



**HAL**  
open science

# Optique géométrique multiphasée pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation

Corentin Kilque

► **To cite this version:**

Corentin Kilque. Optique géométrique multiphasée pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2022. Français. NNT : 2022TOU30119 . tel-03890355

**HAL Id: tel-03890355**

**<https://theses.hal.science/tel-03890355>**

Submitted on 8 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *12 juillet 2022* par :

**Corentin Kilque**

**Optique géométrique multiphasée pour les systèmes hyperboliques de lois  
de conservation**

---

---

## JURY

CHRISTOPHE CHEVERRY  
ANNE-LAURE DALIBARD  
FRANCK BOYER  
GUI-QIANG G. CHEN  
DAVID LANNES  
JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL

Université de Rennes 1  
Sorbonne Université  
Université Paul Sabatier  
University of Oxford  
CNRS  
CNRS

Rapporteur  
Rapporteure  
Président du Jury  
Membre du Jury  
Membre du Jury  
Directeur de thèse

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*

**Directeur de Thèse :**

*Jean-François Coulombel*

**Rapporteurs :**

*Christophe Cheverry et Anne-Laure Dalibard*





# THESIS

In order to become

**DOCTOR FROM UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Issued by : *Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Defended on *12th July 2022* by:

**Corentin Kilque**

**Multiphase geometric optics for hyperbolic systems of conservation laws**

---

---

## COMMITTEE

CHRISTOPHE CHEVERRY  
ANNE-LAURE DALIBARD  
FRANCK BOYER  
GUI-QIANG G. CHEN  
DAVID LANNES  
JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL

Université de Rennes 1  
Sorbonne Université  
Université Paul Sabatier  
University of Oxford  
CNRS  
CNRS

Referee  
Referee  
Committee President  
Examiner  
Examiner  
Supervisor

---

### Doctoral school and academic field:

*MITT: Mathematics academic field: Applied Mathematics*

### Research Unit:

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*

### Supervisor:

*Jean-François Coulombel*

### Referees:

*Christophe Cheverry and Anne-Laure Dalibard*



*À ma sœur,  
à mes parents,  
aux autres phares dans la tempête,  
et à ceux qui ne brillent plus.*



**OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE MULTIPHASÉE POUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES DE LOIS DE CONSERVATION**
**Résumé**

Cette thèse porte sur des développements d'optique géométrique multiphasée, pour des problèmes aux limites hyperboliques et quasi-linéaires, c'est-à-dire des développements asymptotiques de solutions approchées de ces systèmes, pour lesquels le terme de bord oscille à une fréquence élevée suivant plusieurs phases planes au bord. On se place dans un cadre faiblement non-linéaire, c'est-à-dire que le terme de bord est d'ordre  $O(\varepsilon)$  quand les fréquences sont d'ordre  $O(1/\varepsilon)$ .

Dans une première partie, on s'intéresse à un problème aux limites satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, et l'on construit pour ce problème le premier terme d'un développement BKW pour la solution approchée. La multiplicité des fréquences au bord engendre, à l'intérieur du domaine, un nombre infini dénombrable de fréquences, nous contraignant à utiliser un cadre de fonctions presque-périodiques, ici au sens de Bohr. La principale difficulté de ce travail réside dans le défaut de symétrie dans le système vérifié par le profil principal, et l'occurrence d'une infinité de résonances (à l'inverse du cas d'une seule phase étudié précédemment). Le profil principal est alors obtenu comme la solution d'un problème quasi-linéaire, qui est résolu à l'aide d'estimations a priori sans perte de dérivée. Les hypothèses de cette partie sont illustrées avec l'exemple des équations d'Euler compressibles isentropiques en dimension deux d'espace. La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'instabilité de développements d'optique géométrique pour des problèmes aux limites faiblement stables, où le terme de forçage au bord subit une perturbation de petite amplitude, oscillant suivant une fréquence transversale. Puisque les fréquences au bord appartenant au lieu d'annulation du déterminant de Lopatinskii, les amplifications au bord donnent lieu à un système hautement couplé d'équations pour les profils. Un modèle jouet de ce système est résolu dans un cadre de fonctions analytiques, à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevskaya, et d'une version de celui-ci assurant l'analyticité en temps et en espace. On montre ensuite que, à travers les résonances et les amplifications, une configuration particulière de fréquences au bord peut donner lieu à une instabilité, c'est-à-dire que la petite perturbation au bord peut intervenir à l'ordre principal dans le développement asymptotique. On étudie enfin la possibilité qu'une telle configuration de fréquences au bord existe pour l'exemple des équations d'Euler compressibles isentropiques en dimension trois d'espace.

**Mots clés :** optique géométrique, systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles, problèmes aux limites, limite haute fréquence, fonctions analytiques, condition au bord, instabilité.

---

**MULTIPHASE GEOMETRIC OPTICS FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS**
**Abstract**

This thesis deals with multiphase geometric optics expansions, for hyperbolic quasilinear boundary value problems, that is, asymptotic expansions of approximate solutions for these systems, for which the forcing boundary term oscillate at high frequency with multiple planar phases on the boundary. The framework is weakly nonlinear, namely the boundary term is of order  $O(\varepsilon)$ , when the frequencies are of order  $O(1/\varepsilon)$ . In a first part, interest is made on a boundary value problem satisfying the uniform Kreiss-Lopatinskii condition, and the first term of a WKB expansion is constructed for this problem. The multiple frequencies on the boundary generate a countable infinite number of phases inside the domain, and we therefore use an almost periodic functional framework, here in the sense of Bohr. The major difficulties of this work are the lack of symmetry in the leading profile equation and the occurrence of infinitely many resonances (opposite to the simple phase case studied earlier). The leading profile is constructed as the solution of a quasilinear problem, which is solved using a priori estimates without loss of derivatives. The assumptions of this work are illustrated with the example of isentropic Euler equations in space dimension two.

The second part is devoted to the study of instabilities for geometric optics expansions of weakly stable problems, where the forcing boundary term is perturbed by a small amplitude oscillating function, of transverse frequency. Since the boundary frequencies lie in the locus where the Lopatinskii determinant is zero, the amplifications on the boundary give rise to a highly coupled system of equations for the profiles. A toy model of this system is solved in an analytical framework, using the Cauchy-Kovalevskaya theorem as well as a version of it ensuring analyticity in space and time for the solution. Then it is proven that, through resonances and amplification, a particular configuration for the phases may create an instability, in the sense that the small perturbation on the boundary may interfere at the leading order in the asymptotic expansion. Finally we study the possibility for such a configuration of frequencies to happen for the isentropic Euler equations in space dimension three.

**Keywords:** geometric optics, hyperbolic systems of partial differential equations, boundary value problems, high frequency asymptotic, analytic functions, boundary conditions, instability.





# Remerciements

J'adresse tout d'abord ma plus vive gratitude à Jean-François Coulombel, qui m'a encadré durant ces trois années de thèse. Gratitude d'abord pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et l'avoir adapté à mes attentes, mais surtout pour s'être grandement investi depuis pour m'apprendre le métier de chercheur, et pour me guider avec rigueur dans cet apprentissage mathématique. Il a su, avec beaucoup d'humanité, d'exigence et de patience, me mener à ce point final, et ses qualités humaines et scientifiques ont fait que l'expérience de la thèse a été pour moi très enrichissante. Je suis très reconnaissant de tout ce que j'ai pu apprendre de lui durant ces trois années, et pour m'avoir offert ses nombreuses idées, à l'origine de ces travaux.

Je suis honoré que Christophe Cheverry et Anne-Laure Dalibard aient accepté la lourde tâche de lire et d'évaluer ce travail, et je tiens également à remercier chaleureusement Franck Boyer, Gui-Qiang G. Chen et David Lannes, d'avoir accepté de compléter le jury et de donner de leur temps pour évaluer la soutenance.

Il me faut également remercier le personnel administratif et d'entretien du laboratoire, ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai pu travailler pendant ce passage à l'IMT.

Ces trois années de thèse ont été une aventure scientifique, mais aussi personnelle, et ce grâce aux doctorant.e.s du laboratoire, qui m'ont, chacun.e à leur manière, offert des moments de répit ou de joie, et un soutien plus que bienvenu. J'ai même vécu avec certain.e.s des aventures fortes, au sommet de montagnes, sur des plages ensoleillées, dans des villes inconnues, devant des grands écrans, au cœur de la nuit, autour d'un verre ou d'une pizza, à pieds, à vélo<sup>1</sup> ou en dansant. J'ai la grande chance d'avoir passé tous ces moments à leurs côtés, moments qui m'ont fait vivre et grandir. Je suis infiniment reconnaissant pour les rires, les discussions, les réflexions que l'on a partagés, l'énergie qu'ils et elles m'ont donnée, leur soutien déterminant dans les moments difficiles, et simplement pour avoir partagé avec moi leur humour, leur intelligence, leur gentillesse. J'adresse donc mes plus affectueux remerciements<sup>2</sup> à Alain, le mec bête le plus sympa que je connaisse; Javi, qui met de la *fantasie* dans la vie; Louis<sup>3</sup>, pour son humour et son entrain; Paola, avec qui on ne s'ennuie jamais; Perla, rayon de soleil dans la nuit; Alberto, Armand, Clément B, Clément C, Fanny, Fu-Hsuan, Lucas, Virgile, Viviana, aventurier.e.s de la nuit, avec qui l'on a vaillamment affronté l'isolement social; Alexandre, Anthony, et Nicolas, compagnons de tarot et de Biergarten; Alejandro, Anthony Mur, Benjamin, Clément G, Clément S, Denis, Diego, Étienne, Eva, Florian, Joachim B, Joachim C, Joe, Laëtitia, Lucas C, Mahmoud, Mathias, Maxence, Maxime, Mehdi, Michelle, Mitja, Nicolas O, Solène, Sophia, William, et tant d'autres, pour les piques-niques, les jeux, et tous les autres moments partagés!

La vie ne se résumant pas au laboratoire, des ami.e.s d'autres horizons m'ont, de près ou de loin, soutenu par leur présence durant ces trois années. Ils et elles aussi sont rempli.e.s des qualités déjà évoquées, et les moments, trop peu nombreux, que j'ai pu passer à leur côté, intermédiaires revigorants, m'ont toujours relancé dans ce marathon toulousain. Je remercie donc très chaleureusement Michel, pour nos échanges passionnants, drôles et inspirants; Rudy, parce

---

1. Vélo qui, malgré ses roulements abîmés et sa peinture rouillée, m'a fidèlement accompagné dans chacune de mes expéditions toulousaines.

2. Par ordre plus ou moins alphabétique.

3. Et Anaëlle évidemment!

que la contradiction a du bon, et pour les découvertes parisiennes ; Émeric et Lucien, pour les week-ends de jeux et de visites *culturelles* ; Hélène et Marie, avec qui on ne compte plus les années, pour les rires, le soleil et les jeux ; Vincent, compagnon du début de cette aventure, qui a été d'un profond soutien, pour tous les moments partagés ; Clotilde, Gwen et Lou, et nos retrouvailles niortaises nostalgiques ; Adèle, Aurélien, Gauthier, Sébastien et Tiphaine, et nos trop courtes entrevues parisiennes.

Ils sont là depuis le début (ou presque), et m'ont toujours soutenu, financièrement, moralement, dans mes choix, jusqu'à cette folle idée de faire une thèse en maths. Ils m'ont plus généralement accompagné dans la vie, pour me lancer avec douceur dans le tumulte qu'elle représente, fort des armes qu'ils m'ont donné. J'ai donc la plus profonde reconnaissance pour ma famille. Mes grands-parents, du Sud et du Nord, pour leur soutien à distance, et les parenthèses reposantes qu'ils m'ont offertes ; Gwen, pour les vacances et autres aventures, et sa présence égayante dans tous les bons moments ; mes parents, chez qui il fait bon se ressourcer à la campagne, pour leur tolérance et leur soutien sans faille depuis toutes ces années ; et Morgane, phare dans la tempête s'il en est, à l'écoute toujours précieuse, et qui me rend fier chaque jour qui passe.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ix</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte général, motivations et résultats . . . . .	1
1.1.1 Systèmes de lois de conservation . . . . .	1
1.1.2 Problèmes aux limites . . . . .	3
1.1.3 Asymptotique haute fréquence et optique géométrique . . . . .	3
1.1.4 Résultats . . . . .	4
1.2 Problème de Cauchy linéaire et développements asymptotiques . . . . .	5
1.2.1 Caractère bien posé et hypothèse d'hyperbolicité . . . . .	5
1.2.2 Développement d'optique géométrique . . . . .	7
1.3 Problèmes aux limites et conditions de bord . . . . .	11
1.3.1 Nombre de conditions au bord . . . . .	11
1.3.2 Analyse des modes normaux . . . . .	12
1.3.3 Description des sous-espaces stables . . . . .	15
1.4 Optique géométrique multiphasée et cadre fonctionnel . . . . .	20
1.4.1 Cas non-linéaire monophasé : fonctions quasi-périodiques . . . . .	21
1.4.2 Cas semi-linéaire multiphasé : algèbres de Wiener . . . . .	25
1.4.3 Problème de Cauchy quasi-linéaire multiphasé : fonctions presque-périodiques au sens de Bohr . . . . .	27
1.4.4 Adaptation aux problèmes aux limites quasi-linéaires multiphasés . . . . .	30
1.5 Résolution d'EDP dans des espaces analytiques : théorèmes de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	32
1.5.1 Théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique . . . . .	32
1.5.2 Analyticité en temps dans le théorème de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	35
1.6 Organisation du manuscrit . . . . .	38
<b>2 Construction et justification d'un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites linéaire</b>	<b>41</b>
2.1 Notations et hypothèses . . . . .	42
2.2 Ansatz et résultat principal . . . . .	45
2.3 Détermination des équations . . . . .	46
2.4 Résolution des équations . . . . .	48
2.4.1 Résolution des équations pour le profil principal . . . . .	48
2.4.2 Résolution des équations du premier correcteur . . . . .	49

2.4.3	Profils d'ordre supérieur et résultat . . . . .	51
2.5	Justification du développement d'optique géométrique . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Développement d'optique géométrique multiphasée pour un problème aux limites semi-linéaire</b>	<b>53</b>
3.1	Notations et hypothèses . . . . .	54
3.1.1	Stricte hyperbolicité . . . . .	54
3.1.2	Condition de Lopatinskii uniforme . . . . .	55
3.1.3	Cadre fonctionnel . . . . .	57
3.2	Ansatz et équations de profil . . . . .	59
3.2.1	Position du problème . . . . .	59
3.2.2	Obtention des équations de profil . . . . .	60
3.2.3	Résultat principal . . . . .	62
3.3	Résolution des équations de profil . . . . .	62
3.3.1	Résultats sur les espaces fonctionnels . . . . .	62
3.3.2	Résolution des équation associées à chaque mode . . . . .	64
3.3.3	Existence d'un profil linéaire . . . . .	66
3.3.4	Existence d'un profil semi-linéaire . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Existence d'un développement d'optique géométrique multiphasée pour des problèmes aux limites hyperboliques quasi-linéaires</b>	<b>73</b>
4.1	Notations et hypothèses . . . . .	76
4.1.1	Position du problème . . . . .	76
4.1.2	Stricte hyperbolicité . . . . .	78
4.1.3	Condition de Lopatinskii uniforme et quelques résultats préliminaires . . . . .	81
4.2	Cadre fonctionnel . . . . .	98
4.2.1	Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine . . . . .	98
4.2.2	Espaces de profils . . . . .	104
4.2.3	Produits scalaires sur l'espace des profils oscillants . . . . .	105
4.3	Ansatz et résultat principal . . . . .	107
4.4	Étude BKW formelle . . . . .	108
4.4.1	Cascade d'équations pour les profils . . . . .	108
4.4.2	Résolution du problème rapide $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})U = H$ . . . . .	110
4.4.3	Système d'équations vérifié par le profil principal . . . . .	113
4.5	Construction du profil principal . . . . .	113
4.5.1	Coefficient de résonance et hypothèse supplémentaire . . . . .	114
4.5.2	Définition rigoureuse des projecteurs $\mathbf{E}$ , $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ . . . . .	120
4.5.3	Réduction du système . . . . .	128
4.5.4	Estimation a priori du système linéarisé pour la partie oscillante résonante . . . . .	140
4.5.5	Estimation a priori sur les équations de Burgers linéarisées . . . . .	149
4.5.6	Construction d'une solution . . . . .	151
4.5.7	Conclusion et perspectives . . . . .	157
4.A	Appendices . . . . .	158
4.A.1	Fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach . . . . .	158
4.A.2	Exemple d'un système engendrant une infinité de fréquences sortantes . . . . .	161
4.A.3	Détails de certains calculs . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Transverse instability of high frequency weakly stable quasilinear boundary value problems</b>	<b>165</b>
5.1	Notation and assumptions . . . . .	168
5.1.1	Position of the problem . . . . .	168
5.1.2	Weak Kreiss-Lopatinskii condition . . . . .	170

---

5.1.3	Oscillations . . . . .	171
5.2	Derivation of the system . . . . .	179
5.2.1	Ansatz and WKB cascade . . . . .	179
5.2.2	Rewriting the equations: leading profile and first corrector . . . . .	181
5.2.3	General system . . . . .	197
5.3	Existence of an analytic solution . . . . .	200
5.3.1	First toy model . . . . .	201
5.3.2	Functional framework . . . . .	203
5.3.3	A Cauchy-Kovalevskaya theorem for boundary equations . . . . .	208
5.3.4	Second toy model . . . . .	210
5.3.5	Additional functional framework . . . . .	211
5.3.6	Time analyticity on the boundary and Cauchy-Kovalevskaya theorem for incoming equations . . . . .	218
5.4	Instability . . . . .	226
5.4.1	Linearization around a particular solution . . . . .	226
5.4.2	Instability on toy models . . . . .	228
5.5	The example of gas dynamics . . . . .	237
	<b>Conclusion</b>	<b>243</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>245</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>249</b>



# Notations

## Constantes

- $d$  dimension d'espace.
- $N$  dimension du système.
- $m$  nombre de fréquences au bord.
- $\varepsilon$  longueur d'onde du problème.
- $A_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , coefficients matriciels du système (peuvent dépendre de l'inconnue).
- $B$  matrice de la condition de bord.
- $M$  nombre de conditions de bord (Chapitres 2, 3, 4), ordre de la perturbation (Chapitre 5).
- $p$  valeurs propres strictement positives de  $A_d(0)$  et dimension du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ .

## Vecteurs, matrices

- $\mathcal{M}_n(K)$  espace des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans le corps  $K$ .
- $\mathcal{M}_{k \times n}(K)$  espace des matrices de  $k$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans le corps  $K$ .
- $u \cdot v$  produit scalaire des vecteurs  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $v = (v_1, \dots, v_n) : u \cdot v := \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .
- $u \otimes v$  produit tensoriel des vecteurs  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $v = (v_1, \dots, v_n) : u \otimes v := (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $|\cdot|$  module sur  $\mathbb{C}$ , ou norme hermitienne de  $\mathbb{C}^n : |u| := \sum_{i=1}^n |u_i|$ .
- $A^*$  matrice conjuguée de  $A$ .
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  matrice diagonale de coefficients  $a_1, \dots, a_n$ .
- $\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$  matrice diagonale par blocs, donnés par  $A_1, \dots, A_n$ .
- $B|_E$  matrice dans la base canonique de la restriction à  $E$  de la fonction associée à  $B$  dans la base canonique.

## Variables, espaces de variables

- $\mathbb{T}^d$  tore de dimension  $d$ .
- $T$  temps d'existence de la solution.
- $t$  variable de temps.
- $\Omega_T$  espace global des variables.
- $z$  variable globale
- $x = (x_1, \dots, x_d)$  variable d'espace.
- $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$  variable d'espace tangentielle.
- $x_d$  variable d'espace normale.
- $\omega_T$  bord de l'espace global.
- $z'$  variable de bord.
- $\mathcal{O}$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , espace d'arrivée.
- $\theta$  variable rapide tangentielle.
- $\psi_d$  ( $\chi_d$  au Chapitre 5) variable rapide normale.



## Fonctions

- $u^\varepsilon$  inconnue du problème.
- $g^\varepsilon$  terme de forçage au bord.
- $G$  profil au bord.
- $f(u, v)$  fonction polynomiale.
- $u^{\varepsilon, \text{app}}$  série formelle, solution approchée.
- $U, U^{\text{osc}}, U^{\text{ev}}, U_k, U_k^{\text{osc}}, U_k^{\text{ev}}$  profils du développement asymptotique.
- $U^*$  moyenne de  $U$ .
- $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}, \xi}, \sigma_{\zeta, j, \lambda}^n$  fonction scalaire associée à un mode.
- $a_{\zeta, \lambda}^n$  fonction scalaire de bord.
- $\delta_a^b$  fonction delta, valant 1 si  $a = b$  et 0 sinon.
- $\mathbb{1}_P$  fonction indicatrice, vaut 1 si  $P$  est vérifiée, et 0 sinon.
- $\chi$  fonction réelle d'une variable réelle, infiniment dérivable à support compact.

## Fréquences, résonances

- $\Xi, \Xi_0, \Sigma, \Sigma_0$  espaces de fréquences.
- $\Upsilon$  lieu de mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii.
- $\alpha$  fréquence intérieure, duale de  $z$ .
- $\tau, \eta, \xi$  variables duales de  $t, y, x_d$ .
- $\zeta$  fréquence au bord, duale de  $z'$ .
- $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  fréquences au bord.
- $\varphi, \psi$  fréquences au bord du Chapitre 5.
- $\boldsymbol{\eta}$  vecteur des fréquences  $\eta_1, \dots, \eta_m$ .
- $\boldsymbol{\zeta}$  vecteur des fréquences au bord  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ .
- $\mathbf{n}$  vecteur de  $\mathbb{Z}^m$ , paramètre des fréquences au bord.
- $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  ensemble d'indices de  $\mathbb{Z}^m$ .
- $\mathcal{F}_b, \mathcal{F}$  ensembles de fréquences au bord, à l'intérieur.
- $\Gamma((\mathbf{n}, \xi), (\mathbf{n}', \xi'))$  coefficients de résonance.
- $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi), \mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi), \mathcal{R}(\zeta, j)$  ensembles de résonance.

## Opérateurs différentiels, symboles, autres opérateurs

- $\partial_t^k, \partial_{x_i}^k$  dérivée partielle d'ordre  $k$  par rapport au temps  $t$ , à  $x_i$ .
- $\nabla_x$  opérateur gradient défini par  $\nabla_x := (\partial_{x_i})_{1 \leq i \leq d}$ .
- $v \cdot \nabla_x$  défini comme  $\sum_{i=1}^d v_i \partial_{x_i}$ .
- $\mathbf{v}_\alpha$  vitesse de groupe associée à  $\alpha$ .
- $X_\alpha$  champ de vecteur associé à  $\alpha$ .
- $L(\partial), L(\partial_z), L(u, \partial_z), L(0, \partial_z)$  opérateurs différentiels des systèmes principaux.
- $L(\alpha), L(0, \alpha)$  symboles associés aux opérateurs  $L(\partial_z), L(0, \partial_z)$ .
- $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d}), \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}), \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d})$  opérateurs différentiels rapides.
- $\mathcal{M}(\cdot, \cdot)$  opérateur différentiel rapide quadratique.
- $\widehat{f}$  transformée de Fourier de  $f$ , définie par  $\widehat{f}(\xi) := \int f(x) e^{ix \cdot \xi} dx$ .
- $f^\wedge$  transformée de Fourier partielle de  $f$ .
- $\langle \cdot \rangle$  crochet japonais défini par  $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}$ .

## Espaces fonctionnels, opérateurs sur les espaces fonctionnels

- $\mathcal{C}^k(X)$  espace des fonctions dont la dérivée  $k$ -ème est continue.
- $\mathcal{C}^\infty(X)$  espace des fonctions dont les dérivées à tout ordre sont continues.
- $\mathcal{C}_b(X)$  espace des fonctions continues et bornées.
- $\mathcal{C}_0^\infty(X)$  espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.
- $L^p(X)$  espace de Lebesgue des fonctions  $p$ -intégrables.
- $L^\infty(X)$  espace de Lebesgue des fonctions bornées presque partout.
- $H^s(X)$  espace de Sobolev de régularité  $s$ .
- $H^\infty(X)$  espace de Sobolev de régularité infinie.
- $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}, \mathcal{F}_{m,s,\gamma}, F_{\infty,m,s,\gamma}, F_{m,s,\gamma}$  espaces de fonctions de  $\Omega_T$  et  $\omega_T$ .
- $\mathbb{A}_\theta(B)$  espace des algèbres de Wiener.
- $\mathcal{P}^{\text{osc}}, \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}, \mathcal{P}_T^{\text{osc}}$  espaces des profils oscillants.
- $\mathcal{P}^{\text{ev}}, \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}, \mathcal{P}_T^{\text{ev}}$  espaces des profils évanescents.
- $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{s,T}, \mathcal{P}_T$  espaces des profils.
- $\mathcal{E}_{s,T}$  espace latent de  $\mathcal{P}_{s,T}$ , des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}_+^2$  à valeurs dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ .
- $\mathbf{E}, \mathbf{E}^i, \mathbf{E}^{\text{ev}}, \mathbf{E}^{\text{osc}}, \widetilde{\mathbf{E}}^i$  projecteurs sur les espaces de profils.
- $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\text{ev}}, \mathbf{Q}^{\text{osc}}$  opérateurs sur les espaces de profils.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{in}}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{out}}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$  produits scalaires sur l'espace des profils.
- $Y_s, \mathbf{Y}_s, E_\rho, \mathbf{E}_\rho, X_r, \mathbf{X}_r$  espaces de fonctions analytiques.
- $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}$  opérateur bilinéaire sur  $Y_s$ .

## Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces stables

- $p(\tau, \eta, \xi)$  polynôme caractéristique de  $L(\alpha)$ .
- $\mathcal{C}, \mathcal{C}(\mathbf{n}), \mathcal{C}(\zeta)$  ensembles de fréquences caractéristiques.
- $\tau_k(\eta, \xi)$  opposées des valeurs propres de  $A(\eta, \xi)$ .
- $E_k(\eta, \xi)$  vecteurs propres de  $A(\eta, \xi)$ .
- $\pi_k(\eta, \xi), \pi_\alpha$  projecteurs spectraux de  $\mathbb{C}^N$ .
- $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi), \tilde{\pi}_\alpha$  projecteurs de  $\mathbb{C}^N$ .
- $Q_\alpha$  inverse partiel de  $L(0, \alpha)$ .
- $\mathcal{A}(\zeta)$  symbole associé à la propagation en  $x_d$  pour  $L(0, \partial_z)$ .
- $E_-(\zeta), E_+(\zeta)$  sous-espaces stable, instable de  $\mathcal{A}(\zeta)$ .
- $E_-^j(\zeta), E_+^j(\zeta)$  sous-espaces de  $E_-(\zeta), E_+(\zeta)$ .
- $i\xi_j(\zeta)$  valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$ .
- $\mathcal{G}(\zeta)$  valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  glancing.
- $\mathcal{G}$  ensemble des fréquences glancing.
- $\mathcal{R}(\zeta)$  ( $\mathcal{I}(\zeta)$  dans le Chapitre 5) valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  rentrantes.
- $\mathcal{S}(\zeta)$  ( $\mathcal{O}(\zeta)$  dans le Chapitre 5) valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  sortantes.
- $\mathcal{P}(\zeta)$  valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  de partie imaginaire négative.
- $\mathcal{N}(\zeta)$  valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  de partie imaginaire positive.
- $\Pi_-^e, \Pi_-^j$  projecteurs de  $E_-(\zeta)$  sur la partie elliptique stable, sur  $E_-^j(\zeta)$ .
- $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e, \Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}$  projecteurs de  $\mathbb{C}^N$  sur les parties elliptiques stable, instable.



# Table des figures

4.1	Fréquences caractéristiques pour le système (4.1.4) d'Euler compressible isentropique . . . . .	80
4.2	Champs de vecteurs rentrant ( $r$ ), sortant ( $s$ ) et glancing ( $g$ ). . . . .	83
4.3	Régions de $\Xi_0$ pour les équations d'Euler compressible isentropique . . . . .	85
4.4	Signe du discriminant $\Delta_j(\zeta)$ au voisinage de $\underline{\zeta}$ . . . . .	93
4.5	Position de $\zeta_{p,q}$ en fonction de $p$ et $q$ . . . . .	101
4.6	Suite de fréquences approchant la zone glancing, dont la vitesse de groupe tend vers 0. . . . .	102
4.7	Zone de propagation. . . . .	147
5.1	Frequencies lifted from $\varphi$ , $\psi$ and $\nu$ . . . . .	176
5.2	Creation of instability through amplification. . . . .	177
5.3	Features of functional spaces and links between them . . . . .	214



# Introduction

## Sommaire du présent chapitre

<b>1.1 Contexte général, motivations et résultats</b>	<b>1</b>
1.1.1 Systèmes de lois de conservation . . . . .	1
1.1.2 Problèmes aux limites . . . . .	3
1.1.3 Asymptotique haute fréquence et optique géométrique . . . . .	3
1.1.4 Résultats . . . . .	4
<b>1.2 Problème de Cauchy linéaire et développements asymptotiques</b>	<b>5</b>
1.2.1 Caractère bien posé et hypothèse d’hyperbolicité . . . . .	5
1.2.2 Développement d’optique géométrique . . . . .	7
<b>1.3 Problèmes aux limites et conditions de bord</b>	<b>11</b>
1.3.1 Nombre de conditions au bord . . . . .	11
1.3.2 Analyse des modes normaux . . . . .	12
1.3.3 Description des sous-espaces stables . . . . .	15
<b>1.4 Optique géométrique multiphasée et cadre fonctionnel</b>	<b>20</b>
1.4.1 Cas non-linéaire monophasé : fonctions quasi-périodiques . . . . .	21
1.4.2 Cas semi-linéaire multiphasé : algèbres de Wiener . . . . .	25
1.4.3 Problème de Cauchy quasi-linéaire multiphasé : fonctions presque-périodiques au sens de Bohr . . . . .	27
1.4.4 Adaptation aux problèmes aux limites quasi-linéaires multiphasés . . . . .	30
<b>1.5 Résolution d’EDP dans des espaces analytiques : théorèmes de Cauchy-Kovalevskaya</b>	<b>32</b>
1.5.1 Théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique . . . . .	32
1.5.2 Analyticité en temps dans le théorème de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	35
<b>1.6 Organisation du manuscrit</b>	<b>38</b>

## 1.1 Contexte général, motivations et résultats

### 1.1.1 Systèmes de lois de conservation

La présente thèse s’intéresse aux systèmes de lois de conservation, qui s’écrivent de manière générale comme

$$(1.1.1) \quad \partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u) = 0,$$

où  $u$  est une fonction de  $I \times \mathbb{R}^d$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 1$ , et les fonctions  $f_j$  sont des fonctions de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Ces systèmes de lois de conservation apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes physiques, où la quantité  $u$  peut représenter un volume, une densité, une pression, ou encore une vitesse. On peut se rapporter à [Ser99 ; Ser00] pour une étude générale des lois de conservation.

Un exemple particulier de ces systèmes est celui des équations d'Euler compressibles isentropiques modélisant l'évolution d'un fluide. Elles sont données par les lois de conservation de la masse et du moment suivantes (voir [GM84], et, plus récemment, [BGS07, Chapitre 13])

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p = 0, \end{cases}$$

où  $\rho$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  représente la densité du fluide,  $\mathbf{u}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 1$ , représente sa vitesse, et où la pression du fluide  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est donnée par une loi de pression

$$\rho \mapsto p(\rho).$$

Ce système (1.1.2) constitue un exemple intéressant pour ce manuscrit puisqu'on peut facilement conduire les calculs visant à vérifier si le système (1.1.2) satisfait les différentes hypothèses que l'on sera amené à faire au cours de l'analyse, et qu'il constitue par ailleurs un système physique pertinent. On renvoie donc aux Chapitres 4 et 5 de ce manuscrit pour une étude plus approfondie de cet exemple. On y étudiera les cas de la dimension 2 et 3 d'espace, c'est-à-dire les cas  $N = 2$  et  $N = 3$ .

Sous des hypothèses de régularité  $\mathcal{C}^1$  sur l'inconnue  $u$  et les fonctions  $f_j$  pour  $j = 1, \dots, d$ , le système (1.1.1) se réécrit

$$(1.1.3) \quad \partial_t u + \sum_{j=1}^d df_j(u) \partial_{x_j} u = 0,$$

où  $df_j$  désigne la différentielle de  $f_j$  pour  $j = 1, \dots, d$ . On considère donc dans tout ce mémoire la forme générale de système suivante

$$(1.1.4) \quad \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(u) \partial_{x_j} u = f,$$

où  $u$  est une fonction régulière de  $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^d$  à valeurs dans un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , les coefficients  $A_j$  sont des fonctions régulières de  $\mathcal{O}$  à valeurs dans l'espace des matrices  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , et la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ .

Les contributions de ce manuscrit se placent en général dans le cas où la fonction  $f$  dans (1.1.4) est nulle (mais il ne serait pas difficile de généraliser ces résultats à des termes sources  $f$  qui ne dépendent pas de l'inconnue  $u$ ). Ce cadre de travail, où les coefficients  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, d$  dans (1.1.4) dépendent de l'inconnue  $u$ , est appelé *quasi-linéaire*. On s'intéressera également, lors d'exemples ou en rappelant des travaux antérieurs, à des cadres plus simples que celui quasi-linéaire, à savoir le cadre *linéaire*, où les coefficients  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, d$  ne dépendent pas de l'inconnue  $u$ , et le cadre *semi-linéaire*, pour lequel les coefficients  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, d$  ne dépendent pas de l'inconnue  $u$  mais l'on fait dépendre le terme source  $f$  de  $u$ , de manière polynomiale. On verra que la différence principale entre le cadre semi-linéaire et le cadre quasi-linéaire tient au cadre fonctionnel que l'on doit considérer. Supprimer les non-linéarités et se placer dans le cadre linéaire permet quant à lui de décomposer les solutions, et notamment de travailler harmonique par harmonique, dans le cas de fonctions périodiques.

On détaillera dans les Chapitres 4 et 5 les formes (1.1.4) pour l'exemple des équations d'Euler (1.1.2) en dimension deux et trois d'espace.

### 1.1.2 Problèmes aux limites

Les contributions de cette thèse portent sur des problèmes aux limites associés au système (1.1.4), c'est-à-dire des problèmes où le système (1.1.4) est posé dans un demi-espace, à savoir dans  $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ , dont la frontière par rapport à la variable normale, notée  $x_d$ , est donnée par  $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Il nous faut alors imposer une condition sur le bord, portant sur la trace  $u|_{x_d=0}$ . On verra par la suite que prescrire totalement la trace sur le bord  $u|_{x_d=0}$  induit une sur-détermination du problème, ce qui nous amène à la forme de condition au bord suivante :

$$B u|_{x_d=0} = g,$$

où  $B$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$  de rang maximal, avec un entier  $p \leq N$  à préciser en fonction des données du problème, et le terme de forçage au bord  $g$  est une fonction de  $\omega_T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ .

Il faut également imposer une condition initiale, et l'on choisit dans tout ce manuscrit d'imposer que la solution doit être nulle pour les temps négatifs. On obtient donc la forme générale de problème aux limites non linéaire suivante

$$(1.1.5) \quad \begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(u) \partial_{x_j} u = f & \text{dans } \Omega_T, \\ B u|_{x_d=0} = g & \text{sur } \omega_T, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

à laquelle on s'intéressera dans tout ce manuscrit.

### 1.1.3 Asymptotique haute fréquence et optique géométrique

Dans tous les problèmes de la forme (1.1.5) étudiés dans ce manuscrit, le terme de forçage au bord  $g$  et éventuellement le terme source  $f$  (lorsque celui-ci est non-nul et ne dépend pas de l'inconnue  $u$ ) sont, dans leur forme la plus générale, des fonctions oscillantes selon des fréquences d'ordre  $1/\varepsilon$ , où la longueur d'onde  $\varepsilon$  est un paramètre positif amené à être petit. Plus précisément, les termes de forçage  $f$  et  $g$  seront toujours des fonctions quasi-périodiques selon des fréquences d'ordre  $1/\varepsilon$  dont les amplitudes sont des puissances entières de la longueur d'onde  $\varepsilon$ . Le problème (1.1.5) s'écrit alors sous une forme générale comme

$$(1.1.6) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) + \sum_{j=1}^d A_j(u^\varepsilon) \partial_{x_j} u^\varepsilon(t, x) = f^\varepsilon\left(t, x, \frac{\Psi(t, x)}{\varepsilon}\right) & \forall (t, x) \in \Omega_T, \\ B u^\varepsilon|_{x_d=0}(t, y) = g^\varepsilon\left(t, y, \frac{\Phi(t, y)}{\varepsilon}\right) & \forall (t, y) \in \omega_T, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0}(x) = 0, \end{cases}$$

où l'inconnue  $u^\varepsilon$  dépend maintenant de  $\varepsilon > 0$ , les fonctions  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  sont périodiques par rapport à leurs dernières variables, et où l'on a noté  $x = (y, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ .

On s'intéresse ici à la limite de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1.6) lorsque la longueur d'onde  $\varepsilon$  tend vers zéro, c'est-à-dire dans l'asymptotique haute fréquence. La solution d'un problème de la forme (1.1.6) est en général non-explicite, puisqu'elle est donnée par des théorèmes d'existence abstraits ou bien obtenue comme la limite d'une suite de fonctions. Même dans le cadre très simple du problème de Cauchy analogue à (1.1.6), dans le cas linéaire, la formule donnant la



solution est en général abstraite puisqu'elle s'écrit en fonction de l'opérateur de transformée de Fourier prolongé à l'espace  $L^2$ . Il est donc difficile, en l'absence d'expression explicite, de connaître les propriétés qualitatives de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1.6).

C'est pourquoi l'on cherche à déterminer, dans l'asymptotique haute fréquence, une solution approchée de (1.1.6) : c'est l'objet de l'*optique géométrique*. Celle-ci consiste à construire cette solution approchée sous la forme d'un développement formel BKW (pour Brillouin-Kramers-Wentzel), c'est-à-dire une série formelle en puissances de  $\varepsilon$ , de la forme

$$(1.1.7) \quad u^{\varepsilon, \text{app}}(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n \left( t, x, \frac{\Lambda(t, x)}{\varepsilon} \right).$$

Les premières constructions d'un tel développement sont dues à Peter Lax dans [Lax57] et Yvonne Choquet-Bruhat dans [CB64] pour le cas quasi-linéaire. On peut également citer les contributions majeures lors des débuts de la discipline d'Andrew Majda et Rodolfo Rosales dans [MR83; MR84], puis avec John K. Hunter dans [HMR86], et de Jean-Luc Joly et Jeffrey Rauch dans [JR92], puis avec Guy Métivier dans [JMR93; JMR94; JMR95].

Bien souvent, et comme on pourra le voir dans les différents développements d'optique géométrique que l'on construit dans ce mémoire, les amplitudes  $U_n$  vérifient des équations bien plus simples que celles du système général (1.1.4). Plus précisément, ici, les amplitudes  $U_n$  vérifieront des équations de transports scalaires à coefficients constants, avec éventuellement un terme quasi-linéaire de type Burgers, pour lesquelles ou bien l'on connaît une expression explicite de la solution (pour les équations de transport linéaires), ou bien l'on connaît bien les propriétés qualitatives de cette solution. Pour rappel, pour une fonction scalaire  $\sigma$  de  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ , le problème de Cauchy associé à une équation de transport scalaire à coefficients constants de vitesse  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbb{R}^d$  s'écrit

$$(1.1.8) \quad \begin{cases} \partial_t \sigma + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \sigma = f, \\ \sigma|_{t=0} = \sigma_0, \end{cases}$$

et sa solution est alors donnée par

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(x - t\mathbf{v}) + \int_0^t f(s, x - (t-s)\mathbf{v}) ds.$$

La notion de *terme de Burgers* désigne quant à elle un terme quadratique portant une dérivée d'ordre 1. Par exemple, si maintenant  $\sigma$  est une fonction de  $(t, x, \theta) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$  à valeurs réelles, sous des hypothèses de régularité, c'est un terme s'écrivant  $c\sigma \partial_\theta \sigma$ , donnant lieu au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t \sigma + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \sigma + c\sigma \partial_\theta \sigma = f, \\ \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \end{cases}$$

On rappelle que la solution approchée  $u^{\varepsilon, \text{app}}$  en (1.1.7) est, pour le moment, donnée par une série formelle. Usuellement, on tronque cette série formelle à un ordre  $M$  donné, et l'on cherche à quantifier la convergence de cette série tronquée  $u_M^{\varepsilon, \text{app}}$  vers la solution exacte  $u^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Connaissant les équations vérifiées par les amplitudes  $U_n$  de la solution approchée, on pourra donc plus facilement en déduire des propriétés qualitatives de la solution approchée  $u_M^{\varepsilon, \text{app}}$ , et donc obtenir des propriétés qualitatives de la solution exacte.

### 1.1.4 Résultats

Les problèmes d'optique géométrique associés à (1.1.6) donnent lieu dans cette thèse à deux contributions distinctes.

Dans le Chapitre 4, on construit le premier terme d'un développement asymptotique de la forme (1.1.7) pour le problème (1.1.6) sous la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme au bord, c'est-à-dire que, ayant déterminé formellement le système que doit vérifier le premier terme du développement (1.1.7), on montre qu'il existe une solution à ce système dans un cadre de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, voir [Kil22]. Cela constitue une extension de [Wil96] aux problèmes quasi-linéaires, et de [JMR95] aux problèmes aux limites.

On adopte une approche différente au Chapitre 5, puisque l'on montre que, sous une condition de Kreiss-Lopatinskii faible, le développement asymptotique (1.1.7) pour (1.1.6) peut présenter des instabilités. Ce résultat est cependant obtenu seulement pour des "modèles jouets", et l'on montre également, toujours pour des "modèles jouets", qu'il existe une solution au système d'équations obtenues pour les coefficients du développement (1.1.7), dans un cadre de fonctions analytiques.

## 1.2 Problème de Cauchy linéaire et développements asymptotiques

### 1.2.1 Caractère bien posé et hypothèse d'hyperbolicité

On s'intéresse ici au caractère bien posé du problème de Cauchy linéaire associé au système (1.1.4), qui s'écrit

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = h & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

On dit que le problème de Cauchy (1.2.1) est *fortement bien posé* si pour toute donnée initiale  $h$  et tout terme source  $f$  dans des espaces de Sobolev de régularité fixée, il existe une unique solution  $u$  au problème (1.2.1) de même régularité que la donnée initiale  $h$  et le terme source  $f$ , et dont l'on contrôle, dans une norme de Sobolev, la solution par la donnée initiale  $h$  et le terme source  $f$ . On peut affaiblir cette notion en celle de problème *faiblement bien posé*, en autorisant une perte de régularité pour la solution par rapport à la donnée initiale et au terme source.

Il semble naturel de s'intéresser au caractère bien posé du problème de Cauchy (1.2.1) associé au problème aux limites (1.1.5) pour étudier le caractère bien posé de ce dernier. Pour la même raison, on s'intéresse dans un premier temps au problème linéaire, où, dans (1.1.5), les matrices  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, d$  ne dépendent pas de l'inconnue  $u$ .

Si l'on applique formellement la transformée de Fourier en espace au système (1.2.1), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \eta) + \left( \sum_{j=1}^d i\eta_j A_j \right) \hat{u}(t, \eta) = \hat{f}(t, \eta) & \forall (t, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}|_{t=0}(\eta) = \hat{h}(\eta) & \forall \eta \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et donc, formellement, en résolvant l'équation différentielle ordinaire vérifiée par  $t \mapsto \hat{u}(t, \eta)$  pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\hat{u}(t, \eta) = \int_0^t \exp\left(- (t-s) \sum_{j=1}^d i\eta_j A_j\right) \hat{f}(s, \eta) ds + \exp\left(- t \sum_{j=1}^d i\eta_j A_j\right) \hat{h}(\eta).$$

Pour conserver la même régularité pour  $u$  que pour  $f$  et  $h$ , on souhaite donc que la matrice

$$\exp\left(-t \sum_{j=1}^d i\eta_j A_j\right)$$

soit bornée uniformément par rapport à  $(t, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , c'est-à-dire, par homogénéité,

$$(1.2.2) \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left\| \exp \sum_{j=1}^d i\eta_j A_j \right\| < +\infty.$$

Cette condition est ce que l'on appelle l'hypothèse d'*hyperbolicité* de l'opérateur  $L(\partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$ . On peut montrer (voir par exemple [BGS07, Théorème 1.1]) que le système (1.2.1) est fortement bien posé si et seulement si l'opérateur  $L(\partial)$  est hyperbolique.

En utilisant une reformulation de la condition (1.2.2) due à Heinz-Otto Kreiss ([Kre59], voir aussi [BGS07]), on adopte dans notre cas une condition plus forte, impliquant l'hyperbolicité de l'opérateur  $L(\partial)$ . L'énoncé de Kreiss requiert que les matrices  $\sum_{j=1}^d \eta_j A_j$  soient diagonalisables uniformément par rapport à  $\eta \in \mathbb{R}^d$ , c'est-à-dire diagonalisables avec des matrices de passage bien conditionnées relativement à  $\eta \in \mathbb{R}^d$ . L'hypothèse d'*hyperbolicité à multiplicité constante* que l'on choisit de considérer demande de plus que les valeurs propres de la matrice  $\sum_{j=1}^d \eta_j A_j$  soient de multiplicité constante dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , et s'énonce précisément comme suit.

**Hypothèse 1.1** (hyperbolicité à multiplicité constante). *Il existe un entier  $q$ , des fonctions analytiques réelles  $\tau_1 < \dots < \tau_q$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et des entiers  $\nu_1, \dots, \nu_q$  tels que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,*

$$\det\left(\tau I + \sum_{j=1}^d \eta_j A_j\right) = \prod_{k=1}^q (\tau - \tau_k(\eta))^{\nu_k}$$

où les valeurs propres  $-\tau_k(\eta)$  de  $\sum_{j=1}^d \eta_j A_j$  sont semi-simples, (i.e. que leur multiplicité algébrique  $\nu_k$  est égale à leur multiplicité géométrique  $\dim \ker(\tau_k(\eta)I + \sum_{j=1}^d \eta_j A_j)$ ).

Dans le cas où l'entier  $q$  est égal à  $N$ , et donc où les valeurs propres  $-\tau_k(\eta)$  pour  $k = 1, \dots, N$  sont simples, l'opérateur  $L(\partial)$  est dit *strictement hyperbolique*. Par soucis de clarté on énonce l'adaptation au cas  $q = N$  de l'Hypothèse 1.1 précédente.

**Hypothèse 1.2** (stricte hyperbolicité). *Il existe des fonctions analytiques réelles  $\tau_1 < \dots < \tau_N$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telles que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,*

$$\det\left(\tau I + \sum_{j=1}^d \eta_j A_j\right) = \prod_{k=1}^N (\tau - \tau_k(\eta))$$

où les valeurs propres  $-\tau_k(\eta)$  de  $\sum_{j=1}^d \eta_j A_j$  sont par conséquent simples.

C'est cette hypothèse légèrement restrictive que l'on considérera dans les Chapitres 4 et 5 pour simplifier l'analyse.

Une autre classe d'opérateurs  $L(\partial)$  vérifie la condition (1.2.2) d'hyperbolicité, les opérateurs *Friedrichs symétriques*, d'après Kurt Otto Friedrichs. Un opérateur  $L(\partial) = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$  est dit Friedrichs symétrique si les matrices  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, d$  sont symétriques, à multiplication à gauche par une même matrice symétrique définie positive près. Friedrichs montre dans [Fri54] que, pour de tels opérateurs, le problème de Cauchy (1.2.1) est fortement bien posé.

Dans le cadre de problèmes d'optique géométrique du type (1.1.6), l'inconnue  $u^\varepsilon$  représente une perturbation autour de l'état d'équilibre zéro, et il semble donc naturel d'imposer la condition

d'hyperbolicité (1.2.2), ou celle associée d'hyperbolicité à multiplicité constante (Hypothèse 1.1), pour le système linéarisé autour de 0, c'est-à-dire pour l'opérateur  $L(0, \partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j(0) \partial_{x_j}$ .

### 1.2.2 Développement d'optique géométrique

On détaille maintenant les principales étapes et idées de la construction d'un développement d'optique géométrique pour le problème de Cauchy linéaire (1.2.1), que l'on retrouvera dans toutes les constructions de développements d'optique géométrique de ce manuscrit. Pour simplifier les calculs on considère un terme source  $f^\varepsilon$  nul. D'autre part, on rappelle que l'on souhaite en toute généralité considérer une condition initiale  $h^\varepsilon$  (correspondant au terme de bord  $g^\varepsilon$  pour les problèmes aux limites) quasi-périodique suivant plusieurs fréquences. Par linéarité du système, on peut se restreindre à une seule fréquence, et même une seule harmonique. On s'intéresse donc au problème de Cauchy suivant

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u^\varepsilon|_{t=0}(x) = a(x) e^{ix \cdot \eta / \varepsilon} & \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

avec  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta$  une fréquence de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , et  $a$  une amplitude à valeurs dans  $\mathbb{C}^N$ . Ici l'amplitude est choisie d'ordre  $O(1)$  relativement à  $\varepsilon$ , mais, dans le cas linéaire, ce choix n'influence que l'ordre de l'amplitude de la solution, qui sera le même que celui de la condition initiale.

La première étape de l'optique géométrique consiste à expliciter un ansatz, c'est-à-dire préciser le développement asymptotique (1.1.7) en imposant la forme sous laquelle on va chercher les profils  $U_n$  pour  $n \geq 1$ . On postule que la fréquence  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  va être relevée en une fréquence  $\alpha = (\tau, \eta) \in \mathbb{R}^{d+1}$  pour les temps positifs, et on cherche donc une solution  $u^\varepsilon$  sous la forme d'une série formelle

$$(1.2.4) \quad u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n a_n(t, x) e^{i(t\tau + x \cdot \eta) / \varepsilon},$$

où les amplitudes  $a_n$  pour  $n \geq 0$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . Le fait de supposer que la fréquence  $\eta$  est relevée pour des temps positifs semble naturel pour des systèmes hyperboliques, on peut le voir par exemple sur l'exemple très simple du problème de Cauchy associée à l'équation de transport scalaire à coefficient constant (1.1.8). Si dans le système (1.1.8) le terme source  $f$  est choisi nul et le terme initial  $\sigma_0$  est pris égal à  $a(x) e^{ix \cdot \eta / \varepsilon}$ , alors la solution  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma(t, x) = a(x - t \mathbf{v}) e^{i(x \cdot \eta - t \mathbf{v} \cdot \eta) / \varepsilon},$$

et donc dans ce cas la fréquence  $\eta$  est relevée pour les temps positifs en la fréquence  $\alpha = (-\mathbf{v} \cdot \eta, \eta)$ . On notera que dans ce cas on obtient  $a_0(t, x) = a(x - t \mathbf{v})$  et  $a_n \equiv 0$  pour  $n \geq 1$ .

En toute généralité il nous faudrait prendre pour ansatz une superposition de tous les relèvements  $\alpha = (\tau, \eta)$  possibles de la fréquence  $\eta$ , c'est-à-dire

$$(1.2.5) \quad u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \sum_k a_n^k(t, x) e^{i(t\tau_k + x \cdot \eta) / \varepsilon},$$

où la somme en  $k$  est finie. Cependant puisque le système (1.2.4) est linéaire, on peut ne considérer qu'un relèvement et on superposera les développements.

On écrit maintenant la cascade d'équations vérifiée par les profils  $(a_n)_{n \geq 0}$  dans (1.2.4). On souhaite que la série formelle  $u^\varepsilon$  vérifie formellement le système (1.2.3), c'est-à-dire, si l'on note

$L(\partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$ , que l'on ait, au sens des séries formelles,

$$L(\partial) \left\{ \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n a_n(t, x) e^{i(t\tau + x \cdot \eta)/\varepsilon} \right\} \sim 0.$$

En appliquant l'opérateur  $L(\partial)$  à chaque terme de la série (1.2.4) et en réordonnant suivant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient la cascade d'équations suivante

$$(1.2.6a) \quad L(\alpha) a_0 = 0,$$

$$(1.2.6b) \quad L(\alpha) a_{n+1} - iL(\partial) a_n = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

où l'on a noté  $L(\alpha)$  le symbole de l'opérateur  $L(\partial)$  associé à la fréquence  $\alpha = (\tau, \eta)$ , c'est-à-dire

$$L(\alpha) := \tau I + \sum_{j=1}^d \eta_j A_j.$$

De même, la condition initiale  $u|_{t=0}^\varepsilon(x) = a(x) e^{ix \cdot \eta/\varepsilon}$  de (1.2.3) nous donne formellement

$$(1.2.7) \quad (a_0)|_{t=0} = a, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \quad (a_n)|_{t=0} = 0.$$

La cascade (1.2.6) est sous forme triangulaire, et il nous faut donc nous intéresser à la matrice  $L(\alpha)$  pour la résoudre.

On remarque en effet que l'équation (1.2.6a) affirme que l'amplitude  $a_0$  appartient au noyau  $\ker L(\alpha)$  de cette matrice, et chaque équation (1.2.6b) pour  $n \geq 0$  implique que le terme  $iL(\partial) a_n$  appartient à son image  $\text{Im } L(\alpha)$ . On fait l'observation fondamentale que si le noyau  $\ker L(\alpha)$  est trivial, alors d'après (1.2.6a) l'amplitude  $a_0$  est nulle, et par cascade, d'après (1.2.6b), toutes les amplitudes  $a_n$  pour  $n \geq 1$  le sont aussi. Il est donc nécessaire, pour obtenir une solution non triviale, que la fréquence  $\alpha$  soit telle que  $\ker L(\alpha)$  est non trivial, c'est-à-dire que

$$(1.2.8) \quad \det L(\alpha) = \det \left( \tau I + \sum_{j=1}^d \eta_j A_j \right) = 0.$$

C'est la notion centrale de *fréquence caractéristique*. On verra que pour les problèmes non-linéaires, les non-linéarités peuvent créer, pour les ordres supérieurs, des combinaisons de fréquences caractéristiques qui ne sont pas elles-mêmes caractéristiques. D'après l'Hypothèse 1.1, si  $\alpha = (\tau, \eta)$  est caractéristique, alors il existe  $k$  entre 1 et  $q$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta)$ . Ainsi, dans l'ansatz (1.2.5), la somme en  $k$  porte sur  $k = 1, \dots, q$ , et les réels  $\tau_k$  sont donnés par  $\tau_k(\eta)$ . On note que pour le problème de Cauchy associé à l'équation de transport scalaire à coefficient de vitesse  $\mathbf{v}$  (1.1.8), l'égalité (1.2.8) s'écrit simplement

$$\tau + \eta \cdot \mathbf{v} = 0,$$

conduisant naturellement à  $\tau = -\mathbf{v} \cdot \eta$ , comme cela avait déjà été trouvé par résolution explicite.

