



# **Modélisation du comportement mécanique des structures en bétons fibrés à ultra-hautes performances**

Romain Gontero

## **► To cite this version:**

Romain Gontero. Modélisation du comportement mécanique des structures en bétons fibrés à ultra-hautes performances. Génie civil. Université Paul Sabatier - Toulouse III; Université Laval (Québec, Canada), 2022. Français. ⟨NNT : 2022TOU30149⟩. ⟨tel-03889711⟩

**HAL Id: tel-03889711**

**<https://theses.hal.science/tel-03889711v1>**

Submitted on 8 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier (UT3 - Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *23/08/2022* par :

**Romain GONTERO**

**Modélisation du comportement mécanique des structures en  
bétons fibrés à ultra-hautes performances**

---

---

### JURY

M. Pierre ROSSI, Rapporteur  
M. Bruno MASSICOTTE, Rapporteur  
M. Alain SELLIER, Directeur de thèse  
M. Luca SORELLI, Directeur de thèse  
M. Thierry VIDAL, Co-directeur de thèse  
M. Alain MILLARD, Invité, co-encadrant  
M. Charles-Darwin ANNAN, Examinateur, président du jury  
M. Eugen BRÜHWILER, Examinateur  
Mme. Pampa DEY, Invité  
Mme. Elsa NGUYEN AMANJEAN, Examinatrice

---

École doctorale et spécialité :

*MEGEP : Génie civil*

Unité de Recherche :

*Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions*

Directeur(s) de Thèse :

*Alain SELLIER, Luca SORELLI et Thierry VIDAL*

Rapporteurs :

*Pierre ROSSI et Bruno MASSICOTTE*

# Résumé

Un modèle de comportement mécanique des bétons fibrés est développé et implanté dans le logiciel éléments finis Cast3m. Il vient compléter le modèle de fissuration orthotrope du béton Fluendo3D, en ajoutant la capacité de traiter des matériaux à fibres courtes, cylindriques et rectilignes. Ce modèle, qui s'appuie sur des données d'essais et certains mécanismes modélisés issus de la littérature, permet d'apporter des éléments de compréhension du comportement de ce type de matériau, et notamment concernant le phénomène de multi-fissuration. La caractérisation des phénomènes mis en jeu durant l'extraction des fibres est le point de départ de cette étude. Les effets de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction d'extraction sont pris en compte et interviennent dans le comportement du modèle qui présente la capacité d'utiliser des orientations préférentielles de fibres. Le phénomène de multi-fissuration est représenté grâce à une loi d'effet d'échelle de Weibull qui permet de tenir compte de la dispersion des résistances à la traction du béton et d'expliquer le développement de la multi-fissuration. Cette représentation permet d'obtenir des distributions d'ouvertures de fissures dans des macro-éléments finis, et apporte donc une nouvelle précision dans le calcul des ouvertures de fissures dans des structures de grandes dimensions.

# Abstract

A model for the mechanical behavior of fiber-reinforced concrete is developed and implemented in Cast3m finite element software. It completes the orthotropic concrete cracking model Fluendo3D, by adding the ability to treat materials with short, cylindrical and straight fibers. This model, which is based on tests results and assumptions of mechanisms modelled from litterature, provides elements of understanding of the behavior of this type of material, especially concerning the phenomenon of multi-cracking. The characterization of the phenomena involved during the extraction of the fibers is the starting point of this study. The effects of the inclination of the fibers with respect to the direction of extraction are taken into account and intervene in the behavior of the model which presents the capacity to use preferential orientations of fibers. The multi-cracking phenomenon is represented by a Weibull scaling law that allows to take into account the dispersion of the concrete tensile strengths and to explain the development of multi-cracking process. This representation makes it possible to obtain crack opening distributions in macro-finite elements, and thus brings a new precision in the calculation of cracks openings in large structures.

# Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	x
Liste des tableaux	xii
Liste des figures	xix
Notations	xx
Remerciements	xxvii
Introduction	1
Contexte et objectifs . . . . .	1
Méthodologie du projet . . . . .	4
Organisation de la thèse . . . . .	5
<b>1 État de l’art</b>	<b>6</b>
1.1 Composition des BFUP . . . . .	7
1.1.1 Types de fibres utilisés . . . . .	8
1.2 Comportement mécanique des BFUP . . . . .	9
1.2.1 Comportement en compression . . . . .	10
1.2.2 Comportement en traction uniaxiale . . . . .	11
1.2.3 Mécanismes d’extraction des fibres . . . . .	14

1.2.3.1	Impact de la composition de la matrice . . . . .	16
1.2.3.2	Impact du type de fibre . . . . .	19
1.2.3.3	Impact du type de cure . . . . .	20
1.2.3.4	Effet des contraintes latérales . . . . .	20
1.2.3.5	Effet de groupe des fibres . . . . .	21
1.2.3.6	Évolution temporelle de l'adhérence fibre-matrice . . .	21
1.2.4	Orientation des fibres dans le volume . . . . .	22
1.2.4.1	Effet de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique . . . . .	22
1.2.4.2	Impact des méthodes de mise en œuvre sur l'orientation des fibres . . . . .	26
1.2.4.3	Méthode non destructive de détermination de l'orienta- tion et de la densité des fibres . . . . .	28
1.2.5	Multi-fissuration des BFUP en traction . . . . .	28
1.3	Modélisation du comportement mécanique des BFUP . . . . .	32
1.3.1	Modélisation de l'extraction de fibres droites . . . . .	32
1.3.1.1	Contrainte de pré-fissuration des fibres . . . . .	33
1.3.1.2	Phase de décollement . . . . .	34
1.3.1.3	Phase d'arrachement . . . . .	37
1.3.1.4	Prise en compte de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction de traction . . . . .	40
1.3.2	Modélisation de la position des fibres par rapport à une fissure .	41
1.3.3	Modélisation de l'orientation des fibres . . . . .	43
1.3.3.1	Prise en compte réglementaire de l'orientation des fibres	43
1.3.3.2	Distribution normale de l'orientation des fibres . . . .	45
1.3.4	Calcul de la contrainte reprise par les fibres . . . . .	45
1.3.5	Rupture des fibres . . . . .	47
1.3.6	Modélisation de la fissuration . . . . .	48
1.3.6.1	Espacement des fissures dans le cas du béton armé . .	48
1.3.6.2	Modèle de fissures réparties discrètes . . . . .	48

1.3.6.3	Modèle basé sur la théorie de l'homogénéisation . . . .	49
1.3.6.3.1	Phase écouvissante . . . . .	49
1.3.6.3.2	Phase adoucissante . . . . .	52
1.3.7	Conclusions sur les modèles étudiés . . . . .	54
1.4	Modélisation du comportement mécanique du béton . . . . .	55
1.4.1	Plasticité . . . . .	55
1.4.1.1	Critère de plasticité en traction . . . . .	56
1.4.1.2	Critère de plasticité en compression . . . . .	56
1.4.1.3	Écoulement plastique . . . . .	57
1.4.2	Endommagement du béton . . . . .	58
1.4.2.1	Théorie de l'endommagement . . . . .	59
1.4.2.2	Endommagement orthotrope de traction . . . . .	60
1.4.2.2.1	Endommagement pré-pic en traction . . . . .	61
1.4.2.2.2	Endommagement post-pic en traction . . . . .	62
1.4.2.3	Endommagement en compression . . . . .	65
1.4.2.3.1	Endommagement pré-pic en compression . . . . .	65
1.4.2.3.2	Endommagement post-pic en compression . . . . .	65
1.4.2.4	Fermeture des fissures de traction . . . . .	66
1.4.2.5	Combinaison des endommagements . . . . .	67
1.4.3	Régularisation de l'endommagement . . . . .	68
1.4.3.1	La méthode de Hillerborg . . . . .	68
1.4.3.2	La méthode X-FEM : Extended Finite Element Method . . . . .	69
1.4.3.3	La méthode non locale . . . . .	70
1.5	Conclusion de l'étude bibliographique . . . . .	72
<b>2</b>	<b>Modélisation du comportement mécanique des BFUP</b>	<b>73</b>
2.1	Introduction . . . . .	74
2.2	Modélisation de l'extraction d'une fibre droite . . . . .	74
2.2.1	Phase d'élasticité de l'interface . . . . .	75

2.2.2	Phase de décollement . . . . .	78
2.2.3	Extension au cas des fibres doublement ancrées . . . . .	82
2.2.4	Phase d'extraction des fibres . . . . .	83
2.2.5	Phénomènes complémentaires . . . . .	90
2.2.5.1	Prise en compte d'un cône de rupture de la matrice . .	90
2.2.5.2	Rupture des fibres . . . . .	91
2.3	Validation expérimentale du modèle de fibres droites . . . . .	91
2.3.1	Source expérimentale N°1 . . . . .	91
2.3.2	Source expérimentale N°2 . . . . .	94
2.3.3	Comparaison entre les deux résultats expérimentaux . . . . .	96
2.3.3.1	Évolution des paramètres . . . . .	96
2.4	Effets de l'inclinaison des fibres . . . . .	97
2.4.1	Mécanismes à l'origine de l'augmentation de la force . . . . .	98
2.4.1.1	Effet poulie . . . . .	98
2.4.1.2	Effet d'une rotule plastique . . . . .	99
2.4.2	Écaillage de la matrice . . . . .	100
2.4.2.1	Bases du problème . . . . .	100
2.4.2.2	Expression de la force $F_{r,l_s}$ . . . . .	101
2.4.2.3	Évolution géométrique de l'écaillage . . . . .	102
2.4.2.4	Approximation de la solution . . . . .	103
2.4.2.5	Intégration au modèle d'extraction des fibres . . . . .	104
2.5	Validation expérimentale du modèle d'inclinaison des fibres . . . . .	105
2.6	Calcul de la force moyenne pour une inclinaison donnée . . . . .	108
2.7	Prise en compte d'un ensemble de fibres inclinées . . . . .	110
2.7.1	Représentation de l'orientation des fibres . . . . .	110
2.7.2	Discrétisation de l'espace . . . . .	111
2.7.3	Angle d'orientation moyen . . . . .	113
2.8	Calcul de la contrainte de traction reprise par les fibres . . . . .	114
2.9	Multi-fissuration des bétons fibrés . . . . .	116

2.9.1	Disparité des résistances en traction du béton . . . . .	117
2.9.2	Évolution de la multi-fissuration . . . . .	118
2.9.3	Impact de la variabilité de la résistance à la traction sur la loi de comportement des fibres . . . . .	121
2.9.4	Saturation de la multi-fissuration . . . . .	123
2.9.5	Calcul de la loi de comportement finale . . . . .	126
2.9.5.1	Zone non fissurée . . . . .	127
2.9.5.2	Contrainte totale des fibres . . . . .	127
2.9.5.3	Contrainte totale du béton fibré . . . . .	128
2.9.6	Phase de décharge . . . . .	128
2.10	Conclusion sur le modèle développé . . . . .	129
<b>3</b>	<b>Implémentation numérique du modèle</b>	<b>131</b>
3.1	Mise en œuvre du modèle . . . . .	132
3.1.1	Algorithme de calcul des loi élémentaires de fibres uniques . . .	132
3.1.2	Réduction du modèle . . . . .	134
3.1.3	Déroulement du calcul . . . . .	139
3.2	Méthode de discrétisation des courbes . . . . .	139
3.2.1	Discrétisation de la courbe force-ouverture de fissure . . . . .	139
3.2.2	Discrétisation des longueurs ancrées . . . . .	140
3.2.3	Discrétisation des inclinaisons de fibres et des résistances à la traction . . . . .	141
3.2.3.1	Domaine de variation des résistances à la traction . . .	141
3.2.4	Valeur d'écaillage pour le calcul de l'approximation des solutions	142
3.2.5	Discrétisation de la liste des ouvertures de fissures lors du calcul de la force moyenne . . . . .	143
3.2.6	Discrétisation de la contrainte reprise par les fibres . . . . .	143
3.2.7	Discrétisation de l'espace . . . . .	143
3.3	Utilisation du modèle . . . . .	144
3.3.1	Données d'entrée . . . . .	144
3.3.2	Variables internes . . . . .	147

3.3.3	Erreur d'approximation des surfaces de paramètres . . . . .	147
3.4	Analyse du modèle . . . . .	148
3.4.1	Test sur un seul élément fini en traction simple . . . . .	148
3.4.2	Régularisation de la loi de comportement . . . . .	149
3.4.3	Discussion sur le modèle de multi-fissuration . . . . .	150
3.4.4	Calibration du modèle . . . . .	151
3.5	Étude paramétrique . . . . .	152
3.5.1	Influence de la densité volumique de fibres . . . . .	152
3.5.2	Influence de l'orientation des fibres . . . . .	153
3.5.3	Influence de la résistance à la traction du béton . . . . .	154
3.5.4	Influence du diamètre des fibres . . . . .	155
3.5.5	Influence de la longueur des fibres . . . . .	155
3.5.6	Influence de la rigidité de l'interface fibre-matrice . . . . .	155
3.5.7	Influence de la contrainte de frottement . . . . .	157
3.5.8	Influence de la contrainte de cisaillement fibre-matrice maximale	157
3.5.9	Influence du glissement caractéristique . . . . .	158
3.5.10	Influence de la force d'about . . . . .	159
3.5.11	Influence de l'angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage . . . .	160
3.5.12	Influence du module d'écrouissage . . . . .	160
3.5.13	Influence de la longueur caractéristique . . . . .	161
3.5.14	Influence du coefficient de frottement fibre-matrice . . . . .	162
3.5.15	Influence du module d'élasticité des fibres . . . . .	162
3.5.16	Influence du coefficient de Weibull . . . . .	164
3.5.17	Influence de la limite d'élasticité des fibres . . . . .	164
<b>4</b>	<b>Validation expérimentale</b>	<b>166</b>
4.1	Introduction . . . . .	167
4.2	Essais de Chen et al. . . . .	167
4.2.1	Essais d'extraction . . . . .	168

4.2.2	Essais de traction directe . . . . .	170
4.2.3	Comparaison des modèles . . . . .	172
4.3	Essais de Wuest . . . . .	173
4.3.1	Essai de traction directe . . . . .	173
4.3.2	Essai de flexion quatre points . . . . .	176
4.4	Essais de Choi et al. . . . .	179
4.5	Essais de Bayard . . . . .	181
4.6	Essai de flexion 4 points . . . . .	185
4.6.1	Élément étudié . . . . .	186
4.6.2	Essai d'extraction d'une fibre . . . . .	187
4.6.3	Champ de densité volumique de fibres . . . . .	188
4.6.4	Champ d'orientation des fibres . . . . .	189
4.6.5	Résultats . . . . .	190
4.6.5.1	Courbe force-flèche . . . . .	192
4.6.5.2	Nombre de fissures . . . . .	193
4.6.5.3	Ouvertures de fissures . . . . .	194
4.7	Conclusion sur la validation expérimentale . . . . .	195
<b>Conclusion</b>		<b>197</b>
<b>Perspectives</b>		<b>199</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>201</b>

# Liste des tableaux

1.1	Compositions classiques, hors granulats, du béton ordinaire, béton à hautes performances et béton fibré ultra performant [28] [88] . . . . .	8
1.2	Caractéristiques mécaniques générales des bétons ordinaires, bétons à hautes performances et bétons fibrés ultra performants [28] [60] . . . . .	9
1.3	Classes de résistances à la compression des BFUP [60] . . . . .	11
1.4	Fibres utilisées dans l'étude de Choi [17] . . . . .	30
2.1	Caractéristiques des matériaux utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°1 [37] . . . . .	92
2.2	Paramètres du modèle et leurs valeurs utilisées pour caler les résultats des essais d'extraction de la source expérimentale N°1 [37] . . . . .	93
2.3	Caractéristiques matériaux utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°2 [21] . . . . .	94
2.4	Paramètres du modèle utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°2 [21] . . . . .	95
2.5	Caractéristiques des matériaux utilisés lors des essais d'extraction pour plusieurs orientations de fibres [44] . . . . .	106
2.6	Paramètres du modèle utilisés pour le calage des résultats des essais d'extraction de Lee et al. [44] . . . . .	107
2.7	Évolution de nombre de fissures en fonction de la contrainte principale de traction dans la direction $I$ . . . . .	120
3.1	Paramètres du modèle utilisés lors de la construction des surfaces présentées en 3.3 . . . . .	136
3.2	Paramètres utilisés par le modèle dans Cast3m . . . . .	145
3.3	Liste des variables internes du modèle de fibres . . . . .	146
4.1	Caractéristiques des matériaux utilisés par Chen et al. [16] . . . . .	167

4.2	Paramètres du modèle utilisés pour les essais d'extraction de Chen et al. [16] . . . . .	169
4.3	Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Chen et al. [16] . . . . .	171
4.4	Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Wuest [88] . . . . .	175
4.5	Caractéristiques des matériaux utilisés par Choi et al.[17] . . . . .	179
4.6	Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Choi et al. [17] . . . . .	180
4.7	Caractéristiques des matériaux utilisés par Bayard [8] . . . . .	182
4.8	Paramètres du modèle utilisés qui diffèrent pour chaque orientation préférentielle de fibres lors des essais de Bayard . . . . .	182
4.9	Paramètres du modèle utilisés communs à tous les essais de traction directe de Bayard . . . . .	183

# Table des figures

1	Étude du coût de maintenance sur le cycle de vie d'un pont en BUHP et en béton ordinaire [67] . . . . .	2
2	Comparaison d'un poteau en béton armé et d'un poteau en BFUP après un chargement cyclique [14] . . . . .	3
1.1	Différents éléments de poutres réalisés en BFUP Ductal <sup>®</sup> précontraint, acier, béton précontraint et béton armé . . . . .	10
1.2	Comparaison du comportement en compression d'un BUHP avec et sans fibres à différents âges [29] . . . . .	11
1.3	Effet du dosage et du type de fibres sur la déformation ultime de compression normalisée par rapport à sa valeur pour le béton non fibré [62] . . . . .	11
1.4	Visualisation des différents comportements en traction du béton ordinaire (BO), du béton renforcé de fibres (BRF) et du BFUP [28] . . . . .	12
1.5	Essai de traction directe sur élément en BFUP de type "dogbone" [22] . . . . .	13
1.6	Réponse en traction d'un BFUP obtenue par analyse inverse d'essais de flexion pour deux dosages en fibres [69] . . . . .	13
1.7	Allures générales des lois de comportement donnant la force nécessaire à l'extraction de fibres droites et à crochets en fonction du glissement relatif fibre-matrice d'après [21] [11] [52] . . . . .	15
1.8	1) Dispositif expérimental utilisé pour l'extraction d'une fibre, 2) contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice pour une fibre de diamètre $d_f$ et de longueur ancrée $L_E$ , 3) effet de la présence de sable sur l'abrasion de la fibre [86] [84] . . . . .	17
1.9	Taille moyenne des particules pouvant constituer un BFUP d'après [52] . . . . .	18
1.10	a) Amélioration de la résistance fibre-matrice avec la densification de la matrice pour deux types de fibres, b) effet de la densification de la matrice sur la résistance d'extraction des fibres acier [90] . . . . .	19

1.11	Effet de la forme des fibres sur la contrainte de cisaillement fibre-matrice au pic, et sur l'énergie dissipée lors de l'extraction d'après [80] . . . . .	19
1.12	Résultats d'essais de traction directe sur éprouvettes entaillées pour plusieurs valeurs du coefficient d'orientation $\alpha$ (1.2.3), avec $N_f$ le nombre de fibres interceptées par la fissure [19] . . . . .	23
1.13	Réponse en traction d'un BFUP avec un dosage volumique de 3 % de fibres, pour des fibres parallèles à la direction de traction ( $0^\circ$ ), non orientées, et orientées perpendiculairement à la traction ( $90^\circ$ ) [1] . . . .	24
1.14	Effet de l'inclinaison d'un groupe de fibres par rapport à la direction de traction [44] . . . . .	25
1.15	Impact de la position du point fixe de coulage sur l'orientation des fibres dans une plaque a) [38] b) [19] . . . . .	26
1.16	Visualisation de l'orientation des fibres pour deux méthodes de coulage [94] . . . . .	27
1.17	Visualisation de la multi-fissuration en traction directe pour deux éléments de longueur $l_{ech}$ comportant la même orientation préférentielle de fibres pour un dosage en fibres de 3,8 % [76] . . . . .	29
1.18	Visualisation de la multi-fissuration en traction directe pour quatre éléments utilisant plusieurs types de fibres, répartition du nombre et des ouvertures de fissures, comparaison des différentes allures des réponses en traction, d'après [17] . . . . .	30
1.19	Schéma de l'extraction d'une fibre [28] . . . . .	34
1.20	Représentation de l'extraction d'une fibre droite selon Wille et Naaman [84] . . . . .	39
1.21	Contraintes de cisaillement théorique et expérimentale [84] . . . . .	39
1.22	Efficacité en fonction de l'angle d'inclinaison d'une fibre [88] . . . . .	40
1.23	a) Représentation de l'écaillage de la matrice, b) exemple d'évolution de la longueur $s$ d'écaillage en fonction de la force et de l'inclinaison des fibres [89] . . . . .	41
1.24	Position d'une fibre par rapport à un plan de fissuration et densité de probabilité uniformément aléatoire d'après [50] . . . . .	42
1.25	Application du coefficient K sur la courbe contrainte-déformation-ouverture de fissure pour un BFUP [61] . . . . .	44
1.26	Loi normale d'orientation des fibres en repère sphérique [28] . . . . .	45
1.27	Loi d'extraction des fibres en contrainte relatives $\sigma/\sigma_{max}$ selon Guenet [28] . . . . .	47

1.28	Confrontation du modèle de Wuest aux résultats expérimentaux [88] . . .	49
1.29	Loi de comportement développée par Guenet [28] . . . . .	53
1.30	Confrontation du modèle de Guenet aux résultats expérimentaux : a) pour des fibres alignées avec la direction de traction, b) pour des fibres orientées à 30° avec la direction de traction, [28] . . . . .	53
1.31	Surface seuil et direction d'écoulement plastique . . . . .	58
1.32	Principe général de formulation de l'endommagement . . . . .	59
1.33	Cycle de chargement d'un volume de béton pour une compression uni- axiale (à gauche) [65], et pour une traction uniaxiale de valeur normée par rapport à la contrainte maximale (à droite) [27] . . . . .	60
1.34	Faciès de fissuration utilisé dans le modèle [71] . . . . .	61
1.35	Exemple de cycles de traction-compression uniaxiale d'un élément fini en 3D avec $R_t = 3$ MPa, $R_c = 31$ MPa et $R^r = 5$ MPa . . . . .	67
1.36	Dépendance de la loi de comportement à la taille de l'élément . . . . .	69
1.37	Élément fini à interpolation linéaire a) et à interpolation quadratique b)	69
2.1	Schématisation de l'extraction d'une fibre droite avec effort de traction orienté selon l'axe longitudinal de la fibre, durant la phase d'élasticité de l'interface . . . . .	75
2.2	Evolution du profil de force le long d'une fibre ancrée dans une matrice pour trois valeurs du paramètre $H_f$ , $F_m = 10$ N, $L = 10$ mm, $E_f = 200$ GPa, $\phi_f = 0,2$ mm . . . . .	77
2.3	Profil de contrainte de cisaillement le long de la fibre durant la phase de décollement . . . . .	79
2.4	Profil de force le long de la fibre durant la phase de décollement . . . . .	81
2.5	Courbe force-déplacement, instabilité de décollement de la fibre . . . . .	82
2.6	Extraction d'une fibre ancrée à ses deux extrémités . . . . .	83
2.7	Contrainte de cisaillement expérimentale pour un BHP d'après [21] . . .	84
2.8	Évolution de la contrainte de cisaillement durant la phase de décollement, $L = 0,01$ m, $H_f = 10^6$ MPa/m, $\phi_f = 0,2$ mm, $E_f = 200$ GPa, $\tau_{max} = 10$ MPa, $\tau_d = 5$ MPa . . . . .	85
2.9	Évolution de la contrainte de cisaillement fibre-matrice moyenne lors d'un essai d'extraction de fibres droites [84][85] a) BUHP b) BHP . . . . .	87

2.10	Décomposition de la contrainte de cisaillement d'extraction selon trois phénomènes (images [86] [84]) . . . . .	88
2.11	Effets du défaut d'extrémité et de l'arrachement sur l'extraction d'une fibre droite . . . . .	89
2.12	Visualisation du mécanisme d'apparition d'un cône de rupture durant l'extraction . . . . .	90
2.13	Comparaison des forces d'extraction théoriques et expérimentales dans le cas d'un béton ordinaire [37] . . . . .	93
2.14	Comparaison des forces d'extraction théoriques et expérimentales dans le cas d'un BHP [21] . . . . .	95
2.15	Évolution des paramètres du modèle en fonction de données matériaux . . . . .	97
2.16	Représentation de l'effet courroie . . . . .	98
2.17	a) Écaillage observé expérimentalement [46], b) représentation du phénomène d'écaillage de la matrice . . . . .	101
2.18	Succession d'écaillage entre deux instants $i$ et $i - 1$ . . . . .	102
2.19	a) Solutions donnant $l_{s_i}$ pour une valeur de $l_{s_{i-1}}$ b) Solutions donnant $l_{s_i}$ pour un grand nombre de valeurs de $l_{s_{i-1}}$ , approximation linéaire des solutions . . . . .	103
2.20	Déplacement supplémentaire induit par l'écaillage . . . . .	105
2.21	Confrontation expérimentale du modèle avec des essais d'extraction pour plusieurs inclinaisons de fibres [44] . . . . .	106
2.22	Force moyenne d'arrachement discrétisée en 100 longueurs d'ancrage pour un angle $\varphi = 0$ . . . . .	109
2.23	Ellipsoïde d'orientation des fibres dans l'espace . . . . .	111
2.24	Représentation des orientations de fibres dans l'espace . . . . .	112
2.25	Angle moyen d'orientation des fibres par rapport aux directions principales de l'ellipsoïde . . . . .	113
2.26	Effet de l'orientation des fibres sur la loi de comportement en traction des fibres . . . . .	115
2.27	a) Évolution de l'espacement entre les fissures en fonction de la contrainte totale $\sigma_I$ pour une valeur de $R_{t,1} = 4$ MPa, b) évolution du coefficient de variation des résistances à la traction en fonction du paramètre de Weibull . . . . .	118
2.28	Évolution du nombre de fissures dans un élément au cours du chargement en traction uniaxiale . . . . .	120

2.29	Influence de la résistance en traction des sections fissurées sur la loi de comportement des fibres . . . . .	122
2.30	Allures de distributions des ouvertures de fissures a) modèle , b) expérimental [87] . . . . .	122
2.31	Espacement entre les fissures en fin d'essai observé expérimentalement lors d'essais de traction directe en fonction de la longueur des fibres [1], [24], [17], [22], [5], [49], [87], [76], [93], [35] . . . . .	123
2.32	a) Cycle de charge-décharge en traction d'un BFUP [42], b) cycle de chargement d'un seul élément fini en béton fibré dans Cast3m . . . . .	129
3.1	Algorithme global donnant la courbe force-glissement pour le côté le moins ancré de la fibre . . . . .	133
3.2	Caractérisation d'une courbe force moyenne-ouverture de fissure par six paramètres caractéristiques . . . . .	135
3.3	Approximation des surfaces des paramètres de forces moyennes : a) rigidité initiale, b) ouverture de fissure au pic, c) force au pic, d) ouverture de fissure en phase adoucissante, e) ouverture de fissure ultime . . . . .	137
3.4	Forces moyennes d'extraction calculées et approchées pour six angles d'inclinaison, $\tau_d = 6$ MPa, $E_f = 200$ GPa, $H_f = 5$ GPa, $\tau_{max} = 7$ MPa, $s_k = 1$ mm, $F_0 = 2$ N, $\alpha = 15^\circ$ , $R_t = 3,3$ MPa, $\mu = 0,5$ , $f_y^f = 2400$ MPa, $f_u^f = 2500$ MPa, $M_0 = 8$ MPa, $L_0 = 1$ mm . . . . .	138
3.5	Force moyenne d'extraction pour des longueurs ancrées discrétisées en 60 et 500 positions, pour six inclinaisons, $\tau_d = 6$ MPa, $E_f = 200$ GPa, $H_f = 5$ GPa, $\tau_{max} = 7$ MPa, $s_k = 1$ mm, $F_0 = 2$ N, $\alpha = 15^\circ$ , $R_t = 3,3$ MPa, $\mu = 0,5$ , $f_y^f = 2400$ MPa, $f_u^f = 2500$ MPa, $M_0 = 8$ MPa, $L_0 = 1$ mm . . . . .	140
3.6	Approximation des solutions de l'écaillage pour trois orientations, $R_t = 5$ MPa, $\phi_f = 0,2$ mm, $L = 0,01$ m, $\alpha = 30^\circ$ . . . . .	142
3.7	Lignes de commande utilisées par le modèle dans Cast3m . . . . .	144
3.8	Résultats du modèle pour un élément fini, a) contrainte totale-déplacement, b) contrainte dans le béton (SIM3) et contrainte effective des fibres (SFI3) en fonction du déplacement, c) ouverture de fissure totale (WPL3) et maximale (WMA3) en fonction du déplacement, d) nombre de microfissures (NC3) en fonction du déplacement . . . . .	149
3.9	Test de traction directe pour quatre maillages différents . . . . .	150
3.10	Influence de la densité volumique de fibres sur la loi de comportement en traction . . . . .	152

3.11	Influence de l'orientation des fibres sur la loi de comportement en traction	153
3.12	Influence de la résistance à la traction du béton sur la loi de comportement en traction . . . . .	154
3.13	Influence du diamètre des fibres sur la loi de comportement en traction à dosage de fibres constant . . . . .	155
3.14	Influence de la longueur des fibres sur la loi de comportement en traction	156
3.15	Influence de la rigidité de l'interface fibre-matrice sur la loi de comportement en traction . . . . .	156
3.16	Influence de la contrainte de frottement fibre-matrice sur la loi de comportement en traction . . . . .	157
3.17	Influence de la contrainte de décohésion fibre-matrice sur la loi de comportement en traction . . . . .	158
3.18	Influence du glissement caractéristique sur la loi de comportement en traction . . . . .	158
3.19	Influence de la force d'about des fibres sur la loi de comportement en traction . . . . .	159
3.20	Influence de l'angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage sur la loi de comportement en traction . . . . .	160
3.21	Influence du module d'écroutissage sur la loi de comportement en traction	161
3.22	Influence de la longueur caractéristique d'ancrage sur la loi de comportement en traction . . . . .	162
3.23	Influence du coefficient de frottement fibre-matrice sur la loi de comportement en traction . . . . .	163
3.24	Influence du module d'élasticité des fibres sur la loi de comportement en traction . . . . .	163
3.25	Influence du coefficient de Weibull sur la loi de comportement en traction	164
3.26	Influence de la limite d'élasticité des fibres sur la loi de comportement en traction . . . . .	165
4.1	Comparaison des forces théoriques et expérimentales dans le cas d'un BHP [16] . . . . .	168
4.2	a) Comparaison d'essais d'extraction pour plusieurs inclinaisons [16] [44], b) corrélation entre le modèle et les essais d'extraction retenus . . . . .	169
4.3	Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour trois essais de traction directe . . . . .	170

4.4	a) Comparaison d'essais d'extraction avec le modèle de Chen et al. et le modèle développé, b) Comparaison d'essais de traction directe avec le modèle de Chen et al. et le modèle développé [16] . . . . .	172
4.5	Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour un essai de traction directe [88] . . . . .	174
4.6	Géométrie de la dalle, modélisation d'une tranche de dalle [88] . . . . .	176
4.7	Corrélation expérimentale du modèle pour un essai de flexion quatre points [88] . . . . .	177
4.8	Champs de variables internes du calcul d'une tranche de dalle à différents instants . . . . .	178
4.9	Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour cinq essais de traction directe de Choi et al. . . . .	181
4.10	Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour les essais de traction directe de Bayard pour quatre orientations préférentielles de fibres, comparaison avec le modèle de Guenet . . . . .	184
4.11	Géométrie de l'essai, maillage et conditions aux limites utilisées . . . . .	186
4.12	Position de la poutre PA3 étudiée . . . . .	187
4.13	a) Courbes d'extraction expérimentales et modélisées correspondant à l'essai de flexion, b) comparaison entre les réponses force-ouverture de fissures mesurées par analyse d'image et par déplacement du vérin . . . . .	188
4.14	Champ de densité volumique de fibres . . . . .	189
4.15	Champ de d'orientation des fibres dans la direction $x$ . . . . .	189
4.16	Champ de d'orientation des fibres dans la direction $y$ . . . . .	190
4.17	Lignes de commande utilisées permettant de définir un champ tridimensionnel de propriété matériau dans Cast3m . . . . .	191
4.18	Paramètres matériau utilisés lors du calcul de la poutre . . . . .	191
4.19	Courbes force-flèche expérimentale et numérique . . . . .	192
4.20	Champ de fissuration expérimental, champ du nombre de fissures et d'écart type d'ouvertures de fissures du modèle au pic de force (point (4) de la figure 4.21) . . . . .	193
4.21	a) Champs d'ouvertures de fissures expérimental, b) Points correspondants aux relevés d'ouvertures de fissures, c) ouverture de fissure maximale calculée par le modèle le long de la ligne LI1 . . . . .	195

# Notations

## Lettres latines : scalaires

$a$	Valeur de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	-
$A_f$	Section de la fibre	m <sup>2</sup>
$A_s$	Section d'armature	m <sup>2</sup>
$A_c$	Section de béton	m <sup>2</sup>
$b$	Valeur de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	-
$c$	Valeur de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$	-
$C$	Coefficient de variation caractérisant l'écart type d'une distribution de Weibull	-
$c_i$	Coefficients de l'équation de surface pour la réduction du modèle	-
$D_I^t$	Variable d'endommagement de traction du béton dans la direction $I$	-
$e_{a,x}$	Composante $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	-
$e_{a,y}$	Composante $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	-
$e_{a,z}$	Composante $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	-
$e_{b,x}$	Composante $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	-
$e_{b,y}$	Composante $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	-
$e_{b,z}$	Composante $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	-
$E_f$	Module d'élasticité des fibres	MPa
$Err_{max}$	Erreur maximale lors de la réduction du modèle	-
$\bar{Err}$	Erreur moyenne lors de la réduction du modèle	-
$f_0$	Force d'about dû à un défaut d'extrémité des fibres	N
$F_a$	Composante axiale à la fibre de $F_\varphi$	N
$F_c$	Force résiduelle de la zone collée durant la phase de décollement	N
$F_{co}$	Force ultime admissible par le cône de rupture du béton	N

$F_e$	Force dans la fibre durant la phase d'élasticité	N
$F_{crit}$	Force critique caractérisant le début de décollement	N
$F_{crit,0}$	Force de début de décollement du côté le moins ancré pour la longueur ancrée initiale avant écaillage	N
$F_{crit_1}$	Force critique caractérisant le début de décollement du côté le moins ancré de la fibre	N
$F_{crit_2}$	Force critique caractérisant le début de décollement du côté le plus ancré de la fibre	N
$F_m$	Force générée dans la fissure par une fibre non inclinée	N
$F_{max}$	Force maximale obtenue lors de l'extraction	N
$F_{PH}$	Force nécessaire pour plastifier une fibre inclinée lors de son extraction	N
$F_\varphi$	Force obtenue lors de l'arrachement d'une fibre orientée	N
$F_{\varphi,L}$	Force obtenue lors de l'arrachement d'une fibre inclinée ancrée de $L$	N
$F_{\varphi,L_i}$	Force obtenue lors de l'arrachement d'une fibre inclinée ancrée de $L_i$	N
$\bar{F}$	Force moyenne pour un ancrage quelconque	N
$\bar{F}_{ap}$	Approximation de la force moyenne en phase pré-pic	N
$\bar{F}_{ad}$	Force moyenne en phase adoucissante	N
$\bar{F}_{pp}$	Approximation de la force moyenne en phase post-pic	N
$\bar{F}_{pic}$	Force moyenne au pic	N
$F_r$	Composante radiale à la fibre de $F_\varphi$	N
$F_{r,l_s}$	Partie de la force radiale présente sur la longueur $l_s$	N
$F_{r,l_{s_i}}$	Partie de la force radiale présente sur la longueur $l_{s_i} - l_{s_{i-1}}$	N
$F_u$	Force ultime admissible par la fibre	N
$f_u^f$	Contrainte ultime de la fibre	MPa
$f_y^f$	Limite d'élasticité de la fibre	MPa
$G$	Centre de gravité des triangles discrétisant la sphère unité	-
$H_f$	Rigidité de l'interface fibre-matrice	MPa/m
$k_0$	Rigidité initiale de la courbe force-ouverture de fissure d'une fibre bi-ancrée	N/m
$\bar{K}_0$	Rigidité initiale de la courbe force moyenne-ouverture de fissure	N/m
$k_c$	Paramètre caractérisant l'interface fibre matrice	m <sup>-1</sup>
$L_0$	Longueur caractéristique liée à l'impact de la longueur ancrée sur l'abrasion	m

$l$	Nombre de discrétisation de la position des fibres	-
$L$	Longueur du côté le moins ancré de la fibre	m
$l_c$	Longueur caractéristique pour le calcul de la résistance à la traction minimale du béton	m
$L_d$	Longueur de la zone de fibre décollée de la matrice	m
$l_{ech}$	Longueur de l'échantillon de référence	m
$l_{e,I}$	Longueur de l'élément considéré dans la direction $I$	m
$L_f$	Longueur des fibres	m
$L_i$	Longueur du côté le moins ancrée de la fibre pour le calcul de la force moyenne	m
$l_s$	Longueur d'écaillage de la matrice	m
$l_{s_k}$	Longueur d'écaillage constante permettant le calcul de l'équation de la droite d'approximation de l'écaillage	m
$l_{s_i}$	Longueur d'écaillage à un instant $i$	m
$l_{s_{i-1}}$	Longueur d'écaillage à un instant $i - 1$	m
$l_{s1}$	Longueur d'écaillage du côté le moins ancré de la fibre	m
$l_{s2}$	Longueur d'écaillage du côté le plus ancré de la fibre	m
$M_0$	Module d'écrouissage relatif au glissement et à l'abrasion de la matrice	MPa
$m$	Paramètre de Weibull	-
$n$	Nombre d'angles solides discrétisant l'espace	-
$n_c$	Nombre de fissures dans un élément	-
$n_{c,I}$	Nombre de fissures de normale la direction $I$	-
$n_{c,k,I}$	Nombre de fissures appartenant au groupe de résistance à la traction $k$ de normale la direction $I$	-
$n_{c,max}$	Plus grand nombre de fissures appartenant au même groupe de résistance à la traction	-
$n_f$	Nombre de fibres dans 1 m <sup>3</sup> de béton	-
$n_{f,I}$	Nombre de fibres traversant le plan de fissuration de normale la direction $I$	-
$n_k$	Nombre de sous-itérations d'équilibre entre l'écaillage et la force d'extraction	-
$n_\varphi$	Nombre de discrétisation des inclinaisons de fibres pour le calcul des forces moyennes	-
$n_{R_t}$	Nombre de discrétisation des résistances à la traction pour le calcul des forces moyennes	-

$p(L)$	Densité de probabilité d'ancrage des fibres	$m^{-1}$
$r$	Rayon d'un ellipsoïde	m
$R_c$	Résistance à la compression du béton	MPa
$R_{\vec{e}_i}$	Rayon de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans une direction $\vec{e}_i$	-
$R_{\vec{e}_i,1}$	Rayon de l'ellipsoïde d'orientation des fibres sur le sommet 1 d'un triangle discrétisant la sphère unité	-
$R_{\vec{e}_i,2}$	Rayon de l'ellipsoïde d'orientation des fibres sur le sommet 2 d'un triangle discrétisant la sphère unité	-
$R_{\vec{e}_i,3}$	Rayon de l'ellipsoïde d'orientation des fibres sur le sommet 3 d'un triangle discrétisant la sphère unité	-
$R_t$	Résistance à la traction du béton	MPa
$R_{t,k}$	Résistance à la traction du béton pour un groupe de résistance $k$	MPa
$R_{t,max}$	Résistance à la traction maximale du béton lors du calcul des forces moyennes pour la réduction du modèle	MPa
$R_{t,min}$	Résistance à la traction minimale du béton lors du calcul des forces moyennes pour la réduction du modèle	MPa
$R_{t,n}$	Résistances à la traction du béton utilisées lors du calcul des forces moyennes pour la réduction du modèle	MPa
$R_{t,ref}$	Résistance de première fissuration de l'échantillon de référence	MPa
$s_0$	Glissement nécessaire à la mise en mouvement du défaut d'extrémité	m
$s_{crit}$	Glissement à la frontière de la zone collée en phase de décollement	m
$s_{crit1}$	Glissement à la frontière de la zone collée en phase de décollement du côté le moins ancré de la fibre	m
$s_{crit2}$	Glissement à la frontière de la zone collée en phase de décollement du côté le plus ancré de la fibre	m
$s_d$	Glissement de la zone décollée de la fibre	m
$s_{d1}$	Glissement de la zone décollée du côté le moins ancré de la fibre	m
$s_{d2}$	Glissement de la zone décollée du côté le plus ancré de la fibre	m
$s_e$	Glissement élastique de la fibre	m
$s_k$	Glissement caractéristique de mise en extraction	m
$s_m$	Glissement relatif fibre-matrice	m
$s_{m1}$	Glissement relatif fibre-matrice du côté de la fibre le moins ancré	m
$s_{m2}$	Glissement relatif fibre-matrice du côté de la fibre le plus ancré	m
$s_p$	Glissement relatif fibre-matrice dû à l'extraction	m

$s_{p1}$	Glissement relatif fibre-matrice dû à l'extraction du côté le moins ancré de la fibre	m
$S_r$	Surface de rupture du pentaèdre d'écaillage	m <sup>2</sup>
$S_{r_i}$	Surface de rupture du pentaèdre d'écaillage à un instant $i$	m <sup>2</sup>
$S_w$	Espacement entre les fissures du béton	m
$S_{w,I}$	Espacement entre les fissures du béton de normale la direction $I$	m
$V_{ref}$	Volume de l'échantillon de référence	m <sup>3</sup>
$V_k$	Volume chargé de l'élément sollicité	m <sup>3</sup>
$w$	Ouverture de fissure	m
$\bar{w}_{ad}$	Ouverture de fissure en phase adoucissante de la courbe force moyenne-ouverture de fissure	m
$w_{fi,I}$	Ouverture de fissure fictive dans la direction $I$	m
$w_I^{k,t}$	Ouverture de fissure caractéristique pour la régularisation de l'endommagement de traction dans la direction $I$	m
$w_I^{\mu,max}$	Ouverture de micro-fissure maximale dans la direction $I$	m
$w_{k,I}$	Ouverture de fissure appartenant au groupe de résistance à la traction $k$ dans la direction $I$	m
$w_{l_s}$	Ouverture de fissure tenant compte de l'écaillage	m
$\bar{w}_{pic}$	Ouverture de fissure au pic de la courbe force moyenne-ouverture de fissure	m
$w_I^{pl,t}$	Ouverture de fissure totale dans la direction $I$	m
$\bar{w}_u$	Ouverture de fissure ultime de la courbe force moyenne-ouverture de fissure	m
$x$	Axe dont l'origine coïncide avec le front de décollement	m
$X$	Équation de surface permettant la réduction du modèle	-
$Z_{n,k}$	Valeur des paramètres des courbes force moyenne-ouverture de fissure	-

## Lettres grecques : scalaires

$\alpha$	Angle d'inclinaison du cône de rupture et du pentaèdre d'écaillage	°
$\varepsilon_{f,e}$	Déformation élastique de la fibre	-
$\varepsilon_I^t$	Déformation totale dans la direction $I$	-
$\delta F_e$	Incrément de force élastique pour la construction des courbes force-ouverture de fissure d'une fibre	N
$\Delta F_\varphi$	Supplément de force liée à l'inclinaison de la fibre	N

$\delta L_d$	Incrément de longueur décollée pour la construction des courbes force-ouverture de fissure d'une fibre	m
$\delta s_p$	Incrément de glissement d'arrachement pour la construction des courbes force-ouverture de fissure d'une fibre	m
$\gamma$	Angle définissant le repère sphérique	rad ou °
$\Gamma$	Fonction Gamma	-
$\mu$	Coefficient de frottement fibre-matrice	-
$\Omega_{\vec{e}_i}$	Élément de surface triangulaire de la sphère unité	m <sup>2</sup>
$\phi_f$	Diamètre de la fibre	m
$\phi_r$	Diamètre d'un renfort	m
$\varphi$	Angle d'inclinaison entre la direction ancrée d'une fibre et la normale au plan de fissuration considéré	rad ou °
$\varphi_{\vec{e}_i}$	Angle d'inclinaison entre la direction $\vec{e}_i$ et la normale au plan de fissuration considéré	rad ou °
$\varphi_k$	Angles utilisés lors du calcul des forces moyennes pour la réduction du modèle	rad ou °
$\bar{\varphi}_I$	Angle d'inclinaison moyen entre l'ensemble des fibres traversant le plan de fissuration $I$ et sa normale	rad ou °
$\rho_{\vec{e}_i}$	Densité volumique de fibres contenue dans l'angle solide orienté selon $\vec{e}_i$	-
$\rho_f$	Densité volumique de fibres	-
$\rho_r$	Densité surfacique de renfort traversant une fissure	-
$\sigma_{f,I}$	Contrainte totale reprise par les fibres dans la direction $I$	MPa
$\sigma_{f,I}^e$	Contrainte reprise par les fibres dans la direction $I$ en zone non fissurée	MPa
$\sigma_{f,I}^w$	Contrainte effective reprise par les fibres dans la fissure $I$	MPa
$\sigma_r^f$	Contrainte radiale le long de la fibre	MPa
$\sigma_I$	Contrainte principale $I$	MPa
$\sigma_{II}$	Contrainte principale $II$	MPa
$\sigma_{III}$	Contrainte principale $III$	MPa
$\tau$	Contrainte de cisaillement fibre-matrice	MPa
$\bar{\tau}$	Contrainte de cisaillement fibre-matrice moyenne	MPa
$\bar{\tau}_r$	Contrainte de cisaillement renfort-matrice moyenne	MPa
$\tau_c$	Contrainte de cisaillement le long de la zone collée de l'interface durant la phase de décollement	MPa
$\tau_d$	Contrainte de frottement fibre-matrice	MPa

$\bar{\tau}_{f,I}$	Contrainte de cisaillement fibre-matrice moyenne pour l'ensemble des fibres traversant la fissure $I$	MPa
$\tau_e$	Contrainte élastique de cisaillement à l'interface fibre-matrice	MPa
$\tau_{max}$	Contrainte de cisaillement maximale admissible par l'interface	MPa
$\tau_p$	Contrainte de cisaillement fibre-matrice durant l'extraction de la fibre	MPa
$\theta$	Angle définissant le repère sphérique	rad ou °
$\xi$	Axe parallèle à la longueur ancrée de la fibre prenant son origine au point d'extraction de la fibre	m
$\zeta$	Variable d'intégration relative à la zone décollée	m

## Vecteurs

$\vec{c}_i$	Vecteur des coefficient de l'équation de surface pour la réduction du modèle	-
$\vec{e}_a$	Direction principale 1 de l'ellipsoïde d'orientation des fibres	-
$\vec{e}_b$	Direction principale 2 de l'ellipsoïde d'orientation des fibres	-
$\vec{e}_c$	Direction principale 3 de l'ellipsoïde d'orientation des fibres	-
$\vec{e}_i$	Direction du centre de gravité d'un angle solide $\Omega_{\vec{e}_i}$	-
$\vec{R}$	Vecteur résidu de l'équation de surface pour la réduction du modèle	-
$\vec{V}_I$	Vecteur d'orientation de la fissure $I$	-
$\vec{Z}_{n,k}$	Vecteur des paramètres des courbes force moyenne-ouverture de fissure	-

## Tenseurs

$\sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes	MPa
$\sigma_{ij}^m$	Tenseur des contraintes dans le béton	MPa
$\sigma_{ij}^f$	Tenseur des contraintes dans les fibres	MPa

# Remerciements

Ce travail de thèse constitue l'accomplissement d'un souhait qui m'était cher, qui consistait à approfondir de manière détaillée la modélisation du comportement mécanique des structures. De nombreuses personnes sont impliquées dans la réussite de ce projet, et je tiens ainsi à les remercier.

Tout d'abord, je remercie mes encadrant de thèse Alain Sellier, Thierry Vidal, Alain Millard et Luca Sorelli qui m'ont permis de faire ce travail. Leurs connaissances, leur professionnalisme et leur enthousiasme sont sans limites, et sans eux ce travail ne serait pas.

Je remercie également les membres du C.E.A. Jean-Charles Le Pallec, Ludovic Jason et Caroline Guérin pour le soutien apporté à ce projet. Je voudrais également remercier l'ensemble des membres du LMDC avec qui j'ai pu partager d'excellents moments durant ce travail : Lucas, Arthur, Bernard, Pierre, Marie, Cédric, Clément, Matthieu et tous les autres.

Je souhaite vivement remercier tous les membres du jury qui ont accepté de rapporter et d'examiner cette thèse : Pierre Rossi, Bruno Massicotte, Eugen Brühwiler, Elsa Nguyen Amanjean, Pampa Dey et Charles-Darwin Annan.

Je remercie mes parents pour m'avoir soutenu et encouragé à poursuivre des études, ce qui m'a permis de découvrir ce goût pour la modélisation du comportement mécanique des ouvrages. Je remercie évidemment ma compagne Marie pour le soutien sans faille apporté durant ces années, ainsi que mon fils Hugo pour le bonheur qu'il m'apporte chaque jour.

Enfin je remercie l'ensemble des personnes que j'ai pu rencontrer durant mon parcours, et qui ont tant contribué à la réussite des projets entrepris, et notamment Thomas, Romain, Antoine, Swan, Adrien, Maxime, Cyril, Jules, Victor et tous ceux que j'oublie de citer.

# Introduction

## Contexte et objectifs

L'un des enjeux actuels les plus forts de la construction, et qui s'inscrit dans la démarche du développement durable, concerne la durabilité des ouvrages. Chaque année, environ six milliards de mètres cubes de béton sont mis en œuvre dans le cadre de la construction de bâtiments, de ponts, d'ouvrages souterrains ou sous-marins. Ces ouvrages en béton sont construits dans une grande diversité d'environnements comportant néanmoins un point commun : l'agression du béton, et plus spécifiquement du béton armé. Ces agressions sont en grande partie rendues possibles par la porosité du béton, qui permet la pénétration des agents chimiques agressifs provoquant sa détérioration. Les investigations pour réduire la porosité des bétons ont abouti à la famille des Bétons Fibrés Ultra-Performants (BFUP) qui se caractérisent par la plus forte compacité des matériaux à base cimentaire. Elle leur confère une grande durabilité et une haute résistance en compression. En traction, le phénomène de micro-fissuration diffuse, obtenu par l'ajout de fibres réparties, autorise une diminution de la quantité d'armatures, permettant ainsi leur mise en œuvre dans des coffrages fins et complexes. La micro-fissuration permet également de limiter les ouvertures de fissures, qui sont préjudiciables à la pénétration des ions agressifs. Les applications industrielles de ce matériau se développent fortement [12], car il constitue un progrès important en termes de durée de vie et de coût de maintenance des ouvrages (Figure 1), notamment en contexte de conditions climatiques sévères, ce qui représente un point critique dans certains pays [4]. L'une des applications importantes de ce matériau repose sur son comportement face à une situation sismique. La moindre fragilité du matériau apportée par les fibres et la multi-fissuration lui confèrent la capacité de dissiper une importante quantité d'énergie en s'endommageant faiblement [26] comme en atteste la figure 2 [14] qui compare l'état d'un poteau en béton armé et d'un poteau en BFUP après une sollicitation cyclique.

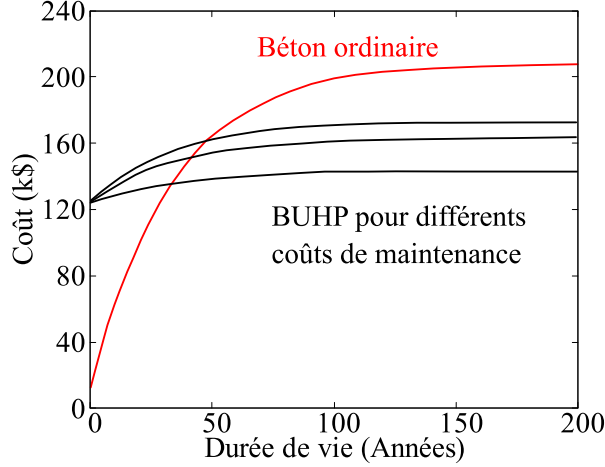


FIGURE 1 – Étude du coût de maintenance sur le cycle de vie d’un pont en BUHP et en béton ordinaire [67]

Tout ceci en fait un matériau qui semble idéal au premier abord, mais c’est sans compter sur la difficulté que représente sa justification vis-à-vis de la tenue structurelle. Depuis peu, la publication des normes françaises concernant le matériau BFUP et le dimensionnement en BFUP a rendu possible son utilisation en tant qu’éléments de structures [60] [61], sous réserve de réaliser une série de tests conséquente afin de caractériser le matériau de manière très précise. En outre, le dimensionnement selon cette norme s’appuie sur des méthodes analytiques applicables sur des géométries classiques de la construction. Dès lors, il n’exploite pas pleinement les performances du matériau comme pourraient le permettre des formes plus adaptées ou complexes d’autant plus envisageables grâce à l’aptitude autoplaçante.

La mise au point d’un outil numérique permettant de reproduire le comportement des BFUP en tant qu’éléments de structures est donc un enjeu essentiel au développement de son utilisation. Plusieurs modèles ont déjà vu le jour [28] [88] [16], mais présentent néanmoins quelques lacunes, notamment au niveau de la représentation de la multifissuration ou de leur utilisation pour des structures de grandes dimensions. Un modèle basé sur la méthode des éléments finis permettant de modéliser des structures de formes complexes grâce à des éléments de grandes dimensions et en effectuant un minimum d’essais sur le matériau constituerait un atout majeur au développement de l’utilisation des bétons fibrés. L’objectif de cette thèse est donc de fournir un outil numérique capable de prédire le comportement mécanique des BFUP, et notamment de fournir des données telles que les ouvertures de fissures, ce qui reste encore un défi à ce jour.

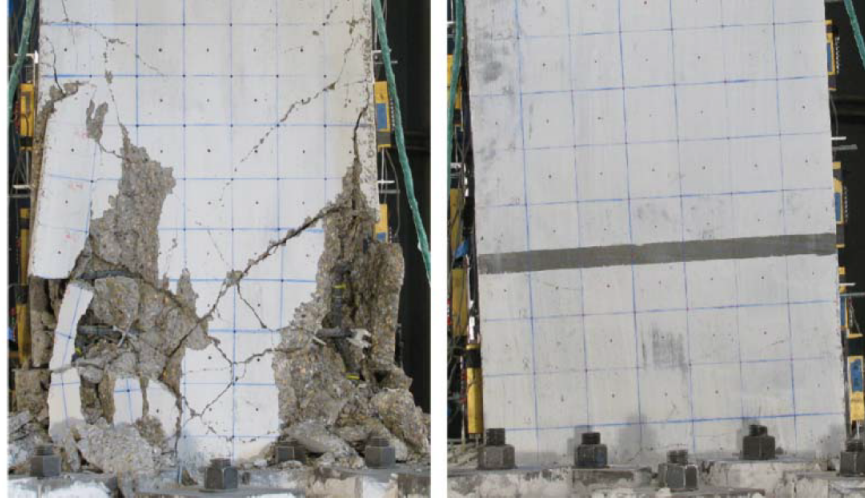


FIGURE 2 – Comparaison d’un poteau en béton armé et d’un poteau en BFUP après un chargement cyclique [14]

La réponse du matériau en traction est la grande spécificité d’un béton fibré, c’est aussi l’aspect le plus difficile à caractériser. Bien que la résistance en traction d’un BFUP soit en général deux fois supérieure à celle du béton ordinaire, celle-ci reste faible devant la résistance en compression. C’est pourquoi il apparaît primordial d’effectuer un travail poussé sur le comportement en traction, qui conduira a priori le plus souvent les BFUP à la rupture.

Le comportement mécanique post-fissuration des BFUP fait appel à des mécanismes d’extraction des fibres ancrées dans la matrice cimentaire, qui confèrent à ces matériaux un potentiel de déformation important, et donc un comportement ductile en traction. Au delà de leur limite d’élasticité, ces matériaux développent en général une phase d’écrouissage positif, qui est obtenue par une multi-fissuration diffuse de la matrice, dissipant une quantité importante d’énergie. Ce sont ces aspects qu’il conviendra de décrire, afin de concevoir un outil numérique.

L’orientation des fibres au sein de la matrice cimentaire, par rapport aux directions de traction, joue un rôle primordial dans le comportement de ces matériaux. La connaissance de cette orientation permettrait ainsi une modélisation plus efficace du comportement des structures.

# Méthodologie du projet

La méthodologie du projet repose en premier lieu sur le développement d'une loi de comportement caractérisant les phénomènes liant les fibres et la matrice cimentaire. Cette loi, basée sur des données issues de la littérature, nécessitera un minimum d'essais sur le matériau afin de la calibrer. Cette thèse est effectuée en partenariat avec l'Université Laval qui développe une méthode électromagnétique de mesure des orientations de fibres. Le modèle devra donc posséder la capacité de représenter des orientations de fibres anisotropes. La loi de comportement des fibres devra donc tenir compte de l'effet de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction d'extraction afin de représenter au mieux les effets liés aux orientations préférentielles de fibres. Puis le comportement des fibres uniques sera généralisé à un grand nombre de fibres et aboutira ainsi à une relation liant la contrainte reprise par les fibres et l'ouverture de fissure correspondante. Enfin, afin de pouvoir utiliser des éléments finis de grandes dimensions, il sera nécessaire de développer une méthode permettant de représenter le phénomène de multi-fissuration dans des macro-éléments.

Le modèle est développé dans le code éléments finis du C.E.A. Cast3m [13]. Ce modèle s'appuie sur le modèle de comportement du béton armé Fluendo3D développé depuis plus de vingt ans au LMDC de Toulouse [71]. Il présente des spécificités uniques, particulièrement adaptées à la modélisation des bétons fibrés, notamment en ce qui concerne l'endommagement anisotrope, et la prise en compte de renforts "répartis", ne nécessitant pas leur maillage explicite. Le code Cast3m offre par ailleurs des possibilités essentielles, par exemple, en autorisant une flexibilité importante dans la façon de lui fournir les données du problème. Cette capacité à recevoir n'importe quelle donnée d'entrée sous forme de champ variable au gré du maillage est un atout majeur, et est particulièrement appropriée aux densités et orientations variables des fibres dans les structures. De plus, Cast3m permet la modification avancée de certaines de ses méthodes de calculs, ce qui constitue un des intérêts majeurs de ce logiciel.

Le modèle est calibré sur la base d'essais expérimentaux notamment issus de la littérature. Il est ensuite validé à plusieurs échelles : extraction de la fibre ancrée dans une matrice, matériau en traction uniaxiale et élément de structure.

Ce travail réunit pour la première fois trois grands acteurs de la recherche scientifique : Le laboratoire du LMDC, rattaché à l'Université Toulouse III Paul Sabatier et l'INSA de Toulouse, qui possède une grande expertise dans la modélisation du comportement

mécanique des matériaux cimentaires, retranscrite par le grand nombre de projets industriels dans lesquels il est impliqué ; l'Université Laval de Québec, qui dispose de moyens expérimentaux importants, offrant des données d'entrée essentielles au modèle, et une connaissance fine du matériau ; le C.E.A. qui développe le code éléments finis Cast3m, support du modèle, permettant d'aborder des aspects numériques fondamentaux qui sont nécessaires à ce travail de thèse. La synergie entre ces trois intervenants majeurs dans le domaine de la recherche en Génie Civil, constitue ainsi un socle robuste à la réussite de ce travail.

## Organisation de la thèse

Cette thèse se compose de quatre parties. La première partie est une étude de la littérature. Elle s'intéresse dans un premier temps au matériau BFUP. Puis, des aspects concernant la modélisation de ce matériau sont étudiés. Ensuite, une étude approfondie est menée sur la modélisation du béton implantée dans le code Fluendo3D du LMDC qui constitue le support de la modélisation du comportement des BFUP. La bibliographie s'achève par une étude des problèmes liés à la régularisation de l'endommagement et aux solutions actuellement utilisées.

Le second chapitre décrit l'ensemble des théories mises en œuvre dans le modèle développé dans le cadre de ce travail de thèse. Il décrit alors le processus de modélisation en partant de la description de l'extraction de fibres uniques jusqu'au calcul de la loi de comportement du béton fibré.

Le troisième chapitre présente des aspects liés à la mise en œuvre numérique du modèle dans le code éléments finis Cast3m. Il permet notamment de décrire les méthodes de discrétisation et de réduction de modèles utilisées. Une étude paramétrique du modèle est également présenté afin de valider l'implantation.

Enfin, le quatrième chapitre propose une validation expérimentale du modèle de comportement mécanique des bétons fibrés. Cette validation se base en partie sur des résultats d'essais issus de la littérature, chacun permettant de valider un ou plusieurs aspects du modèle, ainsi que sur un essai de flexion quatre points. Pour cet essai, les champs de densités volumiques et d'orientations de fibres ont été mesurés par une méthode électromagnétique et sont utilisés comme données d'entrée au modèle.

# Chapitre 1

## État de l'art

Cette étude bibliographique est composée de trois parties :

- La première partie est une étude générale de la littérature, permettant d’appréhender de manière détaillée le comportement mécanique des BFUP, et les facteurs qui l’influencent.
- La seconde partie donne des éléments de modélisation des BFUP, en s’appuyant sur des travaux récents réalisés sur ce matériau. Ceci permet de comprendre le processus de modélisation, et d’analyser les différents choix d’hypothèses qui ont été faits au cours du développement des modèles.
- La troisième partie donne des éléments généraux de modélisation numérique du comportement mécanique des matériaux. Elle s’appuie notamment sur les outils utilisés dans le modèle Fluendo3D, qui constituera le socle du modèle de béton fibré.

## 1.1 Composition des BFUP

Les bétons fibrés à ultra-hautes performances sont caractérisés par une résistance à la compression élevée, ainsi qu’une durabilité très supérieure aux bétons ordinaires [6]. La matrice d’un BFUP est en général composée d’une grande quantité de ciment et d’additions, qui peuvent être introduits en proportions variables selon la quantité de ciment que l’on souhaite remplacer (fumée de silice, laitier de haut fourneau,...). La quantité d’eau ajoutée est particulièrement faible pour ce type de béton, avec un rapport eau sur liant équivalent généralement autour de 0,2. Le volume important de pâte, l’empilement granulaire et la faible teneur en eau permettent de ”supprimer” la porosité capillaire, ce qui confère aux BFUP leur grande durabilité. La très faible quantité d’eau implique l’ajout d’une quantité conséquente de superplastifiant afin d’obtenir les caractéristiques rhéologiques indispensables à leur mise en œuvre. Ce dosage élevé en superplastifiant ainsi que le grand volume de pâte procurent généralement aux BFUP une aptitude autoplaçante. A l’inverse d’un béton ordinaire, le BFUP ne comporte pas de gros granulats dans sa composition, il est constitué uniquement de sable, dont la taille des grains dépasse rarement les 1 mm, ce qui permet d’augmenter sa compacité. Enfin, l’ajout de fibres à sa matrice, à raison d’un dosage volumique aux alentours de 2 %, lui permet de développer un comportement atypique des bétons à l’état durci, car les fibres empêchent la rupture fragile du béton en traction. Le tableau 1.1 récapitule

les compositions classiques, hors granulats, des différents types de bétons utilisés en application structurale.

Composition	Béton ordinaire	BHP	BFUP
Liant ( $kg/m^3$ )	300 à 375	350 à 500	700 à 1500
Rapport eau/liant	0,4 à 0,6	0,3 à 0,35	0,16 à 0,2
Superplastifiant ( $kg/m^3$ )	-	3,5 à 10	10 à 45
Fumée de silice ( $kg/m^3$ )	-	0 à 50	175 à 375
Fibres d'acier ( $m^3/m^3$ )	-	-	1 à 3,5
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	2300	2300	2400 à 2700

TABLE 1.1 – Compositions classiques, hors granulats, du béton ordinaire, béton à hautes performances et béton fibré ultra performant [28] [88]

Cependant, les formulations des BFUP ne se limitent pas à ces seuls ordres de grandeur. Certains BFUP ont notamment été confectionnés avec des dosages en fibres très élevés pouvant aller jusqu'à 11 % [88] [70]. Ces hauts dosages en fibres impliquent l'utilisation de fibres plus courtes afin de conserver une bonne maniabilité du mélange.

### 1.1.1 Types de fibres utilisés

Les fibres utilisées dans les formulations BFUP sont en général de section circulaire, avec un diamètre de 0,1 mm à 0,3 mm et pour des longueurs de 10 mm à 30 mm. Il existe une très grande variété de fibres utilisables pour le renforcement des matrices cimentaires. Elles sont le plus souvent de forme droite, mais peuvent également présenter une forme ondulée, aplatie, ou recourbée aux extrémités pour former des crochets, et ainsi augmenter leur ancrage à la matrice cimentaire. Les fibres peuvent être caractérisées par trois aspects généraux qui sont :

- Leur matériau de constitution
- Leur forme
- Leurs dimensions, autrement dit leur section et longueur

Ces caractéristiques génèrent différentes familles de fibres. Concernant les matériaux utilisés, on retrouve les matériaux naturels, les matériaux synthétiques, et les matériaux métalliques (acier, acier inoxydable,...). C'est ce dernier matériau qui sera étudié ici. La

raison en est que la norme NF P 18-710 vise l'utilisation du BFUP pour des applications structurales uniquement dans le cadre de l'utilisation de fibres métalliques. La forme des fibres n'est quant à elle pas définie du point de vue réglementaire.

## 1.2 Comportement mécanique des BFUP

Les normes françaises NF P 18-470 [60] et 18-710 [61], parues en 2016 et issues des recommandations de l'AFGC [2] permettent d'apporter un cadre réglementaire aux propriétés visées par les BFUP. Il convient en premier lieu de donner la définition d'un BFUP au sens le plus large possible, qu'il soit architectonique ou structurel. La NF P 18-470 donne la définition suivante : *"le BFUP est un béton caractérisé par une résistance à la compression élevée, supérieure à 130 MPa, par une résistance en traction post-fissuration importante permettant d'obtenir un comportement ductile en traction et dont la non-fragilité permet de calculer et de réaliser des structures et éléments de structure sans utiliser d'armatures de béton armé."* Ainsi, deux aspects fondamentaux ressortent de cette définition. Le premier est que les BFUP possèdent une résistance caractéristique à la compression élevée, avec une valeur seuil de 130 MPa, ce qui impose à la matrice cimentaire d'être très compacte afin de pouvoir atteindre de telles résistances. Le deuxième point est que ce matériau doit être ductile, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir se déformer suffisamment sans présenter de rupture fragile. Le respect de ces critères, confère aux BFUP des propriétés mécaniques accrues, en comparaison avec les bétons conventionnels. Le tableau 1.2 donne une estimation des propriétés mécaniques des différentes catégories de matériaux à matrice cimentaire utilisés à ce jour.

Propriétés	Béton ordinaire	BHP	BFUP
Résistance à la compression (MPa)	20 à 50	50 à 80	130 à 265
Résistance à la traction (MPa)	1 à 3	4 à 5	7 à 15
Module d'élasticité (GPa)	25 à 35	35 à 40	45 à 65
Déformation à la rupture en traction ( $\mu\text{m/m}$ )	-	0 à 50	175 à 375
Énergie de rupture ( $\text{kJ/m}^2$ )	0,1	-	10 à 40

TABLE 1.2 – Caractéristiques mécaniques générales des bétons ordinaires, bétons à hautes performances et bétons fibrés ultra performants [28] [60]

La figure 1.1 illustre à titre d'exemple plusieurs sections de poutres comportant des moments résistants équivalents. Elles sont de gauche à droite en BFUP Ductal<sup>®</sup> précon-

traint, commercialisé par Lafarge-Holcim, acier, béton précontraint et béton armé. L'intérêt de l'utilisation du BFUP apparaît ici clairement, avec une forte réduction du volume de béton, et donc du poids de la structure.

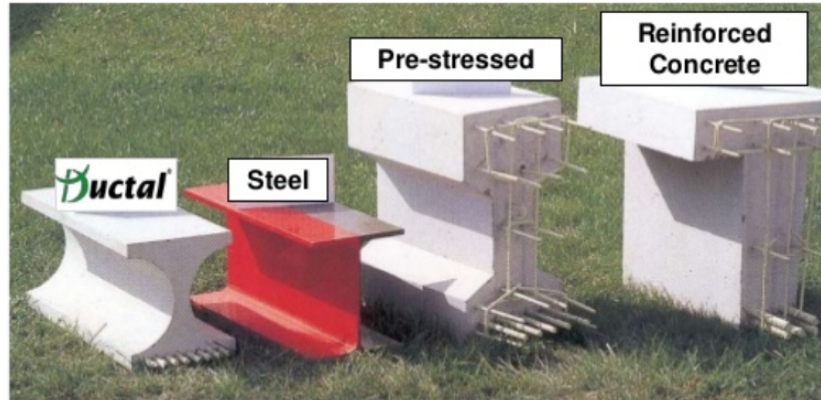


FIGURE 1.1 – Différents éléments de poutres réalisés en BFUP Ductal<sup>®</sup> précontraint, acier, béton précontraint et béton armé

### 1.2.1 Comportement en compression

Les BFUP, bien que se comportant en compression d'une manière similaire aux bétons plus classiques, présentent du fait de leurs hautes résistances en compression, une plage de déformations élastiques importante [2]. Le rapport de la limite d'élasticité à la résistance à la compression est plus élevé pour un BFUP que pour un béton ordinaire. Le module d'Young est faiblement impacté par l'ajout de fibres, cependant la rupture se fait de manière ductile en comparaison avec un béton ultra-haute performance (BUHP), donc non fibré, dont la rupture est très fragile [29].

La figure 1.2 atteste ces propos en comparant le comportement d'un béton ultra performant avec et sans fibres, à plusieurs échéances. De même, Nguyen et al. [62] montrent en figure 1.3, que les fibres apportent une augmentation importante de la déformation ultime de compression, et que cet apport dépend du type de fibre utilisé.

L'ajout de fibres peut, selon les cas, augmenter ou diminuer la résistance en compression. L'augmentation est induite par un effet de couture des micro-fissures par les fibres, qui gênent ainsi la dilatance du béton, tandis que la diminution est attribuée à un effet défavorable de certaines fibres qui peuvent être assimilées à des défauts dans la matrice. L'effet observé dépendra donc de l'orientation des fibres vis-à-vis des directions de déformations principales, mais également de la forme des fibres. Le dosage, l'orientation,

ainsi que la forme des fibres, sont donc des éléments à considérer pour un calcul précis en compression.

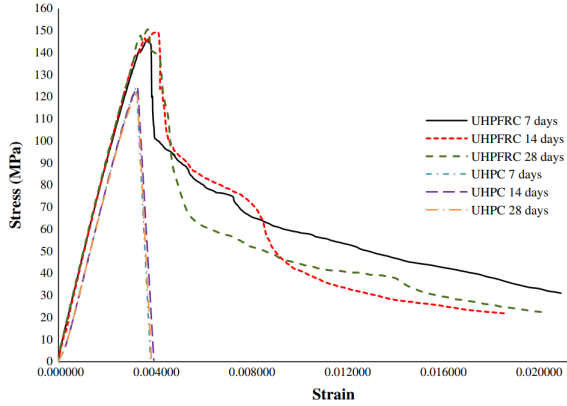


FIGURE 1.2 – Comparaison du comportement en compression d'un BUHP avec et sans fibres à différents âges [29]

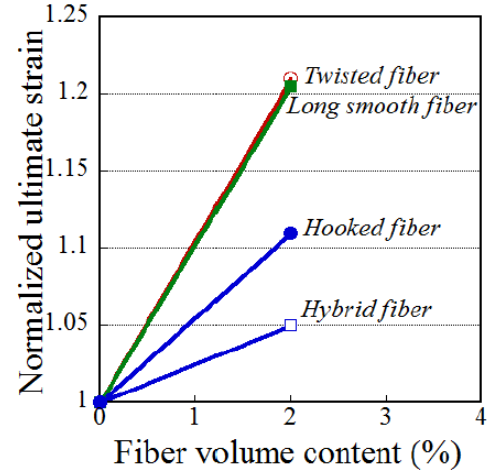


FIGURE 1.3 – Effet du dosage et du type de fibres sur la déformation ultime de compression normalisée par rapport à sa valeur pour le béton non fibré [62]

La NF P 18-470 définit des classes de résistances en compression des BFUP, testées à 28 jours sur éprouvettes cylindriques 11x22 cm ou cubiques de 10 cm de côté.

