



Fonctions analytiques et signaux asymptotiques pour la transformée en ondelettes

Nicolas Vacca

► To cite this version:

Nicolas Vacca. Fonctions analytiques et signaux asymptotiques pour la transformée en ondelettes. Génie civil. Université Paris-Est, 2022. Français. NNT : 2022PESC2009 . tel-03889607

HAL Id: tel-03889607

<https://theses.hal.science/tel-03889607>

Submitted on 8 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions analytiques et signaux asymptotiques pour la transformée en ondelettes

Nicolas VACCA

Thèse de doctorat

sous la direction de
Pierre ARGOUL

établissement Paris-Est Sup
école doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement
discipline Génie civil

soutenue le 29 avril 2022 devant un jury composé de

Gaël CHEVALLIER – <i>prof.</i> Univ. de Franche-Comté	Président
Claude-Henri LAMARQUE – <i>prof.</i> ENTPE, Univ. de Lyon	Rapporteur
Roger SERRA – <i>maître de conf. HDR</i> INSA Centre Val de Loire	Rapporteur
Anne-Marie DUVAL – <i>dir. de recherche</i> Univ. Côte-d’Azur	Examinatrice
Luigi GARIBALDI – <i>prof.</i> Politecnico di Torino	Examineur
Pierre ARGOUL – <i>docteur HDR</i> Univ. Gustave Eiffel	Dir. de thèse
Claude ROSPARS – <i>docteur</i> Univ. Gustave Eiffel	Invitée



Résumé

L'expression analytique d'une transformation intégrale d'un signal de longueur finie est souvent complexe à écrire. Pourtant, dans le cas d'un signal harmonique et de sa transformée de Fourier, l'extension du domaine d'intégration à $\mathbb{R}$ tout entier permet une écriture simplifiée dans le domaine de Fourier par le biais de la distribution de Dirac. L'idée de la thèse est d'examiner le cas de signaux modulés en amplitude et en phase, typiquement lorsque l'amplitude est décroissante en $+\infty$ mais que son extension à $-\infty$ n'a pas d'enveloppe bornée, et qu'alors l'existence de l'intégrale considérée n'est plus forcément assurée au sens usuel. C'est ainsi le cas de la transformation en ondelettes avec une ondelette mère de Cauchy-Paul d'une réponse transitoire d'un oscillateur linéaire, dont l'enveloppe de la fonction mère est insuffisamment décroissante à l'infini pour écraser une enveloppe exponentielle : l'intégrande de la convolution n'est pas bornée à gauche.

L'objectif de ce travail est de donner une expression analytique de telles intégrales, utiles par exemple pour identifier l'amortissement d'un système mécanique oscillant par une transformation en ondelettes de sa réponse libre.

Pour cela, nous introduisons une forme bilinéaire qui tient lieu de définition de l'intégrale, à ceci près qu'il n'est plus question de sa convergence mais d'analyticité. Nous déduisons alors la notion d'une distribution de Dirac d'argument complexe, qui est la transformée de Fourier de l'exponentielle complexe. On propose ensuite une nouvelle définition des signaux modulés en amplitude et en phase dits « asymptotiques » (par rapport à celle donnée dans l'ouvrage de Torrèsani¹) associée à un « flou » convenable qui permet de les travailler à la manière des exponentielles complexes. Nous en déduisons quelques résultats sur la recherche d'arêtes d'une transformée en ondelettes de ces signaux asymptotiques, en s'intéressant à la question de la séparation de composantes dans le cas d'une somme de tels signaux. Enfin, nous proposons une définition de l'énergie mécanique d'un système mécanique à partir des arêtes de sa réponse libre, que nous avons appliquée sur les cas réels des réponses vibratoires d'une maquette en béton armé soumise à un projectile et celles d'un mur en maçonnerie soumis à des impacts noyés dans une excitation ambiante.

1. Bruno Torrèsani. Analyse continue par ondelettes. CNRS Editions / EDP Sciences, 1995, Savoirs actuels / Série Physique, 978-2-271-05364-0.

Abstract

A closed-form expression for the integral transform of a finite length signal is often difficult to obtain. Still, for sinusoids, extending the integral over all real numbers allows for a short approximation through the Dirac distribution in the frequency domain. The topic of this work is the study of modulated signals, and specifically those that are decreasing at $+\infty$ but whose extension is non finite at $-\infty$, which may lead to a non existing extended integral in the usual sense. That is particularly explicit with the wavelet transform of a linearly damped harmonic signal using a Cauchy wavelet, whose decay is insufficient to counteract the exponential growth : the integrand is unbounded at $-\infty$.

This work is to give analytic expressions to such integrals, which may come up as part of damping identification of a mechanical oscillating system through the wavelet transform of its free decay response.

To this aim, we introduce a bilinear form that will serve as the definition of the integral, yet with no reference to its absolute convergence, which is replaced by an analyticity condition. From that we deduce the notion of a Dirac distribution of complex argument, which is the Fourier transform of the complex frequency exponential. We then give a new definition of modulated signals called "asymptotic" (as compared to Torr sani's²) together with a suitable "blur" that transfers to them some characteristics of complex frequency exponentials. We infer some results about the ridges of the wavelet transform of those asymptotic signals, including the extraction of individual components from a sum of such signals. We end this work with an attempt to define the mechanical energy of a system through the ridges of its free decay response, which was put into practice on real experimental data.

2. Bruno Torr sani. Analyse continue par ondelettes. CNRS Editions / EDP Sciences, 1995, Savoirs actuels / Série Physique, 978-2-271-05364-0.

Table des matières

Introduction	4
Notations, conventions	9
1 Forme bilinéaire	11
1.1 Axiomes	12
1.2 Propriétés	12
1.3 Fonctions analytiques	14
1.3.1 Prolongement analytique	15
1.3.2 Le développement en série	20
1.4 Lien avec l'intégrale	22
1.4.1 Transformation de Fourier	22
1.4.2 Intégrale	23
1.4.3 Retour à la forme bilinéaire	24
1.4.4 Notions usuelles	24
1.5 Transformée en ondelettes d'une exponentielle complexe	27
2 L'épaisseur du trait	29
2.1 Distances relatives	30
2.1.1 Distance logarithmique	30
2.1.2 Erreur relative	30
2.2 Du presque au même	31
2.3 Opérer sur un ensemble flou	31
2.3.1 L'intégrale et sa continuité	32
2.4 Flou de modulation et flou de convolution	33
3 Signaux asymptotiques	34
3.1 Définition	35
3.2 Propriété intégrale	36
3.3 Propriétés locales	37
3.3.1 Harmonicité locale ou le premier ordre	38

3.3.2	Flou temporel ou l'ordre zéro	38
3.3.3	La gaussienne ou le second ordre	39
3.3.4	Rayon de convergence	40
3.4	Support de la transformée de Fourier d'un signal asymptotique	42
3.5	Stabilité par multiplication	45
3.6	Somme mélangée	46
4	Transformation en ondelettes	50
4.1	Définition	51
4.2	Transformation en ondelettes et signaux asymptotiques	52
4.2.1	Approche sérielle exacte	53
4.2.2	Approche floue au second ordre	54
4.2.3	Approche floue au premier ordre	55
4.3	Ondelette mère progressive et signaux réels	55
4.4	Ondelettes de Cauchy	56
4.4.1	Ondelettes de Morse	56
4.4.2	Ondelettes de Cauchy	59
4.4.3	Approche au premier ordre	61
4.4.4	Approche au second ordre	62
4.4.5	Approche sérielle	62
4.4.6	Arête d'un signal asymptotique	63
4.4.6.1	Signal modulé en fréquence	65
4.4.6.2	Signal modulé en amortissement	66
4.4.6.3	Perturbation de l'amortissement évalué	67
4.4.7	Mélange séparé	67
5	Énergie d'un système oscillant inconnu	79
5.1	Attribution d'une énergie	80
5.2	Variation	81
6	Mise en pratique	83
6.1	Sur une maquette en béton armé	83
6.2	Sur un mur de briques	94
	Conclusion	120
A	Autour du produit « de Fourier »	127
A.1	Formalisme	127
A.2	Prolongement analytique	128
A.2.1	Fonctions élémentaires	128
A.2.2	Intégrale	130

A.3	Signal progressif et mouvement à force centrale	131
B	Annexe calculatoire	134
B.1	Proximité entre signaux	134
B.1.1	Distance relative et erreur relative	134
B.1.2	Exponentielle	135
B.2	Signaux asymptotiques	135
B.2.1	Erreur au premier ordre	135
B.2.2	Erreur au second ordre	137
B.2.3	Inégalités hyperboliques	138
B.2.4	Paramètre asymptotique d'une somme	139
B.3	Ondelettes	140
B.3.1	Approximations de Q	140
	Bibliographie	143

Introduction

A l'origine de ce travail, il y a presque un an et demi passé à extraire des arêtes ou *ridges* de mesures expérimentales d'accélération, vitesse ou déplacement, pour en déduire des caractéristiques modales : fréquence propre, amortissement modal et déformée modale. Cette méthode, datant maintenant d'une vingtaine d'années, se fonde sur la transformation en ondelettes continue à une dimension, qui est essentiellement la collection des réponses d'un ensemble de filtres à un même signal temporel d'entrée ; les filtres ont la particularité d'être liés entre eux par un facteur d'échelle.

La recherche d'arêtes (par l'amplitude) correspond à l'identification, à chaque instant, du ou des filtres ayant la plus forte réponse ; c'est essentiellement une recherche de maxima locaux. Tout filtre est associé à sa fréquence de réponse maximale, dite fréquence « pic », et si le filtre de fréquence pic f répond le plus fortement à un instant t , c'est que le signal d'entrée contient principalement cette même fréquence autour de cet instant. Quand on agrège ces informations sur l'ensemble du domaine temporel, on obtient une courbe $t \mapsto f(t)$ qui donne une notion de fréquence instantanée du signal. Il peut y avoir plus d'un maximum local pour un instant donné, donc plusieurs arêtes, et le signal contient alors plusieurs composantes de fréquences distinctes. Comme chaque point de l'arête correspond à la réponse maximale d'un filtre, on peut supposer que la réponse y est égale au produit de la valeur du pic par la valeur de la composante. Chaque composante peut ainsi être récupérée à partir de son arête, en agrégeant les valeurs le long de l'arête dont on retire le facteur pic. C'est le cas idéal, mais il y a en pratique des biais d'autant plus importants que l'amplitude ou la fréquence d'une composante varient rapidement – il y a un effet de moyenne inhérent au filtrage. Quand il y a plus d'une composante, il faut aussi s'assurer que les filtres les séparent convenablement, si cela est possible.

Mathématiquement, on exprime usuellement chacun des filtrages par une convolution dans le domaine temporel – donc une intégrale – ou bien par la transformée de Fourier inverse d'un produit dans le domaine fréquentiel – toujours une intégrale ; il est normal alors de lire régulièrement que la

condition d'existence de la transformée en ondelettes est celle-là même qui assure la convergence de l'une ou l'autre des deux intégrales, temporelle ou fréquentielle. Un choix courant est de travailler avec les fonctions (signal d'entrée et ondelette) de carré intégrable (L^2), qui garantit l'existence des deux intégrales simultanément.

La question exponentielle La fonction exponentielle est omniprésente dans l'analyse modale et pourtant, quand le signal d'entrée est une exponentielle non-amortie – oscillante et d'amplitude constante –, le choix de travailler dans L^2 est mis en défaut ; il faut alors recourir à la distribution de Dirac ou travailler avec une ondelette intégrable (L^1). Le cas de l'exponentielle amortie – oscillante et d'amplitude variable – est moins immédiat puisque qu'elle n'est 1) dans aucun espace L^p des fonctions bornées ou de puissance p intégrable 2) pas dans l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide 3) pas dans l'espace des distributions tempérées³. Toutes les approches de la transformation de Fourier sur ces espaces se fondent sur l'intégrabilité d'un certain produit, qui reste introuvable en l'état ; préciser qu'un signal d'entrée de mesure physique est forcément de longueur finie donc intégrable n'est d'aucune aide à l'évaluation littérale de sa transformée. La première ambition de ce travail a été de proposer un moyen d'évaluer la transformée en ondelettes d'une exponentielle amortie par le biais de sa transformée de Fourier, qui restait alors à définir. On a pu d'abord imaginer remplacer l'espace de Schwartz par les fonctions gaussiennes, dont le dual contient l'exponentielle amortie car leur produit est intégrable, puis travailler sur les distributions associées. Ce n'est pas l'approche finalement retenue, on propose plutôt de se débarrasser de la condition de convergence absolue de l'intégrale en introduisant axiomatiquement une forme bilinéaire qui tiendra lieu d'intégrale. C'est l'objet du chapitre 1.

Forme mixte La transformée en ondelettes sous sa forme intégrale ne permet de travailler que dans le domaine temporel – la convolution – ou dans le domaine fréquentiel – la transformée de Fourier inverse – mais jamais les deux simultanément, alors même que l'on travaille précisément sur une représentation mixte temps-fréquence. Cette faiblesse est particulièrement

3. La fonction $t \mapsto e^t$ n'est évidemment pas à « décroissance rapide », donc pas une fonction de Schwartz. On se convainc qu'elle n'est pas non plus une distribution tempérée en considérant par exemple la fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t^2+1}/2}$ qui est bien dans l'espace de Schwartz : l'intégrale de son produit avec la fonction exponentielle n'est clairement pas finie, donc la fonction exponentielle n'appartient pas au dual de l'espace de Schwartz, que sont les distributions tempérées.

visible dans l'expression littérale de la transformée en ondelettes d'une exponentielle (disons non amortie) : c'est le produit du signal, qui relève du domaine temporel, et de la transformée de Fourier de l'ondelette, qui relève du domaine fréquentiel. On est incapable de manipuler conjointement ces deux objets avec l'une ou l'autre des formes intégrales de la transformée en ondelettes, sauf à utiliser une intégrale double. Le second objectif de ce travail est d'introduire un formalisme qui mette en évidence le caractère mixte de la transformée en ondelettes. La forme bilinéaire qu'on propose répond aussi à ce besoin, et facilite du même coup les manipulations de ces objets. On utilisera également quelques notations qui s'accordent relativement bien avec ce formalisme.

Intégrales proches de signaux proches Les signaux sur lesquels on travaille sont rarement des « vraies » exponentielles, et il est souvent nécessaire d'approcher la transformée en ondelettes en modulant légèrement le signal d'entrée. L'usage est de contrôler l'erreur due à la modulation en bornant la différence entre l'intégrale initiale et l'intégrale modifiée, mais comme on s'est affranchi de la convergence absolue de l'intégrale, on ne peut pas utiliser significativement une relation comme $|\int u| \leq \int |u|$, qui ne dit rien quand $\int |u| = +\infty$. On propose de recourir à une hypothèse formelle, qui dit en substance que la proximité de deux signaux, au sens d'une modulation légère, implique la proximité de leurs intégrales respectives. Cette hypothèse n'est pas réfutable dans le cas de signaux non absolument intégrables, et c'est ce qui la rend acceptable. C'est l'objet du chapitre 2.

Les signaux asymptotiques Les deux premiers chapitres ouvrent la voix à leur usage pratique sur un ensemble de signaux dits asymptotiques : ce sont les signaux proches d'une exponentielle au sens où leur fréquence, à défaut d'être constante, varie relativement peu sur un intervalle de l'ordre de la période associée. On verra qu'ils ont quelques propriétés remarquables et on donnera en particulier un sens au support de la transformée de Fourier d'un signal asymptotique, à partir duquel on pourra définir une notion de signal asymptotique progressif, utile quand on travaille avec des ondelettes progressives. On étudiera aussi les conditions sous lesquelles la somme de deux signaux est asymptotique, c'est-à-dire lorsque une somme peut être vue comme une unique composante. C'est l'objet du chapitre 3.

L'identification d'arêtes Une fois tout ceci établi, on s'est enfin intéressé à la transformée en ondelette d'un signal asymptotique. Il faut un travail d'approximations successives pour en obtenir une évaluation littérale com-

mode à un traitement par recherche d'arêtes. En retenant l'ondelette de Cauchy, on mettra par exemple en évidence le décalage temporel de la fréquence de l'arête d'un signal asymptotique, selon le signe de l'amortissement. On étudiera la séparation de signaux, c'est-à-dire de la possibilité d'identifier une unique composante parmi une somme de composantes. C'est l'objet du chapitre 4.

Presque sans modèle Dans l'analyse par arêtes de réponses vibratoires, il y a toujours une étape d'interprétation physique des composantes identifiées. On dispose rarement d'un modèle a priori du système que l'on étudie, et l'existence d'une composante identifiable dans une réponse ne dit rien de plus que sa seule existence. On a voulu obtenir un moyen d'interprétation fondé sur un nombre minimale d'hypothèses. En élargissant ce qui s'applique au cas linéaire, on propose de considérer que chaque arête correspond à une composante localement harmonique, qui est associée à un composant (un sous-système) lui-même localement harmonique (un mode local ou instantané, en quelque sorte). On en a déduit une notion d'énergie massique, composant par composant, puisqu'on s'attachait à caractériser la dissipation d'énergie à partir de mesures expérimentales. C'est l'objet du chapitre 5.

Applications réelles On a utilisé cette approche pour l'étude d'un mode dans un article de conférence, à partir de mesures expérimentales. On a essayé en particulier d'identifier un mécanisme physique de dissipation sous-jacent par un tracé de courbes de type fréquence en fonction de l'amplitude ou amortissement en fonction de l'amplitude. On présente aussi un second article d'application. C'est l'objet du chapitre 6.

**

La transformation en ondelettes n'est pas véritablement le sujet de ce travail, elle en est plutôt un point de départ et d'arrivée, et c'est en particulier l'extraction d'arêtes qui a déterminé le cheminement. Chronologiquement, la première étape de la réflexion a certainement été l'établissement d'une forme littérale de la transformée en ondelettes d'une exponentielle amortie. C'est un résultat qui était pratique – c'est le signal de référence quand on étudie la dissipation d'énergie d'un système laissé en vibrations libres – mais aussi moteur car il n'était plus question de convergence absolue de l'intégrale. La seconde étape a été de remarquer qu'un signal de fréquence lentement variable est presque d'intégrale nulle, et tout a ensuite été fait pour que le cadre proposé mène à considérer qu'il est effectivement d'intégrale nulle.

Pour ce qui a trait à l'énergie, on a en quelque sorte consacré l'usage, à savoir associer localement une composante à un mode harmonique.

Notations, conventions

- La puce $\bullet$ remplace l'usage d'une variable muette. On a ainsi

$$u(\bullet) \stackrel{\text{def.}}{=} \chi \mapsto u(\chi)$$

et évidemment $u(\bullet) = u$. Cette notation est utile quand on connaît l'expression littérale d'une fonction anonyme, ou pour exprimer des transformations et assignations. Voici trois exemples d'utilisation :

$$\bullet^n e^{2i\pi b \bullet} \stackrel{\text{def.}}{=} \chi \mapsto \chi^n e^{2i\pi b \chi} \quad (\text{fonction anonyme})$$

$$u(a \bullet + b) \stackrel{\text{def.}}{=} \chi \mapsto u(a\chi + b) \quad (\text{transformation de } u)$$

$$v = (2i\pi \bullet)u(a \bullet) \Leftrightarrow v : \chi \mapsto (2i\pi \chi)u(a\chi) \quad (\text{assignation de } v)$$

C'est une variable indéterminée (on ne peut pas lui attribuer de valeur, contrairement à χ), universelle (on utilise toujours celle-ci) et implicite (on peut l'omettre si elle n'est pas nécessaire). On peut l'assimiler à la fonction identité.

- L'intégrale $\int u$ s'entend comme intégrale sur les réels en fonction de la variable implicite $\bullet$:

$$\int u = \int u(t) dt$$

- La transformée de Fourier de la fonction u , notée $\mathcal{F}[u] = \bar{u}$, est donnée par

$$\bar{u}(\xi) = \int u \cdot e^{-2i\pi \xi \bullet}$$

quand cette intégrale est bien définie. On peut placer la barre horizontale en haut $\bar{u}$ ou en bas $\underline{u}$. Itérée deux fois, on obtient le retournement $\bar{\bar{u}} = u(-\bullet)$. La transformée inverse de u est $\mathcal{F}^{-1}[u] = \underline{\underline{u}}$.

- La transformée en ondelettes $T_\psi[u](b, a)$ d'ondelette mère ψ , de translation b et d'échelle a d'un signal u est donnée par

$$T_\psi[u](b, a) = \int \bar{\psi}(a \bullet) \cdot \bar{u} \cdot e^{2i\pi b \bullet}$$

quand cette intégrale est bien définie.

- $\Re[\cdot]$ et $\Im[\cdot]$ désignent respectivement les opérateurs partie réelle et partie imaginaire.
- La fonction de Heaviside est notée H . Elle est nulle sur les réels négatifs, et vaut 1 sur les réels positifs.
- On utilise « fréquence » et « pulsation » indifféremment ; idem pour la période et sa contrepartie cyclique. Le contexte et la notation précisent le sens.
- Un signal qui ne contient pas de fréquences négatives est dit progressif. Le qualificatif « analytique » est réservé aux objets localement développables en série entière.

§ 1

Forme bilinéaire

Les fonctions les plus facilement manipulables en travaillant avec la transformée en ondelettes ne sont pas celles qui sont sous le signe « intégrale ». Si u est harmonique de fréquence f – signal fondamental – sa transformée d'ondelette ψ au point (b, a) est $u(b)\overline{\psi}(af)$: elle met en jeu le signal lui-même et la transformée de Fourier de l'ondelette. Il n'est pas possible en l'état de manipuler ces deux objets simultanément. On propose de définir un produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ qui correspond à l'intégrale d'un produit, après transformation de Fourier de l'un des termes

$$\langle u | v \rangle \longleftrightarrow \int u \overline{v}$$

On fera donc correspondre la transformée de u d'ondelette ψ en (b, a) avec le produit

$$T_\psi[u](b, a) \longleftrightarrow \langle \overline{\psi}(a\bullet) | u(\bullet + b) \rangle$$

La transformation est bien exprimée sous une forme qui met explicitement en jeu les deux objets qui nous sont directement utiles. Cette correspondance souhaitée avec l'intégrale nous indique des axiomes de définition des crochets, qui seront la « transposition » de certaines propriétés du produit sous sa forme intégrale. Cette approche permettra d'établir le support et l'action d'une distribution de Dirac d'argument complexe, ainsi que les limites de certaines fonctions dont on se servira par la suite.

On n'a trouvé qu'une occurrence d'une définition similaire du Dirac d'argument complexe dans BREWSTER et FRANSON [2018] par des intégrales de contour.

1.1 Axiomes

On va définir un produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de deux fonctions des réels. Il vérifie les quatre axiomes qui suivent :

Symétrie Pour deux fonctions u et v

$$\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$$

(Bi)linéarité Pour un nombre fini de constantes λ_k et de fonctions u_k , on aura

$$\left\langle \sum_k \lambda_k u_k \middle| v \right\rangle = \sum_k \lambda_k \langle u_k | v \rangle$$

On a explicité la linéarité à gauche, la symétrie assure la linéarité à droite et donc la bilinéarité du produit.

Continuité Pour une suite de fonctions u_ξ et une limite $\lim_\xi$, on aura

$$\left\langle \lim_\xi u_\xi \middle| v \right\rangle = \lim_\xi \langle u_\xi | v \rangle$$

La symétrie assure la continuité des deux côtés.

Évaluation Pour une fonction u continue en x , sa valeur en x est bien définie et on aura

$$\left\langle e^{2i\pi x \bullet} \middle| u \right\rangle = u(x)$$

Il ne peut y avoir de contradiction entre les axiomes. Les trois premières relations forment un bloc cohérent, mais l'évaluation du produit est d'une autre nature et nécessite une précaution pour ne pas entrer en conflit avec les précédentes : l'exponentielle n'est pas une somme de puissances, c'est une exponentielle seulement algébrique. Elle ne peut pas être développée en série, et aucune fonction entière n'est identifiée à son développement en série.

1.2 Propriétés

Dérivation Pour une fonction u à dérivée continue en x , il est possible d'évaluer sa dérivée en ce point, notée $\partial u(x)$. On a

$$\begin{aligned} \partial u(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x+d) - u(x)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d} \left\langle e^{2i\pi(x+d)\bullet} - e^{2i\pi x \bullet} \middle| u \right\rangle \end{aligned}$$

La continuité permet de considérer la limite du membre de gauche du produit directement. On pose

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{e^{2i\pi(x+d)\bullet} - e^{2i\pi x\bullet}}{d} = (2i\pi\bullet)e^{2i\pi x\bullet}$$

qui est la relation usuelle de dérivation de l'exponentielle, et on aboutit à l'évaluation

$$\langle (2i\pi\bullet)e^{2i\pi x\bullet} | u \rangle = \partial u(x)$$

Adjointes élémentaires On peut définir des adjointes. En particulier, il y a une correspondance entre l'exponentielle et la translation puisque, pour une fonction u continue en $x + y$

$$\begin{aligned} \langle e^{2i\pi(x+y)\bullet} | u \rangle &= u(x + y) \\ &= \langle e^{2i\pi x\bullet} | u(\bullet + y) \rangle \end{aligned}$$

L'adjoint de l'exponentielle est la translation, elle commute avec elle-même et on a bien la relation algébrique usuelle

$$e^{2i\pi x\bullet} e^{2i\pi y\bullet} = e^{2i\pi(x+y)\bullet} = e^{2i\pi y\bullet} e^{2i\pi x\bullet}$$

De même, on note

$$\partial u = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(\bullet + d) - u(\bullet)}{d}$$

et l'adjoint de $(2i\pi\bullet)$ est alors la dérivation ∂ puisque pour une fonction à dérivée continue en x on a

$$\begin{aligned} \langle (2i\pi\bullet)e^{2i\pi x\bullet} | u \rangle &= \partial u(x) \\ &= \langle e^{2i\pi x\bullet} | \partial u \rangle \end{aligned}$$

Pour une fonction u qui est $k + l$ fois continûment dérivable en x , on aura par itérations

$$\begin{aligned} \langle (2i\pi\bullet)^{k+l} e^{2i\pi x\bullet} | u \rangle &= \partial^{k+l} u(x) \\ &= \langle (2i\pi\bullet)^k e^{2i\pi x\bullet} | \partial^l u \rangle \end{aligned}$$

et on a bien la relation usuelle de multiplication des monômes

$$(2i\pi\bullet)^k (2i\pi\bullet)^l = (2i\pi\bullet)^{k+l} = (2i\pi\bullet)^l (2i\pi\bullet)^k$$

Le passage à l'adjoint par substitution de ∂ à $(2i\pi\bullet)$ nous invite à faire de même avec l'exponentielle. On pourra signifier la translation par $e^{x\partial}$, de sorte que

$$e^{x\partial}u = u(\bullet + x)$$

avec toujours la même précaution sur l'exponentielle, qui n'est pas une somme de puissances. Dérivations et translations commutent, au même titre que les polynômes commutent avec les exponentielles.

Supports adjoints On appelle support adjoint de u la partie des réels telle que $\langle u|v \rangle$ est nécessairement et entièrement déterminé par u et la valeur de v sur cette même partie. Si une fonction u est continue en x , alors le produit $\langle e^{2i\pi x\bullet} | u \rangle$ ne dépend que de la valeur de la fonction sur ce point. Le support adjoint de l'exponentielle est donc réduit au point x quand la fonction y est continue. Le support adjoint d'un polynôme est réduit au support adjoint de l'exponentielle dont il est facteur, car les dérivées ne dépendent que de la valeur de la fonction dans le voisinage infinitésimal de ce point.

1.3 Fonctions analytiques

Ce que l'on sait nous permet d'évaluer le produit entre une fonction u infiniment dérivable en un point x et un polynôme facteur d'une exponentielle

$$\left\langle \sum_k \lambda_k (2i\pi\bullet)^k e^{2i\pi x\bullet} \middle| u \right\rangle = \sum_k \lambda_k \partial^k u(x)$$

où la somme est finie. L'évaluation du produit est la combinaison linéaire de dérivées évaluées au point x . Il est possible de considérer plusieurs points d'évaluation en rajoutant des polynômes facteurs d'autres exponentielles. Le cas de sommes infinies est immédiat, car le produit est continu. En revanche, on rappelle que l'exponentielle n'est pas égale à sa série entière et qu'il en est de même pour toutes les fonctions hors polynômes.

Pour faire le lien avec le développement en série, on va considérer un ensemble plus restreint que les fonctions infiniment dérivables : les fonctions analytiques. Le prolongement analytique y est possible et fait apparaître le développement en série. On donnera des conditions suffisantes pour le développement en série d'une fonction dans le cadre du produit.

1.3.1 Prolongement analytique

Si une fonction u est développable en série entière autour de 0 avec un rayon¹ supérieur à $|x|$, alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_k \frac{x^k}{k!} \partial^k u(0) \\ &= u(\oplus x) \end{aligned}$$

On a introduit le symbole $\oplus x$ du saut analytique d'argument x . Le $\oplus$ signifie alors que la fonction est réduite à sa série entière autour de 0. Le symbole $u(x \oplus y)$ s'entend comme le saut d'argument y à partir de la série entière de u autour de x . Avec ce symbole, on peut introduire l'exponentielle analytique $e^{\oplus \cdots}$ qui est égale à sa série entière en 0. Par exemple, l'opérateur $e^{\oplus x \partial} = \sum_k x^k \partial^k / k!$ correspond à l'opérateur de saut analytique d'argument x

$$e^{\oplus x \partial} u = u(\bullet \oplus x)$$

et son adjoint $e^{\oplus 2i\pi x \bullet}$ se trouve par substitution de $2i\pi \bullet$ à ∂ .

Si le rayon du développement de u en 0 est supérieur à $|x|$, on pourra écrire

$$\langle e^{2i\pi x \bullet} | u \rangle = \langle e^{\oplus 2i\pi x \bullet} | u \rangle$$

L'exponentielle $e^{2i\pi x \bullet}$ agit comme sa série entière $e^{\oplus 2i\pi x \bullet}$ si elle évalue une fonction analytique de rayon supérieur à $|x|$ autour de 0. L'exponentielle est en quelque sorte développable en série si la fonction qu'elle évalue l'est aussi.

Dans un cas plus général, pour une fonction analytique entre 0 et x , il n'est pas forcément possible de sauter de 0 à x en une seule fois si le rayon est insuffisant. L'existence du chemin analytique nous indique simplement que le rayon du développement est non nul pour tous les points entre 0 et x inclus. Il suffit de parcourir le chemin en faisant plusieurs sauts analytiques, suffisamment petits pour être inférieurs aux rayons des points de départ. Pour u analytique entre 0 et x , on aura donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} u\left(k \left(\oplus \frac{x}{k}\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(e^{\oplus \frac{x}{k} \partial}\right)^k u(0) \end{aligned}$$

1. On parle du rayon de convergence-coïncidence du développement en série, et donc du rayon sur lequel la série coïncide avec la fonction. Il n'est pas forcément égal au rayon de convergence de la série isolée, qui peut être plus grand.

On découpe le chemin en k sauts successifs de plus en plus nombreux et de longueur $\frac{x}{k}$ de plus en plus petite, jusqu'à ce que chaque saut soit valide – pour s'en assurer, on prend la limite $k \rightarrow +\infty$. Ceci définit l'opérateur de prolongement analytique d'argument réel. Il se rapproche de la translation car la composition de deux prolongements de même direction et même sens vaut prolongement de la somme des arguments.

Le prolongement réel a la même évaluation que la translation quand il est défini. Il est redondant, mais il permet de définir naturellement le prolongement imaginaire associé à la translation imaginaire lorsque la fonction est analytique, en remplaçant x par ix . On découpe le chemin en k sauts de longueur $\frac{ix}{k}$ puis on prend la limite quand $k \rightarrow +\infty$. Le procédé est simple, mais il y a une subtilité sur le support du prolongement.

Support du prolongement On se donne une fonction u et un réel x . La fonction u en x/k est issue d'un saut depuis 0 si u y est analytique de rayon $> |x/k|$; la fonction u en $2x/k$ est issue d'un saut depuis x/k si u y est aussi analytique de rayon $> |x/k|$; etc. Voir figure 1.1. La limite quand $k \rightarrow +\infty$ réduit le rayon des disques à 0. Quand il est d'argument réel x , le support du prolongement est donc réduit au chemin réel $0 \rightarrow x$ le long duquel la fonction doit être analytique. Voir figure 1.2.

La fonction u en ix/k est issue d'un saut depuis 0 si u y est analytique de rayon $> |x/k|$; la fonction u en $2ix/k$ est issue d'un saut depuis ix/k si u y est analytique de rayon $> |x/k|$, ce qui nécessite au moins que la fonction soit analytique entre $ix/k - x/k$ et $ix/k + x/k$; pour que ces points soient eux-même analytiques, il faut qu'ils soient issus d'un prolongement imaginaire, et donc que la fonction soit analytique entre $-x/k$ et $+x/k$, de rayon toujours $> |x/k|$; etc. Voir figure 1.3. La limite quand $k \rightarrow +\infty$ réduit le rayon des disques à 0. Quand il est d'argument imaginaire ix , le support du prolongement est un triangle dans le plan complexe, de sommets $-x$, x et ix , dans lequel la fonction doit être analytique. Voir figure 1.4.

Du prolongement à la translation L'opérateur de prolongement imaginaire ne respecte que partiellement la propriété algébrique de l'exponentielle. La forme pyramidale du support ne permet pas de définir un inverse systématique sous la forme d'un prolongement. Voir figure 1.5. On impose donc que les fonctions, une fois donnée sur $\mathbb{R}$, sont toutes étendues par prolongement aussi loin que possible dans $\mathbb{C}$, et qu'écrire $u(\bullet + ix)$ c'est faire une translation de cette fonction étendue. Voir figure 1.6.

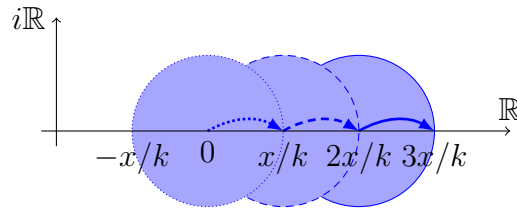


FIGURE 1.1 – Trois sauts analytiques réels successifs et support analytique associé

Les trois flèches bleues correspondent à trois sauts d'argument x/k et le domaine bleu clair est le support analytique de ces trois opérations successives. Chaque saut horizontal s'accompagne d'un élargissement d'autant du support. On effectue k sauts au total jusqu'à atteindre x .



FIGURE 1.2 – Prolongement analytique réel et support analytique associé

On a pris la limite quand $k \rightarrow +\infty$ du support analytique précédent. La flèche bleue correspond au prolongement analytique de 0 à x , son support analytique est confondu avec la flèche.

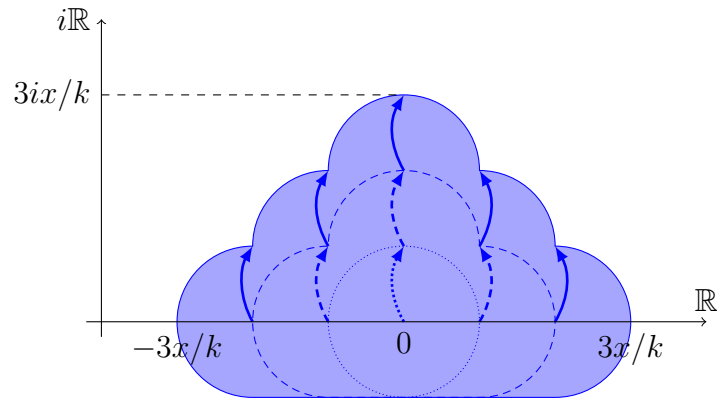


FIGURE 1.3 – Trois sauts analytiques imaginaires successifs et support analytique associé

Les flèches bleues correspondent à des sauts d'argument ix/k et le domaine bleu clair est le support analytique de toutes ces opérations. Chaque saut vertical depuis un étage s'accompagne d'un élargissement horizontal d'autant des deux côtés des étages inférieurs ; on voit apparaître une forme pyramidale. On effectue k sauts verticaux jusqu'à atteindre ix .

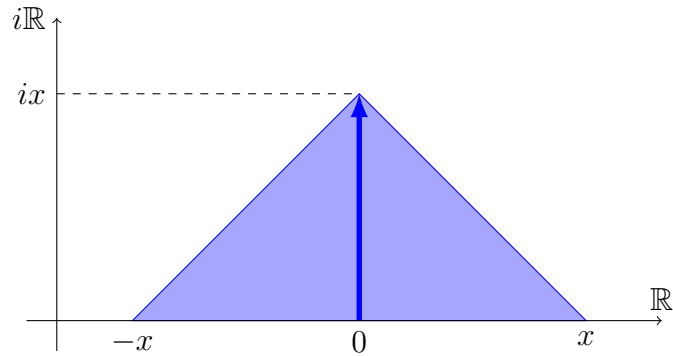


FIGURE 1.4 – Prolongement analytique imaginaire et support analytique associé

On a pris la limite quand $k \rightarrow +\infty$ du support analytique précédent. La flèche bleue correspond au prolongement analytique de 0 à ix et son support analytique en bleu clair est un triangle.

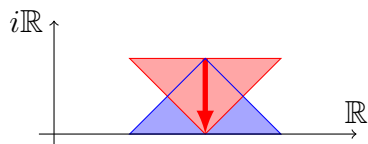


FIGURE 1.5 – Prolongement imaginaire et prolongement inverse
Le support rouge du prolongement inverse déborde du support bleu du prolongement direct lorsqu'il est appliqué juste après. Il n'est donc pas assuré d'exister.

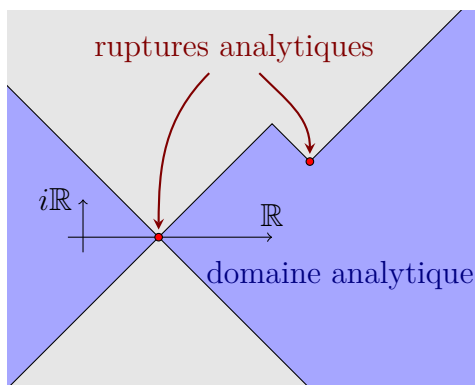


FIGURE 1.6 – Domaine analytique d'une fonction
On prolonge la fonction aussi loin que possible dans $\mathbb{C}$. Chaque point de rupture analytique engendre un cône ou un demi-cône vertical non analytique, selon qu'il se situe sur la droite réelle ou pas.

1.3.2 Le développement en série

Avec la définition de la translation imaginaire par le biais d'un prolongement imaginaire initial, systématique et maximal, on a une condition suffisante pour développer en série une fonction dans le produit.

Pour un z complexe, on constate que l'exponentielle $e^{2i\pi z\bullet}$ est développable en série lorsqu'elle évalue une fonction analytique de rayon $> |z|$, c'est-à-dire lorsque le disque de rayon $|z|$ centré en 0 se situe dans le domaine analytique de la fonction. Or, seule l'exponentielle nous empêchait de développer systématiquement en série les fonctions entières. On déduit que toute fonction entière est développable quand on s'assure que l'exponentielle est effectivement développable dans ces mêmes conditions. On définit à cet effet le rayon d'évaluation S d'un développement $\sum_k a_k \bullet^k$ par

$$2\pi S = \limsup_k |a_k k!|^{1/k}$$

S'il est fini, le rayon de convergence de la série est forcément infini².

Le rayon d'évaluation du développement d'une exponentielle $e^{2i\pi z\bullet}$ est le module $|z|$; la multiplication de l'exponentielle par un polynôme laisse ce rayon inchangé. Le rayon d'évaluation d'une somme de développements est égal au plus grand des rayons de chacun des développements, à l'exception du cas où les termes s'annulent entre eux³. On est donc capable de repérer indirectement la présence d'exponentielles contenues dans la fonction que l'on veut développer, ainsi que le plus grand de leurs rayons d'évaluation. On peut en déduire une condition suffisante pour la validité du développement.

On associe un rayon d'évaluation S à un disque de rayon S centré en 0 dans le plan complexe. Si la fonction qui a un tel rayon d'évaluation est facteur d'une exponentielle $e^{2i\pi z\bullet}$, le centre du disque est alors z – ou de manière équivalente, l'exponentielle translate d'abord la fonction évaluée, et en déplace d'autant le point 0 qui sera le centre du disque. Si le disque est contenu dans le domaine analytique de la fonction évaluée, alors le développement est licite, puisqu'on est sûr que même l'exponentielle de plus grand rayon – la plus défavorable – que contient la fonction développée y agira comme son développement. Voir figure 1.7.

La série entière résultant du développement vient évaluer des dérivées de la fonction analytique au centre du disque d'évaluation, autant dire que la

2. Comme $|k!|^{1/k}$ se comporte comme k/e à l'infini, si $S < \infty$ alors $\limsup_k |a_k|^{1/k} = 0$.

3. Pour une somme de développements $\sum_k (a_k + b_k) \bullet^k$ dont chacun a un rayon d'évaluation fini non nul avec b_k le plus grand des deux, si $\limsup_k |1 + a_k/b_k|^{1/k} < 1$ alors le rayon de la somme n'est pas égal au plus grand des deux rayons. Ceci nécessite au moins que $1 + a_k/b_k$ tende vers 0, c'est-à-dire que a_k tend vers $-b_k$. La somme est en quelque sorte destructive.

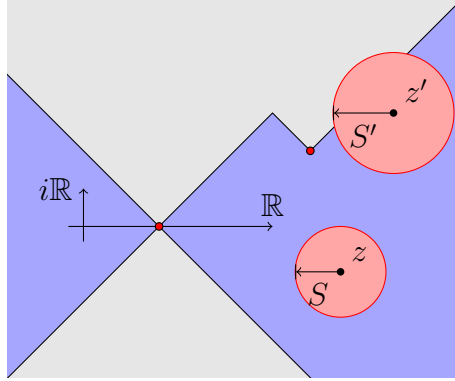


FIGURE 1.7 – Disques d'évaluation

Le domaine analytique d'une fonction u est en bleu. Le disque de rayon S centré en z est analytique, il autorise face à u le développement d'une fonction de rayon d'évaluation S et facteur de $e^{2i\pi z \bullet}$. Le disque de rayon S' centré en z' débordé du domaine analytique, une fonction de rayon d'évaluation S' et facteur de $e^{2i\pi z' \bullet}$ ne peut pas être développée face à u .

fonction analytique est développée en série autour du centre du disque : il y a équivalence du développement à droite et à gauche. On peut donc aussi dire que, si le disque d'évaluation d'une fonction entière est contenu dans le domaine analytique de la fonction qu'elle vient évaluer, la fonction analytique est développable autour du centre du disque. Le disque d'évaluation contient le support adjoint analytique de la fonction entière, puisque la connaissance de la fonction analytique sur ce domaine est suffisante pour l'évaluation du produit. Cette condition assure de plus la convergence du produit.

Extension complexe et rayon de convergence – coïncidence Le rayon du développement sur les réels seuls n'est pas identique au rayon du développement sur les complexes, ou autrement dit : la condition de convergence de la somme (qu'est le développement) n'est pas une condition suffisante à sa coïncidence sur les complexes, même pour une fonction analytique. Le cas le plus défavorable est celui d'une rupture sur les réels, auquel cas il y a un rapport $\sqrt{2}$ entre le rayon sur les réels seuls et celui sur les complexes, voir figure 1.8. Ainsi, même si le rayon sur les réels est supérieur au rayon d'évaluation, le produit peut ne pas exister au sens où on l'a défini ; c'est tout de même une condition nécessaire. Ceci est valable même si la rupture n'est pas sur les réels, sauf que le rapport entre les deux rayons est plus proche de 1, le cas limite étant une rupture située sur une diagonale du point de développement.

