Théorèmes Limites en mesure infinie : auto-intersections et flots perturbés moyennés

Maxence Phalempin

▶ **To cite this version:**

Maxence Phalempin. Théorèmes Limites en mesure infinie : auto-intersections et flots perturbés moyennés. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2022. Français. NNT : 2022BRES0057 . tel-03881987

HAL Id: tel-03881987

https://theses.hal.science/tel-03881987

Submitted on 2 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DOCTORAT BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

Université de Bretagne Occidentale

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs intéractions*

Par
Maxence PHALEMPIN

Théorèmes Limites en mesure infinie : auto-intersections et flots perturbés moyennés

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 30 août 2022
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (UMR 6205)

Rapporteurs avant soutenance :

Carlangelo LIVERANI	Professeur des universités, Université de Rome « Tor Vergata »
Hans-Henrik RUGH	Professeur des Université, Université Paris-Saclay

Composition du Jury :

Président :	Jean-René CHAZOTTES	Directeur de Recherche CNRS, Ecole Polytechnique
Examinateurs :	Daniel BOIVIN	Professeur des universités, Université de Bretagne Occidentale
	Christophe CUNY	Maître de Conférence, Université de Bretagne Occidentale
	Catherine RAINER	Maîtresse de Conférence, Université de Bretagne Occidentale
	Damien THOMINE	Maître de Conférence, Université Paris Saclay
Dir. de thèse :	Françoise PENE	Professeure des universités, Université de Bretagne Occidentale

"There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened."

Adam Douglas, H2G2

Remerciements

Comme l'indique les noms et acronymes en couverture, la thèse est plutôt un travail collectif aussi je tiens à remercier les autres participants et tout particulièrement ma directrice de thèse Françoise Pène pour les idées et intuitions développées dans de précieux et réguliers échanges mathématiques mais aussi pour son investissement, son soutien constant, ses initiatives et conseils dans toutes les interactions palliant notamment à l'isolement de circonstance de la pandémie.
Je remercie vivement Carlangelo Liverani et Hans-Henrik Rugh les rapporteurs de cette thèse d'avoir accepté de prendre le temps de relire le manuscrit et prodiguer des commentaires pertinents ainsi que des idées pour des développement futurs.
Je remercie également Daniel Boivin, Jean-René Chazotte, Christophe Cuny, Catherine Rainer et Damien Thomine pour me faire l'honneur de participer au jury et pour leur attention portée à ces travaux.
Les travaux en question se sont déroulés au sein du LMBA et je souhaite remercier les membres, enseignants et personnels administratifs pour leur investissement dans le cadre de travail. Je remercie notamment l'équipe de systèmes dynamiques, probabilités et statistiques pour les séminaires et le partage convivial des mathématiques ainsi que les doctorants et post-doctorants de Brest mais aussi de Rennes et de plus loin d'avoir exaucé le souhait d'instaurer des échanges réguliers pour partager leurs expériences des mathématiques et d'apporter des éclairages dans bien des domaines.
Parfois les contributions à ce manuscrit ont été plus implicites mais non négligeable, aussi je tiens à remercier mes amis qui se reconnaîtront peut-être dans les échanges et les jeux plus ou moins chaotiques qui ont sans doute diffusé goûts et réflexions pour les systèmes dynamiques et l'aléatoire. Enfin je remercie aussi ma famille, les uns pour leur confiance dans le fait d'aller étudier des choses curieuses en des lieux exotiques où l'herbe est verte et les cigales ne chantent pas, les autre pour leur accueil dans les pérégrinations induites par la thèse.

Table des matières

I Introduction et éléments de base. 7

1 Outils et définitions générales. 15

1.1 Définitions préliminaires de systèmes et propriétés dynamiques 16
1.2 Opérateur de transfert et systèmes hyperboliques. 21
1.3 Convergence forte en loi 23
1.4 Convergence en loi, métrique M_1 et J_1 sur l'espace de Skohorod 25
1.5 Temps local 28

2 Exemples de systèmes chaotiques étudiés. 32

2.1 Sous-shift de type fini. 32
2.2 Gaz de Lorentz 40
2.3 Flot géodésique sur une surface riemannienne hyperbolique. 45
2.4 Un lemme commun : caractère Lipschitz du temps local discret. 51

II Nombre d'auto-intersections. 54

3 Flipper aléatoire. 55

3.1 Hypothèses et résultat 55
3.2 Convergence vers le processus de Kesten et Spitzer. 57

4 Nombre d'auto-intersections : résultat et applications. 66

4.1 Résultat général sur les auto-intersections 66
4.2 Propriétés du gaz de Lorentz et du flot géodésique 72

5 Preuve du théorème limite du nombre d'auto-intersections 4.1.5. 77

5.1 Contrôle de l'espérance. 77
5.2 Contrôle en norme L^1 : énoncé 84
5.3 Contrôle en norme L^1 : preuve 86

5.4 Convergence en loi 90
5.5 Discussion sur les constantes 95

6 Autres résultats sur les auto-intersections. 102
6.1 Convergence en plus grande dimension. 102
6.2 Nombre d'auto-intersections en mesure finie. 105

III Problème de moyennisation sur les $\mathbb{Z}$-extensions. 110

7 Introduction. 111

8 Equations différentielles perturbées : Cas de fonctions intégrables. 113

9 Résultat de moyennisation. 119
9.1 Résultats et hypothèses 119
9.1.1 Hypothèses 122
9.2 Preuve du théorème de moyennisation. 125

10 Sommes ergodiques perturbées. 132
10.1 Convergence unidimensionnelle. 133
10.2 Preuve du théorème de moyennisation : lois finies dimensionnelles. 151
10.3 Preuve du théorème de moyennisation : tension. 156

IV Annexes 160

A Lemme technique de la partie II. 161

B Moments du temps local et approximation. 171
B.1 Moments du temps local d'un mouvement Brownien. 171
B.2 Convergence des temps locaux. 176

Bibliography 179

Première partie

Introduction et éléments de base.

Introduction

Un système dynamique métrique mesuré est la donnée d'un triplet $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ où $\overline{M}$ est un espace métrique complet, $\overline{T} : \overline{M} \to \overline{M}$ une application mesurable pour la tribu des boréliens et $\overline{\mu}$ une mesure sur $\overline{M}$ invariante par $\overline{T}$, i.e pour tout borélien $A \subset \overline{M}$,

$$\overline{\mu}(T^{-1}A) = \overline{\mu}(A).$$

Lorsque la mesure $\overline{\mu}$ est une mesure de probabilité, les notions dynamiques sur celui-ci donnent des propriétés stochastiques sur les observables qui sont caractéristiques du système. Par exemple, l'ergodicité via le théorème de Birkhoff implique pour toute observable intégrable $f : \overline{M} \mapsto \mathbb{R}$ une convergence de type Loi des grands nombres lorsque n tend vers l'infini :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \overline{T}^i \overset{\overline{\mu}-p.s}{\to} \int_{\overline{M}} f d\overline{\mu}. \tag{1}$$

Si le système est mélangeant avec de bonnes vitesses de mélange certaines observables $\phi \in L^2(\overline{M})$ peuvent vérifier un théorème limite central

$$\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^i \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\phi)), \tag{2}$$

où $\mathbb{N}(0, \sigma^2(\phi))$ désigne la loi normale centrée en 0 et de variance $\sigma^2(\phi)$. De manière générale, les relations avec les propriétés stochastiques sont naturelles car les systèmes dynamiques donnent des représentations d'espaces probabilisés (Ω, Π, P) associés à une suite de variable aléatoires stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui peuvent être décrites par une suite $(f \circ T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où f est une observable sur un système dynamique $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ bien choisi.

Dans les systèmes (M, T, μ) où μ est une mesure infinie, les notions d'ergodicité (ergodicité récurrente) et de mélange n'entraînent plus les convergences (1) et (2) précédentes telles quelles. Le théorème de Hopf par exemple implique la convergence suivante lorsque

$n \to \infty$ pour tout $f \in L^2(\overline{M})$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \overset{p.s}{\to} 0.$$

Dans le cas de systèmes ergodiques conservatifs, on peut tout de même se ramener à des système dynamiques probabilisés en remarquant que les informations sur les sommes itérées le long des orbites dans le système sont contenues dans toute portion $A \subset M$ de mesure $\mu(A) > 0$ via les excursions. On peut alors définir un système (A, T_A, μ_A) où $T_A x$ donne le prochain point d'arrivée dans la cellule A d'une orbite partant de $x \in A$. Etudier les sommes itérées revient à étudier la dynamique sur (A, T_A, μ_A) et le temps de retour $\tau(x) := \inf\{n > 0, T^n x \in A\}$. Au temps de retour, on peut associer la notion duale de temps local $N_n(A)$ de la cellule A qui est une notation probabiliste ($N_n(A) := N_n(A, .)$) donnant le nombre de passages de l'orbite $(T^k x)_{k\in\mathbb{N}}$ jusqu'à la n-ème itération dans la cellule A.

Dans ce manuscrit c'est cette notion de temps locale qui est exploitée pour étudier certaines observables sur des $\mathbb{Z}^d$-extensions. Une $\mathbb{Z}^d$-extension périodique au dessus d'un système dynamique probabiliste $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par un changement de cellule $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}^d$ est la donnée du système $(\overline{M} \times \mathbb{Z}^d, T, \sum_{a\in\mathbb{Z}^d} \overline{\mu} \otimes \delta_a)$ où $T(x, a) = (\overline{T}x, a + \phi(x))$. Les orbites d'un point (x, a) sur un tel système sont décrites par $T^n(x, a) = (\overline{T}^n x, S_n(x) + a)$ où S_n est une somme de Birkhoff $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^i(x)$.
Ainsi, si $f : \overline{M} \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable et constante sur les cellules $\overline{M} \times \{n\}$ alors la somme de Birkhoff donne

$$\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(\cdot, 0) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} f(a) N_n(a),$$

et l'étude de sommes itérées sur f dans $M \times \mathbb{Z}^d$ fait apparaître les sommes ergodiques pour ϕ sur $\overline{M}$ et donc son temps local N_n (pour $a \in \mathbb{Z}$, $N_n(a)$ est la fonction mesurable sur $\overline{M}$ décrite par $N_n(a) := \sum_{i=0}^{n-1} 1_{\{S_i=a\}}$). La somme de Birkhoff d'une application mesurable $f : \overline{M} \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ se décompose en

$$\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x, b) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{N_n(a)} f(\overline{T}^{n_i} x, b + a), \tag{3}$$

Où les n_i sont les entiers inférieurs à n vérifiant $S_{n_i}\phi = a$. Si on ajoute de bonnes hypothèses de mélange, on peut espérer, en utilisant l'ergodicité du système induit $A =$

$\overline{M} \times \{b+a\}$, garder le comportement ergodique

$$\frac{1}{N_n(a)} \sum_{i=0, S_{n_i}=a}^{N_n(a)} f(\overline{T}^{n_i} x, b+a) \underset{p.s}{\to} \int_{\overline{M}} f(.,b+a) d\overline{\mu}. \tag{4}$$

ce qui nous ramènerait à l'étude du cas précédant $\sum_{a\in\mathbb{Z}^d} f(a)N_n(a)$. Plus généralement, pour une fonction $f(.,.)$ vérifiant pour $(x,a),(y,b) \in (\overline{M}\times\mathbb{Z}^d)^2$ $f(x,a,y,b) = g(x,y)1_{\{a=b\}}$, lorsque la décorrélation des orbites $(f\circ T^i)_{i\in\mathbb{N}}$ du système le permet,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^i(x,a), T^j(x,a)) \underset{n\to\infty}{\overset{L^1_{\overline{\mu}}}{\sim}} \sum_{a\in\mathbb{Z}} \int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}} g(.,.) d\overline{\mu} d\overline{\mu} N_n^2(a). \tag{5}$$

Ces sommes itérées ont toutes un comportement limite dicté par celui du temps local dynamique $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associé à la somme de Birkhoff S_n. Le temps local est un objet fréquement étudié en théorie des probabilités notamment par Kesten et Spitzer dans le cadre des marche aléatoires en paysage aléatoire [22] ainsi que Guillotin-Plantard et Dombry qui en donnent un comportement limite à partir d'une marche aléatoire stationnaire (voir [13]). Adapter ces résultats à la marche dynamique S_n donne le comportement des observables décrites plus hauts. Cette thèse en donne une illustration pour des $\mathbb{Z}$-extensions dont le quotient $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est hyperbolique.

Plan de la thèse et résultats principaux

La thèse se décompose en cinq chapitres, une première partie est consacrée à l'introduction formelle des systèmes ainsi que des notions et résultats employés dans la démonstration des théorèmes limites. On donne notamment des rappels généraux de probabilité dont on pourra trouver de plus amples informations dans [6] ou [44] ainsi que les résultats cités plus haut de Guillotin Plantard et Dombry [13]. Cette section décrit aussi des propriétés dynamiques des $\mathbb{Z}^d$-extensions et leur caractérisation qui résultent entre autre des travaux de Hopf, Schmidt [38] et Conze [11]. On présente aussi l'opérateur de transfert dont le spectre étudié notamment par Bowen, Guivar'ch, Hardy, Young, Szász et Varjú [46],[17] pour les systèmes dynamiques hyperboliques probabilisés donne des propriétés ergodiques (ergodicité, vitesse de mélange, théorème limite central, théorème limite local...).

Dans le deuxième chapitre on introduit deux modèles qui ont motivé ce travail : le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique et le flot géodésique sur une surface $\mathbb{Z}$-périodique à courbure strictement négative. L'étude de ces systèmes en mesure infinie se déduit (via un flot

de suspension au-dessus d'une $\mathbb{Z}$-extension) de l'étude de systèmes dynamiques hyperboliques en mesure finie, c'est à dire des systèmes dynamiques (M, T, μ) dont la variété M se décompose au voisinage de chaque point en une feuille localement stable et une feuille localement instable. Les exemples donnés sont des variétés de dimension deux et peuvent être étudiés via l'approche de Bowen (voir [7]) dans l'étude de ces derniers via les feuilles stables et instables. Les propriétés dynamiques et stochastiques de ces systèmes ont fait l'objet de nombreux travaux depuis ceux de Bowen et Sinai (voir notamment [41], [11] [28],[29], [46] pour le gaz de Lorentz ou [7], [35] ou [37] pour les surfaces hyperboliques). On y donne notamment les propriétés de mélanges exponentiels issues de l'étude des opérateurs de transfert et les théorèmes limites locaux qui en découlent via la méthode de perturbation des opérateurs de Nagaev-Guivarc'h et sont issus des travaux de Guivarc'h, Hardy [17], Szász et Varjú [43] et Hennion et Hervé [20].

La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude de convergences stochastiques sur des $\mathbb{Z}^d$-extensions de certains processus issus des sommes ergodiques présentées en introduction.
Le troisième chapitre s'intéresse au comportement d'une fonction de gain G dans un flipper aléatoire : aux obstacles $(O_i + a)_{i\in I, a\in\mathbb{Z}}$ d'un gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique en horizon fini, on associe un gain aléatoire $\xi_{i,a}$ tel que la valeur $\xi_{i,a}$ sera gagnée à chaque fois qu'un obstacle de la forme $O_i + a$ sera touché. La somme des gains obtenus jusqu'à la n-ème collision est noté G_n.
Si G_n peut s'écrire sous la forme d'une somme de Birkhoff (3) avec $(f(\cdot, a))_{a\in\mathbb{Z}}$ remplacé par une suite de variables aléatoires indépendantes de la marche dynamique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et indépendantes entre elles, l'intégrale obtenue dans (4) dépend du paysage et est donc aléatoire, le résultat est donc similaire au cas d'une marche aléatoire en paysage aléatoire comme étudié par Kesten et Spitzer dans [22] aboutissant à un théorème limite équivalent :

Théorème 0.0.1. *Pour un flipper aléatoire composé d'un jeu d'obstacles différents O_i en nombre fini I, dont les copies engendrent de façon $\mathbb{Z}$-périodiques une famille d'obstacles $(O_i + x)_{i\in I, x\in\mathbb{Z}}$ auxquels on associe les gains $(\xi_{i,x})_{i\in I, x\in Z}$; la suite de processus $(\frac{1}{n^{3/4}} G_{\lfloor nt\rfloor})_t$ converge en loi pour la métrique J_1 dans l'espace $D(0,\infty)$ des fonctions continues à droite avec limite à gauche (càd-làg) vers le processus*

$$\left(\sum_{i=1}^{I} c_i p_i^2\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x) dZ(x)$$

où $(L_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ est le temps local d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et où Z est un mouvement Brownien de variance 1 défini sur $\mathbb{R}$ indépendant du mouvement brownien

$(B_t)_t$, c_i *la variance des* ξ_i *et* $p_i := \mathbb{P}(I_0 = i) = \left(\frac{|\partial O_i|}{\sum_{j=1}^k |\partial O_j|}\right)$.

Le quatrième chapitre concerne une illustration des sommes itérées vues en (5). Enoncé ci-dessous dans le cas où $(\mathcal{M}_0, \varphi_t^0, L_0)$ est le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique en horizon fini, le théorème limite étudié dans le chapitre 4 (dans un cadre plus général) porte sur le comportement asymptotique du nombre $\mathcal{N}_t$ d'auto-intersections de la trajectoire jusqu'au temps t. Dans le cas où $(\mathcal{M}_0, \varphi^0, L_0)$ est le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique, le système quotient modulo $\mathbb{Z}$ correspond au flot $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ du billard de Sinai correspondant.

Théorème 0.0.2 (Nombre d'auto-intersections)**.** *Le processus* $(\frac{1}{t^{3/2}}\mathcal{N}_t)_{t\geq 0}$ *converge fortement en loi pour la mesure* L_0 *vers* $e'_I \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_1^2(x)dx$ *où* e'_I *désigne le nombre moyen d'intersections entre deux trajectoires indépendantes sur une durée unitaire pour le système quotient modulo* $\mathbb{Z}$ $(\mathcal{M}, \varphi_t, L)$*, et* $\tilde{L}_1$ *le temps local d'un mouvement Brownien limite en distribution du processus* $\left(\frac{1}{t^{1/2}}\Psi \circ \varphi^0_{tu}\right)_{t>0}$ *où* Ψ *est l'application qui associe à un point l'indice de la copie de* $\mathcal{M}$ *le contenant dans la* $\mathbb{Z}$*-extension* $\mathcal{M}_0$*.*

Si on dispose d'un résultat de convergence presque sûre vers une constante du nombre d'auto-intersections dans un gaz de Lorentz $\mathbb{Z}^2$-périodique comme démontré par Pène dans [30], ce théorème donne un autre mode de convergence dans le cas des $\mathbb{Z}$-extensions et s'applique aussi au flot géodésique unitaire sur $\mathbb{Z}$-revêtement d'une surface hyperbolique compacte $\mathcal{S}$ à courbure strictement négative. Dans ce cas, le système quotient modulo $\mathbb{Z}$ est le flot géodésique unitaire sur la surface compacte $\mathcal{S}$. On retrouve notament dans théorème 0.0.1 la constante e'_I obtenue par Lalley dans [25] pour le nombre d'auto-intersections de la trajectoire issue d'une orbite d'un flot géodésique sur une surface compacte.

On montre notamment au chapitre 6 que cette constante e'_I correspond aussi après renormalisation au nombre asymptotique d'auto-intersections sur le billard de Sinai (i.e. le billard compact). Le chapitre traite aussi d'un autre résultat mineur pour les auto-intersections dans les $\mathbb{Z}^d$-extensions avec $d \geq 3$ (le cas $d = 2$ étant déjà traité dans [30]).

En troisième partie on étudie sur une $\mathbb{Z}$-extension périodique, ergodique et récurrente (M, T, μ), le comportement de la solution $x_t^\epsilon(x, \omega)$ d'une équation différentielle dite perturbée de condition initiale $x_0^\epsilon(x, \omega) = x$ pour $\omega \in M$ et de la forme

$$\frac{dx_t^\epsilon(x,\omega)}{dt} = F(x_t^\epsilon(x,\omega), T^{\lfloor \frac{t}{\epsilon} \rfloor}(\omega)) \tag{6}$$

avec $F(.,.) : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ une fonction Lipschitz en sa première variable et mesurable en la deuxième. A l'instar des études faites notamment par Khasminskii, Kifer, ou Pène (voir

[18], [23] et [27]) pour des systèmes en mesure finie, on donne des résultats de convergence asymptotique des solutions lorsqu'on accélère la dynamique (c'est à dire lorsque $\epsilon \to 0$) et ceux ci dépendent entre autre de la nature de l'intégrabilité de $F(x,.)$. Dans un cas (où $F(x,.)$ est à support uniformément compact) on montre le théorème suivant

Théorème 0.0.3. *Soit $T > 0$ et (M, T, μ) le gaz de Lorentz en temps discret (décrivant la dynamique aux instants de réflexions), la solution $(x_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T]}$ avec $\omega \in M$ vérifie un théorème limite :*

$$\left(\frac{x_t^\epsilon(x_0,.) - x_0}{\epsilon^{1/2}}\right)_{t\in[0,T]} \overset{\mathcal{L}_\mu,\|.\|_\infty}{\longrightarrow} \left(L_t(0)\int_M F(x_0,\omega)d\mu(\omega)\right)_{t\in[0,T]},$$

où $\mathcal{L}_\mu$ représente la convergence forte en loi par rapport à la mesure μ.

Ce comportement asymptotique des solutions perturbées diffère nettement de celles obtenues lorsque $F(.,.)$ se décompose pour $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in M$ en

$$F(x,\omega) = f(x,\omega) + \overline{F}(x),$$

avec $f(x,.)$ centrée. En effet dans ce cas et sauf si $\overline{F}$ et nulle, $F(x,.)$ n'est jamais intégrable. On montre alors au chapitre 9 que la solution $x_t^\epsilon(x,.)$ de l'équation différentielle perturbée (6) converge lorsqu'on accélère la dynamique vers la solution moyennée $w_t(x)$, i.e la solution de l'équation

$$\frac{dw_t(x)}{dt} = \overline{F}(w_t(x)), \text{ et } w_0(x) = x. \tag{7}$$

Théorème 0.0.4. *Pour (M, T, μ) le gaz de Lorentz en temps discret, et une telle fonction F suivant quelques hypothèses de régularité, l'erreur*
$e_t^\epsilon(x,.) := x_t^\epsilon(x,.) - w_t(x)$ entre la solution perturbée $x_t^\epsilon(x,.)$ de (6) et la solution moyennée $w_t(x)$ de (7) se comporte de la manière suivante :

$$(\epsilon^{-3/4} e_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T]} \overset{\mathcal{L}_\mu,\|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}} (y_t)_{t\in[0,T]}, \tag{8}$$

où $\mathcal{L}_\mu$ désigne la convergence forte en loi pour la mesure μ et $(y_t(x,w))_{t\in[0,T]}$ est la solution au sens faible de l'équation différentielle

$$y_t(x,.) = B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)} + \int_0^t D\overline{F}(w_s(x)).y_s(x,.)ds, \tag{9}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et $(L'_s)_{s\geq 0}$ est le temps local d'un mou-

vement brownien $(B'_t)_{t\geq 0}$ *indépendant de* $(B)_{t\geq 0}$ *et où* $a : x \in \mathbb{R} \to a(x)$ *est une somme de "type" Green Kubo (voir [24]) :*

$$a(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu \left(f(x, T^{|l|}.) f(x, .) \right) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_M f(x, T^{|l|}.) f(x, .) d\mu.$$

La preuve de ce théorème s'articule autour d'un résultat important en soi, un théorème limite central sur des $\mathbb{Z}$-extensions de sommes de Birkhoff perturbées auquel le chapitre 10 est consacré et qui s'appuie et développe un travail de Pène et Thomine [32] montrant le théorème limite central pour des $\mathbb{Z}$-extensions lorsque l'observable f est constante sur les cellules :

Théorème 0.0.5. *Soit* $\epsilon_0 > 0$ *on se place sur le gaz de Lorentz en temps discret* (M, T, μ) *décrit comme une* $\mathbb{Z}$*-extension d'un système* $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ *de fonction de pas* $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$*. Soit* $f : \mathbb{R} \times \overline{M} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *vérifiant un certain nombre d'hypothèses de régularité et telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f(x, .)$ *soit centrée. Soit* $T > 0$*, on pose pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $t \in [0, T]$ *et* $\omega \in M$*,*

$$v_t^\epsilon(x, \omega) := \epsilon^{1/4} \int_0^{t/\epsilon} f(w_{\epsilon s}(x), T^{\lfloor s \rfloor}\omega) ds,$$

où $s \to w_s(x)$ *est une fonction Lipschitz, alors*

$$(v_t^\epsilon(x, .))_{t\in[0,T]} \overset{\mathcal{L}_\mu, \|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to 0}{\to}} \left(B_{\int_0^t a(w_s(x)) dL'_s(0)} \right)_{t\in[0,T]},$$

où $\mathcal{L}_\mu$ *désigne la convergence forte en loi pour* μ*,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *désigne un mouvement brownien standard,* $(L'_s)_{s\geq 0}$ *est le temps local d'un mouvement brownien* $(B'_t)_{t\geq 0}$ *indépendant de* $(B_t)_{t\geq 0}$ *et* $a(x) := \frac{1}{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu \left(f(x, .) f(x, T^{|l|}(.)) \right)$*.*

Enfin l'annexe est consacrée aux preuves des parties les plus techniques de certaines démonstrations et l'annexe B détaille les preuves de diverses propriétés du temps local d'un mouvement brownien unidimensionnel.

Chapitre 1

Outils et définitions générales.

Ce chapitre décrit dans une première partie des constructions formelles de systèmes dynamiques à partir d'un système de base que sont les $\mathbb{Z}$-extensions et les flots spéciaux. On y énonce certaines propriétés ergodiques qui peuvent être portés sur ces constructions à partir de celles connues sur le système sous-jacent et qui découlent entre autre des travaux de Conze et Schmidt [11],[38]. La deuxième partie rappelle les liens connus entre les propriétés ergodiques d'un système dynamique probabilisé et le spectre de l'opérateur de transfert. Dans la suite, les propriétés stochastiques d'observables de nombres de systèmes étudiés découlent du spectre d'un opérateur perturbé. Enfin les deux dernières parties présentent des notions probabilistes liées aux temps locaux dont un résultat de Guillotin-Plantard et Dombry [13], de métrique de Skorohod et présentent la notion de convergence forte en loi (dont les travaux de Zweimüller [47]).

Dans tout le manuscrit on considère deux types de systèmes dynamiques :
Les systèmes dynamiques (à temps) discrets qui sont la donnée d'un triplet (M, T, μ) tel que

- M est un espace métrique munit de la tribu Borélienne,
- la transformation $T : M \to M$ est une application mesurable
- μ est une mesure positive σ-finie qui est invariante (pour la transformation T) au sens où pour tout A mesurable, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

Les systèmes dynamiques (à temps) continu qui sont la donnée d'un triplet $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ tel que :

- $\mathcal{M}$ est un espace métrique munit d'une tribu borélienne,
- $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est un flot continu à un paramètre, i.e. une application continue φ telle que pour $x \in \mathcal{M}$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$,
- L est une mesure positive σ-finie et invariante dans le sens où pour tout A mesurable

et pour tout $t \geq 0$, $L(\varphi_{-t}(A)) = L(A)$.

1.1 Définitions préliminaires de systèmes et propriétés dynamiques

On donne ici quelques éléments de théorie ergodique ainsi qu'une description sommaire du modèle type de système dynamique étudié dans cette thèse. On commence par les notions de récurrence et d'ergodicité qui sont des propriétés qui se lisent sur les orbites d'un système dynamique.

Définition 1.1.1. *Un système dynamique mesuré (M, T, μ) est dit récurrent si pour tout $A \subset M$ mesurable et pour μ presque tout (μ-p.t) $x \in A$, il existe $n(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^{n(x)}x \in A$. Cette notion peut se traduire de façon ensembliste : pour tout $A \subset M$ mesurable,*

$$\mu\left(A \backslash \bigcup_{n>0} T^{-n}A\right) = 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.2. *La notion de récurrence donnée par l'équation (1.1) est équivalente à la relation : pour tout $B \subset M$ mesurable tel que $\mu(B) > 0$, il existe $n_B \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\mu(B \cap T^{-n_B}B) > 0. \tag{1.2}$$

Cette relation est clairement impliquée par (1.1), et dans l'autre sens, l'ensemble $B := A \backslash \bigcup_{n>0} T^{-n}A$ ne vérifie par définition pas (1.2) donc est de mesure nulle. C'est cette caractérisation par la formule (1.2) qui sera employée dans les preuves de cette section. Enfin la définition passe naturellement aux systèmes de dynamiques continus, si $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ est un flot, le système est récurrent si pour A de mesure non nulle et L-p.t $x \in A$, il existe $t > 0$ arbitrairement grand tel que $\varphi_t(x) \in A$ et l'équation (1.1) devient

$$\mu\left(A \backslash \varphi_{]-\infty,0]}(A)\right) = 0.$$

Plusieurs notions d'ergodicité se côtoient dans la littérature pour les systèmes dynamiques en mesure infinie. On donne ici celle qui nous intéresse et sera employée dans tout le manuscrit :

Définition 1.1.3. *Un système dynamique mesuré (M, T, μ) est dit ergodique (ergodicité récurrente) si pour tout $B \subset M$ mesurable tel que $\mu(B) > 0$, pour μ-p.t $x \in M$, il existe*

$n(x) \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $T^{n(x)}x \in B$. *Autrement dit,*

$$\mu\left(M\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}B\right)\right) = 0. \tag{1.3}$$

Cette définition est aussi équivalente aux formulations suivantes :

(1) $\forall A, B \subset M$ mesurables de mesure non nulles, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu(T^{-n}B \cap A) > 0, \tag{1.4}$$

(2) Pour tout $A \subset M$ mesurable,

$$T^{-1}A \subset A \Rightarrow \mu(A) = 0 \ ou \ \mu({}^cA) = 0. \tag{1.5}$$

La première relation implique bien notre définition en posant pour B de mesure non nulle $A := M\backslash(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}B)$, A est nécessairement de mesure nulle car il ne vérifie pas par définition l'inégalité (1.4). L'autre implication est claire, (1.3) impliquant que les $T^{-n}B$ recouvrent tout l'espace.
Le deuxième point est une conséquence du précédent, en choisissant pour B vérifiant $T^{-1}B \subset B$, en choisissant $A := {}^cB$, ces deux ensembles ne vérifient pas (1.4) donc l'un des deux est de mesure nulle. Réciproquement, si on suppose (1.5) vrai, alors pour B de mesure non nulle, l'ensemble $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}B$ satisfait $T^{-1}A \subset A$ et son complémentaire est donc de mesure nulle (B étant de mesure non nulle $T^{-1}B$ non plus par invariance de μ par T).
L'ergodicité définie par la relation (1.3) est une notion plus contraignante que la définition alternative donnée parfois dans la littérature (voir chapitre 1.2 [2]) qui est la suivante :

$$T^{-1}A \overset{p.p}{=} A \Rightarrow \mu(A) = 0 \ ou \ \mu({}^cA) = 0, \tag{1.6}$$

où " $\overset{p.p}{=}$ " désigne une identification à un ensemble de mesure nulle près. En effet l'ergodicité donnée par la définition 1.1.3 implique que le système (M, T, μ) est récurrent ((1.4) implique (1.2)).Ce n'est pas le cas de la relation (1.6) :
Prenons un système dissipatif, par exemple le système $(\mathbb{Z}, \mathcal{D}, m)$ avec m la mesure de comptage et $\mathcal{D} : k \in \mathbb{Z} \mapsto k + 1$. $\mathcal{D}$ ne laisse invariant aucun ensemble et est donc ergodique au sens de la relation (1.6) mais comme toutes ses orbites partent à l'infini, il n'est pas récurrent.

Proposition 1.1.4. *La notion d'ergodicité donnée pour un système* (M, T, μ) *par la relation* (1.3) *est exactement équivalente à la relation* (1.6) *si et seulement si* (M, T, μ) *est*

récurrent.

Démonstration. En effet, si (M, T, μ) est récurrent, l'ensemble $M \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}B)$ apparaissant dans (1.3) est bien presque sûrement invariant au sens de (1.6) (car d'après la récurrence, $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}B$ à un ensemble de mesure nulle près). □

Dans la suite nous regarderons essentiellement des systèmes récurrents et les deux notions coincideront sans ambiguïté, pour le reste la notion d'ergodicité appliquée est celle de la définition.

Enfin la définition avec les orbites passe aussi au flot : $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ un système dynamique continu est dit ergodique si pour tout ensemble $A, B \subset \mathcal{M}$ de mesure non nulle, pour presque tout $x \in B$, il existe $t > 0$ tel que $\varphi_t(x) \in A$ et la relation (1.3) est substituée par

$$\mu\left(\mathcal{M}\setminus\varphi_{]-\infty,0]}(B)\right) = 0.$$

Définition 1.1.5. *Une $\mathbb{Z}$-extension d'un système dynamique probabilisé $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par la fonction de pas $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ est le système dynamique mesuré $(\overline{M} \times \mathbb{Z}, T, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mu} \otimes \delta_n)$ où la transformation T est définie par*

$$T(x, n) := (\overline{T}x, n + \phi(x)). \tag{1.7}$$

Remarque 1.1.6. *Un tel système (M, T, μ) induit l'existence d'une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur M via le générateur $\mathcal{D}$ satisfaisant*

$$T \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ T,$$

Où $\mathcal{D}$ correspond à l'application $(x, k) \to (x, k + 1)$ vue sur $\overline{M} \times \mathbb{Z}$. Quitte à identifier $\overline{M}$ et $\overline{M} \times \{0\}$, on suppose que $\overline{M} \subset M$, et la relation (1.7) devient

$$T(x) = \mathcal{D}^{\phi(x)}(\overline{T}(x)) \ \forall x \in \overline{M}.$$

La formule de Kac suivante permet de substituer l'étude d'un système dynamique ergodique récurrent par celle d'un système ergodique probabilisé.

Proposition 1.1.7 (formule de Kac)**.** *Soit (M, T, μ) un système dynamique ergodique et récurrent, et soit A un borélien de M tel que $0 < \mu(A) < \infty$. Le système (A, T_A, μ_A) où μ_A est la mesure conditionnelle $\mu_A(.) := \frac{\mu(.\cap A)}{\mu(A)}$ telle que $T_A := T^{\phi_A}$ avec $\phi_A : M \to \mathbb{N}^*$ définie pour $x \in M$ par $\phi_A(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}^*, T^n(x) \in A\}$, est alors un système dynamique probabilisé et ergodique.*

Démonstration. Soit $B \subset A$, alors

$$T_A^{-1}B = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big((\phi_A = n) \cap T^{-n}B\Big)$$

avec $(\phi_A = n) \cap T^{-n}B = (T^{-n}B \cap A) \cap \bigcap_{1\leq k\leq n-1} T^{-k}({}^cA)$ qui est bien mesurable et

$$\begin{aligned}\mu_A(T_A^{-1}B) &= \mu_A\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big((\phi_A = n) \cap T^{-n}B\Big)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(A)} \sum_{n\leq N} \mu(A \cap (\phi_A = n) \cap T^{-n}B) \end{aligned} \tag{1.8}$$

en remarquant que $(\phi_A \leq n) = T^{-1}(\phi_A \leq n-1) \cup T^{-1}(A \cap (\phi_A > n))$, puis, comme $B \subset A$, que

$$\begin{aligned}(\phi_A \leq n) \cap T^{-n-1}B &= T^{-1}\Big((\phi_A \leq n-1) \cap T^{-n}B\Big) \cup T^{-1}\Big((A \cap (\phi_A > n-1)) \cap T^{-n}B\Big) \\ &= T^{-1}\Big((\phi_A \leq n-1) \cap T^{-n}B\Big) \cup T^{-1}\Big((A \cap (\phi_A = n)) \cap T^{-n}B\Big).\end{aligned}$$

L'union étant disjointe, en réintroduisant le terme dans (1.8), et par T-invariance de μ,

$$\begin{aligned}\mu_A(T_A^{-1}B) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(A)} \sum_{n\leq N} \mu((\phi_A \leq n) \cap T^{-n-1}B) - \mu\Big((\phi_A \leq n-1) \cap T^{-n}B\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(A)} \Big(\mu(\phi_A \leq N) \cap T^{-N-1}B) - \mu((\phi_A \leq 0) \cap T^{-1}B)\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mu(A)} \Big(\mu(B) - \mu((\phi_A > N) \cap T^{-N-1}B)\Big). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Remarquons que

$$\mu_A(T_A^{-1}B) = \frac{1}{\mu(A)} \Big(\mu(B) - \lim \mu((\phi_A > N) \cap T^{-N-1}B)\Big) \leq \mu_A(B),$$

et en appliquant cette inégalité à un ensemble de la forme $A\backslash B$,

$$\mu_A(T_A^{-1}B) = \mu_A(A) - \mu_A(T_A^{-1}(A\backslash B)) \geq \mu_A(A) - \mu_A(A\backslash B) = \mu_A(B).$$

L'ergodicité du nouveau système découle de celle de (M, μ, T) et de sa récurrence, il suffit de remarquer que pour $B \subset A$ tel que $\mu(B) \neq 0$, l'ergodicité (et la récurrence) impose

$\bigcup_n T^{-n}B = M$ p.p d'où

$$1 = \mu_A\left(A \cap \left(\bigcup_n T^{-n}B\right)\right) = \mu_A\left(A \cap \left(\bigcup_n T_A^{-k}B\right)\right).$$

□

Le système (M, T, μ) peut alors être vu comme une tour au dessus du système (A, T_A, μ_A) par l'application ϕ_A où $x \in M$ est repéré par des coordonnées $x := (x_A, i)$ qui correspondent à $x := T^i(x_A)$. Lorsque (M, T, μ) est un système dynamique probabilisé, il en découle le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.8. *Soit (M, T, μ) un système dynamique ergodique probabilisé. Alors pour tout ensemble mesurable A tel que $\mu(A) \neq 0$, alors*

$$\int_A \phi_A d\mu = 1$$

où $\phi_A(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}^*, T^n(x) \in A\}$.

Démonstration. Le système étant ergodique et récurrent,

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\phi_A = n)\right).$$

Or

$$T^{-1}(\phi_A \geq n) = T^{-1}((\phi_A \geq n) \cap A) \cup (\phi_A \geq n+1)$$

où l'union est disjointe donc

$$\mu(\phi_A \geq n) = \mu(\phi_A \circ T \geq n) = \mu((\phi_A \geq n) \cap A) + \mu(\phi_A \geq n+1).$$

Comme $\mu(\phi_A = n) = \mu(\phi_A \geq n) - \mu(\phi_A \geq n+1) = \mu((\phi_A \geq n) \cap A)$, on en déduit

$$1 = \mu(M) = \sum_{n\geq 1} \mu((\phi_A \geq n) \cap A) = \int_A \phi_A d\mu.$$

□

En mesure infinie, la formule de Kac nécessitant en particulier que le système soit récurrent pour être appliqué, on donne ici un critère de récurrence sur les $\mathbb{Z}$-extensions donné par Schmidt dans [38].

Proposition 1.1.9. *On se donne une $\mathbb{Z}$-extension (M,T,μ) d'un système dynamique ergodique $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ tel que la fonction (dite fonction de pas) ϕ soit finie presque sûrement et vérifie*

$$\frac{1}{n}S_n\phi \to 0$$

ou plus simplement $\int \phi d\overline{\mu} = 0$. Alors (M,T,μ) est un système dynamique récurrent.

A partir d'un système (M,T,μ) et d'une "fonction plafond" τ, on peut construire un système continu $(M_\tau,\varphi_t,\lambda')$ appelé flot de suspension.

Définition 1.1.10. *Etant donné un système dynamique (M,T,μ) et une fonction de suspension $\tau : M \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable, un flot special sur (M,T,μ) est le système $(M_\tau,\varphi_t,\lambda')$ où*

- *$M_\tau := \{(x,s), x \in M, 0 \leq s \leq \tau(x)\}$*
- *pour tout $(x,s) \in M_\tau$, $\varphi_t(x,s) := (T^{n_{t+s}(x)}, t+s-\sum_{k=0}^{n_{t+s}-1}\tau\circ T^k(x))$ avec $n_t(x) := \sup\{n, \sum_{k=0}^{n-1}\tau\circ T^k(x) \leq t\}$*
- *$d\lambda'(x,s) = d\mu(x)ds$ pour $(x,s) \in M_\tau$ est une mesure $(\varphi_t)_t$-invariante.*

Remarque 1.1.11. *Là encore, M peut-être identifié avec $M \times \{0\} \subset M_\tau$.*

Proposition 1.1.12. *De plus, le système (M,T,μ) est ergodique si et seulement si le flot de suspension $(M_\tau,\phi_t,\mu\otimes\lambda)$ est ergodique*

Démonstration. A est un ensemble de mesure non nulle sur M ssi
$B := \{(x,s), x \in A, s \in [0,\tau(x)[\}$ est de mesure non nulle dans M_τ. En remarquant que $T^{-1}(A) \subset A$ si et seulement si $\phi_{-t}(B) \subset B$ pour tout t, on en déduit la condition nécessaire. Pour l'autre sens, si $B \subset M_\tau$ est mesurable de mesure non nulle tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\phi_{-t}B \subset B$, alors $A := \{x \in M : \exists s \in [0,\tau(x)), (x,s) \in B\}$ est de μ-mesure positive et vérifie $T^{-1}A \subset A$. □

Le résultat ne tient pas pour le mélange, si on choisit un système (M,T,μ) mélangeant et une fonction plafond $\tau := 1$, le projection du flot de suspension
$(M_\tau,\phi_t,\mu\otimes\lambda)$ selon la deuxième coordonnée donne une translation du tore $(\mathcal{M},\varphi_t,\lambda)$ qui est alors un facteur non mélangeant.

1.2 Opérateur de transfert et systèmes hyperboliques.

On rappelle la notion d'opérateur de transfert ainsi que certaines propriétés ergodiques qu'on peut lire dans son spectre (on pourra voir [2] notamment).

Définition 1.2.1 (opérateur de transfert)**.** *Soit $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ un système dynamique probabilisé, on note P l'opérateur de transfert sur $L^p(\overline{M})$ pour $p \in]1, \infty]$ comme le dual de l'opérateur de Koopman $f \mapsto f \circ \overline{T}$ sur $L^q(\overline{M})$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pf peut aussi être définit pour $f \in L^1(\overline{M})$ comme la dérivée $\frac{d(T*\nu_f)}{d\mu}$ de Radon-Nikodym (par rapport à μ) de la mesure image par T de la mesure $\nu_f := f d\mu$ (mesure de densité f par rapport à μ).*

Remarquons que P est un opérateur positif (si f est à valeurs réelles positives, alors Pf est à valeurs réelles positives) et vérifie pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$,

$$P(f \circ \overline{T} g) = gPf. \tag{1.10}$$

Certaines propriétés ergodiques se lisent directement sur le spectre de cet opérateur.

Proposition 1.2.2. *Soit $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ un système dynamique probabilisé, on note P son opérateur de transfert.*

(1) La mesure $\overline{\mu}$ est ergodique si et seulement si $1_{\overline{M}}$ est l'unique vecteur propre de P sur $L^1_{\overline{\mu}}$ pour la valeur propre 1. Si le système est ergodique, la valeur propre est simple.

(2) Si le système dynamique $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est mélangeant alors 1 est l'unique valeur propre de P sur $L^1_{\overline{\mu}}$ sur le disque unité et $1_{\overline{M}}$ en est l'unique vecteur propre. Si de plus il existe un espace de Banach $(B, \|.\|)$ stable par P, contenant $1_{\overline{M}}$, s'injectant continûment dans L^1 et tel que l'opérateur P admet un trou spectral sur B, i.e le spectre essentiel de P est contenu dans une boule de rayon $r < 1$ centrée en 0 (ici cela signifie que 1 est une valeur spectrale isolée) alors on dispose d'un mélange exponentiel : il existe $\alpha < 1$, tel que pour $f \in L^\infty$ et $g \in B$,

$$\left| \int f \circ T^n g d\overline{\mu} - \int f d\overline{\mu} \int g d\overline{\mu} \right| \leq C\alpha^n \|f\|_\infty \|g\|.$$

Démonstration. (1) Supposons que (M, T, μ) soit ergodique, soit $\rho \in L^1_{\overline{\mu}}$ tel que $P\rho = \rho$ et $A \subset \overline{M}$ un ensemble mesurable. D'après le théorème de Birkhoff et le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\overline{M}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A \circ \overline{T}^k \rho d\overline{\mu} \underset{n\to\infty}{\to} \overline{\mu}(A)$$

donc

$$\int_A \rho d\overline{\mu} = \int_A \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k \rho d\overline{\mu} \underset{n\to\infty}{\to} \overline{\mu}(A)$$

ce qui assure $\int_A \rho d\overline{\mu} = \overline{\mu}(A)$. $1_{\overline{M}}$ est donc l'unique vecteur propre de P pour 1.
Réciproquement, si $1_{\overline{M}}$ est le seul vecteur propre de P dans $L^1_{\overline{\mu}}$ associé à la valeur propre

1 alors, pour tout A mesurable tel que $T^{-1}A = A$ à un ensemble de $\overline{\mu}$-mesure nulle près, on a p.s :

$$P(1_A) = P(1_A \circ T) = 1_A,$$

donc $1_A = 1_{\overline{M}}$ ce qui prouve l'ergodicité.

(2) Si $e^{i\theta}$ est valeur propre de vecteur propre $f \in L^1$, alors

$$\int_{\overline{M}} f 1_{\{f\geq 0\}} \circ \overline{T}^n d\overline{\mu} = e^{in\theta} \int_{\overline{M}} f 1_{\{f\geq 0\}}\, d\overline{\mu}.$$

Ce dernier terme converge seulement si $\theta = 0\, mod\, \mathbb{Z}$.

Si P admet un trou spectral, alors quitte à choisir un contour contenant le spectre essentiel, P se décompose en une somme de deux opérateurs $P = \overline{\mu}(.)1_{\overline{M}} + N$ orthogonaux (vérifiant $(\overline{\mu}(.)1_{\overline{M}}) \circ N = N \circ (1_{\overline{M}}) = 0$). Leur spectre est donc complémentaire et le spectre sur le cercle unité n'étant composé que d'une valeur propre isolée, N vérifie $\rho(N) \leq r < 1$ (où $\rho(N)$ désigne le rayon spectral de N). Ainsi

$$\int_{\overline{M}} f \circ T^n g d\overline{\mu} = \int_{\overline{M}} f P^n g d\overline{\mu} = \int_{\overline{M}} f d\overline{\mu}\, \Pi(g) + O(\alpha^n).$$

□

La suite fait usage de décompositions similaires pour des opérateurs perturbés (i.e de la forme $P_u(.) := P(e^{iuX}.)$ pour une certaine variable aléatoire réelle X sur $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$).

1.3 Convergence forte en loi

La convergence forte en loi présentée ici est une notion de convergence en loi adaptée pour des systèmes en mesure infinie. Elle est aussi intéressante en mesure finie où elle est alors plus contraignante que la convergence forte en loi.

Définition 1.3.1 (Convergence forte en loi)**.** *Soit (M, Π, μ) un système mesuré fini ou σ-fini. Une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement en loi (ou converge fortement en loi) vers R (qui n'est pas définie sur le même espace mais à valeurs dans le même espace métrique) si pour toute mesure de probabilité $P \ll \mu$ (absolument continue par rapport à μ), R_n converge en loi pour P vers R.*

Remarque 1.3.2. *Pour vérifier la propriété de convergence forte en loi, il suffit de vérifier la convergence en loi des R_n pour chaque*

$$\mu|E := \mu(. \cap E)/\mu(E)$$

pour tout E mesurable tel que $\mu(E) < \infty$

Remarque 1.3.3. *La convergence forte en loi est une notion plus forte que la convergence en loi pour une mesure finie.*
En effet, si on choisit X une loi de Rademacher centrée (i.e $\overline{\mu}(X = 1) = \overline{\mu}(X = -1) = \frac{1}{2}$) définie sur un espace probabilisé $(\overline{M}, \overline{\mu})$. Alors la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n := (-1)^n X$ converge en loi $\overline{\mu}$ vers une variable aléatoire de Rademacher centrée. Cependant, elle ne converge pas en loi pour la mesure de proba $\nu(.) := \overline{\mu}(.|X > 0)$.

Le théorème suivant de Zweimüller dans [47] donne un critère ramenant la convergence forte en loi à la convergence en loi d'une mesure bien choisie.

Théorème 1.3.4 (Zweimüller)**.** *Pour (M, T, μ) un système dynamique ergodique σ-fini et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction mesurable à valeur dans l'espace métrique (E, d), on suppose que*

$$d(R_n, R_n \circ T) \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} 0$$

où $\xrightarrow{\mu}$ désigne la convergence en probabilité pour toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ absolument continue par rapport à μ. Alors R_n converge fortement en loi vers R ssi elle converge en loi pour une mesure de probabilité $\mathbb{P} \ll \mu$.

La majeure partie des systèmes étudiés dans le chapitre 2 et plus généralement dans cette thèse sont ergodiques (et conservatifs), on pourra donc se ramener dès que possible à un problème de convergence en loi standard et appliquer les techniques liées. On présente ici un critère d'évaluation de la convergence en loi d'une variable aléatoire par le calcul de ses moments, le critère de Carleman (voir [39]).

Proposition 1.3.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles admettant des moments de tous ordres tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n^k) = E(X^k),$$

et d'autre part la suite composée des termes $M_k := E(X^k)$ vérifie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{M_{2n}^{1/(2n)}} = \infty.$$

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

1.4 Convergence en loi, métrique M_1 et J_1 sur l'espace de Skohorod

On rappelle ici des résultats connus sur les espaces de Skorohod dotés respectivement des métriques M_1 et J_1, ces espaces sont plus amplement détaillés dans les livres [6] et [44].

Définition 1.4.1. *Pour $T > 0$, on peut munir l'espace $D([0,T])$ des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ càd-làg (continue à droite et admettant des limites à gauche) de la métrique J_1 définie par la distance d_J suivante : pour tous $x, y \in D([0,T])$,*

$$d_J(x,y) := \inf_{\lambda\in\Lambda}\{\|x\circ\lambda - y\|_\infty \vee \|\lambda - Id_{[0,T]}\|_\infty\},$$

où Λ est l'ensemble des homéomorphismes croissants sur $[0,T]$ tels que $\Lambda(0) = 0$ et $\Lambda(T) = T$.

Cette métrique est plus fine que la métrique M_1 que nous tâchons de définir ci-dessous :

Définition 1.4.2. *Pour $x \in D([0,T])$ on définit le graphe complet Γ_x de x par*

$$\Gamma_x := \{(\alpha x(t^-) + (1-\alpha)x(t), t), t \in [0,T], \alpha \in [0,1]\}.$$

On munit Γ_x d'une relation d'ordre en posant $(g,r) \leq (h,s)$ si et seulement si $r < s$ ou bien $r = s$ et

$$|x(r^-) - g| \leq |x(r^-) - h|.$$

On appelle alors représentation paramétrique de Γ_x, la donnée d'une application croissante et continue (g,r) de $[0,1]$ sur Γ_x. On note $\Pi(x)$ l'ensemble des représentations paramétriques de Γ_x.

On définit alors la métrique M_1 de la façon suivante.

Définition 1.4.3. *Pour $x_1, x_2 \in D([0,T])$, on définit la métrique M_1 comme la distance d_M construite à l'aide des représentations paramétriques :*

$$d_M(x_1,x_2) := \inf_{(g_i,r_i)\in\Pi(x_j),j\in\{1,2\}}\{\|g_1 - g_2\|_\infty \vee \|r_1 - r_2\|_\infty\}.$$

On rappelle ici le lemme 1 du chapitre 3 de [5].

Proposition 1.4.4. *Pour $x \in D([0,T])$ et $\epsilon > 0$, il existe une famille finie d'éléments $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ tels que*

$$w_x(t_0,\dots,t_n) := \sup_{0\le i\le n-1, t_i\le s\le t<t_{i+1}} |x(s)-x(t)|$$

vérifie

$$w_x(t_0,\dots,t_n)\le \epsilon.$$

Démonstration. On note τ le plus grand élément de $[0,T]$ tel qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ et une subdivision $0=t_0<\dots<t_n=\tau$ vérifiant

$$w_x(t_0,\dots,t_n)\le \epsilon.$$

Montrons dans un premier temps que $\tau := \sup(\{t, \exists n\in\mathbb{N}, t_0<\dots<t_n=t \text{t.q } w_x(t_0,\dots,t_n)\le \epsilon\})$ est atteint :
Soit $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,T]^{\mathbb{N}}$ qui croit vers τ, le processus $(x_t)_{t\ge 0}$ admettant une limite à gauche, il existe $x\in\mathbb{R}$ et $s>0$ tel que pour tout $s\le t\le\tau$,

$$|x(s)-x|\le \epsilon/2. \tag{1.11}$$

Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $T_N\ge t$, comme $T_i<\tau$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $t_0<\dots<t_n=T_N$ tel que $w_x(t_0,\dots,t_n)\le\epsilon$. La relation (1.11) permet de conclureque τ est atteint et $w_x(t_0,\dots,t_n,\tau)\le\epsilon$.
Comme x est continue à droite, $\tau>0$. Si on suppose $\tau<T$ alors quitte à ajouter un cran à la subdivision, la continuité à droite de $x(.)$ permettrait de prolonger la propriété sur un voisinage de τ ce qui contredit la maximalité, $\tau=T$.

□

Proposition 1.4.5. *L'espace $C^0([0,T])$ des fonctions continues à valeurs réelles est dense dans $D([0,T])$ pour la métrique M_1*

Démonstration. Soit $x\in D([0,T])$ et $\epsilon>0$; on choisit $0=t_0<\dots<t_n=1$ tels que

$$w_x(t_0,\dots,t_n)\le\epsilon.$$

On pose alors la fonction

$$\begin{aligned} x_n(t) := &\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)1_{[t_i,t_{i+1}-\frac{t_{i+1}-t_i}{n}[} \\ &+\sum_{i=0}^{n-1}\left(n\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}x(t_i)+\left(1-n\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\right)x(t_{i+1})\right)1_{[t_{i+1}-\frac{t_{i+1}-t_i}{n},t_{i+1}[}. \end{aligned}$$

Comme $x(.)$ et $x_n(.)$ sont à une distance inférieure à ϵ sur les intervalles $[t_i, t_{i+1} - \frac{t_{i+1}-t_i}{n}]$, on peut se contenter de les reparamétrer sur les intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ restant. On peut se donner des paramétrisations respectives de $x|_{[t_{i+1}-\frac{t_{i+1}-t_i}{n}, t_{i+1}]}$ et $x_n|_{[t_{i+1}-\frac{t_{i+1}-t_i}{n}, t_{i+1}]}$. Choisissons une paramétrisation (u, r) quelconque de
$\{(u,s) \in \Gamma_x, (x(t_{i+1} - \frac{t_{i+1}-t_i}{n}), t_{i+1} - \frac{t_{i+1}-t_i}{n}) \leq (u,s) \leq (x(t_{i+1}), t_{i+1})\}$.

On construit ensuite la paramétrisation (u_n, r_n) de $\{(u,s) \in \Gamma_{x_n} : t_{i+1} - \frac{t_{i+1}-t_i}{n} \leq s \leq t_{i+1}\}$ de la forme : $u_n(t) = x_n(r_n(t))$ telle que

— si $|x(t_{i+1}) - x(t_i)| \geq \epsilon$, $u_n(t) = u(t)$ dès que $|u(t) - x(t_i)| \geq \epsilon$ (ce qui impose la valeur de $r_n(t)$) et r_n est affine sur $\{t : |u(t) - x(t_i)| < \epsilon\}$.

— si $|x(t_{i+1}) - x(t_i)| \leq \epsilon$, on prend $r_n(t) = r(t)$.

Dans tous les cas on a :

$$\|r_n - r\|_\infty < \frac{T}{n} \text{ et } \|u_n - u\|_\infty < \epsilon.$$

Donc $d_{M_1}(x_n, x) \leq min(\frac{T}{n}, \epsilon)$. On vient de construire une suite $(u_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de paramétrisations aussi proche que souhaitée de (u, r) pour la métrique M_1. □

Lemme 1.4.6. *Si $((\nu_n^0(t))_{t\in[0,T]})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus croissants et continus sur $[0,T]$ qui converge pour les lois finies dimensionnelles vers un processus X continu sur $[0,T]$, alors la convergence se fait aussi en loi au sens des processus sur $(C^0([0,T],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

Démonstration. Les processus $(\nu_n^0(t))_{t\in[0,T]}$ étant croissants, ceux-ci vérifient le critère de Skorohod (voir les théorèmes 3.1 et 3.2 [42]) pour la métrique M_1,

$$w_{\delta,H}(\nu_n^0) = 0$$

où

$$w_{\delta,H}(Z) = \sup_{0<t_1<t<t_2<1, |t_1-t_2|\leq\delta} M(Z(t_1), Z(t), Z(t_2)).$$

Avec M désignant la fonction d'oscillations

$$M(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 0 \textit{ si } x_2 \in [x_1, x_3] \\ \min(|x_1 - x_2|, |x_3 - x_2|) \textit{ sinon} \end{cases}$$

La suite de processus $(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Skorohod et converge au sens des lois finies dimensionnelles vers X, d'après les théorèmes 3.1 et 3.2 de [42] elle converge donc en loi vers X pour la métrique M_1 (voir chap 12 [44]).
Soit f une application uniformément continue et bornée sur l'espace $C^0([0,T],\mathbb{R})$ (i.e,

l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie) et à valeur réelle.La topologie induite par M_1 est équivalente à la topologie induite par la norme infinie, f est encore continue sur cet espace pour la métrique M_1. L'espace $C^0([0,T])$ étant dense dans l'espace $D([0,T])$ pour la métrique M_1, f peut se prolonger de manière unique en une fonction continue bornée $\tilde{f}$ sur le complété de $D([0,T])$ pour la métrique M_1. La convergence en loi de la suite de processus continus $(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ vers X permet d'écrire

$$E_\mu(f(\nu_n^0)) = E_\mu(\tilde{f}(\nu_n^0)) \to E(\tilde{f}(X)) = E(f(X)).$$

$(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en loi vers X pour $\|.\|_\infty$.