Classe de résistance à la compression	Résistance caractéristique minimale sur cylindres $f_{ck-cyl}$ (MPa)	Résistance caractéristique minimale indicative sur cube $f_{ck-cube}$ (MPa)
BFUP 130/145	130	145
BFUP 150/165	150	165
BFUP 175/190	175	190
BFUP 200/215	200	215
BFUP 225/240	225	240
BFUP 250/265	250	265

TABLE 1.3 – Classes de résistances à la compression des BFUP [60]

## 1.2.2 Comportement en traction uniaxiale

La compréhension du comportement en traction des BFUP est le point clé de la modélisation de ce matériau. La variabilité de la composition des BFUP entraîne

d'inexorables fluctuations dans leurs réponses en traction. On distingue trois grandes familles de comportement en traction (Figure 1.4), qui sont considérées par la réglementation actuelle :

- BFUP adoucissant
- BFUP faiblement écouissant : écouissant en valeurs moyennes, mais adoucissant en valeurs caractéristiques
- BFUP fortement écouissant

La composition d'un BFUP doit être telle que les principes généraux suivants soient respectés [28] :

- Les fibres doivent permettre de ralentir la propagation des fissures
- Les fibres doivent dissiper un maximum d'énergie par une action de frottement avec la matrice
- L'ancrage des fibres doit permettre de privilégier leur glissement et éviter leur rupture

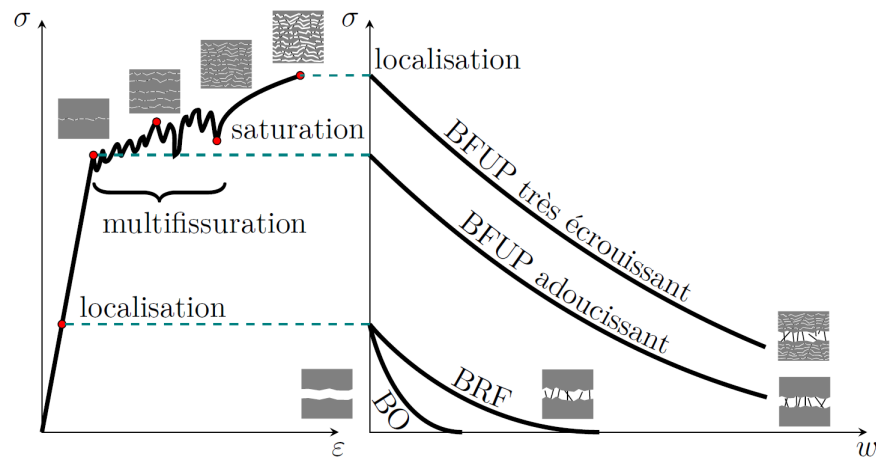


FIGURE 1.4 – Visualisation des différents comportements en traction du béton ordinaire (BO), du béton renforcé de fibres (BRF) et du BFUP [28]

L'un des critères de la norme NF P 18-470 permettant de pouvoir qualifier un béton de BFUP, concerne la capacité du matériau à être ductile. Ce critère doit être évalué

directement à partir d'une courbe de résultat  $\sigma(w)$  : contrainte de traction – ouverture de fissure (relation (1.2.1)).

$$\frac{1}{w_{0,3}} \int_0^{w_{0,3}} \frac{\sigma(w)}{1,25} dw \geq \max(0, 4f_{ctm,el}; 3 \text{ MPa}) \quad (1.2.1)$$

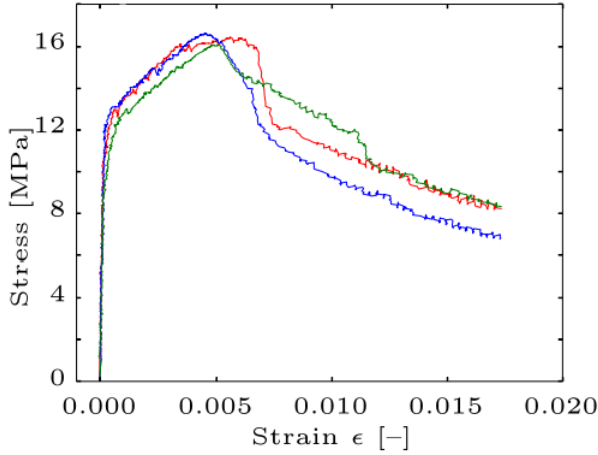


FIGURE 1.5 – Essai de traction directe sur élément en BFUP de type "dogbone" [22]

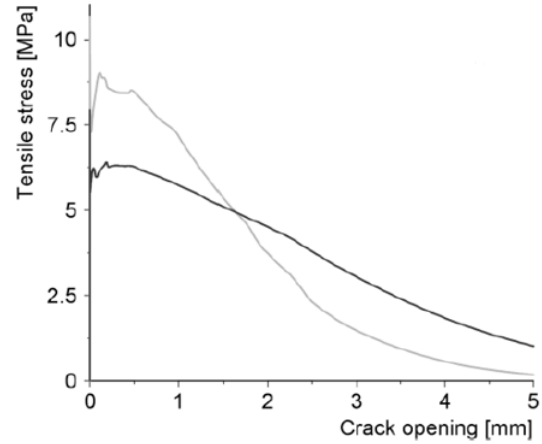


FIGURE 1.6 – Réponse en traction d'un BFUP obtenue par analyse inverse d'essais de flexion pour deux dosages en fibres [69]

Avec  $w_{0,3} = 0,3 \text{ mm}$ ,  $f_{ctm,el}$  la valeur moyenne de la limite d'élasticité en traction en MPa,  $\sigma(w)$  est, en MPa, la contrainte caractéristique post-fissuration en fonction de l'ouverture de fissure  $w$ . Le coefficient 1,25 représente une des valeurs numériques possibles du coefficient d'orientation des fibres  $K$ , décrit au chapitre 1.3.3.1. Ainsi, la norme exige une certaine ductilité du matériau en imposant une dissipation d'énergie post-fissuration suffisante.

De nombreux auteurs ont étudié le comportement en traction des BFUP, Hassan et al. [29], Sorelli et al. [23], Randl et al. [69], Denarié et al. [20], Dobrusky et al. [22] pour ne citer qu'eux. Ce comportement peut être obtenu par un essai de traction directe, ou par analyse inverse à partir d'un essai de flexion. Les matériaux testés sont divers, de même que les méthodes employées. Cependant, le résultat final concernant l'allure de la réponse en traction des bétons fibrés, dont deux exemples sont donnés en figures 1.5 et 1.6, reste similaire. Le matériau comporte en premier lieu une phase élastique linéaire,

jusqu'à atteindre la résistance à la traction de la matrice, où se crée une première fissure. Puis, il se produit une phase d'écroûissage dite de pseudo-plasticité, car elle s'apparente aux conséquences d'une déformation plastique, bien que ses origines en soient très différentes. Cette phase est obtenue par un phénomène de micro-fissuration diffuse du matériau, qui va dissiper une grande quantité d'énergie. C'est dans cette phase que des différences notables sont observées entre les BFUP, car elle caractérise la capacité du matériau à micro-fissurer ou non. Cette portion de la courbe comporte une pente variable, et sa valeur moyenne peut être plus élevée ou plus faible que la limite élastique du matériau. Ce phénomène de micro-fissuration est le comportement à privilégier dans la conception des BFUP. Le pic de la loi de comportement correspond à la localisation d'une macro-fissure, qui s'ouvre au détriment des autres micro-fissures. Il s'ensuit enfin une phase où la loi devient adoucissante, correspondant à l'ouverture d'une fissure localisée, et à l'arrachement final des fibres.

### 1.2.3 Mécanismes d'extraction des fibres

La capacité des fibres à augmenter les performances mécaniques des matrices cimentaires fragiles dépend fortement de l'interaction fibre-matrice qui comporte trois phénomènes prédominants [10] :

- L'adhésion physico-chimique.
- La friction lors du glissement de la fibre.
- L'ancrage mécanique induit par une déformation de la surface de la fibre ou par l'utilisation d'une fibre à géométrie complexe.

La compréhension de ces mécanismes est le plus souvent basée sur l'étude d'essais d'extraction de fibres uniques, desquels il ressort une courbe évaluant la force mise en œuvre, en fonction du déplacement relatif de la fibre par rapport à la matrice. A partir de cette courbe, il est également possible de tracer l'évolution de la contrainte à l'interface fibre-matrice en fonction du glissement. Cette contrainte de cisaillement moyenne est définie par la relation (1.2.2), où  $F$  est la force mobilisable par la fibre,  $\phi_f$  son diamètre,  $L$  sa longueur d'ancrage initiale, et  $s$  le déplacement relatif de la fibre par rapport à la matrice.

$$\tau = \frac{F}{\pi\phi_f(L - s)} \quad (1.2.2)$$

Deng et al. [21] ont réalisé des essais d'extraction de fibres uniques, ancrées dans diverses matrices et pour plusieurs longueurs d'encastrement. Ils en concluent une allure générale de la loi de comportement, caractérisant l'extraction des fibres droites et à crochets (Figure 1.7). L'extraction de fibres droites comporte une première phase élastique, durant laquelle la contrainte augmente le long de la fibre, entraînant une augmentation de la force. Puis la fibre commence à se décoller de la matrice à partir d'un couple force-glissement critique ( $F_{crit}$ ,  $s_{crit}$ ).

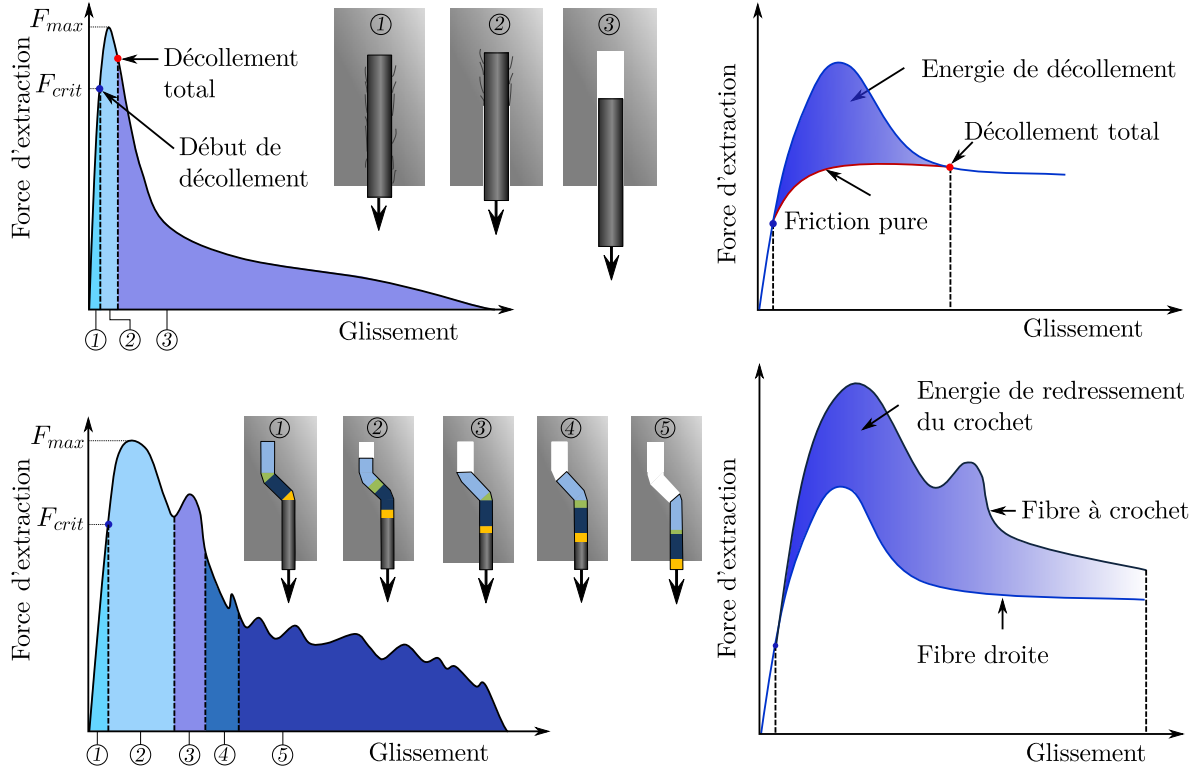


FIGURE 1.7 – Allures générales des lois de comportement donnant la force nécessaire à l'extraction de fibres droites et à crochets en fonction du glissement relatif fibre-matrice d'après [21] [11] [52]

A partir de ce point, on observe une diminution de la rigidité due à la propagation du décollement, néanmoins la force continue d'augmenter grâce à la friction de la zone décollée. Ainsi la force augmente jusqu'à sa valeur maximum, et diminue légèrement avant que la fibre ne soit totalement décollée. A cet instant, la fibre est en glissement pur, et la force diminue progressivement à mesure de l'extraction. Les fibres à crochets comportent un mécanisme d'extraction similaire, divisé en cinq phases. La première phase est identique à celle d'une fibre droite. Puis commence une phase décomposée en trois parties, durant laquelle le crochet se plastifie en étant redressé par la matrice. Le

crochet est divisé en quatre sous-zones, pour lesquelles les moments plastiques peuvent être calculés afin de déterminer l'apport du crochet sur la force d'extraction. Enfin, la fibre redressée glisse de la matrice. Il est important de noter qu'à cet instant, la fibre n'est pas exactement droite, ce qui entraîne son blocage provoquant des variations dans la force au cours du glissement.

Cette décomposition des mécanismes avait déjà été décrite par Bentur et al. [11] pour des fibres droites. Ceci permet donc de différencier trois phénomènes pour les fibres droites : l'élasticité, le décollement et l'arrachement. La force d'extraction pour une fibre à crochets est régie par les mêmes phénomènes, auxquels il faut rajouter les forces nécessaires au redressement de la fibre. Le comportement d'une fibre de forme complexe peut donc être obtenu à partir de celui d'une fibre droite. Il est également important de noter que l'ancrage mécanique causé par un crochet peut entraîner la rupture de la matrice, empêchant le redressement puis le glissement de la fibre, ce qui ne favorise pas la ductilité du matériau.

### 1.2.3.1 Impact de la composition de la matrice

La friction fibre-matrice dépend fortement des caractéristiques de la matrice utilisée. Wille et al. [86] ont réalisé des essais d'extraction de fibres uniques et droites dans diverses matrices. Ils ont montré que la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice était directement liée à la composition de la matrice (Figure 1.8). Les résultats sont obtenus pour un BHP (RPC), pour deux matrices BUHP (UHPC) A et B dont la différence réside dans la quantité de fines, et une matrice constituée uniquement de pâte (UHPP). La contrainte de cisaillement  $\tau$  évolue au cours du glissement noté  $s$ , elle se décompose de la manière suivante :

- La contrainte augmente pour un glissement faible jusqu'à atteindre la décohésion.
- La fibre décollée commence à glisser avec une contrainte constante.
- Cette contrainte augmente non linéairement au cours du glissement et chute brusquement avant que le glissement ait atteint la longueur d'ancrage.

L'allure de ces courbes est imputée à l'accumulation de particules de la matrice autour de la fibre lors de son extraction, mais également à l'abrasion de la fibre ainsi qu'à la présence de défauts d'extrémité liés au processus de fabrication de la fibre. Ces courbes permettent également de remarquer que la résistance à la compression de la matrice

n'est pas le seul indicateur à considérer pour évaluer l'intensité de la friction. En effet, les auteurs montrent que la taille médiane des particules influence peu la résistance à la compression de la matrice, tandis qu'elle influence fortement la contrainte moyenne d'extraction. Plus les particules sont fines, plus celle-ci augmente.

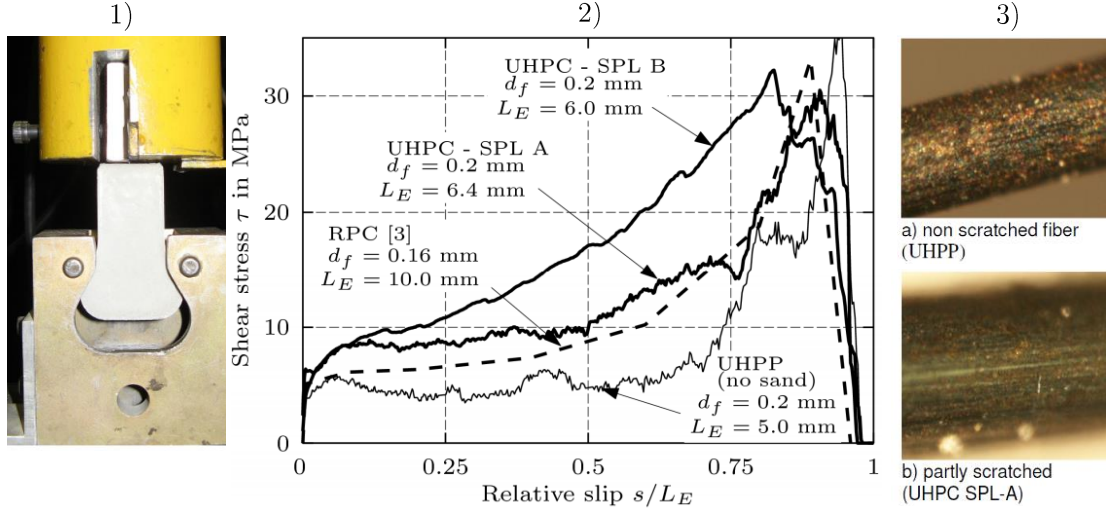


FIGURE 1.8 – 1) Dispositif expérimental utilisé pour l'extraction d'une fibre, 2) contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice pour une fibre de diamètre  $d_f$  et de longueur ancrée  $L_E$ , 3) effet de la présence de sable sur l'abrasion de la fibre [86] [84]

En analysant l'abrasion de la fibre, Wille et Naaman mettent également en avant le fait que la nature des constituants joue un rôle important dans l'extraction. La figure 1.8 montre deux photos, prises au microscope, de la surface de deux fibres après extraction, dans le cas a) d'une matrice de BFUP et dans le cas b) d'une matrice ne comportant pas de sable. Le sable a donc pour effet d'abraser la fibre, ce qui entraîne l'augmentation de la contrainte à l'interface. La contrainte maximale est obtenue pour la matrice UHPC-SPL B, et pourrait être attribuée à une meilleure répartition des particules fines obtenue grâce à un dosage élevé en superplastifiant. La figure 1.9 permet de visualiser l'ordre de grandeur des tailles de particules incorporées dans un BFUP. Ceci permet de mieux comprendre l'influence que peut avoir la composition du matériau, sur les propriétés d'adhérence des fibres et de la matrice.

La fumée de silice, dont la taille des grains est environ cent fois plus faible que celle d'un grain de ciment, est régulièrement utilisée dans le cadre de la densification des matrices cimentaires. Yin et al. [90] ont étudié l'impact de la densification de l'interface fibre-matrice, en réduisant progressivement le rapport eau sur liant, et en ajoutant de la fumée de silice. Ils utilisent trois types de fibres : synthétiques, acier et acier avec un

revêtement à base de laiton. Par des essais d'extraction, ils déterminent les performances de la liaison fibre-matrice, et ils vérifient la densification de l'ITZ par des observations au MEB. La figure 1.10 présente en a) la contrainte au pic pour deux types de fibres : acier et acier avec revêtement en laiton pour trois types de matrice ayant une densité de l'ITZ variable, et en b) l'évolution de la force en fonction du glissement fibre-matrice pour les fibres aciers et pour les trois matrices étudiées.

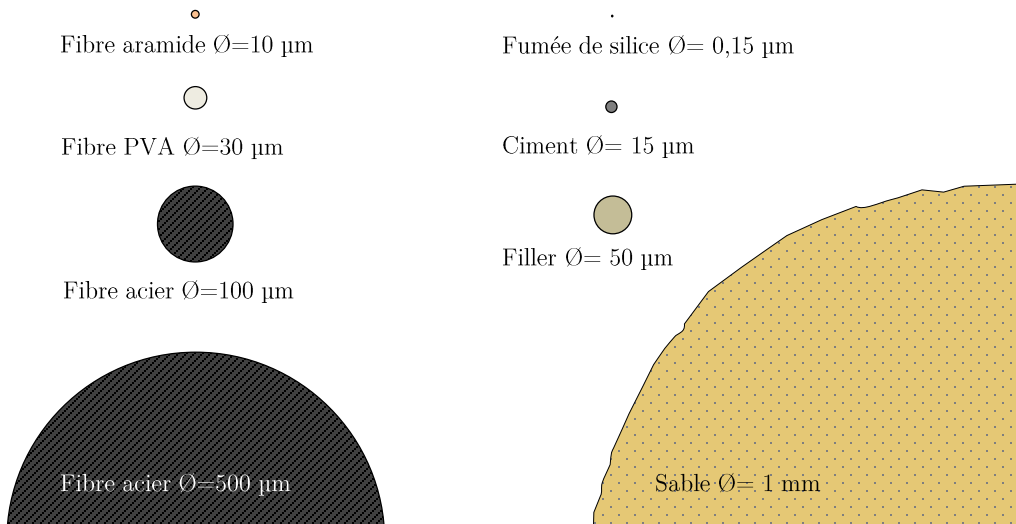


FIGURE 1.9 – Taille moyenne des particules pouvant constituer un BFUP d'après [52]

Ils en concluent que la densification de l'ITZ n'a un impact positif que sur les fibres possédant un revêtement à base de laiton. Ils mettent ainsi en évidence les deux modes de ruptures observés : la rupture de l'adhésion fibre-matrice et la décohé- sion de l'ITZ. Les fibres en acier et synthétiques développent une plus faible adhé- sion à la matrice sur laquelle la densification de la matrice n'a pas d'impact. Les fibres à revêtement en laiton, quant à elles, possèdent une forte adhérence, le mode de rupture est donc la décohé- sion de l'interface, qui voit ses performances accrues par une densification de la matrice. Cette conclusion est notamment basée sur la force maximale développée lors de l'extraction.

Un résultat intéressant concerne le fait que l'ajout de fumée de silice et la réduction de la quantité d'eau n'ont pas impacté la force maximale développée par l'extraction des fibres acier, mais ont permis d'améliorer la phase post-pic, en augmentant les frotte- ments fibre-matrice. Ceci peut s'expliquer par l'arrachement de particules de la matrice lors de la décohé- sion qui s'accumulent à l'interface sous l'effet de l'extraction de la fibre ce qui augmente le frottement.

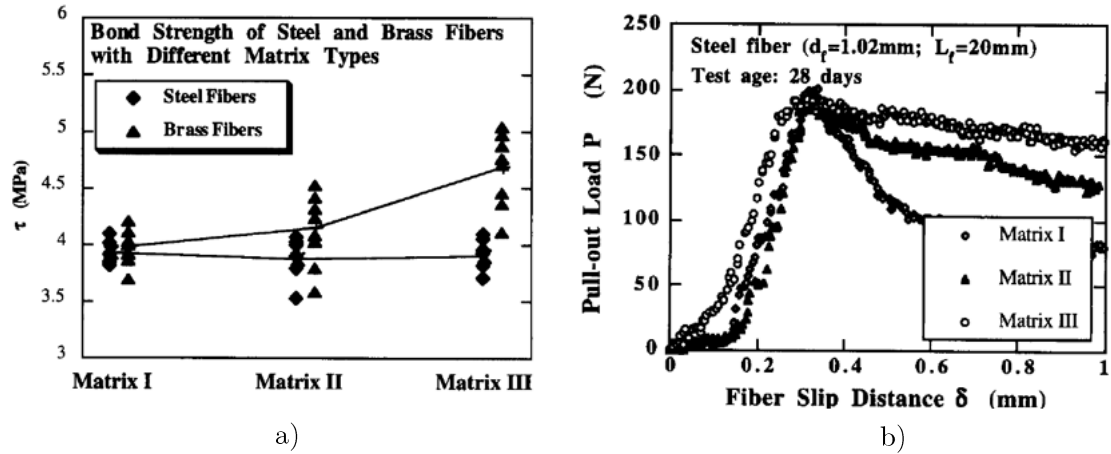


FIGURE 1.10 – a) Amélioration de la résistance fibre-matrice avec la densification de la matrice pour deux types de fibres, b) effet de la densification de la matrice sur la résistance d'extraction des fibres acier [90]

### 1.2.3.2 Impact du type de fibre

La forme des fibres conditionne les interactions avec la matrice. Il existe de nombreux types de fibres commercialisées, elles sont généralement de section circulaire, et peuvent être droites, à crochets simples ou doubles, ou ondulées. Ji et al [34] ont réalisé des essais d'extraction de cinq types de fibres de formes différentes, encastrées chacune de 6,5 mm dans un BFUP dosé à 2 % de fibres métalliques.

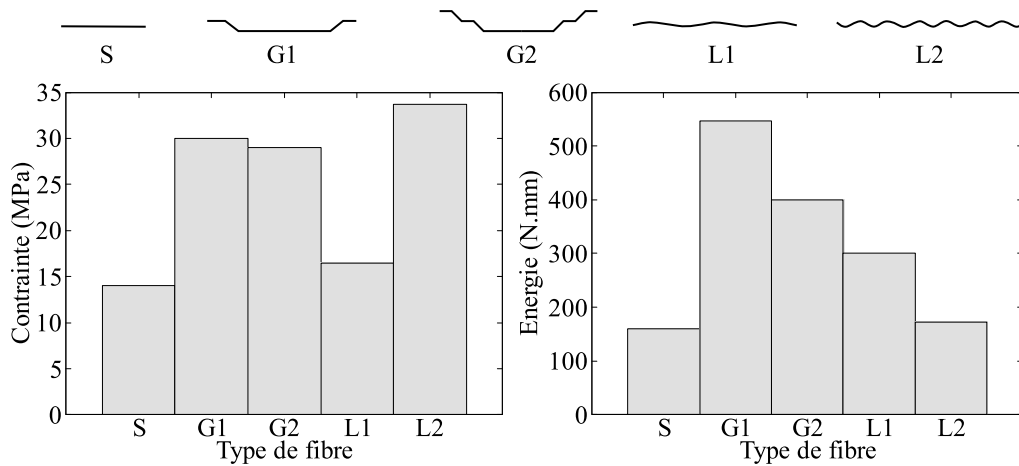


FIGURE 1.11 – Effet de la forme des fibres sur la contrainte de cisaillement fibre-matrice au pic, et sur l'énergie dissipée lors de l'extraction d'après [80]

La figure 1.11 montre que la contrainte au pic est plus importante lors de l'extraction de fibres ondulées ou crochetées, que pour des fibres droites. En effet, la forme de la

fibre agit dès le début de l'extraction, en créant un ancrage mécanique s'opposant à la force d'extraction. L'énergie dissipée est systématiquement plus importante pour les fibres courbées ou ondulées que pour une fibre droite. Cependant, une adhérence trop importante avec la matrice, caractérisée par la forme des fibres, entraîne une sollicitation de celles-ci jusqu'à leur rupture, empêchant le phénomène de glissement de la fibre. De la même manière, Tuyan et Yazici [80] montrent que, lorsque la résistance intrinsèque de la fibre n'est pas atteinte lors de l'extraction d'une fibre, la force et l'énergie de décollement sont plus importantes dans le cas d'une fibre à crochet que pour une fibre droite.

### 1.2.3.3 Impact du type de cure

Le type de cure appliqué à un béton fibré peut avoir des effets importants sur le comportement des fibres. Il existe plusieurs types de cure, qui consistent à placer les éléments en condition hydrique contrôlée pendant une certaine durée. Pour accélérer les réactions d'hydratation, il est possible d'appliquer une température allant d'une centaine de degrés, à plus de 200 °C, on parle alors de steam curing ou traitement thermique. Il est également possible de mettre le système sous pression positive, afin de favoriser la migration de l'eau dans le matériau, on parle alors d'autoclave curing. Beglarigale et Yazici [9] montrent que le type de cure le plus efficace est l'autoclave curing. En effet, la mise en pression à 2 MPa, et à une température de 210 °C durant 12h, a permis d'améliorer la charge maximale reprise par des fibres à crochets, pour différents types de matrice. Les autres types de cure n'ont pas eu d'impact significatif. Cette augmentation des performances est expliquée par une congestion des produits d'hydratation autour de la fibre favorisée par des températures et pressions élevées.

### 1.2.3.4 Effet des contraintes latérales

Les contraintes capables d'entraîner un confinement de la fibre, engendrent des conséquences sur l'extraction de celle-ci. Stang [11] a montré qu'il était possible de corréler la contrainte de friction fibre-matrice avec le retrait endogène. Ceci remet en question le fait que la contrainte de friction est une des propriétés intrinsèques du matériau. En effet, le retrait étant modifié par les conditions environnementales, la contrainte de friction pourrait en être également modifiée. Un autre point intéressant à noter est qu'il a été montré que la fumée de silice améliorerait la résistance à l'extraction des fibres notamment en phase post-pic. Cette amélioration est attribuée à une modification de la micro-structure de

l'interface. Par conséquent, cette amélioration pourrait être attribué à l'un ou aux deux phénomènes.

### 1.2.3.5 Effet de groupe des fibres

Les essais d'extraction sont généralement réalisés pour une seule fibre. Cependant, des fibres arrachées simultanément pourraient avoir une influence les unes sur les autres. Naaman et Shah [58] ont étudié l'impact de l'espacement des fibres sur la résistance d'extraction individuelle. Ils ont réalisé des essais d'extraction pour des groupes de fibres, allant de 1 à 36, espacées de 4 mm à 10 mm ancrées de manière répartie dans une même surface de béton, avec un axe longitudinal de fibres orienté soit parallèlement à celui de l'effort de traction, soit incliné de  $60^\circ$ . Pour les deux inclinaisons, une diminution de la force au pic de la loi d'extraction d'une fibre se produit avec l'augmentation de la densité des fibres. Ils obtiennent seulement 86 % de la résistance d'une seule fibre pour les 36 fibres droites et 63 % pour les fibres inclinées. L'écart plus important pour les fibres inclinées, est attribué au fait qu'un volume de matrice plus important est sollicité. D'une manière générale, le fait de charger un volume plus important d'un matériau entraîne une diminution de ses performances mécaniques, ce qui n'est généralement pas pris en compte dans les modèles de béton fibrés.

### 1.2.3.6 Évolution temporelle de l'adhérence fibre-matrice

La durabilité des BFUP est un de leurs points forts mis en avant. De par leur squelette granulaire plus compact, ils permettent de retarder la pénétration des agents agressifs. Néanmoins, un autre aspect lié à la durabilité peut être souligné. Katz [36] a montré que le fait d'améliorer les performances de l'interface fibre-matrice, pouvait mener à long terme, à une modification du mode de rupture du matériau. En effet, la résistance de l'interface devenant trop importante, conduit à une rupture des fibres qui étaient initialement capables de glisser. Ce type de comportement a notamment été observé pour des micro-fibres synthétiques et en carbone.

De même, Mobasher et Sheng [54], en décrivant des essais d'extraction à partir d'un modèle basé sur la mécanique de la rupture, ont pu séparer les modes de rupture de l'interface fibre-matrice, qui sont la rupture de l'adhésion et de la cohésion. Ils ont alors remarqué que les paramètres relatifs à ces deux modes de rupture évoluaient différemment dans le temps. Ceci met donc en avant un point essentiel, très peu étudié,

qui concerne les effets du vieillissement des matrices cimentaires sur leur comportement couplé à celui des fibres. La caractérisation à un instant donné d'un couple fibre-matrice pourrait devenir invalide avec le temps, conduisant à des problèmes de sécurité des ouvrages.

## 1.2.4 Orientation des fibres dans le volume

L'orientation des fibres au sein de la matrice impacte de manière significative le comportement mécanique des BFUP. La difficulté de faire une cartographie tridimensionnelle de l'orientation et de la distribution des fibres dans un échantillon conduit la plupart des modèles à utiliser une orientation aléatoire des fibres dans le volume. Néanmoins, plusieurs auteurs montrent que le mode de coulage et la forme du coffrage influencent l'orientation des fibres [38] [19], il est alors possible de définir une orientation moyenne des fibres dans une direction particulière. Plusieurs méthodes permettent de déterminer l'orientation des fibres dans le volume, et la connaissance de ce paramètre est un des enjeux majeurs dans le développement d'un modèle pour ce type de matériau.

### 1.2.4.1 Effet de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique

Dans la littérature, on retrouve d'une manière générale un paramètre d'orientation des fibres noté  $\alpha$ , qui représente un ratio de fibres orientées selon la direction de traction. Il a été défini par Krenchel en 1975 [41] qui l'écrit comme suit :

$$\alpha = \frac{n_f A_f}{\rho_f A_c} \quad (1.2.3)$$

Où  $n_f$  est le nombre de fibres par unité de surface de la section droite considérée,  $A_f$  est la section droite d'une fibre,  $\rho_f$  est la densité volumique de fibres dans la matrice, et  $A_c$  la section de béton étudiée. Le coefficient  $\alpha$  prend les valeurs particulières : 0 lorsque toutes les fibres sont dans le plan de section droite considéré, 1 lorsque toutes les fibres sont perpendiculaires au plan considéré et 0,5 si l'orientation des fibres est isotrope. Il est intéressant de noter que ce facteur dit d'orientation, ne donne en réalité qu'un ordre d'idée de l'orientation des fibres, en supposant que pour une section donnée, si une fibre est orientée plutôt parallèlement au plan de section droite, elle a peu de chance d'intercepter celui-ci.

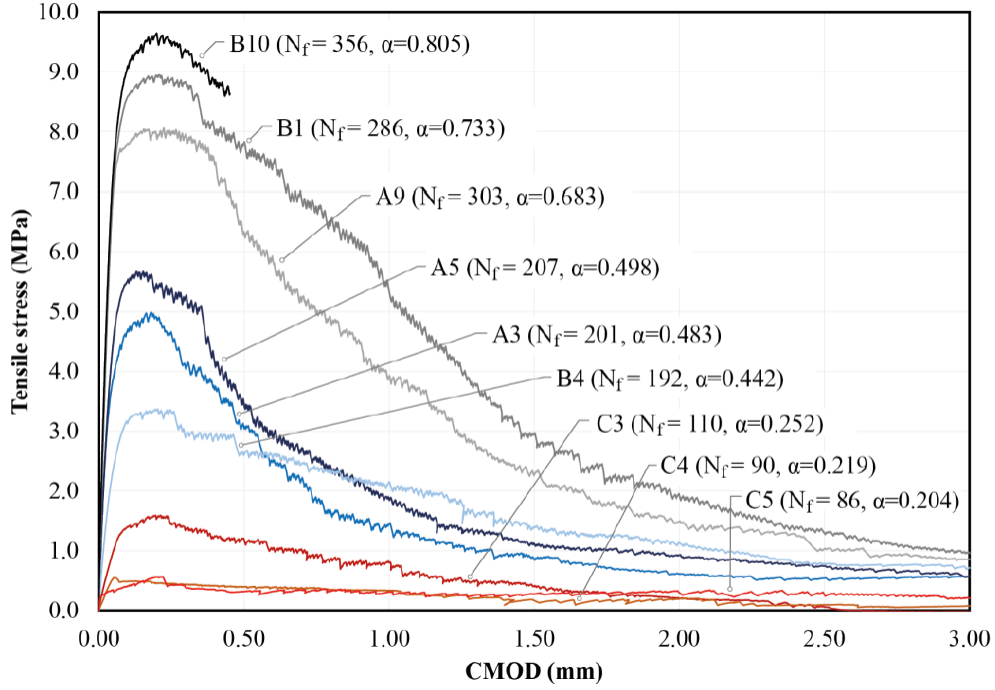


FIGURE 1.12 – Résultats d’essais de traction directe sur éprouvettes entaillées pour plusieurs valeurs du coefficient d’orientation  $\alpha$  (1.2.3), avec  $N_f$  le nombre de fibres interceptées par la fissure [19]

D’autres coefficients peuvent être définis afin de rendre compte de l’efficacité des fibres vis-à-vis de leur orientation. Le coefficient  $\alpha_1$  [57] en est un exemple. Il se définit par la relation (1.2.4), où  $g(\varphi)$  exprime le ratio entre la force obtenue pour une fibre extraite à un angle  $\varphi$  et la force pour un angle nul,  $\varphi$  étant l’angle entre l’axe longitudinal de la partie ancrée de la fibre et la direction de traction. La fonction  $f(\varphi)$  représente la densité de probabilité d’orientation d’une fibre par rapport à la direction de traction.

$$\alpha_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} g(\varphi) f(\varphi) d\varphi \quad (1.2.4)$$

Wilson et al. [19] ont étudié la relation entre le coefficient  $\alpha$ , mesuré par analyse d’image, et la réponse en traction directe d’éprouvettes entaillées en BFUP. Il existe une forte corrélation entre la résistance maximale à la traction du BFUP et le coefficient d’orientation (Figure 1.12). Plus les fibres sont orientées dans la direction de traction, plus la résistance du composite est accrue. Delsol et Charron [15] observent également le même type de corrélation entre orientation et résistance. Abrishambaf et al. [1] montrent également que l’orientation des fibres est un point clé dans le développement d’une

phase d'écrouissage positif générée par une micro-fissuration du matériau (Figure 1.13). A contrario, la présence de fibres orientées perpendiculairement à la direction de traction crée un défaut assimilable à un maillon faible dans le matériau, provoquant sa rupture prématurée.

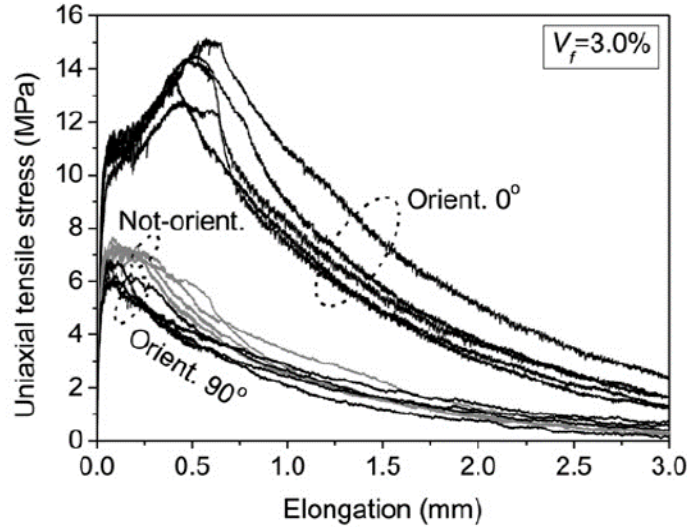


FIGURE 1.13 – Réponse en traction d'un BFUP avec un dosage volumique de 3 % de fibres, pour des fibres parallèles à la direction de traction ( $0^\circ$ ), non orientées, et orientées perpendiculairement à la traction ( $90^\circ$ ) [1]

Lee et al. [44], ont étudié l'impact de l'inclinaison des fibres sur leur force d'extraction. Pour cela, les auteurs réalisent des essais de traction directe sur éprouvettes de type "dogbone" dans lesquelles ils ont placé 32 fibres droites en acier. L'éprouvette est séparée en deux parties égales par une feuille en polyéthylène pour créer une fissure artificielle (Figure 1.14). Ce type d'essai laisse donc libre place au glissement de la fibre des deux côtés, les longueurs d'encastrement étant identiques de part et d'autre de la fissure. Les résultats montrent que la force au pic croît avec l'inclinaison de la fibre jusqu'à un angle de  $60^\circ$ , au delà duquel la force maximale commence à décroître. Ce phénomène couramment observé est imputé à deux causes. Il s'agit en premier lieu d'un effet poulie : la fibre frotte contre un bloc rugueux de matrice lors de son extraction, ce qui crée un supplément de force. Dans le cas des fibres métalliques, l'angle entre la zone extraite et la zone encastrée de la fibre provoque la plastification de cette dernière lors de son extraction, ce qui conduit également à un supplément de force. La perte de rigidité observée est attribuée à un phénomène de rupture localisée du béton au niveau du point d'extraction. En effet, l'inclinaison des fibres conduit à une poussée au vide générant un écaillage de la matrice qui induit un déplacement supplémentaire dans la fissure et une

diminution de l'ancrage des fibres. A partir de  $60^\circ$ , la force devient trop importante, et c'est l'écaillage qui conduit à l'arrachement prématuré des fibres. La diminution de la rigidité lorsque l'inclinaison augmente montre alors que cet écaillage de la matrice devient de plus en plus important lorsque l'inclinaison augmente.

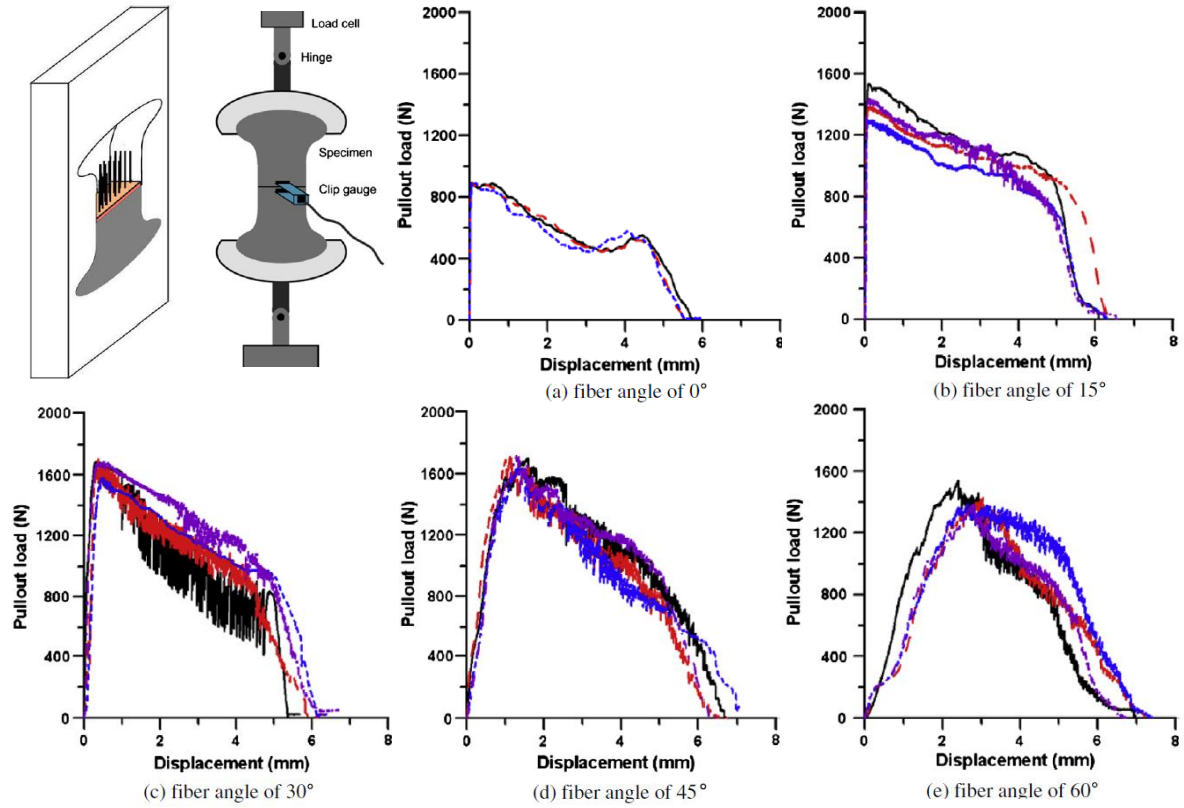


FIGURE 1.14 – Effet de l'inclinaison d'un groupe de fibres par rapport à la direction de traction [44]

Ainsi, lorsque l'inclinaison globale des fibres s'éloigne de la normale au plan de fissuration, la performance globale du BFUP en traction diminue. Pourtant, l'arrachement de fibres inclinées par rapport à la direction de l'effort génère une force plus importante que pour des fibres alignées. Ceci permet de révéler un point essentiel : le comportement global d'un élément dépend davantage du nombre de fibres qui interceptent la fissure que de l'apport généré par une extraction des fibres dans une direction différente de celle de leur ancrage. Ceci s'explique par le fait que la fissure aura plus de probabilité d'éviter une fibre mal orientée, ce qui se manifeste par une perte de résistance globale plutôt qu'un gain.

#### 1.2.4.2 Impact des méthodes de mise en œuvre sur l'orientation des fibres

Au delà de l'utilisation de distributions purement aléatoires, il est possible d'établir une corrélation directe entre les paramètres de coulage et l'orientation préférentielle des fibres dans certains éléments. Il est donc nécessaire de clarifier de quelle manière l'orientation des fibres s'effectue et quels sont les paramètres à prendre en compte afin de la déterminer. De plus, la connaissance de ces mécanismes d'orientation des fibres permettrait d'étudier différents protocoles de coulage pour une structure, et ainsi d'adapter la mise en œuvre aux sollicitations des éléments. Kim et al. [38] ont montré que, lors du coulage de prismes rectangulaires, le fait de laisser s'écouler le béton depuis un point fixe avait tendance à orienter les fibres dans le sens de l'écoulement, tandis que le déplacement du point de coulage le long de l'axe longitudinal des prismes, entraînait une orientation perpendiculaire au déplacement.

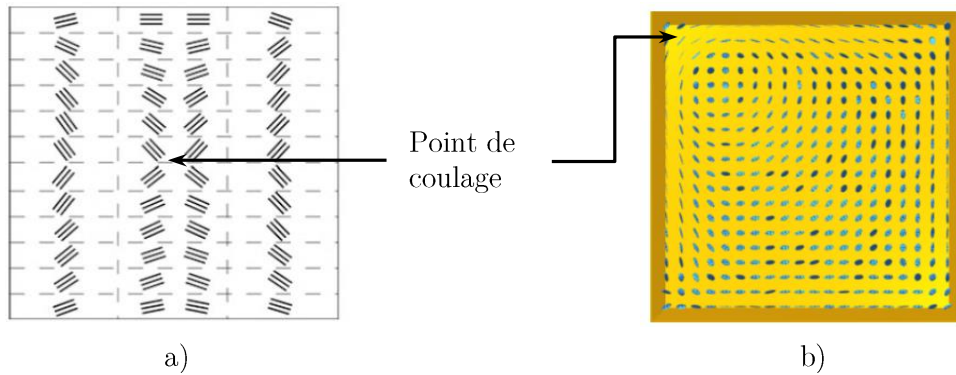


FIGURE 1.15 – Impact de la position du point fixe de coulage sur l'orientation des fibres dans une plaque a) [38] b) [19]

Ces mêmes chercheurs ont étudié le comportement des fibres lors du coulage d'une plaque de grandes dimensions depuis son centre (Figure 1.15). Ils ont constaté que les fibres s'orientent dans le sens de l'écoulement dans les diagonales de la plaque, et perpendiculairement à celui-ci sur les médiatrices des côtés, avec un effet de paroi plus ou moins marqué sur les bords. L'effet de paroi est généralement observé à une distance dont l'ordre de grandeur est comparable à la longueur des fibres : la paroi perturbe le positionnement de la fibre qui va s'orienter parallèlement à celle-ci. Wilson et al. [19] ont également étudié l'orientation des fibres lors du coulage d'une plaque de dimensions similaires (Figure 1.15). Ils observent des résultats comparables avec une orientation préférentielle des fibres perpendiculairement à l'écoulement dans une grande partie de la plaque, avec un effet de bord également significatif.

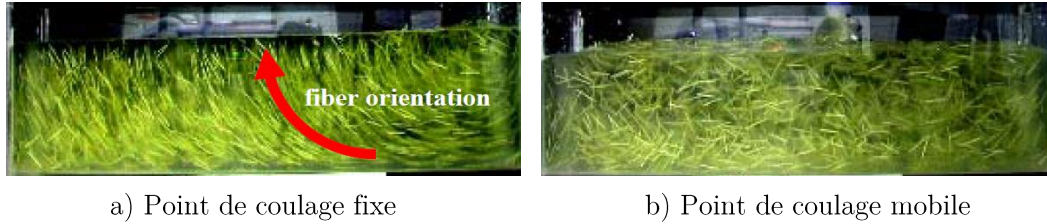


FIGURE 1.16 – Visualisation de l’orientation des fibres pour deux méthodes de coulage [94]

Bo Zhou et Yuichi Uchida [94] ont étudié l’orientation de fibres dans un prisme, en remplaçant la matrice cimentaire par un polymère translucide de rhéologie comparable à celle d’une matrice de BFUP. Ils ont ainsi pu visualiser l’orientation de fibres PVA (polyvinyl alcohol) et métalliques selon plusieurs paramètres, tels que différents dosages en fibres et différents procédés de coulage. Les auteurs montrent que l’orientation moyenne est identique, pour des pourcentages volumiques de fibres entre 1 % et 3 %. De même, l’orientation est identique pour des fibres en acier et en PVA. La Figure 1.16 a), représentant un coulage depuis un point fixe situé sur l’extrémité droite de l’échantillon, fait apparaître que les fibres ont bénéficié en partie basse d’un effet de paroi les orientant dans un plan horizontal. L’orientation préférentielle dans le reste de l’échantillon est parabolique, et se rapproche de l’orientation qu’aurait le vecteur vitesse de l’écoulement à l’instant final du remplissage. Les auteurs ont confirmé ce comportement par la réalisation de prismes identiques en BFUP, puis par analyse d’images de découpes des prismes. Le déplacement du point de coulage n’entraîne pas, quant à lui, d’orientation préférentielle des fibres suivant les zones de l’échantillon. Ce mode de coulage induit une orientation qualifiable d’isotrope ou purement aléatoire (Figure 1.16 b)).

Soroushian et Lee [78], et Kooiman [39] montrent que des effets de paroi se font ressentir sur l’orientation des fibres, lorsque les éléments en BFUP mesurent moins de cinq fois la longueur des fibres, l’orientation des fibres devenant plutôt aléatoire au-delà de cette dimension. La NF P 18-710 différencie, quant à elle, deux catégories d’éléments liés aux effets de paroi. Un élément est dit mince s’il possède une épaisseur inférieure à trois fois la longueur des fibres, dans le cas contraire on parle d’élément épais. Des lois de comportement différentes doivent alors être utilisées pour ces deux types d’éléments.

### 1.2.4.3 Méthode non destructive de détermination de l'orientation et de la densité des fibres

Nunes [63] décrit une méthode électromagnétique permettant de déterminer l'orientation ainsi que la densité volumique des fibres, après coulage, dans un élément en béton fibré. Cette méthode se base sur la mesure de la perméabilité magnétique à la surface du BFUP dans plusieurs directions. La densité de fibres, présente dans une zone donnée, serait ainsi proportionnelle à la moyenne des perméabilités magnétiques  $\mu_{r,mean}$  mesurées dans deux directions orthogonales  $X$  et  $Y$  (1.2.5). De plus, il est possible de déterminer un indicateur d'orientation des fibres noté  $\rho_X - \rho_Y$ . Plus sa valeur est grande, plus les fibres sont orientées selon  $X$  et inversement. Il est calculé selon la relation (1.2.6).

$$\mu_{r,mean} = \frac{\mu_{r,X} + \mu_{r,Y}}{2} \quad (1.2.5)$$

$$\rho_X - \rho_Y = 0,5 \frac{\mu_{r,X} - \mu_{r,Y}}{\mu_{r,mean} - 1} \quad (1.2.6)$$

Ainsi, cette méthode permet a priori de fournir deux des données les plus essentielles à la modélisation des BFUP. Néanmoins, sa limite réside dans la profondeur de matériau investigué qui n'excède pas les 5 cm.

L'orientation des fibres dans le volume régit donc une grande partie du comportement mécanique des BFUP en traction. La connaissance de cette information est donc essentielle à la prédiction de ce comportement. Néanmoins, cette connaissance est extrêmement difficile à obtenir.

### 1.2.5 Multi-fissuration des BFUP en traction

La présence de fibres réparties dans le volume de béton, confère à certains BFUP la capacité de diffuser les contraintes de traction, ce qui engendre la création de microfissures dans le volume chargé. Peu d'études permettent de caractériser ce phénomène, qui est pourtant un point clé du comportement des BFUP. Shen et Brühwiller [76], en étudiant le comportement en traction de "dogbones" découpés dans des dalles en BFUP ayant une densité volumique de fibres de 3,8 %, ont visualisé la formation des microfissures grâce à un système d'analyse d'images. Ils déterminent également par une méthode électromagnétique [63] un terme permettant de caractériser la densité et

l'orientation des fibres. Ils concluent que l'orientation et la distribution des fibres sont les principaux paramètres qui régissent la multi-fissuration. Se basant sur l'étude de Nunes, ils relient la résistance relative du BFUP au produit des termes présentés en 1.2.4.3, à savoir  $\mu_{r,mean} \cdot (\rho_Y - \rho_X)$ .

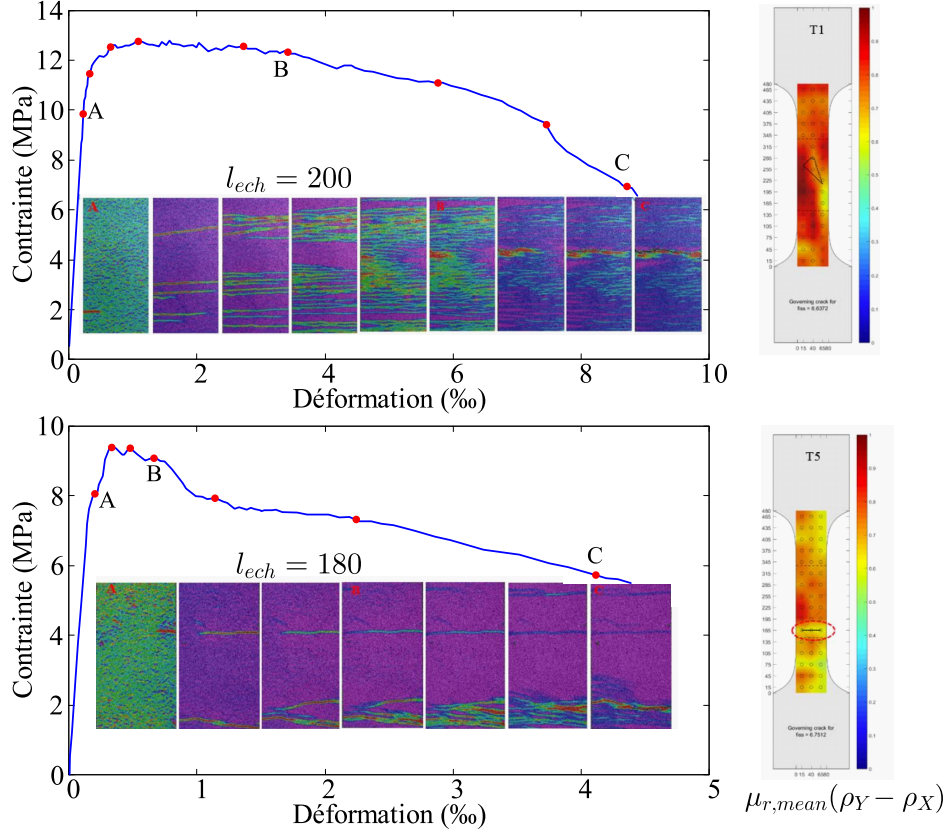


FIGURE 1.17 – Visualisation de la multi-fissuration en traction directe pour deux éléments de longueur  $l_{ech}$  comportant la même orientation préférentielle de fibres pour un dosage en fibres de 3,8 % [76]

La figure 1.17 présente la courbe contrainte-déformation, le faciès de fissuration, ainsi que la résistance relative estimée de deux éléments en BFUP, découpés dans une même plaque, et possédant des orientations préférentielles de fibres identiques. Le point A correspond à l'apparition de la première micro-fissure, tandis que le point B désigne la localisation d'un macro-fissure. La différence de comportement observée est attribuée à une faible densité de fibres sur toute la section de l'élément T5, qui entraîne une fissuration localisée précoce. L'élément T1, qui ne possède pas de défaut traversant la section, développe une multi-fissuration importante qui engendre une forte dissipation d'énergie. L'apparition de micro-fissures se fait de manière progressive. Leur espacement dans le cas de l'élément T1 est de l'ordre de 5 mm, ce qui est inférieur à la moitié de la

longueur des fibres. Lorsqu'une macro-fissure s'ouvre, plus aucune nouvelle micro-fissure ne se forme. Les auteurs précisent que, pour une ouverture de fissure égale à la moitié de la longueur des fibres, plus aucune contrainte n'est reprise par le matériau. Ainsi, la prédiction de la densité des fibres dans le volume n'est pas triviale, et la présence d'un défaut localisé a de forts impacts sur le comportement post-fissuration du matériau et sur la valeur de la force initiant la première micro-fissure. Cette étude montre donc l'importance de l'homogénéité de la répartition et de l'orientation des fibres, dans le développement de la micro-fissuration.

Choi et al. [17], ont étudié l'impact du dosage et du type de fibres, sur la fissuration en traction directe sur des BUHP fibrés. Ils utilisent pour cela deux types de fibres : métalliques et polyéthylène. Les caractéristiques des fibres sont données en tableau 1.4.

Type de fibre	Diamètre ( $\mu\text{m}$ )	Longueur (mm)	Module d'élasticité (GPa)
Acier	200	19,5	200
Polyéthylène	32	12	110

TABLE 1.4 – Fibres utilisées dans l'étude de Choi [17]

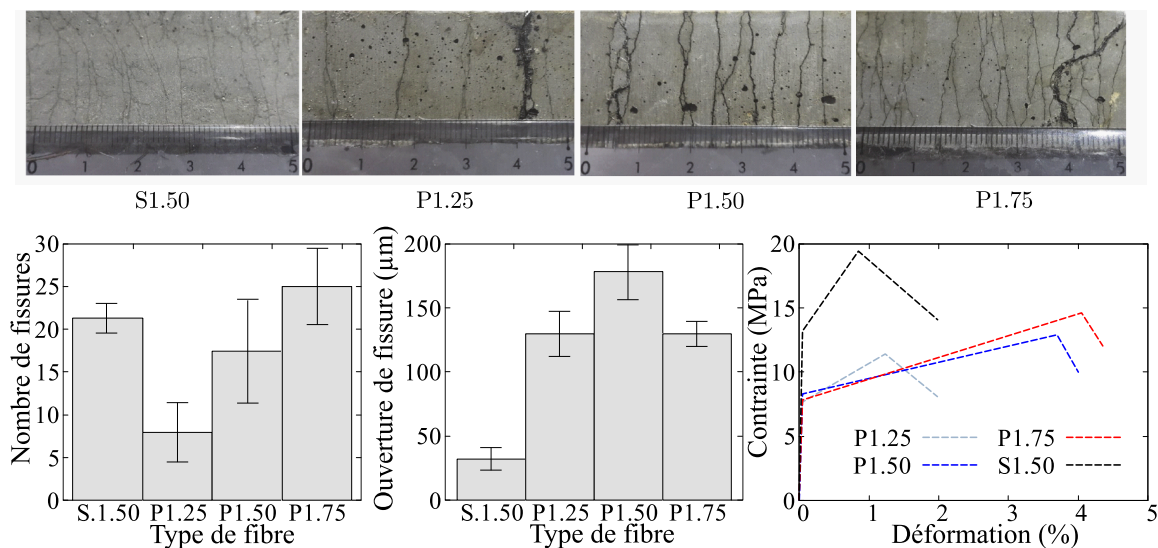


FIGURE 1.18 – Visualisation de la multi-fissuration en traction directe pour quatre éléments utilisant plusieurs types de fibres, répartition du nombre et des ouvertures de fissures, comparaison des différentes allures des réponses en traction, d'après [17]

Les essais sont effectués pour quatre cas : le premier noté S1.50 utilise des fibres acier dosées à 1,5 % du volume, les trois autres utilisent des fibres polyéthylène dosées à 1,25 %, 1,50 % et 1,75 %, ils sont respectivement nommés P1.25, P1.50 et P1.75. La

méthode de coulage utilisée est celle préconisée par la "Japan Society of Civil Engineers" [33]. La figure 1.18 présente plusieurs résultats importants de cette étude. En première analyse, il est possible de tirer les conclusions suivantes : pour un même type de fibre, le nombre de micro-fissures est proportionnel au dosage en fibres. En effet, plus le nombre de fibres est important, plus les contraintes reprises par les fibres sont élevées, permettant de générer un plus grand nombre de fissures. Deuxièmement, pour un même dosage en fibres, le nombre de micro-fissures développées est supérieur pour les fibres en acier. Ceci est également lié à la capacité des fibres métalliques à reprendre une contrainte plus élevée que les fibres synthétiques, grâce à de meilleures propriétés de l'interface fibre-matrice. Les auteurs confirment cette hypothèse en expliquant que la contrainte d'adhérence des fibres polyéthylène est plus faible que celle des fibres acier. Il faut également tenir compte ici du fait que les fibres sont de longueurs différentes, les fibres plus longues permettent de générer des forces d'extraction plus grandes, ce qui permet de générer plus de fissures avant la phase adoucissante du composite.

Concernant l'ordre de grandeur des ouvertures de fissures, il diffère selon le matériau utilisé. Les fibres polyéthylène moins rigides, entraînent des ouvertures de fissures plus grandes. Un autre fait à considérer est le glissement des fibres, qui peut également être responsable de la différence entre les ouvertures de fissures pour les deux matériaux. Pour une force donnée, outre la rigidité des fibres, le glissement dépend également du nombre de fibres interceptées par la fissure, de leur longueur ancrée ainsi que de la contrainte d'adhérence fibre-matrice. Ces paramètres ne peuvent cependant pas être rigoureusement comparés ici, étant donné les différences de géométries des fibres. Cet aspect est également observé sur la courbe contrainte-déformation. Pour un nombre de fissures équivalent, la déformation ultime est plus importante pour les fibres en polyéthylène que pour les fibres acier. Par la suite, en observant les différentes réponses en contrainte, on remarque que la contrainte de première micro-fissure semble dépendre du type de fibres mais pas de leur dosage. De même, la pente de la zone d'écrouissage positif semble directement impactée par le type de fibre, tandis que le dosage en fibres n'a que peu d'effet. Enfin, la dispersion des résultats est nettement plus faible dans le cas des fibres en acier.

Pour conclure sur le phénomène de multi-fissuration, le nombre de micro-fissures semble être proportionnel à la fraction volumique de fibres et à la contrainte d'adhérence fibre-matrice maximale. La multi-fissuration se développe de manière progressive jusqu'à la localisation de la fissuration. Ces informations seront essentielles au développement d'une loi régissant la multi-fissuration des BFUP.

## 1.3 Modélisation du comportement mécanique des BFUP

Cette section donne des éléments de modélisation du comportement mécanique des BFUP. Elle s'appuie notamment sur les travaux de deux thèses qui regroupent à elles seules la synthèse de plusieurs dizaines d'années de recherches dans le domaine de la modélisation des bétons fibrés. L'étude de ces travaux permet ainsi de décrire le processus de modélisation du comportement mécanique des BFUP.

### 1.3.1 Modélisation de l'extraction de fibres droites

La modélisation du comportement mécanique des BFUP passe tout d'abord par un modèle décrivant les mécanismes locaux régissant l'extraction d'une fibre droite ancrée dans une matrice. L'écriture du modèle consiste alors à exprimer la force obtenue pour un glissement relatif fibre-matrice  $s$  donné. Par définition, le glissement relatif s'exprime comme la différence entre le déplacement de la fibre  $u_f$  et de la matrice  $u_m$ .

$$s = u_f - u_m \tag{1.3.1}$$

Il est généralement admis que la réponse en force d'une fibre ancrée dans une matrice évolue selon trois phases distinctes [92] :

- La fibre est entièrement collée à la matrice.
- La fibre est partiellement décollée.
- La fibre est entièrement décollée et s'arrache de la matrice.

Ces trois configurations constituent l'ensemble des états possibles de l'interaction fibre-matrice. La première phase consiste en un cisaillement élastique de l'interface fibre-matrice générant un glissement réversible. La seconde correspond au décollement progressif de la fibre, la partie décollée de la fibre générant alors des contraintes de frottement à l'interface des deux matériaux. Une fois la fibre entièrement décollée, celle-ci commence à s'arracher en dehors de la matrice.

### 1.3.1.1 Contrainte de pré-fissuration des fibres

Wuest [88] a développé un modèle de comportement en traction uniaxial pour des BFUP écrouissant composés de fibres métalliques droites et cylindriques. Dans un premier temps il considère une contrainte de pré-fissuration dans les fibres. A l'instant où la matrice se fissure, les fibres ne sont pas encore décollées de la matrice et reprennent donc une contrainte de pré-fissuration. Wuest se base sur les résultats de Li [47], qui propose de décrire le comportement des fibres avant la fissuration comme élastique, et dépendant du type de fibres, ainsi que de leur orientation par rapport à la direction de traction. La contrainte de pré-fissuration des fibres est alors donnée par (1.3.2) :

$$\sigma_{f,pf,0} = \eta_\theta \eta_l \varepsilon_m E_f \rho_f \quad (1.3.2)$$

Avec  $\eta_\theta$  le facteur d'efficacité relatif à l'orientation des fibres,  $\eta_l$  le facteur d'efficacité dépendant de la longueur des fibres,  $\varepsilon_m$  la déformation de la matrice et  $\rho_f$  la fraction volumique de fibres. Cette contrainte de pré-fissuration augmente donc jusqu'à atteindre sa valeur maximale  $\sigma_{f,pf,1}$  lorsque la déformation de la matrice atteint sa valeur limite générant la fissuration. Cette écriture est analogue à celle développée par Wang et al. [81]. Le facteur d'efficacité  $\eta_\theta$  permet d'exprimer le fait que seule une partie des fibres sera orientée de manière à agir efficacement sur la fissuration. Cox [18] et Krenchel [40] ont proposé des valeurs entre 1/6 et 1/5 pour ce coefficient dans le cas d'orientations aléatoires. Le facteur d'efficacité  $\eta_l$  permet, quant à lui, de prendre en compte le fait qu'il sera d'autant plus difficile de décoller une fibre qu'elle sera longue. Après la fissuration, lorsque les fibres se décollent de la matrice, la contrainte de pré-fissuration tend à diminuer jusqu'à zéro lorsque toutes les fibres sont décollées. La contrainte de pré-fissuration des fibres s'exprime donc selon (1.3.3) :

$$\sigma_{f,pf}(w) = \sigma_{f,pf,1} \frac{(w_0 - w)}{w_0} \quad (1.3.3)$$

Où  $w_0$  représente l'ouverture de fissure pour laquelle la totalité des fibres se sont décollées de la matrice, donnée par la relation (1.3.19). Wuest considère donc ici que les fibres ne se décollent pas de la matrice avant la fissuration. La contrainte est alors une contrainte élastique, pondérée de coefficients reflétant le fait que l'orientation et l'ancrage des fibres par rapport à la direction de traction auront un impact sur le comportement pré-fissuration du matériau. Ceci revient donc à écrire une loi de mélange

de type béton armé, adaptée au cas des fibres.

### 1.3.1.2 Phase de décollement

En 2016, Guenet a réalisé des travaux de thèse avec pour objectif de construire un modèle numérique de comportement mécanique des BFUP dans lequel [28] dans laquelle il s'inspire largement des travaux de Li, Wang, et Backers [50] [81], Bao et Song [7] et Lin et Li [51]. Il débute par l'écriture de la force obtenue lors de l'extraction d'une seule fibre droite ancrée dans une matrice, en fonction de leur glissement relatif.

Guenet considère dans son modèle uniquement deux phases : la première est un décollement progressif de la fibre, puis la seconde est une phase de décollement et d'arrachement. Il néglige la phase d'élasticité en expliquant que le glissement relatif fibre-matrice est quasiment nul en zone non décollée. La Figure 1.19 décrit ces deux mécanismes, où  $\phi_f$  est le diamètre de la fibre,  $\lambda$  la distance sur laquelle la fibre n'adhère plus à la matrice,  $L$  la longueur initialement encastrée de la fibre par rapport à la fissure,  $\tau$  la contrainte d'interface entre la fibre et la matrice,  $F_d$  la force de décollement,  $F_e$  la force d'arrachement,  $x$  un repère dont l'origine coïncide avec le front de décollement, puis reste fixe dans la phase d'extraction, et  $w_0$  l'ouverture de fissure quand la fibre a achevé sa phase de décollement avec la matrice et commence à s'arracher.

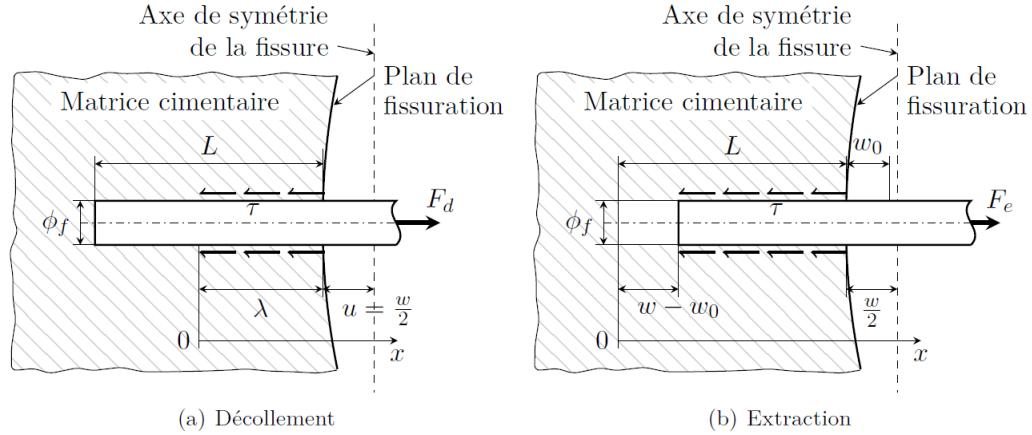


FIGURE 1.19 – Schéma de l'extraction d'une fibre [28]

Durant la phase de décollement, en écrivant l'égalité des déformations à l'abscisse  $x = 0$  et en considérant l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire pour la fibre et la matrice, il est possible d'écrire la relation (1.3.4).

$$\text{Au point } x = 0 \quad \varepsilon_f = \varepsilon_m \iff \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (1.3.4)$$

Avec  $\varepsilon_f$  et  $\varepsilon_m$  les déformations de la fibre et de la matrice,  $E_f$  et  $E_m$  leurs modules d'Young respectifs, et  $\sigma_f$  et  $\sigma_m$  leurs contraintes respectives. En effectuant le bilan des forces dans le système, l'auteur détermine les expressions des contraintes dans la fibre et la matrice (1.3.5).

$$\sigma_m = \frac{\pi\phi_f\lambda\bar{\tau}}{A_m} \quad \text{et} \quad \sigma_f = \frac{F_d - \pi\phi_f\lambda\bar{\tau}}{A_f} \quad (1.3.5)$$

Dans cette expression,  $\bar{\tau}$  exprime la contrainte moyenne à l'interface entre la fibre et la matrice (1.3.6),  $A_m$  représente une surface de matrice qui n'est impactée que par une seule fibre, et  $A_f$  est la section d'une fibre.

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \tau(z) dz \quad (1.3.6)$$

La combinaison des équations (1.3.4) et (1.3.5) permet d'obtenir l'expression de la force de décollement.

$$F_d = \pi\phi_f\lambda\bar{\tau}(1 + \eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{E_f V_f}{E_m V_m} \quad (1.3.7)$$

Où  $V_f$  est le volume d'une fibre,  $V_m = A_m L_f$  représente un volume de matrice qui n'est impacté que par une seule fibre, car ce modèle ne considère pas les éventuelles interactions entre les fibres. Ensuite, l'auteur considère la zone située en  $x > 0$  lors du décollement, c'est-à-dire la partie décollée de la fibre. La contrainte dans la fibre s'écrit alors (1.3.8).

$$x > 0 \Rightarrow \sigma_f(x) = \sigma_f(0) + \frac{\pi\phi_f\tau}{A_f}x = \sigma_f(0) + \frac{4\tau}{\phi_f}x \quad (1.3.8)$$

De même, la contrainte dans la matrice s'exprime par :

$$x > 0 \Rightarrow \sigma_m(x) = \sigma_m(0) - \frac{\pi\phi_f\tau}{A_m}x \quad (1.3.9)$$

L'auteur précise ensuite que la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice

n'est pas constante lorsque l'on extrait une fibre, car cette dernière est abrasée. Les frottements augmentent donc au fur et à mesure de l'extraction, comme l'ont montré Lin et Li [51] pour des fibres synthétiques. Ainsi, le cisaillement d'interface devient fonction du déplacement relatif de la fibre par rapport à la matrice. Dans le cadre de l'hypothèse d'élasticité linéaire durant la phase de décollement, il est possible d'écrire :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du_f}{dx} - \frac{du_m}{dx} = \varepsilon_f - \varepsilon_m \quad (1.3.10)$$

Lin et Li [51] ont approximé le cisaillement d'interface  $\tau(s)$  par une fonction affine donnée en (1.3.11).

$$\tau(s) = \tau_0 \left( 1 + \beta \frac{s}{\phi_f} \right) \quad (1.3.11)$$

Où  $\beta$  est un paramètre de durcissement adimensionnel. A l'aide des équations (1.3.8), (1.3.9), (1.3.10) et (1.3.11), Guenet écrit la dérivée seconde du déplacement relatif par rapport à la matrice, ce qui lui permettra d'obtenir les équations solutions. A cette étape, l'auteur fait une simplification mathématique du calcul de dérivée, qui génère donc une approximation. A l'aide de cette formulation différentielle, des conditions aux limites et des équations précédentes, il parvient à exprimer le glissement relatif, la contrainte de cisaillement ainsi que la force de décollement respectivement en (1.3.12), (1.3.13) et (1.3.14).

$$s(x) = \frac{\phi_f}{\beta} \left( \cosh \left( \frac{\omega x}{\phi_f} \right) - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{4(1+\eta)\beta\tau_0}{E_f}} \quad (1.3.12)$$

$$\tau(x) = \tau_0 \cosh \left( \frac{\omega x}{\phi_f} \right) \quad (1.3.13)$$

$$F_d = \frac{\pi\phi_f^2\tau_0(1+\eta)}{\omega} \sqrt{\frac{\beta w}{\phi_f}} = k\sqrt{w} \quad (1.3.14)$$

Concernant la contrainte d'arrachement qui se développe à l'interface fibre-matrice, Wuest propose, quant à lui, d'utiliser une formule initialement développée par Li [48], qui permet de prendre en compte une augmentation ou une diminution de la contrainte d'interface en fonction de l'ouverture de fissure.

$$\tau(w) = \tau_0 \quad \text{si } w < w_0 \quad (1.3.15)$$

$$\tau(w) = \tau_0 + a_1 w + a_2 w^2 \quad \text{si } w \geq w_0 \quad (1.3.16)$$

Où  $\tau_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des paramètres dont les valeurs sont déterminées expérimentalement. Suite à la confrontation du modèle avec des résultats expérimentaux, il a proposé de modifier l'expression de la contrainte d'interface fibre-matrice lorsque la fibre est décollée. Wuest, tout comme Guenet, se base alors sur le modèle de Li et Leung [48] dans lequel la force d'extraction des fibres est définie comme une fonction de l'ouverture de fissure. Ainsi, durant la phase de décollement, la force d'arrachement d'une fibre  $F_{f,arr,i}$  s'exprime par la relation (1.3.17), avec  $\eta$  le terme donné en (1.3.7).

$$F_{f,arr,i} = \sqrt{\frac{\pi^2 \tau_0 E_f \phi_f^3 (1 + \eta)}{4}} w = k' \sqrt{w} \quad \text{si } 0 < w < w_0 \quad (1.3.17)$$

Les notions importantes que nous retiendrons concernant cette phase de décollement sont donc les suivantes :

- La contrainte de cisaillement fibre-matrice  $\tau$  est moyennée le long de la fibre.
- Cette même contrainte est une fonction du glissement. Elle peut cependant être considérée comme constante durant la phase de décollement ( $w \leq w_0$ ).
- A l'instant où la matrice fissure, les fibres ne sont pas encore décollées.
- La force de décollement est une fonction non linéaire de l'ouverture de fissure  $w$ .
- L'ouverture de fissure provient du glissement relatif de la fibre par rapport à la matrice. Les deux chercheurs considèrent une ouverture de fissure avant que la fibre ne soit totalement décollée.