On se donne donc à partir de maintenant un relèvement  $\alpha = (\tau, \eta)$  de la fréquence  $\eta$  qui soit caractéristique. L'Hypothèse 1.1 nous permet alors de montrer que le noyau  $\ker L(\alpha)$  et l'image  $\text{Im } L(\alpha)$  sont en somme directe, et l'on note  $\pi_\alpha$  le projecteur sur le noyau  $\ker L(\alpha)$  parallèlement à l'image  $\text{Im } L(\alpha)$ . L'équation (1.2.6a), énonçant que l'amplitude  $a_0$  est dans le noyau  $\ker L(\alpha)$ , se réécrit donc

$$(1.2.9a) \quad a_0 = \pi_\alpha a_0.$$

On dira que l'amplitude  $a_0$  est *polarisée*. D'autre part, l'équation (1.2.6b) pour  $n = 0$  implique

que le terme  $L(\partial) a_0$  est dans l'image  $\text{Im } L(\alpha)$ , c'est-à-dire,

$$(1.2.9b) \quad \pi_\alpha L(\partial) a_0 = 0.$$

Cela revient à avoir multiplié à gauche l'équation (1.2.6b) pour  $n = 0$  par  $\pi_\alpha$ . On a donc découpé la cascade (1.2.6) pour  $a_0$ , et il nous faut maintenant résoudre les équations obtenues (1.2.9). On note que d'après les équations (1.2.9), on a

$$\pi_\alpha L(\partial) \pi_\alpha a_0 = 0.$$

Une observation fondamentale, due à Peter D. Lax dans [Lax57], est que, dans le cas d'un opérateur  $L(\partial)$  hyperbolique à multiplicité constante (Hypothèse 1.1), l'opérateur  $\pi_\alpha L(\alpha) \pi_\alpha$  est en fait un opérateur de transport scalaire à coefficient constant, de vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$  donnée par

$$\mathbf{v}_\alpha := -\nabla_\eta \tau_k(\eta),$$

si  $k$  est l'entier entre 1 et  $q$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta)$ . La preuve se fait en différentiant relativement à  $\eta$  l'égalité  $L((\tau_k(\eta), \eta)) \pi_\alpha = 0$ . Ce résultat, dénommé *lemme de Lax*, s'énonce précisément comme suit :

$$\pi_\alpha L(\partial) \pi_\alpha = \left( \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta) \cdot \nabla_x \right) \pi_\alpha.$$

On obtient donc, avec (1.2.9),

$$(1.2.10) \quad \left( \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta) \cdot \nabla_x \right) \pi_\alpha a_0 = 0.$$

On peut alors résoudre l'équation de transport (1.2.10) à l'aide de la condition initiale (1.2.7) qui s'écrit, pour  $\pi_\alpha a_0$ ,

$$(\pi_\alpha a_0)_{t=0} = \pi_\alpha a,$$

pour trouver

$$a_0 = \pi_\alpha a_0 = \pi_\alpha a(x + t \mathbf{v}_\alpha).$$

On comprend ici l'intérêt de l'optique géométrique. Si l'on admet que la série formelle (1.2.4) tronquée à  $n = 0$  approche bien la solution exacte du système (1.2.3), on obtient une solution approchée sous une forme explicite très simple

$$(t, x) \mapsto \pi_\alpha a(x + t \mathbf{v}_\alpha) e^{i(t \tau + x \cdot \eta)/\varepsilon}$$

d'une solution exacte abstraite. On note d'autre part que dans le cas d'un problème aux limites, l'équation de transport (1.2.10) serait posée dans un demi-espace  $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_{x_d}^+$ . Suivant le signe de la composante du vecteur  $\mathbf{v}_\alpha$  en facteur de l'opérateur  $\partial_{x_d}$ , c'est-à-dire suivant le signe de  $\partial_{\eta_d} \tau_k(\eta)$ , il faudrait donc éventuellement déterminer une condition au bord pour résoudre cette équation de transport. Cela constituera une question centrale pour les problèmes aux limites.

On cherche maintenant à découpler pour l'amplitude  $a_1$  les équations

$$(1.2.11a) \quad L(\alpha) a_1 - iL(\partial) a_0 = 0,$$

$$(1.2.11b) \quad L(\alpha) a_2 - iL(\partial) a_1 = 0.$$

L'équation (1.2.11a) détermine la partie de  $a_1$  sur laquelle  $L(\alpha)$  est inversible, c'est-à-dire  $(I - \pi_\alpha) a_1$ , que l'on appelle *partie non polarisée* de  $a_1$ . À cet effet, on introduit l'inverse partiel de  $L(\alpha)$ , noté  $Q_\alpha$ , vérifiant

$$Q_\alpha L(\alpha) = L(\alpha) Q_\alpha = I - \pi_\alpha.$$

Si l'on multiplie l'équation (1.2.11a) à gauche par  $Q_\alpha$  on obtient précisément

$$(I - \pi_\alpha) a_1 = Q_\alpha iL(\partial) a_0.$$

On s'intéresse maintenant à déterminer la *partie polarisée* de  $a_1$ , c'est-à-dire  $\pi_\alpha a_1$ , selon une méthode analogue à celle pour  $a_0$ . On utilise pour cela l'équation (1.2.11b) que l'on multiplie à gauche par  $\pi_\alpha$  et l'on décompose  $a_1$  comme  $a_1 = \pi_\alpha a_1 + (I - \pi_\alpha) a_1$  pour obtenir

$$\pi_\alpha L(\partial) \pi_\alpha a_1 = -\pi_\alpha L(\partial) (I - \pi_\alpha) a_1 = -\pi_\alpha L(\partial) Q_\alpha iL(\partial) a_0.$$

Le lemme de Lax permet d'écrire cette équation comme

$$\left( \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta) \cdot \nabla_x \right) \pi_\alpha a_1 = -\pi_\alpha L(\partial) Q_\alpha iL(\partial) a_0,$$

que l'on résout avec la condition initiale (1.2.7), ce qui conduit à une formule explicite pour  $a_1$ .

On se convainc facilement que la méthode précédente s'itère pour les profils d'ordre supérieur  $a_n$ , pour  $n \geq 2$ , voir [Rau12, Chapitre 5]. On trouve que la partie non polarisée  $(I - \pi_\alpha) a_n$  de  $a_n$  est donnée par

$$(I - \pi_\alpha) a_n = Q_\alpha iL(\partial) a_{n-1},$$

et sa partie polarisée  $\pi_\alpha a_n$  est solution de l'équation de transport suivante

$$(1.2.12) \quad \left( \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta) \cdot \nabla_x \right) \pi_\alpha a_n = -\pi_\alpha L(\partial) Q_\alpha iL(\partial) a_{n-1}.$$

On note que dans le terme source  $-\pi_\alpha L(\partial) Q_\alpha iL(\partial) a_{n-1}$  de l'équation de transport précédente (1.2.12), l'amplitude  $a_{n-1}$  porte un opérateur de dérivation d'ordre 2, et l'amplitude  $a_n$  subie donc une perte de régularité d'ordre 2 par rapport à l'amplitude  $a_{n-1}$ . Si l'on veut construire un développement d'optique géométrique à tout ordre, il nous faut donc considérer une amplitude initiale  $a$  de régularité infinie.

La dernière étape de l'optique géométrique consiste à *justifier* la validité du développement, c'est-à-dire montrer que la série formelle (1.2.4) tronquée converge dans une certaine norme vers la solution exacte. On note  $v^\varepsilon$  la solution exacte du problème de Cauchy (1.2.3), et  $u^{\varepsilon, M}$  la série formelle (1.2.4) tronquée à l'ordre  $M \geq 0$ , c'est-à-dire

$$u^{\varepsilon, M}(t, x) = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n a_n(t, x) e^{i(t\tau + x\cdot\eta)/\varepsilon},$$

où les amplitudes  $a_n$  pour  $n \geq 0$  ont été précédemment construites. L'observation clé est que, par construction des amplitudes  $a_n$  pour  $n \geq 0$ , la fonction  $v^\varepsilon - u^{\varepsilon, M}$  vérifie le problème de Cauchy suivant

$$(1.2.13) \quad \begin{cases} L(\partial) (v^\varepsilon - u^{\varepsilon, M})(t, x) = -\varepsilon^M e^{i(t\tau + x\cdot\eta)/\varepsilon} L(\partial) a_M(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u^{\varepsilon, M}|_{t=0}(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Puisque l'opérateur  $L(\partial)$  est hyperbolique, le problème de Cauchy précédent (1.2.13) est fortement bien posé, et l'on dispose donc, dans une norme de Sobolev, d'une estimation de la différence  $v^\varepsilon - u^{\varepsilon, M}$  en fonction du terme source  $-\varepsilon^M e^{i(t\tau + x\cdot\eta)/\varepsilon} L(\partial) a_M(t, x)$ . En modifiant la norme de Sobolev pour absorber les puissances de  $\varepsilon$  qui apparaissent avec la dérivation de  $(t, x) \mapsto e^{i(t\tau + x\cdot\eta)/\varepsilon}$ , on montre alors que la différence  $v^\varepsilon - u^{\varepsilon, M}$  est de l'ordre de  $O(\varepsilon^M)$  dans cette nouvelle norme.

En conclusion, il existe, sous des hypothèses de régularité et de polarisation sur la condition

initiale  $a$ , un développement d'optique géométrique sous la forme d'une série formelle (1.2.4) pour le problème de Cauchy (1.2.3), où les amplitudes  $a_n$  pour  $n \geq 0$  dans la série formelle (1.2.4) sont déterminées par des expressions simples et explicites, et la série formelle (1.2.4) tronquée à l'ordre  $M \geq 0$  converge vers la solution exacte de (1.2.3) à une vitesse de l'ordre de  $O(\varepsilon^M)$ , dans une norme bien choisie.

### 1.3 Problèmes aux limites et conditions de bord

On s'intéresse maintenant au caractère bien posé du problème aux limites (1.1.5). De la même manière que pour le problème de Cauchy, puisque l'optique géométrique s'intéresse à des perturbations de l'état d'équilibre 0 du problème (1.1.5), il paraît naturel de s'intéresser à la linéarisation du problème (1.1.5) autour de 0, c'est-à-dire,

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(0) \partial_{x_j} u = f & \text{dans } \Omega_T, \\ B u|_{x_d=0} = g & \text{sur } \omega_T, \\ u|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

L'opérateur  $L(0, \partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j(0) \partial_{x_j}$  est supposé hyperbolique, et l'on s'intéresse aux conditions sur la matrice  $B$  pour que le problème (1.3.1) soit bien posé. On rappelle que, sans perte de généralité, on peut supposer que la matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$  est de rang maximal, c'est-à-dire égal à  $p$ .

On suit dans les parties 1.3.1 et 1.3.2 de cette section la présentation de [BGS07, Chapitre 4].

#### 1.3.1 Nombre de conditions au bord

On commence par une étude simple visant à prédire le nombre de conditions au bord nécessaire pour que le problème (1.3.1) soit bien posé. Supposons que la dimension  $d$  soit égale à 1. On est alors ramené au problème

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} \partial_t u + A_d(0) \partial_{x_d} u = f & \text{dans } (-\infty, T] \times \mathbb{R}_+, \\ B u(t, 0) = g(t) & \forall t \in (-\infty, T], \\ u(0, x_d) = 0 & \forall x_d \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Par hypothèse d'hyperbolicité, on sait que la matrice  $A_d(0)$  est diagonalisable, et, quitte à multiplier à droite la matrice  $B$  par une matrice inversible, ce qui ne change pas son rang, on peut supposer que la matrice  $A_d(0)$  est diagonale. On écrit alors,

$$A_d(0) = \text{diag}(a_1, \dots, a_q, a_{q+1}, \dots, a_N),$$

avec, quitte à permuter les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ ,  $a_1 \geq \dots \geq a_q > 0 \geq a_{q+1} \geq \dots \geq a_N$ . Les composantes du vecteurs  $u = (u_1, \dots, u_N)$  vérifient alors les équations de transport suivantes, pour  $k = 1, \dots, N$ ,

$$(1.3.3) \quad \partial_t u_k + a_k \partial_{x_d} u_k = f_k,$$

où l'on a décomposé le terme source  $f$  dans  $\mathbb{R}^N$  comme  $f = (f_1, \dots, f_N)$ . Pour  $k = q + 1, \dots, N$ , le coefficient  $a_k$  est négatif, l'équation de transport (1.3.3) est donc sortante, et il ne faut alors pas de condition au bord associée à celle-ci. À l'inverse, si  $k = 1, \dots, q$  et que donc  $a_k$  est strictement positif, il est nécessaire d'avoir une condition au bord pour résoudre l'équation de transport rentrante (1.3.3). Il est donc nécessaire que le nombre de conditions au bord, donné par le rang  $p$



de la matrice  $B$ , soit égal au nombre de coefficients strictement positifs sur la diagonale de  $A_d(0)$ , c'est-à-dire  $q$ . Plus précisément, puisque les  $p$  conditions au bord doivent permettre de déterminer les traces des  $q$  premières coordonnées du vecteur  $u$ , il est nécessaire que

$$\mathbb{C}^N = \ker B \oplus (\mathbb{R}^q \times \{0\}^{N-q}),$$

et donc en particulier on retrouve  $p = q$ .

Si l'on revient au cas général du problème (1.3.2) où la matrice  $A_d(0)$  est seulement supposée diagonalisable, on obtient la formulation suivante

$$(1.3.4) \quad \mathbb{C}^N = \ker B \oplus E^u(A_d(0)),$$

où  $E^u(A_d(0))$  désigne le sous-espace instable de la matrice  $A_d(0)$ , c'est-à-dire le sous-espace propre de  $A_d(0)$  associé à ses valeurs propres strictement positives. Ainsi, en particulier, le rang  $p$  de la matrice  $B$  doit être égal au nombre de valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité de la matrice  $A_d(0)$ . On peut ainsi justifier que la condition (1.3.4) est nécessaire et suffisante pour que le problème (1.3.2) soit bien posé dans  $L^2$ .

On peut montrer que la condition demandant que le rang de la matrice  $B$  soit égal au nombre de valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité de la matrice  $A_d(0)$  est en fait nécessaire pour que le problème (1.1.5) de dimension  $d$  quelconque soit bien posé dans  $L^2$ . D'autre part, dans la sous-partie suivante, la condition (1.3.4) sera généralisée pour les problèmes linéarisés généraux de la forme (1.3.1).

### 1.3.2 Analyse des modes normaux

Maintenant que le rang de la matrice  $B$  est prescrit, on s'intéresse aux conditions précises sur celle-ci, nécessaires et suffisantes, pour que le problème (1.3.1) soit bien posé. On étudie à cet effet le problème (1.3.1) homogène, c'est-à-dire où le terme source  $f$  et le terme de bord  $g$  dans (1.3.1) sont nuls. On conduit pour cela une *analyse par modes normaux*, que l'on peut trouver dans [Her63 ; Sar65 ; Ika68 ; Kre70]. On souhaite réaliser une analyse formelle à l'aide de la transformée de Fourier en espace et la transformée de Laplace en temps comme on l'a fait en section 1.2.1, et l'on rend ce raisonnement rigoureux en considérant des solutions particulières de (1.3.1) de la forme

$$(1.3.5) \quad u(t, y, x_d) = e^{i(\tau t + \eta y)} U(x_d),$$

avec  $\tau \in \mathbb{C}$  et  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ . Puisque l'on s'intéresse à des solutions qui pourraient contredire le caractère bien posé, on suppose  $\text{Im } \tau < 0$ . En injectant la solution (1.3.5) dans l'équation  $L(0, \partial) u = 0$ , on obtient

$$(1.3.6) \quad i \left( \tau I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j(0) \right) U(x_d) + A_d(0) \partial_{x_d} U(x_d) = 0.$$

On note ici que le caractère inversible de la matrice  $A_d(0)$  joue un rôle. Dans toute cette thèse, on fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.3.** *La frontière  $\{x_d = 0\}$  est non-caractéristique, c'est-à-dire que la matrice  $A_d(0)$  est inversible.*

Sous cette hypothèse, l'équation (1.3.6) devient

$$(1.3.7) \quad \partial_{x_d} U(x_d) - \mathcal{A}(\tau, \eta) U(x_d) = 0,$$

où l'on a défini la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  comme

$$(1.3.8) \quad \mathcal{A}(\tau, \eta) := -iA_d(0)^{-1} \left( \tau I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j(0) \right).$$

On note alors que le comportement de l'équation (1.3.7) dépend des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ . Le lemme de Hersh, fondamental, apporte des précisions sur celles-ci.

**Lemme 1.3.1** ([Her63]). *Pour tout  $(\tau, \eta) \in \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle, et le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  associé à ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, noté  $E_-(\tau, \eta)$ , est de dimension constante égale à  $p$ , le nombre de valeurs propres strictement négatives de  $A_d(0)$ .*

On note alors  $E_+(\tau, \eta)$  le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  associé à ses valeurs propres de partie réelle strictement positive, et l'on décompose l'espace  $\mathbb{C}^N$  comme

$$(1.3.9) \quad \mathbb{C}^N = E_-(\tau, \eta) \oplus E_+(\tau, \eta).$$

On fixe à partir de maintenant  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Si l'on écrit la trace au bord  $U(0)$  selon la décomposition (1.3.9) de  $\mathbb{C}^N$  comme  $U(0) = U_0^- + U_0^+$ , alors la solution  $U$  de l'équation différentielle ordinaire (1.3.7) s'écrit  $U = U^- + U^+$ , où

$$U^-(x_d) = e^{x_d \mathcal{A}(\tau, \eta)} U_0^-, \quad U^+(x_d) = e^{x_d \mathcal{A}(\tau, \eta)} U_0^+.$$

Le terme  $U^+$  est exclu puisqu'il n'appartient pas à l'espace des distributions tempérées. Puisque  $U_0^-$  appartient au sous-espace propre  $E_-(\tau, \eta)$  associé aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  de partie réelle strictement négative, si la trace  $U_0^-$  est non-nulle, alors on obtient pour (1.3.7) une solution  $U$  non nulle et de carré intégrable. Cela mène alors à une solution  $u$  du problème homogène associé à (1.3.1), non nulle, ce qui représente une obstruction au caractère bien posé. On étudie donc la possibilité qu'il existe une trace  $U_0^-$  non nulle. D'après la condition de bord  $B u|_{x_d=0} = 0$ , la trace  $U_0^- \in E_-(\tau, \eta)$  doit vérifier

$$U_0^- \in E_-(\tau, \eta), \quad B U_0^- = 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation n'ait que des solutions triviales s'énonce alors comme

$$(1.3.10) \quad \ker B \cap E_-(\tau, \eta) = \{0\}.$$

Puisque, d'après le lemme de Hersh, la dimension du sous-espaces stable  $E_-(\tau, \eta)$  est égale à  $p$ , la condition (1.3.10) est équivalente à

$$\mathbb{C}^N = \ker B \oplus E_-(\tau, \eta),$$

et l'on retrouve la formulation (1.3.4) de la partie précédente en dimension 1.

En appliquant le précédent raisonnement pour toute fréquence  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$  on obtient la condition nécessaire suivante pour que le problème (1.3.1) soit bien posé.

**Hypothèse 1.4.** *Le problème (1.3.1) vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii, c'est-à-dire que, pour tout  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , on a,*

$$(1.3.11) \quad \ker B \cap E_-(\tau, \eta) = \{0\}.$$

Cette condition est ainsi dénommée d'après Heinz-Otto Kreiss et Yaroslav B. Lopatinskii, pour leurs travaux [Kre70; Lop53; Lop70]. Bien que nécessaire, la condition de Kreiss-Lopatinskii

n'est en fait pas suffisante pour que le problème (1.3.1) soit fortement bien posé, voir [CP82], et il nous faut donc la renforcer.

On étudie dans un premier temps le caractère fortement bien posé du problème aux limites (1.3.1), et l'on suit pour cela la présentation faite dans [Ben15, section 1.2.1] du travail de Kreiss [Kre70].

On note que la condition de Kreiss-Lopatinskii (Hypothèse 1.4) implique que pour tout  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , la matrice  $B$  restreinte au sous-espace stable  $E_-(\tau, \eta)$  est inversible. Ainsi, pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , il existe une constante  $C(\tau, \eta) > 0$  telle que pour tout vecteur  $V$  de  $E_-(\tau, \eta)$ , on a

$$(1.3.12) \quad |V| < C(\tau, \eta) |BV|,$$

où l'on a noté  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{C}^N$ . La constante  $C(\tau, \eta)$ , bien qu'homogène de degré 0 en  $(\tau, \eta)$ , n'est pas uniforme par rapport à  $(\tau, \eta)$ . Or Kreiss montre dans [Kre70] qu'une condition nécessaire pour que le problème (1.3.1) soit bien posé est que la constante  $C(\tau, \eta)$  dans (1.3.12) soit uniforme par rapport à  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Cela mène à la *condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme*, qui requiert qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $(\tau, \eta)$  dans  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , on a,

$$(1.3.13) \quad |V| < C |BV| \quad \forall V \in E_-(\tau, \eta).$$

Cette condition est difficile à manipuler en pratique puisque le calcul de la meilleure constante  $C(\tau, \eta)$  dans (1.3.12) n'est pas aisé, et l'on cherche donc à la reformuler. Dans ce but, l'idée de Kreiss est de compactifier la demi-sphère

$$\left\{ (\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} \mid \text{Im } \tau < 0, |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \right\}$$

pour utiliser la continuité des sous-espaces stable  $E_-(\tau, \eta)$  pour obtenir l'uniformité de la constante  $C(\tau, \eta)$ . Pour cela il faut considérer les points  $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$  tels que  $\tau$  est réel, et on introduit donc les espace de fréquences suivants

$$\Xi := \left\{ (\tau, \eta) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} \mid \text{Im } \tau \leq 0 \right\},$$

et son compactifié,

$$\Sigma := \left\{ (\tau, \eta) \in \Xi \mid |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \right\}.$$

Cependant, les sous-espaces stables  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  ne sont définis par le lemme de Hersh que pour  $(\tau, \eta) \in \Xi$  tels que  $\text{Im } \tau < 0$ . Kreiss montre dans [Kre70] que ces sous-espaces  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  s'étendent par continuité à tout l'espace  $\Xi$ , et l'on note encore  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  leurs prolongements par continuité à l'espace  $\Xi$ . La preuve de Kreiss se place sous l'hypothèse de stricte hyperbolicité (Hypothèse 1.2), et le résultat a été étendu aux opérateurs hyperboliques à multiplicité constante (Hypothèse 1.1) par Métivier dans [Mét00]. On peut alors donner une formulation équivalente de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (1.3.13), en utilisant un argument de compacité.

**Hypothèse 1.5** (condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme). *Pour tout  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi$ , on a*

$$(1.3.14) \quad \ker B \cap E_-(\tau, \eta) = \{0\}.$$

Pour un opérateur  $L(0, \partial)$  satisfaisant l'Hypothèse 1.1 d'hyperbolicité à multiplicité constante et l'Hypothèse 1.3 de bord non-caractéristique, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (Hypothèse 1.5) est nécessaire et suffisante pour que le problème aux limites (1.3.1) soit fortement bien posé dans les espaces de Sobolev, comme montré dans [Kre70] pour les opérateur strictement hyperboliques (Hypothèse 1.2), et étendu aux opérateurs hyperboliques à multiplicité constante

(Hypothèse 1.1) grâce à [Mét00].

Cependant, de nombreux problèmes physiques donnent lieu à des problèmes aux limites pour lesquels la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas satisfaite, comme cela est mis en évidence notamment dans [BG+02] pour l'équation des ondes, dans [Tay79; ST88] pour des problèmes de l'élastodynamique avec les ondes de Rayleigh, et dans [Mil58; Maj83] pour des ondes de chocs ou des discontinuités de contact en mécanique des fluides compressible. La question se pose donc de savoir si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (Hypothèse 1.5) peut être affaiblie pour obtenir un caractère faiblement bien posé du problème (1.3.1). On a vu qu'il est nécessaire, pour obtenir tout type de caractère bien posé, même faible, que la condition de Kreiss-Lopatinskii (1.3.11) soit vérifiée pour toute fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi$  telle que  $\text{Im } \tau < 0$  (Hypothèse 1.4). Ainsi, la condition (1.3.14) peut ne pas être satisfaite seulement au bord de  $\Xi$ , que l'on note

$$\Xi_0 := \{(\tau, \eta) \in \Xi \mid \text{Im } \tau = 0\} = \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

ainsi que son compactifié

$$\Sigma_0 := \{(\tau, \eta) \in \Xi_0 \mid |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1\} = \mathbb{S}^{d-1}.$$

On s'autorise donc la forme suivante de *condition de Kreiss-Lopatinskii faible*.

**Hypothèse 1.6** (condition de Kreiss-Lopatinskii faible). • *La condition de Kreiss-Lopatinskii est satisfaite, c'est-à-dire que pour toute fréquence  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$ , on a*

$$\ker B \cap E_-(\tau, \eta) = \{0\}.$$

- *L'ensemble  $\Upsilon$ , défini comme*

$$\Upsilon := \left\{ (\tau, \eta) \in \Sigma_0 \mid \ker B \cap E_-(\tau, \eta) \neq \{0\} \right\},$$

*qui est l'ensemble des fréquences  $(\tau, \eta)$  de la sphère  $\Sigma_0$  telles que l'intersection entre le noyau  $\ker B$  et le sous-espace stable  $E_-(\tau, \eta)$  est non triviale, est non vide.*

On pourra demander des hypothèses supplémentaires sur l'intersection non triviale  $\ker B \cap E_-(\tau, \eta)$  lorsque  $(\tau, \eta)$  appartient au lieu  $\Upsilon$  de mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, comme par exemple imposer qu'elle soit de dimension 1. Le sous-espace stable  $E_-(\tau, \eta)$  étant homogène de degré 0 en  $(\tau, \eta)$ , on choisit, pour définir  $\Upsilon$ , de travailler avec la sphère  $\Sigma_0$  plutôt que l'espace  $\Xi_0$ .

On cherche maintenant à classifier les différentes conditions de Kreiss-Lopatinskii faibles possibles, suivant l'endroit de la sphère  $\Sigma_0$  où se trouve  $\Upsilon$  le lieu de dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. Le lemme de Hersh apporte une description précise des espaces  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta) \in \Xi \setminus \Xi_0$ , mais l'on ne sait rien pour l'instant de leurs prolongements à  $\Xi_0$ . La partie suivante s'intéresse donc à préciser ces espaces  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta) \in \Xi_0$ , afin de classifier les possibilités de mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii (1.3.14) dans  $\Xi_0$ .

### 1.3.3 Description des sous-espaces stables

On sait que pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$ , les sous-espaces stables  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  sont les sous-espaces propres généralisés associés aux valeurs propres de partie réelle respectivement strictement positive et strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ . Ainsi, afin de pouvoir décrire les espaces  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  sur le bord  $\Xi_0$ , on s'intéresse au comportement des valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  à la limite lorsque  $(\tau, \eta) \in \Xi_0$ . On commence par donner une description précise des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  lorsque  $(\tau, \eta) \in \Xi_0$ .

Le résultat suivant affirme que, au voisinage dans  $\Xi$  de tout point de  $\Xi_0$ , les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  peuvent avoir trois types de comportement différents, que l'on commente après son énoncé. La preuve de ce résultat est à l'origine de Kreiss dans [Kre70] pour le cas strictement hyperbolique (Hypothèse 1.2), puis a été étendu aux opérateurs hyperboliques à multiplicité constante (Hypothèse 1.1) par Métivier dans [Mét00], et par Métivier-Zumbrun dans [MZ05] à un cadre encore plus général.

**Proposition 1.3.2** (structure de blocs). *Pour tout  $(\underline{\tau}, \underline{\eta}) \in \Xi$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi$ , un entier  $L \geq 1$ , une partition  $N = \rho_1 + \dots + \rho_L$  et une matrice inversible  $T$  analytique sur  $\mathcal{V}$  telle que pour tout  $(\tau, \eta) \in \mathcal{V}$ , on a*

$$T(\tau, \eta) \mathcal{A}(\tau, \eta) T(\tau, \eta)^{-1} = \text{diag}(\mathcal{A}_1(\tau, \eta), \dots, \mathcal{A}_L(\tau, \eta)),$$

où, pour tout  $j = 1, \dots, L$ , la matrice  $\mathcal{A}_j(\tau, \eta)$  est de taille  $\rho_j$ , et vérifie l'une des propriétés suivantes :

- (i) la partie réelle de la matrice  $\mathcal{A}_j(\tau, \eta)$ , définie par  $(\mathcal{A}_j(\tau, \eta) + \mathcal{A}_j(\tau, \eta)^*)/2$ , est définie positive,
- (ii) la partie réelle de la matrice  $\mathcal{A}_j(\tau, \eta)$  est définie négative,
- (iii)  $\rho_j = 1$ ,  $\mathcal{A}_j(\tau, \eta)$  est imaginaire pur lorsque  $\tau$  est réel, et  $\partial_{\text{Im}\tau} \mathcal{A}_j(\underline{\tau}, \underline{\eta}) \in \mathbb{R}^*$ ,
- (iv)  $\rho_j > 1$ , les coefficients de  $\mathcal{A}_j(\tau, \eta)$  sont imaginaires purs lorsque  $\tau$  est réel, il existe  $\xi_j \in \mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{A}_j(\underline{\tau}, \underline{\eta}) = \begin{pmatrix} i\xi_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & i\xi_j \end{pmatrix},$$

et le coefficient en bas à gauche de  $\partial_{\text{Im}\tau} \mathcal{A}_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  est réel non nul.

Ainsi, d'après la Proposition 1.3.2 précédente, au voisinage dans  $\Xi$  d'un point  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  de  $\Xi_0$ , les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  peuvent avoir l'un des trois comportements suivants.

- (a) Une partie des valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  sont de partie réelle non nulles et de signe constant pour  $(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi$ , correspondant aux blocs de type (i) et (ii) de la Proposition 1.3.2 précédente. Ces valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi$  sont appelées *elliptiques*.
- (b) Certaines valeurs propres, d'après le point (iii) de la Proposition 1.3.2 précédente, sont, au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi$ , des valeurs propres semi-simples de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ , et de partie réelle nulle dans  $\Xi_0$ . On les appelle *hyperboliques* puisqu'elles correspondent à un phénomène de propagation par rapport à la variable normale  $x_d$ .
- (c) Enfin, certaines valeurs propres de la matrices  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  ont un comportement plus compliqué au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi$ . Le point (iv) de la Proposition 1.3.2 précédente affirme que celles-ci sont imaginaires pures et dégénérées<sup>1</sup> en  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , mais que, au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans le bord  $\Xi_0$ , celles-ci peuvent devenir de partie réelle non nulle, rester imaginaires pures et devenir semi-simples, ou encore rester dégénérées et imaginaires pures. De telles valeurs propres sont dénommées *glancing*.

Williams montre dans [Wil00] que s'il existe des fréquences  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$  pour lesquelles, dans les notations de la Proposition 1.3.2 précédente, il existe un bloc  $\mathcal{A}_j$  de type (iv) de taille  $\rho_j$  strictement plus grande que deux, cela peut entraîner une explosion en temps arbitrairement court de solutions fortement oscillantes, et l'on fait donc l'hypothèse que les fréquences glancing sont *d'ordre deux*, c'est-à-dire que pour tout  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$ , les blocs  $\mathcal{A}_j$  de type (iv) sont de taille 2.

1. Une valeur propre est dite *dégénérée* si sa multiplicité algébrique est strictement plus grande que sa multiplicité géométrique

On rappelle que les sous-espaces stables  $E_{\pm}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$  sont définis comme les limites, lorsque  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$  tend vers  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , des sous-espaces propres généralisés  $E_{\pm}(\tau, \eta)$  associés aux valeurs propres de partie réelle respectivement strictement positive et strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ . Ainsi, il est raisonnable d'affirmer que les sous-espaces stables  $E_{\pm}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$  sont les sous-espaces propres généralisés associés aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  obtenues comme limite, lorsque  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$  tend vers  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , des valeurs propres de partie réelle respectivement strictement positive et strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ .

Il nous faut donc déterminer, pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$ , pour chacun des trois types (a), (b) et (c) précédents, si les valeurs propres associées proviennent de valeurs propres de partie réelle strictement positive ou strictement négative.

- Pour le type (a) correspondant aux valeurs propres de parties réelles non nulle, la réponse est claire, ces valeurs propres elliptiques proviennent de valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi$  de parties réelles non nulles du même signe, et contribuent donc, selon le signe de leur partie réelle, aux sous-espaces stables  $E_{-}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  ou  $E_{+}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ .
- Dans le cas (b), toute valeur propre hyperbolique de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$ , étant semi-simple, provient d'une valeur propre de partie réelle non nulle de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$ , mais dont on ne peut pas encore déterminer le signe à ce stade. Il nous faudra donner un critère plus précis pour cela.
- Le cas (c) des valeurs propres glancing est plus délicat. En effet, celles-ci étant dégénérées, elles pourraient (c'est en fait le cas pour les glancing d'ordre 2) provenir de deux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$  différentes, de parties réelles non nulle, de signe opposé. Le sous-espace propre généralisé associé à la valeur propre glancing considéré ne contribue donc totalement ni au sous-espace stable  $E_{-}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , ni au sous-espace stable  $E_{+}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ . On peut trouver par exemple dans [Mét00] une étude précise du comportement des valeurs propres glancing au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , dont les arguments sont rappelés dans la preuve de la Proposition 4.1.21 ci-après.

On cherche maintenant un critère permettant de déterminer si, pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$ , une valeur propre hyperbolique  $i\xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  de  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  contribue au sous-espace stable  $E_{-}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  ou bien  $E_{+}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ . D'après le point (iii) de la Proposition 1.3.2 précédente, ceci dépend du signe de la partie réelle de  $\partial_{\text{Im } \tau} \mathcal{A}_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , c'est-à-dire du signe de la partie imaginaire de  $\partial_{\text{Im } \tau} \xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ . Or on note que, puisque  $i\xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  est imaginaire pure et est une valeur propre de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , alors, par définition de  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , on a

$$\det L(0, (\underline{\tau}, \underline{\eta}, \xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta}))) = 0,$$

c'est-à-dire que la fréquence réelle  $(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta}))$  est caractéristique. Ainsi, d'après l'Hypothèse 1.1 d'hyperbolicité à multiplicité constante, il existe un entier  $k$  entre 1 et  $q$  tel que

$$\underline{\tau} = \tau_k(\underline{\eta}, \xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})).$$

Le théorème des fonctions implicites nous invite donc à nous intéresser au signe de  $\partial_{\xi} \tau_k(\eta, \xi)$  pour  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ , et l'on fait la définition suivante.

**Définition 1.3.3.** Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique réelle, et soit  $k$  entre 1 et  $q$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . On dit que la fréquence  $\alpha$  est glancing (resp. rentrante, sortante) si  $\partial_{\xi} \tau_k(\eta, \xi)$  est nul (resp. strictement négatif, strictement positif).

On peut montrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites, que la notion de fréquence *glancing* introduite dans la définition 1.3.3 correspond à la notion de valeur propre glancing introduite précédemment, au sens où, pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi_0$ , le complexe  $i\xi$  est une valeur propre glancing de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  (c'est-à-dire associée à un bloc de type (iv) dans le Proposition 1.3.2 précédente) si et seulement si la fréquence  $(\tau, \eta, \xi)$  est une fréquence glancing selon la Définition

1.3.3 précédente. On peut alors reformuler l'hypothèse qui requiert que les valeurs propres glancing sont d'ordre 2 de la manière suivante, qui énonce que dans le cas d'une dégénérescence glancing de la valeur propre  $\tau_k$  en  $(\eta, \xi)$ , cette dégénérescence est d'ordre 2.

**Hypothèse 1.7.** *Pour tout  $k = 1, \dots, q$ , et pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on a*

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial \xi}(\eta, \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \xi^2}(\eta, \xi) \neq 0.$$

On note d'autre part que la dénomination *rentrante* et *sortante* est cohérente, au regard du lemme de Lax introduit dans la section 1.2.2 précédente. En effet, on a vu que dans le cas du développement d'optique géométrique pour le problème de Cauchy linéaire (1.2.3), l'évolution du profil associé à la fréquence caractéristique  $\alpha = (\tau, \eta, \xi)$ , avec  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ , est dirigée par un champ de vecteurs scalaire à coefficients constants de vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$  donné par

$$\mathbf{v}_\alpha = -\nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi).$$

On verra que ces champs de vecteurs apparaissent également dans les développements d'optique géométrique pour les problèmes aux limites que l'on considère dans ce manuscrit. Dans le cas de problèmes aux limites, le signe de la dernière composante du vecteur  $\mathbf{v}_\alpha$ , en facteur de l'opérateur de dérivation  $\partial_{x_d}$ , détermine le caractère rentrant ou sortant de l'équation de transport correspondante. Cette dernière composante de  $\mathbf{v}_\alpha$  est précisément  $-\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$ . **Le caractère rentrant ou sortant prescrit en particulier si l'on a besoin de déterminer une condition au bord pour résoudre l'équation de transport associée.**

Enfin, pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi_0$ , on peut montrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites, que pour une valeur propre hyperbolique  $i\underline{\xi}$  (correspondant au point (iii) de la Proposition 1.3.2 précédente) de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , les deux affirmations suivantes sont équivalentes.

- 1) La valeur propre  $i\underline{\xi}$  provient d'une valeur propre de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  au voisinage de  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$  de partie réelle strictement négative, et donc contribue au sous-espace stable  $E_-(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ .
- 2) La fréquence caractéristique réelle associée  $(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$  est rentrante, c'est-à-dire  $\partial_\xi \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi}) < 0$ , où  $\underline{\tau} = \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi})$ .

On dispose d'un résultat analogue pour le sous-espace stable  $E_+(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ .

On peut alors conclure quant à la description précise des sous-espaces stable  $E_\pm(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi_0$ . On rappelle que le sous-espace stable  $E_-(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  est défini comme la limite, lorsque  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$  tend vers  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$ , du sous-espace propre généralisé  $E_-(\tau, \eta)$  associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ . Ainsi, d'après l'analyse précédente, il est constitué des trois types de sous-espaces suivants.

- Les sous-espaces propres généralisés associés aux valeurs propres elliptiques de partie réelle strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  du point (ii) de la Proposition 1.3.2 précédente.
- Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $i\underline{\xi}$  hyperboliques du point (iii) de la Proposition 1.3.2 tels que la fréquence caractéristique réelle  $(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$  associée est une fréquence rentrante. On note que dans ce cas, le sous-espace propre associé à une valeur propre hyperbolique  $i\underline{\xi}$  de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  est donné par le noyau  $\ker L(0, (\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi}))$ .
- Une partie de chaque sous-espace propre généralisé associé à une valeur propre glancing du point (iv) de la Proposition 1.3.2.

Cela mène au résultat suivant, qui décrit précisément les sous-espaces stables  $E_\pm(\tau, \eta)$  pour  $(\tau, \eta)$  dans  $\Xi_0$ , dont la formulation provient de [Wil96], et a été adaptée à l'Hypothèse 1.7 assurant que les fréquences glancing sont d'ordre 2. On énonce également le résultat sous l'Hypothèse 1.2 de stricte hyperbolicité pour simplifier les notations, et puisque c'est cette hypothèse, plutôt que

l'Hypothèse 1.1 d'hyperbolicité à multiplicité constante, qui sera adoptée dans le reste de cette thèse.

**Proposition 1.3.4** ([Wil96], Proposition 3.4). *Soit  $(\tau, \eta) \in \Xi_0$ . On note  $i\xi_j(\tau, \eta)$  pour  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\tau, \eta)$  les valeurs propres complexes distinctes de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ , et si  $\xi_j(\tau, \eta)$  est réel, on note  $\alpha_j(\tau, \eta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$  la fréquence caractéristique réelle associée. L'ensemble  $\{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\tau, \eta)\}$  s'écrit alors comme l'union disjointe*

$$\{1, \dots, \mathcal{M}(\tau, \eta)\} = \mathcal{G}(\tau, \eta) \cup \mathcal{R}(\tau, \eta) \cup \mathcal{P}(\tau, \eta) \cup \mathcal{S}(\tau, \eta) \cup \mathcal{N}(\tau, \eta),$$

où les ensembles  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$ ,  $\mathcal{R}(\tau, \eta)$ ,  $\mathcal{P}(\tau, \eta)$ ,  $\mathcal{S}(\tau, \eta)$  et  $\mathcal{N}(\tau, \eta)$  correspondent aux indices  $j$  tels que respectivement  $\alpha_j(\tau, \eta)$  est glancing,  $\alpha_j(\tau, \eta)$  est rentrante,  $\text{Im } \xi_j(\tau, \eta)$  est strictement positive,  $\alpha_j(\tau, \eta)$  est sortante et  $\text{Im } \xi_j(\tau, \eta)$  est strictement négative.

On a alors la décomposition de  $E_-(\tau, \eta)$  suivante

$$(1.3.15) \quad E_-(\tau, \eta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\tau, \eta)} E_-^j(\tau, \eta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\tau, \eta)} E_-^j(\tau, \eta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\tau, \eta)} E_-^j(\tau, \eta),$$

où pour chaque indice  $j$ , le sous-espace  $E_-^j(\tau, \eta)$  est précisément décrit comme suit.

- i) Si  $j \in \mathcal{P}(\tau, \eta)$ , l'espace  $E_-^j(\tau, \eta)$  est l'espace propre généralisé de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  associé à la valeur propre  $i\xi_j(\tau, \eta)$ .
- ii) Si  $j \in \mathcal{R}(\tau, \eta)$ , on a  $E_-^j(\tau, \eta) = \ker L(0, \alpha_j(\tau, \eta))$ , qui est de dimension 1.
- iii) Si  $j \in \mathcal{G}(\tau, \eta)$ , alors  $E_-^j(\tau, \eta)$  est de dimension 1 et est engendré par un vecteur propre de  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  associé à la valeur propre  $i\xi_j(\tau, \eta)$ .

De même, le sous-espace instable  $E_+(\tau, \eta)$  s'écrit

$$(1.3.16) \quad E_+(\tau, \eta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\tau, \eta)} E_+^j(\tau, \eta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{S}(\tau, \eta)} E_+^j(\tau, \eta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\tau, \eta)} E_+^j(\tau, \eta),$$

avec une description similaire des sous-espaces  $E_+^j(\tau, \eta)$ .

On note que d'après ce résultat, si pour une fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$ , l'ensemble  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$  est vide, alors  $\mathbb{C}^N$  s'écrit comme la somme directe

$$\mathbb{C}^N = E_-(\tau, \eta) \oplus E_+(\tau, \eta).$$

C'est une des constatations qui, dans toute la suite, nous pousse à supposer que les ensembles de fréquences considérés dans les problèmes ne contiennent pas de fréquence  $(\tau, \eta)$  telle que l'ensemble  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$  est non vide.

On conclut cette sous-partie par une classification des fréquences du bord  $\Xi_0$  au regard de la décomposition des espaces  $E_\pm(\tau, \eta)$  de la Proposition 1.3.4 précédente, et donc une classification des types de mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii. On distingue 4 types de fréquences  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$ , en utilisant la structure de blocs de la Proposition 1.3.2 et les notations de la Proposition 1.3.4 précédente.

- Une fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$  est dite *elliptique* si la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  n'admet que des valeurs propres elliptiques, c'est-à-dire de partie réelle non nulle, et donc si son écriture par blocs de la Proposition 1.3.2 ne contient que des blocs de type (i) ou (ii). De manière équivalente, une fréquence  $(\tau, \eta)$  est elliptique si les ensembles  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$ ,  $\mathcal{R}(\tau, \eta)$  et  $\mathcal{S}(\tau, \eta)$  sont vides.
- À l'inverse, une fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$  est dite *hyperbolique* si la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  n'admet que des valeurs propres hyperboliques, c'est-à-dire si son écriture par blocs de la Proposition 1.3.2 ne contient que des blocs de type (iii). En d'autres termes, une fréquence  $(\tau, \eta)$  est hyperbolique si les ensembles  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$ ,  $\mathcal{P}(\tau, \eta)$  et  $\mathcal{N}(\tau, \eta)$  sont vides.



- Une fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$  est dite *mixte elliptique-hyperbolique*, ou simplement *mixte*, si la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  admet des valeurs propres elliptiques et hyperboliques, mais pas glancing, c'est-à-dire si son écriture par blocs de la Proposition 1.3.2 ne contient pas de bloc de type (iv). De manière équivalente, une fréquence  $(\tau, \eta)$  est mixte elliptique-hyperbolique si l'ensemble  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$  est vide.
- Enfin, une fréquence  $(\tau, \eta)$  de  $\Xi_0$  est dite *glancing* si la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  admet au moins une valeur propre glancing, donc si sa décomposition par blocs de la Proposition 1.3.2 admet au moins un bloc de type (iv). En d'autres termes, une fréquence  $(\tau, \eta)$  est dite glancing si l'ensemble  $\mathcal{G}(\tau, \eta)$  est non vide.

Cela donne alors une classification des conditions Kreiss-Lopatinskii faibles possibles, suivant la partie de l'ensemble  $\Sigma_0$ , parmi les quatre définis précédemment, dans laquelle se trouve  $\Upsilon$  le lieu de mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans  $\Sigma_0$ . On suit dans la fin de cette sous-partie la présentation de [Ben15].

Historiquement, le premier cas étudié est celui où la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère sur des fréquences  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  elliptiques de  $\Sigma_0$ , c'est-à-dire où l'ensemble de dégénérescence  $\Upsilon$  ne contient que des fréquences  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  elliptiques et où, pour  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Upsilon$ ,

$$\dim \ker B \cap E_-(\underline{\tau}, \underline{\eta}) = 1.$$

Sablé-Tougeron montre dans [ST88], que, sous cette condition de Kreiss-Lopatinskii faible, le problème aux limites non-linéaire associé est faiblement bien posé dans les espaces de Sobolev, au prix d'une perte de dérivée entre le terme de forçage au bord et la trace au bord de la solution.

Coulombel traite dans [Cou02] du cas d'une dégénérescence dans la zone mixte elliptique-hyperbolique et, dans [Cou05], de celui d'une dégénérescence dans la zone hyperbolique pour laquelle l'espace  $\ker B \cap E_-(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  est de dimension 1. Les deux travaux traitent du cas linéaire, et montrent que les problèmes aux limites associés sont faiblement bien posés. En utilisant des développements d'optique géométrique, Benoit montre dans [Ben14] que les estimations avec perte de dérivées obtenues dans [Cou02 ; Cou05] sont optimales. Serre prouve dans [Ser05] des estimations sans pertes de dérivées mais pour des opérateurs *filtrés*, pour une certaine classe de problèmes ne satisfaisant pas le condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

Le cas d'une dégénérescence dans la zone hyperbolique pour un problème non-linéaire est traité, dans le cas d'une frontière caractéristique (c'est-à-dire lorsque  $A_d(0)$  n'est pas inversible), dans [CS08].

Dans le Chapitre 5 de cette thèse, on s'intéressera à un problème aux limites satisfaisant une condition de Kreiss-Lopatinskii faible, pour laquelle l'ensemble de dégénérescence  $\Upsilon$  est inclus dans la zone hyperbolique de  $\Sigma_0$ . On supposera également que lorsque l'intersection  $\ker B \cap E_-(\tau, \eta)$  est non-triviale, elle est de dimension 1, ainsi qu'une seconde condition technique sur cette intersection.

## 1.4 Optique géométrique multiphasée et cadre fonctionnel

Dans cette thèse, on s'intéresse à des problèmes d'optique géométrique *multiphasés*, c'est-à-dire que dans le problème (1.1.6), le terme source  $f^\varepsilon$  ou le terme de forçage au bord  $g^\varepsilon$  oscillent suivant plusieurs phases non-colinéaires. Pour simplifier la discussion de cette partie, on suppose ici que le terme source  $f^\varepsilon$  est nul. Concernant le terme de forçage au bord  $g^\varepsilon$ , on suppose plus précisément qu'il existe des fréquences  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , avec  $m \geq 2$ , indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ , telles que  $g^\varepsilon$  s'écrive

$$(1.4.1) \quad g^\varepsilon\left(t, y, \frac{\Phi(t, y)}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{n_0} G\left(t, y, \frac{(t, y) \cdot \varphi_1}{\varepsilon}, \dots, \frac{(t, y) \cdot \varphi_m}{\varepsilon}\right),$$

où  $G$  est une fonction de  $(-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_{\theta_1} \times \cdots \times \mathbb{T}_{\theta_m}$ , où l'on a noté  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le tore à une dimension, et l'on notera  $\mathbb{T}^m$  le tore à  $m$  dimensions. Une telle fonction donnée par (1.4.1) est appelée *quasi-périodique*. En effet, si  $m \geq 2$  et si les fréquences  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  sont indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ , la fonction donnée par (1.4.1) n'est pas périodique. On peut cependant utiliser le développement en séries de Fourier de la fonction  $G$  pour écrire

$$g^\varepsilon\left(t, y, \frac{\Phi(t, y)}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{n_0} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Z}} G_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(t, y) e^{i\lambda_1(t, y) \cdot \varphi_1 / \varepsilon} \dots e^{i\lambda_m(t, y) \cdot \varphi_m / \varepsilon}.$$

On sera même amené, dans le Chapitre 5 de ce manuscrit, à considérer une forme plus générale de terme de forçage au bord, où les ordres en  $\varepsilon$  des amplitudes associées à chaque fréquence sont différents, c'est-à-dire

$$(1.4.2) \quad g^\varepsilon\left(t, y, \frac{\Phi(t, y)}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{n_1} G_1\left(t, y, \frac{(t, y) \cdot \varphi_1}{\varepsilon}\right) + \cdots + \varepsilon^{n_m} G_m\left(t, y, \frac{(t, y) \cdot \varphi_m}{\varepsilon}\right),$$

où les fonctions  $G_1, \dots, G_m$  sont des fonctions de  $(-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_\theta$ . On a vu que l'on cherche une solution approchée du problème (1.1.6) sous la forme d'une série formelle de la forme (1.1.7) que l'on rappelle ici :

$$(1.4.3) \quad u^{\varepsilon, \text{app}}(t, x) \sim \varepsilon^{N_0} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n\left(t, x, \frac{\Lambda(t, x)}{\varepsilon}\right),$$

où le profil principal  $U_0$ , d'amplitude d'ordre  $\varepsilon^{N_0}$ , est a priori non nul. La question est de déterminer un cadre fonctionnel adapté pour les profils  $(U_n)_{n \geq 0}$  du développement asymptotique (1.4.3).

Dans le cas d'un problème linéaire tel que le problème de Cauchy (1.2.3), on peut, par linéarité, ne considérer qu'une phase  $\varphi$  au bord (dans le cas du problème (1.2.3) on s'intéressait au problème de Cauchy, et donc les oscillations se trouvaient à l'instant initial et non au bord), et même ne considérer qu'une harmonique de la fonction périodique en jeu. On note également que l'on peut ne considérer dans l'ansatz pour la solution approchée qu'un seul relèvement de la fréquence  $\varphi$ , c'est-à-dire, pour le cas de la section 1.2.2, une seule fréquence caractéristique  $(\tau, \varphi)$  avec  $\tau \in \mathbb{R}$ . On opère ensuite une superposition des solutions obtenues par linéarité.

Ainsi, dans le cas linéaire, comme on a pu le voir en section 1.2.2, un cadre fonctionnel simple suffit pour construire un développement asymptotique, comme celui des espaces de Sobolev de régularité infinie si l'on souhaite construire le développement asymptotique à tout ordre. Cependant, si le problème présente des non-linéarités, on ne peut plus superposer les solutions par linéarité, et il n'est donc pas toujours possible de ne considérer qu'une seule fréquence au bord, ni un seul relèvement de celle-ci pour la solution approchée. On cherche donc dans cette partie à étudier l'ensemble des fréquences qui pourraient être créées à partir des fréquences  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  au bord, et à en déduire un cadre fonctionnel adapté pour construire le développement asymptotique associé. Dans toute cette partie, on réalise la discussion pour des problèmes aux limites, puisque ce sont ceux qui nous intéressent dans ce manuscrit, mais celle-ci est également valable pour des problèmes de Cauchy, et certaines références que l'on donne se placent d'ailleurs dans ce cadre. D'autre part, tous les problèmes aux limites mentionnés dans cette partie sont supposés stables, c'est-à-dire vérifiant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (Hypothèse 1.5).

### 1.4.1 Cas non-linéaire monophasé : fonctions quasi-périodiques

On commence par s'intéresser au cadre *monophasé* (c'est-à-dire avec une seule phase dans le terme source, le terme initial ou le terme de bord) non-linéaire puisque l'on a vu que celui-ci présente déjà des différences avec le cadre linéaire. On considère donc un terme de bord périodique

de la forme

$$(1.4.4) \quad g^\varepsilon\left(t, y, \frac{\Phi(t, y)}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{n_0} G\left(t, y, \frac{(t, y) \cdot \varphi}{\varepsilon}\right),$$

où  $G$  est une fonction de  $(-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_\theta$ . Pour prescrire le cadre fonctionnel adapté à l'étude d'un problème d'optique géométrique avec un tel terme de bord, il nous faut dans un premier temps réaliser une étude des fréquences qui pourraient être présentes dans la solution, créées à partir de la fréquence au bord  $\varphi$ .

De la même manière que pour le problème de Cauchy traité dans la section 1.2.2, la fréquence  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  est relevée pour des temps positifs en une fréquence  $(\tau, \eta)$  avec  $\tau \in \mathbb{R}$ , ici, la fréquence au bord  $\varphi$  crée, par relèvement à l'intérieur du domaine  $\Omega_T$ , des fréquences  $(\varphi, \xi)$ , avec  $\xi$  dans  $\mathbb{C}$ . Ici  $\xi$  peut être complexe puisque l'opérateur  $L(0, \partial)$  n'est pas hyperbolique dans la direction normale  $x_d$ , et c'était l'hyperbolicité de l'opérateur  $L(0, \partial)$  dans la direction du temps  $t$  qui nous permettait d'affirmer que  $\tau$  était réel dans la section 1.2.2. On discute maintenant des valeurs possibles du complexe  $\xi$ .