□

On donne ici un critère de tension pour une famille de processus dans $D[0,T]$ issu du théorème 15.6 donné dans le livre de Billingsley [5] pour la métrique J_1.

Théorème 1.4.7. *Une suite de processus* $\left((X_t^n)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est tendue s'il existe* $\beta \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ *et une application croissante* $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ *telle que pour* $r \leq s \leq t$ *:*

$$E\left(|X_s^n - X_t^n|^{2\beta}|X_s^n - X_r^n|^{2\beta}\right) \leq (F(t) - F(r))^{2\alpha}.$$

1.5 Temps local

Le temps local associé à un processus à temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ est une notion courante en probabilité et calcul stochastique traduisant la densité du nombre de passages d'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ dans un petit voisinage d'un point considéré. On pourra voir le livre de Le Gall [15] pour une description détaillée de ses propriétés, on en donne ici une caractérisation usitée ainsi que les propriétés essentielles qui apparaîtront au cours des chapitres suivants.

Définition 1.5.1. *Le temps local* $(L_t(.))_{t\geq 0}$ *associé à un mouvement Brownien unidimensionnel* $(B_t)_{t\geq 0}$ *peut être donné par le processus suivant, qui à un élément* $a \in \mathbb{R}$ *associe*

$$L_t(a) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{\{a-\epsilon\leq B_s\leq a+\epsilon\}} ds.$$

Autrement dit, $L_t(.)$ *est la densité de la mesure image de la mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$ *par* $s \to B_s$.

Proposition 1.5.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires* L^2 *i.i.d de variance* Σ *tel que le groupe engendré par* $\{a-b, \mathbb{P}(X_1 = a)\mathbb{P}(X_1 = b) > 0\}$ *soit* $\mathbb{Z}$. *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décrit par* $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_i$. *Alors en notant*

$N_n := \sum_{i=0}^{n-1} 1_{\{S_i=0\}}$ son temps local en zéro, $\left(\frac{N_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0}$ converge en loi au sens des lois finies dimensionnelles vers $(L_t)_{t\geq 0}$: Pour tout $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+$, $\left(\frac{N_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{\lfloor nt_k \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers $(L_{t_1}, \dots, L_{t_k})$.

Proposition 1.5.3. *Pour $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, le temps local $(L_t(.))_{t\geq 0}$ associé à un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ de variance Σ vérifie pour tout $0 \leq s \leq t$,*

$$(L_{\alpha t}(a) - L_{\alpha s}(a))_{t\geq 0} = \alpha(L'_t(a) - L'_s(a))_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\alpha^{1/2}\left(L_t(\frac{a}{\alpha^{1/2}}) - L_s(\frac{a}{\alpha^{1/2}})\right)\right)_{t\geq 0},$$

où $\overset{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi et L'_t est le temps local du mouvement brownien $(B'_t = B_{\alpha t})_{t\geq 0}$ de variance $\alpha\Sigma$.

Démonstration. Via un changement de variable dans la définition du temps local,

$$\begin{aligned}
(L_{\alpha t}(a) - L_{\alpha s}(a))_{t\geq 0} &= \left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_{\alpha s}^{\alpha t} 1_{\{a-\epsilon\leq B_u\leq a+\epsilon\}} du\right)_{t\geq 0} \\
&= \left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\alpha}{2\epsilon}\int_{s}^{t} 1_{\{a-\epsilon\leq B_{\alpha u}\leq a+\epsilon\}} du\right)_{t\geq 0} \qquad (1.12)\\
&= \left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\alpha^{1/2}}{2\epsilon}\int_{s}^{t} 1_{\{\frac{a}{\alpha^{1/2}}-\epsilon\leq \tilde{B}_u\leq \frac{a}{\alpha^{1/2}}+\epsilon\}} du\right)_{t\geq 0} \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \left(\alpha^{1/2}\left(L_t(\frac{a}{\alpha^{1/2}}) - L_s(\frac{a}{\alpha^{1/2}})\right)\right)_{t\geq 0},
\end{aligned}$$

avec $\left(\tilde{B}_t = \frac{B_{\alpha t}}{\alpha^{1/2}}\right)_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_t)_{t\geq 0}$. En remarquant que (1.12) montre la première égalité, la proposition est démontrée. □

On donne ici quelques propriétés élémentaires sur les moments du temps local évalué en 0 qui permettent à l'aide du critère de Carleman (proposition 1.3.5) de l'identifier sur des processus. Les deux propositions qui suivent sont démontrées dans l'annexe B.

Proposition 1.5.4. *Soit $(L_s)_{s\geq 0}$ le temps local d'un mouvement brownien B de variance Σ. On fixe des réels $e_1, \dots, e_N$ et $s_1 < \dots < s_N$ tels que $s_i + e_i \leq s_{i+1}$ et $0 < e_i$ pour tout i. Pour tout $M > 0$, $n_1, \dots, n_j \in \mathbb{N}$,*

$$E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(L_{s_j+e_j}-L_{s_j}\right)^{n_j}(0)\right)$$
$$=\int_{\boldsymbol{u}\in E}\prod_{j=1}^{M}\left(n_j!\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(u_i^j-u_{i-1}^j)^{1/2}}\right)du_1^j\dots du_{n_j}^j$$

avec $E:=\{u=(u_i^j)_{j=1,\dots,p,i=1,\dots,n_j}:s_j\le u_i^j<\dots<u_{n_j}^j<s_j+e_j\}$ *et avec la convention* $k_0^j=k_{n_{j-1}}^{j-1}$ *et la convention* $u_0^j=u_{n_{j-1}}^{j-1}$ *et* $u_0^0=0$.

En particulier, les moments du temps local en 0 vérifient le critère de Carleman.

Corollaire 1.5.5. *Etant donné des coefficients* $\alpha_1,\dots,\alpha_M\in\mathbb{R}$, *et* $0\le t_1<\dots<t_M\le T$, *les moments de* $\sum_{j=1}^M\alpha_jL_{t_j}$ *vérifient le critère de Carleman (proposition 1.3.5) : en posant* $M_k:=E\left(\left(\sum_{j=1}^M\alpha_jL_{t_j}\right)^k\right)$, M_k *satisfait*

$$M_k^{1/k}=O(k)\ \textit{et ainsi}\ \sum_{k\ge1}\frac{1}{M_{2k}^{1/(2k)}}=\infty.$$

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé, et la croissance du temps local en $t\in\mathbb{R}_+$ et de la proposition 1.5.4,

$$\begin{aligned}\left|E\left(\left(\sum_{j=1}^M\alpha_jL_{t_j}\right)^k\right)\right|&\le E\left(\left(\sum_{j=1}^M|\alpha_j|\right)^kL_T^k\right)\\&\le\frac{(k)!}{2\pi\Sigma^k}\left(\int_0^T\frac{du}{\sqrt{u}}\right)^k\\&\le C^k(k!).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k\ge1}\frac{1}{M_{2k}^{1/(2k)}}\ge\frac{1}{C}\sum_{m\ge1}\frac{1}{((2k)!)^{1/(2k)}}.$$

Or la formule de Stirling donne $(2k)!=O\left(\frac{(2k)^{2k+1}}{e^{2k}}\right)$ et ainsi $((2k)!)^{\frac{1}{2k}}=O\left((2k)^{1+\frac{1}{2k}}\right)=O(k)$ qui donne le terme général d'une série divergente.

□

On peut en déduire avec la proposition suivante une description d'une partie du "bassin d'attraction" du temps local du mouvement brownien standard. La preuve est donnée en

annexe B à l'aide de la proposition 1.5.2

Proposition 1.5.6. *Soit $(L_t)_{t\geq 0}$ le temps local d'un mouvement brownien de variance Σ. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur un espace probabilisé $(\overline{M}, P)$ vérifiant un théorème limite local au sens où pour tout $k_1 < \cdots < k_N$, en fixant $k_0 = 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i}=0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i-k_{i-1}}=0)\right) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1+\epsilon_i(k_1,\ldots,k_N)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k_i-k_{i-1}+1)^{1/2}}, \tag{1.13}$$

avec pour $1\leq i\leq N$, $|\epsilon_i(k_1,\ldots,k_N)|\leq \epsilon(k_i-k_{i-1})$ avec $\epsilon(.)$ une application réelle telle que $\lim_{t\to\infty}\epsilon(t)=0$.
Alors la famille de processus $\left(\left(\frac{1}{n^{1/2}}N_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ issue du temps local en 0, où N_n est défini par $N_n := \sum_{k=0}^{n-1}1_{\{S_k=0\}}$ converge en loi pour J_1 vers $(L_t)_{t\in[0,T]}$.

On rappelle ici une version adaptée de la proposition 2.1 de [13].

Proposition 1.5.7. *Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont on note $N_n(a) := \sum_{i=0}^{n-1}1_{\{S_i=a\}}$ le temps local. Si on suppose que*

(1) la suite de processus $\left(\left(\frac{1}{n^{1/2}}S_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi pour la métrique J_1 vers un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ de temps local $(L_t)_{t\geq 0}$,

(2) $\sup_{a\in\mathbb{Z}}\|n^{-1/2}N_n(a)\|_{L^2}<\infty$,

(3) $\limsup_{b\to 0}\lim_{n\to\infty}\|n^{-1/2}N_n(\lfloor n^{1/2}a\rfloor)-n^{-1/2}N_n(\lfloor n^{1/2}(a+b)\rfloor)\|_{L^2}=0$,

alors la suite de processus $\left(\left(n^{-1/2}N_{\lfloor nt\rfloor}(\lfloor .n^{1/2}\rfloor)\right)_{t\geq 0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des lois finies dimensionnelles sur l'espace métrique $(L^2,\|.\|_2)$ vers $(L_t(.))_{t\geq 0}$ le temps local du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.

Chapitre 2

Exemples de systèmes chaotiques étudiés.

Dans ce chapitre on présente des exemples de systèmes dynamiques qui seront traités dans la suite ainsi que leurs propriétés ergodiques. Le premier est le système probabilisé du sous-shift de type fini qui permet de coder et d'étudier les propriétés ergodiques de systèmes plus complexes tels que les flots géodésiques sur des surfaces hyperboliques compactes. On présente aussi les $\mathbb{Z}$-extensions périodiques que sont le gaz de Lorentz et le flot géodésique d'un Z-revêtement d'une surface hyperbolique. Dans chaque cas on détaille des propriétés ergodiques, et notamment, pour une bonne observable ϕ, un théorème limite local pour sa somme de Birkhoff issu des travaux de Szász et Varjú [43] et adaptés, selon le système dynamique considéré, des travaux par Pène, Saussol [31] et Yassine [45].

2.1 Sous-shift de type fini.

Définition 2.1.1. *Un sous-shift de type fini $(\mathbf{\Sigma}, \sigma)$ est la donnée de*

$$\mathbf{\Sigma} := \{(w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, M(w_i, w_{i+1}) = 1\}$$

où $\mathcal{A}$ est un alphabet fini et M est une application sur $\mathcal{A}^2$ à valeurs dans $\{0,1\}$ et d'un opérateur de décalage

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{\Sigma} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \to & (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

On définit aussi le sous-shift unilatère $(\mathbf{\Sigma}_+, \sigma_+)$ par projections sur les coordonnées

positives :

$$\mathbf{\Sigma}_+ := \{(w_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{\Sigma}\},$$

et

$$\sigma_+((w_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (w_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

On note aussi $\pi : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}_+$ *l'application définie par* $\pi((w_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.1.2. *[7] Lorsque la matrice* M^n *est à coefficients strictement positifs à partir d'un certain rang* n*, alors* $\mathbf{\Sigma}$ *(et* $\mathbf{\Sigma}_+$*) est topologiquement mélangeant.*

On peut munir $\mathbf{\Sigma}$ (resp. $\mathbf{\Sigma}_+$) d'une distance d (resp. d_+) entre deux éléments $x := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $y := (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui coïncide avec avec la topologie produit :

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}}\delta(x_k, y_k) \text{ et } d_+(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}\delta(x_k, y_k),$$

où $\delta(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon. Cette distance donne par projection une distance d_+ sur $\mathbf{\Sigma}_+$. Le sous-shift est alors compact pour cette distance et on note pour $\eta > 0$ fixé, $H(\mathbf{\Sigma}_+)$ l'ensemble des fonctions η-Höldériennes à valeurs complexes pour cette distance, on munit $H(\mathbf{\Sigma}_+)$ de la norme $\|.\|$ höldérienne usuelle définie pour $\phi \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$ par

$$\|\phi\| := \|\phi\|_\infty + [\phi],$$

où $[\phi] := \sup\{\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{d_+(x,y)^\eta}, x, y \in \mathbf{\Sigma}_+\}$. On introduit les cylindres

$$C^m_{+,[a_0,\ldots,a_n]} := \{w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{\Sigma}_+, \forall i = 0,\ldots,m,\ w_{m+i} = a_i\}$$

(resp $C^m_{[a_0,\ldots,a_n]} := \{w = (w_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{\Sigma},\ \forall i = 0,\ldots,m,\ w_{m+i} = a_i\}$).
Les indicatrices des cylindres $C^m_{+,[a_0,\ldots,a_n]}$ sont dans $H(\mathbf{\Sigma}_+)$. On notera, pour $k > l \in \mathbb{Z}$, C^k_l (resp $C^k_{+,l}$) l'ensemble des cylindres $C^l_{[a_0,\ldots,a_{k-l}]}$ (resp $C^l_{+,[a_0,\ldots,a_{k-l}]}$) pour tout $a_0,\ldots,a_{k-l}$ tels que $M(a_i,a_{i+1}) = 1$.

Dans la suite on introduit l'opérateur de transfert P pour une mesure de Gibbs ainsi qui dispose, via le théorème de Ionesco-Tulcea-Marinescu présentée dans [17], d'un trou spectral :

Proposition 2.1.3. *Pour un sous-shift de type fini* $(\mathbf{\Sigma}_+, \mathbf{\Sigma}_+, \nu_+)$ *où* ν_+ *est une mesure de Gibbs de potentiel* $h \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$*, on note* P *l'opérateur adjoint de* $f \in H(\mathbf{\Sigma}_+) \to f \circ \sigma$ *dans* $H(\mathbf{\Sigma}_+)$ *pour la mesure* ν*. Cet opérateur se décompose en*

$$P = \Pi_0 + N_0,$$

Dans $H(\mathbf{\Sigma}_+)$, *où* $\Pi_0 = E_{\nu_+}(.)1_{\mathbf{\Sigma}_+}$ *avec* $\Pi_0 \circ N_0 = N_0 \circ \Pi_0 = 0$. *En particulier,* $\overline{H}^{L^1} = L^1_\mu$, $\|f\| \geq \|f\|_{L^1}$ *et* $\rho(N_0) < 1$.

L'opérateur de transfert P s'écrit de la façon suivante, pour $f \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$ et $x \in \mathbf{\Sigma}_+$,

$$(Pf)(x) := \sum_{w \in \sigma^{-1}(x)} e^{h(w)} f(w). \tag{2.1}$$

Soit $\Psi_+ \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$, tel que $\int \Psi_+ d\nu = 0$ et $\Sigma := \lim_{n\to\infty} n^{-1/2} E(|S_n\Psi_+|^2)$ existe avec $S_n\Psi_+ = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_+ \circ \sigma_+^k$. On note aussi P_u l'opérateur sur $H(\mathbf{\Sigma}_+)$ donné par :

$$P_u(f) := P(e^{iu\Psi_+} f)$$

pour tout $f \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$. on obtient l'identité $P_u^n(f) = P(e^{iuS_n\Psi_+} f)$.

La méthode de Nagaev-Guivarc'h [17] étendue par Hennion et Hervé [20] permet d'établir le théorème de perturbation suivant.

Proposition 2.1.4. *Il existe* $\beta_0 > 0$ *tel que pour tout* $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$ *il existe* $\alpha \in]0,1[$, $C > 0$ *tel que pour tout* $f \in H(\mathbf{\Sigma}_+)$ *et tout* $u \in [-\beta, \beta]$ *:*

$$P_u^n(f) = \lambda_u^n \Pi_u(f) + N_u^n(f),$$

où :

1) $\lambda_. \in C^\infty([-\beta,\beta], \mathbb{R})$ *vérifie* $\lambda_u = 1 - \Sigma\frac{u^2}{2} + O(u^3)$,
2) $u \to \Pi_u \in C^\infty([-\beta,\beta], L(H(\mathbf{\Sigma}_+)))$ *vérifie* $\Pi_0(.) = E_\nu(.)$, *de plus pour tout* $u \in [-\beta,\beta]$, Π_u *est un projecteur donc vérifie* $\Pi_u^n = \Pi_u$.
3) $N_u \in L(H(\mathbf{\Sigma}_+))$ *vérifie* $\|N_u^n\| \leq C\alpha^n$.
4) *Pour tout* u *tel que* $\pi \geq |u| \geq \beta$, $\|P_u^n\| \leq C\alpha^n$.

Théorème 2.1.5. *[45]*

Soit $\varphi \in H(\mathbf{\Sigma})$ *constante sur les cylindres de* C_0^1, *telle que* $\Sigma > 0$, *on note* $S_n\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \sigma^k$. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et tout élément* A *(resp* B*) union de cylindres dans* C_{-k}^k *(resp* C_{-k}^∞*) , on a pour* $n > 2k$ *et* $N \in \mathbb{R}$,

$$\left| \nu(A \cap (S_n\phi = N) \cap \sigma^{-n}(B)) - \frac{e^{-\frac{N^2}{(2\Sigma)(n-2k)}}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(n-2k)^{1/2}} \nu(A)\nu(B) \right| \leq C\frac{k\nu(B)}{n-2k}.$$

Pour montrer cela, on s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 2.1.6. *Pour $q \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout cylindre $A \in C^{2q}_{+,0}$,*

$$\sup_{u\in[-\pi,\pi]} \|P^q_u(P^q(1_A))\| \leq C\nu_+(A).$$

Démonstration. Soit $u \in [-\pi, \pi]$, on considère $\|P^q_u(P^q(1_A))\|_\infty$, comme $P|f| \geq |Pf|$, il suffit de considérer $\|P^{2q}(1_A)\|_\infty$. Il suffit donc de montrer que $\|P^{2q}(1_A)\|_\infty \leq C\nu_+(A)$ pour q en général et $A \in C^{2q}_{+,0}$.
D'après (2.1),

$$(P^{2q}1_A)(y) := \sum_{w\in\sigma^{-2q}(y)} e^{S^+_{2q}h(w)}1_A(w) = e^{S^+_{2q}h(w_y)}1_{\sigma^{2q}(A)}(y), \tag{2.2}$$

où w_y désigne l'élément $w \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $w \in A \cap \sigma^{-2q}(\{y\})$ qui est réduit à un singleton. Et $S^+_{2q}h := \sum_{k=0}^{2q-1} h \circ \sigma^k_+$.

Pour $x, y \in \mathbf{\Sigma}_+$, comme h est η-hölderienne pour la distance d_+, on a

$$\begin{aligned} d(S^+_{2q}h(w_x), S^+_{2q}h(w_y)) &\leq \sum_{k=0}^{2q-1} d(h\circ\sigma^k(w_x), h\circ\sigma^k(w_y)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{2q-1} [h]\left(\frac{1}{2}\right)^{\eta(2q-k)} d^\eta(x,y) \\ &\leq \frac{2^\eta}{2^\eta-1}[h]d^\eta(x,y). \end{aligned}$$

On en déduit, pour $x, y \in \mathbf{\Sigma}_+$,

$$e^{-\frac{2^\eta}{2^\eta-1}[h]K^\eta}e^{S^+_{2q}h(w_y)} \leq e^{S^+_{2q}h(w_x)} \leq e^{\frac{2^\eta}{2^\eta-1}[h]K^\eta}e^{S^+_{2q}h(w_y)}$$

où K représente le diamètre du compact $\mathbf{\Sigma}_+$.
Comme $E_{\nu_+}(P^{2q}1_A) = \nu_+(A)$, à l'aide de l'inéquation ci-dessus et de la formule 2.2, on a pour $y \in \mathbf{\Sigma}_+$:

$$\int_{\mathbf{\Sigma}_+} e^{-\frac{2^\eta}{2^\eta-1}[h]K^\eta}e^{S^+_{2q}h(w_y)}1_{\sigma^{2q}_+(A)}(x)\nu_+(dx) \leq \nu_+(A) \leq \int_{\mathbf{\Sigma}_+} e^{\frac{2^\eta}{2^\eta-1}[h]K^\eta}e^{S^+_{2q}h(w_y)}1_{\sigma^{2q}_+(A)}(x)\nu_+(dx)$$

qui se traduit par

$$e^{S^+_{2q}h(w_y)} \leq e^{2^\eta CK^\eta}\frac{\nu_+(A)}{\nu_+(\sigma^{2q}_+(A))}. \tag{2.3}$$

Soit $A = C^0_{+,[x_0,\ldots,x_{2q}]}$ et soit x_{2q+1} tel que $C^0_{+,[x_0,\ldots,x_{2q+1}]} \in A$ et $\nu_+(C^0_{x_0,\ldots,x_{2q}})$. Ainsi

$C^0_{+,[x_{2q+1}]} \subset \sigma_+^{2q}(A)$ puis

$$\nu_+(\sigma_+^{2q}(A)) \geq \nu_+(\sigma_+(C^0_{+,[x_{2q}]})) \geq \inf_{a\in S,\nu_+(C^1_a)>0} \nu_+(C^1_a) =: C_0.$$

le membre de droite formant une borne inférieure uniforme, on en déduit $\frac{\nu_+(A)}{\nu_+(\sigma_+^{2q}(A))} \leq \frac{\nu_+(A)}{C_0}$. On en déduit que pour tout $2q$-cylindre A, pour tout $y \in \sigma_+^{2q}A$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$.
On déduit de ceci et de (2.3) une majoration de $e^{S^+_{2q}h(w_y)}$ qui donne avec (2.2)

$$\|P^{2q}(1_A)\|_\infty \leq C\nu_+(A)$$

pour $A \in C^{2q}_{+,0}$, et ainsi $\|P^q_u(P^q(1_A))\|_\infty \leq C\nu_+(A)$ pour tout $A \in C^{2q}_{+,0}$.

Il reste à majorer $[P^q_u(P^q(1_A))]$:

toujours d'après (2.1),

$$P^q_u(P^q(1_A))(y) = \sum_{w\in\sigma_+^{-2q}(y)} e^{S^+_{2q}h(w)}e^{iuS_q\Psi(w)}1_A(w) = e^{S^+_{2q}h(w_y)}e^{iuS^+_q\Psi_+(w_y)}1_{\sigma_+^{2q}A}(y).$$

où w_y est le mot contenu dans $A \cap \sigma_+^{-2q}(\{y\})$ (si $y_0 = x_{2q}$).
avec l'inégalité

$$|\exp(z_1) - \exp(z_2)| \leq \max\left(|\exp(z_1)|, |\exp(z_2)|\right)|z_1 - z_2|$$

appliquée à $F_{h,q}(w_y) := iuS_q\psi(w_y) + S_{2q}h(w_y)$ et $F_{h,q}(w_z)$:

$$|P^q_u(P^q(1_A))(y) - P^q_u(P^q(1_A))(z)| \leq C\nu(A)|F_{h,q}(w_y) - F_{h,q}(w_z)|.$$

Or

$$\begin{aligned}|F_{h,q}(w_y) - F_{h,q}(w_z)| &\leq |u|\sum_{k=0}^{q-1}\frac{1}{2^{2q-k}}[\psi]|y-z| + \sum_{k=0}^{2q-1}\frac{1}{2^{2q-k}}[h]|y-z| \\ &\leq ([\psi]+[h])(1+|u|)|y-z|.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$[P^q_u(P^q(1_A))] \leq C[h](1+u)\nu_+(A).$$

□

Démonstration. 2.1.5 Comme A et B sont des unions de cylindres de C^k_{-k}, il existe A_+, B_+ des cylindres de $\mathbf{\Sigma}_+$ vérifiant $\Pi^{-1}(A_+) = \sigma^{-k}(A)$ et $\Pi^{-1}(A_+) = \sigma^{-k}(A)$ où Π désigne la projection de $\mathbf{\Sigma}$ sur $\mathbf{\Sigma}_+$. De même, comme ψ est constante sur les cylindres de C^1_0, il existe $\psi_+ : \mathbf{\Sigma}_+ \to \mathbb{Z}$ tel que $\psi_+ \circ \Pi = \psi$, on notera encore $S^+_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_+ \circ \sigma_+$. Par conséquent, avec l'invariance de ν par σ,

$$\begin{aligned}\nu(A \cap S_n = N \cap \sigma^{-n}B) &= \nu(\sigma^{-k}(A) \cap \sigma^{-k}(S_n = N) \cap \sigma^{-k-n}(B)) \\ &= \nu(\Pi^{-1}(\sigma^{-k}(A) \cap \sigma^{-k}(S_n = N) \cap \sigma^{-k-n}(B))) \\ &= \nu(A_+ \cap (S^+_n \circ \sigma^k_+ = N) \cap \sigma^{-n}_+ B_+).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_+(A_+ \cap \sigma^{-k}_+(S^+_n = N) \cap \sigma^{-n}_+ B_+) &= E_{\nu_+}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1_{A_+} e^{-iS^+_n u} \circ \sigma^k_+ e^{-iNu} 1_{B_+} \circ \sigma^n_+ du\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_{\nu_+}\left(e^{-iNu} 1_{B_+} P^n (1_{A_+} e^{-iS^+_n u} \circ \sigma^k_+)\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_{\nu_+}\left(e^{-iNu} 1_{B_+} e^{iuS^+_k} P^{n-k}\left(e^{-iS^+_{n-k}u} P^k(1_{A_+})\right)\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_{\nu_+}\left(e^{-iNu} 1_{B_+} e^{iuS^+_k} P^{n-k}_u\left(P^k(1_{A_+})\right)\right) du\end{aligned}$$

On applique alors le résultat de perturbation de la proposition 2.1.4 à $P^{n-k}_u(P^k(1_{A_+}))$, on trouve en fixant β assez petit tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| \leq \beta$, $\lambda_u \leq e^{-\frac{\Sigma}{4}u^2}$:

$$P^{n-k}_u(P^k(1_{A_+})) = \lambda^{n-2k}_u \Pi_u(P^k_u(P^k(1_{A_+}))) + N^{n-2k}_u(P^k_u(P^k(1_{A_+})))$$

pour $|u| \leq \beta$ et $\|P^{n-k}_u\| = O(\alpha^{n-k})$ uniformément en u pour $|u| > \beta$. En fixant $\beta > 0$ suffisamment petit, on trouve en scindant l'intégrale,

$$\nu_+(A_+ \cap \sigma^{-k}_+(S^+_n = N) \cap \sigma^{-n}_+ B_+) = E_1 + E_2 + E_3$$

avec

$$E_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta} E_{\nu_+}(e^{-iNu} 1_{B_+} e^{iuS^+_k}\left(\lambda^{n-2k}_u \Pi_u(P^k_u(P^k(1_{A_+})))\right))du,$$

$$\begin{aligned}E_2 :=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta} E_{\nu_+}(e^{-iNu}1_{B_+}e^{iuS_k^+}N_u^{n-2k}(P_u^k(P^k(1_{A_+})))du\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta} E_{\nu_+}(e^{-iNu}1_{B_+}e^{iuS_k^+}O(\alpha^{n-2k}\nu_+(A_+))du\\ =&O(\alpha^{n-2k}\nu_+(B_+)\nu_+(A_+)),\end{aligned}$$

où on a appliqué le point (3) de la proposition 2.1.4 avec le lemme 2.1.6 qui assure $\sup_{|u|\leq\beta}\|P_u^k(P^k(1_{A_+}))\|\leq\infty$.

$$\begin{aligned}E_3 :=&\frac{1}{2\pi}\int_{\beta\leq|u|\leq 2\pi} E_{\nu_+}(e^{-iNu}1_{B_+}e^{iuS_k^+}P_u^{n-2k}(P_u^k(P^k(1_{A_+}))))du\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{\beta\leq|u|\leq 2\pi} E_{\nu_+}e^{-iNu}1_{B_+}e^{iuS_k^+}O(\alpha^{n-2k}\nu_+(A_+)))du\\ =&O(\alpha^{n-2k}\nu_+(B_+)\nu_+(A_+)).\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on applique le point (4) de la proposition 2.1.4 avec le lemme 2.1.6. On précise E_1 avec le changement de variable $u := \frac{v}{(n-2k)^{1/2}}$ et l'expression $\lambda_u^j = e^{-\frac{\Sigma}{2}u^2 j}+O(u^3 j e^{-\frac{\Sigma}{4}u^2(j-1)}) = O(e^{-\frac{\Sigma u^2 j}{4}})$ uniformément en u et n :

$$\begin{aligned}E_1 :=&\frac{1}{2\pi(n-2k)^{1/2}}\int_{-\beta(n-2k)^{1/2}}^{\beta(n-2k)^{1/2}}\\ &E_{\nu_+}(e^{-iN\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}1_{B_+}e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k^+}\left(\lambda^{n-2k}_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}\Pi_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P_u^k(P^k(1_{A_+})))\right))du\\ =&\frac{1}{2\pi(n-2k)^{1/2}}\int_{-\beta(n-2k)^{1/2}}^{\beta(n-2k)^{1/2}} E_{\nu_+}\left(e^{-iN\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}1_{B_+}e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k^+}\right.\\ &\left.\left(e^{-\frac{\Sigma}{2}v^2}+O\left(\frac{v^3}{(n-2k)^{1/2}}e^{-\frac{\Sigma}{4}v^2}\right)\right)\Pi_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k(1_{A_+})))\right)dv\end{aligned}$$

Comme $u\to\Pi_u$ est C^1 en 0, $\Pi_u=\Pi_0+O(u)$ on décompose E_1 comme suit,

$$E_1 = E_{11}+E_{12},$$

avec

$$
\begin{aligned}
E_{12} :=& \frac{1}{2\pi(n-2k)^{1/2}} \int_{-\beta(n-2k)^{1/2}}^{\beta(n-2k)^{1/2}} O(\frac{|v|^3}{(n-2k)^{1/2}} e^{-\frac{\Sigma}{4}v^2}) \\
& E_{\nu_+}\left(e^{-iN\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}} 1_{B_+} e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k^+} \left(\Pi_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k(1_{A_+})))\right)\right) du \\
=& O\left(\frac{\nu_+(A_+)}{2\pi(n-2k)} \int_0^\infty \|1_{B_+}\|_{L^1_\nu} |v|^3 e^{-\frac{\Sigma}{2}v^2} du\right) \\
=& O\left(\frac{\nu_+(B_+)\nu_+(A_+)}{n-2k}\right)
\end{aligned}
$$

Dans la formule ci-dessus, on a appliqué le lemme 2.1.6.

et

$$
\begin{aligned}
& E_{11} := \\
& \frac{1}{2\pi(n-2k)^{1/2}} \int_{-\beta(n-2k)^{1/2}}^{\beta(n-2k)^{1/2}} E_{\nu_+}\left(P^k_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k(1_{A_+}))\right) \\
& e^{-\frac{\Sigma}{2}v^2} e^{-iN\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}} E_{\nu_+}\left(1_{B_+} e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k^+}\right) dv
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
\left|E_{\nu_+}\left(1_{B_+} e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k^+}\right) - \nu_+(B_+)\right| &\leq E_{\nu_+}\left(\left|e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S_k} - 1\right| 1_{B_+}\right) \\
&\leq \frac{v}{(n-2k)^{1/2}} \|S_k^+\|_\infty \nu_+(B_+) \\
&= O\left(\frac{|k|v}{(n-2k)^{1/2}} \nu_+(B_+)\right)
\end{aligned}
$$

et de même

$$\begin{aligned}\left|E_{\nu_+}\left(P^k_{\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}(P^k(1_{A_+}))\right)-\nu(A_+)\right| & \\ \leq E_{\nu_+}\left(\left|e^{i\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}S^+_k\circ\sigma^k_+}-1\right|1_{A_+}\right) & \\ \leq \frac{v}{(n-2k)^{1/2}}\|S^+_k\|_\infty\nu_+(A_+) & \\ =O\left(\frac{|k|v}{(n-2k)^{1/2}}\nu_+(A_+)\right). &\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}E_{11} :=& \frac{1}{2\pi(n-2k)^{1/2}}\nu_+(A_+)\nu_+(B_+)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\Sigma}{2}v^2}e^{-iN\frac{v}{(n-2k)^{1/2}}}du \\ &+O\left(\frac{|k|}{(n-2k)^{1/2}}\nu_+(A_+)\nu_+(B_+)\right) \\ =&\nu_+(A_+)\nu_+(B_+)\frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k)}}}{(2\Sigma\pi)^{1/2}(n-2k)^{1/2}}+O(k\nu_+(B_+)\nu_+(A_+)\frac{1}{n-2k}),\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.

□

2.2 Gaz de Lorentz

On présente ici le modèle du gaz de Lorentz à une dimension comme un billard $\mathbb{Z}$-périodique, on considère le tube $\mathcal{T}\times\mathbb{R}\simeq\mathcal{T}^2\times\mathbb{Z}$ où $\mathcal{T}^d=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, sur lequel on place des obstacles $(O_m+l)_{1\leq m\leq I,l\in\mathbb{Z}}$ représentés par des ouverts strictement convexes de bords C^3 avec une courbure non nulle et d'adhérences deux à deux disjointes (où O_m+l pour $l\in\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $O_m+l:=\{(x,l),(x,0)\in O_m\}$) . I est fini et représente le nombre d'obstacles $O_i\subset\mathcal{T}^2\times\{0\}$ et l représente le numéro de la cellule où se situe l'obstacle. De plus on suppose que les obstacles du billard sont placés de telle sorte que le billard est d'horizon fini, c'est à dire que le temps entre deux rebonds d'une particule est fini et borné.

En notant

$$\mathcal{R}:=(\mathcal{T}\times\mathbb{R})\backslash\bigcup_{m,l}(O_m+l),$$

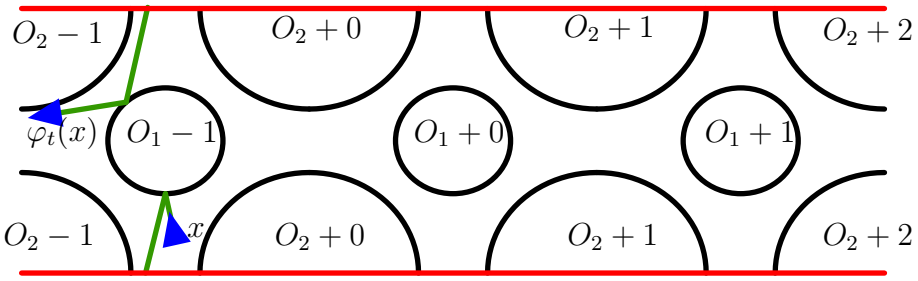

Figure 2.1 – Illustration de gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique en horizon fini, ici avec $|I| = 2$.

le gaz de Lorentz est une description de la trajectoire d'une particule ponctuelle se déplaçant à vitesse unitaire $\mathcal{R} := (\mathcal{T} \times \mathbb{R}) \setminus \bigcup_{m,l}(O_m + l)$, de manière rectiligne dans $\overset{o}{\mathcal{R}}$ en rebondissant sur les obstacles selon la loi de réflexion de Descartes. On le représente par le système dynamique $(\mathcal{M}, \varphi^0, Leb)$ où

$$\mathcal{M} := \mathcal{R} \times \mathbb{S}^1$$

représente l'ensemble des couples positions vitesses d'une particule de $\mathcal{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} \varphi^0 : \mathbb{R} \times \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ (t, x) & \to & \varphi^0_t(x) \end{array}$$

désigne le flot qui à une particule de couple position-vitesse $(q_0, v_0) \in \mathcal{M}$ associe le nouveau couple position-vitesse de la particule au bout d'un temps t :

$$\varphi^0_t(q_0, v_0) = (q_t, v_t).$$

Ainsi, si il n'y a pas eu de rebonds jusqu'à l'instant t ($q_0 + sv_0 \in \overset{o}{\mathcal{R}}$ pour tout $s \leq t$) ,

$$\varphi^0_t(q_0, v_0) = (q_0 + tv_0, v_0).$$

Autrement, si $q_0 + tv_0 \in \partial\mathcal{R}$ alors

$$q_t = q_0 + tv_0$$

et

$$v_t = v_0 - 2\langle v_0, n(q_t)\rangle n(q_t)$$

où $n(q_t)$ désigne le vecteur unitaire normal sortant de l'obstacle O_i au point q_t avec $q_t \in O_i$.

Enfin, *Leb* désigne la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathcal{M}$.
Comme le gaz de Lorentz est supposé d'horizon fini, on peut introduire l'application $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tau(q,v) = \inf\{t > 0, q + tv \in \pi_{\mathcal{R}}(M)\}$$

avec $\pi_{\mathcal{R}}$ la projection sur les coordonnées de positions et

$$M := \bigcup_{i \leq I, l \in \mathbb{Z}} \{(q,v),\ q \in \partial O_i + l, v \in \mathbb{S},\ \langle v, n(q)\rangle \geq 0\}$$

l'ensemble des vecteurs réfléchis sur les obstacles.

En introduisant l'application $T : M \to M$ définie par

$$Tx := \varphi^0_{\tau(x)}(x).$$

Le gaz de Lorentz $(\mathcal{M}, \varphi^0, Leb)$ s'avère être isomorphe au flot de suspension de fonction plafond τ au dessus du système dynamique (M, T, μ) où μ est la mesure donnée par

$$\mu(dr, d\theta) := \cos(\theta) dr d\theta,$$

avec r représentant l'abscisse curviligne dans le sens direct sur les $\partial O_i + l$ et θ l'angle $\langle v, n(q)\rangle$ on pourra voir [26].
Par construction, $\mathbb{Z}$ agit transitivement sur M par translation des coordonnées de position et la configuration $\mathbb{Z}$-périodique de M assure la $\mathbb{Z}$-périodicité de T.
On peut donc associer au système (M, T, μ) le système dynamique probabilisé $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ où

- $\overline{M} := \bigcup_{i \leq I} \{(q,v),\ q \in \partial O_i, v \in \mathbb{S}^1, \text{ t.q.} \langle v, n(q)\rangle \geq 0\}$,
- $\overline{\mu}(dr, d\theta) := \frac{1}{2\sum_{i=1}^{I} |\partial O_i|} \cos(\theta) dr d\theta$,
- pour $x = (q,v) \in \overline{M}$, en notant $(q', v') := T(x)$, $\overline{T}(x) = (q' \mod \mathbb{Z}, v')$.

Sinai a montré dans [8] que ce système dynamique qui porte désormais son nom est ergodique. De plus, presque sûrement, toute trajectoire partant de $\overline{M}$ heurte un obstacle du billard en temps borné. On définit sur $\overline{M}$ la courbe $R_0 := \{(q,v) \in \overline{M}, < v, n(q) >= 0\}$ correspondant aux vecteurs tangents à un obstacle. On note aussi $R_i := T^i(R_0)$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et $R_{i,k} = \bigcup_{l=i}^{k} R_l$. R_k est une union de courbes C^1 et on note ξ_i^k la partition de $\overline{M} \backslash R_{i,k}$ en composantes connexes.

On peut identifier la fonction de changement de cellule $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \overline{M}$ et tout $l \in \mathbb{Z}$ par

$$T \circ \mathcal{D}^l = \mathcal{D}^{l+\phi(x)} \circ \overline{T}$$

où $\mathcal{D}^l : \overline{M} \to M$ tel que $\mathcal{D}^l(q, v) := (q + l, v)$. L'hypothèse d'horizon fini impose que la fonction ϕ soit bornée. ϕ est mesurable et constante sur les éléments de ξ^0_{-1}. De plus, cette application est de moyenne nulle sur $\overline{M}$. On peut définir la cellule courante d'une particule après n rebonds que l'on note

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^i. \tag{2.4}$$

On définit pour $l \in \mathbb{Z}$ le nombre $N_n(l)$ de passages dans la cellule l avant le n-ème rebond,

$$N_n(l)(x) := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k(x)=l\}}.$$

Pour disposer des propriétés d'un opérateur de transfert P quasi-compact, on se place sur la construction des tours de L.S Young d'un facteur (M_1, T_1, μ_1) d'une extension (M_0, T_0, μ_0) de $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$. Sur ce facteur, on considère les espaces de Banach introduits par Young dans [46] : Pour tout $q > 1$, il existe $\epsilon_1 > 0$, $1 > \beta_1 > 0$ tel que l'espace de Banach $(\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}, \|.\|_{(\beta_0,\epsilon_0)})$ avec $0 < \beta_0 < \beta_1$ et $\epsilon_1 > \epsilon_0 > 0$ soit tel qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\|.\|_{L^q} \leq C_0 \|.\|_{(\beta_0,\epsilon_0)}.$$

Dans la suite on notera $\|.\| := \|.\|_{(\beta_0,\epsilon_0)}$.
On peut détailler l'espace $(\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}, \|.\|_{(\beta_0,\epsilon_0)})$ en donnant quelques information supplémentaires sur la structure de (M_1, T_1, μ_1) :
M_1 est doté d'une partition $(\Delta_{i,k})_{i,k\in\mathbb{N}}$ et d'un temps de séparation $s : M_1 \times M_1 \to \mathbb{N}$ tels que pour tout $i, k \in \mathbb{N}$, et tout $x, y \in \Delta_{i,k}$, $s(x, y) \geq 1$
et $s(T_1x, T_1y) = s(x, y) - 1$. De plus, toujours pour $x, y \in \Delta_{i,k}$, il existe une bijection $X_0 : T_1^{-1}(\{x\}) \to T_1^{-1}(\{y\})$ qui respecte les temps de séparations : $s(z, X_0(z)) = 1 + s(x, y)$.

Remarquons aussi que cette structure construite par Young [46] est compatible avec les partitions ξ^n_{-n} pour $n \in \mathbb{N}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, étant donnée une application f (vue dans $\overline{M}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, constante sur les éléments de la partition ξ^n_{-n}, il existe $\hat{f} \in \mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}$ telle que pour tout $x, y \in M_1$,

$$s(x, y) \geq 2n \Rightarrow \hat{f}(x) = \hat{f}(y),$$

et

$$f \circ \overline{T}^n \circ \pi_0 = \hat{f} \circ \pi_1. \tag{2.5}$$

où π_0 désigne la projection de M_0 dans $\overline{M}$ et π_1 celle de M_0 vers M_1.

L'espace de Banach $(\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}, \|.\|)$ peut être décrit comme suit : une fonction intégrable $f : \hat{M} \to \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}$ si

$$\|f\| = \|f\|'_\infty + \|f\|'_{lip}$$

est finie avec

$$\|f\|'_{lip} = \sup_{l,k\in\mathbb{N}} e^{-\epsilon_0 l}\|f\|_{lip,\Delta_{l,k}} \text{ et } \|f\|'_\infty = \sup_{l,k\in\mathbb{N}} e^{-\epsilon_0 l}\|f\|_{\infty,\Delta_{l,k}},$$

où $\|f\|_{lip,\Delta_{l,k}} := \sup_{x,y\in\Delta_{l,k}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\beta_0^{s(x,y)}}$ et $\|f\|_{\infty,\Delta_{l,k}} := \|f_{\Delta_{l,k}}\|_\infty$.
L'opérateur de transfert P sur (M_1, T_1, μ_1) est quasi-compact sur $\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}$ et peut s'écrire

$$Pf(x) = \sum_{w\in\hat{T}^{-1}(\{x\})} e^{-h(w)} f(w)$$

avec $h \in B$ une fonction Lipschitz au sens où $\|h\|'_{lip} = \sup_{i,k\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in\Delta_{i,k}} \frac{|h(x)-h(y)|}{\beta^{s(x,y)}}$ est fini.

Comme ϕ (la fonction de pas pour la $\mathbb{Z}$-extension) est constante sur ξ_{-1}^0 il se relève en une application bornée $\hat{\phi}$ de M_1 et l'opérateur $P_u := P(e^{iu\hat{\phi}}.)$ vérifie un théorème de perturbation :

Proposition 2.2.1. *(voir [43]) Il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $\beta \in]0, \beta_0[$ arbitrairement petit tel qu'il existe $\alpha, C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}$ et tout $u \in [-\beta, \beta]$:*

$$P_u^n(f) = \lambda_u^n \Pi_u(f) + N_u^n(f),$$

Où

- *$\lambda_. \in C^4([-\beta,\beta], \mathbb{C})$ vérifie $\lambda_u = 1 - \Sigma\frac{u^2}{2} + O(u^3)$,*
- *$u \to \Pi_u \in C^2([-\beta,\beta], L(\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}))$ vérifie $\Pi_0(.) = E_\nu(.)1$, de plus pour tout $u \in [-\beta,\beta]$, Π_u est un projecteur donc vérifie $\Pi_u^n = \Pi_u$.*
- *$N_u \in L(\mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)})$ vérifie $\|N_u^n\| \leq C\alpha^n$.*

De plus, pour tout $u \in [-\pi,\pi]\backslash[-\beta,\beta]$, $\|P_u^n\| \leq C\alpha^n$.

Du théorème de perturbation on peut déduire le théorème limite local avec décorrélation suivant qui est une application du théorème de [43] :

Théorème 2.2.2. *[31]*

Soit $p > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous les ensembles A soit réunions d'éléments de ξ_{-k}^k et B réunions d'éléments de ξ_{-k}^∞ , on a pour $n > 2k$,

$$\left| \overline{\mu}(A \cap (S_n = N) \cap \overline{T}^{-n}(B)) - \frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k)}}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(n-2k)^{1/2}} \overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B) \right| \leq C_p \frac{k\overline{\mu}(B)^{1/p}}{n-2k}.$$

2.3 Flot géodésique sur une surface riemannienne hyperbolique.

On présente ici rapidement le modèle d'un flot géodésique C^2 d'un $\mathbb{Z}$-revêtement sur une surface Riemannienne compacte de courbure strictement négative.

On étudie ici le flot géodésique unitaire d'une variété riemannienne à courbure strictement négative, dont le motif serait $\mathbb{Z}$-périodique. On s'intéresse alors au comportement du nombre d'auto-intersections du flot issu de cette variété.

Définition 2.3.1. *On considère une surface de Riemann $\mathcal{R}$ connexe compacte à courbure strictement négative. A cette surface on associe le fibré tangent unitaire $T^1\mathcal{R}$ et le flot géodésique $\varphi : \mathbb{R} \times T^1\mathcal{R} \to T^1\mathcal{R}$ où on note $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$. A cet ensemble, on associe la mesure de Liouville L.*

On reprend la définition de $\mathbb{Z}$-revêtement donnée dans l'article [37].

Définition 2.3.2. *Une surface connexe hyperbolique $\mathcal{R}_0$ est un $\mathbb{Z}$-revêtement d'une surface hyperbolique connexe compacte à courbure strictement négative $\mathcal{R}$ s'il existe une application surjective $p : \mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}$ telle que*

(1) pour tout $x \in \mathcal{R}$, il existe un voisinage V_x tel que pour toute composante connexe $C \subset p^{-1}(V_x)$, $p : C \to V_x$ est isométrique.

(2) Le groupe

$$Cell(\mathcal{R}_0, p) := \{D' : \mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}_0, D' \text{ est une isométrie vérifiant } p \circ D' = p\}$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}$

(3) pour tout $x \in \mathcal{R}$, il existe $x_0 \in \mathcal{R}_0$ tel que

$$p^{-1}(x) = \{D'(x_0) : D' \in Cell(\mathcal{R}_0, p)\}.$$

L'identification en (2) permet d'écrire $Cell(\mathcal{R}_0, p) := \{\mathcal{D}^n, n \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $\mathcal{D} \in Cell(\mathcal{R}_0, p)$. L'application ψ se relève par la différentielle en une application sur $T^1\mathcal{R}_0$ et on relève ainsi le groupe entier. Le flot géodésique sur $T^1\mathcal{R}_0$ se projette sur $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ celui sur $T^1\mathcal{R}$ via p :

$$dp \circ \varphi_t^0 = \varphi_t \circ dp.$$

On se place désormais sur la surface de Riemann $\mathcal{R}$ à laquelle on adjoint la mesure de Liouville L. Le système $(T^1\mathcal{R}, \varphi, L)$ forme alors un système dynamique.

On peut s'inspirer des constructions de Bowen et Ratner sur les flots d'Anosov ([7],[35])ainsi que des traveaux de Hasselblatt [19] sur la régularité des feuilles stables et instables pour identifier le système $(T^1\mathcal{R}, \varphi, L)$ à un flot de suspension sur un codage par un sous-shift de type fini dont la section de Poincaré notée
$\overline{M} := \bigcup_{i=1}^{d} \Pi_i \subset T^1\mathcal{R}$ vérifie les hypothèsess suivantes :

Hypothèses 2.3.3.
- *Les Π_i sont disjoints et chaque Π_i est une portion connexe de $T^1\mathcal{R}$ de diamètre inférieure à la moitié du rayon d'injectivité δ sur $T^1\mathcal{R}$ et de bord régulier C^1.*
- *La projection canonique de chaque Π_i sur $\mathcal{R}$ forme une portion géodésique de $\mathcal{R}$. Il existe $\eta > 0$ petit tel que pour tout i, en coordonnées locales, $\{\theta_x, \exp_{x_0}^{-1}(x, \theta_x) \in \Pi_i\}$ est contenu dans un ouvert $(\pi/2 - \eta, \pi/2 + \eta)$.*
- *Pour tout $x \in \overline{M}$, $\varphi_{]0,\frac{\delta}{2}[}(x) \cap \overline{M} \neq \emptyset$*

On définit les applications de premier retour $\overline{T}$ sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{R}$ de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ à partir du flot géodésique $(x, t) \in T^1\mathcal{R} \times \mathbb{R} \to \varphi_t(x)$ (qui est une application continue) :

$$\overline{T}x = \varphi_{\tau(x)}(x)$$

où $\tau(x) := \inf\{t > 0, \varphi_t(x) \in \overline{M}\}$. En notant $R_i := \{x \in T^1\mathcal{R}, T^{-i}x \in \partial\overline{M}\}$, Ces applications sont C^1 sur $T^1\mathcal{R}\backslash R_{-1}$ et définissent notamment une bijection de notre section de Poincaré $\overline{M}$ sur elle même de réciproque

$$\tilde{T}x = \varphi_{-\tilde{\tau}(x)}(x)$$

où $\tilde{\tau}(x) := \inf\{t > 0, \varphi_{-t}(x) \in \overline{M}\}$.

Proposition 2.3.4. *L'application $\overline{T}$ ainsi définie est C^1 sur $T^1\mathcal{R}$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in T^1\mathcal{R}\backslash R_{-1}$, par construction de la section de Poincaré, la trajectoire $(\varphi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ coupe nécessairement la section. Cette dernière étant transverse au

flot, $\tau(x)$ existe et est atteint : il existe $y_0 \in \overline{M}$ et $\tau(x_0)$ tel que

$$\varphi_{\tau(x_0)}(x_0) = y_0$$

ce qui une fois reporté par $\exp_{x_0}$ en coordonnées locales peut s'écrire

$$\varphi_{\tau(x_0)}(x_0) - y_0 = 0.$$

On applique le théorème des fonctions implicites : on pose $\psi(x,t,y) = \varphi_t(x) - y$ (qui est C^1) où localement t et y sont des valeurs décrites sur des espaces de dimension 1 et 2 tandis que x est de dimension 3. Enfin $\partial_3\psi(x_0, t_{x_0}, y_0) = (f(y_0), 1)$ avec $f(y_0)$ non colinéaire à v_0 (la section étant transverse au flot), et en notant $x_0 = (q_0, v_0)$, $\partial_2\psi = \partial_t(q_0 + tv_0, v_0) = (v_0, 0)$ qui est encore inversible. on en déduit que $\partial_{2,3}\psi(x_0, t_0, y_0)$ est isomorphe à $\begin{pmatrix} v_0 & f(y_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible. Le théorème des fonctions implicites s'applique et il existe une application C^1 f définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = (\tau(x_0), y_0)$ et

$$\psi(x, f(x)) = 0$$

autrement dit

$$\varphi(p_1(f(x)), x) \in \overline{M},$$

où p_1 désigne la projection selon la première coordonnée. On en déduit que $\overline{T}(x) = \varphi(x, p_1(f(x)))$ est bien C^1 sur $T^1\mathcal{R}$.

□

On définit aussi l'espace $\overline{M}_\tau := \{(x,t), x \in \Pi, t \in [0, \tau(x)[\}$ auquel on associe le flot de suspension

$$\tilde{\varphi} : \begin{array}{rcl} \overline{M}_\tau \times \mathbb{R} & \to & \overline{M}_\tau \\ (x,t,s) & \to & \tilde{\varphi}_s(x,t) := (\overline{T}^N x, s + t - \sum_{k=1}^N \tau(\overline{T}^{k-1}x)) \end{array}$$

où N est le plus petit entier tel que $\sum_{k=1}^N \tau(\overline{T}^{k-1}x) \geq s + t$.
Le couple $(\overline{M}_\tau, \tilde{\phi})$ s'identifie avec $(T^1\mathcal{R}, \phi)$ via l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \overline{M}_\tau & \to & T^1\mathcal{R} \\ (x,t) & \to & \varphi_t(x) \end{array}$$

et $g \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t \circ g$. Dans la suite on montre qu'on peut munir notre système d'une mesure μ telle que $(\overline{M}_\tau, \tilde{\varphi}, \mu \otimes \lambda|_{\overline{M}_\tau})$ (avec λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) soit un système

dynamique isomorphe au système $(T^1\mathcal{R}, \varphi, L)$. En particulier, $(\overline{M}, \overline{T}, \mu)$ forme un système dynamique. Le résultat suivant est bien connu (on pourra regarder le chapitre 19 du livre [36])

Proposition 2.3.5. *On peut construire une mesure μ sur $\overline{M}$ telle que $L = g_*(\mu \otimes \lambda)$. La mesure μ décrite localement pour un élément $x \in \overline{M}$ à l'aide des coordonnées curvilignes (r, ϕ) où ϕ est l'angle entre la direction dans $T_x\mathcal{R}$ et la normale à l'élément dr, par*

$$d\mu = cos(\phi) dr d\phi$$

vérifie $L = g_*(\mu \otimes \lambda)$.

Démonstration. On pose $\nu := g_* L$. On couvre $\overline{M}$ par un recouvrement fini d'ouverts O_i de taille plus petite que le rayon d'injectivité afin de se placer en coordonnées locales. Pour $x_0 \in \overline{M}$, on se fixe un petit voisinage dans $\overline{M}$ (en coordonnées locales on écrit $x = (q, \theta)$ où θ représente la direction angulaire de notre vitesse par rapport à la normale) de $x_0 := (q_0, \phi_0)$ noté
$O_\epsilon := \varphi_{]0,\epsilon[}(\exp_{x_0}^{-1}(B(q, \epsilon) \times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[))$ compris dans le rayon d'injectivité. Le flot porté sur ces coordonnées via $\exp_{x_0}$ se décrit comme

$$\exp_{x_0}^{-1}(\varphi_t(x)) = (q + tv_\theta + o(t), \theta + o(t)), \tag{2.6}$$

où $o(t)$ est uniforme en la donnée de x car on dispose d'un flot C^1 chaque fois décrit sur un nombre finit de cartes. En particulier, quitte à choisir ϵ plus petit on peut choisir un η_ϵ arbitrairement petit tel que

$$\| \exp_{x_0}^{-1}(\varphi_t(x)) - (q + tv_\theta, \theta)\| \leq \eta_\epsilon |t|.$$

Pour $\phi' \subset]\theta - \epsilon, \theta + \epsilon[$, On peut comparer sur nos cartes le parallélépipède

$$B_\epsilon := \{(q' + tv_{\phi'}, \phi'), (q', \phi') \in B(q, \epsilon) \times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[, t \in [0, \epsilon]\} = \bigcup_{t \in [0,\epsilon]} B_t$$

avec l'ensemble

$$\begin{aligned} A_\epsilon :&= \exp_{x_0}^{-1}\left(\varphi_{[0,\epsilon]}(\exp_{x_0}(B(q, \epsilon) \times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[))\right) \\ &= \{\exp_{x_0}^{-1}(\varphi_t(\exp_{x_0}(q', \phi')), (q', \phi') \in B(q, \epsilon) \times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[, t \in [0, \epsilon]\} : \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.6), l'ensemble $A_\epsilon \Delta B_\epsilon$ est compris dans une bande de taille $2\eta_\epsilon \epsilon$

autour de la frontière de B_ϵ qui est une courbe C^1 de longueur de l'ordre de ϵ^2.