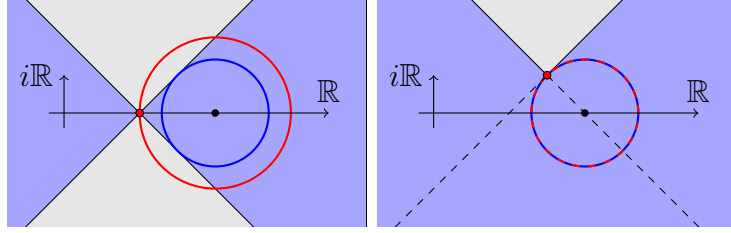


FIGURE 1.8 – Rayon sur les réels seuls et rayon de l’extension complexe. *Le rayon sur les réels seuls (cercle rouge) est plus grand que le rayon sur les complexes (cercle bleu) d’un facteur $\sqrt{2}$ quand la rupture est sur les réels (image de gauche) ; ils sont identiques quand le point de développement est dans le cône vertical issu de la rupture (cas limite dans l’image de droite).*

1.4 Lien avec l’intégrale

Pour mettre en évidence le lien avec l’intégrale, on introduit la notation $\langle u|v\rangle = \int u$ ainsi que $|v\rangle = \bar{v}$. En particulier, on a

$$\langle u|v\rangle = \langle u\bar{v}\rangle = \int u\bar{v}$$

On va donner des règles de manipulation de l’intégrale $\int \cdot$ et de la barre horizontale $\bar{\cdot}$ de sorte que tous les axiomes soient vérifiés. La barre horizontale est la transformation de Fourier, comme on va le voir.

1.4.1 Transformation de Fourier

Linéaire, continue La transformation de Fourier est un opérateur linéaire et continu. Le signe de sommation $\sum$ et les scalaires y sont insensibles.

Itérations, retournement et inverse Cet opérateur peut être itéré un nombre arbitraire de fois. On mettra les barres indistinctement en haut ou en bas, par exemple $\bar{\bar{v}} = \underline{\underline{v}}$. On impose la relation de retournement

$$\bar{\bar{u}} = u(-\bullet)$$

d’où la relation d’inversion

$$\bar{\bar{\bar{u}}} = u$$

Translation, dérivation On a la relation de translation

$$\overline{u(\bullet + x)} = e^{2i\pi x \bullet} \bar{u}$$

L'association de cette relation et du retournement permet d'établir la relation de translation duale

$$\overline{u}(\bullet + x) = \overline{e^{-2i\pi x \bullet} u}$$

La continuité, de la même manière qu'avec le produit bilinéaire, mène aux relations de dérivation

$$(2i\pi \bullet) \overline{u} = \overline{\partial u} \qquad \overline{(-2i\pi \bullet) u} = \partial \overline{u}$$

que l'on peut itérer indéfiniment pour obtenir des dérivées d'ordre arbitraire.

Commutativité, associativité, distributivité La transformée de Fourier conserve la commutativité : si u et v commutent, alors u , $\overline{u}$, $\underline{\overline{u}}$, $\underline{\underline{u}}$, $\overline{v}$, $\underline{\overline{v}}$ et $\underline{\underline{v}}$ commutent aussi deux à deux. On peut définir la convolution $*$ par $\overline{u * v} = \overline{uv}$, qui commute sous les mêmes conditions que le produit multiplicatif.

La multiplication et la convolution sont associatives et distributives par rapport à l'addition. Le retournement est distributif par rapport à la multiplication et la convolution :

$$\overline{\overline{u \cdot v}} = \overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{v}} \qquad \overline{\overline{u * v}} = \overline{\overline{u}} * \overline{\overline{v}}$$

1.4.2 Intégrale

Linéaire, continue L'intégrale est définie comme étant linéaire et continue.

Symétrie Pour deux objets u et v , on aura toujours

$$\int u \overline{v} = \int \overline{u} v$$

En utilisant la transformation inverse, la relation de symétrie s'écrit aussi comme la transformation de l'intégrande uv en l'intégrande $\overline{u} \cdot \underline{\underline{v}}$. Ceci permet de montrer que l'intégrale est bien invariante par translation⁴ ou par retournement⁵.

4. Partant de $u(\bullet + x) = 1 \cdot u(\bullet + x)$, la relation de symétrie amène $\int u(\bullet + x) = \int \underline{\underline{1}} \cdot \overline{u(\bullet + x)}$. On remarque d'abord que le retournement de l'unité $\underline{\underline{1}}$ est identique à l'unité, donc que l'intégrande est $\underline{\underline{1}} \cdot \overline{u(\bullet + x)}$. La relation de translation permet ensuite d'écrire l'intégrande comme $\underline{\underline{1}} e^{2i\pi x \bullet} \overline{u}$, puis comme $\underline{\underline{1}}(\bullet + x) \cdot \overline{u}$. On remarque enfin que l'unité est invariante par translation, donc $\underline{\underline{1}}(\bullet + x)$ est identique à l'unité, pour en déduire que l'intégrande se trouve être $\underline{\underline{1}} \cdot \overline{u}$. Il ne reste plus qu'à utiliser à nouveau la symétrie, qui transforme l'intégrande en $\underline{\underline{1}} \cdot u = u$. On a donc bien invariance de l'intégrale par translation car $\int u(\bullet + x) = \int u$.

5. Quatre barres sur un objet le laissent invariant : les barres peuvent être retirées lorsqu'elles sont au nombre de quatre sur un même objet. Dans une intégrande, les barres

Évaluation Pour une fonction u continue en 0, la valeur en 0 est bien définie et on aura toujours

$$\int \bar{u} = u(0)$$

Associée à la translation, on obtient la formule d'évaluation de la transformée de Fourier et son inverse :

$$\int e^{-2i\pi x \bullet} u = \bar{u}(x) \qquad \int e^{2i\pi x \bullet} \bar{u} = u(x)$$

1.4.3 Retour à la forme bilinéaire

Il nous suffit de vérifier que si $\langle u|v \rangle = \int u \bar{v}$, alors les axiomes de la forme bilinéaire sont vérifiés. La symétrie découle de la symétrie de l'intégrale et de la commutativité de la multiplication. La bilinéarité du produit correspond à la distributivité de la multiplication et la linéarité de l'intégrale. La continuité est issue de la continuité de la transformée de Fourier et de l'intégrale. L'évaluation se retrouve par la formule d'évaluation de l'intégrale. Les axiomes de la forme bilinéaire sont vérifiés et on peut en déduire tout le reste.

1.4.4 Notions usuelles

On a défini une intégrale – et la transformation de Fourier associée – par certaines propriétés. Elles correspondent toutes à ce que vérifie effectivement l'intégrale usuelle et la transformation associée quand la continuité est garantie. Elle se confond donc essentiellement avec la notion usuelle d'intégrale, quand celle-ci est bien définie. Il semble cependant que la relation d'échelle $\langle u(a \bullet) \rangle = \langle u \rangle / a$ ne soit pas directement déductible des axiomes précédents⁶ ; on l'impose pour la suite. On va étendre la notion de support et le principe fondamental de l'analyse pour obtenir des relations supplémentaires.

Support La notion d'intégrale permet d'étendre la notion de support. Pour un u donné, le produit $\langle u|v \rangle$ est nécessairement et entièrement déterminé par u et la valeur de v dans le support adjoint analytique de u ; on rappelle que

peuvent être déplacées librement de l'un à l'autre des deux facteurs qui la composent. Ces deux propriétés résument la formule d'inversion et de symétrie. Autrement dit, il est toujours possible d'ajouter et répartir arbitrairement quatre barres sur l'un ou l'autre des deux facteurs d'une intégrande. En particulier, comme $u = 1 \cdot u$, l'intégrande u s'écrit aussi $\bar{1} \cdot \bar{u}$. L'invariance par retournement de l'unité montre donc que l'intégrande u s'écrit aussi $\bar{u}$, donc que l'intégrale est bien invariante par retournement $\int \bar{u} = \int u$.

6. Dès que le produit peut être évalué, on a seulement $\langle u(a \bullet)|v \rangle = \langle u|v(a \bullet) \rangle$, mais rien de plus. Il faudrait au moins introduire le Dirac $\langle \delta|u \rangle = \langle u \rangle$ avec en plus $\delta(a \bullet) = \delta/a$.

ce support adjoint est contenu dans le disque d'évaluation de u . Ce produit peut être écrit $\int \bar{u}v$, où on travaille implicitement sur les réels. La valeur de v dans le support adjoint analytique de u est nécessairement et entièrement déterminée par sa valeur sur le support réel du prolongement dont est issu chacun des points du support adjoint, d'où on déduit que l'intégrale est nécessairement et entièrement déterminée par la valeur de v sur ce support réel ; autrement dit, ce support réel est celui de $\bar{u}$.

Pour identifier de manière systématique ce support réel, on introduit le support complexe d'un point. Le support complexe d'un point est le cône vertical attaché à ce point, son intersection avec les réels est le support du prolongement depuis les réels jusqu'à ce point, qu'on appellera support réel de ce point. Voir figure 1.9.

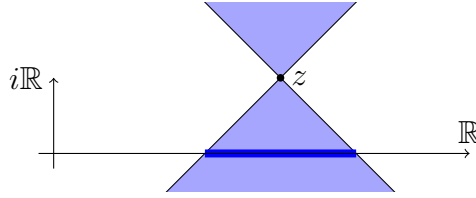


FIGURE 1.9 – Point d'évaluation, support complexe et support réel.

Un point d'évaluation z est associé à un cône vertical bleu clair appelé support complexe. Son intersection avec les réels est le support réel du point d'évaluation, représenté par un segment bleu épais. L'évaluation par prolongement d'une fonction en z est nécessairement et entièrement déterminée par sa valeur sur ce support réel.

Le support complexe d'un domaine est la réunion des supports complexes de chacun de ses points. Le prolongement dans ce domaine est nécessairement et entièrement déterminé par l'intersection de son support complexe avec les réels. Voir figure 1.10 pour un exemple avec un disque d'évaluation.

Distribution de Dirac Il suffit de poser $\bar{1} = \delta$ pour définir la distribution de Dirac. En utilisant les relations de translation et d'évaluation, on a bien

$$\begin{aligned} \int \delta(\bullet - x) u &= \langle e^{2i\pi x \bullet} | u \rangle \\ &= u(x) \end{aligned}$$

On a même défini le Dirac d'argument complexe z , puisqu'on connaît son support complexe, qui est un cône centré sur z comme dans la figure 1.9, et son support réel qui est le segment compris entre $x - |y|$ et $x + |y|$ pour $z = x + iy$. Son action est le prolongement analytique depuis le support réel

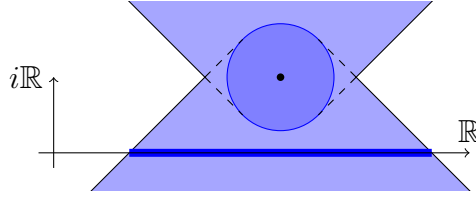


FIGURE 1.10 – Disque d'évaluation, support complexe et support réel.
Le disque bleu est le disque d'évaluation de u ; le domaine bleu clair, disque inclus, est le support complexe du disque ; son intersection avec les réels contient le support réel de $\bar{u}$. L'intégrale $\int \bar{u}v$ est entièrement déterminée par $\bar{u}$ et la valeur de v sur le segment bleu épais.

jusqu'à z . Le cas des dérivées successives est immédiat, et on aura dans le cas général

$$\int \delta^{(k)}(\bullet - z) u = (-1)^k u^{(k)}(z)$$

si u prolongée est analytique en z .

Primitive La notion usuelle d'intégrale contient une relation supplémentaire : le lien entre intégration et dérivation. En particulier :

$$\int \partial u = u(+\infty) - u(-\infty)$$

On a vu que le support du Dirac complexe d'argument 0 est un cône vertical centré en 0, autrement dit $\delta(z) = 0$ quand z se trouve hors du support, dans le cône horizontal centré en 0. On écrit l'évaluation du Dirac complexe sous forme intégrale, puis on intègre effectivement l'exponentielle

$$\delta(z) = \int e^{-2i\pi z \bullet} = \frac{1}{2i\pi z} (e^{+2i\pi z \infty} - e^{-2i\pi z \infty})$$

où le membre de droite est donc nul quand z est dans le cône horizontal centré en 0. Quand z a une partie imaginaire positive, le terme $e^{+2i\pi z \infty}$ est forcément nul, donc $e^{-2i\pi z \infty}$ l'est aussi pour $\delta(z) = 0$. On déduit donc que $e^{2i\pi z \infty}$ est nul quel que soit le signe de sa partie imaginaire, tant que z est dans le cône horizontal hors droite réelle. La droite réelle hors origine est baignée dans le cône où $e^{2i\pi z \infty}$ est nul, on prolonge donc par continuité cette valeur nulle à la droite réelle hors origine. On agrège toutes les conditions de nullité par la relation

$$e^{i(x+iy)\infty} = 0 \quad \text{si} \quad |x| + y > 0$$

qu'on peut représenter graphiquement comme sur la figure 1.11. Le domaine où la relation est vérifiée est la réunion du demi plan supérieur avec le cône horizontal ; seuls le quart de plan complexe inférieur et l'origine sont exclus du domaine où $e^{iz\infty} = 0$.

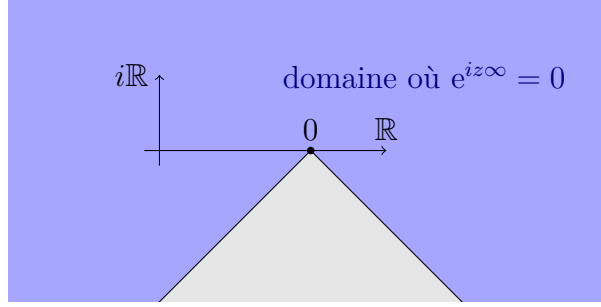


FIGURE 1.11 – Domaine vérifiant $e^{iz\infty} = 0$.

Le domaine bleu clair, origine exclue, est l'ensemble des z vérifiant $e^{iz\infty} = 0$.

On a découvert de nouvelles conditions de nullité de la limite de l'exponentielle, au sens précédent. On va l'élargir au cas de fonctions e^φ qui ont une pulsation limite $\dot{\varphi}(+\infty)$ finie. On pourra écrire $e^{\varphi(+\infty)} = 0$ si $\dot{\varphi}(+\infty)/2i\pi$ est dans le domaine bleu de la figure 1.11. Le cas en $-\infty$ se déduit par changement de signe.

Ceci ne contredit aucune relation usuelle. On a simplement défini des expressions qui n'étaient pas encore définies, en un sens compatible avec la transformation de Fourier.

1.5 Transformée en ondelettes d'une exponentielle complexe

Le chapitre 4 traite plus précisément de la transformation en ondelettes, mais on peut déjà établir le résultat suivant : la transformée en ondelettes de $e^{2i\pi z\bullet}$ en (b, a) par l'ondelette ψ est immédiatement donnée par

$$T_\psi \left[e^{2i\pi z\bullet} \right] (b, a) = \left\langle \overline{\psi}(a\bullet) | e^{2i\pi z(\bullet+b)} \right\rangle = e^{2i\pi z b} \overline{\psi}(az)$$

où l'évaluation complexe de $\overline{\psi}$ s'entend au sens défini précédemment. En particulier, pour une ondelette dite progressive ψ telle que $\overline{\psi}$ est nulle sur les réels négatifs, si z est dans le quart de plan gauche alors la transformée d'ondelette ψ de $e^{2i\pi z\bullet}$ est nulle.

On a ici un résultat qui généralise la relation usuelle pour les fonctions harmoniques $T_\psi[e^{2i\pi x \bullet}](b, a) = \overline{\psi}(ax)e^{2i\pi xb}$. Cette dernière permettant d'approcher la transformée en ondelettes de signaux d'amplitude et de fréquence lentement variables, on pourra procéder de même en tenant alors compte de manière exacte de la décroissance exponentielle de l'amplitude plutôt que l'approcher par une amplitude localement constante. C'est ce qu'on fera dans le chapitre 4.

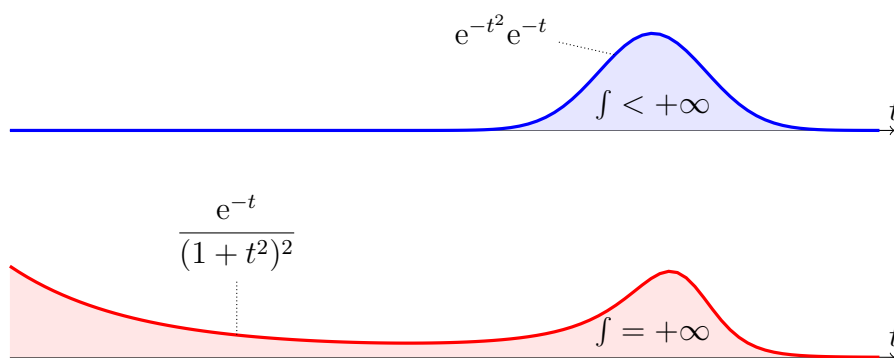


FIGURE 1.12 – Amplitude de l'intégrande temporelle
Face à une exponentielle amortie, l'amplitude de l'intégrande temporelle de la transformée en ondelettes est intégrable pour une ondelette de Morlet d'enveloppe gaussienne (haut, bleu) mais pas pour une ondelette de Cauchy (rouge, bas). L'échelle, la translation et le paramètre de l'ondelette de Cauchy n'influent pas sur ces considérations.

On voit bien qu'il n'est pas question de convergence absolue de l'intégrale avec une exponentielle dans le domaine temporel. Une ondelette d'enveloppe gaussienne assure la convergence absolue de l'intégrale temporelle associée, mais dans le cas d'une ondelette de Cauchy dont l'enveloppe à l'infini est asymptotiquement proportionnelle à $|\bullet|^{-(n+1)}$ pour un n positif, il y a divergence grossière de l'intégrale quand l'exponentielle est amortie. Voir figure 1.12. Ceci appelle d'ailleurs à affiner la notion de localisation temporelle de la transformée en ondelettes, qui ne peut être fondée sur la seule amplitude de l'intégrande du domaine temporel quand celle-ci – ou son carré – n'est pas intégrable.

§ 2

L'épaisseur du trait

On part du principe que certains signaux formellement différents sont indiscernables les uns des autres en deçà d'une certaine distance que l'on va définir. Cette distance sera indépendante de la nature des signaux. Les grandeurs et unités physiques de l'ensemble d'indexation et de l'ensemble de valeur des signaux de travail ne doivent jouer aucun rôle : on ne souhaite pas avoir des résultats différents selon que les deux signaux comparés sont des mesures de tension en millivolts avec un temps en nanosecondes ou des mesures d'accélération en g avec un temps en jours ; faire les mêmes mesures en volts plutôt qu'en millivolts et en heures plutôt qu'en nanosecondes ne doit avoir aucune influence. En prenant au sérieux l'indistinction de deux signaux, on en « déduira » qu'il n'est pas non plus possible de distinguer leurs intégrales respectives.

La spécificité de cette relation d'indistinction est que ce n'est pas une relation d'équivalence. La structure algébrique sous-jacente ressemble fortement à un groupe, à la différence que tous les éléments ne sont pas forcément composables un à un.

Avec cette démarche, on ne cherche pas à quantifier l'erreur commise dans le résultat, mais on quantifie plutôt la modulation à opérer sur le signal considéré pour que le résultat soit valide.

2.1 Distances relatives

2.1.1 Distance logarithmique

On considère les signaux génériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$, sur lesquels on va introduire la distance logarithmique entre deux signaux u et v :

$$d(u, v) = \left\| \ln \frac{u}{v} \right\|_{\infty}$$

où le logarithme a sa partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, de manière à préserver la relation $|\ln \frac{u}{v}| = |\ln \frac{v}{u}|$. En plus d'être invariante sous translation du temps, cette distance est invariante sous multiplication gauche¹ et droite des signaux par un scalaire a non nul.

$$d(a u, a v) = d(u, v) = d(u(a \bullet), v(a \bullet))$$

C'est ce qu'il fallait entendre par distance indépendante de la nature des signaux. Par ailleurs, elle possède bien les caractéristiques d'une distance au sens usuel².

2.1.2 Erreur relative

La distance logarithmique est assez similaire à l'erreur relative habituelle

$$r(u, v) = \left\| \frac{u}{v} - 1 \right\|_{\infty}$$

mais elle n'est pas symétrique : $r(u, v)$ est différent de $r(v, u)$ de manière générale. L'erreur relative approche quand même la distance logarithmique au premier ordre et $r(u, v) \approx d(u, v)$ si l'une des deux est petite devant 1. Ces grandeurs sont d'autant plus proches qu'elles sont petites³. On aurait pu considérer aussi l'erreur relative symétrique⁴ tout aussi proche, mais on en fera pas usage dans ce contexte.

1. Cette distance n'est donc pas issue d'une norme sur les signaux.

2. Elle est symétrique : $d(u, v) = d(v, u)$, puisqu'on s'en est assuré par une bonne détermination du logarithme ; séparatante puisque $d(u, v) = 0$ est équivalent à $u/v = 1$, c'est-à-dire $u = v$; et vérifie l'inégalité triangulaire puisque $\ln u/w = \ln u/v + \ln v/w$ et donc $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

3. Elles sont même équivalentes si on travaille dans un espace de faible diamètre, voir section B.1.1.

4. On peut définir l'erreur relative symétrique comme $2 \left\| \frac{u-v}{u+v} \right\|_{\infty}$. Le facteur 2 assure qu'elle approche bien la distance logarithmique quand elle est petite.

2.2 Du presque au même

On se propose de considérer comme indistincts deux signaux u et v tels que $d(u, v) < s$, où s est un seuil de discernement. On écrira

$$u \simeq v$$

La relation $\simeq$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive⁵. La non transitivité correspond à l'idée qu'une série de variations individuellement imperceptibles peut mener à un cumul perceptible de variations.

On considérera dans tout ce qui suit que $s \ll 1$ et on utilisera invariablement l'erreur r ou la distance d pour savoir si deux signaux sont indiscernables. On utilise simplement le fait que $\ln z \approx z - 1$ pour $|z - 1| \ll 1$.

Le cas de l'exponentielle complexe Deux signaux $e^{2i\pi z \bullet}$ et $e^{2i\pi z' \bullet}$ sont à une distance au moins égale à π si $z \neq z'$ et il n'existe pas de signal indistinct de l'un qui le soit aussi de l'autre pour un seuil inférieur à $\pi/2$. On balise dans ce cas l'espace des signaux de manière non redondante et non contradictoire avec des zones floues disjointes autour des exponentielles complexes.

2.3 Opérer sur un ensemble flou

Si on considère maintenant une application A définie sur ces signaux, se pose la question suivante : quand u est indistinct d'un ensemble de signaux, quelle valeur associer à $A(u)$? En toute rigueur, c'est une fonction multiforme et l'ensemble des valeurs possibles est l'ensemble des $A(v)$ pour tous les v indistincts de u . On pourrait prendre la valeur la plus commode.

Pour rester cohérent, à toute opération A sur u et v tels que $u \simeq v$, on écrira $A(u) \simeq A(v)$ pour signifier que $A(u)$ est indistinct de $A(v)$, et ce car u et v sont indistincts. On ne peut pas savoir si le signal d'entrée était u ou v , puisque on ne peut pas faire la distinction entre les deux.

On peut composer les opérations, en rendant simplement $\simeq$ transparent⁶ à toute opération sur $u \simeq v$. On donne alors un sens élargi à $u \simeq v$: le membre de gauche u est identifié au membre de droite v , sachant qu'il a fallu considérer à un moment du raisonnement que deux signaux étaient indistincts à s près ; ces deux signaux ne sont pas forcément u et v .

5. C'est-à-dire que $u \simeq v \simeq w$ n'implique pas $u \simeq w$.

6. On peut parler de distributivité des applications par rapport à $\simeq$ car on passe en quelque sorte de $A(u \simeq v)$ à $A(u) \simeq A(v)$.

2.3.1 L'intégrale et sa continuité

On étudie le cas particulier de l'intégrale. Regardons l'influence de s en notant explicitement $v = ue^\theta$ avec $|\theta| < s$.

Intégrale absolue Si $\int |u| < +\infty$, alors la continuité est assurée et toutes les valeurs $\int ue^\theta$ sont à une distance finie de $\int u$ car :

$$\left| \int ue^\theta - \int u \right| < |e^\theta - 1| \int |u|$$

La différence entre les intégrales tend vers 0 quand s tend vers 0, le flou se transfère alors naturellement par continuité, et d'autant mieux que $\int |u|$ est petit.

Intégrale formelle En revanche, si $\int |u| = +\infty$, les choses sont moins claires. S'il est possible d'établir $|\int u| < +\infty$ d'une manière ou d'une autre, alors on définit la suite de terme général

$$u_n = u \cdot \left(1 + \frac{u^*}{|u|} \frac{z - \int u}{\int_{-n}^n |u|} 1_{[-n,n]} \right)$$

pour un complexe z arbitraire, et où $1_{[-n,n]}$ est la fonction indicatrice⁷ de l'intervalle $[-n, n]$. La suite u_n tend vers u au sens de la distance d car $\int_{-n}^n |u|$ tend vers $+\infty$. On établit aussi que $\int u_n = z$. On peut donc approcher n'importe quel signal dont l'intégrale est finie par une suite de signaux dont l'intégrale est z .

En choisissant $z = 0$, on remarque dans le cas général que $|\int u| / \int |u|$ est une mesure de l'erreur relative à un signal d'intégrale nulle. Cette erreur relative est nulle si $\int |u| = +\infty$.

Par ailleurs, toujours s'il est possible d'établir $|\int u| < +\infty$ d'une manière ou d'une autre, alors il est possible de définir la suite de terme général

$$u_n = u \cdot \left(1 + \frac{u^*}{n|u|} \right)$$

Cette suite u_n tend toujours vers u au sens de la distance d . On établit que $|\int u_n| = +\infty$. On montre cette fois qu'on peut approcher n'importe quel signal dont l'intégrale est finie par une suite de signaux dont l'intégrale est non finie.

7. Elle vaut 1 sur l'ensemble qu'elle « indique », et 0 ailleurs.

Il est alors plus facile d'accepter d'écrire $\int ue^\theta \simeq \int u$ dans le cas où $\int |u| = +\infty$ puisque c'est en fait fixer une contrainte sur la détermination de l'intégrale des signaux indistincts de u .

En pratique, on partira de $u \simeq v$ pour aboutir à ce que l'on notera $\int u \simeq \int v$, qui exprime que pour établir l'indistinction des intégrales, on a supposé un seuil de distinction s . On a travaillé avec l'intégrale sous sa forme usuelle, on étend facilement ces considérations au produit bilinéaire que l'on a défini précédemment.

2.4 Flou de modulation et flou de convolution

Si on travaille avec la transformée de Fourier, on constate formellement que

$$ue^\theta \simeq u \quad \text{implique} \quad \bar{u} * \overline{e^\theta} \simeq \bar{u}$$

Il y a un flou induit dans le domaine de Fourier sous la forme d'une convolution par une fonction d'autant plus proche de la distribution de Dirac que s est petit. Il n'est pas possible de trouver un unique couple (v, w) qui vérifie $uv = u * w$ pour tout u , sauf si $v = \bar{w} = \text{cte}$: le flou de modulation et le flou de convolution, duaux l'un de l'autre par la transformation de Fourier, sont de natures différentes.

§ 3

Signaux asymptotiques

On élargit la classe de signaux étudiés à des fonctions localement harmoniques, dont on mesure l'« harmonicité » par une unique grandeur. Cette grandeur, nommée paramètre asymptotique, quantifie la variation de fréquence instantanée ; si elle est « petite », les signaux seront dits asymptotiques. Les deux premiers chapitres nous donnent des outils pour donner du sens à la transformée de Fourier de tels signaux, ou au moins à son support. Par ailleurs, la mesure d'harmonicité que l'on utilise permet de caractériser le mélange d'une somme de deux signaux : la somme est-elle cohérente, et les oscillations propres ? ou bien les signaux interfèrent-ils de manière telle que la somme ne peut pas être considérée comme une unique composante ? C'est une première approche de la question de la séparation de composantes par une transformée en ondelettes.

La notion de signaux asymptotiques n'est pas nouvelle, et la définition usuelle impose un rapport petit entre la variation d'amplitude et la variation de phase (par exemple [DELPAT et al., 1992, éq. (III – 10)]). Cette définition a pour origine les conditions d'application du théorème de Bedrosian, qui donne une expression commode du signal progressif complexe associé à un signal réel. Nous en aurons un équivalent par la notion de signal asymptotique progressif, mais le cadre sera différent. Notons aussi que quand le signal est une exponentielle amortie, la définition usuelle impose un amortissement petit, alors que la définition proposée est fondée sur les variations de fréquence instantanée, et considère en particulier qu'une exponentielle est toujours parfaitement asymptotique.

3.1 Définition

Les signaux de référence étant de la forme $e^{2i\pi z^\bullet}$, on étudie maintenant des signaux qui sont « proches » de ces derniers. On retient une classe de signaux e^φ asymptotiquement proche d'une exponentielle complexe en un sens que l'on va préciser.

La propriété remarquable du signal de référence est d'avoir une fréquence instantanée constante. On va imposer une condition similaire mais relâchée : la fréquence instantanée du signal variera peu sur un intervalle donné, au lieu d'être invariante. Ensuite, cette variation est à comparer relativement à la fréquence instantanée du signal avant variation : c'est donc une variation relative que l'on limitera. Enfin, on retient la période du signal comme intervalle sur lequel la fréquence doit peu varier.

En prenant la dérivée de la fréquence comme mesure de sa variation par unité de temps, on aboutit à la mesure de la variation relative sur une période

$$\underbrace{\underbrace{\ddot{\varphi}}_{\text{variation}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\dot{\varphi}}}_{\text{variation relative}}}_{\text{variation relative sur une période}}$$

qu'on notera ε et telle que :

$$\left| \varepsilon = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} \right| < \varepsilon_0$$

où ε_0 est la limite de variation relative de la fréquence sur une période¹. On dira que ε est le paramètre asymptotique du signal. Remarquons que ε s'interprète aussi comme l'opposé de la dérivée de la période complexe $\frac{1}{\dot{\varphi}}$:

$$\varepsilon = -\partial \dot{\varphi}^{-1}$$

Le paramètre asymptotique est sans dimension et ne dépend pas des unités de temps ou de mesure du signal, c'est une grandeur indépendante de la nature des signaux. Le signal e^φ est asymptotiquement proche d'une exponentielle au sens où ses puissances successives $e^{k\varphi}$ ont un paramètre asymptotique ε/k qui tend vers 0 quand k croît. L'exponentielle étant la seule fonction qui a un paramètre asymptotique nul, les puissances successives d'un signal asymptotique ressemblent asymptotiquement à une exponentielle².

On ajoute que $\dot{\varphi}$ doit avoir une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. On notera $\dot{\varphi} = 2i\pi z$.

1. Un ordre de grandeur : pour une fréquence instantanée qui passe de 10 à 20 Hertz en 1 seconde, ε_0 est au moins de l'ordre de $8 \cdot 10^{-3}$.

2. De fréquence $k\dot{\varphi}$ infiniment croissante selon k , certes.

3.2 Propriété intégrale

Une simple dérivation montre que

$$\partial (\dot{\varphi}^{-1} e^\varphi) = e^\varphi (1 - \varepsilon)$$

Si ε_0 est inférieur au seuil s , on ne peut pas distinguer $e^\varphi(1 - \varepsilon)$ de e^φ et il est alors possible d'écrire

$$\partial (\dot{\varphi}^{-1} e^\varphi) \simeq e^\varphi$$

La dérivation est dans ce cas indistincte d'une multiplication par $\dot{\varphi}$. On peut y voir que si ε_0 est inférieur au seuil alors le calcul d'une primitive vaut division par $\dot{\varphi}$. En effet, l'intégration sur un intervalle I s'écrit

$$[\dot{\varphi}^{-1} e^\varphi]_I = \int_I e^\varphi (1 - \varepsilon)$$

et si ε_0 est inférieur au seuil on peut écrire

$$[\dot{\varphi}^{-1} e^\varphi]_I \simeq \int_I e^\varphi$$

Il est possible de choisir un intervalle I non fini, disons en $+\infty$, sous l'une de ces deux conditions :

- Le signal est intégrable en $+\infty$ (condition sur la partie droite de l'égalité).
- On peut obtenir formellement la relation $e^{\varphi(+\infty)}/\dot{\varphi}(+\infty) = 0$ (condition sur la partie gauche de l'égalité), ce qui est le cas quand $z(+\infty)$ est dans le cône horizontal .

On procède de même en $-\infty$.

Si l'une de ces deux conditions est vérifiée pour l'infini positif et qu'il en est de même pour l'infini négatif, on peut prendre $I = \mathbb{R}$. C'est par exemple le cas si la limite non nulle de z est dans  en $+\infty$ et dans  en $-\infty$. En ce cas le membre de gauche de la relation précédente s'annule et on montre alors que

$$\int e^\varphi (1 - \varepsilon) = 0$$

Si ε est une constante différente de 1, on conclut immédiatement $\int e^\varphi = 0$; si c'est une constante égale à 1, on ne peut rien dire. Dans tous les autres cas e^φ se trouve au plus à une erreur relative ε_0 d'un signal d'intégrale nulle et si ε_0 est inférieur au seuil, on peut écrire

$$\int e^\varphi \simeq 0$$

Un signal asymptotique est donc proche d'un signal d'intégrale nulle, voire en est indistinct, selon le seuil de distinction.

Inégalités sur l'intégrale Si le signal est absolument intégrable, on a l'inégalité sur l'intégrale

$$\left| \int e^\varphi \right| \leq \varepsilon_0 \int |e^\varphi|$$

ce qui donne une autre manière de comprendre ce qu'est un signal d'intégrale presque nulle : son intégrale est négligeable face à l'intégrale de son module³. Si le signal n'est pas absolument intégrable, cette inégalité ne nous dit rien. On peut cependant étendre cette idée à un signal pas forcément intégrable, à ceci près qu'il faut considérer un intervalle I sur lequel le signal est intégrable et qu'il y a un terme supplémentaire $[\dot{\varphi}^{-1}e^\varphi]_I$. Selon l'intervalle I retenu, il est possible que ce terme supplémentaire soit petit, auquel cas l'inégalité signifie que, localement, l'intégrale du signal est négligeable face à l'intégrale de son module.

Pour un signal pas forcément intégrable, on peut aussi écrire

$$\left| \int_I e^\varphi - [\dot{\varphi}^{-1}e^\varphi]_I \right| \leq \varepsilon_0 \int_I |e^\varphi|$$

qui exprime alors que l'intégrale sur I est presque identique à $[\dot{\varphi}^{-1}e^\varphi]_I$, au sens où l'erreur est négligeable face à l'intégrale du module sur ce même intervalle.

3.3 Propriétés locales

On s'intéresse dans ce qui suit à des approximations locales du signal e^φ . On comparera la phase translatée $\varphi(\bullet + \Delta t)$ à son développement à un ordre donné. On mesure la translation Δt en nombre de périodes $\dot{\varphi}^{-1}$ en posant $\Delta t = \alpha \dot{\varphi}^{-1}$. La grandeur α , qui est sans dimension et complexe, correspond donc au nombre de périodes dont on a translaté la phase et mesure la translation à l'échelle du signal. On considérera donc la phase translatée sous la forme $\varphi(\bullet + \alpha \dot{\varphi}^{-1})$ et son développement en série s'écrira

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\varphi^{(n)}}{n!} \left(\frac{\alpha}{\dot{\varphi}} \right)^n = \varphi + \alpha + \varepsilon \alpha^2 / 2 + \dots$$

3. On a dit dans la section 2.3.1 que $|\int u| / \int |u|$ est une mesure de l'erreur relative à un signal d'intégrale nulle et cette erreur est donc bien majorée par ε_0 quand u est asymptotique.

3.3.1 Harmonicité locale ou le premier ordre

On va évaluer la distance entre $e^{\varphi(\bullet + \alpha\dot{\varphi}^{-1})}$ et $e^{\varphi + \alpha}$, c'est-à-dire la distance entre le signal et son approximation harmonique locale, qui correspond à l'approximation de sa phase au premier ordre.

L'existence de ε_0 permet d'écrire⁴

$$\left| \varphi(\bullet + \alpha\dot{\varphi}^{-1}) - \varphi - \alpha \right| < \frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} \quad (3.1)$$

quand $\varepsilon_0 |\alpha|$ est inférieur à 1. On est capable d'approcher la phase du signal par son approximation au premier ordre en bornant convenablement $|\alpha|$, et cette borne de la grandeur $|\alpha|$ est le rayon du domaine temporel, mesuré en nombre de périodes $\dot{\varphi}^{-1}$, sur lequel le signal est indistinct de son signal harmonique « tangent ». L'inégalité suivante est vérifiée dans ce domaine

$$\frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} < s \quad (3.2)$$

Pour $\varepsilon_0 |\alpha| \ll 1$, le rayon est proportionnel à $(s/\varepsilon_0)^{1/2}$ car l'inégalité devient

$$\frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2}{2} < s$$

Sous la condition $(2\varepsilon_0 s)^{1/2} \ll 1$, un seuil s et une variation fréquentielle limitée à ε_0 impliquent l'existence d'un domaine de rayon $(2s/\varepsilon_0)^{1/2}$ (en nombre de périodes) sur lequel le signal est indistinct de son approximation harmonique.

Remarquons que la borne supérieure $\varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2$ de l'erreur est le majorant naturel du terme d'ordre 2 du développement en série de la phase (cf. section 3.3.3). L'erreur est en fait la somme des termes d'ordre ≥ 2 . En substance, si on majore le terme d'ordre 2 de la série, on majore la somme des termes d'ordre ≥ 2 .

3.3.2 Flou temporel ou l'ordre zéro

On veut évaluer la distance entre $e^{\varphi(\bullet + \alpha\dot{\varphi}^{-1})}$ et e^{φ} , c'est-à-dire la distance entre le signal et son approximation constante, qui est l'approximation de sa phase à l'ordre zéro.

4. Il suffit en fait que $\dot{\varphi}^{-1}$ soit ε_0 -lipschitz, il n'y a pas forcément besoin d'une valeur bien précise de la dérivée en chaque point si on peut établir $|\Delta\dot{\varphi}^{-1}| < \varepsilon_0 |\Delta t|$. Voir l'équation (B.3).

L'inégalité triangulaire permet de majorer la distance en sommant les distances respectives à $e^{\varphi+\alpha}$

$$\left| \varphi \left(\bullet + \alpha \dot{\varphi}^{-1} \right) - \varphi \right| < |\alpha| \frac{1 - \varepsilon_0 |\alpha|/2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|}$$

toujours avec $\varepsilon_0 |\alpha|$ inférieur à 1. On est capable d'approcher la phase du signal par son approximation à l'ordre zéro en bornant convenablement $|\alpha|$, et cette borne de $|\alpha|$ est le rayon du domaine temporel, mesuré en nombre de périodes $\dot{\varphi}^{-1}$, sur lequel le signal est indistinct d'un signal constant. L'inégalité suivante est vérifiée dans ce domaine

$$|\alpha| \frac{1 - \varepsilon_0 |\alpha|/2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} < s$$

Pour $\varepsilon_0 |\alpha| \ll 1$, le rayon est proportionnel à s car l'inégalité devient

$$|\alpha| < s$$

Sous la condition $\varepsilon_0 s \ll 1$, un seuil s et une variation fréquentielle limitée à ε_0 impliquent l'existence d'un domaine de rayon s (en nombre de périodes) sur lequel le signal est indistinct de son approximation constante. Autrement dit, l'évaluation du signal à un instant donné est indistincte de son évaluation sur s période⁵ autour de cet instant – il y a un flou temporel induit.

3.3.3 La gaussienne ou le second ordre

On veut maintenant évaluer la distance entre $e^{\varphi(\bullet + \alpha \dot{\varphi}^{-1})}$ et $e^{\varphi + \alpha + \varepsilon \alpha^2/2}$, c'est-à-dire la distance entre le signal et son approximation gaussienne locale, qui est l'approximation de sa phase au second ordre.

L'inégalité triangulaire permet à nouveau de majorer la distance en sommant les distances respectives à $e^{\varphi+\alpha}$

$$\left| \varphi \left(\bullet + \alpha \dot{\varphi}^{-1} \right) - \varphi - \alpha - \varepsilon \alpha^2/2 \right| < \varepsilon_0 |\alpha|^2 \frac{1 - \varepsilon_0 |\alpha|/2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|}$$

Le signal est heureusement plus proche d'une gaussienne que d'une constante, la distance maximale du signal à son approximation étant diminuée d'un facteur $\varepsilon_0 \alpha$. On fait malgré tout une approximation moins fiable qu'au premier ordre, et sans hypothèses supplémentaires on ne peut pas faire mieux.

5. Censément moins d'une période, puisque s est petit.

Pour une meilleure approximation, l'existence de ε_0 est nécessaire, mais pas suffisante. Il faut par exemple que ε soit κ -lipschitz selon α : on doit avoir $|\Delta\varepsilon| < \kappa|\alpha|$. Alors, on peut établir que⁶

$$\left| \varphi(\bullet + \alpha\dot{\varphi}^{-1}) - \varphi - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 \right| < \left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2} \right) \frac{|\alpha|^3}{6}$$

encore avec $\varepsilon_0|\alpha|$ inférieur à 1. On est capable d'approcher la phase du signal par son approximation au second ordre en bornant convenablement $|\alpha|$, et cette borne de $|\alpha|$ est le rayon du domaine temporel, mesuré en nombre de périodes $\dot{\varphi}^{-1}$, sur lequel le signal est indistinct d'une gaussienne. L'inégalité suivante est vérifiée dans ce domaine

$$\left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2} \right) \frac{|\alpha|^3}{6} < s \quad (3.3)$$

Pour $\varepsilon_0|\alpha| \ll 1$, ce rayon est proportionnel à $s^{1/3}(\kappa + 2\varepsilon_0^2)^{-1/3}$ car l'inégalité devient :

$$(\kappa + 2\varepsilon_0^2) \frac{|\alpha|^3}{6} < s$$

Sous la condition $\varepsilon_0 s^{1/3}(\kappa + 2\varepsilon_0^2)^{-1/3} \ll 1$, un seuil s et une variation fréquentielle limitée à ε_0 impliquent l'existence d'un domaine de rayon $(\kappa + 2\varepsilon_0^2)^{-1/3}(6s)^{1/3}$ (en nombre de périodes) sur lequel le signal est indistinct de son approximation gaussienne.

Ce domaine est plus grand que pour l'approximation de premier ordre si

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2\varepsilon_0^2} \right)^2 \varepsilon_0 s < \frac{9}{8}$$

Quand $\kappa \ll 2\varepsilon_0^2$, c'est-à-dire que les variations de ε jouent un rôle négligeable dans l'erreur de la gaussienne, le rayon est plus simplement $(3s/\varepsilon_0^2)^{1/3}$ et l'approximation gaussienne est toujours meilleure que l'approximation harmonique si $\varepsilon_0 s < 9/8$, ce qui est généralement le cas puisque s et ε_0 doivent être « petits ».

3.3.4 Rayon de convergence

Supposons que la phase est analytique sur les réels. Elle est développable en chaque point réel, mais le rayon de convergence de la série associée est arbitraire. Ce rayon de convergence est la distance à la rupture analytique

6. Voir équation (B.6).

la plus proche depuis le point de développement. L'inégalité (3.1) assure que l'erreur est majorée dans un rayon $1/\varepsilon_0$ en nombre de période, c'est-à-dire tant que le majorant est fini car son dénominateur est non nul. Autrement dit, l'erreur est analytique, puisque la phase l'est, et le rayon de convergence de son développement en série est d'au moins $1/\varepsilon_0$ car il n'y a pas de singularité en deçà. Ceci s'écrit, grâce à la définition du rayon de convergence,

$$\limsup_k \left| \frac{\varphi^{(k)}}{\dot{\varphi}^k k!} \right|^{1/k} < \varepsilon_0$$

La croissance des dérivées de la phase est donc en quelque sorte dominée par ε_0 .

Ce raisonnement peut aussi être fait pour le signal, et pas seulement sa phase, puisque l'exponentielle est une fonction entière. On peut par exemple développer le signal sous la forme

$$e^{\varphi(\bullet + \alpha \dot{\varphi}^{-1})} = e^\varphi e^\alpha \left(1 + \sum_{k \geq 2} \beta_k \alpha^k \right)$$

où $\beta_k = \beta_k(\bullet)$. Le terme entre parenthèses $(1 + \dots)$ est le facteur correctif de l'égalité, développé en série entière. La somme sur $k \geq 2$ est l'erreur relative entre le signal et son signal harmonique tangent. Les coefficients β_k sont sans dimension ; il en va de même pour les puissances du nombre de périodes α^k . Le terme du premier ordre est nul, le terme d'ordre 2 est $\beta_2 = \varepsilon/2$. Le rayon de convergence du facteur $(1 + \dots)$ étant aussi d'au moins $1/\varepsilon_0$ en nombre de période, c'est-à-dire selon α , on a l'inégalité

$$\limsup_k |\beta_k|^{1/k} < \varepsilon_0$$

On rappelle que le rayon de convergence d'un développement, c'est-à-dire la limite au-delà de laquelle il n'est plus convergent, n'est pas identique à son rayon de coïncidence sur les complexes, même quand le signal est analytique. Voir la section 1.3.2, figure 1.8.