On verra que dans tout développement d'optique géométrique, le profil principal  $U_0$  est polarisé, de manière analogue à la condition de polarisation (1.2.6a) de l'amplitude principale  $a_0$  du développement asymptotique de la section 1.2.2. On verra plus précisément que, dans le cas des problèmes aux limites, cette condition de polarisation impose que le produit  $i\xi$  soit une valeur propre de la matrice  $\mathcal{A}(\varphi)$  définie en (1.3.8), de la même manière qu'en section 1.2.2 le réel  $-\tau$  devait être une valeur propre de la matrice  $\sum_{j=1}^d \eta_j A_j$ . On a fait une description précise des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\varphi)$  dans la section 1.3.3, à l'aide de la Proposition 1.3.4, qui tombent en effet dans trois catégories :

- les valeurs propres  $i\xi$  hyperboliques, c'est-à-dire imaginaires pures, et qui sont rentrantes ou sortantes dans les termes de la Définition 1.3.3 ;
- les valeurs propres  $i\xi$  elliptiques, c'est-à-dire de partie réelle non-nulles ;
- et les valeurs propres  $i\xi$  glancing, c'est-à-dire imaginaires pures et glancing suivant la Définition 1.3.3.

D'une part, puisque seules les valeurs propres  $i\xi$  hyperboliques qui sont rentrantes nécessitent une condition au bord, qui oscille à la fréquence  $\varphi$ , seules ces valeurs propres parmi les valeurs propres hyperboliques sont créées dans un premier temps. D'autre part, les valeurs propres elliptiques  $i\xi$  de partie réelle strictement positive génèrent des ondes de fréquences  $(\varphi, \xi)$  s'écrivant

$$a(t, x) e^{i(t, y) \cdot \varphi / \varepsilon + i x_d \xi / \varepsilon},$$

qui sont donc non bornées, et qui ne sont même pas des distributions tempérées. Ces valeurs propres ne sont ainsi pas présentes lorsque l'on considère des solutions bornées. Enfin, on a déjà mentionné que les valeurs propres  $i\xi$  glancing posent un certain nombre de problèmes, c'est pourquoi, dans ce manuscrit, on suppose qu'elles ne sont pas présentes dans les ensembles de fréquences mis en jeu. Dans les termes de la sous-partie 1.3.3, cela revient à supposer ici que la fréquence au bord  $\varphi$  n'est pas glancing. En résumé, on obtient donc à ce stade, par relèvement à l'intérieur du domaine de la fréquence  $\varphi$  et polarisation, les fréquences  $(\varphi, \xi)$  où, ou bien  $i\xi$  est une valeur propre hyperbolique rentrante dans la matrice  $\mathcal{A}(\varphi)$ , ou bien  $i\xi$  est une valeur propre elliptique de partie réelle strictement négative de la matrice  $\mathcal{A}(\varphi)$ , c'est-à-dire, avec les notations de la Proposition 1.3.4,

$$\mathcal{F}_0 := \{(\varphi, \xi_j(\varphi)), j \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{P}(\varphi)\}.$$

Interviennent alors les non-linéarités du problème. Par non-linéarité, deux fréquences réelles  $(\varphi, \xi_1)$  et  $(\varphi, \xi_2)$  de l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}_0$  peuvent interagir pour créer la fréquence réelle  $(2\varphi, \xi_1 + \xi_2)$ . De manière schématique, s'il se trouve dans le développement asymptotique deux

ondes

$$a_1(t, x) e^{i(t, y) \cdot \varphi + i x_d \xi_1} \quad \text{et} \quad a_2(t, x) e^{i(t, y) \cdot \varphi + i x_d \xi_2},$$

les non-linéarités du problème peuvent faire se multiplier ces deux ondes, résultant dans l'onde

$$a_1(t, x) a_2(t, x) e^{i(t, y) \cdot 2\varphi + i x_d (\xi_1 + \xi_2)}$$

de fréquence  $(2\varphi, \xi_1 + \xi_2)$ . Cependant, on a vu que, par polarisation, pour le profil principal  $U_0$ , seules les fréquences réelles  $(\varphi, \xi)$  (et leurs harmoniques) telles que  $i\xi$  est hyperbolique, c'est-à-dire qui sont caractéristiques, sont conservées. Ainsi, la fréquence  $(2\varphi, \xi_1 + \xi_2)$  créée par linéarité est conservée dans le profil principal seulement s'il existe une valeur propre  $i\xi_3$  de  $\mathcal{A}(\varphi)$  hyperbolique telle que

$$\xi_1 + \xi_2 = 2\xi_3.$$

C'est ce que l'on appelle le phénomène de *résonance*. Plus généralement, on dira qu'il y a résonance lorsque trois fréquences caractéristiques réelles  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

On a considéré, pour les résonances, que des fréquences réelles, puisque les fréquences évanescentes ne sont pas significatives dans les interactions non-linéaires, de part leur décroissance exponentielle dans la direction normale.

Ainsi, pour notre problème, à cette étape, il peut se créer par résonance les fréquences  $(\varphi, \xi)$  où  $i\xi$  est hyperbolique, et telles que  $(\varphi, \xi)$  n'est pas déjà présente dans l'ensemble de fréquences  $\mathcal{F}_0$ , c'est-à-dire les fréquences sortantes  $(\varphi, \xi_j(\varphi))$  avec  $j \in \mathcal{S}(\varphi)$ . On obtient alors l'ensemble de fréquences suivant

$$\mathcal{F}_1 := \{(\varphi, \xi_j(\varphi)), j \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{P}(\varphi) \cup \mathcal{S}(\varphi)\}.$$

À ce stade, une résonance entre deux fréquences réelles de l'ensemble  $\mathcal{F}_1$  ne crée pas de nouvelle fréquence, et l'ensemble  $\mathcal{F}$  de fréquences créées par relèvement et interaction non-linéaire à partir de la fréquence au bord  $\varphi$  est donc finalement donné par

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 = \{(\varphi, \xi_j(\varphi)), j \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{P}(\varphi) \cup \mathcal{S}(\varphi)\}.$$

En résumé, la fréquence au bord  $\varphi$  engendre à l'intérieur du domaine des fréquences réelles entrantes, et des fréquences évanescentes, et les fréquences réelles entrantes peuvent résonner entre-elles pour créer des fréquences réelles sortantes. Dans le cas d'une fréquence au bord, l'ensemble  $\mathcal{F}$  est fini.

Quant à eux, les profils  $(U_n)_{n \geq 1}$  d'ordres supérieurs ne vérifient plus de condition de polarisation, et ils peuvent donc contenir des fréquences non caractéristiques. On étudie alors la forme que peuvent prendre celles-ci. Les correcteurs  $(U_n)_{n \geq 1}$  héritent de l'ensemble de fréquences  $\mathcal{F}$  du profil principal  $U_0$ , et d'autres fréquences peuvent être créées par interaction non-linéaire. On ne considère là encore que des fréquences réelles, les fréquences évanescentes n'étant pas significatives. En d'autres termes, deux fréquences réelles  $(\varphi, \xi_1)$  et  $(\varphi, \xi_2)$  de  $\mathcal{F}$  peuvent interagir pour former la fréquence réelle  $(2\varphi, \xi_1 + \xi_2)$  qui sera conservée même si elle n'est pas caractéristique. On obtient alors l'ensemble provisoire de fréquences suivant, pour les correcteurs  $(U_n)_{n \geq 1}$ ,

$$\overline{\mathcal{F}}_0 := \mathcal{F} \cup \{(2\varphi, \xi_j(\varphi) + \xi_k(\varphi)) \mid j, k \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{S}(\varphi)\}.$$

Pour les correcteurs  $(U_n)_{n \geq 2}$  d'ordre supérieur à 2, ce procédé d'interactions non-linéaires peut se répéter entre des fréquences de l'ensemble  $\overline{\mathcal{F}}_0$ , pour donner, pour ces correcteurs, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{F}}_1 := \overline{\mathcal{F}}_0 \cup \{(3\varphi, \xi_j(\varphi) + \xi_k(\varphi) + \xi_\ell(\varphi)) \mid j, k, \ell \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{S}(\varphi)\}.$$

On voit que puisque l'on s'intéresse à des correcteurs d'ordre quelconque, ce processus peut

se répéter une infinité de fois. On note  $\xi_1, \dots, \xi_h$  les valeurs propres hyperboliques  $\xi_j(\varphi)$ , avec  $j \in \mathcal{R}(\varphi) \cup \mathcal{S}(\varphi)$ , et l'on obtient donc l'ensemble infini dénombrable de fréquences suivant pour les correcteurs  $(U_n)_{n \geq 1}$  d'ordre quelconque,

$$\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \cup \left\{ \left( (\lambda_1 + \dots + \lambda_h) \varphi, \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_h \xi_h \right) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \mathbb{Z}^h \setminus \{0\} \right\}.$$

Maintenant que l'ensemble des fréquences  $\overline{\mathcal{F}}$  pouvant être a priori présentes dans les profils  $(U_n)_{n \geq 0}$  du développement asymptotique (1.4.3) est connu, on s'intéresse à ce que prescrit cet ensemble de fréquences sur le cadre fonctionnel nécessaire pour construire les profils  $(U_n)_{n \geq 0}$ .

Le cadre fonctionnel choisi pour les profils  $(U_n)_{n \geq 0}$  doit permettre de considérer une superposition quelconque de profils de fréquences dans  $\overline{\mathcal{F}}$ , c'est-à-dire des séries de la forme

$$(1.4.5) \quad \sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon}.$$

On décompose l'ensemble  $\overline{\mathcal{F}}$  comme l'union disjointe de l'ensemble fini des fréquences de partie réelle strictement négative,  $\overline{\mathcal{F}}^{\text{ev}}$  et de l'ensemble infini dénombrable des fréquences réelles  $\overline{\mathcal{F}}^{\text{osc}}$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}^{\text{ev}} &:= \{(\varphi, \xi_j(\varphi)), j \in \mathcal{P}(\varphi)\}, \\ \overline{\mathcal{F}}^{\text{osc}} &:= \left\{ \left( (\lambda_1 + \dots + \lambda_h) \varphi, \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_h \xi_h \right) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \mathbb{Z}^h \setminus \{0\} \right\}, \end{aligned}$$

et l'on décompose la somme (1.4.5) selon cette union :

$$\sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} = \sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}^{\text{ev}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} + \sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}^{\text{osc}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon}.$$

Concernant la partie *évanescence*

$$(1.4.6) \quad \sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}^{\text{ev}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} = \sum_{j \in \mathcal{P}(\varphi)} U_j^{\text{ev}}(t, x) e^{i(t, y) \cdot \varphi / \varepsilon} e^{ix_d \xi_j(\varphi) / \varepsilon},$$

constituée de profils associés à des fréquences  $(\varphi, \xi_j(\varphi))$  où la valeur propre elliptique  $i\xi_j(\varphi)$  est de partie réelle strictement négative, on choisit de la représenter par une décroissance exponentielle par rapport à  $x_d/\varepsilon$ , uniforme par rapport à  $j \in \mathcal{P}(\varphi)$ , puisque l'ensemble  $\mathcal{P}(\varphi)$  est fini. On définit  $\psi_d := x_d/\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}_+$  la nouvelle *variable rapide normale*. On note par ailleurs que les profils de la forme (1.4.6) sont périodiques par rapport à la *variable rapide tangentielle*  $\theta := (t, y) \cdot \varphi / \varepsilon$ . L'espace des profils évanescents est donc défini comme l'ensemble des fonctions  $U^{\text{ev}}$  de  $(t, x)$  dans  $\Omega_T$ , périodiques par rapport à  $\theta$ , et exponentiellement décroissantes par rapport à  $\psi_d$ .

On écrit la partie *oscillante* comme

$$(1.4.7) \quad \sum_{\alpha \in \overline{\mathcal{F}}^{\text{osc}}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} = \sum_{\substack{(\lambda_1, \dots, \lambda_h) \\ \in \mathbb{N}^h \setminus \{0\}}} U_{\lambda_1, \dots, \lambda_h}(t, x) e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_h)(t, y) \cdot \varphi / \varepsilon} e^{i\lambda_1 \xi_1 x_d / \varepsilon} \dots e^{i\lambda_h \xi_h x_d / \varepsilon}.$$

On note alors qu'une telle fonction est là encore périodique par rapport à la variable rapide tangentielle  $\theta = (t, y) \cdot \varphi / \varepsilon$ , et quasi-périodique par rapport à la variable rapide normale  $\psi_d = x_d/\varepsilon$ , suivant des fréquences  $\xi_1, \dots, \xi_h$ . On représente donc les profils oscillants de la forme (1.4.7) comme des fonctions périodiques par rapport à  $\theta$  et quasi-périodiques de fréquences  $\xi_1, \dots, \xi_h$  par rapport à  $\psi_d$ , qui s'écrivent

$$U(t, x, \theta, \xi_1 \psi_d, \dots, \xi_h \psi_d),$$

où  $U$  est périodique par rapport à ses  $h + 1$  dernières variables.

En résumé, on a déterminé qu'un cadre fonctionnel adapté à la construction d'un développement d'optique géométrique à tout ordre pour un problème non-linéaire monophasé (c'est-à-dire avec une donnée au bord monophasée) est donné par des fonctions à décroissance exponentielle pour les profils évanescents, et des fonctions quasi-périodiques pour les profils oscillants. C'est le type d'espaces fonctionnels considérés par exemple dans les travaux d'optique géométrique pour des problèmes aux limites quasi-linéaires [CGW11 ; CW13 ; Her15].

### 1.4.2 Cas semi-linéaire multiphasé : algèbres de Wiener

On conserve le cadre non-linéaire, et plus précisément dans cette sous-partie un cadre semi-linéaire, et l'on considère maintenant un problème multiphasé, c'est-à-dire avec plusieurs phases  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ,  $m \geq 2$ , au bord. On se donne donc un terme de forçage au bord  $g^\varepsilon$  de la forme (1.4.1), et l'on cherche à déterminer un cadre fonctionnel adapté pour construire un développement d'optique géométrique pour le problème aux limites semi-linéaire associé. On justifie ici que la multiplicité des fréquences au bord engendre pour la solution approchée, par non-linéarité, une infinité dénombrable de fréquences à l'intérieur du domaine, et ce dès le profil principal  $U_0$ . On a vu que les correcteurs  $(U_n)_{n \geq 1}$  dans le développement asymptotique (1.4.3) comportent une infinité de fois plus de fréquences que le profil principal  $U_0$ , et l'on se concentre donc ici sur la construction du profil principal et le cadre fonctionnel adapté à celle-ci.

De la même manière que pour le cadre monophasé, il nous faut dans un premier temps déterminer les fréquences pouvant a priori se trouver dans la solution approchée, à partir des fréquences au bord  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ .

Premièrement, les fréquences au bord  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  interagissent à travers les non-linéarités, pour former toute fréquence au bord s'écrivant comme une combinaison

$$\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Z}$ , autrement dit, le groupe de fréquences au bord

$$\mathcal{F}_b := \varphi_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \varphi_m \mathbb{Z}.$$

De la même manière que pour le cas monophasé de la sous-partie 1.4.1 précédente, toute fréquence  $\zeta$  non nulle de l'ensemble dénombrable de fréquences au bord  $\mathcal{F}_b$  est relevée à l'intérieur du domaine en des fréquences  $(\zeta, \xi)$ . Là encore, le profil principal  $U_0$  étant polarisé, seuls les relèvements  $(\zeta, \xi)$  tels que  $i\xi$  est une valeur propre de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  sont conservées dans le profil principal  $U_0$ . Une fois de plus, on suppose qu'il n'existe pas de telles valeurs propres  $i\xi$  glancing, c'est-à-dire que l'ensemble  $\mathcal{F}_b$  ne rencontre pas la zone glancing de  $\Xi_0$ , notée  $\mathcal{G}$ . On formalise cette hypothèse puisqu'on la retrouvera tout au long de ce manuscrit.

**Hypothèse 1.8.** *On suppose qu'il n'y a pas de fréquence glancing dans le groupe de fréquences au bord  $\mathcal{F}_b$ , c'est-à-dire,*

$$\mathcal{F}_b \cap \mathcal{G} = \emptyset.$$

D'autre part, puisque l'on considère des solutions bornées, on ne prend en compte, parmi les valeurs propres  $i\xi$  de partie réelle non nulle, que celles de partie réelle strictement négative. Concernant les valeurs propres hyperboliques  $i\xi$  imaginaires pures, seulement celles correspondant aux fréquences caractéristiques réelles  $(\zeta, \xi)$  rentrantes sont créées à la première étape. On obtient alors l'ensemble provisoire de fréquences créées par relèvement à l'intérieur du domaine suivant

$$\mathcal{F}_0 := \{0\} \cup \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta)\}.$$

Par non-linéarité, deux fréquences réelles  $(\zeta_1, \xi_1)$  et  $(\zeta_2, \xi_2)$  de  $\mathcal{F}_0 \setminus \{0\}$  peuvent alors interagir pour former la fréquence  $(\zeta_1 + \zeta_2, \xi_1 + \xi_2)$ . Le profil principal  $U_0$  étant polarisé, seules de telles

fréquences  $(\zeta_1 + \zeta_2, \xi_1 + \xi_2)$  qui sont caractéristiques sont conservées dans la solution. En d'autres termes, si l'on note  $\zeta := \zeta_1 + \zeta_2 \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , la fréquence  $(\zeta_1 + \zeta_2, \xi_1 + \xi_2)$  est conservée si et seulement si il existe  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)$  tel que  $\xi_1 + \xi_2 = \xi_j(\zeta)$ . C'est une forme plus générale du phénomène de *résonance*, qui s'écrit

$$(\zeta_1, \xi_1) + (\zeta_2, \xi_2) = (\zeta, \xi_j(\zeta)).$$

De tels résonances induisent, dans les équations pour les profils, des termes quadratiques qui peuvent s'avérer difficiles à traiter, c'est pourquoi l'on fait en général des hypothèses sur les résonances possibles, concernant leur nombre, le type de fréquences qu'elles impliquent, ou encore des propriétés qu'elles vérifient.

Ainsi, par non-linéarité, il peut se créer des fréquences  $(\zeta, \xi_j(\zeta))$  avec  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  qui n'étaient pas déjà présentes dans l'ensemble  $\mathcal{F}_0$ , c'est-à-dire des fréquences sortantes, avec  $j \in \mathcal{S}(\zeta)$ . On obtient donc l'ensemble infini dénombrable de fréquences

$$\mathcal{F}_1 := \{0\} \cup \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}.$$

De nouvelles résonances entre fréquences de l'ensemble  $\mathcal{F}_1$  ne créent pas de fréquences qui n'étaient pas déjà présentes dans l'ensemble  $\mathcal{F}_1$ , et donc l'ensemble des fréquences créées à l'intérieur du domaine par relèvement et interaction non-linéaire à partir des fréquences au bord  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  est donné par

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 = \{0\} \cup \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}.$$

D'après l'étude que l'on vient de mener, un cadre fonctionnel adapté à la construction du profil principal  $U_0$  doit pouvoir permettre de considérer des superpositions d'ondes de la forme

$$\begin{aligned} U^*(t, x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{F} \setminus \{0\}} U_\alpha(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} \\ = U^*(t, x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{ev}}} U_\alpha^{\text{ev}}(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} + \sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{osc}}} U_\alpha^{\text{osc}}(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon}, \end{aligned}$$

où l'on a décomposé l'ensemble  $\mathcal{F} \setminus \{0\}$  comme l'union disjointe de l'ensemble des fréquences évanescentes, de partie réelle strictement négative  $\mathcal{F}^{\text{ev}}$ , et de l'ensemble des fréquences réelles  $\mathcal{F}^{\text{osc}}$ , définis comme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\text{ev}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{P}(\zeta)\}, \\ \mathcal{F}^{\text{osc}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}. \end{aligned}$$

On écrit la partie oscillante comme

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{osc}}} U_\alpha^{\text{osc}}(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} &= \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{osc}}(t, x) e^{i(t, y) \cdot \zeta / \varepsilon} e^{i \xi_j(\zeta) x_d / \varepsilon} \\ &= \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{osc}}(t, x) e^{i \theta \cdot \zeta} e^{i \xi_j(\zeta) \psi_d}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les variables rapides tangentielles  $\theta := (t, y)/\varepsilon$  et normale  $\psi_d = x_d/\varepsilon$ . À l'inverse de le groupe engendré par l'ensemble  $\overline{\mathcal{F}}^{\text{osc}}$  de la sous-partie 1.4.1 précédente, l'ensemble  $\mathcal{F}^{\text{osc}}$  n'est en général pas finiment engendré, et le profil oscillant n'est donc pas quasi-périodique. On est contraint de se placer dans un cadre de fonctions *presque-périodiques*, c'est-à-dire qui s'écrivent formellement comme des séries de polynômes trigonométriques. Pour donner un sens rigoureux à cette série, plusieurs approches sont possibles. Williams choisit dans [Wil96], pour la construction

du profil principal d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour un problème aux limites semi-linéaire, celle des *algèbres de Wiener*, voir aussi [JMR94] pour le problème de Cauchy. Elle consiste à requérir une convergence de type  $\ell^1$  de la série, c'est-à-dire dans notre cas, demander

$$(1.4.8) \quad \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} \|U_{\zeta,j}^{\text{osc}}\| < +\infty,$$

dans une certaine norme d'espaces de fonctions  $\|\cdot\|$ . Il reste à convenir de cette norme  $\|\cdot\|$ , qui devra être adaptée à l'étude des équations pour le profil principal  $U_0$ . Cela définit un espace de profils oscillants.

Concernant la partie évanescence  $\sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{ev}}} U_{\alpha}^{\text{ev}}(t, x) e^{i(t,x) \cdot \alpha / \varepsilon}$ , on écrit de la même manière, dans les variables rapides tangentielles  $\theta = (t, y) / \varepsilon$  et normale  $\psi_d = x_d / \varepsilon$ ,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{ev}}} U_{\alpha}^{\text{ev}}(t, x) e^{i(t,x) \cdot \alpha / \varepsilon} = \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} e^{i\theta \cdot \zeta} \sum_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} U_{\zeta,j}^{\text{ev}}(t, x) e^{i\xi_j(\zeta) \psi_d}.$$

On note que le profil évanescence est donc quasi-périodique par rapport aux variables rapides tangentielles  $\theta$ , et l'on représente chaque profil

$$U_{\zeta}^{\text{ev}}(t, x, \psi_d) := \sum_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} U_{\zeta,j}^{\text{ev}}(t, x) e^{i\xi_j(\zeta) x_d / \varepsilon}$$

à travers une décroissance exponentielle par rapport à la variable rapide  $\psi_d$ , uniforme par rapport à  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ , mais dont le taux de décroissance dépend de  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ . On écrit donc les profils évanescents  $U^{\text{ev}}$  comme

$$U^{\text{ev}}(t, x, \theta, \psi_d) = \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} e^{i\theta \cdot \zeta} U_{\zeta}^{\text{ev}}(t, x, \psi_d),$$

où chaque fonction  $U_{\zeta}^{\text{ev}}$  est exponentiellement décroissante (dont le taux de décroissance dépend de  $\zeta$ ) par rapport à  $\psi_d$ . On choisit, par cohérence avec les profils oscillants, une convergence de type  $\ell^1$  de la série, c'est-à-dire,

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \|U_{\zeta}^{\text{ev}}\| < +\infty,$$

pour une certaine norme de fonctions  $\|\cdot\|$ . Le cadre fonctionnel décrit ici pour les profils évanescents est, comme pour les profils oscillants, celui introduit dans [Wil96].

En résumé, pour la construction du profil principal d'un développement d'optique géométrique multiphasé semi-linéaire, un cadre fonctionnel adapté est constitué des fonctions presque-périodiques au sens des algèbres de Wiener pour les profils oscillants, et des fonctions quasi-périodiques à décroissance exponentielle pour les profils évanescents. En outre de [Wil96], on peut retrouver l'utilisation de ce cadre fonctionnel des fonctions presque périodiques des algèbres de Wiener dans [JMR94]. On décrit au Chapitre 3 de cette thèse comment, dans [Wil96], le cadre fonctionnel introduit ici permet de construire le profil principal d'un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites semi-linéaire.

### 1.4.3 Problème de Cauchy quasi-linéaire multiphasé : fonctions presque-périodiques au sens de Bohr

Le cœur de notre discussion se situe dans les problèmes quasi-linéaires, puisque les contributions de cette thèse se placent dans ce cadre. Bien que l'étude des fréquences créées à l'intérieur du domaine à partir des fréquences au bord  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  ne change pas par rapport au cas semi-linéaire de la section 1.4.2, la différence de type de non-linéarités entre les cas semi-linéaire et quasi-linéaire



induit des différences dans les cadres fonctionnels à considérer. On se place toujours dans un cadre multiphasé, c'est-à-dire où le terme de forçage  $g^\varepsilon$  dans (1.4.1) oscille suivant des fréquences  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , avec  $m \geq 2$ .

De la même manière que pour le cas semi-linéaire de la section 1.4.2, les fréquences au bord engendrent, par non-linéarité, le groupe de fréquences au bord

$$\mathcal{F}_b := \varphi_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \varphi_m \mathbb{Z},$$

qui, à son tour, par relèvement et résonances, crée l'ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine

$$\mathcal{F} := \{0\} \sqcup \mathcal{F}^{\text{ev}} \sqcup \mathcal{F}^{\text{osc}}$$

où les ensembles  $\mathcal{F}^{\text{ev}}$  de fréquences évanescentes et  $\mathcal{F}^{\text{osc}}$  de fréquences oscillantes sont définis comme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\text{ev}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{P}(\zeta)\}, \\ \mathcal{F}^{\text{osc}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}. \end{aligned}$$

et où le symbole  $\sqcup$  désigne l'union disjointe.

Ainsi, puisque l'on est en présence du même ensemble  $\mathcal{F}$  de fréquences que dans le cas de la section 1.4.2 précédente, il nous faut là encore, pour les profils oscillants, considérer des espaces de fonctions presque-périodiques. On justifie maintenant, de manière schématique, pourquoi le cadre des algèbres de Wiener de la section 1.4.2 n'est pas adapté à l'étude des problèmes aux limites quasi-linéaires.

Pour un problème semi-linéaire tel que celui de la section 1.4.2, le profil principal  $U_0$  du développement asymptotique (1.4.3) vérifie un problème semi-linéaire de la forme

$$L U_0 = f(U_0),$$

associée à des conditions au bord et initiales, et où  $L$  est un opérateur linéaire à coefficients constants, et  $f$  est une fonction polynomiale. Ce problème est résolu à l'aide d'un schéma itératif de la forme

$$(1.4.9) \quad L U_0^{k+1} = f(U_0^k),$$

et les non-linéarités se trouvent alors totalement dans le terme source  $f(U_0^k)$ . On étudie donc le problème linéaire

$$(1.4.10) \quad L V = F,$$

et l'on cherche notamment à obtenir des estimations a priori pour celui-ci, utiles pour faire converger le schéma itératif (1.4.9). Par linéarité du problème, on peut étudier l'équation (1.4.10) fréquence par fréquence et en déduire des estimations pour la norme  $\|\cdot\|$  utilisée dans (1.4.8). On somme alors ces estimations pour obtenir une estimation a priori dans la norme (1.4.8) des algèbres de Wiener.

Ce type de raisonnement n'est pas applicable pour un problème quasi-linéaire, et une convergence de type  $\ell^1$  n'est donc pas adaptée à ce type de non-linéarités. Il nous faut ainsi une notion différente, au sens des espaces fonctionnels, pour qualifier la presque-périodicité, c'est-à-dire une autre façon de rendre rigoureuses les séries de la forme

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{osc}}(t, x) e^{i\theta \cdot \zeta} e^{i\xi_j(\zeta)\psi_d}.$$

Dans [JMR95], les auteurs construisent le premier terme d'un développement asymptotique pour un problème de Cauchy quasi-linéaire. On va donc décrire le cadre fonctionnel adopté dans ce travail, et, dans la sous-partie suivante, déterminer comment celui-ci peut être adapté au cadre des problèmes aux limites.

Dans [JMR95], le cadre est celui de problèmes de Cauchy, et l'on considère donc non pas des fréquences au bord  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , mais des fréquences à l'instant initial  $\eta_1, \dots, \eta_m$  de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , avec  $m \geq 2$ , indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . Une même étude que celles précédentes peut être menée quant aux fréquences créées pour les temps positifs, à partir des fréquences initiales  $\eta_1, \dots, \eta_m$ . La seule différence est que, dans le cadre des problèmes de Cauchy, l'opérateur  $L(0, \partial)$  étant hyperbolique dans la direction  $t$ , les relèvements de fréquence initiale  $\eta$  en des fréquences  $(\tau, \eta)$  pour des temps positifs sont toujours réels. Plus précisément, si  $\eta$  est une fréquence initiale,  $(\tau, \eta)$  est un relèvement de  $\eta$  qui sera conservé dans la solution si et seulement si  $(\tau, \eta)$  est caractéristique réelle, c'est-à-dire si et seulement si  $-\tau$  est une valeur propre de la matrice  $\sum_{j=1}^d \eta^j A_j(0)$ , où l'on a décomposé  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^d$  comme  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^d)$ .

On obtient tout d'abord l'ensemble de fréquences initiales

$$\mathcal{F}_i := \eta_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \eta_m \mathbb{Z}.$$

En utilisant les notations de l'Hypothèse 1.1 d'hyperbolicité à multiplicité constante, cet ensemble  $\mathcal{F}_i$  crée, par relèvement et résonances l'ensemble de fréquences pour les temps positifs suivant

$$\mathcal{F} := \{0\} \cup \{(\tau_k(\eta), \eta) \mid \eta \in \mathcal{F}_i \setminus \{0\}, k = 1, \dots, q\}.$$

On souhaite donc un cadre fonctionnel permettant de considérer des superpositions d'ondes de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \mathcal{F}_i \setminus \{0\}} \sum_{k=1}^q U_{\eta, k}(t, x) e^{ix \cdot \eta / \varepsilon} e^{i\tau_k(\eta)t / \varepsilon} \\ &= \sum_{\substack{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} \sum_{k=1}^q U_{\lambda, k}(t, x) e^{i\lambda_1 x \cdot \eta_1 / \varepsilon} \dots e^{i\lambda_m x \cdot \eta_m / \varepsilon} e^{i\tau_k(\lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_m \eta_m)t / \varepsilon} \\ &= \sum_{\substack{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} \sum_{k=1}^q U_{\lambda, k}(t, x) e^{i\lambda_1 \theta_1} \dots e^{i\lambda_m \theta_m} e^{i\tau_k(\lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_m \eta_m)\delta}, \end{aligned}$$

où l'on a décomposé toute fréquence initiale  $\eta \in \mathcal{F}_i \setminus \{0\}$  comme  $\eta = \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_m \eta_m$  avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , et où l'on a utilisé les variables rapides d'espace  $\theta_j := x \cdot \eta_j / \varepsilon$ , pour  $j = 1, \dots, m$ , et de temps  $\delta := t / \varepsilon$ . On note qu'ici la définition des variables rapides  $\theta$  diffère des précédentes puisqu'elle comprend les fréquences au bord  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , et les profils seront donc périodiques par rapport à  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , et non quasi-périodiques. On souhaite ainsi pouvoir considérer des séries de la forme

$$\sum_{\tau \in \mathbb{R}} U_{\tau}(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m) e^{i\tau\delta},$$

où la somme en  $\tau$  porte sur un ensemble infini dénombrable, ici  $\{\tau_k(\eta), \eta \in \mathcal{F}_i \setminus \{0\}, k = 1, \dots, q\}$ , et où les fonctions  $U_{\tau}$  sont périodiques par rapport à  $\theta_1, \dots, \theta_m$ . On introduit pour cela les *fonctions presque-périodiques au sens de Bohr*, qui sont définies comme les fonctions qui sont limites uniformes en  $\delta$ , dans un certain espace fonctionnel pour  $(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m)$ , de sommes

trigonométriques de la forme

$$\sum_{\tau \in \mathbb{R}} U_{\tau}(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m) e^{i\tau\delta},$$

où la somme en  $\tau$  est finie. Il nous faut alors choisir la norme utilisée pour les variables  $(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m)$ . Puisque l'on est en présence d'un problème de Cauchy, il est naturel de considérer la norme de la convergence uniforme pour la variable de temps  $t$ , et l'on munit les variables  $(x, \theta_1, \dots, \theta_m)$  d'une norme de Sobolev.

Les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr sont ainsi appelées d'après Harald Bohr, et on été introduites par celui-ci, on peut par exemple citer la série de papiers (en allemand) [Boh25a; Boh25b; Boh26]. La théorie a été ensuite développée notamment conjointement avec Abram Besicovitch, voir [BB31]. Pour une présentation détaillée et moderne de la théorie générale des fonctions presque-périodiques, on peut renvoyer à [Cor09].

En conclusion, dans [JMR95], pour la construction du profil principal d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour un problème de Cauchy quasi-linéaire, les auteurs choisissent, pour les profils oscillants, un cadre de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, avec un contrôle uniforme pour la variable de temps, et un contrôle de régularité de Sobolev pour les variables d'espace lentes et rapides. On discute dans la sous-partie suivante comment ce choix d'espaces fonctionnels peut être adapté au cadre des problèmes aux limites.

#### 1.4.4 Adaptation aux problèmes aux limites quasi-linéaires multiphasés

Le Chapitre 4 de ce manuscrit est consacré à la construction du premier terme d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour un problème aux limites quasi-linéaire. On y considère donc un problème de la forme (1.1.6) où le terme de forçage au bord  $g^{\varepsilon}$  s'écrit comme la fonction quasi-périodique (1.4.1) oscillant suivant des fréquences  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , avec  $m \geq 2$ , indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . On a vu, dans les sections 1.4.2 et 1.4.3 que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des fréquences créées à l'intérieur du domaine, donné par

$$\mathcal{F} := \{0\} \sqcup \mathcal{F}^{\text{ev}} \sqcup \mathcal{F}^{\text{osc}},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\text{ev}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{P}(\zeta)\}, \\ \mathcal{F}^{\text{osc}} &:= \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}. \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{F}_b := \varphi_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \varphi_m \mathbb{Z},$$

n'est en général pas finiment engendré, et qu'il nous faut donc choisir un cadre de fonctions presque-périodiques. On a également vu en section 1.4.2 que le cadre des algèbres de Wiener n'est pas adapté aux problèmes quasi-linéaires. En section 1.4.3, on a décrit le cadre fonctionnel utilisé dans [JMR95] pour le problème de Cauchy associé au problème aux limites (1.1.6). On cherche donc à adapter ce cadre fonctionnel aux problèmes aux limites.

Comme on l'a déjà fait plus haut, on écrit la partie oscillante d'un profil générique comme

$$\begin{aligned} &\sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{osc}}(t, x) e^{i\theta \cdot \zeta} e^{i\xi_j(\zeta)\psi_d} \\ &= \sum_{\substack{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\lambda, j}(t, x) e^{i\lambda_1(t, y) \cdot \varphi_1 / \varepsilon} \dots e^{i\lambda_m(t, y) \cdot \varphi_m / \varepsilon} e^{i\xi_j(\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m) x_d / \varepsilon} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} U_{\lambda, j}(t, x) e^{i\lambda_1 \theta_1} \dots e^{i\lambda_m \theta_m} e^{i\xi_j(\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m) \psi_d},$$

où l'on a décomposé toute fréquence au bord  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  comme  $\zeta = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$  avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , et où l'on a utilisé les variables rapides tangentielles  $\theta_j := (t, y) \cdot \varphi_j / \varepsilon$ , pour  $j = 1, \dots, m$ , et normale  $\psi_d := x_d / \varepsilon$ . On souhaite donc pouvoir considérer des profils de la forme plus générale suivante

$$\sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_\xi(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m) e^{i\xi \psi_d},$$

où la somme en  $\xi$  porte sur un ensemble fini, dans notre cas donné par  $\{\xi_j(\zeta), \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)\}$  et où les fonctions  $U_\xi$  sont périodiques par rapport à  $\theta_1, \dots, \theta_m$ . On reprend l'idée de [JMR95], et l'on considère pour cela des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, c'est-à-dire, les fonctions obtenues comme limite uniforme en  $\psi_d$  de polynômes trigonométriques de la forme

$$\sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_\xi(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m) e^{i\xi \psi_d},$$

où la somme en  $\xi$  est finie. Il nous faut alors déterminer le cadre fonctionnel relativement aux variables  $(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m)$ . Dans [JMR95], il est choisi un contrôle uniforme pour la variable de temps  $t$ . Cependant, ce contrôle uniforme relativement au temps, adapté pour des problèmes de Cauchy, ne l'est pas pour des problèmes aux limites. En effet, pour résoudre les équations vérifiées par le profil principal, on sera amené à voir ces équations comme des équations de propagation par rapport à la variable normale  $x_d$ , et non plus des équations d'évolution en temps. Ainsi, de manière analogue à [JMR95], en échangeant le rôle des variables  $t$  et  $x_d$ , on choisit pour notre problème un contrôle uniforme par rapport à la variable normale  $x_d$ , et un contrôle de type Sobolev pour la variable de temps  $t$ . On conserve le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev pour les variables rapides tangentielles  $\theta_1, \dots, \theta_m$ .

Il nous faut également définir un cadre fonctionnel pour les profils évanescents, que l'on écrit, comme en section 1.4.2, comme

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{F}^{\text{ev}}} U_\alpha^{\text{ev}}(t, x) e^{i(t, x) \cdot \alpha / \varepsilon} = \sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} e^{i\theta \cdot \zeta} \sum_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{ev}}(t, x) e^{i\xi_j(\zeta) \psi_d}.$$

Chaque profil

$$U_\zeta^{\text{ev}}(t, x, \psi_d) := \sum_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} U_{\zeta, j}^{\text{ev}}(t, x) e^{i\xi_j(\zeta) \psi_d}$$

est exponentiellement décroissant, mais dont le taux de décroissance, uniforme en  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ , dépend de  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ . On est donc tentés de définir les profils évanescents comme les séries de la forme

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} e^{i\theta \cdot \zeta} U_\zeta^{\text{ev}}(t, x, \psi_d),$$

où chaque fonction  $U_\zeta^{\text{ev}}$  est exponentiellement décroissante selon un taux dépendant de  $\zeta$ , avec un contrôle de la série de type  $\ell^2$ , c'est-à-dire

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}} \|U_\zeta^{\text{ev}}\|^2 < +\infty,$$

pour une certaine norme  $\|\cdot\|$ . On note cependant que puisque le taux de décroissance exponentielle dépend de la fréquence  $\zeta$ , un tel espace ne vérifie pas de propriété d'algèbre. On verra ultérieurement comment définir les profils évanescents de manière plus large selon une décroissance vers 0 à l'infini en la variable normale rapide  $\psi_d$ . On définit donc l'espace des profils évanescents comme

l'ensemble des fonctions  $U_{\zeta}^{\text{ev}}$  de  $(t, x, \theta_1, \dots, \theta_m)$  dans  $\Omega_T \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_+$  convergeant vers 0 lorsque  $\psi_d$  tend vers  $+\infty$  dans un espace de Sobolev par rapport à  $(t, y, \theta_1, \dots, \theta_m)$ , et ponctuellement en  $x_d$ . Par cohérence avec les profils oscillants, on munit cet espace d'un contrôle uniforme par rapport aux variables normales lente et rapide  $x_d$  et  $\psi_d$ , et d'un contrôle de type Sobolev par rapport aux variables tangentielles lentes et rapides  $(t, y, \theta_1, \dots, \theta_m)$ .

En résumé, dans le Chapitre 4, pour la construction du profil principal d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour un problème aux limites quasi-linéaire, on adapte le cas du problème de Cauchy de [JMR95] en se donnant, pour les profils oscillants, un cadre de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, avec un contrôle uniforme pour la variable normale, et un contrôle de régularité de Sobolev pour les variables tangentielles lentes et rapides, et, pour les profils évanescents, on considère les fonctions convergeant vers 0 à l'infini en la variable normale rapide  $\psi_d$ , avec également un contrôle uniforme pour la variable normale, et de Sobolev pour les variables tangentielles lentes et rapides.

## 1.5 Résolution d'EDP dans des espaces analytiques : théorèmes de Cauchy-Kovalevskaya

Dans le Chapitre 5, pour montrer l'existence de solutions au système obtenu pour les profils du développement asymptotique, on choisit d'utiliser le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, que l'on présente ci-après. C'est un théorème d'existence et d'unicité pour des équations aux dérivées partielles, dans un cadre de fonctions analytiques. On explique plus bas pourquoi et comment le système pour les profils est modifié, de manière non équivalente, pour s'adapter au cadre des fonctions analytiques.

### 1.5.1 Théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique

Le théorème de Cauchy-Kovalevskaya peut être vu comme un analogue, pour les équations aux dérivées partielles, du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires. Étant donné  $E$  un espace de Banach (généralement  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ ),  $I$  un intervalle réel contenant 0, et une fonction  $f$  continue de  $I \times E$  dans  $E$ , localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

pour toute condition initiale  $u_0$  dans  $E$ .

Une équation aux dérivées partielles d'évolution peut également être mise sous une forme similaire, à savoir

$$(1.5.2) \quad \begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)), & t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où l'inconnue  $u : I \rightarrow X$  est à valeurs dans un certain espace normé de fonctions  $X$ , la condition initiale  $u_0$  est une fonction dans  $X$ , et où  $F$  est un opérateur sur cet espace de fonctions  $X$ , portant des opérateurs de dérivation. Pour appliquer directement le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faudrait que l'opérateur  $F$  soit continu et localement lipschitzien par rapport à sa deuxième variable  $u$  dans  $X$ , c'est-à-dire, concernant le caractère lipschitzien,

$$(1.5.3) \quad \|F(t, u) - F(t, v)\| \leq C \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X,$$

où la constante  $C > 0$  est localement uniforme dans  $X$ , et où  $\|\cdot\|$  désigne la norme de  $X$ . Or, compte tenu des opérateurs de dérivation dans la fonction  $F$ , une telle propriété (1.5.3) ne peut pas être vérifiée dans une norme d'espace de fonctions raisonnable.

On illustre cela en se donnant  $X$  l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  de régularité  $s \in \mathbb{N}^*$ , et l'opérateur  $F$  donné par la dérivée partielle par rapport à  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire

$$F(t, u) := \partial_x u$$

pour  $u \in H^s(\mathbb{R})$  et  $t > 0$ , de façon à ce que le problème de Cauchy (1.5.2) s'écrive comme l'équation de transport scalaire

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

La "meilleure" estimation que l'on peut alors obtenir sur la différence  $F(t, u) - F(t, v)$  pour  $u, v$  dans  $H^s(\mathbb{R})$ , s'écrit

$$(1.5.4) \quad \|F(t, u) - F(t, v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|u - v\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})}.$$

Du fait de l'opérateur  $\partial_x$ , il y a une perte d'une dérivée dans l'estimation (1.5.4).

L'idée du théorème de Cauchy-Kovalevskaya est de considérer des espaces de fonctions où cette perte de régularité dans (1.5.4) peut être rendue aussi petite que l'on veut. Plus précisément, on se donne une chaîne continue d'espaces de Banach  $(X_s)_{0 < s \leq 1}$ , munis de normes  $\|\cdot\|_s$  pour  $0 < s \leq 1$ , et décroissante, c'est-à-dire telle que pour  $0 < s' \leq s \leq 1$ , on a

$$X_s \subset X_{s'} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_{s'} \leq \|\cdot\|_s.$$

On suppose alors que l'opérateur  $F$  est tel que pour  $0 < s < s' \leq 1$  et pour  $u, v$  dans  $X_s$ , on a

$$(1.5.5) \quad \|F(t, u) - F(t, v)\|_{s'} \leq \frac{C}{s - s'} \|u - v\|_s,$$

pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , où la constante  $C > 0$  est locale, c'est-à-dire que pour tout  $T, R > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que l'inégalité (1.5.5) est vérifiée pour  $u, v$  tels que  $\|u\|_s < R$ ,  $\|v\|_s < R$  et pour  $|t| < T$ . Dans (1.5.5), il y a une perte de régularité de  $s$  à  $s'$ , mais où cette perte  $s - s'$  est arbitrairement petite, et la constante de Lipschitz n'explose pas plus vite que  $(s - s')^{-1}$ . Avec une telle propriété (1.5.5) de caractère lipschitzien dégradé pour  $F$  (à laquelle on ajoute des hypothèses), et si la condition initiale  $u_0$  appartient à  $X_1$ , un théorème du type Cauchy-Lipschitz est vérifié, c'est le *théorème de Cauchy-Kovalevskaya*.

La première preuve d'un tel résultat est due à Augustin Cauchy en 1842, pour le cas particulier des équations d'évolution quasi-linéaires du premier ordre, et a été généralisée par Sofia Kovalevskaya en 1874. La formulation que l'on reprend dans notre travail est due à [Nir72] et [Nis77], et l'on se base sur la preuve d'une telle formulation donnée par [BG78].

L'énoncé précis de ce résultat sera donné dans le Chapitre 5, et affirme, sous des hypothèses sur l'opérateur  $F$ , comprenant la propriété (1.5.5), que si la condition initiale  $u_0$  appartient à  $X_1$ , alors il existe une unique solution  $u$  au problème de Cauchy (1.5.2), de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport au temps, à valeurs dans les espaces  $(X_s)_{0 < s \leq 1}$ .

On justifie maintenant en quoi le cadre des fonctions analytiques est celui adapté pour le théorème de Cauchy-Kovalevskaya. Pour simplifier les exemples, on considère des espaces de fonctions d'une variable réelle  $x \in \mathbb{R}$ , et l'opérateur  $F := \partial_x$  de dérivation par rapport à cette variable  $x$ .

Une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *analytique* sur  $(-r, r)$  si elle est développable en série entière en tout point de cet intervalle, ou, de manière équivalente, si la série

$$(1.5.6) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} |u^{(n)}(0)|$$

est de rayon de convergence  $r$ . Ainsi, s'il existe une constante  $M > 0$  telle que, pour  $n \geq 0$ , on a

$$(1.5.7) \quad |u^{(n)}(0)| \leq \frac{M n!}{r^n (n^2 + 1)},$$

alors la série (1.5.6) est convergente, et la fonction  $u$  est donc analytique sur  $(-r, r)$ . C'est la façon la plus classique de quantifier l'analyticité : l'ensemble des fonctions  $u$  vérifiant la propriété (1.5.7) est noté  $X_r$ , et la plus petite constante  $M$  satisfaisant cette propriété est utilisée comme norme sur  $X_r$ , que l'on note  $\|u\|_r$ . On montre maintenant que l'opérateur  $F = \partial_x$  possède bien le caractère lipschitzien dégradé de la propriété (1.5.5), et puisque  $F$  est linéaire, on s'attache à estimer la fonction  $\partial_x u$ . Soit  $0 < r' < r \leq 1$ , et  $u$  dans  $X_r$ . On a, pour  $n \geq 0$ , d'après (1.5.7),

$$|(\partial_x u)^{(n)}(0)| = |u^{(n+1)}(0)| \leq \frac{\|u\|_r (n+1)!}{r^{n+1} ((n+1)^2 + 1)}.$$

Ainsi, on a

$$|(\partial_x u)^{(n)}(0)| \leq \frac{\|u\|_r (n+1)!}{r^{n+1} ((n+1)^2 + 1)} \leq \frac{\|u\|_r n!}{(r')^n (n^2 + 1)} (n+1) \frac{(r')^n}{r^{n+1}} \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1}$$

et l'on cherche donc à borner uniformément par rapport à  $n \geq 0$  la quantité

$$(n+1) \frac{(r')^n}{r^{n+1}} \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1},$$

pour pouvoir estimer  $\partial_x u$  dans  $X_{r'}$ . D'une part on remarque immédiatement que  $\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$  est borné par 1 uniformément par rapport à  $n$ , et d'autre part, à l'aide du binôme de Newton, on trouve, pour  $n \geq 1$

$$r^{n+1} = (r' + r - r')^{n+1} \geq (n+1) (r')^n (r - r').$$

Ainsi, on a, pour  $n \geq 0$ ,

$$|(\partial_x u)^{(n)}(0)| \leq \frac{1}{r - r'} \frac{\|u\|_r n!}{(r')^n (n^2 + 1)},$$

et donc

$$\|\partial_x u\|_{X_{r'}} \leq \frac{1}{r - r'} \|u\|_{X_r}.$$

On obtient bien l'estimation (1.5.5) recherchée.

En utilisant les propriétés de la dérivation et de la transformée de Fourier, et le développement

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} |\xi|^n = e^{\rho|\xi|},$$

on note que l'on peut également quantifier l'analyticité au moyen d'une décroissance exponentielle de la transformée de Fourier. On se donne la convention, pour une fonction  $u$  de  $L^1(\mathbb{R})$ , que sa transformée de Fourier  $\hat{u}$  est donnée sur  $\mathbb{R}$  par

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx,$$

et l'on étend l'opérateur de transformée de Fourier à  $L^2(\mathbb{R})$  par le théorème de Plancherel. On définit alors, pour  $0 < \rho \leq 1$ , l'espace  $Y_\rho$  comme l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L^2(\mathbb{R})$  satisfaisant

$$\|u\|_{Y_\rho}^2 := \int_{\mathbb{R}} e^{2\rho|\xi|} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

qui nous fournit une chaîne  $(Y_\rho)_{0 < \rho \leq 1}$  d'espaces de Banach. De la même manière que précédemment, pour  $0 < \rho' < \rho \leq 1$ , et pour  $u$  dans  $Y_\rho$ , on cherche à estimer  $\partial_x u$  dans  $Y_{\rho'}$ . On a,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\rho'|\xi|} |\widehat{\partial_x u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\rho'|\xi|} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\rho|\xi|} |\widehat{u}(\xi)|^2 (|\xi|^2 e^{2|\xi|(\rho'-\rho)}) d\xi.$$

De même, l'étude de la fonction  $y \mapsto y^2 e^{2y(\rho-\rho')}$  sur  $[0, +\infty)$  nous montre que l'on a, pour  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$|\xi|^2 e^{2|\xi|(\rho'-\rho)} \leq \frac{4e^{-2}}{(\rho - \rho')^2},$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\rho'|\xi|} |\widehat{\partial_x u}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{4e^{-2}}{(\rho - \rho')^2} \int_{\mathbb{R}} e^{2\rho|\xi|} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

c'est-à-dire,

$$\|\partial_x u\|_{Y_{\rho'}} \leq \frac{2e^{-1}}{\rho - \rho'} \|u\|_{Y_\rho},$$

ce qui est exactement l'estimation (1.5.5) recherchée.

À l'aide de ces deux exemples de chaînes d'espaces analytiques, on a montré en quoi le cadre des fonctions analytiques semble être celui prescrit pour appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique. On développe dans la partie suivante en quoi cette formulation du théorème de Cauchy-Kovalevskaya n'est pas suffisante pour notre problème, et comment on l'adapte à notre cas.

## 1.5.2 Analyticité en temps dans le théorème de Cauchy-Kovalevskaya

Dans le Chapitre 5, où l'on suppose que la condition de bord dans (1.1.6) satisfait une condition de Kreiss-Lopatinskii faible, la détermination de la trace au bord de certains profils du développement asymptotique (1.1.7) implique des fonctions inconnues, dont on montre qu'elles satisfont elles-mêmes des problèmes d'évolution. De manière très schématique, on considère alors un problème de la forme suivante. On s'intéresse à une inconnue scalaire  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , figurant les profils du développement (1.1.7), qui vérifie le problème aux limites associé à une équation de transport rentrante suivant

$$(1.5.8) \quad \begin{cases} \partial_t \sigma + \mathbf{v} \partial_y \sigma + \partial_x \sigma = 0, & \text{sur } [0, T]_t \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_x^+, \\ \sigma(t, y, 0) = a(t, y), & \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ \sigma(0, y, x) = 0, & \forall (y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

où le terme de forçage au bord  $a : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait lui-même le problème de Cauchy associé à une équation de transport suivant

$$(1.5.9) \quad \begin{cases} \partial_t a + \mathbf{c} \partial_y a = h, & \text{sur } [0, T]_t \times \mathbb{R}_y, \\ a(0, y) = 0, & \forall y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$



avec  $h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un terme source donné. Ici, les conditions initiales dans (1.5.8) et (1.5.9) prennent la forme d'une trace nulle en  $t = 0$ , et non plus d'une donnée nulle dans le passé comme c'est le cas pour le système (1.1.6). Cela constitue une modification non équivalente des systèmes, que l'on opère afin de pouvoir les étudier dans un cadre de fonctions analytiques. En effet, une fonction analytique nulle pour  $t \leq 0$  est nulle partout.

L'idée est de voir le problème aux limites (1.5.8) comme le problème de Cauchy associé à l'équation de propagation suivant

$$(1.5.10) \quad \begin{cases} \partial_x \sigma + \mathbf{v} \partial_y \sigma + \partial_t \sigma = 0, & \text{sur } [0, T]_t \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_x^+, \\ \sigma(t, y, 0) = a(t, y), & \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

où la donnée au bord  $a$ , qui constitue maintenant l'analogue d'une condition initiale, vérifie toujours le problème de Cauchy (1.5.9). On souhaite appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevskaya au problème au bord (1.5.9) et à l'intérieur (1.5.10). Si l'on applique l'énoncé classique de ce théorème, on obtient pour l'équation au bord (1.5.9) une solution  $a$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport au temps, et analytique en  $y$ , pourvu que le terme source  $h$  soit analytique en  $y$ . Seulement, si l'on veut ensuite appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevskaya au problème à l'intérieur (1.5.10), il est nécessaire que le terme de bord  $a$  soit analytique par rapport à  $y$  **et** par rapport au temps  $t$ , ce qui n'est a priori pas le cas de la solution  $a$  du problème au bord (1.5.9) obtenu avec le théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique.

Il nous faut donc raffiner le résultat du théorème de Cauchy-Kovalevskaya pour l'équation au bord (1.5.9). Par un argument de *bootstrap*, on obtient une régularité  $\mathcal{C}^\infty$  en temps de la solution  $a$  de (1.5.9), à valeurs dans un espace de fonctions analytiques en  $y$ , mais ce n'est pas suffisant. Dans des notes de cours non publiées, Mouhot prouve une version du théorème de Cauchy-Kovalevskaya où la solution obtenue est analytique dans toutes ses variables, mais dont on ne sait pas a priori quantifier l'analyticité en temps dans un espace de fonctions analytiques, ce dont on a pourtant besoin pour appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique pour le problème à l'intérieur (1.5.10). On cherche donc à montrer un résultat du type du théorème de Cauchy-Kovalevskaya, fournissant une solution dans un espace de fonctions analytiques par rapport à **toutes leurs variables**.

