.

Démonstration. On pose $V = L(z)^d$, $W = L(z) \otimes_{K(z)} V$. δ agit sur W via $1 \otimes \delta$ et f agit sur W via $1 \otimes f$. On a donc $\chi(X, z) = \det_{L(z)}(X \text{id} - f|_W)$. On écrit $V^m = \otimes_{i=1}^m V_i$ où

$V_i = V$ comme $K(z)$ -espaces vectoriels et L agit sur V_i via $b.v = \delta^{i-1}(b)v$ pour $v \in V_i$.

On pose $\sigma : V^m \rightarrow V^m$ donné par $\sigma(v_1, \dots, v_m) = (\delta(v_m), \delta(v_1), \dots, \delta(v_{m-1}))$. σ est un isomorphisme de $L(z)$ -espaces vectoriels. En effet, pour $b \in L$ et $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(b.v_1, b.v_2, \dots, b.v_m) &= \sigma(bv_1, \delta(b)v_2, \dots, \delta^{m-1}(b)v_m) \\ &= (\delta(\delta^{m-1}(b)v_m), \delta(bv_1), \dots, \delta(\delta^{m-2}(b)v_{m-1})) \\ &= (b\delta(v_m), \delta(b)\delta(v_1), \dots, \delta^{m-1}(b)\delta(v_{m-1})) \\ &= b.\sigma(v_1, \dots, v_m). \end{aligned}$$

On a bien $\sigma(v + v') = \sigma(v) + \sigma(v')$ et que σ est un isomorphisme par définition de δ .

Soit $g : V^m \rightarrow V^m$ l'application définie par $g(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=0}^r A_i z^i \sigma^i(v_1, \dots, v_m)$ où $A_i \in \mathcal{M}_{d \times d}(L)$ et $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$. Ici, l'action de A_i est la multiplication classique : $A(v_1, \dots, v_m) = (Av_1, \dots, Av_m)$. De plus, g est $L(z)$ -linéaire car σ l'est.

On définit $\psi : W \rightarrow V^m$ l'application $K(z)$ -linéaire telle que pour tout $v \in V$, $\psi(b \otimes v) = (bv, \delta(b)v, \dots, \delta^{m-1}(b)v)$. ψ est un isomorphisme de $K(z)$ -espaces vectoriels car $K(z)$ agit sur V comme il agit sur les V_i .

On montre que $\psi \circ \delta = \sigma \circ \psi$. Soient $b \in L(z)$ et $v \in V$. En effet, on a

$$b \otimes v \xrightarrow{\delta} b \otimes \delta(v) \xrightarrow{\psi} (b\delta(v), \delta(b)\delta(v), \dots, \delta^{m-1}(b)\delta(v)),$$

$$b \otimes v \xrightarrow{\psi} (bv, \delta(b)v, \dots, \delta^{m-1}(b)v) \xrightarrow{\sigma} (\delta(\delta^{m-1}(b)v), \delta(bv), \dots, \delta(\delta^{m-2}(b)v)).$$

De plus, $(\delta(\delta^{m-1}(b)v), \delta(bv), \dots, \delta(\delta^{m-2}(b)v)) = (b\delta(v), \delta(b)\delta(v), \dots, (\delta^{m-1}(b)\delta(v))$.

On a donc bien $\psi \circ \delta = \sigma \circ \psi$. On montre également que $\psi \circ f = g \circ \psi$.

$$b \otimes v \xrightarrow{f} b \otimes f(v) \xrightarrow{\psi} (bf(v), \delta(b)f(v), \dots, \delta^{m-1}(b)f(v)),$$

$$b \otimes v \xrightarrow{\psi} (bv, \delta(b)v, \dots, \delta^{m-1}(b)v) \xrightarrow{g} (bf(v), \delta(b)f(v), \dots, \delta^{m-1}(b)f(v)),$$

car $\sigma^i(v, \dots, v) = \delta^i(v, \dots, v)$ et g est L -linéaire.

Comme ψ est un isomorphisme de $L(z)$ -espaces vectoriels, on a donc

$$\chi(X, z) = \det_{L(z)}(X \text{ id} - f|_W) = \det_{L(z)}(X \text{ id} - g|_W).$$

Soit (e_1, \dots, e_d) , la $L(z)$ -base canonique de V . Pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq d$, on prend e_{ij} l'élément de $V^m : (0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0)$ où e_i apparaît à la position j . On pose $\mathcal{B} = (e_{11}, \dots, e_{d,1}, \dots, e_{1m}, \dots, e_{dm})$. C'est une $L(z)$ -base de V^m . On a alors $\sigma^k(e_{ij}) = e_{i,j+k}$ (σ décale le 1 d'un cran vers la droite). On obtient donc

$$\begin{aligned} g(e_{i,j}) &= \sum_{k=0}^r z^k A_k e_{i,j+k} \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{l=1}^d z^k (A_k)_{(l;i)} e_{l,j+k} \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{k=0, k \equiv s-j \pmod m}^r \sum_{l=1}^d z^k (A_k)_{(l;i)} e_{l,s}. \end{aligned}$$

On définit la matrice $A_k^{(j)}$ par $(A_k^{(j)})_{(a;b)} = \delta^j((A_k)_{(a;b)})$. De par l'action de L sur V^m , on a donc

$$g(e_{i,j}) = \sum_{s=1}^m \sum_{k=0, k \equiv s-j \pmod m}^r \sum_{l=1}^d z^k (A_k)_{(l;i)} e_{l,s} = \sum_{s=1}^m \sum_{k=0, k \equiv s-j \pmod m}^r \sum_{l=1}^d z^k (A_k^{(1-s)})_{(l;i)} \cdot e_{l,s}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} e_{1,s} \\ \vdots \\ e_{l,s} \\ \vdots \\ e_{d,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(e_{1,j}) & \dots & g(e_{i,j}) & \dots & g(e_{d,j}) \\ \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(1;1)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(1;i)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(1;d)} \\ \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(l;1)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(l;i)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(l;d)} \\ \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(d;1)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(d;i)} & \dots & \sum_{k \equiv s-j \pmod m} z^k (A_k^{(1-s)})_{(d;d)} \end{pmatrix}$$

La matrice de g dans \mathcal{B} qu'on note N est donc une matrice par blocs de la forme

$$\left(\sum_{k=0, k \equiv s-j \pmod m}^r z^k A_k^{(1-s)} \right)_{s,j \in \llbracket 1; m \rrbracket}.$$

On sait déjà que $\chi(X, z) \in K[X, z]$.

On peut donc écrire cette matrice sous la forme $z^{\lceil \frac{i}{d} \rceil - \lceil \frac{j}{d} \rceil} b_{ij}$ où $b_{ij} \in L(z^m)$ pour $i, j \in \llbracket 1; md \rrbracket$. Donc

$$\det(N) = \sum_{\sigma \in S_{md}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{md} N_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_{md}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{md} z^{\lceil \frac{i}{d} \rceil - \lceil \frac{\sigma(i)}{d} \rceil} b_{i\sigma(i)}.$$

Comme $\sum_{i=1}^{md} \left(\lceil \frac{i}{d} \rceil - \lceil \frac{\sigma(i)}{d} \rceil \right) = 0$, $\det(N) \in \mathbb{F}_j(z^m)[X]$. On a donc $\det(N) \in K[X, z] \cap L(z^m)[X] = K[X, z^m]$.