**^{*}

Horizon du signal Les majorants d'erreur précédents sont finis tant que $|\alpha|$ est inférieur à $1/\varepsilon_0$. Au-delà de ce rayon $1/\varepsilon_0$, le dénominateur du majorant s'annule et il explose. Ainsi, hors du domaine de rayon $1/\varepsilon_0$ en nombre de périodes, le signal peut n'avoir plus rien à voir avec ce qu'il était au centre du domaine. La frontière de ce domaine est un horizon au delà duquel on ne peut rien dire du signal approché par son signal tangent – qu'il soit constant, harmonique ou gaussien – à moins de disposer d'information supplémentaires sur ε comme sa phase ou son module.

Morceaux Tout ce que l'on vient de présenter peut aussi être fait par morceaux, en considérant non plus ε_0 , mais le maximum de $|\varepsilon|$ pour chacun des morceaux sur lesquels on travaille.

3.4 Support de la transformée de Fourier d'un signal asymptotique

On a établi des conditions sous lesquelles un signal asymptotique est indistinct d'un signal d'intégrale nulle. On considère maintenant le signal $e^{\varphi-2i\pi\xi\bullet}$, et son paramètre asymptotique ε_ξ . On veut identifier le domaine où ξ est tel que cette intégrale est indistincte d'une intégrale nulle, c'est-à-dire trouver les fréquences ξ absentes du signal e^φ et pour lesquelles on pourra écrire

$$\int e^\varphi e^{-2i\pi\xi\bullet} \simeq 0$$

On suppose que le signal e^φ est indistinct d'un signal d'intégrale nulle, en particulier $\varepsilon_0 < s$.

Spectre singulier La première condition d'annulation de l'intégrale porte sur les limites de la fréquence instantanée. On requiert $z(-\infty) - \xi$ dans $\blacktriangledown$ et $z(+\infty) - \xi$ dans $\blacktriangle$. Ceci se reformule de la sorte : ξ est à l'intersection de $\blacktriangle$ centré sur $z(-\infty)$ et $\blacktriangledown$ centré sur $z(+\infty)$. Voir le domaine correspondant de ξ sur la figure 3.1

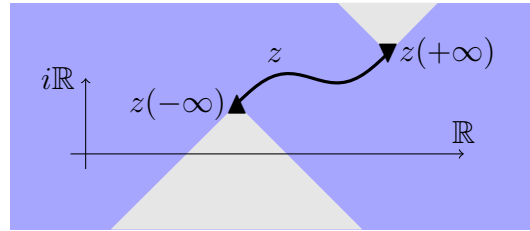


FIGURE 3.1 – Domaine de ξ vérifiant la première condition d'annulation – Complémentaire du spectre singulier

On peut dire que la réunion des deux domaines ne respectant pas la première condition contient le spectre singulier, par analogie avec le support singulier, car c'est le domaine où on ne peut pas attribuer une valeur finie à l'intégrale. Si la fréquence z est une constante, on retrouve bien le support singulier du Dirac complexe, qui est un cône vertical centré en z .

Spectre régulier Sous réserve que ξ soit hors du spectre singulier, l'intégrande est à une distance ε_ξ d'un signal d'intégrale nulle, il faut ensuite comparer cette distance au seuil. On majore d'abord le module du paramètre asymptotique

$$|\varepsilon_\xi| \leq \frac{\varepsilon_0}{\left|1 - \frac{\xi}{z}\right|^2}$$

Le signal ne contient pas la fréquence ξ si $|\varepsilon_\xi| < s$, c'est-à-dire si la distance entre ξ et z est d'au moins $|z|(\varepsilon_0/s)^{1/2}$. A chaque z correspond alors un disque de rayon $|z|(\varepsilon_0/s)^{1/2}$ au delà duquel la condition est vérifiée. Voir le domaine sur la figure 3.2, avec $(\varepsilon_0/s)^{1/2} < 1$.

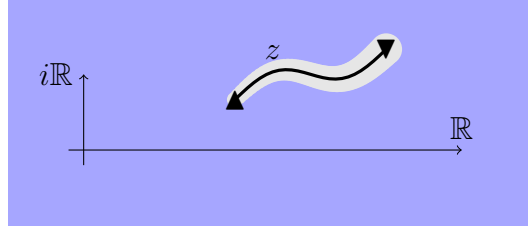


FIGURE 3.2 – Domaine de ξ vérifiant la seconde condition d'annulation – Complémentaire du spectre régulier

On peut dire que cette réunion de disques ne respectant pas la seconde condition est le spectre régulier. Plus le signal ressemble localement à un signal harmonique, plus le spectre régulier épouse la courbe de fréquence instantanée⁷.

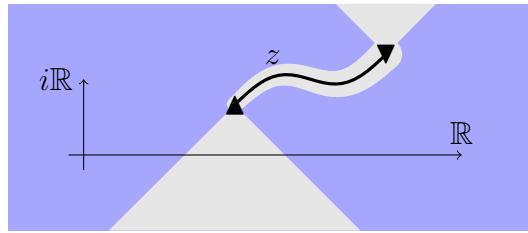


FIGURE 3.3 – Domaine de ξ vérifiant les deux conditions d'annulation – Complémentaire du spectre.

7. L'harmonicité locale est valide dans un rayon $(2s/\varepsilon_0)^{1/2}$ en nombre de périodes ; l'annulation de l'intégrale est valide hors d'un rayon $(\varepsilon_0/s)^{1/2}$ en nombre de fréquences : ces deux quantités sont inverses l'une de l'autre à un facteur $\sqrt{2}$ près. Plus l'un est grand, plus l'autre est petit ; on a en quelque sorte une « égalité de Heisenberg » qui serait $2\pi\Delta f\Delta t = \sqrt{2}$.

Support complexe En combinant les conditions, on arrive au domaine de la figure 3.3. On va maintenant exploiter la propriété de prolongement de la transformée de Fourier.

On a la relation

$$\int e^{\varphi} e^{-2i\pi\xi\bullet} = \int e^{\varphi+2i\pi(iy)\bullet} e^{-2i\pi(\xi+iy)\bullet}$$

Le membre de gauche est l'évaluation en ξ de la transformée de Fourier du signal initial. Le membre de droite est l'évaluation en $\xi + iy$ de la transformée de Fourier du signal translatée de iy . En translatant le spectre verticalement de même que le point d'évaluation, on aboutit à une position relative similaire entre le spectre et le point d'évaluation.

On remarque maintenant que si la transformée de Fourier translatée est une fonction analytique entre $\xi - |y|$ et $\xi + |y|$, son évaluation en $\xi + iy$ sera un prolongement analytique de iy . Une conséquence directe est que tout prolongement depuis un intervalle exclu du support – sur lequel la transformée de Fourier vaut 0 – donne toujours 0, c'est-à-dire que le point de prolongement est aussi exclu du support. Partant, chaque point du spectre régulier⁸ ne peut donc pas être issu d'un prolongement depuis un intervalle hors du support de la transformée de Fourier. On doit donc inclure le support de tous les prolongements possibles qui aboutissent à chaque point du spectre régulier. On a vu que le support d'un prolongement en z est un cône horizontal  centré sur z , donc on doit inclure dans le support complexe de la transformée de Fourier la réunion des cônes horizontaux centrés sur chacun des points du support régulier. Voir le domaine sur la figure 3.4.

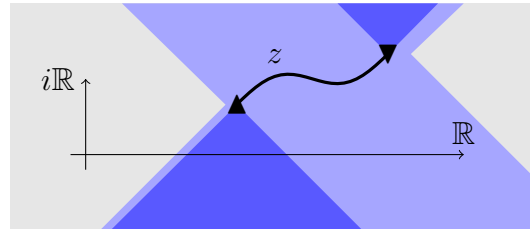


FIGURE 3.4 – Support de la transformée de Fourier de e^{φ} – Support singulier en bleu foncé, support régulier en bleu clair

Le support réel est l'intersection entre le support complexe et les réels. On pourra aussi distinguer les supports réels singulier et régulier.

8. On ne retient ici que le spectre régulier, car on est incapable de donner du sens à une intégrale qui ne « converge » pas. L'égalité sur laquelle on travaille n'a donc aucun sens si c'est l'évaluation d'un point singulier.

Progressivité Si on peut considérer que $(\varepsilon_0/s)^{1/2} \ll 1$, c'est-à-dire que le signal est localement harmonique sur un grand nombre de périodes, alors le support se réduira à la figure 3.5. Ceci montre en particulier qu'un signal asymptotique localement harmonique sur un grand nombre de périodes est progressif si sa fréquence instantanée se situe dans le quart droit du plan complexe $\mathbb{R}^+$. Voir l'annexe A.3 pour un lien entre cette définition et les mouvements à force centrale.

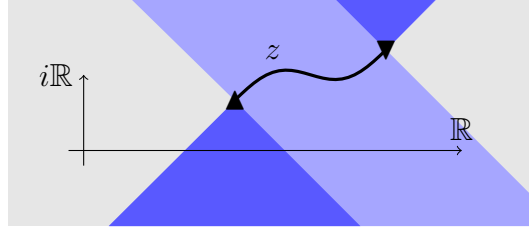


FIGURE 3.5 – Support de la transformée de Fourier de e^φ où $(\varepsilon_0/s)^{1/2} \ll 1$ – Support singulier en bleu foncé, support régulier en bleu clair.

3.5 Stabilité par multiplication

On peut se demander si le produit de signaux asymptotiques est aussi un signal asymptotique. Si l'on pose $u = e^{\varphi_1} \cdot e^{\varphi_2}$, on a immédiatement l'expression du paramètre asymptotique

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$$

Si on peut établir que $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| < \varepsilon_0$, alors

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0 \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2}$$

On a besoin de restreindre un peu les signaux que l'on a multiplié pour en dire plus. On va leur imposer d'être progressifs, c'est-à-dire d'avoir une fréquence instantanée dans le quart droit du plan complexe. Cette hypothèse supplémentaire permet d'arriver à⁹

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0$$

9. Le numérateur est égal au dénominateur quand z_1 et z_2 sont orthogonaux comme vecteurs du plan complexe. Si l'angle entre les deux vecteurs est plus petit – s'il est aigu – le numérateur ne change pas, mais le dénominateur augmente : il lui est alors supérieur. Deux vecteurs du quart de plan droit ont forcément un angle aigu entre eux.

Les signaux asymptotiques progressifs sont donc stables par multiplication, ce qui est cohérent avec la stabilité par convolution de fonctions causale¹⁰, et conservent le même majorant du paramètre asymptotique.

3.6 Somme mélangée

On peut se demander si la somme de signaux asymptotiques est aussi un signal asymptotique. Si l'on pose $u = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2}$, on l'écrit $u = e^{\varphi} 2 \cosh \Delta\varphi$, avec $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ et $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)/2$. On a immédiatement

$$z[u] = z \cdot \left(1 + \frac{\Delta z}{z} \tanh \Delta\varphi \right)$$

En ce qui concerne le paramètre asymptotique, on ajoute l'hypothèse que $|\varepsilon_1|$ et $|\varepsilon_2|$ sont suffisamment petits pour être négligés dans le calcul de $\varepsilon[u]$. On va donc considérer que l'on est « comme » dans le cas d'une somme de signaux harmoniques, et que les dérivées secondes des phases sont nulles¹¹. On trouve alors

$$\varepsilon[u] = \frac{\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}{\left(\cosh \Delta\varphi + \frac{\Delta z}{z} \sinh \Delta\varphi\right)^2}$$

On en déduit¹² une borne inférieure pour $\varepsilon[u]$:

$$|\varepsilon[u]| > \frac{\left|\frac{\Delta z}{z}\right|^2}{\left(1 + \left|\frac{\Delta z}{z}\right|\right)^2} \cdot \frac{1}{(\cosh \Re[\Delta\varphi])^2}$$

ainsi qu'une borne supérieure

$$|\varepsilon[u]| < \frac{\left|\frac{\Delta z}{z}\right|^2}{\left(1 - \left|\frac{\Delta z}{z}\right| - \left|\frac{\sin \Im[\Delta\varphi]}{\cosh \Re[\Delta\varphi]}\right|\right)^2} \cdot \frac{1}{(\cosh \Re[\Delta\varphi])^2}$$

où le dénominateur $(1 - |\Delta z| \dots)$ doit être positif.

La grandeur $|\Delta z/z|$, qui s'écrit aussi $|z_1 - z_2|/|z_1 + z_2|$, s'apparente à l'inverse d'un facteur de qualité, c'est une distance relative entre les fréquences ; elle est forcément plus petite que 1 quand les signaux sources sont progressifs.

10. Si u et v sont progressifs, alors $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont causales. Le produit de convolution $\bar{u} * \bar{v}$, qui est la transformée de Fourier $\bar{uv}$ du produit, est lui même causal puisque $\int \bar{u}(\bullet + \xi) \bar{v}$ est nul quand $\xi < 0$.

11. On montre un majorant de la contribution manquante dans l'annexe B.2.4.

12. On utilise les inégalités de la section B.2.3.

La grandeur $\exp \Re [\Delta\varphi]$, qui apparaît dans le calcul de $\cosh \Re [\Delta\varphi]$, est égale à au rapport $|A_2/A_1|^{1/2}$ et le nombre $\cosh \Re [\Delta\varphi]$ croît quand les amplitudes sont dissemblables.

Le signal somme est d'autant plus asymptotique que les fréquences sont relativement proches¹³, et d'autant plus asymptotique que les amplitudes sont d'ordres de grandeur différents¹⁴.

L'asymptoticité la plus marquée est localisée autour des points de plus forte amplitude du signal somme, là où les signaux sont en phase et les interférences constructives. Le terme $|\sin \Im [\Delta\varphi]|$ est alors proche de 0, et le dénominateur du majorant est proche de $(1 - |\Delta z/z|)^2$. Quand ils sont en opposition de phase, les interférences sont destructives, $|\sin \Im [\Delta\varphi]|$ est alors proche de 1. Quand les amplitudes sont comparables, le dénominateur est proche de $|\Delta z/z|^2$ et le majorant est alors proche de 1. Quand les amplitudes sont suffisamment dissemblables, cette situation ne peut pas se produire et le paramètre asymptotique est encadré comme si les interférences étaient constamment constructives. Plus les fréquences sont éloignées, plus les amplitudes doivent être dissemblables pour assurer un encadrement serré.

On introduit trois nouvelles grandeurs

$$X = \frac{\Delta z}{z} \quad Y = \frac{\Delta A}{A} \quad Z = \sin \Im [\Delta\varphi]$$

Ces grandeurs sont toutes de norme inférieure à 1 pour des signaux sources progressifs ; X est complexe, Y et Z sont réels. La permutation des indices 1 et 2 qui distinguent les signaux sources donne l'opposé de ces grandeurs : considérer leur valeur absolue, c'est ne pas tenir compte du choix arbitraire de la numérotation et ne faire jouer aucun rôle particulier à l'une des sources. La grandeur X mesure la distance relative des fréquences sources ; la grandeur Y mesure la dissimilarité des amplitudes sources¹⁵ ; la grandeur Z mesure la destruction interférentielle¹⁶. On a aussi les relations « réciproques » suivantes entre les fréquences, les amplitudes et les phases des deux signaux

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1 + X}{1 - X} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{1 + Y}{1 - Y} \quad \frac{e^{\varphi_2}/A_2}{e^{\varphi_1}/A_1} = \frac{(1 - Z^2)^{1/2} + iZ}{(1 - Z^2)^{1/2} - iZ}$$

13. Deux signaux asymptotiques de fréquences identiques ont une somme évidemment asymptotique.

14. Un signal dans lequel une composante écrase l'autre est forcément asymptotique, car cette composante domine dans la somme.

15. Quand les amplitudes sont identiques, la grandeur $|Y|$ est minimale et vaut 0 ; elle est maximale et vaut 1 quand les amplitudes sont infiniment dissemblables – l'une vaut alors 0 ou $+\infty$. Si Y est positif, alors $A_2 > A_1$; si Y est négatif, alors $A_2 < A_1$.

16. Quand les interférences sont purement destructives, la grandeur $|Z|$ est maximale et vaut 1 ; quand les interférences sont purement constructives, la grandeur $|Z|$ est minimale et vaut 0. Si Z est positif, le signal 2 a de l'avance ; si Z est négatif, le signal 2 a du retard.

En utilisant ces nouvelles notations, le paramètre est encadré par¹⁷

$$\frac{|X|^2(1-Y^2)}{(1+|X|)^2} < |\varepsilon[u]| < \frac{|X|^2(1-Y^2)}{(1-|X|-|Z|(1-Y^2)^{1/2})^2}$$

On peut imaginer fixer un seuil d'asymptoticité ε_s au-delà duquel un signal ne sera plus dit « asymptotique ». C'est une notion locale d'asymptoticité, qui se définit point par point. Quand le minorant est plus grand que ce seuil, la somme ne peut pas être asymptotique en ce point¹⁸. Quand le majorant est plus petit que ce même seuil, la somme est asymptotique en ce point¹⁹. Voir figure 3.6. En pratique, les deux signaux sources décrivent une unique courbe dans le domaine (X, Y) , qu'il s'agira de situer par rapport aux domaines bleu et rouge puis y faire correspondre les intervalles de temps correspondants.

Dans le cas de deux fréquences relativement proches, c'est-à-dire que $|X|$ est négligeable face à 1, et autour des points de plus forte amplitude, c'est-à-dire $|Z|$ négligeable, le module du paramètre asymptotique est fixé par

$$|\varepsilon[u]| = |X|^2(1-Y^2)$$

17. Le majorant de la contribution manquante relevant des dérivées secondes de la phase a précisément le même dénominateur que le majorant que l'on met en évidence ici. Il suffit de rajouter $+4\varepsilon_0$ au numérateur pour obtenir un majorant global; voir annexe B.2.4. La contribution des dérivées secondes est faible si $4\varepsilon_0 < |X|^2(1-Y^2)$.

18. La condition de non asymptoticité s'écrit

$$|Y|^2 < 1 - \varepsilon_s \left(1 + \frac{1}{|X|}\right)^2$$

19. La condition d'asymptoticité s'écrit

$$|Y|^2 > 1 - \varepsilon_s \left(\frac{1 - |X|}{|X| + |Z|\varepsilon_s^{1/2}}\right)^2$$

Remarquons que la condition d'existence du majorant $1 - |X| - |Z|(1 - |Y|^2)^{1/2} > 0$ est forcément satisfaite dans ce domaine; il n'y a pas lieu de la considérer plus avant.

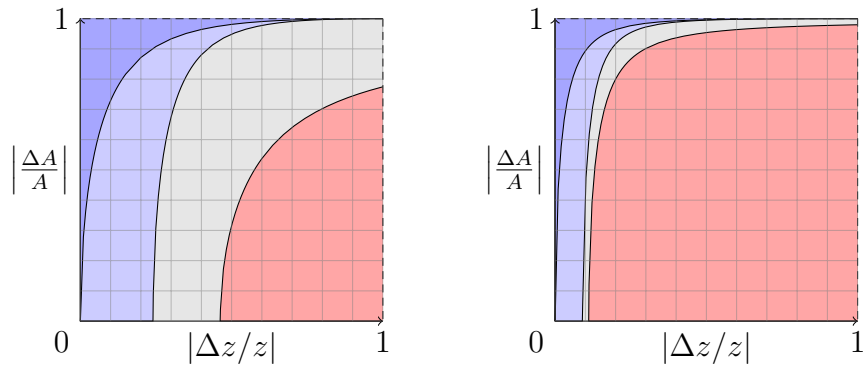


FIGURE 3.6 – Somme asymptotique dans le domaine bleu, somme non asymptotique dans le domaine rouge ; $\varepsilon_s = 0.1$ à gauche et de $\varepsilon_s = 0.01$ à droite
*Le domaine bleu foncé correspond au cas le plus défavorable, soit $|Z| = 1$.
 Le domaine bleu clair étend le domaine bleu aux situations favorables : la somme y est asymptotique quand les interférences sont constructives, c'est-à-dire quand $Z = 0$.*

§ 4

Transformation en ondelettes

Les chapîtres précédents, qui peuvent avoir leur propre intérêt tels quels, ont été pensés avec une finalité en tête : la transformation en ondelettes (continue). Ils présentent des outils ou des résultats dont on se servira ici.

Précisons d’abord qu’on la considère comme une transformation temps–fréquence, c’est-à-dire qu’elle transforme des signaux temporels, et donc que l’intégration se fera sur une unique dimension pour obtenir une transformée à deux variables : l’échelle a positive et la translation b réelle. On exclut toute transformation dans le plan, etc. On évacue aussi la question du bruit dans le signal et on traitera uniquement des signaux « propres » ; la linéarité de la transformation n’empêche pas un travail ultérieur sur des signaux bruités – si le bruit est additif, évidemment. La question des effets de bord n’est pas non plus abordée ; s’il faut y faire attention, on se reportera par exemple à [LE et ARGOUL, 2004], en remarquant que la prise en compte est toutefois relativement inadaptée quand les intégrandes mises en jeu sont non bornées. Les considérations numériques (échantillonnage, méthodes de calcul et de recherche d’arêtes etc.) ne sont pas non plus traitées.

Ensuite, on a choisi de la définir comme une série de filtres qui agiront par simple multiplication dans le domaine fréquentiel. Ceci a deux principales conséquences : 1) l’ondelette dilatée dans le domaine temporel sera normée par un facteur $1/a$, là où il est parfois pris égal à $1/\sqrt{a}$; 2) là où apparaît usuellement le conjugué complexe de l’ondelette dans le domaine temporel, on aura un retournement. L’intérêt de cette définition est : 1) un maximum d’amplitude selon a correspond effectivement à un pic de réponse du filtre (en tout cas pour un signal harmonique) ; 2) une forme de simplicité (si conjugué il y a, il se retrouvera dans l’évaluation de la transformée, ce qui a peu d’intérêt). Si le choix du facteur $1/a$ n’est pas inhabituel (c’est par exemple celui de TORRÉSANI [1995]), celui du retournement l’est. On suppose que le

rôle important du produit hermitien dans L^2 y est pour beaucoup.

Par ailleurs, on travaillera principalement avec des ondelettes progressives, donc complexes, même si certains des résultats présentés n'y sont pas spécifiques. Les signaux d'entrées étant habituellement réels, ne travailler qu'avec la composante progressive permet de définir des arêtes de manière plus évidente puisque l'amplitude de la transformée est découplé des variations de la phase du signal – du moins en un sens. Ces notions de phase et d'amplitude sont par ailleurs utiles pour le calcul de déformées modales.

La notion d'arête à laquelle on fera appel n'est pas véritablement développée dans le texte, on en donnera simplement deux définitions courantes d'usage immédiat : 1) les maxima d'amplitude selon l'échelle ; 2) la coïncidence entre la fréquence instantanée (réelle) de la transformée et la fréquence pic du filtre. Il peut y en avoir d'autres, par exemple TORRÉSANI [1995] semble plutôt recourir à la coïncidence entre la fréquence instantanée de la transformée et la fréquence de l'ondelette dans le domaine temporel (cette définition est cohérente avec l'évaluation de la transformée par la méthode de la phase stationnaire, que nous n'utiliserons pas).

On donnera une évaluation littérale puis approchée de la transformation en ondelettes de signaux asymptotiques par le biais de résultats établis précédemment. En se limitant aux ondelettes de Cauchy, on donnera quelques résultats sur les arêtes faiblement perturbées de ces signaux. On en tirera aussi des résultats sur la séparation de la somme de deux signaux asymptotiques, qu'on a testés numériquement (en se limitant au cas de signaux harmoniques).

4.1 Définition

On définit la transformée en ondelettes continue d'un signal u , d'ondelette mère ψ en un point (b, a) du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$T_\psi[u](b, a) = \langle \overline{\psi}(a\bullet) | u(\bullet + b) \rangle$$

On peut l'écrire de manières différentes, mais toujours équivalentes¹. Le paramètre b est le paramètre de translation et le paramètre a est l'échelle.

Itérations On peut imaginer itérer la transformée à échelle fixe. On obtient alors, pour chaque échelle, la transformation de la première transformée à

1. Par exemple $\langle \overline{\psi} | u(a\bullet + b) \rangle$, ou bien $\int \overline{\psi} u(a\bullet + b)$, etc.

cette même échelle. Le signal $T[u](\bullet, a)$, dont a est un paramètre, a pour transformée de Fourier ² $\overline{\psi}(a\bullet)\overline{u}$, c'est-à-dire que l'on a filtré u en multipliant $\overline{u}$ par $\overline{\psi}(a\bullet)$. Transformer ce signal filtré à la même échelle a , c'est filtrer et multiplier à nouveau par $\overline{\psi}(a\bullet)$.

$$T_\psi [T_\psi [u](\bullet, a)] (b, a) = \left\langle \overline{\psi}(a\bullet) \cdot \overline{\psi}(a\bullet) \middle| u(\bullet + b) \right\rangle$$

On peut en fait itérer la transformée en ondelettes k fois à échelle constante, c'est alors filtrer et multiplier par la puissance k -ième du filtre. La transformation en ondelettes itérée k fois est

$$T_\psi^k [u](b, a) = \left\langle \overline{\psi}^k(a\bullet) \middle| u(\bullet + b) \right\rangle$$

Avec cette relation, il est tout à fait possible d'envisager une transformation fractionnaire, c'est-à-dire choisir k non entier, voire complexe.

4.2 Transformation en ondelettes et signaux asymptotiques

Le signal à transformer est un signal asymptotique

$$u = e^\varphi$$

de fréquence instantanée z et de paramètre asymptotique ε . On suppose que le signal est analytique et qu'il est presque d'intégrale nulle, soit $\varepsilon_0 < s$; la valeur maximale ε_0 du paramètre asymptotique sera donc petite.

On suppose que $\overline{\psi}$ a un rayon d'évaluation R_ψ . Le rayon d'évaluation de $\overline{\psi}(a\bullet)$ est alors aR_ψ . Pour que la transformée en ondelettes au point (b, a) existe, il suffit que le disque de rayon aR_ψ centré en b soit dans le domaine analytique du signal u , tel qu'on l'a défini précédemment.

On pose

$$\alpha(b) = aR_\psi \dot{\varphi}(b)$$

qui est le rayon d'évaluation de $\overline{\psi}(a\bullet)$ mesuré en nombre de périodes à l'instant b .

2. Cette relation est immédiate sous une des formes intégrales de la transformée en ondelettes, nommément $\int \overline{\psi}(a\bullet) \overline{u} e^{2i\pi b\bullet}$.

4.2.1 Approche sérielle exacte

On va exprimer que le signal est localement, autour de b , proche de son signal harmonique tangent $e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet}$. On écrit

$$u(\bullet + b) = e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet} \left(1 + \sum_{k \geq 2} \beta_k(b) (\dot{\varphi}(b) \bullet)^k \right)$$

où le terme entre parenthèses $(1 + \dots)$ est le facteur correctif de l'égalité, développé en série entière. Ce sont les mêmes β_k que dans la section 3.3.4. Le facteur harmonique agit comme une translation et permet d'établir une première relation

$$\langle \overline{\psi}(a \bullet) | e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet} = e^{\varphi(b)} \langle \overline{\psi}(a \bullet + az(b)) |$$

En complétant avec le facteur correctif, dont le terme d'ordre k agit comme une dérivée d'ordre k , on obtient une évaluation de la transformée en ondelettes dont un des facteurs est écrit comme une somme de dérivées.

$$\langle \overline{\psi}(a \bullet) | u(\bullet + b) \rangle = e^{\varphi(b)} \left(\overline{\psi}(az(b)) + \sum_{k \geq 2} (az(b))^k \beta_k(b) \overline{\psi}^{(k)}(az(b)) \right)$$

Ceci fait, on peut voir la transformée en ondelettes comme une fonction de la variable b et écrire la relation plus succinctement. On utilise les « dérivées adimensionnelles » à la manière de [LILLY et OLHEDE, 2008, éq. (26)]

$$\overline{\Psi}_k = \bullet^k \frac{\overline{\psi}^{(k)}}{\overline{\psi}}$$

pour obtenir la relation

$$T_\psi [e^\varphi] (\bullet, a) = \overline{\psi}(az) e^\varphi \left(1 + \sum_{k \geq 2} \beta_k \overline{\Psi}_k(az) \right)$$

où φ , z et les β_k dépendent implicitement de la variable $\bullet$, anciennement b .

On a établi dans la section 3.3.4 que $\limsup_k |\beta_k|^{1/k} < \varepsilon_0$. En remarquant que³ $\limsup_k |\overline{\Psi}_k(az)|^{1/k} = |\alpha|$, on voit que la convergence de la somme est assurée si $\varepsilon_0 |\alpha| < 1$, c'est-à-dire si le rayon d'évaluation de l'ondelette est inférieur au rayon de convergence minimal du développement. Pour l'existence de la transformée en ondelettes, ce n'est cependant une condition ni nécessaire – il est possible que le rayon de convergence du développement soit plus

3. La translation d'une fonction analytique ne change pas son rayon d'évaluation puisque l'exponentielle, dont elle est l'adjoint, est une fonction entière.

grand – ni suffisante – on est pas assuré que le signal coïncide avec son développement dans tout le disque de rayon $1/\varepsilon_0$ en nombre de périodes. On peut en faire une condition suffisante par un facteur $\sqrt{2}$ au rayon d'évaluation, cf. figure 1.8.

Cette forme est fortement similaire à celle de [LILLY et OLHEDE, 2008, éq. (27)], la différence étant principalement due au point de développement. Nous avons choisi de développer $\bar{\psi}$ autour de az , alors qu'ils ont choisi un développement autour de la fréquence pic réelle. Notre approche assure une prise en compte exacte de l'amortissement, alors qu'il n'apparaît pas dans l'équation citée quand la fréquence est constante.

4.2.2 Approche floue au second ordre

La section 3.3.3 nous a appris que l'on peut écrire

$$u(\bullet + b) \simeq e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet} \exp \left(\frac{\varepsilon(b)}{2} (\dot{\varphi}(b) \bullet)^2 \right)$$

dans un disque dont le rayon α en nombre de périodes vérifie la relation (3.3) reprise ici

$$\left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2} \right) \frac{|\alpha|^3}{6} < s$$

avec α le rayon d'évaluation de l'ondelette. Sous cette condition, on peut remplacer $u(\bullet + b)$ par le membre de droite de l'égalité précédente dans le calcul de la transformée en ondelettes. Si on prend en plus la liberté d'assimiler le facteur $\exp(\varepsilon(b) \dots)$ à son approximation linéaire $(1 + \varepsilon(b) \dots)$, il faut tolérer une erreur supplémentaire majorée par ⁴

$$\frac{\varepsilon_0^2 |\alpha|^4 / 8}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2}$$

toujours avec α le rayon d'évaluation de la transformation, mesuré en nombre de périodes. La condition globale ⁵ est

$$\frac{\varepsilon_0^2 |\alpha|^4 / 8}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2} + \left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2} \right) \frac{|\alpha|^3}{6} < s \quad (4.1)$$

sous laquelle on peut écrire

$$u(\bullet + b) \simeq e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet} \left(1 + \frac{\varepsilon(b)}{2} (\dot{\varphi}(b) \bullet)^2 \right)$$

4. Voir section B.1.2 avec $x = \varepsilon\alpha^2/2$.

5. On somme les contributions à l'erreur. Chacun des termes est associé à une « liberté » que l'on a prise.

dans le calcul de la transformée en ondelettes. Le calcul est alors identique à l'approche sérielle limitée au terme d'ordre deux de la somme. On reprend donc ce que l'on a fait précédemment pour aboutir à la relation

$$T_\psi [e^\varphi] (\bullet, a) \simeq \bar{\psi}(az) e^\varphi \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_2(az) \right)$$

où φ , z et ε dépendent implicitement de la variable $\bullet$, anciennement b . Le signal d'entrée est assimilé à son signal harmonique tangent en b , modulé par un terme perturbatif d'ordre deux. C'est l'approximation « fine » qui servira pour l'étude de l'influence de ε sur la recherche d'arête par l'amplitude.

Cette approche perturbative de la transformée est par exemple suggérée dans [CARMONA et al., 1997, éq. (3)]⁶, à la différence que l'amortissement n'est ici pas une perturbation, puisqu'il est pris en compte de manière exacte.

4.2.3 Approche floue au premier ordre

La section 3.3.1 montre que la relation

$$u(\bullet + b) \simeq e^{\varphi(b)} e^{\dot{\varphi}(b) \bullet}$$

est valide dans un disque de rayon α vérifiant la condition (3.2) suivante

$$\frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2 / 2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} < s$$

En particulier, pour α le rayon d'évaluation de l'ondelettes, on peut remplacer $u(\bullet + b)$ par le membre de droite de l'égalité précédente. Le calcul est alors encore identique à l'approche sérielle, mais cette fois sans aucun terme perturbatif. On aboutit à la relation

$$T_\psi [e^\varphi] (\bullet, a) \simeq e^\varphi \bar{\psi}(az)$$

où φ et z dépendent implicitement de la variable $\bullet$, anciennement b . Le signal d'entrée est assimilé à son signal harmonique tangent en b . C'est l'approximation « grossière » qui servira pour l'étude des interférences par exemple.

4.3 Ondelette mère progressive et signaux réels

Utiliser une ondelette mère progressive sur un signal, c'est ne garder que la composante progressive de ce signal. On note u le signal d'entrée, et v sa

6. Il y a certainement une coquille dans le texte, et il faut y lire « $|\phi''|/|\phi'|^2$ ».

composante progressive

$$\mathcal{P}[u] = v$$

Si on peut décomposer le signal progressif v en une somme de composantes asymptotiques $\sum_k e^{\varphi_k}$, chaque composante e^{φ_k} ne correspond pas forcément à une composante du signal d'entrée. Il faut pour cela que la composante asymptotique soit elle-même progressive. Cette condition est vérifiée si la fréquence complexe z_k de la composante se trouve dans . Voir la section 3.4. En ce cas, il existe au moins un signal u_k tel que

$$\mathcal{P}[u_k] = e^{\varphi_k}$$

Si on souhaite connaître u_k , il faut un inverse unique à $\mathcal{P}$. L'inverse est unique si on impose u_k réel : c'est le double de la partie réelle.

$$u_k = 2\Re[e^{\varphi_k}]$$

Sous ces conditions, on est alors capable de décomposer u réel en somme de composantes

$$u = \sum_k u_k$$

La décomposition peut ne pas être complète – on a identifié un nombre de limité de u_k – mais pour chaque composante progressive de v , il y a une unique composante de u qui lui correspond.

4.4 Ondelettes de Cauchy

Les ondelettes de Cauchy sont un sous-ensemble des ondelettes de Morse, que l'on va d'abord présenter.

4.4.1 Ondelettes de Morse

Une construction On peut créer toute une famille d'ondelettes à partir de deux opérations simples sur la première ondelette de Cauchy dont la transformée de Fourier est $\bullet e^{1-\bullet} \cdot H$, ici sous sa forme de filtre unitaire. Les deux opérations correspondent chacune à la composition, l'une à gauche et l'autre à droite, avec une fonction puissance⁷. La première opération est la puissance n -ième de la transformée $\bullet^n e^{(1-\bullet)^n} \cdot H$, qui donne l'ondelette de Cauchy de paramètre n . La seconde opération est la puissance γ -ième de la variable $\bullet^\gamma e^{1-\bullet^\gamma} \cdot H$. Si on effectue ces deux opérations simultanément, on

7. Ces deux opérations préservent d'ailleurs l'unitarité du filtre.

obtient une ondelette de Morse dont la transformée de Fourier est $\bullet^{n\gamma} e^{(1-\bullet^\gamma)n}$. H . On notera $n\gamma = \beta$, et on aura donc le filtre unitaire $\bullet^\beta e^{(1-\bullet^\gamma)\beta/\gamma} \cdot H$, en cohérence avec la notation de LILLY et OLHEDE [2008]. On a tracé une mosaïque de filtres unitaires associés aux ondelettes de Morse dans la figure 4.1, pour les comparer selon β et γ .

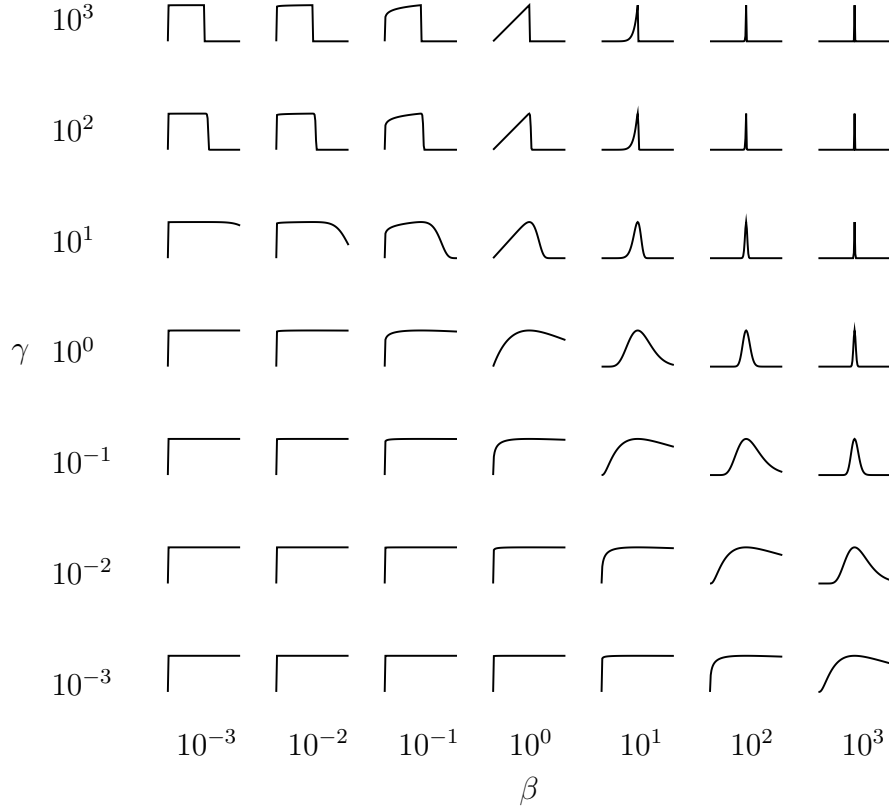


FIGURE 4.1 – Filtre unitaire associé à l’ondelette de Morse
Pour chaque couple (β, γ) , le filtre unitaire $\bullet^\beta e^{(1-\bullet^\gamma)\beta/\gamma}$ est tracé entre 0 et 2.

P ou Q Si le tracé des filtres unitaires est utile pour les comparer, il est aussi possible d’en chercher une caractérisation quantitative. Une grandeur usuelle est le facteur de qualité Q , qui mesure la concentration relative du filtre autour de sa fréquence centrale. LILLY et OLHEDE [2008] propose une grandeur, notée P , qui est la mesure d’une sorte d’écart type temporel, en nombre de périodes, de l’ondelette démodulée par sa fréquence pic. On propose de comparer ces grandeurs dans le cas des ondelettes de Morse. On considère une ondelette de Morse de paramètres (β, γ) sous sa forme de filtre

unitaire. L'expression de P est donnée dans LILLY et OLHEDE [2008] par

$$P^2 = -\partial^2 \bar{\psi}(1) = \gamma\beta$$

tandis que l'expression de Q , établie à partir des calculs de LILLY et OLHEDE [2008], est donnée par

$$Q^{-2} = 4 \frac{\int (\bullet - 1)^2 |\bar{\psi}|^2}{\int |\bar{\psi}|^2} = 4 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2\beta+1}{\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{2\beta+3}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\beta+2}{\gamma}\right)^2} - 1 \right)$$

Il s'agit maintenant de trouver une expression de Q que l'on puisse convenablement comparer à P .

Le cas des ondelettes de Cauchy (pour lesquelles $\gamma = 1$) ne présente pas de difficulté particulière, et on trouve exactement $Q = (\beta/2 + 1/4)^{1/2}$, conformément au résultat établi dans LE et ARGOUL [2004]. On peut l'exprimer en fonction de P selon

$$Q = \frac{P}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2P^2} \right)^{1/2}$$

Les autres situations ne permettent pas un tel calcul. On a recours à des approximations successives en considérant des situations extrêmes⁸. On présente les résultats dans la figure 4.2.

- Le quart droit du plan permet d'exprimer le facteur de qualité Q en fonction de P uniquement. On a trouvé $Q \approx P/\sqrt{2}$ comme dans le cas de l'ondelette de Cauchy avec $P \gg 1$. Les deux grandeurs P et Q sont ici proportionnelles et mesurent sensiblement la même chose. Ces grandeurs sont constantes le long des diagonales descendantes du quart droit de la figure 4.1 : le filtre $(\beta, \gamma) = (10^3, 10^{-2})$ est visuellement similaire aux filtres $(\beta, \gamma) = (10^2, 10^{-1})$ et $(\beta, \gamma) = (10^1, 10^0)$ qui sont sur la même diagonale descendante, etc.
- Le quart haut gauche a un facteur de qualité constant. Le filtre limite est une porte carrée. La grandeur P , qui peut y être petite ou grande, ne permet pas de rendre compte de cette limite ; la fréquence pic perd d'ailleurs de sa signification quand il y a un plateau.
- Le demi quart de plan haut droit a un facteur de qualité β . Il ne peut s'exprimer avec P seul. Le filtre est essentiellement une porte carrée multipliée par $\bullet^\beta$. La grandeur P , plus grande que Q , ne rend pas compte de cette porte limite.
- Ailleurs, Q est petit devant 1 et le filtre est « très large ». P y est aussi petit devant 1. Le filtre limite est la fonction de Heaviside, qui n'est pas vraiment associée à une ondelette.

8. Cf. section B.3.1.

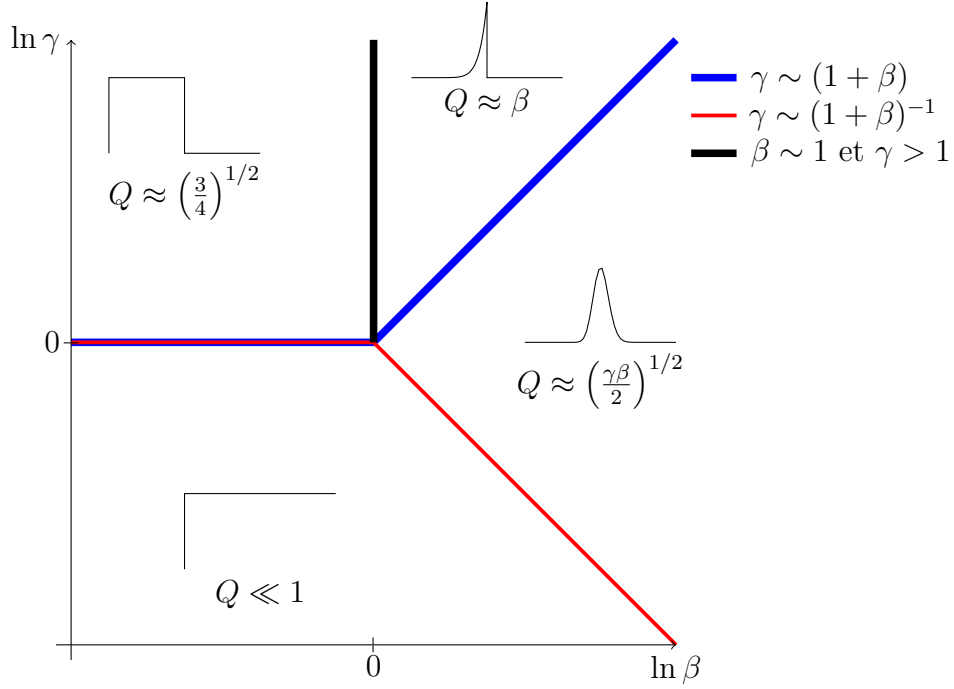


FIGURE 4.2 – Facteur de qualité approché pour des configurations limites

4.4.2 Ondelettes de Cauchy

On appelle maintenant ondelette de Cauchy de paramètre $n \geq 0$ la fonction dont la transformée de Fourier – le filtre associé – est

$$\overline{\psi} = \bullet^n e^{-\bullet} \cdot H$$

On a pas retenu la forme de filtre unitaire, car la forme non unitaire est plus concise, plus « simple ». Voir figure 4.3 pour un tracé de filtres unitaires selon n . C'est une ondelette progressive ; le filtre associé s'affine à mesure que n augmente, et la transformation en ondelettes séparera d'autant mieux les fréquences.