L'idée, en suivant [BG78], est de ramener le problème (1.5.9) à un problème de point fixe, et de construire un espace de fonctions où l'opérateur associé au problème de point fixe est contractant. En définissant, pour  $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , la fonction  $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la manière suivante,

$$a(t, y) := \int_0^t b(s, y) ds,$$

on écrit donc le problème (1.5.9) comme le problème de point fixe sur la fonction  $b$  suivant,

$$(1.5.11) \quad b(t, y) = -\mathbf{c} \int_0^t \partial_y b(s, y) ds + h(t, y), \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Pour obtenir le caractère contractant de l'opérateur associé au problème de point fixe (1.5.11), il nous faut estimer

$$(1.5.12) \quad \int_0^t \partial_y b(s, y) ds,$$

dans un bon espace de fonctions. On note que dans la quantité (1.5.12), la fonction  $b$  porte une dérivation en espace et une intégration en temps. L'idée clef est de choisir un espace fonctionnel qui permette d'équilibrer cette perte de régularité en espace et ce gain de régularité en temps pour obtenir un caractère contractant. Ceci est réalisé à l'aide de la théorie des *séries majorantes*,

et du phénomène de *régularisation par intégration en temps*, introduits dans [Uka01], et que l'on peut également retrouver dans [Mét09 ; Mor20], que l'on aborde maintenant.

On dit que la série formelle  $\varphi$  à valeurs dans un espace  $X$ , donnée par

$$\varphi(T) := \sum_{n \geq 0} \varphi_n T^n,$$

avec  $\varphi_n \in X$  pour  $n \geq 0$  admet pour *série majorante* la série réelle  $\psi$  donnée par

$$\psi(t) := \sum_{n \geq 0} \psi_n t^n,$$

avec  $\psi_n \geq 0$  pour  $n \geq 0$ , si on a

$$\|\varphi_n\| \leq \psi_n, \quad \forall n \geq 0,$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $X$ . Dans [Uka01 ; Mor20] on fixe une certaine série réelle  $\Phi$ , et l'on considère l'ensemble des fonctions analytiques dont le développement en série entière par rapport au temps  $t$  admet comme série majorante  $\Phi$ , c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions analytiques  $u : \mathbb{R} \rightarrow X$  vérifiant qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour  $n \geq 0$ ,

$$(1.5.13) \quad \left\| u^{(n)}(0) \right\| \leq C \Phi_n,$$

où l'on a développé  $\Phi$  en série entière comme  $\Phi(t) = \sum_{n \geq 0} \Phi_n t^n / n!$ . Alors, en munissant cet espace de fonctions d'une norme (qui est la meilleure constante  $C > 0$  dans (1.5.13)), on peut montrer une estimation sans perte de régularité de la quantité (1.5.12). C'est le phénomène de régularisation par intégration en temps, et c'est la méthode que l'on cherche à appliquer ici. Il nous faut pour cela définir une série majorante  $\Phi$  adaptée à notre problème.

Dans [BG78], les auteurs résolvent un problème de point fixe dans un espace de fonctions  $u$  analytiques en espace, et vérifiant une majoration du type

$$(1.5.14) \quad \|u(t)\|_{X_\rho} \leq \frac{C}{1-\rho} \left( 1 - \frac{|t|}{a(1-\rho)} \right)^{-1/2}, \quad \forall \rho \in (0, 1), \forall |t| < a(1-\rho),$$

pour un certain paramètre  $a \in (0, 1)$ , où  $(X_\rho)_{0 < \rho \leq 1}$  est une chaîne d'espaces de fonctions analytiques en espace, et où la constante  $C$  est uniforme en  $\rho \in (0, 1)$  et  $|t| < a(1-\rho)$ . On fait donc un choix de série majorante  $\Phi$  qui nous permette de retrouver l'estimation (1.5.14), c'est-à-dire que l'on considère l'ensemble des fonctions  $u$  analytiques, telles que leur série entière relativement à  $t$  admette comme série majorante la série entière de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1-\rho} \left( 1 - \frac{|t|}{a(1-\rho)} \right)^{-1/2}.$$

Plus précisément, si le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto (1-t)^{-1/2}$  s'écrit  $\sum_{n \geq 0} \psi_n t^n / n!$  pour  $|t| < 1$ , alors on demande qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$(1.5.15) \quad \|\partial_t^n u(0)\|_{X_\rho} \leq \frac{M}{1-\rho} \frac{\psi_n}{a^n (1-\rho)^n}.$$

L'infimum des constantes  $M > 0$  satisfaisant l'estimation (1.5.15) est noté  $\|\cdot\|_a$ , et cela nous fournit alors une chaîne d'espaces de fonctions analytiques relativement au temps  $t$  et à l'espace, indexée par  $a \in (0, 1)$ .

On verra que cette chaîne d'espaces fonctionnels suffit à notre problème puisqu'on peut y montrer le caractère contractant de l'opérateur associé au point fixe (1.5.11), et donc obtenir

une unique solution à ce point fixe, qui fournit à son tour une unique solution  $a$  au problème au bord (1.5.9), analytique en temps **et** en espace. On peut alors résoudre le problème à l'intérieur (1.5.10), puisque son terme initial  $a$  est maintenant donné dans un espace de fonctions analytiques en  $(t, y)$ .

## 1.6 Organisation du manuscrit

La présente introduction s'est attachée à introduire les concepts et les hypothèses qui seront utilisés tout au long du manuscrit, à les replacer dans la littérature, et à situer les contributions de cette thèse au regard des travaux antérieurs. Les deux chapitres suivants reprennent deux de ces travaux antérieurs pour se familiariser avec les concepts, les outils et les problématiques que l'on retrouvera dans les deux derniers chapitres de ce manuscrit, consacrés aux contributions de cette thèse.

Dans le Chapitre 2, on détaille la construction d'un développement d'optique géométrique à tout ordre pour un problème aux limites **linéaire** fortement stable. Ce chapitre reprend la présentation de [Ben14], qui se place cependant sous des hypothèses moins restrictives, puisque le travail [Ben14] est consacré à des problèmes aux limites faiblement stables. Dans ce chapitre on tente d'illustrer l'influence des conditions au bord dans le cadre de l'optique géométrique fortement stable.

On reprend le travail de [Wil96] au Chapitre 3, dans lequel Williams construit le premier terme d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour des problèmes aux limites **semi-linéaires** fortement stables. Le travail de [Wil96] est également consacré à la justification du développement d'optique géométrique, partie que l'on ne reprend pas ici. On explique dans ce chapitre les spécificités de l'optique géométrique non-linéaire dans le cadre multiphasé, contraignant à considérer des fonctions presque-périodiques, et l'on détaille l'utilisation d'un cadre de fonctions presque-périodiques, ici celui des algèbres de Wiener, pour la construction d'un développement d'optique géométrique non-linéaire multiphasé.

Le Chapitre 4 est consacré à la première contribution de cette thèse, la construction du premier terme d'un développement d'optique géométrique multiphasé pour des problèmes aux limites **quasi-linéaires** fortement stables. En utilisant un cadre de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, on y montre l'existence d'une solution au système quasi-linéaire vérifié par le profil principal à l'aide d'estimations a priori sans perte de dérivée. La principale difficulté de ce chapitre réside dans le défaut de symétrie des termes de résonance et l'occurrence d'une infinité de résonances. Ce travail a donné lieu à l'article [Kil22], en cours de publication.

La seconde contribution de cette thèse, présentée au Chapitre 5, s'intéresse à la création d'instabilités dans des développements d'optique géométrique pour des problèmes aux limites **quasi-linéaires faiblement stables**, dont le terme de forçage au bord subit une petite perturbation selon une phase transversale. Le but est de montrer comment, à travers les amplifications au bord dues à la mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, une configuration particulière de fréquences peut créer, au moyen de résonances, une instabilité dans le développement asymptotique. Après avoir dérivé la cascade d'équations vérifiées par le développement asymptotique, on montre sur un "modèle jouet" que ce système est bien posé dans un cadre de fonctions analytiques, en utilisant le théorème de Cauchy-Kovalevskaya ainsi qu'une variante de celui-ci assurant l'analyticité en temps. On montre également qu'il peut y avoir une création d'instabilité en justifiant sur un "modèle jouet" que la petite perturbation dans le terme de forçage au bord peut influencer l'ordre principal du développement asymptotique. Ce travail va donner lieu à un article : *Transverse instability of high frequency weakly stable quasilinear boundary value problems*, C. Kilque ; en cours d'écriture au moment de la rédaction de cette thèse. Puisqu'il provient d'un article en cours de rédaction, le Chapitre 5 est présenté en anglais.

Enfin, on dresse une conclusion, et l'on dessine quelques perspectives.

Pour plus de clarté et afin de fixer les notations, on rappellera, dans chaque chapitre, toutes

---

les hypothèses et résultats nécessaires à l'étude, même dans le cas où ils ont déjà été introduits dans cette introduction et dans les chapitres précédents.



# Construction et justification d'un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites linéaire

## Sommaire du présent chapitre

---

<b>2.1 Notations et hypothèses</b>	<b>42</b>
<b>2.2 Ansatz et résultat principal</b>	<b>45</b>
<b>2.3 Détermination des équations</b>	<b>46</b>
<b>2.4 Résolution des équations</b>	<b>48</b>
2.4.1 Résolution des équations pour le profil principal . . . . .	48
2.4.2 Résolution des équations du premier correcteur . . . . .	49
2.4.3 Profils d'ordre supérieur et résultat . . . . .	51
<b>2.5 Justification du développement d'optique géométrique</b>	<b>51</b>

---

Dans ce chapitre on se propose de détailler la construction d'un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites dans le cas très simple d'un problème linéaire, pour comprendre les mécanismes propres à la résolution des équations de profils dans le cadre des problèmes aux limites. La spécificité, par rapport aux problèmes de Cauchy, des problèmes aux limites dans le cadre de l'optique géométrique réside dans les conditions de bord sur les profils. Celles-ci s'expriment à travers la matrice  $B$ , dont on a vu qu'elle n'est pas inversible sur tout l'espace  $\mathbb{C}^N$ . On verra dans ce chapitre que, sous l'hypothèse de Lopatinskii uniforme, la matrice  $B$  est précisément inversible pour les profils dont on a besoin de déterminer une condition au bord. On détaille également la justification du développement d'optique géométrique, c'est-à-dire que l'on montre que si l'on tronque la série formelle construite, la somme obtenue converge vers la solution exacte du problème étudié, et l'on quantifie cette convergence dans un bon espace fonctionnel.

Pour des problèmes semi-linéaires et quasi-linéaires tels qu'abordés aux Chapitres 3 et 4, le traitement des conditions au bord est analogue à celui de ce chapitre et ne présente pas de difficulté supplémentaire. Ce sont les équations de propagation pour les profils ainsi que les espaces fonctionnels requis qui se complexifient. Enfin, dans le Chapitre 5, on ne suppose plus que la condition de Lopatinskii uniforme est vérifiée, ce qui empêche de déterminer a priori la trace des profils. L'on verra que cela entraîne de l'amplification, et éventuellement crée de l'instabilité.

Le présent chapitre reprend la structure et les formulations de l'article de Antoine Benoit [Ben14], bien que ce dernier se place dans des hypothèses moins restrictives où l'on ne suppose

pas que la condition de Lopatinskiï uniforme est vérifiée, et ce chapitre constitue donc une simplification de [Ben14]. Les travaux [CG10; Mar10] traitent deux cas de lieux de l'ensemble des fréquences où la condition de Lopatinskiï uniforme n'est pas satisfaite, dans un cadre non-linéaire pour [Mar10], et [Ben14] s'intéresse à deux autres cas dans un cadre linéaire.

La chapitre est organisé comme suit. Dans une première partie, on définit le problème auquel on s'intéresse, et l'on fait une série d'hypothèses structurelles classiques sur l'opérateur linéaire et la condition de bord, ainsi que des définitions et résultats préliminaires. Dans une deuxième partie, après avoir défini un cadre fonctionnel adapté, on énonce l'ansatz précis choisi dans cette étude, et l'on énonce le résultat principal, à savoir l'existence d'un développement d'optique géométrique à tout ordre pour le problème étudié, et la convergence de toute somme tronquée de ce développement vers la solution exacte. On procède ensuite à la preuve de ce résultat, avec dans une troisième partie la détermination de la cascade BKW vérifiée par les profils, que l'on découple en résolvant un problème rapide, puis dans une quatrième partie la résolution de ce système triangulaire. Enfin, la cinquième partie s'intéresse à la justification du développement d'optique géométrique.

## 2.1 Notations et hypothèses

Étant donné un temps  $T > 0$  et un entier  $d \geq 2$ , on pose  $\Omega_T$  le domaine  $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  et  $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$  sa frontière. On note  $t \in (-\infty, T]$  la variable de temps,  $x = (y, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  la variable d'espace, avec  $y \in \mathbb{R}^{d-1}$  la variable tangentielle et enfin  $x_d \in \mathbb{R}_+$  la variable normale. Pour  $j = 1, \dots, d$ , la dérivée partielle par rapport à  $x_j$  est notée  $\partial_j$ . On s'intéresse aux problèmes de la forme

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} L(\partial) u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u^\varepsilon = f^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_T \\ Bu^\varepsilon|_{x_d=0} = g^\varepsilon, & \text{dans } \omega_T \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

où l'inconnue  $u^\varepsilon$  est une fonction de  $\Omega_T$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant 0 avec  $N \geq 1$ , les matrices  $A_j$  appartiennent à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , la matrice  $B$  appartient à  $\mathcal{M}_{p \times N}(\mathbb{R})$  et est de rang maximal et les fonctions  $g^\varepsilon$  et  $f^\varepsilon$  sont quasi-périodiques de fréquences d'ordre  $1/\varepsilon$ . L'entier  $p$  est précisé dans l'Hypothèse 2.2 ci-dessous, et les hypothèses précises sur les termes source et de forçage au bord  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  sont données plus bas.

**Définition 2.1.1.** Pour  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ , on définit  $L(\alpha)$  le symbole associé à  $L(\partial_z)$  comme

$$L(\alpha) := \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0).$$

On définit alors  $p(\tau, \eta, \xi) := \det L((\tau, \eta, \xi))$  son polynôme caractéristique. On dit que  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d}$  est une fréquence caractéristique si elle est racine du polynôme  $p$ .

On fait les hypothèses suivantes qui nous assurent que le problème est bien posé.

**Hypothèse 2.1** (Hyperbolicité à multiplicité constante). Il existe un entier  $q$ , des fonctions analytiques réelles  $\tau_1 < \dots < \tau_q$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et des entiers  $\nu_1, \dots, \nu_q$  tels que pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$p(\tau, \eta, \xi) = \det \left( \tau I + \sum_{j=1}^{d-1} A_j \eta_j + A_d \xi \right) = \prod_{k=1}^q (\tau - \tau_k(\eta, \xi))^{\nu_k}$$

où les valeurs propres  $-\tau_k(\eta, \xi)$  de  $A(\eta, \xi) := \sum_{j=1}^{d-1} A_j \eta_j + A_d \xi$  sont semi-simples.

**Hypothèse 2.2.** *Le rang  $p$  de la matrice  $B$  est égal au nombre de valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité de la matrice  $A_d$ , et la matrice  $A_d$  est inversible.*

On définit les espaces de fréquences suivants

$$\begin{aligned}\Xi &:= \left\{ \zeta = (\sigma = \tau - i\gamma, \eta) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} \mid \gamma \geq 0 \right\}, \\ \Xi_0 &:= \{ \zeta \in \Xi \mid \gamma = 0 \}.\end{aligned}$$

On définit également la matrice qui apparaît lorsque l'on applique la transformée de Fourier-Laplace à l'opérateur  $L(\partial)$ , pour tout  $\zeta = (\sigma, \eta) \in \Xi$ ,

$$\mathcal{A}(\zeta) := -i(A_d)^{-1} \left( \sigma I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right).$$

Le lemme de Hersh ([BGS07, Lemme 4.1]) nous assure que pour  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$  la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle et que le sous-espace stable associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative, que l'on note  $E_-(\zeta)$ , est de dimension constante égale à  $p$ . On note  $E_+(\zeta)$  le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé aux valeurs propres de partie réelle strictement positive qui est de dimension  $N - p$ .

Dans [Kre70] (pour une hypothèse plus restrictive que l'Hypothèse 2.1) et [Mét00] (dans le cadre de l'Hypothèse 2.1), il est montré que les sous-espaces stables  $E_{\pm}$  s'étendent de manière continue à tout l'espace  $\Xi$ . On peut alors formuler l'hypothèse principale de ce travail.

**Hypothèse 2.3.** *On suppose que le système vérifie la condition de Lopatinskiï uniforme, c'est-à-dire que pour tout  $\zeta \in \Xi$ ,*

$$\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}.$$

Le résultat suivant dû à Kreiss ([Kre70]), et dont l'extension aux problèmes hyperboliques à multiplicité constante tient à [Mét00] nous assure que le système (2.1.1) est bien posé. On définit les espaces de Sobolev à poids de la manière suivante. Pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $\gamma > 0$ , on pose

$$H_{\gamma}^s(\Omega_T) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega_T) \mid e^{-\gamma t} u \in H^s(\Omega_T)\}$$

associé à la norme évidente, et on définit  $H_{\gamma}^s(\omega_T)$  de manière similaire.

**Théorème 2.1.2.** *Pour tout  $f \in L^2(\Omega_T)$  et tout  $g \in L^2(\omega_T)$  s'annulant pour  $t$  négatif, il existe une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  au problème (2.1.1). De plus la trace de  $u$  sur  $\omega_T$  est dans  $L_{\gamma}^2(\omega_T)$  et il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\gamma > 0$ ,*

$$(2.1.2) \quad \gamma \|u\|_{L_{\gamma}^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L_{\gamma}^2(\omega_T)}^2 \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{L_{\gamma}^2(\omega_T)}^2 \right),$$

où  $C$  ne dépend pas de  $f, g, u$ .

On s'attache maintenant à décrire plus précisément la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  et les espaces  $E_{\pm}(\zeta)$  pour  $\zeta \in \Xi_0$ . Le théorème suivant, dû à Métivier ([Mét00]), donne la décomposition de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  appartient à  $\Xi_0$ , pour des problèmes hyperboliques à multiplicité constante (Hypothèse 2.1).

**Théorème 2.1.3.** *Si l'Hypothèse 2.1 est vérifiée, alors pour tout  $\zeta \in \Xi_0$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\zeta$  dans  $\Xi$ , un entier  $L \geq 0$ , une partition  $N = \nu_1 + \dots + \nu_L$  et une matrice inversible  $T$  de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $\mathcal{V}$  telle que pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}$ ,*

$$T(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)T(\zeta)^{-1} = \text{diag}(\mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta))$$

où pour tout  $j$  la matrice  $\mathcal{A}_j$  est de taille  $\nu_j$  et vérifie une des propriété suivantes :



- i) les valeurs propres de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  sont de partie réelle strictement positive
- ii) les valeurs propres de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  sont de partie réelle strictement négative
- iii)  $\nu_j = 1$ ,  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est imaginaire pur et  $\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) \in \mathbb{R}^*$
- iv)  $\nu_j > 1$ , il existe  $i\xi_j \in i\mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} i\xi_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & i\xi_j \end{pmatrix}$$

et le coefficient en bas à gauche de  $\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est réel non nul.

On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble des fréquences  $\zeta \in \Xi_0$  telles que dans la décomposition de  $\mathcal{A}(\zeta)$  du Théorème 2.1.3, il y ait au moins un bloc de type iv). De telles fréquences sont appelées *glancing*. On peut montrer que pour tout  $\zeta \in \Xi_0 \setminus \mathcal{G}$ , on a les décompositions suivantes

$$(2.1.3) \quad \mathbb{C}^N = E_-(\zeta) \oplus E_+(\zeta)$$

et

$$(2.1.4) \quad E_\pm(\zeta) = E_\pm^e(\zeta) \oplus E_\pm^h(\zeta)$$

où  $E_-^e(\zeta)$  (resp.  $E_+^e(\zeta)$ ) est l'espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative (resp. positive) et  $E_\pm^h(\zeta)$  sont sommes d'espaces propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associés à des valeurs propres imaginaires pures. On cherche alors à décrire plus précisément les espaces  $E_\pm^h(\zeta)$ .

**Définition 2.1.4.** Pour  $\zeta = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ , on note  $i\xi_j(\zeta)$  pour  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$  les valeurs propres complexes distinctes de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Si  $\xi_j(\zeta)$  est réel, on vérifie que l'on a alors  $\det L((\zeta, \xi_j(\zeta))) = 0$ , et donc, d'après l'Hypothèse 2.1, il existe un entier  $k_j$  entre 1 et  $q$  tel que  $\tau = \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$ . On note alors  $\alpha_j(\zeta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$  la fréquence caractéristique réelle associée à  $\xi_j(\zeta)$ . La vitesse de groupe  $\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} \in \mathbb{R}^d$  associée à  $\alpha_j(\zeta)$  est dans ce cas définie par

$$\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} := \nabla_{\eta, \xi} \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta)).$$

On dira que la fréquence  $\alpha_j(\zeta)$  est *rentrante* (resp. *sortante*, *glancing*) si  $\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$  est strictement négative (resp. strictement positive, nulle). Le champ de vecteur  $X_{\alpha_j(\zeta)}$  associé à  $\alpha_j(\zeta)$  est alors défini comme

$$(2.1.5) \quad X_\alpha := \partial_t - \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} \cdot \nabla_x.$$

Enfin, on note  $\mathcal{R}(\zeta)$  (resp.  $\mathcal{S}(\zeta)$ ,  $\mathcal{G}(\zeta)$ ) l'ensemble des indices  $j$  entre 1 et  $\mathcal{M}(\zeta)$  tels  $i\xi_j(\zeta)$  est imaginaire pure et tels que la fréquence  $\alpha_j(\zeta)$  est rentrante (resp. sortante, glancing).

On peut montrer que la notion de fréquence glancing introduite dans la définition précédente correspond à celle du paragraphe qui la précède, et que donc l'ensemble  $\mathcal{G}$  est donné par l'ensemble des fréquences  $\zeta$  de  $\Xi_0$  telles que l'ensemble  $\mathcal{G}(\zeta)$  est non vide.

On peut alors décrire précisément les espaces  $E_\pm^h(\zeta)$ .

**Lemme 2.1.5.** Pour tout  $\zeta \in \Xi_0 \setminus \mathcal{G}$ ,

$$(2.1.6) \quad E_-^h(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \ker L(\alpha_j(\zeta)), \quad E_+^h(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \ker L(\alpha_j(\zeta))$$

En particulier d'après les décompositions de  $\mathbb{C}^N$  et  $E_{\pm}(\zeta)$  (2.1.3) et (2.1.4),

$$(2.1.7) \quad E_-(\zeta) = E_-^e(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \ker L(\alpha_j(\zeta)),$$

et

$$(2.1.8) \quad \mathbb{C}^N = E_+(\zeta) \oplus E_-^e(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \ker L(\alpha_j(\zeta)).$$

**Définition 2.1.6.** Selon la décomposition (2.1.8), on note  $\Pi_{\pm}^e(\zeta)$  le projecteur sur  $E_{\pm}^e(\zeta)$ , et, pour  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$ ,  $\Pi_j(\zeta)$  le projecteur sur  $\ker L(\alpha_j(\zeta))$  et  $Q_j(\zeta)$  l'inverse partiel de  $L(\alpha_j(\zeta))$ , c'est-à-dire vérifiant

$$(2.1.9a) \quad Q_j(\zeta) L(\alpha_j(\zeta)) = L(\alpha_j(\zeta)) Q_j(\zeta) = I - \Pi_j(\zeta),$$

$$(2.1.9b) \quad Q_j(\zeta) \Pi_j(\zeta) = \Pi_j(\zeta) Q_j(\zeta) = 0.$$

Le résultat suivant, faisant intervenir les champs de vecteurs  $X_{\alpha_j(\zeta)}$  introduits dans la Définition 2.1.4, est fondamental dans la suite de l'analyse, puisqu'il énonce que certains opérateurs apparaissant de manière naturelle dans les équations que l'on étudiera, s'exprime comme des opérateurs de transport scalaire à coefficient constant. Ce résultat est dû à [Lax57].

**Lemme 2.1.7** ([Lax57]). Soit  $\zeta \in \Xi_0$ , et  $j$  entre 1 et  $\mathcal{M}(\zeta)$  tel que  $i\xi_j(\zeta)$  est imaginaire pure. On rappelle que  $k_j$  est l'entier entre 1 et  $q$  tel que  $\tau = \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$ . Alors on a

$$\Pi_j(\zeta) L(\partial) \Pi_j(\zeta) = X_{\alpha_j(\zeta)} \Pi_j(\zeta).$$

## 2.2 Ansatz et résultat principal

Dans (2.1.1), on considère pour simplifier les calculs un terme source  $f^\varepsilon$  nul. L'équation (2.1.1) étant linéaire, pour le terme de forçage au bord  $g^\varepsilon$ , on peut ne considérer qu'une fréquence, et même une seule harmonique de cette fréquence. On prend donc un terme de forçage au bord de la forme

$$g^\varepsilon(t, y) := e^{i\varphi(t, y)/\varepsilon} g(t, y)$$

avec  $g \in H^\infty(\omega_T)$  telle que  $g|_{t \leq 0} = 0$ , et  $\varphi(t, y) = \underline{\tau}t + \underline{\eta} \cdot y$ , où  $\underline{\zeta} := (\underline{\tau}, \underline{\eta}) \in \Xi_0 \setminus \mathcal{G}$ . On exclu ainsi la possibilité que la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  ait des valeurs propres associées à des fréquences glancing, mais la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  peut admettre des valeurs propres de partie réelle non-nulle. On note  $i\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, H$  les valeurs propres imaginaires pures de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  distinctes deux à deux, et l'on suppose sans perte de généralité que la numérotation des valeurs propres  $i\xi_j(\zeta)$  pour  $\zeta \in \Xi_0$  est telle que, pour  $j = 1, \dots, H$

$$\xi_j = \xi_j(\underline{\zeta}).$$

Puisque la fréquence  $\underline{\zeta}$  est fixée, dans toute la suite du chapitre, on s'autorise à noter

$$\Pi_{\pm}^e(\underline{\zeta}) = \Pi_{\pm}^e, \quad \text{et, pour } j = 1, \dots, H, \quad \Pi_j(\underline{\zeta}) = \Pi_j, \quad \text{et} \quad Q_j(\underline{\zeta}) = Q_j.$$

On introduit, en suivant [Ben14], les espaces de profils suivants adaptés à la fois aux modes évanescents associés aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  de partie réelle strictement positive et aux modes oscillants associés aux fréquences  $\alpha_j(\underline{\zeta})$  pour  $j = 1, \dots, H$ .

**Définition 2.2.1** ([Ben14, Définition 2.4]). 1) On note  $\mathcal{P}^{\text{ev}}$  l'ensemble des fonctions  $U(t, x, \psi_d)$  de  $H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}^+)$  telles qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $e^{\delta\psi_d} U(t, x, \psi_d)$  est dans  $H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}^+)$ .

2) On note  $\mathcal{P}^{\text{osc}}$  l'ensemble des fonctions  $u(t, x, \psi_d)$  de  $C^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  qui s'écrivent

$$u(t, x, \psi_d) = \sum_{j=1}^H e^{i\xi_j \psi_d} u_j(t, x)$$

avec  $(u_1, \dots, u_H) \in (H^\infty(\Omega_T))^H$ .

3) On définit enfin l'espace des profils  $\mathcal{P}$  comme

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}^{\text{ev}} \oplus \mathcal{P}^{\text{osc}}.$$

On cherche une solution approchée  $u^{\varepsilon, \text{app}}$  de la solution de (2.1.1) sous la forme

$$(2.2.1) \quad u^{\varepsilon, \text{app}}(t, x) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k e^{i\varphi(t, y)/\varepsilon} U_k(t, x, x_d/\varepsilon)$$

où pour  $k \geq 0$ ,  $U_k \in \mathcal{P}$  et se décompose dans  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}^{\text{ev}}$  de la façon suivante

$$U_k =: U_k^{\text{osc}} + U_k^{\text{ev}} =: \sum_{j=1}^H e^{i\xi_j \psi_d} U_{k,j}^{\text{osc}} + U_k^{\text{ev}}$$

avec pour  $k \geq 0$ ,  $U_k^{\text{ev}} \in \mathcal{P}^{\text{ev}}$ , et pour  $j = 1, \dots, H$ ,  $U_{k,j}^{\text{osc}} \in H^\infty(\Omega_T)$ .

Le résultat principal est le suivant, il suit la formulation de [Ben14, Théorème 2.3] mais se place sous des hypothèses bien plus simples que le cas de [Ben14].

**Théorème 2.2.2.** *Il existe une suite  $(U_k)_{k \geq 0}$  de fonctions de  $\mathcal{P}$  satisfaisant la cascade d'équations (2.3.1a)-(2.3.2b) ci-après. De plus, si on note  $u_n^\varepsilon$  la série formelle (2.2.1) tronquée à l'ordre  $n \geq 0$  :*

$$u_n^\varepsilon(t, x) := \sum_{k=0}^n \varepsilon^k e^{i\varphi(t, y)/\varepsilon} U_k(t, x, x_d/\varepsilon),$$

et  $u^\varepsilon$  la solution exacte du système (2.1.1), alors pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$ , il existe  $C_\alpha > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,

$$(2.2.2) \quad \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha (u_n^\varepsilon - u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C_\alpha \varepsilon^{n+1}.$$

En particulier,

$$\|u^\varepsilon - e^{i\varphi/\varepsilon} U_0\|_{L^\infty(\Omega_T)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La suite du chapitre est consacrée à la preuve du Théorème 2.2.2. Elle est décomposée en trois parties. On détermine d'abord le système d'équations vérifié par les profils  $U_k$ , en conduisant dans un premier temps une analyse BKW formelle, puis en découplant la cascade obtenue au moyen de la résolution d'un problème rapide. On résout ensuite récursivement les équations obtenues en utilisant le Lemme de Lax 2.1.7. On conclut en justifiant le développement, c'est-à-dire en montrant l'estimation (2.2.2) au moyen de l'estimation (2.1.2) du Théorème 2.1.2.

## 2.3 Détermination des équations

Si l'on applique formellement l'opérateur  $L(\partial)$  à la série formelle  $\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k e^{i\varphi/\varepsilon} U_k(t, x, x_d/\varepsilon)$  et si l'on ordonne le résultat obtenu en puissances croissantes de  $\varepsilon$  on obtient

$$e^{i\varphi/\varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U_0 + \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \left( L(\partial) U_k + \mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U_{k+1} \right) \right] (t, x, x_d/\varepsilon).$$

où l'opérateur rapide  $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d})$  est défini comme  $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) := A_d(\partial_{\psi_d} - \mathcal{A}(\underline{\zeta}))$ .

Ainsi, la première équation du système (2.1.1) implique formellement que les profils  $(U_k)_{k \geq 0}$  doivent satisfaire la suite d'équations

$$(2.3.1a) \quad \mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U_0 = 0$$

$$(2.3.1b) \quad \mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U_k + L(\partial) U_{k-1} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

D'autre part, pour que la série formelle  $u^\varepsilon$  satisfasse les deux dernières équations de (2.1.1), la condition au bord et la condition initiale, on impose

$$(2.3.2a) \quad (BU_k)|_{x_d, \psi_d=0} = \delta_0^k g, \quad \forall k \geq 0,$$

$$(2.3.2b) \quad (U_k)|_{t \leq 0} = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

On va réécrire les équations (2.3.1a) et (2.3.1b) de manière équivalente grâce à un résultat de résolution du problème rapide  $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U = F$  dont la preuve se trouve dans [Les07].

**Lemme 2.3.1** ([Les07, Théorème 2.14]). *Dans l'espace  $\mathcal{P}$ , il existe des projecteurs  $\mathbf{E}, \mathbf{E}^i$  et un inverse partiel  $\mathbf{Q}$  tels que pour  $F \in \mathcal{P}$ , l'équation  $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) U = F$  admet une solution dans  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\mathbf{E}^i F = 0$ , et dans ce cas toute solution est de la forme*

$$U = \mathbf{E}U + \mathbf{Q}F.$$

En particulier,  $\mathbf{E}, \mathbf{E}^i$  et  $\mathbf{Q}$  se décomposent selon  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{ev}} \oplus \mathcal{P}^{\text{osc}}$ . Sur  $\mathcal{P}^{\text{ev}}$ ,  $\mathbf{E}^i = 0$  et  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ev}}$  où

$$(2.3.3) \quad \mathbf{E}^{\text{ev}} U(t, x, \psi_d) := e^{\psi_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_-^e U(t, x, 0)$$

tandis que  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{ev}}$  où pour  $F \in \mathcal{P}^{\text{ev}}$ ,

$$(2.3.4) \quad \mathbf{Q}^{\text{ev}} F(t, x, \psi_d) := \int_0^{\psi_d} e^{(\psi_d-s)\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_-^e A_d^{-1} F(t, x, s) ds \\ - \int_{\psi_d}^{+\infty} e^{(\psi_d-s)\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+^e A_d^{-1} F(t, x, s) ds.$$

Sur  $\mathcal{P}^{\text{osc}}$ , on a  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i = \mathbf{E}^{\text{osc}}$  et  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{osc}}$  où

$$(2.3.5) \quad \mathbf{E}^{\text{osc}} V = \sum_{j=1}^H e^{i\xi_j \psi_d} \Pi_j V_j, \quad \mathbf{Q}^{\text{osc}} V = \sum_{j=1}^H e^{i\xi_j \psi_d} Q_j V_j$$

où  $V$  est donnée par  $V = \sum_{j=1}^H e^{i\xi_j \psi_d} V_j$ .

On peut alors réécrire les équations (2.3.1)-(2.3.2) vérifiées par la suite d'amplitudes  $(U_k)_{k \geq 0}$ . Le profil principal  $U_0$  satisfait le système suivant,

$$(2.3.6a) \quad U_0 = \mathbf{E}U_0, \quad \mathbf{E}^i L(\partial) \mathbf{E}U_0 = 0, \quad (BU_0)|_{x_d, \psi_d=0} = g, \quad (U_0)|_{t \leq 0} = 0,$$

et, pour  $k \geq 1$ , le correcteur  $U_k$  vérifie le système

$$(2.3.6b) \quad \begin{cases} (I - \mathbf{E}) U_k = -\mathbf{Q}L(\partial) U_{k-1} \\ \mathbf{E}^i L(\partial) U_k = 0 \\ (BU_k)|_{x_d, \psi_d=0} = 0 \\ (U_k)|_{t \leq 0} = 0 \end{cases}$$

Maintenant que la cascade d'équations (2.3.1)-(2.3.2) est sous la forme triangulaire (2.3.6),

on peut résoudre celle-ci.

## 2.4 Résolution des équations

Bien que notre cas se place sous des hypothèses simplificatrices de [Ben14], on suit les idées de la partie 3 de ce travail.

### 2.4.1 Résolution des équations pour le profil principal

En utilisant la décomposition  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{ev}} \oplus \mathcal{P}^{\text{osc}}$ , on réécrit le système (2.3.6a) que doit vérifier le profil principal  $U_0$  :

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} U_0^{\text{ev}} = \mathbf{E}^{\text{ev}} U_0^{\text{ev}} \\ U_0^{\text{osc}} = \mathbf{E}^{\text{osc}} U_0^{\text{osc}} \\ \mathbf{E}^{\text{osc}} L(\partial) \mathbf{E}^{\text{osc}} U_0^{\text{osc}} = 0 \\ B(U_0^{\text{ev}} + U_0^{\text{osc}})|_{x_d, \psi_d=0} = g \\ (U_0^{\text{ev}})|_{t \leq 0} = (U_0^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

#### Détermination du profil principal oscillant

D'après la deuxième équation de (2.4.1) et en utilisant la décomposition (2.1.6), d'après la forme (2.3.5) du projecteur  $\mathbf{E}^{\text{osc}}$ , pour tout  $j = 1, \dots, H$ , on trouve

$$U_{0,j} = \Pi_j U_{0,j}$$

et de même, d'après la troisième équation de (2.4.1), pour tout  $j = 1, \dots, H$ , l'amplitude  $U_{0,j}$  doit satisfaire

$$\Pi_j L(\partial) \Pi_j U_{0,j} = 0.$$

Ainsi, d'après le lemme de Lax 2.1.7,  $U_{0,j}$  est solution de l'équation de transport

$$(\partial_t - \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} \cdot \nabla_x) U_{0,j} = 0.$$

Si  $j$  est un indice sortant, c'est-à-dire si la dernière composante du vecteur  $\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}$  est strictement positive, alors  $U_{0,j}$  est entièrement déterminée par sa donnée initiale  $U_{0,j}(0, x)$ . Celle-ci est nulle d'après la dernière équation de (2.4.1) et ainsi  $U_{0,j}$  est uniformément égal à 0. Si  $j$  est maintenant un indice rentrant, c'est-à-dire si la dernière composante du vecteur  $\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}$  est strictement négative, il nous faut déterminer la valeur au bord de  $U_{0,j}$ . Pour cela on écrit, d'après la quatrième équation de (2.4.1), et en utilisant  $U_0^{\text{ev}} = \mathbf{E}^{\text{ev}} U_0^{\text{ev}}$ ,

$$(2.4.2) \quad B \left[ \Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) + \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \Pi_j U_{0,j}(t, y, 0) \right] = g - B \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \Pi_j U_{0,j}(t, y, 0) \right] = g,$$

où on a utilisé  $U_{0,j} \equiv 0$  pour  $j \in \mathcal{S}(\zeta)$ .

D'après la Définition 2.1.6 introduisant les projecteurs  $\Pi_-^e$  et  $\Pi_j$  et la décomposition (2.1.7) du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ , le terme en facteur de  $B$  dans le membre de gauche de l'équation (2.4.2) est dans le sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ . Or, d'après l'Hypothèse 2.3, la matrice  $B$  est inversible sur  $E_-(\zeta)$ . Ainsi,

$$(2.4.3) \quad \Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) + \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \Pi_j U_{0,j}(t, y, 0) = (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g$$

et en décomposant le terme de droite de l'équation (2.4.3) selon la décomposition (2.1.7) du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ , on détermine la trace au bord  $\Pi_j (U_{0,j})|_{x_d=0}$  pour tout  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$  ainsi que la trace au bord  $\Pi_-^e (U_0^{\text{ev}})|_{x_d, \psi_d=0}$ . Ainsi l'amplitude  $U_{0,j}$  est solution du système

$$(\partial_t - v_{\alpha_j(\zeta)} \cdot \nabla_x) U_{0,j} = 0, \quad (U_{0,j})|_{t \leq 0} = 0, \quad (U_{0,j})|_{x_d=0} = \Pi_j (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g$$

que l'on résout en intégrant le long des caractéristiques pour obtenir

$$U_{0,j}(t, x) = \mathbf{1}_{x_d \leq t \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d} \Pi_j (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g(t + x_d / \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d, y - x_d \mathbf{v}'_{\alpha_j(\zeta)} / \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d),$$

où l'on a décomposé le vecteur  $\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}$  dans  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$  comme  $\mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} = (\mathbf{v}'_{\alpha_j(\zeta)}, \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d)$ . Ainsi  $U_{0,j}$  appartient à  $H^\infty(\Omega_T)$ , et s'annule pour  $t \leq 0$  puisque  $g$  appartient à  $H^\infty(\Omega_T)$ .

### Profil principal évanescent

D'après la première équation de (2.4.1),  $U_0^{\text{ev}}$  est donné par

$$U_0^{\text{ev}} = e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, x, 0).$$

Il nous faut donc déterminer la trace  $\Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, x, 0)$ . En utilisant (2.4.3) et en projetant la fonction  $(B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g$  sur  $E_-^e(\zeta)$  on obtient l'expression de la double trace  $\Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0)$  suivante

$$\Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) = \Pi_-^e (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g.$$

On relève alors cette double trace selon la procédure de [Les07] pour obtenir  $\Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, x_d, 0) = \chi(x_d) \Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0)$  avec  $\chi$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant  $\chi(0) = 1$ . On a alors déterminé  $U_0^{\text{ev}}$  comme

$$U_0^{\text{ev}}(t, x, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \chi(x_d) \Pi_-^e (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} g.$$

Le profil  $U_0^{\text{ev}}$  appartient bien à  $\mathcal{P}^{\text{ev}}$  puisque le projecteur  $\Pi_-^e$  est le projecteur sur le sous-espace stable  $E_-^e(\zeta)$  associé aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  de parties réelles strictement négatives.

### 2.4.2 Résolution des équations du premier correcteur

D'après le système (2.3.6b) pour  $n = 1$ , le premier correcteur  $U_1$  doit vérifier les équations

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} (I - \mathbf{E}^{\text{ev}}) U_1^{\text{ev}} = -\mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} \\ (I - \mathbf{E}^{\text{osc}}) U_1^{\text{osc}} = -\mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \\ \mathbf{E}^{\text{osc}} L(\partial) U_1^{\text{osc}} = 0 \\ B(U_1^{\text{ev}} + U_1^{\text{osc}})|_{x_d, \psi_d=0} = 0 \\ (U_1^{\text{ev}})|_{t \leq 0} = (U_1^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0 \end{cases}$$

#### Partie oscillante du premier correcteur

La résolution est similaire à celle du profil principal. D'après la deuxième équation de (2.4.4) et la décomposition (2.1.6), on a, pour tout  $j = 1, \dots, H$ ,

$$(I - \Pi_j) U_{1,j} = -Q_j L(\partial) U_{0,j}$$

ce qui détermine la partie non polarisée de  $U_{1,j}$ . Concernant la partie polarisée, en utilisant la troisième équation de (2.4.4) on a

$$\Pi_j L(\partial) \Pi_j U_{1,j} = \Pi_j L(\partial) Q_j L(\partial) U_{0,j}.$$

On utilise alors le lemme de Lax 2.1.7 de la même manière que pour l'amplitude principale. On a alors

$$(2.4.5) \quad (\partial_t - \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)} \cdot \nabla_x) U_{1,j} = \Pi_j L(\partial) Q_j L(\partial) U_{0,j}.$$

Si l'indice  $j$  est sortant alors l'équation de transport scalaire à coefficients constants (2.4.5) suffit à déterminer  $U_{1,j}$ , qui est nul puisque si  $j$  est sortant,  $U_{0,j}$  est égal à zéro et que la donnée initiale de  $U_{1,j}$  est également nulle. Dans le cas contraire, si l'indice  $j$  est rentrant, on utilise la quatrième équation de (2.4.4) pour obtenir

$$\begin{aligned} B \left[ \Pi_-^e U_1^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) + \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \Pi_j U_{1,j}(t, y, 0) \right] \\ = B \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} - \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \Pi_j U_{0,j}(t, y, 0) \right] \\ = B \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right] \end{aligned}$$

puisqu'on vient de montrer que les profils  $U_{1,j}$  pour  $j \in \mathcal{S}(\zeta)$  sont nuls. Ainsi, par les mêmes arguments que pour le profil principal,

$$(2.4.6) \quad \Pi_-^e U_1^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) + \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} \Pi_j U_{1,j}(t, y, 0) \\ = (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} B \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right].$$

En décomposant le terme de droite selon la décomposition (2.1.7) du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ , on détermine, pour  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$ , la trace au bord  $(U_{1,j})|_{x_d=0}$  en fonction du profil principal  $U_0$  qui est à ce stade entièrement déterminé :

$$\Pi_j (U_{1,j})|_{x_d=0} = \Pi_j (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} B \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right].$$

On en déduit alors le profil  $U_{1,j}$  en résolvant l'équation de transport (2.4.5) dont le profil  $U_{1,j}$  est solution :

$$\begin{aligned} \Pi_j U_{1,j}(t, x) &= \mathbb{1}_{x_d \leq t \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d} \Pi_j (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} B \\ &\quad \times \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right] (t + x_d / \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d, y - x_d \mathbf{v}'_{\alpha_j(\zeta)} / \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}^d). \end{aligned}$$

### Partie évanescence du premier correcteur

La première équation du système (2.4.4) donne  $(I - \mathbf{E}^{\text{ev}}) U_1^{\text{ev}}$  la partie non polarisée du profil  $U_1^{\text{ev}}$ , puisqu'à ce stade le profil  $U_0^{\text{ev}}$  a été déterminé, et il nous faut alors déterminer la partie polarisée  $\mathbf{E}^{\text{ev}} U_1^{\text{ev}}$  de  $U_1^{\text{ev}}$ . Pour cela on détermine d'abord la double trace  $\Pi_-^e (U_1^{\text{ev}})|_{x_d, \psi_d=0}$ .

On utilise l'équation (2.4.6) en décomposant le terme de droite selon (2.1.4) pour obtenir

$$\Pi_-^e U_0^{\text{ev}}(t, y, 0, 0) = \Pi_-^e (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right].$$

On pose  $\Pi_-^{\text{ev}} U_1^{\text{ev}}(t, y, x_d, 0) = \chi(x_d) \Pi_-^e U_1^{\text{ev}}(t, y, 0, 0)$  ce qui mène à

$$\mathbf{E}^{\text{ev}} U_1^{\text{ev}}(t, x, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \chi(x_d) \Pi_-^e (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_0^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_0^{\text{osc}} \right].$$

### 2.4.3 Profils d'ordre supérieur et résultat

On se convainc facilement que le procédé utilisé pour le premier correcteur s'itère pour les correcteurs d'ordre supérieur. On obtient alors, pour  $n \geq 1$ , que le profil oscillant  $U_{n,j}$  pour  $j \in \mathcal{S}(\underline{\zeta})$  est nul, le profil oscillant  $U_{n,j}$  pour  $j \in \mathcal{R}(\underline{\zeta})$  est donné par sa partie non-polarisée

$$(I - \Pi_j) U_{n,j} = -Q_j L(\partial) U_{n-1,j},$$

et sa partie polarisée

$$\begin{aligned} \Pi_j U_{n,j}(t, x) &= \mathbb{1}_{x_d \leq t \mathbf{v}_{\alpha_j(\underline{\zeta})}^d} \Pi_j (B_{|E_-(\underline{\zeta})})^{-1} B \\ &\quad \times \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_{n-1}^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_{n-1}^{\text{osc}} \right] (t + x_d / \mathbf{v}_{\alpha_j(\underline{\zeta})}^d, y - x_d \mathbf{v}'_{\alpha_j(\underline{\zeta})} / \mathbf{v}_{\alpha_j(\underline{\zeta})}^d), \end{aligned}$$

et que le profil évanescant  $U_n^{\text{ev}}$  est donné par sa partie non-polarisée

$$(I - \mathbf{E}^{\text{ev}}) U_n^{\text{ev}} = -\mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_{n-1}^{\text{ev}},$$

et sa partie polarisée

$$\mathbf{E}^{\text{ev}} U_n^{\text{ev}}(t, x, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \chi(x_d) \Pi_-^e (B_{|E_-(\underline{\zeta})})^{-1} \left[ \mathbf{Q}^{\text{ev}} L(\partial) U_{n-1}^{\text{ev}} + \mathbf{Q}^{\text{osc}} L(\partial) U_{n-1}^{\text{osc}} \right].$$

On a alors montré la première partie du Théorème 2.2.2.

## 2.5 Justification du développement d'optique géométrique

On justifie maintenant que la série formelle  $\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k e^{i\varphi/\varepsilon} U_k(t, x, x_d/\varepsilon)$  construite dans la partie précédente approche bien la solution exacte de (2.1.1) lorsque la longueur d'onde  $\varepsilon$  tend vers 0. On énonce dans un premier temps un résultat qui précise des propriétés des fonctions de  $\mathcal{P}^{\text{ev}}$  et de  $\mathcal{P}^{\text{osc}}$ .

**Proposition 2.5.1** ([Ben14, Proposition 4.1]). *Si  $U$  est une fonction de  $\mathcal{P}^{\text{ev}}$  (resp.  $\mathcal{P}^{\text{osc}}$ ), alors les fonctions  $U(t, x, x_d/\varepsilon)$  et  $(L(\partial)U(t, x, \psi_d))|_{\psi_d=x_d/\varepsilon}$  sont de l'ordre de  $O(\varepsilon^{1/2})$  (resp.  $O(1)$ ) dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

On se reporte à [Ben14] pour la preuve de ce résultat. On rappelle le résultat de stabilité que l'on va montrer.

**Théorème 2.5.2.** *On rappelle que  $u_n^\varepsilon$  est la série formelle  $u^\varepsilon$  tronquée à l'ordre  $n \geq 0$  et  $v^\varepsilon$  la solution exacte du système (2.1.1). Pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$ , il existe  $C_\alpha > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,*

$$(2.5.1) \quad \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha (u_n^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C_\alpha \varepsilon^{n+1}.$$

*Preuve.* Soit  $n \geq 0$ . Par construction des profils  $(U_k)_{k \geq 0}$ , la fonction  $u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon$  est solution du problème

$$\begin{cases} L(\partial)(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon) = e^{i\varphi/\varepsilon} \varepsilon^{n+1} \left( L(\partial)U_{n+1}^{\text{ev}} + L(\partial)U_{n+1}^{\text{osc}} \right) |_{\psi_d=x_d/\varepsilon} & \text{dans } \Omega_T \\ B(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)|_{x_d=0} = 0 & \text{dans } \omega_T \\ (u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, d'après l'estimation (2.1.2) et la Proposition 2.5.1,

$$\|u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{n+1} \left( \|L(\partial)U_{n+1}^{\text{ev}}\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)} + \|L(\partial)U_{n+1}^{\text{osc}}\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)} \right) \leq C \varepsilon^{n+1}.$$



Si  $\alpha' \in \mathbb{N}^d$ , la dérivée tangentielle  $\partial_{t,y}^{\alpha'}(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} L(\partial) \partial_{t,y}^{\alpha'}(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon) = \partial_{t,y}^{\alpha'} \left[ e^{i\varphi/\varepsilon} \varepsilon^{n+1} (L(\partial)U_{n+1}) \Big|_{\psi_d=x_d/\varepsilon} \right] & \text{dans } \Omega_T \\ B(\partial_{t,y}^{\alpha'}(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)) \Big|_{x_d=0} = 0 & \text{dans } \omega_T \\ (\partial_{t,y}^{\alpha'}(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)) \Big|_{t \geq 0} = 0 \end{cases}$$

et donc, toujours d'après (2.1.2) et en utilisant la formule de Leibniz on obtient de la même manière que précédemment

$$\|\partial_{t,y}^{\alpha'}(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{n+1} \varepsilon^{-|\alpha'|}.$$

Si maintenant  $\alpha = (\alpha', k) \in \mathbb{N}^{1+d}$ , on exprime les dérivées partielles normales  $\partial_{x_d}^k(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)$  comme combinaison linéaire de dérivées tangentielles à l'aide de l'opérateur  $L(\partial)$  pour trouver finalement le résultat

$$\|\partial^\alpha(u_{n+1}^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{n+1} \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Pour conclure il nous suffit de voir que d'après des arguments déjà développés, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$ , il existe  $C > 0$  tel que,

$$\varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha(u_{n+1}^\varepsilon - u_n^\varepsilon)\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{n+1}.$$

On choisit ensuite  $\gamma = 1/T$  ce qui nous permet d'obtenir l'estimation (2.5.1).  $\square$

# Développement d'optique géométrique multiphasée pour un problème aux limites semi-linéaire

## Sommaire du présent chapitre

<b>3.1 Notations et hypothèses</b>	<b>54</b>
3.1.1 Stricte hyperbolicité . . . . .	54
3.1.2 Condition de Lopatinskii uniforme . . . . .	55
3.1.3 Cadre fonctionnel . . . . .	57
<b>3.2 Ansatz et équations de profil</b>	<b>59</b>
3.2.1 Position du problème . . . . .	59
3.2.2 Obtention des équations de profil . . . . .	60
3.2.3 Résultat principal . . . . .	62
<b>3.3 Résolution des équations de profil</b>	<b>62</b>
3.3.1 Résultats sur les espaces fonctionnels . . . . .	62
3.3.2 Résolution des équation associées à chaque mode . . . . .	64
3.3.3 Existence d'un profil linéaire . . . . .	66
3.3.4 Existence d'un profil semi-linéaire . . . . .	69

On détaille dans ce chapitre la construction du premier terme d'un développement d'optique géométrique multiphasée pour des problèmes aux limites semi-linéaires, telle qu'accomplie dans [Wil96], dont on reprend la présentation. Contrairement au cas du chapitre précédent, les non-linéarités du problème engendrent, à l'intérieur du domaine, à partir des multiples phases au bord, une infinité de fréquences pour la solution approchée. Cela nous contraint à nous placer dans le cadre des fonctions presque-périodiques, et l'on explique ici comme ce cadre fonctionnel peut être utilisé pour la construction de développements d'optiques géométrique. Le cas semi-linéaire permet de considérer des fonctions presque-périodiques au sens des algèbres de Wiener, et l'on verra que dans le Chapitre 4 suivant que le cas quasi-linéaire préconise plutôt les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans une première partie on introduit le problème étudié, et l'on fait une série d'hypothèses structurelles classiques sur le problème et la condition au bord, et l'on énonce un certain nombre de résultats préliminaires. On introduit également le cadre fonctionnel qui sera utilisé ensuite pour résoudre les équations de profils. Dans une deuxième partie, une analyse BKW formelle conduit, à partir d'un ansatz que l'on aura précisé,

à la cascade BKW d'équations vérifiées par les profils, que l'on découple de manière classique à l'aide de projecteurs de polarisation. Enfin, dans une troisième partie, on résout le système d'équation ainsi obtenu pour le profil principal. On donne d'abord des résultats utiles pour les espaces fonctionnels mis en jeu, puis l'on donne des estimations dans ces espaces fonctionnels pour les équations de transport associées à chaque mode. On utilise alors ces estimations pour prouver l'existence d'une solution au système linéarisé. On montre enfin l'existence d'une solution pour le système d'origine grâce à la convergence d'un schéma itératif sur le système linéarisé.

### 3.1 Notations et hypothèses

On cherche à déterminer le profil principal d'un développement d'optique géométrique pour les solutions de problèmes fortement oscillants de la forme

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} L(\partial_z) u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u^\varepsilon = h^\varepsilon + f(u^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega_T \\ Bu^\varepsilon|_{x_d=0} = g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0 \end{cases}$$

où  $T > 0$ , le domaine  $\Omega_T$  est défini comme  $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ , sa frontière (selon  $x_d$ )  $\omega_T$  est donnée par  $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ , l'inconnue  $u^\varepsilon$  est une fonction de  $\Omega_T$  dans  $\mathbb{C}^N$ , les matrices  $A_j$  appartiennent à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et la matrice  $B$  appartient à  $\mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{R})$  et est de rang maximal. L'entier  $M$  est précisé dans l'Hypothèse 3.2 ci dessous.

On note  $z = (t, y, x_d) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ ,  $z' = (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$  et  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$  la variable duale de  $z = (t, y, x_d)$ .

La fonction  $f$  est une fonction polynomiale dont le coefficient du terme constant est nul, que l'on écrit

$$(3.1.2) \quad f(u, v) = \sum_{1 \leq \alpha + \beta \leq d_f} f_{\alpha, \beta} u^\alpha v^\beta,$$

où  $d_f \geq 1$  est le degré de  $f$ . Le terme source  $h^\varepsilon$  et le terme de bord  $g^\varepsilon$  sont donnés par

$$(3.1.3) \quad h^\varepsilon(z) = H(z, z/\varepsilon), \quad g^\varepsilon(z') = G(z', z'/\varepsilon),$$

où  $H$  et  $G$  sont également précisés plus bas.