On veut maintenant montrer que $\deg_X(\chi(X, z) - \chi(X, 0)) \leq \deg_X(\chi(X, z)) - \frac{m}{r}$. Soit $n \in \llbracket 0; m \rrbracket$. On s'intéresse au coefficient devant X^n . On a une matrice de taille md . Le coefficient devant X^n provient de la multiplication de $dm - n$ termes avant du z qui sont de degré au plus r . De plus, le polynôme $\deg_X(\chi(X, z)) \in K[X, z^m]$. Ce n'est donc pas possible d'avoir un monôme dont le degré en z soit dans $\llbracket 1; m-1 \rrbracket$. Donc $(md - n)r \leq m$ équivaut à $n \geq md - \frac{m}{r}$. Cela implique que tous les monômes de degré supérieur ou égal à $md - \frac{m}{r}$ ne peuvent pas avoir de coefficients en z . □

On note $A\mathbb{F}(z^m)$ le $\mathbb{F}(z^m)$ -sous-module de $\tilde{A}_{\mathbb{F}}$ engendré par A .

Proposition 3.7.2. *Soit \mathbb{F}'/\mathbb{F} une extension cyclique de degré m et de générateur δ et E/\mathbb{F}' un module d'Anderson de dimension d . On note $\tilde{E} : A_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{F}'[z])\{\delta\}$ la z -déformation de E . Alors il existe un idéal I de $A\mathbb{F}(z^m)$ tel que $\text{Fitt}_{\tilde{A}_{\mathbb{F}}}(\tilde{E}(\mathbb{F}'(z))) = I\tilde{A}_{\mathbb{F}}$.*

Démonstration. On note $V = \mathbb{F}'[z]^d$ qui est un $A_{\mathbb{F}}[z]$ -module via \tilde{E} , $A' = \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}}$ et $W = \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} V$ qui est un $A'[z]$ -module. Comme précédemment, on a un isomorphisme de \mathbb{F}' -espaces vectoriels $\psi : W \rightarrow V^m$, un automorphisme σ de V^m tel que $\psi \circ (1 \otimes \delta) = \sigma \circ \psi$. Soient $a \in A_{\mathbb{F}}$ et $\tilde{E}_a = \sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \delta^i$. On définit $F_a : V^m \rightarrow V^m$ homomorphisme de

$\mathbb{F}'[z]$ -algèbres donné par $F_a(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \sigma^i(v_1, \dots, v_m)$. De la même manière

que précédemment, on peut déduire que ψ est un homomorphisme de $A'[z]$ -module. On pose $U = \frac{V\{\delta\}}{(\delta^m - 1)V\{\delta\}} \cong \sum_{i=0}^{m-1} V\delta^i$ où $V\{\delta\}$ vérifie $v\delta^i v'\delta^j = v\delta^i (v')\delta^{i+j}$. On a $V = \mathbb{F}'[z]^d$, c'est un module libre de rang md sur $\mathbb{F}[z]$. Donc U est un module libre de rang dm^2 sur $\mathbb{F}[z]$. On voit U comme un \mathbb{F}' -espace vectoriel via $b \cdot \sum_{i=1}^m v_i \delta^i = \sum_{i=1}^m v_i \delta^{i-1} (b) \delta^{i-1}$ avec $b \in \mathbb{F}'$ et $v_1, \dots, v_m \in V$. $A_{\mathbb{F}}$ agit sur U via l'application $\mathbb{F}[z]$ -linéaire $a \cdot u \equiv \tilde{E}_a(u) \pmod{(\delta^m - 1)}$ pour $a \in A_{\mathbb{F}}$ et $u \in U$.

On pose $\rho : V^m \longrightarrow U$ qui envoie (v_1, \dots, v_m) sur $\sum_{i=1}^m v_i \delta^{i-1}$. On vérifie d'abord que c'est un morphisme de $A'[z]$ -modules. Soient $a \in A_{\mathbb{F}}$ et $v \in V^m$. On a

$$\begin{aligned} a \cdot v &= a \cdot (v_1, \dots, v_m) \\ &= (a \cdot v_1, \dots, a \cdot v_m) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \delta^i (v_1), \dots, \sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \delta^i (v_m) \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \delta^i (v_1) \delta^i, \dots, \sum_{i=0}^{r_a} A_i z^i \delta^i (v_m) \delta^i \right). \end{aligned}$$

On a donc $\rho(a \cdot v) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{r_a} z^i A_i \delta^i (v_j) \delta^{i+j-1}$.

De plus,

$$\begin{aligned} a \cdot \rho(v_1, \dots, v_m) &= \tilde{E}_a(\rho(v)) \pmod{(\delta^m - 1)} \\ &= \sum_{i=0}^{r_a} \sum_{j=1}^m z^i A_i \delta^i (v_j \delta^{j-1}) \pmod{(\delta^m - 1)} \\ &= \sum_{i=0}^{r_a} \sum_{j=1}^m z^i A_i \delta^i (v_j) \delta^{i+j-1} \pmod{(\delta^m - 1)}. \end{aligned}$$

C'est donc bien un morphisme de $A'[z]$ -modules. On voit par définition que c'est un isomorphisme. On obtient alors

$$\text{Fitt}_{A'[z]} W = \text{Fitt}_{A'[z]} V^m = \text{Fitt}_{A'[z]} U.$$

Soit (e_1, \dots, e_d) une $\mathbb{F}'[z]$ base de V . On a alors $U = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{m-1} A'[z] e_i \delta^j$.

On a donc un morphisme surjectif de $A'[z]$ -modules $\pi : A'[z]^{md} \longrightarrow U$. On pose

$$R = \ker \pi = \left\{ (\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{d,0}, \dots, \alpha_{1,m-1}, \dots, \alpha_{d,m-1}) \in A'[z]^{md} \mid \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cdot e_i \delta^j = 0 \right\}.$$

Par définition de l'idéal de Fitting, on a $\text{Fitt}_{A'[z]}(U) = \sum_{a_1, \dots, a_{md} \in R} \det(a_1, \dots, a_{md}) A'[z]$.

On pose

$$R_0 = \{ (\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{d,0}, \dots, \alpha_{1,m-1}, \dots, \alpha_{d,m-1}) \in R \mid \exists j_0 \in [0; m-1], \alpha_{i,j} \in z^{j+j_0} A'[z^m] \}.$$

On va montrer que $R = R_0 A'[z]$.

On regarde $V\{\delta\} = \mathbb{F}'[z]^d\{\delta\}$ comme un \mathbb{F}' -espace vectoriel via $l.x = xl$ pour $x \in V$ et $l \in \mathbb{F}'$ et comme $A_{\mathbb{F}}$ -module via $a.x = \tilde{E}_a(x)$ pour $x \in V$ et $a \in A_{\mathbb{F}}$. On étend \tilde{E} à un homomorphisme de \mathbb{F}' -algèbres $A' \longrightarrow \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{F}'[z])\{\delta\}$.