L'ondelette de Cauchy, cette fois dans le domaine temporel, est

$$\psi = \frac{n!}{(1 - 2i\pi\bullet)^{n+1}}$$

Vue comme un signal asymptotique On peut la considérer comme un signal asymptotique, et calculer sa fréquence instantanée

$$z_\psi = \frac{n+1}{1 - 2i\pi\bullet}$$

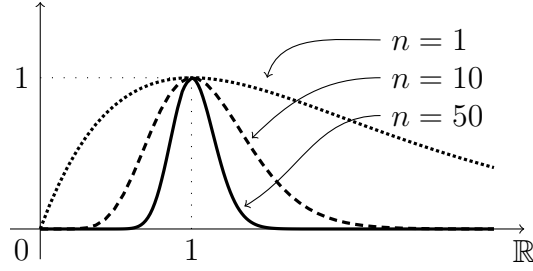


FIGURE 4.3 – Filtre unitaire associé à l'ondelette de Cauchy
 Le filtre unitaire de paramètre n a pour expression $\bullet^n e^{(1-\bullet)^n} \cdot H$.

La fréquence z_ψ décrit dans le plan complexe un cercle de centre $\frac{n+1}{2}$ et de rayon $\frac{n+1}{2}$. Elle fait un tour complet dans le sens trigonométrique, depuis et jusqu'à $z_n(\pm\infty) = 0$. Voir figure 4.4. On peut aussi calculer son paramètre asymptotique

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{n+1}$$

Le paramètre asymptotique est une constante⁹ par rapport au temps, qui tend vers 0 quand n augmente.

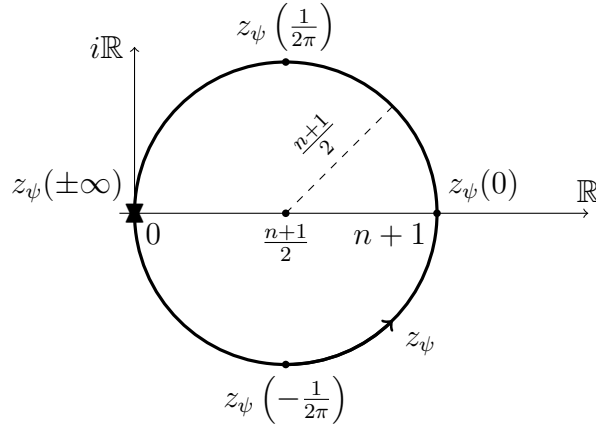


FIGURE 4.4 – Fréquence instantanée de l'ondelette de Cauchy de paramètre n

9. L'ondelette de Cauchy permet d'ailleurs d'obtenir facilement l'ensemble des fonctions de paramètre asymptotique constant, quel que soit le n choisi. En effet, $\psi^{1/k}$ est une solution de $\varepsilon = k/(n+1)$ pour tout k constant arbitraire; l'ensemble des solutions se trouve par l'action des échelles a , translations b et multiplications par un scalaire c pour obtenir les fonctions de la forme $c \cdot \psi^{1/k}(a \bullet + b)$.

Vue comme ondelette mère On note T_n la transformation dont l'ondelette de Cauchy de paramètre n est l'ondelette mère¹⁰. On ne connaît pas le domaine d'évaluation de la fonction de Heaviside, mais l'ondelette de Cauchy de paramètre n sur un signal progressif – sur lequel H a déjà agi – a un unique point d'évaluation en $i/2\pi$. Il est issu du facteur $e^{-\bullet}$ qui agit comme prolongement analytique. Le facteur $\bullet^n$ n'est qu'une dérivation et ne change pas le point d'évaluation. Le rayon d'évaluation de $\overline{\psi}$ est donc $1/2\pi$, et le support réel de la transformation en (b, a) d'un signal progressif est compris entre $b - a/2\pi$ et $b + a/2\pi$.

Le long d'une arête pas trop perturbée, on aura¹¹ $af \approx n$, ce qui veut dire que le support réel d'évaluation le long de l'arête a un rayon (en nombre de périodes) $|a\dot{\varphi}/2\pi| = |\alpha|$ de l'ordre de n pour un signal progressif. Il suffit de substituer n à $|\alpha|$ pour exprimer approximativement des conditions de validité sur $|\alpha|$ le long d'une arête pas trop perturbée.

On suppose dans ce qui suit que le signal asymptotique est progressif, c'est-à-dire que z est dans le quart droit , et $\varepsilon_0 < s$. On omettra donc H dans la transformée de Fourier de l'ondelette.

4.4.3 Approche au premier ordre

La condition de validité de l'approche au premier ordre est l'inégalité (3.2). Sur une arête pas trop perturbée, elle s'écrit

$$\frac{\varepsilon_0 n^2/2}{1 - \varepsilon_0 n} < s$$

et le cas échéant, on peut prendre l'approximation grossière de la transformée

$$T_n[e^\varphi](\bullet, a) \simeq e^\varphi(az)^n e^{-az} \quad (4.2)$$

Condition de validité approchée De manière générale, n est un nombre grand, et s est un seuil petit. Si $\varepsilon_0 n^2$ est au plus de l'ordre de s , c'est que $\varepsilon_0 n$ est lui-même petit. Le dénominateur du membre de gauche de l'inégalité est donc proche de 1 et la condition de validité de l'approche peut s'exprimer, de manière approximative, par

$$\frac{\varepsilon_0 n^2}{2} < s$$

10. Une remarque pour l'instant sans conséquence : $\sum_n T_n/n! = \mathcal{P}$ extrait la composante progressive quelle que soit l'échelle a considérée.

11. Le maximum de $\bullet^n e^{-\bullet}$ est atteint en n .

4.4.4 Approche au second ordre

La condition de validité de l'approche au second ordre est l'inégalité (4.1). Sur une arête pas trop perturbée, elle s'écrit

$$\frac{\varepsilon_0^2 n^4/8}{1 - \varepsilon_0 n^2/2} + \left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0 n)^2} \right) \frac{n^3}{6} < s$$

En ce cas, avec la relation $\overline{\Psi}_2 = (\bullet - n)^2 - n$, on obtient l'expression

$$T_n[e^\varphi](\bullet, a) \simeq e^\varphi (az)^n e^{-az} \left(1 + \varepsilon \frac{(az - n)^2 - n}{2} \right) \quad (4.3)$$

Condition de validité approchée De nouveau, n est un nombre grand, et s un seuil petit. Si $\varepsilon_0^2 n^4$ est au plus de l'ordre de s , c'est que sa racine carrée $\varepsilon_0 n^2$ est aussi petite. Si $\varepsilon_0 n^2$ est petit, c'est donc que $\varepsilon_0 n$ l'est à son tour. On a aussi $\varepsilon_0^2 n^3$ petit devant $\varepsilon_0^2 n^4$. La condition de validité approximative est alors plus simplement

$$\frac{\varepsilon_0^2 n^4}{8} + \frac{\kappa n^3}{6} < s$$

L'approche au second ordre est préférable si le seuil s peut être plus petit que pour l'approche au premier ordre. Le rapport du minorant approché de s au second ordre sur celui au premier ordre est $\varepsilon_0 n^2/4 + \kappa n/(3\varepsilon_0)$, censément inférieur à 1 si le passage au second ordre est profitable. On a déjà vu que $\varepsilon_0 n^2$ est petit, donc joue un rôle négligeable. La condition de primauté du second ordre est finalement

$$\kappa n < 3\varepsilon_0$$

L'utilisation de l'inégalité κ -Lipschitz n'a de sens que si elle est plus restrictive que $|\Delta\varepsilon| < 2\varepsilon_0$ donnée par le majorant de $|\varepsilon|$. Elle n'a donc de sens, le long de l'arête, que si $\kappa n < 2\varepsilon_0$, ce qui assure aussi la condition de primauté du second ordre. Le second ordre est toujours préférable si l'inégalité κ -Lipschitz est plus restrictive que le majorant brut $2\varepsilon_0$.

4.4.5 Approche sérielle

Quel que soit le paramètre n , la fonction $\overline{\Psi}_k$ est un polynôme de degré k . On est capable de l'approcher sous une forme simple dans deux situations extrêmes. Lorsque $k \ll n$, on aura

$$\overline{\Psi}_k \approx (n - \bullet)^k$$

et lorsque $k \gg n$, alors

$$\bar{\Psi}_k \approx (-\bullet)^k (1 - k/\bullet)^n$$

Cette dernière expression montre aussi que $\limsup_k |\bar{\Psi}_k(n)|^{1/k} = n$, c'est-à-dire que l'on trouve bien un rayon d'évaluation n , en nombre de périodes, le long d'une arête pas trop perturbée.

4.4.6 Arête d'un signal asymptotique

On peut définir une arête d'au moins deux manières : soit comme une courbe de maxima locaux de l'amplitude de la transformée en ondelettes, soit comme une courbe de coïncidence entre la fréquence instantanée de la transformée et la fréquence pic du filtre associé. On va d'abord montrer qu'en utilisant une ondelette de Cauchy, ces deux approches sont équivalentes pour une arête faiblement perturbée, c'est-à-dire proche du cas idéal d'une fréquence instantanée épousant parfaitement l'arête.

Évaluation par l'amplitude Le point de départ est la relation (4.3). Pour que cette relation soit valable sur une arête pas trop perturbée, il faut $\varepsilon_0 n^2$ petit et $a|z|$ de l'ordre de n . On en déduit que la perturbation $\varepsilon \cdots$ est petite. On peut donc mettre le facteur $(1 + \varepsilon \cdots)$ sous sa forme exponentielle approximative $\exp(\varepsilon \cdots)$. Il est alors plus facile d'en prendre le module, qui est simplement la partie réelle de l'argument

$$|T[e^\varphi](\bullet, a)| \approx |e^\varphi| |az|^n e^{-\Re[az]} e^{\Re\left[\varepsilon \frac{(az-n)^2 - n}{2}\right]}$$

Les échelles a associées à des maxima d'amplitude, et qui annulent donc la dérivée de l'amplitude selon a , vérifient :

$$\frac{n}{a} - f + \Re[z\varepsilon(az - n)] = 0 \quad (4.4)$$

Évaluation par la fréquence Le point de départ est maintenant la relation (4.2) à partir de laquelle¹² on évalue la fréquence apparente de la transformée, c'est-à-dire que l'on dérive la phase avec a constant. On trouve la fréquence apparente

$$\tilde{z} = z(1 + \varepsilon(n - az))$$

12. On n'utilise pas le second ordre car le terme correctif proportionnel à ε ne change pas la fréquence dans la mesure où il est censément petit et ne perturbe la phase qu'à la marge.

Evaluer l'arête par la fréquence, c'est dire que l'échelle le long de l'arête vérifie la relation

$$\Re[\tilde{z}] = \frac{n}{a}$$

qui se trouve être la même que l'équation (4.4).

**

L'arête évaluée par la fréquence est confondu avec l'arête évaluée par l'amplitude, lorsqu'elle est faiblement perturbée. C'est une spécificité de l'ondelette de Cauchy, puisque l'arête par l'amplitude fait intervenir la dérivée du terme perturbatif proportionnel à $\bar{\Psi}_2$, soit une dérivée d'ordre 3 de $\bar{\psi}$, alors que l'arête par la fréquence fait seulement intervenir une dérivée d'ordre 1 de $\bar{\psi}$.

On confondra ces deux approches dans la suite. Comme on a supposé que l'arête est faiblement perturbée par le terme en ε , on peut poser $n/a = f(1 + d)$ avec $|d|$ censément petit devant 1. On identifie ensuite d :

$$d = n\Re\left[\varepsilon(1 + i\lambda)\frac{d - i\lambda}{1 + d}\right]$$

En considérant que $(1 + d)d \approx d$, il vient ensuite¹³ :

$$d \approx -n\lambda \frac{\partial|z|}{2\pi f|z|} \frac{1}{1 - \frac{n\dot{\lambda}}{2\pi f(1+\lambda^2)}}$$

qui doit vérifier $|d| \ll 1$. Le « numérateur » est au plus de l'ordre de εn et il en est de même du terme perturbatif $n\dot{\lambda} \dots$ au dénominateur¹⁴. Comme εn est petit par hypothèse¹⁵ le dénominateur est proche de 1, et donc

$$d \approx -n\lambda \frac{\partial|z|}{2\pi f|z|} \tag{4.5}$$

qui est forcément petit car il est de au plus de l'ordre de $n\lambda\varepsilon$.

13. Via la relation

$$\varepsilon(1 + i\lambda) = \frac{\dot{\lambda}}{2\pi f(1 + \lambda^2)} + \frac{1}{2i\pi f} \frac{\partial|z|}{|z|}$$

14. Cf. note 13 et $|\lambda| < 1$.

15. L'une ou l'autre des deux approches n'est valide que si εn est petit.

4.4.6.1 Signal modulé en fréquence

Dans le cas d'un signal modulé en fréquence seulement, donc avec un amortissement λ constant, on a¹⁶

$$d \approx -\frac{n\lambda\dot{f}}{2\pi f^2}$$

qui est effectivement petit devant 1 en valeur absolue si la variation relative cumulée de la fréquence sur n périodes $n|\dot{f}|/f^2$ est petit devant 1.

On peut faire plusieurs remarques, une sur chacun des termes du numérateur en gros :

- Si l'amortissement est nul, soit $\lambda = 0$, l'arête n'est pas perturbée malgré les variations de fréquences : l'identification de la fréquence par l'arête est fidèle au premier ordre.
- Si l'amortissement est non nul, on a $\lambda\dot{f}d < 0$. Pour un amortissement positif, $\dot{f}d < 0$ et donc la perturbation d s'oppose à la variation temporelle de la fréquence du signal. Avec un amortissement positif, on repère une fréquence instantanée située « un peu avant » l'instant d'identification. Si l'amortissement est négatif, on repère inversement une fréquence qui est située « un peu après » l'instant d'identification. On peut y voir une déformation de l'enveloppe de l'ondelette par l'enveloppe amortie du signal, qui en décale le centre. C'est probablement une caractéristique de la transformation en ondelettes qui est non spécifique à l'ondelette de Cauchy.
- Ces effets sont corrélés positivement à n . Plus la fenêtre temporelle est large, et donc plus n est grand, plus l'identification sera biaisée : elle aura d'autant plus de « retard » ou d'« avance », selon le signe de l'amortissement. C'est aussi une caractéristique de la transformation en ondelettes probablement non-spécifique à l'ondelette de Cauchy.

On a donc un filtrage non-linéaire de la fréquence : la fréquence $\tilde{f}$ identifiée le long de l'arête est telle que

$$\tilde{f} \approx \left(1 - \frac{n\lambda\dot{f}}{2\pi f^2}\right) f$$

et on peut remarquer que $\tilde{f} \approx f(\bullet - n\lambda/(2\pi f))$ en considérant l'approximation au premier ordre de f pour mettre en valeur le décalage temporel de l'identification, qui est bien conforme à ce que l'on vient de dire.

16. On précise que

$$\frac{\partial|z|}{|z|} = \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{\lambda}\lambda}{1 + \lambda^2}$$

4.4.6.2 Signal modulé en amortissement

Dans le cas d'un signal modulé en amortissement seulement, pour lequel $n|\dot{\lambda}| \ll f$, c'est-à-dire que la variation cumulée de l'amortissement sur n périodes est petit devant 2π , on a¹⁷

$$d \approx -\frac{n\lambda^2\dot{\lambda}}{2\pi f(1+\lambda^2)}$$

On peut faire à nouveau trois remarques :

- On a $\dot{\lambda}d < 0$. Le signe de l'amortissement n'importe pas, et la perturbation d s'oppose toujours à la variation temporelle de l'amortissement du signal. Si l'amortissement croît¹⁸, on repère une fréquence plus basse, et si l'amortissement décroît on repère inversement une fréquence plus élevée.
- Ces effets sont corrélés positivement à n : plus la fenêtre temporelle est large, et donc plus n est grand, plus l'identification sera perturbée.
- La perturbation est d'ordre 2 en λ , contrairement au cas de la modulation en fréquence.

On a encore un filtrage non-linéaire de la fréquence : la fréquence $\tilde{f}$ identifiée le long de l'arête est telle que

$$\tilde{f} = \left(1 - \frac{n\lambda^2\dot{\lambda}}{2\pi f(1+\lambda^2)}\right) f$$

Il n'y a pas de notion de « décalage temporel » puisque la fréquence est supposée constante.

**
*

On a considéré que d influençait la valeur du terme perturbatif dans l'équation de l'arête, et on en a conclu qu'il était petit quand les approximations de la transformée sont valides. On va maintenant poursuivre en négligeant son effet sur la valeur du terme perturbatif, pour lequel on considérera que $n/a \approx f$. La fréquence apparente est en ce cas

$$\tilde{z} \approx z \cdot (1 - in\lambda\epsilon) \tag{4.6}$$

le long de l'arête pas trop perturbée. On retrouve bien l'expression de l'équation (4.5) quand on pose $\tilde{z} = \tilde{f}(1 + i\tilde{\lambda})$. On identifie aussi au premier ordre un décalage temporel de $-in\lambda\dot{\phi}^{-1} = -n\lambda/2\pi z$.

17. Cf. note 16.

18. On ne parle pas ici de sa valeur absolue.

4.4.6.3 Perturbation de l'amortissement évalué

L'amortissement évalué $\tilde{\lambda}$ est le rapport de la partie imaginaire sur la partie réelle de $\tilde{z} = \tilde{f}(1 + i\tilde{\lambda})$. Il vient de (4.6) que

$$\tilde{\lambda} \approx \lambda \cdot \left(1 - \frac{n\dot{\lambda}}{2\pi f(1 + \lambda^2)} + \frac{n\lambda\partial|z|}{2\pi f|z|} \right)$$

Il y a deux termes perturbatifs : celui qui porte le signe négatif $-n\dot{\lambda} \dots$ est issu de la partie imaginaire de $\tilde{z}$ au numérateur ; l'autre, identifié à $-d = n\lambda \dots$, est issu de la partie réelle de $\tilde{z}$ au dénominateur. Les deux termes sont au plus de l'ordre de εn , donc petits.

4.4.7 Mélange séparé

On étudie la transformée d'une somme de signaux. On considère le signal $u = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2}$ qui contient deux signaux asymptotiques superposés. On a vu dans la section 3.6 qu'il était possible, au moins localement, d'affirmer ou d'infirmer l'asymptoticité d'une somme de deux signaux asymptotiques par l'introduction d'un seuil asymptotique fixé ε_s . On a aussi vu que les conditions de validité des approches du calcul de la transformée en ondelettes sont pilotées le long de l'arête en grande partie par la quantité $|\varepsilon|n^2$, censément petite. Par conséquent, si le seuil est tel que $\varepsilon_s n^2$ est petit, c'est que là où la somme est dite localement asymptotique, il est possible de calculer sa transformée en ondelettes comme un unique signal asymptotique. On fixe $\varepsilon_s = 1/n^2$ pour établir une frontière entre les signaux asymptotiques pour lesquels $|\varepsilon|n^2$ est « petit » (inférieur à 1) et ceux dits non asymptotiques, pour lesquels il est « grand » (supérieur à 1).

Quand cette quantité n'est pas petite, cela ne veut tout de même pas dire que les deux signaux sources sont séparables proprement. Il faut travailler directement sur la transformée, dont on utilise l'approximation grossière

$$T[u](\bullet, a) \approx e^{\varphi_1} \bar{\psi}(az_1) + e^{\varphi_2} \bar{\psi}(az_2)$$

Si la source 1 est la référence, le terme perturbatif le long de l'arête non perturbée a pour amplitude

$$\frac{A_2}{A_1} \cdot \left(\frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \right)^{n/2} \cdot \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^n e^{-a(f_2 - f_1)}$$

Pour que la source 1 soit séparable, il faut que ce terme perturbatif soit petit.

On introduit et rappelle les notations

$$X' = \frac{\Delta f}{f} \quad X'' = \frac{\Delta \lambda^2}{1 + \lambda^2} \quad Y = \frac{\Delta A}{A}$$

L'amplitude du terme perturbatif est alors notée

$$\frac{1+Y}{1-Y} \cdot \left(\frac{1+X''}{1-X''} \right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1+X'}{1-X'} \right)^n e^{-af2X'}$$

Vu que la source 1 est la référence on se place sur son arête non perturbée, c'est-à-dire que $a = n/(f - \Delta f)$ et l'amplitude est

$$\frac{1+Y}{1-Y} \cdot \left(\frac{1+X''}{1-X''} \right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1+X'}{1-X'} \right)^n \cdot e^{-2n \frac{X'}{1-X'}}$$

Si l'amplitude de ce terme perturbatif de l'arête 1 est inférieure à un seuil relatif s_r , on peut considérer que l'arête est convenablement séparable¹⁹, s'il est plus grand, il y a un phénomène non négligeable d'interférences²⁰ sur l'arête 1.

On considère maintenant pour simplifier que l'amortissement est le même pour les deux signaux, donc $X'' = 0$ et $X' = X$. Le domaine correspondant à une somme asymptotique et le domaine de validité de l'extraction d'une arête se décrivent alors tous deux dans l'espace (X, Y) . On peut représenter (séparément d'abord, conjointement ensuite) les configurations pour lesquelles la transformée possède une arête associée au signal 1 qui suffit à le décrire (arête dite « 1 »), et celles pour lesquelles une unique arête est suffisante pour décrire la somme des deux signaux (arête dite « globale »). Voir figures 4.5 et 4.6 pour $n = 10$; figures 4.7 et 4.8 pour $n = 100$. Bien entendu, les frontières de ces domaines sont floues et ne marquent pas un changement radical de comportement selon que l'on se trouve d'un côté ou de l'autre.

19. La condition de séparation s'écrit

$$Y < \tanh \left(\frac{\ln s_r}{2} + n \left(\frac{X'}{1-X'} - \operatorname{arctanh} X' - \frac{\operatorname{arctanh} X''}{2} \right) \right)$$

On peut approcher $\operatorname{arctanh}$ au premier ordre quand $|X'|$ n'est pas trop grand; c'est une bonne approximation car le terme de second ordre est nul. On obtient

$$Y < \tanh \left(\frac{\ln s_r}{2} + n \left(\frac{X'^2}{1-X'} - \frac{X''}{2} \right) \right)$$

20. La condition d'interférences s'écrit en changeant le signe des inégalités de la note 19.

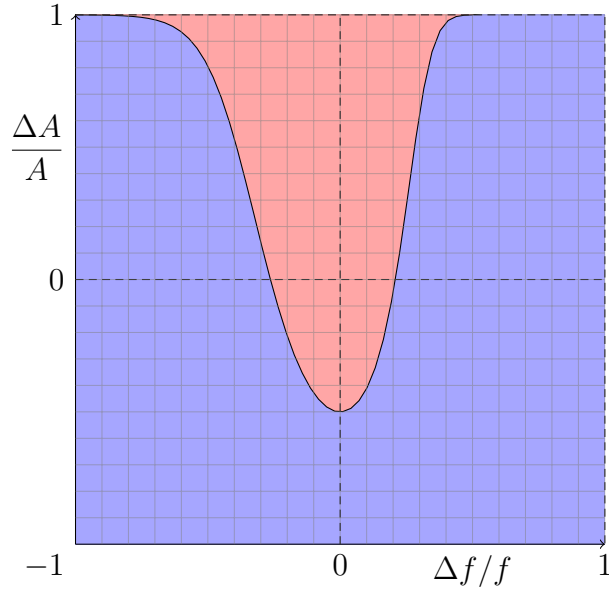


FIGURE 4.5 – Arête 1 convenable dans le domaine bleu, perturbée dans le domaine rouge ; $n = 10$ et $s_r = 1/3$

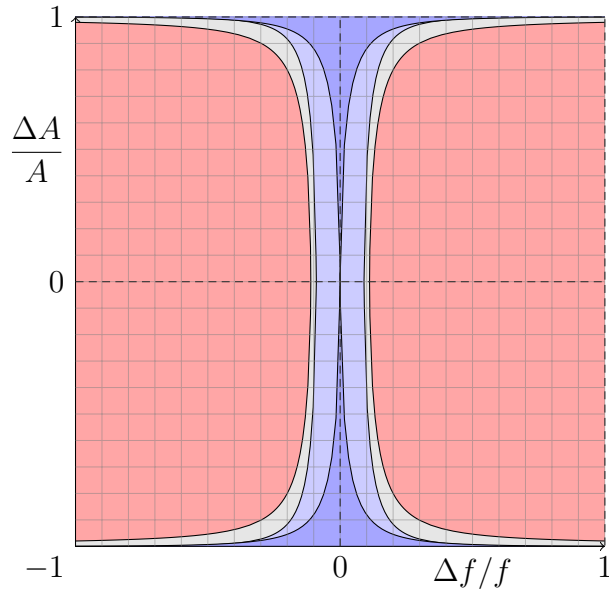


FIGURE 4.6 – Arête globale convenable dans le domaine vert, perturbée dans le domaine rouge ; $n = 10$ et $\varepsilon_s = 1/n^2$

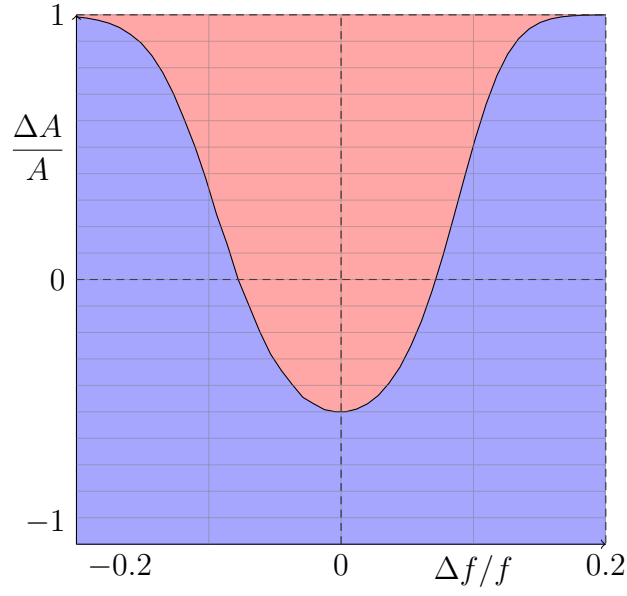


FIGURE 4.7 – Arête 1 convenable dans le domaine bleu, perturbée dans le domaine rouge ; $n = 100$ et $s_r = 1/3$

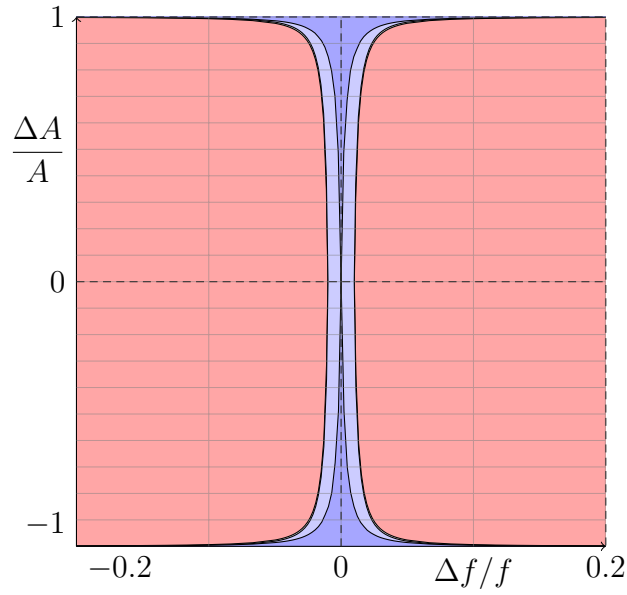


FIGURE 4.8 – Arête globale convenable dans le domaine bleu, perturbée dans le domaine rouge ; $n = 100$ et $\varepsilon_s = 1/n^2$

Essais numériques On a souhaité tracer « numériquement » ces domaines d'arêtes convenables. On s'est limité aux cas où les signaux sources sont d'amplitude et de fréquence constantes pour que les grandeurs X et Y soient constantes au cours du temps. On a donc considéré toute une série de sommes de deux signaux harmoniques non amortis de manière à recouvrir une partie du plan (X, Y) . Le processus est le suivant :

- On a posé $f_1 = 1$ et $A_1 = 1$
- Pour un point (X, Y) donné, on évalue f_2 et A_2
- On crée les signaux $u_1 = A_1 e^{2i\pi f_1 \bullet}$, $u_2 = A_2 e^{2i\pi f_2 \bullet}$ puis $u = u_1 + u_2$ sur un intervalle centré en 0 suffisamment grand pour ces fréquences²¹.
- On calcule la transformée de u à n fixé et on essaie d'extraire une arête autour de f_1 et l'arête dominante entre f_1 et f_2 ; c'est éventuellement la même.
- On compare la première arête à u_1 et la seconde arête à u par l'erreur $\tanh |\ln(\cdot/\cdot)|$ normée entre 0 et 1. On retiendra les valeurs minimale et maximale sur un intervalle d'une demie longueur initiale et centré en 0²².
- On se limite aux arêtes qui contiennent le centre 0 de l'intervalle; s'il n'y a pas d'arête, ou pas d'arête qui satisfasse cette condition, l'erreur est systématiquement maximale et vaut 1. On évalue la longueur manquante de l'arête par rapport à la longueur totale du signal, en valeur relative, pour repérer d'éventuelles arêtes très courtes et peu significatives.

Ceci a été fait pour trois valeurs de n : 10 (figures 4.10 et 4.11), 100 (figures 4.12 et 4.13) et 1000 (figures 4.14 et 4.15).

Les frontières théoriques des domaines, représentées en violet sur les figures, reproduisent au moins qualitativement les frontières des « domaines » calculés numériquement. Elles ne sont pas exactes pour au moins deux raisons :

- L'approche est inexacte car faite d'approximations successives.
- La recherche numérique d'arêtes est instable (saut d'une arête à l'autre selon la largeur de la plage fréquentielle, exclusion en-deçà d'une certaine longueur, considérations numériques, etc.). Ceci explique en particulier les frontières nettes entre des zones bleues (erreur faible) et des zones rouge (erreur élevée).

Si ces figures sont jugées convaincantes, on peut synthétiser les résultats de cette section en un unique dessin, qui représente les configurations possibles (en termes de $\Delta f/f$ et $\Delta A/A$) pour une somme de deux signaux. On y

21. On a choisi $[-n \max T, n \max T]$ avec 10 points par période $\min T$.

22. On veut éviter les effets de bord.

distinguera les configurations dans lesquelles l'une ou l'autre des deux arêtes peut être extraite convenablement, celles où elles le sont toutes les deux, etc. Voir la figure 4.9.

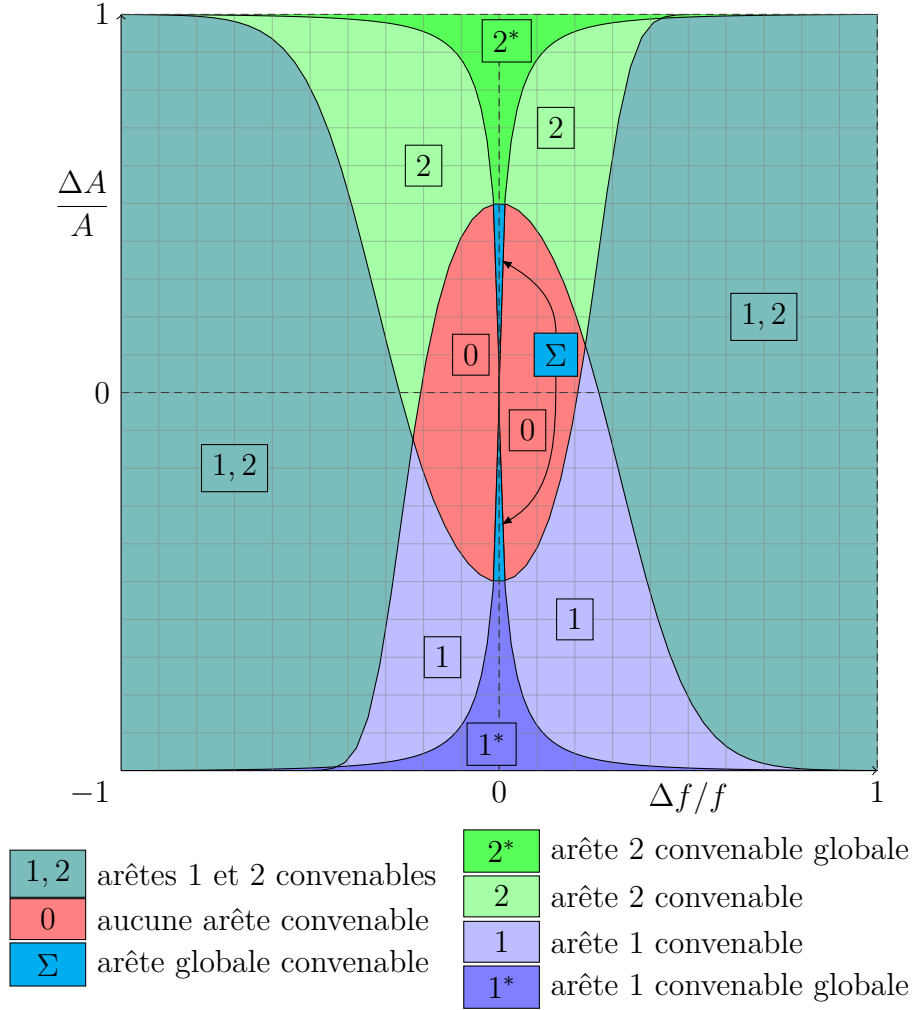


FIGURE 4.9 – Configurations possibles pour une somme de deux signaux ; $n = 10$, $\varepsilon_s = 1/n^2$ et $s_r = 1/3$

Quand l'arête est dite « globale », c'est qu'elle est suffisante pour décrire l'entièreté de la somme des deux signaux sources.

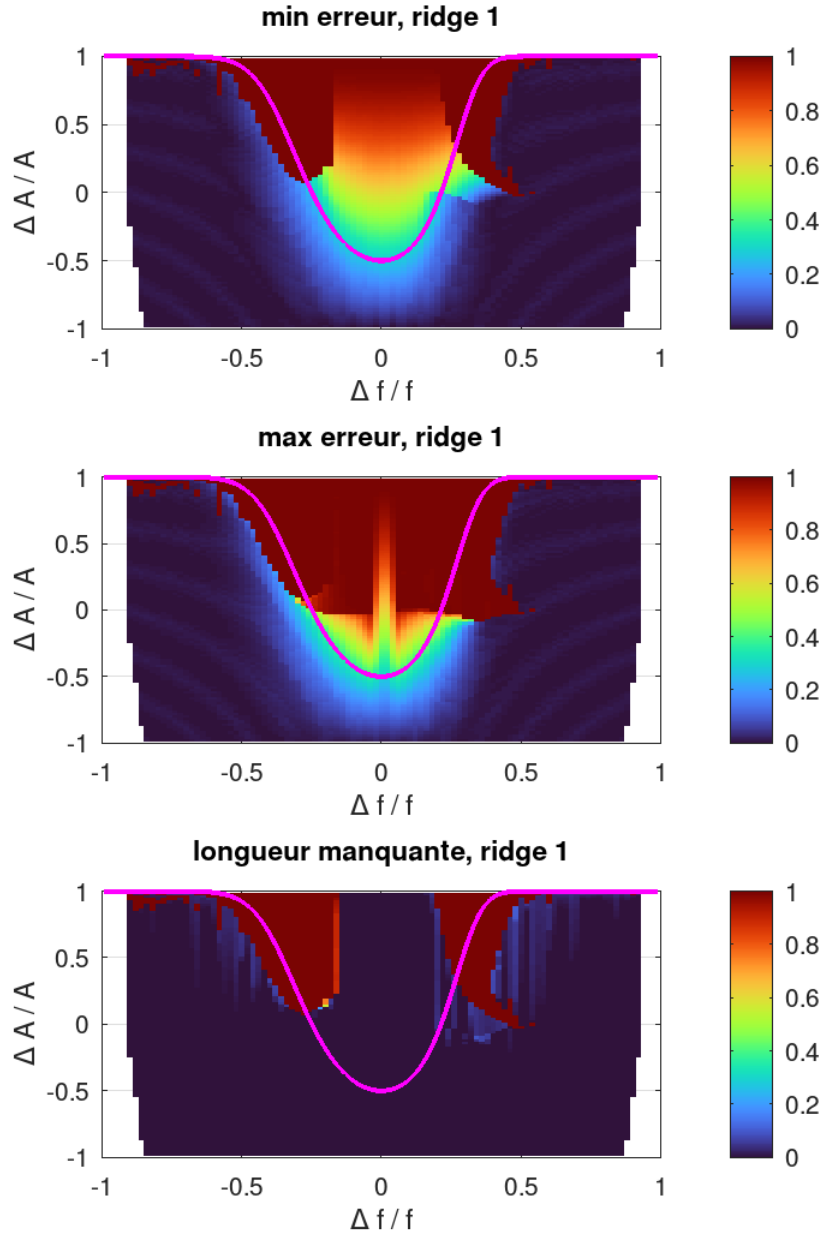


FIGURE 4.10 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête 1 et frontière théorique du domaine correspondant ; $n = 10$ et $s_r = 1/3$

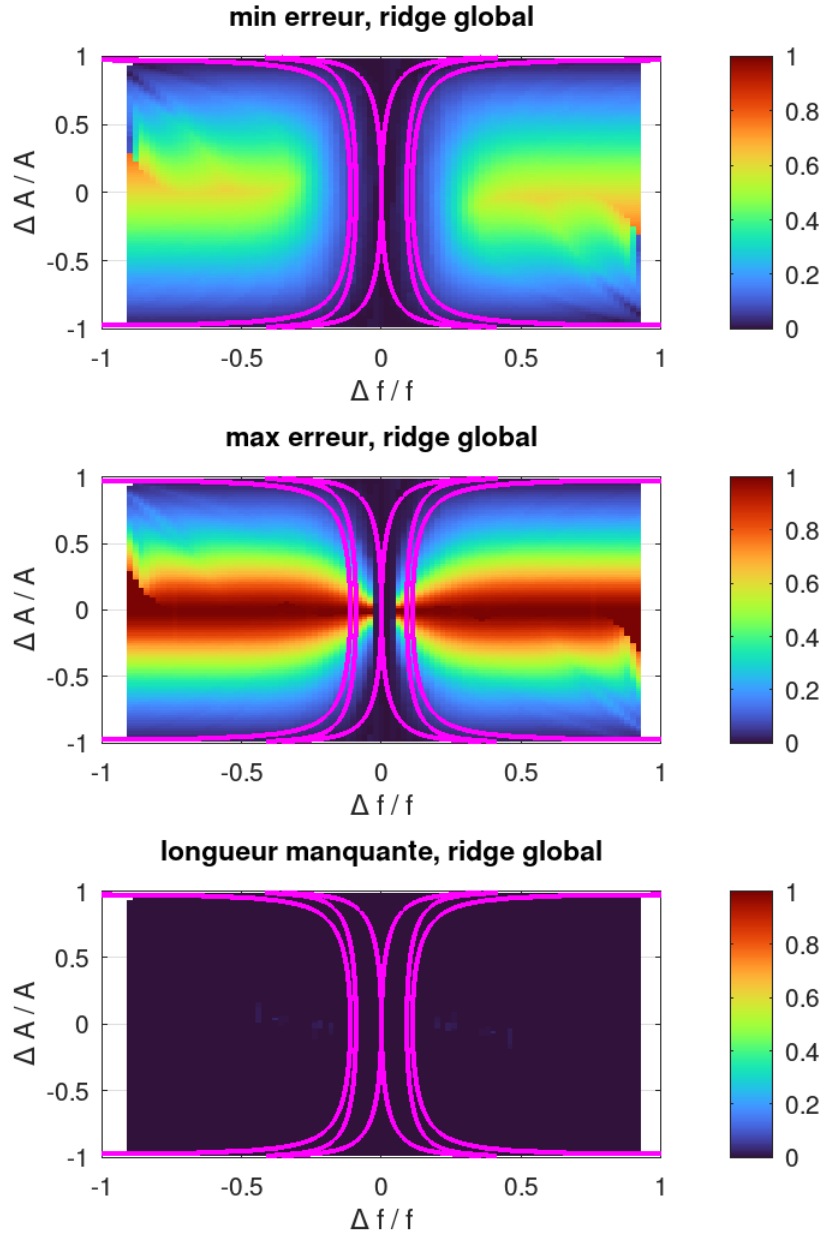


FIGURE 4.11 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête globale et frontières théoriques du domaine correspondant ; $n = 10$ et $\varepsilon_s = 1/n^2$

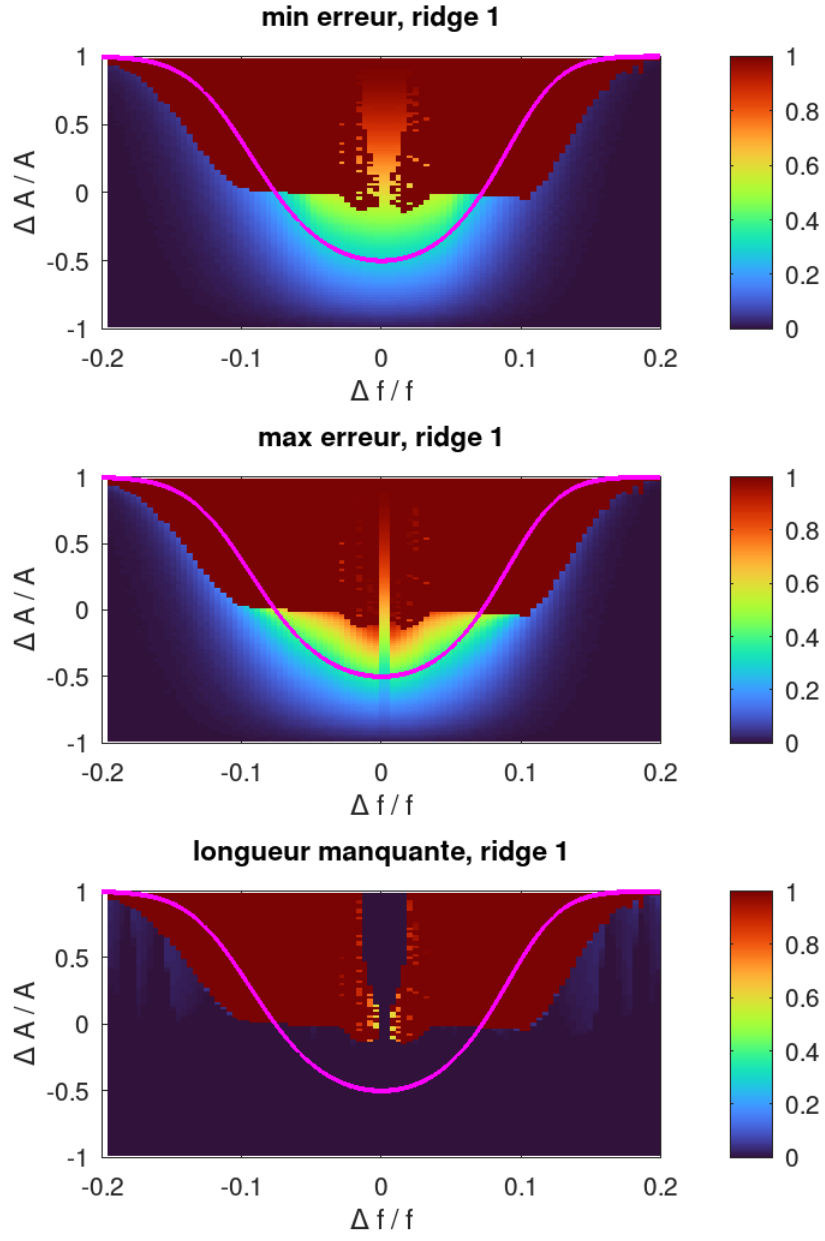


FIGURE 4.12 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête 1 et frontière théorique du domaine correspondant ; $n = 100$ et $s_r = 1/3$