#### 3.1.1 Stricte hyperbolicité

**Définition 3.1.1.** Pour  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , on définit  $L(\alpha)$  le symbole associé à  $L(\partial_z)$  comme

$$L(\alpha) = L(\tau, \eta, \xi) := \tau I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j + \xi A_d.$$

On définit alors  $p(\tau, \eta, \xi) := \det(L(\tau, \eta, \xi))$  son polynôme caractéristique. On dit que  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d}$  est une fréquence caractéristique si elle est racine du polynôme  $p$ .

**Hypothèse 3.1** (stricte hyperbolicité). Il existe des fonctions analytiques réelles  $\tau_1 < \dots < \tau_N$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telles que pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$p(\tau, \eta, \xi) = \det \left( \tau I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j + \xi A_d \right) = \prod_{k=1}^N (\tau - \tau_k(\eta, \xi)).$$

Pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d$ , on a donc la décomposition de  $\mathbb{C}^N$  en sous-espaces de dimension 1 suivante

$$(3.1.4) \quad \mathbb{C}^N = \ker L(\tau_1(\eta, \xi), \eta, \xi) \oplus \cdots \oplus \ker L(\tau_N(\eta, \xi), \eta, \xi).$$

L'hypothèse de stricte hyperbolicité est préférée ici à l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicités constantes, moins restrictive, pour des raisons techniques, mais il n'y a pas d'obstacle apparent à conduire l'étude avec cette deuxième hypothèse.

**Définition 3.1.2.** Si  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  est caractéristique, alors  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$  pour un certain  $k$  entre 1 et  $N$ . On note  $\pi_\alpha$  la projection de  $\mathbb{C}^N$  sur  $\ker L(\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$  selon la décomposition (3.1.4). Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  n'est pas caractéristique, on note  $\pi_\alpha := 0$  et si  $\alpha = 0$  on note  $\pi_0 = I$ .

*Remarque 3.1.3.* Pour tout  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  caractéristique,  $\pi_{(\tau(\eta, \xi), \eta, \xi)}$  est homogène de degré 0 en  $(\eta, \xi)$ . D'autre part, par stricte hyperbolicité,  $(\eta, \xi) \mapsto \pi_{(\tau(\eta, \xi), \eta, \xi)}$  est analytique. Ainsi, par compacité, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ,  $\pi_\alpha$  est borné uniformément par rapport à  $\alpha$ .

### 3.1.2 Condition de Lopatinskii uniforme

On définit les espaces de fréquences

$$\begin{aligned} \Xi &:= \{\zeta = (\sigma = \tau - i\gamma, \eta) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} \mid \gamma \geq 0\}, \\ \Sigma &:= \{\zeta \in \Xi \mid \tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^2 = 1\}, \\ \Xi_0 &:= \{\zeta \in \Xi \mid \gamma = 0\}, \\ \Sigma_0 &:= \Xi_0 \cap \Sigma. \end{aligned}$$

On définit également la matrice qui apparaît lorsque l'on applique la transformée de Fourier-Laplace à l'opérateur  $L(\partial_z)$ , pour tout  $\zeta = (\sigma, \eta) \in \Xi$ ,

$$\mathcal{A}(\zeta) := -(A_d)^{-1}i \left( \sigma I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right).$$

Le lemme de Hersh ([BGS07, Lemme 4.1]) nous assure que pour  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$  la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle et que le sous-espace stable associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative, que l'on note  $E_-(\zeta)$ , est de dimension constante égale à  $p$ . On note  $E_+(\zeta)$  le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé aux valeurs propres de partie réelle strictement positive qui est de dimension  $N - p$ .

Dans [Kre70] il est montré que que les sous-espaces stables  $E_\pm$  s'étendent de manière continue à tout l'espace  $\Xi$ . On peut alors formuler l'hypothèse principale de ce travail.

**Hypothèse 3.2.** On suppose que le système vérifie la condition de Lopatinskii uniforme, c'est-à-dire que pour tout  $\zeta \in \Xi$ ,

$$\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}.$$

En particulier, cela impose que le rang de la matrice  $B$  soit égal à la dimension de  $E_-(\zeta)$ , c'est-à-dire  $M = p$ .

*Remarque 3.1.4.* Puisque  $E_-(\zeta)$  est homogène de degré 0, et par compacité de  $\Sigma$ , on remarque que la condition de Lopatinskii uniforme implique que la matrice  $(B|_{E_-(\zeta)})^{-1}$  est bornée uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

On s'attache maintenant à décrire plus précisément la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  et les espaces  $E_\pm(\zeta)$  pour  $\zeta \in \Xi_0$ . Le théorème suivant, dû à Kreiss ([Kre70]), donne la décomposition de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  appartient à  $\Xi_0$ , pour des problèmes strictement hyperboliques.

**Proposition 3.1.5.** *Si l'Hypothèse 3.1 est vérifiée, alors pour tout  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , un entier  $L \geq 0$ , une partition  $N = \nu_1 + \dots + \nu_L$  et une matrice inversible  $T$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{V}$  telle que pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}$ ,*

$$T(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)T(\zeta)^{-1} = \text{diag}(\mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta))$$

où pour tout  $j$  la matrice  $\mathcal{A}_j$  est de taille  $\nu_j$  et vérifie une des propriétés suivantes :

- i) les valeurs propres de  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont de partie réelle strictement positive
- ii) les valeurs propres de  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont de partie réelle strictement négative
- iii)  $\nu_j = 1$ ,  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  est imaginaire pur lorsque  $\gamma$  est nul et  $\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\zeta) \in \mathbb{R}^*$
- iv)  $\nu_j > 1$ , les coefficients de  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont imaginaires purs lorsque  $\gamma$  est nul, il existe  $i\omega_j \in i\mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} i\omega_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & i\omega_j \end{pmatrix}$$

et le coefficient en bas à gauche de  $\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est réel non nul.

**Définition 3.1.6.** *Si  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  est caractéristique, alors  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$  pour un certain  $k$  entre 1 et  $M$ . On définit  $X_\alpha$  le champ de vecteurs associé à  $\alpha$  comme*

$$(3.1.5) \quad X_\alpha = \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta, \xi) \cdot \nabla_x - \partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \cdot \partial_{x_d}.$$

On dit que  $\alpha$  est glancing (resp. rentrante, sortante) si  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  est nul (resp. strictement négatif, strictement positif).

**Proposition 3.1.7** ([Wil96], (3.4)). *Soit  $\zeta = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ . On note  $i\xi_j(\zeta)$  pour  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$  les valeurs propres distinctes de  $\mathcal{A}(\zeta)$ , et si  $\xi_j(\zeta)$  est réel, la fréquence caractéristique associée  $\alpha_j(\zeta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$ . L'ensemble  $\{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\}$  s'écrit comme l'union disjointe*

$$(3.1.6) \quad \{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\} = \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta)$$

où les ensembles  $\mathcal{G}(\zeta)$ ,  $\mathcal{R}(\zeta)$ ,  $\mathcal{P}(\zeta)$ ,  $\mathcal{S}(\zeta)$  et  $\mathcal{N}(\zeta)$  correspondent aux indices  $j$  tels que respectivement  $\alpha_j(\zeta)$  est glancing,  $\alpha_j(\zeta)$  est rentrant,  $\text{Im}(\xi_j(\zeta))$  est strictement positive,  $\alpha_j(\zeta)$  est sortant et  $\text{Im}(\xi_j(\zeta))$  est strictement négative.

On a alors la décomposition de  $E_-(\zeta)$  suivante

$$(3.1.7) \quad E_-(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta).$$

On a de plus une description de  $E_-^j(\zeta)$  suivant l'indice  $j$ .

- i) Si  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ , l'espace  $E_-^j(\zeta)$  est l'espace propre généralisé associé à la valeur propre  $i\xi_j(\zeta)$ .
- ii) Si  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$ , on a  $E_-^j(\zeta) = \ker L(\alpha_j(\zeta))$ .
- iii) Si  $j \in \mathcal{G}(\zeta)$ , on note  $m_j$  la multiplicité de la valeur propre imaginaire pure  $i\xi_j(\zeta)$ . Pour  $\gamma > 0$  petit,  $i\xi_j(\tau, \eta)$  se sépare en  $m_j$  valeurs propres simples  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$ ,  $k = 1, \dots, m_j$ , de partie réelle non nulle. On note  $\mu_j(\zeta)$  le nombre de valeurs propres  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$  de partie réelle strictement positive. Alors  $E_-^j(\zeta)$  est de dimension  $\mu_j(\zeta)$  et est engendré par les vecteurs propres généralisés  $w$  vérifiant  $[i\xi_j(\zeta) - \mathcal{A}(\zeta)]^{\mu_j} w = 0$ . De plus, si  $m_j$  est pair,  $\mu_j = m_j/2$  et si  $m_j$  est impair,  $\mu_j$  est égal à  $(m_j - 1)/2$  ou  $(m_j + 1)/2$ .

**Hypothèse 3.3.** *Pour tout  $\zeta \in \Xi$ , la multiplicité  $m_i$  des valeurs propres imaginaires pures de  $\mathcal{A}(\zeta)$  est inférieure ou égale à 2.*

Dans [Wil00], il est montré que sans l'Hypothèse 3.3 précédente, il peut exister des solutions fortement oscillantes qui explosent en temps arbitrairement petit. Concernant notre problème, il est montré dans [Wil00] que, sans cette hypothèse, les projecteurs introduits dans la définition suivante pourraient ne pas être bornés, alors que le caractère borné de ceux-ci est un résultat crucial dans notre analyse.

**Définition 3.1.8.** *Pour  $\zeta \in \Xi_0$  et, avec les notations de la Proposition 3.1.7, pour un indice  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta)$ , on note  $\Pi_-^j(\zeta)$  la projection de  $E_-(\zeta)$  sur  $E_-^j(\zeta)$  selon la décomposition (3.1.7).*

*On note également  $\Pi_-^e(\zeta)$  la projection de  $E_-(\zeta)$  sur la partie elliptique  $\bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta)$  selon la décomposition (3.1.7).*

Les preuves des deux résultats suivants, omises dans [Wil96], sont rappelées au chapitre suivant, voir Propositions 4.1.21 et 4.5.16.

**Proposition 3.1.9** ([Wil96, (3.5)]). *Sous l'Hypothèse 3.3, pour  $\zeta \in \Xi_0$  et pour  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)$ ,  $\Pi_-^j(\zeta)$  est uniformément borné par rapport à  $\zeta$  et  $\Pi_-^e(\zeta)$  est uniformément borné par rapport à  $\zeta$ .*

**Proposition 3.1.10.** *Sous l'Hypothèse 3.3, la matrice  $e^{tA(\zeta)}\Pi_-^e(\zeta)$  est uniformément bornée par rapport à  $\zeta \in \Xi_0$  et  $t \geq 0$ .*

### 3.1.3 Cadre fonctionnel

On note  $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$  le crochet japonais, où  $|\cdot|$  désigne, selon le contexte, le module d'un nombre complexe ou bien la norme euclidienne.

Pour  $m, s \geq 0$ , on note  $H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d)$  l'ensemble des fonctions  $u(t, x)$  s'annulant pour  $t$  négatif, et telles que

$$\tau, \eta \mapsto \langle \tau \rangle^m \langle \eta \rangle^s \widehat{u}(\tau, \eta)$$

soit une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On définit de même, pour  $m, s, p \geq 0$ , l'espace  $H_+^{m,s,p}(\mathbb{R}^{d+1})$  des fonctions  $u(t, y, \psi_d)$  s'annulant pour  $t$  négatif, et telles que

$$\tau, \eta, \beta \mapsto \langle \tau \rangle^m \langle \eta \rangle^s \langle \beta \rangle^p \widehat{u}(\tau, \eta, \beta)$$

soit une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ . On note alors  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d))$  (resp.  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H_+^{m,s,p}(\mathbb{R}^{d+1}))$ ) l'ensemble des fonctions  $u(x_d)$  continues bornées en  $x_d$  dans  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d)$  (resp.  $H_+^{m,s,p}(\mathbb{R}^{d+1})$ ).

**Définition 3.1.11.** *Pour  $m, s, p \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$ , on définit les espaces de fonctions suivants.*

i)  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$ , l'ensemble des fonctions  $u$  de  $e^{\gamma t} \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d))$  telles que

$$\|u\|_{\infty,m,s,\gamma} := \left\| \|u^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d)\|_{L^\infty(x_d)} \langle \tau - i\gamma \rangle^m \langle \eta \rangle^s \right\|_{L^2(\tau,\eta)} < +\infty$$

où  $u^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d)$  désigne la transformée de Fourier partielle en  $(t, y)$  de la fonction  $e^{-\gamma t} u(t, y, x_d)$ . On notera  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}^c$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  dont le support en  $x_d$  est compact.

ii)  $\mathcal{F}_{m,s,\gamma}$ , l'ensemble des fonctions  $u$  de  $e^{\gamma t} H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d)$  telles que

$$\|u\|_{m,s,\gamma} := \|\widehat{u}(\tau - i\gamma, \eta) \langle \tau - i\gamma \rangle^m \langle \eta \rangle^s\|_{L^2(\tau,\eta)} < +\infty.$$

iii)  $F_{\infty,m,s,\gamma}$  est défini comme l'ensemble des fonctions  $u$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H_+^{m,s}(\mathbb{R}^d))$  telles que

$$\|u\|_{\infty,m,s,\gamma} := \left\| \|u^\wedge(\tau, \eta, x_d)\|_{L^\infty(x_d)} \langle \tau - i\gamma \rangle^m \langle \eta \rangle^s \right\|_{L^2(\tau,\eta)} < +\infty$$

où  $\widehat{u}(\tau, \eta, x_d)$  désigne la transformée de Fourier partielle en  $(t, y)$  de  $u$ . On notera là encore  $F_{\infty, m, s, \gamma}^c$  les fonctions de  $F_{\infty, m, s, \gamma}$  à support compact en  $x_d$ .

iv)  $F_{m, s, \gamma}$ , l'ensemble des fonctions  $u$  de  $H_+^{m, s}(\mathbb{R}^d)$  telles que

$$\|u\|_{m, s, \gamma} := \|\widehat{u}(\tau, \eta) \langle \tau - i\gamma \rangle^m \langle \eta \rangle^s\|_{L^2(\tau, \eta)} < +\infty.$$

*Remarque 3.1.12.* i) On note que  $u \in \mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma}$  (resp.  $\mathcal{F}_{m, s, \gamma}$ ) si et seulement si  $e^{-\gamma t}u \in F_{\infty, m, s, \gamma}$  (resp.  $F_{m, s, \gamma}$ ).

ii) Les espaces  $\mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma}$ ,  $\mathcal{F}_{m, s, \gamma}$ ,  $F_{\infty, m, s, \gamma}$  et  $F_{m, s, \gamma}$  sont des espaces de Banach.

**Proposition 3.1.13** ([Wil96, Proposition 6.2]). *Pour  $m > 1/2$ ,  $s > (d-1)/2$  et  $p > 1/2$ , les espaces  $F_{\infty, m, s, \gamma}$  et  $F_{m, s, \gamma}$  sont des algèbres normées, c'est-à-dire qu'il existe  $C > 0$  indépendant de  $\gamma \geq 0$  tel que pour tout  $u, v \in F_{\infty, m, s, \gamma}$ ,*

$$(3.1.8) \quad \|uv\|_{\infty, m, s, \gamma} \leq C \|u\|_{\infty, m, s, \gamma} \|v\|_{\infty, m, s, \gamma}$$

avec une estimation analogue pour  $F_{m, s, \gamma}$ . D'après la remarque précédente, il existe alors  $C > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in \mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma} \times F_{\infty, m, s, \gamma}$ ,

$$(3.1.9) \quad \|uv\|_{\infty, m, s, \gamma} \leq C \|u\|_{\infty, m, s, \gamma} \|v\|_{\infty, m, s, \gamma}$$

où l'on note que l'une des normes dans le membre de droite de l'inégalité est celle de l'espace  $F_{\infty, m, s, \gamma}$ . On a là encore un résultat similaire pour  $\mathcal{F}_{m, s, \gamma} \times F_{m, s, \gamma}$ .

**Définition 3.1.14.** *Si  $B$  est un espace vectoriel normé, on définit l'algèbre de Wiener  $\mathbb{A}_\theta(B)$  des fonctions presque périodiques de  $\theta \in \mathbb{R}^d$  comme l'ensemble des fonctions  $U$  de  $\theta \in \mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $B$  qui s'écrivent*

$$(3.1.10) \quad U = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} U_\zeta e^{i\zeta \cdot \theta}$$

et qui vérifient

$$(3.1.11) \quad \|U\|_{\mathbb{A}_\theta(B)} := \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} \|U_\zeta\|_B < +\infty.$$

*Remarque 3.1.15.* Si  $B$  est un espace de Banach, alors l'espace  $\mathbb{A}_\theta(B)$  est aussi un espace de Banach, et si  $B$  est une algèbre normée, alors  $\mathbb{A}_\theta(B)$  est aussi une algèbre normée.

**Définition 3.1.16.** *Pour  $m, s \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$ , on définit les espaces suivants.*

i) L'espace  $\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{osc}$  est l'ensemble des fonctions  $U$  de la forme  $U(z, \psi_d) = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} U_\xi(z)$  où la somme est finie et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , la fonction  $U_\xi$  est dans  $\mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma}$ . On munit cet espace de la norme

$$\|U\|_{\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{osc}} := \sum_{\xi \in \mathbb{R}^d} \|U_\xi\|_{\mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma}}.$$

ii) On définit  $\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{ev}$  comme l'ensemble des fonctions  $U(z, \psi_d)$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma})$  (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $U$  de  $\psi_d$  dans  $\mathbb{R}_+$ , continues bornées à valeurs dans  $\mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma}$ ) telles qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $e^{\delta \psi_d} U(z, \psi_d)$  soit dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma})$ . On associe à  $\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{ev}$  la norme

$$\|U(z, \psi_d)\|_{\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{ev}} := \|U\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_{\infty, m, s, \gamma})}.$$

iii) Enfin, on prend  $\mathcal{P}_{m, s, \gamma} := \mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{osc} \oplus \mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{ev}$  auquel on associe la norme évidente

$$\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m, s, \gamma}} := \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{osc}} + \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m, s, \gamma}^{ev}}.$$

Pour  $U \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma}$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ ), on note  $U =: U^{osc} + U^{ev}$  avec  $U^{osc} \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})$ ) et  $U^{ev} \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev})$ ).

*Remarque 3.1.17.* On note que l'espace  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  muni de sa norme n'est ni une algèbre ni un espace de Banach.

**Définition 3.1.18.** Pour  $m, s \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$ , on définit les espaces suivants.

i) L'espace  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  est l'ensemble des fonctions  $U$  de la forme  $U(z, \psi_d) = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi\psi_d} U_\xi(z)$  où la somme est finie et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , la fonction  $U_\xi$  est dans  $F_{\infty,m,s,\gamma}$  munit de la norme

$$\|U\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}} := \sum_{\xi \in \mathbb{R}^d} \|U_\xi\|_{F_{\infty,m,s,\gamma}}.$$

ii) On définit  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  comme l'ensemble des fonctions  $U(z, \psi_d)$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, F_{\infty,m,s,\gamma})$  telles qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $e^{\delta\psi_d} U(z, \psi_d)$  soit dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, F_{\infty,m,s,\gamma})$  que l'on munit de la norme

$$\|U(z, \psi_d)\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}} := \|U\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, F_{\infty,m,s,\gamma})}.$$

iii) Enfin, on prend  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma} := \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc} \oplus \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  auquel on associe la norme évidente

$$\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}} := \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}} + \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}}.$$

## 3.2 Ansatz et équations de profil

### 3.2.1 Position du problème

Dans (3.1.3) on se donne  $G$  de la forme

$$(3.2.1) \quad G(y, \theta) = G_1(y) e^{i\zeta_1\theta} + G_2(y) e^{i\zeta_2\theta}$$

avec  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^d$  rationnellement indépendants. et  $G_1, G_2 \in F_{m,s,\gamma}$  pour un certain couple  $(m, s) \in \mathbb{R}_+$ .

On étudie maintenant l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  créées par relèvement et résonance à partir de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . La résonance sur le bord crée l'ensemble  $\zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z}$ . Ces fréquences sont ensuite relevées pour obtenir des fréquences à l'intérieur du domaine. Compte tenu de la polarisation de la solution, seules les fréquences  $\alpha = (\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C}$  vérifiant  $\det L(\zeta, \xi) = 0$  subsistent. Pour  $\zeta = p\zeta_1 + q\zeta_2 \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , on cherche les fréquences  $\alpha = (\zeta, \xi)$  créées par relèvement à partir des fréquences du bord, qui sont donc rentrantes, on cherche ainsi  $\xi = \xi_j(\zeta)$  où  $j$  est dans  $\mathcal{R}(\zeta), \mathcal{P}(\zeta)$  avec les notations de la Proposition 3.1.7. On a donc obtenu l'ensemble

$$\mathcal{F}^0 = \{0\} \cup \left\{ (\zeta, \xi_j(\zeta)), \zeta \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta), \mathcal{P}(\zeta) \right\}.$$

On s'intéresse maintenant aux fréquences créées par résonance à l'intérieur du domaine, c'est-à-dire les fréquences  $\alpha = p(\zeta, \xi) + q(\tilde{\zeta}, \tilde{\xi})$  avec  $(\zeta, \xi), (\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{F}^0$ ,  $p\zeta + q\tilde{\zeta} \neq 0$  et telles que  $\det L(p\zeta + q\tilde{\zeta}, p\xi + q\tilde{\xi}) = 0$ . On a alors  $p\xi + q\tilde{\xi} = \xi_j(p\zeta + q\tilde{\zeta})$ . On fait l'hypothèse que pour toute fréquence  $\alpha$  de cette forme,  $j$  n'est pas dans  $\mathcal{G}(p\zeta + q\tilde{\zeta})$ . Puisque  $p\zeta + q\tilde{\zeta} \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z}$ , les nouvelles fréquences sont celles telles que  $j \in \mathcal{S}(p\zeta + q\tilde{\zeta})$ . On obtient alors l'ensemble

$$\mathcal{F}^1 = \{0\} \cup \left\{ (\zeta, \xi_j(\zeta)), \zeta \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta), \mathcal{P}(\zeta), \mathcal{S}(\zeta) \right\}.$$

Les fréquences créées par résonance à partir de cette ensemble en font déjà partie, on a donc trouvé  $\mathcal{F}$ .



On va donc chercher une solution  $u^\varepsilon$  de (3.1.1) sous la forme

$$(3.2.2) \quad \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(z, z/\varepsilon)$$

où pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  est dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ , c'est-à-dire que  $U_n$  s'écrit

$$(3.2.3) \quad U_n := U_{n,0}^{osc} + \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} U_{n,\zeta}(z, \psi_d) := U_{n,0}^{osc} + \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} [U_{n,\zeta}^{osc} + U_{n,\zeta}^{ev}](z, \psi_d)$$

où  $U_{n,0}^{osc} \in \mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  et pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $U_{n,\zeta}^{osc} = \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} e^{i\xi_j(\zeta)\psi_d} U_{n,\zeta,\xi_j(\zeta)}^{osc}$  est dans  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  et correspond aux fréquences réelles rentrantes et sortantes et où  $U_n^{ev} \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  correspond aux fréquences positives.

Puisque les termes non polarisés du terme source  $H$  n'interviennent pas dans le profil principal, on considère  $H$  de la forme

$$(3.2.4) \quad H(z, \theta, \psi_d) = H_0(z) + \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} e^{i\xi_j(\zeta)\psi_d} H_{\zeta,\xi_j(\zeta)}(z)$$

dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})$ .

### 3.2.2 Obtention des équations de profil

On cherche les équations que doivent vérifier les profils  $(U_n)_{n \geq 0}$  pour que la série formelle (3.2.2) soit formellement solution de (3.1.1). On commence par écrire

$$(3.2.5) \quad f\left(\sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n, \overline{\sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n}\right) = f(U_0, \overline{U_0}) + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n F_n$$

où pour  $n \geq 1$ ,  $F_n$  est un polynôme en  $U_0, \overline{U_0}, U_1, \overline{U_1}, \dots, U_n, \overline{U_n}$  dont les coefficients dépendent de  $z$ .

*Remarque 3.2.1.* Ici le terme  $f(U_0, \overline{U_0})$  n'est à priori pas bien défini puisque  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  n'est pas une algèbre. Dans la suite on considèrera cependant une troncature régulière en  $t$  de  $U_0$  à la place de  $U_0$  ce qui nous assurera que  $f(U_0, \overline{U_0})$  est bien défini dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ .

Si on applique l'opérateur  $L(\partial_z)$  à la série (3.2.2) on obtient

$$(3.2.6) \quad L(\partial_z) \left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(z, z/\varepsilon) \right) \\ = L(\partial_z) \left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(z, \theta, \psi_d) \right)_{|\theta=z'/\varepsilon, \psi_d=x_d/\varepsilon} + \varepsilon^{-1} \sum_{j=0}^d A_j \partial_{\theta_j} \left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(z, \theta, \psi_d) \right)_{|\theta=z'/\varepsilon, \psi_d=x_d/\varepsilon}.$$

Ainsi, si l'on note  $L(\partial_\theta) := \sum_{j=0}^d A_j \partial_{\theta_j}$  et que l'on réordonne les termes de (3.2.6) en puissances croissantes de  $\varepsilon$  on obtient, pour  $(U_n(z, \theta, \psi_d))_{n \geq 0}$ ,

$$(3.2.7) \quad L(\partial_z) \left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n \right) = \varepsilon^{-1} L(\partial_\theta) U_0 + \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \left( L(\partial_z) U_n + L(\partial_\theta) U_{n+1} \right).$$

Pour que la série formelle (3.2.2) soit solution de (3.1.1), on cherche donc que pour les amplitudes  $(U_n(z, \theta, \psi_d))_{n \geq 0}$ ,

$$\varepsilon^{-1} L(\partial_\theta) U_0 + \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \left( L(\partial_z) U_n + L(\partial_\theta) U_{n+1} \right) = H + f(U_0, \overline{U_0}) + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n F_n.$$

Pour obtenir cela on impose que chaque terme en facteur d'une puissance de  $\varepsilon$  soit nul. Avec les termes en facteur de  $\varepsilon^{-1}$  et  $\varepsilon^0$  on obtient alors, pour  $U_0$  et  $U_1$

$$(3.2.8a) \quad L(\partial_\theta)U_0 = 0$$

$$(3.2.8b) \quad L(\partial_z)U_0 + L(\partial_\theta)U_1 = H + f(U_0, \overline{U_0}).$$

On étudie alors l'opérateur  $L(\partial_\theta)$  agissant sur l'algèbre de Wiener  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ .

**Lemma 3.2.2.** *Pour tout  $m, s \geq 0$  et pour tout  $\gamma > 0$ , il existe sur  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(P_{m,s,\gamma})$ ) des projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}^i$  et un opérateur  $\mathbf{E}$  de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(P_{m,s,\gamma})$ ) tels que pour tout  $H$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(P_{m,s,\gamma})$ ), l'équation*

$$L(\partial_\theta)U = H$$

*admet une solution dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(P_{m,s,\gamma})$ ) si et seulement si  $\mathbf{E}^i H = 0$  et dans ce cas la solution est unique et donnée par*

$$U = \mathbf{E}U + \mathbf{E}H.$$

*Si  $U = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}} e^{i\zeta \cdot \theta} U_\zeta(z, \psi_d)$  avec  $U_\zeta \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma}$  (resp.  $P_{m,s,\gamma}$ ), alors  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}^i$  et  $\mathbf{E}$  agissent sur chaque profil  $U_\zeta$ , c'est-à-dire que*

$$\mathbf{E}U = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}} e^{i\zeta \cdot \theta} \mathbf{E}_\zeta U_\zeta(z, \psi_d)$$

*avec des formules similaires pour  $\mathbf{E}^i$  et  $\mathbf{E}$ . De plus, pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{E}_\zeta$ ,  $\mathbf{E}_\zeta^i$  et  $\mathbf{E}_\zeta$  se décomposent selon  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma} = \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc} \oplus \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  (resp.  $P_{m,s,\gamma} = P_{m,s,\gamma}^{osc} \oplus P_{m,s,\gamma}^{ev}$ ). Sur  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  (resp.  $P_{m,s,\gamma}^{osc}$ ), on a  $\mathbf{E}_\zeta = \mathbf{E}_\zeta^i = \mathbf{E}_\zeta^{os}$  et  $\mathbf{E}_\zeta = \mathbf{E}_\zeta^{osc}$  où*

$$(3.2.9) \quad \mathbf{E}_\zeta^{osc} U_\zeta = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} \pi_{(\zeta, \xi)} U_{\zeta, \xi}^{osc},$$

*où  $U_\zeta$  est donnée par  $U_\zeta = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} U_{\zeta, \xi}^{osc}$ . On rappelle que la définition de  $\pi_{(\zeta, \xi)}$  a été donnée dans la Définition 3.1.2. Sur  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  (resp.  $P_{m,s,\gamma}^{ev}$ ),  $\mathbf{E}_\zeta^i = 0$  et  $\mathbf{E}_\zeta = \mathbf{E}_\zeta^{ev}$  où*

$$(3.2.10) \quad \mathbf{E}_0^{ev} U(z, \psi_d) := 0, \quad \mathbf{E}_\zeta^{ev} U(z, \psi_d) := e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) U(z, 0), \forall \zeta \neq 0.$$

*Preuve.* Si la fonction  $U$  de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  (resp.  $\mathbb{A}_\theta(P_{m,s,\gamma})$ ) s'écrit  $U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} e^{i\zeta \cdot \theta} U_\zeta(z, \psi_d)$ , alors

$$L(\partial_\theta)U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} e^{i\zeta \cdot \theta} A_d(\partial_{\psi_d} - \mathcal{A}(\zeta)) U_\zeta(z).$$

Si on note  $\mathcal{L}(\partial_{\psi_d}) := A_d(\partial_{\psi_d} - \mathcal{A}(\zeta))$ , on est alors ramené à étudier

$$\mathcal{L}(\partial_{\psi_d})U_\zeta = H_\zeta$$

pour tout  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On se rapporte pour cela à [Les07, Théorème 2.14], qui nous donne l'expression de  $\mathbf{E}_\zeta$ ,  $\mathbf{E}_\zeta^i$  et  $\mathbf{E}_\zeta$ .  $\square$

Avec les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}^i$ , les équations (3.2.8) se réécrivent donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}U_0 &= U_0 \\ \mathbf{E}^i L(\partial_z)U_0 &= \mathbf{E}^i [H + f(U_0, \overline{U_0})] \end{aligned}$$

auxquelles on ajoute la condition initiale et la condition au bord,

$$\begin{aligned} (BU_0)|_{x_d=0, \psi_d=0} &= G \\ (U_0)|_{t \leq 0} &= 0. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Résultat principal

**Théorème 3.2.3** (Existence d'un profil principal semi-linéaire). *Soit  $s > (d-1)/(2)$ , soit  $G$  donné par (3.2.1) avec  $G_1, G_2$  dans  $F_{1,s;0}$  et soit  $H$  donné par (3.2.4) dans  $\mathbb{A}_\theta(P_{1,s;0})$ . Il existe alors  $T > 0$  et un profil principal  $U$  de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})$  vérifiant sur  $\Omega_T \times \mathbb{R}^{1+d}$  le système d'équations*

$$\begin{aligned} (3.2.11a) \quad & \mathbf{E}U = U \\ (3.2.11b) \quad & \mathbf{E}^i L(\partial_z)U = \mathbf{E}^i [H + f(U, \bar{U})] \\ (3.2.11c) \quad & BU|_{x_d=0, \psi_d=0} = G \\ (3.2.11d) \quad & U|_{t \leq 0} = 0. \end{aligned}$$

Pour montrer ce théorème, on va utiliser le résultat suivant.

**Théorème 3.2.4** (Existence d'un profil principal linéaire). *Soit  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $m, s \geq 0$ , soit  $G$  donné par (3.2.1) avec  $G_1, G_2$  dans  $\mathcal{F}_{m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  et soit  $H$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$ . Il existe alors un unique profil principal  $U$  de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  vérifiant sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$  le système d'équations*

$$\begin{aligned} (3.2.12a) \quad & \mathbf{E}U = U \\ (3.2.12b) \quad & \mathbf{E}^i L(\partial_z)U = \mathbf{E}^i H \\ (3.2.12c) \quad & BU|_{x_d=0, \psi_d=0} = G \\ (3.2.12d) \quad & U|_{t \leq 0} = 0. \end{aligned}$$

De plus il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\gamma > \gamma_0$ , le profil principal  $U$  vérifie l'estimation

$$(3.2.13) \quad \|U|_{x_d=0, \psi_d=0}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} + \|U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})} \leq C \left[ \frac{1}{\gamma} \|H^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} + \|G\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} \right]$$

où  $H^{osc} \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})$  est la partie oscillante de  $H$ .

Enfin,  $U^{ev}$  s'écrit

$$(3.2.14) \quad U^{ev}(z, \theta, \psi_d) = \chi(x_d) \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} e^{\mathcal{A}(\zeta)\psi_d} \Pi_-^e(\zeta) \tilde{U}_\zeta^{ev}(y)$$

avec, pour  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\tilde{U}_\zeta^{ev} \in \mathcal{F}_{m,s,\gamma}$  et  $\chi$  une fonction de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  valant 1 en 0.

## 3.3 Résolution des équations de profil

### 3.3.1 Résultats sur les espaces fonctionnels

On donne ici des résultats sur les espaces fonctionnels définis plus haut qui nous seront utiles pour la suite.

**Proposition 3.3.1** ([Wil96, Proposition 6.3]). *Soit  $m, s \geq 0$ , et soit  $U \in \mathbb{A}_\theta(F_{m,s;0})$ . Alors  $U \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})$  pour tout  $\gamma > 0$ , et il existe de plus une constante  $C_{m,s} > 0$  indépendante de  $\gamma > 0$  telle que*

$$\|U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} \leq C_{m,s} \|U\|_{\mathbb{A}_\theta(F_{m,s;0})}.$$

**Proposition 3.3.2** ([Wil96, Corollaire 6.17]). *On considère  $\beta$  une fonction de  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  dont le support est contenu dans l'intervalle  $] - 2, 2[$ , et pour tout  $T > 0$ , on pose  $\beta_T(t) := \beta(t/T)$ . Soit  $s \geq 0$  et  $0 < T \leq 1$ . Si  $U \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  alors  $\beta_T U \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  et  $\beta_T U \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s;\frac{1}{T}}^{osc})$ . D'autre part si  $V \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s;0}^{osc})$  alors  $\beta_T V \in \mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$ . De plus il existe une constante  $C_\beta > 0$  indépendante de  $T$  telle que*

$$(3.3.1) \quad \|\beta_T U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta T^{-1/2} \|U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}$$

$$(3.3.2) \quad \|\beta_T U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s;\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta \|U\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}$$

$$(3.3.3) \quad \|\beta_T V\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta T^{-1/2} \|V\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s;0}^{osc})}.$$

**Proposition 3.3.3** ([Wil96, Lemmes 2.8 et 2.9]). *Soit  $f$  une fonction polynomiale de la forme (3.1.2), soit  $m > 1/2$ ,  $s > (d-1)/2$  et  $\gamma \geq 0$ , et soit  $U$  une fonction de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ . Si la fonction  $U$  est aussi dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma})$ , alors  $f(U, \bar{U})$  est bien définie dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ , on a  $f(U, \bar{U})^{osc} = f(U^{osc}, \bar{U}^{osc})$ , et il existe  $C_{m,s} > 0$  indépendante de  $\gamma \geq 0$  telle que*

$$(3.3.4) \quad \|f(U, \bar{U})^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} \leq C_{m,s} \|U^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} \left[ \|g_1(U^{osc}, \bar{U}^{osc})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})} + \|g_2(U^{osc}, \bar{U}^{osc})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})} + C_f \right]$$

où  $C_f \geq 0$  ne dépend que de  $f$  et où  $g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions polynomiales qui envoient les parties bornées de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})$  dans les parties bornées de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})$ .

Si de plus on considère  $V$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  telle que  $V$  appartienne à  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma})$ , alors il existe  $C_{m,s} > 0$  indépendante de  $\gamma \geq 0$  telle que

$$(3.3.5) \quad \|f(U, \bar{U})^{osc} - f(V, \bar{V})^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} \leq C_{m,s} \|U^{osc} - V^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} \left[ \|h_1(U^{osc}, V^{osc}, \bar{U}^{osc})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})} + \|h_2(V^{osc}, \bar{U}^{osc}, \bar{V}^{osc})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})} \right]$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions polynomiales qui envoient les parties bornées de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})$  dans les parties bornées de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s;\gamma}^{osc})$ .

*Preuve.* On montre d'abord le résultat dans  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}$  dont découlera alors immédiatement le résultat pour  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$ . Si l'on considère  $U = U^{osc} + U^{ev}$  dans  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma} \cap \mathcal{P}_{m,s;\gamma}$ , alors pour  $\alpha + \beta \geq 1$ ,  $U^\alpha \bar{U}^\beta$  est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$(U^{osc})^{\alpha_1} (U^{ev})^{\alpha_2} (\bar{U}^{osc})^{\beta_1} (\bar{U}^{ev})^{\beta_2}$$

avec  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  et  $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ . Si  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ , alors puisque  $U^{osc} \in \mathcal{P}_{m,s,\gamma} \cap \mathcal{P}_{m,s;\gamma}$ , d'après (3.1.9),

$$(3.3.6) \quad \left\| (U^{osc})^{\alpha_1} (\bar{U}^{osc})^{\beta_1} \right\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}} \leq C \|U^{osc}\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}} \|U^{osc}\|_{\mathcal{P}_{m,s;\gamma}}^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}.$$

Si maintenant  $\alpha_2 > 0$  ou  $\beta_2 > 0$ , alors on vérifie avec (3.1.9) que  $(U^{osc})^{\alpha_1} (U^{ev})^{\alpha_2} (\bar{U}^{osc})^{\beta_1} (\bar{U}^{ev})^{\beta_2}$  appartient à  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$  et que l'on a

$$\left\| (U^{osc})^{\alpha_1} (U^{ev})^{\alpha_2} (\bar{U}^{osc})^{\beta_1} (\bar{U}^{ev})^{\beta_2} \right\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}} \leq C \|U^{ev}\|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}} \|U^{ev}\|_{\mathcal{P}_{m,s;\gamma}}^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} \|U^{osc}\|_{\mathcal{P}_{m,s;\gamma}}.$$

On en déduit que  $f(U, \bar{U})$  appartient à  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}$  et que  $f(U, \bar{U})^{osc} = f(U^{osc}, \bar{U}^{osc})$ . Enfin, d'après (3.3.6) et en écrivant

$$f(u, \bar{u}) = u(g_1(u, \bar{u}) + f_{1,0}) + \bar{u}(g_2(u, \bar{u}) + f_{0,1})$$

où  $g_1, g_2$  sont des fonctions polynomiales, on obtient l'estimation (3.3.4) pour  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$ . Puisque  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions polynomiales et que  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  est une algèbre,  $g_1$  et  $g_2$  envoient bien les parties bornées de  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  dans les parties bornées de  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$ .

L'estimation (3.3.5) se montre alors de la même manière en utilisant

$$f(u, \bar{u}) - f(v, \bar{v}) = (u - v)h_1(u, v, \bar{u}) + (\bar{u} - \bar{v})h_2(v, \bar{u}, \bar{v})$$

où  $h_1, h_2$  sont des fonctions polynomiales. □

### 3.3.2 Résolution des équation associées à chaque mode

**Proposition 3.3.4** (Lemme de Lax). *Soit  $\alpha$  une fréquence caractéristique,  $\pi_\alpha$  le projecteur associé donné par la Définition 3.1.2, et soit  $U_\alpha$  telle que  $\pi_\alpha U_\alpha = U_\alpha$ . Alors on a*

$$\pi_\alpha L(\partial_z) U_\alpha = X_\alpha U_\alpha$$

où  $X_\alpha$  est le champ de vecteur associé à  $\alpha$  défini par (3.1.5).

On résout maintenant les équations de transport qui seront obtenues dans l'analyse mode par mode des équations pour le profil principal, suivant le sens du champ de vecteur  $X_\alpha$  selon la Définition 3.1.6.

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $m, s \geq 0$ , soit  $\alpha$  une fréquence caractéristique et soit  $H^\alpha \in \mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  et  $G^\alpha \in \mathcal{F}_{m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$ .*

i) *Si  $X_\alpha$  est sortant, il existe une unique solution  $U_\alpha$  dans  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  au système*

$$(3.3.7) \quad \begin{cases} X_\alpha U_\alpha = H^\alpha \\ (U_\alpha)|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

et de plus cette solution  $U_\alpha$  vérifie l'estimation

$$(3.3.8) \quad \|(U_\alpha)|_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \|U_\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{2}{\gamma} \|H^\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}}$$

pour tout  $\gamma > \gamma_0$ .

ii) *Si  $X_\alpha$  est rentrant, il existe une unique solution  $U_\alpha$  dans  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  au système*

$$(3.3.9) \quad \begin{cases} X_\alpha U_\alpha = H^\alpha \\ (U_\alpha)|_{x_d=0} = G^\alpha \\ (U_\alpha)|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

et de plus cette solution  $U_\alpha$  vérifie l'estimation

$$(3.3.10) \quad \|(U_\alpha)|_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \|U_\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{1}{\gamma} \|H^\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} + 2 \|G^\alpha\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}}$$

pour tout  $\gamma > \gamma_0$ .

iii) Si  $\alpha$  est nul, il existe une unique solution  $U_\alpha$  dans  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  au système

$$(3.3.11) \quad \begin{cases} L(\partial_z)U_\alpha = H^\alpha \\ (BU_\alpha)|_{x_d=0} = G^\alpha \\ (U_\alpha)|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

et de plus cette solution  $U_\alpha$  vérifie l'estimation

$$(3.3.12) \quad \|(U_\alpha)_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \|U_\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{2}{\gamma} \|H^\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} + \|G^\alpha\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}}$$

pour tout  $\gamma > \gamma_0$ .

*Preuve.* On note  $\alpha = (\tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi}), \underline{\eta}, \underline{\xi})$  avec les notations de l'Hypothèse 3.1. On a alors

$$X_\alpha = \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi}) \cdot \nabla_x - \partial_\xi \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi}) \cdot \partial_{x_d}.$$

On note  $c_1 := -\nabla_\eta \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi})$  et  $c_2 := -\partial_\xi \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi})$ , si bien que  $X_\alpha = \partial_t + c_1 \cdot \nabla_x + c_2 \cdot \partial_{x_d}$ .

On montre d'abord le point *ii*), et on suppose donc  $c_2 = -\partial_\xi \tau_k(\underline{\eta}, \underline{\xi}) > 0$ . Pour  $\gamma > \gamma_0$ , on réalise la transformée de Fourier partielle du système (3.3.9), appliquée en  $(\tau - i\gamma, \eta)$ , pour tout  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^d$ . On obtient, en notant  $a_\alpha(\tau - i\gamma, \eta) = (i(\tau - i\gamma) + ic_1 \cdot \eta)/(-c_2)$  et en omettant les arguments  $(\tau - i\gamma, \eta, x_d)$ ,

$$\begin{cases} (\partial_{x_d} - a_\alpha)(U_\alpha)^\wedge = \frac{1}{-c_2}(H^\alpha)^\wedge \\ ((U_\alpha)^\wedge)|_{x_d=0} = \widehat{G}^\alpha \\ (U_\alpha)|_{t<0} = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$(U_\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d) = \frac{-1}{c_2} \int_0^{x_d} e^{(x_d-x'_d)a_\alpha(\tau-i\gamma,\eta)} (H^\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x'_d) dx'_d + e^{x_d a_\alpha(\tau-i\gamma,\eta)} \widehat{G}^\alpha(\tau - i\gamma, \eta).$$

Il existe donc une unique solution  $U_\alpha$ , qui vérifie de plus, par la formule de Plancherel, puisque  $\operatorname{Re}(a_\alpha(\tau - i\gamma, \eta)) = -\gamma/c_2$  est strictement négative,

$$\begin{aligned} \|(U_\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d)\|_{L^\infty(x_d)} &\leq \frac{-1}{\operatorname{Re}(a_\alpha(\tau - i\gamma, \eta))} \frac{\|(H^\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d)\|_{L^\infty(x_d)}}{c_2} + \left| \widehat{G}^\alpha(\tau - i\gamma, \eta) \right| \\ &\leq \frac{\|(H^\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d)\|_{L^\infty(x_d)}}{\gamma} + \left| \widehat{G}^\alpha(\tau - i\gamma, \eta) \right|. \end{aligned}$$

On en déduit donc par définition de la norme  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  que

$$(3.3.13) \quad \|U_\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{1}{\gamma} \|H^\alpha\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} + \|G^\alpha\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}}.$$

D'autre part  $(U_\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, 0) = \widehat{G}^\alpha(\tau - i\gamma, \eta)$  et donc

$$(3.3.14) \quad \|(U_\alpha)_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} \leq \|G^\alpha\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}}.$$

On déduit alors de (3.3.13) et (3.3.14) l'estimation (3.3.10). Enfin le théorème de Paley-Wiener nous assure que  $U_\alpha^1$  est bien nul pour  $t$  négatif.

Pour le point *i*), en appliquant une transformée de Fourier partielle au système, où l'on a

prolongé  $H^\alpha$  par 0 pour  $x_d$  négatif, on obtient

$$\begin{cases} (\partial_{x_d} - a_\alpha)(U_\alpha)^\wedge = \frac{1}{-c_2}(H^\alpha)^\wedge \\ (U_\alpha)|_{t < 0} = 0, \end{cases}$$

et donc

$$(U_\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x_d) = \frac{1}{c_2} \int_{x_d}^{+\infty} e^{(x_d - x'_d)a_\alpha(\tau - i\gamma, \eta)} (H^\alpha)^\wedge(\tau - i\gamma, \eta, x'_d) dx'_d.$$

On en déduit de la même manière que précédemment l'estimation (3.3.10).

Enfin pour le point *iii*) on se rapporte à [BGS07, (4.5.31)]. □

### 3.3.3 Existence d'un profil linéaire

*Preuve (Théorème 3.2.4).* On écrit  $U$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})$  comme

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} e^{i\zeta \cdot \theta} U_\zeta(z, \psi_d),$$

avec, pour  $\zeta \in \mathbb{R}^d$

$$U_\zeta(z, \psi_d) = U_\zeta^{osc}(z, \psi_d) + U_\zeta^{ev}(z, \psi_d) = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} U_{\zeta, \xi}^{osc}(z) + U_\zeta^{ev}(z, \psi_d).$$

La condition de polarisation  $\mathbf{E}U = U$  est équivalente, d'après la décomposition de  $\mathbf{E}$  et les expressions (3.2.9) et (3.2.10), aux conditions

$$\pi_{(\zeta, \xi)} U_{\zeta, \xi}^{osc} = U_{\zeta, \xi}^{osc}, \forall (\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$$U_0^{ev} = 0, \quad U_\zeta^{ev}(z, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(z, 0), \forall \zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Ainsi, d'après l'expression de  $\pi_\alpha$  donnée dans la Définition 3.1.2,  $U$  s'écrit

(3.3.15)

$$U(z, \theta, \psi_d) = U_{0,0}^{osc}(z) + \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}(z) + e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(z, 0) \right].$$

L'équation (3.2.12c) s'écrit alors

$$(3.3.16) \quad BU_{0,0}^{osc}(y, 0) + \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} B \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}(y, 0) + \Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(y, 0, 0) \right] \\ = G_1(y) e^{i\zeta_1 \theta} + G_2(y) e^{i\zeta_2 \theta}$$

On résout alors les équations (3.2.12b) - (3.2.12d) pour chaque mode  $\zeta \in \mathbb{R}^d$ . Si  $H$  s'écrit

$$H(z, \theta, \psi_d) = H^{osc}(z, \theta, \psi_d) + H^{ev}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d} e^{i\zeta \cdot \theta} \left[ \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} H_{\zeta, \xi}^{osc}(z) + H_\zeta^{ev}(z, \psi_d) \right],$$

on a, pour  $\zeta = 0$ ,

$$(3.3.17) \quad \begin{cases} L(\partial_z) U_{0,0}^{osc} = H_{0,0}^{osc} \\ (BU_{0,0}^{osc})|_{x_d=0} = 0 \\ (U_{0,0}^{osc})|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

On applique alors le point *iii*) de la Proposition 3.3.5 pour trouver qu'il existe une unique solution  $U_{0,0}^{osc}$  dans  $\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}$  pour tout  $\gamma > \gamma_0$  au système (3.3.17) et que de plus cette solution vérifie l'estimation

$$(3.3.18) \quad \|(U_{0,0}^{osc})_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \|U_{0,0}^{osc}\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{C}{\gamma} \|H_{0,0}^{osc}\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}}$$

pour tout  $\gamma > \gamma_0$ .