Soit $A = \sum_i l_i \otimes A_i \in \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{F}')$. On pose $A^{(k)} = \sum_i \delta^k(l_i) \otimes A_i$.

Soit $(\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{d,0}, \dots, \alpha_{1,m-1}, \dots, \alpha_{d,m-1}) \in R$. On écrit $\alpha_{i,j} = \sum_{k=0}^{s_{i,j}} \alpha_{ijk} z^k$ où $\alpha_{ijk} \in$

A' et $\tilde{E}_{\alpha_{ijk}} = \sum_{l=0}^{r_{ijk}} A_{ijkl} z^l \delta^l$ avec $A_{ijkl} \in \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{F}')$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cdot e_i \delta^j &= \sum_{i,j,k} (\alpha_{ijk} z^k) \cdot e_i \delta^j \\ &= \sum_{i,j,k} z^k \tilde{E}_{\alpha_{i,j,k}}(e_i) \delta^j \\ &= \sum_{i,j,k} z^k \left(\sum_{l=0}^{r_{ijk}} A_{ijkl} z^l \delta^l \right) \cdot e_i \delta^j \\ &= \sum_{i,j,k,l} z^{k+l} A_{ijkl}^{(j)} e_i \delta^{l+j}. \end{aligned}$$

Comme $(\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{d,0}, \dots, \alpha_{1,m-1}, \dots, \alpha_{d,m-1}) \in R$, on a alors

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cdot e_i \delta^j \in (\delta^m - 1)V\{\delta\}.$$

Cela veut dire que pour $0 \leq l_0 \leq m-1$, le coefficient devant δ^{l_0} est nul. D'où

$$\sum_{i,j,k,l \equiv l_0 - j \pmod{m}} A_{ijkl}^{(j)} z^{l+k} e_i = 0.$$

Cela implique que les coefficients devant chaque puissance de z sont nuls. En particulier, pour $0 \leq k_0 \leq m-1$,

$$\sum_{\substack{i,j \\ k \equiv k_0+j \pmod{m}, \\ l \equiv l_0-j \pmod{m}}} A_{ijkl}^{(j)} e_i = 0$$

car $\sum_{\substack{i,j \\ k \equiv k_0+j \pmod{m}, \\ l \equiv l_0-j \pmod{m}}} A_{ijkl}^{(j)} e_i = 0$ représente la somme des coefficients devant $z^{k_0+l_0}$, $z^{k_0+l_0+m}$,

$z^{k_0+l_0+2m}$, ... Pour $0 \leq k_0 \leq m-1$, on définit $\alpha_{i,j}^{k_0} = \sum_{k \equiv k_0+j \pmod{m}} \alpha_{ijk} z^k$. On a donc

$\alpha_{ij} = \sum_{k_0=0}^{m-1} \alpha_{i,j}^{k_0}$. On fixe maintenant k_0 . On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^{k_0} \cdot e_i \delta^j &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k \equiv k_0+j \pmod{m}} \alpha_{ijk} z^k \right) \cdot e_i \delta^j \\ &= \sum_{i,j,l} \left(\sum_{k \equiv k_0+j \pmod{m}} z^{k+l} A_{ijkl}^{(j)} \right) e_i \delta^{l+j} \\ &= \sum_{l_0=0}^{m-1} \sum_{i,j} \sum_{\substack{k \equiv k_0+j \pmod{m}, \\ l \equiv l_0-j \pmod{m}}} A_{ijkl}^{(j)} z^{l+k} e_i \delta^{l+j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela implique que $(\alpha_i^{k_0}) \in R$ et donc $R = R_0 A'[z]$.

Soit $(a_1, \dots, a_{md}) \in R_0$. Alors il existe j_1, \dots, j_{md} tels que la matrice dont les lignes sont $(z^{j_1} a_1, \dots, z^{j_{md}} a_{md})$ soit une matrice par blocs de la forme $(A_{ij})_{i,j \in [1;m]}$ où chaque $A_{ij} \in \mathcal{M}_{d \times d}(A'[z])$ et les degrés des monômes comme polynômes en z sont congruents à $j-i \pmod{m}$. On a donc de la même façon que pour le lemme 3.7.1,

$$z^{j_1+\dots+j_{md}} \det(a_1, \dots, a_{md}) \in A'[z^m].$$

Soient $\tilde{A}' = \mathbb{F}' \otimes_{\mathbb{F}} \tilde{A}$ et $A'\mathbb{F}(z^m)$ le sous $\mathbb{F}(z^m)$ -module de \tilde{A}' engendré par A' . Il existe donc un idéal J de $A'\mathbb{F}(z^m)$ tel que $\text{Fitt}_{\tilde{A}'_{\mathbb{F}}}(\tilde{E}(\mathbb{F}'(z)))\tilde{A}' = J\tilde{A}'$. Si I est un idéal de $\tilde{A}'_{\mathbb{F}}$ et $I_{\mathbb{F}} = I\tilde{A}' \subset \tilde{A}'$ alors pour (f_1, \dots, f_m) une base de \mathbb{F}'/\mathbb{F} , on a $\tilde{A}' = \bigoplus \tilde{A}'_{\mathbb{F}} f_i$. Cela implique que $I_{\mathbb{F}} = \bigoplus I f_i = J\tilde{A}'$. Soit $i \in I$. Il existe donc $j \in J$ et $a \in \tilde{A}'$ tels que $i f_1 = j a$ c'est-à-dire $i = f_1^{-1} j a$. De plus, $j = a' \sum j_l$ où $a' \in \mathbb{F}'$ et $j_l \in A'\mathbb{F}(z^m)$. On

obtient alors $i = f_1^{-1}aa' \sum j_l$. Comme $i \in \tilde{A}_{\mathbb{F}}$ et $j_l \in A\mathbb{F}(z^m)$, on a $f_1^{-1}aa' \in \tilde{A}_{\mathbb{F}}$. On a donc l'existence d'un idéal J' de $A\mathbb{F}(z^m)$ tel que $\text{Fitt}_{\tilde{A}[\mathbb{F}]}(\tilde{E}(\mathbb{F}'(z))) = I\tilde{A}[\mathbb{F}]$. \square

On a $A_{\mathbb{F}} = A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \simeq A[\mathbb{F}]$ via $a \otimes f \mapsto af$.

Lemme 3.7.3. *L'application naturelle $\text{Pic}(A_{\mathbb{F}}) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})$ est injective et on a l'égalité $\text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})_{\text{tors}} = \text{Pic}(A_{\mathbb{F}})$. En particulier, pour $m \geq 1$, l'application naturelle suivante $(\text{Pic}(A_{\mathbb{F}}\mathbb{F}(z^m))) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})$ est injective.*

Démonstration. Soit I un idéal non nul de $A_{\mathbb{F}}$ tel que $I\tilde{A}_{\mathbb{F}}$ est principal. Alors $I\tilde{A}_{\mathbb{F}} = f(z)\tilde{A}_{\mathbb{F}}$. On peut écrire $f = Fg$ où F est sans racine dans $\bar{\mathbb{F}}$. g est inversible dans $\tilde{A}_{\mathbb{F}}$. Donc il existe $F(z) \in A_{\mathbb{F}}[z]$ sans racine dans $\bar{\mathbb{F}}$ tel que $I\tilde{A}_{\mathbb{F}} = F(z)\tilde{A}_{\mathbb{F}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que I^n est principal. Alors $I^n\tilde{A}_{\mathbb{F}} = F(z)^n\tilde{A}_{\mathbb{F}}$. Comme I^n principal, il existe donc $a \in A_{\mathbb{F}}$ et $\delta \in \mathbb{F}(z)$ tels que $a = F(z)^n\delta$. Pour une raison de degré sur z , cela implique que $F(z)^n \in A_{\mathbb{F}}$ et $\delta \in \mathbb{F}^{\times}$.