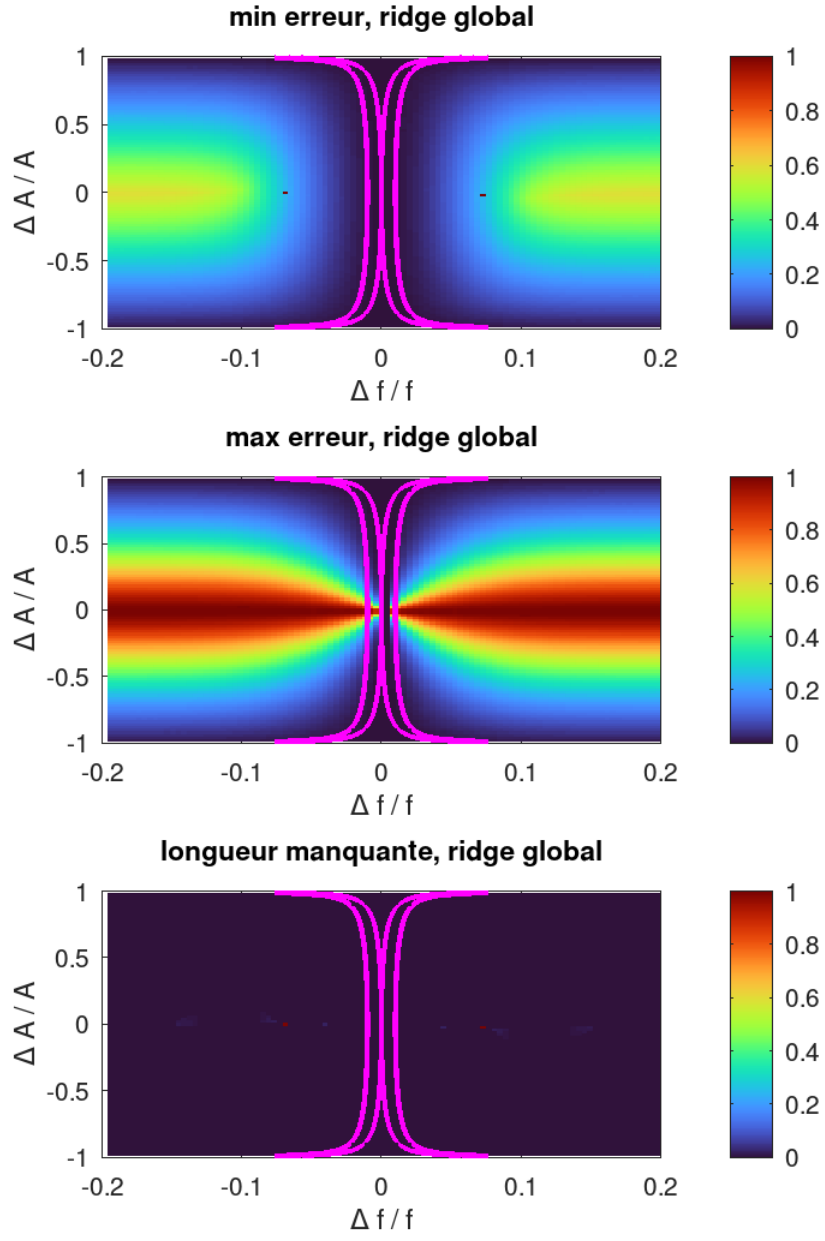


FIGURE 4.13 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête globale et frontières théoriques du domaine correspondant ; $n = 100$ et $\varepsilon_s = 1/n^2$

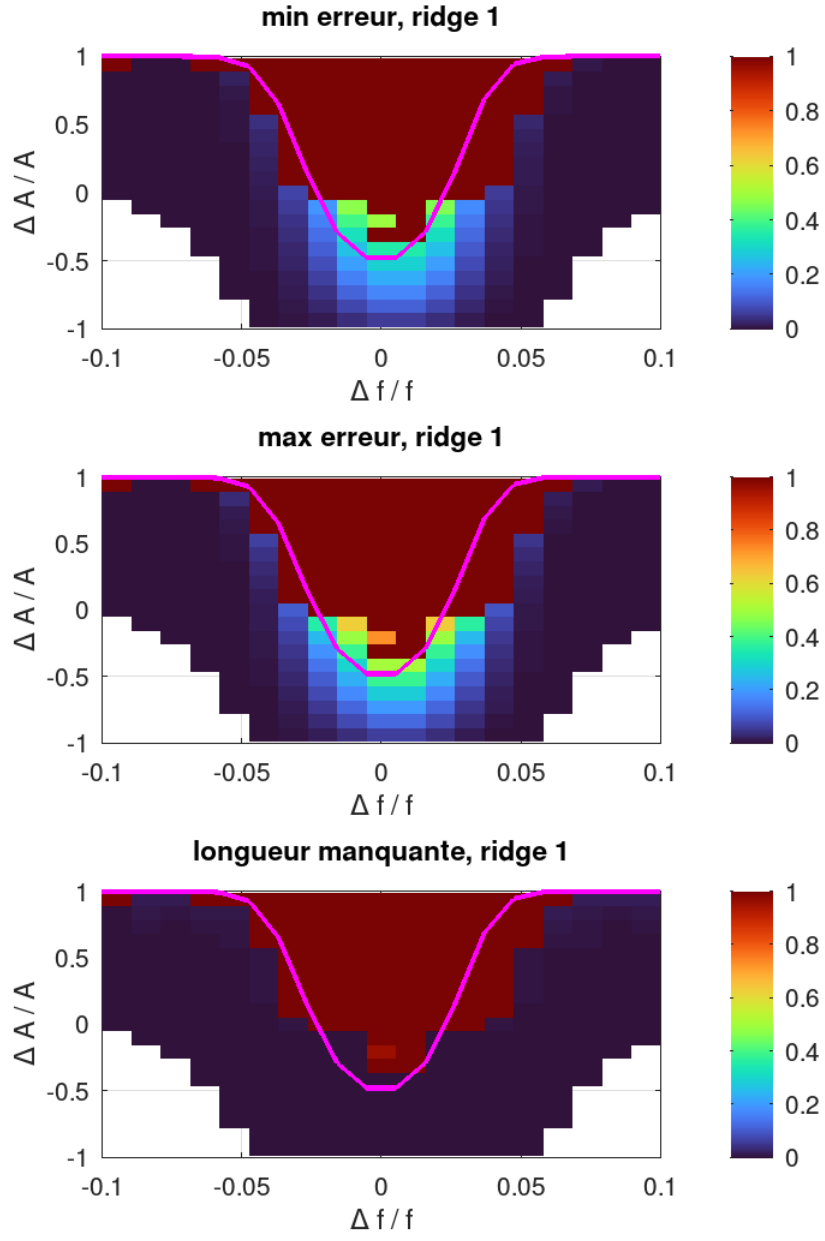


FIGURE 4.14 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête 1 et frontière théorique du domaine correspondant ; $n = 1000$ et $s_r = 1/3$

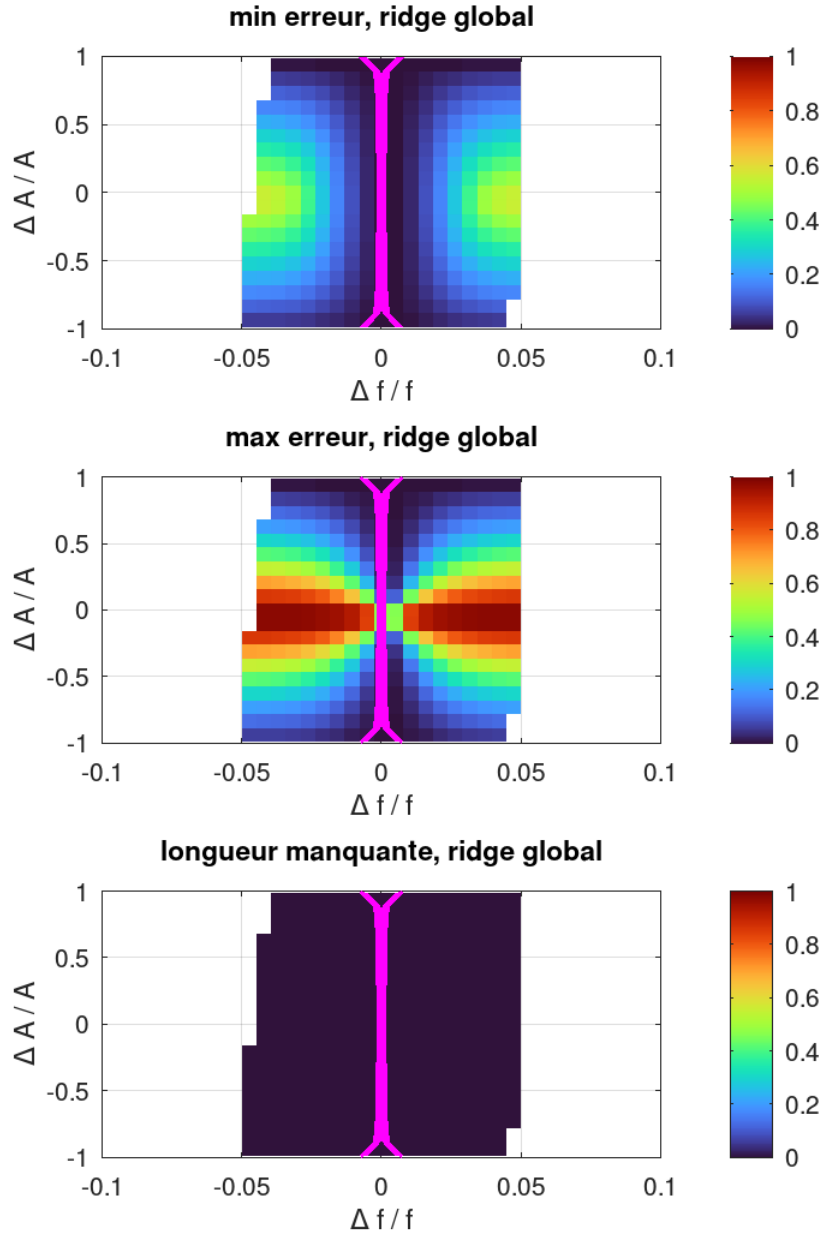


FIGURE 4.15 – Qualité de l'extraction numérique de l'arête globale et frontières théoriques du domaine correspondant ; $n = 1000$ et $\varepsilon_s = 1/n^2$

§ 5

Énergie d'un système oscillant inconnu

Quand on veut déterminer l'énergie d'un système mécanique oscillant inconnu, la question qui se pose véritablement est celle de l'énergie potentielle, puisque l'énergie cinétique peut être déduite des mesures de déplacement, vitesse ou accélération. Si cette mesure est sinusoïdale, on imagine aisément que l'énergie est constante (ce qui peut toutefois être discutable), et qu'il suffit d'y associer une composante imaginaire en quadrature et de même amplitude. Le module au carré de la vitesse complexe est alors la somme de deux quantités oscillantes, dont l'une est effectivement proportionnelle à l'énergie cinétique, et l'autre à l'énergie potentielle « complémentaire » ; cette somme est alors constante. Cette composante imaginaire peut être obtenue de manière systématique par la restriction du signal mesuré à sa composante progressive, c'est-à-dire en lui retirant les fréquences négatives. Ceci fonctionne bien pour une sinusoïde amortie – voire un signal asymptotique – tant que l'amortissement est suffisamment petit ($\lambda^2 < 1$) pour que la mesure soit la partie réelle d'un signal progressif. Ce procédé a cependant ses limites dès que le signal contient plusieurs composantes, puisque la somme de deux sinusoïdes de fréquences différentes aurait une énergie non constante par interférences. Une réponse possible à cet écueil est la séparation des composantes par filtrage, ce que permet précisément la transformée en ondelettes quand on en extrait des arêtes.

On propose donc une définition simple et arbitraire de l'énergie d'un système inconnu, à partir des caractéristiques des composantes de sa réponse libre, qui sont identifiées par ses arêtes. En vient que ses variations dépendent non seulement des variations de l'amplitude, mais aussi des variations de

fréquence instantanée.

5.1 Attribution d'une énergie

Des systèmes que l'on observe, on n'a que peu d'information ; au moins a-t-on un déplacement, une vitesse ou une accélération sur un temps limité. On se limite pour l'instant au déplacement. On suit le raisonnement ci-dessous à propos de l'énergie de ces systèmes oscillants inconnus.

Tout d'abord, la masse étant inconnue, on considérera une quantité massique. Pour attribuer une énergie massique à un système oscillant inconnu, il suffit de l'assimiler à un système oscillant connu qui lui correspond, et dont on connaît l'énergie. Le système oscillant le plus simple (et peut-être le plus physiquement significatif) est le système harmonique, éventuellement amorti. L'énergie massique d'un tel système est caractérisé par le module ¹ de sa fréquence complexe $z = f(1 + i\lambda)$ et son amplitude A .

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} |2\pi z|^2 A^2$$

Attribuer une fréquence et une amplitude à un système oscillant inconnu, c'est alors lui attribuer une énergie massique.

La transformée en ondelettes et la recherche d'arêtes permettent de décomposer une réponse en une somme de composantes asymptotiques $\sum_p e^{\varphi_p}$. Un système peut alors être vu comme une somme de composants dont les réponses respectives sont les composantes de la réponse.

On identifie la fréquence instantanée $\dot{\varphi}_p$ à la fréquence du p -ième composant ; le module $e^{\Re[\varphi_p]}$ est associé à l'amplitude du p -ième composant. Les fréquences et les amplitudes peuvent varier au cours du temps, donc les composants peuvent aussi varier au cours du temps.

$$\frac{E}{m} = \sum_p \frac{1}{2} |\dot{\varphi}_p|^2 e^{2\Re[\varphi_p]}$$

Le système observé ressemble localement ² à la superposition des systèmes harmoniques « tangents » que sont les composants. Ceci se déduit de l'harmonie locale des signaux asymptotiques. On peut dire que le système possède des modes instantanés (ou « locaux »). Ceci est parfaitement compatible avec la description de systèmes linéaires multimodaux.

1. On retient le module de la fréquence complexe car si on retire le terme dissipatif de l'équation dynamique d'un système harmonique, ce qui a priori ne dissipe pas d'énergie, le module de la fréquence complexe reste le même.

2. C'est-à-dire autour d'un instant précis, et sur une fenêtre temporelle limitée.

5.2 Variation

On étudie la variation de l'énergie d'une seule composante à la fois, c'est-à-dire que l'on fait une étude par mode.

La variation de l'énergie massique du composant se trouve directement par dérivation de son expression. Pour éliminer toute référence à la masse, on dérive le logarithme de l'énergie massique. On trouve une quantité homogène à une pulsation, qui est la variation relative d'énergie massique par unité de temps.

$$\frac{\partial E/m}{E/m} = 2 \frac{\partial |z|}{|z|} - 4\pi\lambda f$$

On divise enfin par la pulsation réelle³ pour obtenir une quantité sans dimension, qui est la variation relative d'énergie massique par période.

$$\frac{\partial E/m}{4\pi f E/m} = \frac{\partial |z|}{2\pi f |z|} - \lambda$$

L'amortissement λ , qui mesure la variation d'amplitude du système, contribue évidemment à la dissipation d'énergie. On a ajouté la contribution issue de la variation de la fréquence, qui mesure la rigidité du système : un système ne peut se rigidifier à amplitude constante qu'avec un apport d'énergie.

Remarques

- Un système conservatif localement harmonique est tel que sa fréquence est d'autant plus élevée que son amplitude est faible, et inversement. Un exemple en est le cas d'une masse rebondissant rigidement entre deux parois, dont on change l'écartement et de sorte que les chocs ont lieu lorsque les parois sont immobiles. Il y a bien conservation de l'énergie car la masse a toujours la même vitesse, et la quantité $f^2 A^2$ est donc conservée⁴ car fA est proportionnel à la vitesse. Incidemment, c'est aussi une situation où peut être discutable le choix du module de la fréquence complexe comme mesure de la rigidité plutôt que sa seule partie réelle.
- Si on dispose de la vitesse ou de l'accélération, il faut modifier l'exposant de $|\dot{\varphi}|$ dans l'expression de l'énergie massique, et donc le facteur de $\partial|z|$ dans l'expression de sa variation. Avec la vitesse, l'exposant et

3. On a voulu obtenir λ dans le cas harmonique, mais on pourrait imaginer diviser par le module de la pulsation complexe pour obtenir le taux d'amortissement usuel $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$.

4. En particulier pour la composante principale, la « fondamentale », mais c'est aussi vrai pour les autres.

le facteur sont nuls (la contribution de la fréquence est déjà contenue dans la variation d'amplitude en vitesse) ; avec l'accélération, l'exposant est -2 et le facteur -1 . L'énergie est proportionnelle au carré du module de la vitesse complexe déduite de la mesure dont on dispose ; ses évaluations par le déplacement, la vitesse et l'accélération sont d'autant plus proches que le signal est asymptotique, ce qui renforce le sens physique – invariant et intrinsèque – de la grandeur proposée.

§ 6

Mise en pratique

On insère deux articles d'application des ondelettes sur lesquels on a travaillé (de près pour le premier, de plus loin pour le second). Ils utilisent tous deux la méthode d'identification des arêtes sur des structures réelles, dont on dispose de quelques réponses supposées libres, pour faire de l'identification modale.

Les deux articles font tous deux de l'identification de déformées modales, en plus de la fréquence, de l'amortissement et de l'amplitude. Il suffit de posséder plusieurs points de mesure, pour lesquels on a pu identifier une fréquence identique ; il s'agit alors d'évaluer les amplitudes et déphasages relatifs pour chacun des points. Ceci a la particularité de fournir une déformée modale instantanée, qui peut permettre de localiser des non-linéarités selon l'amplitude, ou tout simplement de juger de la pertinence du mode extrait : si la déformée est aberrante, c'est probablement que l'identification est mauvaise sur les points « dissonants ».

6.1 Sur une maquette en béton armé

On inclut un article associé à une communication dans un congrès : VACCA et al. [2018]. On précise que c'est une application antérieure à tout ce qui précède.

Dans l'article, on « montre »¹ que la variation d'énergie est approchée

1. En fait, on ne montre rien mais on fait référence à un rapport non public remis à EDF. Dans ce rapport, on fait une hypothèse sur le système variable sous-jacent et l'expression de son énergie, pour en déduire que ce que l'on calcule n'est pas très loin de cette énergie hypothétique sous les conditions présentées dans l'article.

par la somme de deux contributions correspondant à la variation relative d'amplitude de déplacement et la variation relative de fréquence réelle. On a procédé différemment dans le chapitre 5, en définissant directement et différemment la grandeur énergie. La variation relative d'énergie est bien la somme de deux contributions, dont la première reste la variation relative d'amplitude de déplacement mais dont la seconde est la variation relative du module de la fréquence complexe, pas de sa partie réelle. Cette modification change faiblement la variation de l'énergie dans l'article qui suit².

Résumé adapté On s'intéresse à la réponse expérimentale d'une maquette en béton armé supportant trois chocs mous successifs, et sur laquelle ont été disposés des capteurs de déplacement et des accéléromètres.

Observations expérimentales Par l'extraction des arêtes associées au premier mode de la structure, on a mis en évidence quatre tendances :

- Une chute de fréquence irréversible après chaque impact.
- Une chute de fréquence réversible corrélée à l'amplitude modale, même faible : il y a une restauration de la rigidité au cours de l'amortissement de la réponse modale.
- La dissipation est plus basse à faible et forte amplitude qu'autour d'une amplitude intermédiaire.
- Le maximum de dissipation autour de cette amplitude intermédiaire augmente après chaque impact.

La chute de fréquence irréversible est connue sous le nom d'endommagement, mais les autres phénomènes sont plus rarement décrits, expliqués ou modélisés, en particulier dans le cas de réponses dynamiques transitoires.

Orienté par la littérature disponible, ce comportement a pu être reproduit par un modèle rhéologique avec endommagement et friction, que l'on peut imaginer représenter la friction au niveau des fissures.

Observations méthodologiques On a pu identifier convenablement un mode par sa fréquence, son amortissement et sa déformée modale. On a pu confirmer que l'on parlait bien du même mode au cours des tirs successifs par l'identification de la déformée modale. Le caractère « instantané » de l'identification permet de mettre en évidence des comportements non-stationnaires

2. La fréquence, elle-même de l'ordre de 10 Hertz, varie de l'ordre de 1 Hertz par seconde. L'amortissement, lui-même au plus de l'ordre de 10^{-1} , varie de l'ordre de 10^{-2} par seconde. Cf. note 16 de la page 65 : la contribution omise de la variation d'amortissement est de l'ordre de 10^{-3} par seconde, la contribution déjà prise en compte de la variation de fréquence réelle est de l'ordre de 10^{-1} par seconde.

lents, c'est-à-dire faiblement variables à l'échelle d'une période, en particulier à travers la variation des paramètres modaux selon l'amplitude modale, procédure présentée par exemple dans [STASZEWSKI, 2000].

On a vu l'intérêt de tenir compte de la contribution de la variation de fréquence dans la variation d'énergie, qui rend comparables les variations d'énergie issues de déplacements et d'accéléérations.



Characterization of dissipative behaviour of a reinforced concrete mock-up after soft impact tests through wavelet analysis

Nicolas Vacca, Christophe Rouzaud

ESTP/IRC, Cachan, France

Guillaume Hervé-Secourgeon

EDF/R&D, Saclay, France

IMSIA, UMR 9219 EDF - CNRS - CEA - ENSTA ParisTech, Paris-Saclay Univ, France

Mathieu Galan

EDF/SEPTEN, Villeurbanne, France

Pierre Argoul, Claude Rospars

IFSTTAR/MAST/EMGCU, Champs-sur-Marne, France

Contact: nicolas.vacca@ifsttar.fr

Abstract

The objectives of this communication is to characterize the soft impact response behaviour of a reinforced concrete mock-up (OECD/NEA IRIS Phase 3 mock-up, part of a benchmark), and to evaluate the ability of some mechanical models to represent the energy dissipation during and after the impact. Results from the benchmark show insufficient dissipation in numerical models.

Using time-frequency analysis, the dissipative behaviour of the mock-up under impact is evaluated. The stiffness and dissipation associated with the first mode are shown to be amplitude-dependent. This non-linear effect seems to be of a different nature than damage or plastic deformation. A simple rheological model with friction exhibits a similar behaviour.

Keywords: Vibration, energy dissipation, impact, reinforced concrete structures, wavelet analysis

1 Introduction

The accurate representation of the dissipative behaviour of reinforced concrete (RC) structures under impact is of interest when evaluating the

response of nuclear power plants to aircraft crashes.

Nowadays, only concrete damage- and steel yielding- induced energy losses are explicitly taken into account. Tests have shown that those are not sufficient to represent the actual dissipation in RC.

An additional viscous damping through Rayleigh damping on some parts of the structure is sometimes therefore used to compensate for the insufficient dissipation during numerical calculations. Evidence is needed to justify or find an alternative to this use of viscous damping.

To this aim, through the analysis of impact responses of a RC mock-up, we investigate the dissipation that can be identified, and try to characterise it.

2 IRIS3 benchmark

2.1 The tests

The IRIS3 mock-up (fig. 1) is a real-life RC mock-up with RC parts (grey) and two pseudo-equipments (orange). The mock-up is supported on four steel tubes (green) which are embedded at both ends.

A metallic tube (yellow) is accelerated up to a desired velocity with an air gun and aimed at the center of the front wall (red cross).

Three consecutive impacts have been recorded, and the actual missile velocities were 91,8; 93,5 and 167 m/s.

The duration of each impact is estimated to be 17 ms while the period of the lowest excited mode is 57 ms before the first impact.

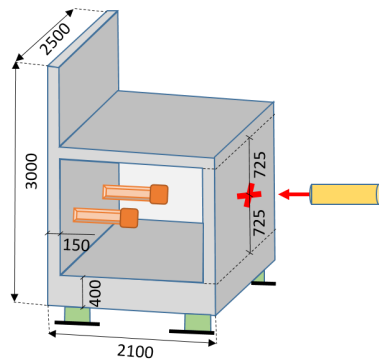


Figure 1. IRIS3 impact tests (dimensions in mm)

2.2 The data recorded

For each of the three test impacts, the response of the mock-up was recorded through displacements, accelerations and strains measurements. Two sets of accelerations are available (VTT and EDF

sensors), and one set of displacements (VTT sensors). Some are placed at the same location, which gives way for a comparison. Modal tests are also done between tests.

We will focus on accelerations and displacements channels, and especially the one plotted next in fig. 2, 3.

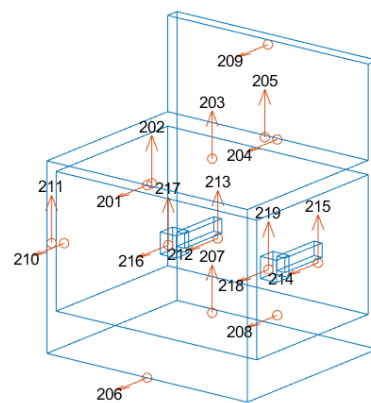


Figure 2. VTT acceleration channels

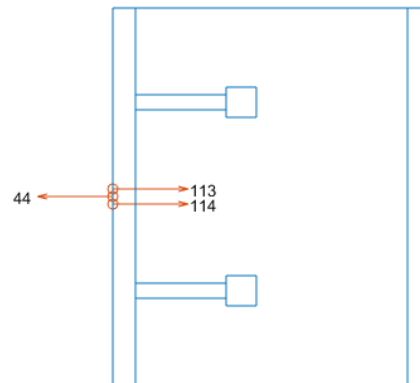


Figure 3. Channels 44 (EDF acceleration sensor), 113 (VTT LVDT displacement sensor) and 114 (VTT laser displacement sensor); top view, sensors are located at the top of the cantilever wall

2.3 The benchmark

20 participating teams made blind calculations of the three consecutive impacts.

Each team had different combinations of calculation code and modeling of the loading, boundary conditions and mock-up (types of elements, material model and parameter values). Results were then compared to measurements.

As a general trend, maximal and residual displacements were satisfactorily reproduced, but accelerations were overestimated by most participants, and had a significant higher frequency content (fig. 4).

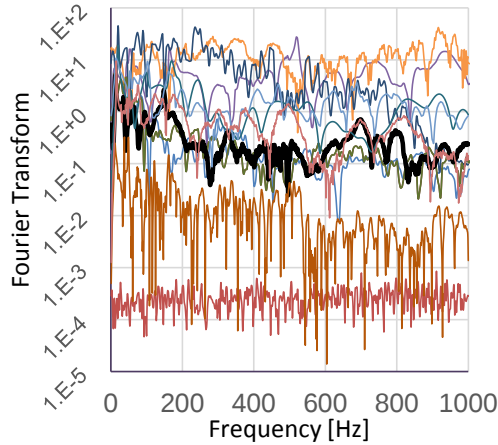


Figure 4. Fourier transform modulus of accelerations at channel 209, log scale. Black line is recorded acceleration, others are participants'

This discrepancy is a sign of the lack of high frequency dissipation in numerical models. The first step to investigate this is to characterise the global dissipative behaviour of the mock-up, of which a start is shown in the next parts.

3 Extraction of instantaneous indicators through continuous wavelet transform

3.1 Continuous wavelet transform, extraction of signal components

Extensive literature is available on methods based on the continuous wavelet transform (CWT) to extract components of a signal through ridge identification, ([1] and [4] for example).

Let u be a multicomponent signal:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N A_k(t) \cos \phi_k(t) \quad (1)$$

Under the condition $\dot{A}_k \ll A_k \dot{\phi}_k$ (in which case the signal is called asymptotic), it is possible to extract the amplitude $A_k(t)$, the instantaneous frequency $f_k(t) = \dot{\phi}_k(t)/2\pi$ and the phase $\phi_k(t) \bmod 2\pi$. This is done ([2]) from the curves of local maxima – called ridges – of the CWT u and the values of the CWT along this curves – the skeleton.

We used Cauchy wavelets. We chose to detect ridges with a simple algorithm based on local evaluation of the gradient along the scale axis. When its sign changes from positive to negative at a point, this point is considered a local maximum. The algorithm then chains them to form ridges: it successively looks for a closeby local maximum to the left or right of a previously chained local maximum.

Applying this process to free vibration signals of a mechanical system, we are able to infer dynamical characteristics of the system ([3] shows examples of identification).

3.2 Indicators

3.2.1 Instantaneous quantities

The instantaneous frequency f_k of the component, in case of free vibrations, is assimilated to the apparent instantaneous eigenfrequency of the identified modal component.

Likewise, the amplitude A_k and phase $\phi_k \bmod 2\pi$ are considered to be those of the identified modal component.

From these quantities, we can also extract instantaneous modal shapes (see [2]) and energy-related quantities. We will focus next on the latter.

3.2.2 Energy indicators

For a single degree of freedom (SDOF) system in free vibration of the form $A(t) \cos \phi(t)$ where $\dot{\phi}(t) = 2\pi f(t)$, under the assumptions

$$\frac{|\dot{A}(t)|}{A(t)} \ll 2\pi f(t) \quad (2)$$

$$\frac{|\dot{f}(t)|}{f(t)} \ll 2\pi f(t) \quad (3)$$

$$\frac{|\ddot{A}(t)|}{A(t)} \ll (2\pi f(t))^2 \quad (4)$$

and introducing the quantities

$$\begin{aligned} \sigma_f(t) &= -\frac{\dot{A}(t)}{2\pi A(t)} \\ \varsigma_f(t) &= -\frac{\dot{f}(t)}{2\pi f(t)} \end{aligned} \quad (5)$$

it can be shown (in [5]) that

$$\sigma_f(t) + \varsigma_f(t) = \frac{P_{diss}(t)}{4\pi E_m(t)}$$

E_m is the mechanical energy of the system and $P_{diss} = -\frac{\partial E_m}{\partial t} > 0$ is the dissipated power. The quantities σ_f and ς_f have the dimension of a frequency.

Under the same conditions, it can also be shown that

$$\frac{\sigma_f(t)}{f(t)} + \frac{\varsigma_f(t)}{f(t)} = \frac{E_{diss/c}(t)}{4\pi E_m(t)} \quad (6)$$

$E_{diss/c}$ is the dissipated energy during a cycle. The quantities $\frac{\sigma_f(t)}{f(t)}$ and $\frac{\varsigma_f(t)}{f(t)}$ are dimensionless.

Condition (2) expresses a small relative variation of the amplitude during an instantaneous period of the signal. Condition (3) expresses a small relative variation of the frequency during an instantaneous period of the signal. Condition (4) expresses a limit on the curvature of the amplitude: the amplitude has to be smooth and cannot have changes of slope too abrupt.

Here A is a displacement amplitude. When treating an acceleration, the definition of $\varsigma_f(t)$ loses the minus sign.

Based on these relations, for each identified modal component (which can be treated as a SDOF system by itself, assuming no coupling between modes) we can compute the previous dissipation-related quantities for each mode k . They are

respectively proportional to the ratios $\frac{P_{diss,k}(t)}{E_{m,k}(t)}$ and $\frac{E_{diss/c,k}(t)}{E_{m,k}(t)}$ associated with each mode k .

In the viscous linear case $\sigma_{f,k} = \xi_k f_k$; $\varsigma_{f,k} = 0$; $\frac{\sigma_{f,k}}{f_k} = \xi_k$ and $\frac{\varsigma_{f,k}}{f_k} = 0$ where f_k is the frequency of mode k and ξ_k the associated damping ratio. It has to be noted that the identified frequency with the method presented here is not f_k but the pseudo-frequency $f_k(1 - \xi_k^2)^{1/2}$. However, assuming small damping through condition (2), the error in evaluating the frequency is small.

3.3 Limits

Instantaneous indicators and quantities are only partially localized, and the method used here is unfit to detect fast variations of amplitude or frequency, which include the edges of the signal and the impact itself.

3.4 Results

Results are shown for the accelerations channels 44 and 209 and the displacements channels 113 and 114 located at the top of the backwall and oriented along the impact axis. The mode identified here is the lowest excited mode. Its modal shape will be determined from the treatment of all available VTT acceleration sensors.

The results are plotted for the first impact. The frequency identified on each channel (fig. 5) are sensibly the same, except at the borders of the signals: edge effects prevent a good identification and the dashed portions of the curves are uncertain estimations.

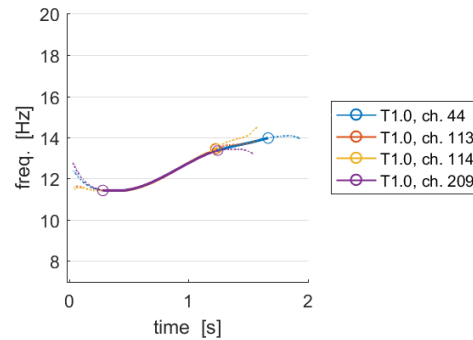


Figure 5. Identified frequency as a function of time

A clear upward tendency can be seen, which means that the stiffness associated to this mode increases as its response is dampened.

The energy indicators are plotted next (fig. 6, 7), taking into account the fact that we have both displacements and acceleration measurements. All channels are in agreement (which also means that the sign change of ζ_f proves justified).

Here the dissipation seems to be maximal at some instant, and then decreases as the response is damped.

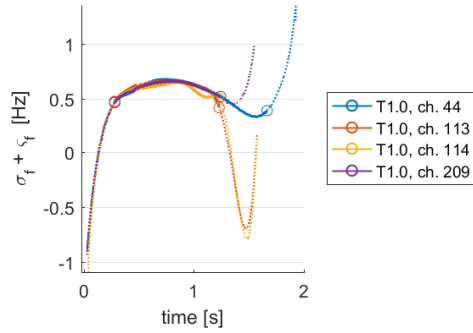


Figure 6. $\sigma_f + \zeta_f$ as a function of time

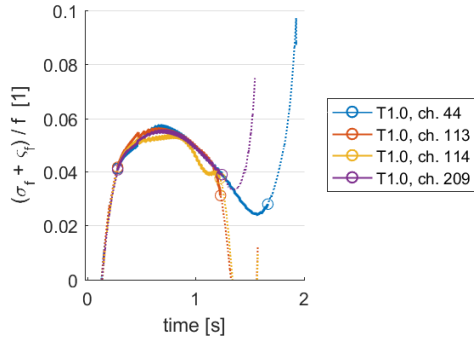


Figure 7. $\frac{\sigma_f + \zeta_f}{f}$ as a function of time

Both frequency and dissipation appear to be amplitude dependent for the first mode. The next step is to check if it is a repeated observation: we will do the same for the two other tests. Focusing on channel 44, results are shown (fig. 8, 9, 10) for all three impacts as a function of the logarithm of the amplitude (in m/s^2) corresponding to the identified modal component.

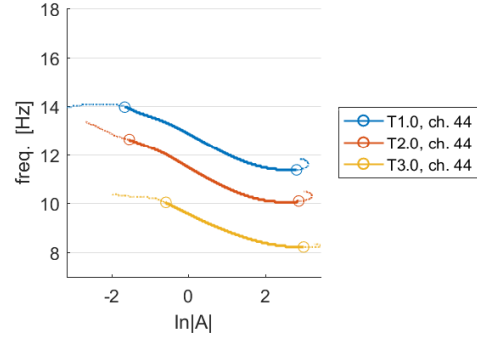


Figure 8. Frequency as a function of the amplitude; first mode, three impacts, chan. 44

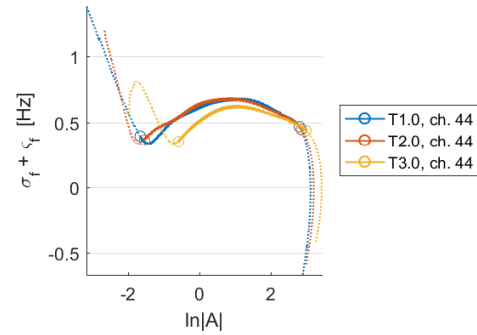


Figure 9. $\sigma_f + \zeta_f$ as a function of the amplitude; first mode, three impacts, chan. 44

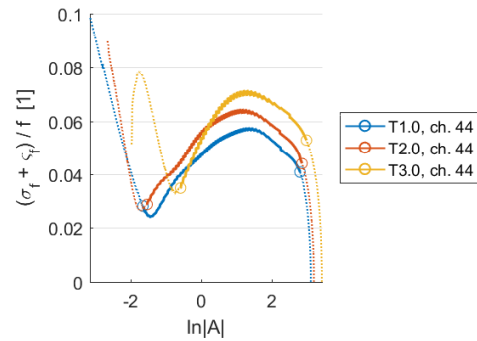


Figure 10. $\frac{\sigma_f + \zeta_f}{f}$ as a function of the amplitude; first mode, three impacts, chan. 44

Those results indicate for the first mode:

- Negative correlation between stiffness associated with the first mode and its modal amplitude for all three impacts

- Positive correlation between dissipation associated with the first mode and its modal amplitude
- Irreversible stiffness loss after each impact identified as the downward translation of the successive frequency curves.
- Evolution of dissipation along the three tests is equivocal.

If the irreversible stiffness loss evidently accounts for the damages (cracking is visible on the impacted wall), the two other phenomena are not easily attributed to a known mechanism.

The mode shape associated to the identified component is plotted fig. 11. There is no apparent evolution of plastic strain recorded on the reinforcement strain gauges at the bottom of the impacted wall – on which the first mode is strongly dependent – after 0.1 s, compared to the evolution of frequency and dissipation up to 2 s after the impact. Plastic deformation therefore do not seem to play a part in these phenomena.

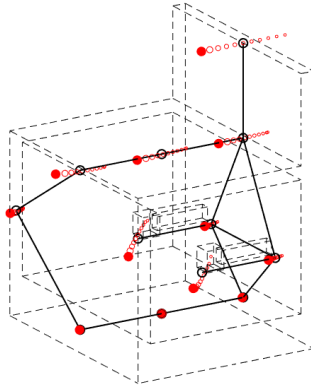


Figure 11. Identified mode: rocking along the impact direction

4 Responses of non-linear SDOF systems

Some authors ([7] and [8] for example) suggest that these amplitude dependent behaviours are due to friction in concrete at cracks interfaces. One (very simple) way to model this effect is to use a SDOF system with a rheological model with friction

damping. Such systems are – incidentally -- comparable to elastoplastic models.

4.1 Model presentation

The work presented in this part is done with responses of a system mixing damage (based on the maximal recorded displacement) and elastoplastic behaviour (with kinematic hardening). The code for the system response first used in [5] was provided by the first author.

The following equation governs the model (fig. 12):

$$\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_r[u(t)] = f_{\text{ext}}(t) \quad (7)$$

where

$$f_r[u(t)] = (1 - \chi)f_d[u(t)] + \chi f_p[u(t)] \quad (8)$$

f_d (resp. f_p) is the damage-dependent (resp. elastoplastic) restoring force. The parameter χ defines the share of each component to the global restoring force f_r .

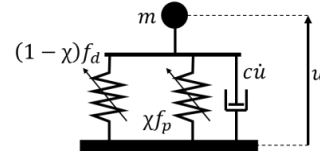


Figure 12. SDOF system

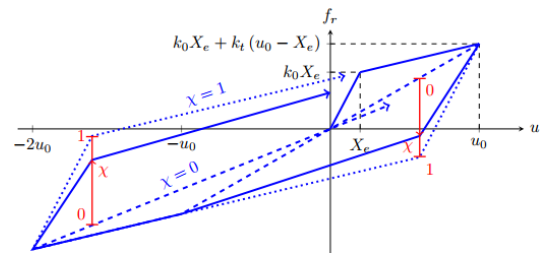


Figure 13. Force-displacement diagram for the cycle $0 \rightarrow u_0 \rightarrow -2u_0 \rightarrow 0$

An initial velocity models an impact force centred at $t = 0$. It is chosen to reach a desired ductility demand $\frac{\max u}{X_e} = 50$ to have the full range of behaviour.

Table 1. Parameters of the model

$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{m}}$ $= f_0$ [Hz]	$\frac{c}{2m\omega_0}$ $= \xi_0$ [1]	$\frac{k_t}{k_0}$ [1]	X_e [m]
17	0,05	0,7	10^{-4}

4.2 Results

Accelerations are processed using the method presented earlier.

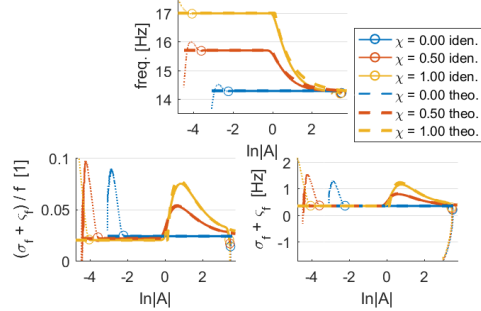


Figure 14. Identification of the instantaneous frequency and dissipation indicators plotted as functions of the amplitude (in m/s^2). Theoretical values are superimposed in thick dashed lines.

With a large $\frac{max u}{X_e}$, the effect of each component on the instantaneous stiffness is well visible (fig. 14). Those effects are:

- Irreversible stiffness loss during the first cycle, due to the damage dependent restoring force. It is visible on the amplitude–frequency plot as a deviation from the initial and undamaged frequency when the amplitude is small ;
- Temporary stiffness loss that is recovered as the amplitude diminishes, due to active friction. It is visible on the amplitude–frequency plot as a deviation from the final and damaged frequency when the displacement amplitude is greater than X_e . The greater the amplitude, the greater the stiffness loss down to a threshold.

The same goes for the observed dissipation:

- Friction causes a hysteresis loop and therefore additional dissipation, which goes to a maximum and then decreases as the amplitude decreases. It is visible as a deviation of $\sigma_f + \zeta_f$ and $\frac{\sigma_f}{f} + \frac{\zeta_f}{f}$ from the final and damaged value when the amplitude is greater than X_e . The greater the amplitude, the greater the dissipation up to a threshold and then a decrease.

The damage-induced dissipation is not visible and takes place at the very beginning of the free vibration response, which cannot be detected by the chosen identification method.

Similar observations are made on the first mode of the mock-up during each test.

5 Conclusion

It was shown that an amplitude dependent behaviour was observed for a real-life RC mock-up, which does not seem to be caused by damage or plastic deformation -- although the phenomenon appears to be damage-dependent. Usually attributed to friction in concrete cracks, this behaviour was partly reproduced with a SDOF system containing a friction damper.

In the benchmark, no participant used models that explicitly reproduced this observed behaviour. This missing dissipation might be one source of discrepancy in the accelerations.

6 References

- [1] Carmona RA, Hwang WL, Torr sani B. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. IEEE transactions on signal processing. 1997 Oct;45(10):2586-90.
- [2] Le TP, Argoul P. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. Journal of sound and vibration. 2004 Oct 6;277(1-2):73-100.
- [3] Erlicher S, Argoul P. Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform. Mechanical Systems and signal processing. 2007 Apr 1;21(3):1386-421.

- [4] Torrèsani B. Analyse continue par ondelettes. EDP Sciences; 2012 Dec 3.
- [5] Vacca N. Progress report (confidential).
- [6] Nguyen T.A., Labbé P., Semblat JF., Hervé G. (2018) Systematic Analysis of the Concept of Equivalent Linear Behavior in Seismic Engineering. In: Tran-Nguyen HH., Wong H., Ragueneau F., Ha-Minh C. (eds) Proceedings of the 4th Congrès International de Géotechnique - Ouvrages - Structures. CIGOS 2017. Lecture Notes in Civil Engineering, vol 8. Springer, Singapore
- [7] Jeary AP. Damping in tall buildings. In Second Century of the Skyscraper 1988 (pp. 779-788). Springer, Boston, MA.
- [8] Lagomarsino S. Forecast models for damping and vibration periods of buildings. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1993 Oct 1;48(2-3):221-39.

6.2 Sur un mur de briques

On inclut un article de journal, plus long : CARPINE et al. [2021]. La participation à la rédaction de l'article est limitée à la présentation de la transformation en ondelettes et des arêtes, mais on a pu faire des analyses préliminaires sur les mesures expérimentales, qui ont été reprises puis complétées.

Résumé adapté Il s'agit de présenter une approche systématique d'extraction d'arêtes modales, en ajoutant principalement 1) la détermination d'un facteur de qualité approprié, qui conditionne le choix de l'ondelette mère ; 2) de quoi travailler avec un signal bruité et 3) une quantification de la « complexité » du mode extrait qui a la vertu d'être calculée avec le mode identifié, sans modèle du système.