### 1.3.1.3 Phase d'arrachement

La deuxième phase de l'extraction d'une fibre concerne l'instant où elle est entièrement décollée et commence à s'extraire. Guenet formule l'hypothèse que l'équation régissant le glissement  $s(x)$  est identique à celle du décollement (1.3.12), en ajoutant un terme de glissement.

$$s(x) = \frac{\phi_f}{\beta} \left( \cosh \left( \frac{\omega x}{\phi_f} \right) - 1 \right) + (w - w_0) \quad (1.3.18)$$

Où  $w$  est l'ouverture de fissure et  $w_0$  sa valeur au moment où la fibre avait fini son décollement [48]. Le terme  $(w - w_0)$  représente donc la distance d'extraction du point le plus ancré de la fibre.

$$w_0 = \frac{4(1 + \eta)\tau_0 L^2}{E_f \phi_f} \quad (1.3.19)$$

Selon l'auteur, l'hypothèse forte faite ici est que lorsque la fibre est entièrement décollée, elle ne se rétracte pas de manière élastique. La seconde hypothèse, est que la fibre glisse de la matrice seulement d'un côté de la fissure. En exprimant la force d'arrachement et en utilisant un développement limité, l'auteur obtient, après simplification, l'équation de cette force d'arrachement.

$$\forall w \in [w_0; w^{cr}] \quad F_e = k\sqrt{w_0} \left[ 1 - \frac{w - w_0}{w^{cr} - \frac{z}{\cos \varphi}} \right] \quad \text{avec } w^{cr} = \frac{L_f}{2} \quad (1.3.20)$$

Le paramètre  $w^{cr}$  est l'ouverture de fissure critique correspondant à l'état où plus aucune fibre n'est sollicitée par la fissure, cette ouverture est donc égale à la moitié de la longueur de la fibre. Les paramètres  $z$  et  $\varphi$  sont définis sur la figure 1.24.

Concernant le modèle de Wuest, lorsque la fibre est entièrement décollée, la force d'arrachement d'une fibre  $i$  est alors écrite comme le produit de la contrainte de cisaillement, par la surface résiduelle de la fibre encore en contact avec la matrice.

$$F_{f,arr,i} = \pi \phi_f \tau(w)(L - w + w_0) \quad \text{si } w \geq w_0 \quad (1.3.21)$$

Dans ce modèle, chaque fibre  $i$  est définie par un angle  $\theta$  et une longueur d'ancrage  $L$ . La longueur d'ancrage est déterminée aléatoirement, de manière uniforme entre 0 et  $L_f/2$ , tandis que l'orientation est déterminée par analyse d'image. L'effort total dans les fibres est ensuite calculé par (1.3.22), où  $f(\theta)$  est une fonction reflétant l'effet de l'inclinaison des fibres sur la force décrite en 1.3.1.4.

$$F_f = \sum_{i=1}^{n_f} F_{f,arr,i} f(\theta) \quad (1.3.22)$$

Wille et Naaman [84] proposent un modèle d'arrachement de fibres droites, basé sur l'écriture de la contrainte d'adhérence fibre-matrice, après décollement total de la fibre. Dans ce modèle, ils prennent en compte la présence d'un éventuel défaut d'extrémité de la fibre, qui viendrait générer une force d'about constante. La contrainte à l'interface fibre-matrice est donnée en fonction du glissement par :

$$\tau(s) = \tau_0 + \tau_H \frac{s}{L} + \frac{Q}{\pi \phi_f (L - s)} \quad (1.3.23)$$

Avec  $s$  le glissement,  $\tau_0$  la contrainte de cisaillement moyenne juste après le décollement,  $\tau_H$  un paramètre d'écrouissage,  $L$  la longueur encastrée de la fibre, et  $Q$  la force constante générée par un défaut d'extrémité. La présence de tels défauts a effectivement été observée au microscope sur des fibres métalliques par les auteurs. La force est donc exprimée, en fonction du glissement, par le produit de la contrainte d'adhérence et de la longueur ancrée résiduelle (équation (1.3.24)).

$$F(s) = \tau(s) \pi \phi_f (L - s) \quad (1.3.24)$$

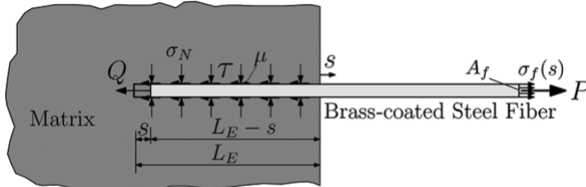


FIGURE 1.20 – Représentation de l'extraction d'une fibre droite selon Wille et Naaman [84]

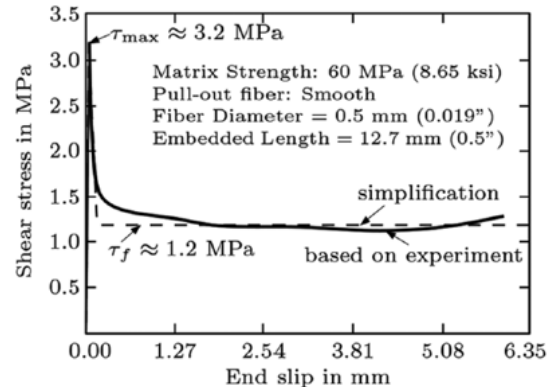


FIGURE 1.21 – Contraintes de cisaillement théorique et expérimentale [84]

Les auteurs suggèrent d'utiliser une contrainte d'adhérence initiale  $\tau_0$  égale aux deux-tiers de la résistance en traction de la matrice. La figure 1.21 représente les contraintes de cisaillement théorique et expérimentale de ce modèle, pour des fibres droites et cylindriques en acier. On remarque ici que la contrainte de cisaillement croît jusqu'à une valeur maximale pour un glissement très faible, puis décroît rapidement jusqu'à atteindre un palier. Enfin, la contrainte ré-augmente légèrement. En réalité la contrainte tend vers l'infini lorsque le glissement se rapproche de l'ancrage initial, ceci à cause du

terme de force d'about  $Q$  et de son dénominateur  $(L - s)$  qui tend alors vers zéro.

#### 1.3.1.4 Prise en compte de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction de traction

Dans l'expression (1.3.22),  $f(\theta)$  est une fonction de pondération qui prend en compte un effet poulie pour une orientation des fibres entre  $0^\circ$  et  $60^\circ$ , puis une diminution de l'efficacité au delà de  $60^\circ$ .  $\theta$  représente l'angle entre l'axe longitudinal de la partie ancrée de la fibre, et la direction d'extraction. La figure 1.22 décrit l'effet de cette pondération.

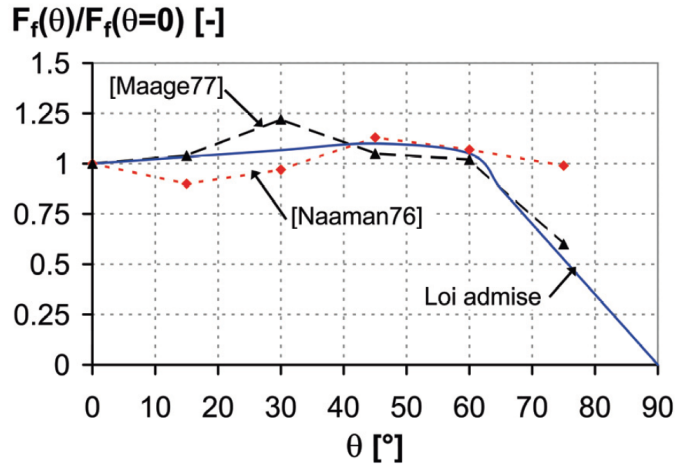


FIGURE 1.22 – Efficacité en fonction de l'angle d'inclinaison d'une fibre [88]

Cet effet poulie s'inspire des travaux de Li et al [50] qui ont majoré la force obtenue lors de l'extraction d'une fibre droite, par un coefficient issu de la formule d'Euler relative aux poulies, dépendant de l'inclinaison (1.3.25).

$$P_\theta = e^{f\theta} P_0 \quad (1.3.25)$$

Avec  $P_\theta$  la force résultante pour un angle d'inclinaison  $\theta$  de la fibre,  $f$  un coefficient de frottement, et  $P_0$  la force obtenue pour une fibre non inclinée. Dans le cas des fibres métalliques, il est nécessaire d'ajouter le phénomène de plastification de la fibre sur sa longueur initialement encastrée, qui va dissiper une énergie supplémentaire.

Il a également été vu en partie 1.2.4.1 que l'inclinaison des fibres par rapport à la direction de traction entraîne une diminution de la rigidité du système. Ce phénomène

est expliqué par la présence d'un écaillage de la matrice au point d'extraction de la fibre, qui génère un déplacement supplémentaire. Yang et al. [89] proposent une loi semi-empirique permettant de calculer la taille de l'élément de matrice rompu (1.3.26).

$$s = \frac{P \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{k \phi_f R_t \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \quad (1.3.26)$$

Avec  $s$  la distance sur laquelle l'écaillage se produit,  $P$  la force axiale dans la fibre,  $\phi$  l'angle d'inclinaison de la fibre avec la normale au plan de fissuration,  $k$  un paramètre de calage adimensionnel,  $\phi_f$  le diamètre de la fibre et  $R_t$  la résistance en traction de la matrice. L'écaillage est donc une fonction croissante de la force dans la fibre et de l'angle d'inclinaison (Figure 1.23). La détermination de la distance  $s$  permet, par la suite, de calculer le glissement supplémentaire généré, pour une fibre ancrée de part et d'autre dans une matrice cimentaire,  $s$  étant supposée identique des deux côtés de la fissure.

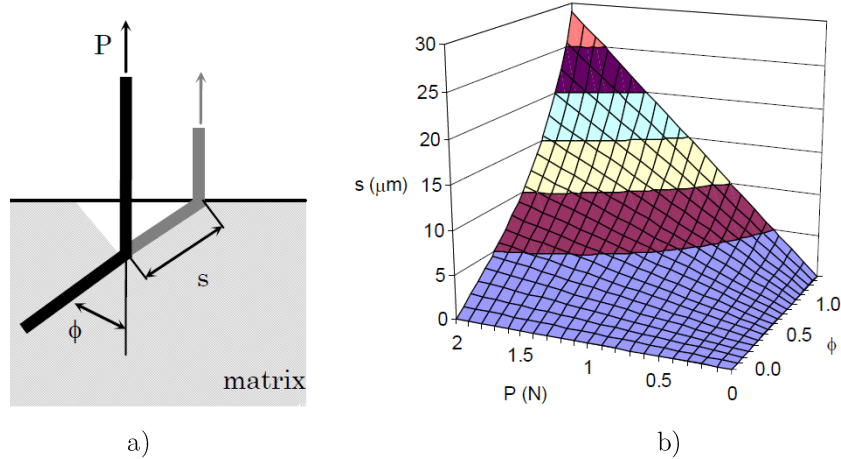


FIGURE 1.23 – a) Représentation de l'écaillage de la matrice, b) exemple d'évolution de la longueur  $s$  d'écaillage en fonction de la force et de l'inclinaison des fibres [89]

### 1.3.2 Modélisation de la position des fibres par rapport à une fissure

Les modèles décrits précédemment font intervenir la longueur ancrée des fibres dans l'expression des forces. L'impossibilité de prédire la position de chaque fibre par rapport

à une fissure, implique la nécessité d'utiliser des lois probabilistes permettant de décrire la longueur ancrée. Li et al. [50] ont introduit le principe de la détermination de la longueur ancrée par une méthode, qui est encore très largement utilisée aujourd'hui. La probabilité d'ancrage n'est pas définie directement sur la longueur ancrée mais sur la position, notée  $z$ , du centre de la fibre par rapport au plan de fissuration (Figure 1.24).

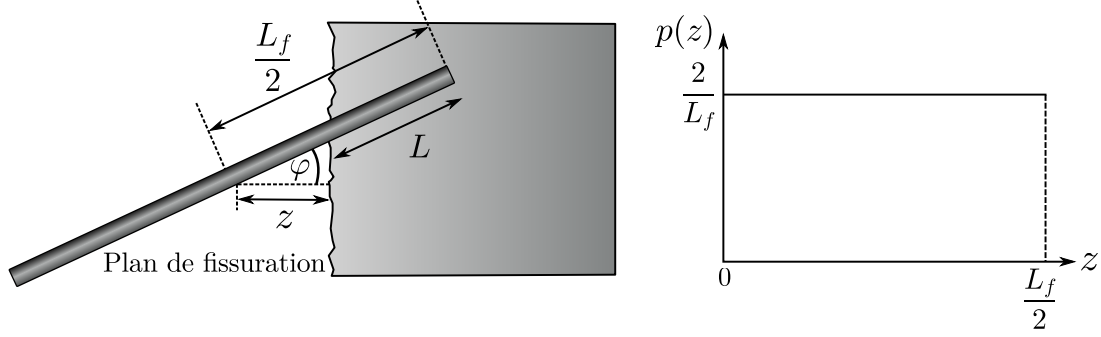


FIGURE 1.24 – Position d'une fibre par rapport à un plan de fissuration et densité de probabilité uniformément aléatoire d'après [50]

Compte tenu des capacités de résistance des fibres liées à la longueur ancrée, la fibre s'extraît uniquement du côté le moins ancré et la longueur encastrée maximale devient donc la moitié de la longueur de la fibre  $\frac{L_f}{2}$ . Néanmoins, lorsque la fibre est inclinée d'un angle  $\varphi$  avec la normale à la fissure, la longueur ancrée se trouve réduite. Ceci suppose que l'axe de rotation de la fibre est situé en son centre. Ainsi la longueur ancrée se définit en fonction de la position du centre de la fibre par rapport au plan de fissuration, et de son inclinaison par :

$$L = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \varphi} \quad (1.3.27)$$

Ceci implique que l'angle doit être inférieur à une certaine valeur pour que la fibre intercepte la fissure :

$$\varphi \leq \arccos \left( \frac{2z}{L_f} \right) \quad (1.3.28)$$

La distance  $z$  a autant de chances de valoir 0 que  $\frac{L_f}{2}$ , ce qui conduit à une densité de probabilité uniforme  $p(z)$  dont la valeur constante vaut  $\frac{2}{L_f}$  (1.3.29).

$$\int_0^{\frac{L_f}{2}} p(z) dz = 1 \Leftrightarrow p(z) = \frac{2}{L_f} \quad (1.3.29)$$

### 1.3.3 Modélisation de l'orientation des fibres

La disparité de répartition des fibres dans le volume de béton donne un caractère aléatoire à la détermination de leur orientation dans l'espace. Cet aspect purement aléatoire, peut être atténué par la connaissance de certains faits, tels que la méthode de coulage, ou le type de coffrage, qui conditionnent fortement l'orientation des fibres. Des méthodes électromagnétiques permettent également de donner une information sur la densité et l'orientation des fibres sur des épaisseurs proches de 5 cm [63]. Lorsque les fibres sont proches des parois du coffrage, elles prennent une orientation parallèle à celles-ci, ce qui engendre une orientation bi-dimensionnelle. Cependant, loin des parois, l'orientation est le plus souvent traitée comme aléatoire en trois dimensions.

Li et al. [50] considèrent un petit élément de surface de la fissure  $dA$ . Le nombre de fibres  $N$  avec une orientation de  $\varphi$  à  $\varphi + d\varphi$ , et situées de  $z$  à  $z + dz$  et traversant  $dA$  est donné sous forme probabiliste par l'équation (1.3.30).

$$dN = N_t p(z) p(\varphi) \sin \varphi d\varphi dz \quad (1.3.30)$$

Avec  $N_t$ , le nombre de fibres comprises dans la matrice de volume  $L_f dA$  donné en (1.3.31), et  $\rho_f$  le ratio volumique de fibres dans la matrice.

$$N_t = \frac{\text{Volume total de fibres}}{\text{Volume d'une fibre}} = \frac{L_f dA}{L_f A_f} = \frac{4dA}{\pi \phi_f^2} \rho_f \quad (1.3.31)$$

$p(\varphi)$  est la probabilité d'orientation de la fibre dans la direction de l'effort et  $p(z)$  la probabilité de longueur encastrée de la fibre. Les auteurs décomposent donc les probabilités d'orientation et de position en deux termes distincts. Ces probabilités sont données en repère sphérique, d'où l'opérateur d'intégration  $\sin \varphi d\varphi d\theta dz$ .

#### 1.3.3.1 Prise en compte règlementaire de l'orientation des fibres

La norme NF P 18-470 définit un paramètre d'orientation des fibres  $K$  qui est issu de courbes moments-flèches obtenues sur des spécimens représentatifs des futurs éléments

qui seront mis en œuvre. La valeur de ce facteur peut être différente selon la direction de traction considérée et agit sur la loi de comportement comme un coefficient partiel de sécurité pour prendre en compte l'anisotropie du comportement post-fissuration en traction liée à l'orientation et la répartition des fibres. Sa valeur est estimée à partir des résultats de campagnes d'essais selon l'annexe F de la norme NF P 18-470. Il convient de déterminer ce coefficient selon la direction et la partie d'ouvrage à considérer. Ainsi,  $K$  pourra prendre des valeurs différentes selon la direction de calcul que l'on considère pour un même élément.  $K$  est scindé en deux appellations, il sera noté  $K_{global}$  ou  $K_{local}$  selon la nature de la sollicitation qui concernera un aspect local ou global de l'élément ( $K_{local}$  pour la diffusion de la précontrainte par exemple et  $K_{global}$  pour de la flexion). Dans les calculs,  $K$  pourra donc prendre la valeur de  $K_{local}$  ou de  $K_{global}$ . En phase de pré-dimensionnement, il convient de retenir les valeurs suivantes :

- $K_{global} = 1,25 \in [1; 2]$
- $K_{local} = 1,75 \in [1; 2,5]$

Ce facteur d'orientation agit directement sur la loi de comportement en traction du matériau en minorant les valeurs des déformations post-fissuration obtenues expérimentalement comme le montre la figure 1.25.

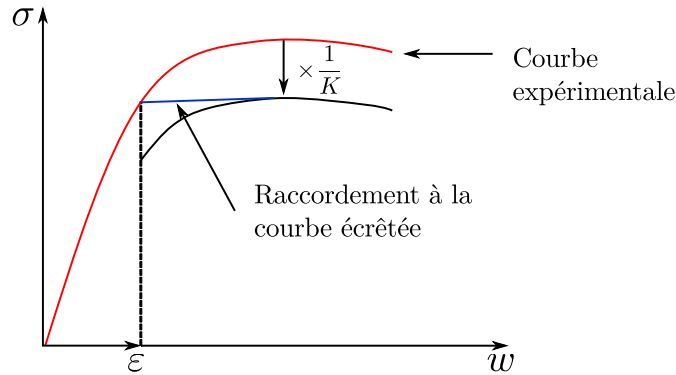


FIGURE 1.25 – Application du coefficient  $K$  sur la courbe contrainte-déformation-ouverture de fissure pour un BFUP [61]

Concernant sa détermination, la NF P 18-470 donne les définitions suivantes ; par direction et par partie d'ouvrage considérée, on note :

- $K_{global}$  le rapport entre la moyenne des pics des courbes moments-flèches obtenues sur éprouvettes moulées et la moyenne des pics des courbes moments-flèches

obtenues sur plaques ou prismes sciés.

- $K_{local}$  le rapport entre la moyenne des pics des courbes moments-flèches obtenues sur éprouvettes moulées et la plus faible valeur des pics des courbes moments-flèches obtenues sur plaques ou prismes sciés.

Il apparait donc que les coefficients de sécurité imposés par le règlement sont élevés, et pénalisent fortement le développement de l'utilisation des BFUP. Ceci rappelle l'enjeu de cette thèse, dans le développement de méthodes permettant d'accéder de manière précise au comportement post-fissuration de ce type de matériau.

### 1.3.3.2 Distribution normale de l'orientation des fibres

Guenet utilise une probabilité d'orientation donnée par une distribution normale à partir d'un seul angle d'orientation dans un repère sphérique (1.3.32). Le facteur  $k_g$  permet d'agir sur l'amplitude et la forme de la loi de probabilité (Figure 1.26).

$$p(\theta, \varphi) = \cosh(k_g \cos \varphi) \quad (1.3.32)$$

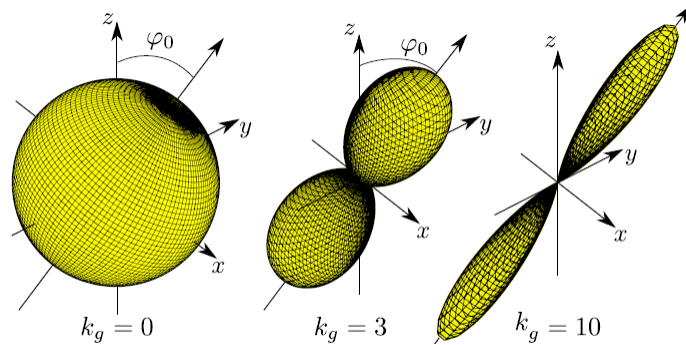


FIGURE 1.26 – Loi normale d'orientation des fibres en repère sphérique [28]

### 1.3.4 Calcul de la contrainte reprise par les fibres

Guenet, en s'appuyant sur les travaux de Li et al. [50], définit la contrainte post-fissuration reprise par un élément en BFUP par la relation (1.3.33), dont les termes

sont définis par les relations (1.3.14), (1.3.20), (1.3.30), (1.3.31) et (1.3.32).

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=0}^{N_f} F_i}{dA} = \frac{v_f}{A_f N_f} \iiint F_{d,e} N_t p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta dz \quad (1.3.33)$$

Cette relation fait intervenir le nombre de fibres traversant la fissure, les probabilités d'orientation et de position des fibres dans la direction de l'effort, ainsi que les efforts de décollement et d'arrachement. En définissant les plages de variation de position et d'orientation d'une fibre, l'auteur développe l'équation (1.3.33) qui devient (1.3.34).

Par la suite, l'auteur utilise les plages d'ouverture de fissure durant lesquelles agissent les forces de décollement et d'extraction régies par les ouvertures de fissures limites :  $w_0$  pour laquelle la première fibre commence à s'extraire de la matrice et  $w^*$  pour laquelle toutes les fibres comprises dans l'élément traversé par une fissure sont en phase d'extraction. Cette ouverture  $w^*$  est obtenue en remplaçant  $L$  par  $\frac{L_f}{2}$  dans (1.3.19). L'auteur obtient ainsi l'expression finale de la contrainte de cohésion qui doit être exprimée sur deux domaines distincts :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } w \leq w^* & \sigma_{c1} = \frac{4v_f}{\pi \Phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{z_0 \cos \varphi} F_d(w, z, \varphi) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta dz \\ & + \frac{4v_f}{\pi \Phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=z_0 \cos \varphi}^{(\frac{L_f}{2}-w) \cos \varphi} F_e(w, z, \varphi) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta dz \\ \text{Si } w > w^* & \sigma_{c2} = \frac{4v_f}{\pi \Phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{(\frac{L_f}{2}-w) \cos \varphi} F_e(w, z, \varphi) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta dz \end{array} \right. \quad (1.3.34)$$

La Figure 1.27 donne une représentation graphique de l'évolution de ces contraintes, normées par rapport à leur valeur maximale, en fonction de l'ouverture de fissure. L'ouverture de fissures de faibles dimensions entraîne le décollement de la fibre jusqu'à un seuil pour lequel les fibres commencent à s'extraire de la matrice, ce qui procure un comportement adoucissant.

Le modèle de Wuest regroupe les différents comportements du matériau qui mettent en jeu le phénomène de fissuration. La résistance est donnée par la superposition de ces différents mécanismes. Il n'est pas nécessaire d'intégrer des lois probabilistes sur l'orientation et la longueur d'ancrage, puisque l'auteur définit dans son modèle, pour

chacune des fibres, une orientation et une longueur ancrée de manière discrète.

$$\sigma(w) = \sigma_{f,pf}(w) + \sigma_{f,arr}(w) + \sigma_m(w) \quad (1.3.35)$$

Avec  $\sigma(w)$  la contrainte de réponse globale du matériau,  $\sigma_{f,pf}(w)$  la contrainte de pré-fissuration des fibres,  $\sigma_{f,arr}(w)$  la contrainte d'extraction des fibres, et  $\sigma_m(w)$  la contrainte présente dans la matrice.

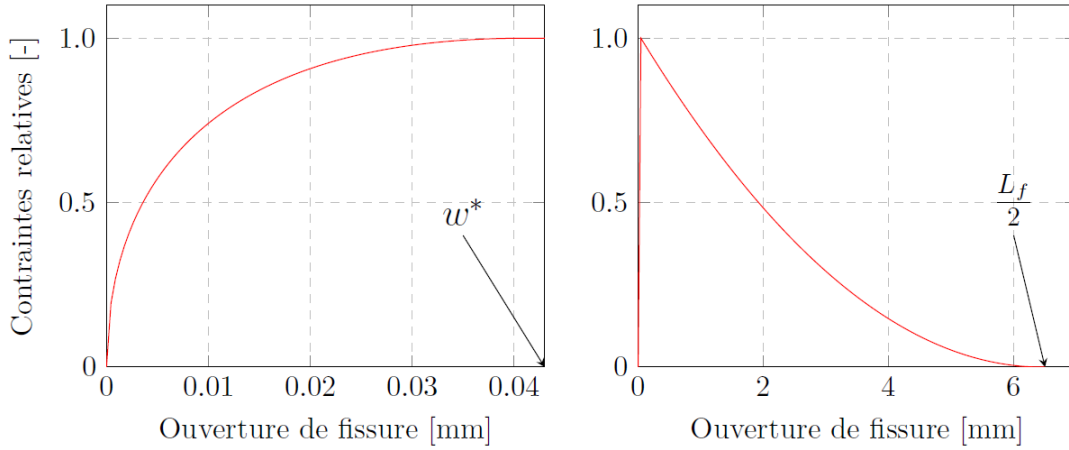


FIGURE 1.27 – Loi d'extraction des fibres en contrainte relatives  $\sigma/\sigma_{max}$  selon Guenet [28]

### 1.3.5 Rupture des fibres

Un ancrage trop important peut provoquer la rupture des fibres, ce qui modifie le comportement du matériau. Cette rupture se produira lorsque l'ancrage critique  $L_c$  de la fibre sera atteint :

$$L_c = \frac{\phi_f f_u^f}{4\tau} \quad (1.3.36)$$

Où  $f_u^f$  est la résistance à la traction de la fibre et  $\tau$  la contrainte d'adhérence fibre-matrice. Le phénomène de glissement étant à privilégier, il est recommandé que la longueur des fibres ne dépasse pas deux fois cette longueur critique afin d'éviter leur rupture. Dans les cas où l'orientation des fibres engendre un effet poulie, et donc un supplément de force, il pourra ainsi être envisagé d'utiliser des fibres de longueur inférieure à  $2L_c$ .

### 1.3.6 Modélisation de la fissuration

#### 1.3.6.1 Espacement des fissures dans le cas du béton armé

La méthode de calcul de l'espacement des fissures proposée par l'Eurocode 2 [3] est basée sur le principe suivant : lorsque la première fissure s'ouvre dans la matrice, la contrainte dans le renfort est maximale au droit de la fissure, tandis que celle dans la matrice est nulle. En effectuant l'équilibre d'un tronçon de béton armé, et en supposant une contrainte de cisaillement renfort-matrice constante le long de l'élément, il est possible de déterminer la distance à laquelle la contrainte dans la matrice atteindra à nouveau sa résistance à la traction  $R_t$ . La relation (1.3.37) estime l'espacement minimal entre deux fissures  $S_{r,min}$  en fonction de  $A_c$  la section de béton,  $\phi_r$  le diamètre du renfort,  $A_s$  sa section et  $\tau$  la contrainte d'adhérence constante entre le renfort et la matrice.

$$S_{r,min} = \frac{A_c R_t \phi_r}{4 A_s \tau} \quad (1.3.37)$$

Wuest propose une variante de cette formule dans le cas des BFUP. En supposant que la fraction volumique de fibres est égale à la fraction surfacique traversant un plan de fissuration, et en prenant en compte un coefficient d'effet de l'inclinaison des fibres  $f(\theta)_{Av}$ , il écrit la relation suivante :

$$S_{r,min} = \frac{R_t}{\pi \phi_f n_f \tau f(\theta)_{Av}} \quad (1.3.38)$$

Avec  $n_f$  le nombre de fibres par  $m^2$ , et  $f(\theta)_{Av}$  la valeur moyenne du coefficient d'orientation des fibres défini en (1.3.22)

#### 1.3.6.2 Modèle de fissures réparties discrètes

Wuest met en œuvre dans ses travaux un modèle de fissures réparties discrètes. Le principe fondamental de ce modèle repose sur la création d'un ensemble de plans de fissuration potentiels espacés d'une distance très faible sur la totalité de la longueur de l'élément étudié. L'élément se décompose donc en une multitude de fissures potentielles, espacées de 0,02 mm. Chacune de ces fissures potentielles est définie par sa position et sa résistance à la traction qui varie de manière aléatoire le long de l'élément. Au moment où la matrice atteint sa résistance à la traction dans une section, et pour un

espacement des fissures supérieur à  $S_{r,min}$ , le modèle génère une fissure.

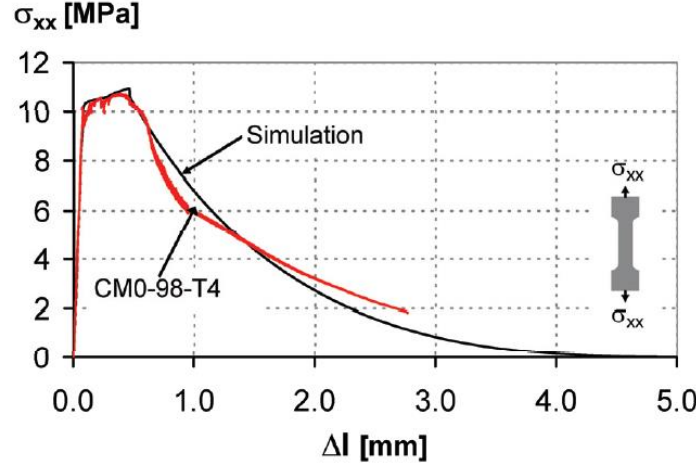


FIGURE 1.28 – Confrontation du modèle de Wuest aux résultats expérimentaux [88]

La figure 1.28 donne une représentation de la comparaison entre les résultats expérimentaux et le modèle de Wuest, pour des éprouvettes en BFUP soumises à des essais de traction simple. Selon Wuest, son modèle permet de déterminer l'ordre de grandeur de l'ouverture des fissures et de leur espacement. Il permet de donner l'allure générale des courbes mais ne prédit pas correctement la phase adoucissante.

### 1.3.6.3 Modèle basé sur la théorie de l'homogénéisation

#### 1.3.6.3.1 Phase écouissante

Afin de considérer la phase écouissante du matériau, Guenet utilise une approche basée sur la micro-mécanique de la rupture. Elle s'appuie notamment sur les travaux de Sorelli et Toutlemonde [77]. Il y définit un paramètre  $N_c$  représentant un nombre de fissures volumiques dans l'élément. Il exprime ensuite une fonction de chargement  $f$ , analogue à un critère de plasticité.

$$f = G - G_c \quad (1.3.39)$$

Avec  $G_c = N_c G_f$ , et  $G_f$  l'énergie surfacique nécessaire pour créer une nouvelle fissure,  $G$  est le taux de restitution d'énergie issu de la relation d'Irwin (1.3.40) [31].

$$K^2 = G E \quad (1.3.40)$$

Où  $K$  est le coefficient de concentration de contrainte pour une rupture en mode  $I$  et  $E$  le module d'élasticité du matériau. Lorsque  $f$  est inférieure ou égal à zéro, le comportement du matériau est linéaire, si  $f$  devient supérieure à zéro, le comportement est non linéaire avec progression de l'endommagement. La progression de l'endommagement est paramétrée par le coefficient de concentration de contrainte  $K$ . L'originalité de ce travail est de décomposer ce coefficient en deux termes, l'un représentant la progression des fissures de la matrice, et l'autre représentant l'effet des fibres agissant comme des forces de cohésion sur les fissures (1.3.41).

$$K_{BFUP} = K_{matrice} - K_{fibres} \quad (1.3.41)$$

Grâce aux relations (1.3.40) et (1.3.41), il est possible d'écrire le taux de restitution d'énergie total  $G$  en fonction du taux de restitution d'énergie de la matrice  $G_A$  et de l'effet de couture de fissures des fibres  $G_B$  (1.3.42).

$$G = G_A + G_B - 2\sqrt{G_A G_B} \quad (1.3.42)$$

La deuxième loi de la thermodynamique permet de fournir l'expression de l'énergie  $G_A$  :

$$G_A = -\frac{1}{2}\varepsilon : \frac{\partial C(l)}{\partial l} : \varepsilon \quad (1.3.43)$$

Avec  $\varepsilon$  le tenseur des déformations élastiques,  $l$  une variable d'endommagement correspondant ici à la surface de fissure, et  $C(l)$  la rigidité du béton dépendant de la surface de fissuration. Par la suite, l'auteur utilise une homogénéisation du matériau afin de déterminer le tenseur de rigidité homogénéisé  $C^{hom}$  (1.3.44). Pour cela, une hypothèse est utilisée sur les fissures qui auraient une forme d'ellipsoïde de révolution aplati dont la longueur du demi-axe est notée  $a$ . Dans (1.3.44),  $C^0$  est le tenseur de rigidité de la matrice sans inclusion,  $I$  la matrice identité,  $\epsilon$  est un paramètre d'endommagement défini comme une densité de fissuration (1.3.45),  $X$  est le rapport des demi-axes de l'ellipse et  $\bar{A}^c$  le tenseur de localisation reliant les déformations macroscopiques et microscopiques du matériau.

$$C^{hom} = C_0 : \left( I - \frac{4}{3} \pi \epsilon X \bar{A}^c \right) \quad (1.3.44)$$

$$\epsilon = N_c a^3 \quad (1.3.45)$$

Le tenseur de Mori-Tanaka [56] est choisi comme tenseur de localisation  $\bar{A}^c$ . L'énergie dissipée par la matrice étant désormais déterminée, il reste à écrire celle engendrée par les fibres. La loi de comportement est exprimée en fonction des déformations principales à chaque pas de chargement, qui représentent les directions des fissures. Les directions de ces déformations étant susceptibles d'évoluer au cours du chargement, l'hypothèse que les directions des fissures sont invariantes vis à vis de l'orientation des fibres est postulée. L'énergie surfacique  $g_B$  restituée par les fibres pour une surface définie dans ce modèle par  $dA = r dr d\theta$ , s'écrit :

$$g_B = \int_{w=0}^{\frac{L_f}{2}} \sigma_c(w) dw \quad (1.3.46)$$

Avec  $\sigma_c$  la contrainte de cohésion des fibres et  $w$  l'ouverture de fissure. Étant donné la forme ellipsoïdale des fissures, le travail total nécessaire à ouvrir une fissure dont le demi-axe vaut  $a$  est :

$$W_B(a) = \int_{\theta=0}^{2\pi} g_B(w) r dr d\theta \quad (1.3.47)$$

Comme la fissure est ellipsoïdale, l'ouverture de fissure dépend de la position dans l'ellipse. En distinguant les différentes positions des fibres dans l'ellipse, et les différentes contraintes engendrées selon l'ouverture (décollement, arrachement), l'auteur exprime le travail fourni par les fibres  $W_B(a)$  en fonction du demi-axe de l'ellipse  $a$ . Le taux d'énergie restituée par les fibres s'exprime donc :

$$G_B = N_c \frac{\partial W_B(a)}{\partial a} \quad (1.3.48)$$

L'auteur exprime enfin tous les termes régissant l'équation (1.3.39) en fonction de la densité de fissuration  $\epsilon$  (1.3.50). Il utilise pour cela un changement de variable de  $l$  à  $\epsilon$  grâce à la relation (1.3.49).

$$l = \pi \left( \frac{\epsilon}{N_c} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.49)$$

$$\begin{cases} G_A^\epsilon = G_A \frac{2\pi}{3N_c^{2/3}} \epsilon^{-\frac{1}{3}} \\ G_B^\epsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{N_c}{\epsilon} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial W_B(a)}{\partial a} \\ G_c^\epsilon = \frac{2\pi}{3} \frac{G_f}{a} \end{cases} \quad (1.3.50)$$

### 1.3.6.3.2 Phase adoucissante

Guenet explique qu'il a rencontré des difficultés lors du passage de la phase écouvissante à la phase adoucissante qu'il attribue à l'anisotropie du tenseur de rigidité. Il a considéré par la suite une seule variable d'endommagement dans la direction principale de déformation  $I$ . L'hypothèse faite ici, est que la phase adoucissante débute lorsque la contrainte maximale reprise par les fibres est atteinte, et ce, même si la limite élastique de la matrice n'a pas été atteinte. Ceci permet d'éviter des diminutions brusques de contraintes, qui pourraient engendrer des divergences numériques. Dans la phase adoucissante, la fissuration est modélisée par une déformation inélastique. Le modèle considère une seule fissure diffuse dans l'élément dans la direction principale  $I$ . La loi de comportement d'extraction des fibres est régularisée grâce à une méthode qui consiste à projeter la largeur de la bande de fissuration sur la direction principale de traction. Ainsi, la loi développée dans ce modèle se résume à la relation (1.3.51).

$$\sigma = C^{hom}(\epsilon) : (\varepsilon - P_\varepsilon e_c P_\varepsilon^{-1}) \quad (1.3.51)$$

Où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes totales,  $C^{hom}(\epsilon)$  est le tenseur de rigidité, fonction de la variable d'endommagement  $\epsilon$ ,  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations totales,  $P_\varepsilon$  la matrice de passage du repère global à la base principale des déformations, et  $e_c$  le tenseur des déformations inélastiques. La loi de comportement obtenue est représentée pour deux cas, le premier adoucissant et le second écouvissant, avec déchargement (Figure 1.29). Le modèle est donc capable de représenter une phase écouvissante, ou un comportement directement adoucissant selon les paramètres utilisés. Un fait notable est que le déchargement se fait sans déformations permanentes, ce qui constitue une limite au

modèle car l'expérience montre que la décharge de ce matériau est fortement plastique [42].

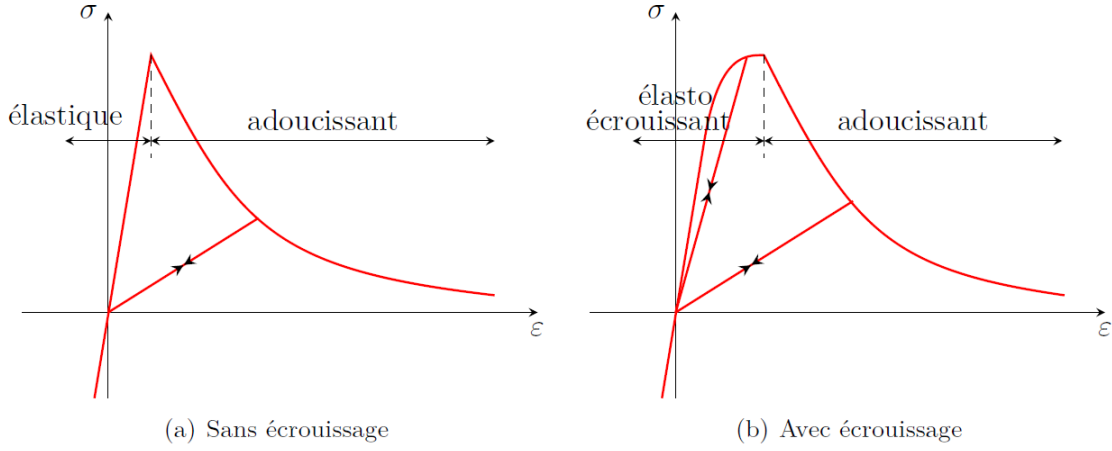


FIGURE 1.29 – Loi de comportement développée par Guenet [28]

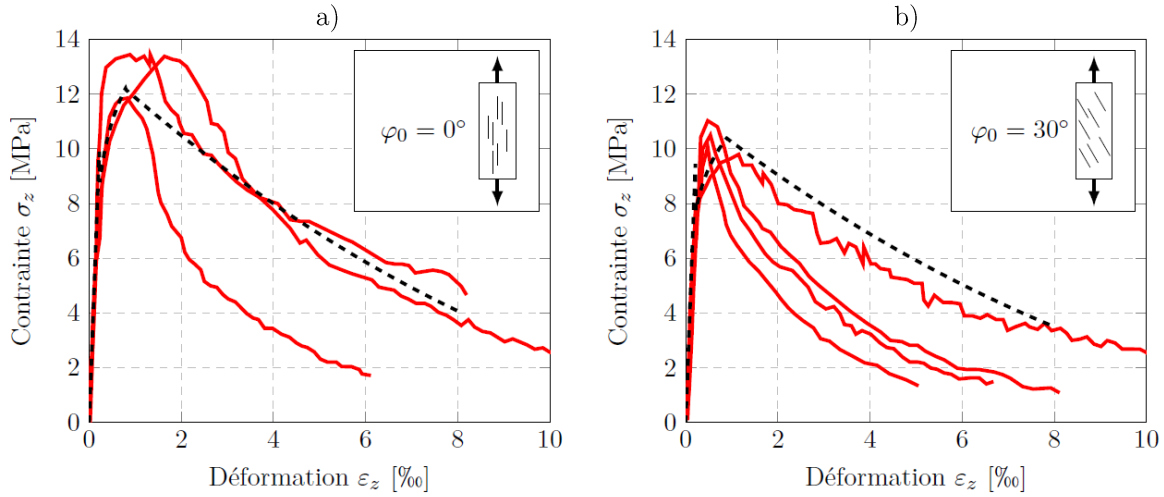


FIGURE 1.30 – Confrontation du modèle de Guenet aux résultats expérimentaux : a) pour des fibres alignées avec la direction de traction, b) pour des fibres orientées à 30° avec la direction de traction, [28]

La figure 1.30 permet d'évaluer la qualité de la corrélation entre le modèle développé et des résultats expérimentaux obtenus pour des essais de traction simple pour deux orientations préférentielles de fibres. Guenet considère que son modèle reproduit correctement les résultats expérimentaux pour plusieurs orientations de fibres. Dans sa conclusion, il explique qu'il aurait été nécessaire de rendre certains paramètres du modèle fonction du volume ou de l'orientation des fibres, en particulier le nombre de fissures par élément de volume  $N_c$ .

### 1.3.7 Conclusions sur les modèles étudiés

L'étude de ces modèles permet de visualiser les principes de modélisation du comportement mécanique des BFUP. On retiendra plusieurs points importants :

- L'expression de la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice, comme une fonction du glissement relatif entre les deux matériaux semble constituer la base de la description de l'extraction des fibres.
- L'extraction d'une fibre se décompose en plusieurs phases comprenant a minima une phase de décollement et une phase d'arrachement.
- La position d'une fibre par rapport à un plan de fissuration est représentée par une densité de probabilité uniformément aléatoire.
- L'orientation des fibres peut être représentée par des densités de probabilités non uniformes afin de prendre en compte l'hétérogénéité des inclinaisons.
- De par son approche, Wuest montre qu'il existe un problème de création de multiples fissures dans les matrices fibrées, concernant leur nombre et leur position. Il a ainsi contourné ce problème en maillant explicitement dans un élément uniaxial un grand nombre de fissures orthogonales à la direction de traction. Cependant, ce type de modèle n'est pas applicable aux structures de grandes dimensions du génie civil. Guenet définit quant à lui un nombre de micro-fissures par élément de volume qu'il utilise comme paramètre pour caler son modèle. Il serait alors intéressant d'être capable de déterminer automatiquement ce paramètre.

Les grandes étapes de la modélisation du comportement mécanique des BFUP apparaissent donc comme étant :

1. Définition d'une loi d'extraction d'une fibre droite dans une matrice à base cimentaire, reliant la force appliquée au glissement relatif fibre-matrice engendré.
2. Prise en compte des mécanismes liés à l'inclinaison des fibres rapport à un plan de fissuration.
3. Définition d'une méthode de représentation de l'orientation des fibres.
4. Prise en compte de la probabilité uniformément aléatoire de l'ancrage des fibres.

5. Détermination de la réponse d'un ensemble de fibres à partir des forces élémentaires de chaque fibre.
6. Définition d'un modèle de fissuration multiple.

La section qui suit est en grande partie basée sur la notice technique du modèle de comportement du béton Fluendo3D, développé par Alain Sellier et al. [71]. Ce modèle de comportement permet en particulier de décrire la fissuration du béton, depuis le début de la fissuration diffuse, jusqu'à la formation de fissures localisées [72]. Le modèle développé dans cette thèse étant mis en œuvre sur la base de Fluendo3D, il est essentiel d'en appréhender son fonctionnement concernant certains aspects. Néanmoins, le modèle de BFUP pourra s'adapter à d'autres modèles de béton, ces modèles devront toutefois présenter des caractéristiques minimales afin d'être compatibles.

## 1.4 Modélisation du comportement mécanique du béton

### 1.4.1 Plasticité

Le modèle Fluendo3D utilise plusieurs critères de plasticité qui représentent chacun un phénomène pouvant entraîner une déformation plastique. Les déformations plastiques permettent alors de piloter les variables d'endommagement du matériau. En traction, trois critères orthogonaux de Rankine sont utilisés. Les déformations plastiques de traction permettent alors de représenter les ouvertures de fissure du béton, qui peuvent être amenées à se refermer si une contrainte de compression suffisante est appliquée. Trois critères de contraintes principales sont utilisés afin de gérer indépendamment la fermeture des trois fissures principales. En compression, le critère de Drucker-Prager est utilisé d'une manière non conventionnelle, afin de considérer une possible dilatance du matériau. L'ensemble de ces critères est écrit sous la forme de deux tenseurs de déformations plastiques :

- Déformations plastiques en traction et re-fermeture de fissures.
- Déformations plastiques dues au cisaillement et à la compression.

**1.4.1.1 Critère de plasticité en traction**

Le critère de Rankine est relatif aux contraintes principales, il exprime le fait qu'une déformation plastique se produit lorsqu'une ou plusieurs des contraintes principales dépassent ce critère. Ce critère se définit par (1.4.1), avec  $\tilde{\sigma}_I$  la contrainte effective de traction dans la direction  $I$  et  $\tilde{R}_{t,I}$  la résistance effective en traction dans cette même direction. La notion de contrainte effective est décrite en 1.4.2.1.

$$f_I^t = \tilde{\sigma}_I - \tilde{R}_{t,I} \quad \text{avec } I \in [I, II, III] \quad (1.4.1)$$

Si une déformation plastique de traction se produit et est suivie par un déchargement, le critère de re-fermeture de fissure peut être atteint, ce qui conduit à une réduction de la déformation plastique en traction. Le critère de refermeture de fissure s'écrit :

$$f_I^r = \begin{cases} (-\tilde{\sigma}_I) - \tilde{R}_I^r & \text{avec } I \in [I, II, III] \quad \text{si } \varepsilon_I^{pl,t} > 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_I^{pl,t} \leq 0 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Avec  $\tilde{R}_I^r$  la contrainte de fermeture de fissure, et  $\varepsilon_I^{pl,t}$  la déformation plastique en traction dans la direction  $I$ . Pour refermer totalement la fissure, et donc annuler la déformation plastique, une contrainte de compression égale à  $\tilde{R}_I^r$  sera nécessaire.

**1.4.1.2 Critère de plasticité en compression**

Le critère de Drucker-Prager  $f^{DP}$  est une extension du critère de Von Mises aux matériaux granulaires, il s'agit donc d'un critère énergétique de scission maximale. Il est utilisé afin de modéliser les déformations plastiques en compression et cisaillement, liées à une micro-fissuration du matériau. Cette micro-fissuration est sensible à la pression qui vient améliorer la résistance du matériau. Son expression est donnée en (1.4.3).

$$f^{DP} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_{ij}^d : \tilde{\sigma}_{ij}^d}{2}} + \delta \frac{Tr(\tilde{\sigma}_{ij})}{3} - \tilde{R}_c \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\delta}{3} \right) \quad (1.4.3)$$

Avec  $\tilde{\sigma}_{ij}^d$  le tenseur des contraintes déviatoriques,  $\delta$  le coefficient de confinement de Drucker-Prager,  $\tilde{\sigma}_{ij}$  le tenseur des contraintes effectives et  $\tilde{R}_c$  la résistance à la compression du matériau. Une autre manière de noter ce critère serait (1.4.4) :

$$f^{DP} = \tau_{eq} - \tau_0 + p\delta \quad (1.4.4)$$

Avec  $\tau_{eq}$  la contrainte de cisaillement équivalente,  $\tau_0$  la cohésion et  $p$  la pression. Afin de garantir que le critère de Rankine soit atteint avant le critère de Drucker-Prager en traction, on fixe une valeur seuil de plasticité  $\tilde{R}_{c,0}$  qui doit vérifier les deux conditions données en (1.4.5).

$$\tilde{R}_{c,0} \geq \tilde{R}_t \frac{3\delta}{\sqrt{3} - \delta} \quad \text{et} \quad \tilde{R}_{c,0} \geq \tilde{R}_t \frac{\sqrt{3} + \delta}{\sqrt{3} - \delta} \quad (1.4.5)$$

La première condition est obtenue lors d'une traction tri-axiale, tandis que la seconde est obtenue pour une traction uniaxiale dans chaque direction principale.

#### 1.4.1.3 Écoulement plastique

L'écoulement plastique d'un matériau, se produit lorsque l'un des critères de plasticité devient positif. L'écoulement plastique consiste en la remise à zéro de ce critère, afin que l'état de contrainte redevienne admissible. Le travail plastique des forces correspond à la différence entre l'énergie fournie au système pour atteindre son état actuel, et l'énergie récupérée après relaxation du système (1.4.6). Par conséquent, cette énergie est nécessairement toujours positive ou nulle. Cette condition s'écrit  $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \geq 0$ . Elle permet de vérifier le second principe de la thermodynamique. Partant d'un état de contrainte admissible quelconque  $\sigma_0$ , et en imposant un nouvel état de contrainte  $\sigma_1$ , dans l'espace des contraintes, il est possible d'exprimer la variation de contrainte par le vecteur  $\overrightarrow{\sigma_0\sigma_1}$ . Il est alors possible de se rendre compte qu'une direction d'écoulement normale au seuil de plasticité permet de vérifier systématiquement la condition de dissipation plastique.

$$W_{pl} = \int_0^{\varepsilon^{pl}} \tilde{\sigma} d\varepsilon^{pl} \quad (1.4.6)$$

En effet, les critères de plasticité sont modélisés par des fonctions convexes dans l'espace des contraintes principales. Il est donc possible d'écrire que les déformations plastiques sont proportionnelles au gradient du critère dans cet espace des contraintes, car ainsi, le gradient d'une fonction convexe étant orthogonal à sa surface, le travail des déformations plastiques devient nécessairement positif. La déformation plastique est donc proportionnelle au gradient d'une fonction convexe, ce qui se traduit par la relation (1.4.7). On

distingue la plasticité associée, lorsque la fonction critère de plasticité est utilisée pour l'écoulement, de la plasticité non associée, lorsqu'une autre fonction convexe est utilisée pour l'écoulement plastique.

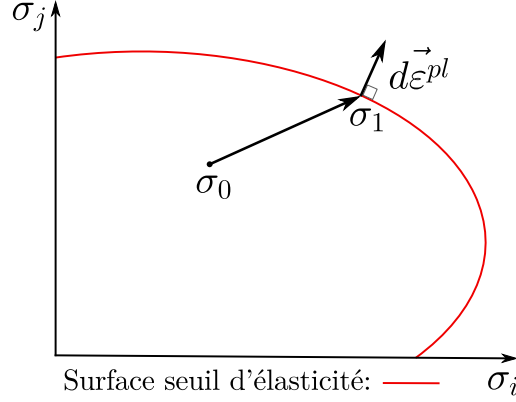


FIGURE 1.31 – Surface seuil et direction d'écoulement plastique

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.4.7)$$

Avec  $d\lambda$  le multiplicateur plastique, et  $F$  la fonction d'écoulement, associée ou non associée. Résoudre un problème de plasticité consiste à trouver la déformation plastique qui permet d'annuler le critère.

$$df + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \lambda} = 0 \quad (1.4.8)$$

Dans l'équation (1.4.8)  $f$  symbolise un critère de plasticité d'une manière générale tandis que  $F$  désigne le potentiel d'écoulement plastique.

## 1.4.2 Endommagement du béton

L'application de contraintes et déformations excessives entraîne une modification du comportement des matériaux, qui voient leur module d'élasticité varier, ainsi que leurs contraintes totales admissibles diminuer. Ce phénomène est lié à la fissuration du matériau, et est traduit par un modèle fondé sur la théorie de l'homogénéisation, décrite par Lemaitre et Chaboche [45]. Les lois d'évolution de l'endommagement utilisées dans le code Fluendo3D sont basées sur le calcul de déformations plastiques engendrant

la formation de micro-fissures ou macro-fissures [72][73]. La partie qui suit, aborde la méthode de modélisation de l'endommagement d'une manière générale, et donne les lois utilisées pour les sollicitations de compression, cisaillement et traction.

#### 1.4.2.1 Théorie de l'endommagement

Lorsqu'un matériau fissure, il perd au niveau de la surface fissurée la capacité de diffuser les efforts de proche en proche. Ainsi, la force qui pouvait auparavant se diffuser à toute la surface, ne peut désormais se propager qu'au travers de la partie saine du matériau, qui concerne une surface désormais restreinte. La contrainte que subit réellement le matériau dans sa zone non fissurée est alors plus élevée. A mesure que la fissure progresse, le matériau se détériore pour atteindre finalement la rupture totale, autrement dit la perte de capacité à transmettre une force. La figure 1.32 permet de visualiser ce principe.

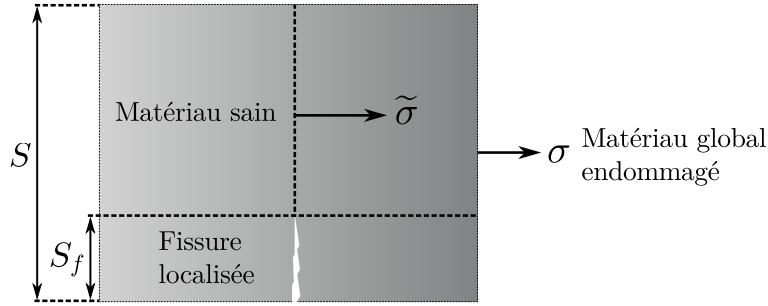


FIGURE 1.32 – Principe général de formulation de l'endommagement

Avec  $\sigma$  la contrainte globale traversant le volume représentatif du matériau, et  $\tilde{\sigma}$  la contrainte dite effective, agissant sur la surface non fissurée au droit de la fissure. De par l'égalité des forces, la figure 1.32 permet d'écrire la relation (1.4.9).

$$\sigma S = \tilde{\sigma}(S - S_f) \quad (1.4.9)$$

L'endommagement se définit comme le rapport entre la surface fissurée  $S_f$ , et la surface initialement saine  $S$ , ce qui permet d'écrire les équations (1.4.10).

$$D = \frac{S_f}{S} \quad \text{et} \quad \sigma = \tilde{\sigma}(1 - D) \quad (1.4.10)$$

D'après la relation (1.4.10), et en assimilant, dans le cadre de cet exemple, la loi de comportement du matériau à un modèle uniaxial, il est possible d'écrire :

$$\sigma = E_0(1 - D)\varepsilon^e \quad (1.4.11)$$

Où  $E_0$  est le module d'Young initial du matériau sain, et  $\varepsilon^e$  la déformation élastique du matériau. Il est donc intéressant de noter que le terme  $E_0(1 - D)$  représente le module d'élasticité global endommagé du matériau. En effet, lorsque l'endommagement progresse, le module d'Young global diminue. L'endommagement ayant un caractère définitif, il ne pourra jamais diminuer. La figure 1.33 illustre ces propos, grâce à deux courbes expérimentales représentant des cycles de chargements-déchargements d'un béton pour une compression et une traction uniaxiales. Dans les deux cas, la rigidité du béton est réduite au fil de l'endommagement. Les courbes font également apparaître la présence des déformations plastiques. La modélisation du comportement du béton repose donc sur un couplage entre plasticité et endommagement.

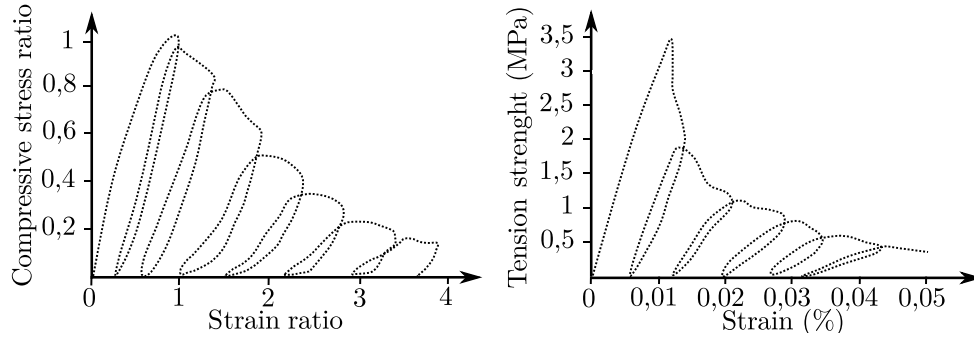


FIGURE 1.33 – Cycle de chargement d'un volume de béton pour une compression uniaxiale (à gauche) [65], et pour une traction uniaxiale de valeur normée par rapport à la contrainte maximale (à droite) [27]

#### 1.4.2.2 Endommagement orthotrope de traction

L'expérience montre que l'endommagement en traction du béton comporte deux phases, la première est isotrope avant le premier pic de la loi de comportement, et est basée sur les contraintes effectives. On modélise donc un endommagement isotrope pré-pic noté  $D_0^t$ . Lors de la deuxième phase post-pic, il est observé que l'endommagement devient fortement anisotrope, avec la création de fissures localisées. Il est donc essentiel de pouvoir considérer plusieurs directions de fissuration. C'est pourquoi il a été choisi un modèle d'endommagement orthotrope après le pic de la loi de comportement, modélisé

grâce à un tenseur d'endommagement  $D_{ijkl}^t$  agissant dans les directions principales de déformations plastiques. Les déformations plastiques étant un tenseur, il est possible de trouver une base dans laquelle ces déformations sont principales. Étant donné que les déformations plastiques peuvent évoluer, de nouvelles directions principales peuvent apparaître. Le tenseur d'endommagement est donc lui aussi capable d'évoluer au cours du chargement, on parle de "Rotating Crack Process".

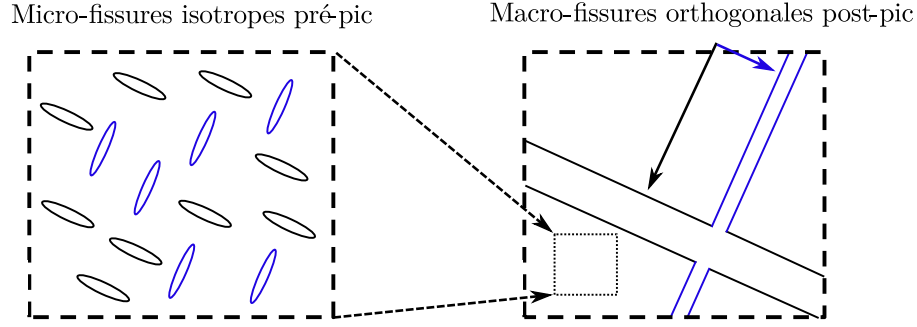


FIGURE 1.34 – Faciès de fissuration utilisé dans le modèle [71]

#### 1.4.2.2.1 Endommagement pré-pic en traction

Deux paramètres, permettant de caractériser le pic de la loi de comportement en traction, sont utilisés dans le modèle. Le premier est la résistance en traction  $R_t$ , le second est la déformation au pic de contrainte en traction  $\varepsilon^{peak,t}$ . L'endommagement isotrope pré-pic est calculé lorsque la déformation au pic est supérieure à la déformation élastique maximale  $\varepsilon^{peak,t} > \frac{R_t}{E}$ . L'équation (1.4.12) donne son expression, en fonction de la contrainte effective maximale de traction  $\tilde{\sigma}_I$ .

$$D_0^t = 1 - \exp\left(-\frac{1}{m} \left(\frac{\tilde{\sigma}_I^+}{\tilde{R}_t}\right)^m\right) \quad (1.4.12)$$

Avec  $m$  un paramètre défini tel que  $\sigma_I = R_t$  lorsque  $\varepsilon_I = \varepsilon^{peak,t}$ , et  $\sigma_I^+$  la première contrainte principale de traction. A partir de ces conditions, l'endommagement au pic vaut :

$$D_0^{t,peak} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{m}\right) \quad (1.4.13)$$

Ceci implique les deux équations données en (1.4.14).

$$\begin{cases} \tilde{R}_t = \frac{R_t}{1 - D_0^{t,peak}} \\ m = \frac{1}{\ln(1 - D_0^{t,peak})} \end{cases} \quad (1.4.14)$$

#### 1.4.2.2.2 Endommagement post-pic en traction

L'endommagement post-pic de traction, comme décrit auparavant, est fortement anisotrope puisqu'il caractérise la formation de fissures localisées. Cet endommagement dépend directement des déformations plastiques principales, et son évolution débute après le pic de la loi de comportement, c'est-à-dire lorsque  $\varepsilon_I > \varepsilon^{peak,t}$ , où  $I$  représente les directions principales de déformations plastiques de traction  $[I, II, III]$ . Son expression est donnée en (1.4.15).

$$D_I^t = 1 - \left( \frac{\varepsilon_I^{k,t}}{\varepsilon_I^{k,t} + \varepsilon_I^{pl,t,max}} \right)^2 \quad \text{avec } I \in [I, II, III] \quad (1.4.15)$$

La déformation plastique maximale, dans chaque direction, est utilisée afin de rendre compte du fait qu'une fissure, bien que pouvant se refermer, ne peut pas disparaître.  $\varepsilon_I^{k,t}$  est une déformation caractéristique, permettant de vérifier que toute l'énergie de fissuration  $G^{ft}$  est consommée durant la phase post-pic, et ce quelle que soit la taille de l'élément fini. La section 1.4.3 permet d'approfondir ce principe.  $\varepsilon_I^{k,t}$  est donc définie telle que :

$$G^{ft} = l_I \left( \frac{R^{t2}}{2E(1 - D_0^t)} + \int_0^{+\infty} (1 - D^t) \tilde{\sigma}_I^+ d\varepsilon_I^{pl,t} \right) \simeq l_I \frac{R^{t2}}{2E(1 - D_0^t)} + R_I^t w_I^{k,t} \quad (1.4.16)$$

Avec  $l_I$  la longueur de l'élément fini dans la direction principale de déformation plastique  $I$ ,  $\varepsilon_I^{pl,t}$  la déformation plastique dans la direction  $I$  et  $w^{k,t} = l_I \varepsilon_I^{k,t}$ . La longueur de l'élément fini dans une direction donnée est déterminée par une méthode utilisant la distance maximale entre la projection des nœuds dans ladite direction. La variable d'endommagement est donc une fonction scalaire, variant entre 0 correspondant à l'état où le matériau est sain, et 1, correspondant à la rupture totale du matériau.

Comme l'équation (1.4.16) l'a implicitement suggéré, les ouvertures de fissures localisées

sont directement basées sur les déformations plastiques de traction, et sur les longueurs de l'élément fini dans leurs directions principales.

$$w_I^{pl} \simeq l_I \varepsilon^{pl,t} \quad (1.4.17)$$

L'endommagement dans une direction affecte le module d'Young, mais également le coefficient de Poisson  $\nu$ , afin de permettre de calculer d'importantes ouvertures de fissures, sans contractions latérales. Pour analyser le fonctionnement de ce point, il est nécessaire de détailler le tenseur d'endommagement. Cependant son expression étant lourde, elle ne sera détaillée que pour un seul endommagement dans la direction principale 1. Le tenseur d'endommagement est issu de la théorie de l'homogénéisation [45], qui est basée sur le principe d'équivalence en déformations. Ce principe est le suivant : une contrainte effective appliquée sur un matériau sain, engendrera la même déformation qu'une contrainte macroscopique appliquée sur un matériau endommagé. Cette technique, bien qu'initialement développée pour un matériau micro-fissuré, est en réalité adaptable à n'importe quelle densité de fissuration dès lors que celle-ci est positive ou nulle. Il suffit donc de déterminer une loi d'évolution représentative de la macro-fissuration, et de l'implanter dans le tenseur  $\mathbb{D}$  proposé par Lemaitre et Chaboche [45]. Pour un endommagement uniquement dans la direction 1, le tenseur d'endommagement s'écrit :

$$\mathbb{I} - \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 - d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu d_1}{\nu - 1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu d_1}{\nu - 1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - d_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.18)$$

La variable  $d_1$  correspond au scalaire représentatif de l'état de l'endommagement dans la direction 1. Le terme  $d_5$  est choisi de sorte à représenter l'effet de l'endommagement dans une direction, sur le cisaillement d'une facette concernée. Dans le modèle, ce terme d'endommagement de cisaillement représente le maximum des deux endommagements

dans les plans concernés, soit dans le cas présent  $d_5 = d_1$ . En partant de cette formulation, il est désormais possible d'écrire le pseudo-vecteur des contraintes endommagées en fonction des contraintes effectives.

$$\vec{\sigma}_{ij} = (\mathbb{I} - \mathbb{D})\vec{\tilde{\sigma}}_{ij} = \begin{pmatrix} (1 - d_1)\tilde{\sigma}_1 \\ \frac{\nu d_1 \tilde{\sigma}_1}{\nu - 1} + \tilde{\sigma}_2 \\ \frac{\nu d_1 \tilde{\sigma}_1}{\nu - 1} + \tilde{\sigma}_3 \\ (1 - d_1)\tilde{\sigma}_4 \\ (1 - d_1)\tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \end{pmatrix} \quad (1.4.19)$$

Ainsi, il est possible d'écrire le pseudo-vecteur des déformations élastiques en fonction des contraintes totales :

$$\vec{\varepsilon}_{ij}^e = ((\mathbb{I} - \mathbb{D})\mathbb{C})^{-1} \vec{\sigma}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(-2\nu^2 d_1 - \nu + 1)}{E(1 - d_1)(1 - \nu)} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \frac{(1 - d_1)\sigma_4}{G} \\ \frac{(1 - d_1)\sigma_5}{G} \\ \frac{\sigma_6}{G} \end{pmatrix} \quad (1.4.20)$$

Où  $\mathbb{C}$  représente le tenseur de rigidité élastique du matériau sain. Les équations (1.4.20) et (1.4.18) permettent de remarquer deux points :

- La construction de la contrainte effective à partir de la contrainte endommagée, fait apparaître une contrainte effective non nulle dans les directions perpendiculaires à la direction 1, car il est imposé lors de la résolution du problème, la condition  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Cette contrainte effective vaut donc  $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3 = \frac{\nu d_1 \tilde{\sigma}_1}{1 - \nu}$

- La combinaison des équations de contraintes et déformations entraîne le résultat suivant :  $\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e = -(1 - d_1)\frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}_1$ . La contrainte  $\tilde{\sigma}_1$  étant constante durant la phase post-pic, les déformations élastiques dans les directions orthogonales à la normale à la fissure disparaissent lorsque le matériau se fissure.

### 1.4.2.3 Endommagement en compression

L'endommagement en compression et cisaillement se définit par un scalaire, qui est calculé comme une fonction de la dilatance plastique induite par un écoulement plastique non associé lié au critère de Drucker-Prager  $f^{DP}$ . Ce critère est décrit dans le chapitre 1.4.1. Cet endommagement est isotrope, et se décompose en deux phases : un endommagement pré-pic et un endommagement post-pic.

#### 1.4.2.3.1 Endommagement pré-pic en compression

L'endommagement pré-pic en compression est défini par la fonction (1.4.21) qui est pilotée par le critère de Drucker-Prager. Cet endommagement est visible sur la figure 1.33.

$$D^{CPP} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{m^c} \left(\frac{f^{DP}}{f_{peak}^{DP}}\right)^{m^c}\right) \quad (1.4.21)$$

Les paramètres  $m^c$  et  $f_{peak}^{DP}$  sont calculés automatiquement, afin de respecter la déformation au pic de compression.

#### 1.4.2.3.2 Endommagement post-pic en compression

Durant la phase post-pic, l'endommagement en compression et cisaillement, associé au critère de Drucker-Prager, est contrôlé par la dilatance plastique  $Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s})$ , cette dilatance conduit à un endommagement isotrope, seulement si le seuil de dilatance  $\varepsilon^{th,s}$  est dépassé.

$$D^s = \begin{cases} \frac{Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s}) - \varepsilon^{th,s}}{Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s}) - \varepsilon^{th,s} + \varepsilon^{k,s}} & \text{si } Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s}) > \varepsilon^{th,s} \\ 0 & \text{si } Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s}) \leq \varepsilon^{th,s} \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Avec  $\varepsilon^{th,s} = Tr(\bar{\varepsilon}^{pl,s,peak})$  et  $\varepsilon^{k,s}$  une déformation caractéristique permettant de contrôler l'évolution de l'endommagement en fonction du taux de dilatance. Compte tenu de son isotropie, l'endommagement  $D^s$  s'applique à toutes les directions de l'espace, car la micro-fissuration de compression crée des vides orientés de manière aléatoire dans le volume, ce qui entraîne la perte de raideur globale du matériau.

#### 1.4.2.4 Fermeture des fissures de traction

La capacité du modèle à refermer des fissures de traction a déjà été évoquée dans la section 1.4.1. Cependant il est intéressant de préciser ici les détails complémentaires liés à cet aspect.

A la suite d'une déformation plastique de traction, une contrainte de compression suffisamment élevée pourra entraîner la diminution progressive de cette déformation, jusqu'à l'annihiler totalement. Le passage entre l'état de fissure ouverte, à celui de fissure fermée, se fait grâce à une fonction de re-fermeture de fissure. Cette fonction, notée  $R_I$ , est calculée d'une manière similaire à un endommagement. Elle varie entre 0, correspondant à une fissure ouverte, et 1 correspondant à une fissure fermée. Cette fonction est une variable des déformations plastiques principales de traction, et s'applique sur les contraintes de compression.

$$R_I = \left( \frac{\varepsilon_I^{k,r}}{\varepsilon_I^{pl,t} + \varepsilon_I^{k,r}} \right)^2 \quad \text{avec } I \in [I, II, III] \quad (1.4.23)$$

Avec  $\varepsilon_I^{k,r}$  une déformation plastique caractéristique permettant de régulariser l'énergie de re-fermeture de fissure  $G^{fr}$  définie selon la relation (1.4.24).

$$G^{fr} = l_I \int_{\varepsilon^{pl,t}}^0 R_I \tilde{\sigma}_I^- d\varepsilon^{pl,t} \quad (1.4.24)$$

Avec  $l_I$  la longueur de l'élément fini dans la direction  $I$  et  $\tilde{\sigma}_I^-$  la contrainte effective de compression dans cette même direction. L'énergie de re-fermeture peut être amenée à être recalculée automatiquement dans le cas où elle serait insuffisante pour refermer la

fissure.

#### 1.4.2.5 Combinaison des endommagements

L'ensemble des endommagements de traction, de compression ainsi que les critères de re-fermeture de fissures, se combinent de sorte à permettre de calculer la contrainte globale dans un élément en béton. Cette combinaison nécessite une décomposition des contraintes effectives de traction  $\tilde{\sigma}_{kl}^+$  et de compression  $\tilde{\sigma}_{kl}^-$ . Son expression est donnée par la relation (1.4.25).

$$\sigma_{ij} = (1 - D^{CPP})(1 - D^s) \left[ (1 - D_0^t)(1 - D^t)_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}^+ + R_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}^- \right] \quad (1.4.25)$$

La figure 1.35 présente la loi de comportement d'un élément fini en béton soumis à un cycle de traction-compression, et permet ainsi de visualiser les endommagements de traction et de compression, la recouvrance de la rigidité en compression lors de la re-fermeture de la fissure, les déformations latérales avec une absence de contraction lors de la fissuration de traction, ainsi que la présence du phénomène de dilatance en compression.

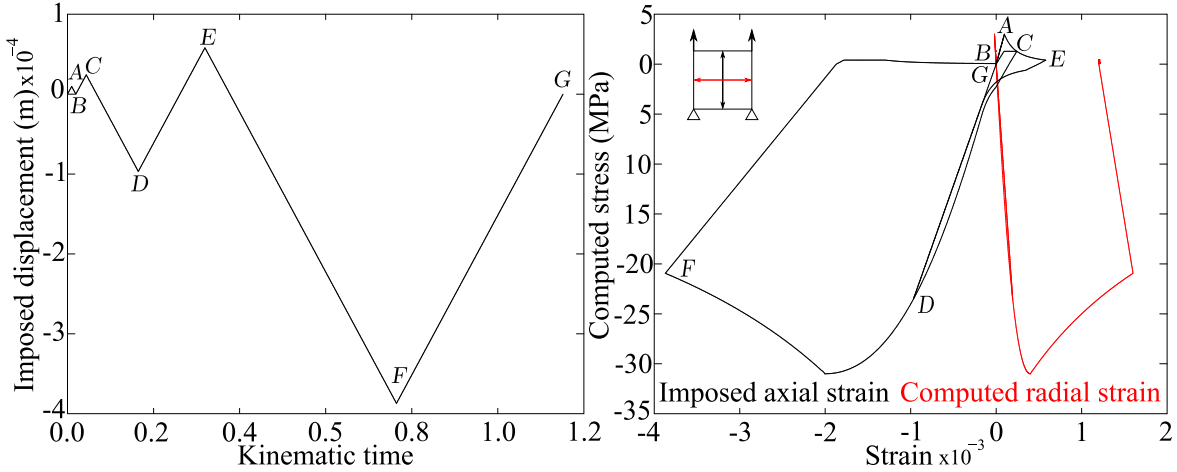


FIGURE 1.35 – Exemple de cycles de traction-compression uniaxiale d'un élément fini en 3D avec  $R_t = 3$  MPa,  $R_c = 31$  MPa et  $R^r = 5$  MPa

Ainsi, une analyse de la modélisation du phénomène de fissuration a été faite. Les variables d'endommagement permettent de caractériser la perte de rigidité, ainsi que

la capacité à reprendre un effort. Ces variables sont des fonctions des déformations plastiques principales. Le modèle est donc en capacité de fournir des ouvertures de fissures. Cette partie est essentielle : le comportement des fibres intervenant en phase post-fissuration, il sera nécessaire d'adapter le modèle à la présence de fibres et d'une éventuelle multi-fissuration.

### 1.4.3 Régularisation de l'endommagement

La modélisation de la fissuration dans les ouvrages est un point clé de la prédiction du comportement, et de la durabilité des structures. Durant la phase de fissuration d'un matériau, il est nécessaire de contrôler l'énergie dissipée, afin de faire correspondre le travail volumique calculé par le modèle éléments finis, et l'énergie surfacique libérée lors de la création d'une fissure. Ceci conduit aux méthodes de régularisation énergétique, nécessaires durant les phases adoucissantes des lois de comportement des matériaux. Cette section présente le principe de fonctionnement des méthodes de régularisation de l'endommagement.