Comme $A_{\mathbb{F}}$ est intégralement clos dans $\tilde{A}_{\mathbb{F}}$ et que $F(z)$ est solution d'un polynôme à coefficients dans $A_{\mathbb{F}}$ cela implique que $F(z) \in A_{\mathbb{F}}$. Cela implique que $I = F(z)A_{\mathbb{F}}$ et donc que I est principal. Donc $\text{Pic}(A_{\mathbb{F}}) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})$ est une injection.

Soit X/\mathbb{F} une courbe projective non singulière associée à $k(\mathbb{F})/\mathbb{F}$ et J/\mathbb{F} la variété jacobienne associée à X . On a alors les isomorphismes de groupes $Cl^0(k(\mathbb{F})) \simeq J(\mathbb{F})$ et $Cl^0(k(\mathbb{F})(z)) \simeq J(\mathbb{F}(z))$. D'après le théorème de Mordell-Weil, on a $J(\mathbb{F}(z))$ de type fini et donc $J(\mathbb{F}(z))_{\text{tors}}$ est un groupe fini abélien.

Soient $P \in J(\mathbb{F}(z))_{\text{tors}}$ et $\phi(P)$ le point obtenu en élevant chaque coordonnée de P à la puissance $\#(\mathbb{F})$. Comme $J(\mathbb{F}(z))_{\text{tors}}$ est un groupe fini, il existe deux entiers distincts r et s tels que $\phi^r(P) = \phi^s(P)$. On obtient alors que $P \in J(\bar{\mathbb{F}}) \cap J(\mathbb{F}(z)) = J(\mathbb{F})$. Cela entraîne que $J(\mathbb{F}(z))_{\text{tors}} = J(\mathbb{F})$. D'où $Cl^0(k(\mathbb{F})) \rightarrow Cl^0(k(\mathbb{F}(z)))$ est injective et $Cl^0(k(\mathbb{F})) = Cl^0(k(\mathbb{F}(z)))_{\text{tors}}$.

De plus, comme on est dans le cas où $d_{\infty} = 1$, on a $Cl^0(k(\mathbb{F})) = \text{Pic}(A_{\mathbb{F}})$ et $Cl^0(k(\mathbb{F}(z)))_{\text{tors}} = \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})_{\text{tors}}$. Donc $\text{Pic}(A_{\mathbb{F}}) = \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})_{\text{tors}}$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier en I un idéal de $A_{\mathbb{F}}\mathbb{F}(z^m)$ tel que $I\tilde{A}_{\mathbb{F}} = (x)$ est principal. On a $k(\mathbb{F})(z)/k(\mathbb{F})(z^m)$ est une extension finie de degré m . De plus, $N(I\tilde{A}_{\mathbb{F}}) = I^m$ et $N(I\tilde{A}_{\mathbb{F}}) = N(x\tilde{A}_{\mathbb{F}}) = N(x)A_{\mathbb{F}}\mathbb{F}(z^m)$. Cela implique que I^m est principal et donc que I est de torsion. Il existe donc un idéal J de $A_{\mathbb{F}}$ et $\delta \in k(\mathbb{F})(z^m)$ tels que $I = J\delta A_{\mathbb{F}}\mathbb{F}(z^m)$. On a alors $J\tilde{A} = \delta^{-1}I\tilde{A}$ ce qui entraîne que $J\tilde{A}$ est principal. Comme $\text{Pic}(A) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{A})$ est injective, J est un idéal principal. Donc I est un idéal principal de $A\mathbb{F}(z^m)$ et donc $(\text{Pic}(A_{\mathbb{F}}\mathbb{F}(z^m))) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{A}_{\mathbb{F}})$ est injective. \square

Lemme 3.7.4. *Soit K' un corps contenu dans \mathbb{C}_{∞} . Soit $F(z) \in K' \setminus \{0\}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $F(0) = 1$ et qu'il existe $C \geq 1$ avec*

$v_\infty(F(z) - 1) \geq C$. Alors

$$F(z) = \prod_{i=1}^r (1 - \alpha_i z)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}_\infty, v_\infty(\alpha_i) \geq \frac{C}{r}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}_\infty^\times$ tel que $F(\alpha^{-1}) = 0$. Par hypothèse, on peut donc écrire $F(z) = 1 + \sum_{i=1}^r a_i z^i$ avec $a_i \in K', v_\infty(a_i) \geq C$. Comme $F(\alpha^{-1}) = 0$, on a $\sum_{i=1}^r \frac{a_i}{\alpha^i} = -1$. Donc il existe $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $v_\infty(\frac{a_i}{\alpha^i}) \leq 0$. Comme $v_\infty(\frac{a_i}{\alpha^i}) = v_\infty(a_i) - i v_\infty(\alpha)$, on a donc $v_\infty(\alpha) \geq \frac{v_\infty(a_i)}{i}$. Comme $v_\infty(a_i) \geq C$ et $i \leq r$, on a $v_\infty(\alpha) \geq \frac{C}{r}$. \square

Soient L/K une extension abélienne finie de groupe de Galois Δ d'ordre premier à p et E un A -module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K .

Soit \mathbb{F} un corps contenant $\chi(g)$ pour tout $\chi \in \widehat{\Delta}$ et $g \in \Delta$. On étend E à $A(\mathbb{F})$.

Soit P un idéal premier de A tels que tous les premiers dans K soient non ramifiés dans L/K . On pose P_1, \dots, P_r les premiers de \mathcal{O}_K au dessus de P et $\mathfrak{P}_{i,j}$ les premiers de \mathcal{O}_L au dessus de P_i . On fixe un $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et on pose $P' = P_i, \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{i,1}$ et $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_L/\mathfrak{P}$. On note $\Delta_{\mathfrak{P}}$ le groupe de décomposition de \mathfrak{P} . On a $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}}(z) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{\Delta}_{\mathfrak{P}}} e_\chi(\mathbb{F}_{\mathfrak{P}}(z) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$.

De plus, pour $\chi \in \widehat{\Delta}_{\mathfrak{P}}, e_\chi(\mathbb{F}_{\mathfrak{P}}(z) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}) = \mathbb{F}_{P_i}(z) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

On regarde maintenant les différentes actions sur $\mathbb{F}_{P'}(z) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Pour $\delta \in \Delta$, on a $\delta(x \otimes y) = x \otimes \chi(\delta)y$.

Soit $\mathbb{F}_{P'} = \mathbb{F}_q(\alpha)$. Soit Q le polynôme minimal de α sur \mathbb{F}_q . On pose Q_j les premiers au dessus de Q dans \mathbb{F} . Comme l'extension est galoisienne, tous les Q_j ont le même degré.