On étudie maintenant l'équation donnée pour  $\zeta \neq 0$ . On obtient le système

$$(3.3.19a)$$

$$\mathbf{E}_{\zeta}^i L(\partial_z) \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} + e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) (U_{\zeta}^{ev})|_{\psi_d=0} \right] = \mathbf{E}_{\zeta}^i \left[ \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} H_{\zeta,\xi}^{osc} + H_{\zeta}^{ev} \right]$$

$$(3.3.19b) \quad B \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} + \Pi_-^e(\zeta) (U_{\zeta}^{ev})|_{\psi_d=0} \right]_{|x_d=0} = G_{\zeta}$$

$$(3.3.19c)$$

$$\left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} + e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) (U_{\zeta}^{ev})|_{\psi_d=0} \right]_{|t \leq 0} = 0$$

où on a noté  $G_{\zeta} = G_i$  si  $\zeta = \zeta_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $G_{\zeta} = 0$  sinon. Les équations (3.3.19a) et (3.3.19c) se décomposent dans  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma} = \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc} \oplus \mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}$ .

a.) *Partie oscillante.* Sur  $\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}$  les équations (3.3.19a) et (3.3.19c) donnent

$$(3.3.20) \quad \mathbf{E}_{\zeta}^{osc} L(\partial_z) \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} = \mathbf{E}_{\zeta}^{osc} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} e^{i\xi \psi_d} H_{\zeta,\xi}^{osc}$$

$$(3.3.21) \quad \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right]_{|t \leq 0} = 0.$$

Les équations (3.3.20) et (3.3.21) se décomposent par rapport à  $j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$ . Il nous faut alors distinguer les indices  $j$  sortants et rentrants.

i.) *Indice  $j$  sortant.* D'après l'expression de  $\mathbf{E}_{\zeta}^{osc}$  donnée en (3.2.9) et la Proposition 3.3.4, le profil  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  vérifie le système

$$\begin{cases} X_{\alpha_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} = \pi_{\alpha_j(\zeta)} H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \\ (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

La Proposition 3.3.5 nous assure qu'il existe une unique solution  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  à ce système qui vérifie de plus d'après (3.3.8)

$$(3.3.22) \quad \|(U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0}\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \|U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \leq \frac{C}{\gamma} \|H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}}.$$

ii.) *Indice  $j$  rentrant.* Puisque  $j$  est rentrant il nous faut déterminer une condition au bord pour  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$ . Pour cela on écrit d'après (3.3.19b),

$$(3.3.23) \quad B \left[ \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} + \Pi_-^e(\zeta) (U_{\zeta}^{ev})|_{\psi_d=0} \right]_{|x_d=0} = G_{\zeta} - B \left[ \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right]_{|x_d=0},$$

où le membre de droite de l'égalité a été déterminé. Or on sait d'après les conditions de polarisation, que pour  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ , le profil  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  appartient à l'espace caractéristique



$\ker L(\alpha_j(\zeta))$ , qui est égal, d'après la Proposition 3.1.7, au sous-espace stable  $E_-^j(\zeta)$ . Ainsi l'expression en facteur de  $B$  dans le membre de gauche de l'égalité (3.3.23) appartient au sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ , sur lequel  $B$  est inversible d'après l'Hypothèse 3.2. On obtient alors

$$(3.3.24) \quad \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} + \Pi_-^e(\zeta)(U_\zeta^{ev})|_{\psi_d=0, x_d=0} \\ = (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} \left[ G_\zeta - B \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} \right] =: \tilde{G}_\zeta.$$

On projette enfin sur les sous-espaces stables de  $E_-(\zeta)$  pour obtenir, puisque d'après les conditions de polarisation et la Proposition 3.1.7,  $\Pi_-^j(\zeta) U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} = U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$ ,

$$(3.3.25a) \quad (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} = \Pi_-^j(\zeta) \tilde{G}_\zeta, \quad j \in \mathcal{R}(\zeta)$$

$$(3.3.25b) \quad \Pi_-^e(\zeta)(U_\zeta^{ev})|_{\psi_d=0, x_d=0} = \Pi_-^e(\zeta) \tilde{G}_\zeta.$$

Là encore, d'après l'expression de  $\mathbf{E}_\zeta^{osc}$  donnée en (3.2.9) et La Proposition 3.3.4, le profil  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  vérifie le système

$$\begin{cases} X_{\alpha_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} = \pi_{\alpha_j(\zeta)} H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \\ (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} = \Pi_-^j(\zeta) \tilde{G}_\zeta \\ (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Ainsi d'après la Proposition 3.3.5 il existe une unique solution  $U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  à ce problème qui vérifie de plus l'estimation

$$(3.3.26) \quad \left\| (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} \right\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \left\| U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \\ \leq \frac{C}{\gamma} \left\| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} + 2 \left\| \Pi_-^j(\zeta) \tilde{G}_\zeta \right\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}}.$$

On utilise alors le fait que les projecteur  $\Pi_-^j(\zeta)$  sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$ , et que d'après l'Hypothèse 3.2, la matrice  $(B|_{E_-(\zeta)})^{-1}$  est bornée uniformément par rapport à  $\zeta$  pour obtenir l'estimation

$$(3.3.27) \quad \left\| \Pi_-^j(\zeta) \tilde{G}_\zeta \right\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} \leq C \|G_\zeta\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + C \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \left\| (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} \right\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} \\ \leq C \|G_\zeta\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \frac{C}{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \left\| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}}$$

grâce à l'estimation (3.3.22). On en déduit alors avec (3.3.26),

$$(3.3.28) \quad \left\| (U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc})|_{x_d=0} \right\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \left\| U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \\ \leq C \left[ \frac{1}{\gamma} \left\| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} + \|G_\zeta\|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \left\| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \right\|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \right].$$

On a ainsi construit un profil oscillant  $U_\zeta^{osc} = \sum_{j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)} e^{i\psi_d \xi_j(\zeta)} U_{\alpha_j(\zeta)}^{osc}$  qui vérifie d'après

(3.3.22) et (3.3.28),

$$(3.3.29) \quad \begin{aligned} & \| (U_\zeta^{osc})|_{x_d=0, \psi_d=0} \|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \| U_\zeta^{osc} \|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc}} \\ & \leq C \left[ \| G_\zeta \|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)} \| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}} \right] \end{aligned}$$

b.) *Partie évanescence.* On s'intéresse maintenant à la partie évanescence  $U_\zeta^{ev}$ . D'après les conditions de polarisation on sait que

$$U_\zeta^{ev}(z, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(z, 0),$$

il nous faut donc déterminer la trace  $\Pi_-^e(\zeta)(U_\zeta^{ev})|_{\psi_d=0}$ . On remarque que la double trace  $\Pi_-^e(\zeta)(U_\zeta^{ev})|_{x_d=0, \psi_d=0}$  est donnée par  $\Pi_-^e(\zeta)(U_\zeta^{ev})|_{\psi_d=0, x_d=0} = \Pi_-^e(\zeta) \tilde{G}_\zeta(y)$  d'après (3.3.25b). On relève alors cette double trace grâce à une fonction  $\chi$  de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  valant 1 en 0 :  $\Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(z, 0) := \chi(x_d) \Pi_-^e(\zeta) U_\zeta^{ev}(y, 0, 0)$  et on pose ainsi

$$U_\zeta^{ev}(z, \psi_d) := e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \chi(x_d) \Pi_-^e(\zeta) \tilde{G}_\zeta(y).$$

On a alors, puisque  $e^{\psi_d \mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta)$  est uniformément borné par rapport à  $\zeta \in \Xi_0$  et  $\psi_d \geq 0$  et d'après l'estimation (3.3.27),

$$(3.3.30) \quad \| (U_\zeta^{ev})|_{x_d=0, \psi_d=0} \|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \| U_\zeta^{ev} \|_{\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{ev}} \leq C \| G_\zeta \|_{\mathcal{F}_{m,s,\gamma}} + \frac{C}{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} \| H_{\alpha_j(\zeta)}^{osc} \|_{\mathcal{F}_{\infty,m,s,\gamma}}.$$

On a ainsi montré l'existence d'un profil  $U$  solution de (3.2.12) qui avec (3.3.18), (3.3.29) et (3.3.30) vérifie l'estimation

$$\| U|_{x_d=0, \psi_d=0} \|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} + \| U \|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma})} \leq C \left[ \| G \|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} + \frac{1}{\gamma} \| H^{osc} \|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{m,s,\gamma}^{osc})} \right].$$

□

### 3.3.4 Existence d'un profil semi-linéaire

*Preuve (Théorème 3.2.3).* On se donne une fonction troncature  $\beta$  de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp}(\beta) \subset ]-2, 2[$  et  $\beta \equiv 1$  sur  $[-1, 1]$ . Pour  $T > 0$ , on note  $\beta_T$  la fonction définie par  $\beta_T(t) = \beta(t/T)$ . On veut montrer qu'il existe  $T > 0$  et un profil  $U$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})$  vérifiant sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}U &= U \\ \mathbf{E}^i L(\partial_z)U &= \mathbf{E}^i [\beta_T H + f(\beta_T U, \beta_T \bar{U})] \\ BU|_{x_d=0, \psi_d=0} &= G \\ U|_{t \leq 0} &= 0. \end{aligned}$$

On considère alors le schéma itératif défini par  $U_0 \equiv 0$  et pour tout  $\nu \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}U_{\nu+1} &= U_{\nu+1} \\ \mathbf{E}^i L(\partial_z)U_{\nu+1} &= \mathbf{E}^i [\beta_T H + f(\beta_T U_\nu, \beta_T \bar{U}_\nu)] \\ (BU_{\nu+1})|_{x_d=0, \psi_d=0} &= G \\ (U_{\nu+1})|_{t \leq 0} &= 0. \end{aligned}$$

D'après les propositions 3.3.2 et 3.3.3, le terme  $f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})$  est bien défini dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  pour tout  $U_\nu$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$ . D'autre part d'après la Proposition 3.3.1, le terme de bord  $G$  est dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})$  et on a de plus

$$(3.3.31) \quad \|G\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{m,s,\gamma})} \leq \|G\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s;0})}.$$

Ainsi, d'après le Théorème 3.2.4, le schéma itératif définit une suite  $(U_\nu)_{\nu \geq 0}$  de  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})$  qui vérifie de plus

$$(3.3.32) \quad \begin{aligned} & \| (U_{\nu+1})|_{x_d=0, \psi_d=0} \|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + \|U_{\nu+1}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \\ & \leq C \left[ \|G\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + T \|\beta_T H\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} + T \|f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \right]. \end{aligned}$$

On montre dans un premier temps par récurrence sur  $\nu \geq 0$  qu'il existe  $T_1 > 0$  tel que pour tout  $0 < T \leq T_1$ ,

$$\|U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \leq C(K+1)$$

où  $C > 0$  est la constante apparaissant dans (3.2.13) et  $K := \|G\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s;0})}$ . On suppose que pour un certain  $\nu \geq 0$  il existe  $T_2 > 0$  tel que pour tout  $0 < T \leq T_2$ ,  $\|U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \leq C(K+1)$ . On a d'une part, d'après l'estimation (3.3.1),

$$(3.3.33) \quad \|\beta_T H\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta T^{-1/2} \|H\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}.$$

D'autre part, d'après l'estimation (3.3.4),

$$(3.3.34) \quad \begin{aligned} & \|f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \\ & \leq C_s \|(\beta_T U_\nu)^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \left[ \|g_1((\beta_T U_\nu)^{osc}, \overline{(\beta_T U_\nu)^{osc}})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \right. \\ & \quad \left. + \|g_2((\beta_T U_\nu)^{osc}, \overline{(\beta_T U_\nu)^{osc}})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} + C_f \right]. \end{aligned}$$

On observe alors que d'après (3.3.1) et par hypothèse de récurrence, pour  $0 < T \leq T_2$ ,

$$(3.3.35) \quad \|(\beta_T U_\nu)^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta T^{-1/2} \|U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C_\beta T^{-1/2} C(K+1)$$

et d'après (3.3.2), pour des fonctions  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  appropriées, pour  $i = 1, 2$

$$(3.3.36) \quad \begin{aligned} & \|g_i((\beta_T U_\nu)^{osc}, \overline{(\beta_T U_\nu)^{osc}})\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq \tilde{g}_i \left( \|U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \right) \\ & \leq \tilde{g}_i \left( C_s \|U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \right) \\ & \leq \tilde{g}_i (C_s C(K+1)) \end{aligned}$$

pour tout  $0 < T \leq T_2$  par hypothèse de récurrence. Ainsi, pour tout  $0 < T \leq T_2$ , d'après (3.3.34), (3.3.35) et (3.3.36),

$$(3.3.37) \quad \begin{aligned} & \|f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \\ & \leq C_\beta T^{-1/2} C(K+1) \left[ \tilde{g}_1(C_s C(K+1)) + \tilde{g}_2(C_s C(1+K)) + C_f \right]. \end{aligned}$$

Avec (3.3.32), (3.3.31), (3.3.33) et (3.3.37) on en conclut qu'il existe  $T_1 > 0$  indépendant de  $\nu$  tel que pour  $0 < T \leq T_1$ ,

$$\|U_{\nu+1}^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq C(K+1).$$

On montre maintenant la convergence de la suite  $(U_\nu)_{\nu \geq 0}$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})$ . Pour cela on s'intéresse séparément à la partie oscillante et la partie évanescence. Pour faire converger  $(U_\nu^{osc})_{\nu \geq 0}$  dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$ , on étudie le problème vérifié par la fonction  $U_{\nu+1} - U_\nu$ , pour un certain  $\nu \geq 0$ , et on obtient d'après (3.2.13),

$$(3.3.38) \quad \begin{aligned} & \left\| (U_{\nu+1} - U_\nu)|_{x_d=0, \psi_d=0} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + \|U_{\nu+1} - U_\nu\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \\ & \leq CT \left\| f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})^{osc} - f(\beta_T U_{\nu-1}, \beta_T \overline{U_{\nu-1}})^{osc} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}. \end{aligned}$$

On applique alors l'estimation (3.3.5) pour trouver, puisque  $(U_\nu^{osc})_{\nu \geq 0}$  est uniformément bornée dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  et donc  $(\beta_T U_\nu^{osc})_{\nu \geq 0}$  est uniformément bornée dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$ , pour  $0 < T \leq T_1$ ,

$$(3.3.39) \quad \begin{aligned} & \left\| f(\beta_T U_\nu, \beta_T \overline{U_\nu})^{osc} - f(\beta_T U_{\nu-1}, \beta_T \overline{U_{\nu-1}})^{osc} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \\ & \leq C_s \left\| \beta_T U_\nu^{osc} - \beta_T U_{\nu-1}^{osc} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}, \end{aligned}$$

et on en déduit, d'après (3.3.38), (3.3.39) et (3.3.1), pour  $0 < T \leq T_1$ ,

$$(3.3.40) \quad \begin{aligned} & \left\| (U_{\nu+1} - U_\nu)|_{x_d=0, \psi_d=0} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + \|U_{\nu+1} - U_\nu\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \\ & \leq CT^{1/2} C_s C_\beta \left\| U_\nu^{osc} - U_{\nu-1}^{osc} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $T' > 0$  tel que pour tout  $0 < T \leq T'$ ,

$$(3.3.41) \quad \begin{aligned} & \left\| (U_{\nu+1} - U_\nu)|_{x_d=0, \psi_d=0} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + \|U_{\nu+1} - U_\nu\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})} \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \|U_1^{osc} - U_0^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})}. \end{aligned}$$

Avec

$$\|U_{\nu+1}^{osc} - U_\nu^{osc}\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})} \leq \left\| (U_{\nu+1} - U_\nu)|_{x_d=0, \psi_d=0} \right\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})} + \|U_{\nu+1} - U_\nu\|_{\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})}$$

et puisque  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  est un espace de Banach, on en déduit que la suite  $(U_\nu^{osc})_{\nu \geq 0}$  converge dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{osc})$  pour tout  $0 < T \leq T'$ . De même, l'estimation (3.3.41) montre que la suite  $((U_\nu^{ev})|_{x_d=0, \psi_d=0})_{\nu \geq 0}$ , dont le terme général s'écrit, d'après (3.2.14),

$$(U_\nu^{ev})|_{x_d=0, \psi_d=0} = \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} \Pi_-^e(\zeta) \tilde{U}_{\zeta, \nu}^{ev}(y)$$

converge dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{F}_{1,s,\frac{1}{T}})$  vers une fonction  $\sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} \tilde{U}_{\zeta}^{ev}(y)$ . Puisque  $e^{\mathcal{A}(\zeta)\psi_d} \Pi_-^e(\zeta)$  est uniformément borné par rapport à  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $\psi_d \geq 0$ , la suite  $(U_\nu^{ev})_{\nu \geq 0}$ , dont le terme général

s'écrit, d'après (3.2.14),

$$U_\nu^{ev} = \chi(x_d) \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} e^{\mathcal{A}(\zeta)\psi_d} \Pi_-^e(\zeta) \tilde{U}_{\zeta, \nu}^{ev}(y),$$

converge dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}}^{ev})$  vers

$$U^{ev} = \chi(x_d) \sum_{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{i\zeta \cdot \theta} e^{\mathcal{A}(\zeta)\psi_d} \Pi_-^e(\zeta) \tilde{U}_\zeta^{ev}(y),$$

pour  $0 < T \leq T'$ . Ainsi, pour  $0 < T \leq T'$ , la suite  $(U_\nu)_{\nu \geq 0}$  converge dans  $\mathbb{A}_\theta(\mathcal{P}_{1,s,\frac{1}{T}})$  vers une solution  $U$  de (3.2.11), ce qui conclut la preuve du Théorème 3.2.4.  $\square$

Chapitre
4

# Existence d'un développement d'optique géométrique multiphasée pour des problèmes aux limites hyperboliques quasi-linéaires

## Sommaire du présent chapitre

<b>4.1</b>	<b>Notations et hypothèses</b>	<b>76</b>
4.1.1	Position du problème . . . . .	76
4.1.2	Stricte hyperbolicité . . . . .	78
4.1.3	Condition de Lopatinskii uniforme et quelques résultats préliminaires	81
<b>4.2</b>	<b>Cadre fonctionnel</b>	<b>98</b>
4.2.1	Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine . . . . .	98
4.2.2	Espaces de profils . . . . .	104
4.2.3	Produits scalaires sur l'espace des profils oscillants . . . . .	105
<b>4.3</b>	<b>Ansatz et résultat principal</b>	<b>107</b>
<b>4.4</b>	<b>Étude BKW formelle</b>	<b>108</b>
4.4.1	Cascade d'équations pour les profils . . . . .	108
4.4.2	Résolution du problème rapide $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})U = H$ . . . . .	110
4.4.3	Système d'équations vérifié par le profil principal . . . . .	113
<b>4.5</b>	<b>Construction du profil principal</b>	<b>113</b>
4.5.1	Coefficient de résonance et hypothèse supplémentaire . . . . .	114
4.5.2	Définition rigoureuse des projecteurs $\mathbf{E}$ , $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ . . . . .	120
4.5.3	Réduction du système . . . . .	128
4.5.4	Estimation a priori du système linéarisé pour la partie oscillante résonante . . . . .	140
4.5.5	Estimation a priori sur les équations de Burgers linéarisées . . . . .	149
4.5.6	Construction d'une solution . . . . .	151
4.5.7	Conclusion et perspectives . . . . .	157
<b>4.A</b>	<b>Appendices</b>	<b>158</b>
4.A.1	Fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach .	158
4.A.2	Exemple d'un système engendrant une infinité de fréquences sortantes	161
4.A.3	Détails de certains calculs . . . . .	162

On s'intéresse dans ce chapitre à des problèmes aux limites hyperboliques quasi-linéaires dont le terme de forçage au bord oscille à une fréquence élevée. On cherche à approcher, dans

l'asymptotique haute fréquence, la solution exacte de ce problème, sous la forme d'un développement BKW. C'est le type de question sur lequel porte l'optique géométrique. L'idée générale est de considérer un problème hyperbolique dont le terme source, le terme initial ou encore le terme de bord (dans le cas de problèmes aux limites) est hautement oscillant, c'est-à-dire de fréquence d'ordre  $1/\varepsilon$ , et de chercher une solution approchée à ce problème sous la forme d'un développement asymptotique. Les équations satisfaites par les termes de ce développement sont d'abord déterminées, puis résolues dans un cadre fonctionnel adapté. Une fois cette série formelle construite, on peut s'attacher à montrer que la série formelle tronquée approche effectivement la solution exacte dans l'asymptotique haute fréquence. Le présent chapitre est consacré à la première partie de ce cadre de travail, c'est-à-dire plus précisément que l'on montre l'existence du premier terme du développement asymptotique.

L'étude de l'optique géométrique hyperbolique remonte à [Lax57] pour le problème de Cauchy linéaire. Lorsque le système est non-linéaire, la multiplicité des phases dans le terme source, le terme initial ou le terme de bord est importante puisque des interactions non-linéaires peuvent intervenir entre les phases. Dans le cas d'une seule phase, la première construction d'un développement asymptotique est due à [CB64]. Pour la justification de ce développement asymptotique, on peut renvoyer à [JR92] dans le cas semi-linéaire et [Guè93] dans le cas quasi-linéaire. La première étude formelle du cas multiphase pour le problème de Cauchy remonte à [HMR86]. La question a ensuite été largement traitée par J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, voir en particulier [JMR93; JMR94; JMR95]. La question naturelle est maintenant d'obtenir des résultats pour les problèmes aux limites similaires à ceux pour les problèmes de Cauchy. Dans [Chi91], l'auteur traite un problème aux limites semi-linéaire pour un système de deux équations, le cas général d'un système de plusieurs équations étant traité par exemple dans [Wil96] et [Wil00]. Le cas quasi-linéaire mais avec seulement une phase au bord est notamment abordé dans [Wil02; CGW11; CW13] (ce dernier s'intéressant à la justification du développement, point qui n'est pas abordé dans ce chapitre) et [Her15]. Ce travail est une extension au cas multiphase : on traite du même problème aux limites quasi-linéaire, mais avec plusieurs phases au bord.

Étant donné la multiplicité des fréquences au bord, les non-linéarités du problème engendrent un nombre infini de phases planes à l'intérieur du domaine, nous contraignant à considérer un cadre de fonctions presque-périodiques, le groupe de fréquence n'étant, en général, pas finiment engendré. Ce cadre fonctionnel a été utilisé précédemment pour la construction de solutions approchées de problèmes semi-linéaires, dans le cadre des algèbres de Wiener, par [JMR94] pour le problème de Cauchy et [Wil96] pour le problème aux limites, ainsi que pour des problèmes quasi-linéaires dans le cadre des espaces de Bohr-Besicovitch, notamment par [JMR95] pour le problème de Cauchy. On s'intéresse ici à l'étape suivante, qui consiste à montrer un résultat similaire à celui de [JMR95] pour le problème aux limites quasi-linéaire. On adapte le cadre fonctionnel de leur analyse au contexte d'un problème aux limites, en considérant des espaces de fonctions quasi-périodiques pour les variables rapides tangentielles, et presque périodiques pour la variable rapide normale. Concernant la régularité de ces fonctions, on se place dans un cadre de type Sobolev pour les variables tangentielles (lentes et rapides), et de fonctions bornées pour les variables normales. Le profil principal du développement BKW est alors obtenu comme solution d'un problème quasi-linéaire qui tient compte de l'infinité potentielle de résonances entre les phases. Ce problème quasi-linéaire est résolu de manière classique en montrant des estimations sans perte de dérivées. L'exemple du système de la dynamique des gaz sert de fil conducteur pour éclairer les hypothèses générales qu'on est amené à faire au cours de l'analyse. La principale différence avec [JMR95] est le défaut de symétrie dans le problème. En effet, en partant d'un problème d'évolution en temps, on le modifie pour obtenir un problème de propagation par rapport à la variable normale  $x_d$ , et le système n'est pas hyperbolique par rapport à  $x_d$ . Dans [JMR95], ces symétries sont utilisées dans l'obtention des estimations a priori, pour traiter les termes de résonance apparaissant dans les équations. Bien qu'il soit relativement aisé de créer, dans notre problème, des symétries pour les termes d'auto-interaction, c'est plus délicat concernant les

termes de résonance, qui, à l'inverse de [CGW11], sont en nombre infini. La dernière hypothèse faite dans ce chapitre est faite pour adresser ce problème, et, en un sens, contrôle le manque de symétrie des termes de résonance. Les notions associées à cette hypothèse apparaissent dans [Rau12, Chapitre 11].

La preuve de l'existence du profil principal est divisée en trois parties : la dérivation formelle des équations satisfaites par le profil principal, la réduction et le découplage de ces équations, et enfin des estimations d'énergie pour ces équations. La dérivation formelle de la cascade BKW est relativement classique en optique géométrique, et consiste à remplacer formellement la série dans le système exact (système (4.1.1) dans la suite). De manière classique, la cascade est découplée en un système pour le profil principal à l'aide de projecteurs et d'un opérateur sur l'espace des profils. L'opérateur en question reste formel dans ce chapitre, et les projecteurs requièrent une hypothèse de petits diviseurs pour pouvoir être rigoureusement définis. La seconde partie de la preuve est consacrée au découplage et à la réduction du système obtenu pour le profil principal, en un système pour les modes oscillants résonants, un système pour chaque mode oscillant non résonant, et un système pour la partie évanescente. Dans ce but, en écrivant le système en extension selon chaque mode, on commence par montrer que la moyenne vérifie un problème découplé avec des termes source et de bord nuls, et est donc nulle. On montre ensuite que les modes sortants sont également nuls, en dérivant des estimations d'énergie pour ces modes. À cet effet on utilise un produit scalaire adapté sur l'espace des profils, qui requière un support compact dans la direction normale. On montre donc d'abord une propriété de propagation à vitesse finie. Une fois qu'il ne reste plus que des modes rentrants et des modes évanescents, il est aisé de déterminer une condition au bord pour chaque mode à partir de la condition au bord initiale, et donc de découpler le système. L'équation satisfaite pour la partie évanescente prescrit l'expression de celle-ci et implique sa double trace au bord, la construction de la partie évanescente est donc relativement directe. Il nous faut cependant vérifier que la solution ainsi construite appartient bien à l'espace des profils évanescents que l'on aura défini. Pour construire la partie oscillante, on montre des estimations d'énergie sans perte de régularité pour les linéarisations des systèmes oscillants, qui nous permettent de montrer le caractère bien posé de ces systèmes linéarisés, puis, à l'aide d'un schéma itératif, l'existence de solution pour les systèmes d'origine. Pour obtenir ces estimations d'énergie on utilise un produit scalaire alternatif qui profite de la propagation dans la direction normale. Plusieurs termes doivent être traités. Les termes de transport et de type Burgers sont relativement classiques à aborder, et l'hypothèse faite sur l'ensemble des résonances est utilisée pour traiter les termes de résonance. Puisque la construction d'une solution aux systèmes linéarisés et l'utilisation de schémas itératifs sont classiques, ils ne sont pas détaillés ici. En rassemblant les profils ainsi construits on obtient finalement le profil principal solution du système d'origine.

Le chapitre est organisé comme suit. Après cette introduction, la première section introduit le problème et présente les hypothèses classiques sur le système. Tout d'abord on décrit précisément le problème qui sera étudié ici, et l'on introduit l'exemple des équations d'Euler qui sera utilisé tout au long de cette analyse, puis on étudie les fréquences caractéristiques et l'hypothèse de stricte hyperbolicité. Enfin on s'intéresse aux propriétés et hypothèse sur la condition de bord. Sous les hypothèses de cette première section, le problème aux limites considéré dans ce chapitre est bien posé, localement en temps. Cependant, du fait des hautes fréquences dans le terme de forçage au bord, on ne sait pas si le temps d'existence de la solution exacte est uniforme par rapport à la petite longueur d'onde. La deuxième section est consacrée au cadre fonctionnel de ce chapitre. Après une motivation de celui-ci à l'aide d'une étude formelle des fréquences créées à l'intérieur du domaine et des hypothèses sur cet ensemble, on décrit les espaces de profils qui seront utilisés, et on introduit des produits scalaires sur ceux-ci. Après cette longue introduction du problème et de ses hypothèses, on pose l'ansatz pour le développement asymptotique, et l'on énonce le résultat principal du chapitre en section 3. Sa preuve est alors divisée en deux sections. Dans la quatrième, on dérive formellement les équations vérifiées par le profil principal. On commence par obtenir la cascade d'équations satisfaite par les profils avec une analyse BKW formelle. Cela



fait apparaître un certain problème rapide, qui est résolu dans une seconde partie, ce qui nous permet enfin d'écrire le problème découplé vérifié par le profil principal. La dernière section du chapitre est consacrée au cœur de la preuve. On commence par introduire des coefficients associés aux résonances, et faire la dernière hypothèse de ce travail, portant sur ces coefficients, afin de contrôler le défaut de symétrie des termes de résonance. On rend ensuite rigoureux les résultats de la section 4 qui seront utilisés par la suite. La partie suivante est consacrée à la réduction et au découplage du système vérifié par le profil principal, en un système pour la partie évanescente, et des systèmes pour la partie oscillante résonante et chaque mode oscillant non résonant. De nombreuses techniques utilisées dans cette partie le sont également dans les deux suivantes, qui réalisent l'étape principale de la preuve, consistant à prouver des estimations d'énergie pour les systèmes linéarisés associés à la partie oscillante résonante et chaque partie oscillante non résonante. Ces estimations sont ensuite utilisées dans la partie suivante pour construire une solution oscillante, à l'aide d'un schéma itératif. On y montre également que la partie évanescente que l'on a construite appartient à l'espace des profils évanescents. Enfin, on fait une conclusion et dessine quelques perspectives. On donne en appendice un rapide rappel de la théorie des fonctions presque-périodiques, un exemple de la dynamique des gaz dérivé de celui développé dans l'analyse, ainsi que le détail de certains calculs omis dans le corps du chapitre.

Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire,  $C$  représente une constante positive qui peut varier au cours de l'analyse, sans que ce soit forcément précisé.

## 4.1 Notations et hypothèses

### 4.1.1 Position du problème

Soit un temps  $T > 0$ , un entier  $d \geq 2$ , soit  $\Omega_T$  le domaine défini comme  $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  et soit  $\omega_T$  sa frontière donnée par  $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ . On note  $t \in (-\infty, T]$  la variable de temps,  $x = (y, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  la variable d'espace, avec  $y \in \mathbb{R}^{d-1}$  la variable tangentielle et  $x_d \in \mathbb{R}_+$  la variable normale et enfin  $z = (t, x) = (t, y, x_d)$ . D'autre part on note  $z' = (t, y) \in \omega_T$  la variable du bord  $\{x_d = 0\}$ . Pour  $i = 1, \dots, d$ , on note  $\partial_i$  l'opérateur de dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$ . Enfin on note  $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$  et  $\zeta \in \mathbb{R}^d$  les variables duales de  $z \in \Omega_T$  et  $z' \in \omega_T$ . On étudie le problème suivant

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z) u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \sum_{i=1}^d A_i(u^\varepsilon) \partial_i u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B u^\varepsilon|_{x_d=0} = \varepsilon g^\varepsilon & \text{dans } \omega_T, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

où l'inconnue  $u^\varepsilon$  est une fonction de  $\Omega_T$  à valeurs dans un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^N$  contenant 0 avec  $N \geq 1$ , les matrices  $A_j$  sont des fonctions régulières de  $\mathcal{O}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et la matrice  $B$  appartient à  $\mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{R})$  et est de rang maximal. L'entier  $M$  est précisé dans l'Hypothèse 4.3 ci-dessous. Pour simplifier les notations et clarifier les preuves, on considère ici des conditions aux limites linéaires, mais il serait possible de traiter des conditions aux limites non-linéaires. On suppose en outre que le bord n'est pas caractéristique, c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.1** (Bord non caractéristique). *Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{O}$ , la matrice  $A_d(u)$  est inversible.*

La dépendance en  $\varepsilon > 0$  du système (4.1.1) provient du terme source  $\varepsilon g^\varepsilon$  sur le bord  $\omega_T$ , où la fonction quasi-périodique  $g^\varepsilon$  est définie, pour  $z'$  dans  $\omega_T$ , par

$$(4.1.2) \quad g^\varepsilon(z') = G \left( z', \frac{z' \cdot \zeta_1}{\varepsilon}, \dots, \frac{z' \cdot \zeta_m}{\varepsilon} \right),$$

où  $G$  est une fonction de l'espace de Sobolev  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ , pour  $m \geq 2$ , nulle pour  $t$  négatif et de moyenne nulle par rapport à  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^m$ , et  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  sont des fréquences de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Ici l'espace  $\mathbb{T}$  représente le tore  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . On note  $\zeta$  le  $m$ -uplet  $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ . La fonction  $G$  étant périodique de moyenne nulle par rapport à  $\theta$ , on peut écrire

$$(4.1.3) \quad G(z', \theta) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} G_{\mathbf{n}}(z') e^{i\mathbf{n} \cdot \theta},$$

où  $G_{\mathbf{n}}$  est dans  $H^\infty(\mathbb{R}^d)$  et est nul pour  $t$  négatif, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ . On choisit ici le cadre de l'optique géométrique faiblement non-linéaire, c'est-à-dire que l'on s'attend à ce que le profil principal dans le développement asymptotique soit d'amplitude  $\varepsilon$ , ce qui explique la présence du facteur  $\varepsilon$  devant  $g^\varepsilon$  dans le condition de bord. Notons qu'on peut supposer, sans perte de généralité, que les fréquences  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  sont rationnellement indépendantes.

La condition  $u_{|t \leq 0}^\varepsilon = 0$  dans (4.1.1) traduit la nullité des conditions initiales. Le temps d'existence  $T > 0$  n'est pas fixé au départ et est amené à devenir suffisamment petit pour assurer l'existence d'un profil principal.

Dans [Wil02], [CGW11] et [Her15], les auteurs étudient le même problème aux limites quasi-linéaire, mais avec une seule phase sur le bord (c'est-à-dire  $m = 1$ ). Ici on étend l'étude au cas de plusieurs fréquences sur le bord. On ne fait aucune hypothèse sur le groupe de fréquences au bord engendré par les fréquences  $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ , si ce n'est qu'il est finiment engendré. En particulier celui-ci peut ne pas être discret.

On souhaite approcher la solution exacte de (4.1.1), dans l'asymptotique où  $\varepsilon$  tend vers 0, par une solution approchée se comportant comme  $\varepsilon$  en amplitude, et  $1/\varepsilon$  en fréquences. C'est le régime de l'optique géométrique faiblement non-linéaire, voir [Rau12] et [Mét09]. On rappelle que dans ce chapitre on ne prouve pas la stabilité, c'est-à-dire que la solution approchée converge effectivement vers la solution exacte, puisque l'on ne sait pas si cette dernière existe sur un intervalle de temps indépendant de  $\varepsilon$ . Pour montrer l'existence d'une solution approchée il nous faut faire des hypothèses convenables sur le problème de départ. C'est l'objet de la suite de cette partie, qui s'intéresse aux fréquences caractéristiques du problème. Mais détaillons au préalable l'exemple qui motive le cadre général développé ici.

*Exemple 4.1.1.* Les équations d'Euler compressible isentropique en dimension deux d'espace fournissent un exemple de système de la forme (4.1.1). Sous des hypothèses de régularité de la solution, le problème aux limites associé s'écrit,

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \partial_t V^\varepsilon + A_1(V^\varepsilon) \partial_1 V^\varepsilon + A_2(V^\varepsilon) \partial_2 V^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B V_{|x_d=0}^\varepsilon = \varepsilon g^\varepsilon & \text{dans } \omega_T, \\ V_{|t \leq 0}^\varepsilon = 0, \end{cases}$$

avec  $V^\varepsilon = (v^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \in \mathbb{R}^3$ , où  $v^\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  représente le volume du fluide, et  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$  sa vitesse, et où les fonctions  $A_1$  et  $A_2$  sont définies sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$  par

$$(4.1.5) \quad A_1(V) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & -v & 0 \\ -c(v)^2/v & \mathbf{u}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_1 \end{pmatrix}, \quad A_2(V) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 & 0 & -v \\ 0 & \mathbf{u}_2 & 0 \\ -c(v)^2/v & 0 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

avec  $c(v) > 0$  représentant la vitesse du son dans le fluide, qui dépend de son volume  $v$ . On discute maintenant de l'Hypothèse 4.1 de bord non caractéristique pour le système (4.1.4). Dans ce chapitre, on s'intéresse, par convention (et quitte à effectuer une translation des variables), à un développement d'optique géométrique pour le système (4.1.1) construit comme une perturbation autour de l'équilibre 0. Pour le système d'Euler on utilise plutôt les coefficients naturels  $A_1, A_2$ ,

et l'on se place au voisinage d'un équilibre  $V_0 = (v_0, 0, u_0)$ , où  $v_0 > 0$  est un volume fixé, et  $(0, u_0)$  est une vitesse rentrante *subsonique*, c'est-à-dire telle que  $0 < u_0 < c_0$ , où l'on note  $c_0 := c(v_0)$ .

On s'intéresse donc à l'inversibilité de la matrice  $A_2(V)$  pour  $V = (v, u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$  au voisinage de  $V_0$ . La matrice  $A_2(V)$  est de déterminant  $\det A_2(V) = u_2 (u_2^2 - c(v)^2)$ , qui est non nul si la vitesse  $u_2$  vérifie  $0 < u_2 < c(v)$ . Puisque l'état d'équilibre  $V_0$  vérifie cette condition, tout voisinage  $\mathcal{O}$  de  $V_0$  suffisamment petit convient pour satisfaire l'Hypothèse 4.1.

Dans la suite de cette partie on s'intéresse aux fréquences caractéristiques du problème et aux hypothèses associées.

### 4.1.2 Stricte hyperbolicité

La définition suivante introduit la notion de fréquence caractéristique.

**Définition 4.1.2.** *Pour  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ , on définit  $L(0, \alpha)$  le symbole associé à  $L(0, \partial_z)$  comme*

$$L(0, \alpha) := \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0).$$

On définit alors  $p(\tau, \eta, \xi) := \det L(0, (\tau, \eta, \xi))$  son polynôme caractéristique. On dit que  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d}$  est une fréquence caractéristique si elle est racine du polynôme  $p$ , et on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fréquences caractéristiques.

On fait l'hypothèse suivante, dite de *stricte hyperbolicité* (voir [BGS07, Définition 1.2]). Les hypothèses 4.1 et d'hyperbolicité (stricte ou à multiplicité constante) sont très courantes, voir par exemple [Wil96; CGW11; JMR95], et sont relatives à la structure du problème. L'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante, plus générale que celle de stricte hyperbolicité, est parfois préférée comme dans [CGW11; JMR95]. On choisit ici de travailler avec cette dernière pour des raisons techniques.

**Hypothèse 4.2** (Stricte hyperbolicité). *Il existe des fonctions réelles  $\tau_1 < \dots < \tau_N$  analytiques par rapport à  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telles que pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , on ait la factorisation*

$$p(\tau, \eta, \xi) = \det \left( \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0) \right) = \prod_{k=1}^N (\tau - \tau_k(\eta, \xi)),$$

où les valeurs propres  $-\tau_k(\eta, \xi)$  de  $A(\eta, \xi) := \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0)$  sont par conséquent simples. Pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  on a donc les décompositions de  $\mathbb{C}^N$  en sous-espaces propres de dimension 1 suivantes

$$(4.1.6) \quad \mathbb{C}^N = \ker L(0, \tau_1(\eta, \xi), \eta, \xi) \oplus \dots \oplus \ker L(0, \tau_N(\eta, \xi), \eta, \xi),$$

$$(4.1.7) \quad \mathbb{C}^N = A_d(0)^{-1} \ker L(0, \tau_1(\eta, \xi), \eta, \xi) \oplus \dots \oplus A_d(0)^{-1} \ker L(0, \tau_N(\eta, \xi), \eta, \xi).$$

Pour  $k = 1, \dots, N$  et pour  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on définit les projecteurs  $\pi_k(\eta, \xi)$  et  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$ , associés respectivement aux décompositions (4.1.6) et (4.1.7).

Pour  $k = 1, \dots, N$  et  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on note également  $E_k(\eta, \xi)$  un vecteur propre de norme 1 engendrant l'espace propre  $\ker L(0, \tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$ , si bien que

$$(4.1.8) \quad E_1(\eta, \xi), \dots, E_N(\eta, \xi)$$

est une base réelle normée de  $\mathbb{C}^N$  adaptée à la décomposition (4.1.6). On note que la famille

$$(4.1.9) \quad A_d(0)^{-1} E_1(\eta, \xi), \dots, A_d(0)^{-1} E_N(\eta, \xi)$$

forme alors une base réelle de  $\mathbb{C}^N$  adaptée à la décomposition (4.1.7).

*Remarque 4.1.3.* i) Dans la suite on sera amené à considérer l'opérateur modifié

$$\tilde{L}(0, \partial_z) := A_d(0)^{-1} L(0, \partial_z).$$

Ceci motive l'introduction du symbole modifié  $\tilde{L}(0, \alpha) := A_d(0)^{-1} L(0, \alpha)$ , et donc les projecteurs  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$ , puisque les symboles  $L(0, \alpha)$  et  $\tilde{L}(0, \alpha)$  n'ont pas la même image.

- ii) Puisque la matrice  $A(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0)$  est réelle pour  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d$  et que les valeurs propres  $\tau_1, \dots, \tau_N$  sont réelles, les décompositions (4.1.6) et (4.1.7) sont aussi vraies pour  $\mathbb{R}^N$ , mais puisque certaines fonctions étudiées ci-dessous sont à valeurs complexes, ce sont les décompositions de  $\mathbb{C}^N$  qui nous intéressent ici.
- iii) Si  $\alpha = (\tau, \eta, \xi)$  est une fréquence caractéristique, alors par définition et d'après l'Hypothèse 4.2, le triplet  $(\tau, \eta, \xi)$  vérifie

$$\prod_{k=1}^N (\tau - \tau_k(\eta, \xi)) = 0.$$

Il existe ainsi un unique  $k$  entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . Autrement dit, la variété caractéristique  $\mathcal{C}$  est la réunion des  $N$  hypersurfaces  $\{\tau = \tau_k(\eta, \xi)\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

*Remarque 4.1.4.* On vérifie que dans l'Hypothèse 4.2, les fonctions  $\tau_k$  pour  $k = 1, \dots, N$  sont positivement homogènes de degré 1 sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Les projecteurs  $\pi_k$  et  $\tilde{\pi}_k$  pour  $k = 1, \dots, N$  sont donc positivement homogènes de degré 0 sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

*Exemple 4.1.5.* On reprend l'Exemple 4.1.1. Pour le système (4.1.4) linéarisé autour de  $V_0 = (v_0, 0, u_0)$ , le polynôme caractéristique  $p$  s'écrit

$$p(\tau, \eta, \xi) = \det \begin{pmatrix} \tau + \xi u_0 & -v_0 \eta & -v_0 \xi \\ -c_0^2 \eta / v_0 & \tau + \xi u_0 & 0 \\ -c_0^2 \xi / v_0 & 0 & \tau + \xi u_0 \end{pmatrix} = (\tau + \xi u_0) ((\tau + \xi u_0)^2 - c_0^2 (\eta^2 + \xi^2)).$$

Ainsi, les valeurs propres de  $A(\eta, \xi) = \eta A_1(V_0) + \xi A_2(V_0)$  sont les opposées des racines en  $\tau$  du polynôme  $p$ , données par

$$(4.1.10) \quad \tau_1(\eta, \xi) := -u_0 \xi - c_0 \sqrt{\eta^2 + \xi^2}, \quad \tau_2(\eta, \xi) := -u_0 \xi, \quad \tau_3(\eta, \xi) := -u_0 \xi + c_0 \sqrt{\eta^2 + \xi^2}.$$

Les fonctions  $\tau_1, \tau_2$  et  $\tau_3$  sont analytiques et distinctes sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Le système (4.1.4) est ainsi strictement hyperbolique, c'est-à-dire qu'il vérifie l'Hypothèse 4.2 de stricte hyperbolicité. On a représenté en Figure 4.1 les fréquences caractéristiques  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^3$  pour le système (4.1.4).

On définit maintenant des projecteurs issus de la décomposition (4.1.6) de  $\mathbb{C}^N$ , que l'on prolonge pour les fréquences non caractéristiques. On établit également des égalités, très utiles dans la suite, entre les images et noyaux des projecteurs  $\pi_\alpha$  et  $\tilde{\pi}_\alpha$  et des matrices  $L(0, \alpha)$  et  $\tilde{L}(0, \alpha)$ . La preuve est inspirée de celle de [CG10, Lemme 3.2].

**Définition 4.1.6.** Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique, et soit  $k$  l'entier entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . On note  $\pi_\alpha := \pi_k(\eta, \xi)$  (resp.  $\tilde{\pi}_\alpha := \tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$ ) la projection de  $\mathbb{C}^N$  sur l'espace propre  $\ker L(0, \tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$  (resp. l'espace  $A_d(0)^{-1} \ker L(0, \tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$ ) selon la décomposition (4.1.6) (resp. (4.1.7)). Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  n'est pas caractéristique, on note  $\pi_\alpha = \tilde{\pi}_\alpha := 0$  et si  $\alpha = 0$  on note  $\pi_0 := \tilde{\pi}_0 := I$ . Pour tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , on vérifie alors que le projecteur  $\pi_\alpha$  satisfait

$$(4.1.11) \quad \ker L(0, \alpha) = \ker \tilde{L}(0, \alpha) = \text{Im } \pi_\alpha,$$

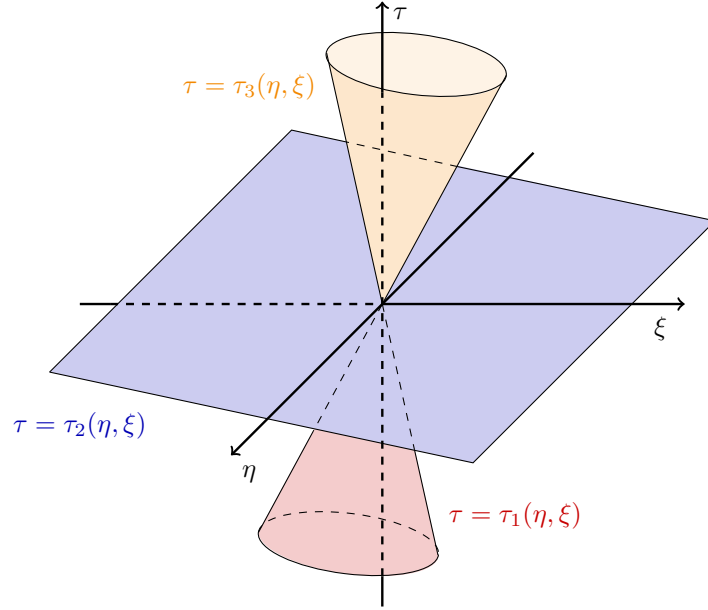


FIGURE 4.1 – Fréquences caractéristiques pour le système (4.1.4) d'Euler compressible isentropique

et

$$(4.1.12) \quad \text{Im } L(0, \alpha) = \ker \pi_\alpha,$$

et que le projecteur  $\tilde{\pi}_\alpha$  vérifie

$$(4.1.13) \quad \text{Im } \tilde{L}(0, \alpha) = \ker \tilde{\pi}_\alpha,$$

où l'on rappelle que l'on désigne par  $\tilde{L}(0, \alpha)$  le symbole modifié  $\tilde{L}(0, \alpha) := A_d(0)^{-1} L(0, \alpha)$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$ , on note  $Q_\alpha$  l'inverse partiel de  $L(0, \alpha)$ , c'est-à-dire l'unique matrice  $Q_\alpha$  telle que  $Q_\alpha L(0, \alpha) = L(0, \alpha) Q_\alpha = I - \pi_\alpha$ . Si  $\alpha = 0$ , on définit  $Q_\alpha := I$ .

*Preuve.* Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . L'égalité (4.1.11) est vérifiée par définition de  $\pi_\alpha$ , et par égalité des noyaux  $\ker L(0, \alpha) = \ker \tilde{L}(0, \alpha)$ , la matrice  $A_d(0)$  étant inversible. Concernant l'égalité (4.1.12), on remarque d'abord que d'après le théorème du rang et la définition de  $\pi_\alpha$ , les espaces  $\text{Im } L(0, \alpha)$  et  $\ker \pi_\alpha$  ont la même dimension. On note  $k_0$  l'indice entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_{k_0}(\eta, \xi)$ . On se donne alors  $L(0, \alpha) X$  un élément de  $\text{Im } L(0, \alpha)$ , avec  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$  que l'on décompose, selon (4.1.6), comme  $X = \sum_{k=1}^N \pi_k(\eta, \xi) X$ . Puisque, pour  $k = 1, \dots, N$ , le projecteur  $\pi_k(\eta, \xi)$  a pour image l'espace propre de la matrice  $A(\eta, \xi)$  associé à la valeur propre  $-\tau_k(\eta, \xi)$ , on a

$$\begin{aligned} L(0, \alpha) X &= \sum_{k=1}^N \left( \tau_{k_0}(\eta, \xi) I + A(\eta, \xi) \right) \pi_k(\eta, \xi) X \\ &= \sum_{k \neq k_0} (\tau_{k_0}(\eta, \xi) - \tau_k(\eta, \xi)) \pi_k(\eta, \xi) X. \end{aligned}$$

Puisque l'égalité (4.1.11) est vérifiée, on en déduit que  $L(0, \alpha) X$  appartient à

$$\bigoplus_{k \neq k_0} \ker L(0, (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)),$$

qui est égal, par définition des projecteurs  $\pi_k$ , au noyau de  $\pi_{k_0}(\eta, \xi) = \pi_\alpha$ . Par égalité des dimensions l'identité (4.1.12) est alors vérifiée. La preuve de l'égalité (4.1.13) est similaire : on se

donne  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$  que l'on décompose comme  $X = \sum_{k=1}^N \pi_k(\eta, \xi) X$ , et l'on écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{L}(0, \alpha) X &= A_d(0)^{-1} \sum_{k=1}^N \left( \tau_{k_0}(\eta, \xi) I + A(\eta, \xi) \right) \pi_k(\eta, \xi) X \\ &= A_d(0)^{-1} \sum_{k \neq k_0} \left( \tau_{k_0}(\eta, \xi) - \tau_k(\eta, \xi) \right) \pi_k(\eta, \xi) X, \end{aligned}$$

et donc  $\tilde{L}(0, \alpha) X$  appartient à

$$\bigoplus_{k \neq k_0} A_d(0)^{-1} \ker L(0, (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)) = \ker \tilde{\pi}_\alpha.$$

Par égalité des dimensions on peut également conclure quant à l'identité (4.1.13).  $\square$

*Remarque 4.1.7.* i) Pour tout  $k = 1, \dots, N$ , les projecteurs  $\pi_k(\eta, \xi)$  et  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$  sont positivement homogènes de degré 0 en  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . D'autre part, par hypothèse de stricte hyperbolicité, les bases  $E_1(\eta, \xi), \dots, E_N(\eta, \xi)$  et  $A_d(0)^{-1}E_1(\eta, \xi), \dots, A_d(0)^{-1}E_N(\eta, \xi)$  sont analytiques en  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , et les applications  $(\eta, \xi) \mapsto \pi_k(\eta, \xi)$  et  $(\eta, \xi) \mapsto \tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$  sont donc analytiques sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Ainsi, par compacité de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ , pour tout  $k = 1, \dots, N$ , les projecteurs  $\pi_k(\eta, \xi)$  et  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$  sont uniformément bornés par rapport à  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Les projecteurs  $\pi_\alpha$  et  $\tilde{\pi}_\alpha$  sont donc bornés uniformément par rapport à  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^{1+d}$ .

ii) À la différence des projecteurs  $\pi_k$  et  $\tilde{\pi}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , les projecteurs  $\pi_\alpha$  et  $\tilde{\pi}_\alpha$  sont homogènes de degré 0 en  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , et non seulement positivement homogènes. En effet, le résultat est évident si  $\alpha$  est nul ou non caractéristique, et si  $\alpha$  est une fréquence caractéristique non nulle, et  $\lambda$  un réel non nul, alors puisque  $\ker L(0, \lambda \alpha) = \ker L(0, \alpha)$  et  $\text{Im } L(0, \lambda \alpha) = \text{Im } L(0, \alpha)$ , on a  $\pi_{\lambda \alpha} = \pi_\alpha$ . L'argument est similaire pour les projecteurs  $\tilde{\pi}_\alpha$ .

### 4.1.3 Condition de Lopatinskii uniforme et quelques résultats préliminaires

On définit les espaces de fréquences

$$\begin{aligned} \Xi &:= \{ \zeta = (\sigma = \tau - i\gamma, \eta) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} \mid \gamma \geq 0 \}, \\ \Sigma &:= \{ \zeta \in \Xi \mid \tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^2 = 1 \}, \\ \Xi_0 &:= \{ \zeta \in \Xi \mid \gamma = 0 \}, \\ \Sigma_0 &:= \Xi_0 \cap \Sigma. \end{aligned}$$

On définit également la matrice qui apparaît lorsque l'on applique la transformée de Fourier-Laplace à l'opérateur  $L(0, \partial_z)$ . Pour tout  $\zeta = (\sigma, \eta) \in \Xi$ , on pose

$$\mathcal{A}(\zeta) := -i A_d(0)^{-1} \left( \sigma I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j(0) \right).$$

L'hypothèse 4.1 de bord non caractéristique est utilisée ici pour définir la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ . On remarque que si  $\zeta = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ , et si  $i\xi$  est une valeur propre imaginaire pure de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ , alors la fréquence  $(\tau, \eta, \xi)$  est une fréquence caractéristique réelle, et réciproquement.

Le lemme de Hersh [Her63, Lemme 1] nous assure que pour  $\zeta$  dans  $\Xi \setminus \Xi_0$ , la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle et que le sous-espace stable associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative, que l'on note  $E_-(\zeta)$ , est de dimension constante notée  $p$ . L'entier  $p$  est de plus obtenu comme le nombre de valeurs propres strictement positives de la matrice  $A_d(0)$ . On note  $E_+(\zeta)$  le sous-espace instable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé aux valeurs propres de partie réelle strictement positive, qui est de dimension  $N - p$ .

Dans [Kre70] (voir aussi [CP82, Théorème 3.5] et [BGS07, Lemma 4.5]) il est montré que les sous-espaces stables  $E_{\pm}$  s'étendent de manière continue à tout l'espace  $\Xi$  dans le cas strictement hyperbolique (Hypothèse 4.2). On note encore  $E_{\pm}$  les prolongements continus à  $\Xi$ . On peut alors faire l'hypothèse principale de ce travail, qui, avec les Hypothèses 4.1 et 4.2, nous assure que le problème aux limites (4.1.1) est bien posé localement en temps. En effet les hypothèses 4.1, 4.2 et 4.3 perdurent lorsque l'on réalise une petite perturbation du système autour d'un point d'équilibre. Tout comme les Hypothèses 4.1 et 4.2, l'hypothèse suivante a trait à la structure du problème.

**Hypothèse 4.3** (Condition de Lopatinskii uniforme). *Pour tout  $\zeta \in \Xi$ , on a*

$$\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}.$$

*En particulier, cela impose que le rang de la matrice  $B$  soit égal à la dimension de  $E_-(\zeta)$ , c'est-à-dire  $M = p$ .*

*Remarque 4.1.8.* Historiquement, la première définition qui a été donnée de la condition de Lopatinskii uniforme n'utilise pas le prolongement continu de  $E_-$  à  $\Xi_0$ . Elle énonce que pour tout  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , on a

$$\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\},$$

et que l'application linéaire  $(B|_{E_-(\zeta)})^{-1}$  est bornée uniformément par rapport à  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , voir [Sar65]. Puisque l'espace  $E_-(\zeta)$  est homogène de degré 0 et continu par rapport à  $\zeta \in \Xi$ , et par compacité de la demi-sphère unité  $\Sigma$ , on remarque en effet que l'Hypothèse 4.3 implique que l'application linéaire  $(B|_{E_-(\zeta)})^{-1}$  est bornée uniformément par rapport à  $\zeta \in \Xi$ .

On a vu que pour  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure. On s'attache maintenant à décrire plus précisément la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  pour  $\zeta$  dans  $\Xi_0$  ainsi que les prolongement par continuité à  $\Xi_0$  des espaces  $E_{\pm}(\zeta)$ . Le théorème suivant, dû à Kreiss [Kre70] pour le cas strictement hyperbolique qui nous intéresse ici, Métivier [Mét00] pour le cas hyperbolique à multiplicité constante, et étendu par Métivier et Zumbrun [MZ05] à un cadre encore plus général, donne une décomposition très utile de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  appartient à  $\Xi_0$ .

**Proposition 4.1.9** (Structure de blocs). *Si l'Hypothèse 4.2 est vérifiée, alors pour tout  $\zeta \in \Xi$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\zeta$  dans  $\Xi$ , un entier  $L \geq 1$ , une partition  $N = \rho_1 + \dots + \rho_L$  et une matrice inversible  $T$  analytique sur  $\mathcal{V}$  telle que pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}$ ,*

$$T(\zeta) \mathcal{A}(\zeta) T(\zeta)^{-1} = \text{diag} (\mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta)),$$

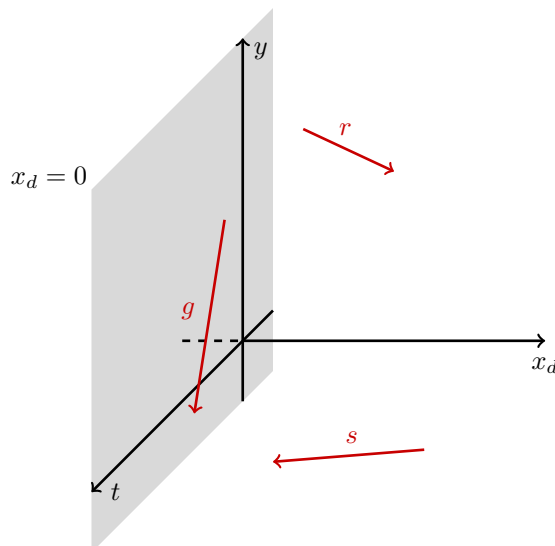
où pour tout  $j$  la matrice  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  est de taille  $\rho_j$  et vérifie l'une des propriétés suivantes :

- i) la partie réelle de la matrice  $\mathcal{A}_j(\zeta)$ , définie par  $(\mathcal{A}_j(\zeta) + \mathcal{A}_j(\zeta)^*)/2$ , est définie positive,
- ii) la partie réelle de la matrice  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  est définie négative,
- iii)  $\rho_j = 1$ ,  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  est imaginaire pur lorsque  $\gamma$  est nul et  $\partial_{\gamma} \mathcal{A}_j(\zeta) \in \mathbb{R}^*$ ,
- iv)  $\rho_j > 1$ , les coefficients de  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont imaginaires purs lorsque  $\gamma$  est nul, il existe  $\xi_j \in \mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{A}_j(\zeta) = \begin{pmatrix} i\xi_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & i\xi_j \end{pmatrix},$$

et le coefficient en bas à gauche de  $\partial_{\gamma} \mathcal{A}_j(\zeta)$  est réel non nul.

Ce résultat, dénommé communément "structure de blocs" [BGS07, Section 5.1.2], est fondamental pour la preuve de la Proposition 4.1.21 ci-dessous. En vue de décrire les sous-espaces  $E_{\pm}(\zeta)$  pour  $\zeta \in \Xi_0$ , on définit maintenant le champ de vecteurs associé à chaque phase réelle caractéristique.

FIGURE 4.2 – Champs de vecteurs rentrant ( $r$ ), sortant ( $s$ ) et glancing ( $g$ ).

**Définition 4.1.10.** Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique, et soit  $k$  entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . On définit  $\mathbf{v}_\alpha$  la vitesse de groupe associée à  $\alpha$  comme

$$\mathbf{v}_\alpha := \nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi).$$

On dit que  $\alpha$  est glancing (resp. rentrante, sortante) si  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  est nul (resp. strictement négatif, strictement positif). On définit alors  $X_\alpha$  le champ de vecteurs associé à  $\alpha$  comme

$$(4.1.14) \quad X_\alpha := \partial_t - \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_x = \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta, \xi) \cdot \nabla_y - \partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \partial_{x_d}.$$

On représente le champ de vecteur  $X_\alpha$  dans le cas rentrant, sortant, et glancing en Figure 4.2.