#### 1.4.3.1 La méthode de Hillerborg

Hillerborg [30] a proposé une méthode permettant de s'affranchir de la dépendance du résultat au maillage. Cette méthode consiste à faire dépendre la partie adoucissante de la loi de comportement du matériau à la longueur de l'élément fini. Cette dépendance est faite de sorte que le travail des forces post-pic soit une constante, quelle que soit la taille de l'élément. Si ce travail est noté  $W$ , alors l'égalité à respecter s'écrit dans une direction d'endommagement  $i$  : (1.4.26).

$$W_i = l_i \int_{\bar{\varepsilon}}^{\varepsilon^d} \sigma_i d\varepsilon_i \quad (1.4.26)$$

Avec  $l_i$  la longueur de l'élément fini dans la direction  $i$ ,  $\bar{\varepsilon}$  la déformation marquant le début d'endommagement et  $\varepsilon^d$  la déformation correspondant à un élément totalement endommagé. Ainsi, pour un élément de grande longueur, la partie adoucissante de la loi de comportement aura une pente plus élevée que celle d'un élément de faible longueur, ceci permettant d'obtenir une énergie dissipée indépendante du maillage (Figure 1.36).

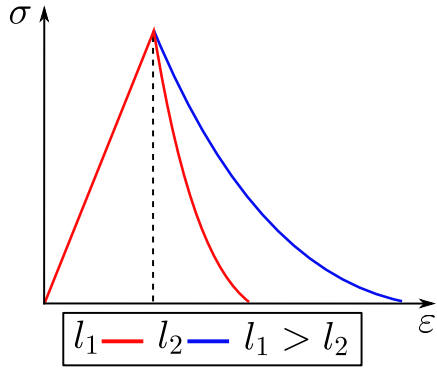


FIGURE 1.36 – Dépendance de la loi de comportement à la taille de l'élément

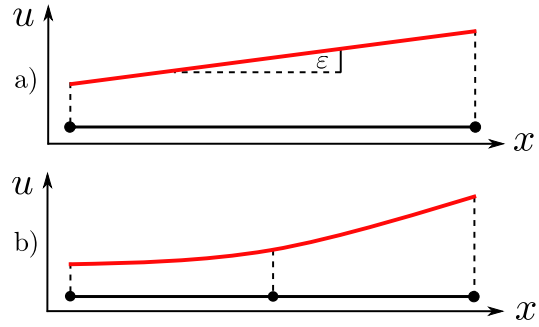


FIGURE 1.37 – Élément fini à interpolation linéaire a) et à interpolation quadratique b)

Cette méthode présente néanmoins une limite. Le calcul aux éléments finis a recours à des fonctions d'interpolation entre les nœuds. L'utilisation de fonctions linéaires signifie que le déplacement  $u$  varie linéairement entre deux nœuds de l'élément, et donc que la déformation  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  est constante. Cependant, lorsque l'on a recours à l'utilisation d'éléments finis quadratiques, c'est à dire à interpolation parabolique, le déplacement  $u$  est représenté par une parabole, et donc la déformation varie d'un nœud à l'autre du même élément fini (figure 1.37). Il est donc possible que le pic de contrainte ait été atteint à un endroit de l'élément, et la longueur sur laquelle l'endommagement doit être régularisé ne peut alors plus être clairement déterminée.

#### 1.4.3.2 La méthode X-FEM : Extended Finite Element Method

La méthode X-FEM, ou méthode des éléments finis enrichis, représente une des solutions pour s'affranchir de la dépendance de la fissuration au maillage. Elle consiste en une modification de la résolution du problème de mécanique des milieux continus, pour le transformer en un problème pouvant comporter des discontinuités dans le champ de déplacement. Cette méthode est basée sur le concept de partition de l'unité introduit par Babuska et Melenk [53]. Ce concept a ensuite été étendu notamment par Moës [55]. La méthode est basée sur le principe suivant : les éléments dans lesquels une fissure est en train de se propager, sont déterminés par la loi de comportement du matériau. Cependant, le champ de déplacement  $u(x)$  n'est plus approximé par des fonctions de formes classiques, mais par des fonctions enrichies d'un saut de déplacement, ce que traduit l'équation (1.4.27)

$$u(x) = \sum_{i \in \Omega} N_i(x) u_i + \sum_{i \in \Omega^*} M_i(x) a_i \quad (1.4.27)$$

Où le domaine  $\Omega$  concerne tous les éléments du maillage, et le domaine  $\Omega^*$  concerne les éléments qui contiennent une fissure,  $u_i$  sont les inconnues de déplacement classiques de la méthode des éléments finis,  $N_i$  les fonctions d'interpolation qui leur sont associées,  $a_i$  les inconnues de l'enrichissement et  $M_i$  les fonctions enrichies. Cette méthode est intéressante en théorie, mais en pratique, elle nécessite des temps de calculs importants, ce qui semble peu envisageable dans un objectif de modélisation à l'échelle de la structure.

### 1.4.3.3 La méthode non locale

La méthode non locale consiste, comme son nom l'indique, à délocaliser une ou plusieurs variables par rapport à un épicycle qui est la position de la variable locale. Cette délocalisation se fait par l'intermédiaire de fonctions "poids", qui en pondérant les variables locales vont diffuser leurs effets sur une distance choisie, qui est intrinsèque à la méthode non locale. Cette méthode comporte deux atouts. Le premier est qu'elle permet de modéliser des phénomènes physiques particuliers qui sont non locaux, simplement à partir des variables locales. La seconde est qu'elle permet de s'affranchir de la dépendance des résultats au maillage dans le cas de la fissuration, puisque les longueurs mises en jeu ne sont plus celles du maillage, mais la longueur de diffusion de la variable non locale. L'énergie dissipée lors de la fissuration ne dépend alors plus du maillage, mais de la longueur non locale.

L'endommagement est fonction de la déformation du matériau. A partir de cette déformation, on définit une déformation non locale  $\bar{\varepsilon}_{eq}$ , qui en un point  $x$  du matériau est une moyenne pondérée de la déformation locale [66] (1.4.28). La pondération s'effectue par l'intermédiaire d'une fonction poids  $g(\xi)$ ,  $\xi$  étant relatif à la position par rapport à  $x$ , dont l'intégrale sur le volume est égale à 1 (1.4.29).

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \frac{1}{V} \int_V g(\xi) \varepsilon(x + \xi) dV \quad (1.4.28)$$

$$\frac{1}{V} \int_V g(\xi) dV = 1 \quad (1.4.29)$$

La fonction poids peut être typiquement une Gaussienne, qui est une fonction en  $e^{-x^2}$ . Le type de fonction poids utilisé est propre à l'allure de délocalisation souhaitée. A partir de l'équation (1.4.28), il est possible d'écrire une formulation différentielle de l'équation non locale, en décomposant la déformation  $\varepsilon$  en série de Taylor (1.4.30).

$$\varepsilon(x + \xi) = \varepsilon(x) + \nabla \varepsilon(x) \xi + \frac{1}{2} \nabla^2 \varepsilon(x) \xi^2 + \dots + \frac{1}{n!} \nabla^n \varepsilon(x) \xi^n \quad (1.4.30)$$

Où  $\nabla^n$  représente l'opérateur gradient d'ordre  $n$ . En remplaçant l'expression (1.4.30) dans (1.4.28), et en négligeant les termes d'ordres supérieurs à deux, on obtient la formulation différentielle de l'équation non locale (1.4.31), avec  $c$  une constante dépendant de la fonction poids utilisée.

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon + c \nabla^2 \varepsilon \quad (1.4.31)$$

Cette formulation n'est pas idéale car elle utilise le second gradient de la déformation locale, ce qui conduit en contexte de calcul élément finis à une nécessité de la continuité de classe  $C^1$  du champ de déplacement. Pour pallier ce problème, il suffit de dériver deux fois l'expression (1.4.31) et de négliger les dérivées d'ordre supérieur à quatre, ce qui conduit à l'expression (1.4.32). En la remplaçant dans (1.4.31), on obtient l'expression de la formulation différentielle de la déformation non locale (1.4.33), qui est une équation de type Helmholtz.

$$\nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} = \nabla^2 \varepsilon \quad (1.4.32)$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq} - c \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon \quad (1.4.33)$$

Afin de résoudre (1.4.33), il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites sur  $\bar{\varepsilon}_{eq}$  ou sur sa dérivée. La condition généralement utilisée est celle définie par défaut dans les codes éléments finis, à savoir  $\nabla \bar{\varepsilon}_{eq} = 0$ . La formulation variationnelle de l'équation (1.4.33) conduit dans un contexte éléments finis à résoudre un système d'équations linéaires, analogue à la résolution d'un problème de diffusion, dont la source est la déformation locale. La solution de cette équation confère une allure diffuse à la déformation initialement localisée.

## 1.5 Conclusion de l'étude bibliographique

Cette étude bibliographique a permis de mettre en évidence les principaux mécanismes que développent les BFUP lorsqu'ils sont soumis à un chargement. Le comportement en compression est faiblement impacté par l'ajout de fibres, et il convient d'effectuer un travail important sur la réponse en traction. Cette réponse dépend fortement des caractéristiques du matériau, et plus particulièrement de la micro-structure de la matrice, du type de fibres, et de leur répartitions et orientations dans le volume. L'ensemble de ces données constituent le point de départ de la modélisation et devront donc être obtenues. La liaison fibre-matrice pourra être caractérisée par des essais d'extraction de fibres. Le point critique représente notamment la prédiction de la position des fibres. Si des méthodes existent, ou sont en développement, pour connaître leurs répartitions et orientations post-coulage, il pourra éventuellement être nécessaire de développer un modèle capable de prédire ces données.

Ensuite, un état des outils actuels, capables de modéliser le comportement mécanique des BFUP a été dressé. Ces outils présentent certaines spécificités intéressantes, qui pourront servir de support à la modélisation. Ces modèles ont cependant parfois montré des difficultés à représenter le comportement des BFUP. Le problème de la prédiction et de la modélisation de la multi-fissuration est au cœur de ces difficultés, et une attention particulière sera donc apportée à la représentation de ce phénomène.

Enfin, la base du modèle constituée par Fluendo3D a été détaillée. Elle apporte un socle robuste à la modélisation, en fournissant des outils déjà fonctionnels, de plasticité, d'endommagement anisotrope.

La modélisation des BFUP devra donc s'orienter dans un premier temps vers l'expression d'une loi régissant l'extraction des fibres en fonction du glissement. Cette loi, devra permettre de prendre en compte des phénomènes tels que l'effet de l'orientation des fibres, la prédiction de la longueur ancrée, ou encore l'écaillage de la matrice. Par la suite, cette loi concernant des fibres uniques devront être généralisées à un ensemble de fibres. Puis, la loi d'endommagement du béton devra être adaptée afin de représenter l'éventuelle phase de multi-fissuration des BFUP. Enfin, l'ensemble des lois et outils développés devront être programmés dans le code éléments finis Cast3m, afin d'être dans un premier temps validés numériquement, puis expérimentalement.

## Chapitre 2

# Modélisation du comportement mécanique des BFUP

## 2.1 Introduction

Ce chapitre présente les équations fondamentales qui sont utilisées dans le modèle de fibres. Ces équations permettent dans un premier temps d'obtenir une description du comportement d'une fibre ancrée dans une matrice cimentaire lorsqu'elle est soumise à une force extérieure orientée de sorte à extraire la fibre de la matrice. Les équations initiales de l'extraction d'une fibre ancrée d'un seul côté sont issues des travaux menés par Nammur, Naaman et Clark [59], mais également des travaux de Zhan et Meschke [92][91] et de Rajagopalan et Parameswaran [68] qui ont proposé un modèle d'extraction de fibres réaliste, en négligeant cependant certains aspects qui seront développés dans ce chapitre, tels que la prise en compte du caractère asymétrique de l'encastrement des fibres dans la matrice. Le travail présenté propose donc une généralisation nécessaire du modèle évoqué, ainsi qu'une nouvelle loi de comportement régissant la phase post-pic de l'extraction des fibres. Puis, les phénomènes engendrés par l'inclinaison des fibres et par le caractère fragile de la matrice sont ajoutés à la description du modèle. Par la suite, le modèle d'extraction de fibres est étendu à un grand nombre de fibres qui peuvent comporter des inclinaisons variées dans un même élément. Enfin, une méthode est proposée afin de représenter la multi-fissuration observée pour certains bétons fibrés, permettant ainsi d'aboutir au modèle de comportement final.

## 2.2 Modélisation de l'extraction d'une fibre droite

L'extraction d'une fibre ancrée dans une matrice se décompose en trois phases [10]. La première est une phase d'élasticité linéaire, liée à la déformation élastique de l'interface. Il s'ensuit alors une phase de décollement progressif de la fibre sur toute sa longueur, générant une non-linéarité dans la courbe force-glissement. La dernière phase concerne l'arrachement de la fibre hors de la matrice, conduisant à terme à son extraction totale. La caractérisation des phénomènes mis en jeu durant ces trois phases est essentielle à la compréhension du comportement global des bétons fibrés. Ces phénomènes sont décrits à l'échelle mésoscopique, correspondant à la taille de l'interface fibre-matrice. En partant de cette échelle afin de comprendre les mécanismes de l'extraction, il sera alors possible de mieux comprendre les comportements macroscopiques observés chez les bétons fibrés. Le cas d'étude considéré ici afin d'obtenir le modèle d'extraction est donc une matrice immobile, contenant une seule fibre sur laquelle est appliquée une force d'extraction orientée selon l'axe d'ancrage de la fibre, lui-même correspondant à

l'axe longitudinal de celle-ci (Figure 2.1). L'objectif de la description du modèle est d'exprimer les forces et glissements de la fibre ancrée durant toutes les phases de son comportement.

### 2.2.1 Phase d'élasticité de l'interface

La phase de linéarité observée sur les courbes décrivant l'extraction d'une fibre est attribuée à une déformation réversible de l'interface liant la matrice et la fibre. Cette première hypothèse se traduit par une relation linéaire liant la contrainte de cisaillement de l'interface et le glissement de la fibre (2.2.1). La figure 2.1 permet de décrire ce phénomène et d'introduire quelques notations :  $F_m$  est la force appliquée au point d'extraction de la fibre,  $s_m$  est le glissement de la fibre en ce même point,  $L$  est la longueur ancrée de la fibre,  $\phi_f$  est son diamètre. Le point d'extraction considéré est le centre de gravité du plan de section droite de la fibre coïncidant avec le plan de fissuration avant chargement. Le repère  $x$  est défini le long de la fibre, son origine étant le point d'application de la force  $F_m$ . Il n'est pas nécessaire de considérer les dimensions de l'interface, cette dernière étant entièrement caractérisée par sa rigidité  $H_f$ .

$$\tau_e(x) = H_f s_e(x) \quad (2.2.1)$$

Dans la relation (2.2.1),  $\tau_e(x)$  représente l'évolution de la contrainte de cisaillement le long de la fibre durant la phase d'élasticité de la loi de comportement de l'interface,  $H_f$  est le module de rigidité de l'interface en  $\text{MPa.m}^{-1}$  et  $s_e(x)$  est le glissement relatif élastique fibre-matrice en tout point  $x$  de la fibre.

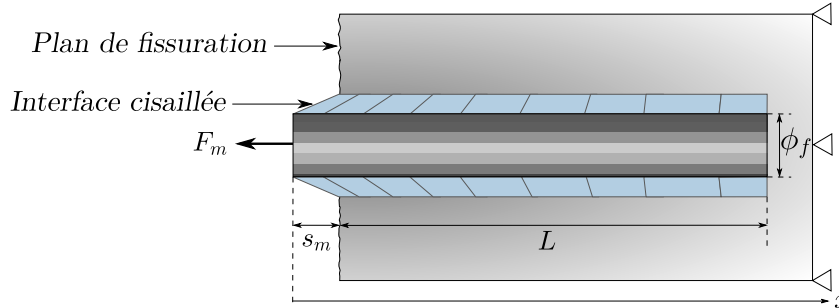


FIGURE 2.1 – Schématisation de l'extraction d'une fibre droite avec effort de traction orienté selon l'axe longitudinal de la fibre, durant la phase d'élasticité de l'interface

L'hypothèse sous-jacente à la figure 2.1 est que la déformation de la matrice proche de la fibre est assimilée à la seule déformation de son interface. Cette seconde hypothèse permet, en outre, de s'affranchir de la définition d'un volume de matrice dans lequel l'effet d'une seule fibre se fait ressentir. La liaison fibre-matrice étant parfaite durant cette phase, il est possible d'écrire la relation (2.2.2).

$$\frac{ds_e}{dx} = \varepsilon_{f,e}(x) \quad (2.2.2)$$

Où  $\varepsilon_{f,e}$  est la déformation élastique de la fibre. Autrement dit, le glissement n'est généré que par une déformation de la fibre et un cisaillement de son interface. En effectuant un bilan des forces sur un tronçon de fibre ancrée dans une matrice de longueur  $dx$ , on obtient l'équation d'équilibre classique (2.2.3), décrivant qu'une variation de force sur la longueur  $dx$  est égale au produit de la contrainte de cisaillement par la surface de contact fibre-matrice.

$$\frac{dF_e}{dx} = \pi\phi_f\tau_e(x) \quad (2.2.3)$$

La loi de comportement de la fibre est donnée par la relation (2.2.4), avec  $A_f$  la section de la fibre et  $E_f$  son module d'élasticité.

$$\frac{F_e(x)}{A_f} = E_f\varepsilon_{f,e}(x) \quad (2.2.4)$$

La combinaison des équations (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4) permet d'obtenir l'équation différentielle régissant le comportement de la fibre durant la phase d'élasticité de l'interface (2.2.5).

$$\frac{d^2F_e}{dx^2} - \frac{4H_f}{E_f\phi_f}F_e = 0 \quad (2.2.5)$$

Afin d'alléger les notations, cette équation peut être réécrite sous la forme donnée en (2.2.6).

$$\frac{d^2F_e}{dx^2} - k_c^2F_e = 0 \quad \text{avec } k_c = \sqrt{\frac{4H_f}{E_f\phi_f}} \quad (2.2.6)$$

Où  $k_c$  est un paramètre de dimension homogène à l'inverse d'une longueur :  $[L^{-1}]$ . A

partir de la figure 2.1, les conditions aux limites sont exprimées en (2.2.7). Il est ainsi possible de résoudre l'équation, dont la solution est donnée par la relation (2.2.8).

$$F_e(x = 0) = F_m \quad \text{et} \quad F_e(x = L) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$F_e(x) = \frac{F_m e^{k_c x} (e^{2k_c(L-x)} - 1)}{e^{2k_c L} - 1} \quad (2.2.8)$$

Le profil de force le long de la fibre est désormais connu, il est une fonction de la longueur ancrée, des rigidités de l'interface et de la fibre, du diamètre de la fibre et de la force appliquée au point d'extraction. La figure 2.2 donne une représentation de l'évolution de la force le long d'une fibre pour trois valeurs du paramètre  $H_f$ . Lorsque la rigidité de l'interface  $H_f$  est faible, l'interface est plus fortement cisailée, tandis que lorsque  $H_f$  est élevée, l'interface se déforme donc moins le long de la fibre, et la force décroît plus rapidement.

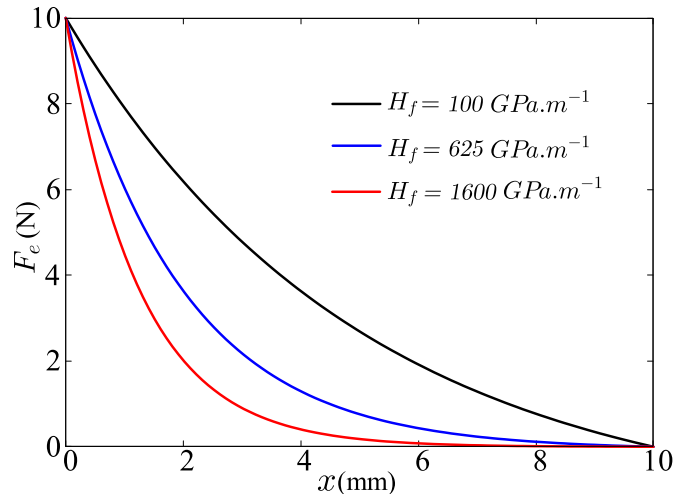


FIGURE 2.2 – Evolution du profil de force le long d'une fibre ancrée dans une matrice pour trois valeurs du paramètre  $H_f$ ,  $F_m = 10$  N,  $L = 10$  mm,  $E_f = 200$  GPa,  $\phi_f = 0,2$  mm

A partir de l'expression de la force (2.2.8), il est possible de connaître le profil de contrainte de cisaillement élastique à l'interface fibre-matrice  $\tau_e(x)$  (2.2.9).

$$\tau_e(x) = \frac{1}{\pi \phi_f} \frac{dF_e}{dx} = -\frac{F_m k_c (e^{k_c(2L-x)} + e^{k_c x})}{\pi \phi_f (e^{2k_c L} - 1)} \quad (2.2.9)$$

De même, l'évolution du glissement de la fibre sur sa longueur ancrée se déduit de la contrainte de cisaillement (2.2.10). Compte tenu de l'orientation du repère  $x$ , un signe négatif est ajouté afin d'obtenir un glissement positif lors de l'extraction.

$$s_e(x) = -\frac{\tau_e(x)}{H_f} = \frac{F_m k_c (e^{k_c(2L-x)} + e^{k_c x})}{\pi \phi_f H_f (e^{2k_c L} - 1)} \quad (2.2.10)$$

L'expression du glissement élastique  $s_e$  au point d'extraction durant la phase d'élasticité peut donc être déterminée en fonction d'une force imposée  $F_m$  :

$$s_e = \frac{F_m k_c (e^{2k_c L} + 1)}{\pi \phi_f H_f (e^{2k_c L} - 1)} \quad (2.2.11)$$

La totalité du glissement de la fibre durant cette phase est donc égale au glissement élastique (2.2.12).

$$s_m = s_e \quad (2.2.12)$$

L'ensemble des équations décrites ici permettent donc de caractériser entièrement le comportement de la fibre durant la phase d'élasticité de l'interface.

## 2.2.2 Phase de décollement

Lorsque la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice devient supérieure à la contrainte admissible par l'interface  $\tau_{max}$ , il y a initiation d'une phase de décollement. Ce décollement se propage progressivement sur une longueur notée  $L_d$ . La zone décollée de la fibre n'est plus liée chimiquement à la matrice, mais frotte désormais sur cette dernière à raison d'une contrainte de frottement notée  $\tau_d$ . Il est généralement admis que cette contrainte est une fonction dépendante du glissement relatif fibre-matrice. Néanmoins, en considérant que les glissements mis en jeu lors de la phase de décollement sont de l'ordre de la centaine de micromètres, il semble loisible de considérer cette contrainte comme constante durant cette phase. Le schéma 2.3 illustre les phénomènes décrits durant le décollement en représentant le profil de contrainte le long de la fibre durant cette phase. Cette hypothèse de profil de contrainte a été introduite par Nammur et al. [59]. La contrainte  $\tau_d$  est ici représentée comme inférieure à  $\tau_{max}$ , néanmoins tous les cas possibles pourront être considérés. Le saut de contrainte entre la zone collée et la

zone décollée est une approximation de la transition entre ces deux états.

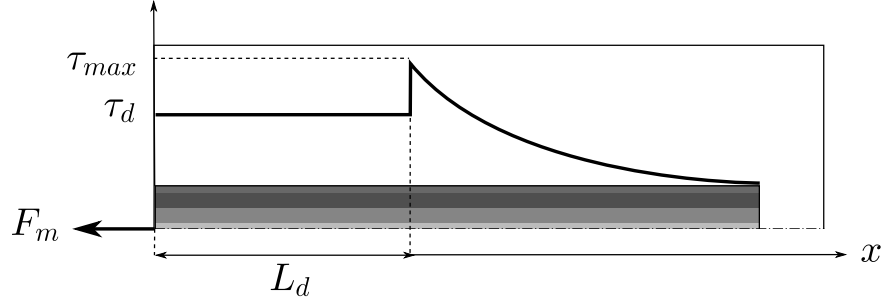


FIGURE 2.3 – Profil de contrainte de cisaillement le long de la fibre durant la phase de décollement

Afin de simplifier l'écriture, on considère que l'origine de l'axe  $x$  se déplace de sorte à ce qu'il corresponde au front de décollement. Durant le décollement, la force résiduelle de la zone collée notée  $F_c$  peut être déterminée en remplaçant l'abscisse  $x$  par 0, la force  $F_m$  par  $F_c$ , ainsi que la longueur ancrée  $L$  par la longueur résiduelle collée  $L - L_d$  dans l'expression de la contrainte de cisaillement (2.2.9). La contrainte au front de décollement étant toujours égale à  $\tau_{max}$ , il est possible de déterminer  $F_c$  (2.2.13).

$$F_c = \frac{\tau_{max} \pi \phi_f (e^{2k_c L} - e^{2k_c L_d})}{k_c (e^{2k_c L} + e^{2k_c L_d})} \quad (2.2.13)$$

L'expression obtenue est une fonction décroissante de  $L_d$  qui devient nulle lorsque  $L_d = L$ . La force caractérisant le début du décollement, notée  $F_{crit}$ , est obtenue par :  $F_{crit} = F_c(L_d = 0)$  (2.2.14).

$$F_{crit} = \frac{\tau_{max} \pi \phi_f (e^{2k_c L} - 1)}{k_c (e^{2k_c L} + 1)} \quad (2.2.14)$$

Connaissant la force appliquée au début du décollement, il est possible de calculer le glissement de la fibre au point d'extraction à cet instant en remplaçant  $F_m$  par  $F_{crit}$  dans (2.2.10).

$$s_{crit} = s_e(x = 0, F_m = F_{crit}) = \frac{\tau_{max}}{H_f} \quad (2.2.15)$$

Il est intéressant de noter dans (2.2.15) que le glissement de début de décollement est

indépendant de la longueur ancrée des fibres. Ce résultat est en accord avec l'hypothèse formulée sur la relation linéaire entre le glissement et le cisaillement durant la phase d'élasticité de l'interface (2.2.1). Le profil de contrainte de cisaillement le long de la partie non décollée de la fibre  $\tau_c$  peut également s'écrire en substituant dans l'expression (2.2.9) la force  $F_m$  par la force présente au front de décollement  $F_c$  et la longueur ancrée initiale par la longueur résiduelle  $L - L_d$ .

$$\tau_c(x) = -\frac{\tau_{max} \left( e^{k_c(2(L-L_d)-x)} + e^{k_c x} \right)}{(e^{2k_c(L-L_d)} + 1)} \quad (2.2.16)$$

Le frottement mobilisé sur la zone décollée de la fibre engendre une force résistante dont la valeur est donnée en (2.2.17).

$$F_d = \pi \phi_f \tau_d L_d \quad (2.2.17)$$

Durant la phase de décollement, la force totale générée par la fibre ancrée est donc la somme des contributions de la zone collée et de la zone décollée :

$$F_m = F_c + F_d \quad (2.2.18)$$

Le glissement de la fibre peut également être déterminé durant cette phase. Ce calcul s'appuie sur le schéma de la figure 2.4, qui représente le profil de force le long de la fibre. Le glissement de la fibre au front de décollement étant indépendant de la longueur résiduelle comme démontré par (2.2.15), il est donc égal à  $s_{crit}$ . Le glissement de la fibre dans la zone décollée s'écrit à partir de sa loi de comportement élastique :

$$s_d = \int_0^{L_d} \frac{\pi \phi_f \tau_d \zeta + F_c}{E_f A_f} d\zeta = \frac{\pi \phi_f}{E_f A_f} \left( \tau_d L_d^2 + \frac{\tau_{max} (e^{2k_c L} - e^{2k_c L_d})}{k_c (e^{2k_c L} + e^{2k_c L_d})} \right) \quad (2.2.19)$$

Où  $\zeta$  est une variable d'intégration relative à la longueur de la zone décollée. Le glissement total durant la phase de décollement s'écrit donc comme la somme des glissements des deux zones :

$$s_m = s_{crit} + s_d \quad (2.2.20)$$

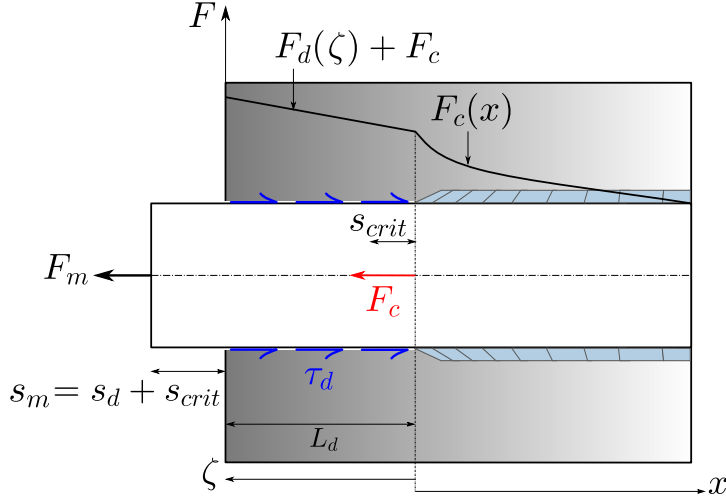


FIGURE 2.4 – Profil de force le long de la fibre durant la phase de décollement

A ce stade, la phase de décollement d'un côté de la fibre est entièrement caractérisée. La nature des équations ne permet pas d'exprimer directement la force en fonction du glissement, la force et le glissement se calculent ainsi comme un couple en fonction de la variable  $L_d$ . Dans cette méthode, initialement proposée par Zhan, le choix a été fait de considérer uniquement le cas où  $\tau_{max} = \tau_d$ . Ce choix permet d'éviter un snap-back sur la loi de décollement de la fibre. En effet, on démontre que la condition  $\tau_{max} = \tau_d$  est suffisante pour que les solutions de  $\frac{\partial F_m}{\partial L_d} = 0$  et  $\frac{\partial s_m}{\partial L_d} = 0$  soient en dehors de l'intervalle de variation de  $L_d$ . Le choix d'une valeur de contrainte de frottement  $\tau_d$  inférieure à celle de la contrainte de décollement  $\tau_{max}$  entraîne potentiellement un phénomène de snap-back. Dans le cadre de ce travail, cette possibilité sera envisagée et même privilégiée car le snap-back est justifiable du point de vue de la physique.

La figure 2.5 schématise la courbe force-glissement d'une fibre ancrée d'un seul côté dans une matrice jusqu'à la fin de la phase de décollement. La fibre suit d'abord une phase élastique, puis amorce son décollement. La force croît jusqu'à une certaine valeur de  $L_d$  puis diminue. Lorsque le décollement progresse à nouveau, la force continue de décroître, puis apparaît une phase où le glissement diminue également. Ceci signifierait que la fibre re-renterait dans sa cavité ce qui n'est pas envisageable. En réalité, l'énergie accumulée durant la phase de décollement est trop importante pour l'interface fibre-matrice, il se produit alors un saut brutal conduisant la fibre au décollement maximal. Ce phénomène de snap-back caractérise donc l'instabilité du phénomène de décollement, décrite par plusieurs auteurs [82][59]. Lorsque le glissement du côté le moins ancré de la fibre diminue, la fibre commence en réalité à s'extraire de la matrice. Ce phénomène

est décrit en 2.2.4.

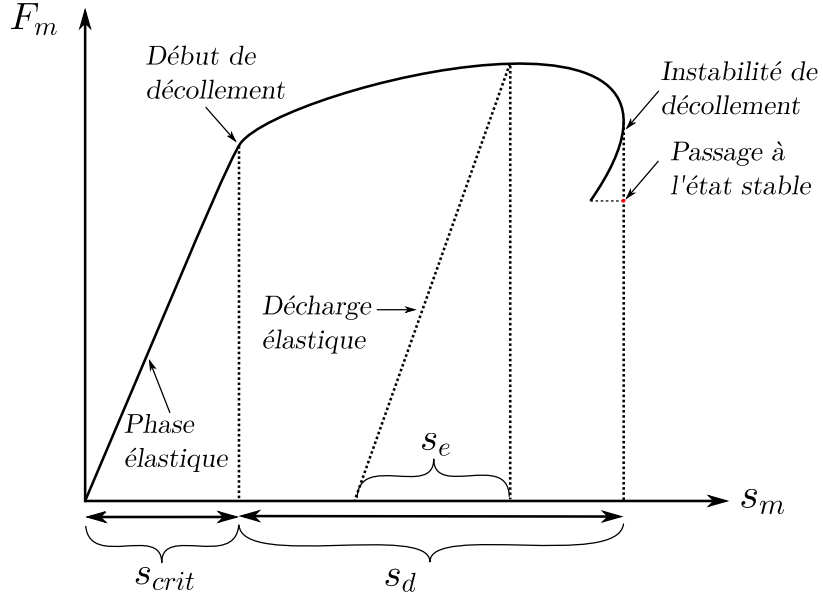


FIGURE 2.5 – Courbe force-déplacement, instabilité de décollement de la fibre

### 2.2.3 Extension au cas des fibres doublement ancrées

Les équations décrites jusqu'ici concernent l'extraction d'une fibre qui serait ancrée dans une matrice par une seule de ses extrémités. Or, en contexte de structure réelle, chacune des fibres est ancrée de chaque côté de la fissure qu'elle traverse. De nombreux auteurs considèrent dans le calcul de l'ouverture de fissure, qu'il résulte d'un glissement égal de chaque côté de la fibre, ce qui conduit à l'approximation  $w = 2s_m$ , avec  $w$  l'ouverture de fissure [25][28]. L'approche décrite ici décompose l'ouverture de fissure comme étant la somme des glissements de chacun des côtés de la fissure. La variabilité du rapport des longueurs ancrées de chacun des côtés d'une fissure conduit à considérer plusieurs cas.

La figure 2.6 représente les courbes force-glissement agissant des deux côtés de la fibre lors de son extraction. L'ancrage de la fibre est asymétrique, le côté N°1 étant le côté le moins ancré. Les courbes force-glissement étant dépendantes de l'ancrage de la fibre, sont également dissymétriques. Sur cette représentation, le côté le moins ancré atteint son pic de force  $F_{max}$  avant même que le côté N°2 ait commencé à être décollé, ce qui représente un cas potentiel. Il est également possible que les deux fibres se décollent au cours du chargement. Cependant le côté N°1 sera toujours limitant du point de vue de la force maximale. L'ouverture de fissure  $w$  sera alors calculée comme la somme des

glissements de chacun des côtés de la fissure en tenant compte de leurs configurations potentiellement différentes (2.2.21). Lorsque le côté N°1 dépasse son pic de force, le côté N°2 se décharge. La décharge s'effectue alors sans supposer que la fibre retourne dans sa cavité par l'effet d'élasticité de l'interface, sauf si le côté N°2 n'est pas encore décollé.

$$w = s_{m_1} + s_{m_2} \quad (2.2.21)$$

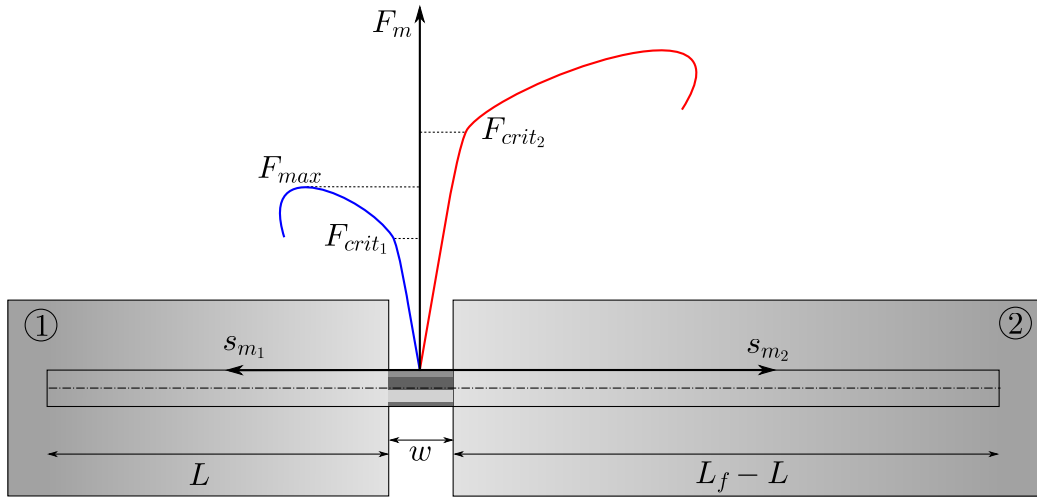


FIGURE 2.6 – Extraction d'une fibre ancrée à ses deux extrémités

### 2.2.4 Phase d'extraction des fibres

Lorsque le décollement atteint son point d'instabilité la fibre commence à s'extraire en générant un frottement avec la matrice. Afin de retranscrire ce phénomène, l'approche adoptée consiste à déterminer une loi de comportement phénoménologique caractérisant la force d'extraction nécessaire au glissement de la fibre durant cette phase. Les hypothèses préliminaires formulées sont les suivantes :

- Toute fibre qui s'arrache d'une matrice cimentaire par glissement, ne glisse que d'un côté de la fissure.
- La rétractation élastique des fibres est négligée au moment de l'extraction car elle est considérée comme faible devant le glissement.
- Le glissement de la fibre est uniforme le long de celle-ci.

- La contrainte de cisaillement fibre-matrice est uniforme le long de la fibre, et varie selon le glissement.

Afin d'appréhender les phénomènes mis en jeu durant l'arrachement, c'est l'évolution de la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice qui constitue le support de l'élaboration de la loi d'arrachement. Cette contrainte s'exprime par le rapport de la force d'arrachement sur la la surface ancrée résiduelle de la fibre (2.2.22).

$$\tau_p(s_p) = \frac{F_m}{\pi \phi_f (L - s_p)} \quad (2.2.22)$$

Avec  $\tau_p(s_p)$  la contrainte de cisaillement durant la phase d'arrachement,  $s_p$  le glissement dû à l'arrachement, et  $L - s_p$  la longueur d'encastrement résiduelle de la fibre. L'objectif est donc de définir une loi de comportement régissant l'évolution de cette contrainte à partir de données expérimentales. L'élaboration de cette force d'arrachement concerne initialement les fibres extraites selon leur axe longitudinal, dont la longueur encastree est connue. Les données expérimentales utilisées sont principalement issues des articles de Khabz, Shannag et al., Deng et al. et [37] [32] [21]. Ces données ont un point commun, elles concernent, au moins en partie, l'étude de l'influence de la longueur encastree de fibres métalliques rectilignes et cylindriques, sur la force d'extraction nécessaire à l'arrachement de ces fibres ancrées dans leurs matrices. Plusieurs types d'allures sont observées expérimentalement, et la loi développée devra donc être capable de reproduire l'ensemble de ces allures.

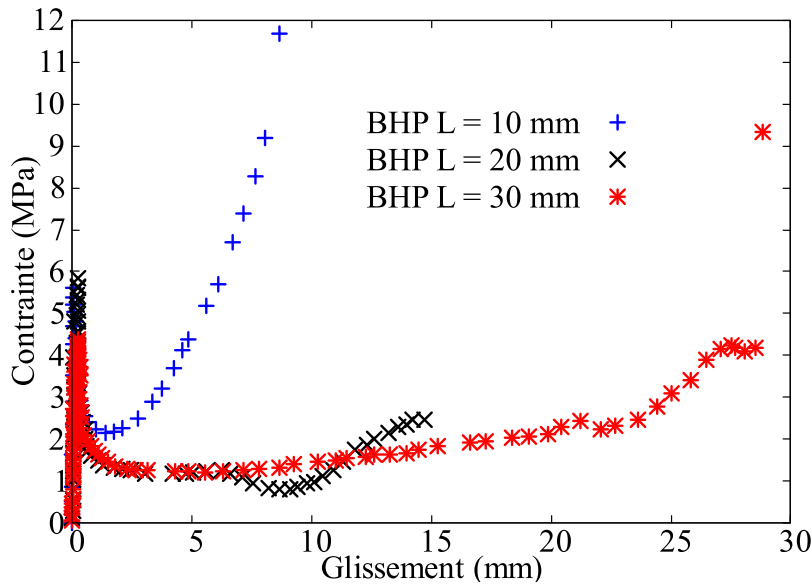


FIGURE 2.7 – Contrainte de cisaillement expérimentale pour un BHP d'après [21]

Le cas présenté dans la figure 2.7 est issu de l'article de Deng et al. [21], dans lequel ils réalisent, entre autres, des essais d'extraction de fibres métalliques ancrées dans un béton à haute performance pour trois longueurs ancrées. La figure 2.7 fait apparaître l'allure de la contrainte de cisaillement expérimentale obtenue. Il s'agit ici de la contrainte globale  $\tau(s_m) = \frac{F_m}{\pi\phi_f(L - s_m)}$ , exprimée en fonction du glissement d'un seul des côtés de la fibre. Cependant la loi développée ici porte uniquement sur la phase post-pic. C'est cet exemple qui illustrera l'élaboration de la loi car il regroupe l'ensemble des phénomènes complexes impliqués lors de l'extraction. Nous montrerons par la suite que cette loi permet de reproduire les comportements plus "simples". Les évolutions des contraintes observées en figure 2.7 sont similaires pour les trois longueurs ancrées, et l'arrachement peut être décomposé selon trois phénomènes principaux.

La contrainte passe dans un premier temps par un pic, représentant la contrainte maximale obtenue durant la phase de décollement. Durant cette phase, le profil de contrainte le long de la fibre évolue (Figure 2.3) et la contrainte moyenne  $\tau$  passe par un pic comme en atteste la figure 2.8 donnant l'évolution de cette contrainte moyenne en fonction de la longueur décollée  $L_d$ . L'expression de  $\tau$  est obtenue par la relation (2.2.23).

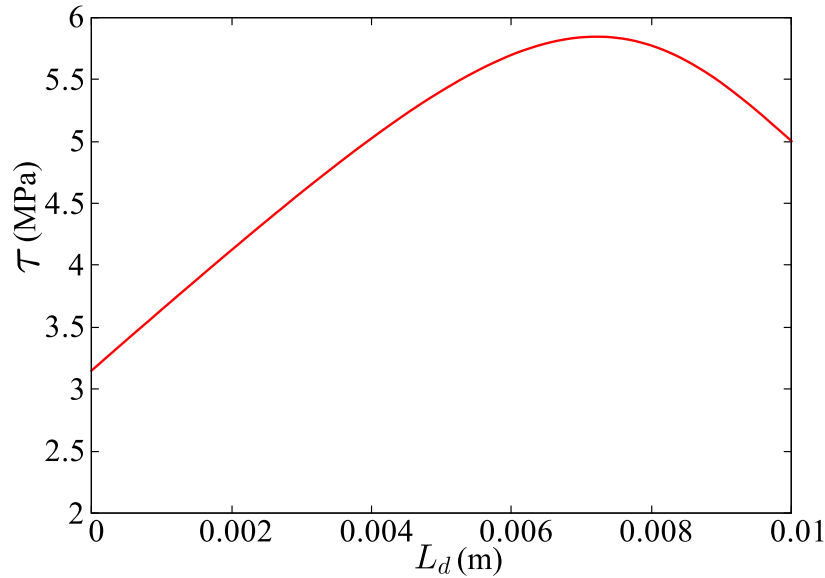


FIGURE 2.8 – Évolution de la contrainte de cisaillement durant la phase de décollement,  $L = 0,01$  m,  $H_f = 10^6$  MPa/m,  $\phi_f = 0,2$  mm,  $E_f = 200$  GPa,  $\tau_{max} = 10$  MPa,  $\tau_d = 5$  MPa

$$\tau = \tau_d \frac{L_d}{L} + \frac{1}{L} \int_0^{L-L_d} \tau_c(x) dx = \tau_d \frac{L_d}{L} + \frac{\tau_{max} (e^{2k_c L} - e^{2k_c L_d})}{L k_c (e^{2k_c L} + e^{2k_c L_d})} \quad (2.2.23)$$

Ainsi, le pic de contrainte ne correspond ni à  $\tau_d$ , ni à  $\tau_{max}$ , mais à une valeur intermédiaire. Néanmoins, à la fin de la phase de décollement pour  $L_d = L$ , la contrainte atteint nécessairement la valeur de  $\tau_d$  et c'est donc cette valeur qui constituera le point de départ de l'évolution de la contrainte d'extraction.

Une fois la valeur de  $\tau_d$  atteinte, la contrainte diminue à nouveau pour atteindre sa valeur minimale. Cette phase est attribuée à un phénomène d'abrasion, durant lequel le glissement de la fibre entraîne un endommagement de la matrice, provoquant une modification des propriétés mécaniques de l'interface et conduisant dès lors à une contrainte de frottement différente de  $\tau_d$ .

Par la suite, un palier, plus ou moins long selon la longueur encastrée, apparaît. Ce palier peut être horizontal ou légèrement croissant. Ce phénomène pourrait s'expliquer par une abrasion de la matrice, qui entraînerait une accumulation de particules venant gêner le processus d'extraction.

Enfin, la contrainte d'interface augmente rapidement à mesure que la longueur d'extraction devient proche de celle encastrée initiale. Plusieurs hypothèses possibles sont proposées afin d'expliquer ce phénomène. La première, est que l'abrasion de la matrice devenant trop importante entraînerait une accumulation de particules autour de la fibre, ceci provoquant un "blocage" de la fibre et donc une augmentation de la contrainte moyenne à mesure que la fibre est extraite. La deuxième explication pourrait provenir du fait que chaque fibre possède un défaut à son extrémité, lié au processus de fabrication. Ainsi, plus la longueur encastrée diminue, plus l'effet de ce défaut devient prépondérant sur la contrainte moyenne. Ces phénomènes ont déjà été observés par Wille et al. [86] [84] qui ont étudié l'évolution de la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice au cours de l'extraction pour différents types de matrices.

La figure 2.9 met en évidence quatre résultats : en a) l'évolution de la contrainte fibre-matrice pour trois bétons à ultra hautes performances (BUHP) et en b) la même évolution mais pour un béton à hautes performances (BHP). Dans le cas des BUHP, la contrainte augmente dès le début de l'extraction, tandis que pour le BHP, la contrainte diminue rapidement avant de se stabiliser. Les BUHP sont caractérisés par un squelette granulaire très dense et l'effet de l'accumulation de particules est donc immédiat, ce qui implique l'augmentation de la contrainte. Concernant le BHP de squelette granulaire moins compact, l'accumulation de particules n'est pas immédiate car elle nécessite une abrasion plus importante, et permet uniquement de stabiliser la contrainte à une valeur constante. Néanmoins dans les deux cas, l'effet d'un défaut d'extrémité des fibres est

à considérer en parallèle de l'accumulation de particules. L'hypothèse d'un défaut à l'extrémité de la fibre, ajouté à l'abrasion de la matrice permettrait également d'expliquer le fait que certaines fibres très courtes voient leur contrainte d'interface augmenter plus fortement que des fibres longues. En effet, l'abrasion de la matrice dans le cas d'une fibre faiblement ancrée est plus faible, le défaut peut donc "s'accrocher" à un support moins dégradé, ce qui entraîne une forte élévation de la contrainte en fin d'extraction.

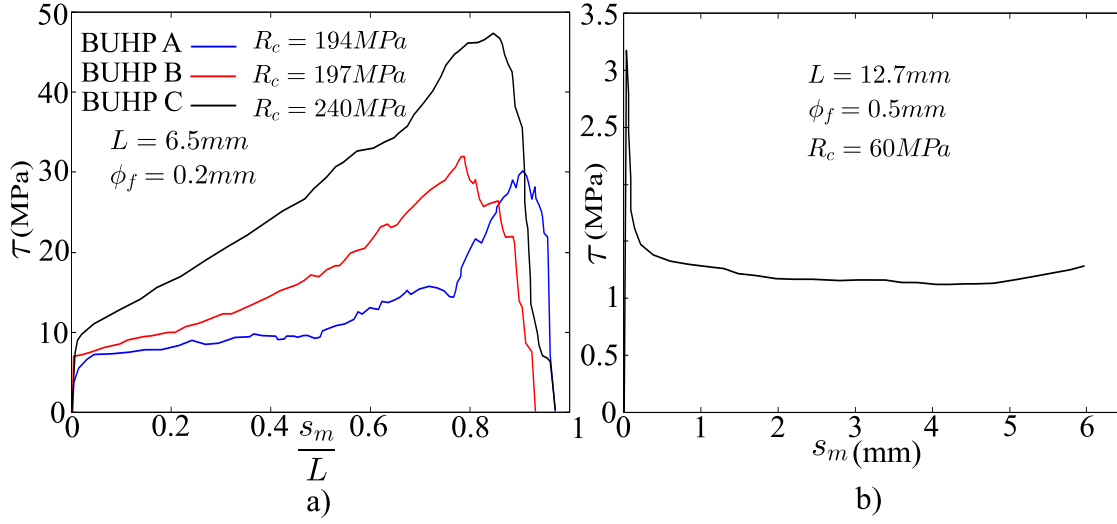


FIGURE 2.9 – Évolution de la contrainte de cisaillement fibre-matrice moyenne lors d'un essai d'extraction de fibres droites [84][85] a) BUHP b) BHP

A partir de la décomposition de ces phénomènes, il est proposé ici une loi phénoménologique, exprimant la contrainte à l'interface fibre-matrice en fonction du glissement dû à l'arrachement (2.2.24).

La figure 2.10 donne une représentation des trois phénomènes régissant l'extraction d'une fibre, ainsi que l'allure générale de la contrainte de cisaillement théorique développée ici.

$$\tau_p(s_p) = \underbrace{\tau_d \frac{s_k}{s_k + s_p}}_{\text{Abrasion}} + \underbrace{\frac{M_0 s_p L}{(L + L_0)^2}}_{\text{Accumulation de particules}} + \underbrace{\frac{f_0}{\pi \phi_f (L - s_p)}}_{\text{Défaut d'extrémité}} \quad (2.2.24)$$

Avec  $s_k$  un glissement caractéristique permettant de piloter la vitesse de la phase d'abrasion,  $s_p$  le glissement relatif fibre-matrice dû à l'arrachement,  $M_0$  le module d'érouissage relatif à l'accumulation de particules,  $L_0$  une longueur caractéristique permettant de prendre en compte l'impact de la longueur ancrée sur l'abrasion, et  $f_0$

une force constante, qui représente l'influence d'un éventuel défaut situé à l'extrémité de la fibre.

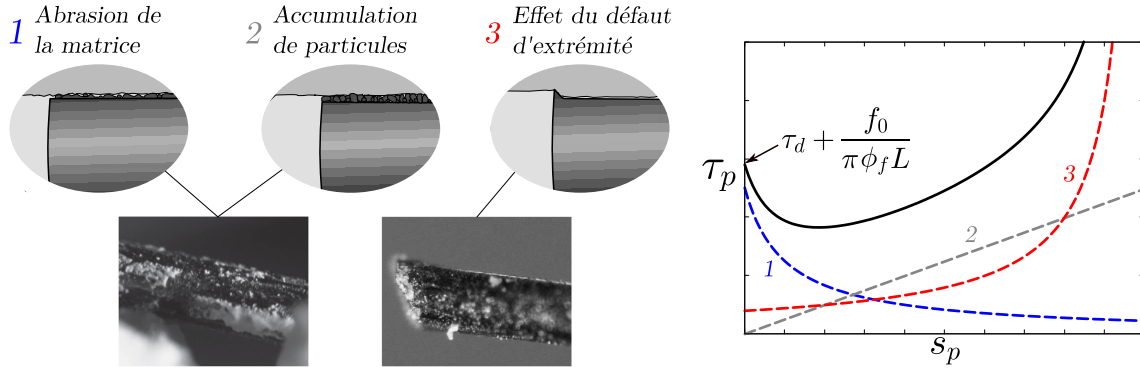


FIGURE 2.10 – Décomposition de la contrainte de cisaillement d'extraction selon trois phénomènes (images [86] [84])

La force d'extraction peut donc se déduire de la contrainte, elle est exprimée par la relation (2.2.25). Cette force est également décomposée en trois termes qui sont chacun relatifs à un phénomène régissant l'arrachement.

$$F_m(s_p) = \pi \phi_f \left( \underbrace{\tau_d \frac{s_k}{s_k + s_p}}_{\text{Abrasion}} + \underbrace{M_0 \frac{s_p L}{(L + L_0)^2}}_{\text{Accumulation de particules}} \right) (L - s_p) + \underbrace{f_0}_{\text{Défaut d'extrémité}} \quad (2.2.25)$$

Le défaut d'extrémité s'active à l'instant où la fibre commence à s'arracher. En fonction des paramètres utilisés, il se peut qu'un saut de force lié à ce défaut se produise. La force  $f_0$  est en réalité la force nécessaire pour mettre en mouvement ce défaut dans la cavité de la fibre, ce phénomène est caractérisé par une rigidité permettant de développer  $f_0$ . Cette rigidité du système d'about conduit à un glissement supplémentaire  $s_0$  avant que l'extrémité de la fibre ne commence à s'extraire. Ne pouvant pas connaître de manière précise les caractéristiques géométriques de ce système qui permettrait de déterminer sa rigidité, il est choisi de considérer la rigidité initiale  $k_0$  de l'extraction durant la phase d'élasticité de l'interface. Le glissement nécessaire à la mise en mouvement du défaut d'extrémité est ainsi obtenu par :

$$s_0 = \frac{f_0}{k_0} \quad (2.2.26)$$

Le glissement total du côté de la fibre qui s'extraît s'écrit donc :

$$s_m = s_{crit} + s_d + s_0 + s_p \quad (2.2.27)$$

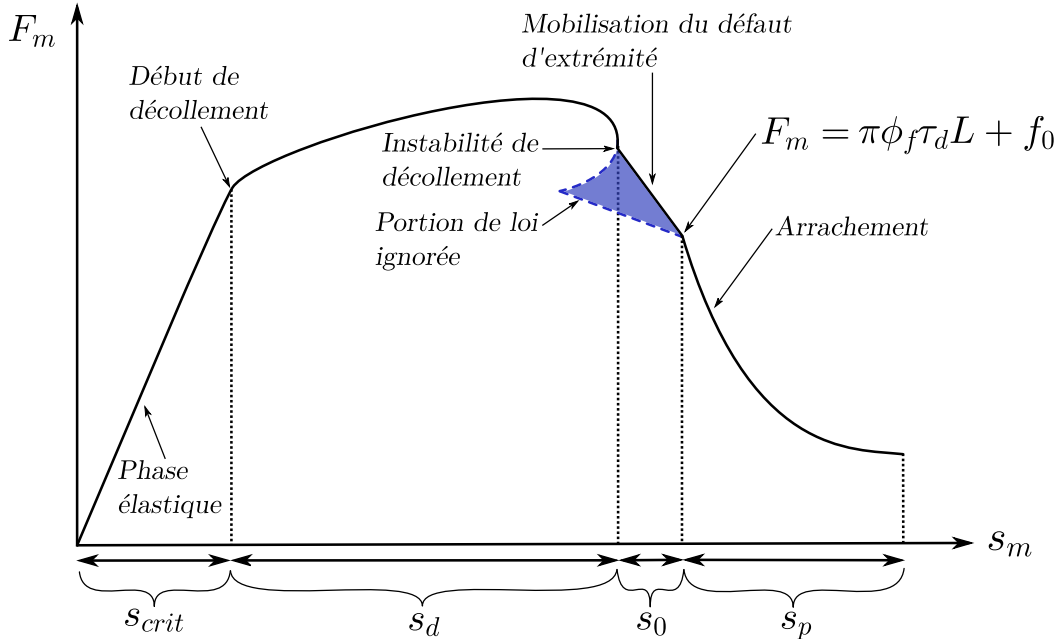


FIGURE 2.11 – Effets du défaut d'extrémité et de l'arrachement sur l'extraction d'une fibre droite

La figure 2.11 décrit l'évolution de la force en fonction du glissement total observé lors de l'extraction d'une fibre ancrée d'un seul côté. Les pointillés représentent la courbe théorique d'extraction des fibres, tandis que la courbe continue représente la loi suivie dans le modèle. Lorsque le snap-back se produit, la force et le glissement passent directement au point de mise en mouvement du défaut d'extrémité avant que la fibre ne commence à s'arracher. Connaissant le glissement de la fibre sur ses deux côtés, l'ouverture de fissure totale durant la phase d'arrachement pour une fibre ancrée sur ses deux côtés peut donc être écrite par :

$$w = s_{m_1} + s_{m_2} = s_{crit_1} + s_{d_1} + s_0 + s_{p_1} + s_{m_2} \quad (2.2.28)$$

Où  $s_{m_2}$  peut prendre les valeurs de  $s_{e_2}$  ou  $s_{crit_2} + s_{d_2}$  en fonction de l'état décollé ou non du côté le plus ancré. L'hypothèse d'extraction uniquement du côté le moins ancré conduit à ne considérer qu'un seul terme  $s_{p_1}$ , même dans le cas où les ancrages seraient

égaux des deux côtés de la fissure.

## 2.2.5 Phénomènes complémentaires

### 2.2.5.1 Prise en compte d'un cône de rupture de la matrice

Les courbes expérimentales donnant la force développée en fonction de la longueur ancrée de fibres droites uniques, permettent de remarquer que la chute de force s'effectue systématiquement avant d'atteindre la longueur maximale du glissement correspondant à la longueur ancrée. Cette diminution brusque peut être due à la rupture d'un cône de béton en traction. En effet, il existe un effort d'arrachement pour lequel le béton n'est plus en équilibre, ce qui conduit à la formation d'un cône de rupture entraînant la chute brutale de la force d'extraction de la fibre. En écrivant l'équilibre entre la force d'extraction d'une fibre, et la résistance de la surface d'un cône de rupture du béton, il est possible de déterminer l'ancrage résiduel de la fibre  $L - s_p$  pour l'effort pour lequel le cône se rompt. Cette longueur du cône de rupture est calculée de sorte qu'un tronçon de cône d'un diamètre de base  $\phi_f$  s'évasant selon un angle  $\alpha_c$  et dont la surface enveloppe résiste à une contrainte égale à la résistance à la traction de la matrice  $R_t$ , équilibre la force d'extraction. La force admissible par ce cône s'exprime donc par (2.2.29). Il est intéressant de noter que d'après les corrélations effectuées entre le modèle et des résultats expérimentaux, l'angle  $\alpha_c$  serait compris entre  $30^\circ$  et  $45^\circ$ .

$$F_{co} = \pi(L - s_p) \tan \alpha_c (\phi_f + (L - s_p) \tan \alpha_c) R_t \quad (2.2.29)$$

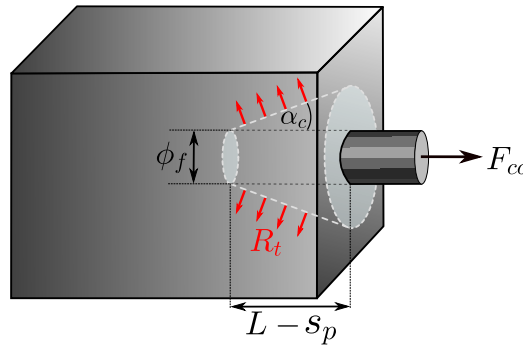


FIGURE 2.12 – Visualisation du mécanisme d'apparition d'un cône de rupture durant l'extraction

La rupture de ce cône se produit lorsque la force dans la fibre devient supérieure à  $F_{co}$ .

$$F_m \geq F_{co} \quad (2.2.30)$$

### 2.2.5.2 Rupture des fibres

Lorsqu'une fibre se trouve trop ancrée, il s'avère qu'elle ne glisse pas de la matrice mais se rompt. Cette rupture se produit lorsque la contrainte dans la fibre atteint sa limite ultime  $f_u^f$ . La force de traction admissible par la fibre est donc :

$$F_u = \pi \frac{\phi_f^2}{4} f_u^f \quad (2.2.31)$$

La fibre se rompt lorsque la force appliquée devient supérieure à la force admissible, ce qui s'écrit :

$$F_m \geq F_u \quad (2.2.32)$$

## 2.3 Validation expérimentale du modèle de fibres droites

Cette partie permet de confronter le modèle aux résultats expérimentaux obtenus lors d'essais d'extraction de fibres métalliques droites ancrées dans des matrices cimentaires, pour plusieurs longueurs d'ancrage. La confrontation s'appuie sur deux sources de données expérimentales représentant les deux types d'allures de contrainte de cisaillement observés, qui correspondent à la chute rapide de la contrainte post-pic et à une augmentation immédiate de la contrainte post-pic.

### 2.3.1 Source expérimentale N°1

La première source de données expérimentales est issue des travaux de [37]. Les résultats exploités ici concernent les essais d'extraction des fibres droites et métalliques. Le tableau 2.1 regroupe les principales caractéristiques de la matrice et des fibres utilisées lors des essais. Les fibres se caractérisent par un diamètre et une longueur relativement

élevés. La matrice est, quant à elle, constituée d'un squelette granulaire assez dense bien que la résistance à la compression obtenue à 28 jours soit celle d'un béton ordinaire (BO). Les essais sont réalisés pour cinq longueurs d'encastrement des fibres qui sont 5/10/15/20/25 mm. Les échantillons sont des "dogbones" en béton constitués de deux blocs dissociés, afin de s'assurer que seule la contribution de la fibre est analysée. Les résultats obtenus sont des courbes donnant la force d'extraction des fibres en fonction de l'ouverture entre les deux blocs de béton. La figure 2.13 permet de comparer les résultats expérimentaux à ceux du modèle. La phase pré-pic des essais n'étant pas assez précisément représentée dans les graphes de l'étude [37], seule la phase post-pic est analysée.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<i>Caractéristiques du béton pour 1 m<sup>3</sup></i>			
Résistance à la compression à 28 jours	$R_c$	40	MPa
CEM II 42,5 A-V	-	556	kg
Sable 0,3/2,5 mm	-	863	kg
Sable 0/0,5 mm	-	288	kg
Filler (Poudre de dolomite)	-	150	kg
Micro-silice	-	81	kg
Eau efficace	-	247	l
$E_{\text{eff}}/c$	-	0,44	-
Sika EVA 26	-	9	l
Sika AERS S (10%)	-	2	l
<i>Caractéristiques des fibres métalliques</i>			
Module d'élasticité	$E_f$	200	GPa
Contrainte ultime	$f_u^f$	1100	MPa
Longueurs ancrées	$L$	5/10/15/20/25	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,75	mm

TABLE 2.1 – Caractéristiques des matériaux utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°1 [37]

La figure 2.13 montre que le modèle reproduit la tendance des courbes expérimentales. Durant la phase d'extraction la force décroît peu, ce qui implique que la contrainte de cisaillement augmente fortement au cours du glissement. Ceci peut s'expliquer par la nature des composants de la matrice dans laquelle plusieurs types de fines ont été ajoutées, ce qui peut conduire à une accumulation importante de particules. De plus, les fibres sont de diamètre relativement grand et ont été obtenues par découpe de fibres à crochets, la présence d'un défaut d'extrémité conséquent est donc à envisager. La fin d'extraction est ici fidèlement représentée par le phénomène de rupture du cône de

béton, produisant la chute de force avant l'atteinte de l'extraction maximale. Enfin, il est possible de s'interroger sur la validité du résultat expérimental obtenu pour un ancrage de 15 mm, la force étant plus importante que celle pour la fibre ancrée de 20 mm. Les valeurs des paramètres matériaux utilisés dans le modèle pour ce calage sont données en tableau 2.2.

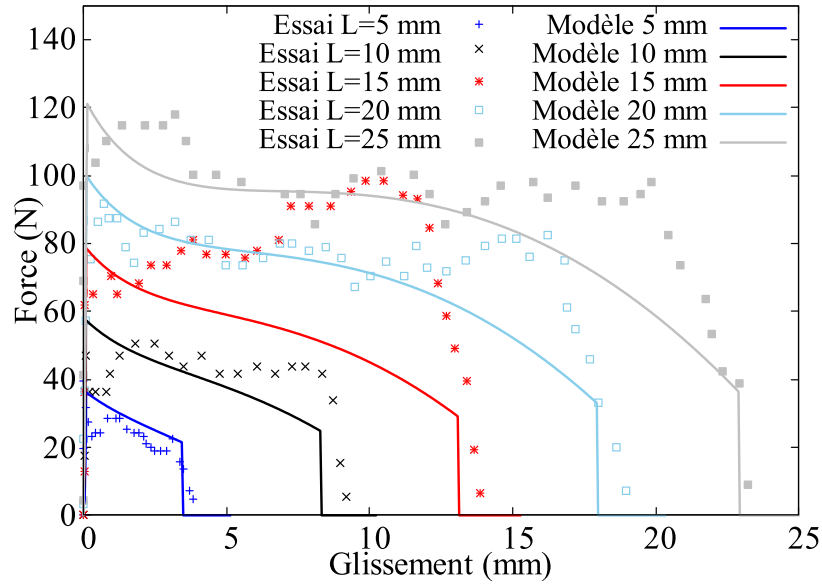


FIGURE 2.13 – Comparaison des forces d'extraction théoriques et expérimentales dans le cas d'un béton ordinaire [37]

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	45000	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	2	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	1,8	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$5e^{-3}$	m
Force d'about	$f_0$	15	N
Angle de rupture du cône de béton	$\alpha_c$	45	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	8	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	0,01	m
Résistance à la traction du béton	$R_t$	3	MPa
Module d'élasticité des fibres	$E_f$	200000	MPa

TABLE 2.2 – Paramètres du modèle et leurs valeurs utilisées pour caler les résultats des essais d'extraction de la source expérimentale N°1 [37]

### 2.3.2 Source expérimentale N°2

La seconde source expérimentale concerne les essais de Deng et al. [21]. Dans cette étude, l'influence de la longueur encastree est étudiée pour deux catégories de matrices : un béton ordinaire et un béton à hautes performances. Les fibres métalliques sont, pour chacune des matrices, encastrees de 10 mm, 20 mm et 30 mm. Les fibres sont ancrées par un seul de leur côté. Les déformations élastiques, de la partie initialement libre des fibres, entre la matrice et le dispositif d'extraction, ont été retranchées aux résultats afin d'améliorer la précision de la valeur du glissement. Seuls les résultats issus des essais réalisés avec un béton à hautes performances (BHP) sont présentés ici, les allures des résultats obtenus avec le béton ordinaire étant similaires. Le tableau 2.3 fournit les caractéristiques de la matrice et des fibres utilisées.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<i>Caractéristiques du béton pour 1 m<sup>3</sup></i>			
Résistance à la compression à 28 jours	$R_c$	69,9	MPa
Résistance à la traction à 28 jours	$R_t$	4,7	MPa
Ciment	-	438	kg
Sable	-	574	kg
Gravier 5/20 mm	-	1190	kg
Eau efficace	-	176	l
$E_{\text{eff}}/c$	-	0,4	-
Superplastifiant	-	4,4	kg
<i>Caractéristiques des fibres métalliques</i>			
Module d'élasticité	$E^f$	200000	MPa
Contrainte ultime	$f_u^f$	3800	MPa
Longueurs ancrées	$L$	10/20/30	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,28	mm

TABLE 2.3 – Caractéristiques matériaux utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°2 [21]

Afin de faire correspondre le modèle et la configuration de l'expérience, seul le glissement d'un côté de la fibre est considéré dans le modèle. La figure 2.14 permet de visualiser la corrélation entre le modèle et les résultats expérimentaux pour les trois longueurs d'ancrage. Les résultats montrent que la force augmente de manière quasi-linéaire jusqu'au pic avec une rigidité plus élevée lorsque l'ancrage est plus important. Puis la force décroît rapidement jusqu'à atteindre un palier. Enfin, la force diminue à nouveau avant de décroître brutalement jusqu'à une valeur nulle, quelques millimètres

avant la fin de son extraction. La décroissance rapide post-pic peut s'expliquer par la différence élevée entre les contraintes de décollement et de frottement, ainsi que par une modification importante des propriétés mécaniques de l'interface. Le plateau peut à nouveau être attribué à l'abrasion de la matrice ainsi qu'à la présence d'un défaut d'extrémité des fibres. Enfin, la fin d'extraction s'explique par la rupture d'un cône de béton, qui se produit avant que la totalité de la fibre ne soit arrachée. Les paramètres utilisés dans le modèle pour ce calage sont donnés en tableau 2.4.

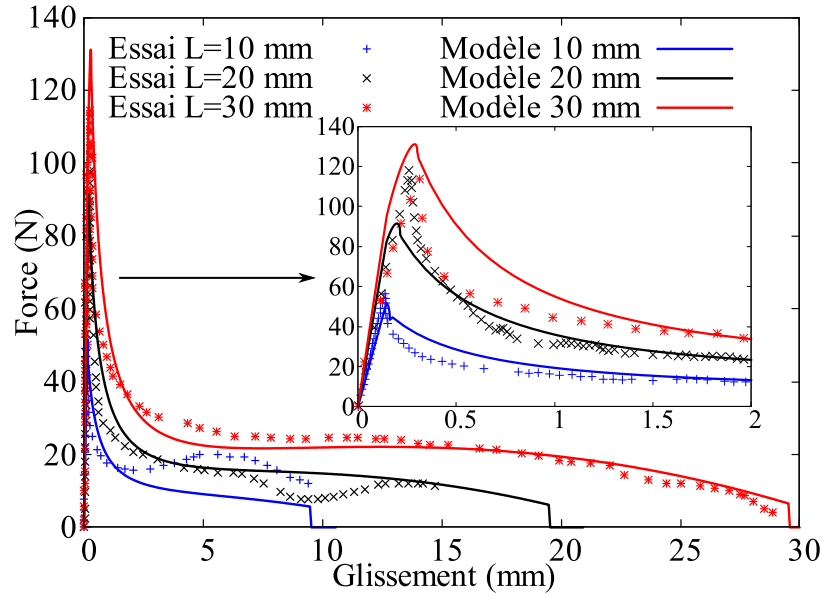


FIGURE 2.14 – Comparaison des forces d'extraction théoriques et expérimentales dans le cas d'un BHP [21]

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	45000	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	6,5	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	4,5	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$5e^{-4}$	m
Force d'about	$f_0$	5	N
Angle de rupture du cône de béton	$\alpha_c$	30	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	4	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	0,01	m
Résistance à la traction du béton	$R_t$	4,7	MPa

TABLE 2.4 – Paramètres du modèle utilisés lors des essais d'extraction de la source expérimentale N°2 [21]

### 2.3.3 Comparaison entre les deux résultats expérimentaux

D'un point de vue expérimental, deux types de bétons et de fibres ont été étudiés. Les matrices cimentaires sont de natures différentes, la première étant un béton ordinaire à squelette granulaire dense, et la seconde étant un béton à hautes performances sans addition de fines. Les fibres ont un rapport de diamètre supérieur à trois. Dans les deux cas, le modèle a pu reproduire la tendance globale du comportement lors de l'extraction des fibres pour l'ensemble des ancrages. Ceci permet d'en conclure que le modèle est adaptable à une large gamme de fibres et de matrices. L'analyse des paramètres du modèle montre que les différences essentielles en termes de valeurs concernent :  $\tau_{max}$ ,  $\tau_d$ ,  $s_k$ ,  $M_0$  et  $f_0$ . En reliant les valeurs de ces paramètres aux caractéristiques des matériaux, il est possible de suggérer les hypothèses suivantes :

- La contrainte de décohesion  $\tau_{max}$  et la contrainte de frottement  $\tau_d$  sont plus importantes lorsque le rapport eau efficace sur ciment diminue.
- L'augmentation de la quantité de fines conduit à une abrasion conséquente de la matrice, ce qui se traduit par l'augmentation des paramètres  $s_k$  et  $M_0$ .
- L'augmentation du diamètre des fibres conduit à un défaut d'extrémité plus important, ce qui se traduit par une augmentation du paramètre  $f_0$ .

#### 2.3.3.1 Évolution des paramètres

La capacité à relier certains paramètres du modèle à des données matériaux connues est un point essentiel de la modélisation. A ce stade de la définition du modèle, certaines relations ont pu être établies. La figure 2.15 donne l'évolution de la force d'about  $f_0$  en fonction du diamètre de la fibre, ainsi que l'évolution de la contrainte de frottement  $\tau_d$  en fonction de la résistance à la compression du béton  $R_c$  pour cinq calages sur des données expérimentales issues de [21] [37] [32]. Il apparaît que la force  $f_0$  est proportionnelle au diamètre des fibres utilisées. Ce résultat est cohérent, le diamètre étant plus important, le défaut l'est également, ce qui conduit à une force supérieure. Concernant l'évolution du paramètre  $\tau_d$ , il est également une fonction croissante de la résistance à la compression de la matrice. Ce résultat était à nouveau attendu, puisqu'il paraît logique que le frottement soit d'autant plus important que la matrice est compacte. Une approximation logarithmique est proposée pour corrélérer les deux paramètres, sans pouvoir donner de signification aux coefficients de l'équation, ce qui nécessiterait une

étude approfondie. Les évolutions présentées ici permettent donc d'illustrer certaines des hypothèses précédemment formulées, pour un nombre plus large d'études.

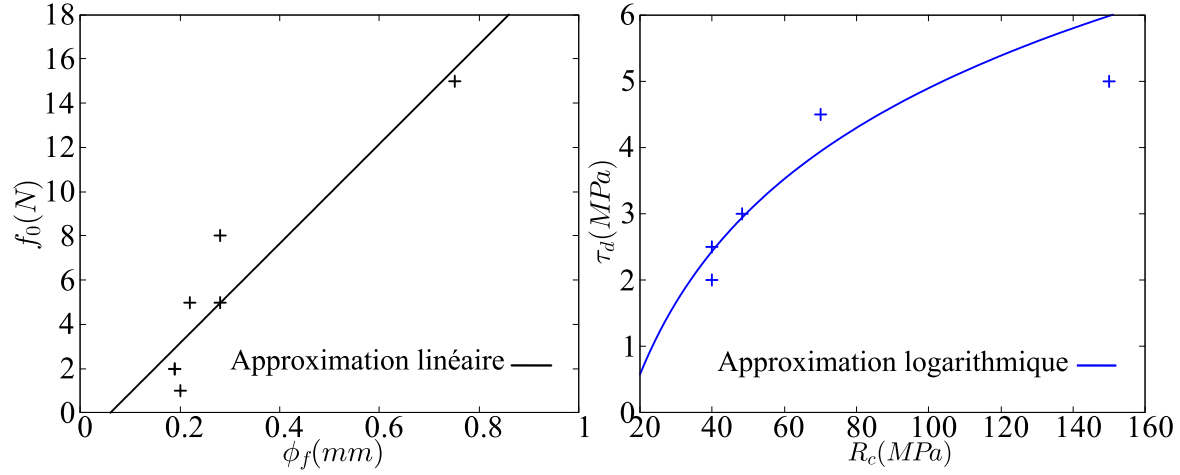


FIGURE 2.15 – Évolution des paramètres du modèle en fonction de données matériaux

## 2.4 Effets de l'inclinaison des fibres

L'inclinaison des fibres par rapport à la direction de traction engendre deux conséquences importantes : la première est une augmentation de la force maximale lorsque l'inclinaison augmente, jusqu'à un certain angle au delà duquel le pic de force se met à diminuer. La seconde est une perte de rigidité sur la courbe force-glissement, de plus en plus importante lorsque l'angle d'inclinaison croît [44][79][16]. Ces deux conséquences peuvent être expliquées par trois phénomènes. L'augmentation de la force est en premier lieu liée à un effet de poulie généré par le frottement fibre-matrice lors de l'extraction. De plus, l'extraction d'une fibre métallique inclinée nécessite de plastifier la fibre sur sa longueur extraite. Ces deux phénomènes expliquent l'augmentation de force. La perte de rigidité est, quant à elle, attribuée à un phénomène d'écaillage de la matrice, qui est une rupture locale du béton due à une poussée au vide et une concentration de contrainte au point d'extraction de la fibre. Ce travail s'appuyant sur une collaboration interdisciplinaire visant à déterminer de manière précise l'orientation des fibres dans un volume, la prise en compte de ces phénomènes devient alors essentielle. Les développements concernant cet aspect sont basés sur une hypothèse simplificatrice qui consiste à considérer que dans les fissures, les fibres se réalignent avec la normale au plan de fissuration. Cette hypothèse se justifie par la flexibilité de la fibre et par sa plastification pour de faibles efforts.