On note F_j le corps de décomposition de Q_j sur \mathbb{F} c'est-à-dire $F_j = \mathbb{F}(\alpha_j)$ où α_j est une racine de Q_j .

On pose

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{P'} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} &\rightarrow \prod \mathbb{F}(\alpha_j) \\ \alpha \otimes 1 &\mapsto (\alpha_j) \end{aligned}$$

On regarde maintenant l'action de τ sur $\mathbb{F}(\alpha_j)$ qu'on note dorénavant δ . $\tau(\alpha)$ est une racine de Q car celui-ci est à coefficients dans \mathbb{F}_q . On doit donc avoir que $\delta(\alpha_j)$ est une racine de Q_j . On pose $s = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_q]$. On doit donc avoir $\delta(\alpha_j) = \alpha_j^{q^{is}}$ où $i \in \llbracket 0; \deg(Q_j) - 1 \rrbracket$. On voit donc que $\delta^r(\alpha_j)$ pour $r \in \llbracket 0; \deg(Q_j) - 1 \rrbracket$ nous donne toutes les racines de Q_j . Cela implique que $\text{Gal}(\mathbb{F}_j/\mathbb{F}) = \langle \delta \rangle$.

On a $\mathbb{F}(\alpha_j) = \mathbb{F}(\alpha)$ pour tout j . On le note \mathbb{F}' .

On s'intéresse à $\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]}(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L(z)))$. On rappelle que $P\mathcal{O}_K = P_1^{e_1} \dots P_r^{e_r}$. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \prod_{i=1}^r \frac{P_i \mathcal{O}_L}{P_i^{e_i} \mathcal{O}_L}(z) \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_L}{P\mathcal{O}_L}(z) \longrightarrow \prod_{i=1}^r \frac{\mathcal{O}_L}{P_i \mathcal{O}_L}(z) \longrightarrow 0.$$

Comme $\delta(P_i \mathcal{O}_L) \subset P_i^2 \mathcal{O}_L$, on obtient donc

$$\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\mathcal{O}_L}{P\mathcal{O}_L}(z) \right) \right) = \text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\mathcal{O}_L}{P_i \mathcal{O}_L}(z) \right) \right) = \prod_{i=1}^r \text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\mathcal{O}_L}{P_i \mathcal{O}_L}(z) \right) \right).$$

De plus, on a l'isomorphisme $\mathcal{O}_L/P_i \cong \mathcal{O}_L/\mathfrak{P} \otimes_{A[\Delta, \mathfrak{P}]} A[\Delta]$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]}(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L(z))) &= \prod_{i=1}^r \text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E} \left(\frac{\mathcal{O}_L}{P_i \mathcal{O}_L}(z) \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^r \text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta, \mathfrak{P}_{i,1}]} \left(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_{i,1})(z) \right) \tilde{A}[\Delta] \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\sum_{\chi \in \tilde{\Delta}_{\mathfrak{P}_{i,1}}} \text{Fitt}_{\tilde{A}[\mathbb{F}]} \left(e_\chi(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_{i,1})(z)) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \right) e_\chi \right) \tilde{A}[\Delta] \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\sum_{\chi \in \tilde{\Delta}_{\mathfrak{P}_{i,1}}} \left(\prod \text{Fitt}_{\tilde{A}[\mathbb{F}]} \left(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i)(z) \right) \right) e_\chi \right) \tilde{A}[\Delta]. \end{aligned}$$

Théorème 3.7.5. *Soit E/\mathcal{O}_L un module de A -module d'Anderson où L/K est une extension finie. On suppose que E vérifie la condition suivante notée (P') : il existe un ensemble fini S de premiers de A contenant tous les premiers en dessous des premiers ramifiés tel que pour tout premier $P \notin S$, avec les notations précédentes, $\text{Fitt}_{\tilde{A}[\mathbb{F}]}(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i)(z))$ est principal. Alors E est Δ -admissible pour \mathcal{O}_L .*

Démonstration. On montre d'abord que E vérifie la condition (C) . Soit $t \in A \setminus \mathbb{F}_q$ tel que $K/\mathbb{F}_q(t)$ est une extension finie séparable. On a $\tilde{E}_t = \sum_{i=0}^r A_i z^i \tau^i$ avec A_i dans $\mathcal{M}_{d \times d}(\mathcal{O}_K)$.

Soit $i \in [1; r]$. D'après le lemme 3.7.1, $\text{Fitt}_{\mathbb{F}(z)(t)}(E(\mathbb{F}'_i)(z)) = G_i \mathbb{F}(z)[t]$ où $G_i(z) = \chi(t, z) \in \mathbb{F}[t, z^{m_i}]$ où $m_i = [\mathbb{F}'_i : \mathbb{F}]$. On pose $F_i(z) = \frac{G_i(z)}{G_i(0)}$. On a bien $F_i(0) = 1$. De

plus, $\deg_t(G_i(z) - G_i(0)) \leq \deg_t(G_i(z)) - \frac{m_i}{r}$. D'où $-v_\infty(G_i(z) - G_i(0)) \leq m_i - \frac{m_i}{r}$.
On obtient alors

$$\begin{aligned} v_\infty(F_i(z) - 1) &= v_\infty\left(\frac{G_i(z) - G_i(0)}{G_i(0)}\right) \\ &= v_\infty(G_i(z) - G_i(0)) - v_\infty(G_i(0)) \\ &\geq -m_i + \frac{m_i}{r} - v_\infty(G_i(0)) \\ &\geq -m_i + \frac{m_i}{r} + m_i \\ &\geq \frac{m_i}{r}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.7.4, $\frac{G_i(z)}{G_i(0)} = \prod_{j=1}^{rm} (1 - z\beta_j)$ avec $\beta_j \in \mathbb{C}_\infty$ tels que $v_\infty(\beta_j) \geq \frac{m_i}{r}/(rm_i) \geq \frac{1}{r^2}$. On a donc $\frac{G_i(z)}{G_i(0)} = \prod_{j=1}^r (1 - \alpha_j z^{m_i})$, $\alpha_j \in \mathbb{C}_\infty$, où $v_\infty(\alpha_j) \geq \frac{m_i}{r^2}$.