La mesure image de la mesure de Liouville L portée par l'injection est comparable à la mesure de Lebesgue dans le sens où pour $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout ouvert O dans une boule de rayon ϵ autour de x_0, $L(O) = (1 + \mathcal{O}(\epsilon))Leb(\exp_{x_0}^{-1} O)$,

$$Leb(B_\epsilon) = \int_{]\theta-\epsilon,\theta+\epsilon[} \int_0^\epsilon \int_{B(q,\epsilon)} cos(\phi') dr d\phi' dt = 2\epsilon^2 \int_{]\theta_0-\epsilon,\theta_0+\epsilon[} cos(\phi') d\phi'$$

où dr représente la petite variation de l'abscisse curviligne de la boule $B(q, \epsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned}(1 - \mathcal{O}(\epsilon))(Leb(B_\epsilon) - \mathcal{O}(\eta_\epsilon\epsilon^2)) &\leq L(\varphi_{[0,\epsilon]}(\exp(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[)) \\ &\leq (1 + \mathcal{O}(\epsilon))(Leb(B_\epsilon) + \mathcal{O}(\eta_\epsilon\epsilon^2)).\end{aligned}$$

Il existe $C > 0$ uniforme en la donnée de x tel que pour tout $x \in \overline{M}$,

$$(1 - \eta'_\epsilon)Leb(B_\epsilon) \leq L(\varphi_{[0,\epsilon]}(\exp(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[))) \leq (1 + \eta'_\epsilon)Leb(B_\epsilon).$$

En se plaçant en coordonnées locales (par exemple une carte $h : O_i \times \mathbb{R} \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$), on obtient

Sur les ouverts $B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[\times]t, t + \epsilon[$, la mesure $\mu \otimes \lambda$ donne

$$\mu \otimes \lambda(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[\times]t, t + \epsilon[) = \epsilon \int_{]\theta_0-\epsilon,\theta_0+\epsilon[} \int_{B(q,\epsilon)} cos(\phi) dr d\phi = Leb(B_\epsilon),$$

on a alors

$$\begin{aligned}(1 - \eta_\epsilon)\mu \otimes \lambda(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[) &\leq h_*^{-1}\nu(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[) \\ &\leq (1 + \eta_\epsilon)\mu \otimes \lambda(B(q, \epsilon)\times]\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon[).\end{aligned}$$

Si on considère un pavé P de la carte, on peut l'approcher par union intérieure A_n (resp extérieure $\overline{A}_n$) d'ouverts de la forme $O_{\frac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{O\in A_n} \mu \otimes \lambda(O) = \mu \otimes \lambda(P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{O\in\overline{A}_n} \mu \otimes \lambda(O).$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}(1 - O(\eta_{\frac{1}{n}})) \sum_{O\in A_n} \mu \otimes \lambda(O) \leq h_*^{-1}\nu(P) \leq \lim_{n\to\infty}(1 + O(\eta_{\frac{1}{n}})) \sum_{O\in\overline{A}_n} \mu \otimes \lambda(O).$$

On en déduit que $\mu \otimes \lambda(P) = h_*^{-1}\nu(P)$. Les pavés engendrant tout les boréliens, on en

déduit que $\mu \otimes \lambda = h_*^{-1}\nu$ où $\nu = g_* L$.

□

Les arguments de Bowen et Series [7], [35] permettent de choisir $\overline{M}$ tel que $(\overline{M}, \overline{\mu}, \overline{T})$ est isomorphe à un sous-shift de type fini mélangeant comme nous le supposerons dans la suite . Des rappels sur les sous-shifts de type finis sont présentés en annexe 2.1.

Proposition 2.3.6. *Il existe une famille $(\Pi_i)_{1,\dots,d}$ vérifiant les hypothèses 2.3.3 sur $(T^1\mathcal{R}, \varphi, L)$ tel que le système dynamique $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est isomorphe à un sous-shift (voir la section 2.1 de type fini (Σ, σ, ν) où ν est une mesure de Gibbs de potentiel $h \in H(\Sigma)$ (où $H(\Sigma)$ désigne l'ensemble des fonctions hölderiennes).*

On identifie par isomorphisme les cylindres C_i^k sur (Σ, σ, ν) à une partition ξ_i^k sur $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ puis sur (M, T, μ) en itérant l'application $\mathcal{D}$ sur chaque élément de ξ_i^k. On déduit du théorème 2.1.5 de la première section de ce chapitre le théorème limite local avec décorrélation sur μ

Théorème 2.3.7. *Soit $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ une application centrée, constante sur les éléments de ξ_0^1 qui ne soit pas un cobord, on note $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k$ et*

$$\Sigma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_{\overline{\mu}}(\phi \circ \overline{T}^k \phi).$$

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous les ensembles mesurables A et (resp. B) s'écrivant respectivement comme réunion d'éléments de ξ_{-k}^k (resp. de ξ_{-k}^∞) où ξ_{-k}^k désigne la partition de $\overline{M}$ en composantes connexes de la forme $\bigcap_{j=-k}^k \overline{T}^{-j}\Pi_{i_j}$, on a pour $n > 2k$,

$$\left| \overline{\mu}(A \cap (S_n = N) \cap \overline{T}^{-n}(B)) - \frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k)}}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(n-2k)^{1/2}} \overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B) \right| \leq C \frac{k\mu(B)}{n-2k}.$$

La variété $\mathcal{R}$ s'identifie avec un domaine fondamental noté $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}_0$. Et de même, on peut identifier $T^1\mathcal{R}$ et $T\tilde{\mathcal{R}}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on note $\Pi_i^0 \subset \mathcal{R}_0$ un ensemble connexe tel que $p(\Pi_i^0) = \Pi_i$ et on définit alors :

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{y \in \mathcal{R}_0, \exists x \in \bigcup_{i=0}^d \Pi_i^0,\ y \in \varphi^0_{[0,\tau(dp(x)))}(x)\}$$

forme un domaine fondamental de $\mathcal{R}_0$. Les sections de Poincaré $\overline{M}$ se transportent donc en des sections $M^0 := \bigcup_{i=1}^d \Pi_i^0$. L'action du groupe engendré par $\mathcal{D}$ permet d'étendre les sections de Poincaré $\mathbb{Z}$-périodiques sur $T^1\mathcal{R}$ entier en notant $\Pi_i^k := \mathcal{D}^k(\Pi_i)$ pour

$i \in \{1, \dots, d\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi M comme l'union des sections $M := \bigcup_{i=1,k\in\mathbb{N}}^{d} \Pi_i^k$. On définit l'application T sur $T^1\mathcal{R}_0$ par

$$Tx = \varphi^0_{\tau^0(x)}(x)$$

où $\tau^0(x) := \inf\{t > 0, \varphi_t^0(x) \in M\} = \tau(dp(x))$. En notant μ^0 la mesure issue de $\overline{\mu}$ portée par M^0, on construit la mesure invariante pour T $\mu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^n_* \mu^0$.
Le système $(M, T, \frac{\mu}{\mu(M_0)})$ est alors la $\mathbb{Z}$-extension du système $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par ϕ et le système dynamique $(M_\tau, \tilde{\varphi}^0, \mu\otimes\lambda)$ ainsi obtenu (qui est alors une extension du système dynamique $(\overline{M}_\tau, \tilde{\varphi}, \overline{\mu})$) est isomorphe à $(T^1\mathcal{R}, \varphi, L)$. On définit alors le changement de cellule ϕ sur M comme l'application de M vers $\mathbb{Z}$ définie pour $x \in M$ par :

$$\phi(x) = k$$

si $x \in \mathcal{D}^l(M^0)$ et $Tx \in \mathcal{D}^{l+k}(M_0)$. La fonction de pas ϕ ainsi définie dépend seulement de la donnée de $dp(x) \in \overline{M}$. ϕ est en particulier constante sur les éléments de ξ^0_{-1}.

2.4 Un lemme commun : caractère Lipschitz du temps local discret.

On démontre ici un lemme commun aux $\mathbb{Z}$-extensions (M, T, μ) au dessus de systèmes $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ présentées aux sections 2.2 et 2.3 dont on reprend la notation commune notamment les éléments ϕ, S_n, et les partitions ξ^n_{-k}. On pose aussi le temps local discret définit pour $x \in \mathbb{Z}$ par

$$N_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k = x\}}.$$

Lemme 2.4.1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$E\Big((N_n(x) - N_n(y))^2\Big) \leq C|x - y|n^{1/2}. \tag{2.7}$$

Démonstration. L'identité (2.7) s'obtient en réécrivant le temps local dans le bon espace quotient (M_1, T_1, μ_1) (i.e le facteur de la tour de Young page 43 pour le billard ou celui du sous-shift unidimensionnel pour le flot géodésique) : En effet, comme ϕ est constante sur ξ^1_0, il existe $\hat{\phi} : M_1 \to \mathbb{Z}$ telle que d'après l'équation (2.5),

$$\hat{\phi} \circ \pi_1 = \phi \circ \pi_0.$$

Ainsi, en notant $\hat{S}_n := \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\phi} \circ T_1^k$, pour $x \neq y \in \mathbb{Z}$:

$$E_{\overline{\mu}}\left(|N_n(x) - N_n(y)|^2\right) = E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1_{\{S_i=x\}} - 1_{\{S_i=y\}})(1_{\{S_j=x\}} - 1_{\{S_j=y\}})\right)$$

$$\begin{aligned}
=&E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n-1}(1_{\{S_{j-i}=0\}} - 1_{\{S_{j-i}=y-x\}}) \circ \overline{T}^i 1_{\{S_i=x\}}\right. \qquad (2.8)\\
&\left. + (1_{\{S_{j-i}=0\}} - 1_{\{S_{j-i}=x-y\}}) \circ \overline{T}^i 1_{\{S_i=y\}}\right)\\
=&E_{\mu_1}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n-1}(1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=y-x\}}) \circ T_1^i 1_{\{\hat{S}_i=x\}}\right. \qquad (2.9)\\
&\left. + (1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=x-y\}}) \circ T_1^i 1_{\{\hat{S}_i=y\}}\right)\\
=&\sum_{0\leq i<j\leq n-1} E_{\mu_1}\left(P^{j-i}(1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=y-x\}})P^i(1_{\{\hat{S}_i=x\}})\right) \qquad (2.10)\\
&+ E_{\mu_1}\left(P^{j-i}((1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=x-y\}})P^i(1_{\{\hat{S}_i=y\}})\right) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

où P désigne l'opérateur de transfert sur (M_1, T_1, μ_1) En appliquant le théorème 2.2.1 pour le facteur correspondant au billard ou 2.1.4 pour celui correspondant au flot géodésique et en reprenant les notations avec $P_u(f) := \hat{P}(e^{iu\hat{\phi}}f)$, on constate pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $f \in \mathcal{V}_{(\beta_0,\epsilon_0)}$ pour le billard (ou $H(M_1)$ pour le flot géodésique),

$$\begin{aligned}
P^m((1_{\{S_m=0\}} - 1_{\{S_m=z\}})f) &= P^m\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e^{iuz})e^{-iu\hat{S}_m}f du\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e^{iuz})P_u^m(f)du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}(1-e^{iuz})\lambda_u^m\Pi_u(f)du + O(\alpha^n\|f\|)du\\
&= \frac{1}{2\pi m^{1/2}}\int_{-bm^{1/2}}^{bm^{1/2}}(1-e^{iu\frac{z}{m^{-1/2}}})\lambda_{u/m^{1/2}}^m\Pi_{u/m^{1/2}}(f)du + O(\alpha^n\|f\|)du.
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

En remarquant les majorations suivantes tirées des propriétés des fonctions apparaissant respectivement dans les théorèmes 2.2.1 et 2.1.4,

$$\begin{cases}
1 - e^{iu\frac{z}{m^{-1/2}}} = O\left(iu\frac{z}{m^{-1/2}}\right)\\
\lambda_{u/m^{1/2}}^m = e^{-\Sigma u^2/2} + O\left(e^{-\Sigma u^2/4}m\frac{|u|}{m^{1/2}}^3\right)\\
\Pi_{u/m^{1/2}}(f) = \Pi_0(f) + O\left(\frac{|u|}{m^{1/2}}^3\right)
\end{cases}$$

l'équation (2.12) devient

$$P^m((1_{\{S_m=0\}} - 1_{\{S_m=z\}})f) = \frac{1}{2\pi m^{1/2}} \int_{-bm^{1/2}}^{bm^{1/2}} (1 - e^{iu\frac{z}{m^{-1/2}}}) e^{-\Sigma u^2/2} \Pi_0(f) du + O(\frac{|z|}{m^{3/2}} \|f\|)$$
$$= \frac{\Pi_0(f)}{(2\pi m\Sigma)^{1/2}} \left(1 - e^{\frac{1}{2\Sigma}\left(\frac{z}{m^{1/2}}^2\right)}\right) + O\left(\frac{|z|}{m^{3/2}} \|f\|\right).$$

On peut alors contrôler les termes (2.10) et (2.11) avec l'identité ci-dessus avec $f := P^i(1_{\{S_i=x\}}) = O(\Pi_0(1_{\{S_i=x\}})) = O(\frac{1}{i^{1/2}}$:

$$\begin{cases} E_{\mu_1}\left(P^{j-i}(1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=y-x\}}) P^i(1_{\{\hat{S}_i=x\}})\right) = O\left(\frac{|1-e^{\frac{1}{2\Sigma}\left(\frac{(y-x)^2}{j-i}\right)}|}{(j-i)^{1/2} i^{1/2}}\right) \\ E_{\mu_1}\left(P^{j-i}((1_{\{\hat{S}_{j-i}=0\}} - 1_{\{\hat{S}_{j-i}=x-y\}}) P^i(1_{\{\hat{S}_i=y\}})\right) = O\left(\frac{|1-e^{\frac{1}{2\Sigma}\left(\frac{(x-y)^2}{j-i}\right)}|}{(j-i)^{1/2} i^{1/2}}\right). \end{cases}$$

Pour conclure, on montre que

$$\sum_{m\geq 1} \frac{|1 - e^{-\frac{z^2}{2\Sigma m}}|}{m^{1/2}} = O(|z|).$$

La majoration $1 - e^{-\frac{z^2}{2\Sigma m}} \leq min(2, \frac{z^2}{2\Sigma m})$ induit

$$\sum_{m\geq 1} \frac{|1 - e^{-\frac{z^2}{2\Sigma m}}|}{m^{1/2}} \leq \sum_{m=1}^{\lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil} \frac{2}{m^{1/2}} + \sum_{m \geq \lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil + 1} \frac{z^2}{2\Sigma m^{3/2}}$$
$$\leq \int_0^{\lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil} 2\frac{dx}{x^{1/2}} + \int_{x \geq \lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil} \frac{z^2}{2\Sigma x^{3/2}} dx$$
$$\leq 4\left(\lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil\right)^{1/2} + \frac{2|z|}{2\Sigma} 2\left(\lceil \frac{z^2}{2\Sigma} \rceil\right)^{-1/2} \leq 4|z| \left(1 + \frac{1}{2\Sigma}\right)^{1/2} + \frac{2|z|}{(2\Sigma)^{1/2}}.$$

En appliquant cette majoration aux termes (2.10) et (2.11) et en sommant pour $1 \leq i < j \leq n$, on obtient bien

$$E_{\overline{\mu}}\left(|N_n(x) - N_n(y)|^2\right) = O(n^{1/2}|x - y|).$$

□

Deuxième partie

Nombre d'auto-intersections.

Chapitre 3

Flipper aléatoire.

A partir du modèle de Gaz de Lorentz, on peut construire un modèle de flipper aléatoire. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'évolution asymptotique d'une fonction de gain G_t décrite sur un modèle de flipper aléatoire construit sur la base d'un gaz de Lorentz en s'inspirant des travaux de Kesten et Spitzer ([22]) pour des marches aléatoires.

3.1 Hypothèses et résultat

Dans ce chapitre, on se place dans les hypothèses du gaz de Lorentz $(\mathcal{M}_0, \varphi_t^0, L)$ présenté en 2.2 du chapitre 4.2 dont on reprendra les notations. On se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ afin d'associer à chacun de ces obstacles $O_i + l$, une valeur $\xi_{(i,l)}$ indépendamment des valeurs associées aux autres obstacles, selon une loi ξ_i L^2 centrée. On s'intéresse aux gains G_t accumulé jusqu'au temps t par une particule se déplaçant sur le tube selon des trajectoires rectilignes et rebondissant contre les obstacles $O_i + l$ selon le principe de réflexion de Descartes en gagnant la valeur $\xi_{(i,l)}$ qui leur est associée. On note $(L_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le temps local associé au mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ défini à l'aide des sommes de Birkhoff $S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^i$:

$$(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{1/2}})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}_{\overline{\mu},J_1}}{\to} (B_t)_{t\geq 0}$$

On va prouver dans ce cas le résultat du théorème 3.2.1, c'est à dire la convergence du processus $(G_{nt})_t$ vers $\left(\sum_{i=1}^I p_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x) dZ(x)\right)_t$ où $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$.

Théorème 3.1.1. *Pour un flipper aléatoire composé d'un nombre fini I de motifs d'obstacles O_i, engendrant de façon $\mathbb{Z}$-périodiques une famille d'obstacle $(O_i + l)_{i\in I, l\in\mathbb{Z}}$, on associe à chaque obstacle $O_i + l$ un potentiel aléatoire centré $\xi_i(l)$ de loi ξ_i, les $\xi_i(l)$ étant mutuellement indépendants. La suite de processus $(\frac{1}{n^{3/4}}G_{\lfloor nt\rfloor})_t$ converge en loi pour la métrique J_1 dans $D(0,\infty)$ vers le processus*

$$\left(\sum_{i=1}^{I} c_i p_i^2\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x)dZ(x)$$

Où Z est un mouvement Brownien de variance 1 défini sur $\mathbb{R}$ indépendant du mouvement brownien $(B_t)_t$ (de variance c), c_i la variance des ξ_i et
$p_i := \left(\frac{|\partial O_i|}{\sum_{j=1}^{k}|\partial O_j|}\right)$.

Ce résultat découle du théorème pour le système discret associé (M, T, μ) dont on note G_n le gain engendré par la particule jusqu'au n-ème rebond, on montre le théorème limite suivant :

Théorème 3.1.2. *Dans le cas de notre flipper aléatoire à horizon fini (M, T, μ) vu comme $\mathbb{Z}$-extension du système dynamique probabilisé $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par la fonction de pas ϕ, la suite de processus $(\frac{1}{n^{3/4}}G_{\lfloor nt\rfloor})_{t\geq 0}$ converge en loi dans $D(0,\infty)$ pour la métrique J_1 vers le processus*

$$\left(\sum_{i=1}^{I} c_i p_i^2\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x)dZ(x)$$

Où Z est un mouvement Brownien défini sur $\mathbb{R}$ indépendant de $(B_t)_t$, $\frac{c_i}{2}$ est la variance de la loi ξ_i et $p_i := \frac{|\partial O_i|}{\sum_{j=1}^{I}\partial|O_j|}$.

Le comportement asymptotique de G_n est lié à l'étude des temps d'auto-intersections V_n de la transformation billard définis par :

$$V_n(x) := |\{(j,k) \in [|0, n-1|]\, tq\, \exists 0 \leq i \leq I,\ l \in \mathbb{Z}, T^k(x) \in \partial O_i + l,\ T^j(x) \in \partial O_i + l\}|.$$

Autrement dit, $V_n(x) = \sum_{(i,l)\in[|1,I|]\times\mathbb{Z}}(N_n^i(l))^2$ où $N_n^i(l)$ est le nombre de visites à l'obstacle $O_i + l$ avant le n-ème rebond. On montre pour V_n le théorème limite suivant :

Théorème 3.1.3. *Dans le billard $\mathbb{Z}$-périodique, la suite de variable aléatoires $n^{-3/2}\sum_{(i,l)\in[|1,I|]\times\mathbb{Z}}(N_n^i(l$ converge en loi vers celle de*
$\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{|\partial O_i|}{\sum_{j=1}^{k}|\partial O_j|}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x)dx$. *Où L_1 désigne un temps local par rapport à un mouvement brownien et évalué au temps un.*

On note $I_0 : \overline{M} \to I$ la fonction donnant l'indice de l'obstacle courant : pour $x = (q, v) \in \overline{M}$,

$$I_0(x) = i \text{ ssi } q \in \partial O_i.$$

On notera dans la suite $I_k(x) := I_0 \circ \overline{T}^k(x)$ pour désigner l'obstacle courant après k rebonds vu dans $\overline{M}$. Si on s'intéresse à un obstacle O_i en particulier, on désigne par $N_n^i(l) := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k=l\}} 1_{\{I_k=i\}}$ La fonction de gain après n rebonds d'une particule partant avec les coordonnées initiales $x \in \overline{M}$ s'écrit :

$$G_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{(I_k(x),S_k(x))} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \xi_{(i,l)} N_n^i(l)(x).$$

3.2 Convergence vers le processus de Kesten et Spitzer.

Dans cette section on démontre le théorème 3.1.2. Rappelons d'une part qu'avec le théorème 2.2.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la forme linéaire $\mathcal{H}_k : f \in \mathcal{B} \to E(1_{\{S_k=0\}} f)$ vérifie lorsque f est de la forme $f := 1_A$ avec A une réunion d'éléments de ξ_{-1}^{∞}, $E(1_{\{S_k=0\}} f) = \frac{\overline{\mu}(A)}{k^{1/2}} + O\left(\frac{\overline{\mu}(A)^{1/p}}{k}\right)$ est continue. Montrons le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *Sous les hypothèses de nôtre section, N_n vérifie*

$$E\Big(\sum_x |N_n(x)p_i - N_n^i(x)|^2\Big) = \circ(n^{3/2}).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_x |N_n(x)p_i - N_n^i(x)|^2\Big) &= E\Big(\sum_x |\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k=x\}}(p_i - 1_{\{I_k=i\}})|^2\Big) \\
&= E\Big(\sum_x \sum_{k,l=0}^{n-1} 1_{\{S_k=x\}} 1_{\{S_l=x\}}(p_i - 1_{\{I_k=i\}})(p_i - 1_{\{I_l=i\}})\Big) \\
&= 2E\Big(\sum_x \sum_{n-1\geq k>l\geq 0} 1_{\{S_{k-l}=0\}} \circ T^l 1_{\{S_l=x\}}(p_i - 1_{\{I_{k-l}=i\}} \circ T^l)(p_i - 1_{\{I_0=i\}} \circ T^l)\Big) \quad (3.1) \\
&+ \sum_x \sum_{k=0}^{n-1} E(1_{\{S_k=x\}}(p_i - 1_{\{I_k=i\}})^2).
\end{aligned}$$

Comme $\sum_x 1_{\{S_k=x\}} = 1$, le dernier terme de la dernière égalité est en $O(n)$ donc en $\circ(n^{3/2})$.

$$\sum_x \sum_{k=0}^{n-1} E(1_{\{S_k=x\}}(p_i - 1_{\{I_k=i\}})^2) = \sum_{k=0}^{n-1} E(p_i^2 + 1_{\{I_k=i\}} - 2p_i 1_{\{I_k=i\}}) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} p_i(1-p_i) = \circ(n^{3/2}).$$

Interessons-nous au terme dans (3.1), la continuité de $E(1_{\{I_k=0\}}.)$ nous permet d'appliquer le corollaire 4.3 de [12], on peut ensuite utiliser une comparaison somme-intégrale pour conclure :

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sum_x \sum_{k>l} 1_{\{S_{k-l}=0\}} \circ T^l 1_{\{S_l=x\}}(p_i - 1_{\{I_{k-l}=i\}} \circ T^l)(p_i - 1_{\{I_0=i\}} \circ T^l)\Big) \\
&= \sum_{k>l} E\Big(1_{\{S_{k-l}=0\}}(p_i - 1_{\{I_{k-l}=i\}})(p_i - 1_{\{I_0=i\}})\Big) \\
&= \sum_{k>l} E((p_i - 1_{\{I_0=i\}})P^{k-l}(1_{\{S_{k-l}=0\}}(p_i - 1_{\{I_0=i\}})) \\
&= \sum_{k>l} O(\frac{1}{k-l}||(p_i - 1_{\{I_0=i\}}).||_{L(\tilde{B}_1,\tilde{B}_2)}||(p_i - 1_{\{I_0=i\}})||_{\tilde{B}_1'}) \\
&= O(||(p_i - 1_{\{I_0=i\}}).||_{L(\tilde{B}_1,\tilde{B}_2)}||(p_i - 1_{\{I_0=i\}})||_{\tilde{B}_1'} \sum_k \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l}) \\
&= O(||(p_i - 1_{\{I_0=i\}}).||_{L(\tilde{B}_1,\tilde{B}_2)}||(p_i - 1_{\{I_0=i\}})||_{\tilde{B}_1'} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)) \\
&= O(n\ln(n)) \\
&= \circ(n^{3/2}).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.2. *Sous les hypothèses du lemme précédent, pour tout $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+$ et tout $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$, la suite $n^{-3/2} \sum_x \sum_{i=1}^I |\sum_{j=1}^k \theta_j N^i_{nt_j}(x)|^2$ converge en loi vers $\sum_i p_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\sum_{j=1}^k \theta_j L_{t_j}(x)|^2 dx$.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$, on va comparer les fonctions caractéristiques. A partir de l'identité remarquable $|a^2 - b^2| = |a-b||a+b|$ et l'inégalité de Hölder,

$$
\begin{aligned}
&\left| E\left(n^{-3/2} \sum_x \sum_{i=1}^{I} \left(|\sum_{j=1}^{k} \theta_j N^i_{nt_j}(x)|^2 - |\sum_{j=1}^{k} \theta_j p_i N_{nt_j}(x)|^2 \right) \right) \right| \\
&\leq \left| n^{-3/2} \sum_x \sum_{i=1}^{I} E\left(\left(\sum_{j=1}^{k} \theta_j (N^i_{nt_j}(x) - p_i N_{nt_j}(x)) \right) \sum_{j=1}^{k} \theta_j (N^i_{nt_j}(x) + p_i N_{nt_j}(x)) \right) \right| \\
&\leq n^{-3/2} \sum_x \sum_{i=1}^{I} E\left(|\sum_{j=1}^{k} \theta_j (N^i_{nt_j}(x) - p_i N_{nt_j}(x))|^2 \right)^{1/2} E\left(|\sum_{j=1}^{k} \theta_j (N^i_{nt_j}(x) + p_i N_{nt_j}(x))|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{-3/2} \sum_x \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{k} k|\theta_j|^2 E\left(\left| (N^i_{nt_j}(x) - p_i N_{nt_j}(x)) \right|^2 \right)^{1/2} E\left(|(N^i_{nt_j}(x) + p_i N_{nt_j}(x))|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

D'après le lemme 3.2.1, la première espérance est en $o((nT)^{3/2})$ on peut donner le comportement de la seconde à l'aide du théorème limite local ($||\mathcal{H}_{0,n}|| = O(n^{1/2})$).

$$
\begin{aligned}
E\left(|(N^i_n(x) + p_i N_n(x))|^2 \right) &= E(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1_{\{S_k=x\}} 1_{\{S_j=x\}} (p_i + 1_{\{I_k=i\}})) \\
&\leq 2E(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} 1_{\{S_k=x\}} 1_{\{S_{j-k}=0\}} \circ \overline{T}^k (p_i + 1_{\{I_k=i\}})) \\
&\leq 4E(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} 1_{\{S_{j-k}=0\}}) \\
&\leq 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} ||\mathcal{H}_{0,j-k}|| \\
&\leq 4Cn^{3/2}.
\end{aligned}
$$

On en déduit après passage à la racine et en notant T un majorant des t_j,

$$
\left| E\left(\sum_x \left(|\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{k} \theta_j N^i_{nt_j}(x)|^2 - |\sum_i \sum_{j=1}^{k} \theta_j p_i N_{nt_j}(x)|^2 \right) \right) \right| = o((nT)^{3/2}). \tag{3.2}
$$

Comme les t_j sont fixés, il s'agit d'un $o(n^{3/2})$ et

$$
n^{-3/2} E\left(\sum_x \sum_{i=1}^{I} \left(|\sum_{j=1}^{k} \theta_j N^i_{nt_j}(x)|^2 - |\sum_{j=1}^{k} \theta_j p_i N_{nt_j}(x)|^2 \right) \right)
$$

converge vers 0.

Soit $r \in \mathbb{R}$, comme l'exponentielle complexe est lipschitzienne, on en déduit que

$$E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^I|\sum_{j=1}^k\theta_jN^i_{nt_j}(x)|^2\right)\right)$$
$$-E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^I|p_i\sum_{j=1}^k\theta_jN_{nt_j}(x)|^2\right)\right)$$

Converge vers 0 avec n. De plus,

$$\left|E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^I|\sum_{j=1}^k\theta_jN^i_{nt_j}(x)|^2\right)\right)\right. \tag{3.3}$$
$$\left.-E\left(\exp\left(ir\sum_{i=1}^Ip_i^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\sum_{j=1}^k\theta_jL_{t_j}(x)|^2dx\right)\right)\right|$$
$$\leq\left|E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^I|\sum_{j=1}^k\theta_jN^i_{nt_j}(x)|^2\right)\right)\right. \tag{3.4}$$
$$\left.-E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^Ip_i^2|\sum_{j=1}^k\theta_jN_{nt_j}(x)|^2\right)\right)\right| \tag{3.5}$$
$$+\left|E\left(\exp\left(irn^{-3/2}\sum_x\sum_{i=1}^Ip_i^2|\sum_{j=1}^k\theta_jN_{nt_j}(x)|^2\right)\right)\right. \tag{3.6}$$
$$\left.-E\left(\exp\left(ir\sum_{i=1}^Ip_i^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\sum_{j=1}^k\theta_jL_{t_j}(x)|^2dx\right)\right)\right| \tag{3.7}$$

On a vu avec (3.2) que le premier terme (3.5) convergeait vers 0. En notant que

$$n^{-3/2}\sum_{x\in\mathbb{Z}}|\sum_{j=1}^k\theta_jN_{nt_j}(x)|^2$$
$$=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{\frac{l}{n^{1/2}}}^{\frac{l+1}{n^{1/2}}}|\sum_{j=1}^k\theta_jn^{-1/2}N_{nt_j}(\lfloor xn^{1/2}\rfloor)|^2dx\quad=\int_{x\in\mathbb{R}}|\sum_{j=1}^k\theta_jn^{-1/2}N_{nt_j}(\lfloor xn^{1/2}\rfloor)|^2dx;$$

On peut appliquer la proposition 1.5.7 page 31 (la vérification des hypothèse de ce théorème est faite avec (5.10) à la page 90 dans un cadre un peu plus général dans la deuxième partie de ce manuscrit) et ainsi, avec la continuité de $G : C^{pm}([0,T],L^2_{\overline{\mu}}) \to \mathbb{R}$ (où $(C^{pm}([0,T],L^2_{\overline{\mu}}),\|.\|)$ désigne l'espace des fonctions continues par morceaux de $[0,T]$ dans

$L^p_{\overline{\mu}}$ et $\|(X_t)_{t\in[0,T]}\| := \sup_t \|X_t\|_{L^2_{\overline{\mu}}}$) définie pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$ par

$$G((X_t)_{t\in[0,T]}) := \|\sum_{j=1}^{k} \theta_j X_{t_j}\|_{L^2_{\overline{\mu}}}.$$

Cela assure la convergence en loi de $G\left(n^{-1/2}N_{nt_j}(\lfloor xn^{1/2}\rfloor\right)$ vers $\int_{-\infty}^{+\infty} |\sum_{j=1}^{k} \theta_j L_{t_j}(x)|^2 dx$ et ainsi la convergence du deuxième terme de (3.7) vers 0. On obtient la convergence simple des fonctions caractéristiques et donc la convergence en loi vers la loi voulue.

□

Avant de démontrer le théorème 3.1.2, montrons un dernier lemme,

Lemme 3.2.3. *Avec les hypothèses de notre section,* $n^{-3/4}\sup_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)$ *converge vers* 0 *en probabilité.*

Démonstration. Remarquons avec les comparaisons séries intégrales et la majoration $||\mathcal{H}_{n,x}|| \leq C'\frac{1}{(1+n)^{1/2}}$ due à la proposition 2.2.1 que

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_x |N_n(x)|^5\Big) &= \sum_x E\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n} 1_{\{S_k=x\}}1_{\{S_j=x\}}1_{\{S_l=x\}}1_{\{S_i=x\}}\Big)\\
&= E\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{S_k=S_l=S_j=S_i=S_m\}}\Big)\\
&\leq 24E\Big(\sum_{0\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq n-1} P^m\left(1_{\{S_{m-l}=0\}}\circ\overline{T}^l 1_{\{S_{l-k}=0\}}\circ\overline{T}^j 1_{\{S_{k-j}=0\}}\circ\overline{T}^k 1_{\{S_{j-i}=0\}}\circ\overline{T}^i\right)\Big)\\
&\leq 24\sum_{0\leq k\leq j\leq l\leq m\leq n-1} E\left(P^{m-l}\left(1_{\{S_{m-l}=0\}}P^{l-k}\left(1_{\{S_{l-k}=0\}}P^{k-j}\left(1_{\{S_{k-j}=0\}}P^{j-i}1_{\{S_{j-i}=0\}}\right)\right)\right)\right)\\
&\leq 24C'^4\sum_{0\leq k\leq j\leq l\leq m\leq n-1}\frac{1}{(m-l+1)^{1/2}}\frac{1}{(l-k+1)^{1/2}}\frac{1}{(k-j+1)^{1/2}}\frac{1}{(j-i+1)^{1/2}}\\
&+ o(n^3)\\
&\leq C_3 n^3.
\end{aligned}$$

Montrons que $n^{-3/4}\sup_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)$ converge vers 0 en probabilité : soit $\epsilon > 0$, avec

l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left(\sup_x n^{-3/4}N_n(x)>\epsilon\right) \leq & \overline{\mu}(\exists x,\ |x|>An^{1/2},\ N_n(x)>0)\\ & +\overline{\mu}(\exists x,\ |x|\leq An^{1/2},\ n^{-3/4}N_n(x)>\epsilon)\\ \leq & \overline{\mu}(\exists x,\ |x|>An^{1/2},\ N_n(x)>0)\\ & +\sum_{|x|\leq An^{1/2}}\epsilon^{-5}n^{-15/4}E\left((N_n(x))^5\right)\\ \leq & \overline{\mu}(\exists x,\ |x|>An^{1/2},\ N_n(x)>0)+C_3\epsilon^{-5}An^{-1/4}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité converge vers 0 pour A assez grand et $n\to\infty$ ce qui nous donne le résultat. □

Montrons maintenant la convergence des lois finies dimensionnelles associées au processus $\left(n^{-3/4}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{I}\xi_i(x)N^i_{nt}(x)\right)_{t\geq 0}$:

Soient $t_1,\dots,t_k$, $\theta_1,\dots,\theta_k$ des réels, et soit $U>0$ un majorant des t_j, on souhaite montrer la convergence en loi de $\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{k}\xi_i(x)N^i_{nt_j}\theta_j$ vers
$\sum_{i=1}^{I}p_i^2\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\theta_jL_{t_j}(x)dZ(x)$ où Z représente un mouvement Brownien indépendant de $(L_t)_t$ par un calcul explicite de la fonction caractéristique $\varphi_{n,t_1,\dots,t_k}(\theta_1,\dots,\theta_k)$ associée
.
Par indépendance des $\xi_i(x)$ entre eux et vis à vis de la marche, en notant $\lambda_i(\theta)$ la fonction caractéristique associée à la loi ξ_i, on obtient

$$\begin{aligned}&E\Big(exp(in^{-3/4}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{k}\xi_i(x)N^i_{nt_j}(x)\theta_j)\Big)=\\ &E\Big(\prod_x E(exp(in^{-3/4}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{k}\xi_i(x)N^i_{nt_j}(x)\theta_j)|N^i_{nt},\ i\in I,\ t\in\mathbb{R}_+)\Big)\\ &=E\Big(\prod_x\prod_i\lambda_i\Big(n^{-3/4}\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j\Big)1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|>\epsilon\}}\Big)\\ &+E\Big(\prod_x\prod_i\lambda_i\Big(n^{-3/4}\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j\Big)1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|\leq\epsilon\}}\Big).\end{aligned}$$

Fixons $\eta_0>0$ et $1\geq\epsilon_0>0$ tels que pour tout $i\in I$ et tout $u\in\mathbb{R}$ vérifiant $|u|\leq\epsilon_0$ on ait :

$$|\lambda_i(u)-e^{-c_iu^2}|\leq u^2\eta_0.$$

Les fonctions caractéristiques pouvant se majorer par 1, la première espérance se majore par :

$$\overline{\mu}(\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|>\epsilon),$$

qui converge vers 0 avec n par convergence en loi de $n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j$ vers 0.

$E\Big(\prod_x\prod_i\lambda_i\Big(n^{-3/4}\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j\Big)\Big)1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|\leq\epsilon_0\}}\Big)$ peut être dominé de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
&\Big|E\Big(\prod_x\prod_i\lambda_i\Big(n^{-3/4}\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j\Big)\Big)1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|\leq\epsilon_0\}}\Big)-\\
&E\left(exp(-\sum_x n^{-3/2}\sum_i c_i|\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|^2)1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|\leq\epsilon_0\}}\right)\Big|\\
&\leq E\left(\sum_{x\in\mathbb{Z},0\leq i\leq I}\left(n^{-3/4}\sum_{j=1}^k\theta_j N^i_{nt_j}(x')\right)^2\eta_0 1_{\{\sup_{x\in\mathbb{Z}}|n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j|\leq\epsilon_0\}}\right)\\
&\leq\eta_0(I\max_{i\in I}\{|c_i|\}\sum_{j=1}^k|\theta_j|)^2E\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(n^{-3/4}N_{nU}(x')\right)^2\right).
\end{aligned}$$

L'espérance de la dernière inégalité est bornée, en effet, en utilisant la propriété 2.2.1, on a $||\mathcal{H}_{n,0}||_{L(B)}=O(n^{1/2})$ et ainsi

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}}(N_{nT}(x'))^2\right)&=E(\sum_x\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{S_i=S_k\}}1_{\{S_k=x\}})\\
&=n+2E(\sum_{0\leq i<k\leq\lfloor Un\rfloor-1}1_{\{S_k-i=0\}}\circ\overline{T}^i)\\
&=n+2\sum_{0\leq i<k\leq\lfloor Un\rfloor-1}E\Big(H_{k-i}(1_{\overline{M}})\Big)\\
&\leq 3\lfloor Un\rfloor^{3/2}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

En remarquant que $\sup_x n^{-3/4}\sum_i\sum_j N^i_{nt_j}(x)\theta_j$ converge vers 0 en loi donc en probabilité, l'équation trouvée plus haut donne la convergence suivante, pour tout $r\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\Big(exp\left(in^{-3/4}\sum_x\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{k}\xi_i(x)N^i_{nt_j}\theta_j\right)\Big)\\
&\quad= E\Big(exp\left(-\sum_{i=1}^{I}c_ip_i^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\sum_{j=1}^{k}\theta_jL_{t_j}(x)|^2dx\right)\Big)\\
&\quad= E\Big(E\left(exp\left(-i\left(\sum_{i=1}^{I}c_ip_i^2\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\theta_jL_{t_j}(x)dZ(x)\right)\middle|(L_t)_t\right)\Big)\\
&\quad= E\Big(exp\left(-i\sum_{j=1}^{k}\theta_j\left(\sum_{i=1}^{I}c_ip_i^2\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}L_{t_j}(x)dZ(x)\right)\Big).
\end{aligned}$$

Où Z correspond à un mouvement Brownien de variance 1 indépendant de $(L_t)_{t\geq 0}$. Le passage à la dernière ligne se fait en identifiant le terme dans l'exponentielle à la fonction caractéristique d'une intégrale d'une fonction déterministe contre un mouvement Brownien (on pourra voir la proposition 7 [15]).

Montrons enfin la tension de la famille $\left(n^{-3/4}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{k}\xi_i(x)N^i_{nt_j}\theta_j\right)_{t_i,1\leq i\leq k}$. Pour cela, en remarquant que $|N^i_{nt}-N^i_{nt_1}|\leq|N_{nt}-N_{nt_1}|$, il suffit d'appliquer le résultat du théorème [15.6] de [6] (voir proposition 1.4.7 de la page 28) en montrant que

$$E\left(|N_{nt}-N_{nt_1}||N_{nt_2}-N_{nt}|\right)\leq C(t_2-t_1)^{3/2}$$

L'équation (3.8), implique

$$E\Big(|N_{nt_1}-N_{nt_2}|^2\Big)=E\Big(|N_{\lfloor nt_1\rfloor-\lfloor nt_2\rfloor}|^2\Big)\leq C|\lfloor nt_1\rfloor-\lfloor nt_2\rfloor|^{3/2}.$$

Ainsi, comme les ξ_i sont centrés et indépendants des autres données,

$$\begin{aligned}
E\Big(n^{-3/2}|\sum_i\sum_x\xi_i(x)(N_{nt_1}-N_{nt_2})(x)|^2\Big)&\leq n^{-3/2}\sum_i\sum_x E\Big(|N^i_{\lfloor nt_1\rfloor-\lfloor nt_2\rfloor}(x)|^2\Big)E(\xi_i^2)\\
&\leq CI\max_{i\in I}E(\xi_i^2)\left(\frac{1}{n}|\lfloor nt_1\rfloor-\lfloor nt_2\rfloor|\right)^{3/2}\\
&\leq C'I(t_2-t_1+\frac{2}{n^{3/2}})^{3/2}.
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent :
soit $n(t_2-t_1)\geq 1$ et dans ce cas le dernier terme de l'inégalité précédente peut se majorer

par $9CI(t_2 - t_1)^{3/2}$.
Soit $n(t_2 - t_1) < 1$, dans ce cas on a deux possibilités ou t et t_1 se situent dans le même intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ et alors $|N_{nt} - N_{nt_1}| = 0$. Ou alors ce sont t et t_2 qui sont dans un intervalle de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ et dans ce cas $|N_{nt_2} - N_{nt}| = 0$, et l'inégalité voulue est encore vérifiée.

$$E\Big(|N^i_{\lfloor nt_1 \rfloor - \lfloor nt_2 \rfloor}(x)|^2\Big) \leq n^{3/2}(t_2 - t_1)^{3/2}.$$

Le théorème (15.6) du [6] permet de conclure sur la tension du processus $\Big(n^{-3/4} \sum_x \sum_i \xi_i(x) N^i_{nt}(x)\Big)$
On a bien la convergence en loi dans $D(0, \infty)$ pour la métrique J_1 du processus $\Big(n^{-3/4} \sum_x \sum_i \xi_i(x) N^i_{nt}($
vers le processus
$\sum_i c_i p_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} L_t(x) dZ(x)$.

Chapitre 4

Nombre d'auto-intersections : résultat et applications.

On démontre ici un théorème limite fonctionnel pour une classe de systèmes dynamiques qui se traduit pour les $\mathbb{Z}$-extensions présentées au chapitre 2 en un théorème limite fonctionnel du nombre d'auto-intersections du flot d'un gaz de Lorentz et du flot géodésique respectivement. Ce résultat s'inspire de l'étude de Pène [30] pour le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}^2$-périodique et fait l'objet d'une soumission [34].

4.1 Résultat général sur les auto-intersections

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble. Etant donné un flot $(\mathcal{M}_0, \varphi^0, Ł_0)$ préservant une mesure $Ł_0$ et une projection
$\pi_{\mathcal{R}} : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{R}$, nous nous intéressons au comportement asymptotique, quand t tend vers l'infini, du nombre $\mathcal{N}_t$ d'auto-intersections de la trace $\pi_{\mathcal{R}} \circ \varphi^0$ des trajectoires du flot φ^0 sur $\mathcal{R}$ jusqu'au temps t :

$$\mathcal{N}_t(x) = |\{(s,u) \in [0,t]^2 : \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s(x)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u(x))\}|.$$

Dans le cas de flots $\mathbb{Z}$-périodiques on montre pour ces flots selon des hypothèses assez générales le résultat de convergence en loi suivant :

$$\frac{\mathcal{N}_t}{t^{3/2}} \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} e'_I \mathcal{V}_1.$$

Où e'_I est l'espérance du nombre d'auto-intersections modulo $\mathbb{Z}$ de deux trajectoires indépendantes de longueur unitaire et où $\mathcal{V}_1$ est une variable aléatoire liée au temps local d'un mouvement Brownien jusqu'au temps 1.

On considère une section de Poincaré (M, T, μ) avec $M \subset \mathcal{M}_0$ et T définit sur M (et par extension sur $\mathcal{M}_0$) par

$$T(x) = \varphi^0_{\tau(x)}(x)$$

avec $\tau(x) := \inf\{t \geq 0, \varphi^0_t(x) \in M\}$.

On suppose que $\inf \tau > 0$ et $\sup \tau < \infty$ et que μ est une mesure invariante vérifiant :

$$\int_{\mathcal{M}_0} f dL_0 = \int_M \left(\int_0^{\tau(x)} f(\varphi^0_t(x)) dt \right) d\mu(x)$$

de sorte que $(\mathcal{M}_0, \varphi^0, L_0)$ est isomorphe par l'application $\pi_1^{-1}(x, s) := \varphi^0_s(x)$ au flot de suspension au dessus de (M, T, μ) de fonction plafond τ avec M une variété Riemannienne. On suppose qu'il existe une transformation bijective $\mathcal{D} : M \to M$ et $\overline{M} \subset M$ tel que $M = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^n \overline{M}$ vérifiant $T \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ T$ et $\tau \circ \mathcal{D} = \tau$. L'application définie par

$$\pi_2^{-1} : (x, l) \to \mathcal{D}^l x.$$

est ainsi un isomorphisme de $(M, T, \frac{\mu}{\mu(\overline{M})})$ vers la $\mathbb{Z}$-extension de $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par l'application $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in \overline{M}$,

$$T(x) \in \mathcal{D}^{\phi(x)} \overline{M}.$$

En particulier, $T, \overline{T}$ et ϕ sont liés sur $\overline{M}$ par la relation

$$T(x) = \mathcal{D}^{\phi(x)}(\overline{T}(x)).$$

$\overline{\mu}$ est donné par la relation $\overline{\mu}(.) := \frac{\mu}{\mu(\overline{M})}$.
On supposera dans la suite que ϕ est uniformément bornée et on définit aussi le flot du système "quotient" $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ par :

$$\mathcal{M} := \{\varphi^0_t(x), x \in \overline{M}, t \in [0, \tau(x))\}$$

où $\varphi_t(x)$ est l'unique $y \in \mathcal{M}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$y = \mathcal{D}^n(\varphi^0_t(x)),$$

et L est la mesure de probabilité définie pour toute fonction f mesurable par

$$\int_{\mathcal{M}} f dL = \int_{\overline{M}} \left(\int_0^{\tau(x)} f(\varphi_t(x)) dt \right) d\overline{\mu}(x).$$

Afin d'étudier $(\mathcal{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, nous allons tout d'abord étudier le comportement asymptotique du nombre d'auto-intersections ν_n dans $\mathcal{R}$ des trajectoires du flot issu de $x \in M$ jusqu'au n-ième passage du flot dans M.
Cette quantité, assez naturelle est donnée par la formule suivante

$$\nu_n(x) := \sum_{k\geq 1} 2k \sum_{0\leq i<j\leq n-1} 1_{V_k^{(T^j(x))}} \circ T^i(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \nu_1(T^i x) \tag{4.1}$$

où $\nu_1 := |\{(s,t) \in [0,\tau(x)] : s \neq t : \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(x)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_t^0(x))\}|$ et $V_k^{(x)}$ désignant l'ensemble

$$V_k^{(x)} := \{y \in M, |[y] \cap [x]| = k\}$$

où $[x] := \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,\tau(x)]}(x))$ désigne pour $x \in M$ l'ensemble des points de $\mathcal{R}$ dans la trajectoire issue de x avant d'atteindre $T(x)$, (dans nos exemples il s'agira d'un morceau de géodésique).
On définit aussi pour la suite $V^{(x)} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k^{(x)}$ qui n'est autre que la donnée de

$$\{y \in M, [y] \cap [x] \neq \emptyset\}.$$

Avant de poser les hypothèses techniques, on introduit quelques notations supplémentaires : On suppose que M est dotée d'une famille de partitions essentielles $(\xi_i^j)_{i,j\in\mathbb{Z},i\leq j}$ en composantes connexes telle que pour tout $i \leq j$, des éléments de x_i^j forment une partition essentielle de $\overline{M} \simeq M \times \{0\}$ (i.e le éléments de la partition sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près et leur réunion est de mesure pleine).

Enfin, on notera $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^k$.

Hypothèses 4.1.1. *Soit $D > 0$, on suppose que les systèmes (M, T, μ), $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$, l'application ϕ et la suite de partitions $(\xi_i^j)_{i\leq j}$ vérifient les propositions suivantes :*

- *(a) $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est un systeme dynamique ergodique et ϕ est constant sur les éléments de ξ_{-1}^0.*
- *(b) Deux portions connexes de trajectoires ne peuvent se couper qu'un nombre essentiellement borné de fois avant de toucher la section de Poincaré :*

pour tout $x \in M$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{y \in M, |[x] \cap [y]| > D\}) = 0 \tag{4.2}$$

et pour tout $k \geq 1$,

$$\mu(\{y \in M, |[y] \cap [T^k y]| > D\}) = 0. \tag{4.3}$$

De plus on suppose que $|\nu_1| \leq D$ et l'application ϕ est constante sur les éléments de ξ_{-1}^0 On dispose aussi d'une hypothèse dite d'horizon borné : pour tout $x \in \overline{M}$ et $k \in \overline{M}$, $|\phi(x)| \leq D$ et $V_k^{(x)} \subset \bigcup_{N=-D}^{D} \mathcal{D}^N \overline{M}$.

(c) $\mathcal{D}^{-1} V_k^{(\mathcal{D}x)} = V_k^{(x)}$

(d) $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^k$ *vérifie*

$$\|S_n\|_{L^2_{\overline{\mu}}} = O(n^{1/2})$$

(e) Pour tout réel $\sqrt{\frac{3}{2}} > p > 1$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{Z}$, pour tout élément $A, B \subset \overline{M}$ avec A s'écrivant comme union d'éléments de ξ_{-k}^k et B comme union d'éléments de ξ_{-k}^∞ et pour tout $n \geq 2k+1$ vérifie le théorème limite local avec décorrélation suivant :

$$|\overline{\mu}(A \cap (S_n = N) \cap \overline{T}^{-n}(B)) - \frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k)}}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(n-2k)^{1/2}} \overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B)| \leq C_p \frac{k\overline{\mu}(B)^{1/p}}{n-2k}$$

où $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \overline{T}^k$.

(f) $\left(\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{1/2}}\right)_t\right)_n$ converge en distribution vers un mouvement Brownien $(B_t)_t$ de variance Σ et le temps local de S définit par $N_n(l) := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k = l\}}$ (où $l \in \mathbb{Z}$) vérifie

$$E_{\overline{\mu}}\left(|N_n(x) - N_n(y)|^2\right) = O\left(n^{1/2}|x-y|\right). \tag{4.4}$$

où la majoration se fait uniformément en $x, y \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(g) On introduit pour un ensemble mesurable $A \subset M$, l'ensemble

$$A^{[n]} := \bigcup_{Z \in \xi_{-n}^n, Z \cap A \neq \emptyset} Z,$$

et

$$A^{[n]-} := \bigcup_{Z \in \xi_{-n}^n, Z \subset A} Z.$$

Soit trois constantes $1 > a > 0$, $C > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que pour tout* $\epsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une partition* μ*-essentielle* $\mathcal{P}_\epsilon$ *de* $\overline{M}$ *contenant* $C\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil^{2\alpha}$ *éléments* $A \subset \overline{M}$ *vérifiant*

$$\overline{\mu}(A) \leq C\epsilon^{2\alpha}$$

et

$$\mu((\partial A)^{[n]}) \leq C\epsilon^\alpha a^n.$$

De plus, pour $A \in \mathcal{P}_\epsilon$, *on peut construire un ensemble* B_A *comme union d'éléments de* ξ_{-k}^k *tels que pour tout* $x, y \in A$

$$\bigcup_{m\geq 1} (V_m^{(x)})^{[k]} \triangle V_m^{(y)} \subset B_A.$$

De plus il existe $K > 0$ *tel que* $B_A \subset \bigcup_{|n|\leq K} \mathcal{D}^n \overline{M}$ *et vérifie*

$$\mu(B_A) \leq C(\epsilon + a^k)^\alpha.$$

Remarque 4.1.2. *L'hypothèse (e) est un théorème limite local pour* S_n *avec décorrélation. L'hypothèse (f) écrite par commodité découle souvent de théorème de perturbations à l'origine de l'hypothèse (e) comme le théorème 2.2.1 ou 2.1.4 et de critère d'uniformité :*

En effet, le Théorème limite local donne uniformément en N,
$P(S_n = N) = n^{-1/2}e^{-N^2/(\Sigma n)} + o(n^{-1/2})$, *et on peut en déduire un théorème limite central,*

$$\begin{aligned} P(n^{-1/2}S_n \in [a,b]) &= \sum_{an^{1/2}\leq k\leq bn^{1/2}} n^{-1/2}e^{-k^2/(\Sigma n)} + o(|b-a|) \\ &= \sum_{an^{1/2}\leq k\leq bn^{1/2}} \int_{kn^{-1/2}}^{(k+1)n^{-1/2}} e^{-k^2/(\Sigma n)}dt \\ &= \int_a^b e^{-\left(\frac{\lfloor n^{1/2}t\rfloor}{\Sigma^{1/2}n^{1/2}}\right)^2} dt + o(1) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{\Sigma}}dt. \end{aligned}$$

L'équation (4.4) de l'hypothèse (f) a d'ailleurs été traitée au lemme 2.4.1 en employant uniquement des propriétés desquelles découlent l'hypothèse (e) (les théorèmes 2.2.1 ou 2.1.4).

Théorème 4.1.3. *Pour* (M, T, μ) *isomorphe à une* $\mathbb{Z}$*-extension d'un système probabilisé* $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ *par une fonction de saut* ϕ *telle que* (M, T, μ), $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ *et* ϕ *satisfassent les hypothèses 4.1.1 ci-dessus, il existe une mesure de probabilité* μ_0 *absolument continue par rapport à* μ *telle que la suite de processus* $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{n\geq 1}$ *converge fortement en loi pour* $t \in [0,T]$ *vers un processus aléatoire non dégénéré* $(e_I\Gamma^{-2}\int_{\mathbb{R}}(L_t)^2dx)_{t\in[0,T]}$ *où* $(L_s)_{s\geq 0}$

désigne le temps local du mouvement brownien B apparaissant dans l'hypothèse (f), défini presque sûrement pour $a \in \mathbb{R}$

$$L_t(a) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{\{a-\epsilon \leq B_s \leq a+\epsilon\}} ds,$$

$\Gamma := \mu(\overline{M} \times 0)$ *et*

$$e_I := \int_{\overline{M} \times M} |[y] \cap [x]| d\mu(y) d\mu(x).$$

Remarque 4.1.4. *En introduisant une hypothèse supplémentaire*

(b') La mesure μ est $\mathcal{D}$-invariante et pour tout $x \in \mathcal{M}$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, $\pi_{\mathcal{R}}([x]) \cap \pi_{\mathcal{R}}([D^i x]) = \emptyset$ et $\tau \circ \mathcal{D}(x) = \tau(x)$.

Sur le système $(\mathcal{M}_0, \varphi_t^0, L_0)$, quitte à prolonger la bijection $\mathcal{D}$ définie sur M en $\mathcal{D}_0$ définie sur $\mathcal{M}_0$ en posant pour $x \in M$,

$$\mathcal{D}_0(\varphi_t^0(x)) = \varphi_t^0(\mathcal{D}_0(x)),$$

on peut définir la "projection" modulo $\mathbb{Z}$ $\bar{\pi}_{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{M}_0$ en posant

$$\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(x) = \pi_{\mathcal{R}}(x)$$

pour $x \in \mathcal{M}$ et vérifiant $\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}_0 x) = \pi_{\mathcal{R}}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}_0$. e_I peut alors se réécrire

$$e_I := \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} |\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x))}(x)) \cap \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x))}(y))| dL(y) dL(x).$$

On note $\pi := \pi_2 \circ \pi_1$ la projection d'un élément de $\mathcal{M}_0$ sur $\overline{M}$ et on introduit la notation

$$n_t(x) := \sup\{n, \sum_{k=0}^{n-1} \tau \circ T^k(x) \leq t\}$$

définie pour $x \in M$.