*Exemple 4.1.11.* On commence par donner un exemple de condition au bord pour le système de l'Exemple 4.1.1 qui vérifie la condition de Lopatinskii uniforme. On cherche pour cela une matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  de rang maximal, qui donne des conditions de bord strictement dissipatives (voir [BGS07, Définition 9.2]), c'est-à-dire telle que son noyau, de dimension 1, soit engendré par un vecteur  $E$  vérifiant

$${}^t E S(V) A_2(V) E < 0$$

pour tout  $V$  au voisinage de  $V_0$ , où la matrice  $S(V)$  est un symétriseur du système. Des conditions de bord strictement dissipatives vérifient en particulier la condition de Lopatinskii uniforme, voir [BGS07, Proposition 4.4]. Dans notre exemple on peut considérer le symétriseur donné par la matrice diagonale

$$S(V) = \text{diag}(c(v)^2, v^2, v^2).$$

On rappelle que, avec les notations de notre exemple, un symétriseur  $S(V)$  est une fonction du voisinage de  $V_0$ ,  $\mathcal{O}$ , dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives telle que les matrices  $S(V) A_1(V)$  et  $S(V) A_2(V)$  sont symétriques pour tout  $V$  au voisinage de  $V_0$ . On détermine alors qu'un vecteur  $E$  qui convient est donné par  $E = (v_0, 0, u_0)$ , puisque dans ce cas l'on a

$${}^t E S(V_0) A_2(V_0) E = u_0 v_0^2 (u_0^2 - c_0^2)$$

qui est strictement négatif par hypothèse sur  $V_0$ , et le reste donc au voisinage de  $V_0$ . Une matrice



$B$  de rang maximal et de noyau engendré par le vecteur  $E$  est par exemple donnée par

$$B := \begin{pmatrix} 0 & v_0 & 0 \\ -u_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix},$$

qui fournit donc un exemple de condition au bord satisfaisant la condition de Lopatinskii uniforme.

On s'intéresse maintenant aux valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  pour le système de l'Exemple 4.1.1. Leurs expressions, pour  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dépend du signe de  $\tau^2 - \eta^2 (c_0^2 - u_0^2)$ , comme représenté sur la Figure 4.3.

Si  $|\tau| > \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta|$ , c'est-à-dire si  $\zeta = (\tau, \eta)$  se situe dans la zone dite *hyperbolique*  $\mathcal{H}$  ([BGS07, Définition 8.1]), alors la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  admet trois valeurs propres simples imaginaires pures données par

$$(4.1.15a) \quad i \xi_1(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 + \text{sign}(\tau) c_0 \sqrt{\tau^2 - \eta^2 (c_0^2 - u_0^2)}}{c_0^2 - u_0^2},$$

$$(4.1.15b) \quad i \xi_2(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 - \text{sign}(\tau) c_0 \sqrt{\tau^2 - \eta^2 (c_0^2 - u_0^2)}}{c_0^2 - u_0^2},$$

$$(4.1.15c) \quad i \xi_3(\tau, \eta) := i \frac{-\tau}{u_0},$$

où  $\text{sign}(x) := x/|x|$  pour  $x \neq 0$ . Puisque  $\xi_1(\tau, \eta)$  est réel, la fréquence  $\alpha_1(\tau, \eta) := (\tau, \eta, \xi_1(\tau, \eta))$  est une fréquence caractéristique réelle. On détermine alors que l'on a  $\tau = \tau_3(\eta, \xi_1(\tau, \eta))$  si  $\tau > 0$  et  $\tau = \tau_1(\eta, \xi_1(\tau, \eta))$  si  $\tau < 0$ . Un calcul nous donne, si  $\tau > 0$ ,

$$\partial_\xi \tau_3(\eta, \xi_1(\tau, \eta)) = \sqrt{\frac{\tau^2 - \eta^2 (c_0^2 - u_0^2)}{\eta^2 + \xi_1^2(\tau, \eta)}},$$

et, si  $\tau < 0$ ,

$$\partial_\xi \tau_1(\eta, \xi_1(\tau, \eta)) = \sqrt{\frac{\tau^2 - \eta^2 (c_0^2 - u_0^2)}{\eta^2 + \xi_1^2(\tau, \eta)}}.$$

La fréquence  $\alpha_1(\tau, \eta) = (\tau, \eta, \xi_1(\tau, \eta))$  est donc toujours sortante. De même, on détermine que la fréquence caractéristique réelle  $\alpha_2(\tau, \eta) := (\tau, \eta, \xi_2(\tau, \eta))$  est toujours rentrante, et que la fréquence  $\alpha_3(\tau, \eta) := (\tau, \eta, \xi_3(\tau, \eta))$  est également toujours rentrante.

Si  $\zeta$  se situe dans la zone dite *glancing*  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire si  $|\tau| = \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta|$ , alors la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  possède une valeur propre simple et imaginaire pure  $i \xi_3(\zeta)$  toujours donnée par la formule (4.1.15c), et une valeur propre double et imaginaire pure donnée par

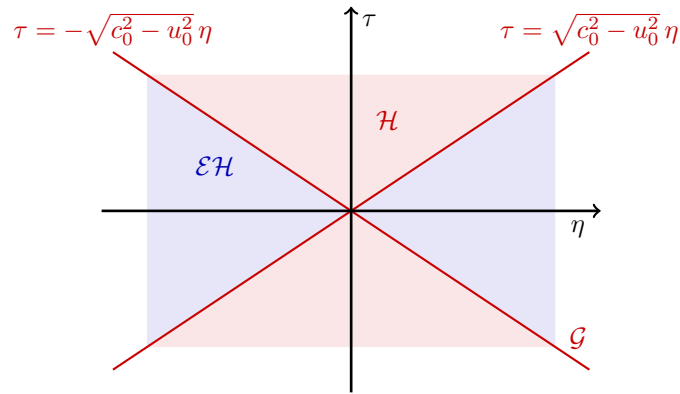
$$i \xi_1(\zeta) = i \xi_2(\zeta) = i \frac{\tau u_0}{c_0^2 - u_0^2}.$$

Dans ce cas on a toujours  $\tau = \tau_3(\eta, \xi_1(\tau, \eta))$  si  $\tau > 0$  et  $\tau = \tau_1(\eta, \xi_1(\tau, \eta))$  si  $\tau < 0$ , et concernant la fréquence caractéristique  $\alpha_3(\tau, \eta) = (\tau, \eta, \xi_3(\tau, \eta))$ , on a toujours  $\tau = \tau_2(\eta, \xi_3(\tau, \eta))$ . On détermine alors que

$$\partial_\xi \tau_1(\eta, \xi_1(\tau, \eta)) = \partial_\xi \tau_3(\eta, \xi_1(\tau, \eta)) = 0,$$

et donc quelque soit le signe de  $\tau$ , la fréquence  $\alpha_1(\tau, \eta)$  est glancing. La fréquence  $\alpha_3(\tau, \eta)$  est quant à elle toujours rentrante.

Enfin si  $|\tau| < \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta|$  et donc si  $\zeta$  est dans la zone dite *mixte elliptique-hyperbolique*  $\mathcal{EH}$ , alors la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  possède une valeur propre simple imaginaire pure  $i \xi_3(\zeta)$  donnée par (4.1.15c), et deux valeurs propres de partie réelle non nulle (symétriques par rapport à l'axe des

FIGURE 4.3 – Régions de  $\Xi_0$  pour les équations d'Euler compressible isentropique

imaginaires purs), que l'on note encore  $i\xi_1$  et  $i\xi_2$  et dont les expressions sont données par

$$i\xi_1(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 + i c_0 \operatorname{sign}(\tau) \sqrt{\eta^2 (c_0^2 - u_0^2) - \tau^2}}{c_0^2 - u_0^2},$$

$$i\xi_2(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 - i c_0 \operatorname{sign}(\tau) \sqrt{\eta^2 (c_0^2 - u_0^2) - \tau^2}}{c_0^2 - u_0^2}.$$

La fréquence caractéristique réelle  $\alpha_3(\tau, \eta) = (\tau, \eta, \xi_3(\tau, \eta))$  est là encore rentrante.

Dans la suite, afin d'avoir la matrice identité en facteur de l'opérateur de dérivée partielle par rapport à la variable normale  $x_d$  dans les équations, on considérera l'opérateur modifié  $\tilde{L}(u, \partial_z) := A_d(u)^{-1} L(u, \partial_z)$ . Pour  $j = 1, \dots, d-1$ , on note  $\tilde{A}_j := A_d^{-1} A_j$  et  $\tilde{A}_0 := A_d^{-1}$ . Le résultat suivant, qui est une adaptation due à [CGW11, Lemme 2.11] d'un résultat de [Lax57], montre que, dans certains cas, l'opérateur  $\tilde{\pi}_\alpha \tilde{L}(0, \partial_z) \pi_\alpha$  est donné par un opérateur de transport scalaire à coefficients constants, et donc que l'opérateur  $\tilde{\pi}_\alpha \tilde{L}(0, \partial_z)$  agit sur les profils polarisés (c'est-à-dire les profils  $U$  tels que  $\pi_\alpha U = U$ ) comme un opérateur plus simple.

**Lemme 4.1.12** ([CGW11, Lemme de Lax]). *Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique réelle non glancing et  $k$  entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . Alors on a*

$$\tilde{\pi}_\alpha \tilde{L}(0, \partial_z) \pi_\alpha = \frac{-1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} X_\alpha \tilde{\pi}_\alpha \pi_\alpha,$$

où  $X_\alpha$  est le champ de vecteur associé à  $\alpha$  défini par (4.1.14). On note alors

$$\tilde{X}_\alpha := \frac{-1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} X_\alpha = \partial_{x_d} - \frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \partial_t + \frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \partial_t \nabla_\eta \tau_k(\eta, \xi) \cdot \nabla_y.$$

Dans un souci de complétude, on rappelle ici la preuve donnée dans [CGW11].

*Preuve.* D'après l'identité (4.1.11), on a

$$(4.1.16) \quad \tilde{L}(0, (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)) \pi_k(\eta, \xi) = \left( \tau_k(\eta, \xi) \tilde{A}_0(0) + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i \tilde{A}_i(0) + \xi I \right) \pi_k(\eta, \xi) = 0.$$

La formule de Dunford et le théorème des fonctions implicites nous assurent que dans le cas strictement hyperbolique, les projecteurs  $\pi_k$  ainsi que les réels  $\tau_k$  sont différentiables par rapport à  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  (ils dépendent même analytiquement de  $(\eta, \xi)$ ). On différencie donc l'égalité

(4.1.16) par rapport à  $\xi$  sur un voisinage d'une fréquence  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  pour trouver

$$\left( \partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \tilde{A}_0(0) + I \right) \pi_k(\eta, \xi) + \left( \tau_k(\eta, \xi) \tilde{A}_0(0) + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i \tilde{A}_i(0) + \xi I \right) \partial_\xi \pi_k(\eta, \xi) = 0,$$

et donc, en multipliant par  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$  à gauche, d'après l'identité (4.1.13), on obtient

$$(4.1.17) \quad \tilde{\pi}_k(\eta, \xi) \tilde{A}_0(0) \pi_k(\eta, \xi) = -\frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \tilde{\pi}_k(\eta, \xi) \pi_k(\eta, \xi).$$

De même, pour  $i = 1, \dots, d-1$ , on différencie l'égalité (4.1.16) par rapport à  $\eta_i$  puis on multiplie à gauche par le projecteur  $\tilde{\pi}_k(\eta, \xi)$  pour obtenir

$$\tilde{\pi}_k(\eta, \xi) \left( \partial_{\eta_j} \tau_k(\eta, \xi) \tilde{A}_0(0) + \tilde{A}_i(0) \right) \pi_k(\eta, \xi) = 0,$$

et donc, avec (4.1.17), on a

$$\tilde{\pi}_k(\eta, \xi) \tilde{A}_i(0) \pi_k(\eta, \xi) = \frac{\partial_{\eta_i} \tau_k(\eta, \xi)}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \tilde{\pi}_k(\eta, \xi) \pi_k(\eta, \xi),$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Les résultats suivants utilisent l'énoncé classique du Lemme de Lax, dont la preuve est similaire et plus simple que celle du Lemme 4.1.12. On le rappelle ici.

**Lemme 4.1.13** ([Lax57]). *Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique réelle et  $k$  entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . Alors on a*

$$\pi_\alpha L(0, \partial_z) \pi_\alpha = X_\alpha \pi_\alpha,$$

où  $X_\alpha$  est le champ de vecteur associé à  $\alpha$  défini par (4.1.14).

Le premier lemme ci-dessous, classique, affirme que les vitesses de groupe  $\mathbf{v}_\alpha$  sont bornées. Le résultat présenté ici n'est pas optimal, la constante  $C$  pouvant être prise égale à 1, mais il suffit pour notre analyse, et sa preuve est plus simple.

**Lemme 4.1.14.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour  $k = 1, \dots, N$  et  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on a*

$$|\nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi)| \leq C \sup_{(\eta, \xi) \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho(A(\eta, \xi)),$$

où l'on rappelle que  $A(\eta, \xi)$  a été définie pour  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  dans l'Hypothèse 4.2, et où  $\rho(A(\eta, \xi))$  désigne le rayon spectral de la matrice  $A(\eta, \xi)$ . On note alors  $\mathcal{V}^*$  la quantité finie

$$\mathcal{V}^* := C \sup_{(\eta, \xi) \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho(A(\eta, \xi)),$$

qui borne la norme des vitesses de groupe.

*Preuve.* On note d'abord que la quantité  $\mathcal{V}^*$  est bien finie, puisque d'après l'Hypothèse 4.2, on a

$$\rho(A(\eta', \xi')) = \max_{k=1, \dots, N} |\tau_k(\eta', \xi')|,$$

et que les fonctions  $\tau_1, \dots, \tau_N$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , et donc bornées sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Soit maintenant  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $k$  entre 1 et  $N$ . D'après le Lemme de Lax 4.1.13, on a, pour  $(\eta', \xi')$  dans  $\mathbb{S}^{d-1}$ ,

$$\pi_k(\eta, \xi) A(\eta', \xi') \pi_k(\eta, \xi) = -d\tau_k(\eta, \xi) \cdot (\eta', \xi') \pi_k(\eta, \xi).$$

Or on a

$$|\nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi)| = \sup_{(\eta', \xi') \in \mathbb{S}^{d-1}} |d\tau_k(\eta, \xi) \cdot (\eta', \xi')|,$$

et donc

$$(4.1.18) \quad |\nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi)| \leq \|\pi_k(\eta, \xi)\| \sup_{(\eta', \xi') \in \mathbb{S}^{d-1}} \|A(\eta', \xi')\|.$$

D'autre part, d'après la Remarque 4.1.7, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(4.1.19) \quad \|\pi_k(\eta, \xi)\| \leq C, \quad k = 1, \dots, N,$$

uniformément par rapport à  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Enfin, en vertu de l'Hypothèse 4.2 qui affirme que la matrice  $A(\eta', \xi')$  est diagonalisable et bien conditionnée, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(4.1.20) \quad \sup_{(\eta', \xi') \in \mathbb{S}^{d-1}} \|A(\eta', \xi')\| \leq C \sup_{(\eta', \xi') \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho(A(\eta', \xi')).$$

On peut alors conclure avec (4.1.18), (4.1.19), et (4.1.20).  $\square$

Le deuxième résultat nous permet de relier quantitativement le vecteur  $\tilde{\pi}_\alpha E_k(\eta, \xi)$  avec le vecteur  $E_k(\eta, \xi)$ , ce qui nous sera utile dans la suite pour obtenir un contrôle de minoration de ce premier. Il est mentionné, pour sa deuxième partie, dans [CG10].

**Lemme 4.1.15.** *Soit  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  une fréquence caractéristique réelle et  $k$  entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . Alors on a*

$$\tilde{\pi}_\alpha E_k(\eta, \xi) = -\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) A_d(0)^{-1} E_k(\eta, \xi).$$

*En particulier, si la fréquence  $\alpha$  n'est pas glancing, le projecteur  $\tilde{\pi}_\alpha$  induit un isomorphisme de  $\text{Im } \pi_\alpha$  dans  $\text{Im } \tilde{\pi}_\alpha$ .*

*Preuve.* On décompose le vecteur  $E_k(\eta, \xi)$  dans la base (4.1.9) adaptée à la décomposition (4.1.7) :

$$(4.1.21) \quad E_k(\eta, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j A_d(0)^{-1} E_j(\eta, \xi),$$

si bien que l'on a  $\tilde{\pi}_\alpha E_k(\eta, \xi) = \lambda_k A_d(0)^{-1} E_k(\eta, \xi)$ . On cherche donc à déterminer le coefficient  $\lambda_k$ . On a, puisque  $\pi_\alpha E_k(\eta, \xi) = E_k(\eta, \xi)$ , et d'après la décomposition (4.1.21),

$$A_d(0) \pi_\alpha E_k(\eta, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j E_j(\eta, \xi),$$

et donc

$$\pi_\alpha A_d(0) \pi_\alpha E_k(\eta, \xi) = \lambda_k E_k(\eta, \xi).$$

On peut conclure avec le Lemme de Lax 4.1.13 qui affirme que l'on a  $\pi_\alpha A_d(0) \pi_\alpha = -\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \pi_\alpha$ .

Pour montrer que le projecteur  $\tilde{\pi}_\alpha$  induit un isomorphisme de  $\text{Im } \pi_\alpha$  dans  $\text{Im } \tilde{\pi}_\alpha$ , puisque les deux espaces  $\text{Im } \pi_\alpha$  et  $\text{Im } \tilde{\pi}_\alpha$  ont la même dimension, il s'agit de montrer que l'intersection

$$\ker \tilde{\pi}_\alpha \cap \text{Im } \pi_\alpha$$

est triviale. On se donne donc  $X$  un vecteur de  $\mathbb{C}^N$  appartenant à cette intersection, qui s'écrit,

$X$  appartenant à  $\text{Im } \pi_\alpha$ , par définition du vecteur  $E_k(\eta, \xi)$ ,

$$X = \lambda E_k(\eta, \xi),$$

où  $k$  est l'entier entre 1 et  $N$  tel que  $\alpha = (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'après le résultat précédent on a

$$\tilde{\pi}_\alpha X = -\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) A_d(0)^{-1} X.$$

Or,  $\tilde{\pi}_\alpha X = 0$  par hypothèse et  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \neq 0$  puisque  $\alpha$  n'est pas glancing. On en déduit donc  $X = 0$ , ce qui est le résultat recherché.  $\square$

On peut maintenant décrire la décomposition du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$  pour  $\zeta \in \Xi_0$ , qui utilise l'Hypothèse 4.2 de stricte hyperbolicité.

**Proposition 4.1.16** ([Wil96], Proposition 3.4). *Soit  $\zeta = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ . On note  $i\xi_j(\zeta)$  pour  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$  les valeurs propres complexes distinctes de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ , et si  $\xi_j(\zeta)$  est réel, on note  $\alpha_j(\zeta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$  la fréquence caractéristique réelle associée. Si  $\xi_j(\zeta)$  est réel, on note également  $k_j$  l'indice entre 1 et  $N$  tel que  $\tau = \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$ . L'ensemble  $\{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\}$  s'écrit alors comme l'union disjointe*

$$(4.1.22) \quad \{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\} = \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta),$$

où les ensembles  $\mathcal{G}(\zeta)$ ,  $\mathcal{R}(\zeta)$ ,  $\mathcal{P}(\zeta)$ ,  $\mathcal{S}(\zeta)$  et  $\mathcal{N}(\zeta)$  correspondent aux indices  $j$  tels que respectivement  $\alpha_j(\zeta)$  est glancing,  $\alpha_j(\zeta)$  est rentrante,  $\text{Im } \xi_j(\zeta)$  est strictement positive,  $\alpha_j(\zeta)$  est sortante et  $\text{Im } \xi_j(\zeta)$  est strictement négative.

On a alors la décomposition de  $E_-(\zeta)$  suivante

$$(4.1.23) \quad E_-(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta),$$

où pour chaque indice  $j$ , le sous-espace  $E_-^j(\zeta)$  est précisément décrit comme suit.

- i) Si  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ , l'espace  $E_-^j(\zeta)$  est l'espace propre généralisé de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé à la valeur propre  $i\xi_j(\zeta)$ .
- ii) Si  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$ , on a  $E_-^j(\zeta) = \ker L(0, \alpha_j(\zeta))$ , qui est de dimension 1.
- iii) Si  $j \in \mathcal{G}(\zeta)$ , on note  $n_j$  la multiplicité algébrique de la valeur propre imaginaire pure  $i\xi_j(\zeta)$ . Pour  $\gamma > 0$  petit, la valeur propre multiple  $i\xi_j(\tau, \eta)$  se sépare en  $n_j$  valeurs propres simples, notées  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$ ,  $k = 1, \dots, n_j$ , toutes de partie réelle non nulle. On note  $\mu_j$  le nombre (indépendant de  $\gamma > 0$ ) de valeurs propres  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$  de partie réelle strictement négative. Alors  $E_-^j(\zeta)$  est de dimension  $\mu_j$  et est engendré par les vecteurs propres généralisés  $w$  vérifiant  $[\mathcal{A}(\zeta) - i\xi_j(\zeta)]^{\mu_j} w = 0$ . De plus, si  $n_j$  est pair,  $\mu_j = n_j/2$  et si  $n_j$  est impair,  $\mu_j$  est égal à  $(n_j - 1)/2$  ou  $(n_j + 1)/2$ .

De même, le sous-espace instable  $E_+(\zeta)$  s'écrit

$$(4.1.24) \quad E_+(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\zeta)} E_+^j(\zeta),$$

avec une description similaire des sous-espaces  $E_+^j(\zeta)$ . En particulier, si  $\mathcal{G}(\zeta)$  est vide, alors

$$\mathbb{C}^N = E_-(\zeta) \oplus E_+(\zeta).$$

*Remarque 4.1.17.* La notation  $\xi_j(\zeta)$  ne doit pas être perçue comme étant une fonction  $\xi_j$  dépendant de  $\zeta \in \Xi_0$ , puisque par exemple le nombre de valeurs propres distinctes  $\mathcal{M}(\zeta)$  dépend de  $\zeta$ . Cependant, on remarque que la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  est homogène de degré 1 en  $\zeta$  dans  $\Xi_0$ . Ainsi, le

nombre  $\mathcal{M}(\zeta)$  ainsi que le cardinal des ensembles  $\mathcal{G}(\zeta)$ ,  $\mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)$  et  $\mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta)$  ne dépendent que de la direction de  $\zeta$  dans  $\Xi_0$ . On suppose donc que, à  $\zeta \in \Xi_0$  fixé, pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , les indices  $1, \dots, \mathcal{M}(\lambda\zeta)$  sont ordonnés de telle sorte que, pour  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$ ,

$$\xi_j(\lambda\zeta) = \lambda \xi_j(\zeta), \quad \text{et donc} \quad \alpha_j(\lambda\zeta) = \lambda \alpha_j(\zeta).$$

Avec cette numérotation, on remarque que si, pour  $\zeta \in \Xi_0$ ,  $\alpha_j(\zeta)$  est glancing, rentrant ou sortant (resp.  $\xi_j(\zeta)$  est de partie imaginaire non nulle), c'est-à-dire si  $j \in \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$  (resp.  $j \in \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta)$ ), alors pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\alpha_j(\lambda\zeta) = \lambda \alpha_j(\zeta)$  est encore glancing, rentrant ou sortant (resp.  $\xi_j(\lambda\zeta)$  est encore de partie imaginaire non nulle), c'est-à-dire que  $j \in \mathcal{G}(\lambda\zeta) \cup \mathcal{S}(\lambda\zeta) \cup \mathcal{R}(\lambda\zeta)$  (resp.  $j \in \mathcal{P}(\lambda\zeta) \cup \mathcal{N}(\lambda\zeta)$ ). Plus précisément, si  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$  (resp.  $\mathcal{N}(\zeta)$ ), alors  $j \in \mathcal{N}(-\zeta)$  (resp.  $\mathcal{P}(-\zeta)$ ).

**Définition 4.1.18.** *Soit  $\zeta \in \Xi_0$ . On dit que  $\zeta$  est un point glancing et on note  $\zeta \in \mathcal{G}$  si avec les notations de la Proposition 4.1.16, il existe un indice  $j$  entre 1 et  $\mathcal{M}(\zeta)$  tel que  $j \in \mathcal{G}(\zeta)$ , c'est-à-dire si  $\zeta$  est tel qu'il existe  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que la fréquence  $(\zeta, \xi)$  soit caractéristique et glancing.*

On fait maintenant une hypothèse qui nous permet de montrer que les projecteurs associés à la décomposition (4.1.23) sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$  dans  $\Xi_0$ . Cette hypothèse a déjà été faite dans les travaux de [Sar65] et [Wil96], et semble nécessaire, voir [Wil00].

**Hypothèse 4.4.** *Pour tout  $k = 1, \dots, N$ , et pour tout  $(\underline{\eta}, \underline{\xi}) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on a*

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\eta}, \underline{\xi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \underline{\xi}^2}(\underline{\eta}, \underline{\xi}) \neq 0.$$

*Remarque 4.1.19.* On verra ci-dessous, au cours de la preuve de la Proposition 4.1.21, que l'Hypothèse 4.4 implique, avec les notations de la Proposition 4.1.16, que pour tout  $\zeta$  dans  $\Xi_0$ , pour tout indice  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta)$ , on a  $n_j = 2$ . On en déduit que  $\mu_j = 1$  et que la composante  $E_-^j(\zeta)$  du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$  est de dimension 1 et est donnée par  $\ker L(0, \alpha_j(\zeta))$ .

**Définition 4.1.20.** *Pour  $\zeta \in \Xi_0$  et, avec les notations de la Proposition 4.1.16, pour un indice  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$ , on note  $\Pi_-^j(\zeta)$  la projection de  $E_-(\zeta)$  sur la composante  $E_-^j(\zeta)$  selon la décomposition (4.1.23).*

*On note également  $\Pi_-^e(\zeta)$  la projection de  $E_-(\zeta)$  sur la partie elliptique stable  $E_-^e(\zeta) := \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta)$  selon la décomposition (4.1.23).*

*Enfin, si  $\zeta$  n'est pas glancing, c'est-à-dire si  $\mathcal{G}(\zeta)$  est vide, alors d'après la Proposition 4.1.16 on a la décomposition de  $\mathbb{C}^N$  suivante*

$$(4.1.25) \quad \mathbb{C}^N = \bigoplus_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta).$$

*On note dans ce cas  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)$  la projection de  $\mathbb{C}^N$  sur la partie elliptique stable  $E_-^e(\zeta)$  selon cette décomposition, et  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\zeta)$  la projection de  $\mathbb{C}^N$  sur la partie elliptique instable  $E_+^e(\zeta) := \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\zeta)} E_+^j(\zeta)$  selon cette même décomposition.*

Le résultat suivant sera fondamental dans la suite. Il utilise de manière cruciale l'Hypothèse 4.4, ainsi que l'Hypothèse 4.2 de stricte hyperbolicité.

**Proposition 4.1.21** ([Wil96]). *Sous les Hypothèses 4.2 et 4.4, pour  $\zeta \in \Xi_0$  les projecteurs  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$ , et les projecteurs  $\Pi_-^e(\zeta)$  sont uniformément bornés par rapport à  $\zeta$  dans  $\Xi_0$ .*

On détaille ici la preuve de ce résultat, qui est omise dans [Wil96].

*Preuve.* Dans toute la preuve on s'autorise à noter indistinctement  $e$  toute fonction analytique ne s'annulant pas en un point particulier  $\underline{\alpha}$  précisé plus bas, et qui est donc non nulle sur un voisinage de ce point  $\underline{\alpha}$ . Puisque les projecteurs  $\Pi_-^j(\zeta)$ ,  $j \in \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$  et  $\Pi_-^e(\zeta)$  sont homogènes de degré 0 en  $\zeta$ , on montre le résultat localement dans  $\Sigma_0$ , et on conclut par compacité de la sphère unité  $\Sigma_0$ . On est donc ramené à une étude locale au voisinage de tout point de  $\Sigma_0$ .

Soit  $\underline{\zeta} = (\underline{\tau}, \underline{\eta}) \in \Sigma_0$ . On s'intéresse au comportement au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$  des projecteurs  $\Pi_-^j(\zeta)$ ,  $j \in \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{R}(\zeta)$  et  $\Pi_-^e(\zeta)$ , et donc au comportement au voisinage de  $\underline{\zeta}$  des valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . D'après la Proposition 4.1.9 il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , un entier  $L \geq 0$ , une base régulière de  $\mathbb{C}^N$  dans laquelle la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  est diagonale par blocs de la forme

$$(4.1.26) \quad \text{diag}(\mathcal{A}_-(\zeta), \mathcal{A}_+(\zeta), \mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta)),$$

où le bloc  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  (resp.  $\mathcal{A}_+(\zeta)$ ), éventuellement de taille nulle, est de partie réelle définie négative (resp. définie positive), et où les blocs  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont de type *iii*) ou *iv*) avec les notations de la Proposition 4.1.9. D'après cette proposition, les valeurs propres associées aux blocs de type *iii*) restent imaginaires pures pour  $\zeta \in \Sigma_0$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$  et donc ne contribuent pas à la partie elliptique des sous-espaces stable et instable. En revanche, les valeurs propres des blocs de type *iv*) peuvent avoir une partie réelle non nulle au voisinage de  $\underline{\zeta}$  et donc contribuer à la partie elliptique. Ainsi, au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , la partie elliptique  $\bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta)$  s'écrit comme la somme directe du sous-espace stable pour  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé au bloc  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  et des espaces propres généralisés associés aux éventuelles valeurs propres de partie réelle strictement négative des blocs  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  de type *iv*). La description détaillée de ces espaces propres constitue le point central de l'analyse ci-dessous.

Dans la base adaptée à la décomposition par blocs (4.1.26), analytique par rapport à  $\zeta \in \Sigma_0$ , on considère les premiers vecteurs associés au bloc  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  et on cherche à compléter cette famille en une base analytique du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ . On souhaite construire, au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , une détermination continue par rapport à  $\zeta$  des valeurs propres stables de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associées aux blocs  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  de type *iii*) et *iv*) (qui sont donc imaginaires pures en  $\underline{\zeta}$ ) et en déduire l'existence d'une famille libre de vecteurs propres généralisés associés qui dépende continûment de  $\zeta$ . On va pour cela suivre et adopter l'analyse de [Mét00].

Soit  $i\underline{\xi}_j$  une valeur propre imaginaire pure de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  de multiplicité algébrique  $n_j$ . Par définition de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  et avec les notations de l'Hypothèse 4.2, il existe un unique indice  $k_j$  entre 1 et  $N$  tel que

$$\underline{\tau} = \tau_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j).$$

Il y a alors deux cas possibles, suivant le degré d'annulation de la quantité  $\frac{\partial \tau_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$ . Dans le premier cas, on verra qu'il existe un prolongement régulier de la valeur propre  $i\underline{\xi}_j$  qui reste imaginaire pur pour  $\zeta \in \Sigma_0$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , et qu'il existe un projecteur régulier sur le sous-espace propre associé. Dans le second cas, la valeur propre  $i\underline{\xi}_j$  est dégénérée (i.e. n'est pas semi-simple) et se prolonge en une valeur propre continue  $i\underline{\xi}_j$ , qui, suivant où se trouve  $\zeta$  dans la voisinage de  $\underline{\zeta}$ , peut devenir de partie réelle non nulle, ou bien imaginaire pure et simple, ou bien encore rester imaginaire pure et dégénérée.

On suppose donc dans un premier temps que

$$\frac{\partial \tau_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \neq 0,$$

c'est-à-dire que  $(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$  est rentrant ou sortant. On sait que, pour  $(\zeta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ , d'après l'Hypothèse 4.2,

$$(4.1.27) \quad \det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = \det(A_d(0))^{-1} i^N \det L(0, (\zeta, \xi)) = (\tau - \tau_{k_j}(\eta, \xi)) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ . Puisque  $\frac{\partial \tau_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ , d'après le théorème de préparation de Weierstrass [Hör90], il existe une unique fonction analytique réelle  $\xi_j$  définie au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$  vérifiant  $\xi_j(\underline{\zeta}) = \underline{\xi}_j$  et telle qu'au voisinage de  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)$  dans  $\Sigma_0 \times \mathbb{R}$  on ait

$$(4.1.28) \quad \tau - \tau_{k_j}(\eta, \xi) = (\xi - \xi_j(\zeta)) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ . Ainsi dans un voisinage de  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)$  dans  $\Sigma_0 \times \mathbb{R}$  on a

$$\det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = (\xi - \xi_j(\zeta)) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$  et donc dans un voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ ,  $i\xi_j(\zeta)$  est une valeur propre (analytique en  $\zeta$ ) de  $\mathcal{A}(\zeta)$  de multiplicité algébrique 1. D'autre part d'après l'égalité (4.1.28), on a  $\tau = \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$  et ainsi

$$\mathcal{A}(\zeta) \pi_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta)) = i\xi_j(\zeta) \pi_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta)).$$

Au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ ,  $i\xi_j(\zeta)$  est donc une valeur propre de  $\mathcal{A}(\zeta)$  de multiplicité géométrique 1, et elle est donc simple. En outre le projecteur  $\pi_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$  est un projecteur analytique en  $\zeta$  sur l'espace propre de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé à  $i\xi_j(\zeta)$ . Ainsi, dans la décomposition par blocs (4.1.26), il y a un unique bloc scalaire parmi les blocs  $\mathcal{A}_l(\zeta)$  qui coïncide avec la valeur propre  $i\xi_j(\zeta)$ . Pour le cas rentrant, on obtient alors des vecteurs propres associés qui dépendent analytiquement de  $\zeta \in \Sigma_0$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , et qui contribuent au sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ .

Si maintenant  $\frac{\partial \tau_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) = 0$ , alors d'après l'Hypothèse 4.4,  $\frac{\partial^2 \tau_{k_j}}{\partial \xi^2}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$  et dans ce cas on dit que  $\underline{\xi}_j$  est *glancing*. Ainsi il existe une fonction  $e$  définie au voisinage de  $\underline{\xi}_j$  avec  $e(\underline{\xi}_j) \neq 0$  telle que pour  $\xi$  proche de  $\underline{\xi}_j$ ,

$$\tau - \tau_{k_j}(\eta, \xi) = (\xi - \xi_j)^2 e(\xi).$$

On en déduit d'après (4.1.27) que pour  $\xi$  proche de  $\underline{\xi}_j$ ,

$$\det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = (\xi - \xi_j)^2 e(\xi),$$

où  $e(\underline{\xi}_j) \neq 0$ . La multiplicité algébrique  $n_j$  de la valeur propre  $i\underline{\xi}_j$  est donc égale à 2 alors que sa multiplicité géométrique est égale à 1 puisque

$$\ker(\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - i\underline{\xi}_j I) = \ker L(0, (\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)) = \text{Im } \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j),$$

et que le projecteur  $\pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$  est de rang 1. Il nous faut donc trouver une base de l'espace propre généralisé associé à  $i\underline{\xi}_j$ , qui est de dimension 2. Par définition de la fonction analytique  $\tau_{k_j}$  et du projecteur  $\pi_{k_j}$ , on a, pour  $\xi$  proche de  $\underline{\xi}_j$ ,

$$L(0, \tau_{k_j}(\underline{\eta}, \xi), \underline{\eta}, \xi) \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \xi) = 0.$$

Si on dérive cette relation par rapport à  $\xi$ , on obtient, en  $\xi = \underline{\xi}_j$ , puisque  $\tau_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) = \tau$ ,

$$\partial_\xi \tau_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \partial_\tau L(0, \tau, \underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) + \partial_\xi L(0, \tau, \underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) + L(0, \tau, \underline{\eta}, \underline{\xi}_j) \partial_\xi \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de  $L(0, (\tau, \eta, \xi))$  et en utilisant  $\partial_\xi \tau_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) = 0$ ,

$$A_d(0) \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) + iA_d(0) (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - i\underline{\xi}_j) \frac{\partial \pi_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j) = 0.$$



Si on note  $\underline{P}_0 := \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$  et  $\underline{P}_1 := \frac{\partial \pi_{k_j}}{\partial \xi}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$  on a donc

$$(4.1.29) \quad (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - i\underline{\xi}_j)\underline{P}_1 = i\underline{P}_0.$$

On note alors  $\underline{E}_j$  un vecteur non nul de la droite vectorielle  $\text{Im } \pi_{k_j}(\underline{\eta}, \underline{\xi}_j)$ . D'après (4.1.29), on a donc,

$$(4.1.30) \quad (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - i\underline{\xi}_j)\underline{P}_1\underline{E}_j = i\underline{E}_j.$$

On vérifie alors que la famille  $\underline{E}_j, \underline{P}_1\underline{E}_j$  est une famille libre et qu'elle forme donc une base du sous-espace propre généralisé associé à  $i\underline{\xi}_j$ . Dans cette base, d'après (4.1.30), l'opérateur  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  restreint au sous-espace propre généralisé associé à  $i\underline{\xi}_j$  est donné par la matrice

$$(4.1.31) \quad Q(\underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} i\underline{\xi}_j & i \\ 0 & i\underline{\xi}_j \end{pmatrix}.$$

On a ainsi obtenu une triangularisation de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  restreinte au sous-espace propre généralisé associé à  $i\underline{\xi}_j$ , et on cherche maintenant à étendre cette structure au voisinage de  $\underline{\zeta}$  et à étudier le comportement des valeurs propres stables de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  restreinte au sous-espace propre généralisé associé à  $i\underline{\xi}_j$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . Dans [Mét00] et à l'aide d'un résultat de [Ral71], il est montré qu'il existe une famille libre  $E_j^0(\zeta), E_j^1(\zeta)$ , analytique en  $\zeta \in \Sigma$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , qui engendre un sous-espace  $F_j(\zeta)$  stable par  $\mathcal{A}(\zeta)$ , telle que  $E_j^0(\underline{\zeta}) = \underline{E}_j$  et  $E_j^1(\underline{\zeta}) = \underline{P}_1\underline{E}_j$  et telle que la restriction de  $\mathcal{A}(\zeta)$  à l'espace  $F_j(\zeta)$  soit donnée par

$$(4.1.32) \quad Q(\zeta) = i \begin{pmatrix} \underline{\xi}_j + q_1(\zeta) & 1 \\ q_2(\zeta) & \underline{\xi}_j \end{pmatrix},$$

où  $q_1(\underline{\zeta}) = q_2(\underline{\zeta}) = 0$  et où  $\frac{\partial q_2}{\partial \tau}(\underline{\zeta}) \neq 0$ . Parmi les blocs  $\mathcal{A}_l(\zeta)$  de la diagonalisation par blocs (4.1.26) de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , il y a donc un bloc de taille  $2 \times 2$  donné par  $Q(\zeta)$ .

On veut maintenant étudier les valeurs propres du bloc  $Q(\zeta)$  de taille  $2 \times 2$  ci-dessus et trouver une détermination continue de la valeur propre stable au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma$  (et non plus dans  $\Sigma_0$ ), c'est-à-dire que l'on va autoriser le paramètre de Laplace  $\gamma$  à être strictement positif. On cherche d'abord l'expression du polynôme caractéristique de  $Q(\zeta)$ . Celui-ci est de degré 2, ce qui nous permet d'obtenir une formule explicite pour les valeurs propres de  $Q(\zeta)$ . D'après (4.1.27) on sait que, au voisinage de  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)$ ,

$$\det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = (\tau - \tau_{k_j}(\eta, \xi)) e(\zeta, \xi),$$

et d'autre part d'après le théorème de préparation de Weierstrass, puisque  $\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \underline{\xi}_j) = 0$  et  $\partial_\xi^2 \tau_{k_j}(\eta, \underline{\xi}_j) \neq 0$ , il existe un couple  $(f_0, f_1)$  de fonctions analytiques réelles définies au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , vérifiant  $f_0(\underline{\zeta}) = f_1(\underline{\zeta}) = 0$  et telles que pour  $(\zeta, \xi)$  proche de  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)$ ,

$$(4.1.33) \quad \tau - \tau_{k_j}(\eta, \xi) = \left( \xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta) \right) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ . Ainsi

$$\det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = \left( \xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta) \right) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ . Or d'après la décomposition par blocs de  $\mathcal{A}(\zeta)$  on a

$$\det(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi I) = \det(Q(\zeta) - i\xi I) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$  et ainsi,

$$\xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta) = \det(Q(\zeta) - i\xi I) e(\zeta, \xi),$$

où  $e(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j) \neq 0$ . Puisque d'après (4.1.32) le polynôme en  $\xi$  donné par  $\det(Q(\zeta) - i\xi I)$  est de degré 2 et de coefficient dominant égal à  $-1$ , on obtient

$$\det(Q(\zeta) - i\xi I) = -\left(\xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta)\right).$$

Par identification, d'après (4.1.32), on note qu'on a alors  $f_1 = q_1$  et  $f_0 = \underline{\xi}_j q_1 - q_2$ .

On s'intéresse maintenant au comportement des valeurs propres de  $Q(\zeta)$ , et donc aux racines du polynôme  $\xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta)$ , pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma$ . La théorie des développements de Puiseux affirme que pour  $\gamma > 0$  petit, les valeurs propres de  $Q(\zeta)$  avec  $\zeta = (\underline{\tau} - i\gamma, \underline{\eta})$  admettent un développement de la forme

$$\xi(\zeta) = \underline{\xi}_j + \alpha_{1,2} \gamma^{1/2} + O(\gamma),$$

où les coefficients  $\alpha_{1,2}$  s'obtiennent en résolvant

$$\alpha_{1,2}^2 = i(\partial_\tau f_0(\underline{\zeta}) - \partial_\tau f_1(\underline{\zeta}) \underline{\xi}_j).$$

Or puisque  $f_1 = q_1$  et  $f_0 = \underline{\xi}_j q_1 - q_2$ , on a

$$\partial_\tau f_0(\underline{\zeta}) - \partial_\tau f_1(\underline{\zeta}) \underline{\xi}_j = -\partial_\tau q_2(\underline{\zeta}) \neq 0,$$

et donc  $\text{Im } \alpha_{1,2} = \pm c$  où  $c > 0$ . Ainsi pour  $\gamma > 0$ ,  $Q(\underline{\tau} - i\gamma, \underline{\eta})$  admet une unique valeur propre stable  $\xi_j^-(\zeta)$  (c'est-à-dire telle que  $\text{Im } \xi_j^-(\zeta) > 0$ ) et une unique valeur propre instable  $\xi_j^+(\zeta)$  (telle que  $\text{Im } \xi_j^+(\zeta) < 0$ ). On en déduit que pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ ,  $Q(\zeta)$  admet une seule valeur propre stable que l'on notera  $\xi_j(\zeta)$ . On cherche alors à prolonger continûment la valeur propre  $\xi_j$  pour  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire que l'on s'intéresse à la racine de  $\xi^2 - (2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)) \xi + \underline{\xi}_j^2 + f_0(\zeta)$  qui prolonge  $\xi_j(\zeta)$  à un voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma$ . Le comportement de ce prolongement  $\xi_j$  va alors dépendre du signe du discriminant (réel pour  $\zeta$  réel)  $\Delta_j(\zeta) := 4\underline{\xi}_j f_1(\zeta) + f_1(\zeta)^2 - 4f_0(\zeta)$  que l'on a représenté en Figure 4.4 plus bas.

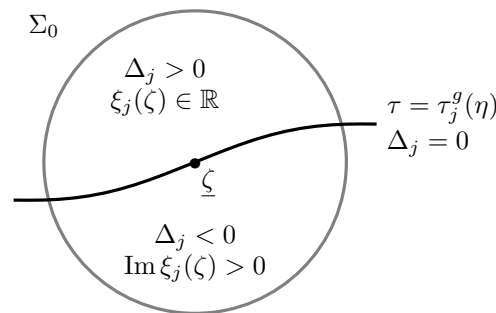


FIGURE 4.4 – Signe du discriminant  $\Delta_j(\zeta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ .

Lorsque le discriminant de ce polynôme  $\Delta_j(\zeta)$  est strictement négatif, la valeur propre  $\xi_j(\zeta)$

est nécessairement donnée par

$$\xi_j(\zeta) = \frac{2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta) + i\sqrt{4f_0(\zeta) - 4\underline{\xi}_j f_1(\zeta) - f_1(\zeta)^2}}{2},$$

puisque'elle doit être de partie imaginaire positive ou nulle. Lorsque le discriminant  $\Delta_j(\zeta)$  est nul,  $\xi_j(\zeta)$  est donnée par

$$\xi_j(\zeta) = \frac{2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta)}{2}.$$

On peut même préciser le lieu des zéros du discriminant, puisque celui-ci vérifie  $\partial_\tau \Delta_j(\underline{\zeta}) = 4(\partial_\tau f_1(\underline{\zeta}) \underline{\xi}_j - \partial_\tau f_0(\underline{\zeta})) \neq 0$ , et donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction analytique  $\tau_j^g$  définie au voisinage de  $\underline{\eta}$  qui paramètre au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$  l'ensemble des zéros du discriminant  $\Delta_j$ , voir la Figure 4.4. Enfin, lorsque le discriminant  $\Delta_j(\zeta)$  est strictement positif, il nous faut déterminer laquelle des deux racines réelles

$$(4.1.34) \quad \frac{2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta) \pm \sqrt{4\underline{\xi}_j f_1(\zeta) + f_1(\zeta)^2 - 4f_0(\zeta)}}{2},$$

étend continûment la valeur propre stable  $\xi_j(\zeta)$  lorsque  $\gamma = 0$ . Si  $\xi_j(\zeta)$  désigne la valeur propre recherchée jusqu'en  $\gamma = 0$ , et si on note  $\zeta = (\sigma, \eta) := (\tau - i\gamma, \eta)$ , puisque  $\xi_j(\zeta)$  est réelle lorsque  $\gamma = 0$  et que  $\text{Im } \xi_j(\zeta) > 0$  lorsque  $\gamma > 0$ , il est nécessaire que

$$\frac{\partial \text{Im } \xi_j}{\partial \text{Im } \sigma} \Big|_{\gamma=0} \leq 0,$$

et donc d'après les équation de Cauchy-Riemann, il est nécessaire que

$$\partial_\tau (\text{Re } \xi_j) \Big|_{\gamma=0} \leq 0.$$

Ainsi, si  $\partial_\tau f_0(\underline{\zeta}) - \partial_\tau f_1(\underline{\zeta}) \underline{\xi}_j > 0$ , c'est la racine réelle

$$\frac{2\underline{\xi}_j + f_1(\zeta) + \sqrt{4\underline{\xi}_j f_1(\zeta) + f_1(\zeta)^2 - 4f_0(\zeta)}}{2}$$

qui étend continûment la valeur propre stable  $\xi_j(\zeta)$  lorsque  $\gamma = 0$ , et dans le cas contraire c'est l'autre racine qu'il est nécessaire de considérer. On a ainsi obtenu une détermination continue de la valeur propre stable  $\xi_j(\zeta)$  de la matrice  $Q(\zeta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . On remarque maintenant qu'un vecteur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} \underline{\xi}_j + q_1(\zeta) & 1 \\ q_2(\zeta) & \underline{\xi}_j \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre  $\xi_j(\zeta)$  s'écrit  $\left(1, \frac{q_2(\zeta)}{\xi_j(\zeta) - \underline{\xi}_j}\right)$ . On obtient donc, à l'aide de la famille libre  $E_j^0(\zeta), E_j^1(\zeta)$ , un vecteur propre de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associé à la valeur propre stable  $i\xi_j(\zeta)$  continu par rapport à  $\zeta^1$ .

En résumé, au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , la valeur propre dégénérée et imaginaire pure  $i\underline{\xi}_j$  se prolonge de manière continue en une valeur propre stable  $i\xi_j(\zeta)$  dont le comportement dépend

---

1. Puisque  $\xi_j(\zeta)$  est racine du polynôme  $\xi^2 - (2\underline{\xi}_j + q_1(\zeta))\xi + \underline{\xi}_j^2 + \underline{\xi}_j q_1(\zeta) - q_2(\zeta)$  d'après l'identification  $f_1 = q_1$  et  $f_0 = \underline{\xi}_j q_1 - q_2$ , on a  $\frac{q_2(\zeta)}{\xi_j(\zeta) - \underline{\xi}_j} = \xi_j(\zeta) - \underline{\xi}_j - q_1(\zeta)$ . Ainsi on a bien  $\frac{q_2(\zeta)}{\xi_j(\zeta) - \underline{\xi}_j} \xrightarrow{\zeta \rightarrow \underline{\zeta}} 0$ , et le vecteur propre considéré dépend bien continûment de  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$

du signe du discriminant  $\Delta_j(\zeta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , qui a été représenté en Figure 4.4. Si  $\Delta_j(\zeta)$  est strictement négatif, alors  $i\xi_j(\zeta)$  est de partie réelle strictement négative et la valeur propre  $i\xi_j(\zeta)$  contribue donc à la partie elliptique du sous-espace stable  $E_-(\zeta)$ . Si  $\Delta_j(\zeta)$  est strictement positif, alors  $i\xi_j(\zeta)$  est une valeur propre imaginaire pure et simple de  $\mathcal{A}(\zeta)$  et contribue donc à un espace  $E_-^l(\zeta)$  avec  $l$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ . Enfin si  $\Delta_j(\zeta)$  est nul, la valeur propre  $i\xi_j(\zeta)$  reste imaginaire pure et dégénérée et contribue donc à un espace  $E_-^l(\zeta)$  avec  $l$  dans  $\mathcal{G}(\zeta)$ .

On note maintenant  $i\underline{\xi}_l$ ,  $l = 1, \dots, r$  les valeurs propres réelles rentrantes et  $i\underline{\xi}_l$ ,  $l = r + 1, \dots, r + g$  les valeurs propres réelles glancing de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$ . Avec les notations du début de la preuve, on a donc trouvé des prolongements continus  $i\xi_l$ ,  $l = 1, \dots, r + g$ , de ces valeurs propres au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . On a ainsi trouvé une détermination continue des valeurs propres stables des blocs  $\mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta)$  ainsi qu'une base continue de l'espace stable  $E_-(\zeta)$  formée de vecteurs propres généralisés de la matrice  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  ainsi que de vecteurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associés aux valeurs propres  $i\xi_l(\zeta)$  pour  $l = 1, \dots, r + g$ . On note alors  $\tilde{\Pi}_-^e(\zeta)$  le projecteur analytique de  $E_-(\zeta)$  sur l'espace stable associé au bloc elliptique  $\mathcal{A}_-(\zeta)$ , et, pour  $l = 1, \dots, r + g$ ,  $\tilde{\Pi}_-^l(\zeta)$  le projecteur continu de  $E_-(\zeta)$  sur l'espace propre associé à  $i\xi_l(\zeta)$ . Puisque ces projecteurs sont continus par rapport à  $\zeta$  dans un voisinage de  $\underline{\zeta}$ , on peut les supposer bornés sur ce même voisinage.

Si  $l = 1, \dots, r$ , la valeur propre  $i\xi_l(\zeta)$  est imaginaire pure et simple au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , et donc, pour tout  $\zeta$ , le projecteur  $\tilde{\Pi}_-^l(\zeta)$  contribue à un projecteur  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour un certain  $j$  (qui dépend de  $\zeta$ ) dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ . Si  $l = r + 1, \dots, r + g$ , alors la valeur propre  $i\xi_l(\zeta)$  peut, suivant le signe de  $\Delta_l$ , être imaginaire pure et simple, imaginaire pure et dégénérée, ou encore de partie réelle non nulle, et donc suivant où se trouve  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , le projecteur  $\tilde{\Pi}_-^l(\zeta)$  contribue à  $\Pi_-^e(\zeta)$  (lorsque  $\Delta_l < 0$ ), à  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour un certain  $j$  dans  $\mathcal{G}(\zeta)$  (lorsque  $\Delta_l = 0$ ) ou à  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour un certain  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$  (lorsque  $\Delta_l > 0$ ). Le projecteur  $\tilde{\Pi}_-^e(\zeta)$  contribue quant à lui toujours à  $\Pi_-^e(\zeta)$ .

On cherche maintenant à décrire explicitement les projecteurs  $\Pi_-^e(\zeta)$  et  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour  $j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{G}(\zeta)$ . Pour simplifier l'écriture, on suppose que parmi les valeurs propres imaginaires pures  $i\underline{\xi}_j$ , il en existe une seule qui soit glancing, c'est-à-dire que  $g = 1$ . L'expression de ces projecteurs dépend de si la valeur propre  $i\xi_{r+1}(\zeta)$  est rentrante, glancing, ou de partie réelle strictement négative, et donc de l'endroit du voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans lequel on se place, comme représenté en Figure 4.4. Si  $\zeta$  appartient à la partie du voisinage de  $\underline{\zeta}$  telle que  $\Delta_{r+1}(\zeta) > 0$ , alors la valeur propre  $i\xi_{r+1}(\zeta)$  est rentrante et donc  $\mathcal{R}(\zeta)$  est de cardinal  $r + 1$  et  $\mathcal{G}(\zeta)$  est vide. Dans ce cas on a alors, pour tout indice  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ ,

$$\Pi_-^j(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^l(\zeta),$$

pour un certain  $l$  entre 1 et  $r + 1$ , et

$$\Pi_-^e(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^e(\zeta).$$

Si  $\zeta$  est, dans le voisinage de  $\underline{\zeta}$ , sur l'hypersurface définie par  $\Delta_{r+1} = 0$ , alors  $i\xi_{r+1}(\zeta)$  est glancing et dans ce cas  $\mathcal{R}(\zeta)$  est de cardinal  $r$  et  $\mathcal{G}(\zeta)$  est de cardinal 1. On a alors, pour tout indice  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ ,

$$\Pi_-^j(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^l(\zeta),$$

pour un certain  $l$  entre 1 et  $r$ , pour l'indice  $j$  de  $\mathcal{G}(\zeta)$ ,

$$\Pi_-^j(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^{r+1}(\zeta),$$

et

$$\Pi_-^e(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^e(\zeta).$$

Enfin, si  $\zeta$  se trouve dans la partie du voisinage de  $\underline{\zeta}$  telle que  $\Delta_j(\zeta) < 0$ , alors  $i\xi_{r+1}(\zeta)$  est de partie réelle strictement négative et contribue donc à la partie elliptique de  $E_-(\zeta)$ . Ainsi  $\mathcal{R}(\zeta)$  est de cardinal  $r$ ,  $\mathcal{G}(\zeta)$  est vide et le prolongement de la valeur propre dégénérée  $i\xi_{r+1}(\zeta)$  contribue à

la partie elliptique. Dans ce cas on a, pour tout indice  $j$  dans  $\mathcal{R}(\zeta)$ ,

$$\Pi_-^j(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^l(\zeta),$$

pour un certain  $l$  entre 1 et  $r$ , et

$$\Pi_-^e(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^e(\zeta) + \tilde{\Pi}_-^{r+1}(\zeta).$$

Ainsi, puisque les projecteurs  $\tilde{\Pi}_-^l(\zeta)$ ,  $l = 1, \dots, r+1$  et  $\tilde{\Pi}_-^e(\zeta)$  sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , on en déduit que les projecteurs  $\Pi_-^e(\zeta)$  et  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour  $j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{G}(\zeta)$  sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , ce qui conclut la démonstration de la Proposition 4.1.21.