## 2.4.1 Mécanismes à l'origine de l'augmentation de la force

### 2.4.1.1 Effet poulie

On considère une fibre ancrée d'une longueur quelconque et inclinée d'un angle  $\varphi$  par rapport à la normale au plan de fissuration. Cette fibre est soumise à une force  $F_\varphi$  qui est alignée avec la normale au plan de fissuration (Figure 2.16). Dans cette configuration, la force  $F_\varphi$  peut être décomposée en deux composantes, la force axiale à la fibre  $F_a$  et la force radiale à la fibre  $F_r$ . La fibre frotte sur la matrice, ce qui engendre un supplément de force  $\Delta F_\varphi$  en comparaison du cas d'une fibre non inclinée. Ce supplément de force est proportionnel à la force radiale ainsi qu'au coefficient de frottement fibre-matrice  $\mu$  (2.4.1).

$$\Delta F_\varphi = \mu F_r = \mu F_\varphi \sin \varphi \quad (2.4.1)$$

En considérant la fibre comme un élément de type corde, la force totale dans la fibre inclinée peut donc s'écrire comme la somme des forces d'une fibre droite et du supplément dû à l'inclinaison (relation (2.4.2)).

$$F_\varphi = F_m + \Delta F_\varphi = F_m + \mu F_\varphi \sin \varphi \quad (2.4.2)$$

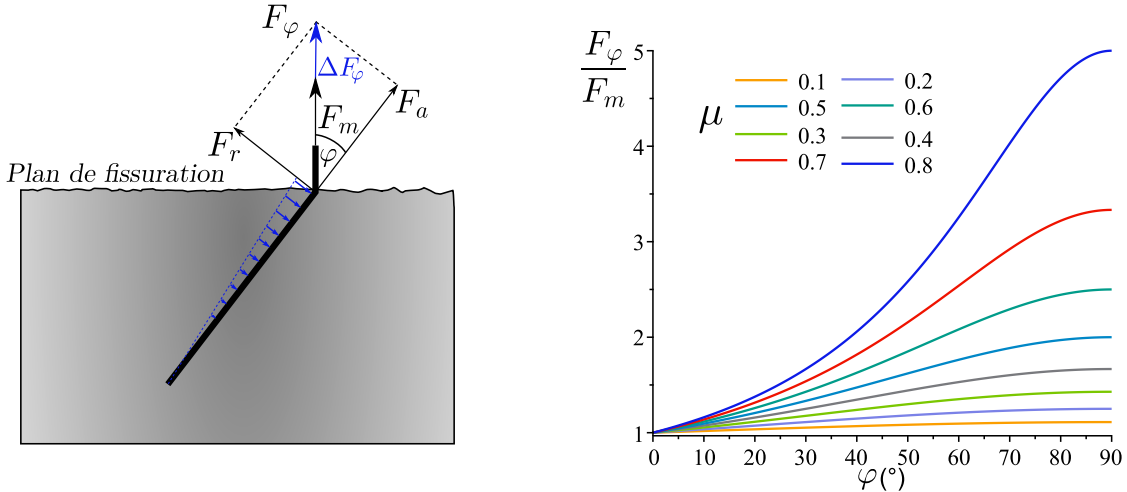


FIGURE 2.16 – Représentation de l'effet courroie

La force dans une fibre inclinée  $F_\varphi$  s'exprime donc d'après la relation (2.4.2) :

$$F_\varphi = \frac{F_m}{1 - \mu \sin \varphi} \quad (2.4.3)$$

La connaissance du comportement d'une fibre non inclinée, du coefficient de frottement fibre-matrice et de l'inclinaison est donc suffisante pour caractériser la force obtenue pour une fibre inclinée. La figure 2.16 fait apparaître le schéma mécanique utilisé pour décrire ce phénomène, ainsi que l'évolution de la force normalisée pour une fibre inclinée, en fonction de l'inclinaison de la fibre pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Plus l'inclinaison de la fibre augmente, plus la force pour l'extraire est importante. La valeur de la force réorientée est fortement impactée par le coefficient de frottement, dont les valeurs expérimentales se situent généralement entre 0,5 et 1 [44]. Lorsque le coefficient de frottement prend la valeur de 1, la force d'une fibre inclinée tend vers l'infini en  $\varphi = 90^\circ$ .

#### 2.4.1.2 Effet d'une rotule plastique

Leung et Shapiro [46], en réalisant des essais d'extraction de fibres inclinées, constatent que la force au pic et le travail d'arrachement augmentent lorsque la limite élastique de la fibre augmente. En effet, lorsque la fibre inclinée commence à s'extraire hors de la matrice, une rotule plastique se crée au niveau du point d'extraction, ce qui conduit à une augmentation de la force nécessaire à l'arrachement. On se place dans le contexte où la seule force d'extraction appliquée à la fibre est la force nécessaire pour la plastifier, notée  $F_{PH}$ . La fibre est alors nécessairement sollicitée au point d'extraction par son moment plastique  $M_p = \frac{f_y^f \phi_f^3}{6}$ . En supposant une distribution linéaire de la force radiale le long de la longueur ancrée de la fibre, on obtient l'expression de la force d'extraction nécessaire pour plastifier la fibre.

$$F_{PH} = \frac{f_y^f \phi_f^3}{2 \sin \varphi L} \quad (2.4.4)$$

Avec  $f_y^f$  la limite élastique de la fibre. Ce supplément de force est donc à prendre en compte au cours de l'extraction. La section de la fibre se plastifie de manière progressive, de ce fait la force  $F_{PH}$  apparaît également de manière progressive. On considère l'hypothèse selon laquelle, au début de la phase de décollement, la force est entièrement mobilisée. La force est donc pondérée par une fonction croissante du glissement élastique, valant 1 lorsque le glissement vaut  $\frac{T_{max}}{H_f}$ . Cette force participe directement à la force

$F_\varphi$ , ainsi la force totale traversant la fissure devient :

$$F_\varphi = \frac{F_m + F_{PH}}{1 - \mu \sin \varphi} \quad (2.4.5)$$

L'impact de l'augmentation de la force dans la fissure est également appliqué aux critères de rupture du cône de béton et de la fibre. Dans le cas présent, les effets de l'inclinaison des fibres ne sont pas pris en compte sur la géométrie du cône de rupture. Les critères de rupture deviennent donc :

$$F_\varphi \geq F_u \quad \text{et} \quad F_\varphi \geq F_{co} \quad (2.4.6)$$

## 2.4.2 Écaillage de la matrice

L'écaillage constitue une rupture localisée de la matrice au niveau du point d'extraction de la fibre. Cette rupture engendre un déplacement de la fibre dans la fissure conduisant à une diminution de la rigidité d'extraction.

### 2.4.2.1 Bases du problème

Le point de départ de la description du phénomène d'écaillage concerne la géométrie des écailles. Laranjeira et al. [43] supposent une géométrie de tétraèdre. Cette géométrie est légèrement modifiée pour devenir un pentaèdre décrit par la figure 2.17. Cette allure semble être en accord avec les observations expérimentales de Leung et Shapiro [46]. L'hypothèse initiale est que l'intersection du plan médian du pentaèdre et de la surface inférieure forme un angle droit avec la fibre. Le rectangle situé au contact de la fibre est de largeur  $\phi_f$  et de longueur  $l_s$ , ce qui représente la longueur d'écaillage à déterminer. Le pentaèdre s'évase selon un angle  $\alpha$  qui sera ici paramétrable, tandis que Laranjeira fixe sa valeur à  $45^\circ$ . Afin de simplifier les calculs, Laranjeira considère les triangles latéraux du pentaèdre comme rectangles, cette simplification est conservée. La méthode consiste à résoudre un équilibre entre les efforts sollicitants et résistants afin de déterminer le couple force-longueur d'écaillage à chaque instant.

Afin de résoudre le problème, il est nécessaire de faire trois hypothèses supplémentaires :

- La rupture du pentaèdre se produit sur les faces latérales et la face du bas, en

cisaillement pur pour une contrainte égale à la résistance à la traction du béton  $R_t$ .

- La force agissante est la portion de force radiale présente sur la longueur  $l_s$ , notée  $F_{r,l_s}$ .
- On suppose une distribution linéaire de la contrainte radiale sur la longueur ancrée.

En considérant ces hypothèses, l'équation d'équilibre à résoudre est donnée en (2.4.7), où  $S_r$  est la surface de rupture du pentaèdre.

$$F_{r,l_s} = S_r R_t \quad (2.4.7)$$

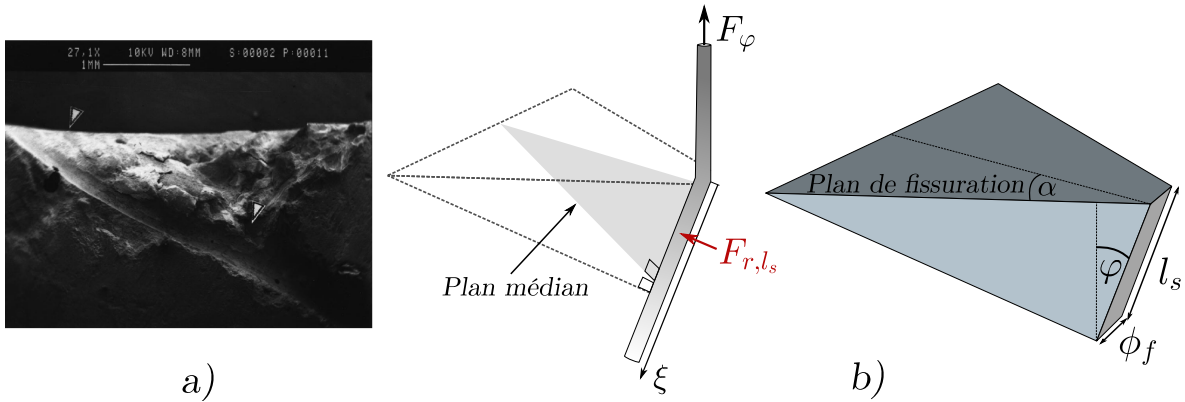


FIGURE 2.17 – a) Écaillage observé expérimentalement [46], b) représentation du phénomène d'écaillage de la matrice

#### 2.4.2.2 Expression de la force $F_{r,l_s}$

L'expression reliant la force radiale  $F_r$  et la contrainte radiale  $\sigma_r^f$  agissant sur la longueur ancrée initiale de la fibre  $L$  est :

$$F_r = \phi_f \int_0^L \sigma_r^f d\xi \quad (2.4.8)$$

Où  $\xi$  désigne un axe parallèle à la longueur ancrée de la fibre et prenant son origine au point d'extraction, dont la position varie au cours de l'écaillage. L'hypothèse d'une distribution linéaire de contrainte qui s'annule en  $\xi = L$  et qui est maximum en  $\xi = 0$  permet d'obtenir l'expression (2.4.9).

$$\sigma_r^f = \frac{2F_r}{\phi_f L} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right) \quad (2.4.9)$$

La force agissant sur le volume d'écaillage s'écrit donc :

$$F_{r,l_s} = \phi_f \int_0^{l_s} \sigma_r^f d\xi = \frac{2F_r}{L} \left( l_s - \frac{l_s^2}{2L} \right) \quad (2.4.10)$$

### 2.4.2.3 Évolution géométrique de l'écaillage

L'écaillage est un phénomène progressif comme l'ont suggéré Fantilli et al. [25] qui le schématisent par une succession de multiples écailles. La figure 2.18 décrit la géométrie de l'écaillage à deux instants  $i$  et  $i-1$ . Il apparaît que la surface à rompre à un instant  $i$  dépend de la longueur de l'écaillage précédent  $l_{s_{i-1}}$ . Le calcul de l'équilibre actuel nécessite donc la connaissance de l'écaillage précédent.

Écrivons la surface à rompre à un instant  $i$  en fonction de la longueur d'écaillage précédent :

$$S_{r_i} = \frac{l_{s_i}^2}{\cos \alpha \tan \varphi} + \frac{l_{s_i}}{\tan \varphi} \left( \phi_f + l_{s_i} \frac{\tan \alpha}{\sin \varphi} \right) - \frac{l_{s_{i-1}}^2}{\cos \alpha \tan \varphi} \quad (2.4.11)$$

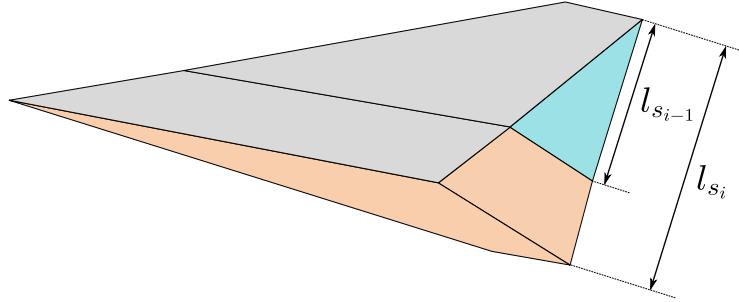


FIGURE 2.18 – Succession d'écaillage entre deux instants  $i$  et  $i-1$

De même, la portion de force radiale agissant sur la nouvelle surface de rupture est :

$$F_{r,l_{s_i}} = \frac{2F_r}{\phi_f(L - l_{s_{i-1}})} \left( l_{s_i} - l_{s_{i-1}} - \frac{(l_{s_i} - l_{s_{i-1}})^2}{2(L - l_{s_{i-1}})} \right) \quad (2.4.12)$$

Connaissant l'expression de  $S_{r_i}$  et  $F_{r,l_{s_i}}$ , il est désormais possible de résoudre l'équation

(2.4.7), qui exprime donc la longueur d'écaillage à un instant  $i$  en fonction de la longueur  $l_{s_{i-1}}$ . L'équation étant du second degré en  $l_{s_i}$ , deux solutions sont obtenues. Leurs expressions étant trop longues, elles ne seront pas données ici, et par la suite, seule la méthode de résolution sera décrite.

#### 2.4.2.4 Approximation de la solution

En fixant une valeur d'un ordre de grandeur réaliste de  $l_{s_{i-1}}$ , il est possible de tracer les solutions donnant  $l_{s_i}$  en fonction de la force totale  $F_\varphi$  (Figure 2.19 a)). Chacune des solutions se distingue par deux branches, elles-mêmes regroupées en deux zones. La première zone donne les solutions pour lesquelles  $l_{s_i} < l_{s_{i-1}}$  ce qui est impossible, l'écaillage ne pouvant pas diminuer. La seconde zone concerne les valeurs possibles de  $l_{s_i}$ , caractérisées par  $l_{s_i} > l_{s_{i-1}}$ . Il apparaît que la plus petite force pour laquelle  $l_{s_i} > l_{s_{i-1}}$  se situe sur la tangente verticale commune aux deux solutions. En traçant désormais les solutions  $l_{s_i}$  pour un grand nombre de valeurs de  $l_{s_{i-1}}$ , on constate que l'ensemble de ces points de tangente verticale s'alignent quasi-parfaitement sur une droite (Figure 2.19 b)).

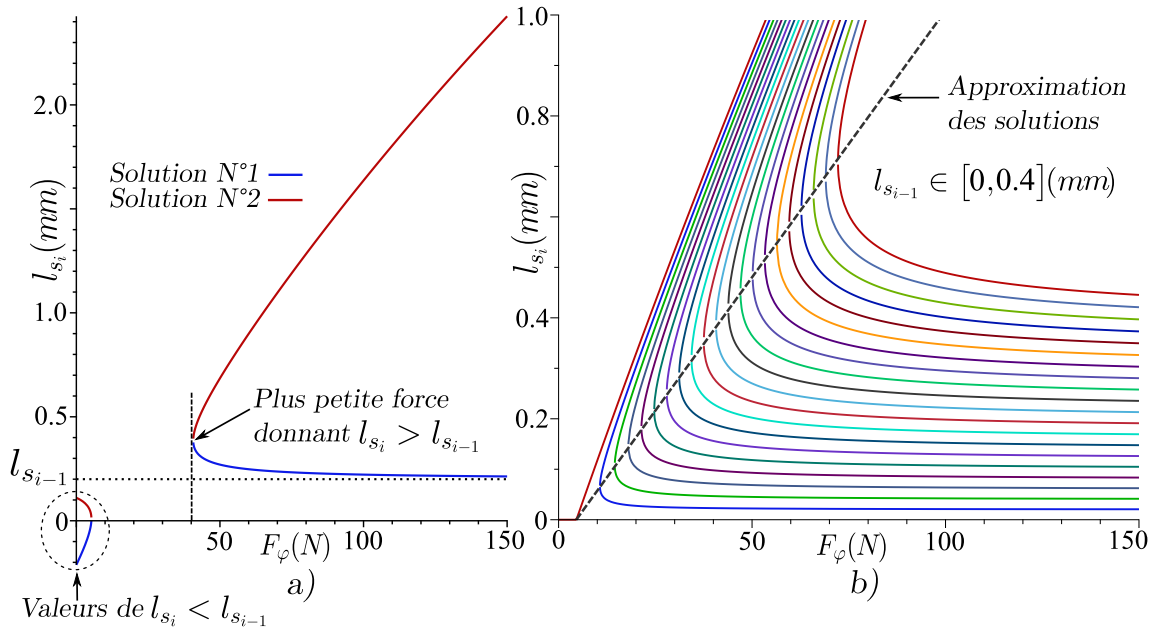


FIGURE 2.19 – a) Solutions donnant  $l_{s_i}$  pour une valeur de  $l_{s_{i-1}}$  b) Solutions donnant  $l_{s_i}$  pour un grand nombre de valeurs de  $l_{s_{i-1}}$ , approximation linéaire des solutions

L'équation de cette droite peut être obtenue à partir de deux points. Le premier point

constitue l'intersection de la droite d'approximation des solutions et de l'axe des abscisses. Le second point est obtenu en trouvant la force pour laquelle les deux solutions de  $l_{s_i}$  sont égales, point qui correspond à la tangente verticale pour une valeur de  $l_{s_{i-1}}$  donnée. Une étude paramétrique montre que la valeur de  $l_{s_{i-1}}$  doit être de l'ordre de grandeur de l'écaillage attendu pour obtenir une droite passant par les solutions de  $l_{s_i}$  de manière satisfaisante.

Cette droite constitue ainsi une approximation de la valeur de  $l_{s_i}$  pour une force  $F_\varphi$  donnée, pour toute valeur de  $l_{s_i} > l_{s_{i-1}}$ . De plus, l'équation de cette droite est analytique et ne nécessitera donc pas de résolution numérique à l'avenir. Elle s'écrit comme une fonction de l'inclinaison de la fibre  $\varphi$ , de l'angle d'ouverture du pentaèdre  $\alpha$ , des longueurs ancrées  $L$  ou  $L_f - L$ , du diamètre de la fibre  $\phi_f$ , de la résistance à la traction de la matrice  $R_t$ , de la force dans la fissure  $F_\varphi$  et de la valeur constante  $l_{s,k}$  permettant de calculer le coefficient directeur de la droite. Cette approximation de  $l_{s_i}$  étant une fonction strictement croissante de la force, l'écaillage ne pourra se produire que durant la phase d'augmentation de la force dans la fissure.

#### 2.4.2.5 Intégration au modèle d'extraction des fibres

L'écaillage de la matrice conduit à une diminution globale de la rigidité d'extraction des fibres. Comme l'ont suggéré Laranjeira et al. [43], le point d'extraction de la fibre se déplace, ce qui conduit à un glissement supplémentaire  $\Delta_{w,s}$  dans la fissure. Ce glissement supplémentaire est décrit sur la figure 2.20 et donné en équation (2.4.13).

$$\Delta_{w,s} = l_s(1 - \cos \varphi) \quad (2.4.13)$$

Durant ce déplacement de la fibre, on suppose que la force  $F_\varphi$  reste constante. La longueur initialement ancrée devient libre, il en résulte un déplacement supplémentaire lié à la déformation de la fibre. En contexte d'extraction d'une fibre ancrée de chaque côté et pour une ouverture de fissure initiale  $w$ , l'ouverture de fissure après écaillage est donnée par :

$$w_{l_s} = w + l_{s1}\left(1 - \cos \varphi + \frac{F_\varphi}{E_f A_f}\right) + l_{s2}\left(1 - \cos \varphi + \frac{F_\varphi}{E_f A_f}\right) \quad (2.4.14)$$

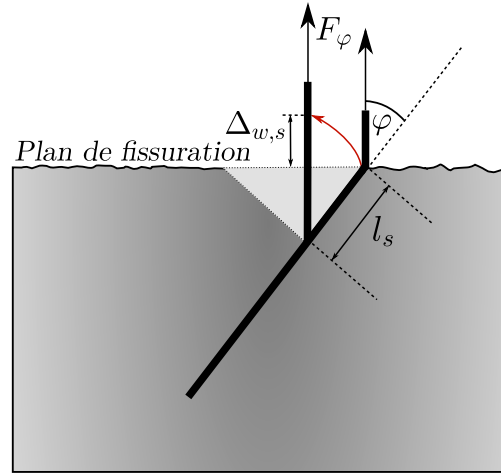


FIGURE 2.20 – Déplacement supplémentaire induit par l'écaillage

Dans (2.4.14),  $l_{s1}$  et  $l_{s2}$  désignent l'écaillage des côtés 1 et 2 de la fissure. Lorsque le phénomène d'écaillage se produit, la longueur ancrée de la fibre diminue, conduisant à une variation de la force ce qui conduit à une variation d'écaillage. Le calcul de la longueur  $l_s$  est donc non linéaire et nécessite la mise en place d'un système itératif afin d'équilibrer le couple force-longueur d'écaillage. Ce système itératif est décrit en 3.1.1.

## 2.5 Validation expérimentale du modèle d'inclinaison des fibres

La mise en place de l'algorithme de résolution du problème d'écaillage permet de confronter le modèle avec des données expérimentales. Les données expérimentales présentées ici sont issues des travaux de Lee et al. [44] dans lesquels ils réalisent des essais d'extraction de groupes de 32 fibres métalliques rectilignes et cylindriques ancrées dans une matrice cimentaire de type BFUP. Les échantillons sont de type "dogbones", dans lesquels toutes les fibres sont positionnées selon des angles allant de  $0^\circ$  à  $60^\circ$  par rapport à la direction de traction. Les "dogbones" sont constitués de deux blocs de matrice cimentaire séparés par une feuille en polyéthylène servant à maintenir la position des fibres durant le temps de la prise du ciment, et à s'assurer que seule la force reprise par les fibres est analysée.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Résistance à la compression à 28 jours	$R_c$	$\geq 150$	MPa
<i>Masses des matériaux relatifs à la quantité de ciment</i>			
Ciment	-	1	-
Granulats fins	-	1,1	-
Filler	-	0,3	-
Fumée de silice	-	0,25	-
Eau	-	0,25	-
Superplastifiant	-	0,018	-
<i>Caractéristiques des fibres métalliques</i>			
Contrainte ultime	$f_u^f$	2500	MPa
Longueur ancrée	$L$	6,5	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,2	mm

TABLE 2.5 – Caractéristiques des matériaux utilisés lors des essais d'extraction pour plusieurs orientations de fibres [44]

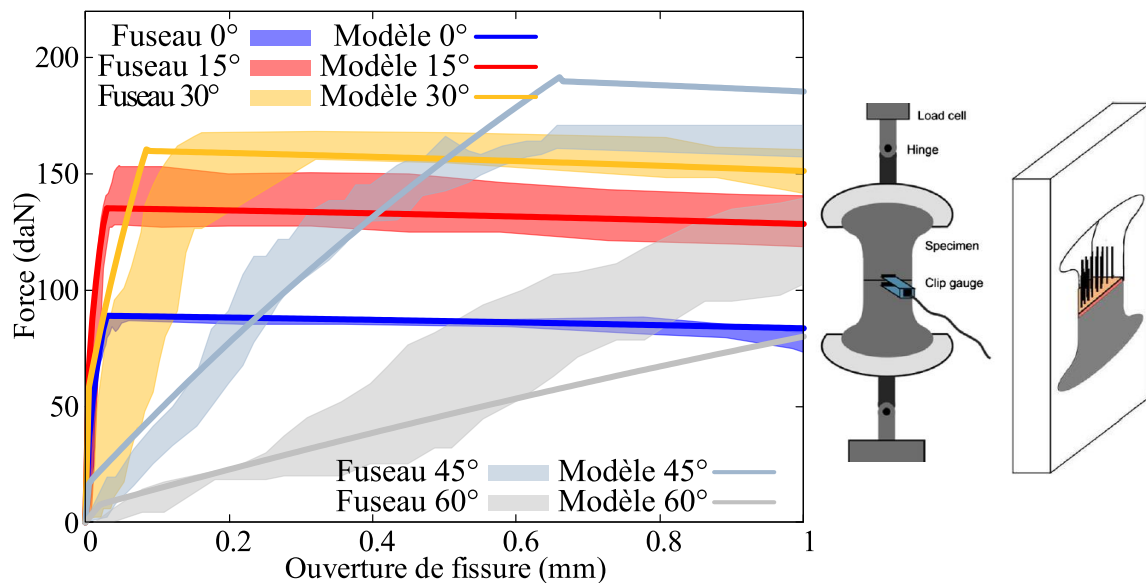


FIGURE 2.21 – Confrontation expérimentale du modèle avec des essais d'extraction pour plusieurs inclinaisons de fibres [44]

La figure 2.21 présente le dispositif expérimental utilisé, ainsi que les fuseaux des courbes force-ouverture de fissure pour les cinq orientations étudiées. Les courbes montrent que la dispersion devient importante lorsque l'inclinaison des fibres augmente. Le tableau 2.5 donne les caractéristiques de la matrice cimentaire et des fibres utilisées. Le modèle est calibré par minimisation globale de l'écart "essai-modèle" pour les cinq inclinaisons étudiées. Les paramètres du modèle utilisés et leurs valeurs issus du calage lors de

la confrontation avec les résultats de la figure 2.21 sont donnés dans le tableau 2.6. Les résultats expérimentaux étant donnés pour 32 fibres, la force prise en compte au niveau du modèle est également multipliée par 32. La figure 2.21 montre la capacité du modèle à reproduire l'effet de l'inclinaison sur la force et le glissement. Lorsque l'angle est faible ( $\varphi = 15^\circ$ ), la rigidité globale est augmentée, car l'augmentation de la force est prépondérante sur l'écaillage. A partir de  $\varphi = 30^\circ$ , l'écaillage devient important et diminue la rigidité du système, la force au pic continuant d'augmenter. Ces effets se poursuivent ensuite pour les angles  $\varphi = 45^\circ$  et  $\varphi = 60^\circ$ .

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	8000000	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	8	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	6,8	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$5e^{-2}$	m
Force d'about	$f_0$	0	N
Angle de rupture du cône de béton	$\alpha_c$	30	°
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	20	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	12	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	0,003	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,8	-
Résistance à la traction du béton	$R_t$	3,8	MPa
Module d'élasticité des fibres	$E_f$	210000	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2400	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	2500	MPa

TABLE 2.6 – Paramètres du modèle utilisés pour le calage des résultats des essais d'extraction de Lee et al. [44]

Le calage met en exergue une valeur de rigidité de l'interface très élevée, qui se rapproche de celle utilisée par Zhan et al. [92]. Cette différence entre la valeur proposée ici et celles utilisées pour les calages précédent pourrait notamment provenir de la méthode de mesure du déplacement d'extraction qui peut engendrer des variations importantes de ce paramètre. Le glissement caractéristique  $s_k$  et le module d'écrouissage  $M_0$  présentent également des valeurs élevées, ce qui reflète la faible diminution de force après le pic. Cette tendance peut être attribuée à la nature très dense de la matrice utilisée. En effet, la force quasi-constante après le pic implique une augmentation importante de la contrainte qui pourrait être liée à l'abrasion de la matrice et à l'accumulation de fines particules sur le pourtour de la fibre. Compte tenu de la nature ultra-performante de la matrice, il est également possible de s'interroger sur le réalisme de la valeur de

la résistance à la traction du béton  $R_t$  prise égale à 3,8 MPa, les valeurs moyennes étant généralement de 6 à 8 MPa pour ce type de béton. Cette valeur faible peut être expliquée par la présence de la feuille synthétique séparant les deux blocs de béton lors de l'essai. La présence de cette discontinuité pourrait diminuer les performances mécaniques d'une petite épaisseur de matrice à son contact, par une accumulation d'eau par exemple, et donc expliquer une résistance locale plus faible dans la zone d'écaillage. Les résultats présentés ici permettent ainsi de valider le comportement du modèle dans le cas de fibres orientées, et il est désormais nécessaire d'étendre le modèle à l'échelle du matériau fibré.

## 2.6 Calcul de la force moyenne pour une inclinaison donnée

La position des fibres par rapport à un plan de fissuration donné est impossible à prédire de manière exacte. Le nombre de fibres traversant un plan de fissuration étant cependant très élevé, il est possible de se tourner vers des méthodes probabilistes. Il est généralement considéré que l'ancrage des fibres par rapport à un plan de fissuration est caractérisé par une densité de probabilité uniformément aléatoire  $p(L)$ . C'est ce choix qui est fait dans la présente étude. Cet ancrage varie de 0 à  $\frac{L_f}{2}$ , et toutes les longueurs ancrées sont équiprobables. Cette définition de la densité de probabilité d'ancrage permet ensuite de calculer une force moyenne pour un ancrage quelconque, en intégrant le produit de la force pour une fibre et de la densité de probabilité sur le domaine des longueurs ancrées possibles (2.6.1).

$$\bar{F}_\varphi = \int_{L=0}^{\frac{L_f}{2}} p(L) F_{\varphi,L} dL \quad (2.6.1)$$

Avec  $\bar{F}_\varphi$  la force moyenne pour une inclinaison donnée. Étant donné les expressions diverses et indirectes des lois donnant la force en fonction du glissement dans le modèle, il n'est pas aisé de calculer l'intégrale présentée en (2.6.1). Afin de résoudre ce problème, il est possible de discrétiser l'intégrale probabiliste. La densité de probabilité étant uniforme, le calcul de la force moyenne résultant d'un grand nombre d'ancrages uniformément répartis est réalisé en moyennant la force discrétisée pour un nombre fini de positions possibles de la fibre. La force moyenne discrétisée  $\bar{F}_\varphi$  est donc obtenue par :

$$\bar{F}_\varphi = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l F_{\varphi, L_i} \quad (2.6.2)$$

Où  $l$  désigne le nombre de discrétisations de la longueur ancrée des fibres et  $F_{\varphi, L_i}$ , la force obtenue pour un ancrage  $L_i$ . La position d'une fibre est entièrement caractérisée par son ancrage le plus faible  $L_i$ , l'ancrage de l'autre côté de la fissure étant  $L_f - L_i$ .

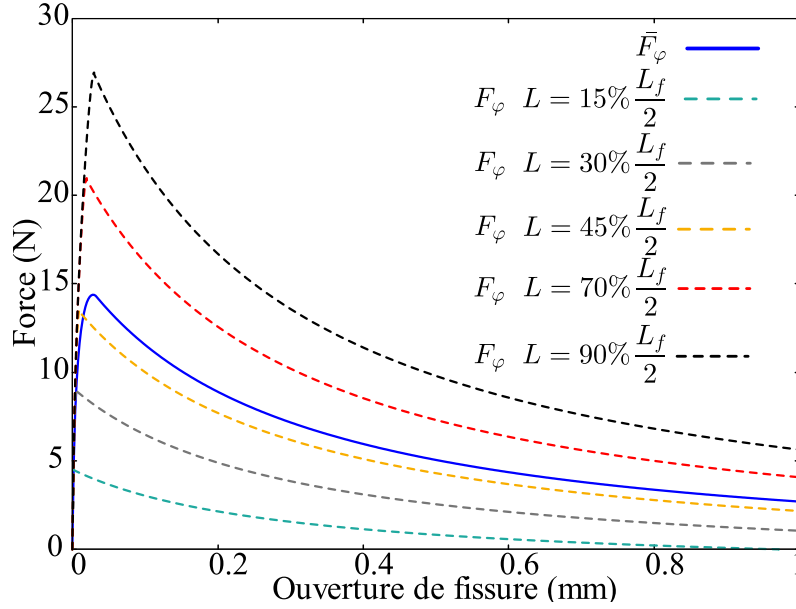


FIGURE 2.22 – Force moyenne d'arrachement discrétisée en 100 longueurs d'ancrage pour un angle  $\varphi = 0$

La figure 2.22 fait apparaître la force moyenne obtenue pour un angle  $\varphi = 0^\circ$  et une longueur  $L_f = 13$  mm, ainsi que quelques unes des forces ayant contribué à construire  $\bar{F}_\varphi$ . Les longueurs ancrées sont ici discrétisées en  $l = 100$ , chacune des longueurs valant  $L_i = \frac{i}{l} \frac{L_f}{2}$   $i \in [1, 100]$ . La méthode consiste à construire les courbes force-ouverture de fissure pour chacune des 100 positions, puis à construire une nouvelle liste d'ouvertures de fissure qui servira de base commune à toutes les positions de fibres. Ensuite, la force correspondant à chaque ouverture de fissure est interpolée pour chaque longueur d'ancrage. Enfin, la force moyenne est obtenue par la relation (2.6.2).

## 2.7 Prise en compte d'un ensemble de fibres inclinées

Les forces moyennes par inclinaisons ayant été déterminées, il est désormais nécessaire de développer une méthode permettant de prendre en compte la réelle disparité des inclinaisons de fibres dans un élément. En l'absence de données, l'orientation est le plus souvent prise comme parfaitement aléatoire, la force moyenne pour ce type d'orientations s'obtient donc en intégrant le produit de la densité de probabilité et des forces fonctions de l'inclinaison des fibres [50]. Zhan [91] propose de représenter l'orientation des fibres par un ellipsoïde caractérisée par trois valeurs principales. Il détermine par la suite une densité de probabilité d'orientation en supposant que les repères de fissuration et de l'ellipsoïde sont identiques. La méthode présentée ici se base sur une distribution elliptique des densités de fibres par inclinaison et permet de considérer les cas plus généraux où les bases de fissuration et d'orientation des fibres ne coïncident pas.

### 2.7.1 Représentation de l'orientation des fibres

L'anisotropie de l'orientation des fibres est représentée par un ellipsoïde d'orientation, pour lequel on définit trois valeurs principales  $a, b, c$  et trois vecteurs d'orientations principales  $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ . Les valeurs principales sont en réalité proportionnelles aux densités volumiques de fibres orientées selon les vecteurs principaux. Le nombre de fibres dans un élément étant très élevé, il est nécessaire de considérer que la densité volumique de fibres par orientation varie de manière continue et ne peut donc pas être totalement définie par trois vecteurs comme le montrent les résultats des essais de Abrishambaf et al. [1]. La densité volumique intermédiaire est donc supposée proportionnelle au rayon de l'ellipsoïde. Dans le repère sphérique, l'équation de l'ellipsoïde est donnée par la relation (2.7.1), avec  $r$  le rayon de l'ellipsoïde, et  $\theta$  et  $\gamma$  deux angles définissant le repère sphérique. La figure 2.24 permet de définir les notations utilisées.

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \gamma}{b^2} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{c^2} = 1 \quad (2.7.1)$$

A partir de la relation (2.7.1), il est possible d'exprimer le rayon de l'ellipsoïde dans une direction  $\vec{e}_i$  (2.7.2).

$$R_{\vec{e}_i} = |r| = \frac{abc}{\sqrt{c^2 (\cos \theta - 1) (\cos \theta + 1) (a - b) (a + b) \cos^2 \gamma + a^2 ((b^2 - c^2) \cos^2 \theta + c^2)}} \quad (2.7.2)$$

Ce type de représentation des orientations permet une utilisation directe des relevés de distributions d'orientations expérimentales des fibres, classiquement obtenues par des méthodes d'analyse d'image ou par tomographie. La figure 2.23 représente l'ellipsoïde d'orientation des fibres et le rayon associé en fonction des angles qui décrivent le repère sphérique pour trois cas d'orientation. En a), l'orientation est isotrope et l'ellipsoïde est un cercle, son rayon est donc constant dans toutes les directions ce qui forme un plan. En b) la valeur du paramètre  $a$  est prise égale à 10 tandis que les valeurs de  $b$  et  $c$  sont prises égales à 5. Le rayon de l'ellipsoïde est donc plus important dans la direction  $\vec{e}_a$ , et la densité volumique de fibres orientées dans cette direction serait plus importante que dans les autres directions. Le cas c) est similaire au cas b) avec une anisotropie de l'orientation des fibres plus importante.

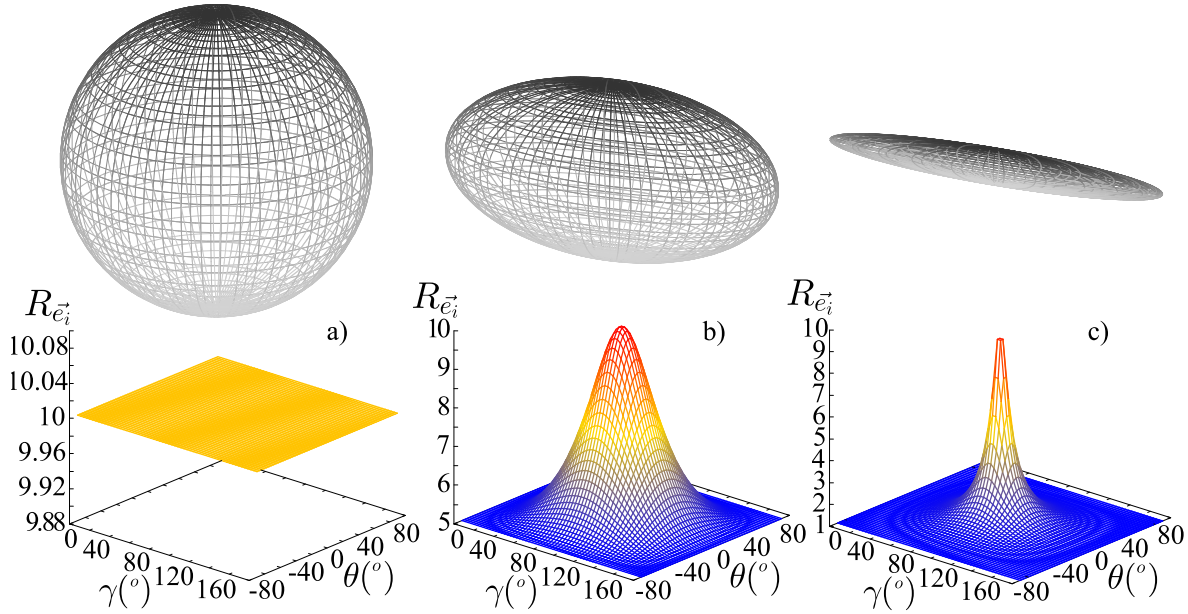


FIGURE 2.23 – Ellipsoïde d'orientation des fibres dans l'espace

### 2.7.2 Discrétisation de l'espace

L'espace est représenté par la sphère unité, elle-même discrétisée en un nombre fini d'angles solides. La figure 2.24 permet de visualiser cette discrétisation. Pour un angle

solide  $\Omega_{\vec{e}_i}$  donné, la densité volumique de fibres  $\rho_{\vec{e}_i}$  contenue dans cet angle solide est donnée par la relation (2.7.3).

$$\rho_{\vec{e}_i} = \rho_f \frac{R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i}}{\sum R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i}} \quad (2.7.3)$$

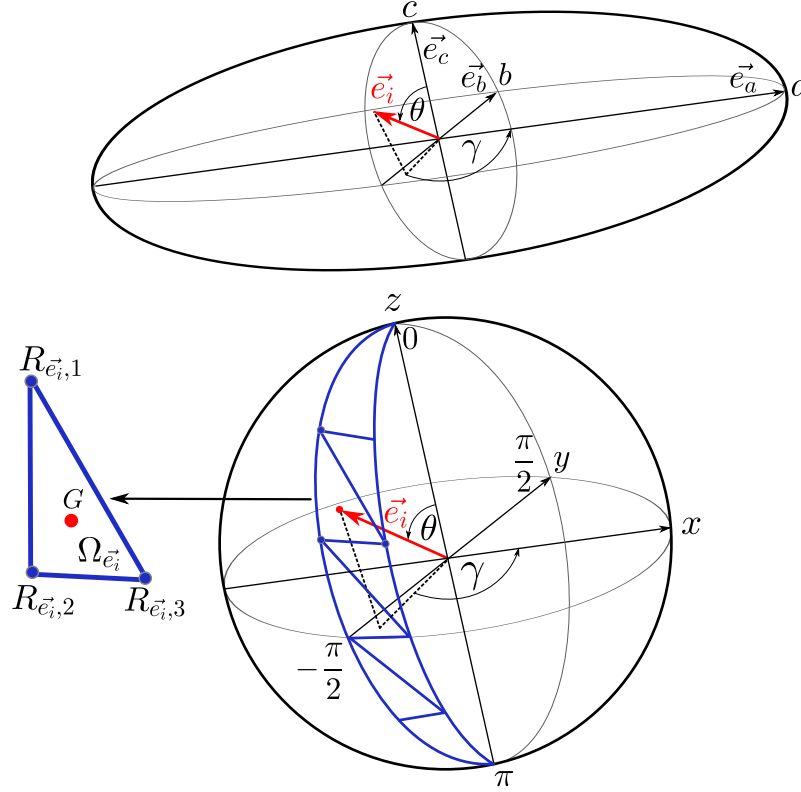


FIGURE 2.24 – Représentation des orientations de fibres dans l'espace

L'angle solide  $\Omega_{\vec{e}_i}$  représente un élément de surface enveloppe de la sphère unité. Dans le cas présent, l'enveloppe de la sphère est discrétisée en un nombre fini de triangles, la surface de chaque triangle permettant ainsi d'obtenir les différents angles solides. La direction attribuée à chaque triangle est celle correspondant au vecteur défini par le centre de l'ellipsoïde et le centre de gravité du triangle. Le rayon de l'ellipsoïde est calculé en moyennant la valeur du rayon obtenue à chacun des sommets des triangles  $R_{\vec{e}_i,1}$ ,  $R_{\vec{e}_i,2}$  et  $R_{\vec{e}_i,3}$  (2.7.4), et est affecté à la direction de son centre de gravité. Les fibres présentant une symétrie, il est possible de discrétiser uniquement une demie sphère. Cette sphère est discrétisée dans la base principale de l'ellipsoïde, ceci permettant d'intercepter systématiquement les valeurs principales du rayon de l'ellipsoïde.

Ainsi, il est désormais possible de connaître dans chacune des directions de l'espace, la densité volumique de fibres associée.

$$R_{\vec{e}_i} = \frac{R_{\vec{e}_i,1} + R_{\vec{e}_i,2} + R_{\vec{e}_i,3}}{3} \quad (2.7.4)$$

### 2.7.3 Angle d'orientation moyen

Bien que l'ellipsoïde d'orientation des fibres permette de représenter des orientations préférentielles, il est pertinent d'estimer l'angle moyen des fibres traversant un plan de fissuration par rapport à la normale au plan de fissuration. L'angle moyen d'inclinaison par rapport à une direction donnée peut être obtenu par simple moyenne pondérée des inclinaisons de chaque angle solide  $\varphi_{\vec{e}_i}$ . La relation (2.7.5) permet de calculer l'angle moyen  $\bar{\varphi}_I$  entre une direction  $I$  et l'ensemble des fibres traversant le plan de fissuration.

$$\bar{\varphi}_I = \frac{\sum R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i} \varphi_{\vec{e}_i} \cos \varphi_{\vec{e}_i}}{\sum R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i} \cos \varphi_{\vec{e}_i}} \quad (2.7.5)$$

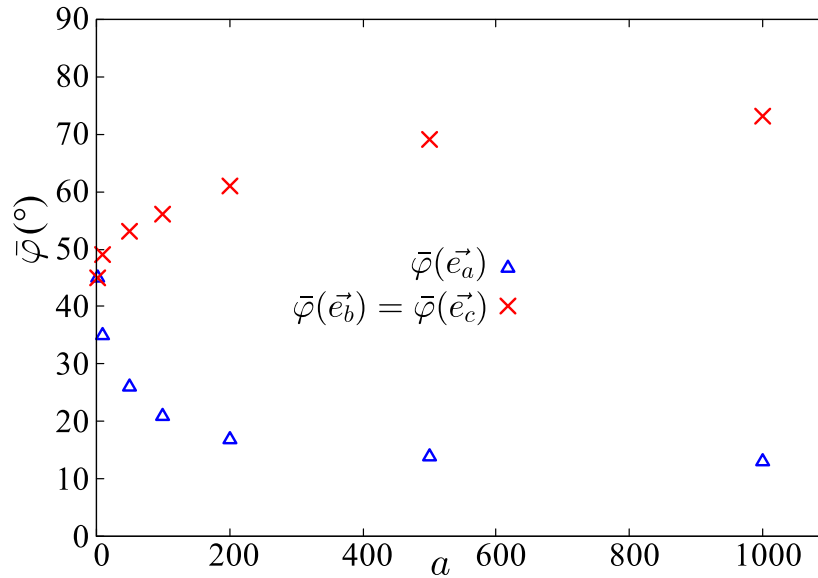


FIGURE 2.25 – Angle moyen d'orientation des fibres par rapport aux directions principales de l'ellipsoïde

La figure 2.25 permet de représenter l'évolution de l'angle moyen entre les directions  $\vec{e}_a$ ,  $\vec{e}_b$  et  $\vec{e}_c$  et l'ensemble des fibres décrites par les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Ici, seule la valeur de  $a$  varie, tandis que les valeurs de  $b$  et  $c$  sont fixées à 1. L'espace est quant à lui discrétisé

en 180 angles solides. Lorsque l'orientation des fibres est isotrope, l'angle moyen tend vers  $45^\circ$ , puis lorsque la valeur de  $a$  augmente, l'angle moyen avec  $\vec{e}_a$  diminue et tend ici vers  $10^\circ$  tandis que l'angle moyen avec les directions  $\vec{e}_b$  et  $\vec{e}_c$  augmente et tend vers  $80^\circ$ . Le fait de ne pas atteindre les valeurs extrêmes de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  est lié à la méthode de calcul du rayon de l'ellipsoïde moyenné sur les sommets des triangles et à la discrétisation de l'espace. Cependant, ces orientations étant improbables il n'apparaît pas comme nécessaire de devoir les représenter. Ce graphique montre l'importante non linéarité de l'inclinaison moyenne des fibres, et cet angle moyen par rapport aux directions de fissuration pourrait être une variable interne intéressante à afficher sur le modèle.

## 2.8 Calcul de la contrainte de traction reprise par les fibres

Le modèle de béton utilisé permet d'obtenir directement trois ouvertures de fissures principales, ainsi que les directions qui leur sont associées. Ce point est détaillé en 1.4.2.2.2. Pour une direction principale de fissure  $I$ , de vecteur d'orientation unitaire  $\vec{V}_I$ , la contrainte reprise par les fibres traversant la fissure  $\sigma_{f,I}^w$  est obtenue en sommant les forces de chacune des fibres traversant cette fissure. Les fibres étant discrétisées par groupes d'inclinaisons, il est possible d'écrire la relation (2.8.1).

$$\sigma_{f,I}^w = \sum_{i=1}^n n_{f,\vec{e}_i,I} \bar{F}_\varphi(w_I) \quad (2.8.1)$$

Avec  $n_{f,\vec{e}_i,I}$  le nombre de fibres contenues dans un angle solide  $\Omega_{\vec{e}_i}$  qui traversent effectivement la fissure  $I$  et  $n$  l'ensemble des angles solides. On considère un volume de béton unitaire de volume  $V_m = 1 \text{ m}^3$ , le nombre total de fibres contenues dans ce volume est égal au ratio de la densité volumique de fibres par le volume d'une fibre.

$$n_f = \frac{4\rho_f}{\pi\phi_f^2 L_f} \quad (2.8.2)$$

Pour un ensemble de fibres inclinées d'un même angle  $\varphi_{\vec{e}_i}$  par rapport à la normale au plan de fissuration, dont les longueurs ancrées sont réparties aléatoirement par rapport à ce plan, les fibres ne traversent la fissure que si leur centre de gravité est située à une distance inférieure à  $\frac{Lf \cos \varphi_{\vec{e}_i}}{2}$  de ce plan. Le nombre total de fibres traversant le plan

de fissuration est donc donné par la relation (2.8.3).

$$n_{f,\vec{e}_i,I} = \frac{4\rho_f \cos \varphi_{\vec{e}_i}}{\pi\phi_f^2} \quad (2.8.3)$$

Pour chaque inclinaison de fibres  $\vec{e}_i$ , l'angle d'inclinaison avec la fissure fissure  $I$  est obtenu par (2.8.4).

$$\varphi_{\vec{e}_i} = \arccos \vec{V}_I \cdot \vec{e}_i \quad (2.8.4)$$

Connaissant le nombre de fibres qui traversent la fissure pour chaque angle solide, la contrainte totale de traction reprise par les fibres pour une section unitaire de fissure est donc (2.8.5).

$$\sigma_{f,I}^w = \frac{4\rho_f}{\pi\phi_f^2 \sum R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i}} \sum_i^n R_{\vec{e}_i} \Omega_{\vec{e}_i} \vec{V}_I \cdot \vec{e}_i \bar{F}_\varphi(w_I) \quad (2.8.5)$$

La figure 2.26 permet de mettre en évidence l'effet de différentes orientations préférentielles de fibres sur la réponse en traction en fonction de l'ouverture de fissure.

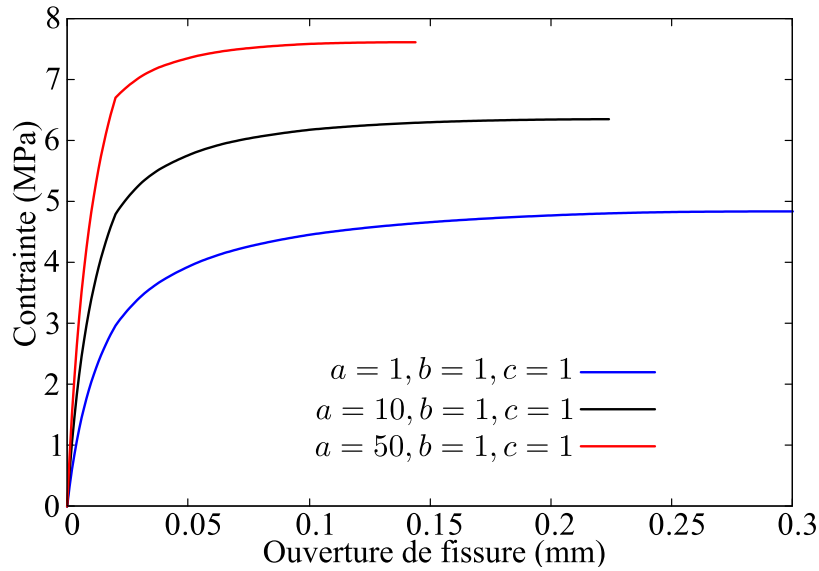


FIGURE 2.26 – Effet de l'orientation des fibres sur la loi de comportement en traction des fibres

Chaque courbe est définie par les trois valeurs principales de l'ellipsoïde d'orientation des fibres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . La contrainte est calculée jusqu'au pic pour une seule ouverture

de fissure, dont la normale coïncide avec la direction principale d'orientation  $\vec{e}_a$ . Les différents rapports entre les valeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  permettent ici de définir une orientation préférentielle des fibres qui se rapproche de la normale lorsque  $\frac{a}{b+c}$  augmente. On constate que, lorsque l'orientation préférentielle des fibres se rapproche de la normale au plan de fissuration la contrainte maximale augmente, ceci s'expliquant par le fait qu'un plus grand nombre de fibres traversent la fissure. De même, la rigidité augmente tandis que l'ouverture de fissure au pic diminue, ces deux phénomènes étant liés à une réduction de l'écaillage.

## 2.9 Multi-fissuration des bétons fibrés

La présence d'un grand nombre de fibres réparties, ainsi que des propriétés mécaniques élevées de l'interface fibre-matrice, confèrent la capacité à certains bétons fibrés de multi-fissurer [76] [17]. Des micro-fissures faiblement espacées se développent dans le béton, conduisant à une forte dissipation d'énergie, et donnant lieu à un écrouissage positif sur la loi de comportement en traction des bétons fibrés. Ce phénomène est plus particulièrement observé chez les BFUP et doit donc faire l'objet d'un travail de modélisation. La plupart des auteurs considèrent que la multi-fissuration est issue d'une contrainte de cisaillement élevée à l'interface fibre-matrice [25] [88]. En calculant la contrainte de cisaillement et en appliquant une méthode de calcul d'espacement des fissures basée sur celle utilisée dans le cas du béton armé, ils déterminent une loi d'évolution de l'espacement des fissures. Cette méthode converge vers des valeurs réalistes d'espacement des fissures mais elle présente néanmoins certains inconvénients. En effet, ce type de méthode conduit à un calcul d'espacement de fissures qui débute dès que la contrainte de traction reprise par les fibres augmente. Or, il est pourtant impossible de générer des fissures supplémentaires si cette contrainte n'excède pas la résistance à la traction de la matrice. Pour remédier à ce problème, il est possible d'écrire que la multi-fissuration se produit dès que la contrainte reprise par les fibres devient plus élevée que la résistance à la traction du béton. Cependant ceci conduit à l'apparition simultanée du nombre de fissures estimé à cet instant. De plus, l'aléa de la résistance à la traction de la matrice n'est pas pris en compte par cette méthode. Afin de représenter de manière précise le phénomène de multi-fissuration, il est donc nécessaire de prendre en compte deux éléments issus de constats expérimentaux :

- La multi-fissuration se produit de manière progressive à partir de l'instant où la

contrainte reprise par les fibres excède la résistance à la traction du béton.

- Durant la phase multi-fissuration, la contrainte totale de traction augmente.

Ce constat conduit à l'inexorable conclusion suivante : la résistance à la traction de la matrice des différents plans de fissuration augmente au cours de la multi-fissuration.

### 2.9.1 Disparité des résistances en traction du béton

En mécanique, il est acquis que plus le volume de l'élément sollicité est grand, plus sa résistance est faible, ceci étant lié à une plus grande probabilité de défauts dans le matériau. Le modèle de Weibull [83] permet de traduire cet effet. La loi d'effet d'échelle est donnée par la relation (2.9.1), avec  $V_{ref}$  le volume de référence caractérisé par une résistance à la traction  $R_{t,ref}$ ,  $V_k$  le volume de béton chargé de taille quelconque et de résistance à la traction  $R_{t,k}$ , et  $m$  un coefficient lié à la dispersion des résistances du matériau.

$$R_{t,k} = R_{t,ref} \left( \frac{V_{ref}}{V_k} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.9.1)$$

Dans le cadre de la multi-fissuration, les fissures se produisent dans des plans orthogonaux aux direction principales de fissuration. Entre deux fissures apparues dans des plans parallèles, le volume  $V_k$  peut ainsi être réduit à la longueur de béton entre ces deux fissures. Cette hypothèse de réduction du volume à une longueur est valable grâce au traitement unidirectionnel des directions principales de fissuration. De la même manière, le volume de référence  $V_{ref}$  peut être réduit à la longueur de l'échantillon qui a permis de déterminer la résistance à la traction de référence  $R_{t,ref}$ . Pour une section unitaire, dans une direction principale de fissuration  $I$ , la loi d'effet d'échelle devient alors (2.9.2), avec  $l_{ech}$  la longueur de l'échantillon de référence et  $S_{w,I}$  l'espacement entre les fissures dans cette même direction.

$$R_{t,k} = R_{t,ref} \left( \frac{l_{ech}}{S_{w,I}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.9.2)$$

### 2.9.2 Évolution de la multi-fissuration

Lorsque la contrainte totale dans l'élément dans la direction  $I$  devient égale à la résistance à la traction  $R_{t,k}$ , de nouvelles fissures se créent. La relation (2.9.2) permet alors d'exprimer l'espacement entre les fissures en fonction de la contrainte totale  $\sigma_I$  (équation (2.9.3)).

$$S_{w,I} = l_{ech} \left( \frac{R_{t,ref}}{\sigma_I} \right)^m \quad (2.9.3)$$

La figure 2.27 a) donne l'évolution de l'espacement entre les fissures normalisé par la longueur de l'échantillon en fonction de la contrainte totale pour une résistance à la traction  $R_{t,1}$  de 4 MPa et pour trois valeurs du paramètre de Weibull  $m$ . On constate ainsi que l'espacement entre les fissures diminue et tend vers zéro lorsque la contrainte totale augmente. La vitesse de décroissance est pilotée par le paramètre  $m$  qui est directement relié à la dispersion des résistances à la traction du béton. La figure 2.27 b) permet de visualiser le lien entre le paramètre  $m$  et le coefficient de variation des résistances à la traction  $C$ . La relation liant ces deux grandeurs est donnée en (2.9.4) [74].

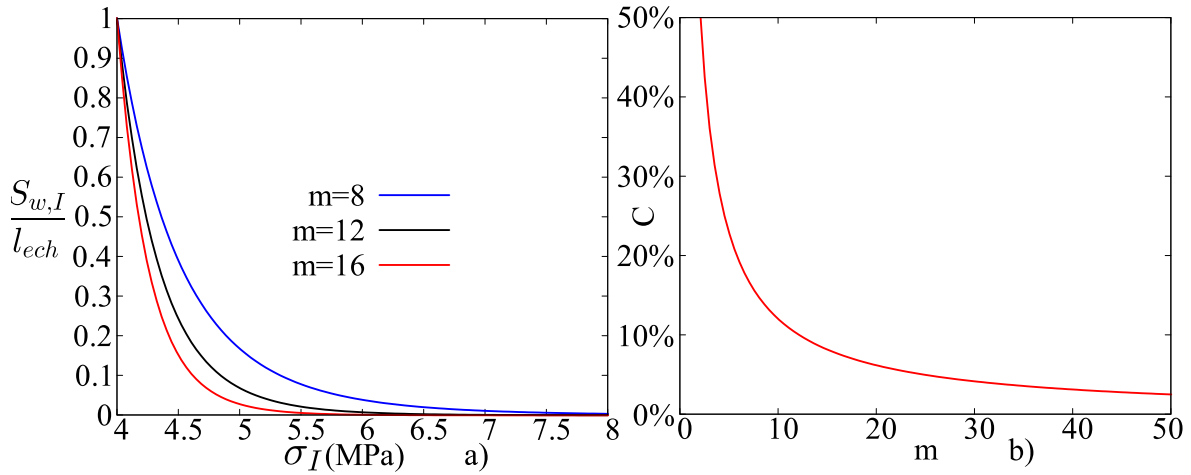


FIGURE 2.27 – a) Évolution de l'espacement entre les fissures en fonction de la contrainte totale  $\sigma_I$  pour une valeur de  $R_{t,1} = 4$  MPa, b) évolution du coefficient de variation des résistances à la traction en fonction du paramètre de Weibull

$$C = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (2.9.4)$$

Connaissant l'évolution de l'espacement entre les fissures au cours du chargement, il est désormais nécessaire de représenter l'évolution du nombre de fissures. Pour ce faire, on considère un élément de longueur  $l_{e,I}$  dans la direction principale de fissuration  $I$ . On suppose que cet élément possède une fissure initiale indicée 1, qui s'est produite pour une contrainte dans le béton égale à  $R_{t,1}$  au centre de l'élément. Cette résistance à la traction initiale dépend en réalité du volume chargé dans la direction  $I$  et peut être obtenue par la méthode proposée par Sellier et Millard [74]. Lorsque cette fissure 1 s'ouvre, la contrainte reprise par les fibres augmente. Si cette contrainte devient suffisamment élevée, d'autres fissures pourront apparaître dans l'élément. D'un point de vue statistique, la deuxième fissure se produit à la distance la plus élevée possible de la première fissure et c'est sur ce principe que se fonde l'évolution du nombre de fissures dans le modèle. Supposant la première fissure au centre de l'élément, la distance la plus élevée appartenant à l'élément est  $\frac{l_{e,I}}{2}$ . Étant donné qu'il existe deux points appartenant à l'élément situés à cette distance de la première fissure, deux fissures pourront donc s'ouvrir. Si la contrainte augmente encore d'autres fissures apparaîtront, la distance la plus élevée entre les fissures existantes devient ainsi  $\frac{l_{e,I}}{4}$ . A nouveau, deux points situés à cette distance des fissures existantes appartiennent à l'élément et donc deux nouvelles fissures pourront se créer. En répétant cette opération autant de fois que nécessaire, on positionne l'ensemble des fissures potentielles de l'élément. L'espacement réel entre les fissures devient donc une fonction de  $\frac{l_{e,I}}{2^k}$ . De ce fait, les résistances à la traction de chacune des fissures potentielles peuvent être déterminées à l'avance, elles sont données par la relation (2.9.5).

$$R_{t,k} = R_{t,ref} \left( \frac{l_{ech} 2^{k-1}}{l_{e,I}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (2.9.5)$$

Ainsi, lorsque l'espacement entre les fissures obtenu par la relation (2.9.3) devient inférieur ou égal à  $\frac{l_{e,I}}{2^k}$ , de nouvelles fissures vont pouvoir se créer. Cette méthode implique donc que plusieurs fissures appartenant au même espacement se produisent simultanément pour une même contrainte totale  $\sigma_I$ . Or la fissuration est un phénomène progressif. En réalité, les résistances à la traction d'un groupe de fissures ne pouvant pas être considérées comme toutes exactement identiques, lorsque la résistance  $R_{t,k}$  d'un groupe de fissures est atteinte il est seulement possible de commencer à créer les fissures appartenant à ce groupe. Afin de représenter ce phénomène progressif, le nombre de fissures appartenant à un même groupe est calculé à partir d'une fonction de  $S_{w,I}$ . Le tableau 2.7 permet de représenter l'évolution du nombre de fissures pour chaque groupe

d'espacement de fissures  $n_{c,k,I}$  au cours du chargement.

$\sigma_I$	$R_{t,1}$	$R_{t,2} \rightarrow R_{t,3}$	$R_{t,3} \rightarrow R_{t,4}$	...	$R_{t,k} \rightarrow R_{t,k+1}$
Groupe	1	2	3	...	$k$
$n_{c,k,I}(R_{t,k})$	1	$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 2$	...	$0 \rightarrow 2^{k-2}$
$n_{c,I}$	1	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 4$	...	$2^{k-2} \rightarrow 2^{k-1}$
$S_{w,I}$	$l_{e,I}$	$\frac{l_{e,I}}{2} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{4}$	$\frac{l_{e,I}}{4} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{8}$	...	$\frac{l_{e,I}}{2^{k-1}} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{2^k}$

TABLE 2.7 – Évolution de nombre de fissures en fonction de la contrainte principale de traction dans la direction  $I$

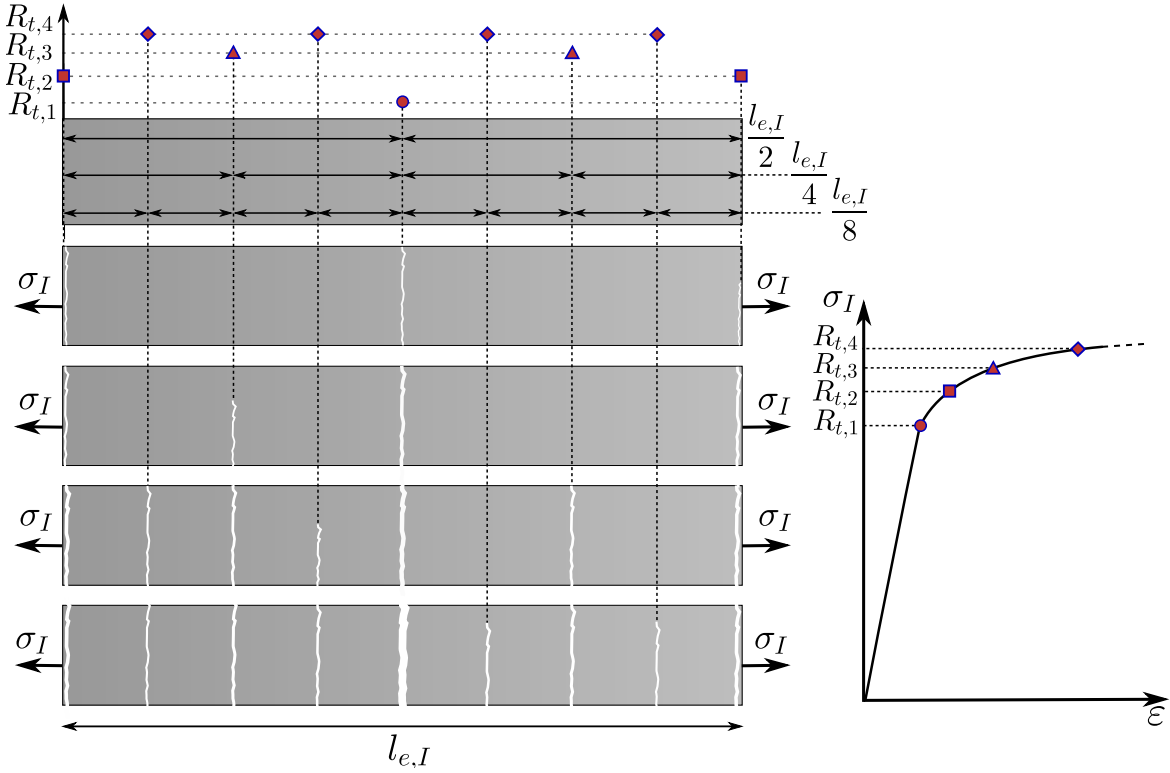


FIGURE 2.28 – Évolution du nombre de fissures dans un élément au cours du chargement en traction uniaxiale

Le nombre total de fissures est alors donné par  $\sum_k n_{c,k,I}$ . On note qu'une seule fissure se produit à la contrainte  $R_{t,2}$  pour un espacement de  $\frac{l_{e,I}}{2}$ . En effet, les deux fissures initialement prévues étant situées au bord de l'élément appartiennent en réalité également

aux éléments adjacents, il est donc nécessaire de diviser leur nombre par deux afin d'éviter une surreprésentation de ces fissures. La figure 2.28 permet également de visualiser le principe d'évolution de la fissuration. La première fissure se produit pour une résistance  $R_{t,1}$ , puis lorsque la résistance  $R_{t,2}$  est atteinte deux fissures commencent à se créer aux extrémités de l'élément, celles-ci n'étant comptées qu'une seule fois pour les raisons évoquées précédemment. Lorsque la contrainte  $\sigma_I$  devient supérieure à  $R_{t,3}$ , deux nouvelles fissures espacées de  $\frac{l_{e,I}}{4}$  des fissures existantes vont commencer à se créer. L'évolution du nombre de fissures se fait de sorte que le nombre total de fissures appartenant à un groupe termine de se produire au moment précis où la résistance du groupe de fissures suivant est atteinte, cette méthodologie permet une continuité de la loi de comportement. Le nombre de fissures n'est donc pas une valeur entière durant la création des fissures d'un groupe, ceci pouvant être représenté comme une propagation progressive de chaque section fissurée représentée en figure 2.28.

### 2.9.3 Impact de la variabilité de la résistance à la traction sur la loi de comportement des fibres

Le calcul des réponses force-ouverture de fissure pour chaque fibre dépend de la résistance à la traction du béton, celle-ci influençant directement le phénomène d'écaillage. La disparité des résistances à la traction d'un même élément doit de ce fait être prise en compte dans le calcul des lois de comportement des fibres qui diffèrent pour chaque groupe de fissures. La figure 2.29 montre l'impact de cette variabilité des résistances en traction pour deux types d'orientation. L'ellipsoïde d'orientation des fibres est défini de sorte que la normale au plan de fissuration coïncide avec le vecteur  $\vec{e}_a$ . D'une manière générale, l'effet de la variabilité des résistances en traction est plus marqué lorsque les ouvertures de fissures sont importantes. On constate donc qu'à contrainte égale, les ouvertures de fissures de chacun des plans de fissuration sont différentes. Ainsi l'effet d'échelle des résistances à la traction conduit à considérer des ouvertures de fissures différentes pour chaque groupe de résistance à la traction.

La distribution des ouvertures de fissures est très peu documentée dans la littérature. Wu et Li [87] étudient en 1995, par une méthode d'analyse d'image, la distribution des ouvertures de fissures à la fin d'un essai de traction directe sur un béton comportant une densité volumique de fibres de 2 %. Ils observent alors que les ouvertures sont variables et peuvent être classées en groupes d'ouvertures. La figure 2.30 présente en b) leurs résultats expérimentaux, à savoir la distribution des ouvertures de fissures dans

l'élément, normalisée par le nombre  $n_{c,max}$  qui correspond au plus grand nombre de fissures appartenant à un même groupe.

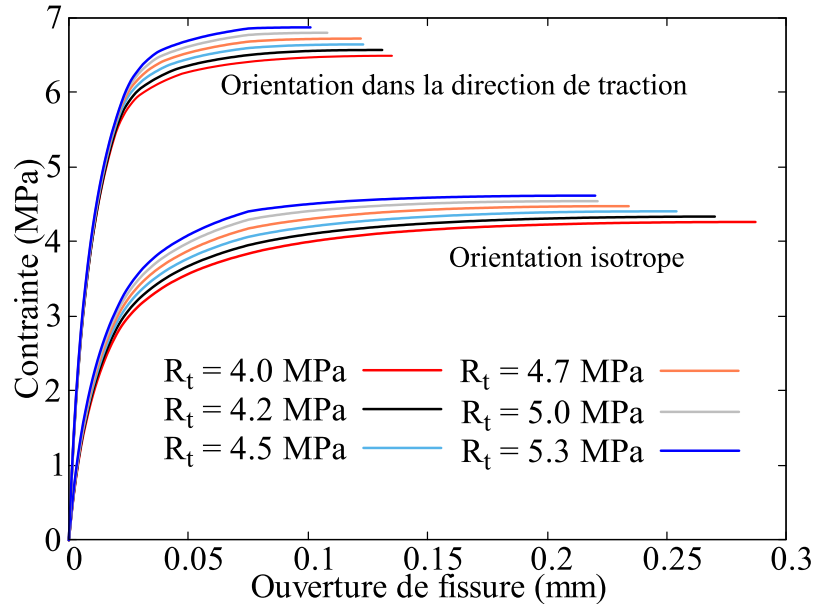


FIGURE 2.29 – Influence de la résistance en traction des sections fissurées sur la loi de comportement des fibres

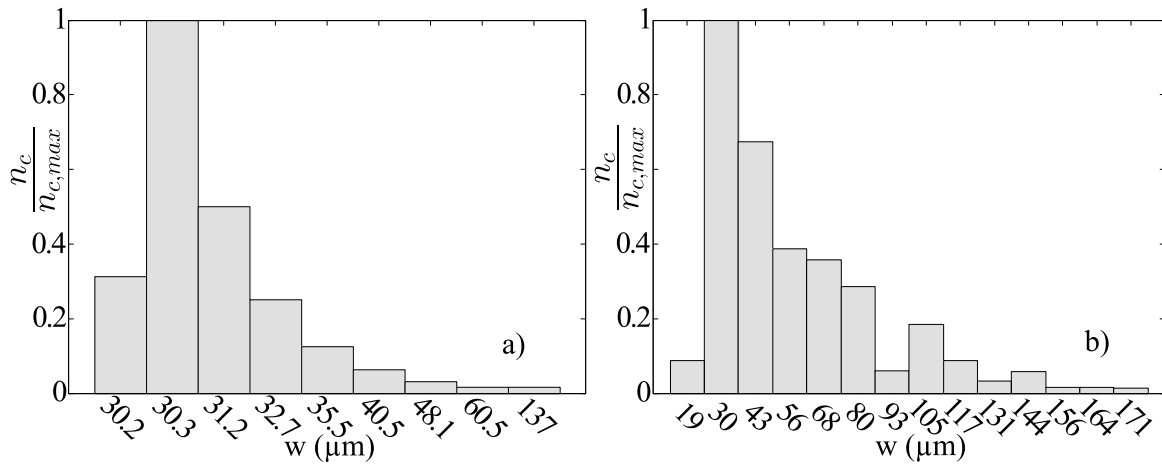


FIGURE 2.30 – Allures de distributions des ouvertures de fissures a) modèle, b) expérimental [87]

A titre de comparaison, la figure 2.30 a) montre une distribution des ouvertures de fissures, du modèle développé, dans le cas d'une multi-fissuration importante sur un élément de longueur 1 m. Les paramètres matériaux du modèle sont ici identiques à ceux utilisés pour obtenir les réponses en traction pour une orientation anisotrope en

figure 2.29. On constate que l'allure des distributions est identique. Un grand nombre de fissures sont peu ouvertes, tandis qu'un petit nombre de fissures sont ouvertes de manière plus importante. Dans les deux cas, le groupe de fissures les moins ouvertes sont celles qui étaient en train de se produire lors de la localisation. Cette figure montre donc bien la capacité du modèle à reproduire la tendance de la distribution des ouvertures de fissures.

#### 2.9.4 Saturation de la multi-fissuration

La longueur ancrée des fibres traversant une fissure varie de 0 à  $\frac{L_f}{2}$ . Pour un groupe de fibres orientées d'un angle  $\varphi_{\vec{e}_i}$  par rapport à la normale au plan de fissuration, lorsque l'espacement entre les fissures devient inférieur à  $\frac{L_f}{2} \cos \varphi_{\vec{e}_i}$ , plusieurs fissures commencent à intercepter un même groupe de fibres, ceci conduisant à un raccourcissement de la longueur ancrée des fibres [93]. Dès lors, le modèle d'ancrage développé n'est plus directement utilisable. Cette dégradation de l'ancrage des fibres implique nécessairement une diminution de la capacité portante du matériau. D'un point de vue expérimental, il est observé que l'espacement entre les fissures lors de la localisation de la fissuration est compris entre  $\frac{L_f}{2} \cos \bar{\varphi}$  et  $\frac{L_f}{4} \cos \bar{\varphi}$ , où  $\bar{\varphi}$  représente un angle moyen d'inclinaison de l'ensemble des fibres traversant la fissure.