Théorème 4.1.5. *Soit $T > 0$. On considère le système dynamique $(\mathcal{M}_0, \varphi_t^0, Ł_0)$ décrit plus haut comme isomorphe à un flot de suspension au dessus de (M, T, μ) de fonction plafond τ bornée, avec $0 < \inf_M \tau$ et on suppose que (M, T, μ) vérifie les hypothèses du théorème 5.2.1 précédant ainsi que l'assertion (b'). Le processus $(\frac{1}{t^{3/2}} \mathcal{N}_{ts})_{s \in [0,T]}$ converge alors fortement en loi pour la mesure $Ł_0$ vers $\left(e'_I \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_s^2(x) dx\right)_{s \in [0,T]}$ lorsque t tend vers*

l'infini. Où

$$\begin{aligned} e'_I &:= \int_{\mathcal{M}_0\times\mathcal{M}} |\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(x)) \cap \pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(y))| d\text{Ł}_0(y) dL(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} |\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(x)) \cap \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(y))| dL(y) dL(x) \end{aligned}$$

désigne le nombre moyen d'intersections entre $\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(x))$ *et* $\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(y))$ *pour* x *et* y *choisis indépendamment sur le système* $(\mathcal{M}, \varphi_t, L)$ *pour la loi* L *et* $(\tilde{L}_s)_{s\geq 0}$ *le temps local d'un mouvement Brownien* $(\tilde{B})_{t\geq 0}$*. Le processus* $(\tilde{B})_{t\geq 0}$ *peut-être décrit comme la limite en loi du processus* $\left(\frac{1}{t^{1/2}} S_{n_{tu}} \circ \pi(.)\right)_{u\in[0,T]}$ *lorsque* $t \to \infty$*.*

4.2 Propriétés du gaz de Lorentz et du flot géodésique

On vérifie ici que les systèmes présentés en introduction que sont le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique et le flot géodésique sur un $\mathbb{Z}$-recouvrement de variété compacte de courbure strictement négative, vérifient bien nos hypothèses pour l'application $\pi_{\mathcal{R}}(q, v) := q$ donnant la position d'un élément à la phase (q, v).
Pour nos deux systèmes, la constante α des hypothèses (g) et (h) est donnée par la régularité de la transformation T. Ainsi, dans le billard T est $\frac{1}{2}$-Hölder sur les composantes connexes de $\overline{M}\backslash R_{-1,0}$ et on prend ($\alpha = \frac{1}{2}$) tandis que dans le cas du flot géodésique, T est Lipschitzienne sur ces mêmes composantes et on choisit $\alpha = 1$.

L'hypothèse (a) est vérifiée car les deux systèmes sont des systèmes dynamiques hyperboliques donc ergodiques, et la fonction ϕ est constante par construction de ξ^0_{-1}.

Hypothèse (b) : dans les deux systèmes, les trajectoires sont des géodéqiques, ainsi, lorsqu'elles ne sont pas confondues, la fréquence de leurs intersections est majorée par l'inverse du rayon d'injectivité (après s'être coupées une fois, les trajectoires ne se recouperont que lorsque leur distance à cette première intersection dépassera le rayon d'injectivité) Ainsi pour tous $x, y \in M$ dont les géodésiques ne sont pas confondues, $|[x] \cap [y]|$ est bien majoré par une constante $D > 0$. En fait le cas de trajectoires confondues entre, mettons $[y]$ et $[T^k y]$, intervient avec mesure nulle. En effet elles relèveraient d'orbites périodiques ou du moins d'orbites non ergodiques (les trajectoires seraient bornées) par conséquent $\mu(\{y, |[y] \cap [T^k y]| > D\}) = 0$ pour tout k. De plus les orbites sur $(\mathcal{M}_0, \varphi^0_t, \text{Ł}_0)$ touchent la section de Poincaré M en temps borné donc

$$\forall x \in \overline{M},\ |\phi(x)| \leq D$$

et $V_k^{(x)}$, l'ensemble des éléments dont les trajectoires coupe la trajectoire issue de x avant un passage sur la section de Poincaré est bornée aussi.

Hypothèse (c) : les hypothèses (c) et (b') sont satisfaites dans les deux systèmes car $\pi_{\mathcal{R}}$ la projection sur les coordonnées de position est $\mathbb{Z}$-périodique.

Hypothèse (d) est une conséquence du théorème de perturbation 2.2.1 de [43].

Hypothèse (f) :la convergence de $\left(\left(\frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{n^{1/2}}\right)_t\right)_n$ est un résultat connu pour les deux systèmes et peut aussi être vu comme la conséquence direct du Théorème de perturbation 2.2.1 de [12]. L'équation (4.4) découle elle directement du lemme 2.4.1.

Montrons l'hypothèse (g),

Pour nos deux systèmes, comme $\overline{M}$ peut se plonger dans une variété compacte, on peut le munir d'un atlas $\mathcal{U}$ fini dont les ouverts sont des boules d'un diamètre plus petit que la moitié du rayon d'injectivité qu'on note ici R. A l'atlas $\mathcal{U}$ on associe la partition finie $\bigwedge_{O\in\mathcal{U}} O$. On forme alors une partition essentielle $P_{\mathcal{U}}$ en prenant l'intérieur des éléments de la partition précédente car la mesure $\overline{\mu}$ est absolument continue par apport à la mesure de Lebesgue. A chaque élément
$A \in P_U$, on peut associer un élément x_A tel que pour tout $y \in A$, $d(x_A, y) \leq R$. Enfin, à chaque élément A on associe une carte $(O_A, \exp_A)$ où $\exp_A(x_A) = 0$. On peut choisir $\epsilon > 0$ et construire pour $m \in \mathbb{N}^*$ une partition essentielle $\mathcal{P}_m$ de $\overline{M}$, donnée par les éléments non vides de la forme

$$\exp_A^{-1}\left(A \cap \left]\frac{i-1+\epsilon}{m^\alpha}, \frac{i+1+\epsilon}{m^\alpha}\right[\times \left]\frac{j-1+\epsilon}{m^\alpha}, \frac{j+1+\epsilon}{m^\alpha}\right[\right)$$

avec $|i| \leq \frac{3\delta m^\alpha}{4}$,

Cette partition est finie car $\exp_A(O_A) \subset B(O, R)$; si on note N le nombre d'ouverts de la partition essentielle $\mathcal{P}_m$ de $\overline{M}$, on trouve

$$|\mathcal{P}_m| \leq N\lceil 2R\rceil m^{2\alpha}.$$

Enfin on se donne la partition essentielle $\tilde{\mathcal{P}}_m$ dont les éléments sont les composantes connexes de

$$A \backslash R_{-1,0}$$

pour $A \in \mathcal{P}_m$. Par construction on a bien

$$\overline{\mu}(A) \leq C\frac{1}{m^\alpha}.$$

Pour nos deux systèmes, $R_{-1,0}$ est constitué d'un nombre fini de courbes transverses C^1 qui recoupent $\overline{M}$ en un nombre fini de composantes connexes, ainsi $\tilde{\mathcal{P}}_m$ est encore constitué de $O(m^{2\alpha})$ éléments et le bord de $A\backslash R_{-1,0}$ est délimité par un nombre fini de courbes C^1 de courbure uniformément bornée. La longueur du bord de A, ∂A est donc de l'ordre du diamètre de A en $O(\frac{1}{m^\alpha})$.
Enfin, pour nos deux systèmes, les éléments de ξ_{-k}^k ont un diamètre exponentiellement décroissant : il existe $0 < a < 1$ tel que pour tout k et $B \in \xi_{-k}^k$,

$$\mathrm{diam}(B) = O(a^k).$$

Et ainsi,

$$\mu((\partial A)^{[k]}) \leq K_A(a^k\frac{1}{m^\alpha}).$$

Pour A un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_m$ avec m assez grand, $A \subset B(x_0,\epsilon)\backslash R_{-1,0}$ (qui est un ouvert de M donc connexe par arcs) pour x_A un élément de A fixé et $\epsilon > 0$. Pour $y \in A$,

$$V_k^{(x_A)}\Delta V_k^{(y)} \subset B_A$$

où $B_A := \tilde{T}^{-1}(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}A) \cup \tilde{T}^{-1}\left(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(T(A))\right) \cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}A \cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(T(A))$ est un ensemble qui se contrôle par (T et $\tilde{T}$ sont C^1 (dans le cas d'une variété hyperbolique à courbure strictement négative) ou 1/2-Hölderienne (pour le billard) sur $M\backslash R_{-1,0}$) :

$$B_A \subset \tilde{T}^{-1}\left(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}\left(B(T(y),C\epsilon^\alpha) \cup B(x_0,\epsilon)\right)\right) \cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}\Big(B(x_0,\epsilon) \cup B(T(x_0),\epsilon^\alpha)\Big)$$

Une trajectoire $[z]$ intersecte $[x]$ autant de fois qu'elle intersecte $[x_A]$ sauf si elle passe entre x et x_A ou bien entre Tx et Tx_A.

Montrons désormais pour $y \in A$

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (V_m^{(x_A)})^{[k]} \triangle V_m^{(y)} \subset (B_A)^{[k]}$$

pour k arbitrairement grand.

En notant que $V_m^{(y)} \backslash V_m^{(x_A)} \subset B_A$,

$$V_m^{(y)} \backslash (V_m^{(x_A)})^{[k]} \subset (V_m^{(y)} \backslash V_m^{(x_A)})^{[k]} \subset B_A^{[k]}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(V_m^{(x_A)})^{[k]} \backslash V_m^{(y)} &\subset (V_m^{(x_A)})^{[k]} \backslash V_m^{(x_A)} \cup V_m^{(x_A)} \backslash V_m^{(y)} \\ &\subset (\partial V_m^{(x_A)})^{[k]} \cup V_m^{(x_A)} \backslash V_m^{(y)}.\end{aligned}$$

Or comme T (et $\tilde{T}$) est continue, seul l'image par $\tilde{T}^{-1}$ des extrémité du segment géodésique $[x_A]$ ne sont pas dans un voisinage ouvert de $V_m^{(x_A)}$ ou de son complémentaire,

$$\partial V_m^{(x_A)} = \tilde{T}^{-1}(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(x_A)) \cup \tilde{T}^{-1}\left(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(T(x_A))\right) \cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(x_A) \cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(T(x_A)) \subset B_A$$

Ainsi,

$$(V_m^{(x_A)})^{[k]} \backslash V_m^{(y)} \subset B_A^{[k]}.$$

Il reste à s'assurer du controle de $\mu(B_A^{[k]})$ qui est donné, d'une part, à l'aide de l'hypothèse (d), par l'inclusion

$$\begin{aligned}B_A^{[k]} &\subset \tilde{T}^{-1}\left(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}}(B(T(x), C(\epsilon^\alpha + Ca^{\alpha k})) \cup B(x, \epsilon + Ca^k))\right) \\ &\cup \pi_{\mathcal{R}}^{-1}\pi_{\mathcal{R}} B(x, \epsilon) \cup B(T(x), \epsilon^\alpha + Ca^{\alpha k})\end{aligned}$$

et d'autre part par le fait que notre mesure μ prise dans le cas du billard et du flot géodésique sont équivalentes à la mesure de Lebesgue (elles s'écrivent localement $d\mu(r,\theta) = cos(\theta) dr d\theta$). En appliquant la mesure sur l'inclusion ci-dessus et l'invariance de T, on constate que $\mu(B_A^{[k]}) = O\left(\epsilon + C_2 a^k\right)^\alpha$.

Nos systèmes vérifient donc les hypothèses du théorème 5.2.1 on peut expliciter e_I pour les deux systèmes.

Lemme 4.2.1. *Avec les notations précédentes, pour $x \in M$, On rappelle que*

$$e_I := \int_{M \times \overline{M}} |[y] \cap [x]| d\mu(y) d\mu(x) = \int_{\overline{M}} E_\mu \left(\sum_{k=1}^{D} k 1_{V_k^{(x)}} \right) d\mu(x).$$

Pour les deux systèmes, e_I suit la relation

$$e_I = 4\Gamma E_{\overline{\mu}}(\tau),$$

où $\Gamma := \mu(\overline{M})$.

Démonstration. A partir du système (M, T, μ), on construit une section de Poincaré (M', T', μ') en ajoutant la section (virtuelle) constituée de
$[x] := [\pi_{\mathcal{R}}(x), \pi_{\mathcal{R}}(T(x))] \times \mathbb{S}$. La mesure μ' coïncide avec la mesure μ sur
$M := M' \backslash [x] \times \mathbb{S}$ et est toujours donnée en coordonnées locales par
$\mu(dr, d\theta) = cos(\theta) dr d\theta$.

Si on note pour $y \in M$, $\phi_M(y) := \inf\{n \in \mathbb{N}^*, T'^n x \in M\}$, on constate pour $y \in V_k^{(x)}$, $\phi_M(y) = k + 1$. En utilisant la formule de Kac, on obtient alors

$$\mu'(M') = \int_M \phi_M d\mu' = \int_M \phi_M d\mu = \mu(M) + \int_M \sum_{k=1}^{D} k 1_{V_k^{(x)}} d\mu.$$

On en déduit que

$$E_\mu \left(\sum_{k=1}^{D} k 1_{V_k^{(x)}} \right) = \mu'(M') - \mu'(M) = \mu'([x] \times \mathbb{S}) = 4\tau(x),$$

et

$$\begin{aligned} e_I &= \int_{\overline{M}} E_\mu \left(\sum_{k=1}^{D} k 1_{V_k^{(x)}} \right) d\mu(x) \\ &= \Gamma \int_{\overline{M}} E_\mu \left(\sum_{k=1}^{D} k 1_{V_k^{(x)}} \right) d\overline{\mu}(x) \\ &= 4\Gamma E_{\overline{\mu}}(\tau). \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Preuve du théorème limite du nombre d'auto-intersections 4.1.5.

5.1 Contrôle de l'espérance.

Dans la suite, en reprenant les notations de l'hypothèse (h) 68, on fixe $\epsilon = n^{-1/(20\alpha)}$ et on note $\mathcal{A}_n := \mathcal{P}_{\lfloor n^{1/(20\alpha)} \rfloor}$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $A \in \mathcal{A}_n$, on se fixe $x_A \in \overset{o}{A}$. On note de plus $k_n := \lfloor \log(n)^2 \rfloor$.

On s'attaque d'abord au cas discret et au théorème 5.2.1 le cas des auto-intersections pour le flot en découlera dans la section 5.4 . On montre d'abord que ν_n tel que décrit par (4.1) à la page 68 peut s'exprimer directement à partir de paramètres sur $\overline{M}$:

Soit $x \in M \times \{0\} \simeq \overline{M}$, les orbites $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décrites par $T^i(x) = \mathcal{D}^{S_i(x)}(\overline{T}^i(x))$, où S_i et $\overline{T}^i$ sont deux transformations sur $\overline{M}$, on peut dès lors réécrire ν_n : d'après l'hypothèse (b),

$$T^i(x) \in V_k^{(T^j(x))}$$

si et seulement si

$$T^i(x) \in \bigcup_{N=-D}^{D} \left(\mathcal{D}^{(N+S_j(x))}(\overline{M}) \cap V_k^{(T^j(x))} \right)$$

ou autrement dit,

$$\begin{cases} S_i(x) = S_j(x) + N \\ \overline{T}^i(x) \in \overline{M} \cap \mathcal{D}^{-(N+S_j(x))}(V_k^{(T^j(x))}) \end{cases}$$

ce qui se traduit avec l'hypothèse (d) par

$$\begin{cases} S_i(x) = S_j(x) + N \\ \overline{T}^i(x) \in \overline{M} \cap \mathcal{D}^{-N}(V_k^{(\overline{T}^j(x))}). \end{cases} \tag{5.1}$$

Pour $x \in \overline{M}$, ν_n définit donc une fonction sur $\overline{M} \simeq M \times \{0\}$ s'écrivant

$$\nu_n(x) := \sum_{N=-D}^{D} \sum_{k=1}^{D} 2k \sum_{0 \le i < j \le n-1} 1_{\{S_i = S_j + N\}} 1_{\mathcal{D}^{-N}(V_k^{(\overline{T}^j x)}) \cap \overline{M}} \circ \overline{T}^i(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \nu_1(\overline{T}^i x).$$

Afin d'appliquer notre hypothèse de décorrélation (e), on approche notre suite ν_n par des variables mesurables selon les cylindres $\xi_{-k_n}^{k_n}$:

$$\mathcal{V}_n(x) := \sum_{N=-D}^{D} \sum_{k=1}^{D} 2k \sum_{0 \le i < j \le n-1} 1_{\{S_i = S_j + N\}} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} 1_A \circ \overline{T}^j(x) 1_{D^{-N}(V_k^{(x_A)}) \cap \overline{M}} \circ \overline{T}^i(x).$$

Le proposition 5.1.1 qui suit nous assure que cette approximation ait bien lieu. Avant de donner l'énoncé formel et sa preuve, supposons que l'objet étudié soit bien $\mathcal{V}_n$ et donnons une esquisse de la preuve du théorème 5.2.1 :

L'équation (5.1) et l'hypothèse (f) assurent que la somme de Birkhoff S_n se comporte comme une marche aléatoire tandis que l'hypothèse de décorrélation (e) implique que $e_{(i,j)} := \sum_{A \in \mathcal{A}_n} 1_A \circ \overline{T}^j(x) 1_{D^{-N}(V_k^{(x_A)}) \cap \overline{M}} \circ \overline{T}^i(x)$ va se comporter lorsque l'écart entre i et j devient grand comme le nombre d'intersections entre deux portions de trajectoires générées indépendamment l'une de l'autre. En particulier $e(i,j)$ à une espérance qui s'approche, lorsque l'écart entre i et j est important, vers e_I (on disposera même d'un contrôle de cet écart). Ainsi $\mathcal{V}_n$ peut être séparé entre une suite de variables croissantes et une partie qui n'est autre qu'une somme de variables (presque) centrées qui modulo un certains contrôle devrait représenter une quantité négligeable.

$$\mathcal{V}_n := \sum_{N=-D}^{D} \sum_{0 \le i < j \le n-1} 1_{\{S_i = S_j + N\}} e_I + \sum_{N=-D}^{D} \sum_{0 \le i < j \le n-1} 1_{\{S_i = S_j + N\}} (e_I - e_{(i,j)})$$

$$\mathcal{V}_n \simeq \sum_{N=-D}^{D} \sum_{l \in \mathbb{Z}} N_n(N+l) N_n(l) e_I$$

Où $N_n(N) := \sum_{i=0}^{n-1} 1_{\{S_i = N\}}$ est le temps local de la "marche aléatoire" S_n. Les résultats de théorie des probabilités tel que la proposition 1.5.7 assurent que le temps local discret

de la marche aléatoire converge en loi vers le temps local d'un mouvement brownien :

$$\frac{1}{n^{1/2}} N_{\lfloor nt \rfloor}(\lfloor . n^{1/2} \rfloor)" \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} "(L_t(.))_t$$

En remplaçant les $\sum_{l\in\mathbb{Z}}$ du cas discret par des intégrales en passant au cas continue, on récupère la bonne normalisation en $n^{3/2}$:

$$\frac{1}{n^{3/2}} \mathcal{V}_{\lfloor nt \rfloor}" \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} " \int_{\mathbb{R}} L_t^2(x)dx$$

ce qui prouvera le théorème.

Reprenons la preuve formellement : on souhaite montrer dans le reste de cette partie le résultat suivant (utile pour le théorème).

Proposition 5.1.1. *Sous les hypothèses du théorème,*

(1)

$$\|\nu_n - \mathcal{V}_n\|_{L^1_{\overline{\mu}}} = o(n^{3/2})$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} E_{\overline{\mu}}(\nu_n) = \lim_{n\to\infty} n^{-3/2} E_{\overline{\mu}}(\mathcal{V}_n) = \frac{4}{3}\Gamma^{-2}\frac{e_I}{\sqrt{2\pi\Sigma}}. \tag{5.2}$$

où $\Gamma := \mu(\overline{M})$ désigne la constante de renormalisation de $\overline{\mu}$, Σ est la variance apparaissant dans l'hypothèse (e) de 4.1.1 et e_I est la constante donnée dans le théorème 5.2.1. ,

Dans le cas des systèmes présentés en section 4.2, le lemme 4.2.1 donne $e_I = 4\Gamma E_{\overline{\mu}}(\tau)$, on en déduit une limite "explicite" :

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} E_{\overline{\mu}}(\nu_n) = \frac{16}{3}\Gamma^{-1}(2\pi\Sigma)^{-1/2} E_{\overline{\mu}}(\tau).$$

Preuve de la proposition 5.1.1. On note

$$E^k_{i,n} := \overline{M} \cap T^{-n}(V_k^{(T^i x)}) = \bigcup_{N=-D}^{D} \left((S_n = N + S_i) \cap \overline{T}^{-n}(\mathcal{D}^{-N}(V_k^{(\overline{T}^i x)}) \cap \overline{M}) \right).$$

Pour $x \in \overline{M}$, on peut réécrire $\nu_n(x)$ pour $n \in \overline{M}$ sous la forme

$$\nu_n(x) = 2\sum_{k=1}^{D} k \sum_{0<i<j<n-1} 1_{E^k_{i,j}}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \nu_1(T^i x).$$

Pour $A \in \mathcal{A}_n$, on note $V_m^{(A)} := V_m^{(x_A)}$

et on approche $A \cap E_{0,n}^k$ par $A^{[k_n]} \cap T^{-n}((V_k^{(A)})^{[k_n]})$ On dispose de l'inclusion

$$\begin{aligned}&\left(A^{[k_n]} \cap T^{-n}((V_k)^{[k_n]})\right) \Delta \left(A \cap E_{0,n}^k\right)\\ &\subset \left((A^{[k_n]} \backslash A^-) \cap T^{-n}\left(B_A^{[k_n]} \cup (V_k^{(A)})^{[k_n]}\right)\right) \cup \left(A^{[k_n]} \cap T^{-n}(B_A^{[k_n]})\right)\end{aligned}$$

On applique alors nos théorèmes limites locaux avec décorrélation en décomposant les ensembles de la forme $A' \cap T^{-n}B'$ selon leur cellules :

$$A' \cap T^{-n}B' = \bigcup_{N=-D}^{D} A' \cap \overline{T}^{-n}(\mathcal{D}^{-N}B' \cap \overline{M}) \cap (S_n = N).$$

Pour $E \subset \overline{M}$, comme $\mu(E) = \Gamma\overline{\mu}(E)$. On en déduit avec le théorème limite local de l'hypothèse (e)

$$\begin{aligned}\mu(A^{[k_n]} \cap T^{-n}B_A^{[k_n]}) &= \sum_{N=-D}^{D} \Gamma\overline{\mu}\Big((A)^{[k_n]} \cap \{S_n = N\} \cap \overline{T}^{-n}(\mathcal{D}^{-N}(B_A^{[k_n]}) \cap \overline{M})\Big)\\ &\leq \sum_{N=-D}^{D} \Big(\frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k_n)}}}{(2\pi\Sigma(n-2k_n))^{1/2}}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\mu(B_A^{[k_n]})\\ &\quad + ck_n\overline{\mu}(A^{[k_n]})^{1/p}(n-2k_n)^{-1}\Big)\end{aligned}$$

Or d'après les hypothèses (g) et (h),

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A^{[k_n]}) &\leq \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}((\partial A)^{[k_n]}) = O(n^{-1/10})\\ \mu(B_A^{k_n}) &= O(n^{-1/20}).\end{aligned}$$

Ainsi le deuxième terme dans l'inégalité ci-dessus est en $O(n^{-1+\frac{1}{9p}})$ avec $p > 1$ (hypothèse (e)) et on obtient la majoration

$$\mu(A^{[k_n]} \cap T^{-n}B_A^{[k_n]}) = O(n^{-13/20}).$$

Le même raisonnement (théorème limite locale avec décorrélation de l'hypothèse (e) puis majorations de l'hypothèse (h)) appliqué à
$\left(A^{[k_n]} \backslash A^{[k_n],-}\right) \cap T^{-n}\left(B_A^{[k_n]} \cup (V_k^{(A)})^{[k_n]}\right)$ donne

$$\begin{aligned}
&\mu\Big((A^{[k_n]}\backslash A^{[k_n]-})\cap T^{-n}(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]})\Big)\\
&=\sum_{N=-D}^{D}\Gamma\overline{\mu}\Big(A^{[k_n]}\cap\{S_n=N\}\cap T^{-n}(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]})\Big)\\
&=\sum_{N=-D}^{D}\Bigg(\frac{e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-2k_n)}}}{(2\pi\Sigma(n-2k_n))^{1/2}}\overline{\mu}((\partial A)^{[k_n]})\mu(T^{-n}(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]}))\\
&+ck_n\mu(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]})^{1/p}(n-2k_n)^{-1}\Big)
\end{aligned}$$

On a toujours avec l'hypothèse (h) et en majorant largement,

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}(\partial A)^{[k_n]}=O(n^{-3/20})\\
&\overline{\mu}(T^{-n}(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]}))\leq 2D
\end{aligned}$$

donnant l'encadrement suivant :

$$\mu\Big((A^{[k_n]}\backslash A^{[k_n]-})\cap T^{-n}(B_A^{[k_n]}\cup (V_k^{(A)})^{[k_n]})\Big)=O(n^{-13/20}),$$

la majoration étant uniforme sur les éléments A choisis.
On en déduit que

$$\mu\left(\left(A^{[k_n]}\cap T^{-n}((V_k^{(A)})^{[k_n]})\right)\Delta(A\cap E_{0,n}^k)\right)=O(n^{-13/20}) \tag{5.3}$$

On obtient ainsi le premier point de la proposition 5.1.1 : en effet, en constatant d'après l'hypothèse (a) que $\sum_{i=0}^{n-1}\nu_1(T^ix)=O(n)$, et en remarquant que pour $x\in\overline{M}$, $1_{E_{i,j}^k}(x)=1_{E_{0,j-i}^k}\circ\overline{T}^i(x)$,

$$\begin{aligned}
\nu_n(x)&=2\sum_{k=1}^{D}k\sum_{i<j=1}^{n}1_{E_{i,j}^k}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\nu_1(T^ix)\\
&=2\sum_{k=1}^{D}k\sum_{i<j=1}^{n}1_{E_{0,j-i}^k}\circ\overline{T}^i(x)+O(n)\\
&=2\sum_{k=1}^{D}k\sum_{i<j=1}^{n}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}1_A\circ\overline{T}^j(x)1_{E_{0,j-i}^k}\circ\overline{T}^i(x)+O(n).
\end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de la relation (5.3), de comparaisons séries-intégrales, et $|\mathcal{A}_n|=$

$O(n^{1/10})$,

$$\begin{aligned}\|\nu_n - \mathcal{V}_n\|_{L^1} &= 2\sum_{k=1}^{D} k \sum_{i<j=1}^{n} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \mu\left(\left(A^{[k_n]} \cap T^{-(j-i)}((V_k^{(x_A)})^{[k_n]})\right)\Delta(A\cap E_{0,n}^k)\right)\\ &\quad + O(n)\\ &= O(n) + O(n^{39/20}) = o(n^{3/2}).\end{aligned}$$

Montrons le deuxième point du théorème :

En décomposant

$$\left|\overline{\mu}\left(\bigcup_{N=-D}^{D} A^{[k_n]} \cap \overline{T}^{-n}\left(\mathcal{D}^{-N}\left((V_k^{(x_A)})^{[k_n]}\right)\cap\overline{M}\right)\cap(S_n = N)\right) - \overline{\mu}\left(A\cap E_{0,n}^k\right)\right|$$
$$\leq \tilde{C}_2 n^{-13/20}.$$

On en déduit en appliquant le théorème limite local avec décorrélation (hypothèse (e)) et le développement $e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ que

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A\cap E_{0,n}^k) &= \left(\sum_{N=-D}^{D}(2\pi\Sigma)^{-1/2}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\frac{\overline{\mu}(\overline{M}\cap\mathcal{D}^{-N}((V_k^{(A)})^{[k_n]}))}{(n-k_n)^{1/2}}e^{-\frac{N^2}{2\Sigma(n-k_n)^{1/2}}}\right)\\ &\quad \pm c_0 n^{-13/20}\\ &= (2\pi\Sigma)^{-1/2}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\sum_{N=-D}^{D}\frac{\overline{\mu}(\overline{M}\cap\mathcal{D}^{-N}((V_k^{(x_A)})^{[k_n]})}{(n-k_n)^{1/2}} \pm c_1 n^{-13/20}.\end{aligned}$$

En remarquant que pour $x \in A$, $|\overline{\mu}((V_k^{(x_A)})^{[k_n]})) - \overline{\mu}(V_k^{(x)})| \leq \mu(B_A^{[k_n]}) \leq n^{-1/40}$ et $\overline{\mu}(A^{[k_n]}) = O(n^{-1/10})$, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{D} k\overline{\mu}(A\cap E_{0,n}^k) = (2\pi\Sigma)^{-1/2}\sum_{k=1}^{D} k\overline{\mu}(A^{[k_n]})\sum_{N=-D}^{D}\frac{\overline{\mu}(\overline{M}\cap D^{-N}(V_k^{(x_A)}))}{(n-2k_n)^{1/2}} \pm c_2 n^{-25/40} \quad (5.4)$$

$$= (2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}\mu(A)\sum_{k=1}^{D} k\frac{\mu(V_k^{(x_A)})}{(n-2k_n)^{1/2}} \pm c_2 n^{-25/40}. \quad (5.5)$$

La dernière ligne se déduit des hypothèses (g) et (h) pour $A \subset \overline{M}$ un élément de $\mathcal{A}_n$,

avec la majoration pour n assez grand

$$\left|\sum_{k=1}^{D} k\mu(A^{[k_n]})\mu(V_k^{(x_A)}) - \int_A \sum_{k=1}^{D} k\mu(V_k^{(x)})d\mu(x)\right| \tag{5.6}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{D} k\left(\mu((\partial A)^{[k_n]}) + \mu(A^{[k_n]})\mu(B_A^{[k_n]})\right)$$

$$\leq C\mu(A)n^{-1/20}. \tag{5.7}$$

Avec $C > 0$ uniformément en A. On rappelle que

$$e_I := \int_{\overline{M}\times M} |[\pi_{\mathcal{R}}(y), \pi_{\mathcal{R}}(T(y))] \cap [\pi_{\mathcal{R}}(x), \pi_{\mathcal{R}}(T(x))]|\, d\mu(y)d\mu(x) \tag{5.8}$$

$$= \int_{\overline{M}} \sum_{k=1}^{D} k\mu(V_k^{(x)})d\mu(x). \tag{5.9}$$

D'où

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\sum_{k=1}^{D} k\overline{\mu}(A\cap E_{0,n}^k) = (2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}e_I\frac{1}{n^{1/2}} \pm c_2 n^{-25/40}|\mathcal{A}_n|$$

$$= (2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}e_I\frac{1}{n^{1/2}} \pm c_2 n^{-21/40}$$

Enfin, on peut calculer $E_{\overline{\mu}}(\nu_n)$ en exploitant l'invariance de $\overline{\mu}$ par $\overline{T}$ et en rappelant que $E_{i,j}^k = E_{j,i}^k$ et $T^{-i}E_{0,j-i}^k = E_{i,j}^k$,

$$E_{\overline{\mu}}(\nu_n) = E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{k=1}^{D}\sum_{i,j=0}^{n-1} k1_{E_{i,j}^k}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{D} k\sum_{j=1}^{n-i-1} E_{\overline{\mu}}\left(1_{E_{j,j+i}^k}\right) + E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{D} k1_{E_{j,j}^k}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{k=1}^{D} k1_{E_{0,i}^k}\right) + nE_{\overline{\mu}}\left(\sum_{k=1}^{D} k1_{E_{0,0}^k}\right)$$

ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}(\nu_n) &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)k^{-1/2}(2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}e_I + O(n^{59/40}) \\ &= (2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}e_I \sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)k^{-1/2} + O(n^{59/40}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)k^{-1/2} &= n^{3/2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-\frac{k+1}{n}}{(k/n)^{1/2}} \\ &= n^{3/2}\int_0^1 \frac{1-\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}}{(\lfloor nx\rfloor/n)^{1/2}} 1_{\{x\geq\frac{1}{n}\}}dx. \end{aligned}$$

En remarquant que $\lfloor nx\rfloor \geq \frac{nx}{2}$ pour $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$, on dispose de la majoration

$$\frac{1-\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}}{(\lfloor nx\rfloor/n)^{1/2}} \leq \frac{1-x}{(x/2)^{1/2}}$$

et le théorème de convergence dominée permet de conclure

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)k^{-1/2} \underset{n}{\sim} n^{3/2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^{1/2}}dx$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2}E_{\overline{\mu}}(\nu_n) = \lim_{n\to\infty} n^{-3/2}E_{\overline{\mu}}(\tilde{\mathcal{V}}_n) = \frac{4}{3}(2\pi\Sigma)^{-1/2}\Gamma^{-2}e_I.$$

□

5.2 Contrôle en norme L^1 : énoncé

On rappelle ici le théorème 5.2.1 qu'on démontre dans ce qui suit.

Théorème 5.2.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une mesure de probabilité μ_0 absolument continue par rapport à μ telle que la suite de processus $\left(\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{t\geq 1}\right)_{n\geq 1}$ converge fortement en loi pour $t\in[0,T]$ vers un processus aléatoire non dégénéré $(e_I\Gamma^{-2}\int_{\mathbb{R}}(L_t)^2dx)_{t\in[0}$ où $(L_s)_{s\geq 0}$ désigne le temps local du mouvement brownien B apparaissant dans l'hypothèse*

(f) et

$$e_I := \int_{\overline{M}\times M} |[y]\cap[x]| d\mu(y) d\mu(x).$$

Lorsque le système est l'un de ceux présentés en section 5, $(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable $4\Gamma^{-1}E_{\overline{\mu}}(\tau)\int_{\mathbb{R}} L_1^2(x)dx$.

Toujours avec les notations de la partie précédente

Proposition 5.2.2. *En reprenant les hypothèses et notations de notre théorème,*

$$\frac{1}{n^{3/2}}\left\|\nu_n - \Gamma^{-2}e_I\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n^2(x)\right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} \to 0.$$

On rappelle que

$$\mathcal{V}_n := \sum_{|N|\leq D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\sum_{k=1}^{D} 2\sum_{0\leq i<j\leq n-1} k 1_{A^{[k_n]}}\circ\overline{T}^i 1_{C^k_{A,N}}\circ\overline{T}^j 1_{\{S_{j-i}=N\}}\circ\overline{T}^i.$$

Où on note $C^k_{A,N} := \mathcal{D}^{-N}((V_k^{(A)})^{[k_n]})\cap\overline{M}$.
La proposition 5.1.1 assure la convergence $L^1_{\overline{\mu}}$ de $\frac{1}{n^{3/2}}(\mathcal{V}_n - \nu_n)$ vers 0. On montre donc la proposition en deux étapes ;

on montre d'abord (Etape 1) la convergence $L^2_{\overline{\mu}}$

$$\left(\frac{1}{n^{3/2}}\mathcal{V}_n - \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{|N|\leq D}\sum_{k=1}^{D} k\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C^k_{A,N})\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)N_n(x+N)\right) \underset{L^2}{\to} 0.$$

Puis (Etape 2)

$$E_{\overline{\mu}}\Bigg(\frac{1}{n^{3/2}}\Bigg|\sum_{|N|\leq D}\sum_{k=1}^{D} k\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\sum_{0\leq i,j\leq n-1}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C^k_{A,N})1_{\{S_{j-i}=N\}}\circ\overline{T}^i$$
$$-\sum_{k=1}^{D} k\sum_{|N|\leq D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C^k_{A,N})\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)^2\Bigg|\Bigg) \to 0$$

pour conclure avec la convergence en loi de ce dernier terme.

5.3 Contrôle en norme L^1 : preuve

On admet le lemme technique suivant démontré dans l'annexe A et qui repose essentiellement sur une application itérée de l'hypothèse (e) :

Lemme 5.3.1. *Etant donné $N, N' \leq D$ des entiers, et f, g, f', g' des fonctions telles que l'une d'entre elles puisse s'écrire $1_A - \overline{\mu}(A)$ avec A une union d'éléments de $\xi_{-k_n}^{k_n}$, les autres étant des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques 1_B avec $B \in \xi_{-k_n}^{k_n}$, alors*

$$\sum_{0\leq i,j,k,l\leq n-1} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) = o(n^3).$$

où la majoration $o(n^3)$ est uniforme en $\|f\|_\infty$, $\|f'\|_\infty$, $\|g\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$.

On démontre dans cette section la proposition 5.2.2 dont on reprend les notations.

Etape 1 :

Lemme 5.3.2. *La suite*

$$\left(\frac{1}{n^{3/2}}\left(\mathcal{V}_n - \sum_{k=1}^{D} k \sum_{|N|\leq D}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{A\in\mathcal{A}_n} \overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C_{A,N}^k)N_n(x+N)N_n(x)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge dans $L^2_{\overline{\mu}}$ vers 0.

Démonstration. En utilisant des inégalités de convexité et en remarquant que

$$\sum_{|N|\leq D} N_n(x+N)N_n(x) = n + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{|N|\leq D} 1_{\{S_{j-i}=N\}}\circ\overline{T}^{j-i},$$

on peut majorer la quantité qui suit.

$$E_{\overline{\mu}}\left(\left(\mathcal{V}_n - \sum_{k=1}^{D} k \sum_{|N|\leq D}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{A\in\mathcal{A}_n} \overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C_{A,N}^k)N_n(x+N)N_n(x)\right)^2\right) \leq$$

$$2E_{\overline{\mu}}\Bigg(\sum_{k=1}^{D} k \sum_{|N|\leq D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n} 2\sum_{0\leq i<j\leq n-1}\Big((1_{A^{[k_n]}} - \overline{\mu}(A^{[k_n]}))\circ\overline{T}^{i}1_{C_{A,N}^k}\circ\overline{T}^{j}$$

$$+\overline{\mu}(A^{[k_n]})(1_{C_{A,N}^k} - \overline{\mu}(C_{A,N}^k))\circ\overline{T}^{j}\Big)1_{\{S_{j-i}=N\}}\circ\overline{T}^{i}\Bigg)^2) + o(n^2)$$

$$\leq 4(E_1 + E_2).$$

Où

$$E_1 := E_{\overline{\mu}}\left(\left(\sum_{k=1}^{D} k \sum_{|N|\leq D} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \sum_{0\leq i<j\leq n-1} ((1_{A^{[kn]}} - \overline{\mu}(A^{[kn]}))1_{C^k_{A,N}} \circ \overline{T}^{j-i} 1_{\{S_{j-i}=N\}}) \circ \overline{T}^i\right)^2\right)$$

et

$$E_2 := E_{\overline{\mu}}\left(\left(\sum_{k=1}^{D} k \sum_{|N|\leq D} 2 \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \sum_{0\leq i<j\leq n-1} (\overline{\mu}(A^{[kn]})(1_{C^k_{A,N}} - \overline{\mu}(C^k_{A,N})) \circ \overline{T}^{j-i} 1_{\{S_{j-i}=N\}}) \circ \overline{T}^i\right)^2\right).$$

Dans les deux cas, les expressions dans la somme s'écrivent sous la forme

$$fg \circ \overline{T}^{j-i} 1_{\{S_{j-i}=N\}} \circ \overline{T}^i.$$

En posant $(f,g) := (1_{C^k_{A,N}} - \overline{\mu}(C^k_{A,N})1, 1_{C^k_{A,N}})$ pour E_1 et $(f,g) := (\overline{\mu}(A^{[kn]})1, (1_{C^k_{A,N}} - \overline{\mu}(C^k_{A,N})1)$ pour E_2.

On est amené à majorer pour N et N' fixés :

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n} \sum_{A'\in\mathcal{A}_n} \sum_{0\leq i\leq j, i\leq k\leq l\leq n-1} E_{\overline{\mu}}\left(fg \circ \overline{T}^{j-i} 1_{\{S_{j-i}=N\}} \left(f'g' \circ \overline{T}^{l-k} 1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right) \circ \overline{T}^{k-i}\right).$$

On applique alors le lemme 5.3.1 en distinguant les indices $i \leq j$ et $k \leq l$; dans chaque cas une de fonctions f, g et f', g' étant centrée, le terme principal est nul ne laissant que le terme de reste en $o(n^3)$. D'où

$$E_1 = o(n^3) \text{ et } E_2 = o(n^3).$$

Ce qui démontre notre lemme.

□

Pour la deuxième étape, on utilise le lemme suivant :

Etape 2 :

Lemme 5.3.3. *Pour $l \in \mathbb{Z}$,*

$$E_{\overline{\mu}}\left(\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n^2(x) - N_n(x)N_n(x+l)\right|\right) = o(n^{3/2}).$$

Démonstration. Montrons le lemme à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration $E_{\overline{\mu}}(|N_n(x) - N_n(y)|^2) = O(n^{1/2}|x-y|)$ de l'hypothèse (f) :

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n^2(x) - N_n(x)N_n(x+l)\right|\right) &= E_{\overline{\mu}}\left(\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)(N_n(x) - N_n(x+l))\right|\right) \\ &\leq E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x)(N_n(x) - N_n(x+l))|\right) \\ &\leq E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x)|^2\right)^{1/2} E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x) - N_n(x+l)|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Montrons que $E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x) - N_n(x+l)|^2\right) = o(n^{3/2})$: on peut le décomposer comme suit, en choisissant $a \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$ et en appliquant l'hypothèse (f),

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x) - N_n(x+l)|^2\right) &\leq n^2 \overline{\mu}\left(\sup_{0\leq k\leq n} |S_k| \geq n^{a+1/2}\right) \\ &\quad + E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{-n^{a+1/2}\leq x\leq n^{a+1/2}} |N_n(x) - N_n(x+l)|^2\right) \\ &\leq n^2 \frac{1}{n^{2a+1}} E_{\overline{\mu}}\left(\sup_{0\leq k\leq n} (S_k^2)\right) + O\left(n^{a+1/2}|l|n^{1/2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (c) $E_{\overline{\mu}}(|S_n|^2) = O(n)$, un résultat de Patrick Billingsley ([5] page 102) donne l'existence d'un réel $K > 0$ tel que l'inégalité

$$E_{\overline{\mu}}\left(\sup_{0\leq k\leq n} (S_k^2)\right) \leq Kn(\log(n))$$

tienne pour tout $n \geq 0$. On l'introduit dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x) - N_n(x+l)|^2\right) &= O(n^2 \frac{1}{n^{2a+1}} n(\ln(n)) + O(n^{a+1/2}|l|n^{1/2}) \\ &= o(n^{3/2}). \end{aligned}$$

D'autre part, avec le théorème limite local (hypothèse (e)), on avait déjà

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n(x)^2\right) &= E_{\overline{\mu}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 1_{\{S_i=x\}}1_{\{S_j=x\}}\right)^2\right) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}} 2\sum_{i<j} E_{\overline{\mu}}(1_{\{S_{j-i}=0\}}\circ T^j 1_{\{S_i=x\}}) + O(n) \\ &= 2\sum_{i<j} E_{\overline{\mu}}(1_{\{S_{j-i}=0\}}) + O(n) \\ &\leq 2\sum_{i<j} Cn^{-1/2} + O(n) \\ &= O(n^{3/2}). \end{aligned}$$

On trouve bien

$$E_{\overline{\mu}}\left(\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n^2(x) - N_n(x)N_n(x+l)\right|\right) = o(n^{3/2}).$$

□

Ce dernier lemme permet de terminer la preuve de la proposition 5.2.2

preuve de la proposition 5.2.2. D'après la proposition 5.1.1 et la proposition 5.1.1 et les lemmes 5.3.2 et 5.3.3 montrés au-dessus

$$E_{\overline{\mu}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\left|\mathcal{V}_n - \sum_{|N|\leq D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\mu(A)\mu(C_{A,N}^k)\sum_{x\in\mathbb{Z}} N_n^2(x)\right|\right) \to 0.$$

On montre ici que les hypothèses (e) et (f) permettent de réaliser les hypothèses de la proposition 2.1 de [13] rappelées dans la section 1.5.7 page 31.
En effet l'hypothèse (f) assure la convergence en loi pour la métrique J_1 des processus $(n^{-1/2}S_{\lfloor nt\rfloor})_{t\geq 0}$ vers un mouvement Brownien ainsi que l'assertion (3) du théorème,

$$\begin{aligned} &\limsup_{b\to 0}\lim_{n\to\infty} \|n^{-1/2}N_n(\lfloor n^{1/2}a\rfloor) - n^{-1/2}N_n(\lfloor n^{1/2}(a+b)\rfloor)\|_{L^2}^2 = \\ &\limsup_{b\to 0}\lim_{n\to\infty} O(|n^{-1/2}\lfloor n^{1/2}a\rfloor - n^{-1/2}\lfloor n^{1/2}(a+b)\rfloor|) = o(1). \end{aligned}$$

Enfin l'hypothèse (2) est vérifiée en appliquant l'assertion (e), et en utilisant des comparaisons séries-intégrales,

$$E_{\overline{\mu}}(n^{-1}|N_n(a)|^2) = \frac{2}{n}\sum_{0\le i\le j\le n-1} E_{\overline{\mu}}(1_{\{S_{j-i}=0\}}\circ\overline{T}^i 1_{\{S_i=\lfloor n^{1/2}a\rfloor\}}) \tag{5.10}$$

$$= O\left(\frac{2}{n}\sum_{i=k_n+1}^{n-1}\sum_{u=0}^{n-1}\frac{\overline{\mu}(S_u=0)}{(i-k_n)^{1/2}}\right)$$

$$= O\left(\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{u=0}^{n-1}\frac{1}{u^{1/2}}\frac{1}{i^{1/2}}\right) = O(1), \tag{5.11}$$

où O est pris uniformément en a et n. Les assertions de la proposition 2.1 de [13] sont donc vérifiées et donnent la convergence des lois finies dimensionnelles de la suite de processus $\left(n^{1/2}N_{\lfloor nt\rfloor}(\lfloor n^{1/2}.\rfloor)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vers celles du processus $(L_t(.))_{t\in\mathbb{R}_+}$.

L'application $L(.)\to\int_{\mathbb{R}}L^2(x)dx$ est continue sur l'espace des fonctions $L^2(\mathbb{R})$, on obtient donc

la convergence des lois finies dimensionnelles de la suite de processus $\left(\left(\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{x\in\mathbb{Z}}N^2_{\lfloor nt\rfloor}(x)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers celles du processus $(\int_{\mathbb{R}}L_t^2(x)dx)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Comme l'équation (5.6) de la page 83 donne la convergence presque sûre de

$$\sum_{k=1}^{D}k\sum_{|N|\le D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\overline{\mu}(A^{[k_n]})\overline{\mu}(C^k_{A,N}) = \Gamma^{-2}\sum_{k=1}^{D}k\sum_{|N|\le D}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\mu(A^{[k_n]})\mu(C^k_{A,N})$$

vers $\Gamma^{-2}e_I$, nous sommes donc en mesure de conclure avec le lemme de Slutsky la convergence au sens des lois finies dimensionnelles de $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{t\ge0}$ vers $(\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_t^2(x)dx)_{t\ge0}$.

□

5.4 Convergence en loi

Ce passage est consacré à la preuve du théorème 4.1.5. Dans ce qui suit, on désigne par $(M_\tau,\varphi^\tau,\mu_\tau)$ le flot de suspension de fonction plafond τ au-dessus de (M,T,μ). Pour rappel, $(M_\tau,\varphi^\tau,\mu_\tau)$ est isomorphe à $(\mathcal{M}_0,\varphi^0,L_0)$.

On pose sur M la mesure $\mu_0(.) := \overline{\mu}(.\cap\overline{M})$.

Remarque 5.4.1. *Remarquons que pour f une fonction continue bornée sur l'espace des fonctions càd-làg (continues à droite et limite à gauche) munit de la métrique usuelle J_1*

(voir annexe 1.4),

$$E_{\mu_0}\left(f\left(\frac{\nu_n}{n^{3/2}}\right)\right) = \int_{\overline{M}} f(\left(\frac{\nu_n}{n^{3/2}}\right) d\overline{\mu}(x) = E_{\overline{\mu}}\left(f\left(\frac{\nu_n}{n^{3/2}}\right)\right).$$

Dans la suite, on note $\nu_n^0(t) := (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt)\nu_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\nu_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ le processus linéarisé issu de ν_n.

Remarque 5.4.2. *En remarquant que*

$$\frac{1}{n^{3/2}}\|\nu_n^0(.) - \nu_{\lfloor n. \rfloor}\|_{\infty,[0,T]} \leq \frac{1}{n^{3/2}}(nt - \lfloor nt \rfloor)(2\lfloor nt \rfloor + 1)D,$$

on en déduit que $\frac{1}{n^{3/2}}\|\nu_n^0(t) - \nu_{\lfloor nt \rfloor}\|_{\infty,[0,T]} \to 0$, μ_0 *presque sûrement. Ainsi la convergence pour la métrique* J_1 *(resp pour les lois finies dimensionnelles) de* $\left(\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_n^0(t)\right)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *équivaut à la convergence de* $\left(\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers la même limite pour la mesure* μ_0.

Lemme 5.4.3. *Si* $((\nu_n^0(t))_{t\in[0,T]})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de processus croissants et continus sur* $[0,T]$ *qui converge pour les lois finies dimensionnelles vers un processus* X *continu sur* $[0,T]$*, alors la convergence se fait aussi au sens des distributions sur* $C^0([0,T],\mathbb{R})$.

Démonstration. Les processus $(\nu_n^0(t))_{t\in[0,T]}$ étant croissants, ceux-ci vérifient le critère de Skorohod (voir les théorèmes 3.1 et 3.2 [42]) pour la métrique M_1,

$$w_{\delta,H}(\nu_n^0) = 0$$

où

$$w_{\delta,H}(Z) = \sup_{0<t_1<t<t_2<1, |t_1-t_2|\leq\delta} M(Z(t_1), Z(t), Z(t_2)).$$

Avec M désignant la fonction d'oscillations

$$M(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 0 \textit{ si } x_2 \in [x_1,x_3] \\ \min(|x_1-x_2|, |x_3-x_2|) \textit{ sinon} \end{cases}$$

La suite de processus $(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Skorohod et converge au sens des lois finies dimensionnelles vers X, d'après les théorèmes 3.1 et 3.2 de [42] elle converge donc en loi vers X pour la métrique M_1 (voir chap 12 [44]).

Soit f une application uniformément continue et bornée sur l'espace $C^0([0,T])$ des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie $\|.\|_\infty$. La topologie induite

par M_1 est équivalente à la topologie induite par la norme infinie, f est encore continue sur cet espace pour la métrique M_1. L'espace $C^0([0,T])$ étant dense dans l'espace $D([0,T])$ pour la métrique M_1, f peut se prolonger de manière unique en une fonction continue bornée $\tilde{f}$ sur le complété de $D([0,T])$ pour la métrique M_1. La convergence en loi de la suite de processus continus $(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ vers X permet d'écrire

$$E_\mu(f(\nu_n^0)) = E_\mu(\tilde{f}(\nu_n^0)) \to E(\tilde{f}(X)) = E(f(X)).$$

$(\nu_n^0(.))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en distribution vers X pour $\|.\|_\infty$.

□

Le théorème 5.2.1 et le lemme précédent permettent d'établir la convergence J_1 de $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_n^0(t)\right)_{t\in[0,T]}$ vers $(\Gamma^{-2}e_I\int L_t^2(x)dx)_{t\in[0,T]}$ pour $\overline{\mu}$ sur $\overline{M}$. Avec la remarque 5.4.2 on peut établir le corollaire qui suit.

Corollaire 5.4.4. *Pour tout $S>0$, le processus $(\frac{1}{n^{3/2}}\nu_{\lfloor nt\rfloor})_{t\in[0,S]}$ converge en loi pour la métrique J_1 vers $(\Gamma^{-2}e_I\int L_t^2(x)dx)_{t\in[0,S]}$ pour la mesure μ_0.*

On rappelle ici le nombre n_t de "collisions" avec la section de Poincaré avant le temps t : pour $n\in\mathbb{N}$, et $x\in M$, on note

$$n_t(x) = \sup\left\{n, \sum_{k=0}^{n-1}\tau\circ T^k(x)\le t\right\}.$$

Comme $(n_t)_{t\ge0}$ croit presque sûrement avec t, est non majorée et $\overline{\mu}$ est une mesure finie, le théorème de Birkhoff donne, pour $\overline{\mu}$-presque tout $x\in\overline{M}\subset M$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{n_t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{n_t}\sum_{k=0}^{n_t}\tau\circ\overline{T}^k \underset{p.s}{=} E_{\overline{\mu}}(\tau). \tag{5.12}$$

La convergence s'étend à presque tout point dans M pour la mesure μ_0. En particulier, pour tout $s\in[0,S]$, $\lim_{t\to\infty}\frac{t}{n_{ts}} = \frac{E_{\overline{\mu}}(\tau)}{s}$ pour μ_0-presque tout point de M.

On rappelle que π désigne la projection sur $M\times\{0\}$, $\pi(x,s) := x$ pour $(x,s)\in M_\tau$.

Proposition 5.4.5. *Pour tout $S\in\mathbb{R}_+$, le processus $(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\circ\pi)_{s\in[0,S]}$ converge fortement en loi sur le flot de suspension $(M_\tau,\varphi^\tau,\mu_\tau)$ pour la métrique J_1 vers $\left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int L_s^2(x)dx\right)_{s\in[0,S]}$ lorsque t tend vers l'infini.*

Démonstration. Remarquons que quitte à comparer $\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{\lfloor ts\rfloor}\right)_{s\in[0,S]}$ et $\left(\frac{1}{\lfloor t\rfloor^{3/2}}\nu_{\lfloor s\lfloor t\rfloor\rfloor}\right)_{s\in[0,S]}$, le processus $\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{\lfloor ts\rfloor}\right)_{s\in[0,S]}$ converge encore lorsque t tend vers l'infini vers le processus $(\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_s^2(x)dx)_{s\in[0,S]}$.

D'après le théorème 3.9 de [6], la convergence en distribution pour la métrique J_1 et la mesure μ_0 de $\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{\lfloor t.\rfloor}$ et la convergence presque sûre de $(\frac{n_{ts}}{t})_{s\in[0,S]}$ vers $\left(\frac{s}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}\right)_{s\in[0,S]}$ pour μ_0 implique la convergence en loi de

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}} \overset{\mathcal{L}_{\mu_0}}{=} \Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L^2_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)}(x)dx.$$

A l'aide des identités du temps local, on peut préciser le terme $\int_{\mathbb{R}}L^2_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)}(x)dx$: en effet, pour toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}$ à valeur réelle, en utilisant les identités du temps local et l'auto-similarité du mouvement Brownien et quelques changement de variable,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}f(x)L_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)}(x)dx &= \int_0^{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)}f(B_t)dt\\
&= E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1}\int_0^s f(B_{t/E_{\overline{\mu}}(\tau)})dt\\
&= E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1}\int_0^s f\left(\frac{1}{E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2}}B'_t\right)dt\\
&= E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1}\int_{\mathbb{R}}f(\frac{x}{E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2}})L'_s(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}f(u)E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1/2}L'_s(uE_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2})du.
\end{aligned}$$

Où B' désigne un mouvement Brownien de même loi que B et $(L'_s)_{s\geq 0}$ son temps local. On en déduit que $L_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)} = E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1/2}L'_s\left(uE_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2}\right)$ pour presque tout u et tout s. Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}} &\overset{\mathcal{L}_{\mu_0}}{=} \Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L^2_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)}(x)dx \overset{\mathcal{L}}{=} E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L^2_s(xE_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2})dx\\
&= E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L^2_s(x)dx.
\end{aligned}$$

Comme

$$\left\|\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\right)\circ T - \frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\right\|_{\infty,[0,S]} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

La famille de processus $\left((\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}})_{s\geq 0}\right)_{t\geq 0}$ vérifie les hypothèses du théorème 1 de [47] pour la mesure de probabilité μ_0, il converge donc fortement en loi au sens de la métrique J_1 pour le système (M,T,μ) vers le processus $E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L^2_s(x)dx$ lorsque t tend

vers l'infini.

Il reste à montrer la convergence en loi de la famille de processus $\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\circ\pi\right)_{s\geq 0}\right)_{t\geq 0}$ pour le flot de suspension $(M_\tau,\varphi^\tau,\mu_\tau)$:

Pour P une mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ_τ et F une application continue sur $\mathbb{R}$, on a en écrivant $dP(x,u)=g(x,u)d\mu_\tau(x,u)$:

$$\begin{aligned}E_P\left(f\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\circ\pi\right)_{s\geq 0}\right)\right)&=\int_M\int_0^{\tau(x)} f\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\circ\pi(x,u)\right)_{s\geq 0}\right)g(x,u)d\lambda d\mu\\&=\int_M f\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}(x,0)\right)_{s\geq 0}\right)\int_0^{\tau(x)} g(x,u)d\lambda d\mu.\end{aligned}$$

Or la mesure $\int_0^{\tau(x)} g(x,u)d\lambda d\mu$ est une mesure de probabilité sur M absolument continue par rapport à la mesure μ. la convergence forte en loi de $\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu^0_{n_{ts}}\right)_{s\geq 0}\right)_{t\geq 0}$ sur (M,T,μ) permet de conclure pour $S>0$,

$$E_{\mu_\tau}\left(f\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\right)_{s\in[0,S]}\right)\right)\underset{t\to\infty}{\to}E_{\mu_\tau}\left(f\left(\left(\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_s^2(x)dx\right)_{s\in[0,S]}\right)\right).$$

La famille de processus $\left(\left(\frac{1}{t^{3/2}}\nu_{n_{ts}}\right)_{s\in[0,S]}\right)_{t\geq 0}$ converge donc fortement en loi sur $(M_\tau,\varphi,\mu_\tau)$ vers $\left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_s^2(x)dx\right)_{s\in[0,S]}$. □

On achève la preuve du théorème 4.1.5 avec l'encadrement du nombre $\mathcal{N}_t$ d'auto-intersections jusqu'au temps t par le nombre d'auto-intersections jusqu'aux collisions précédentes et suivantes :

$$\nu_{n_t}(x)\leq\mathcal{N}_t(x,s)\leq\nu_{n_t+1}(Tx)\leq\nu_{n_t}(Tx)+2(n_t+1)D. \tag{5.13}$$

la dernière majoration étant induite par l'hypothèse (a) d'un nombre d'intersections des trajectoires entre deux passages sur la section de Poincaré bornée (par D),
L'encadrement 5.13 assure que pour toute loi de probabilité $\mathbb{P}$ absolument continue par rapport à μ_τ, et tout $S>0$,

$$E_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\|\left(\nu_{n_{ts}}\right)_{s\geq 0}-\left(\mathcal{N}_{ts}\right)_{s\geq 0}(x,u)\|_{\infty,[0,S]}\right)\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

On en déduit avec le théorème de Slutsky et la convergence de $\frac{t}{n_t}$,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathcal{N}_{ts}}{t^{3/2}}\right)_{s\in[0,S]} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\nu_{n_{ts}}}{t^{3/2}}\right)_{s\in[0,S]} \overset{\mathcal{L}_{\mu_0}}{=} \left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_s^2(x)dx\right)_{s\in[0,S]}.$$

Par isomorphisme, le nombre d'auto-intersections converge fortement en loi pour la loi ν sur $\mathcal{M}_0$.