Par la proposition 3.7.2, il existe un idéal I_i de $A\mathbb{F}(z^{m_i})$ tel que $\text{Fitt}_{\tilde{A}(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i(z))) = I_i \tilde{A}(\mathbb{F})$. Comme E vérifie (P') et $P \notin S$, $I_i \tilde{A}(\mathbb{F})$ est principal. De plus, par le lemme 3.7.3, cela implique que I_i est principal. D'où $I_i = (x_i)$ où $x_i \in A(\mathbb{F})[z^{m_i}]$. Comme $\text{Fitt}_{\mathbb{F}(z)[t]}(E(\mathbb{F}'_i(z))) = N_{K(\mathbb{F})/\mathbb{F}(t)(z)}(x_i)\mathbb{F}_i(z)[t]$, on obtient

$$\frac{G_i(z)}{G_i(0)} = N_{k(\mathbb{F})(z)/\mathbb{F}(t)(z)}\left(\frac{x_i(z)}{x_i(0)}\right) = N_{\tilde{k}(\mathbb{F})_\infty/\mathbb{F}(z)((t^{-1}))}\left(\frac{x_i(z)}{x_i(0)}\right).$$

Il existe donc $r' \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $\gamma_j \in \mathbb{C}_\infty$ tels que $v_\infty(\gamma_j) \geq \frac{m_i}{r}$ et $\frac{x_i(z)}{x_i(0)} = \prod_{j=1}^{r'} (1 - \gamma_j z^{m_i})$. Cela implique que $v_\infty\left(\frac{x_i(z)}{x_i(0)}\right) = 0$. On a donc que $\sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{p}_{i,1}}} \left(\prod \frac{x_i(z)}{x_i(0)}\right) e_\chi \in$

$\mathbb{T}_z(k_\infty(\mathbb{F})[\Delta_{\mathfrak{p}_{i,1}}])^\times$ est inversible d'inverse $\sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{p}_{i,1}}} \left(\prod \frac{x_i(0)}{x_i(z)}\right) e_\chi$. Cela entraîne que

$$\prod_{P \notin S} \prod_i \sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{p}_{i,1}}} \left(\prod \frac{x_i(z)}{x_i(0)}\right) \in \mathbb{T}(k_\infty)[\Delta]^\times.$$

On rappelle que

$$\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L(z)) \right) = \prod_{i=1}^r \left(\sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{q}_{i,1}}} \left(\prod \text{Fitt}_{\tilde{A}[\mathbb{F}]} \left(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i(z)) \right) \right) e_\chi \right) \tilde{A}[\Delta].$$

On a donc

$$\text{Fitt}_{\tilde{A}[\Delta]} \left(\tilde{E}(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L(z)) \right) = x_P(z) = \prod_i \sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{q}_{i,1}}} \left(\prod x_i(z) \right)$$

ce qui implique

$$\prod_{P \notin S} \frac{x_P(z)}{x_P(0)} \in \mathbb{T}(k_\infty)[\Delta]^\times.$$

Donc E vérifie la condition (C). On regarde maintenant si E vérifie bien la condition (P). On observe que

$$\begin{aligned} \text{Fitt}_{\tilde{A}(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i(z))) &= \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})[z]}(E(\mathbb{F}'_i[z]))\tilde{A}(\mathbb{F}), \\ \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i)) &= \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})[z]}(E(\mathbb{F}'_i[z]))|_{z=1}, \\ \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(\mathbb{F}'_i) &= \text{Fitt}_{A(\mathbb{F})[z]}(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i[z]))|_{z=0}. \end{aligned}$$

Il existe $G_1(z), \dots, G_s(z) \in x_i(z)A(\mathbb{F})[z]$ tels que

$$\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})[z]}(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i[z])) = G_1(z)A(\mathbb{F})[z] + \dots + G_s(z)A(\mathbb{F})[z].$$

On a donc $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i)) \subset x_i(1)A$ et $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(\mathbb{F}'_i) \subset x_i(0)A(\mathbb{F})$.

Si I_i est un idéal non nul de $A(\mathbb{F})$ (respectivement $\tilde{A}(\mathbb{F})$), on dit que $\deg(I_i) = \dim_{\mathbb{F}}(A(\mathbb{F})/I_i)$, (respectivement, $\deg(I) = \dim_{\mathbb{F}(z)}(\tilde{A}(\mathbb{F})/I)$). De plus, si $I \subset J$ sont des idéaux non nuls de $A(\mathbb{F})$ (respectivement $\tilde{A}(\mathbb{F})$) tels que $\deg(I) = \deg(J)$ alors $I = J$. On a également,

$$\deg(\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i))) = \deg(\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(\mathbb{F}'_i)) = \deg(\text{Fitt}_{\tilde{A}(\mathbb{F})}(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i(z)))).$$

On a également

$$v_\infty(x_i(z)) = v_\infty(x_i(1)) = v_\infty(x_i(0)).$$

Comme $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i)) \subset x_i(1)A(\mathbb{F})$ et $\deg(\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i))) = \deg(\text{Fitt}_{\tilde{A}(\mathbb{F})}(\tilde{E}(\mathbb{F}'_i(z))))$, on a alors $v_\infty(x_i(z)) = v_\infty(x_i(1))$. D'où $\deg(\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i))) = \deg(x_i(1)A(\mathbb{F}))$, on a

alors $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(E(\mathbb{F}'_i)) = x_i(1)A(\mathbb{F})$. De la même manière, on obtient $\text{Fitt}_{A(\mathbb{F})}(\mathbb{F}'_i) = x_i(0)A(\mathbb{F})$.

On a alors que

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(E(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L)) = \prod_{i=1}^r \left(\sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{P}_{i,1}}} \left(\prod x_i(1) \right) e_\chi \right) A[\Delta]$$

et

$$\text{Fitt}_{A[\Delta]}(\text{Lie}_E(\mathcal{O}_L/P\mathcal{O}_L)) = \prod_{i=1}^r \left(\sum_{\chi \in \hat{\Delta}_{\mathfrak{P}_{i,1}}} \left(\prod x_i(0) \right) e_\chi \right) A[\Delta].$$

Cela entraîne que E vérifie (P) , donc c'est un module admissible pour \mathcal{O}_L . \square

3.8 Modules d'Anderson Δ -admissibles pour \mathcal{O}_L

On reprend dans cette partie la section 6 de [5] sur les modules d'Anderson A -fini pour montrer que ces modules sont Δ -admissibles pour \mathcal{O}_L et on utilise le résultat de Maurischat qui montre l'équivalence entre les modules A -finis et abéliens. Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro ont montré que les modules d'Anderson abéliens sont admissibles (voir [5, Section 6.2]).

Soit $F = K^{perf}$. Soit \mathcal{O}_F la fermeture intégrale de A dans F . Pour tout premier \mathfrak{P} de \mathcal{O}_K , il existe un unique premier \mathfrak{Q} de \mathcal{O}_F au dessus de \mathfrak{P} . L'inclusion $\mathfrak{D}_L \subset \mathcal{O}_F$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_L/\mathfrak{P} \cong \mathcal{O}_F/\mathfrak{Q}$.

Soit $\tau : F \rightarrow F$ qui à x associe x^q et $\sigma : F \rightarrow F$ qui à x associe $x^{1/q}$.

Soit $A_F = A \otimes_{\mathbb{F}_q} F$ et $A_F\{\sigma\}$ l'anneau des polynômes tel que $\sigma(a \otimes 1) = (a \otimes 1)\sigma$ et $\sigma(1 \otimes \alpha) = (1 \otimes \alpha^{1/q})\sigma$.

3.8.1 Modules d'Anderson A -fini

Soit E un module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K . On définit le A motif dual associé à E noté $\mathcal{M}(E(F)) = F\{\tau\}$. C'est un $F\{\sigma\}$ -module libre où F agit via multiplication à droite et σ agit via multiplication à droite par τ . $\mathcal{M}(E(F))$ est un A -module via multiplication à gauche par E .