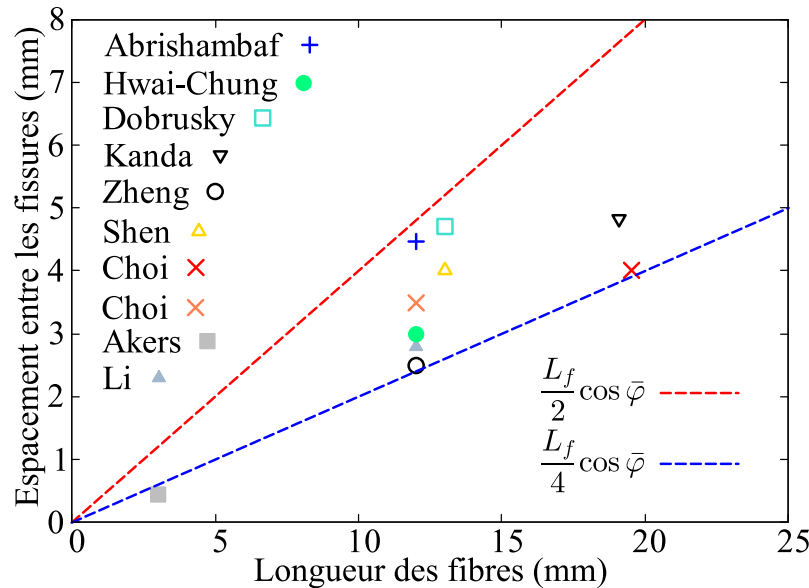


FIGURE 2.31 – Espacement entre les fissures en fin d'essai observé expérimentalement lors d'essais de traction directe en fonction de la longueur des fibres [1], [24], [17], [22], [5], [49], [87], [76], [93], [35]

La figure 2.31 donne l'espacement de fissure observé expérimentalement à l'issue d'essais de traction directe en fonction de la longueur des fibres. Les résultats présentés ici concernent des dosages en fibres relativement importants, pour lesquels le phénomène limitant a été ou s'approche de la saturation de la fissuration. L'ensemble de ces résultats se concentre dans un fuseau compris entre  $\frac{L_f}{4} \cos \bar{\varphi}$  et  $\frac{L_f}{2} \cos \bar{\varphi}$ . Ici, la valeur de  $\cos \bar{\varphi}$  est fixée à 0,8 pour l'ensemble des essais, ce qui correspond à un angle d'orientation moyen des fibres de  $36^\circ$ . Les essais étant réalisés sur des éléments de sections faibles, il est loisible de penser que l'effet de bord important engendre une orientation préférentielle dans la direction de traction. Cette valeur de  $\cos \bar{\varphi}$  devrait nécessiter des investigations plus précises, mais il ne sert ici qu'à représenter un léger aléa sur l'orientation des fibres. L'observation de ces résultats conduit à penser que l'espacement minimal entre les fissures possède une limite en lien avec la longueur des fibres, et cette limite peut être retrouvée en s'appuyant sur la loi d'espacement des fissures du béton armé.

Dans le cas du béton armé, l'espacement des fissures est calculé à partir de la relation (2.9.6), qui s'appuie sur l'hypothèse d'une contrainte d'adhérence renfort-matrice constante.

$$S_w = \frac{\phi_r R_t}{4\rho_r \bar{\tau}_r} \quad (2.9.6)$$

Avec  $\phi_r$  le diamètre du renfort,  $\rho_r = \frac{A_s}{A_c}$  le ratio entre la section d'acier et la section de béton considérée et  $\bar{\tau}_r$  la contrainte d'adhérence moyenne renfort-matrice. Cet espacement tel que défini ici représente en réalité la plus petite distance entre une fissure existante et la section dans laquelle la contrainte dans le béton va atteindre sa résistance à la traction, formant ainsi une nouvelle fissure. A partir de cette relation, l'espacement des fissures dans le cas des bétons fibrés s'écrit donc pour une direction de fissuration  $I$  :

$$S_{w,I} = \frac{\phi_f R_t}{4\rho_f \bar{\tau}_{f,I}} \quad (2.9.7)$$

La contrainte de cisaillement moyenne à l'interface fibre matrice  $\bar{\tau}_{f,I}$  peut être exprimée pour une section unitaire de fissure par la relation (2.9.8).

$$\bar{\tau}_{f,I} = \frac{4\sigma_{f,I}^w}{\pi\phi_f L_f n_{f,I}} \quad (2.9.8)$$

Avec  $n_{f,I}$  le nombre de fibres orientées d'un angle moyen  $\bar{\varphi}_I$  traversant la fissure  $I$ , issu de la relation (2.8.3), et  $\frac{L_f}{4}$  la longueur d'ancrage moyenne des fibres (équation (2.9.9))

$$n_{f,I} = \frac{4\rho_f \cos \bar{\varphi}_I}{\pi\phi_f^2} \quad (2.9.9)$$

En utilisant les relations (2.9.7), (2.9.8) et (2.9.9), la distance minimale entre les fissures devient (2.9.10).

$$S_{w,I} = \frac{R_t L_f \cos \bar{\varphi}_I}{4\sigma_{f,I}^w} \quad (2.9.10)$$

La résistance à la traction du béton subit un effet d'échelle qui doit être pris en compte. En substituant  $R_t$  par la relation (2.9.2) dans la relation (2.9.10). En isolant  $S_{w,I}$ , on obtient l'expression de la distance minimale permettant d'atteindre la résistance à la traction du béton qui tient compte d'un effet d'échelle.

$$S_{w,I} = \frac{R_{t,ref} L_f \cos \bar{\varphi}_I}{4\sigma_{f,I}^w} \left( \frac{4l_{ech}\sigma_{f,I}^w}{L_f R_{t,ref} \cos \bar{\varphi}_I} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (2.9.11)$$

On obtient ainsi l'expression de la distance de transmission de l'effort repris par les fibres traversant une fissure, à la matrice permettant d'atteindre sa résistance à la traction. Il apparaît clairement que lorsque l'espacement entre les fissures devient inférieure à cette distance, il sera impossible aux fibres de transmettre un effort suffisant entre les fissures existantes, qui permettrait de créer de nouvelles fissures intermédiaires. En écrivant l'égalité des relations (2.9.3) et (2.9.11), et en supposant qu'au moment de la saturation de la fissuration, les fissures sont suffisamment ouvertes pour que l'apport du béton soit négligeable  $\sigma_I \approx \sigma_{f,I}^w$ , on obtient l'expression de la contrainte pour laquelle il n'est plus possible de créer de fissure intermédiaire. En injectant cette contrainte dans l'expression (2.9.3), on obtient l'espacement entre les fissures à saturation.

$$S_{w,I} \approx \frac{L_f \cos \bar{\varphi}_I}{4} \quad (2.9.12)$$

On montre ainsi que l'espacement entre les fissures ne peut pas devenir inférieur à la valeur donnée en (2.9.12). Ainsi, dans le modèle, durant une phase de multi-fissuration, lorsque l'espacement entre les fissures devient inférieur à cette valeur la localisation de

la fissuration est déclenchée, seule la fissure la plus ouverte continue de s'ouvrir. A cet instant, il est possible que la capacité portante du matériau modélisé ait été supérieure à la contrainte de saturation. Afin d'éviter de surestimer la contrainte ultime de l'élément altéré par une multi-fissuration excessive, la contrainte dans les fibres en zone fissurée est alors bloquée à la valeur de saturation. La décharge des autres fissures du même élément lorsque la contrainte diminue n'est pas prise en compte dans le modèle. Les fissures des autres éléments peuvent quant à elles se refermer sous l'effet de la décharge. Cette limite permet donc de prendre en compte l'impact d'une multi-fissuration excessive sur la capacité portante du matériau.

### 2.9.5 Calcul de la loi de comportement finale

Connaissant par avance les résistances à la traction du béton des différentes sections potentielles de multi-fissures, la loi de comportement pour une seule fissure  $\sigma_{f,I}^w(w_I, R_{t,k})$  est construite jusqu'au pic de contrainte pour tous les  $R_{t,k}$  en imposant l'ouverture d'une seule fissure incrémentale. On construit par la suite la loi de comportement totale, en tenant compte de la multi-fissuration. Pour ce faire, on impose une ouverture de fissure fictive dans la première fissure  $w_{fi,I}$ , ceci permet d'obtenir la contrainte totale traversant cette fissure  $\sigma_I$  et donc d'en déduire l'espacement entre les fissures  $S_{w,I}$ . Un groupe de fissures potentielles  $k$  devient actif lorsque  $S_{w,I}$  devient inférieur à  $\frac{l_{e,I}}{2^k}$ . Connaissant les lois de comportement contrainte-ouverture de fissure de chaque groupe de fissures, on obtient l'ouverture de fissure  $w_{k,I}$  de chaque groupe qui permet d'équilibrer la contrainte  $\sigma_I$ . Ces ouvertures sont obtenues en interpolant linéairement les lois de comportement entre deux points de construction. Le déplacement total de fissuration  $w_I^{pl,t}$  est donc obtenu en sommant toutes les ouvertures des fissures actives (2.9.13).

$$w_I^{pl,t} = w_{fi} + \sum_k n_{c,k,I} w_{k,I} \quad (2.9.13)$$

La loi de comportement totale des fibres peut donc être construite jusqu'au pic de contrainte en fonction du déplacement total d'ouverture de fissure. Cette courbe est stockée, puis sera utilisée pour calculer la contrainte reprise par les fibres pour une ouverture de fissure totale imposée  $w_I^{pl,t}$  dans la direction  $I$ , donnée par le modèle de béton Fluendo3D. Etant donné que les directions principales de fissuration peuvent évoluer au cours du calcul, la pré-construction des lois est effectuée à chacun des pas du calcul lorsque la contrainte augmente. En résumé, le modèle de béton fournit au modèle

de fibres une ouverture de fissure issue du calcul de déformation plastique du béton présenté au chapitre 1.4.2.2.2. Cette ouverture totale est éventuellement décomposée en un certain nombre de micro-fissures dans l'élément. Lorsque la contrainte devient excessive, la localisation de la fissuration se produit dans la fissure la plus ouverte. Cette localisation peut être engendrée par deux phénomènes : l'arrachement d'un trop grand nombre de fibres, ou une multi-fissuration trop importante. Lorsque la localisation se produit par saturation de la multi-fissuration, la contrainte reprise par les fibres ne peut plus augmenter, elle est maintenue constante jusqu'à ce que la fissure en phase de localisation atteigne l'ouverture de fissure correspondant à la contrainte de saturation. Durant la phase de localisation, la construction des courbes jusqu'au pic de contrainte n'est plus nécessaire et la réponse des fibres est obtenue par la méthode de discrétisation des forces moyennes sur la sphère unité présentée en amont.

### 2.9.5.1 Zone non fissurée

En zone non fissurée, les fibres participent de manière élastique à la reprise des efforts dans le béton. Dans le modèle, seule la contribution des fibres dans les directions de fissuration est considérée. Cette approximation permet un calcul plus précis des ouvertures et espacements de fissures qui sont le domaine d'intérêt du modèle, en évitant un calcul plus lourd dans les directions non fissurées. Pour ce faire, la déformation totale dans la direction de fissuration est projetée dans la direction moyenne des fibres, ce qui permet de calculer la contrainte élastique dans les fibres. Puis cette contrainte est à nouveau projetée dans la direction de fissuration. La contrainte élastique reprise par les fibres dans une direction principale  $I$  peut donc être obtenue à partir de l'endommagement de traction dans cette direction  $D_I^t$ , de la densité volumique de fibres, du module d'élasticité des fibres, de l'angle d'inclinaison moyen dans la direction considérée et de la déformation totale de l'élément dans la direction considérée  $\varepsilon_I^t$  (équation (2.9.14)).

$$\sigma_{f,I}^e = (1 - D_I^t) \rho_f E_f \cos^2 \bar{\varphi}_I \varepsilon_I^t \quad (2.9.14)$$

### 2.9.5.2 Contrainte totale des fibres

La contribution des fibres dans la fissure est calculée pour une section unitaire de fissure dans chacune des directions principales de fissuration. Dans une direction principale de fissuration  $I$ , la contrainte reprise par les fibres  $\sigma_I^f$  est donnée par la relation (2.9.15).

$$\sigma_{f,I} = \sigma_{f,I}^e + D_I^t \sigma_{f,I}^w \quad (2.9.15)$$

### 2.9.5.3 Contrainte totale du béton fibré

Le tenseur des contraintes totales du béton fibré est par la suite calculé dans la base fixe du maillage et est donné par la relation (2.9.16).

$$\sigma_{ij} = (1 - \rho_f) \sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^f \quad (2.9.16)$$

Dans (2.9.16),  $\sigma_{ij}^m$  est le tenseur des contraintes de la matrice et  $\sigma_{ij}^f$  est le tenseur des contraintes reprises par les fibres, obtenu par passage du tenseur des contraintes principales des fibres de la base de fissuration à la base fixe. La présence de fibres et de la multi-fissuration entraîne une modification directe de l'endommagement du béton. Dans Fluendo3D, le calcul de l'endommagement se base sur les déformations plastiques qui conduisent directement au déplacement de fissuration 1.4.2.2.2. Or, la multi-fissuration entraîne une modification de l'ouverture de fissure maximale de l'élément et c'est donc cette ouverture qui est transmise à la variable d'endommagement du béton, la condition de non décroissance de l'endommagement étant conservée. En présence de multi-fissuration, l'endommagement du béton devient donc (2.9.17), avec  $w_I^{k,t}$  la constante de régularisation de l'endommagement, et  $w_I^{\mu,max}$  l'ouverture maximale de multi-fissuration.

$$D_I^t = 1 - \left( \frac{w_I^{k,t}}{w_I^{k,t} + w_I^{\mu,max}} \right)^2 \quad \text{avec } I \in [I, II, III] \quad (2.9.17)$$

## 2.9.6 Phase de décharge

Paschalis et Lampropoulos ont réalisé des essais de tractions cycliques sur des éprouvettes en BFUP. Les éprouvettes sont de type "dogbones" de 150 mm de long et de section rectangulaire de 13 mm par 50 mm. Les fibres utilisées sont rectilignes et cylindriques, de longueur 13 mm et de diamètre 0,16 mm. La figure 2.32 a) présente une de leurs courbes expérimentales en contrainte-déformation pour une densité volumique de fibre de 3 %. L'allure observée est représentative de l'ensemble des essais réalisés et on constate que la décharge est fortement plastique avec une légère diminution du module

de décharge lorsque la déformation totale augmente. Dans le modèle, la décharge est effectuée à partir de la rigidité initiale de la loi de comportement contrainte-ouverture de fissure totale des fibres en zone fissurée. La décharge se produit lorsque l'ouverture de fissure diminue. Cette ouverture étant pilotée par le modèle de béton, la décharge élastique du béton s'effectue dans un premier temps avant de commencer à refermer la fissure. Lorsque la contrainte dans les fibres devient égale à zéro, l'ouverture de fissure correspondante est stockée, et la contrainte des fibres est alors prise comme nulle dans la fissure tant que l'ouverture de fissure reste inférieure à l'ouverture de décharge. Le résultat d'un cycle de chargement d'un élément fini dans Cast3m en contrainte-déformation est présenté en 2.32 b). Sur ce cycle, trois décharges sont effectuées. On observe alors la phase de décharge élastique du béton qui précède la décharge des fibres. Lors de la première décharge, les fissures étaient peu ouvertes, on assiste donc à une phase de compression liée à la refermeture de la fissure décrite en 1.4.2.4.

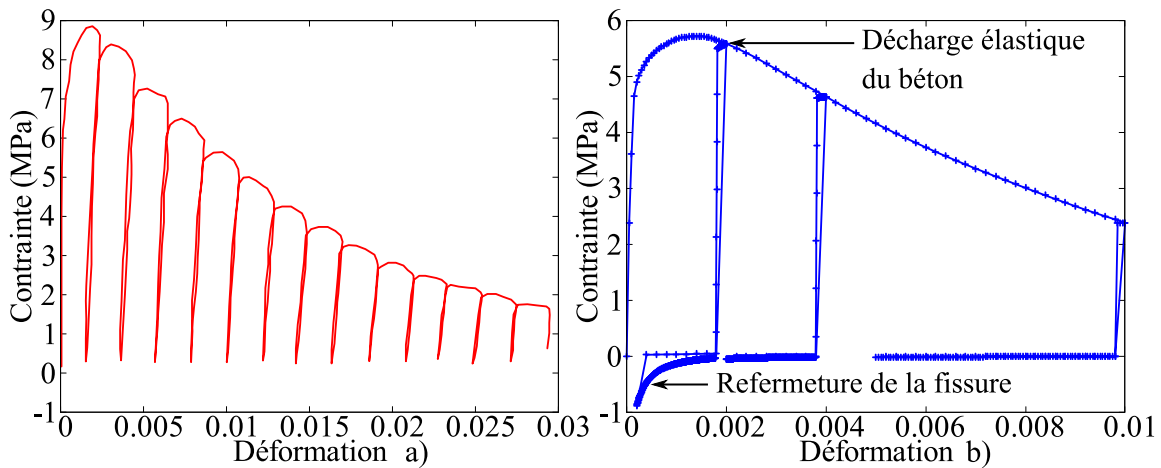


FIGURE 2.32 – a) Cycle de charge-décharge en traction d'un BFUP [42], b) cycle de chargement d'un seul élément fini en béton fibré dans Cast3m

## 2.10 Conclusion sur le modèle développé

Ce chapitre a permis de décrire la physique qui constitue le socle du modèle de bétons fibrés. Le comportement mécanique des fibres se définit à partir de l'étude d'une fibre extraite selon son axe longitudinal, ancrée sur un seul de ses côtés dans une matrice cimentaire. L'extraction est alors décomposée en trois phases. Le glissement durant la phase d'élasticité de l'interface est obtenu en imposant une force élastique jusqu'au début de la décohésion fibre-matrice. Durant la phase de décollement, la force et le

glissement sont tous les deux pilotés par la longueur décollée imposée. Lorsque la fibre est entièrement décollée, elle commence à s'extraire hors de la matrice sur son côté le moins ancré. La force est alors pilotée par le glissement d'arrachement, qui permet de calculer la contrainte à l'interface fibre-matrice, à partir des différents phénomènes observés expérimentalement.

Par la suite, les effets de l'inclinaison des fibres sont pris en compte. Ils permettent de représenter l'augmentation de force due au frottement, et la diminution de la rigidité due à une rupture localisée de la matrice, observées lors des essais d'extraction. Le phénomène d'écaillage conduit à un problème non linéaire nécessitant un algorithme de résolution itératif.

Les loi de comportement pour des fibres uniques sont par la suite étendues à un ensemble de fibres. Lors de la fissuration d'un élément en béton fibré, il est impossible de déterminer l'ancrage des fibres. Cependant, la présence d'un grand nombre de fibres confère à l'ancrage une densité de probabilité uniformément aléatoire, ce qui permet d'obtenir de manière simple la force moyenne pour un ensemble de fibres et un ancrage quelconque. La variabilité des inclinaisons de fibres traversant un plan de fissuration est représentée par un ellipsoïde d'orientation, dont le rayon est corrélé à la densité volumique de fibres dans chaque direction. Puis l'espace est discrétisé afin de pouvoir sommer les contributions des fibres dans toutes les directions de l'espace. Ceci permet alors d'obtenir la contrainte reprise par les fibres dans une fissure donnée.

Le phénomène de multi-fissuration est ensuite représenté par une loi d'effet d'échelle de Weibull, permettant de tenir compte de la disparité des résistances en traction du béton dans un macro-élément. Cet effet d'échelle permet de considérer une distribution des ouvertures de fissures dans un même élément. La multi-fissuration induit une variation du déplacement total de l'élément conduisant à la phase d'écrouissage observée expérimentalement chez les BFUP.

Enfin, la réponse totale du béton fibré est obtenue à partir des contraintes dans le béton et dans les fibres en zones fissurées et non fissurées dans les trois directions principales de fissuration, permettant ainsi d'obtenir le tenseur des contraintes du matériau.

## Chapitre 3

# Implémentation numérique du modèle

## 3.1 Mise en œuvre du modèle

Cette partie développe quelques aspects de la mise en œuvre numérique du modèle et de son implantation dans le logiciel éléments finis Cast3m.

### 3.1.1 Algorithme de calcul des loi élémentaires de fibres uniques

Le problème d'équilibre entre l'écaillage et la force d'extraction pour le calcul de la réponse force-ouverture de fissure des fibres uniques nécessite une résolution numérique. Le modèle est codé en Fortran 90, et constitue la base du modèle final. La figure 3.1 donne l'algorithme de résolution utilisé, uniquement pour le côté le moins ancré de la fibre afin d'alléger la représentation. Le calcul s'effectue de manière incrémentale pour toutes les phases du comportement des fibres. La résolution peut être décomposée en cinq grandes étapes.

La première étape concerne la phase d'élasticité de l'interface durant laquelle une force élastique est imposée dans la fissure. Si cette force est inférieure à la force de début de décollement, la force élastique est conservée. Si cette force est supérieure à la force de début de décollement, la variable  $L_d$  est initiée, elle pilote alors la force et le glissement de décollement. Si l'incrément de glissement est positif, la force de décollement est conservée, si cet incrément est négatif, le point d'instabilité de décollement est atteint et la fibre commence à s'arracher.

En phase d'arrachement, la variable  $s_p$  est initiée, elle pilote la force d'extraction. Ensuite, l'effet de l'inclinaison sur la force est appliqué. Si l'incrément de force est positif, la longueur d'écaillage est calculée, s'il est négatif, l'écaillage n'augmente plus, il est égal à celui du pas précédent convergé. La longueur d'écaillage est une fonction de la force et de la longueur ancrée. Si la variation d'incrément d'écaillage normalisée par la longueur ancrée initiale de la fibre est inférieure au critère, la longueur d'écaillage est conservée. Dans le cas contraire, la boucle d'itération d'équilibre d'écaillage est activée, la longueur ancrée est actualisée, une nouvelle force est calculée ainsi qu'un nouvel écaillage jusqu'à satisfaction du critère. La zone décollée de la fibre et l'écaillage étant concomitants, la longueur décollée peut diminuer, entraînant une réduction de la force et du glissement durant la phase de décollement sans pour autant initier la phase d'extraction hors de la matrice. Une condition est alors ajoutée pour l'extraction : l'incrément de glissement devra être négatif tandis que l'incrément de longueur décollée est positif.

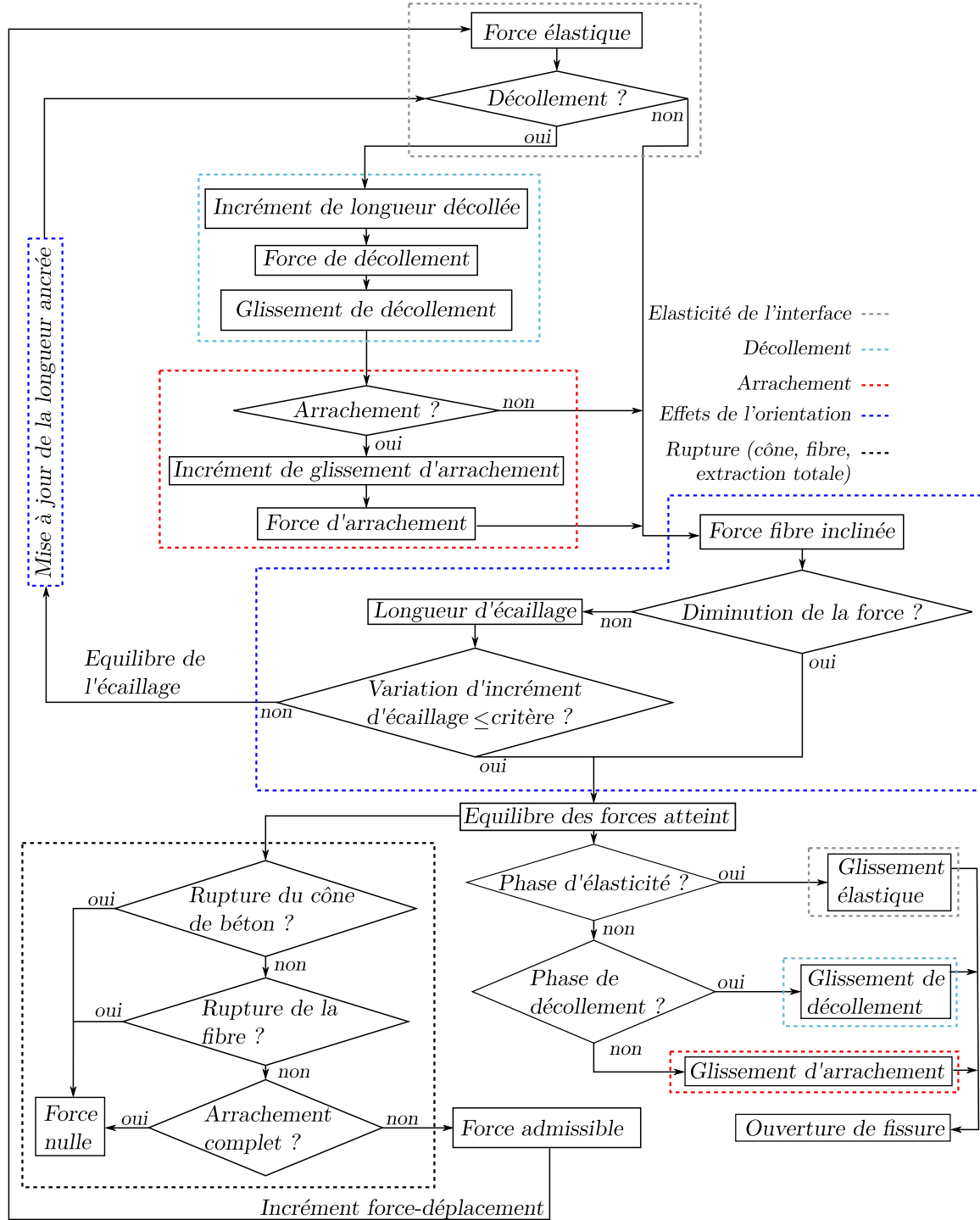


FIGURE 3.1 – Algorithme global donnant la courbe force-glissement pour le côté le moins ancré de la fibre

Par la suite, les glissements correspondant à l'état actuel sont calculés. Les forces admissibles vis à vis de la rupture du cône de béton et de la rupture de la fibre sont

testées, de même que l'éventuelle extraction totale de la fibre. Si ces critères ne sont pas satisfaits la force devient nulle, sinon la force contenant l'effet de l'inclinaison est conservée, et l'algorithme passe au pas de chargement suivant.

### 3.1.2 Réduction du modèle

Le modèle présente la capacité de calculer les courbes force moyenne-ouverture de fissure pour autant d'inclinaisons et de résistances à la traction du béton que souhaitées. Afin de limiter les temps de calcul, il a été fait le choix d'utiliser une technique de réduction de modèle. A partir des données d'entrée du modèle, les courbes force moyenne-ouverture de fissure sont construites une seule fois au début du calcul pour un certain nombre d'orientations de fibres et de résistances à la traction. Afin de pouvoir utiliser ces courbes, il n'est pas nécessaire de les stocker intégralement. En réalité, une courbe force moyenne-ouverture de fissure peut être caractérisée par un faible nombre de valeurs caractéristiques. La figure 3.2 propose de décrire la force moyenne en fonction de l'ouverture de fissure par six valeurs : la rigidité initiale  $\bar{K}_0$ , la force et l'ouverture de fissure au pic respectivement  $\bar{F}_{pic}$  et  $\bar{w}_{pic}$ , une force et une ouverture de fissure durant la phase adoucissante respectivement  $\bar{F}_{ad}$  et  $\bar{w}_{ad}$ , et l'ouverture de fissure pour laquelle la force devient nulle  $\bar{w}_u$ . Chacune de ces valeurs est stockée pour chaque angle  $\varphi$  et chaque résistance à la traction du béton  $R_t$  pour lesquelles la force moyenne a été calculée. Chaque valeur caractéristique forme ainsi une surface paramétrée par les valeurs de  $\varphi$  et  $R_t$ . Ces surfaces peuvent par la suite être approchées par des équations analytiques de surface. Il est choisi dans le modèle d'utiliser une équation cubique de surface afin d'envisager les cas de courbures multiples. Un point de la surface de valeur  $X$  s'écrit donc en fonction de l'inclinaison des fibres et de la résistance à la traction du béton à partir de la relation (3.1.1), où  $c_i$  désigne les dix coefficients du polynôme.

$$X = c_1 + c_2 R_t + c_3 \varphi + c_4 R_t^2 + c_5 \varphi^2 + c_6 R_t \varphi + c_7 R_t^2 \varphi + c_8 R_t \varphi^2 + c_9 R_t^3 + c_{10} \varphi^3 \quad (3.1.1)$$

Les coefficients  $c_i$  sont obtenus en minimisant le résidu  $||\vec{R}||$  par la méthode des moindres carrés, avec  $\vec{R}$  donné par la relation (3.1.2), où  $Z_{n,k}$  est la valeur d'un des paramètres de la courbe force moyenne-ouverture de fissure calculé par le modèle, pour une résistance à la traction  $R_{t,n}$  et un angle  $\varphi_k$ . L'ensemble des valeurs  $Z_{n,k}$  pour tous les angles et résistances à la traction forment ainsi le vecteur  $\vec{Z}_{n,k}$ .

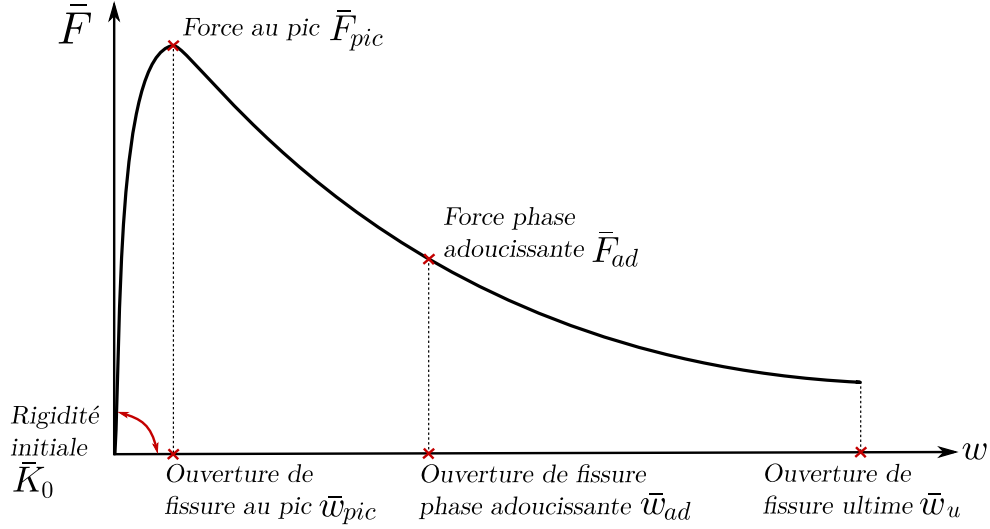


FIGURE 3.2 – Caractérisation d'une courbe force moyenne-ouverture de fissure par six paramètres caractéristiques

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 & R_{t,1} & \varphi_1 & R_{t,1}^2 & \varphi_1^2 & R_{t,1}\varphi_1 & R_{t,1}^2\varphi_1 & R_{t,1}\varphi_1^2 & R_{t,1}^3 & \varphi_1^3 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 1 & R_{t,n} & \varphi_k & R_{t,n}^2 & \varphi_k^2 & R_{t,n}\varphi_k & R_{t,n}^2\varphi_k & R_{t,n}\varphi_k^2 & R_{t,n}^3 & \varphi_k^3 \end{pmatrix} \vec{c}_i - \vec{Z}_{n,k} \quad (3.1.2)$$

En pratique, la force durant la phase adoucissante est choisie comme une fraction de la force au pic, il n'est donc pas nécessaire de la caractériser par une surface. Le choix fait dans le modèle est de considérer une force durant la phase adoucissante égale à 30 % de la force au pic. La figure 3.3 fait apparaître les cinq surfaces de réponses obtenues après calcul des forces moyennes. Les paramètres utilisés lors de l'obtention de ces surfaces sont décrits dans le tableau 3.1. On remarque en premier lieu que l'inclinaison des fibres fait varier l'ensemble des surfaces de manière significative. La rigidité initiale et la force au pic possèdent un angle optimum permettant de maximiser leurs valeurs, ceci étant lié au frottement et à l'écaillage. Les autres paramètres suivent, quant à eux, des tendances relativement monotones, l'augmentation de l'inclinaison provoquant l'accroissement des ouvertures de fissures au pic, durant la phase adoucissante, et finales. Les variations importantes dues à l'inclinaison des fibres empêchent ici d'observer clairement les variations plus légères liées à la résistance à la traction. Lorsque la résistance à la traction augmente, le phénomène d'écaillage devient moins important, conduisant ainsi à l'augmentation de la rigidité initiale et de la force au pic. Les trois ouvertures de fissures caractéristiques diminuent, quant à elles, lorsque la résistance à la traction

augmente. Les surfaces quadrillées en pointillés représentent l'approximation des surfaces par le polynôme de degré trois, et montrent ainsi la fidélité de la reproduction des paramètres des courbes force moyenne-ouverture de fissure. On remarquera que deux polynômes sont utilisés pour approcher la rigidité initiale et l'ouverture de fissure au pic. En effet, l'inclinaison des fibres entraîne des variations importantes des valeurs de ces surfaces, conduisant ainsi à une erreur d'approximation non négligeable, notamment pour les faibles valeurs. Deux surfaces sont alors utilisées avec une transition pilotée par un angle critique  $\varphi_{crit}$  ici pris égal à  $50^\circ$ .

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Longueur des fibres	$L_f$	13	mm
Diamètre des fibres	$\phi_f$	0,2	mm
Rigidité de l'interface	$H_f$	5000	GPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	6	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	5	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	0,1	mm
Force d'about	$f_0$	2	N
Angle de rupture du cône de béton	$\alpha_c$	30	°
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	25	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	5	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	1	mm
Coefficient de frottement	$\mu$	0,5	-
Module d'élasticité des fibres	$E_f$	200000	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2400	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	2500	MPa

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle utilisés lors de la construction des surfaces présentées en 3.3

A partir des valeurs des paramètres fournies par les surfaces, la courbe force moyenne-ouverture de fissure est reconstruite en l'approchant par deux fonctions, la première en phase pré-pic, et la seconde en phase post-pic. En phase pré-pic, une fonction homographique est utilisée : la force moyenne  $\bar{F}_{ap}$  pour un angle d'inclinaison et une résistance à la traction du béton donnés s'écrit ainsi (3.1.4). Cette fonction vérifie les propriétés données en (3.1.3).

$$\frac{d\bar{F}_{ap}(0)}{dw} = \bar{K}_0 \quad \text{et} \quad \bar{F}_{ap}(\bar{w}_{pic}) = \bar{F}_{pic} \quad (3.1.3)$$

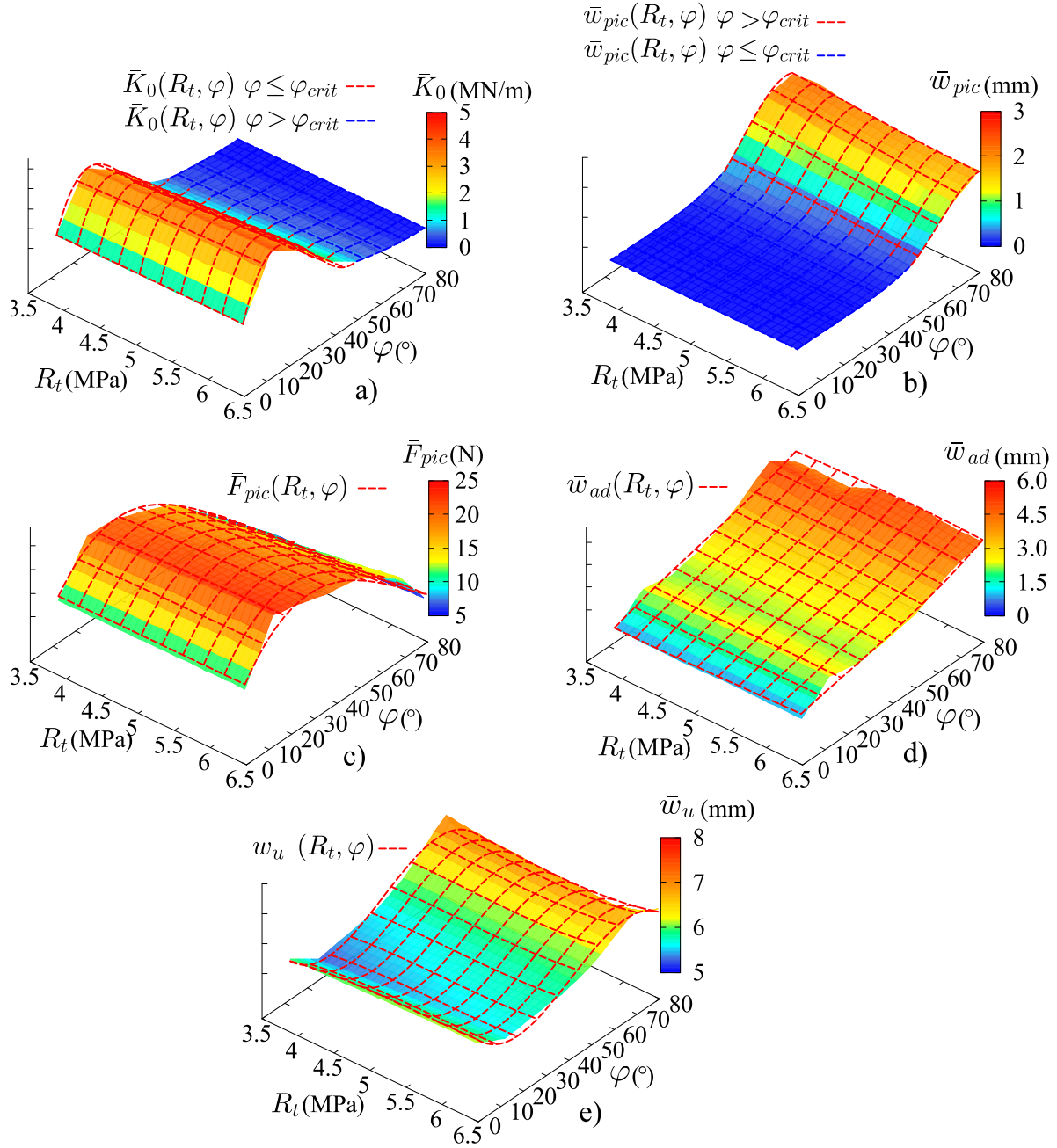


FIGURE 3.3 – Approximation des surfaces des paramètres de forces moyennes : a) rigidité initiale, b) ouverture de fissure au pic, c) force au pic, d) ouverture de fissure en phase adoucissante, e) ouverture de fissure ultime

$$\bar{F}_{ap}(w) = \frac{\bar{K}_0 w}{\frac{\bar{K}_0 \bar{w}_{pic} - \bar{F}_{pic}}{\bar{w}_{pic} \bar{F}_{pic}} w + 1} \quad (3.1.4)$$

En phase post-pic, la force moyenne  $\bar{F}_{pp}$  est approchée par une fonction exponentielle décroissante donnée sous sa forme simplifiée par la relation (3.1.6). Cette fonction vérifie les propriétés données en (3.1.5).

$$\bar{F}_{pp}(\bar{w}_{pic}) = \bar{F}_{pic} \quad \text{et} \quad \bar{F}_{pp}(\bar{w}_{ad}) = \bar{F}_{ad} \quad (3.1.5)$$

$$\bar{F}_{pp}(w) = \bar{F}_{pic} \left( \frac{\bar{F}_{ad}}{\bar{F}_{pic}} \right)^{\frac{w - \bar{w}_{pic}}{\bar{w}_{ad} - \bar{w}_{pic}}} \quad (3.1.6)$$

Si l'ouverture de fissure devient supérieure à  $\bar{w}_u$  la force moyenne devient nulle. La figure 3.4 montre la corrélation entre les forces moyennes calculées par le modèle et les forces reconstruites à partir des paramètres issus des surfaces pour six angles d'inclinaison de fibres. La reconstruction permet globalement de bien reproduire les forces initiales, seule la courbe pour un angle de  $50^\circ$  s'éloigne momentanément de la courbe de base. Cet écart est dû à la variation importante de rigidité initiale de la courbe. Néanmoins, il est préférable d'être plus précis dans les débuts de courbes qui concernent les plages de faibles ouvertures de fissure, ce qui est la zone d'utilisation privilégiée des bétons fibrés.

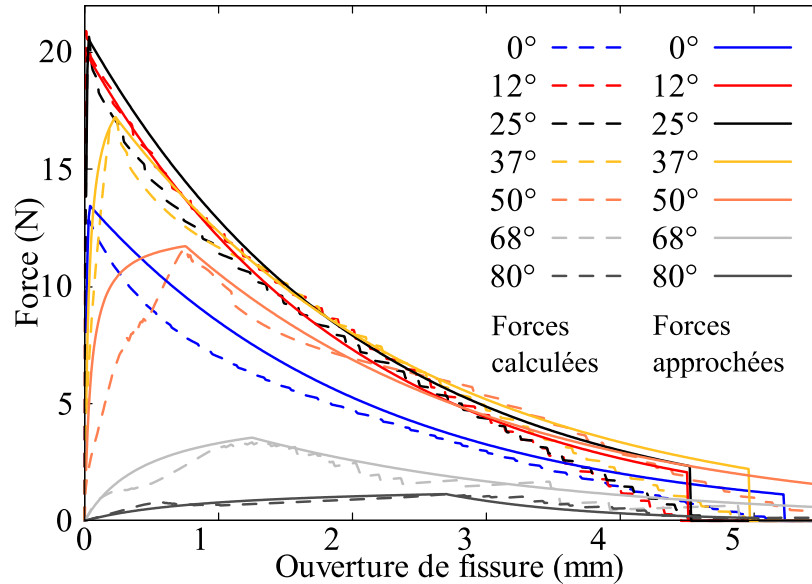


FIGURE 3.4 – Forces moyennes d'extraction calculées et approchées pour six angles d'inclinaison,  $\tau_d = 6$  MPa,  $E_f = 200$  GPa,  $H_f = 5$  GPa,  $\tau_{max} = 7$  MPa,  $s_k = 1$  mm,  $F_0 = 2$  N,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $R_t = 3,3$  MPa,  $\mu = 0,5$ ,  $f_y^f = 2400$  MPa,  $f_u^f = 2500$  MPa,  $M_0 = 8$  MPa,  $L_0 = 1$  mm

### 3.1.3 Déroulement du calcul

En présence de fibres dans le modèle, l'appel à l'opérateur MATE donnant les paramètres matériaux des fibres va engendrer la phase de préconditionnement conduisant au calcul des équations de surfaces permettant de reconstruire les forces moyennes. Si aucun des paramètres de fibres nécessaires au calcul des forces moyennes ne varie sur le maillage, ce calcul est effectué une seule fois. Lorsqu'un ou plusieurs des paramètres sont définis comme un champ variable sur le maillage, le sous-programme de préparation effectuera une boucle sur les points de Gauss des éléments comportant des données d'entrées variables, afin d'affecter à chaque point de Gauss les paramètres correspondants.

## 3.2 Méthode de discrétisation des courbes

### 3.2.1 Discrétisation de la courbe force-ouverture de fissure

La construction des courbes force-ouverture de fissure est réalisée par un processus incrémental. Le choix des incréments pour la construction est un point important car une discrétisation trop grossière conduirait à omettre certaines portions de courbes. A contrario, une discrétisation trop fine augmente le nombre de calculs, et par conséquent le temps nécessaire à l'exécution de l'algorithme. Durant la phase de comportement élastique de l'interface, une force élastique est imposée. Compte tenu de l'ordre de grandeur des forces mises en jeu lors de l'extraction d'une fibre, le pas de chargement  $\delta F_e$  est pris égal à  $\frac{F_{crit,0}}{10}$ , avec  $F_{crit,0}$  la force de début de décollement du côté le moins ancré pour la longueur ancrée initiale avant écaillage. Pour la phase de décollement, la variable pilote est la longueur décollée  $L_d$ . Le pas d'incrément de longueur décollée  $\delta L_d$  est pris égal à  $\frac{L_f}{200}$ . Durant la phase d'extraction hors de la matrice, l'incrément de glissement  $\delta s_p$  est pris égal à  $\frac{L_f}{1000}$ . Pour le calcul de la force moyenne, il est nécessaire de calculer la force d'une fibre pour un certain nombre de longueurs ancrées. Plus ce nombre est élevé, plus la force moyenne sera précise. Le nombre de pas permettant la construction des courbes force-ouverture de fissure est optimisé pour chaque longueur ancrée suivant la relation (3.2.1).

$$n_{ligne} = \frac{F_{crit,0}}{\delta F_e} + \frac{L}{\delta L_d} + \frac{L}{\delta s_p} \quad (3.2.1)$$

C'est donc la longueur du côté le moins ancré qui pilote le nombre de pas, car il s'agit toujours du côté de la fibre mis en défaut en premier. Le calcul de l'équilibre entre l'écaillage et la force dans les fibres nécessite un calcul itératif. Afin d'équilibrer les deux grandeurs, le nombre d'itérations maximal autorisé est fixé à 20 après qu'il ait été observé que le calcul convergeait systématiquement en une dizaine d'itérations. Le nombre d'itérations minimum est, quant à lui, fixé à 2.

### 3.2.2 Discrétisation des longueurs ancrées

La discrétisation de la longueur ancrée des fibres joue un rôle important dans le calcul de la force moyenne. Une étude paramétrique révèle qu'une discrétisation en soixante positions possibles des fibres entre  $L = 0$  et  $L = \frac{L_f}{2}$  donne une allure satisfaisante de la courbe moyenne. La figure 3.5 donne une représentations des forces moyennes pour sept inclinaisons en comparant une discrétisation des longueurs ancrées en cinq-cent valeurs et en soixante valeurs, et permet de constater le très faible écart entre les courbes obtenues pour les deux valeurs de discrétisation des ancrages.

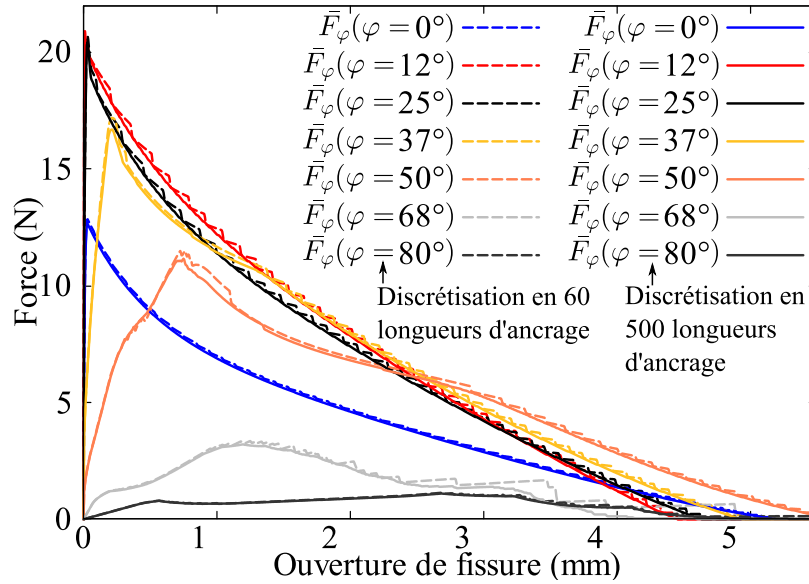


FIGURE 3.5 – Force moyenne d'extraction pour des longueurs ancrées discrétisées en 60 et 500 positions, pour six inclinaisons,  $\tau_d = 6$  MPa,  $E_f = 200$  GPa,  $H_f = 5$  GPa,  $\tau_{max} = 7$  MPa,  $s_k = 1$  mm,  $F_0 = 2$  N,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $R_t = 3,3$  MPa,  $\mu = 0,5$ ,  $f_y^f = 2400$  MPa,  $f_u^f = 2500$  MPa,  $M_0 = 8$  MPa,  $L_0 = 1$  mm

### 3.2.3 Discrétisation des inclinaisons de fibres et des résistances à la traction

Afin de construire les surfaces donnant les valeurs caractéristiques des courbes force-ouverture de fissure, il est nécessaire de calculer les forces moyennes pour un certain nombre d'inclinaisons et de résistances à la traction du béton. Compte tenu du processus de calcul, il est primordial d'optimiser le nombre de valeurs de calcul de ces deux grandeurs. En effet, pour chaque ligne de la courbe force-ouverture de fissure d'une fibre, le calcul d'équilibre force-longueur d'écaillage est effectué  $n_k$  fois,  $n_k \in [2, 20]$ . Les courbes force-ouvertures de fissures sont construites soixante fois afin de calculer la force moyenne. Puis, si  $n_{R_t}$  est le nombre de valeurs de  $R_t$  et  $n_\varphi$  le nombre d'angles pour lesquels les courbes force moyenne-ouverture de fissure sont construites, le nombre de fois où le calcul d'une fibre est effectué s'élève à  $60n_\varphi n_{R_t}$ . Ceci montre donc l'intérêt de la réduction du modèle afin d'effectuer ce calcul une seule fois. Afin d'optimiser le temps de calcul, une étude paramétrique montre qu'une discrétisation de l'orientation en huit valeurs  $\varphi \in [0^\circ, 80^\circ]$ , ainsi qu'une discrétisation de la résistance à la traction en huit valeurs procurent une bonne approximation des surfaces de réponses.

#### 3.2.3.1 Domaine de variation des résistances à la traction

La résistance à la traction du béton dépend de la taille des éléments. Celle-ci étant entrée par l'utilisateur, il est nécessaire de définir une plage de résistances à la traction pour la construction adéquate des surfaces de réponses. La saturation de la multi-fissuration est une limite physique du modèle, elle se produit lorsque l'espacement entre les fissures devient inférieur à  $\frac{L_f \cos \bar{\varphi}}{4}$ . En appliquant la loi de Weibull, la résistance maximale qu'il est possible d'atteindre est ainsi donnée par (3.2.2).

$$R_{t,max} = R_{t,ref} \left( \frac{4l_{ech}}{L_f \cos \bar{\varphi}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.2.2)$$

Ne connaissant pas l'angle d'inclinaison moyen des fibres par rapport aux directions de traction, ce dernier est pris égal à  $60^\circ$  afin d'augmenter la plage de construction des courbes. Concernant la résistance à la traction minimale, il a été montré que, pour une taille d'élément infinie, la résistance à la traction du béton ne tend pas vers zéro mais vers la résistance d'un élément d'une longueur caractéristique  $l_c \sqrt{2\pi}$  avec  $l_c \approx 50cm$

[74]. La résistance à la traction minimale d'un élément devient donc (3.2.3).

$$R_{t,min} = R_{t,ref} \left( \frac{l_{ech}}{l_c \sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.2.3)$$

### 3.2.4 Valeur d'écaillage pour le calcul de l'approximation des solutions

Afin de construire la droite d'approximation des solutions, donnant la valeur de l'écaillage en fonction de la force appliquée, il est nécessaire de définir une valeur d'écaillage constante  $l_{s,k}$ . Cette valeur influence le coefficient directeur de la droite des solutions et il convient donc d'imposer une valeur adéquate. Une étude paramétrique montre que cette valeur doit être de l'ordre de grandeur de l'écaillage recherché. Dans le cas présent, l'écaillage hypothétique le plus grand correspond à l'ancrage maximal de fibre et vaut donc  $\frac{L_f}{2}$ . Dans la pratique, l'écaillage n'atteint pas cette longueur mais une fraction de celle-ci.

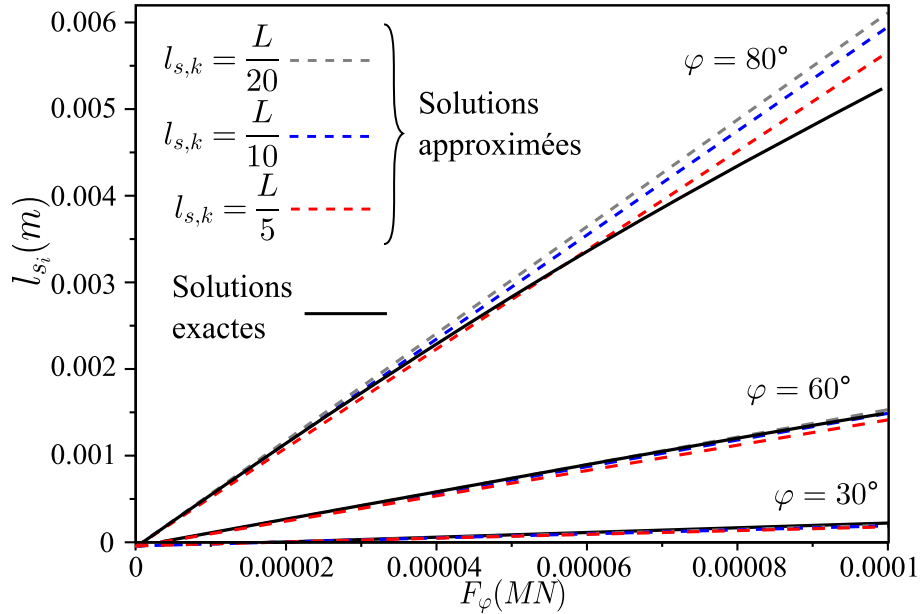


FIGURE 3.6 – Approximation des solutions de l'écaillage pour trois orientations,  $R_t = 5$  MPa,  $\phi_f = 0,2$  mm,  $L = 0,01$  m,  $\alpha = 30^\circ$

La figure 3.6 présente les courbes donnant les solutions exactes de l'écaillage pour trois inclinaisons de fibres ainsi que les droites d'approximation des solutions pour

trois valeurs de  $l_{s,k}$ . Lorsque l'inclinaison est faible, les trois valeurs de  $l_{s,k}$  permettent d'obtenir des valeurs très proches de la solution exacte, la solution  $l_{s,k} = \frac{L}{5}$  étant toutefois la plus éloignée. Lorsque l'inclinaison augmente, c'est la courbe  $l_{s,k} = \frac{L}{5}$  qui est la plus proche des solutions pour les forces élevées. Néanmoins, pour les inclinaisons les plus grandes, il apparaît que la force n'atteint jamais des valeurs élevées, l'écaillage étant trop important. Les trois solutions semblent donc être convenables, le choix est donc fait de considérer une longueur  $l_{s,k} = \frac{L}{5}$  afin d'éviter de trop surestimer l'écaillage pour les orientations élevées, où  $L$  prend la valeur de l'ancrage de chacun des côtés de la fibre.

### 3.2.5 Discrétisation de la liste des ouvertures de fissures lors du calcul de la force moyenne

Lors du calcul de la force moyenne  $\bar{F}_\varphi$ , la moyenne des forces est faite pour une liste d'ouvertures de fissure prédéfinie. Pour chaque ouverture de fissure de cette liste, les forces pour chaque longueur ancrée sont interpolées dans les listes qui leur sont propres. La précision de cette liste d'ouvertures de fissure joue un rôle important dans la précision de la construction des courbes donnant les forces moyennes. Actuellement, la construction de cette liste d'ouvertures de fissure est composée d'incrémentes égaux de  $5 \mu\text{m}$ , ce nombre définissant ainsi une précision initiale de la prédiction des ouvertures de fissures.

### 3.2.6 Discrétisation de la contrainte reprise par les fibres

A chaque point d'intégration des contraintes, la contrainte reprise par les fibres dans chaque direction principale de fissuration est construite jusqu'au pic pour toutes les résistances à la traction susceptibles d'être atteintes dans l'élément. Puis, la loi de comportement globale contrainte-somme des ouvertures de fissures est à son tour construite jusqu'au pic de contrainte, afin d'être par la suite interpolée par des segments de droites en fonction du déplacement total de fissuration issu de Fluendo3D. Ces constructions sont effectuées pour des incréments d'ouverture de fissure de  $2,5 \mu\text{m}$ .

### 3.2.7 Discrétisation de l'espace

L'espace est représenté par la sphère unité, discrétisée en un certain nombre d'angles solides pour lesquels la contribution des fibres est calculée. Une discrétisation trop

grossière entraînerait une mauvaise représentation de la distribution des orientations de fibres. Les angles du repère sphérique utilisés  $\gamma$  et  $\theta$  ayant chacun une plage de variation de  $180^\circ$  sont discrétisés en onze positions, donnant ainsi un découpage de la sphère en 180 éléments de surface.

### 3.3 Utilisation du modèle

Le modèle de fibres est concomitant au modèle Fluendo3D. Il pourrait en réalité être adapté à n'importe quel modèle de béton capable de fournir des ouvertures de fissures anisotropes. L'activation du modèle Fluendo3D est décrit par sa notice technique [71].

#### 3.3.1 Données d'entrée

Afin d'activer le modèle de fibres, il est nécessaire de déclarer un paramètre FIBR égal à 1. En l'absence de fibres, ce paramètre doit être déclaré à 0. Le tableau 3.2 donne les paramètres nécessaires à l'utilisation du modèle de fibres, en suggérant des valeurs types. Concernant l'ellipsoïde d'orientation des fibres, seuls deux vecteurs sont définis dans la base fixe du maillage, ces derniers devant nécessairement être orthogonaux. Le troisième vecteur est obtenu dans le modèle par un produit vectoriel des deux premiers. Aucune des valeurs principales de l'ellipsoïde d'orientation des fibres  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne doit être définie comme nulle car le rayon de l'ellipsoïde ne pourrait pas être calculé. Les lignes de commande 3.7 reprennent l'ensemble des paramètres matériaux évoqués dans le tableau 3.2.

```
matact1= mate FIBR 1 ;  
matfib1= mate mod1 RHOF 0.015 RTEC 4. DIFI 2.0e-4 LOFI 12.0e-3 HFI 5.0e6  
TMAX 7. TD 6. SK 1.0e-3 FABO 2.0e-6 ALEC 15. MECR 8. LCAN 1.0e-3 MUF  
0.5 YOFI 2.0e5 LECH 0.2 MW 9. FU 2500. FYF 2400. EOF1 1. EOF2 1. EOF3 50.  
VF11 1. VF12 0. VF13 0. VF21 0. VF22 1. VF23 0. ;
```

FIGURE 3.7 – Lignes de commande utilisées par le modèle dans Cast3m

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Densité volumique de fibres	$\rho_f$	0,02	RHOF	-
Diamètre des fibres	$\phi_f$	2e-4	DIFI	m
Longueur des fibres	$L_f$	12e-3	LOFI	m
Rigidité de l'interface	$H_f$	5000000	HFI	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	7	TMAX	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	6	TD	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	1e-3	SK	m
Force d'about	$f_0$	2	FABO	N
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	15	ALEC	°
Module d'écroutissage dû à l'abrasion	$M_0$	8	MECR	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	0,001	LCAN	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,5	MUF	-
Résistance à la traction de l'échantillon de béton	$R_{t,ref}$	7,5	RTEC	MPa
Résistance à la traction du béton	$R_t$	7,5	RT	MPa
Longueur de l'échantillon de béton	$l_{t,ech}$	0,2	LECH	m
Paramètre de Weibull	$m$	10	MW	-
Module d'élasticité des fibres	$E_f$	200000	YOFI	MPa
Module d'élasticité du béton	$E_m$	45000	YOUN	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2400	FYF	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	2500	FUF	MPa
Direction $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,x}$	1	VF11	-
Direction $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,y}$	0	VF12	-
Direction $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,z}$	0	VF13	-
Direction $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,x}$	0	VF21	-
Direction $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,y}$	1	VF22	-
Direction $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,z}$	0	VF23	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	$a$	1	EOF1	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	$b$	1	EOF2	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$	$c$	50	EOF3	-

TABLE 3.2 – Paramètres utilisés par le modèle dans Cast3m

<b>Pseudo-vecteur contrainte effective reprise par les fibres par m<sup>2</sup> de fissure</b>
SFI1
SFI2
SFI3
SFI4
SFI5
SFI6
<b>Ouvertures de fissures maximales dans les directions principales de fissuration</b>
WMA1
WMA2
WMA3
<b>Ouvertures de fissures moyennes dans les directions principales de fissuration</b>
WMY1
WMY2
WMY3
<b>Écart-type des ouvertures de fissures dans les directions principales de fissuration</b>
EW1
EW2
EW3
<b>Nombre de fissures dans les directions principales de fissuration</b>
NC1
NC2
NC3
<b>Indicateur de localisation de la fissuration dans les directions principales de fissuration</b>
LOC1
LOC2
LOC3
<b>Angles d'orientation moyen des fibres par rapport aux directions principales de fissuration</b>
PHI1
PHI2
PHI3

TABLE 3.3 – Liste des variables internes du modèle de fibres

### 3.3.2 Variables internes

Les variables internes du modèle accessibles durant le post-traitement sont présentées ici. Elles viennent s'ajouter aux variables internes du modèle Fluendo3D. La liste des variables internes apportant des résultats intéressants est présentée dans le tableau 3.3. Un certain nombre d'autres variables internes utilisées pour le calcul sont stockées mais leur intérêt étant limité pour l'utilisateur, elles ne sont pas mentionnées ici. Le pseudo-vecteur des contraintes reprises par les fibres est dit effectif car il ne tient pas compte de l'endommagement du béton qui est appliqué par la suite dans le calcul. Cette contrainte ne tient également pas compte de la contrainte élastique des fibres en zone non fissurée. Concernant l'écart-type des ouvertures de fissure, il est calculé de manière exacte durant la phase d'écrouissage positif. Si l'élément est déchargé par diminution du déplacement plastique de fissuration, l'écart-type est calculé en supposant une conservation du coefficient de variation défini par le rapport de l'écart-type sur la moyenne des ouvertures de fissures au moment où les fissures étaient le plus ouvertes. Durant la phase de localisation de la fissuration, une seule fissure s'ouvre tandis que les autres ne se déchargent pas. L'écart-type ainsi que l'ouverture de fissure moyenne n'évoluent alors plus. Ils représentent ainsi la distribution des ouvertures de fissures exceptée la fissure en phase de localisation. Cette approche permet ainsi de remonter simplement à la distribution des ouvertures.

### 3.3.3 Erreur d'approximation des surfaces de paramètres

Les équations des surfaces représentant l'évolution des paramètres en fonction de l'angle d'inclinaison des fibres et de la résistance à la traction du béton sont déterminées en minimisant un résidu. Après calcul des surfaces, les erreurs maximales et moyennes pour chaque paramètre de la courbe moyenne sont affichés en pourcentage dans Cast3m afin de fournir un ordre de grandeur de l'erreur d'approximation. L'erreur maximale est obtenue grâce à la relation (3.3.1) avec  $Z_{c,n,k}$  la valeur du point de la surface recalculée par l'équation analytique de surface. L'erreur moyenne est quant à elle donnée par la relation (3.3.2).

$$Err_{max} = 100 \max \left( \sqrt{\left( \frac{Z_{c,n,k} - Z_{n,k}}{Z_{n,k}} \right)^2} \right) \quad (3.3.1)$$

$$\bar{Err} = \frac{100}{nk} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left( \frac{Z_{c,i,j} - Z_{i,j}}{Z_{i,j}} \right)^2} \quad (3.3.2)$$

## 3.4 Analyse du modèle

### 3.4.1 Test sur un seul élément fini en traction simple

Le modèle est programmé en Fortran 90 dans Cast3m et a fait l'objet de vérifications sur la base de tests menés sur un seul ou plusieurs éléments finis pour divers cas de chargement. La figure 3.8 fait apparaître des résultats issus d'un calcul effectué dans Cast3m pour les paramètres présentés au tableau 3.2 en ayant toutefois augmenté la densité volumique de fibres à 2,5 % afin d'obtenir une multi-fissuration importante. L'élément testé ici est de type cube 8 et est soumis à une traction simple jusqu'à un déplacement imposé de 2 mm. En a), la contrainte totale reprise par l'élément est représentée en fonction du déplacement imposé. Le comportement est élastique linéaire jusqu'à atteindre la contrainte de fissuration du béton à 7,5 MPa. A cet instant, la contrainte chute légèrement en ouvrant une première fissure avant de ré-augmenter grâce à l'effet des fibres. Il s'ensuit une phase d'écrouissage positif importante caractéristique de la multi-fissuration des bétons fibrés. Lorsque la première ouverture de fissure générée par le modèle devient trop importante, un très grand nombre de fibres commencent à s'arracher et la contrainte diminue en ouvrant la fissure localisée. Les figures b), c) et d) montrent l'évolution de quelques variables internes du modèle. En b), la contrainte du béton endommagé (SIM3) et la contrainte effective des fibres en zone fissurée (SFI3) sont tracées. En c), l'ouverture de fissure totale de Fluendo3D WPL3 dans la direction 3, ainsi que l'ouverture de micro-fissure maximale WMA3 sont représentées. C'est l'ouverture de fissure WPL3 qui est décomposée en une somme d'ouvertures de micro-fissures. Durant la multi-fissuration, les ouvertures maximales de micro-fissures restent faibles, puis lorsque les fibres atteignent leur phase adoucissante, les taux d'accroissement de WPL3 et WMA3 deviennent identiques. Enfin en d), l'évolution du nombre de fissures (NC3) est représentée. Le nombre de fissures cesse bien d'augmenter lorsque la contrainte totale diminue.

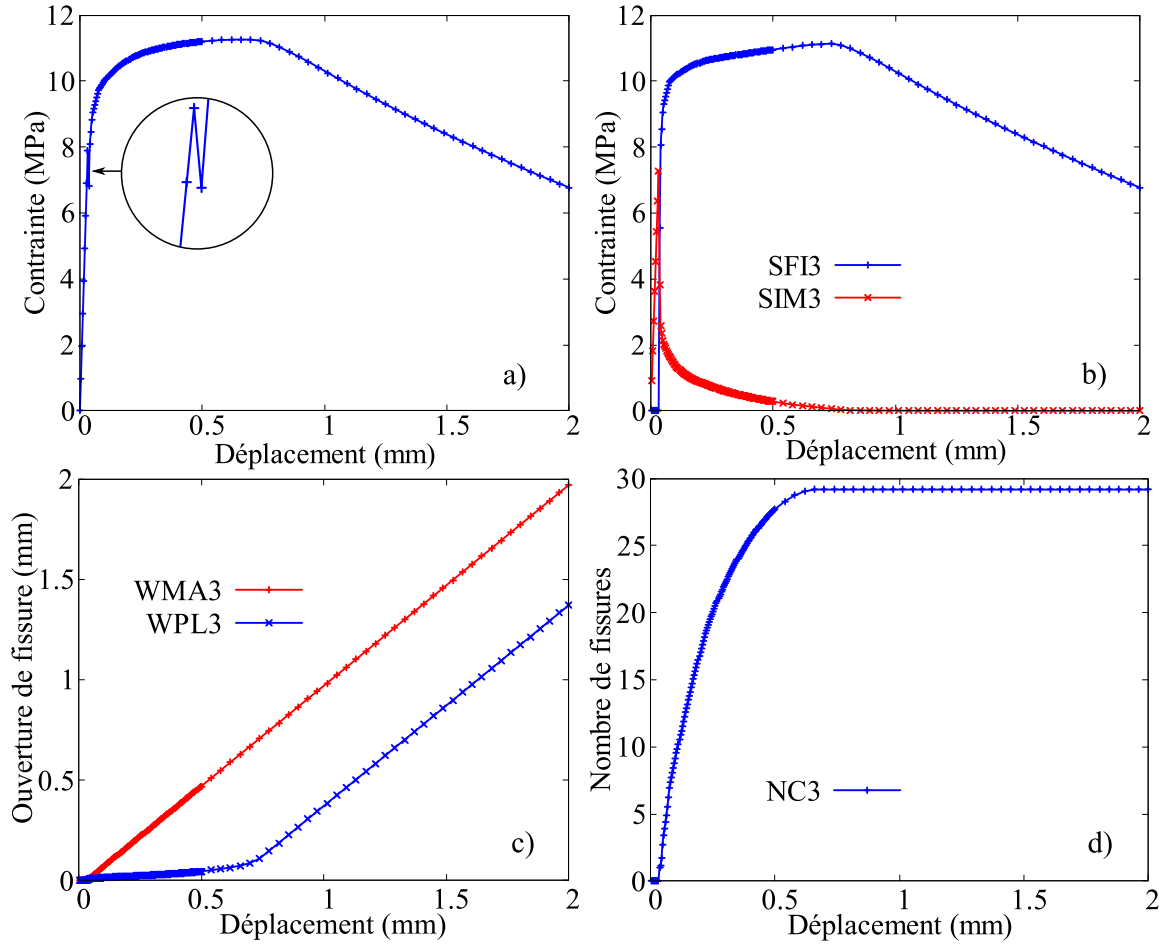


FIGURE 3.8 – Résultats du modèle pour un élément fini, a) contrainte totale-déplacement, b) contrainte dans le béton (SIM3) et contrainte effective des fibres (SFI3) en fonction du déplacement, c) ouverture de fissure totale (WPL3) et maximale (WMA3) en fonction du déplacement, d) nombre de micro-fissures (NC3) en fonction du déplacement

### 3.4.2 Régularisation de la loi de comportement

La loi de comportement des fibres se base, en donnée d'entrée, sur le déplacement total de fissuration calculé par écoulement plastique de la loi de comportement du béton. Ce déplacement total de fissuration est régularisé par une méthode de Hillerborg et la loi de comportement des fibres ne nécessite par conséquent pas de régularisation supplémentaire. La figure 3.9 présente un test permettant de mettre en évidence la réponse du modèle pour divers maillages. Le test consiste à réaliser un essai de traction simple pour un tirant comportant, un, deux, quatre et huit éléments finis. Pour ces quatre cas, la densité volumique de fibres a été légèrement réduite dans un seul élément

afin que la phase adoucissante du comportement se produise dans cet élément. Les paramètres utilisés sont récapitulés dans le tableau 3.2, la densité volumique de fibres ayant toutefois été augmentée à 2,5 % afin de visualiser une phase de multi-fissuration importante. On constate alors la quasi-indépendance de la réponse du modèle au maillage. La différence principale se situe au début de la loi de comportement, où la fissuration simultanée des éléments crée de légères fluctuations lorsque le nombre d'éléments augmente. Ceci montre donc l'indépendance de la réponse du modèle au maillage en terme de contrainte-déplacement, sous réserve d'affaiblir un élément dans les cas de chargements homogènes afin d'éviter d'atteindre la phase adoucissante dans tous les éléments.

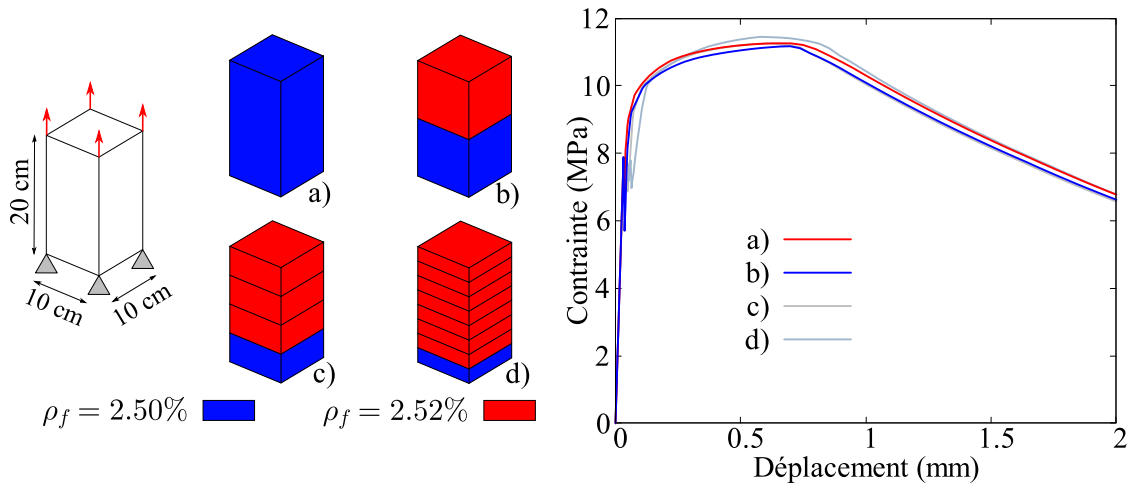


FIGURE 3.9 – Test de traction directe pour quatre maillages différents

### 3.4.3 Discussion sur le modèle de multi-fissuration

Le modèle de Weibull utilisé opère de manière indépendante dans chaque élément fini en ne considérant pas le volume chargé mais la longueur de l'élément chargé dans les directions principales de fissuration. Cette réduction est parfaitement valable dans le cas de la modélisation d'un tirant à l'aide d'un seul élément fini. Le volume chargé peut alors être réduit à la dimension d'une longueur, la section étant constante sur la structure étudiée. Dans le cas de structures plus complexes comportant plusieurs éléments finis, cette réduction pourrait ne pas être totalement satisfaisante. La résistance de première fissuration utilisée dans le modèle est celle définie par le paramètre  $RT$  de Fluendo3D. Afin d'estimer de manière correcte cette première résistance, il conviendrait alors de la définir sur la base d'un volume chargé estimé. Vient ensuite la résistance de seconde fissuration, déterminée par la loi orthotrope de Weibull du modèle. Ainsi, si une se-

conde fissure devait se former, le volume chargé à considérer serait "séparé" par la présence de cette première fissure, il faudrait alors à nouveau déterminer le volume correspondant afin de déterminer la résistance à la traction des autres éléments et ainsi de suite. Dès lors qu'au moins deux fissures sont présentes dans un même élément, le volume chargé correspond au produit de la distance entre les fissures par la section de la structure dans le plan de fissuration. Dans le cas d'une structure de section constante et à partir du moment où au moins deux fissures dans l'élément sont présentes, le modèle de Weibull orthotrope devient alors pleinement valable. Le problème se pose donc sur la résistance de première fissuration de chaque élément. Afin de pallier ce problème, la technique développée par Sellier et Millard [75] peut être utilisée. Cette méthode consiste à déterminer, pour chaque point de calcul de la structure, le volume chargé correspondant et à appliquer la loi d'effet d'échelle de Weibull pour déterminer la résistance de la matrice. Cette méthode permettrait alors une étude plus approfondie du comportement du matériau.