A partir d'essais sur un mur en maçonnerie, on dispose de quelques réponses transitoires (d'origine inconnue et qu'on suppose libres) dans un bain de vibrations ambiantes. Les paramètres modaux sont évalués par la méthode présentée puis comparés à une méthode alternative répandue. Les résultats sont fortement similaires ($< 2\%$ d'erreur sur la fréquence et la déformée modale, des amortissements qui ont le même ordre de grandeur) à l'exception d'un mode. L'identification de ce dernier mode par la méthode alternative est discréditée car sa « complexité » est excessive, ce qui explique le plus grand écart constaté. Par ailleurs, tous les modes identifiés ont une composante complexe non nulle telle que mesurée par l'indicateur proposé, et ce d'autant plus qu'ils ont des fréquences proches, ce qui en valide l'interprétation.

Modal identification in the case of complex modes - Use of the wavelet analysis applied to the after-shock responses of a masonry wall during shear compression tests

R. Carpine ^{a,1,*}, S. Ientile^a, N. Vacca^a, G. Boscato^b, C. Rospars^a, A. Cecchi^b, P. Argoul^a

^aMAST-EMGCU, Univ Gustave Eiffel, IFSTTAR, F-77477 Marne-la-Vallée, France

^bIUAV University of Venice, Dorsoduro, 2206, 30123 Venice, Italy

Abstract

In real structures, the proportional damping assumption is never strictly verified. Indexes of non-proportionality are then necessary to determine if this assumption leading to real modes still remains valid. If not, complex modes will appear and moreover, if their corresponding natural frequencies are close, their imaginary part can become large. In this paper, a new non-proportionality index, quantifying the “complexity” of mode shapes, is presented, derived from that proposed by Adhikari in 2002. This new index is designed for experimental results, for which the system’s parameters are not known, and proven to be equal to the previous one up to the first order on damping. Modal identification based on wavelet analysis is considered promising in this study for processing free responses of non-proportionally damped systems, integrated in noise, to directly obtain complex modes. A procedure for choosing an appropriate quality factor for the time-frequency resolution, necessary to get correct identification results in the case of free responses combined with responses to ambient excitation and/or to additive noise, is detailed. The proposed identification technique based on Continuous Wavelet Transform (CWT) is finally applied on different transient responses of a masonry wall specimen during an experimental campaign comprising simultaneous vibrations and shear-compression tests. The results of the CWT method for modal identification are compared with those obtained by a classical modal analysis technique, called Least Squares Complex Frequency method, by means of the Modal Assurance Criterion and the proposed non-proportionality index.

Keywords: Modal identification, Continuous wavelet transform, Complex modes, Non-proportionality index, Masonry wall, Transient responses

1. Introduction

The assumption of proportional damping, in which the normal modes are real and the modal damping matrix is diagonal is justified in numerous practical situations since the different modal frequencies are well separated and the influence of the off-diagonal terms is negligible when damping is weak [1]. The Rayleigh damping model defining the viscous damping forces to be proportional to the inertia and stiffness forces [2], is the most commonly used assumption. To describe damping

*Corresponding author

Email address: raphael.carpine@univ-eiffel.fr (R. Carpine)

in mechanical structures as proportional is not obvious; in fact, experimental analysis showed that for most real life structures, the criterion for proportional viscous damping is no longer strictly satisfied, as these structures possess complex modes instead of real normal modes [3], and according to G rardin and Rixen [1], this assumption has no physical background. In order to quantify the extent of damping non-proportionality, several indexes are found in the literature [4–8]. They can be broadly divided into two types: (1) those using system property matrices and (2) those using only complex modes. In 2004, Adhikari [4] introduced the *optimally normalized complex mode* that allows him to define an original non-proportionality index with a specific normalization.

Well-separated modes where only one mode dominates its own resonance band are the most common. However, “close modes” with near natural frequencies most often occur for structures where the stiffness and mass properties along main directions are very similar by design, for instance for tall buildings, towers and cylindrical chimneys or for structures having two or more horizontal axes of symmetry. This phenomenon is generally a natural consequence of the structural form chosen to satisfy their function against environmental loads (often wind) [9]. Close frequencies can also be found in other structures, such as suspension bridges, e.g., Humber Bridge where closely spaced modes of different types (vertical bending, lateral bending and torsion) occurred and could affect in-wind dynamics by aeroelasticity [10]. In large flexible space structures or in turbine bladed-disk assemblies, very close modes at low frequency often exist; the great closeness of modes can also be found, and lead to an estimation of stresses in these assemblies extremely difficult [11]. In the case of weak non-proportionally damped systems, close modes will also lead to complex modes. Conventional modal identification techniques have proved to be efficient to extract accurate modal parameters when the two modes of interest are moderately close; they become inapplicable, however, when two very close modes exist. To quantitatively describe the separation of two vibration modes, a frequency space index η has been first introduced by Lin and Lim [11]. This index defined by: $\eta_{k,j} = 2|f_k - f_j|/(f_k + f_j)$, represents the relative difference between the larger f_k and the smaller f_j frequencies of the two close modes, respectively. The authors roughly indicated a lower bound 1% for η where the modes become very close and the identified modal parameters may become quite inaccurate.

Since its first definition in the beginning of the 1980s by French researchers, especially Grossmann and Morlet [12], the growth of wavelet research in mathematics has been first explosive with significant contributions from numerous authors; and its application in signal and image processing has been first rapidly successful. Although wavelet analysis is becoming more and more frequently used in engineering applications, it is still far from being systematically used in civil engineering, certainly due to the insufficient knowledge of the properties of the wavelet transform. However several authors such as Williams and Amaratunga [13] attempted 25 years ago, to provide a simple introduction to wavelets which is attuned to the needs of the civil engineering researcher who may wish to apply wavelet techniques to his or her domain. These authors highlighted the potential benefits of using wavelets for the analysis of engineering data and for finding wavelet solutions of partial differential equations. From that time, the principles of wavelets have been applied to several problems in civil engineering structures, such as modal identification and nonlinear behavior detection, earthquake - or wind - induced vibration analysis, bridge vibrations, damage identification and so on.

As a first example, in Amaratunga [13], the two-dimensional wavelet decomposition has been applied to stiffness matrices in order to determine the lowest eigenfrequencies which are generally the most critical one for the behaviour of a structure during an earthquake.

Several authors [14–17] started then to examine the use of wavelet analysis for processing one-dimensional transient signals in civil engineering. These signals generally decaying with time are frequency and phase modulated and can be considered asymptotic [18–20]. The one-dimension Continuous Wavelet Transform (CWT) of asymptotic signals concentrates the maximum amount of information near a series of ridges, which is directly linked to the amplitude and phase of each component within the signal. The procedure for the treatment of asymptotic signals with the CWT is well detailed in [18, 19]. In [16], the authors introduced a quality factor Q in order to compare different mother wavelets and to characterize the quality of the CWT via the local time and frequency resolutions. Therefore, the CWT is widely used for modal identification, detection of nonlinearities, and biomedical signal processing. Some applications for civil engineering follow. Ruzzene et al. [14] showed that the CWT applied to free responses of Multi Degrees of Freedom (MDoF) system represents a consistent improvement for the estimation of instantaneous frequencies compared to the Hilbert transform technique. They applied their technique to the acceleration responses from the Queensborough Bridge in Vancouver (Canada) under ambient excitations after converting random responses of the bridge to free decay responses by the random decrement technique [21]. The Morlet wavelet is used and the identification of the mode shapes is not performed. Argoul et al. [15] applied the wavelet analysis techniques to transient accelerometric responses of a seven-storey building of concrete shear walls and reinforced concrete floors built in 1970, after non-destructive shock tests applied by a mechanical shovel on the building facade (weak level of measured accelerations $\sim 10^{-2}$ g). The Cauchy mother wavelet was preferred. The processing of the measured signals by the CWT revealed a quasi-linear decrease of the square of the first eigen-frequency (corresponding to a global rigidity of both the structure and soil-structure foundation) versus roof displacement amplitude. This weakly nonlinear behaviour (softening with the increase of the excitation amplitude) is often found for geo-materials such as concrete and sand, as observed by Trifunac [22] with harmonic tests. This application illustrates the property of the CWT to allow detection of a non-linear behaviour.

More recently, Vacca et al. [17] tried by means of the CWT to characterize the soft impact response behaviour of a reinforced concrete mock-up (OECD/NEA IRIS Phase 3 mock-up, part of a benchmark), and to evaluate the ability of some mechanical models to represent the energy dissipation during and after several successive impact tests (non-perforating projectile and hammer). It was shown that an amplitude dependent behaviour was observed for a real-life RC mock-up, which does not seem to be caused by damage or plastic deformation – although the phenomenon appears to be damage-dependent. Usually attributed to friction in concrete cracks, this behaviour was partly reproduced with a Single Degree of Freedom (SDoF) system containing a friction damper.

Over the past twenty years, several studies [23, 24] extended the use of CWT for processing responses of structures to ambient excitations which cannot be controlled or measured and so called “unknown input”. Le and Paultre [24] applied the CWT to the matrix of response correlation functions for the modal identification of structures under ambient vibration testing. This matrix was first computed from raw data and then expanded using singular value decomposition, leading to singular values and singular vectors. The estimation of natural frequencies and modal damping ratios was then obtained from the singular values, while the singular vectors allowed the estimation of modal shapes. Natural frequencies and mode shapes for linear systems having close modes or even repeated modes were well identified. Damping estimates presented however some discrepancies for lower modes in comparison with other operational modal analysis techniques.

Finally, among the large number of books on wavelets [18, 25, 26], few are dedicated to applica-

tions to civil engineering structures. The book of Chatterjee [27] attempted to fill this gap. Several applications of wavelets with reference to civil engineering problems are detailed, showing its importance for example in analyzing non-stationarities in ground motions, and also bridge vibrations caused by vehicle passage, or structural damage identification.

Following the previous introduction, this article is divided into four parts. The first part investigates the notion of complex modes, appearing for a system when the assumption of damping proportionality is no longer valid, but also when its natural frequencies are close. Special attention is given to their physical and mathematical characteristics, then to several ways of scaling them, and finally to the presentation of a new damping non-proportionality index based on the notion of optimally normalized complex modes introduced by Adhikari [4]. In the second part, the fundamentals of the wavelet analysis for modal identification are briefly presented, with more details for its useful properties for processing transient responses of linear structures. The Cauchy-Paul wavelet [19, 28] is chosen as mother wavelet. A new procedure for extracting a “global” ridge for one mode instead of several ridges corresponding to the different measurement points is presented. The quality factor defined as the ratio of the center-frequency to the frequency bandwidth (cf. Le and Argoul [19]), is then performed for the frequency resolution of the CWT. In the case of a signal expressed as a sum of several damped sinusoids, three bounds for Q introduced by Erlicher et Argoul [3] are recalled and an upper bound for the modal damping ratio is deduced which when exceeded, does no longer guarantee a “correct” ridge extraction. A new procedure for the choice of a suitable quality factor is then detailed in the case of free oscillations combined with a response to ambient noise and an additive noise. It makes it possible to estimate a threshold in the amplitude of the transient signal which, when it is less than this threshold, the signal is too polluted by ambient noise and the results obtained by the identification procedure may be inaccurate. In the third part, the experimental campaign of ambient-vibration tests on unreinforced masonry walls is detailed with test set-up and instrumentation. The collected vibration data will be then considered as application of modal identification techniques. In the last part, two modal identification procedures: the proposed one and the Least Square Complex Frequency method are finally applied to measurement data of walls and the results obtained by both methods are compared.

2. Complex modes

In this section, complex modes are discussed. It is divided into four parts: the first one is devoted to a brief explanation of their physical and mathematical origin. Then, a simple scaling condition is proposed for these complex modes. In the third part, a non-proportionality index, quantifying the “complexity” of these modes, is derived from the index proposed by Adhikari [4]. This new index is designed for experimental results, where the system’s parameters are not known, and proven to be equal to that of Adhikari [4] up to the first order on damping. The last part is dedicated to the interpretation of this non-proportionality index. It is found that it depends non only on the system’s non-proportionality, but also on the proximity of its natural frequencies. Numerical and experimental results from previous studies are analyzed.

2.1. Physical and mathematical characteristics

The free motion equations for a viscously damped linear discretized system can be expressed as [1]:

$$M\ddot{\mathbf{X}} + C\dot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

where $\mathbf{M}$ is a symmetric, positive definite real matrix, and $\mathbf{C}$ and $\mathbf{K}$ are symmetric, positive semi-definite real matrices, all three of size $N \times N$.

It can be shown that there are $2N$ poles $p_k \in \mathbb{C}$ and corresponding mode shapes $\phi^{(k)} \in \mathbb{C}^N$, satisfying the following equation:

$$(p_k^2 \mathbf{M} + p_k \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

and thus as many solutions to Eq. (1) in the form $\mathbf{X}(t) = e^{p_k t} \phi^{(k)}$. Moreover, with sufficiently low damping, these poles p_k come in pairs of complex conjugates with equal (or collinear) corresponding mode shapes, in which case they are separated into N different modes. Assuming the Rayleigh damping hypothesis that $\mathbf{C}$ is a linear combination of $\mathbf{M}$ and $\mathbf{K}$, or the more general hypothesis of proportional damping from Caughey and O'Kelly [29], these mode shapes are equal (or collinear) to the real normal mode shapes of the corresponding undamped system, which satisfy the following equation:

$$((i\omega_k)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \varphi^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

with $\omega_k \in \mathbb{R}$ the natural angular frequency of mode k , and $\varphi^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ its normal mode shape. Although, for any given damping, it is, in most cases, not possible to write mode shapes as vectors of $\mathbb{R}^N$. In practical terms, it means that for these complex modes, at least two Degrees of Freedom (DoF) of the system won't be oscillating in phase or in opposite phase as for normal modes, but with a phase shift different from 0 and π . For a system with low damping however, this phase shift should be near 0 or π , so the two parts of the system would appear to have a slight delay.

Assuming first-order perturbation on damping, complex mode shapes relate to their corresponding undamped normal modes in the following manner [1, 4]:

$$\phi^{(k)} \approx \varphi^{(k)} + i \sum_{j \neq k} \frac{\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \frac{{}^t \varphi^{(j)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}}{{}^t \varphi^{(j)} \mathbf{M} \varphi^{(j)}} \varphi^{(j)}. \quad (4)$$

Therefore, the imaginary part of these complex shapes comes from two factors: the crossed terms of the system's modal damping ${}^t \varphi^{(j)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}$, which are null assuming Rayleigh proportional damping, and the proximity of the system's natural frequencies.

Again, assuming first-order perturbation on damping, poles of the damped system relate to their corresponding natural angular frequencies in the following manner [1]:

$$p_k \approx i \omega_k - \frac{1}{2} \frac{{}^t \varphi^{(k)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}}{{}^t \varphi^{(k)} \mathbf{M} \varphi^{(k)}}. \quad (5)$$

Consequently, crossed terms of the system's modal damping ${}^t \varphi^{(j)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}$ do not appear in the Taylor development of the poles until at least second-order. In addition, they do not appear in the real part of the complex modes until at least second order either, as seen in Eq. (4). This explains why damping is very often considered to be proportional, as most real structures have very low damping, and thus second-order terms can be ignored.

2.2. Scaling of complex modes

The eigenmodes of a non-proportionally damped system are thereby complex: they belong to the Hilbert normed complex space $\mathbb{C}^N$ endowed with the Hermitian inner product: $\langle \phi, \psi \rangle = {}^t \phi \psi = \sum_{k=1}^N \phi_k \bar{\psi}_k$, and the associated Hermitian norm:

$$\|\phi\|_2 = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = \sqrt{{}^t \phi \bar{\phi}} = \sqrt{\sum_{k=1}^N \phi_k \bar{\phi}_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^N |\phi_k|^2},$$

where $\phi = {}^t(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \dots, \phi_N)$ and $\psi = {}^t(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots, \psi_N)$, with complex components ϕ_k and ψ_k . Using Euler's formula (polar coordinate system representation), each complex can be written by means of absolute value and argument, for example: $\phi_k = A_k e^{i\varphi_k}$, with $A_k \in \mathbb{R}_+$ and $\varphi_k \in [-\pi, \pi)$. As these complex modal shapes ϕ are defined up to a multiplicative complex factor, it is worthy to note that a complex eigenmode ϕ can have several different expressions but the same norm, as for instance, written with two different expressions for each component such as : $A_k e^{i\varphi_k}$ and $A_k e^{i(\varphi_k - \varphi_1)}$, but with the same norm for ϕ : $\|\phi\|_2^2 = \sum_{k=1}^N A_k^2$. Multiple options are then suitable and a choice has to be made in order to scale these shapes as it is done for real shapes. We choose to set:

$${}^t \phi \phi = 1. \quad (6)$$

With the polar coordinate system representation, Eq. (6) can be written as the two following conditions:

$$\sum_{k=1}^N A_k^2 \cos 2\varphi_k = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^N A_k^2 \sin 2\varphi_k = 0, \quad (7)$$

contrary to the criterion classically used for real modal shapes:

$$\|\phi\|_2^2 = {}^t \phi \bar{\phi} = 1, \quad (8)$$

leading to only one condition:

$$\sum_{k=1}^N A_k^2 = 1. \quad (9)$$

Finally, the use of our criterion in Eq. (6) allows us to choose both a norm for the vector ϕ and an orientation in the complex plane, while using the criterion in Eq. (8) instead, would only allow to choose a norm and not an orientation, as we have $\forall \psi \in \mathbb{R}, \langle e^{i\psi} \phi, e^{i\psi} \phi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle$. It narrows the choice of ϕ to two possible values, opposites of each other, like for real mode shapes. Using the classical representation (real and imaginary parts, ϕ^R and ϕ^I , respectively): $\phi = \phi^R + i \phi^I$, Eq. (6) can be split into two equations:

$$\|\phi^R\|_2^2 - \|\phi^I\|_2^2 = 1 \quad (10)$$

$${}^t \phi^R \phi^I = {}^t \phi^I \phi^R = 0. \quad (11)$$

Eq. (10) and $\|\phi^R\|_2^2 + \|\phi^I\|_2^2 = \|\phi\|_2^2$ mean that $\|\phi\|_2 \geq 1$ and allow to express $\|\phi^R\|_2$ and $\|\phi^I\|_2$ as functions of $\|\phi\|_2$:

$$\|\phi^R\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|\phi\|_2^2 + 1) \quad \text{and} \quad \|\phi^I\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|\phi\|_2^2 - 1). \quad (12)$$

Furthermore, this choice minimizes the norm of ϕ^I over the norm of ϕ . Indeed, for any reshaping of ϕ with $z \in \mathbb{C}^*$, we have:

$$\frac{\|\text{Im}\{z\phi\}\|_2}{\|z\phi\|_2} = \sqrt{\frac{\|\phi^I\|_2^2 + \sin^2(\arg z)}{\|\phi\|_2^2}} \geq \frac{\|\phi^I\|_2}{\|\phi\|_2}, \quad (13)$$

therefore our criterion provides with a scaled complex mode as close as possible to the real axis. This way, lightly complex modes will not appear highly complex because of a bad shaping - for instance, a real normal mode, interpreted as a complex mode, could appear entirely imaginary if shaped badly.

2.3. Damping non-proportionality index

Among the indexes to quantify the extent of damping non-proportionality, we decided to limit our presentation to those build from the concept of optimally normalized complex modes proposed by Adhikari [4]. The optimally normalized k -th complex mode $\phi_{opt}^{(k)} \in \mathbb{C}^N$ is defined as the orthogonal projection of the k -th real normal mode $\varphi^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ of the associated undamped system on the corresponding complex mode $\phi^{(k)} \in \mathbb{C}^N$ of the under study system with non-proportional damping:

$$\phi_{opt}^{(k)} = \frac{\langle \varphi^{(k)}, \phi^{(k)} \rangle}{\langle \phi^{(k)}, \phi^{(k)} \rangle} \phi^{(k)} = \frac{{}^t \varphi^{(k)} \overline{\phi^{(k)}}}{\|\phi^{(k)}\|_2^2} \phi^{(k)}. \quad (14)$$

As shown in [3], this vector remains unchanged for every initial normalization of $\phi^{(k)}$.

For real structures, only the mode shape of the damped system $\phi^{(k)}$ is accessible through measurements. The normal mode of the associated undamped system is generally not known from experimental tests and can be estimated numerically from finite element software.

Thus, Erlicher and Argoul [3] proposed an alternative definition of $\phi_{opt}^{(k)}$ by substituting the associated normal mode shape $\varphi^{(k)}$ by the real part $\text{Re}\{\phi^{(k)}\}$ of the complex mode:

$$\tilde{\phi}_{opt}^{(k)} = \frac{{}^t \text{Re}\{\phi^{(k)}\} \overline{\phi^{(k)}}}{\|\phi^{(k)}\|_2^2} \phi^{(k)}. \quad (15)$$

In the case of the proposed normalization given in Eq. (6), the new optimally normalized k -th complex mode $\tilde{\phi}_{opt}^{(k)}$ becomes:

$$\tilde{\phi}_{opt}^{(k)} = \frac{\|\text{Re}\{\phi^{(k)}\}\|_2^2}{\|\phi^{(k)}\|_2^2} \phi^{(k)}, \quad (16)$$

and thus has the same direction as $\phi^{(k)}$.

Based on the notion of optimally normalized complex mode given in Eq. (14), Adhikari [4] proposed an index of non-proportionality defined by:

$$I_{np}^{(k)} = \frac{\|\phi_{opt}^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} \in [0, 1], \quad (17)$$

that is equal to 0 for all modes if and only if the damping of the system is proportional [29].

When as previously, the normal mode of the undamped system $\varphi^{(k)}$ is replaced by $\text{Re}\{\phi^{(k)}\}$ as proposed by Erlicher and Argoul [3], and Eq. (6) is used to scale $\phi^{(k)}$, this non-proportionality

index becomes, using Eqs. (16) and (17),

$$\tilde{I}_{np}^{(k)} = \frac{\|\text{Im}\{\phi^{(k)}\}\|_2}{\|\phi^{(k)}\|_2}. \quad (18)$$

Assuming first-order perturbation on damping again and using Eq. (4), it is shown in Appendix that:

$$\tilde{I}_{np}^{(k)} \approx I_{np}^{(k)}, \quad (19)$$

which justifies the use of $\tilde{I}_{np}^{(k)}$ instead of $I_{np}^{(k)}$ when the undamped normal mode shape $\varphi^{(k)}$ is not known.

It is important to note that the respect of the scaling condition from Eq. (6) before computing the non-proportionality index from Eq. (18) is crucial. First, this condition was used to compute Eq. (18) from Eq. (17). And more importantly, it guaranties the uniqueness of this non-proportionality index, and avoids an abnormally large result for an almost real mode shape. For example, a real normal shape, multiplied by i (complex modes are defined, and computed, up to a multiplicative complex constant) and not reshaped, would present an index of 1 while it is, in fact, not complex at all.

Erlicher and Argoul [3] also used an index derived from [4], but chose to scale the mode shapes using the following equation: $\phi_1^{(k)} = 1$. Although it guaranties the uniqueness of the non-proportionality index, this choice of scaling is exposed to the risk of an abnormally large index, and depends on the numbering of the system's DoFs.

2.4. Interpretation of the non-proportionality indexes

As shown in Appendix, Eq. (19) can be expanded as such:

$$\tilde{I}_{np}^{(k)} \approx I_{np}^{(k)} \approx \frac{1}{\|\varphi^{(k)}\|_2} \left\| \sum_{j \neq k} \frac{\omega_j}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \frac{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}}{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{M} \varphi^{(j)}} \left(\varphi^{(j)} - \frac{{}^t\varphi^{(j)} \varphi^{(k)}}{{}^t\varphi^{(k)} \varphi^{(k)}} \varphi^{(k)} \right) \right\|_2. \quad (20)$$

Thus, these non-proportionality indexes reflect two phenomena: the non-proportional damping, characterized by the crossed terms of the system's modal damping ${}^t\varphi^{(j)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}$, and the proximity of the system's natural frequencies. Having high non-proportionality indexes for a mode could mean that it has a high crossed modal damping or a close natural frequency with one or several other modes, but to distinguish between these two is not possible using the indexes only.

To put these indexes into perspective, Table 1 shows a set of parameters characterizing the complex modes obtained by Adhikari [4] on a simulated two-DoF viscously damped system, and by Erlicher and Argoul [3] from experimental data of a plexiglas plate. As explained in previous subsection, non-proportionality index I_{np} is only available for simulated results, because it requires the knowledge of the undamped normal mode shapes, contrary to $\tilde{I}_{np}$ which can be computed from the complex mode shapes alone. Yet, they are approximately equal assuming first-order perturbation on damping (see Eq. (19)), hence the use of $\tilde{I}_{np}$ for experimental results. Damping ratio ζ is also shown, as an indicator of the diagonal terms of the modal damping ${}^t\varphi^{(k)} \mathbf{C} \varphi^{(k)}$ (see Eq. (5)). Lastly, the frequency proximity index of consecutive modes $\eta_{k,k+1}$, defined as $\eta_{k,j} = 2|f_k - f_j|/(f_k + f_j)$ [11], is shown. For Adhikari [4], the damping ratio is defined as $\zeta_k = -\text{Re}\{p_k\}/\text{Im}\{p_k\}$,

whereas Erlicher and Argoul [3] choose to set $\zeta_k = -\text{Re}\{p_k\}/|p_k|$; in both cases the frequency displayed in Table 1 is the damped frequency, that is $\text{Im}\{p_k\}/2\pi$, which is close to the natural frequency according to Eq. (5).

Table 1: Comparison of the results found for I_{np} and $\tilde{I}_{np}$ by Adhikari [4] and Erlicher and Argoul [3].

Frequency f_k Hz	$\eta_{k,k+1}$ %	Damping ζ_k %	$I_{np}^{(k)}$ %	$\tilde{I}_{np}^{(k)}$ %
Adhikari [4]				
5.2	2.9	4.2	49.3	41.2
5.3		7.8	51.7	42.8
Erlicher and Argoul [3]				
26.9	27.0	2.7	/	7.2
35.3		3.0	/	30.9
59.5	51.2	2.8	/	4.9
65.6	9.7	3.1	/	4.2
75.9	14.6	3.0	/	7.7
107.1	34.1	3.0	/	17.5
128.0	17.8	1.8	/	47.1
129.6	1.2	2.9	/	33.7
158.6	20.1	2.2	/	14.6
179.5	12.4	2.4	/	10.7

The effect of close frequencies on the non-proportionality indexes is apparent in Table 1; five complex modes show significantly higher indexes I_{np} or $\tilde{I}_{np}$, four of which are pairs of modes with close frequencies, with frequency proximity indexes of 2.9 % and 1.2 %.

3. Wavelet analysis for modal identification of linear systems - Choice of the quality factor

This part is arranged into four sections. The first one is devoted to a brief theoretical background on CWT, particularly to the presentation of its properties and characteristics useful for its following use. The presentation of the continuous wavelet transform for mechanical signal processing and modal identification is here not classical, by seen as linear filtering. In the second paragraph, the procedure of modal identification with wavelet analysis is recalled. The third and fourth paragraphs deal with the time-frequency localization of the CWT by means of characteristic parameters, for managing its resolution and the treatment of the edge or discontinuity effects [3]. In the last paragraph, a precise procedure for the choice of the CWT's parameters is proposed, designed for systems under strong ambient noise.

3.1. Theoretical background

Filtering is a common way to process a signal and to obtain information from it. It allows to extract a component of a signal, to which we can assign a physical meaning (in structural dynamics, mostly a natural mode). A linear filter can be entirely characterized by a single function in the frequency domain, say $\hat{\psi}$, which gives a straightforward expression for the filtered signal $F[u]$ through the Inverse Fourier Transform (IFT):

$$F[u] : t \mapsto \int \hat{u}(\xi) \hat{\psi}(\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi, \quad (21)$$

where $\hat{u} : \xi \mapsto \int u(t)e^{-2i\pi t\xi} dt$ is the Fourier Transform (FT) of the unfiltered time signal u . The FT of the signal, before being transformed back into a time signal, is modified through multiplication by $\hat{\psi}$ which is assumed to be chosen in order to remove unwanted components.

This filtered signal obviously does not contain as much “information” as the original signal – some part has been *filtered out*. The next step would be to use a different filter on u , and then another one, etc., to extract a different component of the signal each time. The CWT provides a systematic way to do this using a bank of filters through which we can navigate using a single continuous variable serving as an index for each filter and its associated output. The CWT is then a continuously indexed collection of filter outputs. This also means that the CWT is a 2-dimensional representation: one dimension is the instant at which the output is evaluated (the time), and the other is the index of the output.

The specificity of the CWT lies in the similarity of the filters being used: they all take the form $\xi \mapsto \hat{\psi}(a\xi)$ where $a > 0$ is called the *scale* parameter, as it scales (dilates or contracts) a single function ψ along the frequency axis. The parameter a then acts as the index of the filter.

Given a function ψ , we write $T_\psi[u](b, a)$ as the output of the filter $\xi \mapsto \hat{\psi}(a\xi)$ at instant b applied to u , or more formally:

$$T_\psi[u](b, a) = \int \hat{u}(\xi)\hat{\psi}(a\xi)e^{2i\pi b\xi} d\xi. \quad (22)$$

In the above, we have chosen to normalize the frequency domain by 1 instead of the most common $\sqrt{a}$. As we preferred to describe time-localized signals by their amplitude, the $1/a$ normalization in time domain is then more appropriate. Conversely, the $1/\sqrt{a}$ norm in time domain guarantees that the wavelet maintains constant energy, this normalization is appropriate if one wishes for the modulus-squared wavelet transform to reflect the energy of the processed signal $u(t)$, for more details see [30].

We now have a systematic way to navigate through different filter outputs (with a single continuous parameter a), and we can imagine a *dynamic filtering* method focused on a time-varying frequency component: it is possible to filter a signal using a specific filter at each instant of the output. Formally, $a(\cdot) : b \mapsto a(b)$ can be seen as a function of time b , defining a curve in the scale-time map. $T_\psi[u](b, a(b))$ is then the output of the filter $\xi \mapsto \hat{\psi}(a(b)\xi)$ at instant b , applied to u . The only one-dimension of this representation is the time b , as the index a is time-dependent.

Of course, it is not easy to define the function $a(\cdot)$ prior to any analysis of the signal u . Its FT, $\hat{u}$, gives insight into its frequency content – an indication of the frequencies around which filtering should occur – but no instantaneous information can be easily extracted, which is however needed to define properly $a(\cdot)$. A sensible way to do this is to define $a(b)$ as the index of the most “energetic” output – the highest amplitude output – at instant t . The dynamic filter is then focused on the highest amplitude component, provided that $a(\cdot)$ has some kind of continuity enforced to prevent “jumping” from one component to another when confronted to time-varying amplitudes. Formally:

$$a(t) = \arg \max_{a \in I_t} |T_\psi[u](t, a)|, \quad (23)$$

where the interval $I_t \subset \mathbb{R}_+$ is chosen so that $a(\cdot)$ is continuous. With this, $T[u](t, a(t))$ becomes the output of a dynamic and non-linear filter at instant t focused on the highest amplitude component of u . The non-linearity comes from the u -dependency of $a(\cdot)$.

3.2. Modal identification with wavelet analysis

Given a conservative 1D dynamic linear system, its (positive frequency) complex free vibration response is $\underline{u}(t) = A e^{2i\pi f t}$ (up to a phase shift), where $f > 0$. Its FT is the usual Dirac distribution $\hat{\underline{u}}(\xi) = A \delta(\xi - f)$, which makes its CWT straightforward to evaluate:

$$T_\psi[\underline{u}](t, a) = \int A \delta(\xi - f) \hat{\psi}(a\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi = A e^{2i\pi f t} \hat{\psi}(af) = \underline{u}(t) \hat{\psi}(af). \quad (24)$$

Applying the previously described dynamic filter, the constant frequency f of $\underline{u}$ leads to $a(t)$ such that $\hat{\psi}(a(t)f) = \max |\hat{\psi}|$, that is $a(t)f = \arg \max |\hat{\psi}| \equiv f_\psi^0$. a is therefore constant and equal to f_ψ^0/f . The output of the filter ends up being:

$$T_\psi[\underline{u}](t, a(t)) = \underline{u}(t) \max |\hat{\psi}|, \quad (25)$$

with

$$A = |T_\psi[\underline{u}](t, a(t))| \quad (26)$$

and

$$f = \frac{f_\psi^0}{a}. \quad (27)$$

The frequency f of the mode can also be extracted through the time derivative of the phase of $t \mapsto T_\psi[\underline{u}](t, a(t))$:

$$2i\pi f = \frac{d}{dt} \arg [T_\psi[\underline{u}](t, a(t))]. \quad (28)$$

The modal shape is deduced from the relative amplitude and phase of different points. From two responses at different points $\underline{u}_1(t) = A_1 e^{i\varphi_1} e^{2i\pi f t - \lambda t}$ and $\underline{u}_2(t) = A_2 e^{i\varphi_2} e^{2i\pi f t - \lambda t}$, the modal shape is given by the relative amplitude $|\underline{u}_2/\underline{u}_1| = A_2/A_1$ and the relative phase $\arg(\underline{u}_2/\underline{u}_1) = \varphi_2 - \varphi_1 \pmod{2\pi}$. It can therefore be identified through:

$$\left| \frac{T_\psi[\underline{u}_2](t, a_2(t))}{T_\psi[\underline{u}_1](t, a_1(t))} \right| = \frac{A_2}{A_1}, \quad (29)$$

$$\arg \frac{T_\psi[\underline{u}_2](t, a_2(t))}{T_\psi[\underline{u}_1](t, a_1(t))} = \varphi_2 - \varphi_1 \pmod{2\pi} \quad (30)$$

and

$$\ln |T_\psi[\underline{u}_k](t, a_k(t))| = -\lambda t + cst_k. \quad (31)$$

In short, the procedure is only about singling out a component and filtering out the others. The extraction of modal information from the component of interest is then obtained by averaging the - almost constant - quantities.

This procedure can be improved by extracting a single ridge a_Σ instead of several ridges a_k (one for each point), defined for n measurement points as follows:

$$a_\Sigma(t) = \arg \max_a \left| \sum_{k=1}^n [T_\psi[\underline{u}_k](t, a)]^2 \right|. \quad (32)$$

As the relative phase of the points of the modal shape (Eq. (30)) is close to 0 or π for lowly damped modes, modal quantities of the signal add up in Eq. (32), whereas noise, of which phase is random,

does not necessarily do so. Therefore, relative noise in the sum of Eq. (32) is lower than relative noise in the CWT of a single u_k . This method thereby provides with a more precise estimate of the ridge, and will be used hereafter.

This procedure is still valid for slowly varying “modal” quantities – computed frequency, damping and/or modal shape changing little over one period of oscillation [20]. The evaluated frequency, damping and modal shape are then considered as instantaneous quantities characterising the closest (one could say “tangent”) linear system at each instant.

In addition, experimental data does not give complex signals as proposed earlier but rather their real part only. The following result [20], that applies to asymptotic signals, ie slowly varying “modal” quantities as discussed above, for a certain class of functions for ψ , must then be used:

$$T_\psi[\text{Re}(u)] \simeq \frac{1}{2} T_\psi[u]. \quad (33)$$

That way, we can still get the modal frequencies, shapes and amplitudes with experimental data.

3.3. Choice of the analyzing wavelet

The profusion of mother wavelets may hinder the acquisition of the knowledge necessary to achieve practical applications. In the absence of a unifying theory appropriate for the behavior of mother wavelets, the choice of a peculiar wavelet for a specific problem may often seem arbitrary. In this study, analytic mother wavelets are preferred, leading to: $\hat{\psi}(f) = 0 \ \forall f < 0$. For the following, we retain a single parameter progressive wavelet, the Cauchy-Paul wavelet, widely used in quantum mechanics [31] and defined in the frequency domain by:

$$\text{for } f \geq 0 \quad \hat{\psi}_n(f) = c_n f^n e^{-2\pi f} \quad (34)$$

$$\text{for } f < 0 \quad \hat{\psi}_n(f) = 0, \quad (35)$$

where c_n is a normalization constant and n is a parameter controlling the wavelet form.

There exist different ways to norm the Cauchy-Paul mother wavelet in order to define the c_n parameter. In [15, 16, 19], the authors preferred the L^∞ norm in time domain: $\|\psi_n\|_\infty = 1$. In this paper, we chose the following norm: $\|\hat{\psi}_n\|_\infty = \max |\hat{\psi}_n(f)| = 2$, leading to: $c_n = 2(2\pi e/n)^n$. The peak frequency is: $f_\psi^0 = n/2\pi$, for which the maximum value is: $\hat{\psi}_n(f_\psi^0) = 2$. It is the same choice as in Lilly [30], as it provides a direct equality between $|T_\psi[u](t, a(t))|$ and the amplitude of u (see Eqs. (25) and (33)).

The Cauchy analyzing wavelet belongs of a general family of two-parameter family of exactly analytic continuous wavelets called the generalized Morse wavelets [28] that also includes as special cases analytic versions of the derivative of Gaussian wavelets and the Airy wavelets. The Cauchy-Paul wavelet analytical expression in the time domain is easy to find:

$$\psi_n(t) = c_n \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{i}{t+i} \right)^{n+1} = c_n \frac{n!}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right]^{n+1} e^{i(n+1)\arctan(t)}, \quad (36)$$

unlike the other Morse wavelets which cannot be easily analytically computed.

3.4. Quality factor for the resolution of the CWT

Referring to the conventional frequency analysis of constant- Q filters, Le and Argoul [19] introduced a parameter Q for the time-frequency resolution of the CWT. This Q factor is defined as the ratio of the mean-frequency to the frequency bandwidth. That is, seeing $|\hat{\psi}|^2/\|\hat{\psi}\|_2^2$ as a probability density, the ratio of its mean value f_ψ^* over two times its standard deviation Δf_ψ :

$$Q = \frac{f_\psi^*}{2\Delta f_\psi}. \quad (37)$$

The localization domain for the CWT at point $(t, f = f_\psi^*/a)$ becomes:

$$[t + a t_\psi^* - a \Delta t_\psi, t + a t_\psi^* + a \Delta t_\psi] \times \left[\frac{f_\psi^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta f_\psi, \frac{f_\psi^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta f_\psi \right], \quad (38)$$

where seeing $|\psi|^2/\|\psi\|_2^2$ as a probability density, t_ψ^* and Δt_ψ are its mean value and standard deviation respectively, analogously to f_ψ^* and Δf_ψ for $\hat{\psi}$. The time and frequency resolutions of the CWT are $\Delta t = a \Delta t_\psi$ and $\Delta f = \Delta f_\psi/a$, respectively.

This factor Q characterizes the frequency resolution of the CWT: $\Delta f = f/2Q$ (where $f = f_\psi^*/a$), and its time resolution $\Delta t = \mu_\psi Q/\pi f$, where $\mu_\psi = 2\pi \Delta f_\psi \Delta t_\psi$ is a parameter of ψ characterizing its time-frequency dispersion. Due to Heisenberg's inequality, μ_ψ is greater than 1/2, and for Cauchy wavelets, $\mu_\psi = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1/(2Q^2 - 1)}$.

When there is a sudden change due to a discontinuity within the signal, the time resolution implies a discontinuity effect zone of length $c_t \Delta t$, with c_t a constant characterizing the error tolerance for the ridges [3]. It comes into effect at the beginning and the end of the signal, and whenever the hypothesis of slowly varying modal characteristics, necessary for the extraction of accurate ridges, is not met. In particular, a shock in the mechanical system results in a discontinuity in its modal amplitudes and phases, and thus requires a discontinuity effect zone, prior to and following the shock, to be discarded.

Let us consider a signal expressed as a sum of n damped sinusoids: $u(t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \sin(2\pi f_k t + \varphi_k)$, the choice of Q is restricted, for the ridge extraction of each sinusoid k , by three bounds [3], that provide a range of acceptable values:

- A lower bound due to the proximity of the frequencies, $Q_{min} = \frac{c_f f_k}{2|f_k - f_j|}$, where c_f is a constant characterizing the error tolerance for the ridge, and f_j is the closest frequency.
- An upper bound due to damping, $Q_\zeta = \frac{1}{2\zeta_k} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\zeta_k^2}}$, assuming $A_k(t) = A_k(0)e^{-\zeta_k 2\pi f_k t}$.
As experimental values for ζ_k do not exceed around 1% in our case, the following approximation is used from now on: $Q_\zeta \simeq \frac{1}{\zeta_k \sqrt{2}}$.
- An upper bound due to the edge or discontinuity effects, $Q_{max} = \frac{\pi f_k T}{2c_t \mu_\psi}$, with T the total duration of the signal. To get rid of the Q dependency of Q_{max} , μ_ψ is considered to be equal to 1/2 for future computations, as quality factors used in these computations are all greater than 13 and thus give a very good approximation.

Moreover, to ensure that an acceptable choice for Q exists, its lower bound has to be lower than its two upper bounds. In particular, using the damping upper bound, we get the condition:

$$|\lambda_k| \leq \frac{2\pi\sqrt{2}}{c_f} |f_k - f_i|, \quad (39)$$

where j is the index of the closest frequency, and $\lambda_k(t) = \dot{A}_k(t)/A_k(t)$.

If the inequality given by Eq. (39) is not met, the extraction of ridges is not guaranteed to be accurate, or even possible. This tells us that two close modes cannot be separated from each other through the CWT analysis of u if they are damped too much.

3.5. Procedure for a suitable quality factor in the case of transient signals polluted by noise

Free vibration response signals from experimental data are seldom ideal signals as described in paragraph 3.2, but rather combined with a response to ambient noise and an additive noise. This additive noise, which originates from the sensors used to collect the data, is mostly suppressed by the filtering properties of the CWT and the use of Eq. (32). Although, the ambient response raises a much more sensitive problem, as its distribution in the frequency domain is concentrated around the natural frequencies of the system, thus will not be filtered out by the CWT. For each natural frequency of the system, a threshold, under which the free response cannot be considered as much greater than the ambient response anymore, needs to be defined.

In addition, the choice of an optimal quality factor Q for each ridge, considering that its bounds need defined time limits, frequencies and damping ratios to be computed, is also still to be specified. To define these limits and a choice for Q , we need rough estimates of the natural frequencies of the system, from which can be computed more precise estimates of these frequencies, damping ratios and transient time limits, and then, having all the necessary information to compute Q 's bounds, final values for the modal quantities. The method, which has to be carried out for each mode extracted from each transient response, goes as follows:

- First step (first ridge extraction)
 - with rough estimates for the mode's natural frequency $f_{est}^{(1)}$ and the closest frequency (a simple Fourier transform can be used), compute $Q_{min}^{(1)}$.
 - compute $|\sum_{k=1}^n T_\psi[u_k]^2|$ with $Q = Q_{min}^{(1)}$, and then the threshold which indicates when the transient is no longer prevailing over the ambient response for this natural frequency, defined as the logarithmic time average of $|\sum_{k=1}^n T_\psi[u_k]^2|$ with $f = f_{est}^{(1)}$ (or $a = f_\psi^0/f_{est}^{(1)}$).
 - extract the ridge of $|\sum_{k=1}^n T_\psi[u_k]^2|$ corresponding to the mode at issue (Eq. (32)), from t_i , the time of the shock, up to t_f , when it goes under the threshold.
 - compute estimates of the mode's natural frequency $f_{est}^{(2)}$ and damping ratio $\zeta_{est}^{(2)}$, from the time average of the frequency of the ridge and the slope of the linear regression on the logarithm of its amplitude.
- Second step (second ridge extraction)
 - with $f_{est}^{(2)}$, $\zeta_{est}^{(2)}$, t_i and t_f , compute $Q_{min}^{(2)}$, $Q_{max}^{(2)}$ and $Q_\zeta^{(2)}$.

- compute $|\sum_{k=1}^n T_\psi[u_k]^2|$ with $Q = \min((Q_{min}^{(2)} + Q_{max}^{(2)})/2, Q_\zeta^{(2)})$, and then the corresponding threshold with $f = f_{est}^{(2)}$ (or $a = f_\psi^0/f_{est}^{(2)}$). This choice for Q , introduced by Erlicher and Argoul [3], allows to avoid perturbations both in the frequency domain (Q_{min}), and in the time domain (Q_{max}).
- extract the ridge of $|\sum_{k=1}^n T_\psi[u_k]^2|$ corresponding to the mode at issue (Eq. (32)), from t_i , the time of the shock, up to t_f , when it goes under the threshold.
- compute the mode's natural frequency, damping ratio and modal shape, from the time average of the frequency of the ridge, the slope of the linear regression on the logarithm of its amplitude and the time average of the the modal shape.