On a donc que $\mathcal{M}(E(F))$ est un $A_F\{\sigma\}$ -module à gauche tel que

1. $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^d \mathcal{M}(E(F)) \subset \sigma \mathcal{M}(E(F))$ par définition du module d'Anderson.
2. $\mathcal{M}(E(F))$ est un $F\{\sigma\}$ -module libre de rang d comme F est un corps parfait.

On dit que E est A -fini si $\mathcal{M}(E(F))$ est un A_F -module de type fini. Cette définition ne dépend pas du choix de F . Dans ce cas, $\mathcal{M}(E(F))$ est un A_F -module projectif. Soit $T \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Pour le montrer, on utilise [18, Lemma 5.4.10] qu'on rappelle.

Lemme 3.8.1. *Soit \mathbb{F} un corps parfait. Soit M un $\mathbb{F}[T, \tau]$ -module à gauche qui est de type fini comme $\mathbb{F}[T]$ -module et comme $\mathbb{F}[\tau]$ -module. Alors M est libre sur $\mathbb{F}[T]$ de rang fini si et seulement si M est libre sur $\mathbb{F}[\tau]$ de rang fini.*

$\mathcal{M}(E(F))$ est un $F\{\sigma\}$ module libre et c'est A_F -module de type fini comme E est A -fini. D'après le lemme, cela implique qu'il est $F[T]$ -libre. Comme il est sans torsion comme $F[T]$ -module, il l'est également comme A_F -module. Comme il est de type fini comme A_F -module, cela implique qu'il est A_F -projectif.

Soit P' un idéal premier de \mathcal{O}_K . On peut regarder cette définition pour $F = \mathbb{F}_{P'} = \frac{\mathcal{O}_K}{P'}$. On obtient alors un $(A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{P'})\{\sigma\}$ -module $\mathcal{M}(E/\mathbb{F}_{P'})$ et on dit que $E \pmod{P'}$ est A -fini si $\mathcal{M}(E/\mathbb{F}_{P'})$ est de type fini comme $A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{P'}$ -module.

On rappelle [5, Lemma 6.1] ainsi que sa preuve.

Lemme 3.8.2. *Soit E un A -module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K . Alors pour presque tous les idéaux maximaux P' de \mathcal{O}_K , $E \pmod{P'}$ est A -fini.*

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{F}_q^d . On a $F\{\tau\}^d = \bigoplus_{j=1}^d F\{\tau\}e_j$.

Comme E est un A -module de d'Anderson fini défini sur \mathcal{O}_K , cela veut dire par définition que $F\{\tau\}^d$ est un A_F -module de type fini. On a donc pour tout $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$, l'existence de $m(j) \geq 1$ tel que $\tau^{m(j)}e_j = \sum_{l=0}^{m(j)-1} A_F\tau^l e_j$ c'est-à-dire $\tau^{m(j)}e_j = \sum_{l=0}^{m(j)-1} E_{a_{l,j}}\tau^l e_j x_{l,j}$ où $a_{l,j} \in A$ et $x_{l,j} \in F$.

Comme il y a un nombre fini de $x_{l,j}$, on peut regarder ces égalités modulo presque tous les idéaux maximaux de \mathcal{O}_F . Pour P' un idéal maximal de \mathcal{O}_K , il existe un unique idéal Q de \mathcal{O}_F au dessus de P' . Pour presque tous les idéaux maximaux P' de \mathcal{O}_K , on pose alors $\mathbb{F}_{P'} = \frac{\mathcal{O}_K}{P'} \cong \frac{\mathcal{O}_F}{Q}$ et $\bar{E} = E \pmod{P'}$. On obtient alors

$$\tau^{m(j)}e_j = \sum_{l=0}^{m(j)-1} \bar{E}_{a_{l,j}}\tau^l e_j \bar{x}_{l,j} \text{ ce qui veut dire que } \mathbb{F}_{P'}\{\tau\}^d = \sum_{j=1}^d \sum_{l=0}^{m(j)-1} A_{\mathbb{F}_{P'}}\tau^l e_j \text{ où}$$

$$m = \max_{j \in \llbracket 1; d \rrbracket} (m(j)). \quad \square$$

Théorème 3.8.3. *Soit E un module d'Anderson qui est A -fini. Alors c'est Δ -admissible pour \mathcal{O}_L .*

Démonstration. Soit P un premier de A tel que pour tout premier P_i de \mathcal{O}_K au dessus de P on ait $E \pmod{P}$ est A -fini et P_i est non ramifié dans L/K . Soit P_i un premier de \mathcal{O}_K au dessus de P . On pose $\mathbb{F}_i = \mathcal{O}_K/P_i\mathcal{O}_K$. On a vu que $\mathcal{M}(E(\mathbb{F}_i))$ est $A_{\mathbb{F}_i}$ -projectif. De plus, comme $\mathcal{M}(\mathcal{O}_L/P_i\mathcal{O}_L) = \mathcal{M}(\mathcal{O}_K/P_i\mathcal{O}_K) \otimes_K L$, cela implique qu'il est $A_{\mathbb{F}_i}[\Delta]$ -projectif d'après le théorème de la base normale et donc $A[\Delta]$ -projectif. On a alors que $(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_i\mathcal{O}_L)\{\tau\}^d$ est $A[\Delta_i]$ -projectif où \mathfrak{P}_i est un premier de \mathcal{O}_L au dessus de P_i et Δ_i est son groupe de décomposition. Soit $\chi \in \widehat{\Delta}_i$. Cela entraîne que $e_\chi((\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_i\mathcal{O}_L)\{\tau\}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$ est $A(\mathbb{F})$ -projectif et donc que $\mathbb{F}'_i\{\delta\}^d$ l'est également. On pose $V(E(\mathbb{F}'_i)) = \mathbb{F}'_i\{\delta\}^d \otimes_{A(\mathbb{F})} k(\mathbb{F})$. C'est un $k(\mathbb{F})$ -espace vectoriel de dimension finie car $\mathbb{F}'_i\{\delta\}^d$ est un $A(\mathbb{F})$ -module de type fini. On note encore σ l'application $k(\mathbb{F})$ -linéaire induite par σ : multiplication à droite par δ . Soit $Q_i(X) = \det_{k(\mathbb{F})}(X \text{id}_{V(E(\mathbb{F}'_i))} - \sigma) \in A(\mathbb{F})[X]$ car $\mathbb{F}'_i\{\delta\}^d$ est $A(\mathbb{F})$ -projectif.