#### 3.4.4 Calibration du modèle

La calibration idéale du modèle devrait être faite à deux échelles. La première échelle consisterait à calibrer les paramètres du modèle d'extraction de fibres uniques sur la base d'essais d'extraction de fibres bi-ancrées sur toute leur longueur, et séparées en leur centre par un plan de fissuration pré-établi. Un essai d'extraction de fibres non inclinées permettrait alors de calibrer les paramètres  $H_f$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\tau_d$ ,  $s_k$ ,  $f_0$ ,  $M_0$  et  $L_0$ . Puis, la mise en place d'essais d'extraction de fibres inclinées pourrait permettre de déterminer les paramètres  $\alpha$  et  $\mu$ . Ces essais étant difficiles à mettre en œuvre, ces paramètres pourraient être estimés, l'angle  $\alpha$  étant a priori compris entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$ , et le coefficient de frottement  $\mu$  étant généralement compris entre 0,5 et 0,8. Il faudrait par la suite réaliser des essais de traction directe sur des éprouvettes. Ces essais permettraient alors donner les valeurs de  $R_{t,ref}$  et  $l_{t,ech}$ , et de quantifier le coefficient de Weibull  $m$ , ainsi que les paramètres d'orientation des fibres dans l'éprouvette. Pour le passage à l'échelle de la structure, la dernière inconnue resterait alors la distribution des densités volumiques et orientations de fibres dans la structure. Plusieurs approches encore au stade de la recherche sont alors possibles, telle que la méthode électromagnétique décrite en 1.2.4.3. Une autre méthode consiste à étudier l'écoulement du béton en considérant les fibres comme une suspension dans un liquide. En l'absence de ces essais, il devient alors difficile d'estimer les différents paramètres du modèle. Ils constituent ainsi le socle minimal nécessaire à l'étude du comportement post-fissuration des bétons fibrés.

### 3.5 Étude paramétrique

Cette partie présente une étude paramétrique du modèle. Les résultats présentés sont les courbes contrainte-déformation obtenues lors d'un essai de traction simple sur un seul élément fini dans Cast3m. Cet élément possède une longueur de 20 cm et une section de 0,01 m<sup>2</sup>. Les paramètres de référence sont ceux décrits dans le tableau 3.2. Les données de base comportent la particularité d'une orientation préférentielle de fibres dans la direction de traction avec un angle moyen d'inclinaison de 26° par rapport à cette direction. Le chargement est réalisé en déplacement imposé jusqu'à une valeur de 2 mm. Cette étude paramétrique permettra à l'utilisateur de mieux appréhender l'impact des paramètres du modèle sur sa réponse.

#### 3.5.1 Influence de la densité volumique de fibres

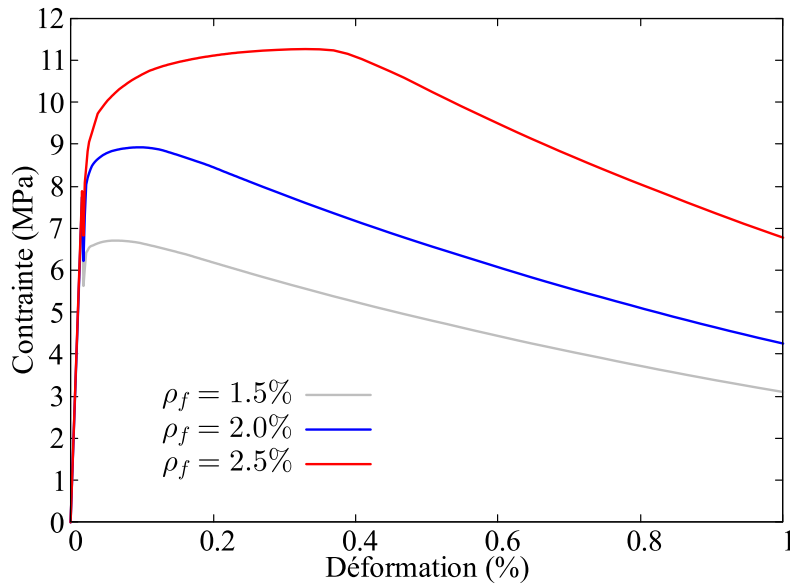


FIGURE 3.10 – Influence de la densité volumique de fibres sur la loi de comportement en traction

La contrainte totale développée par le modèle augmente avec la densité volumique de fibres (Figure 3.10). Dans le cas présent, le dosage à 1,5 % ne permet pas aux fibres de reprendre une contrainte supérieure à la résistance de première fissuration de 7,5 MPa, ainsi une seule fissure se développe. Pour les dosages à 2 % et 2,5 % une phase de multi-fissuration se développe. Cette phase est d'autant plus importante que la contrainte

maximale est élevée, ce qui explique que la déformation au pic pour le dosage à 2,5 % soit plus élevée que celle obtenue pour le dosage à 2 %. Le net impact de la densité volumique de fibres sur la réponse en traction montre la nécessité de la représentation adéquate de cette grandeur qui peut varier au sein d'un élément de structure.

### 3.5.2 Influence de l'orientation des fibres

La figure 3.11 montre l'impact de l'orientation des fibres sur la réponse en traction du modèle. Trois cas sont représentés, une orientation isotrope et deux orientations préférentielles dans la direction de traction. Dans le cas de l'orientation isotrope, une seule fissure se développe, la contrainte au pic des fibres n'étant pas suffisante pour générer d'autres fissures. Le fait d'orienter les fibres dans la direction de traction entraîne une augmentation du nombre de fibres traversant chaque fissure, ce qui entraîne une augmentation de la contrainte ainsi que de la multi-fissuration. Le fait de créer une multi-fissuration plus importante entraîne un accroissement de la déformation au pic comme l'a montré la figure 3.10.

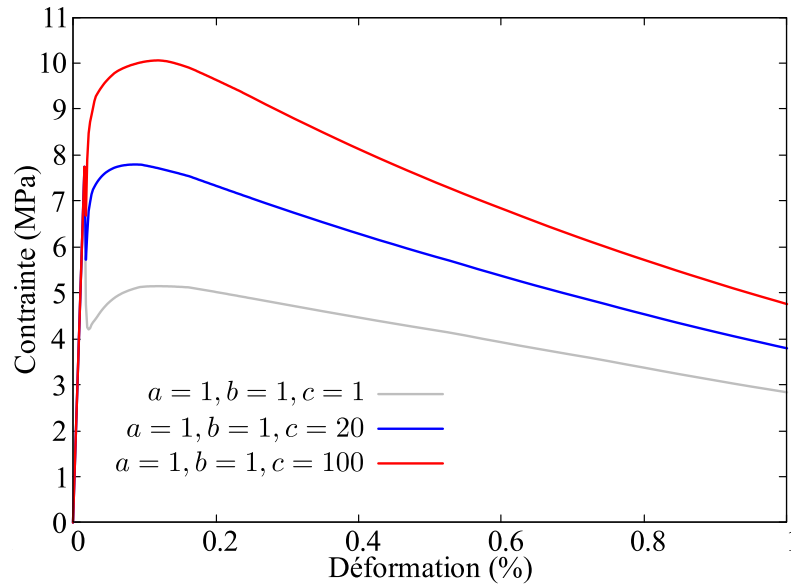


FIGURE 3.11 – Influence de l'orientation des fibres sur la loi de comportement en traction

Néanmoins, ceci engendre également une rigidification des lois de comportement force-ouverture de fissure des fibres. Les ouvertures de fissures deviennent donc plus faibles ce qui a tendance à atténuer la déformation au pic. Le fait d'augmenter les fibres dans la direction de traction provoque donc deux effets antagonistes. A nouveau, l'impact de

l'orientation est important sur la réponse du modèle, et cette grandeur doit également faire l'objet d'analyses particulières en contexte de prédiction ou d'étude du comportement mécanique d'un ouvrage.

### 3.5.3 Influence de la résistance à la traction du béton

La figure 3.12 représente trois cas de résistances à la traction du béton. Il est important de préciser que, dans le cas présent, les résistances à la traction de référence  $R_{t,ref}$  qui devraient être issues d'une campagne d'essais sur des échantillons de longueur  $l_{ech}$  et la résistance de première fissuration de Fluendo3D ont été prises égales. Lorsque la résistance à la traction de l'élément diminue, le développement de la multi-fissuration nécessite des contraintes plus faibles, ce qui explique en partie que la déformation au pic de l'élément ayant une résistance à la traction du béton de 6 MPa soit supérieure à celles pour les résistances de 7,5 MPa et 9 MPa. Un autre point allant également dans ce sens et impliquant l'augmentation de la contrainte au pic est l'écaillage de la matrice. Lorsque la résistance à la traction diminue, l'écaillage devient plus important ce qui induit une augmentation des ouvertures de fissures ainsi qu'une diminution de la force moyenne reprise par les fibres. Ces deux effets seraient d'autant plus importants que les fibres seraient mal orientées par rapport à la direction de traction.

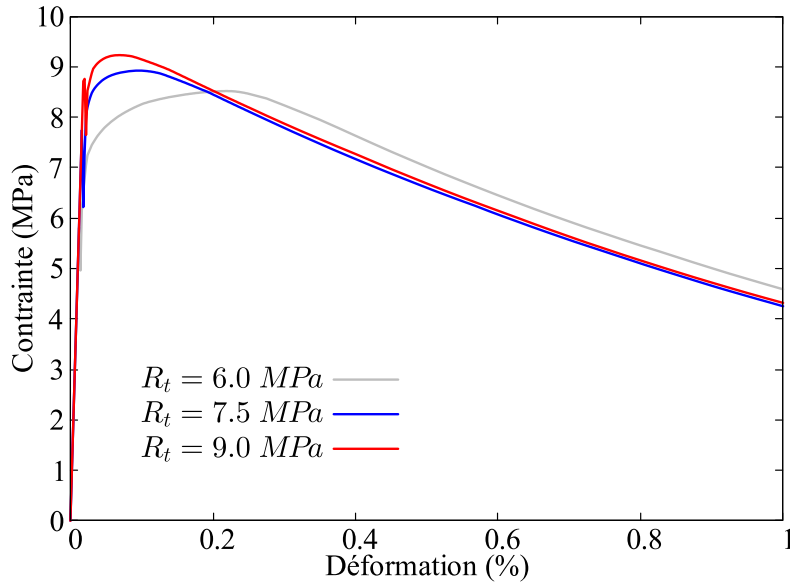


FIGURE 3.12 – Influence de la résistance à la traction du béton sur la loi de comportement en traction

### 3.5.4 Influence du diamètre des fibres

La figure 3.13 montre l'influence du diamètre des fibres sur la réponse du modèle. On observe que la réduction du diamètre des fibres conduit à une augmentation de la contrainte au pic. Cet effet s'explique par le fait qu'à densité volumique égale, le nombre de fibres traversant les fissures augmente lorsque le diamètre diminue. L'augmentation de la déformation au pic est quant à elle liée à une multi-fissuration plus importante.

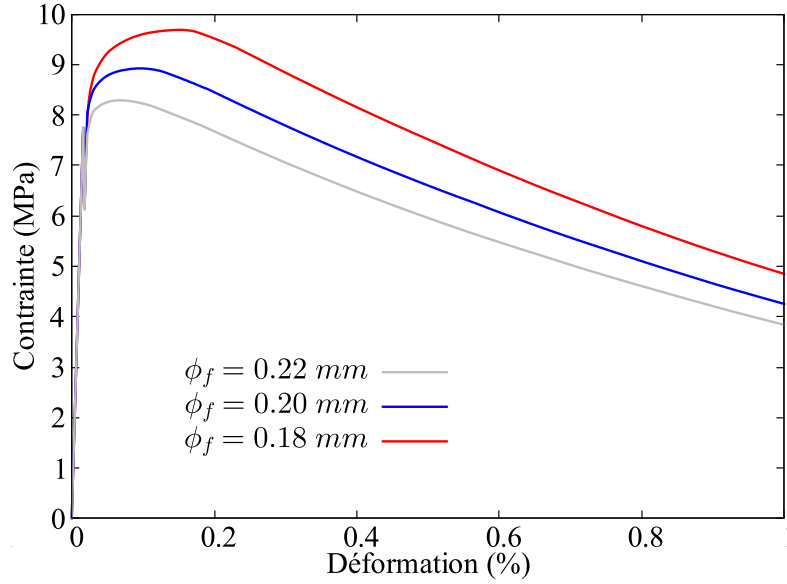


FIGURE 3.13 – Influence du diamètre des fibres sur la loi de comportement en traction à dosage de fibres constant

### 3.5.5 Influence de la longueur des fibres

Le fait d'augmenter la longueur des fibres procure une surface de contact fibre-matrice plus étendue permettant, en l'absence de rupture des fibres, d'améliorer la capacité portante du matériau comme en atteste la figure 3.14. La contrainte et la déformation au pic augmentent toutes deux, de même que la contrainte durant la phase post-pic. La déformation pour laquelle la contrainte devient nulle s'accroît également du fait de la nécessité d'ouvrir plus les fissures avant d'arracher toutes les fibres.

### 3.5.6 Influence de la rigidité de l'interface fibre-matrice

La rigidité de l'interface fibre-matrice est un paramètre jouant un rôle durant les phases d'élasticité et de décollement des fibres. Lorsque la valeur de ce paramètre diminue, la

rigidité des courbes force-ouverture de fissure des fibres diminue également. Ceci conduit donc également à une baisse de la rigidité pré-pic de la contrainte reprise par les fibres comme le montre la figure 3.15. La contrainte au pic est également légèrement impactée du fait d'une force au pic plus faible durant la phase de décollement des fibres.

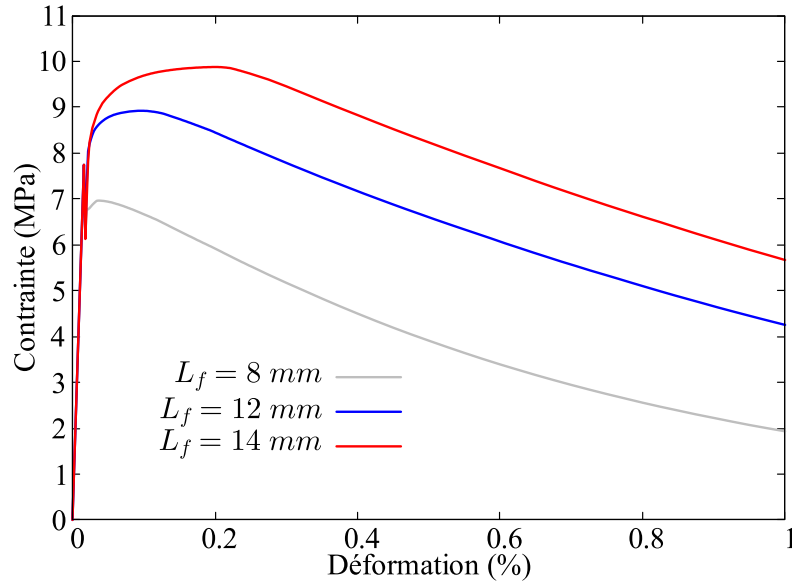


FIGURE 3.14 – Influence de la longueur des fibres sur la loi de comportement en traction

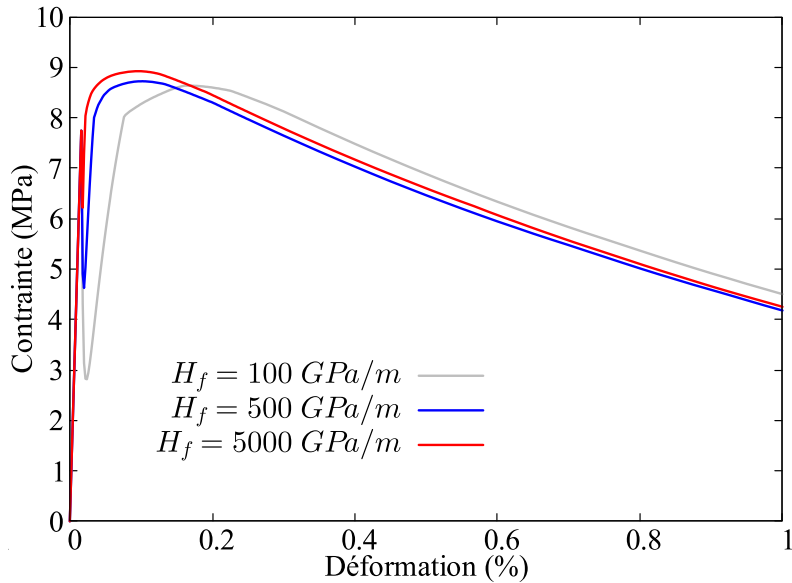


FIGURE 3.15 – Influence de la rigidité de l'interface fibre-matrice sur la loi de comportement en traction

### 3.5.7 Influence de la contrainte de frottement

La figure 3.16 montre l'influence de la contrainte de frottement fibre-matrice sur la réponse du modèle. Les variations de cette contrainte engendrent les effets attendus sur le modèle : plus la contrainte de frottement devient grande, plus la capacité portante du matériau augmente. Ce paramètre a une forte influence sur la réponse du modèle et il est donc essentiel de pouvoir estimer sa valeur par des essais d'extraction de fibres uniques ancrées dans la matrice que l'on souhaite étudier.

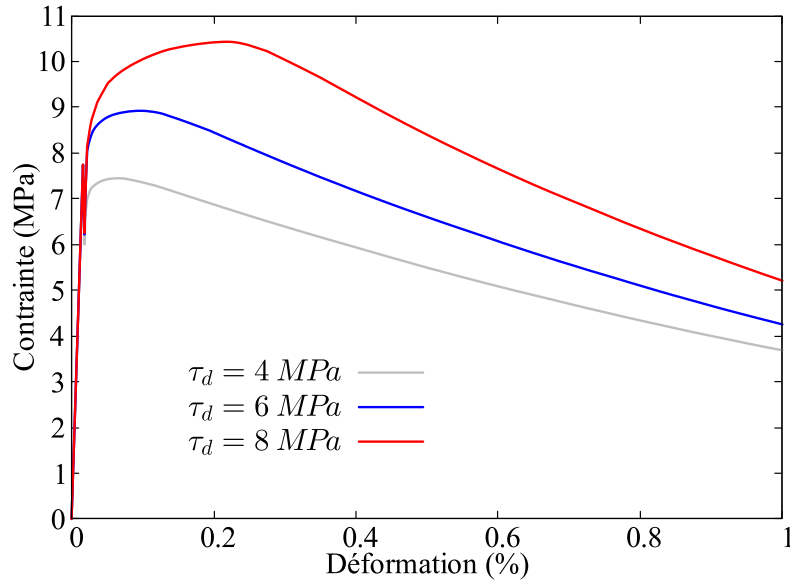


FIGURE 3.16 – Influence de la contrainte de frottement fibre-matrice sur la loi de comportement en traction

### 3.5.8 Influence de la contrainte de cisaillement fibre-matrice maximale

La contrainte de cisaillement fibre-matrice maximale caractérise l'instant de début de décohésion de l'interface fibre-matrice et intervient également sur l'allure des courbes force-ouverture de fissures durant la phase de décollement. Comme le montre la figure 3.17, l'influence de ce paramètre est faible sur la réponse du modèle. L'augmentation de cette contrainte de décohésion conduit néanmoins à une légère augmentation de la contrainte au pic. Ce paramètre peut être difficile à évaluer même en présence d'essais d'extraction de fibres. Il apparaît néanmoins le plus souvent que sa valeur est proche de la contrainte de frottement fibre-matrice  $\tau_d$ .

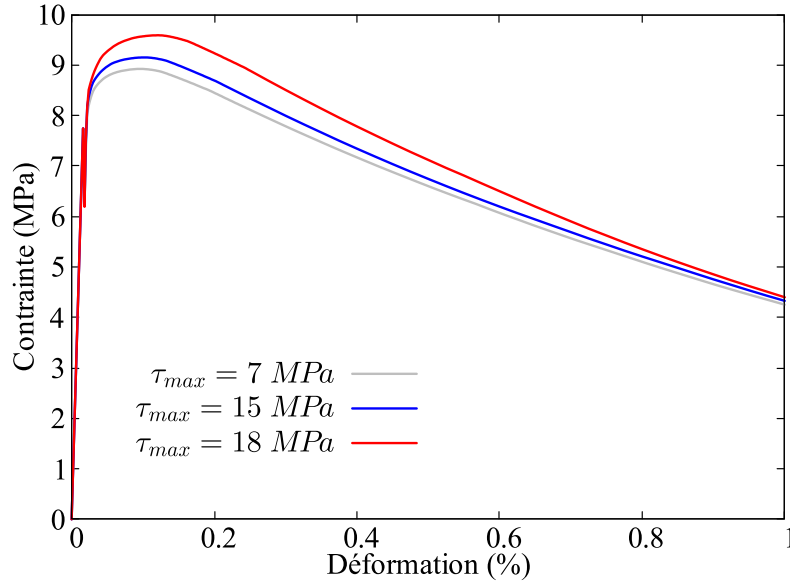


FIGURE 3.17 – Influence de la contrainte de décohésion fibre-matrice sur la loi de comportement en traction

### 3.5.9 Influence du glissement caractéristique

Le glissement caractéristique intervient durant la phase d'arrachement des fibres, en pilotant la vitesse de décroissance de la contrainte à l'interface fibre-matrice. Lorsque la valeur de  $s_k$  diminue, la contrainte, et donc la force, décroissent plus vite lors de l'arrachement des fibres.

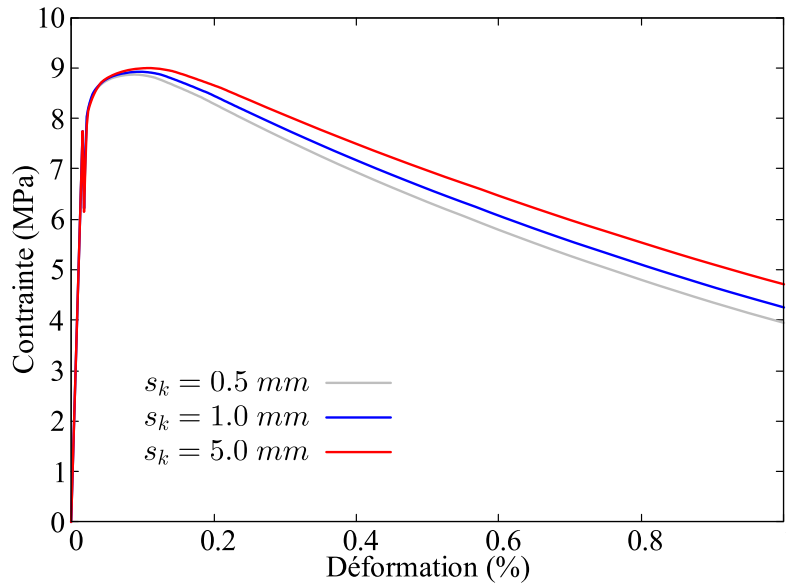


FIGURE 3.18 – Influence du glissement caractéristique sur la loi de comportement en traction

Cet effet est directement visible sur les courbes contrainte-déformation de la figure 3.18. Ce paramètre n'influe pas ici durant les phases pré-pic des trois cas étudiés car les ouvertures de fissures étant faibles, très peu de fibres sont en phase d'arrachement à cet instant. Néanmoins, si la rigidité de l'interface fibre-matrice avait été plus faible, ou si les fibres avaient été moins bien orientées par rapport à la direction de traction, les ouvertures de fissures auraient pu être plus grandes en phase pré-pic, conduisant ainsi à un plus grand nombre de fibres en phase d'arrachement, et donc à une modification plus importante de la phase pré-pic de la réponse du modèle. Cet effet peut être généralisé à tous les paramètres qui gèrent la phase post-pic de l'extraction des fibres, c'est pourquoi il est important de prêter attention à l'ensemble des paramètres, même dans le cadre d'une étude concernant uniquement la phase pré-pic d'un béton fibré.

### 3.5.10 Influence de la force d'about

La force d'about est un paramètre qui se veut représentatif d'éventuels défauts d'extrémités des fibres liés à leur méthode de fabrication. Son influence concerne à la fois la force au pic durant l'extraction des fibres, mais également la force durant l'arrachement des fibres.

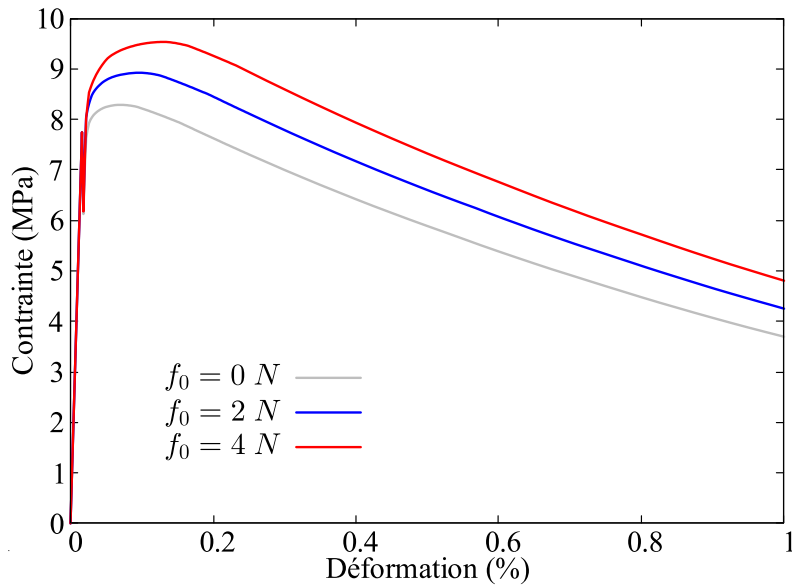


FIGURE 3.19 – Influence de la force d'about des fibres sur la loi de comportement en traction

La figure 3.19 montre ainsi l'influence de cette force sur l'ensemble des phases du comportement des bétons fibrés. L'augmentation des contraintes au pic et post-pic est directement proportionnelle à la force d'about. En l'absence de défauts d'extrémités

des fibres ce paramètre peut tout à fait être considéré comme nul.

### 3.5.11 Influence de l'angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage

L'angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage est paramétrable dans le modèle, ce qui s'oppose aux modèles de la littérature qui définissent des formes s'évasant systématiquement à un angle de  $45^\circ$ . Ce fait ne paraît pourtant pas trivial, c'est pourquoi il a été laissé libre à l'utilisateur de définir cet angle. Le fait d'accroître cet angle entraîne une augmentation de la surface de béton à rompre pour les fibres inclinées et conduit donc à une augmentation de la rigidité et éventuellement de la force au pic lors de l'extraction des fibres inclinées. La figure 3.20 montre ici un impact faible de ce paramètre sur la loi de comportement du matériau. Ce faible impact s'explique notamment par le fait que dans le cas présent, les fibres ont été orientées préférentiellement dans la direction de traction, ceci réduisant le nombre de fibres inclinées, et menant donc à une diminution de l'impact de l'écaillage. On constate cependant une faible élévation de la contrainte au pic lorsque cet angle augmente.

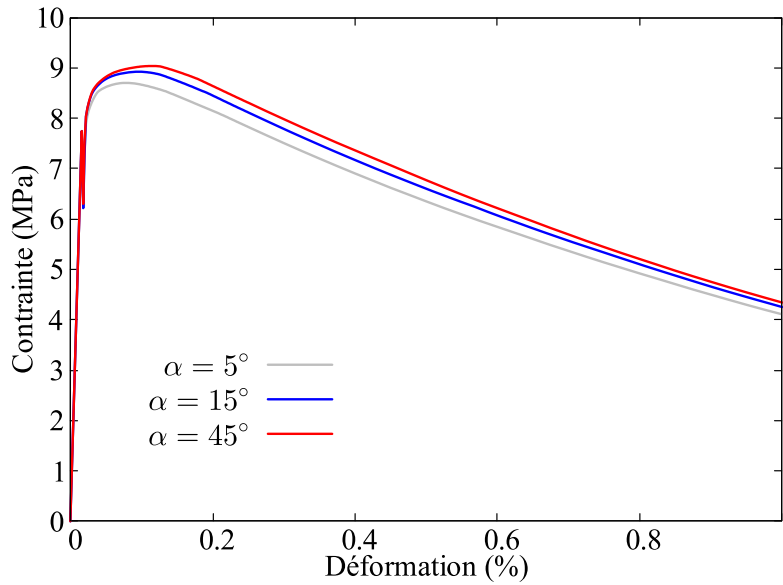


FIGURE 3.20 – Influence de l'angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage sur la loi de comportement en traction

### 3.5.12 Influence du module d'écrouissage

Le module d'écrouissage  $M_0$  a la vocation de représenter une accumulation de particules fines à l'interface fibre-matrice lors de l'arrachement des fibres, entraînant une augmen-

tation de la contrainte à l'interface des deux matériaux. Ainsi, plus  $M_0$  devient élevé, plus la force d'extraction post-pic des fibres augmente. Cet effet impacte directement la réponse du modèle en phase post-pic comme il est observé sur la figure 3.21.

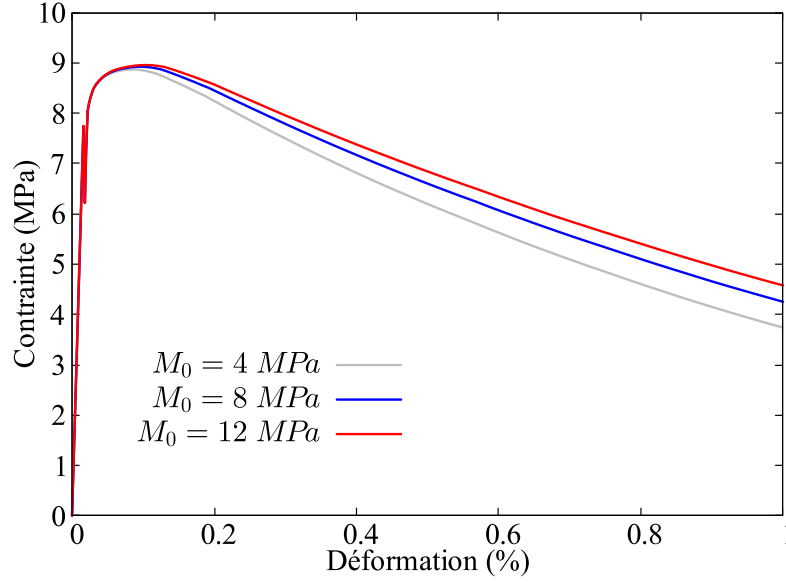


FIGURE 3.21 – Influence du module d'érouissage sur la loi de comportement en traction

### 3.5.13 Influence de la longueur caractéristique

$L_0$  est un paramètre qui intervient également durant la phase post-pic de l'extraction des fibres. Son origine provient du fait qu'il est observé que les contraintes à l'interface fibre-matrice peuvent augmenter plus rapidement pour des fibres peu ancrées que pour des fibres fortement ancrées. Ce phénomène a été, dans ce travail, attribué à une dégradation plus faible de l'interface fibre-matrice pour les faibles longueurs ancrées. Il joue notamment un rôle important lorsqu'il est couplé à une force d'about non nulle, car l'interface ayant été moins dégradée, le défaut des fibres peut "s'accrocher" d'avantage à la matrice. La figure 3.22 montre l'impact de ce paramètre sur le modèle. Lorsque  $L_0$  diminue, la contrainte fibre-matrice durant la phase d'arrachement des fibres augmente plus rapidement pour les fibres peu ancrées que pour les fibres fortement ancrées. Lorsque  $L_0$  devient grand, cette contrainte n'augmente que peu, quelle que soit la longueur d'ancrage. Cet effet est visible sur la figure 3.22 qui montre une contrainte globale plus élevée en phase post-pic lorsque  $L_0$  diminue.

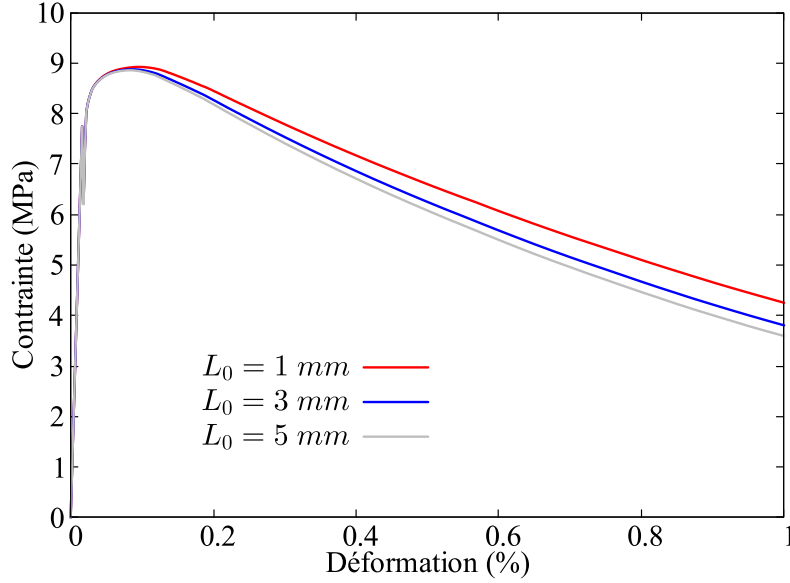


FIGURE 3.22 – Influence de la longueur caractéristique d’ancrage sur la loi de comportement en traction

### 3.5.14 Influence du coefficient de frottement fibre-matrice

Le coefficient de frottement fibre-matrice agit sur toutes les phases de l’extraction des fibres inclinées, en amplifiant le frottement lorsque l’inclinaison augmente. Néanmoins, pour les fibres trop inclinées, l’écaillage peut devenir prépondérant et le frottement supplémentaire deviendrait alors non significatif. La figure 3.23 montre l’influence du coefficient de frottement sur la loi de comportement des bétons fibrés. Lorsque  $\mu$  augmente, la contrainte devient plus élevée durant toutes les phases post-fissuration du comportement des bétons fibrés.

### 3.5.15 Influence du module d’élasticité des fibres

Le module d’élasticité des fibres influence notamment la rigidité d’extraction des fibres durant la phase d’élasticité de l’interface ainsi que la contrainte reprise par les fibres en zone fissurée. La figure 3.24 montre ici une influence très faible du module d’élasticité des fibres. Ceci s’explique essentiellement par le fait que les lois d’extraction des fibres dépendent en réalité du paramètre  $k_c$  donné en (2.2.6), qui contient entre autre le rapport de la rigidité de l’interface sur le module d’élasticité des fibres. Dans le cas présent, la rigidité de l’interface a été prise à une valeur élevée, la variation du module d’élasticité des fibres entraine donc une faible variation de  $k_c$  ce qui explique les faibles

différences observées sur les réponses en traction de la figure 3.24.

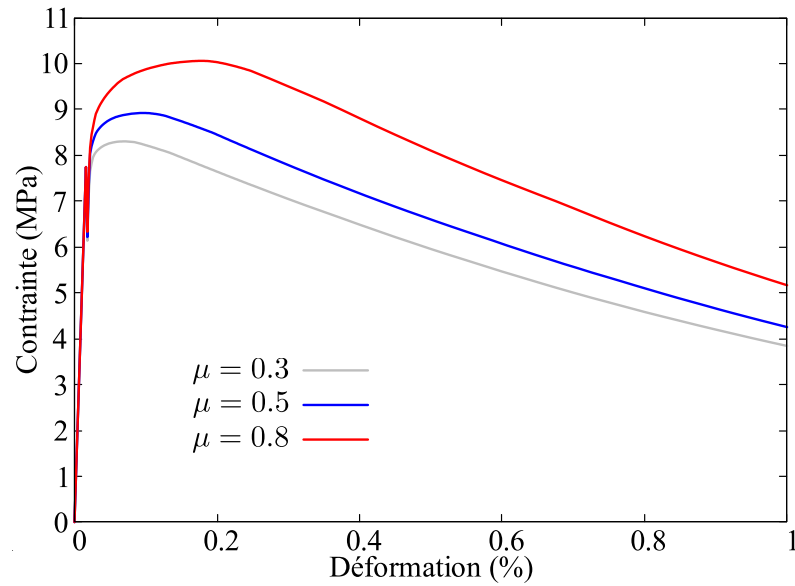


FIGURE 3.23 – Influence du coefficient de frottement fibre-matrice sur la loi de comportement en traction

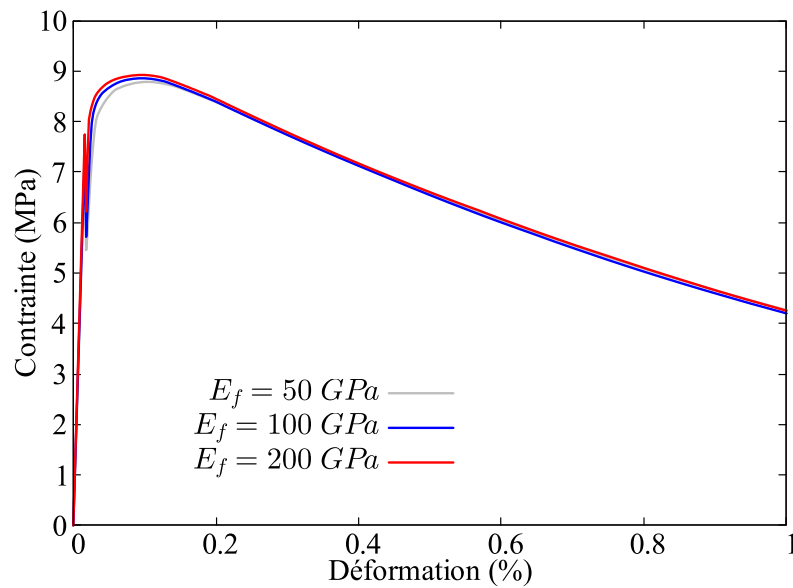


FIGURE 3.24 – Influence du module d'élasticité des fibres sur la loi de comportement en traction

### 3.5.16 Influence du coefficient de Weibull

Le coefficient de Weibull est relié à la dispersion des résistances à la traction de la matrice. Lorsque la valeur de  $m$  augmente, la dispersion des résistances à la traction du béton est plus faible, ce qui conduit à une multi-fissuration plus "rapide". Autrement dit, un faible incrément de contrainte pourra générer plus de fissures car les valeurs des résistances des plans de fissuration sont proches. C'est cette tendance qui est observée sur la figure 3.25 où l'on constate que l'augmentation de  $m$  conduit à une élévation de la déformation au pic, liée à la formation d'un plus grand nombre de fissures à contraintes égales.

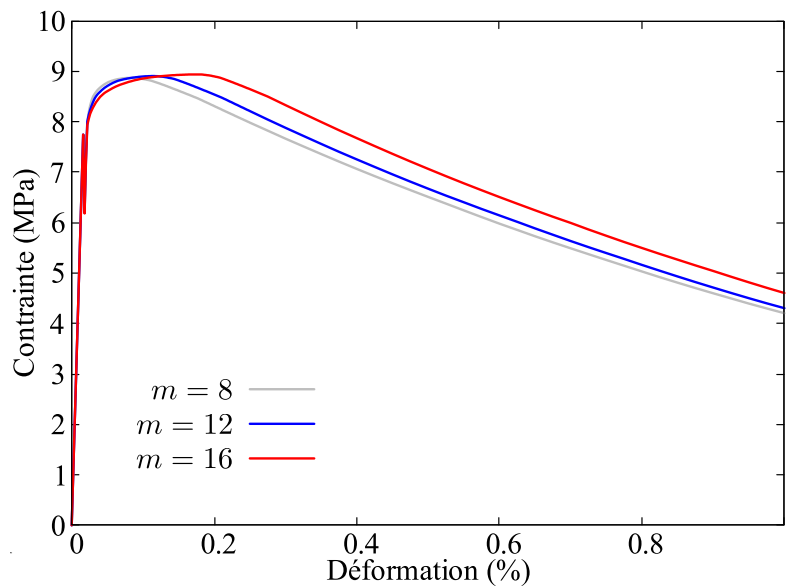


FIGURE 3.25 – Influence du coefficient de Weibull sur la loi de comportement en traction

### 3.5.17 Influence de la limite d'élasticité des fibres

La limite d'élasticité agit sur la force nécessaire à l'extraction de fibres inclinées qui doivent plastifier leur section au niveau du point d'extraction. Une augmentation de la limite d'élasticité engendre donc la nécessité d'appliquer une force plus grande pour extraire la fibre. Cet effet est observable sur la figure 3.26 qui montre une élévation non négligeable de la contrainte lorsque  $f_y^f$  devient plus élevée.

Cette étude paramétrique a permis de montrer l'impact de la variation des différents paramètres du modèle sur la réponse en traction d'un élément en béton fibré. Un rappel a également été fait sur les origines de certains paramètres du modèle, en les reliant aux

phénomènes qu'ils représentent. Les variations observées sont cohérentes et permettent de valider le comportement global du modèle. Ce type d'analyse permet ainsi d'aiguiller l'utilisateur sur les paramètres à modifier lors d'un calage du modèle sur un essai.

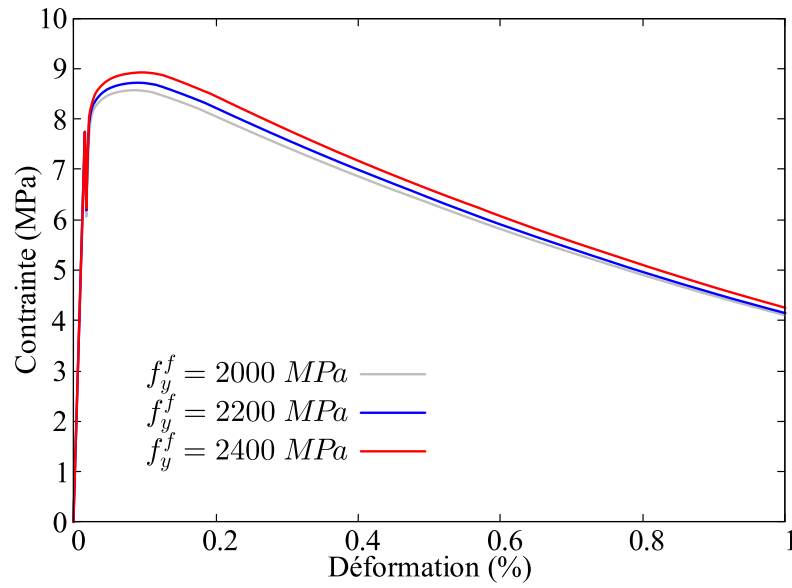


FIGURE 3.26 – Influence de la limite d'élasticité des fibres sur la loi de comportement en traction

## Chapitre 4

### Validation expérimentale

## 4.1 Introduction

Le présent chapitre propose une étude de la capacité du modèle à reproduire le comportement mécanique d'essais expérimentaux. Les essais concernent pour la plupart des tirants en traction directe, ce qui est l'essai le plus réalisé. Après avoir montré la capacité du modèle à reproduire les lois de comportement en traction, on s'attachera alors à montrer que la calibration du modèle sur un essai d'extraction ou d'un tirant, permet de prédire le comportement de structures plus complexes. Les essais peuvent concerner des BFUP mais également des bétons fibrés hautes performances. La dernière partie s'intéresse à l'étude d'un essai de flexion quatre points, réalisé à l'Université Laval, pour lequel des champs de densités volumiques et d'orientations de fibres ont été mesurés.

## 4.2 Essais de Chen et al.

Chen et al. [16] ont réalisé des essais d'extraction pour plusieurs inclinaisons de fibres, et de traction directe sur des éléments en béton fibré hautes performances. Ils utilisent par la suite ces résultats comme support de validation de leur modèle de comportement basé sur une méthode d'éléments discrets. Le tableau 4.1 donne la formulation du béton ainsi que les caractéristiques des matériaux utilisés.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<i>Formulation normalisée du béton</i>			
Ciment	-	1	-
Cendres volantes	-	0,125	-
Eau	-	0,25	-
Sable	-	0,45	-
Super-plastifiant	-	0,02	-
<i>Caractéristique du béton</i>			
Résistance à la compression à 28 jours	$R_c$	100	MPa
<i>Caractéristiques des fibres</i>			
Longueur	$L_f$	13	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,22	mm
Module d'élasticité	$E_f$	210	GPa
Contrainte ultime	$f_u^f$	1200	MPa

TABLE 4.1 – Caractéristiques des matériaux utilisés par Chen et al. [16]

### 4.2.1 Essais d'extraction

Les essais d'extraction de fibres sont réalisés sur des échantillons en forme de "dogbones" pré-fissurés en leur centre grâce à la mise en place d'une feuille plastique. Neuf fibres sont ancrées de part et d'autre de la fissure, les longueurs d'ancrages étant égales de chaque côté. Les essais sont réalisés pour quatre inclinaisons de fibres par rapport à la direction de traction :  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ . Les résultats présentés concernent la force obtenue en fonction de l'ouverture de fissure. Les auteurs ne précisent pas si les résultats représentent la moyenne de plusieurs essais.

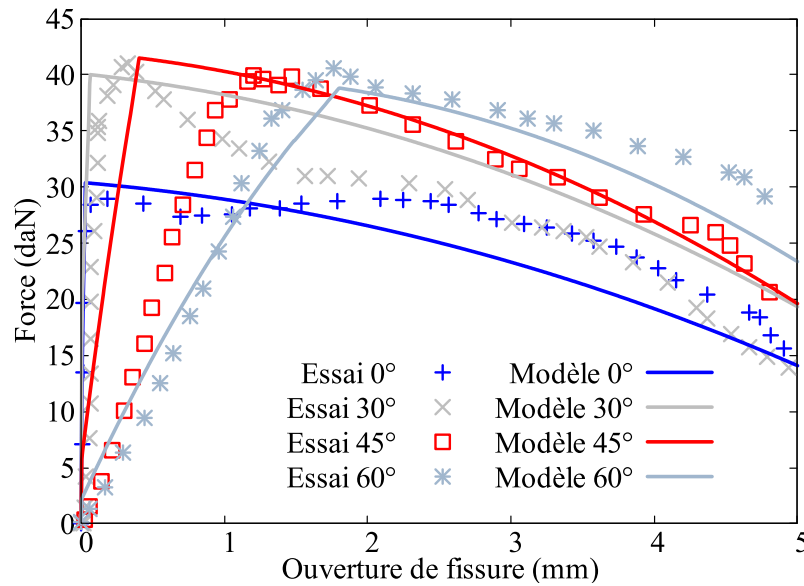


FIGURE 4.1 – Comparaison des forces théoriques et expérimentales dans le cas d'un BHP [16]

Le modèle est calibré sur la base de ces essais, en tentant de minimiser l'erreur pour l'ensemble des inclinaisons. La figure 4.1 montre la corrélation entre le modèle et les essais. Les paramètres utilisés sont décrits dans le tableau 4.2. On constate alors que le modèle permet de reproduire les résultats obtenus pour les inclinaisons de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $60^\circ$ . Concernant l'essai à  $45^\circ$ , si la force au pic et la phase post-pic sont correctement représentées, la rigidité initiale semble surestimée. Afin de vérifier la cohérence des résultats expérimentaux, les essais d'extraction sont comparés à ceux réalisés par Lee et al. [44]. Ces essais ont été décrits en 2.5 et les matériaux utilisés sont similaires à ceux du présent essai. La figure 4.2 a) montre la correspondance entre les deux campagnes d'essais, les efforts étant ici ramenés à ceux obtenus pour une seule fibre. On constate alors que l'évolution des efforts et des rigidités est tout à fait comparable excepté pour

l'essai correspondant à une inclinaison de  $45^\circ$ . Il semblerait alors que l'essai réalisé par Chen et al. représentant une courbe unique, puisse être mis en défaut par le fuseau expérimental de Lee et al. Ceci conduit donc à ne pas retenir cet essai pour la calibration du modèle. La figure 4.2 b) montre alors la calibration du modèle exempt de l'essai à  $45^\circ$ .

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	8000000	HFI	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	8	TMAX	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	6,4	TD	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$3e^{-2}$	SK	m
Force d'about	$f_0$	5	FABO	N
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	20	ALEC	$^\circ$
Module d'écroutissage dû à l'abrasion	$M_0$	8	MECR	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	$1e^{-3}$	LCAN	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,42	MUF	-
Résistance à la traction du béton	$R_t$	4,3	RT	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	1150	FYF	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	1220	FUF	MPa

TABLE 4.2 – Paramètres du modèle utilisés pour les essais d'extraction de Chen et al. [16]

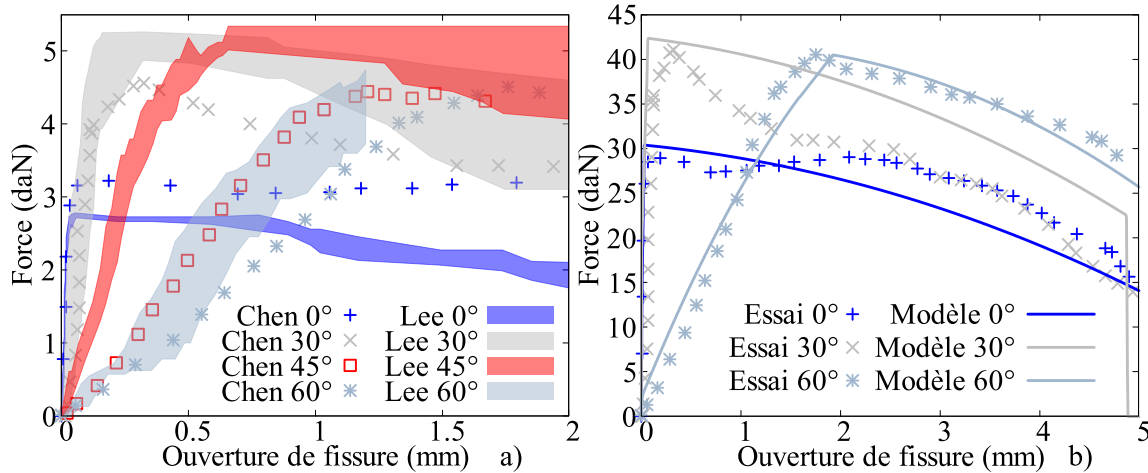


FIGURE 4.2 – a) Comparaison d'essais d'extraction pour plusieurs inclinaisons [16] [44], b) corrélation entre le modèle et les essais d'extraction retenus

### 4.2.2 Essais de traction directe

Par la suite, les paramètres obtenus lors de la calibration des essais d'extraction de fibres sont utilisés pour le calcul de plusieurs tirants. Les essais réalisés par Chen et al. sont effectués sur des tirants en forme de "dogbones" dont la géométrie est donnée en figure 4.3. Cette figure fait également apparaître la corrélation expérimentale entre le modèle de tirant et les essais pour les trois densités volumiques de fibres étudiées. Le résultat du modèle est obtenu à partir d'un seul élément fini en traction dont la longueur correspond à la zone de section constante des "dogbones", soit 150 mm. Les résultats théoriques sont obtenus à partir des paramètres de calcul des forces d'extraction, en calibrant l'ellipsoïde d'orientation des fibres, ainsi que la distribution des résistances en traction.

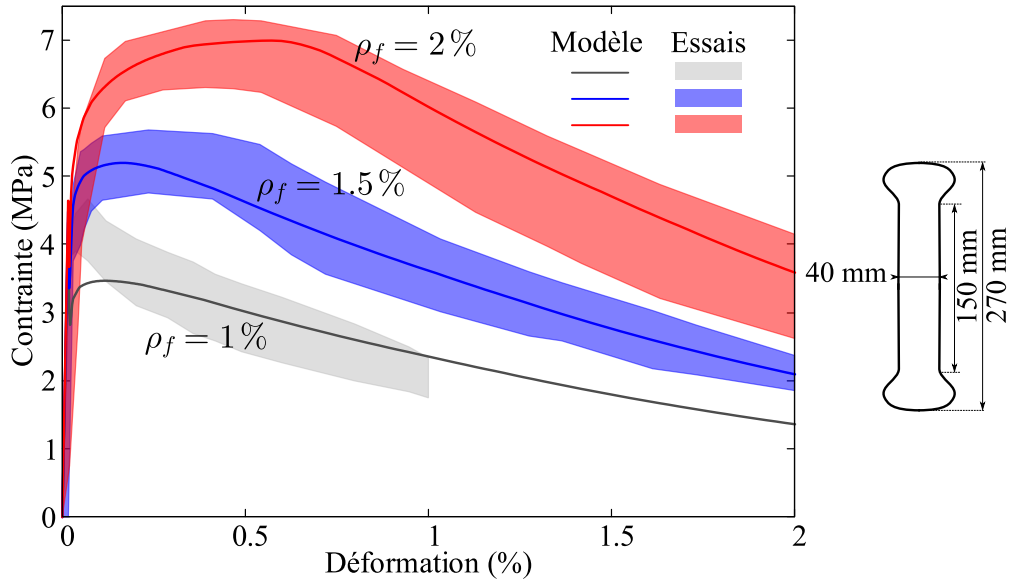


FIGURE 4.3 – Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour trois essais de traction directe

Le tableau 4.3 donne les paramètres utilisés afin de modéliser le tirant. La figure 4.3 montre la corrélation entre les résultats du modèle et les fuseaux expérimentaux en terme de contrainte-déformation. On constate alors que le modèle permet globalement de reproduire le comportement des tirants pour les trois densités volumiques de fibres. L'essai correspondant à un dosage en fibres de 1 % est le moins bien représenté par le modèle. La quantité de fibres ne permet pas de créer plusieurs fissures dans l'élément ce qui se caractérise par l'apparition d'une fissure localisée. Pour les essais à 1,5 % et 2 %, une multi-fissuration se développe, donnant lieu à une augmentation importante

de la déformation au pic. Afin de reproduire les essais, les fibres ont dû être légèrement orientées dans la direction de traction avec un angle moyen des fibres dans les plans de fissuration de  $30,8^\circ$ . Concernant le coefficient de Weibull il est ici fixé à 8, ce qui laisserait penser à une dispersion importante des résistances à la traction du béton. En réalité, il se pourrait que ce paramètre englobe également la dispersion des densités volumiques et orientations de fibres, conduisant ainsi à un calage qui ne reflèterait pas seulement les caractéristiques du béton, mais celles du béton fibré dans son intégralité. Cette réflexion sera ici laissée au rang de perspective afin d'aboutir à une compréhension encore plus fine du matériau.

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Module d'élasticité du béton	$E^m$	25000	YOUN	MPa
Résistance à la traction de l'échantillon de béton	$R_{t,ref}$	4,3	RTEC	MPa
Longueur de l'échantillon de béton	$l_{ech}$	0,15	LECH	m
Paramètre de Weibull	$m$	8	MW	-
Direction $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,x}$	1	VF11	-
Direction $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,y}$	0	VF12	-
Direction $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,z}$	0	VF13	-
Direction $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,x}$	0	VF21	-
Direction $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,y}$	1	VF22	-
Direction $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,z}$	0	VF23	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	$a$	1	EOF1	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	$b$	1	EOF2	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$	$c$	25	EOF3	-

TABLE 4.3 – Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Chen et al. [16]

### 4.2.3 Comparaison des modèles

Chen et al. proposent dans leur article un modèle de comportement mécanique des bétons fibrés. Ils utilisent ainsi un modèle caractérisant l'extraction des fibres qu'ils corrélient à leurs essais. Puis les lois force-ouverture de fissures sont utilisées dans un modèle d'éléments discrets, où les granulats sont représentés explicitement par des sphères. Par la suite, chaque granulat est englobé par un polyèdre permettant de définir des surfaces planes entre les sphères. Les fibres sont ensuite générées dans le volume de pâte selon une orientation paramétrable. A partir de la connaissance du nombre de fibres traversant chaque plan de polyèdre et de leurs lois de comportement, la réponse du tirant est calculée. Cette approche semble être intéressante mais ne permet a priori pas le calcul de structures très volumineuses.

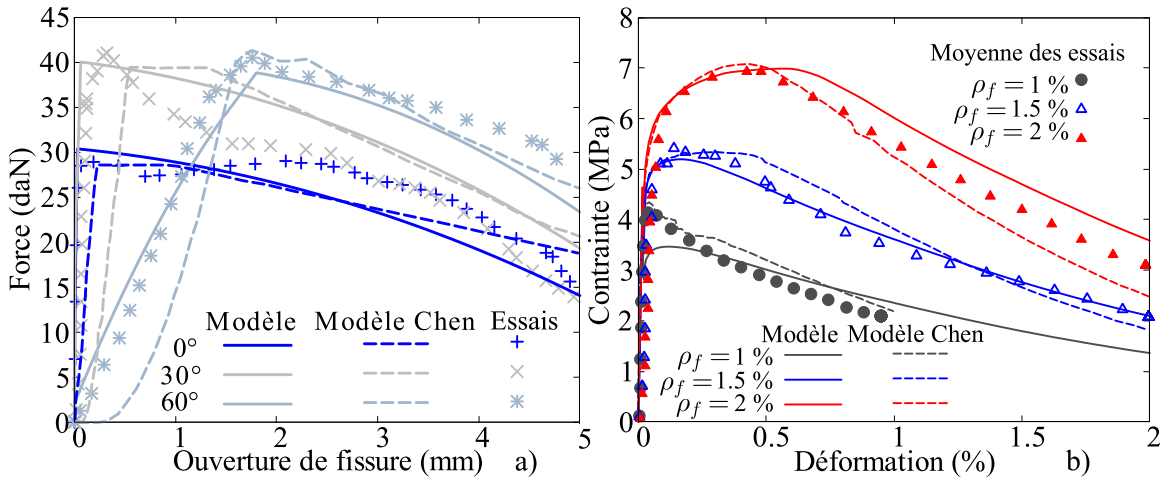


FIGURE 4.4 – a) Comparaison d’essais d’extraction avec le modèle de Chen et al. et le modèle développé, b) Comparaison d’essais de traction directe avec le modèle de Chen et al. et le modèle développé [16]

La figure 4.4 fait apparaître en a) une comparaison du modèle développé, du modèle de Chen et al. et des résultats expérimentaux pour les trois inclinaisons de fibres retenues. On remarque alors que le modèle de Chen et al. sous-estime fortement la rigidité pré-pic d’extraction des fibres pour les trois inclinaisons lorsque les ouvertures de fissures sont faibles. Cette sous-estimation est problématique pour les faibles ouvertures de fissures lorsque l’inclinaison des fibres augmente, car la rigidité est alors nulle au début de l’extraction. Ceci revient donc à ne pas tenir compte des fibres inclinées pour les faibles ouvertures de fissures, ce qui représente le domaine d’intérêt du matériau. Une connaissance très précise de l’orientation des fibres conduirait alors inexorablement à

une réponse du tirant erronée. En b), les réponses contrainte-déformations du modèle développé, du modèle de Chen et al. et la moyenne des essais sont comparées. On constate alors que malgré la rigidité des fibres mal représentée, les réponses en traction directe du modèle de Chen et al. sont satisfaisantes. Dans la suite de l'article les auteurs présentent les résultats obtenus pour différentes orientations préférentielles de fibres. On constate alors que les résultats présentés ici correspondent à une inclinaison globale des fibres de  $0^\circ$ . Cet artefact permet ainsi de compenser la sous-estimation de la rigidité des fibres mais ne décrit pas une situation probable de leur inclinaison.

Il a ainsi été montré la capacité du modèle à reproduire le comportement mécanique d'essais de traction directe à partir d'un calibrage d'une très grande majorité des paramètres sur des essais d'extraction de fibres. Ceci constitue une étape clé dans la validation du modèle, en montrant sa capacité de reproduction de résultats à deux échelles différentes. Il a également été montré sa capacité à décrire de manière plus réaliste le comportement du matériau en comparaison avec un modèle récent. Le modèle de Chen et al. pourrait être amélioré en utilisant une loi de comportement des fibres représentant correctement la rigidité initiale d'extraction des fibres. Néanmoins, ce modèle nécessite une procédure lourde de mise en œuvre, tandis que le modèle développé ici n'a nécessité le calcul que sur un seul élément fini pour représenter le comportement des tirants, ce qui en fait probablement un outil plus performant en terme de temps de calculs.

## 4.3 Essais de Wuest

Wuest [88] a réalisé dans le cadre de sa thèse des essais de traction directe et de flexion quatre points sur des dalles pour des formulations de type BFUP. Parmi les formulations testées, on s'intéressera à celle nommée HIFCOM-14. La formulation n'est pas donnée pour des raisons de confidentialité. Les fibres utilisées sont métalliques, de longueur  $L_f = 13$  mm et de diamètre  $\phi_f = 0,16$  mm. Le dosage en fibres est particulièrement élevé avec  $\rho_f = 4$  %.

### 4.3.1 Essai de traction directe

Wuest a réalisé pour la formulation HIFCOM-14 cinq essais de traction directe sur des tirants de type "dogbones" dont les dimensions sont données en figure 4.5. Wuest, par une méthode d'analyse d'image, a donné le nombre de fibres par  $\text{mm}^2$  dans un

plan de fissuration. À partir de ce nombre et de la relation (2.9.9) il est possible de remonter à l'angle d'inclinaison moyen des fibres dans la fissure. L'angle ainsi obtenu est de  $45^\circ$ , ce qui correspond à une distribution isotrope des inclinaisons de fibres. Cette information sera donc directement utilisée dans le calage des paramètres de l'ellipsoïde d'orientation des fibres. Les autres paramètres sont calibrés par un calcul itératif sur un seul élément fini en traction, de longueur 350 mm, en tentant de minimiser l'écart global entre la courbe expérimentale moyenne et la courbe du modèle. Le tableau 4.4 donne les paramètres retenus lors de la calibration du modèle. On notera que les paramètres utilisés sont d'ordre similaire avec ceux obtenus pour les essais de Chen et al. La figure 4.5 montre la corrélation entre le modèle et la moyenne des réponses des tirants en contrainte-déplacement, le déplacement étant mesuré grâce à des capteurs de longueur 350 mm dans la zone de section constante. Le modèle permet ici de reproduire fidèlement la réponse moyenne des essais. Après l'apparition de la première fissure à 7,2 MPa, on observe une large phase de multi-fissuration avec une augmentation importante de la contrainte obtenue grâce au dosage élevé en fibres. Ceci permet de montrer que le calibrage de la loi de comportement peut être effectué directement sur un essai de traction. À partir des paramètres calibrés sur cet essai, il est désormais possible d'étudier le comportement du modèle sur les dalles réalisées par Wuest avec ce même matériau.

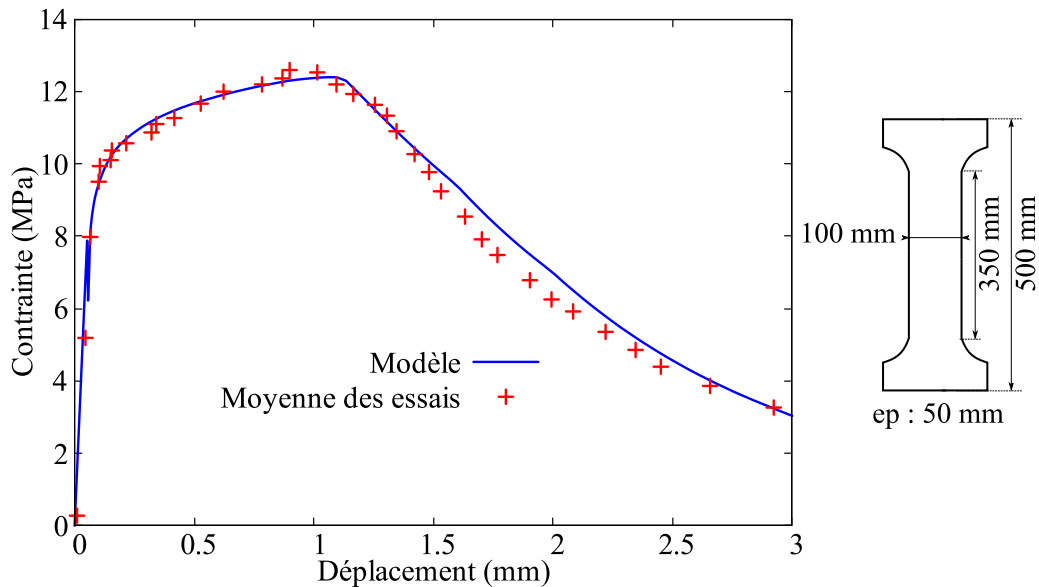


FIGURE 4.5 – Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour un essai de traction directe [88]

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	5000000	HFI	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	7	TMAX	MPa
Module d'élasticité des fibres	$E_f$	200000	YOFI	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	6,5	TD	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$1e^{-4}$	SK	m
Force d'about	$f_0$	0	FABO	N
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	15	ALEC	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	6	MECR	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	$1e^{-3}$	LCAN	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,5	MUF	-
Résistance à la traction du béton	$R_t$	7,2	RT	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2400	FYF	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	2500	FUF	MPa
Module d'élasticité du béton	$E^m$	46300	YOUN	MPa
Résistance à la traction de l'échantillon de béton	$R_{t,ref}$	7,3	RTEC	MPa
Longueur de l'échantillon de béton	$l_{ech}$	0,35	LECH	m
Paramètre de Weibull	$m$	7	MW	-
Direction $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,x}$	1	VF11	-
Direction $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,y}$	0	VF12	-
Direction $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,z}$	0	VF13	-
Direction $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,x}$	0	VF21	-
Direction $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,y}$	1	VF22	-
Direction $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,z}$	0	VF23	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	$a$	1	EOF1	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	$b$	1	EOF2	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$	$c$	1	EOF3	-

TABLE 4.4 – Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Wuest [88]

### 4.3.2 Essai de flexion quatre points

Wuest a réalisé des essais de flexion quatre points sur des dalles dont les dimensions sont données en figure 4.6. A partir des paramètres utilisés pour le calcul du tirant, on cherche à reproduire la réponse de la dalle. Pour cela, on réalise un maillage tridimensionnel de la dalle dans Cast3m. Afin de réduire les temps de calculs, seule une tranche de 1 cm de la dalle est représentée par un seul élément fini sur cette largeur. La figure 4.6 donne le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites.

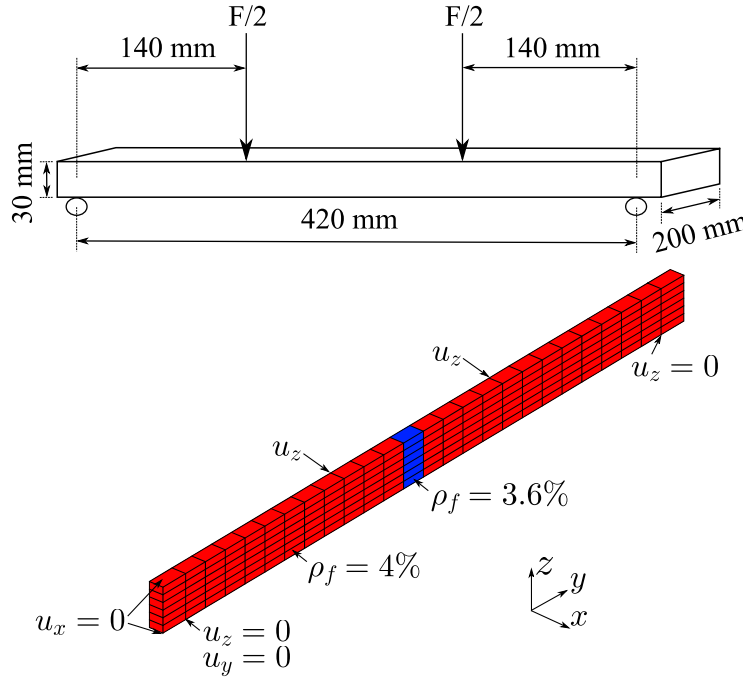


FIGURE 4.6 – Géométrie de la dalle, modélisation d'une tranche de dalle [88]

Les paramètres utilisés correspondent exactement à ceux décrits dans le tableau 4.4 excepté pour la résistance de première fissuration  $R_t$ . En effet, lors du calcul du tirant, il a été déterminé par calibration de la réponse du modèle que la résistance de première fissuration était de 7,2 MPa pour un volume chargé de  $1,75e^{-3} \text{ m}^3$ . Dans le cas présent, il a été admis que la longueur chargée correspondait approximativement à la distance entre charges, soit 140 mm. Il a également été supposé qu'au moment de la première fissuration, la hauteur de la zone tendue correspond à la moitié de la hauteur de la dalle. Ainsi, d'après la loi d'effet d'échelle de Weibull, la résistance de première fissuration devient 8,8 MPa. Comme précisé en 3.4.3, il aurait été en toute rigueur préférable d'utiliser la méthode WL2 afin de déterminer la résistance de première fissuration de chaque élément au cours du chargement. Afin d'éviter des problèmes de localisation de la

fissuration entre les points d'application des charges, un défaut de densité volumique de fibres est introduit. Ainsi, au centre de la dalle, la densité volumique de fibres est réduite à 90 % de la valeur initiale. La figure 4.6 représente le champ de densité volumique de fibres sur le maillage. Il est important de noter qu'en l'absence de ce défaut, plusieurs éléments auraient pu atteindre la phase adoucissante du comportement, ce qui n'est pas représentatif de la réalité, conduisant ainsi à une réponse post-pic erronée.

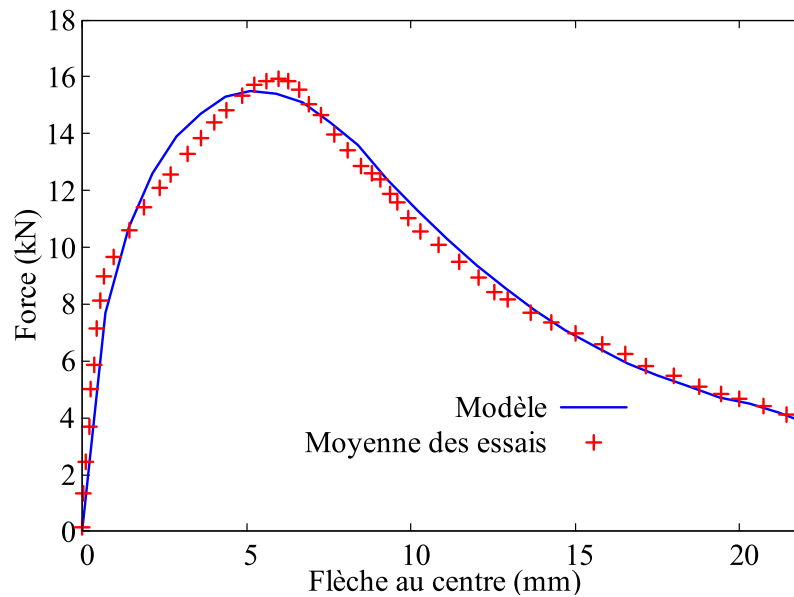


FIGURE 4.7 – Corrélation expérimentale du modèle pour un essai de flexion quatre points [88]

Le chargement est conduit en déplacement imposé. La figure 4.7 représente, pour le modèle et l'essai, l'évolution de la force totale appliquée en fonction de la flèche au centre de la dalle. Le résultat du modèle est ici très bien corrélé à la moyenne des résultats expérimentaux. Le modèle sous-estime légèrement la rigidité entre 6 kN et 9 kN, ceci pouvant être lié à une résistance à la traction supérieure pour les premières fissures des éléments. C'est ici que le modèle WL2 aurait éventuellement pu permettre une corrélation plus précise en faisant augmenter la résistance de première fissuration des éléments à mesure que la fissuration des éléments adjacents se développait. On constate néanmoins qu'en première approximation la réponse du modèle est satisfaisante dans l'ensemble. Ceci permet donc de valider un aspect essentiel du modèle qui concerne sa capacité à prédire le comportement d'une structure soumise à un chargement complexe à partir d'un essai de traction simple. Concernant l'orientation des fibres, il est possible que celle-ci ait été différente entre le tirant et la dalle, mais ne disposant pas d'informations sur cet aspect l'orientation a été laissée isotrope dans tous les éléments.

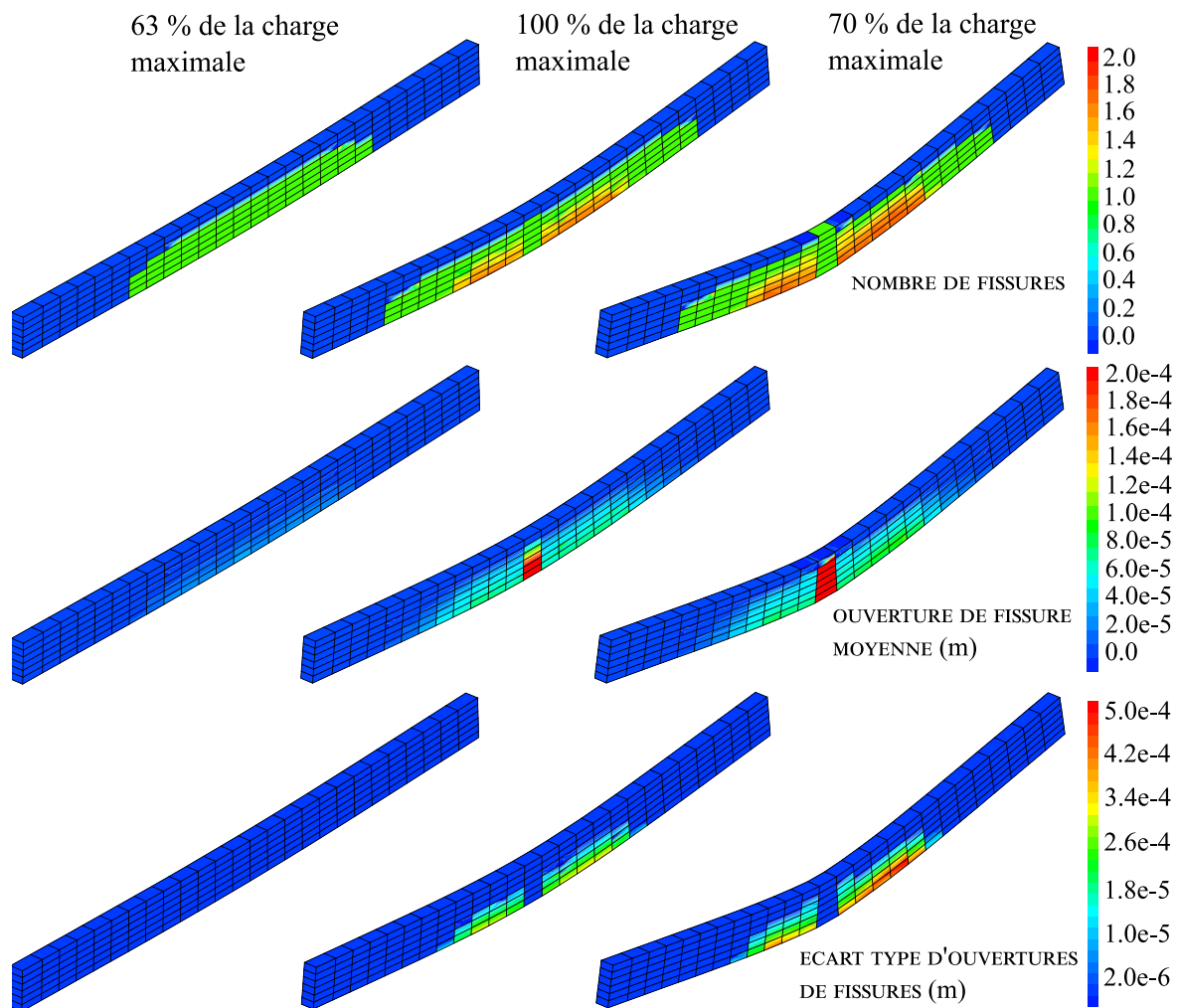


FIGURE 4.8 – Champs de variables internes du calcul d’une tranche de dalle à différents instants

La figure 4.8 présente quelques variables internes du modèle qui concernent la fissuration à trois instants du chargement : 63 % de la charge maximale en phase pré-pic, au pic de chargement et à 70 % de la charge maximale en phase post-pic. A 63 % de la charge au pic, un grand nombre d’éléments entre les charges sont fissurés à raison d’une fissure par élément. Les ouvertures de fissures moyennes sont alors inférieures à  $20\ \mu\text{m}$ , et l’écart type entre les ouvertures de fissures est nul, étant donné que chaque élément ne contient qu’une seule fissure. Au pic de chargement, les éléments en sous-face de la dalle ont commencé à multi-fissurer, excepté dans l’élément possédant une densité volumique de fibres plus faible. La fissure de ce même élément est déjà largement plus ouverte que les autres et on voit apparaître un écart type relativement important entre les fissures des éléments multi-fissurés. En phase de localisation la multi-fissuration a

légèrement progressé par un phénomène d'entraînement, la fissure de l'élément affaibli continue alors de s'ouvrir. Ces résultats montrent ici l'intérêt du modèle en terme de calcul du nombre et des ouvertures de fissures, ce qui constitue un des enjeux forts de la modélisation des bétons fibrés.