In short, the first extraction allows the computation of an optimal value for Q , and the second one gives more precise identification results. It should be noted that, for each ridge extraction, the discontinuity effect zone from the time of the shock is discarded. Moreover, for every transient response analyzed, this procedure has to be carried out for each mode that is extracted, because the values of the ridge's threshold and quality factor bounds depend on the mode.

4. Experimental testing

Vibration data acquired during an experimental campaign carried out on masonry wall specimens, are used to apply the previous described technique for the dynamic identification through transient responses. The experimental campaign, aimed to identify the dynamic parameters, consists in the execution of both ambient-vibration and shear-compression tests. Observing the acquired data, some of them were unusual signals as outcome of ambient vibration excitation. In fact they contain some discontinuities in the waveform that can be assumed as transient responses, i.e. change in the steady-state of the system. These responses are probably due to the testing environment triggered by other testing machines. In [32], it has been demonstrated how signal processing of these transient responses allows to identify the stable modes of the masonry specimen. The implementation of CWT analysis applied to selected transient signals allows to detect spurious modes created by noise or redundant degrees of freedom of the model and to identify the presence of close modes and the related modal parameters.

4.1. Description of the experimental campaign

An experimental campaign was carried out on UnReinforced Masonry (URM) panels in the laboratory LabSCo of IUAV University of Venice. The test specimens reproduce ordinary URM walls of existing buildings with Flemish bond pattern made up of brick unit dimensions 250x120x55 mm. Each panel is 150 cm height, 130 cm width with wall thickness of 25 cm and mortar joints thickness of 1 cm. The walls were contemporary subjected to Shear-Compression (SC) and ambient-vibrations tests performed through a system of accelerometers (Figure 1a). This combination of tests aims to obtain the dynamic parameters of pre and post-damage conditions through the acquisition of signals with ambient vibration excitation during the SC test. For this purpose, the loading history was made up of several loading steps S_i , until the failure (Figure 1b). Each S_i step was followed by a pause step P_i , during which the reached horizontal and compression loads were kept constant. The campaign provided also a first phase of ambient vibration test at initial conditions i.e. the wall specimen in the test rig at zero loads, this phase is called P_0 step. From this experimental campaign, the data acquired for one of these masonry panels were selected for

the application of the wavelet analysis to the transient responses. Following the test scheme and the instrumentation used are described.

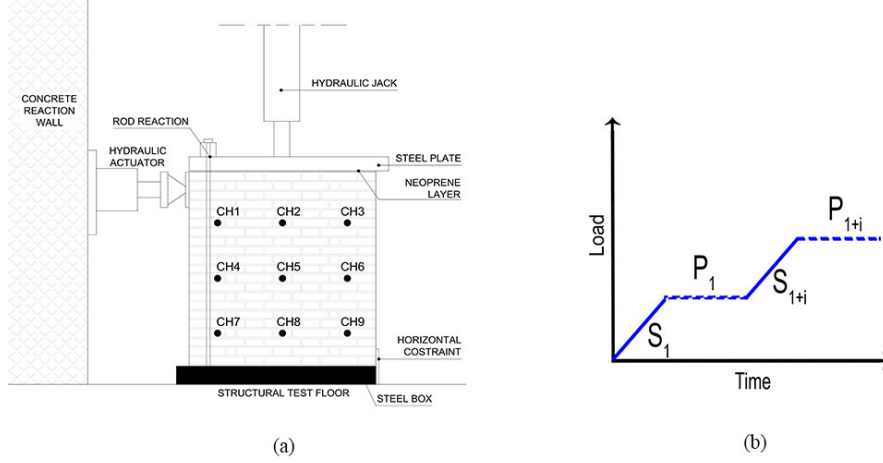


Figure 1: Set-up of shear-compression test and vibration test with position of accelerometers(a) and related loading scheme (b).

4.2. Test set-up and instrumentation

The SC test was a monotonic test, a vertical constant compression and an horizontal incremental force applied respectively at the top and at the lateral top of the wall according to the predefined loading steps. The compression load, applied with a hydraulic jack, was equal to 160 kN, uniformly distributed through a steel plate on the top surface of the wall. The horizontal load, by means of an hydraulic actuator fixed to a reaction wall, was applied in displacement control with a velocity of 0.03 mm/s, each S_i step comprised a displacement of 5 mm followed by a P_i step of 15 minutes where the loads and the reached displacement were kept constant. The wall specimen was fixed to the floor by means of a steel box, then a steel rod reaction system has been applied to keep fixed the part subjected to horizontal load in order to avoid rocking failure mechanism. This set-up configuration makes the wall-test machine system asymmetrical. Nine unidirectional accelerometers were installed on a side of the wall in order to carry out the dynamic identification through ambient vibrations. The sampling frequency of the acquired signals was 600 Hz, then processed using Butterworth filter (4th order) with a band-pass filtering between the frequency range of 0.25 Hz-40 Hz. The sensors used are PCB 393C accelerometers and the data acquisition system is HBM MX840A amplifier.

From the measurements carried out on the masonry wall during the SC test, pause steps have been selected corresponding to the initial conditions P_0 step, and to the phases before and after the occurring of the first cracks respectively P_6 and P_7 steps, Figure 2. The type of failure occurred is typical of masonry wall subjected to this combination of loads [33, 34], indeed a main diagonal crack is developed throughout the wall during S_9 loading step.

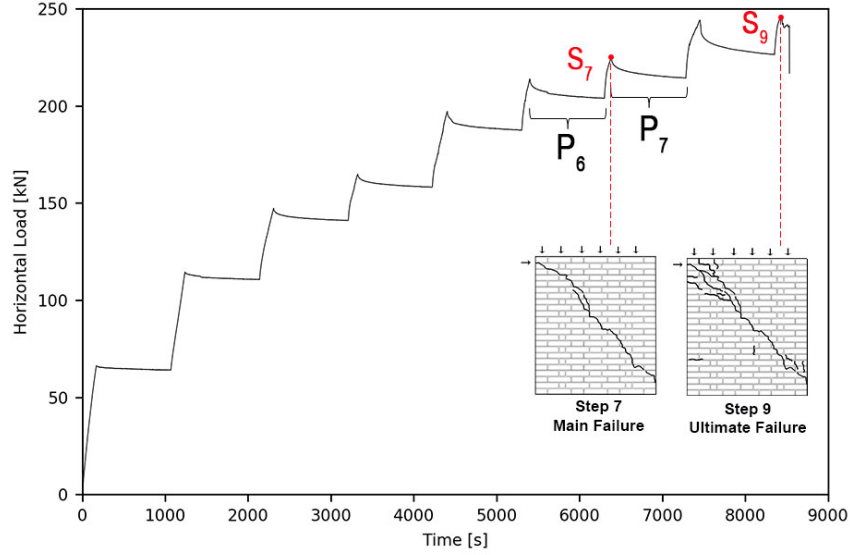


Figure 2: Horizontal Load-Time graph of SC test, display of P_6 and P_7 pause steps analyzed and of the occurring failures at S_7 and S_9 load steps.

5. Application to the after-shock responses of masonry wall

First of all, a dynamic identification of the URM wall has been carried out through a frequency-domain technique, Least Square Complex Frequency method, applied to the whole signal of each step. The CWT analysis was then applied to the transient responses of the whole signals acquired for each selected pause steps, P_0 , P_6 and P_7 . A brief demonstration of the procedure carried out on the signals for both identification techniques is then presented.

5.1. Whole signal - LSCF method

The dynamic identification was carried out by means the LMS Polymax algorithm through the commercial software LMS Test.Lab Siemens PLM Software. The evaluation of the frequencies, damping and modal shapes is based on the application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation through the Least Squares Complex Frequency (LSCF) estimator. The advantage of the technique is the very stable identification of the system poles and participation factors allowing to easily interpret the stabilisation diagrams and to the separation of the closely spaced poles even in the case of noisy FRF measurements. For more details about the method refer to [35, 36]. This technique was already applied to identify the modal parameters of multi-leaf masonry walls [37, 38].

For each experimental data set, the cross-power spectrum function was determined in the domain of frequency, with reference to the number of measurement points. The LMS Polymax method requires the selection of a reference channel (or point RP), the cross power spectra and the related stabilization charts are evaluated as a function of this point. Then the frequencies, damping ratios and related modal shapes were identified by the diagram of stabilization, see the related diagram to identify four stable frequencies of P_0 step (Figure 3).

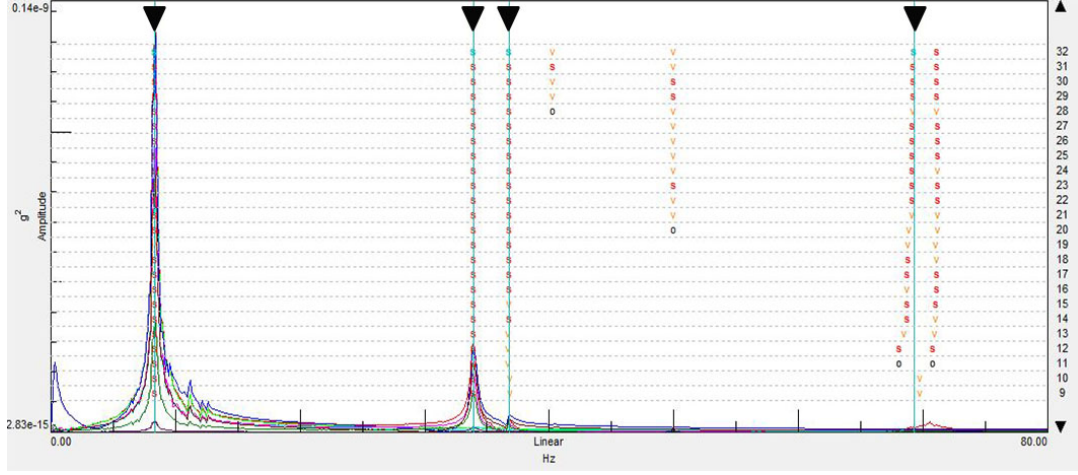


Figure 3: Stabilization diagram of P_0 step for the LSCF method, display by black triangles of the identified stable frequencies.

5.2. After impact signals - Wavelet analysis

Several shocks and their corresponding transient responses were noticed throughout the acceleration signals of P_0 , P_6 and P_7 steps. Their origin is unknown, as they were not the result of voluntary hits on the wall, but could be due to shock waves coming from other experiments and conveyed by the ground, or to the crack occurrence in P_6 and P_7 steps. These shocks can easily be identified in the time-frequency plane as high intensity, time constant straight lines, spanning a wide range of frequencies. They can be seen in Figure 4, where $\left| \sum_{k=1}^9 T_\psi[u_k]^2 \right|$ (see Eq. (32)) is plotted for a portion of P_7 step.

This representation allows for a separation of the natural frequencies of the system from those present in the exciting forces. Indeed, natural frequencies are excited after a shock and present subsequently a characteristic exponential decay, whereas frequencies present in the exciting forces are independent from these shocks. In Figure 4, five distinct shocks can be identified at around $t = 7\text{s}$, $t = 37\text{s}$, $t = 44\text{s}$, $t = 47\text{s}$ and $t = 62\text{s}$, one of which spans a large frequency range and thus triggers transient responses of all the natural frequencies of the system (around 11 Hz, 28 Hz and 34 Hz), while the other four only cover higher frequencies and trigger the two highest natural frequencies. Incidentally, at around 16 Hz, a steady frequency can be observed throughout the whole signal, but it does not show any particular excitation after the two first shocks (which span a frequency band containing 16 Hz), unlike the natural frequencies, and so it can be assumed not to be one.

The procedure introduced in section 3.5, comprised of two ridge extractions, was carried out for a total of 3 shocks for P_0 step, 3 for P_6 step and 10 for P_7 step, each containing the transient responses of all or a part of the modes of the structure. The first couple of extractions, corresponding to a transient of mode 2 on P_0 step, are presented in Figure 5. The modules of the CWT for $Q = Q_{min}$ (left) and for $Q = \min((Q_{min} + Q_{max})/2, Q_\zeta)$ (right) show that a higher quality factor means a narrower frequency filtering, but a larger edge or discontinuity effect zone, hence the compromise made for Q between Q_{min} and Q_{max} .

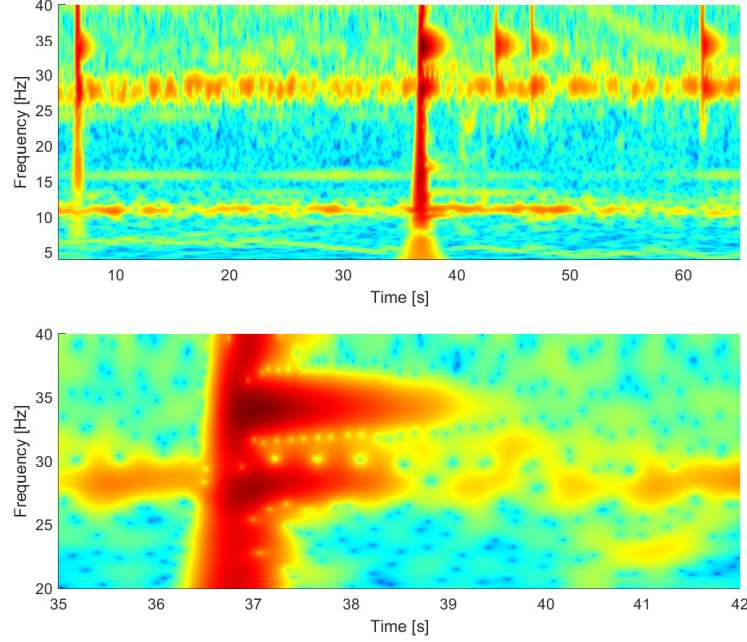


Figure 4: $|\sum_{k=1}^9 T_\psi[u_k]|^2$ for two portions of P_t step, with $Q = 20$ (log scale).

5.3. Results

A comparison of the frequencies and damping ratios identification results for all steps is shown in Table 2. As the CWT method provides results for each transient response, statistical calculations were made. Values of frequency and damping are averages of these different results, and “Std Dev” stands for standard deviation. These were computed using an unbiased estimator ($\sigma^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 / (n - 1)$), hence the empty cells for samples of only one value.

Identified natural frequencies found with both methods are consistent and show very little difference; the average relative error between the two methods is 0.26 %, and its maximum is 0.62 %. However, identified damping ratios are much more varying, with an average relative error between the methods of 30 %, and a maximum relative error of 85 %. This could be explained by the fact that damping ratios are often amplitude dependent, so their very existence as unique values could be meaningless. In that respect, identified results obtained by the CWT method with different transients, which have different initial amplitudes, may differ.

Furthermore, as the CWT method provides frequency and damping values for each individual transient response, it has the benefit of producing statistical results, and especially estimates of their standard deviation. Estimates of the error can then be computed using the central limit theorem, which can prove to be very useful for the often imprecise measure of damping ratios. Moreover, as can be seen in Table 2, differences between the results obtained with each method are consistent with the standard deviations found with the CWT method.

To compare the mode shapes obtained with both methods, the Modal Assurance Criterion

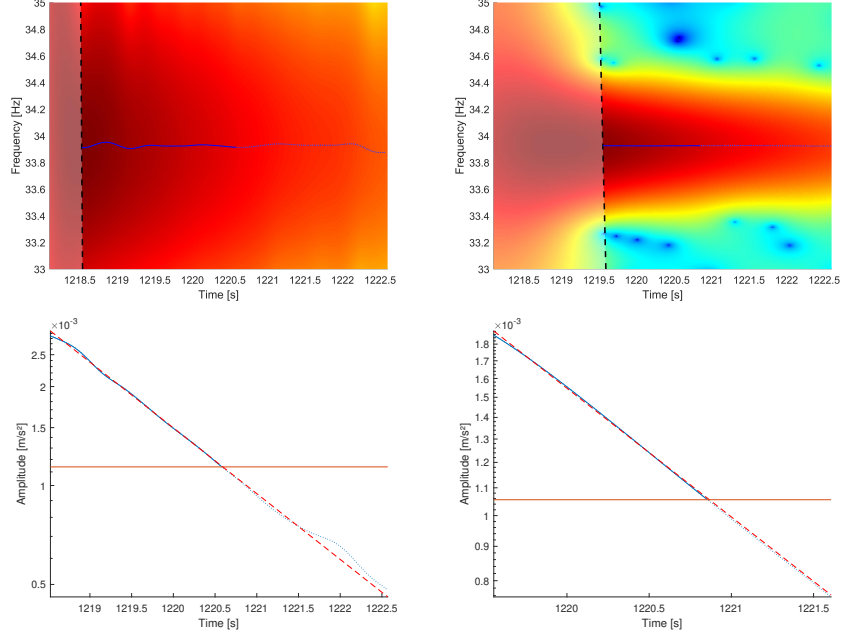


Figure 5: First (left column) and second (right column) ridge extractions of the first transient of mode 2 on P_0 step. The first line shows the modules of the CWTs in log scale and their discontinuity effect zone, and the corresponding ridges. The second line shows the ridges in the time-amplitude plane. The linear regressions of the logarithm of the amplitude are shown in red dashed lines. The values taken for Q in the first and second extractions are $Q = 30.3$ and $Q = 103.3$ respectively.

Table 2: Modes' natural frequencies and damping ratios for P_0 , P_6 and P_7 steps, using each method.

Step	Mode number	Number of transients (CWT)	Frequencies			Damping ratios		
			Frequency (LSCF) Hz	Frequency (CWT) Hz	Std Dev (CWT) Hz	Damping (LSCF) %	Damping (CWT) %	Std Dev (CWT) %
P_0	1	1	8.35	8.37	/	1.64	1.17	/
	2	3	33.94	33.93	0.01	0.43	0.29	0.15
	3	2	36.78	36.76	0.06	0.57	0.56	0.32
P_6	1	2	11.12	11.05	0.00	0.64	0.54	0.08
	2	1	31.20	31.32	/	0.36	0.51	/
	3	2	32.84	32.81	0.03	0.66	0.27	0.03
	4	1	37.37	37.25	/	0.60	0.42	/
P_7	1	3	10.99	11.02	0.02	0.61	0.82	0.25
	2	5	28.36	28.23	0.11	0.67	0.66	0.19
	3	8	34.20	34.15	0.09	0.58	0.70	0.16

(MAC) designed to determine the similarity of two complex mode shapes and defined as [1]:

$$\text{MAC}(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = \frac{|\langle \phi^{(1)}, \phi^{(2)} \rangle|^2}{\langle \phi^{(1)}, \phi^{(1)} \rangle \langle \phi^{(2)}, \phi^{(2)} \rangle} \in [0, 1], \quad (40)$$

was performed. This criterion is equal to 1 if and only if the mode shapes are collinear (which implies they are equal if they have been reshaped using Eq. (6), or opposites). Results of this criterion applied to the mode shapes found with both methods are shown in Table 3. For the CWT method, which provides multiple results for some modes thanks to the different transient responses, the average modal shape was used.

Table 3: Comparison of the mode shapes found with each method, for P_0 , P_6 and P_7 steps.

Step	Mode number k	Modal Assurance Criterion	Non-proportionality index	
		MAC (LSCF $\times$ CWT) %	$\tilde{I}_{np}^{(k)}$ (LSCF) %	$\tilde{I}_{np}^{(k)}$ (CWT) %
P_0	1	99.73	2.46	1.39
	2	99.98	7.10	7.90
	3	98.91	5.50	3.93
P_6	1	100.00	0.23	0.29
	2	99.94	1.34	1.07
	3	99.92	1.09	1.43
	4	98.96	5.75	5.51
P_7	1	99.99	0.46	0.61
	2	99.96	0.65	1.56
	3	91.08	31.32	3.86

The MAC computed are all very close to 1, which means that the two methods give similar results for the mode shapes, except for the third mode of P_7 step. Indeed, for this mode, the MAC between the mode shapes obtained with the LSCF and CWT methods is abnormally low. Thus, it is possible that one of the methods had some kind of problem with the computation of this mode shape; this assumption is borne out by unusual results for $\tilde{I}_{np}$, as explained later.

Results of the non-proportionality index $\tilde{I}_{np}$ for each method are shown in Table 3. As for the computation of the MACs, for the CWT method, the average modal shape was used to compute $\tilde{I}_{np}$. Except for the LSCF result of the third mode of P_7 step, which is abnormally high and should be discarded because it is significantly different from the other results (see previous paragraph), results range from a fraction to a few percents.

A summary of relevant results regarding the understanding of index $\tilde{I}_{np}$ is presented in Table 4. The values used for the wall are averages of the values obtained with the LSCF and CWT methods. However, the non-proportionality index $\tilde{I}_{np}$ of mode 3 of P_7 step for the LSCF method was discarded, because, as explained earlier, its modal shape appears to be incorrect. These results are consistent with those of Adhikari [4] and Erlicher and Argoul [3] (see Table 1) and the theoretical formation of complex modes presented in paragraph 2.4: relatively close modes show higher values for $\tilde{I}_{np}$, and in comparison with the other two studies, systems with overall higher damping also show higher values for this index.

The mode shapes of P_0 step are shown in Figure 6. As suggested by the results of the non-proportionality index $\tilde{I}_{np}$, the imaginary part of these shapes is quite small, thus only their real part is showed. Having two - or three for P_6 step - torsional modes with such close frequencies is unexpected for a clamped wall, however it could be explained by various factors: for all steps, the heterogeneity induced by the masonry, or the elasticity of the steel box that fixes the wall to

Table 4: Comparison of the results found for $\tilde{I}_{np}$ for each step.

Step	Frequency f_k Hz	$\eta_{k,k+1}$ %	Damping ζ_k %	$\tilde{I}_{np}^{(k)}$ %
P_0	8.4	120.9	1.4	1.9
	33.9		0.4	7.5
	36.8	8.0	0.6	4.7
P_6	11.1	95.3	0.6	0.3
	31.3	4.9	0.4	1.2
	32.8	12.8	0.5	1.3
	37.3		0.5	5.6
P_7	11.0	88.0	0.7	0.5
	28.3	18.8	0.7	1.1
	34.2		0.6	3.9

the ground, and for P_6 and P_7 steps, the interaction with the hydraulic jack and actuator, or the occurrence of a diagonal crack.

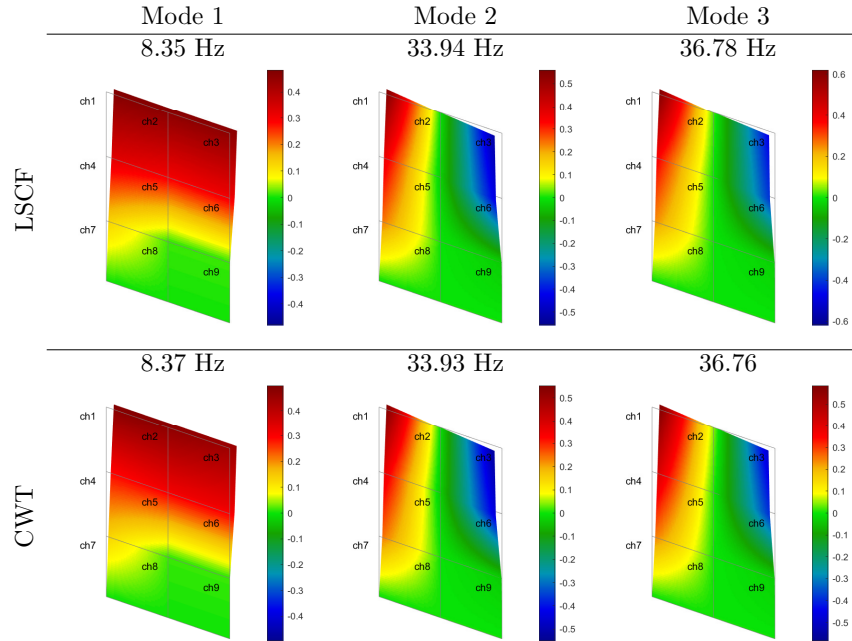


Figure 6: Masonry wall: mode shapes (real part) at P_0 step.

6. Conclusions

The emergence of complex modes, and especially the influence of close frequencies on their formation, is investigated. It is well known that complex modes arise in linear systems when

their corresponding modal damping is non-proportional, but another phenomena can amplify their imaginary part: modes with close natural frequencies. This tendency is first confirmed by the results of two previous studies in the literature, from simulated and experimental data, respectively. A last confirmation is then presented from an experimental study on a masonry wall setup, equipped with accelerometers and subjected to shear-compression tests under ambient excitations.

To quantify the “complexity” of these modes, a new non-proportionality index is proposed, based on the notion of optimally normalized complex modes developed by Adhikari [4]. While being equal to Adhikari’s index up to first order, it presents the advantage of being easily available for experimental results, and not only for simulated ones.

To identify modal parameters of the experimental wall setup, the CWT with the Cauchy-Paul wavelet is applied to transient responses present within the global response signal. Although this method is already often used in the literature, a new procedure is introduced in order to handle the heavy noise excitation undergone by the structure, when the detected transient responses barely exceed its response to ambient noise excitation. In addition, the CWT of the acceleration responses provides a graphical overview of the instantaneous frequencies, allowing the easy distinction between natural frequencies of the wall from those present in the ambient excitation. The identified modal parameters are finally compared to those obtained by the classical Least Square Complex Frequency algorithm applied to the whole response signals, and show great concordance.

Appendix

This part seeks to prove Eqs. (19) and (20), assuming first-order perturbation on damping. For that purpose, damping matrix $\mathbf{C}$ is written as $\varepsilon \mathbf{C}_0$, with ε a real parameter. This way, modal parameters of the damped system, p_k and $\phi^{(k)}$, depend on ε , while parameters of the undamped normal modes, ω_k and $\varphi^{(k)}$, do not depend on it. Eq. (4) can then be rewritten as:

$$\phi^{(k)} = \varphi^{(k)} + i\varepsilon \sum_{j \neq k} \frac{\omega_j}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \frac{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{C}_0 \varphi^{(k)}}{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{M} \varphi^{(j)}} \varphi^{(j)} + O(\varepsilon^2).$$

To facilitate readability, let $\Delta_0^{(k)}$ be equal to:

$$\Delta_0^{(k)} = \sum_{j \neq k} \frac{\omega_j}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \frac{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{C}_0 \varphi^{(k)}}{{}^t\varphi^{(j)} \mathbf{M} \varphi^{(j)}} \varphi^{(j)}, \quad \text{and} \quad \Delta^{(k)} = \varepsilon \Delta_0^{(k)}.$$

Using Eq. (14), we get:

$$\begin{aligned} \phi_{opt}^{(k)} &= \frac{{}^t\varphi^{(k)} \left(\varphi^{(k)} - i\varepsilon \Delta_0^{(k)} + O(\varepsilon^2) \right)}{\left\| \varphi^{(k)} + i\varepsilon \Delta_0^{(k)} + O(\varepsilon^2) \right\|_2^2} \left(\varphi^{(k)} + i\varepsilon \Delta_0^{(k)} + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \varphi^{(k)} + i\varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{{}^t\varphi^{(k)} \Delta_0^{(k)}}{\left\| \varphi^{(k)} \right\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

and then, using Eq. (17):

$$\begin{aligned} I_{np}^{(k)} &= \frac{\left\| \varphi^{(k)} + i\varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) + O(\varepsilon^2) - \varphi^{(k)} \right\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} \\ &= \frac{\left\| \varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) \right\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} + O(\varepsilon^2) = \frac{\left\| \Delta^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

which proves half of Eq. (20).

Then, to compute $\tilde{I}_{np}^{(k)}$, let $\tilde{\phi}^{(k)}$ be the rescaling of $\phi^{(k)}$ using Eq. (6),

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(k)} &= \left(t\phi^{(k)}\phi^{(k)} \right)^{-1/2} \phi^{(k)} = \left(\|\varphi^{(k)}\|_2^2 + 2i\varepsilon t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)} + O(\varepsilon^2) \right)^{-1/2} \left(\varphi^{(k)} + i\varepsilon\Delta_0^{(k)} + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \frac{\varphi^{(k)} + i\varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right)}{\|\varphi^{(k)}\|_2} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

and with Eq. (18),

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{np}^{(k)} &= \frac{\left\| i\varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) + O(\varepsilon^2) \right\|_2}{\left\| \varphi^{(k)} + i\varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) + O(\varepsilon^2) \right\|_2} \\ &= \frac{\left\| \varepsilon \left(\Delta_0^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta_0^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right) \right\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} + O(\varepsilon^2) = \frac{\left\| \Delta^{(k)} - \frac{t\varphi^{(k)}\Delta^{(k)}}{\|\varphi^{(k)}\|_2^2} \varphi^{(k)} \right\|_2}{\|\varphi^{(k)}\|_2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Finally, we get:

$$I_{np}^{(k)} = \tilde{I}_{np}^{(k)} + O(\varepsilon^2),$$

which concludes the proof of Eqs. (19) and (20).

References

- [1] M. G rardin, D. Rixen, Th orie des Vibrations, Application   la Dynamique des Structures, 2nd Edition, Masson, 1996.
- [2] J. W. Strutt, The Theory of Sound, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [3] S. Erlicher, P. Argoul, Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform, Mechanical Systems and Signal Processing 21 (3) (2007) 1386–1421. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2006.03.010>
- [4] S. Adhikari, Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality, Mechanical Systems and Signal Processing 18 (1) (2004) 1–27. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00048-7](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00048-7)
- [5] S. Adhikari, Structural Dynamic Analysis with Generalized Damping Models, John Wiley & Sons, Ltd, 2014.
- [6] M. Krifa, N. Bouhaddi, G. Chevallier, S. Cogan, N. Kacem, Estimation and correction of the modal damping error involving linear and nonlinear localized dissipation, European Journal of Mechanics, A/Solids 66 (2017) 296–308. <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.08.003>
- [7] H. Koruk, K. Sanliturk, A novel definition for quantification of mode shape complexity, Journal of Sound and Vibration 332 (14) (2013) 3390–3403. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.039>
- [8] K. Liu, M. R. Kujath, W. Zheng, Quantification of non-proportionality of damping in discrete vibratory systems, Computers and Structures 77 (5) (2000) 557–570. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00230-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00230-8)
- [9] S.-K. Au, J. M. Brownjohn, Asymptotic identification uncertainty of close modes in bayesian operational modal analysis, Mechanical Systems and Signal Processing 133 (2019) 106–273. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106273>

- [10] J. M. Brownjohn, F. Magalhaes, E. Caetano, A. Cunha, Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the humber bridge, *Engineering Structures* 32 (8) (2010) 2003–2018. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.02.034>
- [11] R. M. Lin, M. K. Lim, Modal analysis of close modes using perturbative sensitivity approach, *Engineering Structures* 19 (6) (1997) 397–406. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(96\)00078-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(96)00078-8)
- [12] A. Grossmann, J. Morlet, Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 15 (4) (1984) 723–736. <https://doi.org/10.1137/0515056>
- [13] J. R. Williams, K. Amaratunga, Introduction to wavelets in engineering, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (14) (1994) 2365–2388. <https://doi.org/10.1002/nme.1620371403>
- [14] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, B. Piombo, Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: Application to real data, *Mechanical Systems and Signal Processing* 11 (2) (1997) 207–218. <https://doi.org/10.1006/mssp.1996.0078>
- [15] P. Argoul, S. Hans, F. Conti, C. Boutin, Time-frequency analysis of free oscillations of mechanical structures. application to the identification of the mechanical behaviour of buildings under shocks, in: *Proceeding of the COST F3 conference: System Identification and Structural Health Monitoring*, Madrid, Spain, 2000, pp. 283–292.
- [16] P. Argoul, T. P. Le, Wavelet analysis of transient signals in civil engineering, in: M. Frémond, F. Maceri (Eds.), *Novel Approaches in Civil Engineering*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 311–318.
- [17] N. Vacca, C. Rouzaud, G. Herve-Secourgeon, M. Galan, P. Argoul, C. Rospars, Characterization of dissipative behaviour of a reinforced concrete mock-up after soft impact tests through wavelet analysis, in: *40th IABSE Symposium 2018: Tomorrow's Megastructures*, International Association for Bridge and Structural Engineering - IABSE, 2018, p. 8.
- [18] R. Carmona, W.-L. Hwang, B. Torr  sani, *Practical Time-Frequency Analysis*, Vol. 9 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, Academic Press, 1998.
- [19] T. P. Le, P. Argoul, Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response, *Journal of Sound and Vibration* 277 (1-2) (2004) 73–100. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.08.049>
- [20] B. Torr  sani, *Analyse continue par ondelettes*, EDP Sciences, 2012.
- [21] M. Feldman, Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform-i. free vibration analysis method 'freevib', *Mechanical Systems and Signal Processing* 8 (2) (1994) 119–127. <https://doi.org/10.1006/mssp.1994.1011>
- [22] M. D. Trifunac, Comparisons between ambient and forced vibration experiments, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 1 (2) (1972) 133–150. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290010203>
- [23] J. Slavi  , I. Simonovski, M. Bolte  ar, Damping identification using a continuous wavelet transform: Application to real data, *Journal of Sound and Vibration* 262 (2) (2003) 291–307. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01032-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01032-5)
- [24] T. P. Le, P. Paultre, Modal identification based on the time-frequency domain decomposition of unknown-input dynamic tests, *International Journal of Mechanical Sciences* 71 (2013) 41–50. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.005>
- [25] C. K. Chui, *Wavelet analysis and its application*, in: *Wavelets*, Vol. 2 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, Academic Press, San Diego, 1992, p. 725.
- [26] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Third Edition: The Sparse Way, 3rd Edition, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 2008.
- [27] P. Chatterjee, *Wavelet Analysis in Civil Engineering*, CRC Press, 2018.
- [28] J. M. Lilly, S. C. Olhede, Generalized morse wavelets as a superfamily of analytic wavelets, *IEEE Transactions on Signal Processing* 60 (11) (2012) 6036–6041. <https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2210890>
- [29] T. K. Caughey, M. E. J. O'Kelly, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics* 32 (3) (1965) 583–588. <https://doi.org/10.1115/1.3627262>
- [30] J. M. Lilly, Element analysis: A wavelet-based method for analysing time-localized events in noisy time series, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473 (2200) (2016). <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0776>
- [31] T. Paul, K. Seip, Wavelets and quantum mechanics, in: M. B. Ruskai, et al. (Eds.), *Wavelets and Their Applications*, Jones and Bartlett, Boston, 1992, pp. 303–322.
- [32] S. Ientile, A. Cecchi, G. Boscato, P. Argoul, F. Schmidt, B. Nedjar, D. Siegert, Methodology for the dynamic identification of damaged unreinforced masonry walls through vibrations tests, in: *40th IABSE Symposium 2018: Tomorrow's Megastructures*, International Association for Bridge and Structural Engineering - IABSE, 2018, pp. 26–29.
- [33] B. Nedjar, Directional damage gradient modeling of fiber/matrix debonding in viscoelastic ud composites, *Composite Structures* 153 (2016) 895–901. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.012>
- [34] B. Nedjar, On a concept of directional damage gradient in transversely isotropic materials, *International Journal of Solids and Structures* 88–89 (2016) 56–67. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.03.026>
- [35] P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van Der Auweraer, B. Peeters, A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator, in: *Proceedings of IMAC*, Vol. 21, A Conference & Exposition on Structural Dynamics, Society for Experimental, 2003, pp. 183–192.
- [36] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Guillaume, J. Leuridan, The polymax frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?, *Shock and Vibration* 11 (3-4) (2004) 395–409. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.02.034>
- [37] G. Boscato, E. Reccia, A. Cecchi, Non-destructive experimentation: Dynamic identification of multi-leaf masonry walls damaged and consolidated, *Composites Part B: Engineering* 133 (2018) 145–165. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.022>
- [38] G. Boscato, E. Reccia, D. Baraldi, A. Cecchi, Sensitivity to damage imperfection for multileaf masonry walls based on vibrational analyses, *Shock and Vibration* 18 (2018) 2321589. <https://doi.org/10.1155/2018/2321589>

Conclusion

On peut résumer les grandes lignes du travail avec quelques notions.

Forme bilinéaire et Dirac complexe On a introduit le produit « de Fourier », essentiellement défini par $\langle u|v \rangle = \int u \bar{v}$, dont toutes les caractéristiques sont celles que l'on peut déduire de la transformation de Fourier. C'est un formalisme commode car les propriétés de la transformation de Fourier ont une forme algébrique et symétrique. La transformation en ondelettes prend une forme simple où les objets en jeu sont ceux qui apparaissent explicitement dans la transformée d'un signal harmonique. On a évacué la question de convergence de l'intégrale et on l'a remplacée par la question de l'analyticité d'une fonction sur un domaine déterminé. On en a extrait une notion d'extension « naturelle » dans le plan complexe d'une fonction définie sur les réels, ainsi qu'une définition du Dirac d'argument complexe, qui agit comme un prolongement analytique compatible avec la transformée de Fourier. Son support conique n'est réduit à un point que pour un argument réel.

Distance relative et intégrale floue On a introduit une distance relative, indépendante de la nature physique des signaux. C'est à partir de cette distance qu'on a « flouté » l'espace des signaux, en considérant que deux signaux proches sont indistincts. On a pris cette indistinction au sérieux en considérant que deux signaux indistincts sont d'intégrales indistinctes.

Signaux asymptotiques et spectre complexe Les signaux asymptotiques sont essentiellement définis à partir d'un unique paramètre portant sur la variation relative de fréquence par période. Ce paramètre permet d'affirmer qu'ils sont localement harmoniques, et possèdent une des caractéristiques intégrales des signaux harmoniques : ils sont (presque) d'intégrale nulle. On a défini une notion de spectre complexe, qui se trouve être la réunion des cônes verticaux centrés sur la fréquence instantanée du signal.

Somme mélangée La somme de deux signaux peut être caractérisée par son paramètre asymptotique. En fixant un seuil (supposément petit), on distingue une somme asymptotique – le signal somme est lui-même asymptotique – d’une somme non asymptotique – le signal somme est « incohérent » et sujet à des interférences. Cette approche ne tranche pas clairement la nature du mélange, elle en donne plutôt une grandeur caractéristique et significative.

Mélange séparé Un mélange peut être séparé par l’extraction d’arêtes selon des critères qui portent sur les distances relative de fréquences et d’amplitudes des signaux sources. Pour une ondelette mère de Cauchy, on a pu entièrement caractériser les situations (aucune, une ou deux arêtes, etc.) selon les paramètres $\Delta f/f$ et $\Delta A/A$ dans le cas de deux signaux harmoniques superposés. On imagine aisément que ce raisonnement est valable quelle que soit l’ondelette mère : les frontières entre les situations ne sont pas exactement les mêmes, mais ont globalement la même allure. À nouveau, cette approche ne tranche pas nettement les cas, il y a toujours des seuils à fixer.

Fréquence identifiée L’enveloppe du signal à transformer décale le centre effectif de l’ondelette vers les instants de plus forte amplitude ; la fréquence identifiée est alors décalée d’autant.

Énergie par l’arête On a défini l’énergie directement par les caractéristiques des arêtes d’un signal, en prenant pour modèle le cas linéaire. On a mis en évidence que la variation d’énergie dépend non seulement de la variation d’amplitude, mais aussi de la variation de fréquence.

*
**

La forme bilinéaire, le Dirac complexe et ce qui en découle, sont des outils d’usage assez général. La construction axiomatique en rend les fondations relativement solides, ou du moins transparentes.

La distance entre signaux est une notion simple, elle ne pose pas de problème particulier. L’indistinction de signaux proches est par contre plus délicate car elle introduit une non-transitivité, et l’étape la plus risquée est la transmission de cette indistinction à l’intégrale. Les seuls arguments allant en ce sens sont l’intuition du « suffisamment petit pour être négligeable » et l’irréfutabilité de cette hypothèse lorsque les signaux considérés ne sont pas absolument intégrables.

Tout ce qu’on a dit des signaux asymptotiques a la solidité que l’on voudra bien attribuer aux deux premiers chapitres, qui en sont à l’origine.

Il en est de même du chapitre sur les ondelettes, qui est surtout un travail d'approximations successives, assis sur les chapitres qui le précèdent.

La proposition de définition « arbitraire » de l'énergie en copiant le modèle linéaire n'a d'autres vertus que d'être exacte dans le cas linéaire (au biais d'identification près) et simple. On peut travailler sur un modèle presque harmonique dont les paramètres varient lentement, mais il y a toujours une part d'arbitraire dans la définition de son énergie potentielle. Pour chaque composant, l'approche retenue suppose en particulier que l'énergie potentielle est nulle quand l'énergie cinétique est maximale, c'est-à-dire à un pic d'oscillation de la vitesse.

*
**

On liste ici quelques sujets non traités mais qu'on pense d'intérêt.

Rapport de produits Plusieurs grandeurs (fréquence, fréquence apparente de l'arête, etc.) peuvent s'écrire sous une forme du type

$$\frac{\langle ug|v \rangle}{\langle u|v \rangle} = \frac{\int u\bar{v}g}{\int u\bar{v}}$$

Ce type de rapport est stable par multiplication scalaire de u ou v . On peut mettre en évidence une fonction $F = u\bar{v} / \int u\bar{v}$, qui est par définition une fonction d'intégrale unitaire. La fonction F est comme une densité de probabilité, sauf qu'elle est complexe, et on peut voir $\int Fg$ comme la valeur moyenne de g selon F . Pour $F = \alpha_1\delta(\bullet - z_1) + \alpha_2\delta(\bullet - z_2)$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, la moyenne est $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$, et la variance est $\alpha_1\alpha_2(z_1 - z_2)^2$, etc.

On peut mettre à l'épreuve cette idée en évaluant les grandeurs « statistiques » usuelles de certaines actions connues. On peut parler du centre d'action de u sur v

$$\frac{\langle u|\bullet|v \rangle}{\langle u|v \rangle}$$

Le centre d'action de l'évaluation d'une fonction en un point b est alors b lui-même, ce qui est rassurant, et les moments centrés d'ordre supérieur sont tous nuls. De même, le centre d'action de l'évaluation de la dérivée en b de e^φ est

$$\frac{\langle 2i\pi \bullet e^{2i\pi b\bullet} | \bullet e^\varphi \rangle}{\langle 2i\pi \bullet e^{2i\pi b\bullet} | e^\varphi \rangle} = b + \dot{\varphi}^{-1}(b)$$

c'est-à-dire qu'il est excentré dans le plan complexe. Le moment d'ordre deux centré est $-\dot{\varphi}^{-2}(b)$.

On peut évaluer le centre d'action d'un filtre ondelette en b sur une exponentielle

$$\frac{\langle \overline{\psi}(a\bullet) | (\bullet + b)e^{2i\pi z(\bullet+b)} \rangle}{\langle \overline{\psi}(a\bullet) | e^{2i\pi z(\bullet+b)} \rangle} = b + \overline{\Psi}_1(az)\dot{\varphi}^{-1}(b)$$

et pour une ondelette de Cauchy de paramètre n , sur l'arête, le centre est $b - in\lambda\dot{\varphi}^{-1}$. On retrouve le même décalage temporel $-in\lambda\dot{\varphi}^{-1}$ que pour la fréquence de l'arête à partir de l'équation 4.6. L'interprétation est pour l'instant légère, malgré cette « coïncidence ».

Dirac complexe et relativité restreinte Le prolongement analytique tel qu'on l'a défini est un prolongement nécessaire de toute fonction : il ne peut pas en être autrement dans ce cadre. Par ailleurs, le support du Dirac complexe est un cône, semblable au cône de lumière. Partant, on peut voir un parallèle entre le prolongement analytique et les lois physiques dans l'espace-temps. La droite réelle correspond à l'espace, à un instant donné, et la direction imaginaire du prolongement est le temps. Prolonger une fonction, c'est en quelque sorte appliquer les lois nécessaires de la physique ; leur respect correspond à la non-rupture d'analyticité. Analytique et physique seraient en quelque sorte synonymes³, et prolonger par le Dirac complexe s'identifie à faire évoluer un système dans le temps. À partir d'une portion d'espace connue à un instant donné, il est possible d'en déduire son passé certain et son futur certain, tous deux entièrement déterminés par ce qui est connu. On peut séparer le reste de l'espace-temps en ce qui est inconnu, c'est-à-dire nullement déterminé par le connu, et ce qui est incertain, c'est-à-dire partiellement mais pas entièrement déterminé par le connu. Voir la figure 6.1.