Soient $x \in \mathbb{F}'_i{}^d$ et $a \in A$. On a $E_a = \sum_{i=0}^r A_i \delta^i$. Dans $\mathbb{F}'_i\{\delta\}^d$, on a alors

$$a.x = \sum_{i=0}^r A_i \delta^i(x) \delta^i \equiv \sum_{i=0}^r A_i \delta^i(x) z^i \pmod{\mathbb{F}'_i\{\delta\}^d(\delta - z)}.$$

On a donc la suite exacte de $\widetilde{A}(\mathbb{F})$ -module induite par la multiplication à droite par $\delta - z$:

$$0 \longrightarrow E(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\}) \xrightarrow{\delta - z} E(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\}) \longrightarrow \widetilde{E}(\mathbb{F}'_i(z)) \longrightarrow 0.$$

D'après le corollaire 3.1.3, cela implique qu'on obtient $\left[\widetilde{E}(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\}) : \widetilde{E}(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\}) \right] = \det(f^{-1}) \text{Fitt} \left(\frac{E(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\})}{f(E(\mathbb{F}'_i(z)\{\delta\}))} \right)$ où $f = \delta - z$. D'où $Q_i(z) = \det(f) = \text{Fitt}_{A[\mathbb{F}]} \widetilde{E}(\mathbb{F}'_i(z))$. Donc d'après le théorème 3.7.5, E est admissible pour \mathcal{O}_L . \square

3.8.2 Modules d'Anderson abéliens

Soit E un module d'Anderson de dimension d défini sur \mathcal{O}_K . On pose $M(E/F) = \mathcal{M}_{1,d}(F\{\tau\})$ où F agit dessus via la multiplication à gauche, τ via la multiplication à gauche et la structure de A -module est donnée via la multiplication à droite par E . On a alors que $M(E(F))$ est un $A_F\{\tau\}$ -module à gauche tel que

1. $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^d M(E(F)) \subset \sigma M(E(F))$ par définition du module d'Anderson.
2. $\mathcal{M}(E(F))$ est un $F\{\tau\}$ module libre de rang d comme F est un corps parfait.

On dit que E est abélien si $M(E(F))$ est un A_F -module de type fini. Cette définition ne dépend pas du choix de F . De la même manière que pour les modules A -finis, cela implique qu'il est A_F -projectif.

Théorème 3.8.4. [20, Corollary 8.1] *Pour un A -module d'Anderson E , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- E est A -fini,
- E est abélien.

Cela implique que les modules d'Anderson abéliens sont Δ -admissibles pour \mathcal{O}_L .

3.8.3 Formule de classes équivariante

Théorème 3.8.5. *Soit E un module d'Anderson défini sur \mathcal{O}_K abélien ou A -fini tel que $\text{pgcd}(\text{Gal}(L/K); p) = 1$. Alors on a la formule de classe équivariante*

$$[\text{Lie}_E(\mathcal{O}_L) : U_{St}(E(\mathcal{O}_L))]_{A[\Delta]} = \mathcal{L}_\Delta(E(\mathcal{O}_L)).$$

Proposition 3.8.6. *Les modules de Drinfeld sont A -finis.*

Démonstration. Soit E un module de Drinfeld de rang n . Soit $T \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Donc A est un $\mathbb{F}_q[T]$ -module de type fini. On pose d_T le degré de T en ∞ . D'après [18, lemma 4.5.1], E se retrace à un module de Drinfeld de rang $n \cdot d_T$ sur $\mathbb{F}_q[T]$. On peut montrer que $F\{\tau\}$ est un $F[T] = \mathbb{F}_q[T] \otimes_{\mathbb{F}_q} F$ -module libre de rang $n \cdot d_T$ engendré par $\{\tau^i \mid 0 \leq i < n \cdot d_T\}$. Donc $F\{\tau\}$ est un $A \otimes_{\mathbb{F}_q} F$ module de type fini, ce qui veut dire par définition que E est A -fini. \square

Corollaire 3.8.7. *Soit ϕ un module de Drinfeld qui est défini sur \mathcal{O}_K tel qu'on ait $\text{pgcd}(\text{Gal}(L/K); p) = 1$. Alors on a la formule de classe équivariante*

$$[\mathcal{O}_L : U_{St}(\phi(\mathcal{O}_L))]_{A[\Delta]} = [\mathcal{O}_L : U(\phi(\mathcal{O}_L))]_{A[\Delta]} \text{Fitt}_{A[\Delta]}(H(\phi(\mathcal{O}_L))) = \mathcal{L}_\Delta(\phi(\mathcal{O}_L)).$$

Bibliographie

- [1] G. Anderson. t -motives. *Duke Math. J.*, 53(2) :457–502, 1986.
- [2] G. Anderson and D. Thakur. Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. *Ann. of Math. (2)*, 132(1) :159–191, 1990.
- [3] B. Anglès, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro. Stark units in positive characteristic. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(4) :763–812, 2017.
- [4] B. Anglès, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro. On special L -values of t -modules. *Adv. Math.*, 372 :107313, 33, 2020.
- [5] B. Anglès, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro. A class formula for admissible Anderson modules. *to appear, Invent. Math.*, 2022.
- [6] B. Anglès and L. Taelman. Arithmetic of characteristic p special L -values. With an appendix by V. Bosser. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4) :1000–1032, 2015.
- [7] B. Anglès and F. Tavares Ribeiro. Arithmetic of function fields units. *Math. Ann.*, 367(1-2) :501–579, 2017.
- [8] M. F. Atiyah and C. T. C. Wall. Cohomology of groups. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 94–115. Thompson, Washington, D.C., 1967.
- [9] S. Bae, H. Jung, and P.-L. Kang. Artin-Schreier extensions of the rational function field. *Math. Z.*, 276(3-4) :613–633, 2014.
- [10] L. Carlitz. On certain functions connected with polynomials in Galois field. *Duke Math. J.*, 1(2) :137–168, 1935.
- [11] F. Demeslay. A class formula for l -series in positive characteristic. *arXiv :1412.3704v2*, 2014.

-
- [12] F. Demeslay. *Formules de classes en caractéristique positive*. PhD thesis, Université de Caen Normandie, October 2015.
- [13] V. Drinfeld. Elliptic modules, Math. Sbornik **94** (1974), 594-627. *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 23 :561–592, 1976.
- [14] D. Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [15] J. Fang. Special L -values of abelian t -modules. *J. Number Theory*, 147 :300–325, 2015.
- [16] J. Fang. Equivariant special L -values of abelian t -modules. *J. Number Theory*, 232 :242–260, 2022.
- [17] J. Ferrara, N. Green, Z. Higgins, and C. D. Popescu. An equivariant tamagawa number formula for drinfeld modules and applications. *to appear, Algebra and Number Theory*. *arXiv :2004.05144v2*, 2020.
- [18] D. Goss. *Basic Structures of function field arithmetic*, volume 35 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [19] I. Kovacs, D. S. Silver, and S. G. Williams. Determinants of commuting-block matrices. *Amer. Math. Monthly*, 106(10) :950–952, 1999.
- [20] A. Maurischat. Abelian equals a-finite for anderson a-modules. *arXiv :2110.11114v2*, 2021.
- [21] B. Mazur and A. Wiles. Class fields of abelian extensions of \mathbb{Q} . *Invent. Math.*, 76(2) :179–330, 1984.
- [22] M. Mornev. *Shtuka cohomology and special values of Goss L -functions*. PhD thesis, University of Amsterdam (available at <http://hdl.handle.net/1887/61145>), February 2018.
- [23] J. Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
- [24] M. Rosen. *Number theory in function fields*, volume 210 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [25] L. Taelman. A Dirichlet unit theorem for Drinfeld modules. *Math. Ann.*, 348(4) :899–907, 2010.
- [26] L. Taelman. Special L -values of Drinfeld modules. *Ann. of Math. (2)*, 175(1) :369–391, 2012.
- [27] F. Tavares Ribeiro. On the stark units of drinfeld modules. In *Arithmetic and Geometry over Local Fields*, pages 281–324. Springer, 2021.