5.5 Discussion sur les constantes

Il reste à vérifier que la limite donnée au dessus donne bien les constantes données dans le théorème 4.1.5.

Par construction, on rappelle que le domaine fondamental pour $\mathcal{D}$ $(\mathcal{M},\varphi_t,L)$ est isomorphe au flot de suspension $(\overline{M}_\tau,\tilde{\varphi}_t^\tau,\overline{\mu}_\tau/E_{\overline{\mu}}(\tau))$ de fonction plafond τ.

Lemme 5.5.1. *Sous l'hypothèse (b') de la remarque 4.1.4, e_I vérifie*

$$e_I = \Gamma^2\int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}}|\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(y)]}(y))|d\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y).$$

Démonstration. On peut réécrire e_I de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
e_I &:= \int_{\overline{M}}\int_M|[x]\cap[y]|d\mu(x)d\mu(y)\\
&= \Gamma^2\int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|[x]\cap[\mathcal{D}^k y]|d\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y)\\
&= \int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x))]\cap\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(y)]}(\mathcal{D}^k y))|d\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y).
\end{aligned}$$

Remarquons que pour $x, y \in \overline{M}$, avec l'hypothèse (b'),

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |[x] \cap [\mathcal{D}^k y]| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\{s \in [0,\tau(y)), \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(\mathcal{D}^k y)) \in [x]\}| \\
&= |\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{s \in [0,\tau(y)), \pi_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}_0^k \varphi_s^0(y)) \in [x]\}| \\
&= |\{s \in [0,\tau(y)), \exists k \in \mathbb{Z}, \pi_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}_0^k \varphi_s^0(y)) \in \pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x))\}| \\
&= |\{s \in [0,\tau(y)), \exists k \in \mathbb{Z}, u \in \varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x), \pi_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}_0^k \varphi_s^0(y)) = \pi_{\mathcal{R}}(u)\}| \\
&= |\{s \in [0,\tau(y)), \exists u \in \varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x), \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(y)) = \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(u)\}| \\
&= |\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x))}(x)) \cap \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(y)]}(y))|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$e_I := \Gamma^2 \int_{\overline{M}} \int_{\overline{M}} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(x)]}(x)) \cap \overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,\tau(y)]}(y))| d\overline{\mu}(x) d\overline{\mu}(y).$$

□

Proposition 5.5.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.2.1,*

$$E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2} e_I \int_{\mathbb{R}} L_s^2(x)dx = e'_I \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_s^2(x)dx$$

où

$$\begin{aligned}
e'_I :&= \int_{\mathcal{M}_0\times\mathcal{M}} |\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(x)) \cap \pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(y))| d\text{Ł}_0(y) dL(x) \\
&= \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} |\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(x)) \cap \bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^0_{[0,1)}(y))| dL(y) dL(x)
\end{aligned}$$

est l'espérance du nombre d'intersection de $\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(x))$ avec $\bar{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(y))$ pour x et y choisis indépendamment pour la loi L, et $(\tilde{L}_t)_{t\geq 0}$ est le temps local associé au mouvement Brownien $\tilde{B}$ limite du processus $\left(\frac{1}{t^{1/2}} S_{n_{tu}} \circ \pi(.)\right)_{u\in[0,T]}$.

Démonstration. A l'instar de (5.12) à la page 92, le théorème de Birkhoff assure

$$\frac{n_t}{t} \overset{\overline{\mu}p.s}{\to} \frac{1}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}.$$

L'hypothèse (f) donne la convergence en loi pour la métrique J_1 de $\left(n^{-1/2} S_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t\geq 0}$ vers $(B_t)_{t\geq 0}$ pour la mesure $\overline{\mu}$. En remarquant que pour $S > 0$, d'une part

$$\left\| t^{-1/2} S_{\lfloor st \rfloor} - t^{-1/2} S_{\lfloor s\lfloor t \rfloor \rfloor} \right\|_{\infty,[0,S]} \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

et d'autre part

$$\left\| \left(1 - \left(\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \right)^{-1/2} \right) S_{\lfloor s \lfloor t \rfloor \rfloor} \right\|_{\infty,[0,S]} \overset{proba}{\underset{t\to\infty}{\to}} 0,$$

le processus $\left(t^{-1/2} S_{\lfloor st \rfloor}\right)_{s\in[0,S]}$ converge donc en loi vers le mouvement Brownien $(B_s)_{s\in[0,S]}$ lorsque $t \to \infty$. Pour tout $S > 0$, le théorème (3.9) de [6] donne alors la convergence en loi pour la métrique J_1 et la mesure $\overline{\mu}$:

$$\left(t^{-1/2} S_{n_{ts}}\right)_{s\in[0,S]} \underset{s\to\infty}{\to} (B_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)})_{s\in[0,S]}$$

$\left(t^{-1/2} S_{n_{ts}}\right)_{s\in[0,S]}$ converge vers $(\tilde{B}_s)_{s\in[0,S]} := \left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1/2} B_s\right)_{s\in[0,S]}$.

On explicite le temps local $\tilde{L}$ associé à $\tilde{B}$: pour toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}$ à valeur réelle, en utilisant les identités du temps local, l'auto-similarité du mouvement Brownien et quelques changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^s f(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-1/2} B_t) dt &= \int_{\mathbb{R}} f(\frac{x}{E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2}}) L_s(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} L_s(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} u) du. \end{aligned}$$

On en déduit que $L_{s/E_{\overline{\mu}}(\tau)} = E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} L_s\left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} u\right)$ pour presque tout observable et presque tout s, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_s^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} E_{\overline{\mu}}(\tau) L_s\left(E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} u\right) du = E_{\overline{\mu}}(\tau)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} L_s(x)\, dx.$$

On peut donc réécrire

$$E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2} \Gamma^{-2} e_I \int_{\mathbb{R}} L_s^2(x) dx = E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-2} \Gamma^{-2} e_I \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_s^2(x) dx.$$

Lemme 5.5.3. *Pour le système $(\mathcal{M}_0, \varphi_t^0, Ł_0)$ de la section 4.1 vérifiant les hypothèses du théorème 4.1.5 page 71,*

$$E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-2} \Gamma^{-2} e_I = e'_I.$$

Démonstration. On garde ici les notation $\overline{\pi}_{\mathcal{R}}$ (resp $\pi_{\mathcal{R}}$) par passage au système isomorphe

$(\overline{M}_\tau, \tilde{\varphi}^\tau, \overline{\mu}_\tau)$, on souhaite montrer que $\Gamma^{-2} e_I$ correspond à la mesure

$$\int_{\overline{M}} \int_0^{\tau(x)} \int_{\overline{M}} \int_0^{\tau(y)} |\pi_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(x,t)) \cap \pi_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(y,s))| dt d\overline{\mu}(x) ds d\overline{\mu}(y)$$
$$= E_{\overline{\mu}}(\tau)^2 \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(x,t)) \cap \overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,1]}(y,s))| dL dL.$$

Avec la dernière équation, on obtient une écriture de $\frac{e_I}{\Gamma^2 E_{\overline{\mu}}(\tau)^2}$ comme espérance du nombre d'intersections de la trace de deux flots unitaires pris aléatoirement uniformément selon la loi L. Cette constante est bien indépendante du choix de la section de Poincaré (M, T, μ) vérifiant les hypothèses 4.1.1 du système $(\mathcal{M}_0, \varphi_t, Ł_0)$.

Soit B un ensemble mesurable tel que pour $\overline{\mu}_\tau$-presque tout x

$$|\{s \in [0,1], \tilde{\varphi}^\tau_s(x,t) \in B\}| \leq D.$$

On note pour $x \in \overline{M}$,

$$F(x) := |\{s \in [0, \tau(x)], \tilde{\varphi}^\tau_s(x) \in B\}|,$$

et pour $(x,t) \in \overline{M}_\tau$,

$$f(x,t) := |\{s \in [0,1], \tilde{\varphi}^\tau_s(x,t) \in B\}|.$$

On suppose ces deux fonctions bornées par une constante D sur leurs ensembles de définitions respectifs. On montre dans un premier temps que

$$E_{\overline{\mu}}(F) = E_{\overline{\mu}_\tau}(f).$$

On reprend la notation $n_t(x) := sup\{n, \sum_{k=0}^{n-1} \tau \circ T^k(x) \leq t\}$ qui est définie aussi sur $\overline{M} \times \{0\}$ quitte à l'identifier avec $\overline{M}$. On a toujours

$$\frac{n_t(x)}{t} \underset{t\to\infty}{\overset{\overline{\mu}\, ps}{\to}} \frac{1}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}.$$

Le théorème de Birkhoff et ce résultat de convergence presque sûre assure pour presque tout $x \in \overline{M}$,

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n_t - 1} F \circ \overline{T}^k x \underset{t\to\infty}{\overset{\overline{\mu}\, ps}{\to}} \frac{E_{\overline{\mu}}(F)}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}.$$

La somme à gauche correspond à

$$\left| \left\{ s \in [0, \sum_{k=0}^{n_t} \tau \circ \overline{T}^k(x)],\ \tilde{\varphi}^\tau_s(x) \in B \right\} \right|.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{T}\int_0^T f\circ\tilde{\varphi}_s^\tau(x,t)ds \underset{N\to\infty}{\overset{\overline{\mu}\,ps}{\to}} \frac{E_{\overline{\mu}_\tau}(f)}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}$$

et l'intégrale à gauche donne par définition de f,

$$\int_0^T f\circ\tilde{\varphi}_s^\tau(x,t)ds = \sum_{s\in[0,\infty[,\varphi_s^\tau(x,t)\in B} \lambda([0,T]\cap[s-1,s]) = |\{s\in[1,T],\varphi_s^\tau(x,t)\in B\}| \pm 2D.$$

Ainsi, pour $(x,u)\in\mathcal{M}_\tau$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t f\circ\tilde{\varphi}_s^\tau(x,u)ds - \sum_{k=0}^{n_t-1} F\circ\overline{T}^k\circ\pi(x,u)\right| \leq \\
&4D + \left|\left\{s\in[0,u]\cup[\sum_{k=0}^{n_t}\tau\circ\overline{T}^k(x),t+u],\varphi_s^\tau(x,u)\in B\right\}\right| \\
&\leq 4D + 2\lceil u\rceil D \\
&\leq 6D.
\end{aligned}$$

En passant à la limite dans les sommes pondérées de Birkhoff ci-dessus on obtient l'égalité

$$\frac{E_{\overline{\mu}}(F)}{E_{\overline{\mu}}(\tau)} = \frac{E_{\overline{\mu}_\tau}(f)}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}.$$

Enfin on applique le résultat avec d'une part $B := \overline{\pi}_{\mathcal{R}}^{-1}(\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^\tau_{[0,\tau(y)]}(y)))$ et Fubini :

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,\tau(x)]}(x))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,\tau(y)]}(y))|d\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y) \\
&= \int_{\overline{M}}\int_{\overline{M}}\int_0^{\tau(x)} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(x,s))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,\tau(y)]}(y))|dtd\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y) \\
&= \int_{\overline{M}}\int_0^{\tau(x)}\int_{\overline{M}} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(x,s))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,\tau(y)]}(y))|d\overline{\mu}(y)dtd\overline{\mu}(x)
\end{aligned}$$

Puis en prenant $B := \overline{\pi}_{\mathcal{R}}^{-1}(\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\varphi^\tau_{[0,1]}(x)))$, on répète le résultat pour la dernière intégrale en $d\overline{\mu}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{M}}\int_0^{\tau(x)}\int_{\overline{M}} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(x,s))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,\tau(y)]}(y))|d\overline{\mu}(y)dtd\overline{\mu}(x) \\
&= \int_{\overline{M}}\int_0^{\tau(x)}\int_{\overline{M}}\int_0^{\tau(y)} |\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(x,s))\cap\overline{\pi}_{\mathcal{R}}(\tilde{\varphi}^\tau_{[0,1]}(y,s))|dsd\overline{\mu}(y)dtd\overline{\mu}(x).
\end{aligned}$$

□

On déduit du lemme 5.5.3 l'identification

$$E_{\overline{\mu}}(\tau)^{-3/2}\Gamma^{-2}e_I\int_{\mathbb{R}}L_s^2(x)dx = e'_I\int_{\mathbb{R}}\tilde{L}_s^2(x)dx.$$

□

On montre dans ce qui suit que sous de bonnes hypothèses toujours valable dans le cas du billard et du flot géodésique de surfaces à courbure strictement négative, les constantes apparaissant dans notre théorème ne dépendent que de la géométrie du système et de la nature du flot. En particulier elles sont indépendantes du choix de la section de Poincaré pour ces systèmes.

On se place ici dans le cas où l'application $\mathcal{D}$ est une isométrie. On suppose de plus l'existence d'un point de référence $x_0 \in \mathcal{M}_0$ tel que la suite $(\mathcal{D}^n x_0)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'admette pas de point d'accumulation. On note $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0$ une image de $\overline{M}_\tau$ par l'isomorphisme entre les systèmes $(\mathcal{M}, \varphi_t^0, L_0)$ et $(M_\tau, \varphi_t^\tau, \mu_\tau)$.

On souhaite montrer ici que les constantes apparaissant dans la limite de notre théorème ne dépendent pas du choix de la section de Poincaré :

Pour cela on peut se donner une fonction "naturelle" ψ continue sur $\mathcal{M}_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$|\psi(\varphi_t^0(\pi_1(x,s))) - S^0_{n_t}\circ\pi(x,s)| = o(t^{3/2}) \tag{5.14}$$

presque sûrement uniformément pour $(x,s) \in M_\tau$. Dans ce cas le processus $\left(\frac{1}{t^{3/2}}\psi\circ\varphi^0_{ts}\right)_{s\in[0,S]}$ converge en loi vers $\left(e'_I\int_{\mathbb{R}}\tilde{L}_s^2(x)dx\right)_{s\in[0,S]}$.

Si on suppose que l'application $\mathcal{D}_0$ est une isométrie et qu'il existe un point de référence $x_0 \in \mathcal{M}_0$ tel que la suite $(\mathcal{D}^n x_0)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'admette pas de point d'accumulation comme dans le cas du gaz de Lorentz $\mathbb{Z}$-périodique et des $\mathbb{Z}$-revêtements de surfaces compactes à courbure strictement négative, on peut identifier $\mathcal{M}$ avec le groupe fondamental $\mathcal{M}_0/\mathcal{D}_0$. L'application $\psi : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\psi(x) = \inf\{n\in\mathbb{Z}, d(\mathcal{D}^n x_0, x) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} d(\mathcal{D}^k x_0, x)\}$$

est bien définie et bornée sur $\mathcal{M}$ et vérifie pour $x \in \mathcal{M}_0$,

$$\psi(\mathcal{D}_0^n x) = \psi(x) + n. \tag{5.15}$$

En remarquant par définition de n_t quitte à identifier M_τ et $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{D}_0^{-S_{n_t}}(\varphi_t^0(x)) \in \mathcal{M}.$$

Ainsi, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in \mathcal{M}$,

$$|\psi \circ \varphi_t^0(x) - S_{n_t}(x)| \leq |\psi(x)| \leq K.$$

Avec (5.15) on en déduit que l'inégalité est valable sur $\mathcal{M}_0$ et on obtient la relation (5.14) et la même conclusion.

Chapitre 6

Autres résultats sur les auto-intersections.

On détaille dans ce chapitre quelques résultats annexes concernant l'étude des auto-intersections pour d'autres $\mathbb{Z}^d$-extensions et des systèmes en mesure finie.

6.1 Convergence en plus grande dimension.

On s'intéresse ici au comportement du nombre d'auto-intersections pour des $\mathbb{Z}^d$-extensions lorsque $d \geq 3$. Le cas $d = 2$ a déjà été traité dans le cas du gaz de Lorentz $\mathbb{Z}^2$-périodique par Pène dans [30], aboutissant à une convergence déterministe pour une normalisation en $\frac{1}{nln(n)}$. Ici on étudie des systèmes transients, les intersections se produisent donc essentiellement avec des trajectoires générées en des temps voisins de celui regardé. Ainsi, regarder le nombre d'auto-intersections jusqu'à un temps t revient peu ou prou à se donner une subdivision $([t_i, t_{i+1}])_{i\in I}$ assez large de l'intervalle de temps $[0, t]$ et sommer sur la taille de la subdivision, le nombre d'auto-intersections de la portion de la trajectoire générée entre les temps t_i et t_{i+1}. On s'attend donc à une croissance linéaire de ces auto-intersections. Pour le montrer on fait des hypothèses proches de celles choisies dans le chapitre 4.

Définition 6.1.1. *Soit $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ un flot ergodique préservant une mesure de probabilité L et $(G, +)$ un groupe abélien infini dénombrable munit de la mesure de comptage g. Pour $h_t : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to G$ un cocycle, (i.e $h_{t+s}(x) = h_t(x) + h_s(\varphi_t(x))$), on définit la G-extension $(\mathcal{M}_0, \varphi^0, L_0)$ de $(\mathcal{M}, \varphi, L)$ en posant $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \times G$, φ^0 le flot tel que $(x, a) \in \mathcal{M}_0$,*

$$\varphi^0_t(x, a) := (\varphi_t(x), a + h_t(x)),$$

et la mesure L_0 est définie par la somme formelle $L_0 := \sum_{g\in G} L \otimes g$.

Théorème 6.1.2. *Soit $(G,+)$ un groupe abélien infini dénombrable, $\mathcal{R}$ un ensemble, $(\mathcal{M}_0,\varphi^0,L_0)$ une G-extension du flot ergodique préservant une mesure de probabilité $(\mathcal{M},\varphi,L)$ et $\pi_{\mathcal{R}}:\mathcal{M}_0\to\mathcal{R}$ une application telle que pour (x,a) et $(x',a')\in\mathcal{M}_0$,*

$$\pi_{\mathcal{R}}(x,a)=\pi_{\mathcal{R}}(x',a')\Leftrightarrow\pi_{\mathcal{R}}(x,0)=\pi_{\mathcal{R}}(x',a'-a). \tag{6.1}$$

Alors la quantité définie pour $t\geq 0$ et $y\in\mathcal{M}_0$ par

$$\mathcal{N}_t(y):=|\{(s,u)\in[0,t]^2:s\neq u,\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_s(y))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_u(y))\}|$$

satisfait :

$$\frac{\mathcal{N}_t}{t}\overset{L_0-p.p}{\to}E_L(I),$$

où

$$\begin{aligned}I(x):=&|\{(s,u)\in[0,1[^2\colon s\neq u,\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_s(x,0))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_u(x,0))\}|\\&+2|\{(s,u)\in[0,1[\times[1,+\infty[\colon s\neq u,\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_s(x,0))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_u(x,0))\}|\end{aligned}$$

Remarque 6.1.3. *Supposons que :*

1. *$G:=\mathbb{Z}^d$ avec $d\geq 1$*
2. *les intersections ne se produisent que localement en espace, et en nombre bornées : il existe $M>0$ tel que pour presque tout $x\in\mathcal{M}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$|\{(s,u)\in[0,1[\times[k,k+1[\colon s\neq u,\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_s(x,0))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi^0_u(x,0))\}|\leq M1_{\{|h_k(x)|\leq M\}}.$$

3. *Le temps passé à distance bornée d'un point donné est intégrable :*

$$\sum_{k\geq 0}L(|h_k|\leq M)<\infty.$$

Alors $E_L(I)$ est fini.

Ces hypothèses sont vérifiées en dimension $d\geq 3$ pour des flots spéciaux au dessus d'une $\mathbb{Z}^d$-extension qui vérifient pour $(h_k)_{k\geq 0}$ un théorème limite local ou une approximation de la forme

$$L(|h_k|\leq M)\underset{k\to\infty}{=}O\left(\frac{1}{k^{d/2}}\right)$$

comme c'est le cas pour les $\mathbb{Z}^d$-revêtements du flot géodésique sur une surface à courbure strictement négative (voir [43]).

Preuve du théorème 6.1.2. Afin de montrer le théorème, on peut approcher $\mathcal{N}_t$ en comptant les blocs $J_{k,m}$ des auto-intersections comptées sur des morceaux de trajectoires de durée unitaire : pour $(x,a) \in \mathcal{M}_0$

$$J_{k,m}(x,a) := |\{(s,u) \in [m,m+1[\times[k,k+1[: s \neq u, \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(x,0)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u^0(x,0))\}|,$$

et pour $t > 0$,

$$\mathcal{N}_t(x,a) \leq \sum_{k,m=0}^{\lfloor t \rfloor} J_{k,m}(x,a) \tag{6.2}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} J_{k,k}(x,a) + 2 \sum_{0 \leq k < m \leq \lfloor t \rfloor} J_{k,m}(x,a). \tag{6.3}$$

Et dans l'autre sens, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq N$,

$$\mathcal{N}_t(x,a) \geq \sum_{k,m=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} J_{k,m}(x,a)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} J_{k,k} + 2 \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor - N} \sum_{m=k+1}^{k+N} J_{k,m}(x,a). \tag{6.4}$$

Notons avec (6.1), que pour $s,u \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0 \circ \varphi_k^0(x,0)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u^0 \varphi_k^0(x,0)) \\
&\Rightarrow \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s \circ \varphi_k(x), h_k(x) + h_s \circ \varphi_k(x)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u \circ \varphi_k(x), h_k(x) + h_u \circ \varphi_k(x)) \\
&\Rightarrow \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s(\varphi_k(x),0)) = \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u(\varphi_k(x),0)).
\end{aligned}$$

Il en découle que l'ensemble $J_{k,m}$ est bien une observable itérée par φ_k^0 au sens où pour $(x,a) \in \mathcal{M}_0$, et $m \geq k$,

$$J_{k,m}(x,a) = J_{0,m-k}(\varphi_k^0(x,a)) = J_{0,m-k}(\varphi_k(x),0).$$

Ainsi, en appliquant cette relation aux sommes dans (6.4) et (6.3), pour $N \in \mathbb{N}^*$, $t \geq N$,

et $(x,a) \in \mathcal{M}_0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor -1} J_{0,0}(\varphi_k(x),0) + 2\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor -N}\sum_{m=1}^{N} J_{0,m}(\varphi_k(x),0)\right)\\
&\leq \frac{\mathcal{N}_t(x,a)}{t}\\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}\left(J_{0,0}(\varphi_k(x),0) + 2\sum_{m\geq 1} J_{0,m}(\varphi_k(x),0)\right).
\end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$\int_0^{\lfloor t\rfloor +1} J_{0,m}(\varphi_t\circ\varphi_{-1}(x),0) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor} J_{0,m}(\varphi_k(x),0) \geq \int_0^{\lfloor t\rfloor -1} J_{0,m}(\varphi_t(x),0).$$

En effet, $(\mathcal{M},\varphi,L)$ étant ergodique, on peut appliquer le théorème de Birkhoff : pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, et L_0-p.p.t (x,a),

$$E_L(I_N) \leq \liminf_{t\to\infty}\frac{\mathcal{N}_t}{t}(x,a) \leq \limsup_{t\to\infty}\frac{\mathcal{N}_t}{t}(x,a) \leq E_L(I).$$

Avec $I_N := J_{0,0}(.,0) + 2\sum_{m=1}^{N} J_{0,m}(.,0)$ et en remarquant que
$I = J_{0,0}(.,0) + 2\sum_{m=1}^{N} J_{0,m}(.,0)$, le théorème de convergence monotone assure que

$$\lim_{N\to\infty} E_L(I_N) = E_L(I).$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

6.2 Nombre d'auto-intersections en mesure finie.

Cette section fait le lien avec l'étude des auto-intersections pour des systèmes dynamiques en mesure finie tels que les résultats de Lalley dans [25] pour le flot géodésique. Pour ces systèmes le nombre d'auto-intersections convenablement normalisé converge vers la constante e'_I vue au chapitre 4 (dans le théorème 4.1.5) qui se traduit comme l'espérance du nombre d'intersections entre deux trajectoires de durée 1 générées depuis deux points choisis uniformément et indépendamment. Ceci confirme la vision de la dynamique dans les $\mathbb{Z}$-extensions comme s'apparentant au produit d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et des orbites vues localement dans le système fondamental de mesure finie.

Théorème 6.2.1. *Soit $(\mathcal{M},\varphi_t,L)$ un flot de suspension au dessus du système dynamique*

ergodique probabilisé $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ *de fonction plafond* τ *avec* $E_{\overline{\mu}}(\tau)=1$ *et* $\inf\tau>0$. *Soir* $\mathcal{R}$ *un ensemble et* $\pi_{\mathcal{R}}:\mathcal{M}\to\mathcal{R}$. *On suppose de plus que* $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ *dispose d'une suite de partitions essentielles congruentes* $(\xi_{-i}^k)_{i,k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathcal{M},\varphi_t,L)$, $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$, $(\xi_{-i}^k)_{i,k\in\mathbb{N}}$ *et* $\pi_{\mathcal{R}}$ *vérifient l'hypothèse (g) de 4.1.1 et les relations (4.2) et (4.3) de l'hypothèse (b) (autrement deux trajectoires ne se coupent qu'un nombre uniformément borné de fois avant de toucher la section de Poincaré).*
Dans ce cas on définit le nombre d'auto-intersections jusqu'au n-ème passage sur la section de Poincaré $\overline{M}$, ν_n *pour* $x\in\overline{M}$ *par*

$$\nu_n(x):=\sum_{k\geq 1}2k\sum_{0\leq i<j\leq n-1}1_{V_k^{(T^j(x))}}\circ T^i(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\nu_1(T^ix)$$

où $\nu_1:=|\{(s,t)\in[0,\tau(x)]:s\neq t:\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(x))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_t^0(x))\}|$ *et* $V_k^{(x)}$ *désignant l'ensemble*

$$V_k^{(x)}:=\{y\in M,|[y]\cap[x]|=k\}.$$

avec $[x]:=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,\tau(x)]}(x))$. *Ce dernier vérifie*

$$\frac{1}{n^2}\nu_n\overset{\overline{\mu}-p.s}{\to}e_I,$$

où e_I *a été défini dans le lemme 4.2.1. De même, le nombre d'auto-intersections pour le flot, à savoir*

$$\mathcal{N}_t(y):=|\{(s,u)\in[0,t]^2:s\neq u,\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_s^0(y))=\pi_{\mathcal{R}}(\varphi_u^0(y))\}|$$

vérifie

$$\frac{1}{t^2}\mathcal{N}_t\overset{L-p.s}{\to}e_I'.$$

Tel que formulé, le théorème ci-dessus s'applique aux systèmes en mesure finie présentés au chapitre 4.2 tels que le billard de Sinai ou le flot géodésique sur des surfaces compactes de courbure strictement négative. Remarquons que des résultats sur les auto-intersections dans des systèmes dynamiques probabilisés tels que le flot géodésique ont déjà été prouvés notamment par Lalley dans [25] en employant la proposition 2.10 suivante qu'on va adapter pour nos systèmes.

Proposition 6.2.2. *Etant donné un système dynamique ergodique probabilisé* $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$

avec $\overline{M}$ compacte, et une application continue $f : \overline{M} \times \overline{M} \to \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} F(T^i x, T^j x) \to \int_{\overline{M} \times \overline{M}} F(x,y) d\overline{\mu}(x) d\overline{\mu}(y).$$

Démonstration. D'après le théorème de Birkhoff, pour tout $y \in \overline{M}$ et $\overline{\mu}$-presque tout $x \in \overline{M}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(y, T^i x) \to \int_{\overline{M}} F(y,x) d\overline{\mu}(x).$$

Or La compacité de $\overline{M}$ assure l'uniforme continuité de F sur $\overline{M} \times \overline{M}$ et ainsi pour presque tout x, la suite de fonction $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(., T^i x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément continue et par le théorème d'Arzelà-Ascoli converge uniformément vers $\int_{\overline{M}} F(.,x) d\overline{\mu}(x)$.
Ainsi, pour presque tout $x \in \overline{M}$, en réappliquant le théorème de Birkhoff,

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} F(T^i x, T^j x) &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\overline{M}} F(T^i x, y) d\overline{\mu}(y) \\ &= \int_{\overline{M}} \int_{\overline{M}} F(x,y) d\overline{\mu}(x) d\overline{\mu}(y). \end{aligned}$$

□

Ce résultat ne tient cependant pas si on considère f seulement mesurable et bornée. En effet, il suffit de choisir pour f l'indicatrice selon les orbites
$f(x,y) := 1_{\{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n y\}}(x)$ qui est mesurable bornée d'intégrale nulle par rapport à $\overline{\mu} \times \overline{\mu}$ mais vérifie

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n} f(T^i x, T^j x) = 1.$$

On suppose ici que le système dynamique $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est ergodique, de mesure finie et vérifie l'hypothèse (g) et on passe plutôt par la proposition suivante :

Proposition 6.2.3. *Etant donné un système dynamique ergodique probabilisé $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$, une application $F : \overline{M} \times \overline{M} \to \mathbb{R}$ et une suite de partitions essentielles $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\overline{M}$ vérifiant*

$$\sum_{A,B \in \mathcal{A}_n} \overline{\mu}(A) \overline{\mu}(B) \left(\sup_{A \times B} F - \inf_{A \times B} F \right) \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

Alors

$$\frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} F\left(\overline{T}^i x, \overline{T}^j x\right) \overset{p.s}{\to} \int_{\overline{M} \times \overline{M}} F(x,y) d\overline{\mu}(x) d\overline{\mu}(y).$$

Démonstration. Par définition, pour tout $x, y \in \overline{M}$,

$$\sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} 1_A(x)1_B(y) \inf_{A\times B} F \leq F(x,y) \leq \sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} 1_A(x)1_B(y) \sup_{A\times B} F.$$

Et en sommant le long des couples $(T^i x, T^j x)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} \inf_{A\times B} F \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1_A(T^i x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1_B(T^i x)\right)\\ &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{0\leq i,j\leq n-1} F(\overline{T}^i x, \overline{T}^j x) \leq \sum_{A,B\in P_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1_A(T^i x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1_B(T^i x)\right)\sup_{A\times B} F\end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient par ergodicité du système dynamique, pour presque tout $x \in \overline{M}$,

$$\sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} \inf_{A\times B} F\overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B) \leq \overline{\lim}\frac{1}{n^2}\sum_{0\leq i,j\leq n-1} F(\overline{T}^i x, \overline{T}^j x) \leq \sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} \sup_{A\times B} F\overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B).$$

L'hypothèse de notre proposition permet de conclure que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{0\leq i,j\leq n-1} F(\overline{T}^i x, \overline{T}^j x) \overset{\overline{\mu}-p.s}{\to} \int F d\overline{\mu} d\overline{\mu}.$$

□

Preuve du théorème 6.2.1. Pour $x \in \overline{M}$, on rappelle que $V_k^{(x)}$ désigne l'ensemble

$$V_k^{(x)} := \{y \in \overline{M}, |[y] \cap [x]| = k\}.$$

avec $[x] := \pi_{\mathcal{R}}(\varphi_{[0,\tau(x)]}(x))$. Le nombre ν_n d'auto-intersections avant la n-ème collision peut être décrite pour presque tout $x \in \overline{M}$

$$\nu_n(x) = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} f(\overline{T}^i(x), \overline{T}^j(x)),$$

où $f(x,y) := \min(\sum_{k\geq 1} k1_{V_k^{(x)}}(y)$ d'après la relation (4.2) page 69.

Posons $k_n := \lfloor \ln n \rfloor$ et $\mathcal{A}_n := \xi_{-k_n}^{k_n}$, et en reprenant la partition $\mathcal{P}_{1/n}$ de l'hypothèse (g) avec $n \in \mathbb{N}$, pour $A, B \in \mathcal{A}_k$, en notant P_A l' élément de $\mathcal{P}_{1/n}$ tel que $(P_A)^{[k_n]}$ contienne A, f est constante sur $A \times B$ si $B \notin B_{P_A}^{[k_n]}$. Ainsi,

$$\sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} \overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B)\left(\sup_{A\times B} f - \inf_{A\times B} f\right) \leq D \sum_{A\in\mathcal{P}_m} \overline{\mu}(A)\overline{\mu}(B_A^{[k_n]}).$$

D'après l'hypothèse (g), cette dernière somme converge bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La proposition 6.2.3 appliquée à f assure alors que

$$\frac{1}{n^2}\nu_n \overset{p.s}{\to} \int_{\overline{M}\times\overline{M}} f(x,y)d\overline{\mu}d\overline{\mu}.$$

Cette dernière intégrale correspond avec (5.8) page 83 au terme e_I.

Par un bon encadrement, on obtient le résultat pour $(\mathcal{N}_t)_{t\geq 0}$: on distingue pour $t>0$ le nombre de collisions de la section de Poincaré avant le temps t pour $(x,0)\in\mathcal{M}$:

$$n_t(x) := \sup\{n, \sum_{k=0}^{n-1} \tau\circ\overline{T}^k(x) \leq t\}.$$

Pour rappel,

$$\sum_{k=0}^{n_t} \tau\circ\overline{T}^k(x) \leq t \leq \sum_{k=0}^{n_t+1} \tau\circ\overline{T}^k(x). \tag{6.5}$$

Par hypothèse $\inf\tau>0$, donc n_t tend presque sûrement vers l'infini lorsque t tend vers l'infini et le système dynamique $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ étant ergodique,

$$\frac{1}{n_t}\sum_{k=0}^{n_t} \tau\circ\overline{T}^k(x) \overset{\overline{\mu}-p.s}{\to} E_{\overline{\mu}}(\tau). \tag{6.6}$$

La relation (6.5) assure alors que $\lim_{t\to\infty}\frac{t}{n_t} = E_{\overline{\mu}}(\tau)$. Les définitions de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{N}_t)_{t\geq 0}$ permettent l'encadrement qui suit pour $(x,s)\in\mathcal{M}$ avec $x\in\overline{M}$ et $s\in[0,\tau(x))$,

$$\frac{1}{t^2}(\nu_{n_t}(x)-D) \leq \frac{\mathcal{N}_t(x,s)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}\nu_{n_t+2}(x).$$

Ainsi, 6.6 et la convergence presque sûre $\left(\frac{1}{n^2}\nu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, assure celle de $\frac{1}{n_t^2}\nu_{n_t}$ lorsque t tend vers l'infini, ce qui avec l'inégalité plus haut aboutit à la conclusion

$$\frac{\mathcal{N}_t}{t^2} \underset{t\to\infty}{\overset{L-p.s}{\to}} e_I' = \frac{e_I}{E_{\overline{\mu}}(\tau)}.$$

□

Troisième partie

Problème de moyennisation sur les $\mathbb{Z}$-extensions.

Chapitre 7

Introduction.

Dans cette partie on considère une $\mathbb{Z}$-extension périodique, ergodique et récurrente (M, T, μ) d'un système dynamique ergodique $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ par une fonction de pas $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ et on fixe $F(.,.) : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ une fonction Lipschitz en la première variable et mesurable en la deuxième.
On s'intéresse alors au comportement asymptotique des solutions $x_t^\epsilon(x_0, .)$ de l'équation différentielle perturbée

$$\frac{dx_t^\epsilon(x_0, \omega)}{dt} = F(x_t^\epsilon(x_0, \omega), T^{\lfloor \frac{t}{\epsilon} \rfloor}(\omega)) \tag{7.1}$$

avec $x_{(t=0)}^\epsilon(x_0, .) = x_0$, lorsqu'on accélère la dynamique ($\epsilon \to 0$).L'étude de ces systèmes est motivée entre autre par le moyennisation pour problèmes physiques perturbés par des flots continus comme le modèle du Gaz de Lorentz de 1905.

Bien qu'à ma connaissance aucune étude n'ait été faite en mesure infinie pour des $\mathbb{Z}$-extensions, le comportement de ces équations perturbées est néanmoins bien connu en mesure finie, notamment lorsque la deuxième coordonnées appartient à un systèmes dynamiques (billards ou flots d'Anosov) exponentiellement mélangeant, via les travaux de Khasminskii [18], Kifer [23], Pène [27], Anosov [3] et Arnold [4] entre autres. La moyennisation a aussi été étudiée par Chevyrev, Friz, Korepanov et Melbourne [21] entre autre pour d'autres dynamiques comme les Pomeau–Manneville qui peuvent admettre une mesure infinie. Dans le cas des dynamiques $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ en mesure finie, le résultat attendu est de voir les solutions perturbées converger vers une solution "moyennée" lorsque la dynamique s'accélère. Pour y parvenir, une façon assez classique en mesure finie est de distinguer une partie mobile et centrée $\tilde{F}(.,.)$ pour la dynamique et une partie constante $\overline{F}(.)$ qui est obtenue en intégrant $F(.,.)$ selon sa deuxième variable. Cette solution "moyennée", sous

de bonnes hypothèses, a la forme d'une solution de l'équation

$$\frac{dw_t(x)}{dt} = \int_{\overline{M}} F(w_t(x), .)d\overline{\mu},\ w_0(x) = x. \tag{7.2}$$

Or cette approche ne fonctionne plus telle quelle dans le cas de la mesure infinie, les fonctions constantes n'étant pas intégrables en mesure infinie. Aussi, cette partie considère séparément deux cas, un premier cas mettant en jeu une application $F(.,.)$ intégrable et un deuxième où $F(.,.)$ se sépare en un morceau constant au regard de la dynamique et l'autre centré. Dans chaque cas la solution perturbée présente une solution moyennée w_t dont l'erreur e_t^ϵ vérifie un théorème limite mais les vitesses de convergence diffèrent d'un cas à l'autre.
On notera dans toute cette partie $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k$ et le temps local en 0 associé $N_n := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k=0\}}$.

Chapitre 8

Equations différentielles perturbées : Cas de fonctions intégrables.

Cette section traite le cas où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $F(x,.)$ est un cas particulier de fonction intégrable, une fonction à support compact. On rappelle qu'on identifie $\overline{M}$ à $\overline{M} \times \{0\}$ et $\overline{\mu}$ à la restriction de μ à $\overline{M}$. On peut, quitte à voir M comme une $\mathbb{Z}$-extension de $\overline{M} \times [|-a,a|]$ pour $a \in \mathbb{N}^*$ bien choisi, supposer que $F(x,.)$ est à support dans $\overline{M}$ et établir le théorème suivant :

Théorème 8.0.1. *On suppose que*

1. *pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $F(x,.)$ est $\overline{\mu}$-intégrable et à support dans $\overline{M}$ et on note $\overline{F}(x) := \int_M F(x,.)d\mu = \int_{\overline{M}} F(x,.)d\overline{\mu}$. On suppose aussi que $F(.,.)$ (et donc $\overline{F}(.)$) est bornée.*
2. *pour tout $\omega \in M$, $F(.,\omega)$ est Lipschitz de constante de Lipschitz $[F](\omega)$ uniformément bornée en ω par $[F]$.*
3. *$\|N_n\|_{L^2_{\overline{\mu}}} = O(\sqrt{n})$.*

Soit $S > 0$. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la solution $(x^\epsilon_t(x,.))_{t\in[0,T]}$ de l'équation perturbée (7.1) vérifie

$$\left\| \sup_{0\le t\le S} \left| \frac{x^\epsilon_t(x_0,.) - x_0}{\epsilon^{1/2}} - \epsilon^{1/2}\overline{F}(x_0)N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor} \right| \right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} \underset{\epsilon\to 0}{=} o(1). \tag{8.1}$$

Si de plus $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie un théorème limite local de la forme :
Il existe $\Sigma > 0$, tel que pour tout $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_N$,

$$\overline{\mu}\left(\bigcap_{i=1}^{N}\left(\overline{S}_{k_i}=0\right)\right)=\overline{\mu}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(\overline{S}_{k_i-k_{i-1}}=0)\right)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1+\epsilon_i^0(k_0,\ldots,k_N)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k_i-k_{i-1}+1)^{1/2}},\tag{8.2}$$

avec pour tout i, $|\epsilon_i^0(k_0,\ldots,k_N)|\leq\epsilon(k_i-k_{i-1})$ *où* $\epsilon(.)$ *est une application telle que* $\lim_{k\to\infty}\epsilon(k)=0$. *Alors*

$$\left(\frac{x_t^\epsilon(x_0,.)-x_0}{\epsilon^{1/2}}\right)_{t\in[0,S]}\overset{\mathcal{L}_\mu,\|.\|_\infty}{\to}\left(L_t(0)\overline{F}(x_0)\right)_{t\in[0,T]},$$

où $\mathcal{L}_\mu$ *représente la convergence forte en loi par rapport à la mesure* μ.

Démonstration. On prouve (8.1) de proche en proche : on pose dans un premier temps $(w_t(x_0,\omega))_{t\geq0}$ la solution sur la $\mathbb{Z}$-extension (M,T,μ) de l'équation différentielle

$$\frac{dw_t^\epsilon}{dt}(x_0,\omega)=\overline{F}(w_t^\epsilon(x_0,\omega))1_{\overline{M}}(T^{\lfloor t/\epsilon\rfloor}\omega),\tag{8.3}$$

avec $w_0(x_0,\omega)=x_0$. Le processus $(w_t^\epsilon(x_0,.))_{t\in[0,T]}$ vérifie le lemme suivant.

Lemme 8.0.2. *Pour* $x_0\in\mathbb{R}^d$ *et* $S>0$,

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq S}\left|\frac{w_t^\epsilon(x_0,.)-x_0}{\epsilon^{1/2}}-\epsilon^{1/2}\overline{F}(x_0)N_{\lfloor t/\epsilon\rfloor}\right|\right\|_{L^1_{\overline{\mu}}}=O(\epsilon^{1/2}).$$

Démonstration. l'équation (8.3) implique

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq S}|w_t^\epsilon(x_0,.)-x_0-\epsilon\overline{F}(x_0)N_{\lfloor t/\epsilon\rfloor}|\\
&\leq\epsilon\int_0^{S/\epsilon}|\overline{F}(w_{\epsilon s}^\epsilon(x_0,.))-\overline{F}(x_0)|1_{\overline{M}}\circ T^{\lfloor s\rfloor}(.)ds+O_{\|.\|_\infty}(\epsilon)\\
&\leq\epsilon\int_0^{S/\epsilon}[\overline{F}]\|F\|_\infty\epsilon N_{\lfloor s/\epsilon\rfloor}1_{\overline{M}}\circ T^{\lfloor s\rfloor}(.)ds+O_{\|.\|_\infty}(\epsilon)\\
&\leq[\overline{F}]\|F\|_\infty\epsilon^2N^2_{\lfloor S/\epsilon\rfloor}+O_{\|.\|_\infty}(\epsilon)=O_{\|.\|_{L^1_{\overline{\mu}}}}(\epsilon).
\end{aligned}$$

□

Pour montrer (8.1), il ne reste plus qu'à vérifier que $w_t(x,.)$ est une bonne approximation de $x_t^\epsilon(x,.)$.

Lemme 8.0.3. *Pour* $x_0\in\mathbb{R}^d$,

$$\left\| \sup_{t\in[0,S]} \left| \frac{x_t^\epsilon(x_0,.) - w_t^\epsilon(x_0,.)}{\epsilon^{1/2}} \right| \right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} \underset{\epsilon\to 0}{=} o(1).$$

Démonstration. Comme $F(x,.)$ est à support dans $\overline{M} \simeq \overline{M} \times \{0\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut remarquer que

$$\begin{aligned}\epsilon^{-1/2}(x_t^\epsilon(x_0,.) - w_t^\epsilon(x_0,.)) &= \epsilon^{1/2} \int_0^{t/\epsilon} \left(F(x_{s\epsilon}^\epsilon(x_0,.), T^{\lfloor s \rfloor}.) - \overline{F}(w_{s\epsilon}^\epsilon(x_0,.)) \right) 1_{\overline{M}}(T^{\lfloor s \rfloor}.) ds \\ &= \epsilon^{1/2} \int_0^{t/\epsilon} F(x_{s\epsilon}^\epsilon(x_0,.), T^{\lfloor s \rfloor}.) - F(w_{s\epsilon}^\epsilon(x_0,.), T^{\lfloor s \rfloor}.) ds + v_t^\epsilon(x_0,.)\end{aligned} \tag{8.4}$$

en notant $\tilde{F}(a,b) := F(a,b) - \overline{F}(a)$ et en posant

$$v_t^\epsilon(x_0,.) := \epsilon^{1/2} \int_0^{t/\epsilon} \tilde{F}(w_{s\epsilon}^\epsilon, T^{\lfloor s \rfloor}) 1_{\overline{M}}(T^{\lfloor s \rfloor}) ds.$$

On note également

$$v_t^{0,\epsilon}(x_0,.) := \epsilon^{1/2} \int_0^{t/\epsilon} \tilde{F}(x_0, T^{\lfloor s \rfloor}) 1_{\overline{M}}(T^{\lfloor s \rfloor}) ds.$$

Par définition de $(w_s^\epsilon)_{0\le s\le S}$, $|w_s^\epsilon(x_0,.) - w_0(x_0,.)| \le \epsilon \|F\|_\infty N_{\lceil s/\epsilon \rceil}$ et ainsi

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le S} \left| v_t^\epsilon(x_0,.) - v_t^{0,\epsilon}(x_0,.) \right| \\ &\le \sup_{0\le t\le S} \epsilon^{1/2} \int_0^{t/\epsilon} |\tilde{F}(w_{\epsilon s}(x_0,.), T^{\lfloor s \rfloor}) - \tilde{F}(x_0, T^{\lfloor s \rfloor})| 1_{\overline{M}} \circ T^{\lfloor s \rfloor}(.) ds \\ &\le \epsilon^{1/2} [F] \|F\|_\infty \epsilon N^2_{\lfloor S/\epsilon \rfloor}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Comme $E_{\overline{\mu}}(\epsilon N^2_{\lfloor t/\epsilon \rfloor})$ est borné, le dernier terme est en $O(\epsilon^{1/2})$ dans $L^1_{\overline{\mu}}$.

Si on note $(\overline{M}, T_{\overline{M}}, \overline{\mu})$ le système induit à partir de (M,T,μ) sur la cellule $\overline{M}$, le théorème de Kac (voir proposition 1.1.7 page 18) assure que ce système est ergodique. Le théorème de Birkhoff peut alors s'appliquer et le processus $F_n(x_0,.) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \tilde{F}(x_0, T^k_{\overline{M}})$ converge presque sûrement vers 0. Il est aussi borné par hypothèse.

Le processus $v_t^{0,\epsilon}(x_0,.)$ peut être majoré pour tout $t \in [0,T]$ par

$$|v_t^{0,\epsilon}(x_0,.)| \le \epsilon^{1/2} N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1} |F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}}| + \epsilon^{1/2} \|\tilde{F}(x_0, T^{\lfloor t/\epsilon \rfloor})\|_\infty.$$

Fixons $S' > 0$, la récurrence du système (M, T, μ) impose que $N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor} \overset{p.s}{\underset{\epsilon \to 0}{\to}} \infty$ ce qui impose la convergence en probabilité de $\sup_{s \in [S\epsilon^{3/4}, T]} \left| F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}} \right|$ vers 0 :
en effet, avec le théorème de Birkhoff, pour $\eta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $A \subset \overline{M}$ mesurable tels que $\overline{\mu}({}^cA) \leq \eta$ et pour tout $n \geq N$ et tout $\omega \in A$,

$$|F_n(x_0, \omega)| \leq \eta.$$

Dans ces conditions,

$$\overline{\mu}\left(\sup_{s \in [S\epsilon^{3/4}, T]} |F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}}| \geq \eta \right) \leq \overline{\mu}({}^cA) + \overline{\mu}\left(N_{\lfloor \frac{S}{\epsilon^{1/4}} \rfloor - 1} \leq N \right).$$

D'où la convergence en probabilité de $\sup_{s \in [S\epsilon^{3/4}, S]} |F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}}|$. Enfin, comme $F_n(x_0, .)$ est uniformément bornée on a l'uniforme intégrabilité de $\left(\sup_{s \in [S'\epsilon^{3/4}, S]} |F^2_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}}| \right)_{\epsilon > 0}$ et la convergence,

$$\left\| \sup_{s \in [S'\epsilon^{3/4}, S]} \left| F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1}} \right| \right\|_{L^2_{\overline{\mu}}} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0.$$

Comme $N_n \leq n$, on dispose d'un encadrement pour $\| \sup_{t \in [0,S]} |v_t^{0,\epsilon}| \|_{L^1_{\overline{\mu}}}$:

$$\left\| \sup_{t \in [0,S]} v_t^{0,\epsilon} \right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} \leq \left\| \epsilon^{1/2} N_{\lceil S/\epsilon \rceil} \right\|_{L^2_{\overline{\mu}}} \left\| \sup_{t \in [S'\epsilon^{3/4}, S]} \left| F_{N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor}} \right| \right\|_{L^2_{\overline{\mu}}} + O(\epsilon^{1/2}).$$

Avec (8.5), on en déduit

$$\sup_{t \in [0,T]} |v_t^{0,\epsilon}| \overset{L^1_\mu}{=} o(1) \ \ et \ \ \sup_{t \in [0,T]} |v_t^{\epsilon}| \overset{L^1_\mu}{=} o(1) \tag{8.6}$$

lorsque ϵ tend vers 0. On pose

$$a_t^\epsilon(x_0, .) := \epsilon^{-1/2}(x_t^\epsilon(x_0, .) - w_t^\epsilon(x_0, .)),$$

via (8.4), $|a_t^\epsilon(x_0, .)|$ vérifie

$$|a_t^\epsilon(x_0,.)| \leq \epsilon \int_0^{t/\epsilon} [F]|a_{\epsilon s}^\epsilon(x_0,.)|ds + |v_t^\epsilon(x_0,.)|$$
$$\leq \int_0^t [F]|a_s^\epsilon(x_0,.)|ds + |v_t^\epsilon(x_0,.)|.$$

En appliquant le lemme de Grönwall,

$$|a_t^\epsilon(x_0,.)| \leq |v_t^\epsilon(x_0,.)| + \int_0^t |v_s^\epsilon(x_0,.)|e^{T[F]}ds.$$

D'où, d'après (8.6),

$$\left\| \sup_{t\in[0,S]} |a_t^\epsilon(x_0,.)| \right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} \leq (1+Te^{T[F]}) \left\| \sup_{t\in[0,S]} |v_t^\epsilon| \right\|_{L^1_{\overline{\mu}}} = o(1).$$

Ce qui prouve le lemme 8.0.3.

□

La conclusion (8.1) du théorème 8.0.1 résulte directement des lemmes 8.0.2 et 8.0.3.

Montrons à présent le second point, pour cela on applique la proposition 1.5.6 qui assure la convergence :

$$\left(\epsilon^{1/2} N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor}\right)_{t\in[0,S]} \overset{\mathcal{L}_{\overline{\mu}},J_1}{\underset{\epsilon\to 0}{\to}} (L_t)_{t\in[0,S]}, \tag{8.7}$$

où $\mathcal{L}_{\overline{\mu}}$ désigne la convergence en loi pour $\overline{\mu}$ et $(L_t)_{t\in[0,S]}$ est le temps local d'un mouvement Brownien de variance Σ. L'équation (8.1) issue du premier point du théorème assure que la distance uniforme $\|.\|_{\infty,[0,S]}$ (et donc la distance pour la métrique J_1) entre $\left(\frac{x_t^\epsilon(x_0,.)-x_0}{\epsilon^{1/2}}\right)_{t\in[0,T]}$ et $\left(\epsilon^{1/2}\overline{F}(x_0)N_{\lfloor t/\epsilon \rfloor}\right)_{t\in[0,T]}$ converge en probabilité vers 0. Cela assure avec (8.7) la convergence suivante, sous la loi $\overline{\mu}$:

$$\left(\frac{x_t^\epsilon(x_0,.)-x_0}{\epsilon^{1/2}}\right)_{t\in[0,S]} \overset{\mathcal{L}_{\mu},J_1}{\to} \left(L_t(0)\overline{F}(x_0)\right)_{t\in[0,S]}.$$

On peut alors conclure sur la convergence forte en loi du processus x_t^ϵ à l'aide du théorème de Zweimüller (théorème 1.3.4 page 24 (voir [47]), en montrant que pour tout $\omega \in M$,

$$u_t^\epsilon(x,\omega) := \frac{x_t^\epsilon(x_0,T(\omega)) - x_t^\epsilon(x_0,\omega)}{\epsilon^{1/2}} \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0. \tag{8.8}$$

uniformément en t.
Remarquons que $(x^\epsilon_{t+\epsilon}(x_0,\omega))_{t\geq 0}$ vérifie la même équation différentielle que $(x^\epsilon_t(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))_{t\geq 0}$ avec la même condition initiale. Par conséquent, pour $t \geq \epsilon$,

$$|u^\epsilon_t| = \left| \frac{x^\epsilon_t(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_{t-\epsilon}(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega)}{\epsilon^{1/2}} \right| \tag{8.9}$$

$$\leq \epsilon^{-1/2} \left| \int_{t-\epsilon}^{t} F\left(x^\epsilon_s(x,T(\omega))\right) ds \right| \tag{8.10}$$

$$+ \epsilon^{-1/2} \int_0^{t-\epsilon} [F] |x^\epsilon_s(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_s(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))| ds. \tag{8.11}$$

Or

$$|x^\epsilon_s(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_s(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))| \leq |x_0 - x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega)| + \int_0^s [F] |x^\epsilon_u(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_u(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))| du,$$

donc $|x^\epsilon_s(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_s(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))|$ vérifie l'inégalité de Grönwall et

$$|x^\epsilon_s(x_0,T(\omega)) - x^\epsilon_s(x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega),T(\omega))| = O(|x_0 - x^\epsilon_\epsilon(x_0,\omega)|) = O(\epsilon),$$

uniformément en $s \in [0,S]$.
On en déduit bien (8.8) ce qui vérifie les hypothèses du théorème 1.3.4 page 24 dont la conclusion est la convergence forte en loi de notre théorème.

$$\left(\frac{x^\epsilon_t(x_0,.) - x_0}{\epsilon^{1/2}} \right)_{t\in[0,S]} \overset{\mathcal{L}_{\mu,J_1}}{\to} \left(L_t(0)\overline{F}(x_0) \right)_{t\in[0,S]},$$

car (M,T,μ) est ergodique. Comme tous les processus ont des trajectoires continues, on conclut que la convergence en loi a aussi lieu dans l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ muni de la norme uniforme. □

Chapitre 9

Résultat de moyennisation.

9.1 Résultats et hypothèses

Dans cette partie on s'intéresse aux solutions des équations différentielles perturbées (7.1) présentées page 111 pour des systèmes (M, T, μ) dont le système quotient $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ est un facteur de tour de Young (à l'instar des systèmes discrets dans 2) et $F : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ se décompose à l'aide de deux fonctions, l'une $f : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ centrée pour la mesure μ et l'autre $\overline{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indépendante de la dynamique :

$$F(x, \omega) := f(x, \omega) + \overline{F}(x).$$

Dans ce cas on dispose d'un résultat de convergence lorsqu'on accélère la dynamique ($\epsilon \to 0$) des solutions de l'équation différentielle perturbée vers la solution moyennée $(w_t(x))_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle moyennée

$$\frac{dw_t(x)}{dt} = \overline{F}(w_t(x)), \tag{9.1}$$

avec $w_0(x) = x$. Fixons $T' > 0$. On peut définir l'erreur $e_t^\epsilon(x, \omega)$ pour $t \in [0, T']$, $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in M$ par

$$e_t^\epsilon(x, \omega) := x_t^\epsilon(x, \omega) - w_t(x).$$

Lorsque le système étudié est une $\mathbb{Z}$-extension d'un système (M, T, μ) admettant une factorisation de type "tours de Young" comme explicité dans la section 9.1.1, l'erreur e_t^ϵ vérifie le théorème limite suivant qui est le but de ce chapitre et sera démontré dans la section 9.2. Dans la suite on notera $\|.\|_{lip}$ la constante de Lipschitz.