On a relié le plan complexe à l'espace-temps, mais il n'en a pas la structure hyperbolique ; c'est une autre manière d'exprimer que les rotations (circulaires) du plan complexe sont inadaptées car elles ne préservent pas la notion de prolongement. La structure hyperbolique est assurée si on utilise $j^2 = 1$ au lieu de $i^2 = -1$, mais il faut pourtant bien conserver i , qui apparaît nécessairement dans la transformation de Fourier. Cette analogie est en l'état de portée limitée.

Signaux indistinct Si on prend au sérieux l'idée d'indistinction, on peut poser que si u est indistinct de v , alors ∂u est indistinct de ∂v . Si on accepte en plus l'idée de pouvoir chaîner deux égalités d'indistinction à condition que l'erreur cumulée – la somme des deux erreurs – est inférieure au seuil,

3. D'ailleurs, beaucoup de fonctions mises en jeu en physique sont analytiques.

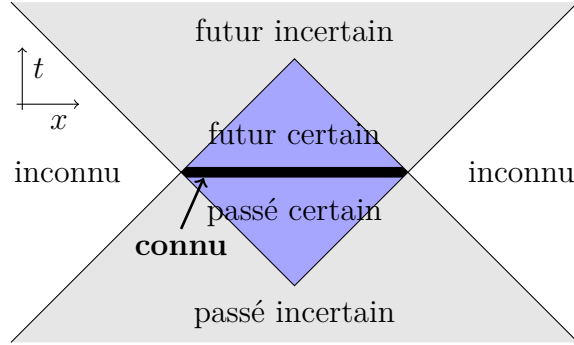


FIGURE 6.1 – Le connu, le certain, l’incertain et l’inconnu

Les cônes de lumière des points du certain ont tous une section horizontale complète dans le connu. Les cônes des points incertains ont une intersection partielle avec le connu. Les cônes des points inconnus n’ont aucune intersection avec le connu. Le connu tient lieu de portion analytique, et le certain en est le prolongement naturel.

c’est-à-dire que $u \simeq v$ à s_{uv} près et $v \simeq w$ à s_{vw} alors $u \simeq w$ à $s_{uv} + s_{vw}$ près, alors on dispose d’une forme de transitivité conditionnelle.

Ceci permet d’établir des chaînes de dérivations, dont chaque élément est du type $\partial(\dot{\varphi}^k e^\varphi) \simeq \dot{\varphi}^{k+1} e^\varphi$ à $|k|\varepsilon_0$ près, d’où vient ⁴ la relation

$$\partial^k e^\varphi \simeq \dot{\varphi}^k e^\varphi \quad \text{à} \quad \frac{\varepsilon_0(|k|^2 - |k|)}{2} \quad \text{près}$$

Le signal se dérive comme si c’était un signal harmonique. Remarquons d’ailleurs que l’ondelette de Cauchy dérive n fois, et qu’on peut envisager une évaluation alternative de la transformée en ondelette de Cauchy par ce biais :

$$\left\langle (a\bullet)^n e^{-a\bullet} \middle| e^{\varphi(\bullet+b)} \right\rangle \simeq (az(b + ia/2\pi))^n e^{\varphi(b+ia/2\pi)} \quad \text{si} \quad \frac{\varepsilon_0(n^2 - n)}{2} < s$$

pour une ondelette de Cauchy de paramètre n . Le signal dérivé n fois est évalué au point $b + ia/2\pi$. L’erreur nécessaire est inférieure à celle de l’évaluation par le signal harmonique tangent ⁵, mais elle est ici cumulée ⁶, ce qui en modifie le sens. Par ailleurs, il est nécessaire de faire des approximations successives supplémentaires pour évaluer la translation d’argument

4. On somme les erreurs successives $0\varepsilon_0 + 1\varepsilon_0 + \dots + (|k| - 1)\varepsilon_0 = \varepsilon_0(|k|^2 - |k|)/2$.

5. Remarquons qu’elle est, elle aussi, pilotée par $\varepsilon_0 n^2/2$.

6. Il a aussi fallu cumuler les erreurs d’approximation de la phase et de l’exponentielle, mais c’est un peu différent puisqu’il n’y a pas d’opération intercalaire (en l’occurrence, ici nous dérivons).

complexe. Quoi qu'il en soit, l'approche au premier ordre de la phase et cette approche-ci concordent quand le signal est harmonique.

On peut aussi imaginer définir un opérateur $\tilde{\partial}^{-1}$, qui n'est pas linéaire, tel que $\tilde{\partial}^{-1}e^\varphi = \dot{\varphi}^{-1}e^\varphi$. Pour un signal u quelconque, on a $\partial^{-1}u = u^2/\dot{u}$. Quand il opère sur un signal asymptotique, on montre que $\tilde{\partial}^{-1}\dot{\varphi}^k e^\varphi = \dot{\varphi}^{k-1}e^\varphi/(1+k\varepsilon)$. Cet opérateur effectue, à $|k|\varepsilon_0$ près, l'opération inverse de la dérivation, elle aussi opérant à $|k|\varepsilon_0$ près. Toutes ces opérations sont exactes quand ε_0 est nul, c'est-à-dire pour des exponentielles. On peut donc construire un espace où les signaux asymptotiques se comporte presque comme des exponentielles, à condition qu'on se limite à un nombre limité d'opérations.

Intégrale dans le domaine des périodes Quand on peut assurer que les limites de $e^\varphi/\dot{\varphi}$ sont nulles (formellement ou absolument), on a la relation $\int e^\varphi (1 - \varepsilon) = 0$. En rappelant que $\varepsilon = -\partial\dot{\varphi}^{-1}$, elle se réécrit

$$\int e^\varphi = - \int e^\varphi d\dot{\varphi}^{-1}$$

Cette relation est remarquable, puisqu'elle lie l'intégrale d'un signal dans le domaine temporel à son intégral dans le domaine des périodes. En particulier, cette relation donne directement la nullité de l'intégrale de l'exponentielle quand sa fréquence est dans le cône horizontal du plan complexe, puisque $d\dot{\varphi}^{-1} = 0$.

La longueur totale de la courbe d'intégration est $\int |d\dot{\varphi}^{-1}|$, qui correspond à la longueur de la courbe des périodes. L'intégrale de l'unité sur cette courbe est $\int d\dot{\varphi}^{-1} = \Delta\dot{\varphi}^{-1}$. On aurait aimé établir une relation du type $|\int e^\varphi| < M \int |d\dot{\varphi}^{-1}|$.

On peut aussi remarquer un lien entre l'intégrale dans le domaine des périodes et l'approximation de la phase stationnaire. Ceci est plus visible en explicitant ε pour obtenir

$$\int e^\varphi = \int e^\varphi \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2}$$

L'intégrale se concentre visiblement autour des instants auxquels $\dot{\varphi}$ est petit et $\ddot{\varphi}$ non nul.

Retirer κ L'approximation à l'ordre deux que l'on a utilisée pour approcher la transformée d'un signal asymptotique met en jeu une grandeur κ , qui mesure la variation du paramètre asymptotique. On pourrait imaginer une approche différente, qui ne met pas en jeu cette grandeur.

Pour une ondelette de Cauchy, la transformation d'un signal analytique au point b a un support réel fini, compris entre $b - a/2\pi$ et $b + a/2\pi$. Sur

ce support, la fréquence du signal varie dans un domaine limité par ε_0 seul. On pourrait alors en « déduire » que le support adjoint du signal restreint à cet intervalle est donné par sa fréquence instantanée restreinte à ce même intervalle. Disons par exemple que la fréquence du signal sur cet intervalle est au plus à une distance $\Delta z(b)$ de $z(b)$. Si $\overline{\psi}(a\bullet)$ est telle qu'elle est proche de son développement à l'ordre 2 autour du point $z(b)$ sur un rayon $\Delta z(b)$, alors on retrouve l'approximation fine de la transformée en ondelettes du signal.

Décomposition en signaux asymptotiques L'extraction d'arêtes de la transformée en ondelettes d'un signal est assez similaire à une décomposition en signaux asymptotiques. On aurait aimé savoir si une telle décomposition est effectivement possible, auquel cas discuter de son unicité éventuelle ou d'une forme d'optimalité⁷, de la valeur maximale ε_0 et des liens avec l'extraction d'arêtes.

Modèle de système Dans le premier article d'application, on a tracé des courbes fréquence-amplitude et amortissement-amplitude pour caractériser un système. On aurait aimé savoir si de telles courbes suffissent à décrire un système, pour par exemple en déduire sa réponse libre voire sa réponse forcée sous des conditions de forçage « faible » – d'influence faible sur une période – ou même quelconque.

7. Probablement de « parcimonie », au sens où la décomposition contiendrait un nombre minimal de termes.

Annexe A

Autour du produit « de Fourier »

A.1 Formalisme

On fait quelques remarques générales sur la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, qu'on propose d'appeler produit de Fourier.

Forme semi-linéaire Le produit de Fourier peut être modifié en considérant le conjugué du membre de gauche $\langle u^* | v \rangle$. Cette forme est plus proche d'un produit hermitien, puisqu'elle est semi-linéaire à gauche $\langle (\lambda u)^* | v \rangle = \lambda^* \langle u^* | v \rangle$, et que la « fausse norme » associée $\mathcal{N}^2(u) = \langle u^* | u \rangle$ vérifie $\mathcal{N}^2(\lambda u) = |\lambda|^2 \mathcal{N}^2(u)$. Ce produit est aussi invariant par transformée de Fourier : on peut montrer que $\langle u^* | v \rangle = \langle \bar{u}^* | \bar{v} \rangle$. Cette relation ressemble fortement à la formule de Plancherel, à ceci près que les fonctions considérées ne sont pas forcément dans L^2 ; voir par exemple le paragraphe suivant.

Espaces L^p Le produit $\langle u | v \rangle$ est bien défini si u et v sont de puissance p absolument intégrable, avec $1 \leq p \leq 2$. On peut en effet établir¹ l'inégalité

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\|_p \|v\|_p$$

Cette inégalité est en substance l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à ceci près que 1) la norme n'est pas issue du produit, même quand $p = 2$, et en particulier car 2) le produit n'est pas un produit scalaire².

1. L'inégalité de Hölder s'écrit $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\|_p \|\bar{v}\|_q$ pour $1/p + 1/q = 1$; l'inégalité de Hausdorff-Young affirmant $\|\bar{v}\|_q \leq \|v\|_p$ pour p entre 1 et 2, on conclut.

2. Le produit n'est ni semi-linéaire (car il est bilinéaire), ni hermitien (car il est symétrique), ni défini (contre-exemple : résoudre $\langle u + \lambda v | u + \lambda v \rangle = 0$ pour l'inconnue λ

Produits dérivés En conservant les mêmes notations, trois autres produits symétriques peuvent être construits par ajout de barres verticales. Pour deux fonctions u et v , on a :

- Le produit retourné $\langle u||v \rangle = \int u \bar{v}$.
- Le produit de Fourier retourné $\langle u|||v \rangle = \int u \underline{\bar{v}}$.
- Le produit usuel $\langle u|||v \rangle = \langle uv \rangle = \int uv$.

Il n'y en a pas d'autres de cette forme, puisqu'ajouter une cinquième barre ne fait que redonner le produit initial $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Chacun de ces produits est caractérisé par une combinaison d'adjoints élémentaires qui lui est propre, voir tableau A.1.

	$\langle \cdot \cdot \rangle$	$\langle \cdot \cdot \rangle$	$\langle \cdot \cdot \rangle$	$\langle \cdot \cdot \rangle$
$(2i\pi\bullet)^\dagger =$	$2i\pi\bullet$	∂	$-2i\pi\bullet$	$-\partial$
$\partial^\dagger =$	$-\partial$	$2i\pi\bullet$	∂	$-2i\pi\bullet$
$(e^{2i\pi x\bullet})^\dagger =$	$e^{2i\pi x\bullet}$	$e^{x\partial}$	$e^{-2i\pi x\bullet}$	$e^{-x\partial}$
$(e^{x\partial})^\dagger =$	$e^{-x\partial}$	$e^{2i\pi x\bullet}$	$e^{x\partial}$	$e^{-2i\pi x\bullet}$

TABLE A.1 – Adjoints élémentaires pour les quatre produits
L'exposant $\dagger$ signifie ici l'opérateur « d'adjonction » : par $u^\dagger$, on entend l'adjoint de u pour le produit considéré.

Gaussienne La gaussienne développée en série entière a un rayon d'évaluation infini : elle ne se prête pas très bien au calcul analytique du produit. En revanche, on a la relation

$$\langle e^{-\pi\bullet^2} | u \rangle = \langle e^{-\pi\bullet^2} u \rangle$$

comme la fonction $e^{-\pi\bullet^2}$ est invariante par transformation de Fourier.

A.2 Prolongement analytique

A.2.1 Fonctions élémentaires

On a établi l'existence d'un prolongement analytique naturel de fonctions de la droite réelle. On en déduit l'extension de deux fonctions usuelles dans la figure A.1.

complexe, u et v bien choisis), ni positif (contre-exemple : résoudre $\langle \lambda u | \lambda u \rangle = -1$ pour l'inconnue λ complexe, u bien choisi). Même la forme semi-linéaire du produit n'est pas à proprement parler hermitienne, puisque $\langle u^* | v \rangle^* = \langle v^* | \bar{u} \rangle$. Le produit est cependant non dégénéré : il n'existe pas de u non nul tel que le produit $\langle u | v \rangle$ soit nul pour tout v .

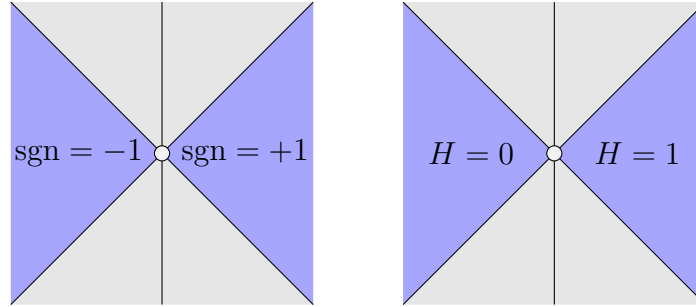


FIGURE A.1 – Extensions analytiques de la fonction signe sgn et de la fonction de Heaviside H

Signe de z Une manière de définir la fonction signe à presque tous les complexes est de poser $\text{sgn } iz = i \text{sgn } z$ et donc $\text{sgn } i = i$. On propose l'extension de la fonction signe à presque tous les complexes dans la figure A.2.

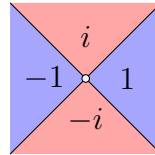


FIGURE A.2 – Extension de la fonction signe aux nombres complexes

Inégalités complexes Ceci suggère aussi une extension de l'inégalité sur les réels à l'inégalité sur les complexes, au sens où $z > 0$ signifie $\text{sgn } z = 1$, c'est-à-dire que z est dans le quart droit du plan complexe. Autrement dit, $z_1 < z_2$ signifie alors que z_2 se trouve dans le quart droit centré en z_1 , ou de manière équivalente que z_1 se trouve dans le quart gauche centré en z_2 . Ceci est compatible avec l'inégalité sur les réels (qui est généralisée) : la multiplication par un réel positif laisse le sens de l'inégalité inchangé, tandis que la multiplication par un réel négatif en inverse le sens ; l'inégalité est conservée par ajout d'un complexe quelconque des deux côtés ; la somme de complexes > 0 est elle-même > 0 ; si $z_1 < z_2$ et $z_3 < z_4$ alors $z_1 + z_3 < z_2 + z_4$; si $z_1 < z_2 < z_3$ alors $z_1 < z_3$.

On s'est gardé d'utiliser cette notion dans le texte, mais on aurait pu par exemple écrire « $e^{2i\pi z}$ est progressive si $z > 0$ ». La notation étend le sens de certaines affirmations sans en changer l'expression.

A.2.2 Intégrale

Translation dans $\mathbb{C}$ On a de manière générale, pour tout b réel

$$\int u(\bullet - b) = \int u$$

Si $|f u| < +\infty$, on peut considérer le membre de gauche comme une fonction de b . C'est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ qui peut donc être prolongée à $\mathbb{C}$ tout entier si cela a du sens. On en déduit, pour toute fonction analytique u d'intégrale finie et $z \in \mathbb{C}$ un point tel que $u(\bullet - z)$ soit un prolongement analytique :

$$\int u(\bullet - z) = \int u$$

Échelle complexe On a de manière générale, pour tout a réel et non nul

$$\int u(a\bullet) \cdot a \operatorname{sgn}(a) = \int u$$

Si $|f u| < +\infty$, on peut considérer le membre de gauche comme une fonction de a . C'est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$ qui peut donc être étendue aux quarts droite et gauche de $\mathbb{C}$ si cela a du sens. On en déduit, pour toute fonction analytique u d'intégrale finie et z dans le cône horizontal complexe  hors origine tel que $u(z\bullet)$ soit un prolongement analytique :

$$\int u(z\bullet) \cdot z \operatorname{sgn}(z) = \int u$$

Rien ne semble nous empêcher de répéter cette opération de prolongement par rotation pour étendre le résultat précédent à $z \in \mathbb{C}^*$ tout entier³, au risque d'arriver à des contradictions. Les rotations euclidiennes sont en fait inadaptées aux prolongements, et il faut bien garder à l'esprit que $u(z\bullet)$ n'est pas une fonction des réels que l'on peut prolonger à souhait. Un moyen de s'en prémunir est de bien considérer que toute fonction des réels est étendue dans le plan complexe une fois pour toute, et que le prolongement y est une translation. Notons que les rotations hyperboliques sont par contre compatibles avec la notion de prolongement que l'on a définie.

Droite d'intégration Ces translations et échelles complexes s'apparentent à des transformation de la droite réelle d'intégration en une droite dans $\mathbb{C}$. On peut par exemple entendre

$$\int e^{-\pi\bullet^2} = 1 \quad \int e^{2i\pi\bullet} = 0 \quad \int \frac{e^{2i\pi\bullet}}{i\pi\bullet} = 1$$

3. Après une rotation, considérer la fonction prolongée comme nouvelle fonction à prolonger.

comme des intégrales sur une droite quelconque de $\mathbb{C}$, orientée de gauche à droite et de pente inférieure à 1 en valeur absolue. Elle doit obligatoirement passer par 0 pour la troisième intégrale, puisqu'il y a une rupture analytique de l'intégrande en ce point, et qu'il n'est donc pas possible de la prolonger dans le cône vertical centré en 0.

Exemple On peut intégrer aisément une gaussienne modulée par une exponentielle complexe avec ces prolongements. On factorise d'abord l'exposant pour mettre en évidence une gaussienne transformée

$$\int e^{-\pi\alpha\bullet^2+2i\pi z\bullet} = e^{-\pi z^2/\alpha} \int e^{-\pi(\alpha^{1/2}\bullet - iz/\alpha^{1/2})^2}$$

et si $\alpha^{1/2}$ est dans le quart de plan complexe droit ou gauche (cf. échelle complexe), alors

$$\int e^{-\pi(\alpha^{1/2}\bullet - iz/\alpha^{1/2})^2} = \frac{1}{\alpha^{1/2} \operatorname{sgn}(\alpha^{1/2})} \int e^{-\pi(\bullet - iz/\alpha^{1/2})^2}$$

On peut maintenant utiliser l'invariance par translation pour écrire que

$$\int e^{-\pi(\bullet - iz/\alpha^{1/2})^2} = \int e^{-\pi\bullet^2} = 1$$

et on déduit donc que l'intégrale initiale vaut $e^{-\pi z^2/\alpha}/\alpha^{1/2} \operatorname{sgn}(\alpha^{1/2})$ à condition que $\alpha^{1/2}$ soit dans le quart de plan complexe droit ou gauche. Cette condition sur $\alpha^{1/2}$ est équivalente à ce que la partie réelle de α soit positive, ce qui est tout simplement la condition qui assure la convergence absolue de l'intégrale. La détermination du signe de la racine ne joue pas de rôle, à cause de la présence du facteur $\operatorname{sgn}(\alpha^{1/2})$: on obtiendra systématiquement une partie réelle positive pour le produit $\alpha^{1/2} \operatorname{sgn}(\alpha^{1/2})$.

La limite de l'intégrale quand α réel positif tend vers 0 peut être vue comme l'évaluation de l'intégrale $\int e^{2i\pi z\bullet}$. Cette limite est 0 seulement quand z^2 a une partie réelle positive, c'est-à-dire quand z se trouve dans le quart de plan droit ou gauche et c'est exactement ce que l'on a trouvé par le biais de la forme bilinéaire : tout ceci est cohérent et rassurant.

A.3 Signal progressif et mouvement à force centrale

Le produit de Fourier a donné un sens précis au caractère progressif d'une exponentielle amortie $u = e^{2i\pi z\bullet}$: pour $z = f(1 + i\lambda)$, sa fréquence réelle f est positive, et son amortissement λ doit être inférieur à 1 en valeur absolue.

Supposons que les parties réelle et imaginaire de u représentent les coordonnées d'un point dans le plan, assimilé au plan complexe, et que la variable $\bullet$ joue le rôle de la variable temporelle. Sa vitesse est $\dot{u} = (2i\pi z)e^{2i\pi z\bullet}$ et son accélération est $\ddot{u} = (2i\pi z)^2 e^{2i\pi z\bullet}$. La partie réelle de $(2i\pi z)^2$ représente la composante de l'accélération par unité de distance le long du vecteur déplacement, et sa partie imaginaire en est la composante orthogonale. Comme $|\lambda| < 1$, on voit que

$$\Re[(2i\pi z)^2] = -(2\pi f)^2(1 - \lambda^2) < 0$$

c'est-à-dire que la composante de l'accélération le long du vecteur déplacement est de sens opposé à ce dernier, donc que l'accélération est dirigée vers l'intérieur, vers le centre de rotation. Comme l'accélération est proportionnelle et de même signe que la force subie, on est en présence d'un mouvement à force centrale. Voir figure A.3.

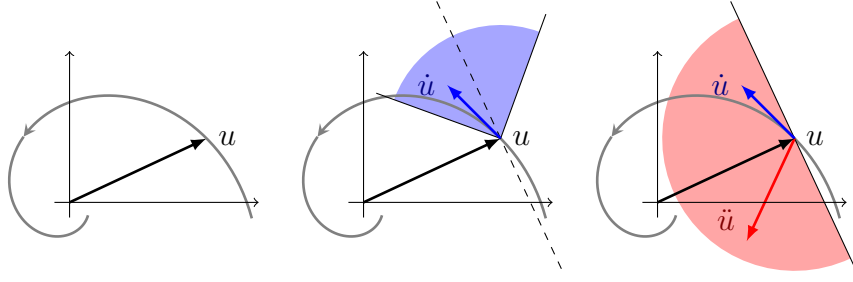


FIGURE A.3 – Déplacement, vitesse et accélération d'un point associé à un signal harmonique amorti et progressif

L'accélération $\ddot{u}$ est dirigée vers l'intérieur : c'est un mouvement à force centrale.

L'équation du mouvement est $\ddot{u} + (2\pi z)^2 u = 0$, mais cette forme ne met pas en valeur l'équation réelle associée – qui peut être utile si le signal progressif est la composante progressive d'un signal réel. Il faut la réécrire sous la forme habituelle $\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ avec $\omega_0 = 2\pi|z|$ et $\xi = \lambda/\sqrt{1 + \lambda^2}$. C'est un mouvement sous critique – oscillant – à force centrale élastique, et à frottements proportionnels à la vitesse.

Dans le cas plus général d'un signal asymptotique progressif, il y a un terme perturbatif en plus dans l'équation du mouvement, qui devient $\ddot{u} + (1 + \varepsilon)(2\pi z)^2 u = 0$. Lorsque ε_0 est suffisamment petit, le système est proche d'un système harmonique dont les paramètres sont variables. Le système est à force centrale si $\Re[(2i\pi z)^2(1 + \varepsilon)] < 0$, ce qui est le cas si $\varepsilon_0 < (1 - \lambda^2)/(1 + \lambda^2)$.

Quand l'amortissement et le paramètre asymptotique sont tous deux petits, le mouvement est donc assuré d'être à force centrale.

Indistinction et imprécision Si on considère que les signaux sont indistincts à s près – disons pour simplifier que l'on considère l'erreur relative – cela se traduit entre autre par une « imprécision » sur la grandeur observée. Par exemple, le déplacement est indistinct à un disque de rayon $s|u|$ près (voir figure A.4). On peut y voir quelque chose proche d'une imprécision angulaire de $\pm \arcsin s$ associée à une imprécision relative sur la distance de $\pm s$ – donc une imprécision de $\pm s|u|$ sur la distance $|u|$.

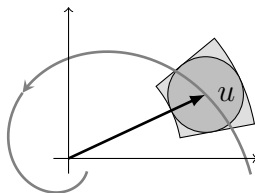


FIGURE A.4 – Imprécision sur la position

La position u est assimilée au disque gris de rayon $s|u|$. Elle est imprécise. Le secteur de disque correspond à une imprécision angulaire de $\pm \arcsin s$ et une imprécision relative sur la distance de $\pm s$.

Annexe B

Annexe calculatoire

B.1 Proximité entre signaux

B.1.1 Distance relative et erreur relative

On note $d' = \ln(u/v)$ et $r' = (u/v) - 1$. La distance logarithmique d et l'erreur relative r entre u et v sont les valeurs maximales de $|d'|$ et de $|r'|$.

On peut montrer, par la majoration du développement en série¹, que

$$|r' = e^{d'} - 1| \leq \frac{|d'|}{1 - \frac{|d'|}{2}}$$
$$|d' = \ln(1 + r')| \leq \frac{|r'|}{1 - |r'|}$$

pour $|r'| < 1$ et $|d'| < 2$. Ces inégalités sont valables point par point, mais le passage au maximum $d = \max |d'|$ et $r = \max |r'|$ les laisse inchangées². On a donc

$$r \leq \frac{d}{1 - \frac{d}{2}}$$
$$d \leq \frac{r}{1 - r}$$

où d et r sont la distance et l'erreur relatives entre u et v . Si on travaille sur

1. On factorise la série par le numérateur de la borne, et on majore les termes obtenus par les termes de la série du dénominateur.

2. Les majorants sont des fonctions croissantes de la grandeur qui y apparaît. Ainsi : $|r'|/(1 - |r'|) \leq r/(1 - r)$ donc $|d'| \leq r/(1 - r)$, d'où la relation $d \leq r/(1 - r)$. On procède de même pour la seconde inégalité.

un espace de diamètre limité d_0 et r_0 , on montre que

$$(1 - r_0)d \leq r \leq \frac{d}{1 - \frac{d_0}{2}}$$

et les distances sont alors équivalentes.

B.1.2 Exponentielle

On écrit $e^x = (1 + x)e^{d'}$ et on cherche à majorer d' qui est la distance logarithmique entre l'exponentielle et son approximation au premier ordre. On a $d' = x - \ln(1 + x)$, que l'on peut développer en série, et ensuite majorer³

$$|d'| < \frac{|x|^2/2}{1 - |x|}$$

Autrement dit, pour développer l'exponentielle de x en son approximation linéaire, il faut tolérer une erreur majorée par $|x|^2/(2 - 2|x|)$.

B.2 Signaux asymptotiques

B.2.1 Erreur au premier ordre

Le point de départ est un signal e^φ tel que $|\varepsilon = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}| < \varepsilon_0$. On veut majorer la distance relative suivante

$$\begin{aligned} E_1 &= \ln \left(\frac{e^{\varphi(B)}}{e^{\varphi(A)} e^{\dot{\varphi}(A)(B-A)}} \right) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) - \dot{\varphi}(A)(B - A) \end{aligned}$$

entre le signal et l'approximation linéaire de sa phase. On pose $B = A + \alpha \dot{\varphi}^{-1}(A)$ pour réécrire :

$$E_1 = \varphi(B) - \varphi(A) - \alpha$$

La distance relative est fonction notamment du nombre de périodes α qui mesure la distance au point d'approximation A . On dérive selon α une fois

$$\partial_\alpha E_1 = \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} - 1$$

3. On factorise la série par $|x|^2/2$, puis on majore les termes $x^n/(n/2 + 1)$ de la série par $|x|^n$, qui sont les termes de la série de $1/(1 - |x|)$.

Comme $\varepsilon = -\partial\dot{\varphi}^{-1}$, la relation $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ permet de déduire que $1/\dot{\varphi}$ est ε_0 -lipschitz ; en particulier :

$$\left| \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} - 1 \right| < \varepsilon_0 \left| \alpha \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} \right|$$

Le rapport de fréquences, présent des deux côtés de l'inégalité, doit être factorisé⁴ puis isolé. Ceci donne

$$\left| \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} \right| < \frac{1}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} \quad (\text{B.1})$$

sous la condition $\varepsilon_0 |\alpha| < 1$. Une fois réintroduit dans l'inégalité qui précédait, on conclut

$$\left| \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_0 |\alpha|}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} \quad (\text{B.2})$$

Cette relation majore directement la grandeur $|\partial_\alpha E_1|$ identifiée au membre de gauche. On va l'intégrer pour majorer la grandeur $|E_1|$

$$|E_1| < \int_0^\alpha |\mathrm{d}\alpha| \frac{\varepsilon_0 |\alpha|}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|}$$

où α joue à la fois le rôle de variable et de limite d'intégration, sans ambiguïté. La fonction $1/(1 - \varepsilon_0 |\alpha|)$ est croissante, donc majorée par $1/(1 - \varepsilon_0 |\alpha|)$ que l'on peut sortir de l'intégrale (car α est alors limite d'intégration). On intègre ensuite le terme restant $\varepsilon_0 |\alpha|$ en $\varepsilon_0 |\alpha|^2/2$ et on obtient finalement

$$|E_1| < \frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2/2}{1 - \varepsilon_0 |\alpha|} \quad (\text{B.3})$$

On vient de montrer qu'un signal asymptotique est proche de son signal linéaire tangent sur un intervalle de l'ordre de sa période si ε_0 est petit.

En particulier, si $|\alpha \varepsilon_0| \ll 1$, l'erreur est plus simplement

$$|E_1| < \frac{\varepsilon_0 |\alpha|^2}{2} \quad (\text{B.4})$$

4. On utilise $|a + b| < |c| \implies |a| < |b| + |c|$, avec a le rapport des fréquences, $b = -1$ et $c = \varepsilon_0 \alpha a$.

B.2.2 Erreur au second ordre

Le point de départ est un signal e^φ tel que $|\varepsilon = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}| < \varepsilon_0$. On ajoute une condition sur ε , qui devra être κ -lipschitz selon le nombre de périodes α , c'est-à-dire que

$$|\varepsilon(B) - \varepsilon(A)| < \kappa|\alpha| \quad (\text{B.5})$$

pour $B = A + \alpha\dot{\varphi}^{-1}(A)$. Cette inégalité n'est significative que lorsque $\kappa|\alpha|$ est inférieur à $2\varepsilon_0$, qui est la borne supérieur issue de la relation $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

On veut majorer la distance relative suivante

$$\begin{aligned} E_2 &= \ln \left(\frac{e^{\varphi(B)}}{e^{\varphi(A)} e^{\dot{\varphi}(A)(B-A)} e^{\ddot{\varphi}(A)(B-A)^2/2}} \right) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) - \dot{\varphi}(A)(B-A) - \ddot{\varphi}(A)(B-A)^2/2 \end{aligned}$$

entre le signal et l'approximation quadratique de sa phase. On peut l'écrire en utilisant le nombre de périodes α

$$E_2 = \varphi(B) - \varphi(A) - \alpha - \varepsilon(A)\alpha^2/2$$

On dérive deux fois selon α

$$\begin{aligned} \partial_\alpha E_2 &= \frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} - 1 - \varepsilon(A)\alpha \\ \partial_\alpha^2 E_2 &= \frac{\ddot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}^2(A)} - \varepsilon(A) = \varepsilon(B) \left(\frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} \right)^2 - \varepsilon(A) \\ &= \varepsilon(B) - \varepsilon(A) + \varepsilon(B) \left(\left(\frac{\dot{\varphi}(B)}{\dot{\varphi}(A)} \right)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

On va majorer $|\partial_\alpha^2 E_2|$ avant de l'intégrer deux fois. La différence $|\varepsilon(B) - \varepsilon(A)|$ est limitée par l'équation (B.5), le terme entre parenthèses est lui limité par

un produit ⁵

$$\begin{aligned}
|\partial_\alpha^2 E_2| &< \kappa|\alpha| + \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_0|\alpha|}{1 - \varepsilon_0|\alpha|} \left(1 + \frac{1}{1 - \varepsilon_0|\alpha|}\right) \\
&< \left(\kappa + 2\varepsilon_0^2 \frac{1 - \varepsilon_0|\alpha|/2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2}\right) |\alpha| \\
&< \left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2}\right) |\alpha|
\end{aligned}$$

En intégrant deux fois cette relation, et en utilisant à nouveau la croissance de la fonction $1/(1 - \varepsilon_0|\alpha|)$ pour la sortir de l'intégrale, on obtient

$$|E_2| < \left(\kappa + \frac{2\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0|\alpha|)^2}\right) \frac{|\alpha|^3}{6} \quad (\text{B.6})$$

En particulier, si $\varepsilon_0|\alpha| \ll 1$, l'erreur est plus simplement

$$|E_2| < (\kappa + 2\varepsilon_0^2) \frac{|\alpha|^3}{6} \quad (\text{B.7})$$

B.2.3 Inégalités hyperboliques

On liste les inégalités relatives aux fonctions hyperboliques dont on s'est servi. On pose $z = x + iy$. Pour le sinus hyperbolique :

$$|\sinh z| \leq \cosh x$$

et pour le cosinus hyperbolique :

$$\cosh x - |\sin y| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$$

Les deux majorants sont évidents, mais le minorant du cosinus hyperbolique l'est peut-être moins. On écrit

$$\begin{aligned}
2 \cosh z &= e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy} \\
&= e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y)
\end{aligned}$$

que l'on réarrange sous la forme

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

5. On écrit $\left(\frac{\varphi(B)}{\varphi(A)}\right)^2 - 1$ sous la forme du produit $\left(\frac{\varphi(B)}{\varphi(A)} - 1\right) \left(\frac{\varphi(B)}{\varphi(A)} + 1\right)$. Le facteur de gauche est déjà majoré par (B.2), le facteur de droite est majoré par $\left|\frac{\varphi(B)}{\varphi(A)}\right| + 1$, que l'on peut majorer grâce à (B.1).

On en prend le module au carré, que l'on transforme par les relations liant les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

$$\begin{aligned} |\cosh z|^2 &= \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y \\ &= \cosh^2 x (1 - \sin^2 y) + (\cosh^2 x - 1) \sin^2 y \\ &= \cosh^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\cosh x - |\sin y| \leq (\cosh^2 x - \sin^2 y)^{1/2}$$

est vérifié puisque ceci revient à dire $|\sin y| \leq \cosh x$, ce qui est toujours vrai.

B.2.4 Paramètre asymptotique d'une somme

On part d'un signal $u = e^{\varphi} 2 \cosh \Delta\varphi$, qui est la somme de deux signaux e^{φ_1} et e^{φ_2} . On a posé $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ et $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)/2$. Sa fréquence est

$$\dot{\varphi}_u = \dot{\varphi} + \Delta\dot{\varphi} \tanh \Delta\varphi$$

On calcule ensuite son paramètre asymptotique ε_u ; on évalue d'abord

$$\partial\dot{\varphi}_u = \ddot{\varphi} + \Delta\ddot{\varphi} \tanh \Delta\varphi + (\Delta\dot{\varphi})^2 \cosh^{-2} \Delta\varphi$$

puis on divise par $\dot{\varphi}_u^2$ pour obtenir

$$\varepsilon_u = \frac{\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2 + \Delta\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2 \tanh \Delta\varphi + (\Delta\dot{\varphi}/\dot{\varphi})^2 \cosh^{-2} \Delta\varphi}{\left(1 + \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \tanh \Delta\varphi\right)^2}$$

On sépare le paramètre asymptotique en deux contributions : $\varepsilon_{\text{harm}}$ qui ne relève pas de la dérivée seconde de la phase et qui correspond à ce que l'on aurait pour une somme de signaux harmoniques ; $\varepsilon_{\text{asym}}$ la contribution restante qui relève des dérivées secondes. On identifie

$$\varepsilon_{\text{harm}} = \frac{(\Delta\dot{\varphi}/\dot{\varphi})^2}{\left(\cosh \Delta\varphi + \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \sinh \Delta\varphi\right)^2} \quad \varepsilon_{\text{asym}} = \frac{\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2 + \Delta\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2 \tanh \Delta\varphi}{\left(1 + \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \tanh \Delta\varphi\right)^2}$$

On souhaite majorer $|\varepsilon_{\text{asym}}|$ pour déterminer les situations où seule la contribution $\varepsilon_{\text{harm}}$ est déterminante. On commence par majorer $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = 2\varepsilon_1 \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2} \right)^2 + 2\varepsilon_2 \left(\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2} \right)^2$$

où $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1/\dot{\varphi}_1^2$ et $\varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_2^2$. On suppose que $|\varepsilon_1|$ et $|\varepsilon_2|$ sont tous deux majorés par ε_0 . Si on écrit $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ en fonction de $\dot{\varphi}$ et de $X = \Delta\dot{\varphi}/\dot{\varphi}$, on montre que

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} (|1 - X|^2 + |1 + X|^2) = \varepsilon_0 (1 + |X|^2)$$

Quand les signaux sources sont progressifs, c'est-à-dire que z_1 et z_2 sont dans le quart de plan droit, on est assuré que $|X|^2 < 1$. On obtient donc

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} \right| < 2\varepsilon_0 \quad \left| \frac{\Delta\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} \right| < 2\varepsilon_0$$

Le cas de $|\Delta\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}^2|$ a été directement déduit car on ne change que le signe de ε_2 , ce qui n'altère pas le majorant proposé. On majore maintenant les termes qui contiennent $\tanh \Delta\varphi$ en introduisant son majorant⁶ $1/(1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2})$, avec $1 - Y^2 = \cosh^{-2} \Re[\Delta\varphi]$ et $Z = \sin \Im[\Delta\varphi]$.

$$|\varepsilon_{\text{asym}}| < 2\varepsilon_0 \frac{1 + \frac{1}{1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2}}}{\left(1 - \frac{|X|}{1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2}}\right)^2} = 2\varepsilon_0 \frac{(1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2})^2 + 1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2}}{(1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2} - |X|)^2}$$

Comme $|Z|\sqrt{1 - Y^2} < 1$, le numérateur est forcément plus petit que 2, d'où la majoration finale

$$|\varepsilon_{\text{asym}}| < \frac{4\varepsilon_0}{(1 - |Z|\sqrt{1 - Y^2} - |X|)^2}$$

Les grandeurs X , Y et Z sont les mêmes que celles utilisées dans la section 3.6.

B.3 Ondelettes

B.3.1 Approximations de Q

La grandeur Q dont on cherche des approximations est définie par

$$Q^{-2} = 4 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2\beta+1}{\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{2\beta+3}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\beta+2}{\gamma}\right)^2} - 1 \right)$$

6. On majore le sinus hyperbolique et on minore le cosinus hyperbolique avec les inégalités déjà établies.

Il s'agira donc d'approcher le rapport $\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)/\Gamma(\cdot)^2$. On dispose en particulier de deux relations d'approximation, que sont la formule de Stirling

$$\Gamma(x \gg 1) \approx (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}$$

et celle issue de la relation $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, avec $\Gamma(1) = 1$, qui nous donne

$$\Gamma(x \ll 1) \approx 1/x$$

Argument grand devant 1 On se place dans le cas d'un argument grand devant 1, c'est-à-dire que $\beta + 1 \gg \gamma$. Cette condition est suffisante pour que les arguments des trois $\Gamma(\cdot)$ soient grands. En ce cas, la formule de Stirling nous donne

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \frac{(2\beta+1)^{\frac{2\beta+1}{\gamma}-\frac{1}{2}}(2\beta+3)^{\frac{2\beta+3}{\gamma}-\frac{1}{2}}}{(2\beta+2)^{2\frac{2\beta+2}{\gamma}-2\frac{1}{2}}}$$

où les facteurs en $(2\pi)^{1/2}$, en $e^{\dots}$ et en $\gamma^{\dots}$ se simplifient. On regroupe les termes restants sous un exposant $(2\beta+2)/\gamma - 1/2$ pour obtenir

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \left(\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)}{(2\beta+2)^2} \right)^{\frac{2\beta+2}{\gamma}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2\beta+3}{2\beta+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

et on exprime chacun des deux facteurs sous la forme $(1 + \dots)$ de sorte que

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \left(1 - \frac{1}{(2\beta+2)^2} \right)^{\frac{2\beta+2}{\gamma}-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{2\beta+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

On a maintenant besoin d'hypothèses supplémentaires. On va utiliser $(1+x)^y \approx 1 + xy$ qui n'est vrai que si $|x| \ll 1$ et $|xy| \ll 1$. On va donc supposer que $\beta \gg 1$ et $\gamma\beta \gg 1$, ce qui est suffisant pour le développement limité des deux facteurs :

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \left(1 - \frac{\frac{2\beta+2}{\gamma}-\frac{1}{2}}{(2\beta+2)^2} \right) \left(1 + \frac{\frac{2}{\gamma}}{2\beta+1} \right)$$

qui prend alors une forme approchée beaucoup plus simple

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \left(1 - \frac{1}{2\gamma\beta} \right) \left(1 + \frac{1}{\gamma\beta} \right)$$

La dernière étape est enfin le développement du produit, en négligeant le terme en $1/(\gamma\beta)^2$, et on obtient la relation approchée

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx 1 + \frac{1}{2\gamma\beta}$$

Insérée dans la définition de Q , on a $Q \approx (\gamma\beta/2)^{1/2}$. Cette relation est valide si $\beta + 1 \gg \gamma$, $\beta \gg 1$ et $\gamma\beta \gg 1$. Notons que la première et la dernière conditions impliquent en fait la seconde.

Argument petit devant 1 Quand l'argument est petit devant 1, c'est-à-dire quand $\beta + 1 \ll \gamma$, alors on peut utiliser l'approximation en 0 et écrire

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx \frac{(2\beta + 2)^2}{(2\beta + 1)(2\beta + 3)}$$

où les facteurs en γ se simplifient. Mis sous la forme $1 + \dots$, on trouve

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx 1 + \frac{1}{(2\beta + 1)(2\beta + 3)}$$

On distingue deux cas : si $\beta \ll 1$, alors

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx 1 + \frac{1}{3}$$

et $Q \approx (3/4)^{1/2}$; si $\beta \gg 1$, alors

$$\frac{\Gamma(\cdot)\Gamma(\cdot)}{\Gamma(\cdot)^2} \approx 1 + \frac{1}{4\beta^2}$$

et $Q \approx \beta$.

Bibliographie

- BREWSTER, R. et J. FRANSON. 2018, «Generalized delta functions and their use in quantum optics», *Journal of Mathematical Physics*, vol. 59, n° 1, p. 012 102.
- CARMONA, R. A., W. L. HWANG et B. TORRÉSANI. 1997, «Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms», *IEEE transactions on signal processing*, vol. 45, n° 10, p. 2586–2590.
- CARPINE, R., S. IENTILE, N. VACCA, G. BOSCATO, C. ROSPARS, A. CECCHI et P. ARGOUL. 2021, «Modal identification in the case of complex modes—use of the wavelet analysis applied to the after-shock responses of a masonry wall during shear compression tests», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 160, p. 107 753.
- DELPRAT, N., B. ESCUDIÉ, P. GUILLEMAIN, R. KRONLAND-MARTINET, P. TCHAMITCHIAN et B. TORRESANI. 1992, «Asymptotic wavelet and gabor analysis : Extraction of instantaneous frequencies», *IEEE transactions on Information Theory*, vol. 38, n° 2, p. 644–664.
- LE, T.-P. et P. ARGOUL. 2004, «Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response», *Journal of sound and vibration*, vol. 277, n° 1, p. 73–100.
- LILLY, J. M. et S. C. OLHEDE. 2008, «Higher-order properties of analytic wavelets», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, n° 1, p. 146–160.
- STASZEWSKI, W. 2000, «Analysis of non-linear systems using wavelets», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 214, n° 11, p. 1339–1353.
- TORRÉSANI, B. 1995, «Analyse continue par ondelettes», .

VACCA, N., C. ROUZAUD, G. HERVE-SECOURGEON, M. GALAN, P. ARGOUL et C. ROSPARS. 2018, «Characterization of dissipative behaviour of a reinforced concrete mock-up after soft impact tests through wavelet analysis», dans *40th IABSE Symposium Tomorrow's Megastructures*, International Association for Bridge and Structural Engineering-IABSE, p. 8-p.