## 4.4 Essais de Choi et al.

Choi et al. [17] ont réalisé des essais de traction directe sur des éléments en BFUP contenant une densité volumique de fibres métalliques de 1,5 %. Ils observent lors de ces essais une multi-fissuration importante et donnent, en complément de la réponse en traction des tirants, le nombre et les ouvertures de fissures moyennes observées. Le tableau 4.5 donne les caractéristiques des matériaux utilisés.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<i>Formulation normalisée du béton</i>			
Ciment	-	1	-
Fumée de silice	-	0,25	-
Eau	-	0,2	-
Filler	-	0,3	-
Sable	-	1,1	-
Adjuvant expansif	-	0,075	-
Antimousse	-	0,0007	-
Super-plastifiant	-	0,014	-
<i>Caractéristique du béton</i>			
Résistance à la compression à 28 jours	$R_c$	151	MPa
<i>Caractéristiques des fibres</i>			
Longueur	$L_f$	19,5	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,2	mm
Module d'élasticité	$E_f$	200	GPa
Contrainte ultime	$f_u^f$	2500	MPa

TABLE 4.5 – Caractéristiques des matériaux utilisés par Choi et al.[17]

La figure 4.9 fait apparaître la géométrie des tirants et la corrélation entre le modèle et les résultats des essais. Le matériau présente d'excellentes performances mécaniques obtenues par une formulation aboutie. Les auteurs observent une résistance de première fissuration moyenne de 13,24 MPa et une contrainte au pic moyenne de 19,46 MPa. Le modèle est calibré sur un seul élément fini en traction de longueur 8 cm. Il reproduit globalement bien le comportement mécanique observé. Les paramètres matériau utilisés sont donnés au tableau 4.6.

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	8000000	HFI	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	15	TMAX	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	13	TD	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$3e^{-2}$	SK	m
Force d'about	$f_0$	5	FABO	N
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	45	ALEC	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	10	MECR	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	$1e^{-4}$	LCAN	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,5	MUF	-
Résistance à la traction du béton	$R_t$	13	RT	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2450	FYF	MPa
Module d'élasticité du béton	$E^m$	46300	YOUN	MPa
Résistance à la traction de l'échantillon de béton	$R_{t,ref}$	13	RTEC	MPa
Longueur de l'échantillon de béton	$l_{ech}$	0,08	LECH	m
Paramètre de Weibull	$m$	9,5	MW	-
Direction $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,x}$	1	VF11	-
Direction $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,y}$	0	VF12	-
Direction $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,z}$	0	VF13	-
Direction $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,x}$	0	VF21	-
Direction $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,y}$	1	VF22	-
Direction $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,z}$	0	VF23	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	$a$	1	EOF1	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	$b$	1	EOF2	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$	$c$	90	EOF3	-

TABLE 4.6 – Paramètres du modèle utilisés pour les essais de traction directe de Choi et al. [17]

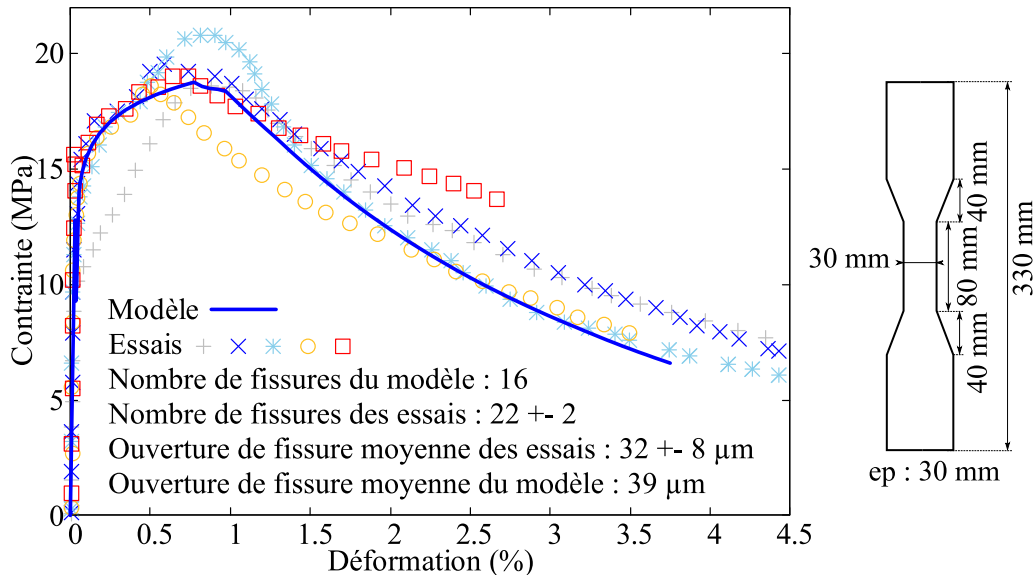


FIGURE 4.9 – Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour cinq essais de traction directe de Choi et al.

Le modèle fait apparaître une nécessaire orientation préférentielle des fibres dans la direction de traction ce qui peut s'expliquer par la faible section de l'élément. Concernant le nombre et les ouvertures de fissures, on constate une bonne prédiction des ouvertures de fissures et une légère sous-estimation du nombre de fissures. Ceci s'explique par le fait que le matériau a atteint la saturation de la fissuration pour un nombre de 16 fissures. Ceci constitue la limite du modèle afin d'éviter de sur-estimer la déformation ultime du BFUP, et de se placer ainsi du côté de la sécurité. Cette validation met donc en avant la capacité du modèle à prédire des ouvertures de fissures correspondant à celles observées expérimentalement tout en limitant le comportement écouissant lorsque les fissures deviennent trop proches.

## 4.5 Essais de Bayard

Bayard [8] a réalisé dans le cadre de sa thèse des essais de traction directe sur des éléments en BFUP pour plusieurs orientations préférentielles de fibres. Pour cela, il coule des dalles grâce à un dispositif utilisant l'effet de parois. Les fibres présentes dans chaque dalle sont alors orientées préférentiellement selon la même direction. Puis il découpe des éprouvettes de 600 mm de long dans les dalles selon plusieurs directions, ce qui lui permet de connaître l'orientation préférentielle des fibres dans chaque élément. Guenet [28] utilise également ces essais afin de valider son modèle, il apparaît donc

comme intéressant de comparer également le modèle développé dans cette thèse ainsi que le modèle de Guenet. Les données matériaux connues de ces essais sont données dans le tableau 4.7.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<i>Caractéristiques des fibres</i>			
Densité volumique	$\rho_f$	2,7	%
Longueur	$L_f$	13	mm
Diamètre	$\phi_f$	0,2	mm
Module d'élasticité	$E_f$	210	GPa

TABLE 4.7 – Caractéristiques des matériaux utilisés par Bayard [8]

Les paramètres matériaux déterminés par calage du modèle sur les essais de traction sont quant à eux donnés en tableau 4.8. Pour les quatre orientations préférentielles de fibres les paramètres utilisés sont identiques, à l'exception du rayon de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans la direction de traction. En effet, afin de modifier l'orientation des fibres deux approches sont possibles :

- Orienter fortement les fibres dans une direction et faire tourner le repère de l'ellipsoïde.
- Laisser le repère fixe et faire varier les valeurs principales de l'ellipsoïde.

Dans le cas présent, c'est la deuxième option qui a été choisie. Le repère principal de l'ellipsoïde correspond à celui du maillage, et seule la valeur du paramètre EOF3 (direction  $z$ ) est modifiée afin de modéliser l'orientation moyenne des fibres dans la direction  $z$ . Les paramètres du modèle, communs à tous les essais, sont donnés dans le tableau 4.9, tandis que le paramètre qui diffère est donné en tableau 4.8.

Essais	Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_c$
Orientation de 0°	EOF3=50
Orientation de 30°	EOF3=10
Orientation de 45°	EOF3=1
Orientation de 60°	EOF3=0,12

TABLE 4.8 – Paramètres du modèle utilisés qui diffèrent pour chaque orientation préférentielle de fibres lors des essais de Bayard

Paramètre	Symbole	Valeur	Nom	Unité
Rigidité de l'interface	$H_f$	5000000	HFI	MPa/m
Contrainte de cisaillement maximale	$\tau_{max}$	7	TMAX	MPa
Contrainte de frottement	$\tau_d$	8	TD	MPa
Glissement caractéristique	$s_k$	$8e^{-4}$	SK	m
Force d'about	$f_0$	0	FABO	N
Angle d'ouverture du pentaèdre d'écaillage	$\alpha$	15	ALEC	°
Module d'écrouissage dû à l'abrasion	$M_0$	6	MECR	MPa
Longueur caractéristique d'ancrage	$L_0$	$5e^{-4}$	LCAN	m
Coefficient de frottement	$\mu$	0,3	MUF	-
Résistance à la traction du béton	$R_t$	8	RT	MPa
Limite élastique des fibres	$f_y^f$	2400	FYF	MPa
Résistance à la rupture des fibres	$f_u^f$	2500	FUF	MPa
Module d'élasticité du béton	$E^m$	40000	YOUN	MPa
Résistance à la traction de l'échantillon de béton	$R_{t,ref}$	8	RTEC	MPa
Longueur de l'échantillon de béton	$l_{ech}$	0,6	LECH	m
Paramètre de Weibull	$m$	9	MW	-
Direction $x$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,x}$	1	VF11	-
Direction $y$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,y}$	0	VF12	-
Direction $z$ du premier vecteur d'orientation des fibres	$e_{a,z}$	0	VF13	-
Direction $x$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,x}$	0	VF21	-
Direction $y$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,y}$	1	VF22	-
Direction $z$ du second vecteur d'orientation des fibres	$e_{b,z}$	0	VF23	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_a$	$a$	1	EOF1	-
Valeur principale du tenseur d'orientation des fibres dans la direction $\vec{e}_b$	$b$	1	EOF2	-

TABLE 4.9 – Paramètres du modèle utilisés communs à tous les essais de traction directe de Bayard

La figure 4.10 montre la corrélation expérimentale entre le modèle et les essais pour quatre orientations préférentielles de fibres, par rapport à la direction de traction, définies par Bayard comme étant de 0°, 30°, 45° et 60°. Le modèle de Guenet est également représenté sur ces graphiques.

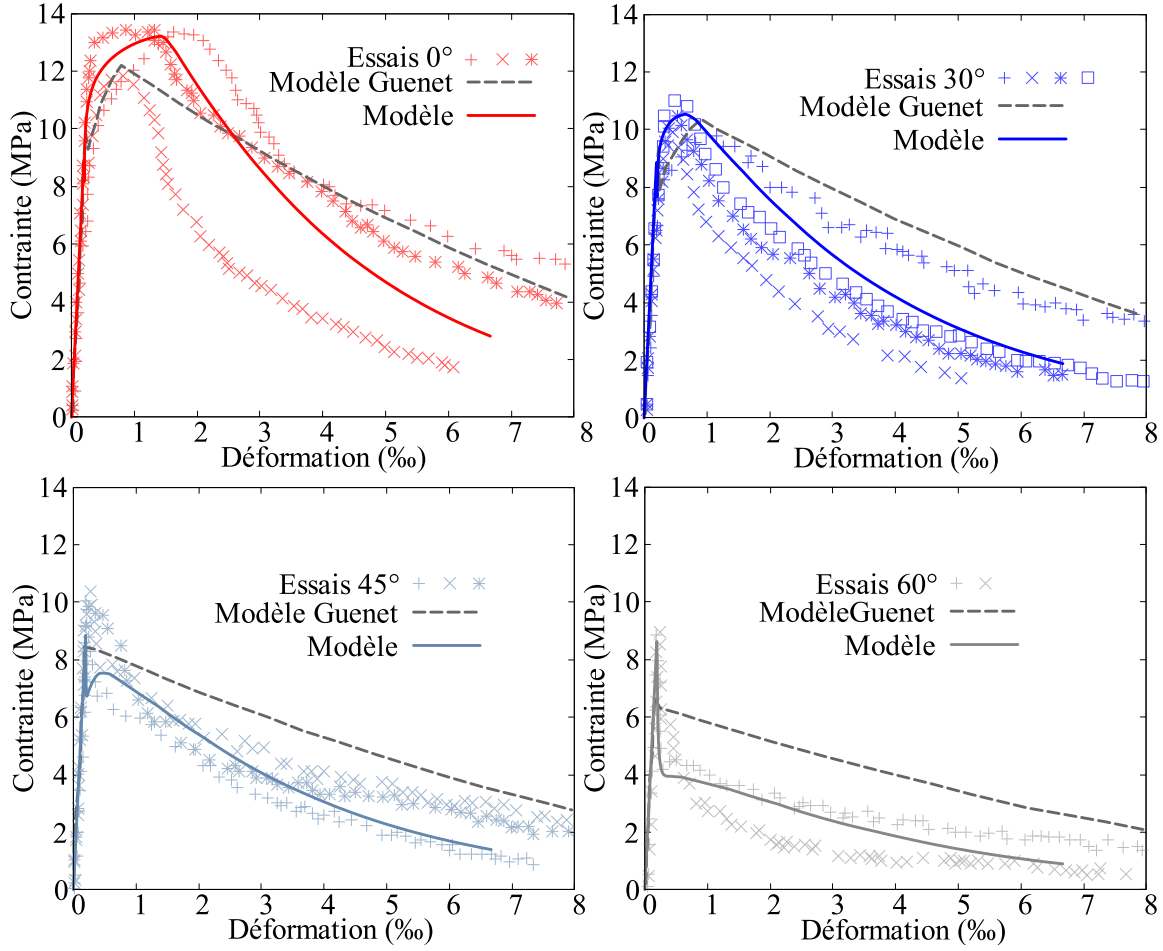


FIGURE 4.10 – Corrélation expérimentale du modèle de fibre pour les essais de traction directe de Bayard pour quatre orientations préférentielles de fibres, comparaison avec le modèle de Guenet

On constate alors la capacité du modèle à reproduire les résultats expérimentaux pour les quatre orientations de fibres en utilisant une variation cohérente du paramètre caractérisant l'orientation des fibres dans la direction de traction. Lorsque les fibres sont bien alignées avec la direction de traction (cas 0° et 30°) une multi-fissuration du tirant se développe conduisant à la phase d'écrouissage positif observée. Puis lorsque l'inclinaison des fibres devient trop importante, le nombre de fibres traversant la fissure n'est plus suffisant pour générer une multi-fissuration et le comportement devient alors adoucissant après l'apparition de la première fissure. La comparaison avec les résultats du modèle de Guenet permet de constater que le modèle reproduit mieux les non linéarités du comportement des BFUP. Le modèle est également plus proche des fuseaux de données expérimentales pour les quatre orientations. Cette validation permet alors d'entériner le mode de représentation de l'orientation des fibres par un

ellipsoïde. Elle permet également de montrer qu'en présence de données sur l'orientation préférentielle des fibres, la réponse du modèle s'ajuste correctement aux résultats observés expérimentalement.

## 4.6 Essai de flexion 4 points

Cette thèse est effectuée en partenariat avec l'Université Laval qui développe un appareil permettant de mesurer des champs de densités et d'orientations de fibres dans des éléments en béton de fibres métalliques. Cet appareil se base sur des méthodes de mesure de champs magnétiques. Dans le cadre de la Thèse de Anh Duc Tran, des poutres en BFUP ont été coulées et des mesures de champ magnétique ont été faites afin de déterminer les densités volumiques et les orientations préférentielles des fibres. Le logiciel éléments finis Cast3m présente la capacité de définir des données matériau sous forme de champs, il apparait donc comme intéressant d'étudier le comportement du modèle en se basant sur des champs variables de densités volumiques et d'orientations de fibres.

Les champs de propriétés matériau utilisés ici sont obtenus à partir d'un appareil et de relations développées par Nunes et al. [64][63]. A partir de mesures de la perméabilité magnétique dans deux directions orthogonales, deux relations linéaires empiriques permettant d'obtenir un coefficient d'orientation des fibres dans ces deux directions sont établies. Les relations sont données en (4.6.1) et (4.6.2) où  $\rho_X$  et  $\rho_Y$  sont définis en 1.2.4.3. A titre expérimental, ces coefficients d'orientation sont directement utilisés comme valeurs principales de l'ellipsoïde d'orientation pour les directions  $x$  et  $y$  du maillage. A partir de la supposition d'une orientation 2D compte tenu de la géométrie de la poutre, la valeur de l'ellipsoïde d'orientation des fibres dans la direction  $z$  est quant à elle fortement réduite.

$$\alpha_{0,X} = 0,57 + 1,85(\rho_X - \rho_Y) \quad (4.6.1)$$

$$\alpha_{0,Y} = \alpha_{0,X} - 3,7(\rho_X - \rho_Y) \quad (4.6.2)$$

Concernant la densité volumique de fibres, une relation basée sur les perméabilités magnétiques est également proposée. Cette relation est donnée en (4.6.3) où  $\mu_{r,mean}$  est

un coefficient exprimé en 1.2.4.3 et  $k$  est un coefficient qui a ici été calibré à la valeur de 3,1 tandis que Nunes et al. proposent la valeur de 4,55. Cette valeur a ici été calibrée de sorte à obtenir des valeurs de densités volumiques cohérentes.

$$\rho_f = \frac{\mu_{r,mean} - 1}{k} \quad (4.6.3)$$

#### 4.6.1 Élément étudié

L'élément étudié est une poutre en BHP fibré. La formulation ne possède pas l'appellation de BFUP étant donné la résistance à la compression de la matrice de 126 MPa. Cette poutre est testée selon la norme SCIA. Les dimensions de l'élément ainsi que le maillage et les conditions aux limites utilisées sont donnés en figure 4.11. La poutre est obtenue à partir d'une découpe dans une plaque de dimensions 600x600 mm coulée depuis un point fixe central. Trois poutres ont été prélevées et seules deux ont été testées. La présente validation n'est effectuée que pour une seule poutre dénommée PA3 dont on peut observer la position vis à vis de la plaque en figure 4.12. Les fibres utilisées sont métalliques, de longueur 13 mm et de diamètre 0,2 mm. La formulation du béton n'est pas donnée ici pour des raisons de confidentialité.

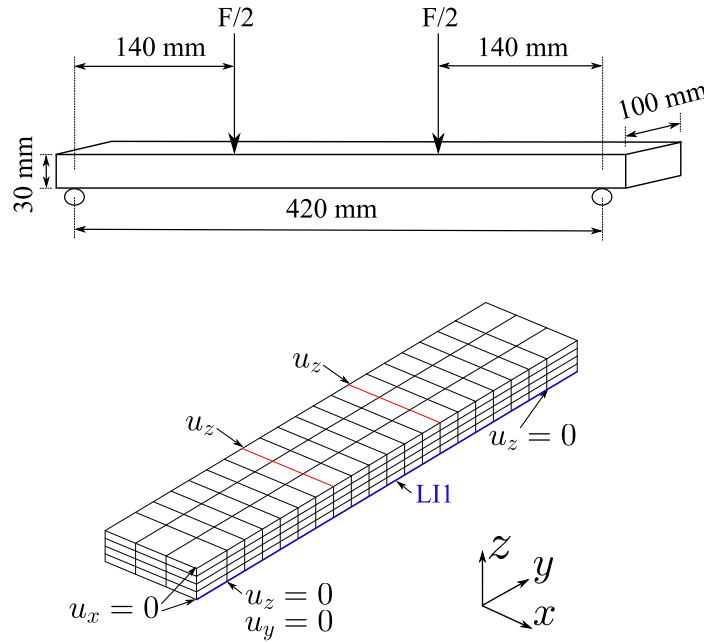


FIGURE 4.11 – Géométrie de l'essai, maillage et conditions aux limites utilisées

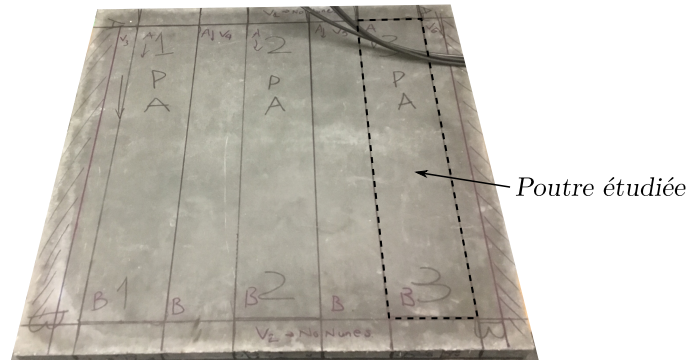


FIGURE 4.12 – Position de la poutre PA3 étudiée

#### 4.6.2 Essai d'extraction d'une fibre

Afin de déterminer un certain nombre de paramètres du modèle, trois essais d'extraction de fibres uniques ont été réalisés. La géométrie de l'essai est présentée en figure 4.13. Une seule fibre est placée au centre d'un échantillon en béton de dimensions 60x15x5 mm. L'axe longitudinal de la fibre correspond à la direction de traction. L'échantillon est séparé en son centre par une feuille en matériau synthétique afin de ne mesurer que la force reprise par la fibre. Les résultats obtenus sont les courbes force-déplacement du vérin. Il est très important de noter que la mesure de déplacement du vérin est une grandeur imprécise. Ainsi les valeurs de glissement au pic de force ont été expérimentalement surestimées. Afin d'étayer ces propos, la figure 4.13 b) montre les résultats d'un essai d'extraction identique du point de vue des fibres et de la méthodologie, mais pour une matrice différente. Lors de cet essai, la mesure de l'ouverture de fissure a été faite par analyse d'image et par déplacement du vérin. On compare alors ici les deux grandeurs mesurées. On constate bien que le déplacement du vérin surestime l'ouverture de fissure au pic en passant de 0,05 mm à 0,35 mm. Ceci met donc en évidence la nécessité de mettre en place un dispositif spécifique à la mesure de l'ouverture de fissure. Ainsi les courbes d'extraction de fibres obtenues ici et présentées en figure 4.13 a) ont permis d'estimer les paramètres d'extraction excepté la rigidité initiale, pour laquelle une valeur usuelle a été utilisée. On constate que hormis l'ouverture de fissure au pic, pour les raisons évoquées ci-dessus, le modèle représente globalement bien l'allure des courbes expérimentales. La limite à la rupture des fibres donnée par le fournisseur est 2860 MPa, elle a ici été prise à 2800 MPa. Ceci signifie que la force à la rupture des fibres se situe aux alentours de 90 N. Il a effectivement été observé la rupture de certaines fibres lors des essais d'extraction, la force pour une fibre droite étant très proche de la force

limite. Ceci implique une rupture probable d'un certain nombre de fibres inclinées, qui voient leur force maximale augmentée. Numériquement, il a effectivement été observé la rupture de fibres dans le modèle. Cette rupture prématurée conduit à une diminution de l'ouverture de fissure et de la force au pic.

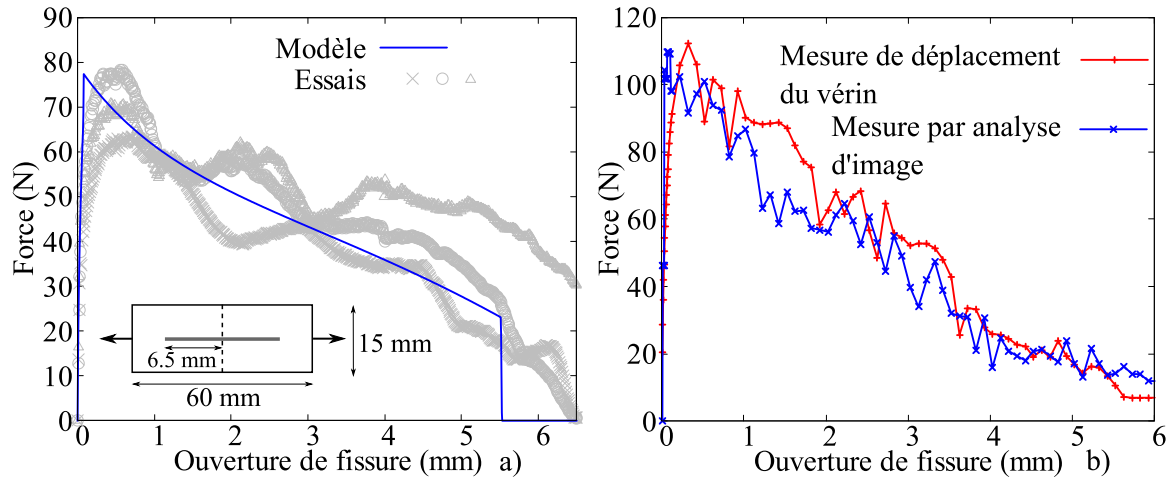


FIGURE 4.13 – a) Courbes d'extraction expérimentales et modélisées correspondant à l'essai de flexion, b) comparaison entre les réponses force-ouverture de fissures mesurées par analyse d'image et par déplacement du vérin

### 4.6.3 Champ de densité volumique de fibres

La figure 4.14 représente le champ de densité volumique de fibres sur le maillage. On observe ici une forte ségrégation, la face coffrée étant la partie basse de la poutre, les fibres se sont accumulées dans cette zone. La sous face de la poutre présente donc une densité volumique de fibres plus élevée qui est relativement homogène. Lors du calcul il a été observé des problèmes de localisation de la fissuration. Afin de parer ce problème, la densité volumique de fibres d'une zone de la poutre a été affaiblie en prenant 90 % de la valeur mesurée. Cette diminution avait déjà été réalisée dans le calcul de la poutre de Wuest. Il est probable que cette zone affaiblie existe bien dans la poutre mais qu'elle ait échappé à la mesure électromagnétique de par l'effet des fibres voisines qui auraient empêché la diminution locale du signal mesuré. La zone qu'il a été choisi d'affaiblir ne correspond pas exactement à la position de la localisation de la fissure expérimentale, mais à la zone où l'ouverture de fissure était la plus élevée avant la localisation sans affaiblissement de la densité volumique de fibres. Il est néanmoins observé que ces deux zones sont adjacentes.

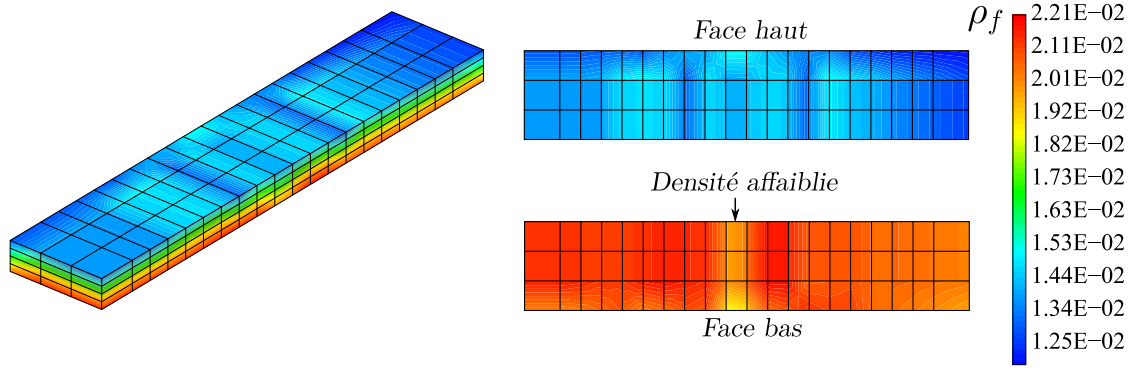
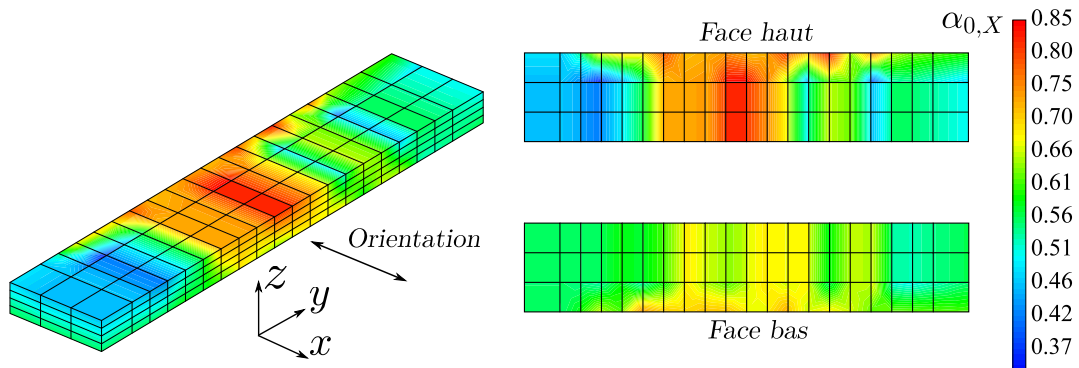
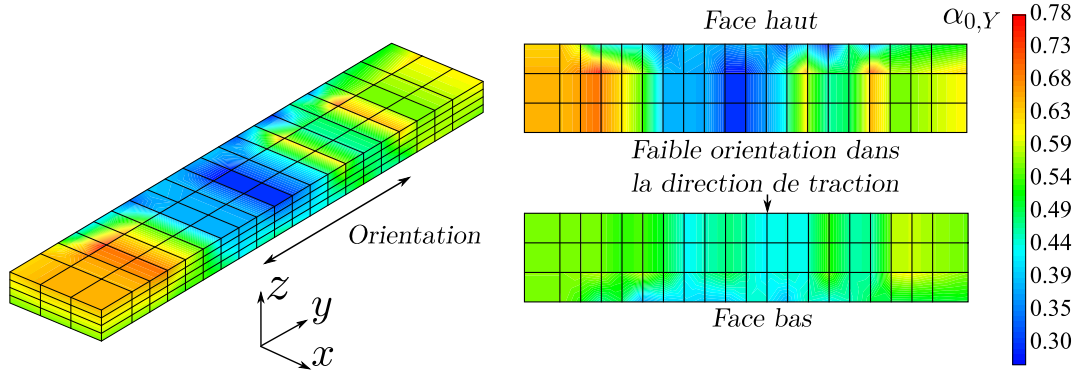


FIGURE 4.14 – Champ de densité volumique de fibres

#### 4.6.4 Champ d'orientation des fibres

Les champs d'orientation de fibres sont donnés en figures 4.15 et 4.16. On constate que les fibres sont relativement mal orientées vis à vis de la direction de traction. Cette orientation préférentielle semble être en accord avec la méthode de coulage utilisée et l'orientation préférentielle observée en figure 1.15. Le fait de couler une plaque depuis son centre a tendance à orienter les fibres dans les directions diagonales de la plaque. Cet effet est observé notamment aux extrémités de la poutre. Les valeurs de  $\alpha_{0,X}$  et  $\alpha_{0,Y}$  ont été directement utilisées dans les termes EOF1 et EOF2 dans le modèle. Les axes principaux de l'ellipsoïde d'orientation des fibres correspondent aux directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  du maillage. La valeur de EOF3 a été fixée comme constante sur le maillage à une valeur de 0,001. Ceci tend donc à diminuer le nombre de fibres orientées selon la direction  $z$  et donc à se rapprocher d'une orientation préférentielle bi-dimensionnelle.

FIGURE 4.15 – Champ de d'orientation des fibres dans la direction  $x$

FIGURE 4.16 – Champ de d'orientation des fibres dans la direction  $y$ 

#### 4.6.5 Résultats

Le calcul est effectué dans Cast3m en déplacement imposé au niveau du point d'application des charges. A titre d'exemple, la méthode permettant de définir une donnée matériau comme un champ 3D est donnée en 4.17, le champ CHAN2 étant la propriété matériau variable sur le maillage. Dans le cas présent les données ont été mesurées sur la face supérieure et en sous-face de la poutre. Les listes des valeurs sont alors données dans le modèle sur ces deux faces, et sont ensuite interpolées sur l'ensemble du maillage. La définition du champ ne doit pas nécessairement correspondre à la taille des mailles.

Les propriétés matériau utilisées pour le calcul de la poutre sont données en 4.18. On constatera notamment que la contrainte d'adhérence fibre-matrice est élevée, ainsi que la force d'about. Il est effectivement observé que les fibres présentent un léger défaut d'extrémité observable à l'œil nu. La résistance à la traction du béton est relativement élevée de même que le paramètre de Weibull ce qui correspond alors à un faible écart type sur la distribution des résistances du béton. La taille de l'échantillon de référence a été définie comme étant la longueur entre appuis. La résistance de première fissuration a ainsi également été prise à 9,5 MPa. Cette valeur peut paraître élevée, néanmoins, connaissant la charge de première fissuration, un calcul élastique conduit à une résistance de première fissuration de 11,2 MPa. Cette valeur semblait alors surestimée, la résistance de première fissuration a donc été calibrée en même temps que la réponse du modèle.

```

* Création d'un champ de matériau quelconque
CHAN1 = mate mod1 YOUN 1.;
* Récupération des coordonnées
cx cy cz = coor CHAN1;
* Modification du nom des coordonnées
cx = nomc 'X' cx;
cy = nomc 'Y' cy;
cz = nomc 'Z' cz;
* Création d'un objet coordonnées
OBJET1 =cx et cy et cz;
* Création de listes correspondant aux points de variation du champ matériau
LX1 = prog 0. 1.;
LY1 = prog 0. 1.;
LZ1 = prog 0. 1.;
* Création de la liste des propriétés matériaux
LM1 = prog 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.;
* Création d'un objet nuage contenant les valeurs du champ aux points définis
NUA1 = nuag 'COMP' 'X' LX1 'COMP' 'Y' LY1 'COMP' 'Z' LZ1 'COMP' 'CHAN1'
LM1;
* Interpolation du champ sur le maillage
CHAN2 = ipol NUA1 OBJET1 'GRILL';

```

FIGURE 4.17 – Lignes de commande utilisées permettant de définir un champ tridimensionnel de propriété matériau dans Cast3m

```

* Paramètres béton
matb1 = mate mod1 YOUN 35000 RT 9.5 NU 0.2 GFT 1.0e-4 FIBR 1;
* Paramètres fibres
matfib1= mate mod1 RHOF rho2 RTEC 9.5 DIFI 2.0e-4 LOFI 13.0e-3 HFI 5.0e6
TMAX 15. TD 16. SK 3.0e-3 FABO 12.0e-6 ALEC 5. MECR 15. LCAN 5.0e-4 MUF
0.65 YOFI 2.0e5 LECH 0.42 MW 12. FU 2800. FYF 2600. EOF1 eofx1 EOF2 eofx2
EOF3 0.001 VF11 1. VF12 0. VF13 0. VF21 0. VF22 1. VF23 0.;

```

FIGURE 4.18 – Paramètres matériau utilisés lors du calcul de la poutre

#### 4.6.5.1 Courbe force-flèche

Les paramètres du modèle n'ayant pas été déterminés par l'essai d'extraction, ou les mesures électromagnétiques, ont été calibrés de sorte à approcher la réponse expérimentale force-flèche de la poutre. La figure 4.19 montre la corrélation entre le modèle et l'essai réalisé. A titre de comparaison, la réponse du modèle en l'absence de défaut de densité volumique de fibres est également donnée.

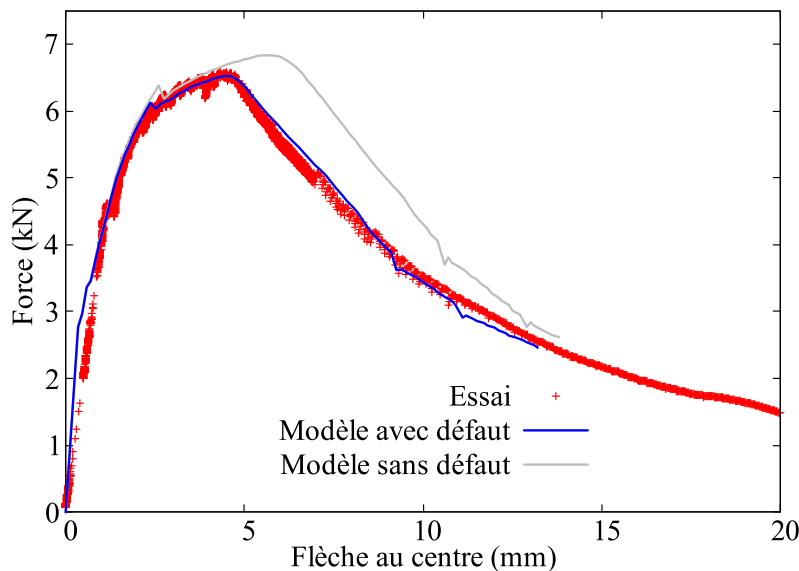


FIGURE 4.19 – Courbes force-flèche expérimentale et numérique

Concernant la réponse du modèle avec défaut de densité volumique de fibres, on constate dans un premier temps que la rigidité élastique expérimentale est faible en comparaison avec la réponse du modèle, et ce bien que le module d'élasticité du béton ait été pris à une valeur de 35000 MPa, ce qui correspond à une valeur faible pour ce type de béton. Un calcul élastique pour une flèche expérimentale de 1 mm donne une valeur du module d'élasticité du béton de 23000 MPa. Cette valeur paraissant trop faible elle n'a pas été retenue dans le calcul. Globalement le modèle reproduit bien la réponse de l'essai, à la fois durant la phase pré-pic et la phase post-pic. Un point intéressant concerne l'instant où une des fissures commence à localiser. Il est numériquement et expérimentalement observé que cet instant ne correspond pas au pic de force mais à une valeur d'environ 6 kN, marquée par la légère chute de force sur la courbe issue du calcul numérique. Concernant la réponse du modèle en l'absence de défaut de densité volumique de fibres, la force et la flèche au pic sont surestimées pour cet essai. Il est intéressant de noter qu'une variation locale de densité volumique de fibres de 10 % conduit à une variation

non négligeable, mais néanmoins faible, de la réponse du modèle. Dans le cadre de l'analyse d'une structure, et en l'absence d'essais, la réponse du modèle resterait ainsi a priori satisfaisante. La calibration de la réponse force-flèche effectuée ici permet ainsi de s'intéresser à des aspects plus détaillés, tels que l'évolution de la fissuration.

#### 4.6.5.2 Nombre de fissures

Lors de l'essai, un dispositif d'analyse d'image a été mis en place. Ce dispositif permet alors de constater l'évolution de la fissuration au cours du chargement, et de calculer les ouvertures de fissures.

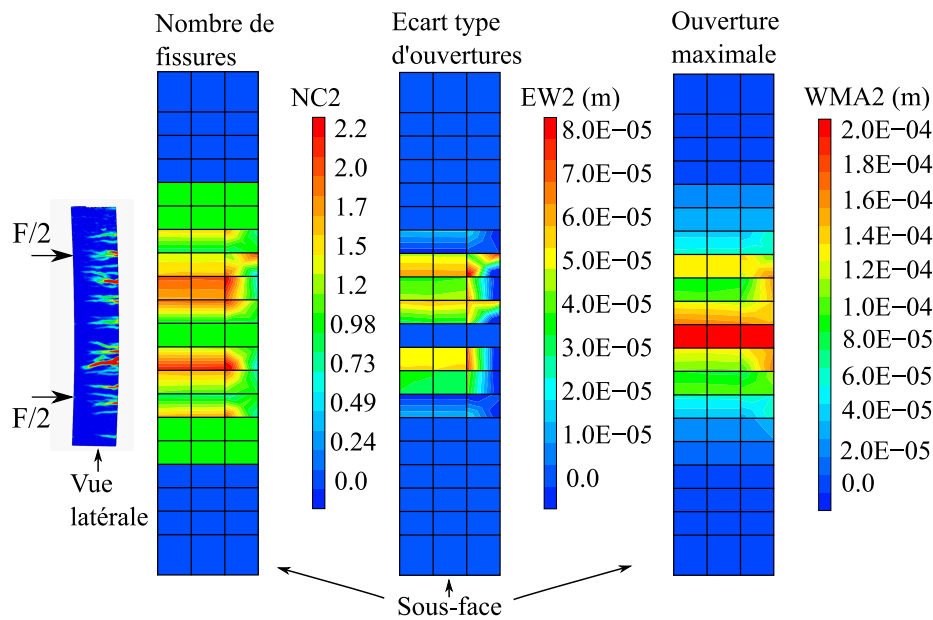


FIGURE 4.20 – Champ de fissuration expérimental, champ du nombre de fissures et d'écart type d'ouvertures de fissures du modèle au pic de force (point (4) de la figure 4.21)

La figure 4.20 fait apparaître le champ de fissuration expérimental au pic de force, ainsi que les champs de nombre de fissures et d'écart type d'ouvertures de fissures du modèle à ce même instant. Les champs du modèle concernent la sous-face de la poutre tandis que le champ expérimental concerne une vue latérale. La vue latérale est ici mise à l'échelle des champs du modèle et positionnée de sorte à ce que les points d'application des charges correspondent. On constate alors que le modèle traduit bien la position des zones de multi-fissuration, le nombre de fissures variant entre 1 et 2,2. Sur l'ensemble de la zone d'analyse d'image on comptabilise un total de 25 fissures, tandis que sur

l'ensemble de la poutre modélisée, le nombre de fissures s'élève à 22. Le nombre de fissures par élément a été comptabilisé en arrondissant à l'entier supérieur, les nombres décimaux reflétant en réalité des taux de propagation surfaciques de fissures en cours de création. Le nombre de fissures du modèle s'approche donc fortement du nombre de fissures observées expérimentalement. Le champ d'écart type des ouvertures de fissures permet de constater qu'il existe une variabilité non négligeable des ouvertures dans les zones de multi-fissuration.

#### 4.6.5.3 Ouvertures de fissures

Le dispositif d'analyse d'image permet durant le post-traitement et grâce à la mise en place d'extensomètres virtuels de mesurer des ouvertures de fissures. La figure 4.21 permet de visualiser l'évolution des ouvertures de fissures maximales à quatre instants du chargement. Ces instants sont représentés sur la courbe force-flèche. A partir du calcul numérique effectué, on extrait la variable interne d'ouvertures de fissures maximales WMA2 le long de la ligne LI1 dont la position est donnée en figure 4.11. Cette variable interne est également représentée aux quatre instants étudiés et permet donc de juger la capacité du modèle à reproduire les ouvertures de fissures maximales expérimentales. On constate une bonne corrélation entre les ouvertures mesurées et calculées. Sur le premier point, l'ouverture de fissure maximale expérimentale est de  $33\ \mu\text{m}$  tandis que le modèle donne une valeur de  $34\ \mu\text{m}$ . Les ouvertures adjacentes sont quand à elles légèrement surestimées. Pour le deuxième point le modèle surestime la fissure maximale de  $20\ \mu\text{m}$ , mais semble plus en accord avec les autres fissures le long de l'élément. Au niveau du troisième point on constate expérimentalement et numérique qu'une des fissures a commencé à localiser. Les positions expérimentales et numériques de ces fissures sont très proches de même que leurs ouvertures. Au quatrième point, cette même fissure continue de s'ouvrir fortement, et à nouveau les ouvertures calculées et mesurées sont très proches. Le modèle semble donc ici donner des ordres de grandeurs d'ouvertures de fissures fiables et atteint donc son objectif de prédiction des ouvertures de fissures. Cet essai a donc permis de montrer qu'il est possible d'utiliser des mesures électromagnétiques en tant que paramètres d'entrée au modèle. Il néanmoins été nécessaire d'introduire un défaut de densité volumique de fibres afin de faciliter la localisation. Il serait alors intéressant d'affiner la méthode de mesure afin de vérifier que ce défaut est bel et bien présent dans la poutre.

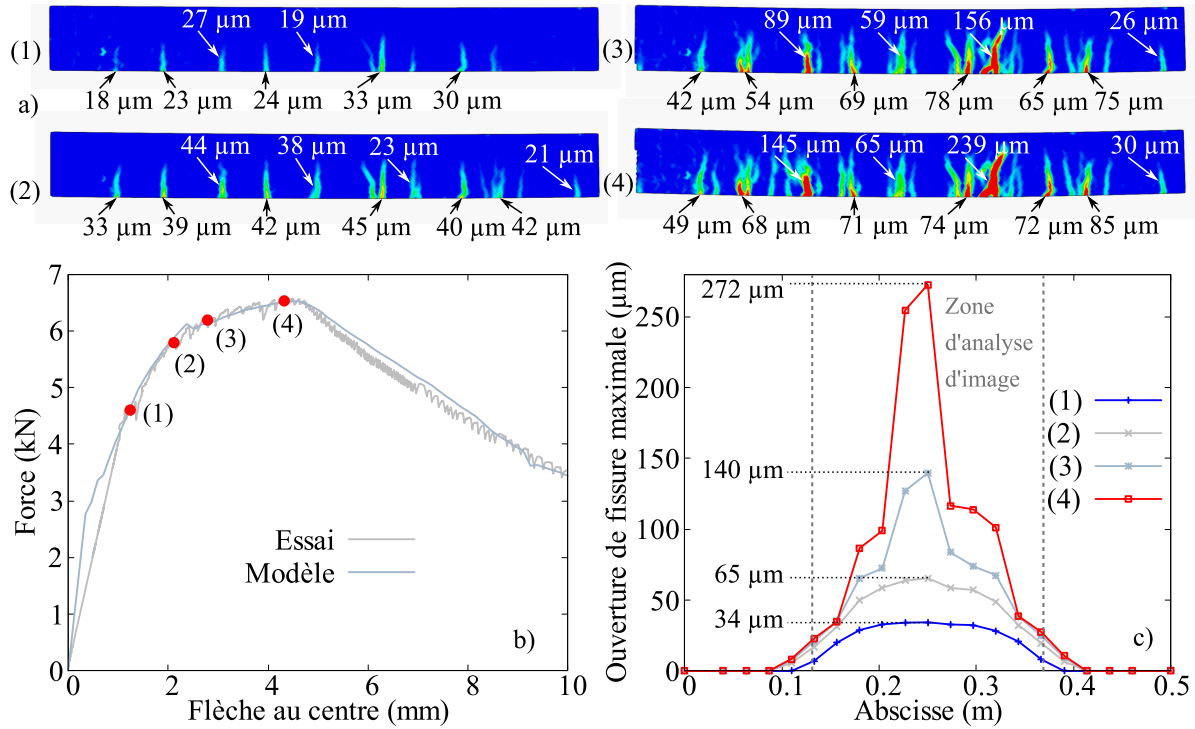


FIGURE 4.21 – a) Champs d’ouvertures de fissures expérimental, b) Points correspondants aux relevés d’ouvertures de fissures, c) ouverture de fissure maximale calculée par le modèle le long de la ligne LI1

## 4.7 Conclusion sur la validation expérimentale

Dans ce chapitre le modèle a été confronté à des données expérimentales mettant chacune à l’épreuve un aspect du modèle. D’abord, la capacité du modèle à reproduire le comportement d’un tirant à partir d’essais d’extraction de fibres a été montrée. Dans le même temps il a été montré que le modèle prenait correctement en compte les variations de densités volumiques de fibres. Puis il a été vu que le modèle pouvait reproduire le comportement d’une structure en flexion à partir de la connaissance de la réponse d’un tirant. La capacité du modèle à fournir un nombre et des ouvertures de fissures cohérentes a également été testée. Puis, il a été montré que la variation des orientations préférentielles de fibres était correctement prise en compte. Enfin, un essai de flexion quatre points avec mesure de champs de densités et d’orientation de fibres a été réalisé. Il a alors été montré la capacité de Cast3m à définir ces grandeurs comme un champ variable sur le maillage, ce qui présente un fort intérêt pour ce type de matériau. Il a été proposé d’utiliser directement les coefficients d’orientations des fibres, issus des

mesures et de la littérature, comme paramètres de l'ellipsoïde d'orientation des fibres. Ce point serait en réalité à approfondir afin de relier de manière fiable les données électromagnétiques mesurées et les paramètres d'orientations. Le modèle a toutefois présenté la capacité de reproduire les résultats expérimentaux en terme de force-flèche, de nombre et d'ouvertures de fissures, ceci permettant ainsi de terminer la validation du modèle.

## Conclusion

L'objectif de ce travail était de formuler et de mettre en œuvre un modèle de comportement mécanique pour des structures en béton fibré à ultra hautes performances dans le code éléments finis Cast3m. Ce modèle se devait de résoudre les problèmes persistants dans les modèles existants, de présenter la capacité de considérer des orientations de fibres anisotropes et de prendre en compte l'ensemble des mécanismes liés à l'extraction de fibres courtes.

L'étude bibliographique a montré que le comportement mécanique des BFUP est régi par le phénomène d'extraction des fibres, qui ont un effet de couture sur les fissures. Le comportement global et local des bétons fibrés est fortement influencé par les orientations préférentielles de fibres. La présence de fibres réparties dans la matrice, peut conférer aux BFUP la capacité de multi-fissurer créant ainsi une phase d'écrouissage positif sur la loi de comportement en traction. Les modèles de la littérature présentent une lacune importante sur ce point, en ne parvenant pas à représenter ce phénomène dans des éléments finis de grandes dimensions. Il a été constaté que le modèle de béton Fluendo3D est un excellent support pour la mise au point d'un modèle de comportement des BFUP, car il présente la capacité de fournir des ouvertures de fissures dans trois directions orthogonales de l'espace, la loi de comportement des BFUP devait donc être exprimée en terme de contrainte-ouverture de fissure.

Le modèle développé se base sur les phénomènes mis en jeu lors de l'extraction de fibres ancrées dans une matrice cimentaire. Cette extraction se décompose en trois phases : élasticité, décollement et arrachement. Le modèle utilise pour les deux premières phases une étude théorique de la littérature décrivant ces aspects, en apportant quelques généralisations. Concernant la phase d'arrachement, une loi de comportement phénoménologique a été développée sur la base d'analyse d'essais de la littérature. Puis, une nouvelle méthode permettant la prise en compte de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction de traction a été présentée. Cette méthode conduit à la loi d'extraction de fibres uniques pour tous les ancrages et inclinaisons possibles. A partir de ce point, les lois d'extraction de fibres ont été généralisées à un ensemble de fibres. Le problème d'ancrage aléatoire de fibres a été résolu de manière classique, en considérant une densité de probabilité d'ancrage uniforme. La capacité à prendre en compte des orientations préférentielles de fibres a été introduite en définissant un ellipsoïde d'orientation des fibres. Cet ellipsoïde est directement paramétrable dans le modèle ce qui procure à l'utilisateur une grande liberté. La sommation des contributions des fibres dans toutes

les directions de l'espace conduit à une loi de comportement donnant la contrainte reprise par les fibres en zone fissurée en fonction de l'ouverture d'une fissure. Enfin, une méthode basée sur la loi d'effet d'échelle de Weibull, et permettant de caractériser la phase de multi-fissuration, a été présentée. Cette méthode conduit à considérer des résistances à la traction du béton différentes pour les différents plans de fissuration potentiels. La loi de comportement des fibres étant dépendante de la résistance à la traction du béton, le modèle présente la capacité de générer des ouvertures de fissures différentes dans un même élément. Il a également été montré que la multi-fissuration des bétons fibrés présente une limite théorique qui est observée expérimentalement.

Chacun des paramètres régissant le comportement du modèle, trouve une origine physique spécifique. Ces paramètres doivent être identifiés par une campagne d'essais expérimentaux qui devrait idéalement être constituée d'essais d'extraction de fibres et d'essais de traction directe. En l'absence de ces essais des paramètres dit usuels pourraient éventuellement être utilisés, pour des matrices et fibres similaires.

Le modèle a été implanté dans le code éléments finis Cast3m. Il utilise pour cela des techniques de réduction de modèle permettant de limiter les temps de calculs. La robustesse du modèle a été mise à l'épreuve par une étude paramétrique montrant l'influence de chaque paramètre sur la loi de comportement calculée. Les détails nécessaires à l'utilisation du modèle ont été mentionnés afin de faciliter sa prise en main par l'utilisateur.

Enfin, une étude permettant de montrer la corrélation entre le modèle et des données expérimentales a été menée. Cette étude montre que le modèle reproduit bien les comportements expérimentaux à l'échelle de la fibre, à celle d'un tirant et à celle d'une poutre, qui sont les trois types d'éléments utilisés pour caractériser le comportement d'un BFUP. Le modèle permet de passer de l'échelle de la fibre à celle du tirant et à celle de la poutre à partir d'un même jeu de paramètres, excluant éventuellement les données liées à l'orientation et aux densités volumiques de fibres qui peuvent varier d'un élément à l'autre. Un essai de flexion quatre points avec mise en place d'une méthode de mesure électromagnétique des densités volumiques et orientations de fibres a été réalisé. Ces méthodes permettent de fournir au modèle des données matériaux sous formes de champs. Le modèle a alors montré la capacité de reproduire le comportement de la poutre à l'échelle globale, en terme de force-flèche, et à l'échelle locale, en terme de fissuration. Les objectifs initiaux ont donc été atteints, en fournissant un outils complexe, autorisant une représentation détaillée du comportement des structures en BFUP.

## Perspectives

Il a été montré la capacité du modèle à reproduire le comportement mécanique d'éléments en béton fibré. Néanmoins, un certain nombre de points pourraient être améliorés et complexifiés.

Premièrement, le modèle ne s'intéresse qu'aux fibres cylindriques et rectilignes sans crochets. La raison est que ce type de fibre est le plus couramment utilisé dans les BFUP. Il pourrait cependant être intéressant d'étendre le modèle à d'autres types de fibre. La prise en compte de fibres à crochets pourrait être faite en se basant sur des modèles développés dans la littérature qui consistent à tenir compte du redressement des zones ondulées des fibres. Cette ajout pourrait être faite de manière simple, en modifiant le sous-programme "prepar.fibre.f" qui est chargé de calculer les courbes force moyenne-ouverture de fissure pour diverses inclinaisons et résistances à la traction du béton.

Un second point qu'il serait intéressant d'étudier concerne l'effet de groupe des fibres. En effet, il est observé que pour les forts dosages en fibres, la contrainte moyenne à l'interface fibre-matrice diminue, ceci étant lié à une interaction entre les fibres qui se trouvent trop proches les unes des autres. Ceci pourrait éventuellement être pris en compte en utilisant un coefficient dépendant de la densité volumique de fibres, et agissant sur les termes adéquats de la loi de comportement d'extraction tels que la contrainte de frottement fibre-matrice.

Un point également important concerne la loi d'effet d'échelle de résistance à la traction utilisée. En effet, le paramètre de Weibull peut être calé à partir d'essais de traction directe ou de flexion. Néanmoins, ce paramètre vise uniquement la résistance du béton. Or lors d'un essai, la présence de fibres pourrait avoir une influence sur la résistance apparente des différents plans de fissuration. En effet, la présence de fibres mal orientées constitue un défaut dans la matrice et pourrait diminuer localement la résistance à la traction du béton fibré, sans que la résistance intrinsèque du béton ait été modifiée. La résistance utilisée pour le calcul de l'écaillage pourrait alors être sous-estimée.

Concernant l'orientation des fibres, il a ici été proposé d'utiliser les grandeurs issues de mesures électromagnétiques en tant que paramètres de l'ellipsoïde d'orientation des fibres. Ces grandeurs proviennent de relations empiriques et il se pourrait qu'il ne soit pas correct d'utiliser les valeurs  $\alpha_{0,X}$  et  $\alpha_{0,Y}$  telles quelles. Il serait donc intéressant d'approfondir le lien entre les grandeurs mesurées et les valeurs

principales de l'ellipsoïde. Afin d'approfondir le sujet, il serait intéressant d'étudier les méthodes numériques permettant d'obtenir des orientations préférentielles de fibres à partir de modèles d'écoulement du béton fibré. Ces méthodes pourraient éventuellement être corrélées aux mesures électromagnétiques et conduiraient peut être à s'affranchir de celles-ci. Ceci permettrait alors d'apporter un aspect prédictif du comportement du matériau avant que la mise en œuvre soit réalisée, ce qui présente un avantage conséquent.

Enfin, il serait intéressant de réaliser des campagnes d'essais expérimentaux afin de corréler les paramètres du modèles à des grandeurs connues liées à la formulation du béton par exemple. Ceci pourrait permettre d'établir une base de donnée pour les différents paramètres du modèle, et de s'affranchir d'essais d'extraction.

# Bibliographie

- [1] Amin Abrishambaf, Mário Pimentel, and Sandra Nunes. Influence of fibre orientation on the tensile behaviour of ultra-high performance fibre reinforced cementitious composites. *Cement and Concrete Research*, 97 :28–40, jul 2017.
- [2] AFGC. Bétons Fibrés à Ultra hautes Performances (BFUP). *Recommandations, Édition révisée*, (June), 2013.
- [3] AFNOR. *Structures en béton - Partie 1-1 : Règles générales et règles NF EN 1992-1-1 Eurocode 2*, volume 1.
- [4] P.C. Aitcin. Cements of yesterday and today : concrete of tomorrow. *Cem. Concr. Res.*, pages 1349–1359, 2000.
- [5] S.A.S. Akers and G.G. Garrett. Observations and predictions of fracture in asbestos-cement composites. *J. Mater. Sci.*, 18(7) :2209–2214, 1983.
- [6] Elsa Nguyen Phuong Amanjean. Développement de BFUP pour la réalisation d’éléments de structure préfabriqués, Thèse LMDC Toulouse, 2012.
- [7] G. Bao and Y. Song. Crack bridging models for fiber composites with slip dependent interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993.
- [8] O. Bayard. *Approche multi-échelles du comportement mécanique des bétons à ultra hautes performances renforcés par des fibres courtes*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, France, 2003.
- [9] Ahsanollah Beglarigale and Yazici Halit. Pull-out behavior of steel fiber embedded in flowable RPC and ordinary mortar. *Construction and Building Materials*, 2014.
- [10] A. Bentur and S. Mindess. Fibre Reinforced cementitious composites. *Elsevier Applied Science*, page 302, 1990.
- [11] A. Bentur, S.T. Wu, N. Banthia, R. Baggot, W. Hansen, A. Katz, C.K.Y. Leung, V.C. Li, B. Mobasher, A.E. Naamann, R. Robertson, P. Soroushian, H. Stang, and L.R. Taerwe. Chapter fiber matrix interfaces. In A.E. Naamann and H.W. Reinhardt, editors, *High performance fiber reinforced cement composites 2.*, pages 180–184. E and F Spon, London, 1996.

- [12] E. Brühwiler. Welcome to the post-concrete era. In *International Interactive Symposium on UHPC*, 2016.
- [13] C.E.A. Cast3M Finite Element Software, <http://www-cast3m.cea.fr>, 2021.
- [14] Shih-Ho Chao, Venkatesh Kaka, Guillermo Palacios, Jinsup Kim, Young-Jae Choi, Parham Aghdasi, Alireza Nojavan, and Arturo Schultz. Seismic behavior of ultra-High-performance fiber-reinforced concrete moment frame members. In *First International Interactive Symposium on UHPC*, pages 1–10, 2016.
- [15] Jean-Phillipe Charron and Sébastien Delsol. Numerical modeling of UHPFRC mechanical behavior based on fiber orientation. *Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete, Marseille*, (1) :679–688, 2013.
- [16] Le Chen, Weiwei Sun, Bingcheng Chen, Ze Shi, Jianzhong Lai, and Jun Feng. Multiscale study of fibre orientation effect on pullout and tensile behavior of steel fibre reinforced concrete. *Construction and Building Materials*, 283, 2021.
- [17] Jeong Il Choi, Seung Yup Jang, Seung Jun Kwon, and Bang Yeon Lee. Tensile behavior and cracking pattern of an ultra-high performance mortar reinforced by polyethylene fiber. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2017.
- [18] H. Cox. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *Br. J. Appl. Phys.*, 3 :72–79, 1952.
- [19] Leal Da Silva, Wilson R., Oldrich Svec, Lars N. Thrane, and Claus Pade. Predicting fibre orientation and its effect on mechanical properties of ultra-High performance steel fibre reinforced self-compacting concrete. *8th International RILEM Symposium on Self-Compacting Concrete*, pages 489–498, 2016.
- [20] Emmanuel Denarié, Lionel Sofia, and Eugen Brühwiler. Characterization of the tensile response of strain hardening uhpfrc - Chillon viaducts. *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, pages 241–250, 2017.
- [21] Fangqian Deng, Xiaoxiao Ding, Yin Chi, Lihua Xu, and Li Wang. The pull-out behavior of straight and hooked-end steel fiber from hybrid fiber reinforced cementitious composite : Experimental study and analytical modelling. *Composite Structures*, 206(June) :693–712, 2018.
- [22] Svatopluk Dobrusky. Uni-axial tensile tests for uhpfrc. In *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, number 1, pages 165–174, 2017.
- [23] Youri Duhamel-labrecque, Luca Sorelli, Julien Réthoré, and Florent Baby. Identification of the tensile law of uhpfrc materials from bending tests by means of digital image correlation. *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, pages 231–240, 2017.

- [24] Alessandro P. Fantilli, Hirozo Mihashi, and Paolo Vallini. Multiple cracking and strain hardening in fiber-reinforced concrete under uniaxial tension. *Cement and Concrete Research*, 39(12) :1217–1229, 2009.
- [25] Alessandro P. Fantilli and Paolo Vallini. A cohesive interface model for the pullout of inclined steel fibers in cementitious matrixes. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 5(2) :247–258, 2007.
- [26] H. R. Gatabi, M. Celikag, and H. A. Bengar. An experimental study on the behavior of fiber-reinforced concrete flexural members under cyclic loading. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 800(1), 2020.
- [27] V.S. Gopalaratman and S.P. Shah. Softening response of plain concrete in direct tension. *ACI Journal*, 82 :310–323, 1985.
- [28] Thomas Guenet. Modélisation du comportement des bétons fibrés à ultra-hautes performances par la micromécanique : effet de l’orientation des fibres à l’échelle de la structure, thèse IFSTTAR Paris, 2016.
- [29] A. M. T. Hassan, S. W. Jones, and G. H. Mahmud. Experimental test methods to determine the uniaxial tensile and compressive behaviour of Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete(UHPFRC). *Construction and Building Materials*, 37 :874–882, 2012.
- [30] A. Hillerborg, M. Modeer, and P. E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6 :773–782, 1976.
- [31] G. Irwin. Analysis of stresses and strains near end of crack traversing plate. *Journal of Applied Mechanics*, pages 361–364, 1957.
- [32] Shannag Jamal, Brincker Rune, and Hansen Will. Pullout behavior of steel fibers from cement-base composites. *Cement and Concrete Research. Vol. 27. No. 6.*, 1997.
- [33] Japan Society of Civil Engineers. Recommendations for Design and Construction of High Performance Fiber Reinforced Cement Composites with Multiple Fine Cracks (HPFRCC ). *Concrete Engineering Series*, 82 :Testing Method 6–10, 2008.
- [34] Tao Ji, Xiaoying Lin, Yongning Liang, Z. Yang, and Baochun Chen. Effect of steel fiber shape on pullout behavior of autoclaved uhpfrc with granite powder. In *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, number 1, pages 29–36, 2017.
- [35] Tetsushi Kanda and Victor C. Li. Multiple cracking sequence and saturation in fiber reinforced cementitious composites. *Concrete Research and Technology*, 9(2) :19–33, 1998.

- [36] A Katz. Effect of fiber modulus of elasticity on the long term properties of micro-fiber reinforced cementitious composites. *Cement and Concrete Composites*, 18(6) :389–399, 1995.
- [37] Amjad Khabaz. Monitoring of impact of hooked ends on mechanical behavior of steel fiber in concrete. *Construction and Building Materials*, 113 :857–863, 2016.
- [38] S. W. Kim, S. T. Kang, J. J. Park, and G. S. Ryu. Effect of filling method on fibre orientation and dispersion and mechanical properties of UHPC. In *2nd Int. Symp. on Ultra High Performance Concrete. Kassel, Germany : Kassel University Press.*, 2008.
- [39] Alain Geoffré Kooiman. *Modelling steel fibre reinforced concrete for structural design*. PhD thesis, Université de technologie de Delft, 2000.
- [40] H Krenchel. Fibre reinforcement. In *Akademisk Copenhagen*, 1964.
- [41] H. Krenchel. Fibre spacing and specific fibre surface. In *Neville, A., éditeur : Fibre Reinforced Cement and Concrete. Proc. RILEM Conf., The Construction Press.*, 1975.
- [42] Andreas P. Lampropoulos and Spyridon A. Paschalis. Ultra-High-Performance Fiber-Reinforced Concrete under cyclic loading. *ACI Materials Journal*, 113(4), 2016.
- [43] F. Laranjeira, A. Aguado, and C. Molins. Predicting the pullout response of inclined straight steel fibers. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 43(6) :875–895, 2010.
- [44] Yun Lee, Su-tae Kang, and Jin-keun Kim. Pullout behavior of inclined steel fiber in an ultra-high strength cementitious matrix. *Construction and Building Materials*, 24(10) :2030–2041, 2010.
- [45] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [46] Christopher K. Y. Leung and Nathan Shapiro. Optimal steel fiber strength for reinforcement of cementitious materials. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 1(May) :3465–3468, 1999.
- [47] V. C. Li. Micromechanics of crack bridging in fibre-reinforced concrete. *Materials and Structures*, 26 :486–494, 1993.
- [48] V.C. Li and C. K. Y. Leung. Steady-State and Multiple Cracking of Short Random Fiber Composites. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 188 :2246–2264, 1992.
- [49] V.C. Li, C. Wu, S. Wang, A. Ogawa, and T. Saito. Interface tailoring for strain-hardening polyvinyl alcohol-engineered cementitious composite (PVA-ECC). *ACI Mater.*, 99(2) :463–472, 2002.

- [50] Victor C Li, Youjiang Wang, and Stanley Backer. A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(5) :607–625, 1991.
- [51] Zhong Lin and Victor C. Li. Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(5) :763–787, 1997.
- [52] Ingemar Löfgren. Fibre-reinforced Concrete for Industrial Construction - a fracture mechanics approach to material testing and structural analysis, 2005.
- [53] J. M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1) :289–314, 1996.
- [54] Y.L. Mobasher, B.Cheng. Modelling of stiffness degradation of the interfacial zone during fiber debonding. *Journal of composite Engineering*, 1995.
- [55] N. Moës. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7) :813–833, 2002.
- [56] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, pages 571–574, 1973.
- [57] A.E. Naaman. High performance fiber reinforced cement composites, in : C. Shi, Y.L. Mo (Eds.). *High-performance Construction Materials : Science and Applications*, pages 91–153, 2008.
- [58] S.P. Naaman, A.E., Shah. Pull-out mechanism in steel fiber-reinforced concrete. *ASCE*, 102 :1537–1548, 1976.
- [59] George Nammur, Antoine E. Naaman, and Samuel K Clark. Analytical prediction of the pull-out behavior of steel fibers in cementitious matrices. *MRS Online Proceedings Library*, 114 :217–224, 1987.
- [60] NFP 18-470. Bétons fibrés à Ultra Hautes Performances - Spécification, performance, production et conformité. 2017.
- [61] NFP 18-710. Complément national à l’Eurocode 2 — Calcul des structures en béton : règles spécifiques pour les Bétons Fibrés à Ultra-Hautes Performances (BFUP). 2016.
- [62] Duy Liem Nguyen and Dong Joo Kim. Sensitivity of various steel-Fiber types to compressive behavior of ultra - high - performance fiber - reinforced concretes. *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, pages 45–52, 2017.
- [63] S. Nunes and M. Pimentel. Characterization and comparison of two magnetic probes. Technical report, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, 2016.

- [64] S. Nunes, M. Pimentel, F. Ribeiro, P. Milheiro-Oliveira, and Adriano Carvalho. Estimation of the tensile strength of UHPFRC layers based on non-destructive assessment of the fibre content and orientation. *Cement and Concrete Composites*, 83 :222–238, 2017.
- [65] S. Okamoto, S. Shiomi, and K. Yamabe. Earthquake resistance of prestressed concrete structures. In *Proc. Annual. Convention AIJ*, pages 1251–1252, 1976.
- [66] R. H. J. Peerling, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, and De Vree J.H.P. Quasi-brittle materials. *International journal for numerical methods in engineering*, 39 :3391–3403, 1996.
- [67] S. Piotrowski and M. Schmidt. Life cycle cost analysis of a UHPC-bridge on example of two bridge refurbishment designs, in UHPC. pages 957–964, Kassel, 2012.
- [68] K. Rajagopalab and V.S. Parameswaran. A study on the mechanics of fibre debonding in concrete with micro-reinforcement. *Matériaux et constructions*, 8(46) :305–314, 1975.
- [69] Norbert Randl and T. Mészöly. Derivation of constitutive law for uhpfr using dic. *AFGC-ACI-fib-RILEM Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete*, pages 221–230, 2017.
- [70] Pierre Rossi, Antonio Arca, Edouard Parant, and Patricia Fakhri. Bending and compressive behaviours of a new cement composite. *Cement and Concrete Research*, 35(1) :27–33, 2005.
- [71] A. Sellier. Model FLUENDO3D Version 23-C for CASTEM 2017 Anisotropic damage and visco-elasto-plasticity applied to reinforced multiphasic materials. Technical report, LMDC, 2018.
- [72] A. Sellier, G. Casaux-Ginestet, L. Buffo-Lacarrière, and X. Bourbon. Orthotropic damage coupled with localised crack reclosure processing. Part I : Constitutive Laws. *Engineering Fracture Mechanics*, 97(1)(January) :148–167, oct 2013.
- [73] A. Sellier, G. Casaux-Ginestet, L. Buffo-Lacarrière, and X. Bourbon. Orthotropic damage coupled with localized crack reclosure processing. Part II : Applications. *Engineering Fracture Mechanics*, 97(1)(January) :168–185, oct 2013.
- [74] Alain Sellier and Alain Millard. WL2 , une méthode pour considérer l’effet d’échelle probabiliste dans les modèles de fissuration. In *31ème rencontres nationales de l’AUGC -29-31 mai*, volume c, pages 1–10, Cachan, 2013.
- [75] Alain Sellier and Alain Millard. Weakest link and localisation WL 2 : a method to conciliate probabilistic and energetic scale effects in numerical models. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 18(10) :1177–1191, 2014.

- [76] Xiujiang Shen and Eugen Brühwiler. Characterization of tensile behaviour in UHPFRC thin slab using NDT method and DIC system. *Materials Science*, 2018.
- [77] L. Sorelli, F. Ulm, and F. Toutlemonde. Fracture stability and micromechanics of strain hardening cementitious composites. In *6th Int. Conf. on Fracture Mechanics of concrete structures (FRAMCOS) Catania, Italy*, pages 1403–1412, 2003.
- [78] P. Soroushian and C.D. Lee. Distribution and orientation of fibres in SFRC. *ACI materials journal*, pages 433–439, 1990.
- [79] Manuel Tarifa, Elisa Poveda, Vítor M .C. F. Cunha, and Joaquim A. O. Barros. Effect of the displacement rate and inclination angle in steel fiber pullout tests. *International Journal of Fracture*, 223(1) :109–122, 2020.
- [80] Murat Tuyan and Halit Yazici. Pull-out behavior of single steel fiber from SIFCON matrix. *Construction and Building Materials*, 35 :571–577, 2012.
- [81] Y. Wang, S. Backer, and V. C. Li. A statistical tensile model of fibre reinforced cementitious composites. *Composites*, 20(3) :265–274, 1989.
- [82] Y. Wang, V.C. Li, and S. Backer. Modelling of fibre pull-out from cement matrix. *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, 10(3) :143–150, 1988.
- [83] W. Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics – ASME*, 18 :12–23, 1951.
- [84] Kay Wille and Antoine E. Naaman. Pullout behavior of high-strength steel fibers embedded in ultra-high-performance concrete. *ACI Materials Journal*, 109(4) :479–488, 2012.
- [85] Kay Wille and Antoine E. Naaman. Effect of ultra-high-performance concrete on pullout behavior of high-strength brass-coated straight steel fibers. *ACI Materials Journal*, 110(4) :451–461, 2013.
- [86] Kay Wille, Antoine E. Naaman, Sherif El-Tawil, and Gustavo J. Parra-Montesinos. Ultra-high performance concrete and fiber reinforced concrete : Achieving strength and ductility without heat curing. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 45(3) :309–324, 2012.
- [87] H.C. Wu and V.C. Li. Stochastic process of multiple cracking in discontinuous random fiber reinforced brittle matrix composites. *International journal of damage mechanics*, 4 :83–102, 1995.
- [88] John Wuest. Comportement structural des bétons de fibres ultra performants en traction dans des éléments composés, thèse EPFL, 2007.
- [89] En Hua Yang, Shuxin Wang, Yingzi Yang, and Victor C. Li. Fiber-bridging constitutive law of engineered cementitious composites. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 6(1) :181–193, 2008.

- [90] Yin-Wen Chan and Victor C. Li. Effects of transition zone densification on fiber/-cement paste bond strength improvement. *Advanced Civil Engineering Materials Research Laboratory*, 1997.
- [91] M .Sc Yijian Zhan. *Multilevel Modeling of Fiber-Reinforced Concrete and Application to Numerical Simulations of Tunnel Lining Segments*. PhD thesis, Ruhr University Bochum, 2016.
- [92] Y. Zhan and G. Meschke. Analytical model for the pullout behavior of straight and hooked-end steel fibers. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(12) :04014091, 2014.
- [93] Xuan Zheng, Jun Zhang, and Zhenbo Wang. Effect of multiple matrix cracking on crack bridging of fiber reinforced engineered cementitious composite. *Journal of Composite Materials*, 54(26) :3949–3965, 2020.
- [94] Bo Zhou and Yuichiu Chida. Fiber orientation in ultra high performance fiber reinforced concrete and its visualization. *VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-8*, 2013.