Théorème 9.1.1. *Soit $\epsilon > 0$, on se place sur un système (M, T, μ) décrit comme une*

$\mathbb{Z}$-extension d'un système $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ satisfaisant l'hypothèse 9.1.5, de fonction de pas $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ bornée. Soit $f : \mathbb{R}\times\overline{M}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du théorème 9.1.2 et on suppose de plus que pour tout $(\omega,a)\in M$, $f(.,\omega,a)$ est dérivable (on note $D_1 f$ cette dérivée) et satisfait :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|D_1 f(x,.,a)\|_\infty<\infty \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{a\in\mathbb{Z}}\|D_1 f(x,.,a)\|_{lip}<\infty.$$

Soit $\overline{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application C^1 bornée et de dérivée bornée. On suppose que l'application F définie pour tout $(x,(\omega,a))\in\mathbb{R}\times M$, par

$$F(x,\omega,a) := f(x,\omega,a)+\overline{F}(x)$$

est C^2 en la première variable, uniformément bornée, de dérivées première et secondes uniformément bornées sur $\mathbb{R}$ uniformément.
Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'erreur $(e_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']}$ vérifie un théorème limite pour la convergence forte en loi :

$$(\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']} \overset{\mathcal{L}_\mu,\|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to0}{\to}} (y_t)_{t\in[0,T']}, \tag{9.2}$$

où $\mathcal{L}_\mu$ désigne la convergence forte en loi pour la mesure μ et

$$\begin{aligned}&(y_t(x,\omega))_{t\in[0,T']} :=\\ &\Big(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}(\omega) &(9.3)\\ &+\int_0^t D\overline{F}(w_s(x))B_{\int_0^s a(w_u(x))dL'_u(0)}(\omega)\exp\Big(\int_s^t D\overline{F}(w_u(x))du\Big)ds\Big)_{t\in[0,T']}, &(9.4)\end{aligned}$$

où $(B_t)_{t\geq0}$ est un mouvement Brownien standard (de variance 1) et $(L'_s)_{s\geq0}$ est le temps local d'un mouvement brownien $(B'_t)_{t\geq0}$ de variance Σ (où Σ est donné dans les hypothèses 9.1.4), indépendant de $(B_t)_{t\geq0}$, et $a : x\in\mathbb{R}\to a(x)$ est la fonction définie par

$$a(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x,T^{|l|}.)f(x,.)\right) := \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_M f(x,T^{|l|}.)f(x,.)d\mu.$$

où I_μ désigne pour g mesurable,

$$I_\mu(g) := \int_M g d\mu$$

Notons que l'application $t\mapsto\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)$ apparaissant dans le théorème cor-

respond à un terme de variance qui n'est pas sans rappeler celle obtenu dans le cas de système en mesure finie (voir [27], [23]). En effet, dans le cas où (M, T, μ) est le billard de Sinai, le terme de variance dans le processus gaussien s'écrivait $\int_0^t a(w_s(x))ds$. Le temps local dans l'intégration pour les $\mathbb{Z}$-extensions est attendu, du fait de la dynamique, celui-ci apparaissait déjà dans le théorème limite central [33] dans le cas particulier des observables de la forme $f(w, l) := \beta(l)$.

Pour parvenir à démontrer le théorème 9.1.1, on prouve dans le chapitre 10, un résultat intéressant en soit, un théorème limite central perturbé sur des $\mathbb{Z}$-extensions. La démonstration s'inspire fortement du travail fait par Pène et Thomine dans [32].

Théorème 9.1.2. *Soit $\epsilon_0 > 0$ et (M, T, μ) un système dynamique métrique décrit comme une $\mathbb{Z}$-extension d'un système $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ satisfaisant l'hypothèse 9.1.5 de fonction de pas $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ bornée. Soit $f : \mathbb{R} \times \overline{M} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ vérifiant*

- *$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{a\in\mathbb{Z}} \|f(x, ., a)\|_{lip} < \infty$*
- *$f(x, .)$ est d'intégrale nulle sur (M, T, μ).*
- *$\sum_{a\in\mathbb{Z}} |1 + a|^{2(1+\epsilon_0)} \|f(x, ., a)\|_\infty$ est uniformément borné*
- *les fonctions $f(., \omega)$ sont uniformément lipschitziennes (uniformément en $\omega \in M$.*

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $s \to w_s(x)$ une fonction Lipschitz, on pose pour $t \in [0, T']$ et $\omega \in M$,

$$v_t^\epsilon(x, \omega) := \epsilon^{1/4} \int_0^{t/\epsilon} f(w_{\epsilon s}(x), T^{\lfloor s \rfloor}\omega)ds.$$

Alors pour $T' \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(v_t^\epsilon(x, .))_{t\in[0,T']} \overset{\mathcal{L}_\mu, \|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to 0}{\to}} \left(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{t\in[0,T']}$$

Où $\mathcal{L}_\mu$ désigne la convergence forte en loi pour μ, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard et $(L'_s)_{s\geq 0}$ est le temps local d'un mouvement brownien $(B'_t)_{t\geq 0}$ de variance Σ (avec Σ tel que défini dans l'hypothèse 9.1.4) indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$. Enfin $a(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu \left(f(x, .)f(x, T^{|l|}(.))\right)$.
De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T'$,

$$\|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon\|_{L^{2p}_{\overline{\mu}}} \leq K(t - s)^{1/4}. \tag{9.5}$$

Dans le cas particulier où $\overline{F}$ est la fonction constante nulle, on retrouve le théorème limite central pour les sommes de Birkhoff sur nos systèmes. Notamment, dans le cadre d'une $\mathbb{Z}$-extension du billard de Sinai, on peut établir un théorème limite central à l'instar

des travaux [33] avec une classe d'observables f qui ne sont cette fois-ci plus nécessairement constantes sur les cellules de la forme $\mathcal{D}^n(\overline{M})$.

Corollaire 9.1.3. *Soit (M,T,μ) le système dynamique en temps discret correspondant à la section de Poincaré du gaz de Lorentz présenté dans la section 2.2, qui est une $\mathbb{Z}$-extension au dessus du billard de Sinai $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable satisfaisant :*

- *$\sum_{a\in\mathbb{Z}} \|f(.,a)\|_{lip}$ est bornée.*
- *$f(.)$ est d'intégrale nulle sur (M,T,μ).*
- *$\sum_{a\in\mathbb{Z}} |a|^{2(1+\epsilon_0)}\|f(.,a)\|_\infty$ est finie.*

On pose pour $t \in [0,T']$, $\omega \in M$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$v_t^n(\omega) := \frac{1}{n^{1/4}} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} f(T^k\omega)ds.$$

Alors pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(v_t^n(.))_{t\in[0,T]} \overset{\mathcal{L}_{\mu,J_1}}{\underset{n\to\infty}{\to}} \left(B_{L'_t(0)}\right)_{t\in[0,T']}$$

où $(B_t)_{t\in[0,T']}$ est un mouvement Brownien de variance

$$\sigma^2(f) := \frac{1}{\overline{\mu}(\overline{M}\times\{0\})} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_M f(T^{|l|}.)f(.)d\mu,$$

Et $(L'_s)_{s\in[0,T']}$ le temps local d'un mouvement brownien $(B'_t)_{t\in[0,T']}$ indépendant de $(B_t)_{t\in[0,T']}$ et de variance Σ vérifiant

$$\Sigma = \lim_{n\to\infty} E_{\overline{\mu}}\left(\frac{S_n^2}{n}\right).$$

Où S_n est définie dans l'équation (2.4) de la page 43.

La preuve du théorème détaillée dans la section 10.1 repose en grande partie sur les travaux de Thomine et Pène dans [32] pour établir un théorème limite central pour le gaz de Lorentz $\mathbb{Z}^2$-périodique notamment.

9.1.1 Hypothèses

On donne ici les hypothèses correspondant à des dynamiques de type facteur de tour de Young, hypothèses que vérifient les différents systèmes dynamiques discret donnés dans le chapitre 2. Ces hypothèses sont en réalité celles d'une structure de tour de Young auquel

s'ajoute la propriété du théorème de perturbation de Szàsz et Varju [43]. Notons qu'une régularité assez forte pour la valeur propre dominante λ_u est exigé pour faire les preuves qui suivent.

Hypothèses 9.1.4 (H1). *On dit qu'un système dynamique probabilisé $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$ et une application $\tilde{\phi} : \hat{M} \to \mathbb{Z}$ vérifient (H1) si le système est muni d'un espace de Banach B complexe contenant la fonction constante $1_{\hat{M}}$ et tel que $E_{\hat{\bar{\mu}}}$ est une forme linéaire continue sur B et satisfait les propriétés suivantes :*

(0) la fonction constante $1_{\hat{M}}$ est dans B et $E_{\hat{\bar{\mu}}}(.)$ est une forme linéaire continue sur B.

(1) On suppose que $\hat{M}$ est doté d'une partition $(\Delta_{i,k})_{i,k\in\mathbb{N}}$ et d'un temps de séparation $s : \hat{M} \times \hat{M} \to \mathbb{N}$ tels que pour tout $i, k \in \mathbb{N}$, et tout $x, y \in \Delta_{i,k}$, $s(x, y) \geq 1$. On suppose de plus que pour tout $x, y \in \hat{M}$ tel que $s(x, y) \geq 1$, $s(\hat{T}x, \hat{T}y) = s(x, y) - 1$.

(2) il existe $\beta \in]0, 1[$ et $\epsilon > 0$ tel que l'espace de Banach $(B, \|.\|_B)$ décrit comme suit soit inclus dans $L^1_{\hat{\bar{\mu}}}$: une fonction $f : \hat{M} \to \mathbb{R}$ est dans B si

$$\|f\|_B = \|f\|'_\infty + \|f\|'_{lip} < \infty$$

avec

$$\|f\|'_{lip} = \sup_{l,k\in\mathbb{N}} e^{-\epsilon l}\|f\|_{lip,\Delta_{l,k}} \text{ et } \|f\|'_\infty = \sup_{l,k\in\mathbb{N}} e^{-\epsilon l}\|f\|_{\infty,\Delta_{l,k}}.$$

Où $\|f\|_{lip,\Delta_{l,k}} := \sup_{x,y\in\Delta_{l,k}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\beta^{s(x,y)}}$ et $\|f\|_{\infty,\Delta_{l,k}} := \|f_{\Delta_{l,k}}\|_\infty$.

Remarquons qu'une telle norme vérifie :

$$\|f\|_{L^1_{\hat{\bar{\mu}}}} \leq \|f\|_B \|e^{\epsilon l(.)}\|_{L^1_{\hat{\bar{\mu}}}},$$

en notant $l(x) = l$ si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \Delta_{l,k}$.

(3) L'opérateur de transfert P sur $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$ peut s'écrire pour $f \in B$

$$Pf(x) = \sum_{w\in\hat{T}^{-1}(\{x\})} e^{-h(w)} f(w)$$

avec $h \in B$ une fonction Lipschitz au sens où $\|h\|'_{lip} = \sup_{i,k\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in\Delta_{i,k}} \frac{|h(x)-h(y)|}{\beta^{s(x,y)}}$ est fini, et on a pour tous $i, k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \Delta_{i,k}$ une bijection $X_0 : \hat{T}^{-1}(\{x\}) \to \hat{T}^{-1}(\{y\})$ qui respecte les temps de séparations : $s(z, X_0(z)) = 1 + s(x, y)$.

(4) Pour tout $x, y \in \hat{M}$ tels que $s(x,y) > 1$, $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(y)$.
Si on note $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\phi} \circ \hat{T}^k$, il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $b \in]0, \beta_0[$, il existe $\alpha \in]0,1[$, $C > 0$ tel que pour tout $f \in B$ et tout $u \in [-b, b]$:

$$P_u^n(f) := P(e^{iuS_n} f) = \lambda_u^n \Pi_u(f)^n + N_u^n(f),$$

où
— *$\lambda_\cdot \in C^4([-b,b], \mathbb{C})$ vérifie $\lambda_u = 1 - \Sigma\frac{u^2}{2} + O(u^3)$,*
— *$u \to \Pi_u \in C^2([-b,b], L(B))$ vérifie $\Pi_0(.) = E_{\hat{\bar{\mu}}}(.)1$, de plus pour tout $u \in [-b,b]$, Π_u est un projecteur donc vérifie $\Pi_u^n = \Pi_u$.*
— *$N_u \in L(B)$ vérifie $\|N_u^n\| \leq C\alpha^n$.*
De plus, pour tout $u \in [-\pi, \pi] \backslash [-b, b]$, $\|P_u^n\| \leq C\alpha^n$.

On suppose de plus que $f(x, ., .)$ peut-être approchée uniformément par une fonction qui admet une représentation dans $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$.

Hypothèses 9.1.5. *On suppose que $\overline{M}$ est muni d'une métrique d et on note pour une application $g : \overline{M} \to \mathbb{R}$, $\|g\|_{lip} := \sup_{x,y \in \overline{M}} \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}$. On suppose aussi que $(\overline{M}, \overline{T}, \overline{\mu})$ et $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$ sont les facteurs commun d'un système dynamique (M_1, T_1, μ_1) par les projections respectives π_1 et π_2. On suppose qu'il existe*
$\hat{\phi} : \hat{M} \to \mathbb{Z}$ tel que $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$ et $\hat{\phi}$ vérifient l'hypothèse 9.1.4 et

$$\overline{S_n} \circ \pi_1 = S_n \circ \pi_2.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\overline{S}_n := \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k$ et la notation S_n est celle de l'hypothèse 9.1.4).
De plus il existe $0 < \beta_0 < 1$ et $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $g : \overline{M} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et bornée, il existe pour $n \in \mathbb{N}$, g_n $\hat{\bar{\mu}}$-centrée (au sens où $E_{\hat{\bar{\mu}}}(g_n(x, .a)) = 0$) vérifiant :

$$\|g \circ \overline{T}^n \circ \pi_1 - g_n \circ \pi_2\|_\infty \leq C\beta_0^n \|g\|_{lip} \tag{9.6}$$

$$\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$$

et que pour tous $x, y \in \hat{M}$,

$$s(x,y) > 2n \Rightarrow g_n(x) = g_n(y). \tag{9.7}$$

Remarque 9.1.6. *Ces hypothèses s'appliquent aux systèmes présentés au chapitre 2 en*

prenant pour $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\overline{\mu}})$ *un facteur symbolique (tour de Young pour le billard ou sous-shift de type fini pour le système issu du flot géodésique) et en associant à* $\overline{M}$ *la distance* $d(x,y) = \beta^{s_0(x,y)}$ *où* $s_0(x,y)$ *désigne le plus grand* $n \geq 0$ *tel que* x *et* y *soient dans le même atome de* ξ_{-n}^n. *En effet, en posant*

$$h_n := E_{\overline{\mu}}(f|\xi_{-n}^n),$$

$h_n(x, \overline{T}^n(.))$ *est constante sur les atomes de* ξ_0^{2n} *et il existe* $g_n(x,.)$ *sur* $\hat{M}$ *de même régularité selon* x *telle que*

$$h_n \circ \overline{T}^n \circ \pi_1 = g_n \circ \pi_2.$$

Le caractère Lipschitz de f *assure bien*

$$\|g \circ \overline{T}^n \circ \pi_1 - g_n \circ \pi_2\|_\infty \leq a^n \|f\|_{lip}.$$

De plus $\|g_n\|_\infty = \|h_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ *et (9.7) est vérifiée.*

9.2 Preuve du théorème de moyennisation.

On se concentre ici sur la démonstration du théorème 9.1.1 en admettant le théorème 9.1.2. La preuve suit à peu près celle appliquée au chapitre 8, c'est à dire en contrôlant la propagation de l'erreur e_t^ϵ au cours du temps entre l'équation perturbée et l'équation moyennée à l'aide de l'inégalité de Grönwall.

Afin de démontrer le théorème, on admet le lemme technique suivant qui est démontré dans la section 10.3 :

Lemme 9.2.1. *On se place sur un système dynamique une* $\mathbb{Z}$*-extension* (M, T, μ) *suivant l'hypothèse 9.1.4. Soit* $\epsilon_0 > 0$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$, *étant donné*
$h_1, \ldots, h_p : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $i = 1, \ldots, p$,

- $\int_M h_i(s,.)d\mu = 0$ *pour tout* $s \geq 0$,
- $\sup_{s\geq 0} \sum_{a\in\mathbb{Z}} (1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)} \|h_i(s,.,a)\|_\infty < \infty$,
- $h_i(s,.,a)$ *est Lipschitz dans* $\overline{M}$

$$\sup_{s\geq 0} \sum_{a\in\mathbb{Z}} \|h_i(s,.,a)\|_{lip} < \infty.$$

Alors

$$\int_{\frac{a}{\epsilon}\leq u_1\leq\cdots\leq u_p\leq\frac{b}{\epsilon}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}h_i(u_i,T^{\lfloor u_i\rfloor})\right)\right|du_1\dots du_p=O\left(\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\right). \tag{9.8}$$

Preuve du théorème 9.1.1. Pour $x\in\mathbb{R}$, $\omega\in M$ et $t\in[0,T']$, en reprenant les notations du théorème 9.1.1, on pose dans tout ce qui suit v_t^ϵ l'application décrit par

$$v_t^\epsilon(x,\omega):=\epsilon^{1/4}\int_0^{t/\epsilon}f(w_{\epsilon s}(x),T^{\lfloor s\rfloor}\omega)ds.$$

Lemme 9.2.2. *Pour $T>0$ et $p\geq 1$, en rappelant que $e_t^\epsilon(x,.)=x_t^\epsilon(x,.)-w_t^\epsilon(x,.)$,*

$$\sup_{t\in[0,T']}\|\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,.)\|_{L^p_{\overline{\mu}}}\underset{\epsilon\to0}{=}O(1). \tag{9.9}$$

En particulier, la famille $\left(\left(\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,.)\right)_{t\geq0}\right)_{\epsilon>0}$ est tendue dans $C^0([0,T'],\mathbb{R})$.

Démonstration. Dans un premier temps on montre (9.9). On rappelle que $\overline{F}:=F-f$, que $(x_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']}$ et $(w_t(x))_{t\in[0,T']}$ satisfont respectivement (7.1) et (9.1). Pour tout $\omega\in M$,

$$\begin{aligned}
e_t^\epsilon(x,\omega)&=x_t^\epsilon(x,\omega)-w_t^\epsilon(x,.)\\
&=\int_0^t F\left(x_s^\epsilon(x,\omega),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)ds-\int_0^t\overline{F}(w_s(x))ds\\
&=\int_0^t f\left(w_s(x),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)ds &(9.10)\\
&+\int_0^t F\left(x_s^\epsilon(x,\omega),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)-F\left(w_s(x),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)ds. &(9.11)
\end{aligned}$$

En posant $v_t^\epsilon(x,\omega):=\epsilon^{1/4}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}}f\left(w_{\epsilon s}(x),T^{\lfloor s\rfloor}(\omega)\right)ds=\epsilon^{-3/4}\int_0^t f\left(w_s(x),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)ds$ dans (9.10), on obtient

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega)= &(9.12)\\
&v_t^\epsilon(x,\omega)+\epsilon^{-3/4}\int_0^t F\left(x_s^\epsilon(x,\omega),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)-F\left(w_s(x),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)ds. &(9.13)
\end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\left|\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,w)\right|\leq|v_t^\epsilon(x,w)|+\int_0^t\|D_1F\|_\infty\left|\epsilon^{-3/4}e_s^\epsilon(x,w)\right|ds.$$

En appliquant l'inégalité de Grönwall,

$$\left|\epsilon^{-3/4} e_t^\epsilon(x,\omega)\right| \leq |v_t^\epsilon(x,\omega)| e^{T'\|D_1 F\|_\infty}.$$

Ainsi pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\epsilon^{-3/4} e_t^\epsilon(x,.)\|_{L^p_{\overline{\mu}}} \leq \sup_{t\in[0,T']} \|v_t^\epsilon(x,.)\|_{L^p_{\overline{\mu}}} e^{T'\|D_1 F\|_\infty}$$

Or d'après le lemme 9.2.1, $\|v_t^\epsilon(x,.)\|_{L^p_{\overline{\mu}}}$ est uniformément borné en ϵ. Ceci achève la preuve de (9.9).

Pour montrer la tension, il suffit de montrer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T'} \|\epsilon^{-3/4}(e_t^\epsilon(x,.) - e_s^\epsilon(x,.))\|_{L^p_{\overline{\mu}}} \leq C(t-s)^{\frac{1}{4}}.$$

On obtient alors la relation du théorème 1.4.7 en choisissant $\beta = 2$, $\alpha = \frac{\beta}{2} > \frac{1}{2}$, $p = 2\beta$ et en appliquant Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(|e_s^\epsilon - e_r^\epsilon|^{2\beta} |e_t^\epsilon - e_s^\epsilon|^{2\beta}\right) &\leq K(s-r)^{\frac{4\beta}{8}} (t-s)^{\frac{4\beta}{8}} \\ &\leq K(t-r)^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Soient $0 \leq s \leq t \leq T'$, d'après (9.12) et l'inégalité des accroissements finis,

$$\epsilon^{-3/4}|e_t^\epsilon(x,.) - e_s^\epsilon(x,.)| \leq |v_t^\epsilon(x,.) - v_s^\epsilon(x,.)| + \int_s^t \|D_1 F\|_\infty \left|\frac{e_u^\epsilon(x,\omega)}{\epsilon^{3/4}}\right| du,$$

et ainsi avec le lemme 9.2.1 et l'encadrement (9.5) du théorème 9.1.2, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \epsilon^{-3/4}\|e_t^\epsilon(x,.) - e_s^\epsilon(x,.)\|_{L^{2p}_{\overline{\mu}}} &\leq \|v_t^\epsilon(x,.) - v_s^\epsilon(x,.)\|_{L^{2p}_{\overline{\mu}}} \\ &\quad + (t-s)\|D_1 F\|_\infty \sup_{u\in[0,T']} \left|\frac{e_u^\epsilon(x,\omega)}{\epsilon^{3/4}}\right| \\ &\leq C(t-s)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

□

On pose $(y_t^\epsilon(x,\omega))_{t\geq 0}$ la solution de l'équation différentielle :

$$y_t^\epsilon(x,\omega) = v_t^\epsilon(x,\omega) + \int_0^t D\overline{F}(w_s(x)).y_s^\epsilon(x,\omega)ds. \tag{9.14}$$

La théorie des équations différentielles donne une expression explicite pour $(y_t^\epsilon(x,\omega))_{t\geq 0}$:

$$y_t^\epsilon(x,\omega) = v_t^\epsilon(x,\omega) + \int_0^t D\overline{F}(w_s(x))v_s^\epsilon(x,\omega)\exp\left(\int_s^t D\overline{F}(w_u(x))du\right)ds. \tag{9.15}$$

En particulier,

$$(y_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T']} = \mathcal{F}\left((v_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T']}\right)$$

où $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire et continu sur $C^0([0,T'],\mathbb{R}^d)$ donné par (9.3), l'équation du théorème 9.1.1 de la page 119 :

$$\mathcal{F}((v_t)_{t\geq 0}) := \left(v_t + \int_0^t D\overline{F}(w_s(x))v_s\exp\left(\int_s^t D\overline{F}(w_u(x))du\right)ds\right)_{t\in[0,T']}.$$

Comme $(v_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']}$ converge en loi vers le processus $\left(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{t\geq 0}$ définie au théorème 9.1.2 dans $(C^0([0,T'],\mathbb{R}^d),\|.\|_\infty)$,

$$(v_t^\epsilon(x,.),y_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']} \underset{\epsilon\to 0}{\overset{\mathcal{L},\|.\|_\infty}{\to}} (B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)},y_t(x,.))_{t\in[0,T']}. \tag{9.16}$$

Lemme 9.2.3. *Sous les hypothèses du théorème, pour tout $p\geq 1$,*

$$\sup_{t\in[0,T']}\|\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,.) - y_t^\epsilon(x,.)\|_{L^p_\mu} \underset{\epsilon\to 0}{=} O(\epsilon^{3/4}).$$

Démonstration. On étudie

$$a_t^\epsilon(x,\omega) := \epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega) - v_t^\epsilon(x,\omega) - \epsilon^{-3/4}\int_0^t D_1F(w_s(x),T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)).e_s^\epsilon(x,\omega)ds.$$

D'après (9.12), et par développement de Taylor,

$$\begin{aligned}|a_t^\epsilon(x,\omega)| &= \epsilon^{-3/4}\left|\int_0^t \left(F\left(x_s^\epsilon(x,\omega), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left. -F\left(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)\right)\right) - D_1F(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)).e_s^\epsilon(x,\omega)ds\right|\\ &\leq \epsilon^{-3/4}\left|\int_0^T \|D_1^2F\|_\infty \left(e_s^\epsilon(x,\omega)\right)^2 ds\right|\\ &\leq \epsilon^{3/4}\left|\int_0^T \|D_1^2F\|_\infty \left(\frac{e_s^\epsilon(x,\omega)}{\epsilon^{3/4}}\right)^2 ds\right|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|a_t^\epsilon(x,\omega)\|_{L^p_\mu} \leq \epsilon^{3/4}\|D_1^2F\|_\infty T' \sup_{t\in[0,T']}\left\|\frac{e_t^\epsilon(x,.)}{\epsilon^{3/4}}\right\|^2_{L^{2p}_\mu} = O\left(\epsilon^{3/4}\right), \tag{9.17}$$

d'après le lemme 9.2.2.

Posons

$$\begin{aligned}b_t^\epsilon(x,\omega) &:= y_t^\epsilon(x,\omega) - v_t^\epsilon(x,\omega) - \int_0^t D_1F(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)).y_s^\epsilon(x,\omega)ds\\ &= \int_0^t D_1f(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega))\left[\epsilon^{-3/4}\int_0^s f(w_u(x), T^{\lfloor\frac{u}{\epsilon}\rfloor}(\omega))du\right.\\ &\quad \left.+\int_0^s D\overline{F}(w_b(x))\exp\left(\int_b^s D\overline{F}(w_a(x))da\right)\int_0^b f(w_u(x), T^{\lfloor\frac{u}{\epsilon}\rfloor}(\omega))dudb\right]ds\\ &= \epsilon^{-\frac{3}{4}}\int_{0\leq u\leq s\leq t} K_{u,s}D_1f(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)).f(w_u(x), T^{\lfloor\frac{u}{\epsilon}\rfloor}(\omega))duds,\end{aligned}$$

où pour tout $u \leq s$,

$$K_{u,s} := 1 + \int_u^s D\overline{F}(w_b(x))\exp\left(\int_b^s D\overline{F}(w_a(x))da\right)db$$

vérifie $\|K_{u,s}\|_\infty \leq 1 + T'\|D\overline{F}\|_\infty e^{T\|D\overline{F}\|_\infty} =: K_0$. On peut donc en appliquant le lemme

9.2.2 conclure que pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|b_t^\epsilon\|_{L_{\overline{\mu}}^{2p}}^{2p} &\leq K_0'^{2p}\epsilon^{-3p/2}\int_{0\leq u_1\leq s_1\leq t}\cdots\int_{0\leq u_1\leq s_1\leq t}\\ &\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{2p} D_1 f(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega)).f(w_u(x), T^{\lfloor\frac{u}{\epsilon}\rfloor}(\omega))\right)\right| du_1 ds_1 \ldots du_{2p} ds_{2p}\\ &= O\left(\epsilon^{-\frac{3p}{2}}\epsilon^{4p}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)^{2p}\right) = O(T'^p\epsilon^{\frac{3p}{2}}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{t\in[0,T']}\|b_t^\epsilon(x,.)\|_{L_{\overline{\mu}}^p} = O(\epsilon^{\frac{3}{4}}) \tag{9.18}$$

ce qui devient en comparant avec (9.17),

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega) - y_t^\epsilon(x,\omega) = a_t^\epsilon(x,\omega) - b_t^\epsilon(x,\omega)\\ &+\int_0^t D_1F(w_s(x), T^{\lfloor\frac{s}{\epsilon}\rfloor}(\omega))(\epsilon^{-\frac{3}{4}}e_s^\epsilon(x,\omega) - y_s^\epsilon(x,\omega))ds.\end{aligned}$$

On peut dès lors appliquer le lemme de Grönwall

$$\left|\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega) - y_t^\epsilon(x,\omega)\right| \leq |a_t^\epsilon(x,\omega) - b_t^\epsilon(x,\omega)|\, e^{T'\|D_1F\|_\infty},$$

et obtenir ainsi avec (9.18) et (9.17),

$$\sup_{t\in[0,T']}\|\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega) - y_t^\epsilon(x,\omega)\|_{L_{\overline{\mu}}^{2p}} = \sup_{t\in[0,T']}(\|a_t^\epsilon(x,.)\|_{L_{\overline{\mu}}^{2p}} + \|b_t^\epsilon(x,.)\|_{L_{\overline{\mu}}^{2p}} = O(\epsilon^{\frac{3}{4}}).$$

□

On peut désormais montrer le théorème en déduisant de la convergence en norme $L_{\overline{\mu}}^{2p}$ du lemme précédent et de celle de (9.16) un théorème limite pour l'erreur $(e_t^\epsilon(x,.))_{t\in[0,T']}$:

$$(\epsilon^{-3/4}e_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T']} \overset{\mathcal{L}_{\overline{\mu}},\|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to 0}{\to}} (y_t)_{t\in[0,T']}.$$

Pour conclure sur la convergence forte en loi, on vérifie les hypothèses du théorème 1.3.4 page 24 de Zweimüller à l'instar de ce qui est fait au chapitre 8, i.e, pour $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in M$:

$$u_t^\epsilon(x,\omega) := \frac{e_t^\epsilon(x_0, T(\omega)) - e_t^\epsilon(x_0,\omega)}{\epsilon^{3/4}} \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0. \tag{9.19}$$

uniformément en $t \in [0, T']$.
On peut remarquer d'une part que

$$u_t^\epsilon(x,\omega) = \frac{x_t^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_t^\epsilon(x_0,\omega)}{\epsilon^{3/4}}$$

et $x_t^\epsilon(x_0, .)$ vérifie la même relation (8.9) que celle du chapitre 8 page 118,

$$\begin{aligned}
|u_t^\epsilon(x\omega)| &= \left| \frac{x_t^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_{t-\epsilon}^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega)}{\epsilon^{3/4}} \right| \\
&\leq \epsilon^{-1/2} \left| \int_{t-\epsilon}^t F(x_s^\epsilon(x, T(\omega))ds \right| \\
&\quad + \epsilon^{-1/2} \int_0^{t-\epsilon} [F]|x_s^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_s^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega))|ds \\
&= O(\epsilon^{1/4}).
\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}
&|x_s^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_s^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega))| \leq |x_0 - x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega)| \\
&+ \int_0^s [F]|x_u^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_u^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega))|du,
\end{aligned}$$

donc $|x_s^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_s^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega))|$ vérifie l'inégalité de Grönwall et

$$|x_s^\epsilon(x_0, T(\omega)) - x_s^\epsilon(x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega), T(\omega))| = O(|x_0 - x_\epsilon^\epsilon(x_0,\omega)|) = O(\epsilon),$$

uniformément en $s \in [0, T']$.
Comme (M, T, μ) est ergodique et (9.19) et vérifiée,

$$(\epsilon^{-3/4} e_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T']} \overset{\mathcal{L}_\mu, \|.\|_\infty}{\underset{\epsilon\to 0}{\to}} (y_t)_{t\in[0,T']}.$$

Où $\mathcal{L}_\mu$ désigne la convergence forte en loi pour μ. Les processus $(e_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T']}$ et leur limite étant continus, la convergence pour la métrique J_1 implique la convergence en norme $\|.\|_\infty$ ce qui prouve le théorème. □

Chapitre 10

Sommes ergodiques perturbées.

Dans ce chapitre, on prouve le théorème 9.1.2 de la page 121 en trois propositions. Une première proposition démontrée à la section 10.1 montre un résultat de convergence en loi unidimensionnel (i.e pour $t \in [0, T']$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé) de la variable aléatoire $\tilde{v}_t^\epsilon(x, .)$ alors proche de $v_t^\epsilon(x, .)$ décrite par :

$$\tilde{v}_t^\epsilon(x, w) = \epsilon^{1/2} \sum_{k=0}^{\lfloor t/\epsilon \rfloor} \int_k^{k+1} f(w_{\epsilon k+\epsilon s}, T^k(w))ds. \tag{10.1}$$

La limite en loi correspond bien à la loi unidimensionnelle de la variable aléatoire $B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}$. La preuve se fait en établissant la convergence des moments de tous ordres de $\tilde{v}_t^\epsilon$ selon la même technique utilisée dans [32] mais adaptée à une factorisation de type tours de Young (hypothèses 9.1.4 et 9.1.5) plutôt que la méthode de Demers et Zhang [12] : cela nécessite d'étudier la convergence d'une formule de type Green-Kubo dans le cadre d'une $\mathbb{Z}$-extension : pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\sigma^2(f)(x_1, x_2) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} I_\mu \left(f(x_1, T^{|l|}(.)) f(x_2, .) \right),$$

et de contrôler de proche en proche les perturbations apparaissant dans le premier terme. La convergence au sens des distributions finies de $\tilde{v}_t^\epsilon$ puis v_t^ϵ est faite séparément dans la section 10.2 dans un souci de lisibilité. La preuve reprend une partie des équations obtenues à la section 10.1. Enfin la dernière section 10.3 prouve le lemme 9.2.1 et en déduit la tension de v_t^ϵ en montrant notamment l'équation (9.5) du théorème 9.1.2 :

$$\|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon\|_{L_{\tilde{\mu}}^{2p}} \leq K(t-s)^{1/4}.$$

10.1 Convergence unidimensionnelle.

Proposition 10.1.1. *Pour (M,T,μ) un système décrit comme une $\mathbb{Z}$-extension d'un système $(\overline{M},\overline{T},\overline{\mu})$ satisfaisant l'hypothèse 9.1.5 de fonction de pas $\phi : \overline{M} \to \mathbb{Z}$ bornée. Soit $f : \mathbb{R}\times\overline{M}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du théorème 9.1.2 qu'on rappelle ici :*

- *$\sum_{a\in\mathbb{Z}} \|f(x,.,a)\|_{lip}$ est uniformément bornée en $x\in\mathbb{R}$.*
- *$f(x,.)$ est d'intégrale nulle sur (M,T,μ).*
- *$\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|f(x,.,a)\|_\infty$ est uniformément borné.*
- *La fonction f est uniformément lipschitzienne en sa première variable (i.e. les fonctions $f(.,\omega)$ sont uniformément lipschitziennes).*

On pose pour $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$ et $\omega\in M$,

$$\tilde{v}_t^\epsilon(x,\omega) := \epsilon^{1/4}\sum_{k=1}^{\lfloor t/\epsilon\rfloor} f(w_{\epsilon k}(x), T^k\omega).$$

Alors pour $T\geq 0$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$\tilde{v}_t^\epsilon(x,.) \underset{\epsilon\to 0}{\overset{\mathcal{L}_{\overline{\mu}}}{\to}} \mathcal{N}\left(\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)\right)^{1/2},$$

où $\mathcal{L}_{\overline{\mu}}$ désigne la convergence en loi pour $\overline{\mu}$, $\mathcal{N}$ est une loi normale centrée réduite et $((L'_s(a))_{s\geq 0})_{a\in\mathbb{R}}$ est le temps local d'un mouvement brownien $(B'_t)_{t\geq 0}$ de variance Σ (avec Σ tel que défini dans 9.1.4) indépendant de $\mathcal{N}$. Enfin
$a(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x,.)f(x,T^{|l|}(.))\right)$.

Avant de montrer la proposition 10.1.1, on rappelle ici quelques résultats classiques sur les tours de Young notamment les propriétés commodes de régularisation et de décorrélation de l'opérateur de transfert P sur le facteur $(\hat{M},\hat{T},\hat{\overline{\mu}})$: le lemme 10.1.2 donne des propriétés de régularisation de l'opérateur de transfert $P(.)$ sur $(\hat{M},\hat{T},\hat{\overline{\mu}})$ tandis que la proposition 10.1.3 s'appuie sur le trou spectral de l'opérateur P_u pour montrer une vitesse de mélange pour l'opérateur perturbé qui nous intéresse.
Enfin, l'approximation des quantités étudiées qui nous permettra de nous placer sur le "bon" facteur des tours de Young $(\hat{M},\hat{T},\hat{\overline{\mu}})$ sera faite avec le lemme 10.1.4 dans la preuve de la proposition 10.1.1.

Lemme 10.1.2. *Il existe $C>0$ tel que pour tout $g\in B$ une application bornée telle que pour tout $x,y\in\hat{M}$, $g(x)=g(y)$ si $s(x,y)\geq n$, alors*

$$\|P^{2n}(g.)\|_{L(B,B)} \leq C\|g\|_\infty.$$

Démonstration. Soit $f \in B$, on détermine $\|P^{2n}(gf)\|'_\infty$ dans un premier temps : On se fixe un $\Delta_{i,k}$ et on note $l(.) \in B$ l'application définie par $l(w) = i$ si il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $w \in \Delta_{i,j}$. la positivité de P impose que pour $x \in \Delta_{i,k}$,

$$\begin{aligned} |P^{2n}(gf)(x)| &\leq |P^{2n}(\|g\|_\infty |f|)(x)| \\ &\leq \|g\|_\infty \|P^{2n}|f|\|'_\infty e^{\epsilon l(x)} \end{aligned}$$

et ainsi, avec le caractère uniformément borné de P^{2n} pour n, il existe $C > 0$ tel que

$$\|P^{2n}(gf)\|'_\infty \leq C\|g\|_\infty \|f\|_B. \tag{10.2}$$

Pour $\|P^{2n}(gf)\|'_{lip}$ on se fixe $\Delta_{i,k}$, et pour $x, y \in \Delta_{i,k}$, on note X une bijection entre $T^{-2n}(\{x\})$ et $T^{-2n}(\{y\})$ telle que pour tout $z \in T^{-2n}(\{x\})$, $s(z, X(z)) = 2n + s(x, y)$. On obtient alors en regardant $P^{2n}(gf)$ pour $f \in B$:

$$\begin{aligned} &\left|P^{2n}(gf)(x) - P^{2n}(gf)(y)\right| \\ &\leq \left| \sum_{w \in \hat{T}^{-2n}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i w)} (gf)(w) \right. \qquad (10.3) \\ &\left. - \sum_{w \in \hat{T}^{-2n}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i X(w))} (gf)(X(w)) \right| \\ &\leq \sum_{w \in \hat{T}^{-2n}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i w)} |e^{\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i w) - \sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i X(w))} - 1| \|g\|_\infty \|f\|'_\infty e^{\epsilon l(w)} \\ &+ \sum_{w \in \hat{T}^{-2n}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i X(w))} \|g\|_\infty |f(w) - f(X(w))| \\ &\leq \|g\|_\infty \|f\|'_\infty \sum_{w \in \hat{T}^{-2n}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i w)} \sum_{i=0}^{2n-1} \|h\|_{lip} \beta^{2n-i+s(x,y)} e^{\epsilon l(w)} \beta^{s(x,y)} \\ &+ \sum_{w \in \hat{T}^{-1}(\{x\})} e^{-\sum_{i=0}^{2n-1} h(\hat{T}^i X(w))} \|g\|_\infty \|f\|'_{lip} e^{\epsilon l(w)} \beta^{s(x,y)+2n} \\ &\leq \frac{\beta}{1-\beta} \|h\|_{lip} \, \|P^{2n} e^{\epsilon l(.)}\|_{\infty, \Delta_{i,k}} \beta^{s(x,y)} \|g\|_\infty \|f\|'_\infty + \|g\|_\infty \|f\|'_{lip} \|P^{2n} e^{\epsilon l(.)}\|_{\infty, \Delta_{i,k}} \beta^{s(x,y)}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Comme $\|e^{\epsilon l(.)}\|_B \leq 1$, et $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs uniformément bornés, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\|P^{2n}(gf)\|'_{lip} \leq C_2 \|g\|_\infty \|f\|_B.$$

D'où la conclusion du lemme. □

Proposition 10.1.3. *Soit $\epsilon_0 > 0$. Pour un système dynamique probabilisé $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\bar{\mu}})$ d'opérateur de transfert P vérifiant 9.1.4. Pour $l \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$P^n(1_{\{S_n=l\}}.) = \frac{1}{(2\pi\Sigma n)^{1/2}}\Pi_0(.) + G_{n,l}(.)$$

Où $\|G_{n,l}(.)\|_B = O\left(\frac{(1+|l|)^{1+\epsilon_0}}{n^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right)$, uniformément en le choix de l.

Démonstration. En remarquant que sur $\hat{M}$,

$$1_{\{S_n=l\}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iu(S_n-l)}du$$

et en fixant b tel que $\beta_0 > b > 0$ dans l'hypothèse 9.1.4,

$$\begin{aligned}
P^n(1_{\{S_n=l\}}.) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P^n(e^{iu(S_n-l)}.)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iul}P_u^n(.)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} e^{-iul}\lambda_u^n\Pi_u(.)du + O(a^n) \\
&= \frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-bn^{1/2}}^{bn^{1/2}} e^{-iul/n^{1/2}}\lambda_{u/n^{1/2}}^n\Pi_{u/n^{1/2}}(.)du + O(a^n) \\
&= \frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-bn^{1/2}}^{bn^{1/2}} e^{-iul/n^{1/2}}\lambda_{u/n^{1/2}}^n\left(\Pi_0(.) + un^{-1/2}\Pi_0'(.)\right)du + O(n^{-3/2}),
\end{aligned} \tag{10.5}$$

où les approximations $O(.)$ sont uniformes en le choix de l pour la norme d'opérateur $\|.\|_{L(B,B)}$.

On reprend l'identité (10.6) du livre de Feller [14], on a pour $A, B \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$,

$$\left|e^A - \sum_{m=0}^{r}\frac{B^m}{m!}\right| \leq \left|e^A - e^B\right| + \left|e^B - \frac{B^m}{m!}\right| \leq e^{A\vee B}\left(|A-B| + \left|\frac{B^{r+1}}{(r+1)!}\right|\right). \tag{10.6}$$

En développant λ_t sous forme exponentielle,

$$\lambda_{n^{-1/2}t}^n = e^{-\frac{\Sigma}{2}t^2 + n\psi(\frac{t}{n^{1/2}})}$$

où $\psi(t) := t^2\psi_2(t) + t^4\tilde{\psi}(t)$ avec une partie polynomiale $\psi_2(t) := \frac{t}{3!}\psi^{(3)}(0) + \frac{t^2}{4!}\psi^{(4)}(0)$ et un reste $\tilde{\psi}$ continue avec $\tilde{\psi}(0) = 0$.

On a alors en utilisant 10.6 avec $A := n\psi(un^{-1/2})$, $B := u^2\psi_2(un^{-1/2})$ et $r = 2$:

$$\left|\lambda^n_{un^{-1/2}} - e^{-\frac{\Sigma}{2}u^2}\sum_{m=0}^{r}\frac{\left(u^2\psi_2(un^{-1/2})\right)^m}{m!}\right| = O\left(e^{-\frac{\Sigma u^2}{4}}\left(\frac{u^4\tilde{\psi}(un^{-1/2})}{n} + \frac{u^9}{n^{3/2}}\right)\right).$$

Développement qui se simplifie en

$$\lambda^n_{un^{-1/2}} = e^{-\frac{\Sigma}{2}u^2}\left(1 + \frac{u^3}{n^{1/2}}\frac{\psi^{(3)}(0)}{3!}\right) + O\left(e^{-\frac{\Sigma u^2}{4}}Q(u)1/n\right).$$

Où Q est un polynôme. Injectée dans (10.5) on aboutit au développement pour la norme d'opérateur $\|.\|_{L(B,B)}$

$$\begin{aligned}
P^n(1_{\{S_n=l\}}.) &= \frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-\beta n^{1/2}}^{\beta n^{1/2}} e^{-iul/n^{1/2}}\lambda^n_{u/n^{1/2}}\left(\Pi_0(.) + un^{-1/2}\Pi_0'(.)\right)du + O(n^{-3/2}) \\
&= \frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-\beta n^{1/2}}^{\beta n^{1/2}}\left(1 - \frac{iul}{n^{1/2}} + O\left(\left(\frac{ul}{n}\right)^{1+\epsilon_0}\right)\right)e^{-\frac{\Sigma^2u^2}{2}} \\
&\left(\Pi_0(.) + \frac{u}{n^{1/2}}\Pi_0'(.) + \frac{u^3}{n^{1/2}}\frac{\psi^{(3)}(0)}{3!}\Pi_0(.)\right)du + O(n^{-3/2}) \\
&= \frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-\beta n^{1/2}}^{\beta n^{1/2}}\left(1 - \frac{iul}{n^{1/2}}\right)\left(\Pi_0(.) + \frac{u}{n^{1/2}}\Pi_0'(.) + \frac{u^3}{n^{1/2}}\frac{\psi^{(3)}(0)}{3!}\Pi_0(.)\right) \\
&e^{-\frac{\Sigma^2u^2}{2}}du + O\left(\frac{(1+|l|)^{1+\epsilon_0}}{n^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

En effet, $\int_{\mathbb{R}}|u|^m e^{-\frac{(\Sigma u)^2}{2}}du < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{cases} |e^{-ix} - 1 - ix| \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^{1+\epsilon_0}}{2} & si\ x \leq 1 \\ |e^{-ix} - 1 - ix| \leq (1 + |x|) \leq |x|^{1+\epsilon_0} & si\ x > 1. \end{cases}$$

Avec la domination $O(.)$ uniforme en $l \in \mathbb{Z}$. Les termes en $\frac{1}{n^{1/2}}$ ayant des facteurs symétriques leur intégrale s'annule. D'où la conclusion du lemme,

$$P^n(1_{\{S_n=l\}}.) = \frac{1}{(2\pi\Sigma n)^{1/2}}\Pi_0(.) + G_{n,l}(.)$$

avec

$$\|G_{n,l}(.)\|_{L(B,B)} = O\left(\frac{(1+|l|)^{1+\epsilon_0}}{n^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right).$$

□

Preuve de la proposition 10.1.1. On cherche à démontrer la proposition 10.1.1 en appliquant la méthode des moments et la proposition 1.3.5 de Carleman. On donne ici une expression du moment d'ordre N de $\tilde{v}_t^\epsilon(x,.)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$\begin{aligned} E_{\overline{\mu}}\left(\tilde{v}_t^\epsilon(x,.)^N\right) &= E_{\overline{\mu}}\left(\left(\epsilon^{1/4}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\epsilon}\rfloor}\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(w_{\epsilon k}(x),\overline{T}^k(w),p)1_{\{S_k=p\}}\right)^N\right) \\ &= \epsilon^{N/4}\sum_{0\leq k_1,\dots,k_N\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor}\ \sum_{p_1,\dots,p_N\in\mathbb{Z}} E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^N\left(f(w_{\epsilon k_i}(x),\overline{T}^{k_i}(.),p_i)1_{\{S_{k_i}=p_i\}}\right)\right) \\ &= \epsilon^{N/4}\sum_{q=1}^N\ \sum_{N_i\geq 1,\sum_{i=1}^q N_i=N} C_{\mathbf{N}}A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}, \end{aligned}$$

en rassemblant les éléments k_i à permutation près des indices, en posant $C_{\mathbf{N}}$ le cardinal

$$C_{\mathbf{N}} := |\{\phi \in [|1,q|]^{[|1,N|]}, |\phi^{-1}(\{i\})| = N_i\}|.$$

tandis que $A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}$ est décrit par

$$\begin{aligned} A_{\epsilon,q,\mathbf{N}} &:= \sum_{1\leq n_1<\dots<n_q\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor}\ \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{j=1}^q f(w_{\epsilon n_i}(x),\overline{T}^{n_i}(.),a_i)^{N_j}1_{\{\overline{S}_{n_i}=a_i\}}\right) \\ &= \sum_{1\leq l_1,\dots,l_q\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor,\underline{l}_q\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor}\ \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\overline{\mu}} \\ &\quad\left(\left(\prod_{j=1}^q f(w_{\epsilon^{-1}\underline{l}_i}(x),\overline{T}^{l_i}(.),a_i)^{N_j}1_{\{\overline{S}_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\right)\circ\overline{T}^{\underline{l}_{i-1}}\right), \end{aligned}$$

où $\underline{l}_i := \sum_{j=0}^i l_j$.
Avec $A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}$ donné ainsi, on est en mesure d'exploiter les propriétés de décorrélation asymptotiques qui font l'objet des lemmes suivants en transposant l'étude de $A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}$ sur le système $(\hat{M},\hat{T},\hat{\overline{\mu}})$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 10.1.4. *En posant $k_\epsilon = \lceil(\log(\frac{T}{\epsilon}))^2\rceil$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(g_{k_\epsilon}(x,.,a))_\epsilon$ une*

approximation uniforme de $f(x,.,a)$ satisfaisant l'hypothèse 9.1.5 selon l'expression (9.6).

$$\left| \sum_{1\le l_1,\dots,l_q\le \lfloor \frac{1}{t}/\epsilon\rfloor, l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor} \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\overline{\mu}}\left(\left(\prod_{j=1}^{q} f(x_i,\overline{T}^{l_i}(.),a_i)^{N_j} 1_{\{\overline{S}_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\right)\circ \overline{T}^{l_{i-1}}\right)\right. \tag{10.7}$$

$$\left. - \sum_{1\le l_1,\dots,l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor, l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor} \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\overline{\mu}}}\left(\left(\prod_{j=1}^{q} g_{k_\epsilon}(x_i,\hat{T}^{l_i}(.),a_i)^{N_j} 1_{\{S_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\circ \hat{T}^{k_\epsilon}\right)\circ \hat{T}^{l_{i-1}}\right)\right| \tag{10.8}$$

$$\underset{n\to\infty}{=} O\left(\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^q \beta_0^{k_\epsilon}\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}}(\|f(x_i,.,a)\|_{lip}+\|f(x_i,.,a)\|_\infty)\right)\right).$$

Uniformément en la donnée des $x_1,\dots,x_q\in\mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, on peut tout composer par $\overline{T}^{k_\epsilon}$ dans l'espérance de $A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}$ et se ramener sur (M_1,T_1,μ_1) via les projections π_1 et π_2. En appliquant l'expression (9.6), on a pour tout $1\le i_0\le q$,

$$\left\| \sum_{1\le l_1,\dots,l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor, l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor} \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} \right.$$
$$E_{\mu_1}\left(\left(\prod_{i=1}^{i_0-1} f(x_i,\pi_1\circ T_1^{l_i+k_\epsilon}(.),a_i)^{N_i} 1_{\{\overline{S}_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\circ\pi_2\circ T_1^{k_\epsilon}\right)\circ T_1^{l_{i-1}}\right.$$
$$\left(f(x_{i_0},T_1^{l_{i_0}+k_\epsilon}(.),p_{i_0})^{N_{i_0}} - g_{k_\epsilon}(x_{i_0},\pi_2\circ T_1^{l_{i_0}}(.),a_{i_0})^{N_{i_0}}) 1_{\{S_{l_{i_0}}=a_{i_0}-a_{i_0-1}\}}\circ\pi_2\circ T_1^{k_\epsilon}\right)\circ T_1^{l_{i_0-1}}$$
$$\left.\left.\left(\prod_{i=i_0+1}^{q} g_{k_\epsilon}(x_i,\pi_2\circ T_1^{l_i}(.),a_i)^{N_i} 1_{\{S_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\circ\pi_2\circ T_1^{k_\epsilon}\right)\circ \overline{T}^{l_{i-1}}\right)\right\|_\infty$$
$$\le \beta_0^{k_\epsilon}\sum_{a\in\mathbb{Z}}\|f(x_{i_0},.,a)\|_{lip}$$
$$\sum_{1\le l_1,\dots,l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor, l_q\le \lfloor t/\epsilon\rfloor} \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\neq i_0}\|f(x_i,.,a_i)\|_\infty^{N_i}\right) a^{k_\epsilon}\|f(x_i,.,a_i)\|_{lip}$$
$$= O\left(\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^q \beta_0^{(\ln(1/\epsilon))^2}\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}}(\|f(x_i,.,a)\|_{lip}+\|f(x_i,.,a)\|_\infty)\right)\right).$$

Par chaînage, on obtient bien la majoration recherchée (10.7). □

D'après le lemme, on est ramené à étudier pour $f\in B$ le comportement asymptotique

d'éléments de la forme

$$b_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(f) := \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(f\left(\prod_{i=1}^{q} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon^{-1}(\underline{l}_i+m)}(x),\hat{T}^{l_i}(.),a_i)^{N_j}1_{\{S_{l_i}=a_i-a_{i-1}\}}\circ\hat{T}^{k_\epsilon}\right)\circ\hat{T}^{\underline{l}_{i-1}}\right).$$

En posant $\mathbf{l} := (l_1,\dots,l_q)$. Comme $E_{\hat{\tilde{\mu}}}(P(.)) = E_{\hat{\tilde{\mu}}}(.)$, On peut appliquer $P^{\underline{l}_q+k_\epsilon}$ dans l'espérance ci-dessus et itérer l'identité de l'opérateur de transfert $P^m(G\circ\hat{T}^m f) = GP^m(f)$.

$$\begin{aligned} &b_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(f) := \\ &E_{\hat{\tilde{\mu}}}\Big(P^{k_\epsilon}\Big((g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon^{-1}(\underline{l}_q+m)}(x),.,a_q)^{N_q}H_{k_\epsilon,l_q,a_q-a_{q-1}})\circ\dots \\ &\circ(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon^{-1}(\underline{l}_1+m)}(x),.,a_1)^{N_1}H_{k_\epsilon,l_1,a_1-a_0})(f)\Big)\Big) \end{aligned} \tag{10.9}$$

où

$$H_{k_\epsilon,m,a}(.) := P^m(1_{\{S_m=a\}}\circ\overline{T}^{k_\epsilon}\cdot)$$

Pour $m\geq 2k_\epsilon$, ce dernier peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} H_{k_\epsilon,m,a}(.) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}}P^{m-k_\epsilon}(1_{\{S_{m-k_\epsilon}=a-l\}}P^{k_\epsilon}(.)) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{l'\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}}P^{m-2k_\epsilon}\left(1_{\{S_{m-2k_\epsilon}=a-l-l'\}}P^{k_\epsilon}(1_{\{S_{k_\epsilon}=l'\}}P^{k_\epsilon}(.))\right). \end{aligned}$$

A l'instar de [32], on va décomposer $H_{k_\epsilon,m,a}(.)$ de la façon suivante afin de faire apparaître le mélange : si on note pour $m\geq 2k_\epsilon$, $Q_m(.)$ l'opérateur

$$Q_{m,a}(.) := P^m(1_{\{S_m=a\}}.),$$

Celui-ci peut se décomposer avec la proposition (10.1.3) en

$$Q_{m,a}(.) := Q^{(0)}_{m,a}(.) + Q^{(1)}_{m,a}(.)$$

où

$$Q^{(0)}_{m,a}(.) = \frac{1}{(2\pi\Sigma m)^{1/2}}\Pi_0(.)\ \textit{et}\ Q^{(1)}_{m,a}(.) = G_{m,a}(.).$$

On introduit

$$H^{(1)}_{k_\epsilon,m,a}(.) := \begin{cases} H_{k_\epsilon,m,a} \ si\ m \le 2k_\epsilon \\ \sum_{l\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} \sum_{l'\in\mathbb{Z}} G_{m-2k_\epsilon,a-l}(P^{k_\epsilon}(1_{\{S_{k_\epsilon}=l'\}}(P^{k_\epsilon}.)) \ sinon \end{cases}$$

et lorsque $2k_\epsilon \le m$,

$$H^{(0)}_{k_\epsilon,m,a}(.) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} Q^{(0)}_{m-k_\epsilon,a-l}(P^{k_\epsilon}(.)) = Q^{(0)}_{m-k_\epsilon,0}.$$

Ainsi, en posant $E(\mathbf{l}) := \{(e_i)_{1\le i\le q},\ si\ e_i = 0\ alors\ l_i \ge 2k_\epsilon\}$ et
$\mathcal{G}(\mathbf{e}) := \{\mathbf{l}, \sum_i l_i \le \lfloor t/\epsilon \rfloor,\ et\ \mathbf{e} \in E(\mathbf{l})\}$,

$$\sum_{1\le l_1,\dots,l_q\le n_\epsilon, \underline{l}_q\le n_\epsilon} b_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{e}\in\{0,1\}^q} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})} b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}},$$

où pour $\mathbf{e} = (e_1,\dots,e_q)$,

$$b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(f) := \sum_{a_1,\dots,a_q\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(P^{2k_\epsilon}\left((g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_q+m)}(x),.,a_q)^{N_q} H^{(e_q)}_{k_\epsilon,l_q,a_q-a_{q-1}}) \circ \dots\right.\right.$$
$$\left.\left. \circ (g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_1+m)}(x),.,a_1)^{N_1} H^{(e_1)}_{k_\epsilon,l_1,a_1-a_0})(f)\right)\right). \tag{10.10}$$

L'objet de ce qui suit est de repérer les couples $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ qui vont peser dans le moment d'ordre N et d'écarter les autres. Le terme $Q^{(0)}_{m,a}(.) = \frac{1}{(2\pi\Sigma n)^{1/2}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}(.)1$ apparaissant dans $H^{(0)}_{k_\epsilon,m,a}(.)$ nous permet de séparer les compositions ci-dessus dans (10.10) en notant pour $0 \le i \le q$:

$$b^{(\mathbf{e},0,\mathbf{e'})}_{a_0,m,\epsilon,(\mathbf{l},l_i,\mathbf{l}'),\mathbf{N}}(G) = b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(G) b^{(0,\mathbf{e}')}_{0,m+\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i,\mathbf{l}'),(N_i,\mathbf{N}')}(1)$$
$$= \frac{1}{(2\pi\Sigma l_i)^{1/2}} b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(G) \sum_{a_i\in\mathbb{Z}} b^{\mathbf{e}'}_{a_i,m+\underline{l}_i,\epsilon,\mathbf{l}',\mathbf{N}'}\left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(m+l_i)}(x),.,a_i)^{N_i}\right). \tag{10.11}$$

On se fixe $\mathbf{e} \in \{0,1\}^q$, et on note $\alpha_1 < \dots < \alpha_K$ les indices tels que $e_{\alpha_i} = 0$, on pose aussi par convention $\alpha_{K+1} = q+1$ et $e_{q+1} = 0$. Pour $\mathbf{l} \in \mathcal{G}(\mathbf{e})$, on peut alors décomposer

$\frac{1}{n^{N/4}} b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)$ en

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{N/4} b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1) \\
&= \frac{1}{(2\pi\Sigma)^{K/2}} \epsilon^{\frac{N_1+\cdots+N_{\alpha_1-1}}{4}} b^{(1,\ldots,1)}_{a_0,0,\epsilon,(l_1,\ldots,l_{\alpha_1-1}),(N_1,\ldots,N_{\alpha_1-1})}(1) \\
&\times \prod_{i=1}^{K} \frac{1}{l_{\alpha_i}^{1/2}} \epsilon^{\frac{N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}}{4}} \sum_{a\in\mathbb{Z}} b^{(1,\ldots,1)}_{a,\underline{l}_{\alpha_i},\epsilon,(l_{\alpha_i+1},\ldots,l_{\alpha_{i+1}-1}),(N_{\alpha_i+1},\ldots,N_{\alpha_{i+1}-1})} \left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon \underline{l}_{\alpha_i}}(x), ., a)^{N_{\alpha_i}} \right).
\end{aligned} \tag{10.12}$$

On montre désormais que la masse $\sum_{a\in\mathbb{Z}} b^{(1,\ldots,1)}_{a,\underline{l}_{\alpha_i},\epsilon,(l_{\alpha_i+1},\ldots,l_{\alpha_{i+1}-1}),(N_{\alpha_i+1},\ldots,N_{\alpha_{i+1}-1})}$ n'est pas déterminante. Si on note $K_1,\ldots,K_r$ les indices dans $[|\alpha_i+1,\ldots,\alpha_{i+1}-1|]$ tels que $l_{K_i} \geq 2k_\epsilon$ (on pourra aussi fixer $K_0 := \alpha_i + 1$ et $K_{r+1} := \alpha_{i+1}$) , et

$$\begin{aligned}
B_{i,j,m}(a_{i-1},\ldots a_j) :&= \left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\sum_{k=i}^{j} l_k + m)}(x), ., a_j)^{N_j} H_{k_\epsilon, l_j, a_j - a_{j-1}} \right) \circ \ldots \\
&\circ \left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(l_i+m)}(x), ., a_i)^{N_i} H_{k_\epsilon, l_i, a_i - a_{i-1}}(.) \right).
\end{aligned}$$

Soit $h \in B$,

$$\begin{aligned}
&b^{(1,\ldots,1)}_{a,m+\underline{l}_{\alpha_i},\epsilon,(l_{\alpha_i+1},\ldots,l_{\alpha_{i+1}-1}),(N_{\alpha_i+1},\ldots,N_{\alpha_{i+1}-1})}(h) \\
&= \sum_{(a_{\alpha_i+1},\ldots,a_{\alpha_{i+1}-1})\in\mathbb{Z}^{\alpha_{i+1}-1-\alpha_i-1}} E_{\hat{\tilde{\mu}}} \Big(P^{2k_n} \Big(\Big[B_{K_r+1,K_{r+1}-1,\underline{l}_{K_r}}(a_{K_r},\ldots a_{K_{r+1}-1}) \circ \\
&\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_r}+m)}(x), ., a_{K_r})^{N_{K_r}} \right. \right. \\
&\left. \left. \sum_{l'\in\mathbb{Z}} Q^{(1)}_{l_{K_r}-2k_\epsilon, a_{K_r}-a_{K_r-1}-l-l'} \circ P^{k_\epsilon}(1_{\{S_{k_\epsilon}=l'\}} P^{k_\epsilon}(.)) \right) \right) \Big] \circ \ldots \\
&\circ \Big[B_{K_1+1,K_2-1,\underline{l}_{K_1}}(a_{K_1},\ldots a_{K_2-1}) \circ \\
&\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(1_{\{S_{k_n}=l\}} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_1}+m)}(x), ., a_{K_1})^{N_{K_1}} \right. \right. \\
&\left. \left. \sum_{l'\in\mathbb{Z}} Q^{(1)}_{l_{K_1}-k_\epsilon, a_{K_1}-a_{K_1-1}-l-l'} \left(P^{k_\epsilon}(1_{\{S_{k_\epsilon}=l'\}} P^{k_\epsilon}(.)) \right) \right) \right) \Big] \\
&\circ \left. B_{K_0,K_1-1,m+\underline{l}_{\alpha_i}}(a, a_{K_0},\ldots a_{K_1-1})(h) \right) \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(a_{\alpha_i+1},\dots,a_{\alpha_{i+1}-1})\in\mathbb{Z}^{\alpha_{i+1}-1-\alpha_i-1}} \sum_{l'_{K_1}\dots,l'_{K_{r+1}}\in\mathbb{Z}} \\
&E_{\hat{\tilde{\mu}}}\Bigg(\Big[Q_{k_\epsilon,l'_{K_{r+1}-1}}\circ P^{k_\epsilon}\circ B_{K_r+1,K_{r+1}-1,\underline{l}_{K_r}}(a_{K_r},\dots a_{K_{r+1}-1})\circ \\
&\left(\sum_{|l|\le Dk_\epsilon} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_r}+m)}(x),.,a_{K_r})^{N_{K_r}} Q^{(1)}_{l_{K_r}-2k_\epsilon,a_{K_r}-a_{K_r-1}-l-l'_{K_r}}\right)\Big]\circ\dots \\
&\circ\Big[Q_{k_\epsilon,l'_{K_2}}\circ P^{k_n}\circ B_{K_1+1,K_2-1,\underline{l}_{K_1}}(a_{K_1},\dots a_{K_2-1})\circ \\
&\left(\sum_{|l|\le Dk_\epsilon} 1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_1}+m)}(x),.,a_{K_1})^{N_{K_1}} Q^{(1)}_{l_{K_1}-2k_\epsilon,a_{K_1}-a_{K_1-1}-l-l'_{K_1}}\right)\Big] \\
&\circ Q_{k_\epsilon,l'_{K_1}}\circ P^{k_\epsilon}\circ B_{K_0,K_1-1,m+\underline{l}_{\alpha_i}}(a,a_{K_0},\dots a_{K_1-1})(h)\Big)\,, \qquad (10.13)
\end{aligned}
$$

on a appliqué ici le fait que par hypothèse le système soit d'horizon fini, c'est à dire qu'il existe $D>0$ tel que $\|\phi\|_\infty \le D$, pour en déduire que $1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}}=0$ pour tout $|l|>Dk_\epsilon$.
A l'instar de (10.9),
$Q_{k_\epsilon,l'_{K_{i+1}}}\circ P^{k_\epsilon}\circ B_{K_i+1,K_{i+1}-1,\underline{l}_{K_i}}(a_{K_i},\dots a_{K_{i+1}-1})(1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_i}+m)}(x),.,a_{K_i})^{N_{K_i}}.)$ peut se réécrire sous la forme

$$
P^{2k_\epsilon+\sum_{u=K_i+1}^{K_{i+1}} l_u}\left(h_{\epsilon,m}(a_{K_i},\dots a_{K_{i+1}-1}).\right) \qquad (10.14)
$$

avec $h_{\epsilon,m}(a_{K_i},a_{K_i+1},\dots a_{K_{i+1}})$ un élément de B tel que pour tout $x,y\in\hat{M}$,

$$
s(x,y)\ge 2k_\epsilon+\sum_{u=K_i+1}^{K_{i+1}} l_u \Rightarrow h_{\epsilon,m}(a_{K_i},a_{K_i+1},\dots a_{K_{i+1}})(x)=h_{\epsilon,m}(a_{K_i},a_{K_i+1},\dots a_{K_{i+1}})(y)
$$

et pour tout ϵ,m et $a_{K_i}\in\mathbb{Z}$,

$$
\|h_{\epsilon,m}(a_{K_i},a_{K_i+1},\dots a_{K_{i+1}})\|_\infty \le \prod_{j=K_i}^{K_{i+1}} \left\|g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_j+m)}(x),.,a_j)\right\|_\infty^{N_j}. \qquad (10.15)
$$

En appliquant le lemme 10.1.2 sur la formule (10.14), et la proposition 10.1.3, on peut

encadrer les termes :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{l'_{K_{i+1}}\in\mathbb{Z}}\Big\|Q_{k_\epsilon,l'_{K_{i+1}-1}}\circ P^{k_\epsilon}\circ B_{K_i+1,K_{i+1}-1,\underline{l}_{K_i}}(a_{K_i},\dots a_{K_{i+1}-1})\circ$$
$$\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}1_{\{S_{k_\epsilon}=l\}}g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_{K_i}+m)}(x),.,a_{K_i})^{N_{K_i}}Q^{(1)}_{l_{K_i}-2k_\epsilon,a_{K_i}-a_{K_i-1}-l-l'_{K_i}}\right)\Big\|_{L(B,B)}$$
$$\leq\sum_{|l|\leq Dk_\epsilon}\sum_{|l'_{K_{i+1}}|\leq Dk_\epsilon}\prod_{j=K_i}^{K_{i+1}}\left\|g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_j+m)}(x),.,a_j)\right\|_\infty^{N_j}$$
$$O\left(\frac{|a_{K_i}-a_{K_i-1}-l-l'_{K_i}|^{1+\epsilon_0}}{|l_{K_i}-2k_\epsilon|^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right)$$
$$\leq(2Dk_\epsilon)^2\prod_{j=K_i}^{K_{i+1}}\left\|g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_j+m)}(x),.,a_j)\right\|_\infty^{N_j}$$
$$O\left(\frac{(||a_{K_i}|+1||a_{K_i-1}|+1||1+k_\epsilon|^2)^{1+\epsilon_0}}{|l_{K_i}-2k_\epsilon|^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right).$$

On remplace dans l'équation (10.13) en remarquant que pour tout $\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})$ $l_i\leq k_\epsilon$ pour tout $i\neq K_1,\dots,K_r$. Dans la majoration qui suit, on applique les hypothèses de convergence de $\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|g_{k_\epsilon}\|_\infty$ et (10.15) :

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}_{\alpha_i+1,\alpha_{i+1}-1}(\mathbf{e})}$$
$$\|b^{(1,\dots,1)}_{a,m+\underline{l}_{\alpha_i},\epsilon,(l_{\alpha_i+1},\dots,l_{\alpha_{i+1}-1}),(N_{\alpha_i+1},\dots,N_{\alpha_{i+1}-1})}(\sum_{l\in\mathbb{Z}}Q_{k_\epsilon,l}(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon\underline{l}_{\alpha_i}(x)},.,a)^{N_{\alpha_i}}))\|_B$$
$$\leq k_\epsilon^q(2D(1+k_\epsilon))^{r(2+1+\epsilon_0)} \tag{10.16}$$
$$sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{(a_{\alpha_i+1},\dots,a_{\alpha_{i+1}-1})\in\mathbb{Z}^{\alpha_{i+1}-2-\alpha_i}}\prod_{u=\alpha_i+1}^{\alpha_{i+1}-1}(1+|a_u|)^{2(1+\epsilon_0)}\|g_{k_n}(x,.,a_u)\|_\infty^{N_u}$$
$$\sum_{k_\epsilon\leq l_{K_1}\dots,l_{K_{r+1}}}O(\prod_{i=K_1}^{K_r}(l_i-2k_\epsilon)^{-(1+\frac{\epsilon_0}{2})})$$
$$=O(k_\epsilon^{q+r(2+1+\epsilon_0)}). \tag{10.17}$$

Où $\mathcal{G}_{i,j}(\mathbf{e}) := \{(l_i,\dots,l_j), \mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})\}$. Et ainsi pour $1\le i\le K$,

$$\epsilon^{\frac{N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}}{4}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}_{\alpha_i+1,\alpha_{i+1}-1}(\mathbf{e})} \left\| \sum_{a\in\mathbb{Z}} b^{(1,\dots,1)}_{a,m+\underline{l}_{\alpha_i},\epsilon,(l_{\alpha_i+1},\dots,l_{\alpha_{i+1}-1}),(N_{\alpha_i+1},\dots,N_{\alpha_{i+1}-1})} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} Q_{k_\epsilon,l}\big(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon\underline{l}_{\alpha_i}}(x),.,a)^{N_{\alpha_i}}\big)\Big)\right\|_{B^*}$$
$$= O(k_\epsilon^{q+r(2+1+\epsilon_0)}\epsilon^{\frac{N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}}{4}-\frac12}).$$

Ce terme tend vers 0 en $O(\epsilon^{1/8})$ dès que $N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}\ge 3$ et il est en $O(k_\epsilon^{q+r(2+1+\epsilon_0)})$ lorsque $N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}=2$.
Enfin, dans le cas particulier où $N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}=1$ (donc $\alpha_{i+1}=1+\alpha_i$ et $N_{\alpha_i}=1$), en rappelant que g_{k_ϵ} est de moyenne nulle

$$b^{(0,0,\mathbf{e})}_{a,m,\epsilon,(l_{\alpha_i},l',\mathbf{l}),(1,N_2,\mathbf{N})}(G) = E_{\hat{\bar{\mu}}}\Big(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(l_{\alpha_i}+m)}(x),.,a_q)E_{\hat{\bar{\mu}}}(\dots)\Big) = 0.$$

Ainsi, en sommant (10.12) selon les vecteurs $\mathbf{l}$ possibles,

$$\frac{1}{\epsilon^{q/4}}\sum_{l_1,\dots,l_q,\underline{l}_q\le\lfloor t/\epsilon\rfloor} |b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)| \overset{L^1_{\hat{\bar{\mu}}}}{\underset{\epsilon\to0}{\to}} 0 \tag{10.18}$$

dès qu'il existe un indice $1\le i\le K$ tel que $N_{\alpha_i}+\cdots+N_{\alpha_{i+1}-1}\ge 3$. Les couples $(\mathbf{e},\mathbf{N})$ pour lesquels $\epsilon^{q/4}\sum_{l_1,\dots,l_q,\underline{l}_q\le\lfloor t/\epsilon\rfloor} b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)$ n'est pas négligeables sont donc ceux tels que pour tout $1\le i\le K$ (avec $K=\frac{N}{2}$), ou bien

$$2+\alpha_i=\alpha_{i+1}\ et\ N_{\alpha_i}=N_{\alpha_{i+1}}=1, \tag{10.19}$$

ou bien

$$1+\alpha_i=\alpha_{i+1}\ et\ N_{\alpha_i}=2 \tag{10.20}$$

Pour la donnée d'un tel couple $(\mathbf{e},\mathbf{N})$, on note par J_2 l'ensemble des indices i vérifiant (10.19) et J_1 ceux vérifiant (10.20). Pour $\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})$, $b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)$ se décompose alors en appliquant (10.11) et en remarquant que les termes $b^{(0,\mathbf{e})}_{0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i,l_{i+1}),(1,1)}$ ne dépendent pas du premier indice a_0 (car $Q^{(0)}_{m,a}(.)$ ne dépend pas de a)

$$b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1) = \left(\prod_{i\in J_2} b^{(0,1)}_{0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i,l_{i+1}),(1,1)}(1)\right)\left(\prod_{i\in J_1} b^{(0)}_{a_0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i),(2)}(1)\right).$$

Avec la convention $\underline{l}_0 = 0$. En remarquant que g_{k_ϵ} est de moyenne nulle (hypothèse 9.1.5), $Q^{(0)}_{l_{i+1},a}(g_{k_\epsilon}) = 0$ et en appliquant la relation,

$$b^{(0,1)}_{0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i,l_{i+1}),(1,1)}(1) = \frac{1}{(2\pi\Sigma l_i)^{1/2}} \sum_{a_1\in\mathbb{Z}} b_{0,\underline{l}_i,\epsilon,(l_{i+1}),(1)}(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.,a_1))$$
$$= \sum_{l_{i+1}\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor} \frac{1}{(2\pi\Sigma l_i)^{1/2}}$$
$$\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.,a_1)1_{\{S_{l_i}=a_1-a_2\}} \circ \hat{T}^{k_\epsilon} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon\underline{l}_{i+1}}(x),\hat{T}^{l_{i+1}}(.),a_2)\right).$$

Pour rassembler ces derniers termes $b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)$ et calculer les moments directement, on se replace dans le système (M,T,μ), ce qui nous est permis par le lemme suivant.

Lemme 10.1.5. *Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,*

$$I_\mu\left(f(x_1,T^l(.))f(x_2,.)\right) = O(l^{-(1+\epsilon_0/4)})$$

uniformément en x_1 et x_2. En particulier,

$$\sigma^2(f)(x_1,x_2) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x_1,T^{|l|}(.))f(x_2,.)\right)$$

converge et

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{0\leq l\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor} \sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_i)}(x_1),\hat{T}^l(.),a_1)1_{\{S_l=a_1-a_2\}} \circ \hat{T}^{k_\epsilon} g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(\underline{l}_i+l)}(x_2),.,a_2)\right)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{l\geq 0} I_\mu(f(w_{\epsilon(\underline{l}_i+l)}(x_1),T^l(.))f(w_{\epsilon(\underline{l}_i)}(x_2),.)). \tag{10.21}$$

Démonstration. Pour montrer le premier point, d'après le lemme 10.1.4, pour $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I_\mu\left(f(x_1,T^l(.))f(x_2,.)\right) - \sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k_\epsilon}(x_1,\hat{T}^l(.),a_1)1_{\{S_l=a_1-a_2\}} \circ \hat{T}^{k_\epsilon} g_{k_\epsilon}(x_2,.,a_2)\right)\right|$$
$$= O(l^2\beta_0^{k_l}\|f\|^2_\infty)$$

est un terme sommable. Il suffit donc de montrer que en posant $k'_l := \lceil \log(l)^2 \rceil$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{l\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor} \left| \sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k'_l}(x_1,\hat{T}^l(.),a_1)1_{\{S_l=a_1-a_2\}} \circ \hat{T}^{k'_l} g_{k_l}(x_2,.,a_2)\right)\right| < \infty.$$

Ce qu'on obtient par application des majorations des lemmes 10.1.2 et 10.1.3 page 135

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k'_l}(x_1,\hat{T}^l(.),a_1)1_{\{S_l=a_1-a_2\}}\circ\hat{T}^{k'_l}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)\right| \\
&=\left|\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left[\sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{v\in\mathbb{Z}} Q_{k'_l,u}\left(g_{k'_l}(x_1,.,a_1)Q_{l-2k'_l,a_2-a_1-u-v}\left(Q_{k'_l,v}\left(P^{k'_l}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)\right)\right)\right]\right| \qquad (10.22)\\
&=\left|\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left[\sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{v\in\mathbb{Z}} P^{k'_l}\left(Q_{k'_l,u}(g_{k'_l}(x_1,.,a_1)G_{l-2k'_l,a_2-a_1-u-v}\left(Q_{k'_l,v}\left(P^{k'_l}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)\right)\right)\right]\right| \qquad (10.23)\\
&\leq \sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{|v|\leq Dk'_l}\|P^{k'_l}Q_{k'_l,u}(g_{k'_l}(x_1,.,a_1).)\|_{L(B,B)} \\
&\|G_{l-2k'_l,a_2-a_1-u-v}\|_{L(B,B)}\|Q_{k'_l,v}\left(P^{k'_l}(g_{k'_l}(x_2,.,a_2))\right)\|_B \\
&\leq (Dk'_l)^2\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}}\|f(x_1,.,a_2)\|_\infty\|f(x_2,.,a_2)\|_B O\left(\frac{((|a_2|+1)(|a_1|+1)(2k'_l))^{1+\epsilon_0}}{(l-2k'_l)^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right) \\
&= O\left(\frac{(k'_l)^{3+\epsilon_0}}{(l-2k'_l)^{1+\frac{\epsilon_0}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne (10.22) à (10.23) se fait en remarquant que

$$\sum_{a_2\in\mathbb{Z}} Q^{(0)}_{l-k'_l,a_2-a_1-u}\left(P^{k'_l}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)=\sum_{a_2\in\mathbb{Z}} Q^{(0)}_{l-k'_l,0}\left(P^{k'_l}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)=0.$$

La majoration de la dernière ligne se fait elle en remarquant avec l'hypothèse de l'énoncé $\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|f(x,.,a)\|_\infty<\infty$. L'identité ci-dessus est valable pour $l\geq 2$ et représente un terme sommable, donc

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x_1,\overline{T}^{|l|}(.))f(x_2,.)\right)$$

converge. Enfin, le lemme 10.1.4 assure la convergence de

$$\sum_{a_1,a_2\in\mathbb{Z}} E_{\hat{\tilde{\mu}}}\left(g_{k'_l}(x_1,\hat{T}^l(.),a_1)1_{\{S_l=a_1-a_2\}}\circ\hat{T}^{k_n}g_{k'_l}(x_2,.,a_2)\right)$$

vers la limite de (10.21). □

Avec le lemme 10.1.5 on en déduit que pour $(\mathbf{e}, \mathbf{N})$ vérifiant (10.19) ou (10.20),

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/4} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})} b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/4} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})} \left(\prod_{i\in J_2} b^{(0,1)}_{0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i,l_{i+1}),(1,1)}(1)\right)\left(\prod_{i\in J_1} b^{(0)}_{a_0,\underline{l}_{i-1},\epsilon,(l_i),(2)}(1)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/4} \frac{1}{(2\pi\Sigma)^{N/4}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{e})} \left(\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{l_{\alpha_i}^{1/2}}\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_2} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_{i+1}}(x), T^{l_{i+1}}(.))\right)\right)\left(\prod_{i\in J_1} I_\mu(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)^2)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi\Sigma)^{N/4}} \epsilon^{N/4} \sum_{1\le l_1,\ldots,l_K,\underline{l}_K\le \lfloor t/\epsilon\rfloor} \left(\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{l_i^{1/2}}\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_2} \sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x), T^{l}(.))\right)\right)\left(\prod_{i\in J_1} I_\mu(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)^2)\right), \qquad (10.24)
\end{aligned}$$

où (10.24) est obtenu en remarquant que le lemme 10.1.5 permet de négliger certaines perturbations dans le premier terme de f : en effet, d'une part
$\sum_{(1/\epsilon)^{1/4}\le l\le\lfloor t/\epsilon\rfloor} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_i+l}(x), T^{l}(.))\right)$ converge vers 0 (uniformément en les l_i) et d'autre part, le caractère uniformément Lipschitz de $s \to f(w_s(x),.)$ implique qu'il existe $C_f > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\le(1/\epsilon)^{1/4}} \left| I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_i+l}(x), T^{l}(.))\right) - I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x), T^{l}(.))\right)\right| \\
&\le \sum_{l\le(1/\epsilon)^{1/4}} I_\mu\left(|f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)|\right) C_f\epsilon \\
&= O(\epsilon^{3/4}).
\end{aligned}$$

Uniformément en les l_i. Ainsi, on peut substituer dans (10.24)
$\sum_{1\le l_{i+1}\le\lfloor t/\epsilon\rfloor-\underline{l}_i} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_{i+1}}(x), T^{l_{i+1}}(.))\right)$
par $\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x), T^{l}(.))\right)$.

Lemme 10.1.6. *La fonction G décrite comme suit est uniformément continue*

$$G(u_1,\dots,u_K) := \left(\prod_{i\in J_2}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),T^l(.)\right)\right) \left(\prod_{i\in J_1} I_\mu(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)^2)\right).$$

Démonstration. Montrons formellement l'uniforme continuité : w est Lipschitzienne, il suffit donc de montrer que $x\in\mathbb{R}^d \to \sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(x,.)f(x,T^l(.))\right)$ est uniformément continue, ce qui découle de l'uniforme convergence de $I_\mu\left(f(x,.)f(x,T^l(.)\right)$ en $O(l^{-(1+\epsilon_0/4)})$ dans le lemme 10.1.5 et du caractère Lipschitz de $f(.,.)$: Pour K un compact et tout $x,y\in K$,

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(x,.)f(x,T^l(.))\right) - \sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(y,.)f(y,T^l(.))\right)\right| \le C_1\sum_{|l|\ge N}|l|^{-5/4} + CN\|x-y\|.$$

Cette différence fait uniquement intervenir $\|x-y\|$ d'où l'uniforme continuité.

□

En remarquant que pour $u,v\ge\epsilon$, $|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}| = \left|\frac{u-v}{uv}\right| \le \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^2|u-v|$, on a alors la convergence des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{K/2}\sum_{l_1,\dots,l_K,\underline{l}_K\le\lfloor t/\epsilon\rfloor}\left(\prod_{i=1}^K\frac{1}{l_i^{1/2}}\right)\\
&\left(\prod_{i\in J_2}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),T^l(.)\right)\right)\left(\prod_{i\in J_1} I_\mu(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)^2)\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\epsilon^K\sum_{l_1,\dots,l_K,\underline{l}_K\le\lfloor t/\epsilon\rfloor}\int_{l_1-1<u_1\le l_1}\cdots\int_{l_K-1<u_K\le l_K}\left(\prod_{i=1}^K\frac{1}{(\lceil u_i\rceil\epsilon)^{1/2}}\right)\\
&G(\epsilon\lceil u_1\rceil,\dots,\epsilon\lceil u_K\rceil)du_1,\dots,du_K\\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\int_{0<u_1,\dots,u_K\le\lfloor t/\epsilon\rfloor,\sum_i\lceil u_i/\epsilon\rceil\le\lfloor t/\epsilon\rfloor}\left(\prod_{i=1}^K\frac{1}{(\lceil u_i/\epsilon\rceil\epsilon)^{1/2}}\right)\\
&G(\epsilon\lceil u_1/\epsilon\rceil,\dots,\epsilon\lceil u_K/\epsilon\rceil)du_1,\dots,du_K \qquad (10.25)\\
&= \int_{0<u_1,\dots,u_K,\sum_i u_i\le t}\left(\prod_{i=1}^K\frac{1}{u_i^{1/2}}\right)G(u_1,\dots,u_n)du_1,\dots,du_K. \qquad (10.26)
\end{aligned}$$

Le passage vers la dernière intégrale se fait par convergence dominée. En effet le terme de (10.25) est majoré par

$$C\left(\prod_{i=1}^{K}\frac{1_{\{0<u_i\leq t+1\}}}{u_i^{1/2}}\right),$$

où $C>0$ viens du caractère borné de $G(.)$ (continue sur un compact).

Pour résumer, on peut remarquer que chaque couple $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ admissible est entièrement encodé par la structure du vecteur $\mathbf{N}$ qui détermine aussi les ensembles $J_1(\mathbf{N})$, $J_2(\mathbf{N})$ et en notant $\mathcal{C}(N,q)$ l'ensemble des couples $\mathbf{N}$ admissibles de longueur q on constate que pour N impair $\mathcal{C}(N,q)=\emptyset$ donc

$$\lim_{\epsilon\to 0}E_{\overline{\mu}}\left(v_t^{\epsilon}(x,.)^N\right)=0.$$

On traite désormais le cas où N est pair

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}E_{\overline{\mu}}\left(v_t^{\epsilon}(x,.)^N\right) &= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{N/4}\sum_{q=1}^{N}\sum_{N_i\geq 1,\sum_{i=1}^{q}N_i=N}C_{\mathbf{N}}A_{\epsilon,q,\mathbf{N}}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{N/4}\sum_{q=1}^{N}\sum_{(\mathbf{e},\mathbf{N})\in\mathcal{C}(N,q)}C_{\mathbf{N}}\sum_{l_1,\ldots,l_q,\underline{l}_q\leq\lfloor t/\epsilon\rfloor}b^{\mathbf{e}}_{a_0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1) \qquad (10.27)\\
&= \sum_{q=1}^{N}\sum_{(\mathbf{N},\mathbf{e})\in\mathcal{C}(N,q)}C_{\mathbf{N}}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{N/4}}\int_{0\leq u_1,\ldots,u_K\leq 1,\sum_i u_i\leq 1}\left(\prod_{i=1}^{K}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right)\\
&\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})}\sum_{l=1}^{\infty}I_{\mu}\left(f(w_{\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)f(w_{\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),T^l(.)\right)\right) \qquad (10.28)\\
&\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})}I_{\mu}(f(w_{\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)^2)\right)du_1,\ldots,du_K.
\end{aligned}$$

La donnée de q, $\mathbf{N}\in\mathcal{C}(q)$, $C_{\mathbf{N}}$ et $J_1(\mathbf{N})$ est entièrement déterminée par la donnée de $J_2(\mathbf{N})$: on a,

$$N/2=|J_1|+|J_2|,\ q=|J_1|+2|J_2|$$

et par récurrence sur le cardinal de $J_2(\mathbf{N})$, $C_{\mathbf{N}}=2^{|J_2|}\frac{N!}{2^{N/2}}$. Tandis que pour q fixé, $\psi:\mathbf{N}\in\mathcal{C}(g)\to J_2(\mathbf{N})$ est injectif (donc bijectif sur son image ce qui impose $\mathbf{N}$). Ceci implique d'une part que le moment d'ordre N est non nul si et seulement si N est pair auquel cas

celui ci peut se réécrire

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} E_{\overline{\mu}}\left(v_t^\epsilon(x,.)^N\right) &= \sum_{J_2\in\mathcal{P}([|1;N/2|])} \frac{(2\pi\Sigma)^{-N/4}N!}{2^{N/2}(N/2)!}2^{|J_2|} \\
&(N/2)!\int_{0\leq u_1,\dots,u_{N/2},\sum_i u_i\leq t}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),T^l(.)\right)\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} I_\mu(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)^2)\right)du_1,\dots,du_{N/2} \\
&= \frac{(2\pi\Sigma)^{-N/4}N!}{2^{N/2}(N/2)!}\sum_{J_2(\mathbf{N})\in\mathcal{P}([|1;N/2|])}(N/2)!\int_{0\leq u_1,\dots,u_{N/2},\sum_i u_i\leq t}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})} 2\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),T^l(.)\right)\right) \\
&\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} I_\mu(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)^2)\right)du_1,\dots,du_{N/2} \\
&= \frac{N!}{2^{N/2}(N/2)!}(2\pi\Sigma)^{-N/4}(N/2)! \\
&\int_{0\leq u_1,\dots,u_{N/2},\sum_i u_i\leq t}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),.)f(w_{\sum_{k=1}^i u_k}(x),T^{|l|}(.)\right) \\
&du_1,\dots,du_{N/2}.
\end{aligned}$$

Le terme en $\frac{N!}{2^{N/2}(N/2)!}$ coïncide avec le moment d'ordre $N/2$ d'une loi normale standard (de variance 1) ou autrement dit de la variable B_1 pour $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard tandis que le second facteur s'identifie avec le moment d'ordre N d'une variable de la forme $\left(\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)\right)^{1/2}$ où
$a(w_s(x)) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x,T^{|k|}.)f(x,.)\right)$ et $(L'_s)_{s\geq 0}$ désigne le temps local d'un mouvement Brownien $(B'_t)_{t\geq 0}$ de variance Σ indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$. Cette identification résulte de la proposition B.1.3 de l'annexe à la page 174. On peut donc conclure que pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} E_{\overline{\mu}}\left(v_t^\epsilon(x,.)^N\right) = E\left(\left(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)^N\right).$$

Le processus à droite dans l'équation vérifie le critère de Carleman :

Lemme 10.1.7. *Pour tout $t \in [0,T]$, les moments de $B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}$ vérifie le critère de Carleman : en notant $M_N := E\left(B^N_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)$, $M_{2N}^{1/(2N)} = O(N)$ et*

$$\sum_{N\geq 0} M_{2N}^{-1/(2N)}$$

diverge.

Démonstration. en effet,si on calcule les moments d'ordres $2N$, par indépendance,

$$E\left(\left(\mathcal{N}\left(\int_0^t a(w_s(x))dL_s(0)\right)^{1/2}\right)^N\right) = E\left(\mathcal{N}^{2N}\right) E\left(\left(\int_0^t a(w_s(x))dL_s(0)\right)^N\right)$$
$$\leq \frac{(2N)!}{2^N N!}\|a(.)\|_{\infty,w_{[0,T]}(x)} E(L_T^N). \tag{10.29}$$

Or la formule de Stirling donne $(2N)! = O\left(\frac{(2N)^{2N+1}}{e^{2N}}\right)$ et ainsi $((2N)!)^{\frac{1}{2N}} = O\left((2N)^{1+\frac{1}{2N}}\right) = O(N)$ et d'autre part, avec le corollaire 1.5.5 page 30, le terme (10.29) est en $O(N)$ dont l'inverse est le terme général d'une série divergente.

□

Avec le théorème de Carleman 1.3.5 de la page 24, on obtient bien la convergence en loi pour t fixé de $v_t^\epsilon(x,.)$ vers $\mathcal{N}\left(\int_0^t a(w_s(x))dL_s(0)\right)^{1/2}$ ce qui conclut la proposition.

□

10.2 Preuve du théorème de moyennisation : lois finies dimensionnelles.

Pour conclure, on dispose de la convergence en loi au sens des distributions finies :

Lemme 10.2.1. *Sous les mêmes hypothèses et notations que 9.1.2, On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ et $\omega \in M$,*

$$v_t^\epsilon(x,\omega) = \epsilon^{1/4}\int_{k=1}^{t/\epsilon} f(w_{\epsilon s}(x), T^{\lfloor s\rfloor}\omega)ds.$$

Alors le processus $(v_t^\epsilon(x,\omega))_{t\in[0,T]}$ converge en loi (pour la mesure $\overline{\mu}$) au sens des distributions finies vers le processus $\left(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)$, où $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien standard et $(L'_s)_{s\geq 0}$ est le temps local d'un mouvement brownien $(B'_t)_{t\geq 0}$ de

variance Σ *(avec* Σ *tel que défini dans 9.1.4) indépendant de* $(B_t)_{t\in[0,T]}$ *tandis que* $a(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} I_\mu\left(f(x,.)f(x,T^{|l|}(.))\right)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ Pour montrer la convergence en loi de l'énoncé du processus $(v_t^\epsilon)_{t\in[0,T]}$, il suffit de montrer la convergence du processus
$\tilde{v}_t^\epsilon(x,.) := \epsilon^{1/4}\sum_{k=1}^{\lfloor t/\epsilon\rfloor} f(w_{\epsilon k}(x), T^{\lfloor s\rfloor}\omega)$ en effet, en utilisant le caractère uniformément Lipschitz et borné de f en sa première variable ainsi que le caractère Lipschitz de $(w_s(x))_s$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \|v_t^\epsilon(x,.) - \tilde{v}_t^\epsilon(x,.)\|_{L^1_\mu} \\
&= \epsilon^{1/4} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=1}^{\lfloor t/\epsilon\rfloor} \int_{s=k-1}^{k} f(w_{\epsilon k}(x), T^k.) - f(w_{\epsilon s}(x), T^{\lfloor s\rfloor}.)ds + \int_{\lfloor t/\epsilon\rfloor}^{t/\epsilon} f(w_{\epsilon s}(x), T^{\lfloor s\rfloor}\omega)ds \right\|_{L^1_\mu} \\
&\leq \epsilon^{1/4}(TC_f + \|f\|_\infty).
\end{aligned}$$

La convergence en loi de l'un entraine donc celle de l'autre.
Soit $T > 0$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p \in [0,T]$, pour montrer la convergence au sens des distributions finies du processus $\left(\epsilon^{1/4}\tilde{v}_t^\epsilon(x,.)\right)_{t\geq 0}$ vers $\left(B_{\int_0^t a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{t\geq 0}$, on peut étudier la convergence de $\left(\epsilon^{1/4}\tilde{v}_{t_1}^\epsilon(x,.), \ldots, \epsilon^{1/4}\tilde{v}_{t_p}^\epsilon(x,.)\right)$ ce qui revient par combinaison linéaires à montrer la convergence de $\left(\epsilon^{1/4}\tilde{v}_{t_i}^\epsilon(x,.) - \epsilon^{1/4}\tilde{v}_{t_{i-1}}^\epsilon(x,.)\right)_{i=1}^p$ vers $\left(B^{(i)}_{\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{i=1}^p$ où les $B^{(i)}$ sont des mouvements Browniens standards mutuellement indépendants et indépendants de $(B'_t)_{t\in[0,T]}$, en effet ceux-ci vérifient bien

$$\left(B^{(i)}_{\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{i=1,\ldots,p} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(B_{\int_0^{t_i} a(w_s(x))dL'_s(0)} - B_{\int_0^{t_{i-1}} a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)_{i=1,\ldots,p}$$

On souhaite appliquer la méthode des moments, pour cela il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 10.2.2. *Pour tout* $M_1, \ldots, M_p \geq 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^p \left(\tilde{v}_{t_i}^\epsilon(x,.) - \tilde{v}_{t_{i-1}}^\epsilon(x,.)\right)^{M_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^p \left(B^{(i)}_{\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)^{M_i}\right).$$

Démonstration. En notant $\underline{q}_i := \sum_{j=1}^i q_j$, $E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^p \left(\tilde{v}_{t_i}^\epsilon(x,.) - \tilde{v}_{t_{i-1}}^\epsilon(x,.)\right)^{M_i}\right)$ peut se dé-

composer sous la forme

$$E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}\left(\tilde{v}^{\epsilon}_{t_i}(x,.)-\tilde{v}^{\epsilon}_{t_{i-1}}(x,.)\right)^{M_i}\right)= \sum_{q_1=1}^{M_1}\cdots\sum_{q_p=1}^{M_p}\sum_{1\le N_1,\ldots,N_{\underline{q}_p},M_i=\sum_{j=\underline{q}_{i-1}+1}^{\underline{q}_i}N_j}\left(\prod_{i=1}^{p}C_{(N_{\underline{q}_{j-1}+1},\ldots,N_{\underline{q}_j})}\right)A_{\epsilon,\mathbf{q},\mathbf{N}}. \tag{10.30}$$

avec

$$\begin{aligned}A_{\epsilon,\mathbf{q},\mathbf{N}} &= \sum_{1\le n_1<\cdots<n_{q_1}\le\lfloor t_1/\epsilon\rfloor}\cdots\sum_{\lfloor t_{p-1}/\epsilon\rfloor<n_{\underline{q}_{p-1}+1}<\cdots<n_{\underline{q}_p}\le\lfloor t_p/\epsilon\rfloor}\\ &\sum_{a_1,\ldots,a_{\underline{q}_p}\in\mathbb{Z}}E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{j=1}^{\underline{q}_p}f(w_{\epsilon n_i}(x),\overline{T}^{n_i}(.),a_i)^{N_j}1_{\{S_{n_i}=a_i\}}\right)\\ &= \sum_{\mathbf{l}\in E_\epsilon(t_1,\ldots,t_p)}b_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1),\end{aligned}$$

où

$$E_\epsilon(t_1,\ldots,t_p):=\{l_i\ge 1:\lfloor t_{j-1}/\epsilon\rfloor<\underline{l}_i\le\lfloor t_j/\epsilon\rfloor,\forall i,1+\underline{q}_{j-1}\le i\le\underline{q}_j,\forall j,1\le j\le p\}.$$

On pose aussi $N:=\sum_{i=1}^{p}M_i$. D'après (10.18), les seuls vecteurs $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ admissibles sont ceux vérifiant (10.19) ou (10.20) à la page 144. Ainsi l'ensemble $\mathcal{C}(N,\sum_{i=1}^{p}q_i)$ (introduit page 148) des couples admissibles peut-être décrit par
$\mathcal{C}(N,\sum_{i=1}^{p}q_i)=\mathcal{C}(M_1,q_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(M_p,q_p)\cup\bigcup_{j=2}^{p-1}A_j$ avec
$A_j:=\{(\mathbf{N},\mathbf{e})\in\mathcal{C}(N,\sum_{i=1}^{p}q_i),N_{\underline{q}_j}=N_{1+\underline{q}_j}=1,e_{\underline{q}_j}=0,e_{\underline{q}_j+1}=1\}$. Si on considère un élément $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ dans A_j, on a $\underline{l}_{\underline{q}_j}\le t_j/\epsilon<\underline{l}_{1+\underline{q}_j}$ et $\underline{q}_j\in J_2(\mathbf{N})$ (avec $J_2(\mathbf{N})$ suivant la notation J_2 de la page 144), la contribution de ces termes $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ va être négligeable, en effet les deux cas possibles pour $\underline{q}_j$, $\underline{l}_{1+\underline{q}_j}-\underline{l}_{\underline{q}_j}=l_{\underline{q}_j+1}\ge k_\epsilon$ et $t_j/\epsilon-\underline{l}_{\underline{q}_j}\le k_\epsilon$ donnent des termes négligeables. On va montrer cela plus rigoureusement : l'équation (10.24) donne en notant α_k les indices tels que $e_{\alpha_k}=0$,

$$\epsilon^{N/4} \sum_{\mathbf{l}\in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)} |b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)|$$

$$\leq \epsilon^{N/4} \sum_{\mathbf{l}\in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)} |b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)|$$

$$\leq \epsilon^{N/4} \sum_{\mathbf{l}\in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)} \left(\prod_{k=1}^{N/2} l_{\alpha_k}^{-1/2}\right) \tag{10.31}$$

$$\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})} \left|I_\mu\left(f(w_{\epsilon \underline{l}_i}(x),.) f(w_{\epsilon \underline{l}_{i+1}}(x), T^{l_{i+1}}(.)\right)\right|\right) \tag{10.32}$$

$$\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} \left|I_\mu\left(f(w_{\epsilon \underline{l}_i}(x),.)^2\right)\right|\right) \tag{10.33}$$

$$\tag{10.34}$$

les termes (10.31), (10.32) et (10.33) sont bornés du fait du lemme 10.1.5 à la page 145. Seulement $\underline{q}_j \in J_2(\mathbf{N})$ donc la somme sur les $\mathbf{l} \in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)$ tels que $l_{\underline{q}_j+1} \geq k_\epsilon$ de (10.32) converge vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$ (comme reste d'une série convergente).
à l'opposé, la somme sur les $\mathbf{l} \in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)$ tels que $t_j/\epsilon - \underline{l}_{\underline{q}_j} \leq k_\epsilon$ de (10.31) converge vers 0.
Les couples $(\mathbf{N},\mathbf{e})$ dans A_j sont donc négligeables

Ainsi, si un des M_i est impair alors (10.30) tend vers 0 ce qui coincide avec le fait que dans ce cas

$$E\left(\prod_{i=1}^{p}\left(B^{(i)}_{\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)^{M_i}\right) = 0$$

car $\left((B^{(i)}_t)_{t\geq 0}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, indépendants de $(L'_t)_{t\geq 0}$, à accroissements indépendants et de lois symétriques.
Supposons à présent que $M_1,\dots,M_p$ soient tous pairs. Pour
$(\mathbf{N},\mathbf{e}) \in \mathcal{C}(M_1,q_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(M_p,q_p)$, les contributions des autres termes étant négligeables, en appliquant (10.26), et en posant
$\tilde{E}_\epsilon(t_1,\dots,t_p) := \{1 \leq l_1,\dots,l_{\frac{M_1+\cdots+M_p}{2}} : \lfloor t_{j-1}/\epsilon\rfloor < \underline{l}_k \leq \lfloor t_j/\epsilon\rfloor, \forall k, \frac{M_1+\cdots+M_{j-1}}{2}+1 \leq k \leq \frac{M_1+\cdots+M_j}{2}\}$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{N/4}\sum_{\mathbf{l}\in E_\epsilon(t_1,\dots,t_p)} b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l},\mathbf{N}}(1)$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{N/4}\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{M_j/4}}\right)\sum_{\mathbf{l}\in\tilde{E}_\epsilon(t_1,\dots,t_p)}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{l_i^{1/2}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),T^l(.)\right)\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} I_\mu(f(w_{\epsilon\underline{l}_i}(x),.)^2)\right)$$
$$=\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{M_j/4}}\right)\int_{F_{M_1,\dots,M_p}}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),T^l(.)\right)\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} I_\mu(f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)^2)\right)du_1\dots du_{M_j},$$

où

$$F_{M_1,\dots,M_p}:=$$
$$\{1\le u_1,\dots,u_{\frac{M_1+\dots+M_p}{2}}:\lfloor t_{j-1}/\epsilon\rfloor<\underline{u}_k\le\lfloor t_j/\epsilon\rfloor,\forall k,\tfrac{M_1+\dots+M_{j-1}}{2}+1\le k\le\tfrac{M_1+\dots+M_j}{2}\}.$$

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}'(\mathbf{M},\mathbf{q})$ des couples admissibles pertinent est décrit par le produit $\mathcal{C}'(\mathbf{M},\mathbf{q}):=\mathcal{C}(\mathbf{M_1},\mathbf{q_1})\times\dots\times\mathbf{C}(\mathbf{M_p},\mathbf{q_p})$, d'où

$$\lim_{\epsilon\to 0}E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}\left(\tilde{v}^\epsilon_{t_i}(x,.)-\tilde{v}^\epsilon_{t_{i-1}}(x,.)\right)^{M_i}\right)=$$
$$\sum_{q_1=1}^{M_1}\dots\sum_{q_p=1}^{M_p}\sum_{(\mathbf{N},\mathbf{e})\in\mathcal{C}'(\mathbf{M},\mathbf{q})}\left(\prod_{i=1}^{p}C_{(N_{\underline{q}_{i-1}+1},\dots,N_{\underline{q}_i})}\right)\int_{F_{M_1,\dots,M_p}}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{M_i/2}}\left(\prod_{i=1}^{N/2}\frac{1}{u_i^{1/2}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_2(\mathbf{N})}\sum_{l=1}^{\infty} I_\mu\left(f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),T^l(.)\right)\right)$$
$$\left(\prod_{i\in J_1(\mathbf{N})} I_\mu(f(w_{t_{j-1}+\sum_{k=1}^{i}u_k}(x),.)^2)\right)du_1,\dots,du_{N/2}.$$

Ce qui, à l'instar de (10.27) page 149, donne toujours avec $N := \sum_{i=1}^{p} M_i$ est pair,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}\left(\tilde{v}^{\epsilon}_{t_i}(x,.)-\tilde{v}^{\epsilon}_{t_{i-1}}(x,.)\right)^{M_i}\right)\\
&=\sum_{q_1=1}^{M_1}\cdots\sum_{q_p=1}^{M_p}\prod_{i=1}^{p}\frac{M_i!}{2^{M_i/2}(M_i/2)!(2\pi\Sigma)^{M_i/4}}\\
&\left(\frac{M_i}{2}\right)!\int_{F_{M_1,\ldots,M_p}}\frac{\prod_{i=1}^{N/2}a(w_{\sum_{i=1}^{j}u_i}(x))}{\prod_{j=1}^{N/2}u_j^{1/2}}du_1\ldots du_{N/2}\\
&=\prod_{j=1}^{p}E(B_1^{M_j})E\left(\prod_{j=1}^{p}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(w_s(x))dL'_s(0)\right)^{M_j/2}\right)\\
&=E\left(\prod_{j=1}^{p}\left(B_{\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)^{M_j}\right)
\end{aligned}$$

d'après la proposition B.1.2 de la page 173 (voir l'annexe B) et l'indépendance des $\left(B^{(1)},\ldots,B^{(p)},L'\right)$.

□

Par combinaisons linéaires, les moments des combinaisons linéaires de $\left(\epsilon^{1/4}\tilde{v}^{\epsilon}_{t_1}(x,.),\ldots,\epsilon^{1/4}\tilde{v}^{\epsilon}_{t_p}(x,.)\right)$ convergent vers celles de $\left(B_{\int_0^{t_1}a(w_s(x))dL'_s(0)},\ldots,B_{\int_0^{t_p}a(w_s(x))dL'_s(0)}\right)$. Or ces dernières vérifient d'après le lemme 10.1.7 page 150 le critère de Carleman (proposition 1.3.5 page 24) ce qui prouve la convergence en loi au sens des distribution finies et le lemme.

□

10.3 Preuve du théorème de moyennisation : tension.

On démontre ici le lemme 9.2.1 qui va nous être utile pour montrer la tension du processus $(v_t(x,.))_{t\in[0,T]}$.

Lemme 10.3.1. *Soit $p\in\mathbb{N}^*$, étant donné $h_1,\ldots,h_p:\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}$ tels que pour tout $i=1,\ldots,p$,*

- *$\int_M h_i(s,.)d\mu=0$ pour tout $s\geq 0$,*
- *$\sup_{s\geq 0}\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|h_i(s,.,a)\|_\infty<\infty$,*
- *$h_i(s,.,a)$ est Lipschitz dans $\overline{M}$ et en notant $\|f\|_{lip}:=\sup_{x,y\in\overline{M}}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$,*

$$\sup_{s\geq 0}\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1+|a|)^{2(1+\epsilon_0)}\|h_i(s,.,a)\|_{lip}<\infty.$$

Alors

$$\int_{\frac{a}{\epsilon}\leq u_1\leq\cdots\leq u_p\leq\frac{b}{\epsilon}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}h_i(u_i,T^{\lfloor u_i\rfloor})\right)\right|du_1\ldots du_p=O\left(\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\right). \tag{10.35}$$

Démonstration. On fixe $k_\epsilon:=\lceil(ln((b-a)/\epsilon))^2\rceil$ et on note $h_{i,k_\epsilon}(x,.,a)$ une approximation uniforme de $h_i(x,.,a)$ satisfaisant l'hypothèse 9.1.5 selon l'expression (9.6) page 124. D'après le lemme 10.1.4, le comportement asymptotique en (10.35) est donné par celui de

$$\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\leq u_1\leq\cdots\leq u_p\leq\frac{b}{\epsilon}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}h_{i,k_\epsilon}(u_i,T^{\lfloor u_i\rfloor})\right)\right|du_1\ldots du_p.$$

qui peut être majoré de la façon suivante,

$$\begin{aligned}&\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\leq u_1\leq\cdots\leq u_p\leq\frac{b}{\epsilon}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}h_{i,k_\epsilon}(u_i,T^{\lfloor u_i\rfloor})\right)\right|du_1\ldots du_p\\&\leq\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\sum_{\lfloor\frac{a}{\epsilon}\rfloor\leq n_1\leq\cdots\leq n_p\leq\lfloor\frac{b}{\epsilon}\rfloor}\sup_{u_1,\ldots,u_p}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{p}h_{i,k_\epsilon}(u_i,T^{n_i})\right)\right|\end{aligned}$$

Si on reprend la notation $b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,n,\mathbf{l},\mathbf{N}}(.)$ de la section 10.1 en remplaçant les $g_{k_\epsilon}(w_{\epsilon(l_p+m)}(x),.,a_p)^{N_p}$ par des $h_{i,k_\epsilon}(x,.,a_q)$, i.e pour $h\in B$:

$$\begin{aligned}b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,n,\mathbf{l}}(h):=\sup_{u_1,\ldots,u_p\in\mathbb{Z}}\Bigg|\sum_{a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{Z}}E_{\hat{\overline{\mu}}}\Big(P^{2k_n}\Big((h_{p,k_\epsilon}(u_p,.,a_p)H^{(e_p)}_{k_n,l_q,a_q-a_{p-1}})\circ\ldots\\\circ(h_{1,k_\epsilon}(u_1,.,a_1)H^{(e_1)}_{k_n,l_1,a_1-a_0})(h)\Big)\Big)\Bigg|.\end{aligned}$$

Alors les relations (10.12) et (10.17) tiennent toujours, ce qui impose que seuls certains des vecteurs admissibles $\mathbf{e}$ vérifiant (10.19) peuvent avoir un poids dans (10.35). Il s'agit donc des vecteurs $\mathbf{e}$ qui s'écrivent comme alternance de 0 et de 1 et nécessairement $e_{2p}=1$ (autrement
$b^{\mathbf{e}}_{a_0,m,n,\mathbf{l},\mathbf{N}}(h):=\sup_{u_1,\ldots,u_p\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{Z}}E_{\hat{\overline{\mu}}}\left(P^{2k_n}h_{p,k_\epsilon}(u_p,.,a_p)\right)E_{\overline{\mu}}(...)\right|=0$). Donc le seul vecteur $\mathbf{e}$ admissible vérifie $e_{2i}=1$ et $e_{2i-1}=0$ pour $1\leq i\leq p$. Par conséquent, en notant $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ le vecteur tel que $l_i(\mathbf{u})=\lfloor u_i\rfloor-\lfloor u_{i-1}\rfloor$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{2p}{2}\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\le u_1\le\cdots\le u_p\le\frac{b}{\epsilon}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(\prod_{i=1}^{2p}h_{i,k_\epsilon}(u_i,T^{\lfloor u_i\rfloor})\right)\right|du_1\dots du_p\\
&\le\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor p\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\le u_1\le\cdots\le u_p\le\frac{b}{\epsilon}}\prod_{i=1}^{p}b^{\mathbf{e}}_{0,0,\epsilon,\mathbf{l}(\mathbf{u})}(1)du_1\dots du_{2p}\\
&\le\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor p\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\le u_1\le\cdots\le u_p\le\frac{b}{\epsilon}}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{2\pi\Sigma(\lfloor u_{2i-1}\rfloor-\lfloor u_{2(i-1)}\rfloor)}\\
&\quad\sup_{t_{2i},t_{2i-1}\in\mathbb{R}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(h_{i,k_\epsilon}(t_{2i},T^{\lfloor u_{2i}\rfloor-\lfloor u_{2i-1}\rfloor}.)h_{i,k_\epsilon}(t_{2i-1},.)\right)\right|du_1\dots du_{2p}\\
&\le\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor p\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\le s_1\le\frac{b}{\epsilon},0\le s_3\le\cdots\le s_{2p}\le\frac{b-a}{\epsilon},\sum_{i=1}^{2p}s_i\le\frac{b}{\epsilon}}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{(2\pi\Sigma s_{2i-1})^{1/2}}\\
&\quad\sup_{t_{2i},t_{2i-1}\in\mathbb{R}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(h_{i,k_\epsilon}(t_{2i},T^{\lfloor\sum_{j=1}^{2i}s_j\rfloor-\lfloor\sum_{j=1}^{2i-1}s_j\rfloor}.)h_{i,k_\epsilon}(t_{2i-1},.)\right)\right|du_1\dots du_{2p}\\
&\le\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sup_{t_{2i},t_{2i-1}\in\mathbb{R}}\left|E_{\overline{\mu}}\left(h_{i,k_\epsilon}(t_{2i},T^{|l|}.)h_{i,k_\epsilon}(t_{2i-1},.)\right)\right| \qquad (10.36)\\
&\epsilon^{\frac{1}{2}\lfloor p\rfloor}\int_{\frac{a}{\epsilon}\le s_1\le\frac{b}{\epsilon}}\int_{0\le s_3\le\cdots\le s_{2p}\le\frac{b-a}{\epsilon}}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{s_{2i-1}^{1/2}}du_1\dots du_{2p}. \qquad (10.37)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 10.1.5, la somme apparaissant dans (10.36) converge, le comportement asymptotique de (10.35) est donc dictée par celui de (10.37). (10.35) est donc démontré en remarquant que d'une part

$$\int_0^{\frac{b-a}{\epsilon}}\frac{1}{u^{1/2}}du=\sqrt{\frac{b-a}{\epsilon}}$$

et d'autre part avec l'inégalité $b^2-a^2\le(b-a)^2$ pour $b\ge a$, i.e $\sqrt{b^2-a^2}\le(b-a)=\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}$:

$$\int_{\frac{a}{\epsilon}}^{\frac{b}{\epsilon}}\frac{1}{u^{1/2}}du=\sqrt{\frac{b}{\epsilon}}-\sqrt{\frac{a}{\epsilon}}\le\sqrt{\frac{b-a}{\epsilon}}.$$

□

Proposition 10.3.2. *Pour $T>0$, la famille de processus $\left((v_t^\epsilon)_{t\in[0,T]}\right)_{\epsilon>0}$ est tendue dans $D([0,T])$ muni de la métrique J_1.*

Démonstration. D'après le théorème de Billingsley 1.4.7, il suffit de montrer qu'il existe $\beta\ge 0$, $\alpha>\frac{1}{2}$ et $C>0$, tels que pour tous $0\le r\le s\le t\le T$,

$$E_{\overline{\mu}}\left(|\tilde{v}_s^\epsilon-\tilde{v}_r^\epsilon|^{2\beta}|\tilde{v}_t^\epsilon-\tilde{v}_s^\epsilon|^{2\beta}\right)\le C(t-r)^{2\alpha}. \qquad (10.38)$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz établit

$$E_{\overline{\mu}}\left(|v_s^\epsilon - v_r^\epsilon|^{2\beta}|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon|^{2\beta}\right) \leq \|v_s^\epsilon - v_r^\epsilon\|^{2\beta}_{L^{4\beta}_{\overline{\mu}}}\|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon\|^{4\beta}_{L^{2\beta}_{\overline{\mu}}}, \tag{10.39}$$

et le lemme 9.2.1 appliqué pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $h_i(s,.) = f(w_{\epsilon s}(x),.)$,

$$\begin{aligned}
\|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon\|_{L^{2p}_{\overline{\mu}}} &= \left\|\epsilon^{1/4}\int_{\frac{s}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}} f(w_{\epsilon u}(x), T^{\lfloor u\rfloor}(.))du\right\|_{L^{2p}_{\overline{\mu}}} \\
&= \epsilon^{1/4}\left(p!\int_{\frac{s}{\epsilon}\leq u_1\leq\cdots\leq u_{2p}\leq\frac{t}{\epsilon}}\left|E\left(\prod_{i=1}^{p} f(w_{\epsilon u_i}(x), T^{\lfloor u_i\rfloor}(.))\right)\right|du_1\ldots du_p\right) \\
&\leq K\,(t-s)^{\frac{1}{4}}\,.
\end{aligned} \tag{10.40}$$

En l'introduisant dans (10.39) on peut conclure en choisissant $\beta = 2$, $\alpha = \frac{\beta}{2} > \frac{1}{2}$ et $p = 2\beta$:

$$\begin{aligned}
E_{\overline{\mu}}\left(|v_s^\epsilon - v_r^\epsilon|^{2\beta}|v_t^\epsilon - v_s^\epsilon|^{2\beta}\right) &\leq K(s-r)^{\frac{4\beta}{8}}(t-s)^{\frac{4\beta}{8}} \\
&\leq K(t-r)^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la tension de $(v_t^\epsilon(x,.))_{t\geq 0}$. □

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Lemme technique de la partie II.

Dans ce chapitre annexe, on démontre le lemme 5.3.1 de la page 86. On reprend donc les notations et hypothèses du chapitre 4. La preuve se base essentiellement sur l'itération de l'hypothèse (e).

Lemme A.0.1. *Etant donné $N, N' \leq D$ des entiers, et f, g, f', g' des fonctions telles que l'une d'entre elles puisse s'écrire $1_A - \overline{\mu}(A)$ avec A une union d'éléments de $\xi_{-k_n}^{k_n}$, les autres étant des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques 1_B avec $B \in \xi_{-k_n}^{k_n}$, alors*

$$\sum_{0\leq i,j,k,l\leq n-1} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) = o(n^3), \quad \text{(A.1)}$$

où la majoration $o(n^3)$ est uniforme en $\|f\|_\infty$, $\|f'\|_\infty$, $\|g\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$.

Pour montrer ces résultats, on utilise le lemme intermédiaire suivant

Lemme A.0.2. *Il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $a \geq 1$,*

$$\sum_{|r|\leq a} e^{-r^2/a} \leq C_0 a^{1/2}.$$

Démonstration. Par comparaison entre l'intégrale et les séries de Riemann, pour tout $r \geq 1$,

$$e^{-r^2/a} \leq \int_{r-1}^{r} e^{-t^2/a}dt,$$

puis en sommant,

$$\frac{1}{(\pi a)^{1/2}}\sum_{1\leq|r|\leq a} e^{-r^2/a} \leq \frac{1}{(\pi a)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/a}dt.$$

On conclut en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{a^{1/2}}$. □

preuve du lemme 5.3.1. Pour démontrer le lemme, via la multilinéarité des expressions, on peut sans perte de généralité supposer que les fonctions considérer sont des fonctions caractéristiques de la forme 1_A avec A une union d'éléments de $\xi_{-k_n}^{k_n}$ et de montrer que l'expression (A.1) se décompose de la façon suivante

$$\sum_{0\leq i,j,k,l\leq n-1} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) = \sum_{0\leq i,j,k,l\leq n-1} a_{i,j,k,l}\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(f)\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(f') + o(n^3) \tag{A.2}$$

en recombinant ces termes, l'hypothèse d'une moyenne nulle fera disparaître les termes dominants.

Premier cas : $0 \leq i \leq k \leq j \leq l$

On traite en premier les termes tels que $0 \leq i \leq k \leq j \leq l$, les autres suivent le même principe à une nuance technique près. La preuve repose sur l'application itérée de l'hypothèse (e). Remarquons qu'il n'est besoin uniquement de considérer les termes $k-i$, $j-k$ et $l-k$ tels que au plus l'un d'entre eux soit inférieur à $2k_n$, les autres combinaisons arrivent trop rarement pour peser dans la somme (il y a $o(n^3)$ tels termes). Supposons d'abord que $k-i \geq 2k_n+1$, en appliquant la $\overline{T}$-invariance de $\overline{\mu}$ et l'hypothèse (e),

$$\begin{aligned}
&E_{\overline{\mu}}((f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g)\circ\overline{T}^{i}(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^{k}) \\
&= \sum_{|r|\leq\min(k-i+1,l-k+1,j-l+1)D} E_{\overline{\mu}}(1_{\{S_{k-i}=N-r\}}g(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'-r\}}f\circ\overline{T}^{j-k}1_{\{S_{j-k}=r\}})\circ\overline{T}^{k-i}) \\
&= \sum_{|r|\leq\min(k-i+1,l-k+1,j-l+1)D}\left(\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(A_r)\frac{e^{-(N-r)^2/((2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(A_r)^{1/p}}{k-i-2k_n}\right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

où $A_r := g'f'\circ\overline{T}^{l-k}(1_{\{S_{l-j}=N'-r\}}f)\circ\overline{T}^{j-k}1_{\{S_{j-k}=r\}}$. Lorsque $k-i\leq 2k_n$, l'espérance dans (A.1) est majorée par $\sum_{|r|\leq\min(k-i+1,j-k+1,l-j+1)D}\overline{\mu}(A_r)$.

Le passage de la première à la seconde ligne pour l'équation (A.3) vient de la décom-

position suivante,

$$\begin{aligned}&\overline{T}^{-i}(S_{j-i}=N)\cap\overline{T}^{-k}(S_{l-k}=N')\\&=\bigsqcup_{r\in\mathbb{Z}}\overline{T}^{-i}(\{S_{k-i}=N-r\}\cap\overline{T}^{-(k-i)}\{S_{j-k}=r\})\cap\overline{T}^{-j}\{S_{l-j}=N'-r\}).\end{aligned}$$

Comme ϕ est majoré par D,

$$\|S_n\|_\infty\leq nD$$

par conséquent $\{S_{k-i}=N-r,S_{j-k}=r,S_{l-k}=N'-r\}$ est non vide si et seulement si $N-r\leq(k-i)D$, $r\leq(j-k)D$ et $N'-r\leq(l-k)D$ ce qui signifie

$$\begin{aligned}&\overline{T}^{-i}(S_{j-i}=N)\cap\overline{T}^{-k}(S_{l-k}=N')\\&=\bigsqcup_{r\leq\min(k-i+1,l-k+1,j-k+1)D}\overline{T}^{-i}(S_{k-i}=N-r)\cap\overline{T}^{-k}(S_{j-k}=r)\cap\overline{T}^{-j}(S_{l-j}=N'-r).\end{aligned}$$

ce qui nous donne la somme en r dans (A.3).

On applique encore l'hypothèse (e) sur A_r lorsque $j-k\geq 2k_n$:

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A_r)&=\overline{\mu}\left(g'1_{\{S_{j-k}=r\}}\left(ff'\circ\overline{T}^{l-j}1_{\{S_{l-j}=N'-r\}}\right)\circ\overline{T}^{j-k}\right)\\&=\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(B_r)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(j-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-k-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{ck_n\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{j-k-2k_n}&\text{(A.4)}\\&\leq\frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{(j-k-2k_n)^{1/2}}&\text{(A.5)}\end{aligned}$$

où $B_r:=ff'\circ\overline{T}^{l-j}1_{\{S_{l-j}=N'-r\}}$. Lorsque $j-k\leq 2k_n$, $\overline{\mu}(A_r)\leq\overline{\mu}(B_r)$, et on peut appliquer à nouveau l'hypothèse (e) à B_r dès que $l-j\geq 2k_n+1$,

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(B_r)&=\frac{\overline{\mu}(f')\overline{\mu}(f)e^{-(N'-r)^2/(2\Sigma(l-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-j-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{ck_n\overline{\mu}(f)^{1/p}}{l-j-2k_n}&\text{(A.6)}\\&\leq\frac{1+ck_n}{(l-j-2k_n)^{1/2}}.&\text{(A.7)}\end{aligned}$$

Traitons en détails les indices i,j,k,l tels que exactement l'un des $k-i$, $j-k$ et $l-j$ est inférieur à $2k_n$:

Supposons $k-i \leq 2k_n$, la somme qui suit est majorée par (A.5) et (A.7) :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{i+2k_n}\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{l=j}^{n-1} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{i+2k_n}\sum_{j=k}^{n}\sum_{l=j}^{n}\overline{\mu}(A_r)$$

(A.5) implique $\overline{\mu}(A_r) \leq \frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{(j-k-2k_n)^{1/2}} \leq \frac{(1+ck_n)}{(j-k-2k_n)^{1/2}}$ lorsque $j-k \geq 2k_n+1$, et ainsi

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{i+2k_n}\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{l=j}^{n-1}\overline{\mu}(A_r) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{i+2k_n}\sum_{j=k+2k_n}^{n-1}\sum_{l=j}^{n-1}\frac{(1+ck_n)}{(j-k-2k_n)^{1/2}} + 2k_n^2n^2 = o(n^3).$$

En appliquant le même raisonnement que celui qui suit (A.3) avec $k \geq i+2k_n$, on obtient

$$E_{\overline{\mu}}((f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g)\circ\overline{T}^{i}(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^{k})$$
$$\leq 2D\min(k-i+1, l-k+1, j-l+1)\frac{(1+ck_n)}{(k-i-2k_n)^{1/2}}.$$

On dispose alors des mêmes majorations pour les sommes partielles lorsque $k-j \leq 2k_n$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i+2k_n}^{n-1}\sum_{j=k}^{k+2k_n}\sum_{l=j}^{n-1} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) = o(n^3)$$

puis lorsque $l-k \leq 2k_n$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i+2k_n}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{l=j}^{j+2k_n} E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) = o(n^3).$$

Ainsi les seuls termes restant susceptibles de ne pas être en $o(n^3)$ sont les i,j,k tels que $k-i > 2k_n$, $j-k > 2k_n$ et $l-j > 2k_n$, traitons désormais ceux là :

L'équation (A.5) pour A_r, l'équation de décorrélation (A.3) et la borne supérieure (A.7) dans le premier terme d'erreur de A_r donne le développement suivant :

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(A_r)\frac{e^{-(N-r)^2/((2\Sigma)(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(A_r)^{1/p}}{k-i-2k_n} \\
&= \overline{\mu}(g)\left(\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(B_r)\frac{e^{-r^2/((2\Sigma)(j-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-k-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{j-k-2k_n}\right)\frac{e^{-(N-r)^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}} \\
&\pm \frac{ck_n}{k-i-2k_n}\left(\frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{(j-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p} \\
&= \frac{e^{-(N-r)^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}}\overline{\mu}(g)\Big(\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(f')\overline{\mu}(f)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(j-k-2k_n))}e^{-(N'-r)^2/(2\Sigma(l-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-k-2k_n)^{1/2}(l-j-2k_n)^{1/2}} \qquad \text{(A.8)} \\
&\pm \frac{ck_n\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(f)^{1/p}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-k-2k_n)^{1/2}(l-j-2k_n)} \pm \frac{ck_n(1+ck_n)^{1/p}}{(j-k-2k_n)(l-j-2k_n)^{1/(2p)}}\Big) \\
&\pm 2\frac{ck_n}{k-i-2k_n}\left(\frac{(1+ck_n)}{(j-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p} \\
&\Big(\left(\frac{\overline{\mu}(f)\overline{\mu}(f')e^{-(N'-r)^2/(2\Sigma(l-j))}}{(l-j-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p^2} \pm \left(\frac{ck_n\overline{\mu}(f)^{1/p}}{l-j-2k_n}\right)^{1/p^2}\Big). \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

A l'exception du terme principal (A.8) qui donne le terme dominant dans (A.2), tous les autres termes sont des erreurs en $o(n^3)$ une fois sommées selon $0 \le i \le k \le j \le l \le n-1$ et $r \le D\min(k-i, j-k, l-j)$. On donne ici le développement pour le premier terme (celui avec un facteur exponentiel) dans l'équation (A.9) les autres termes pouvant être traités de la même façon :
posons $u = k-i$,$v = j-k$ et $w = l-j$, et rappelons que $p < \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{u=k_n}^{n-1}\sum_{v=k_n}^{n-1}\sum_{w=k_n}^{n-1}\sum_{r=0}^{w}\frac{k_n^4 e^{-(N-r)^2/(2p^2\Sigma w)}}{uv^{1/p}w^{1/(2p^2)}} = \qquad \text{(A.10)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{u=k_n}^{n-1}\sum_{v=k_n}^{n-1}\sum_{w=k_n}^{n-1} O\left(\frac{k_n^4 w^{1/2}}{uv^{1/p}w^{1/(2p^2)}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{u=k_n}^{n-1}\sum_{v=k_n}^{n-1}\sum_{w=k_n}^{n-1} O\left(\frac{w^{1/2}}{uv^{1/p}w^{1/(2p^2)}}\right) \\
&= O(k_n^2(\ln n)n^{3/2}n^{1-\frac{1}{2p}}n^{1-\frac{1}{2p^2}}) = o(n^3).
\end{aligned}
$$

On a aussi pour étudier (A.9),

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{u=k_n}^{n-1}\sum_{v=k_n}^{n-1}\sum_{w=k_n}^{n-1}\sum_{r=0}^{w}\frac{k_n^4}{uv^{1/(2p)}w^{1/(p^2)}}=O\left(k_n^4 n^{4-\frac{1}{2p}-\frac{1}{p^2}}ln(n)\right)=o(n^3). \tag{A.11}$$

Le terme d'erreur est bien en $o(n^3)$ ce qui conclut l'obtention de (A.2) pour $i\leq j\leq k\leq l$.

Deuxième cas : $0\leq i\leq j\leq k\leq l$

On suppose dans un premiers temps $\min(j-i,k-j,l-k)\geq 2k_n+1$, et on applique la $\overline{T}$-invariance de $\overline{\mu}$.

$$E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right) \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{|r|\leq(k-j+1)D}E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)1_{\{S_{k-j}=r\}}\circ\overline{T}^{j-i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k-i}\right)\\&=\sum_{|r|\leq(k-j+1)D}E_{\overline{\mu}}\left(1_{\{S_{j-i}=N\}}g\left(f1_{\{S_{k-j}=r\}}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k-j}\right)\circ\overline{T}^{j-i}\right).\end{aligned} \tag{A.13}$$

Comme $\|S_n\|_\infty\leq nD$, la somme se fait seulement sur les indices r tels que $r\leq(k-j+1)D$. On applique alors plusieurs fois l'hypothèse (e) comme pour le premier cas et on obtient

$$\begin{aligned}&E_{\overline{\mu}}\left(1_{\{S_{j-i}=N\}}g\left(f1_{\{S_{k-j}=r\}}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k-j}\right)\circ\overline{T}^{j-i}\right)\\&\quad=\frac{e^{-N^2/(2\Sigma(j-i-2k_n))}\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(f_{A_r})}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-i-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{k_n\overline{\mu}(f_{A_r})^{1/p}}{(j-i-2k_n)},\end{aligned}$$

avec $f_{A_r}:=f1_{\{S_{k-j}=r\}}(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^{k-j}$. Puis

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(f_{A_r})&=\overline{\mu}(f)\overline{\mu}(f_{B_r})\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-j-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{ck_n\overline{\mu}(f_{B_r})^{1/p}}{k-j-2k_n}\\&\leq\frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(f_{B_r})^{1/p}}{(k-j-2k_n)^{1/2}},\end{aligned}$$

où $f_{B_r}:=g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}$. Et enfin

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(f_{B_r}) &= \frac{\overline{\mu}(f')\overline{\mu}(g')e^{-N'^2/((2\Sigma)(l-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-k-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(f')^{1/p}}{l-k-2k_n} \\ &\leq \frac{1+ck_n}{(l-k-2k_n)^{1/2}}.\end{aligned}$$

En injectant ces majorations dans (A.12), on obtient

$$\begin{aligned}&E_{\overline{\mu}}(1_{\{S_{j-i}=N\}}g(f1_{\{S_{k-j}=r\}}(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^{k-j})\circ\overline{T}^{j-i}) \\ &=\frac{e^{-N^2/((2\Sigma(j-i-2k_n)}\overline{\mu}(g)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-i-2k_n)}\overline{\mu}(f)\left(\frac{\overline{\mu}(f')\overline{\mu}(g')e^{-N'^2/(2\Sigma((l-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-k-2k_n)^{1/2}}\right)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-j-2k_n)^{1/2}} \\ &\pm\frac{e^{-N^2/(2\Sigma(j-i-2k_n))}\overline{\mu}(g)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-i-2k_n)}\overline{\mu}(f)\frac{ck_n\overline{\mu}(f')^{1/p}}{l-k-2k_n}\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-j-2k_n)^{1/2}} \\ &\pm\frac{e^{-N^2/(2\Sigma(j-i-2k_n))}\overline{\mu}(g)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-i-2k_n)}\left(\frac{1+ck_n}{(l-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p}\frac{ck_n}{k-j-2k_n} \\ &\pm\left(\frac{1+ck_n}{(l-k-2k_n)^{1/2}}\overline{\mu}(f)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-j-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-j-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p}\frac{k_n}{(j-i-2k_n)} \\ &\pm\left(\left(\frac{1+ck_n}{(l-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p}\frac{ck_n}{k-j-2k_n}\right)^{1/p}\frac{k_n}{(j-i-2k_n)}. \qquad \text{(A.14)}\end{aligned}$$

A l'exception du premier terme qui a la forme du terme dominant souhaitée dans (A.2), les autres termes sont négligeables. En effet, si on note encore u,v et w les écarts d'indices, les termes au dessus sont tous dominés (à l'exception de (A.14) qui suit l'équation (A.11)) car sont dominés par le terme général de la série apparaissant dans l'équation (A.10) et donne donc une majoration en $o(n^3)$.

On considère désormais le cas où l'un des termes $u := j-i$, $v := k-j$ ou $w := l-k$ est plus petit que $2k_n+1$. On peut supposer sans perte de généralité que $u \geq 2k_n+1$ et $w \leq 2k_n+1$. On applique alors l'hypothèse (e) à $j-i$,

$$
\begin{aligned}
&|E_{\overline{\mu}}((f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g)\circ\overline{T}^{i}(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^{k})|\\
&\quad\leq |E_{\overline{\mu}}(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g)|\\
&\quad\leq \frac{e^{-N^2/((2\Sigma)^{1/2}j-i-2k_n)}\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(f)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-i-2k_n)^{1/2}}+\frac{k_n\overline{\mu}(f)^{1/p}}{(j-i-2k_n)}\\
&\quad\leq \frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(u-2k_n)^{1/2}}+c\frac{k_n}{(u-2k_n)}.
\end{aligned}
$$

La somme sur les indices autorisés donne encore une majoration en $o(n^3)$.

Troisième cas : $0\leq i\leq k\leq l\leq j$

On applique l'invariance par $\overline{T}$ et l'hypothèse (e) à l'expression suivante lorsque $k-i\geq 2k_n+1$,

$$
\begin{aligned}
&E_{\overline{\mu}}\left(\left(f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g\right)\circ\overline{T}^{i}\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k}\right)\\
&=\sum_{r\leq\min(k-i,l-k,j-l)D}E_{\overline{\mu}}\left(1_{\{S_{k-i}=r\}}g\right. \qquad\text{(A.15)}\\
&\left.\left(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{j-l}=N-N'-r\}}\circ\overline{T}^{l-k}f\circ\overline{T}^{j-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}\right)\circ\overline{T}^{k-i}\right)\\
&=\sum_{r\leq\min(k-i,l-k,j-l)D}\left(\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(A_r)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{ck_n\overline{\mu}(A_r)^{1/p}}{k-i-2k_n}\right) \qquad\text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

avec $A_r:=g'(f'1_{\{S_{j-l}=N-N'-r\}})\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}}f\circ\overline{T}^{j-k}$ et $c>0$ la constante de l'hypothèse (e). Pour $k-i\leq 2k_n$, notre espérance se majore directement par $\sum_{r\leq\min(k-i,l-k,j-l)D}\overline{\mu}(A_r)$. En réappliquant l'hypothèse (e) sur l'expression de A pour $l-k\geq 2k_n+1$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}(A_r)&=\overline{\mu}\left(g'1_{\{S_{l-k}=N'\}}\left(f'f\circ\overline{T}^{j-l}1_{\{S_{j-l}=N-N'-r\}}\right)\circ\overline{T}^{l-k}\right) &\text{(A.17)}\\
&=\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(B_r)\frac{e^{-N'^2/(2\Sigma(l-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-k-2k_n)^{1/2}}\pm\frac{ck_n\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{l-k-2k_n} &\text{(A.18)}\\
&\leq\frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{(l-k-2k_n)^{1/2}} &\text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

avec $B_r=f'f\circ\overline{T}^{j-l}1_{\{S_{j-l}=N-N'-r\}}$. On peut majorer directement $\overline{\mu}(A_r)$ par $\overline{\mu}(B_r)$ lorsque $l-k\leq 2k_n$. On applique encore l'hypothèse (e) sur B_r pour $l-j\geq 2k_n+1$:

$$\overline{\mu}(B_r) = \frac{\overline{\mu}(f')\overline{\mu}(f)e^{-(N-N'-r)^2/(2\Sigma(j-l-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-l-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(f)^{1/p}}{j-l-2k_n} \tag{A.20}$$

$$\leq \frac{1+ck_n}{(j-l-2k_n)^{1/2}}. \tag{A.21}$$

Comme dans le cas précédent, on est en mesure de séparer les sommes selon les valeurs respectives de $k-i$, $l-k$, $j-l$ et $2k_n+1$. Lorsque l'un des trois premiers termes est plus petit que $2k_n$, on dispose de majorations (A.19) et (A.19) semblables à celles (A.5) et (A.7) du premier cas et les sommes sur $E_{\overline{\mu}}((f\circ\overline{T}^{j-i}1_{\{S_{j-i}=N\}}g)\circ\overline{T}^i(g'f'\circ\overline{T}^{l-k}1_{\{S_{l-k}=N'\}})\circ\overline{T}^k)$ avec $k-i\leq 2k_n$, $l-k\leq 2k_n$ ou $j-l\leq 2k_n$ sont en $o(n^3)$.

Lorsque $k-i$, $l-k$, $j-l$ sont supérieurs à $2k_n+1$, on réintroduit l'écriture de A_r après décorrélation dans (A.16) puis on applique la majoration (A.21) dans le premier terme d'erreur de A_r :

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}(g)\overline{\mu}(A_r)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n\overline{\mu}(A_r)^{1/p}}{k-i-2k_n}\\
&= \overline{\mu}(g)\Bigg(\overline{\mu}(g')\overline{\mu}(B_r)\frac{e^{-N'^2/(2\Sigma(l-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-k-2k_n)^{1/2}}\\
&\pm \frac{ck_n\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{l-k-2k_n}\Bigg)\frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}} \pm \frac{ck_n}{k-i-2k_n}\left(\frac{(1+ck_n)\overline{\mu}(B_r)^{1/p}}{(l-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p}\\
&= \frac{e^{-r^2/(2\Sigma(k-i-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k-i-2k_n)^{1/2}}\overline{\mu}(g)\\
&\Bigg(\frac{e^{-(N')^2/(2\Sigma(l-k-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(l-k-2k_n)^{1/2}(j-l-2k_n)^{1/2}}e^{-(N-N'-r)^2/(2\Sigma(j-l-2k_n))}\\
&\pm \frac{c^2k_n}{(l-k-2k_n)^{1/2}(j-l-2k_n)} \pm \frac{ck_n(ck_n)^{1/p}}{(l-k-2k_n)(j-l-2k_n)^{1/(2p)}}\Bigg)\\
&\pm 2\frac{ck_n}{k-i-2k_n}\left(\frac{(1+ck_n)}{(l-k-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p}\\
&\left(\left(\frac{e^{-(N-r-N')^2/(2\Sigma(j-l-2k_n))}}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(j-l-2k_n)^{1/2}}\right)^{1/p^2} \pm \left(\frac{ck_n}{j-l-2k_n}\right)^{1/p^2}\right).
\end{aligned}$$

On somme alors pour $0\leq i\leq k\leq j\leq l$, et $r\leq D\min(k-i,j-k,l-j)$ en appliquant le lemme A.0.2 sur les termes d'erreur. Là encore, la somme sur les termes d'erreur est en $o(n^3)$.

□

Annexe B

Moments du temps local et approximation.

Dans cette annexe, nous nous intéressons à des questions de convergence en loi du processus des temps locaux discrets en 0 vers le processus d'un temps local en 0 d'un mouvement brownien, mais aussi à des questions d'identification de la loi de l'intégrale d'une fonction continue par rapport au temps local en 0 d'un mouvement brownien. La stratégie utilisée ici consiste à étudier les moments des produits des accroissements de ces processus.

B.1 Moments du temps local d'un mouvement Brownien.

Lemme B.1.1. *Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur un espace probabilisé $(\overline{M},\mathbb{P})$ vérifiant un théorème limite local au sens où il existe $\Sigma > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $k_1 < \cdots < k_N$, en fixant $k_0 = 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i}=0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i-k_{i-1}}=0)\right) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1+\epsilon_i^0(k_1,\ldots,k_N)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k_i-k_{i-1}+1)^{1/2}}, \tag{B.1}$$

avec pour $1 \le i \le N$, $|\epsilon_i^0(k_1,\ldots,k_N)| \le \epsilon(k_i-k_{i-1})$ où $\epsilon(.)$ est une application réelle telle que $\lim_{t\to\infty}\epsilon(t) = 0$ uniformément.

Alors pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, tous $n_1,\ldots,n_M \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $e_1,\ldots,e_M$ et $s_1 < \cdots < s_M$ tels que $s_i + e_i \le s_{i+1}$ et $0 < e_i$ pour tout i. En notant $N_n := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k=0\}}$ le temps local en 0 associé à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, celui-ci vérifie pour $n_1,\ldots,n_M \in$

$\mathbb{N}$ *et en posant* $N = \sum_j n_j$,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_i+e_i)\rfloor} - N_{\lfloor ns_i\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)$$
$$= \int_{s_j\le u_1^j<\cdots<u_{n_j}^j<(s_j+e_j),j=1,\ldots M} \prod_{j=1}^{M} n_j! \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(u_i^j - u_{i-1}^j)^{1/2}} du_1^j \ldots du_{n_j}^j, \tag{B.2}$$

avec la convention $u_0^j = u_{n_{j-1}}^{j-1}$ *et* $u_0^0 = 0$.

Démonstration. Sous les hypothèses du lemme, toujours avec la convention $k_0^j = k_{N_{j-1}}^{j-1}$ et $k_0^0 = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_j+e_j)\rfloor} - N_{\lfloor ns_j\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{N/2}} E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(n_j! \sum_{\lfloor ns_j\rfloor\le k_1^j<\cdots<k_{n_j}^j\le\lfloor(s_j+e_j)n\rfloor-1} \prod_{i=1}^{n_j} 1_{\{S_{k_i}=0\}}\right)\right) \tag{B.3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{N/2}} \sum_{\lfloor ns_1\rfloor\le k_1^1<\cdots<k_{n_1}^1<(s_1+e_1)n\rfloor-1} \cdots \tag{B.4}$$
$$\sum_{\lfloor ns_M\rfloor\le k_1^M<\cdots<k_{n_M}^M<\lfloor(s_M+e_M)n\rfloor-1} \left(\prod_{j=1}^{M} n_j!\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{M}\bigcap_{i=1}^{n_j}(S_{k_i-k_{i-1}}=0)\right). \tag{B.5}$$

Dans la ligne (B.3), on s'est débarrassé des sommes pour lesquelles $k_i^j = k_{i+1}^j$ qui n'ajoutent qu'un facteur $\frac{1}{n^{1/2}}$ à la somme et sont donc négligeables.

En appliquant (B.8) à (B.5) on aboutit au développement :

$$\frac{1}{n^{N/2}} \sum_{\mathbf{k}\in A_n} \prod_{j=1}^{M} n_j! \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1+\epsilon_i^j(\mathbf{k})}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k_i^j - k_{i-1}^j+1)^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{n^{N}} \sum_{\mathbf{k}\in A_n} \prod_{j=1}^{M} n_j! \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1+\epsilon_i^j(\mathbf{k})}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(\frac{k_i^j - k_{i-1}^j+1}{n})^{1/2}}$$
$$= \int_{\mathbf{u}\in E} \prod_{j=1}^{M} n_j! \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1_{\{\frac{\lfloor ns_j\rfloor}{n}\le u_i^j\le\frac{\lfloor n(s_j+e_j)\rfloor-1}{n}\}}(1+\epsilon_i^j(\lfloor n\mathbf{u}\rfloor\rfloor))}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(\frac{\lfloor nu_i^j\rfloor - \lfloor nu_{i-1}^j\rfloor+1}{n})^{1/2}} du_1^j \ldots du_{n_j}^j,$$

où $A_n := \{(k_i^j)_{j=1,\ldots,p,i=1,\ldots,n_j} : \lfloor ns_j\rfloor \le k_1^j < \cdots < k_{n_j}^j < \lfloor(s_j+e_j)n\rfloor - 1\}$ et $E := \{(u_i^j)_{j=1,\ldots,p,i=1,\ldots,n_j} : s_j \le u_1^j < \cdots < u_{n_j}^j < s_j + e_j\}$ et avec la convention $k_0^j = k_{n_{j-1}}^{j-1}$ et

$k_0^0 = 0$ et de même $u_0^j = u_{n_{j-1}}^{j-1}$ et $u_0^0 = 0$.

Le dernier terme dans l'intégrale converge presque sûrement (en les $(u_i^j)_{0\leq j\leq M, 0\leq i\leq n_j}$) vers $\prod_{i=1}^{n_j} \frac{1}{(u_i^j - u_{i-1}^j)^{1/2}}$ et est majoré par

$$\prod_{j=1}^{M} n_j! \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1_{\{\frac{\lfloor ns_j\rfloor}{n} \leq u_i^j \leq \frac{\lfloor n(s_i+e_i)\rfloor - 1}{n}\}}(1 + \epsilon(\lfloor nu_i^j\rfloor - \lfloor nu_{i-1}^j\rfloor))}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(\frac{\lfloor nu_i^j\rfloor - \lfloor nu_{i-1}^j\rfloor + 1}{n})^{1/2}} \leq C \prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j} \frac{1_{\{s_j\leq u_i\leq s_j+e_j\}}}{(u_i^j - u_{i-1}^j)^{1/2}}.$$

Le théorème de convergence dominée nous permet donc de conclure

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_i+e_i)\rfloor} - N_{\lfloor ns_i\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)\\ &= \int_{\mathbf{u}\in E}\prod_{j=1}^{M}(n_j!)\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(u_i^j - u_{i-1}^j)^{1/2}} du_1^j \dots du_{n_j}^j.\end{aligned}$$

□

Proposition B.1.2. *Soit $(L_s(a))_{s\geq 0, a\in\mathbb{R}}$ le temps local d'un mouvement brownien B de variance Σ. On fixe des réels $e_1, \dots, e_N$ et $s_1 < \dots < s_N$ tels que $s_i + e_i \leq s_{i+1}$ et $0 < e_i$ pour tout i. Pour tout $M > 0$, $n_1, \dots, n_j \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}&E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(L_{s_j+e_j} - L_{s_j}\right)^{n_j}(0)\right)\\ &= \int_{\mathbf{u}\in E}\prod_{j=1}^{M} n_j!\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(u_i^j - u_{i-1}^j)^{1/2}} du_1^j \dots du_{n_j}^j\end{aligned}$$

avec $E := \{(u_i^j)_{j=1,\dots,p, i=1,\dots,n_j} : s_j \leq u_i^j < \dots < u_{n_j}^j < s_j + e_j\}$ et avec la convention $k_0^j = k_{n_{j-1}}^{j-1}$ et la convention $u_0^j = u_{n_{j-1}}^{j-1}$ et $u_0^0 = 0$.

Démonstration. Pour démontrer la proposition, on applique le lemme B.1.1, avec la proposition 1.5.2, en choisissant $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires L^2 i.i.d de de variance Σ tel que le groupe engeendré par $\{a - b, \mathbb{P}(X_1 = a)\mathbb{P}(X_1 = b) > 0\}$ soit $\mathbb{Z}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite décrit par $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_i$.Pour une telle marche aléatoire, le processus $(\frac{1}{n^{1/2}} N_{\lfloor nt\rfloor})_{t\in[0,T]}$ issu de son temps local en 0 converge en loi au sens des distributions finies vers le temps local en 0 $(L_t(0))_{t\in[0,T]}$ du mouvement brownien de variance Σ. Remarquons que la suite $\left(\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_i+e_i)\rfloor} - N_{\lfloor ns_i\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable : en

effet, la majoration des moments d'ordre 2 donne

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_i+e_i)\rfloor}-N_{\lfloor ns_i\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{2n_j}\right)\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(\left(\frac{N_{\lfloor nT\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{2N}\right),$$

où $N:=\sum_{j=1}^{M} n_j$. Or d'après le lemme B.1.1 le terme de droite est borné, et la suite est bien uniformément intégrable. Avec la convergence des distributions finies et le lemme B.1.1 on en déduit

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(L_{s_j+e_j}-L_{s_j}\right)^{n_j}(0)\right) &= E\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_j+e_j)\rfloor}-N_{\lfloor ns_j\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{N_{\lfloor n(s_j+e_j)\rfloor}-N_{\lfloor ns_j\rfloor}}{n^{1/2}}\right)^{n_j}\right)\\
&= \int_{\mathbf{u}\in E}\prod_{j=1}^{M} n_j!\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi\Sigma')^{1/2}(u_i^j-u_{i-1}^j)^{1/2}}du_1^j\dots du_{n_j}^j.
\end{aligned}$$

□

Proposition B.1.3. *Soit $T>0$, $s\in[0,T]\to a_s$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ et $(L_s)_{s\geq 0}$ le temps local d'un mouvement brownien B de variance Σ. Pour tout $M>0$, $0=t_0<t_1<\dots<t_M\leq T$, $n_1,\dots,n_j\in\mathbb{N}$,*

$$E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_s dL_s(0)\right)^{n_j}\right)=$$
$$\frac{1}{(2\pi\Sigma)^{M/2}}\left(\prod_{j=1}^{M} n_j!\right)\int_{(s_i^j)_{1\leq j\leq M,1\leq i\leq n_j},t_{j-1}\leq s_i^j<t_j}\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\frac{a_{s_i^j}}{(s_i^j-s_{i-1}^j)^{1/2}}d(s_i^j)_{i,j}.$$

Où par convention, $s_0^j=s_{n_{j-1}}^{j-1}$ et $s_0^1=0$.

Démonstration. Via les sommes de Riemann, on peut réécrire via l'uniforme continuité de

$u \to a_u$, et le théorème de convergence dominée (L_{t_M} admet des moments de tous ordres),

$$E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_u dL_s(0)\right)^{n_j}\right) = \lim_{m\to\infty} E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=\lfloor mt_{j-1}\rfloor}^{\lfloor mt_j\rfloor-1}\int_{u=\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} a_u dL_u(0)\right)^{n_j}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{(s_i^j)_{i=1,\dots,n_j}^{j=1,\dots,p},\forall i,\lfloor mt_{j-1}\rfloor\le s_1^j\le\lfloor mt_j\rfloor-1}\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\left(a_{\frac{s_i}{m}}(L_{\frac{s_i^j+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_i^j}{m}}(0))\right)\right) \tag{B.6}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{M}(n_j!)\right)$$

$$\sum_{\lfloor mt_0\rfloor\le s_1^1<\dots<s_N^1<\lfloor mt_1\rfloor}\cdots\sum_{\lfloor mt_{M-1}\rfloor\le s_1^N<\dots<s_N^N<\lfloor mt_M\rfloor} E\left(\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{N_j} a_{\frac{s_i^j}{m}}\left(L_{\frac{s_i^j+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_i^j}{m}}(0)\right)\right). \tag{B.7}$$

Le dernier terme est obtenu par invariance de l'argument

$$\prod_{i=1}^{N}\left(a_{\frac{s_i}{m}}(L_{\frac{s_i+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_i}{m}}(0))\right) = \prod_{i=1}^{N}\left(a_{\frac{s_{\sigma(i)}}{m}}(L_{\frac{s_{\sigma(i)}+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_{\sigma(i)}}{m}}(0))\right)$$

pour toute permutation σ, et par le fait qu'on puisse négliger les indices doublons :

i.e les sommes dans dans l'équation B.6 sur les indices s_i^j tels que deux d'entre eux soient égaux. Quitte à renuméroter, on peut considérer les termes pour lesquels , $s_1 = s_2$. La somme a alors la forme suivante

$$E\left(\sum_{0\le s_1=s_2,s_3,\dots,s_N\le\lfloor mt_M\rfloor}\prod_{i=1}^{N}\left(a_{\frac{s_i}{m}}(L_{\frac{s_i+1}{m}}-L_{\frac{s_i}{m}})(0)\right)\right)$$

$$\le \|a\|_{\infty,[0,T]} E\left(L_{t_M}^{N-1}\sum_{s_1=0}^{\lfloor mt_M\rfloor}\left(L_{\frac{s_1+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_1}{m}}(0)\right)^2(0)\right)$$

$$\le \|a\|_{\infty,[0,T]} E\left(L_{t_2}^{N-1}\max_{s_1=0,\dots,\lfloor mt_M\rfloor}\left(L_{\frac{s_1+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_1}{m}}(0)\right)\right).$$

Or ce terme converge vers 0 lorsque $m \to \infty$. La proposition 1.5.4 assurant que L_{t_M} admet des moments de tous ordres, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et

négliger ces termes. Avec la proposition 1.5.4,

$$E\left(\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\left(L_{\frac{s_i^j+1}{m}}(0)-L_{\frac{s_i^j}{m}}(0)\right)\right)$$
$$=\int_{u_1^j=\frac{s_1^j}{m}}^{(\frac{s_1^j+1}{m})}\cdots\int_{u_n^j=\frac{s_n^j}{m}}^{\frac{s_n^j+1}{m}}\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}(u_i^j-u_{i-1}^j)^{1/2}}d(u_i^j)_{j=1,\dots,M,i=1,\dots,n_j}.$$

En substituant ce terme dans (B.7) on obtient les moments recherchés,

$$E\left(\prod_{j=1}^{M}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}a_u dL_s(0)\right)^{n_j}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{M}(n_j!)\right)$$
$$\sum_{\lfloor mt_0\rfloor\le s_1^1<\cdots<s_{n_1}^1\le\lfloor mt_1\rfloor}\cdots\sum_{\lfloor mt_{N-1}\rfloor\le s_1^M<\cdots<s_{n_M}^M\le\lfloor mt_N\rfloor}$$
$$\left(\int_{u_1^j=\frac{s_1^j}{m}}^{(\frac{s_1^j+1}{m})}\cdots\int_{u_{n_j}^j=\frac{s_{n_j}^j}{m}}^{\frac{s_{n_j}^j+1}{m}}\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\frac{a_{s_i^j/m}}{(2\pi)^{1/2}(u_i^j-u_{i-1}^j)^{1/2}}d(u_i^j)_{j=1,\dots,M,i=1,\dots,n_j}\right)$$
$$=\left(\prod_{j=1}^{M}\frac{n_j!}{(2\pi)^{N_j/2}}\right)$$
$$\int_{s_i^j:t_{j-1}\le s_i^j<t_j,\forall j=1,\dots,M,\forall i=1,\dots,n_j}\prod_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{n_j}\left(\frac{a_{s_i^j}}{(s_i^j-s_{i-1}^j)^{1/2}}\right)d(s_i^j)_{j=1,\dots,M,i=1,\dots,n_j},$$

où par convention, $s_0^j=s_{n_{j-1}}^{j-1}$ et $s_0^1=0$.

□

B.2 Convergence des temps locaux.

En reprenant les hypothèses du lemme B.1.1, on donne ici une condition suffisante pour être dans le bassin d'attraction du temps local $(L_t)_{t\ge0}$:

Proposition B.2.1. *Soit $(L_t)_{t\ge0}$ le temps local d'un mouvement brownien de variance Σ.*
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{Z}$ sur un espace probabilisé $(\overline{M},P)$ vérifiant un théorème limite local au sens où pour tout $k_1<\cdots<k_N$, en fixant $k_0=0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i}=0)\right)=\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{N}(S_{k_i-k_{i-1}}=0))=\prod_{i=1}^{N}\frac{1+\epsilon_i(k_1,\dots,k_N)}{(2\pi\Sigma)^{1/2}(k_i-k_{i-1}+1)^{1/2}},\tag{B.8}$$

avec pour $1 \leq i \leq N$, $|\epsilon_i(k_1, \dots, k_N)| \leq \epsilon(k_i - k_{i-1})$ *avec* $\epsilon(.)$ *une application réelle telle que* $\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0$.
Alors la famille de processus $\left(\left(\frac{1}{n^{1/2}} N_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *issue du temps local en* 0 N_n *défini par* $N_n := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{S_k=0\}}$ *converge en loi pour* J_1 *vers* $(L_t)_{t\in[0,T]}$.

Démonstration. Pour montrer la convergence des lois finies dimensionnelles, il suffit de montrer pour $t_1 < \cdots < t_M$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}$ la convergence en loi de $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^M \alpha_j N_{\lfloor nt_j \rfloor}$ vers $\sum_{j=1}^M \alpha_j N_{\lfloor nt_j \rfloor}$. On souhaite faire cela en appliquant le critère de Carleman (proposition 1.3.5) de convergence des moments, or d'après le corollaire 1.5.5, montrer la convergence des moments d'ordre N des sommes ci-dessus revient à assurer la convergence des espérances suivantes

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{N^{n/2}} \prod_{j=1}^M \left(N_{\lfloor nt_j \rfloor} - N_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor}\right)^{n_j}\right) = E\left(\prod_{j=1}^M \left(L_{t_j} - L_{t_{j-1}}\right)^{n_j}\right), \tag{B.9}$$

qui découlent du lemme B.1.1 et de la proposition B.1.2.

Pour montrer la convergence en loi dans J_1, il reste à montrer la tension de $\left(\left(\frac{1}{n^{1/2}} N_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t\in[0,T]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en vérifiant les hypothèses du théorème 1.4.7 : On souhaite montrer pour tout $K > 1$ et pour tous $t \geq s \geq 0$,

$$E\left(\left(\frac{N_{\lfloor nt \rfloor} - N_{\lfloor ns \rfloor}}{n^{1/2}}\right)^K\right) \leq C(t-s)^{K/2}.$$

$$\begin{aligned} E\left(\left(\frac{N_{\lfloor nt \rfloor} - N_{\lfloor ns \rfloor}}{n^{1/2}}\right)^K\right) &= n^{-K/2} K! \sum_{\lfloor ns \rfloor \leq k_1 < \cdots < k_K < \lfloor nt \rfloor} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^K (S_{k_i} = 0)\right) \\ &\leq C n^{-K/2} K! \sum_{\lfloor ns \rfloor \leq k_1 < \cdots < k_K < \lfloor nt \rfloor} \prod_{i=1}^K \frac{1}{(k_i - k_{i-1} + 1)^{1/2}} \\ &\leq C \frac{(\lfloor nt \rfloor + 1)^{1/2} - (\lfloor ns \rfloor)^{1/2}}{n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pour étudier le dernier terme on distingue deux cas : Si $\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor \leq 1$, le terme $\frac{N_{\lfloor nt \rfloor} - N_{\lfloor ns \rfloor}}{n^{1/2}}$ est nul.
Donc seul le cas où $\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor \geq 1$ est pertinent pour notre majoration et dans ce cas,

avec l'inégalité pour $a \leq b$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}$,

$$E\left(\left(\frac{N_{\lfloor nt \rfloor} - N_{\lfloor ns \rfloor}}{n^{1/2}}\right)^K\right) \leq C\frac{(\lfloor nt \rfloor + 1 - \lfloor ns \rfloor)^{K/2}}{n^{1/2}}$$
$$\leq C\frac{(nt - ns + 2)^{K/2}}{n^{1/2}} \leq 3^{K/2}C(t-s)^{K/2}.$$

En choisissant $K = 3$, on vérifie bien les hypothèses du théorème 1.4.7 de la page 28 avec $\beta = \frac{3}{4}$, $\alpha = 3/4$ et $F(t) = C't$ avec $C' > 0$.

□

Bibliographie

[1] J.-F. Le Gall (AUTH.), *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, 1re éd., Graduate Texts in Mathematics No 274, Springer, 2016, ISBN : 9783319310886 ; 3319310887 ; 9783319310893 ; 3319310895.

[2] J. AARONSON et M. DENKER, « Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps », in : *Stoch. Dyn.* 1.*2* (2001), p. 193-237, ISSN : 0219-4937, DOI : 10.1142/S0219493701000114, URL : https://doi.org/10.1142/S0219493701000114.

[3] D. V. ANOSOV, « Averaging in systems of ordinary differential equations with rapidly oscillating solutions », in : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 24 (1960), p. 721-742, ISSN : 0373-2436.

[4] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir ; Éditions du Globe, 1980, ISBN : 2855360455, 9782855360454.

[5] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.

[6] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures 2nd edition*, Wiley Series in Probability, Statistics : Probability et Statistics. A Wiley-Interscience Publication, 1999.

[7] R. BOWEN, « Symbolic dynamics for hyperbolic flows », in : *Amer. J. Math.* 95 (1973), p. 429-460, ISSN : 0002-9327, DOI : 10.2307/2373793, URL : https://doi.org/10.2307/2373793.

[8] L. A. BUNIMOVICH et Ya. G. SINAI, « Markov partitions for dispersed billiards », in : *Comm. Math. Phys.* 78.*2* (1980/81), p. 247-280, ISSN : 0010-3616, URL : http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908591.

[9] L. A. BUNIMOVICH et Ya. G. SINAI, « Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers », in : *Comm. Math. Phys.* 78.*4* (1980/81), p. 479-497, ISSN : 0010-3616, URL : http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908786.

[10] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai et N. I. Chernov, « Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards », in : *Uspekhi Mat. Nauk* 45.*3(273)* (1990), p. 97-134, 221, issn : 0042-1316, doi : 10.1070/RM1990v045n03ABEH002355, url : https://doi.org/10.1070/RM1990v045n03ABEH002355.

[11] J.-P. Conze, « Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications », in : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 19.*5* (1999), p. 1233-1245, issn : 0143-3857, doi : 10.1017/S0143385799141701, url : https://doi.org/10.1017/S0143385799141701.

[12] M. Demers, F. Pène et H. Zhang, « Local Limit Theorem for Randomly Deforming Billiards », in : *Communications in Mathematical Physics* 375.*3* (jan. 2020), p. 2281-2334, doi : 10.1007/s00220-019-03670-7, url : https://doi.org/10.1007%2Fs00220-019-03670-7.

[13] C. Dombry et N. Guillotin-Plantard, « A functional approach for random walks in random sceneries », in : *Electron. J. Probab.* 14 (2009), p. 1495-1512, doi : 10.1214/EJP.v14-659, url : https://doi.org/10.1214/EJP.v14-659.

[14] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, 1971.

[15] J.F. Le Gall, *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, 1re éd., Graduate Texts in Mathematics 274, Springer International Publishing, 2016, isbn : 978-3-319-31088-6,978-3-319-31089-3.

[16] B.V. Gnedenko, *The theory of probability, Translated by B.D. Seckler*, 1966.

[17] Y. Guivarc'h et J. Hardy, « Théorèmes limites pour une classe de chaines de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov », in : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 24.*1* (1988), p. 73-98, issn : 0246-0203, url : http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_1_73_0.

[18] R. Z. Has minskii, « Stochastic processes defined by differential equations with a small parameter », in : *Teor. Verojatnost. i Primenen* 11 (1966), p. 240-259, issn : 0040-361x.

[19] B Hasselblatt, « Horospheric foliations and relative pinching », in : *J. Differential Geom.* 39.*1* (1994), p. 57-63, issn : 0022-040X, url : http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214454676.

[20] H. Hennion et L. Hervé, *Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness*, Springer, Berlin, 2001.

[21] A. Korepanov I. Chevyrev P. K. Friz et I. Melbourne, « Superdiffusive limits for deterministic fast-slow dynamical systems », in : *Probab. Theory Related Fields* 178.*3-4* (2020), p. 735-770, ISSN : 0178-8051, DOI : 10.1007/s00440-020-00988-5, URL : https://doi.org/10.1007/s00440-020-00988-5.

[22] H. Kesten et F. Spitzer, « A limit theorem related to a new class of self-similar processes », in : *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 50.*1* (1979), p. 5-25, ISSN : 0044-3719, DOI : 10.1007/BF00535672, URL : https://doi.org/10.1007/BF00535672.

[23] Y. Kifer, « Limit theorems in averaging for dynamical systems », in : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 15.*6* (1995), p. 1143-1172, ISSN : 0143-3857, DOI : 10.1017/S0143385700009834, URL : https://doi.org/10.1017/S0143385700009834.

[24] R. Kubo, N. Hashitsume et M. Toda, *Statistical physics II : Nonequilibrium statistical mechanics*, 1re éd., Springer Series in Solid-State Sciences, Springer, 1985, ISBN : 3540114610,9783540114611.

[25] S. Lalley, « Statistical regularities of self-intersection counts for geodesics on negatively curved surfaces », in : *Duke Math. J.* 163.*6* (2014), p. 1191-1261, ISSN : 0012-7094, DOI : 10.1215/00127094-2649425, URL : https://doi.org/10.1215/00127094-2649425.

[26] R. Markarian N. Chernov, *Chaotic billiards*, Mathematical Surveys and Monographs 127, American Mathematical Society, 2006, ISBN : 0-8218-4096-7,9780821840962,19-1973-407-4,78-1980-247-2,261-2000-13-5,94-1999-513-5,13-1968-197-2,30-1988-219-2,91-1939-261-3,24-2004-177-1.

[27] F. Pène, « Applications des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques de type hyperbolique : ergodicité du billard dispersif dans le plan, moyennisation d'équations différentielles perturbées par un flot ergodique », thèse de doct., Université de Rennes I, 2000.

[28] F. Pène, « Applications des propriétés stochastiques du billard dispersif », in : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330.*12* (2000), p. 1103-1106, ISSN : 0764-4442, DOI : 10.1016/S0764-4442(00)00318-9, URL : https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)00318-9.

[29] F. Pène, « Rates of convergence in the CLT for two-dimensional dispersive billiards », in : *Comm. Math. Phys.* 225.*1* (2002), p. 91-119, ISSN : 0010-3616, DOI : 10.1007/s002201000573, URL : https://doi.org/10.1007/s002201000573.

[30] F. Pène, « Self-intersections of trajectories of the Lorentz process », in : *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 34.*11* (2014), p. 4781-4806, ISSN : 1078-0947, DOI : 10.3934/dcds.2014.34.4781, URL : https://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.4781.

[31] F. Pène et B. Saussol, « Back to balls in billiards », in : *Comm. Math. Phys.* 293.*3* (2010), p. 837-866, ISSN : 0010-3616, DOI : 10.1007/s00220-009-0911-4, URL : https://doi.org/10.1007/s00220-009-0911-4.

[32] F. Pène et D. Thomine, « Central limit theorems for the $\mathbb{Z}^2$-periodic Lorentz gas », in : *Israel J. Math.* 241.*2* (2021), p. 539-582, ISSN : 0021-2172, DOI : 10.1007/s11856-021-2106-4, URL : https://doi.org/10.1007/s11856-021-2106-4.

[33] F. Pène et D. Thomine, « Probabilistic potential theory and induction of dynamical systems », in : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 57.*3* (2021), p. 1736-1767, ISSN : 0246-0203, DOI : 10.1214/20-aihp1122, URL : https://doi.org/10.1214/20-aihp1122.

[34] M. Phalempin, « Limit theorems for self-intersecting trajectories in $\mathbb{Z}$-extensions », prepublication ARXIV : 2201.01980, 2022.

[35] M. Ratner, « Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds », in : *Israel J. Math.* 15 (1973), p. 92-114, ISSN : 0021-2172, DOI : 10.1007/BF02771776, URL : https://doi.org/10.1007/BF02771776.

[36] L. A. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability. 2nd ed*, Cambridge Math. Library, Cambridge Univ. Press, 2004.

[37] O. Sarig et B. Schapira, « The generic points for the horocycle flow on a class of hyperbolic surfaces with infinite genus », in : *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), Art. ID rnn 086, 37, ISSN : 1073-7928, DOI : 10.1093/imrn/rnn086, URL : https://doi.org/10.1093/imrn/rnn086.

[38] K. Schmidt, « On recurrence », in : *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 68.*1* (1984), p. 75-95, ISSN : 0044-3719, DOI : 10.1007/BF00535175, URL : https://doi.org/10.1007/BF00535175.

[39] K. Schmüdgen, *The Moment Problem*, 1st ed. 2017, Graduate texts in mathematics 277, Springer, 2017, ISBN : 978-3-319-64545-2,978-3-319-64546-9,3319645455.

[40] R. J. Serfling, « Moment inequalities for the maximum cumulative sum », in : *Ann. Math. Statist.* 41 (1970), p. 1227-1234, ISSN : 0003-4851, DOI : 10.1214/aoms/1177696898, URL : https://doi.org/10.1214/aoms/1177696898.

[41] Ja. G. Sinai, « Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards », in : *Uspehi Mat. Nauk* 25.*2 (152)* (1970), p. 141-192, ISSN : 0042-1316.

[42] A. V. Skorohod, « Limit theorems for stochastic processes », in : *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 1 (1956), p. 289-319, ISSN : 0040-361x.

[43] D. Szász et T. Varjú, « Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane », in : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 24.*1* (2004), p. 257-278, ISSN : 0143-3857, DOI : 10.1017/S0143385703000439, URL : https://doi.org/10.1017/S0143385703000439.

[44] W. Whitt, *Stochastic Process Limits*, Springer, 2002.

[45] N. Yassine, « Quantitative recurrence properties in infinite measure », thèse de doct., Université de Bretagne occidentale - Brest, 2018.

[46] L.S. Young, « Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity », in : *Ann. of Math. (2)* 147.*3* (1998), p. 585-650, ISSN : 0003-486X, DOI : 10.2307/120960, URL : https://doi.org/10.2307/120960.

[47] R. Zweimüller, « Mixing limit theorems for ergodic transformations », in : *J. Theoret. Probab.* 20.*4* (2007), p. 1059-1071, ISSN : 0894-9840, DOI : 10.1007/s10959-007-0085-y, URL : https://doi.org/10.1007/s10959-007-0085-y.

DOCTORAT BRETAGNE LOIRE MATHSTIC

Université de Bretagne Occidentale

Titre : Théorèmes Limites en mesure infinie : auto-intersections et flots perturbés moyennés

Mot clés : théorie ergodique,flots géodésiques à courbure négative, gaz de Lorentz, Z-extensions, flots perturbés, tours de Young

Résumé : Résumé : Cette thèse de doctorat porte sur les propriétés stochastiques de systèmes dynamiques en mesure infinie et plus précisément de Z-extensions au-dessus d'un système dynamique chaotique. Ce travail est motivé par l'étude du gaz de Lorentz Z-périodique (en horizon fini) et du flot géodésique sur un Z-revêtement de surface compacte de courbure strictement négative. Cette thèse comporte trois parties. La première partie générale présente le contexte et les principaux résultats obtenus, introduit les modèles considérés ainsi que différents outils et notions. La seconde partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique du nombre d'auto-intersections des trajectoires. Le résultat principal de cette partie est un théorème limite établi dans le cadre général de Z-extensions vérifiant des hypothèses naturelles, ce résultat est appliqué aux deux modèles mentionnés ci-dessus (gaz de Lorentz et flot géodésique).

Cette seconde partie contient d'autres résultats en lien avec le nombre d'auto-intersections, notamment l'étude du flipper aléatoire dans le gaz de Lorentz Z-périodique, une nouvelle approche de l'étude du nombre d'auto-intersections dans le cas de systèmes ergodiques préservant une mesure de probabilité ainsi que l'étude du nombre d'auto-intersections dans le cas d'extensions non récurrentes (notamment en dimension supérieure ou égale à 3). La troisième et dernière partie de cette thèse porte sur l'étude des solutions d'équations différentielles perturbées par une Z-extension dans les deux cas suivants : d'une part dans le cas où l'équation différentielle est donnée par une fonction intégrable (par rapport à la mesure du système dynamique) et d'autre part dans le cas où l'équation différentielle est obtenue en ajoutant à un champ de vecteur une fonction d'intégrale nulle.

Title: Limit theorems in infinite measure : self-intersections and slow-fast systems.

Keywords: ergodic theory,geodesic on negatively curved surfaces, Lorentz gas, Z-extensions, perturbed flows, Young towers

Abstract: This PhD thesis deals with the stochastic properties of dynamical systems in infinite measure and more precisely of Z-extensions over a chaotic dynamical system. This work is motivated by the study of the Z-periodic Lorentz gas (in finite horizon) and the geodesic flow on a Z-cover of a compact negatively curved surface. This thesis consists of three parts. The first general part presents the background and the main results obtained, introduces the models considered as well as different tools and notions. The second part is devoted to the study of the asymptotic behavior of the number of self-intersections of trajectories. The main result of this part is a limit theorem established in the general framework of Z-extensions verifying natural hypotheses, this result is applied to the two models mentioned above (Lorentz gas and geodesic flow). This second part contains other results related to the number of self-intersections, in particular the study of the random pinball in the Z-periodic Lorentz gas, a new approach to the study of the number of self-intersections in the case of ergodic systems preserving a probability measure as well as the study of the number of self-intersections in the case of non recurrent extensions (in particular in dimension greater than or equal to 3). The third and last part of this thesis deals with the study of the solutions of differential equations perturbed by a Z-extension in the following two cases: on the one hand in the case where the differential equation is given by an integrable function (with respect to the measure of the dynamical system) and on the other hand in the case where the differential equation is obtained by adding to a vector field a zero integral function.