Dans le cas général où il y a plusieurs valeurs propres  $i\xi_l$  glancing (c'est-à-dire où  $g \geq 1$ ), on peut encore calculer les projecteurs  $\Pi_-^e(\zeta)$  et  $\Pi_-^j(\zeta)$  pour  $j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{G}(\zeta)$  en fonction des projecteurs  $\tilde{\Pi}_-^l(\zeta)$ ,  $l = 1, \dots, r+g$  et  $\tilde{\Pi}_-^e(\zeta)$ . Puisqu'on aura besoin de l'expression de  $\Pi_-^e(\zeta)$  dans la preuve de la Proposition 4.5.16 ci-dessus, on la donne ici. On a, pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ ,

$$(4.1.35) \quad \Pi_-^e(\zeta) = \tilde{\Pi}_-^e(\zeta) + \sum_{j=r+1}^{r+g} \mathbf{1}_{\Delta_j(\zeta) < 0} \tilde{\Pi}_-^j(\zeta).$$

□

L'Hypothèse 4.4 nous permet également de montrer le résultat suivant, qui suit le Lemme 4.1.15, et établit un contrôle minorant sur la composante normale des vitesses de groupe, et donc sur le vecteur  $\tilde{\pi}_\alpha E_k(\eta, \xi)$  pour tout  $\alpha = (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$ , en fonction de la distance de  $(\tau_k(\eta, \xi), \eta)$  à l'ensemble glancing  $\mathcal{G}$ .

**Lemme 4.1.22.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $\alpha = (\tau, \eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}$  est une fréquence caractéristique réelle, et si  $k$  entre 1 et  $N$  est tel que  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ , alors on a*

$$|\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)| \geq C \frac{\text{dist}((\tau, \eta), \mathcal{G})^{1/2}}{|\tau, \eta|^{1/2}}.$$

Avec le Lemme 4.1.15, on peut donc en déduire l'estimation

$$(4.1.36) \quad |\tilde{\pi}_\alpha E_k(\eta, \xi)| \geq C \frac{\text{dist}((\tau, \eta), \mathcal{G})^{1/2}}{|\tau, \eta|^{1/2}}.$$

*Preuve.* On commence par s'intéresser à la première inégalité, que l'on montre par compacité en utilisant l'homogénéité de degré 0 de  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  et de degré 1 de la distance. On se place donc sur la sphère  $\Sigma_0$ , et on pose, pour  $\zeta$  dans  $\Sigma_0$ ,

$$m_g(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{sp}(\mathcal{A}(\zeta)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset, \\ \min_{\substack{j \in \mathcal{G}(\zeta) \cup \\ \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{S}(\zeta)}} |\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))| & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\text{sp}(\mathcal{A}(\zeta))$  désigne le spectre de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ , et où les notations  $k_j$  et  $\xi_j(\zeta)$  ont été introduites dans la Proposition 4.1.16. On va montrer en utilisant la compacité de la sphère  $\Sigma_0$  que  $m_g$  vérifie

$$(4.1.37) \quad m_g(\zeta) \geq C \text{dist}(\zeta, \mathcal{G})^{1/2},$$

pour tout  $\zeta$  dans  $\Sigma_0$ , où  $C > 0$  est une constante fixée convenablement. On se donne donc

$\underline{\zeta} := (\underline{\tau}, \underline{\eta})$  dans  $\Sigma_0$ , et on montre qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  sur lequel l'inégalité (4.1.37) précédente est vérifiée.

On reprend les résultats de la preuve de la Proposition 4.1.21 dans laquelle on a construit une détermination continue des valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$  pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . La preuve s'attachait à décrire les valeurs propres stables, mais peut s'étendre à toutes les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . On note  $i\underline{\xi}_j$  les valeurs propres imaginaires pures de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$ . Si la valeur propre imaginaire pure  $i\underline{\xi}_j$  n'est pas glancing, la preuve de la Proposition 4.1.21 nous fournit au voisinage de  $\underline{\zeta}$  un prolongement continu  $i\underline{\xi}_j(\zeta)$ , valeur propre de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Si  $i\underline{\xi}_j$  est glancing, on obtient alors, au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , deux valeurs propres continues  $i\underline{\xi}_j^-(\zeta)$  et  $i\underline{\xi}_j^+(\zeta)$  qui prolongent  $i\underline{\xi}_j$ , et sont éventuellement confondues (lorsqu'elles sont glancing). Enfin, la structure de blocs (voir Proposition 4.1.9) et la Proposition 4.1.21 nous fournit une base de  $\mathbb{C}^N$  dans laquelle la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  est, au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , diagonale par blocs, avec un bloc  $\mathcal{A}_\pm(\zeta)$  dont les valeurs propres sont toutes de partie réelle non nulle, et des blocs scalaires correspondant aux valeurs propres  $i\underline{\xi}_j(\zeta)$ . Trois cas sont alors à distinguer.

- Les valeurs propres de  $\mathcal{A}_\pm(\zeta)$  sont toutes de partie réelle non nulle au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , et ne contribuent donc pas à  $m_g(\zeta)$ .
- Si  $i\underline{\xi}_j$  est imaginaire pure et  $\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\underline{\tau}, \underline{\eta})) \neq 0$ , c'est-à-dire si la fréquence caractéristique  $\alpha_j(\underline{\zeta})$  est rentrante ou sortante, alors on a montré que la valeur propre  $i\underline{\xi}_j(\zeta)$  est encore rentrante ou sortante au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . De plus d'après l'équation (4.1.28) que l'on dérive par rapport à  $\xi$  et évalue en  $\xi = \xi_j(\zeta)$ , on a, pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ ,

$$\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta)) = -e(\eta, \xi_j(\zeta)),$$

où  $e$  est une fonction analytique ne s'annulant pas en  $\underline{\zeta}$ , et qui est donc uniformément minorée au voisinage de  $(\underline{\zeta}, \xi_j(\underline{\zeta}))$ . Ainsi, pour  $\zeta$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , on a

$$|\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))| \geq C,$$

avec  $C > 0$ .

- Enfin, si  $i\underline{\xi}_j$  est glancing, c'est-à-dire si  $i\underline{\xi}_j$  est imaginaire pure et  $\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j) = 0$ , alors  $i\underline{\xi}_j$  est prolongé par deux valeurs propres  $i\underline{\xi}_j^\pm(\zeta)$ , donc le comportement dépend de la position de  $\zeta$  dans le voisinage de  $\underline{\zeta}$ , voir Figure 4.4. Si  $\zeta$  est tel que  $\Delta_j(\zeta) < 0$ , où  $\Delta_j(\zeta)$  est le discriminant du polynôme caractéristique du bloc  $2 \times 2$  associé à la valeur propre glancing, alors les deux valeurs propres  $i\underline{\xi}_j^\pm(\zeta)$  sont de partie réelle non nulle, et donc ne contribuent pas à  $m_g(\zeta)$ . Si maintenant  $\Delta_j(\zeta) = 0$ , alors  $\xi_j^-(\zeta) = \xi_j^+(\zeta)$  et la fréquence caractéristique  $(\zeta, \xi_j^\pm(\zeta))$  est glancing, et donc l'inégalité (4.1.37) est trivialement vérifiée. Enfin, si  $\Delta_j(\zeta) > 0$ , alors les deux valeurs propres distinctes  $i\underline{\xi}_j^\pm(\zeta)$  sont imaginaires pures, et contribuent donc à  $m_g(\zeta)$ . D'après la relation (4.1.33), que l'on dérive par rapport à  $\xi$  et que l'on évalue en  $\xi = \xi_j^+(\zeta)$ , on a, pour  $\zeta = (\tau, \eta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ ,

$$\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j^+(\zeta)) = 2(f_1(\zeta)/2 + \xi_j - \xi_j^+(\zeta)) e(\zeta, \xi_j^+(\zeta)),$$

où  $e$  est une fonction analytique ne s'annulant pas en  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}_j)$ . D'après l'expression (4.1.34) des racines  $\xi_j^\pm(\zeta)$ , on a donc

$$\partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j^+(\zeta)) = \pm \sqrt{\Delta_j(\zeta)} e(\zeta, \xi_j^+(\zeta)).$$

Or, d'après la preuve de la Proposition 4.1.21 précédente, on peut écrire, pour  $\zeta = (\tau, \eta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$ ,

$$\Delta_j(\zeta) = (\tau - \tau_j^g(\eta)) e(\zeta),$$

où  $e$  est une fonction analytique ne s'annulant pas en  $\underline{\zeta}$  et où la fonction  $\tau_j^g$  paramètre la

surface d'annulation de  $\Delta_j$ . On a donc finalement,

$$\left| \partial_\xi \tau_{k_j}(\eta, \xi_j^+(\zeta)) \right| \geq C \left| \tau - \tau_j^g(\eta) \right|^{1/2} = C \left| (\tau, \eta) - (\tau_j^g(\eta), \eta) \right|^{1/2} \geq C \text{dist}(\zeta, \mathcal{G})^{1/2},$$

puisque la fréquence  $(\tau_j^g(\eta), \eta)$  est glancing par construction de  $\tau_j^g$ . Le même raisonnement peut être appliqué à la valeur propre  $i \xi_j^-(\zeta)$ .

Quitte à réduire la constante  $C$ , on a montré l'existence d'un voisinage  $\mathcal{V}$  sur lequel l'inégalité (4.1.37) est vérifiée. On peut donc conclure par compacité de la sphère  $\Sigma_0$  et par homogénéité.

La deuxième inégalité du Lemme 4.1.22 s'obtient immédiatement en utilisant le résultat du Lemme 4.1.15.  $\square$

## 4.2 Cadre fonctionnel

### 4.2.1 Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine

Pour définir le cadre fonctionnel qui sera utilisé, il nous faut déterminer quelles fréquences peuvent a priori se trouver dans la solution de (4.1.1). Pour une discussion détaillée de cette question, on renvoie à [Rau12, Chapitres 9 et 10] et [MA88]. La présence au bord des fréquences  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  crée, par interaction non-linéaire, le groupe de fréquences au bord

$$(4.2.1) \quad \mathcal{F}_b := \zeta_1 \mathbb{Z} + \dots + \zeta_m \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^d.$$

On fait alors l'hypothèse que ce groupe ne rencontre pas de point glancing, introduit dans la Définition 4.1.18. Cette hypothèse se retrouve souvent dans la littérature, afin d'éviter les difficultés créées par les modes glancing, voir par exemple [CG10; CGW11].

**Hypothèse 4.5.** *On a*

$$(\mathcal{F}_b \setminus \{0\}) \cap \mathcal{G} = \emptyset,$$

*c'est-à-dire, avec les notations de la Proposition 4.1.16, que pour tout  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , l'ensemble  $\mathcal{G}(\zeta)$  des indices  $j$  entre 1 et  $\mathcal{M}(\zeta)$  tels que la fréquence caractéristique  $(\zeta, \xi_j(\zeta))$  est glancing, est un ensemble vide.*

Il faut cependant prendre garde que malgré l'Hypothèse 4.5, l'ensemble  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  peut contenir des fréquences arbitrairement proches de l'ensemble  $\mathcal{G}$  des fréquences glancing, c'est à dire des fréquences  $\zeta$  admettant un relèvement à l'intérieur du domaine  $\alpha = (\tau_k(\eta, \xi), \eta, \xi)$  dont la vitesse de groupe dans la direction  $x_d$  donnée par  $-\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  est arbitrairement proche de zéro. Ce phénomène est bien illustré dans l'Exemple 4.2.1 des équations d'Euler isentropique compressible en dimension 2 décrit plus bas. Dans la suite, il nous faudra aussi contrôler, pour  $\zeta$  dans le groupe  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , les projecteurs  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)$  définis pour  $\zeta$  non glancing, et dont la norme augmente lorsque  $\zeta$  se rapproche de l'ensemble glancing  $\mathcal{G}$ . C'est pourquoi l'on fait une hypothèse de petits diviseurs, qui contrôle la distance entre  $\zeta$  dans  $\mathcal{F}_b$  et  $\mathcal{G}$  pour  $\zeta$  grand, qui nous permet d'obtenir notamment la Proposition 4.5.16 plus bas.

**Hypothèse 4.6.** *Il existe un réel  $a_1$  et une constante  $c > 0$  tels que pour tout  $\zeta$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , on a*

$$\text{dist}(\zeta, \mathcal{G}) \geq c |\zeta|^{-a_1}.$$

On note que l'Hypothèse 4.5 est une conséquence de l'Hypothèse 4.6, et pourrait donc être omise. On choisit cependant de conserver les deux puisqu'elles jouent des rôles différents dans les preuves. Cette dernière hypothèse est relativement peu usuelle, et joue un rôle technique dans les preuves.

Puisque l'opérateur  $L(0, \partial_z)$  est hyperbolique, les fréquences au bord  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  sont ensuite relevées à l'intérieur du domaine en des fréquences  $(\zeta, \xi)$ . On verra que les conditions de polarisation

pour le profil principal annulent les profils associés à des fréquences non caractéristiques à l'ordre principal. Ainsi, puisque l'on cherche une solution bornée, les fréquences créées pour le profil principal à cette étape sont les relèvements de fréquences au bord en des fréquences caractéristiques rentrantes et évanescentes. On utilise ici l'Hypothèse 4.5 pour exclure la possibilité d'obtenir une fréquence réelle  $(\zeta, \xi_j(\zeta))$  glancing, c'est-à-dire avec  $j \in \mathcal{G}(\zeta)$ . On a donc obtenu à ce stade pour le profil principal l'ensemble de fréquences  $\{0\} \cup \mathcal{F}^{\text{in}} \cup \mathcal{F}^{\text{ev}}$  où les ensembles  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  et  $\mathcal{F}^{\text{ev}}$  sont donnés par

(4.2.2)

$$\mathcal{F}^{\text{in}} := \left\{ (\zeta, \xi_j(\zeta)), \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \right\}, \quad \mathcal{F}^{\text{ev}} := \left\{ (\zeta, \xi_j(\zeta)), \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{P}(\zeta) \right\}.$$

Sauf cas exceptionnels, le groupe engendré par  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  n'est pas finiment engendré, ce qui nous impose un cadre presque-périodique pour la variable normale rapide.

On s'intéresse maintenant aux résonances à l'intérieur du domaine. Par interaction non-linéaire, deux fréquences  $\alpha_{j_p}(\zeta_p) = (\zeta_p, \xi_{j_p}(\zeta_p))$  et  $\alpha_{j_q}(\zeta_q) = (\zeta_q, \xi_{j_q}(\zeta_q))$  de  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  peuvent résonner pour donner une fréquence caractéristique  $\alpha_{j_r}(\zeta_r) = (\zeta_r, \xi_{j_r}(\zeta_r))$  de la manière suivante :

$$n_p \alpha_{j_p}(\zeta_p) + n_q \alpha_{j_q}(\zeta_q) = n_r \alpha_{j_r}(\zeta_r), \quad n_p, n_q, n_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Si l'indice  $j_r$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}(\zeta_r)$ , c'est-à-dire si  $\alpha_{j_r}(\zeta_r)$  est une fréquence caractéristique réelle sortante, une nouvelle fréquence à l'intérieur du domaine est ainsi créée, qui n'appartenait pas au premier ensemble  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  défini ci-dessus. On fait l'hypothèse simplificatrice que cela n'arrive pas, et qu'il n'y a donc aucune fréquence caractéristique sortante créée au travers d'un triplet résonant. Plus précisément, on suppose que les fréquences rentrantes et les fréquences sortantes ne résonnent pas entre-elles. On définit l'ensemble des fréquences sortantes  $\mathcal{F}^{\text{out}}$  comme

$$(4.2.3) \quad \mathcal{F}^{\text{out}} := \left\{ (\zeta, \xi_j(\zeta)), \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{S}(\zeta) \right\}.$$

**Hypothèse 4.7.** *i) Il n'existe pas de couple  $(\alpha_p, \alpha_q)$  de fréquences réelles rentrantes dans  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  et de couple d'entiers relatifs  $(n_p, n_q)$  tels que la fréquence*

$$n_p \alpha_p + n_q \alpha_q$$

*soit caractéristique réelle sortante.*

*ii) Il n'existe pas de couple  $(\alpha_p, \alpha_q)$  de fréquences réelles sortantes dans  $\mathcal{F}^{\text{out}}$  et de couple d'entiers relatifs  $(n_p, n_q)$  tels que la fréquence*

$$n_p \alpha_p + n_q \alpha_q$$

*soit caractéristique réelle rentrante.*

C'est une hypothèse forte, qui, à notre connaissance, ne se trouve pas dans la littérature antérieure. Celle-ci assure qu'il n'y a pas de modes sortants dans le profil principal du développement. Dans [CGW11] par exemple, il n'est pas fait ce type d'hypothèse, mais puisqu'il n'y a qu'une fréquence au bord, il existe un nombre fini de résonances, contrairement à notre cas. Quand il existe des modes sortants, ceux-ci sont couplés avec les modes rentrants via les traces au bord. Ceci pose un problème puisqu'il semble que le cadre fonctionnel adapté aux modes sortants, conçu pour une évolution en temps, est très différent de celui pour les modes rentrants, adapté à une propagation par rapport à la variable normale. Cela complique aussi le processus itératif utilisé pour construire une solution. On choisit ici de se concentrer plutôt sur la construction d'un cadre fonctionnel adapté aux modes rentrants qui nous permette de résoudre le problème.

On remarque que si trois fréquences caractéristiques réelles  $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r$  résonnent comme

$$n_p \alpha_p + n_q \alpha_q = n_r \alpha_r, \quad n_p, n_q, n_r \in \mathbb{Z},$$



alors d'après l'hypothèse précédente, les trois fréquences  $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r$  sont soit toutes rentrantes soit toutes sortantes. D'autre part, en dépit de l'Hypothèse 4.7, il peut y avoir une infinité de résonances entre les fréquences rentrantes, comme c'est le cas dans l'Exemple 4.2.1 des équations d'Euler compressible isentropique en dimension 2.

À ce stade, pour qu'une nouvelle fréquence soit créée à partir de  $\mathcal{F}^{\text{in}}$ , il faut qu'il y ait une résonance entre deux fréquences de  $\mathcal{F}^{\text{in}}$ , pour donner une fréquence caractéristique réelle qui n'est pas encore dans  $\mathcal{F}^{\text{in}}$ . Les fréquences de  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  sont rentrantes, et d'après l'Hypothèse 4.7 précédente, une résonance entre deux fréquences rentrantes ne peut donner qu'une fréquence rentrante, qui est déjà dans  $\mathcal{F}^{\text{in}}$ . Il n'y a donc pas de nouvelle fréquence créée, et l'ensemble des fréquences créées par interactions non-linéaires sur le bord et relèvement à l'intérieur du domaine est donc donné par

$$(4.2.4) \quad \mathcal{F} := \{0\} \cup \left\{ \alpha_j(\zeta), \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{R}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \right\}.$$

On s'attend à ce que la solution de (4.1.1) présente, pour le profil principal, toutes les fréquences de  $\mathcal{F}$  créées par relèvement. Cela nous invite à considérer en toute généralité toutes les fréquences de  $\mathcal{F}$ . Or il semble peu vraisemblable, hors cas exceptionnels, que le groupe engendré par  $\mathcal{F}$  puisse être finiment engendré, ce qui exclut a priori de chercher un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  sous la forme de fonctions quasi-périodiques. En suivant [JMR95] et [CGW11] ensuite, on adopte cependant un cadre de fonctions quasi-périodiques pour les variables rapides tangentielles, et l'on considère un cadre de fonctions presque-périodiques pour la variable rapide normale. C'est l'objet de la partie suivante qui définit le cadre fonctionnel que l'on considère dans notre analyse. On conclut cette partie en vérifiant, pour l'Exemple 4.1.1 des équations d'Euler isentropique compressible en dimension 2, les différentes hypothèses et assertions que l'on a faites dans cette partie.

*Exemple 4.2.1.* On reprend les notations de l'Exemple 4.1.1 et de ceux qui ont suivi. Les Hypothèses 4.5, 4.6 et 4.7 portent sur l'ensemble de fréquences au bord  $\mathcal{F}_b$ , il nous faut donc nous donner pour l'Exemple 4.1.1 des fréquences au bord adéquates. On considère, pour simplifier les calculs, deux fréquences au bord  $\zeta^1$  et  $\zeta^\delta$  données par  $\zeta^1 := (c_0 \eta_0, \eta_0)$  et  $\zeta^\delta := (c_0 \delta \eta_0, \eta_0)$ , avec  $\eta_0 > 0$  et  $\delta$  un irrationnel strictement plus grand que 1, de sorte que  $\zeta^1$  et  $\zeta^\delta$  sont dans la zone hyperbolique  $\mathcal{H}$ . On rappelle que  $c_0 = c(v_0) > 0$  désigne la vitesse du son et que l'état d'équilibre  $V_0 = (v_0, 0, u_0)$  vérifie  $0 < u_0 < c_0$ . Le réseau de fréquences au bord  $\mathcal{F}_b$  est donné dans cet exemple par

$$\mathcal{F}_b = \left\{ (c_0 \eta_0 (p + \delta q), \eta_0 (p + q)) \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On note, pour  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\zeta_{p,q} := (\tau_{p,q}, \eta_{p,q}) := (c_0 \eta_0 (p + \delta q), \eta_0 (p + q))$  la fréquence de  $\mathcal{F}_b$  donnée par  $p \zeta^1 + q \zeta^\delta$ .

Une fréquence  $\zeta_{p,q}$  non nulle est glancing si et seulement si  $|\tau_{p,q}| = \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$ , c'est-à-dire si et seulement si<sup>2</sup>

$$(4.2.5) \quad \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 - \sqrt{1 - M^2}}, \frac{-\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 + \sqrt{1 - M^2}} \right\}.$$

On a noté  $M$  le nombre de Mach donné par  $M := u_0/c_0$  compris strictement entre 0 et 1. Si les réels

$$(4.2.6) \quad K_- := \frac{\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 - \sqrt{1 - M^2}} \quad \text{et} \quad K_+ := \frac{-\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 + \sqrt{1 - M^2}}$$

sont irrationnels, il n'existe alors pas de relation du type (4.2.5), et donc il n'existe pas de

---

2. Si  $q = 0$ , alors d'après la relation  $|\tau_{p,q}| = \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$ , on a  $p^2 = (1 - u_0^2/c_0^2) p^2$  et donc  $p$  est également nul, c'est-à-dire que la fréquence  $\zeta_{p,q}$  est nulle, ce qui est exclu par hypothèse.

	$p/q > K_+$	$K_+ > p/q > -\delta$	$p/q < -\delta$
$q > 0$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone hyperbolique $\mathcal{H}$ avec $\tau_{p,q} > 0$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone mixte $\mathcal{EH}$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone hyperbolique $\mathcal{H}$ avec $\tau_{p,q} < 0$
$q < 0$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone hyperbolique $\mathcal{H}$ avec $\tau_{p,q} < 0$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone mixte $\mathcal{EH}$	$\zeta_{p,q}$ est dans la zone hyperbolique $\mathcal{H}$ avec $\tau_{p,q} > 0$

FIGURE 4.5 – Position de  $\zeta_{p,q}$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

fréquence de  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  qui soit glancing. On suppose donc que les deux réels  $K_-$  et  $K_+$  sont irrationnels, et l'Hypothèse 4.5 est alors vérifiée. On peut par exemple considérer  $M = \sqrt{3}/2$  et  $\delta > 1$  irrationnel. On résume maintenant les différents cas sur  $p, q$  et la zone dans laquelle se trouve  $\zeta_{p,q}$ . On note d'abord que l'on a  $0 > K_+ > K_- > -\delta$ . On rappelle que  $\zeta_{p,q}$  est dans la zone hyperbolique (resp. mixte elliptique-hyperbolique) si et seulement si  $|\tau_{p,q}| > \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$  (resp.  $|\tau_{p,q}| < \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$ ), et on en déduit donc la classification de la figure 4.5. On ne détaille pas les calculs qui nous ont permis de l'obtenir, mais un cas est explicité dans le paragraphe suivant.

On illustre maintenant la remarque concernant les vitesses de groupe qui suit l'Hypothèse 4.5. On se donne pour cela une suite de fréquences au bord qui se rapprochent de la zone glancing, voir la Figure 4.6. Puisque le réel  $K_+$  donné par (4.2.6) est irrationnel, il existe deux suites  $(p_k)_k$  et  $(q_k)_k$  d'entiers relatifs avec telles que pour tout  $k \geq 0$ ,  $p_k$  et  $q_k$  soient premiers entre eux,  $q_k > 0$ , et telles que

$$\frac{p_k}{q_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 + \sqrt{1 - M^2}} = K_+.$$

On note que puisque  $K_+ > K_- > -\delta$ , pour tout  $k \geq 0$ , on a  $p_k/q_k > K_- > -\delta$ , et donc d'une part on a  $p_k + \delta q_k > 0$ , et d'autre part, quel que soit le signe de  $p_k + q_k$ , on a  $p_k + \delta q_k > \sqrt{1 - M^2} |p_k + q_k|$ . Les fréquences  $\zeta_{p_k, q_k}$  sont ainsi dans la partie de la zone hyperbolique  $\mathcal{H}$  où  $\tau > 0$ , et se rapprochent de la zone glancing  $\mathcal{G}$ , voir la Figure 4.6. Puisque  $\tau_{p_k, q_k} > 0$ , d'après l'Exemple 4.1.11, la dernière composante de la vitesse de groupe associée à la fréquence à l'intérieur  $\alpha_1(\tau_{p_k, q_k}, \eta_{p_k, q_k})$  est donnée par

$$(4.2.7) \quad \partial_\xi \tau_3(\eta_{p_k, q_k}, \xi_1(\tau_{p_k, q_k}, \eta_{p_k, q_k})) \leq \sqrt{\frac{\tau_{p_k, q_k}^2 - \eta_{p_k, q_k}^2 (c_0^2 - u_0^2)}{\eta_{p_k, q_k}^2}}$$

$$(4.2.8) \quad = c_0 \sqrt{q_k \left(1 + \sqrt{1 - M^2}\right) \frac{p_k + \delta q_k - (p_k + q_k)(1 - M^2)}{(p_k + q_k)^2}} \sqrt{\frac{p_k}{q_k} - \frac{-\sqrt{1 - M^2} - \delta}{1 + \sqrt{1 - M^2}}}.$$

On remarque que la quantité sous la première racine de (4.2.8) est positive, puisque pour tout  $k \geq 0$ ,  $q_k > 0$  et  $p_k/q_k > K_-$  donc  $p_k + \delta q_k - (p_k + q_k)(1 - M^2) > 0$ . Cette quantité étant bornée, la quantité (4.2.8) tend vers 0 par construction de  $(p_k, q_k)$ . On voit donc que la vitesse de groupe normale (4.2.7) des fréquences hyperboliques  $\zeta_{p_k, q_k}$  tend vers zéro lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . La vitesse de groupe normale des fréquences hyperboliques, bien que non nulle, peut donc bien être arbitrairement proche de zéro.

On s'intéresse maintenant à l'Hypothèse 4.7 et aux résonances entre les fréquences caractéristiques réelles. On reprend les notations de l'Exemple 4.1.11, et on détermine tout d'abord que, dans la zone hyperbolique, les valeurs propres  $i \xi_1(\zeta)$ ,  $i \xi_2(\zeta)$  et  $i \xi_3(\zeta)$ , définies par (4.1.15), sont données, pour  $\zeta = \zeta_{p,q}$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , par

$$i \xi_1(\zeta_{p,q}) = i \eta_0 \frac{M(p + \delta q) + \text{sign}(p + \delta q) \sqrt{(p + q)^2 M^2 + 2pq(\delta - 1) + q^2(\delta^2 - 1)}}{1 - M^2},$$

$$i \xi_2(\zeta_{p,q}) = i \eta_0 \frac{M(p + \delta q) - \text{sign}(p + \delta q) \sqrt{(p + q)^2 M^2 + 2pq(\delta - 1) + q^2(\delta^2 - 1)}}{1 - M^2},$$

$$i \xi_3(\zeta_{p,q}) = -i \eta_0 \frac{p + \delta q}{M}.$$

Le cas de la zone glancing est exclu par hypothèse, et celui de la zone mixte elliptique-hyperbolique est inclus dans l'analyse que l'on fait maintenant, puisqu'il n'y a qu'une valeur propre imaginaire pure, qui est la valeur propre linéaire  $i \xi_3(\zeta)$ . On observe d'abord que, la valeur propre  $i \xi_3(\zeta_{p,q})$  étant linéaire, celle-ci engendre une infinité de résonances du type

$$\alpha_3(\zeta_{p,q}) + \alpha_3(\zeta_{r,s}) = \alpha_3(\zeta_{p+r,q+s}).$$

La fréquence  $\alpha_3(\zeta_{p,q})$  étant toujours rentrante, on a donc une infinité de résonances entre des fréquences rentrantes. La notation  $\alpha_{1,2}$  désigne dorénavant l'une des fréquences caractéristiques  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ . Puisque par linéarité de  $\alpha_3$ , la résonance entre deux fréquences  $\alpha_3$  et une fréquence  $\alpha_{1,2}$  est impossible, il nous reste à étudier les deux types de résonance suivants :

$$\alpha_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \alpha_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \alpha_3(\zeta_{p+r,q+s}) \quad \text{et} \quad \alpha_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \alpha_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \alpha_{1,2}(\zeta_{p+r,q+s}).$$

Pour le premier cas, cela équivaut à ce que la relation

$$(4.2.9) \quad [(p + q)^2 - (r + s)^2] M^8 + C_6(p, q, r, s, \delta) M^6 + C_4(p, q, r, s, \delta) M^4 + C_2(p, q, r, s, \delta) M^2 + (p + r + \delta q + \delta s)^2 = 0$$

soit vérifiée, où les coefficients  $C_6(p, q, r, s, \delta)$ ,  $C_4(p, q, r, s, \delta)$  et  $C_2(p, q, r, s, \delta)$  sont précisés en appendice lors du détail de l'obtention de l'équation (4.2.9). On note en particulier que l'expression de  $C_6(p, q, r, s, \delta)$  comporte le facteur  $[(p + q)^2 - (r + s)^2]$  et  $C_6(p, q, r, s, \delta)$  est donc nul si ce facteur est nul. Deux cas peuvent alors advenir, suivant si le coefficient devant  $M^8$  dans l'équation (4.2.9) est nul ou non.

- i) Soit  $(p + q)^2 - (r + s)^2 \neq 0$ , auquel cas l'équation (4.2.9) est une équation de degré 4 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$  vérifiée par  $M^2$ .
- ii) Soit  $(p + q)^2 = (r + s)^2$ , et dans ce cas  $C_6(p, q, r, s, \delta)$  est nul, et l'équation (4.2.9) est une équation de degré au plus 2 sur  $M^2$  dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ . Si une fois encore les coefficients  $C_4(p, q, r, s, \delta)$

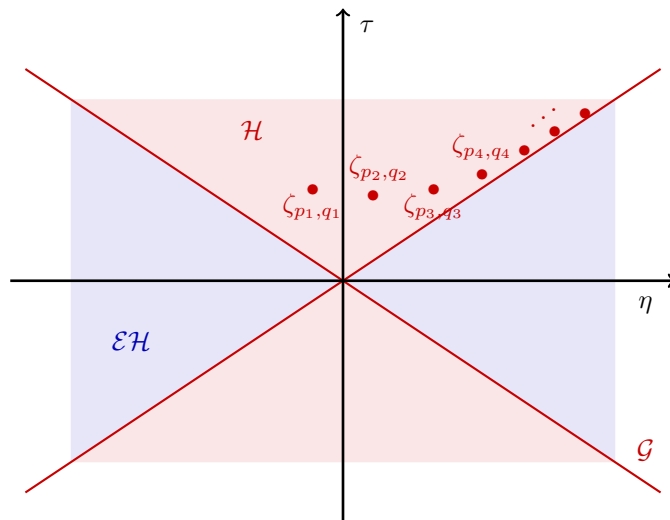


FIGURE 4.6 – Suite de fréquences approchant la zone glancing, dont la vitesse de groupe tend vers 0.

et  $C_2(p, q, r, s, \delta)$  devant  $M^4$  et  $M^2$  sont nuls, alors on obtient  $p + r + \delta q + \delta s = 0$ . On en déduit que l'on a  $r = -p$  et  $s = -q$ , c'est à dire que  $\zeta_{r,s} = -\zeta_{p,q}$ , et donc que la résonance est en fait l'auto-interaction de la fréquence  $\zeta_{p,q}$  avec elle-même pour donner la fréquence nulle. Ainsi, si  $(p + q)^2 = (r + s)^2$ , les seuls cas constituant une véritable résonance sont ceux où  $M^2$  est solution d'une équation de degré 1 ou 2 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ .

On a donc déterminé que si une résonance du premier type advient (qui ne soit pas de l'auto-interaction), alors  $M^2$  est solution d'une équation de degré inférieur ou égal à 4 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ .

Pour le deuxième type de résonance, on vérifie qu'une telle relation est vérifiée si et seulement si

$$(4.2.10) \quad (ps - qr)^2(1 - M^2)(\delta - 1)^2 = 0,$$

c'est-à-dire, puisque  $0 < M < 1$  et  $\delta > 1$ , si et seulement si les deux fréquences  $\zeta_{p,q}$  et  $\zeta_{r,s}$  sont colinéaires. On peut donc écrire  $\zeta_{p,q} = \lambda \zeta_{t,w}$  et  $\zeta_{r,s} = \mu \zeta_{t,w}$ , avec  $\zeta_{t,w}$  une fréquence hyperbolique, et  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{Z}^*$ . On vérifie alors, puisque  $\text{sign}(\lambda(t - w)) = \text{sign}(\lambda) \text{sign}(t - w)$ , que l'on a  $\xi_1(\lambda \zeta_{t,w}) = \lambda \xi_1(\zeta_{t,w})$  et  $\xi_2(\lambda \zeta_{t,w}) = \lambda \xi_2(\zeta_{t,w})$ , et de même pour les deux fréquences  $\mu \zeta_{t,w}$  et  $(\lambda + \mu) \zeta_{t,w}$ . Les deux seules résonances qui adviennent sont donc

$$\lambda \alpha_1(\zeta_{t,w}) + \mu \alpha_1(\zeta_{t,w}) = (\lambda + \mu) \alpha_1(\zeta_{t,w}) \quad \text{et} \quad \lambda \alpha_2(\zeta_{t,w}) + \mu \alpha_2(\zeta_{t,w}) = (\lambda + \mu) \alpha_2(\zeta_{t,w}),$$

qui constituent en fait de l'auto-interaction des fréquences  $\alpha_1(\zeta_{t,w})$  et  $\alpha_2(\zeta_{t,w})$  avec elles-mêmes : l'évolution des harmoniques  $\lambda$  et  $\mu$  sera couplée avec celle de l'harmonique  $\lambda + \mu$ . En particulier les trois fréquences impliquées dans la résonance sont soit toutes rentrantes soit toutes sortantes. Ainsi, si  $M^2$  n'est pas solution d'une équation de degré inférieure ou égal à 4 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ , l'Hypothèse 4.7 est vérifiée pour le système d'Euler compressible isentropique.

On s'intéresse enfin à l'Hypothèse 4.6 de petits diviseurs. On vérifie que<sup>3</sup>, suivant le signe et l'ordre de  $p, q$ , la distance entre la fréquence  $\zeta_{p,q}$  et l'ensemble glancing  $\mathcal{G}$  est donnée par

$$\text{dist}(\zeta_{p,q}, \mathcal{G}) = C \left| p + \delta q \pm \sqrt{1 - M^2}(p + q) \right| = Cq(1 \pm \sqrt{1 - M^2}) \left| \frac{p}{q} - K_{\pm} \right|.$$

Si  $p$  et  $q$  n'ont pas le même ordre de grandeur, alors il en est de même de  $p + \delta q$  et  $p + q$ , et donc la distance précédente est minorée par une constante. On peut donc supposer dans la suite que l'on a

$$(4.2.11) \quad C_1|p| \leq |q| \leq C_2|p|.$$

D'après le théorème de Roth, voir [Sch91, Théorème 2A], si les réels  $K_+$  et  $K_-$  donnés par (4.2.6) sont algébriques (et irrationnels, ce que l'on a déjà supposé), alors ils vérifient,

$$\left| K_{\pm} - \frac{p}{q} \right| \geq C |q|^{-(2+\varepsilon)},$$

pour tous  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\varepsilon > 0$ . Ainsi, pour tout  $\zeta_{p,q}$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , on a, en utilisant (4.2.11),

$$\text{dist}(\zeta_{p,q}, \mathcal{G}) \geq C|q|^{-3/2} \geq C|\zeta_{p,q}|^{-3/2},$$

et donc l'Hypothèse 4.6 est vérifiée.

---

3. En utilisant le fait que l'ensemble glancing est ici constitué de deux droites, un raisonnement géométrique élémentaire nous permet de nous rapporter à la distance selon  $\eta$  seulement, où la constante  $C$  est donnée par

$$C := \frac{\eta_0 \sin \arctan(\sqrt{c_0^2 - u_0^2})}{\sqrt{1 - M^2}}.$$

Pour que le système d'Euler compressible isentropique satisfasse les Hypothèses 4.5, 4.6 et 4.7, il suffit donc que son nombre de Mach  $M$  et le paramètre  $\delta > 1$  soient tels que  $K_+$  et  $K_-$  sont irrationnels et algébriques et que  $M^2$  n'est pas solution d'une équation de degré inférieur ou égal à 4 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ . L'ensemble des solutions de telles équations étant dénombrable, on peut se convaincre que l'ensemble des réels  $M$  entre 0 et 1 vérifiant ces deux propriétés n'est pas vide. On peut par exemple choisir  $M := \sqrt{3}/2$ , ce qui nous donne  $K_- = 1 - 2\delta$  et  $K_+ = -(1 + 2\delta)/3$ , et l'on choisit également  $\delta = \sqrt[3]{2} > 1$ . De cette façon, les réels  $K_+$  et  $K_-$  sont bien irrationnels et algébriques. D'autre part, une relation du type (4.2.9) n'est pas vérifiée, hors cas triviaux sur  $p, q, r, s^4$ , puisqu'elle constitue une équation algébrique de degré 4 en  $\delta$ , qui n'est pas algébrique de degré 4.

## 4.2.2 Espaces de profils

D'après l'analyse des fréquences pouvant intervenir dans le développement asymptotique de la solution de (4.1.1), il nous faut définir pour le profil principal un cadre fonctionnel permettant de considérer des superpositions d'ondes de la forme

$$a(z) e^{i\alpha \cdot z/\varepsilon},$$

pour  $\alpha$  une fréquence caractéristique dans  $\mathcal{F}$ . Puisque l'on choisit une description quasi-périodique pour les variables rapides tangentielles, on écrit une telle onde comme

$$a(z) e^{in_1 \zeta_1 \cdot z'/\varepsilon} \dots e^{in_m \zeta_m \cdot z'/\varepsilon} e^{i\xi x_d/\varepsilon},$$

où  $\alpha = (\zeta, \xi)$  avec  $\zeta = n_1 \zeta_1 + \dots + n_m \zeta_m \in \mathcal{F}_b$  et  $\xi \in \mathbb{C}$ . On note alors  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{T}^m$  les variables rapides tangentielles qui se substituent à  $(z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon)$  et  $\psi_d \in \mathbb{R}_+$  la variable rapide normale qui se substitue à  $x_d/\varepsilon$ .

Pour chaque entier  $s \geq 0$  et pour  $T > 0$ , on note  $H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  l'ensemble des fonctions de  $(t, y, \theta) \in \omega_T \times \mathbb{T}^m$  s'annulant pour  $t$  négatif, dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $s$  sont dans  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ .

On définit maintenant l'espace général dans lequel s'injecteront les espaces de profils oscillants et évanescents. On choisit un contrôle seulement uniforme par rapport aux variables normales lente et rapide puisque l'on verra qu'il est difficile de contrôler les dérivées du profil principal par rapport à ces deux variables.

**Définition 4.2.2.** *Pour un entier  $s \geq 0$  et pour  $T > 0$ , on définit l'espace  $\mathcal{E}_{s,T}$  comme l'ensemble des fonctions  $U$  de  $(z', x_d, \theta, \psi_d) \in \omega_T \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_+$ , continues bornées par rapport à  $(x_d, \psi_d)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et à valeurs dans  $H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ , muni de la norme évidente*

$$\|U\|_{\mathcal{E}_{s,T}} := \sup_{x_d > 0, \psi_d > 0} \|U(\cdot, x_d, \cdot, \psi_d)\|_{H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}.$$

On peut maintenant introduire l'espace des profils oscillants, correspondant aux fréquences caractéristiques réelles  $\alpha_j(\zeta)$ . On choisit ici, en suivant [JMR95], un cadre quasi-périodique en  $\theta$  et presque périodique en  $\psi_d$ , c'est-à-dire que l'on considère l'adhérence des polynômes trigonométriques en  $\psi_d$  dans l'espace  $\mathcal{E}_{s,T}$  de fonctions quasi-périodiques en  $\theta$ . On peut se reporter à l'Appendice 4.A.1 pour plus de détails sur les fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach.

**Définition 4.2.3** ([Cor09]). *On appelle polynôme trigonométrique en  $\psi_d$  toute fonction  $U$  de*

---

4. Le polynôme dont  $\delta$  est racine est de degré non nul sauf lorsque  $r = -p$  et  $s = -q$ , ce qui constitue de l'auto-interaction.

$\mathcal{E}_{s,T}$  s'écrivant comme une somme finie en des réels  $\xi$ ,

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\xi} U_{\xi}(z, \theta) e^{i\psi_d \xi},$$

avec  $U_{\xi}$  dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{x_d}^+, H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))$  pour tout  $\xi$ .

L'espace des profils oscillants  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  est alors défini comme l'adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques en  $\psi_d$  dans  $\mathcal{E}_{s,T}$ . On munit cet espace de la norme de l'espace  $\mathcal{E}_{s,T}$ .

Concernant les profils évanescents, on considère des fonctions quasi-périodiques en  $\theta'$ . Les facteurs  $e^{i\xi\psi_d}$  avec  $\text{Im } \xi > 0$  sont traduits par une décroissance exponentielle en  $\psi_d$ .

**Définition 4.2.4.** Pour  $s \geq 0$  et  $T > 0$ , l'espace  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  des profils évanescents est défini comme l'ensemble des fonctions  $U$  de  $\mathcal{E}_{s,T}$  tendant vers 0 dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  lorsque  $\psi_d$  tend vers  $+\infty$ , à  $x_d \geq 0$  fixé. L'espace  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  est muni de la norme de  $\mathcal{E}_{s,T}$ .

On peut maintenant définir l'espace des profils construits comme la somme d'une partie oscillante et d'une partie évanescence.

**Définition 4.2.5.** Pour  $T > 0$  et  $s \geq 0$ , on définit l'espace des profils  $\mathcal{P}_{s,T}$  de régularité  $s$  comme

$$\mathcal{P}_{s,T} := \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}},$$

muni de sa norme évidente. Si  $U$  appartient à  $\mathcal{P}_{s,T}$ , on note  $U^{\text{osc}} \in \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $U^{\text{ev}} \in \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  les profils tels que  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$ .

La preuve du fait que les deux espaces  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  sont en somme directe est faite plus bas, après l'introduction d'un produit scalaire utile à la démonstration.

On trouve dans [JMR95] une preuve partielle du résultat suivant, que l'on rappelle ici pour plus de clarté.

**Lemme 4.2.6** ([JMR95, Lemme 6.1.2]). Pour tout  $T > 0$  et pour  $s > (d+m)/2$ , les espaces  $\mathcal{E}_{s,T}$ ,  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ ,  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  et  $\mathcal{P}_{s,T}$  sont des algèbres normées. De plus, si  $U$  et  $V$  se décomposent dans  $\mathcal{P}_{s,T} = \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  comme  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$  et  $V = V^{\text{osc}} + V^{\text{ev}}$ , alors la partie oscillante du profil  $UV$  est donnée par  $U^{\text{osc}}V^{\text{osc}}$  et sa partie évanescence par  $U^{\text{osc}}V^{\text{ev}} + U^{\text{ev}}V^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}V^{\text{ev}}$ .

D'autre part pour  $T > 0$  et  $s \geq 0$ , les espaces  $\mathcal{E}_{s,T}$  et  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  sont des espaces de Banach.

*Preuve.* La propriété d'algèbre pour  $\mathcal{E}_{s,T}$  et  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  découle immédiatement de la propriété d'algèbre de  $H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ . Il en va de même pour  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  puisque l'ensemble des polynômes trigonométriques est stable par produit. Enfin, cette propriété d'algèbre sur  $H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  permet de montrer que si  $U$  appartient à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $V$  à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ , alors le produit  $UV$  appartient à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ , et donc l'espace  $\mathcal{P}_{s,T}$  est également une algèbre.

Les propriétés de complétude sont quant à elles évidentes.  $\square$

### 4.2.3 Produits scalaires sur l'espace des profils oscillants

On définit maintenant trois produits scalaires qui nous seront utiles dans la suite pour obtenir des estimations a priori. Cette partie est adaptée de [JMR95] au cadre des problèmes aux limites étudiés ici. On utilisera à la fois un produit scalaire où l'on fixe la variable de temps  $t$  (comme dans [JMR95], a priori adapté à l'étude du problème de Cauchy) et un produit scalaire où l'on fixe la variable de bord  $x_d$ , plus adapté à l'étude du problème au limite.

Pour  $U, V$  deux fonctions de  $\omega_T \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_+$ , on pose, lorsque c'est bien défini, pour  $x_d > 0$ ,

$$(4.2.12) \quad \langle U | V \rangle_{\text{in}}(x_d) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \langle U | V \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}(x_d, \psi_d) d\psi_d,$$

pour  $0 < t < T$ ,

$$(4.2.13) \quad \langle U | V \rangle_{\text{out}}(t) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \langle U | V \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^m)}(t, \psi_d) d\psi_d.$$

et, si  $\mathcal{K}$  est un domaine de  $\Omega_T$  borné dans la direction  $x_d$ ,

$$(4.2.14) \quad \langle U | V \rangle_{\mathcal{K}} := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \langle U | V \rangle_{L^2(\mathcal{K} \times \mathbb{T}^m)}(\psi_d) d\psi_d.$$

Le premier produit scalaire est adapté à l'étude des modes rentrants quand le deuxième l'est à l'étude des modes sortants, et le dernier produit scalaire nous servira pour montrer la propagation à vitesse finie de la partie oscillante du profil principal.

Si  $U$  et  $V$  sont des polynômes trigonométriques de  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  de la forme<sup>5</sup>

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d}, \quad V(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} V_{\mathbf{n}, \xi}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d},$$

alors le Théorème 3.4 et la Remarque 4.17 de [Cor09] nous assurent que les produits scalaires  $\langle U | V \rangle_{\text{in}}(x_d)$  et  $\langle U | V \rangle_{\mathcal{K}}$  sont bien définis et vérifient, pour  $x_d \geq 0$ ,

$$(4.2.15) \quad \langle U | V \rangle_{\text{in}}(x_d) = (2\pi)^m \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} \langle U_{\mathbf{n}, \xi} | V_{\mathbf{n}, \xi} \rangle_{L^2(\omega_T)}(x_d),$$

et

$$(4.2.16) \quad \langle U | V \rangle_{\mathcal{K}} = (2\pi)^m \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} \langle U_{\mathbf{n}, \xi} | V_{\mathbf{n}, \xi} \rangle_{L^2(\mathcal{K})}.$$

En effet, toute fonction  $U$  de  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  appartient bien à  $L^2(\mathcal{K} \times \mathbb{T}^m)$  et sa trace en  $x_d$  appartient bien à  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  pour tout  $x_d \geq 0$ . Si  $U$  et  $V$  sont de plus à supports compacts en  $x_d$  et si l'on a  $s \geq 1$ , alors la trace de  $U$  et  $V$  en  $t$  appartient bien à  $L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^m)$  et les mêmes résultats de [Cor09] nous assurent que le produit scalaire  $\langle U | V \rangle_{\text{out}}(t)$  est bien défini et vérifie, pour  $t > 0$ ,

$$(4.2.17) \quad \langle U | V \rangle_{\text{out}}(t) = (2\pi)^m \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} \langle U_{\mathbf{n}, \xi} | V_{\mathbf{n}, \xi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t).$$

En résumé, les produits scalaires (4.2.12) et (4.2.14) (resp. (4.2.13)) sont bien définis sur l'espace de profils  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ ,  $s \geq 0$  (resp. pour les profils de  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  à support compact en  $x_d$  avec  $s \geq 1$ ), et les formules (4.2.15), (4.2.16) et (4.2.17) sont vérifiées dans ce cas.

Le produit scalaire rentrant (4.2.12) nous permet de montrer le résultat suivant.

**Lemme 4.2.7.** *Pour tout  $T > 0$ , les espaces  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$  et  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{ev}}$  sont en somme directe.*

*Preuve.* On se donne un profil  $U$  dans  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}} \cap \mathcal{P}_{0,T}^{\text{ev}}$  qui s'écrit, en tant que profil oscillant,

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi} U_{\mathbf{n}, \xi}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d},$$

la somme en  $\xi$  étant dénombrable. Puisque le profil  $U$  est évanescent, pour tout  $x_d \geq 0$ , la fonction  $\psi_d \mapsto U(\cdot, x_d, \cdot, \psi_d)$  tend vers 0 dans  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  lorsque  $\psi_d$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, pour tout  $x_d \geq 0$ , on a

$$\langle U | U \rangle_{\text{in}}(x_d) = 0,$$

5. Les sommes en  $\xi$  sont nécessairement finies.

puisque la moyenne (au sens de (4.2.12)) d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$  tendant vers 0 à l'infini est nulle. Or on sait que l'on a,  $U$  étant un profil oscillant,

$$\langle U | U \rangle_{\text{in}}(x_d) = (2\pi)^m \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi} \|U_{\mathbf{n}, \xi}\|_{L^2(\omega_T)}^2(x_d),$$

et donc, pour tout  $\mathbf{n}, \xi$ , l'amplitude  $U_{\mathbf{n}, \xi}(x_d)$  est nulle dans  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ , et le profil  $U$  est donc nul.  $\square$

### 4.3 Ansatz et résultat principal

On cherche à construire une solution approchée de (4.1.1) sous la forme d'une série formelle  $u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$ , où  $u^{\varepsilon, \text{app}}$  est donnée par

$$(4.3.1) \quad u^{\varepsilon, \text{app}}(z, \theta, \psi_d) := \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k U_k(z, \theta, \psi_d),$$

avec au moins  $U_1$  dans  $\mathcal{P}_{s, T}$  pour un certain  $s \geq 0$ . Quant à eux, les correcteurs  $(U_k)_{k \geq 2}$  présentent a priori dans leur développement des combinaisons de fréquences caractéristiques qui ne sont pas forcément caractéristiques. La convergence des séries associées repose alors sur une hypothèse de petits diviseurs qui diffère de l'Hypothèse 4.6 déjà faite. C'est pourquoi l'on considère simplement des correcteurs qui sont des séries trigonométriques formelles mettant en jeu toutes les fréquences du groupe  $\langle \mathcal{F} \rangle$  engendré par l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce travail. Il se place sous les Hypothèses 4.1 à 4.7, ainsi que l'Hypothèse 4.8 que l'on sera amené à faire ensuite. On note  $h$  un entier supérieur à  $(3 - a_1)/2$  où  $a_1$  est le réel introduit dans l'Hypothèse 4.6 de petits diviseurs. On note alors  $s_0 := h + (d + m)/2$ .

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $s$  un entier tel que  $s \geq s_0$ . Sous les hypothèses listées plus haut, il existe un temps  $T > 0$  tel que le système (4.4.11) décrit plus bas et qui régit l'évolution du profil principal du développement asymptotique (4.3.1) admet comme unique solution un profil principal  $U_1$  dans  $\mathcal{P}_{s, T}$ .*

On rappelle que l'on a considéré  $G$  dans  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ , nulle pour  $t$  négatif et de moyenne nulle par rapport à  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^m$ , mais la régularité infinie est simplement simplificatrice, et les estimations, et donc le temps d'existence, ne dépendent que de la norme  $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$  de  $G$ . Plus précisément, le temps d'existence  $T$  dépend de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$ , les fréquences au bord  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , de l'ordre de régularité  $s$ , et de la norme  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  du terme de bord  $G$ .

L'étude BKW formelle de la partie suivante nous montre que la fonction

$$z \mapsto \varepsilon U_1(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$$

est, formellement, une solution approchée du système (4.1.1).

On commence par dériver formellement la cascade d'équations que doivent vérifier les amplitudes  $(U_k)_{k \geq 1}$ . En résolvant, formellement puis en partie rigoureusement, un certain problème rapide, on parvient ensuite à triangulariser cette cascade et extraire un système d'équations pour le profil principal. Après une discussion sur les différents types de résonances qui apparaissent, on réduit le système à deux systèmes découplés sur les parties oscillante et évanescence, où celui sur la partie oscillante ne porte que sur les modes rentrants. On découple même le système portant sur la partie oscillante en un système sur les modes résonants, et des systèmes découplés sur chaque mode non résonant. On montre alors des estimations a priori pour la partie oscillante sur les systèmes réduits linéarisés, qui nous permettent d'obtenir une solution de ceux-ci. De telles estimations a priori nous assure en particulier l'unicité d'une solution de (4.4.11). On



utilise ensuite un schéma itératif pour construire des solutions oscillantes au système réduits non-linéaires, et on détermine enfin la partie évanescence. La principale différence avec l'analyse conduite dans [JMR95, Partie 6], sur laquelle on s'appuie en très grande partie, est l'absence de symétrie, puisque, partant d'un problème d'évolution en temps, on se ramène ici à un problème de propagation relativement à la variable normale  $x_d$ , par rapport à laquelle le système n'est pas hyperbolique. Dans [JMR95], ces symétries sont notamment utilisées pour traiter les termes de résonances dans les estimations a priori. Pour les termes d'auto-interaction il est assez facile de faire apparaître de telles symétries, mais c'est plus délicat pour les termes de résonances, qui sont, à la différence de [CGW11], en nombre infini. L'Hypothèse 4.8, portant sur l'ensemble des résonances à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre-elles, nous permet de contourner ce problème et d'obtenir des estimations sur les termes associés. Cette hypothèse sera soigneusement vérifiée pour les équations d'Euler que l'on étudie dans ce chapitre.

## 4.4 Étude BKW formelle

### 4.4.1 Cascade d'équations pour les profils

On cherche à déterminer formellement les équations que doivent vérifier les profils  $(U_n)_{n \geq 1}$  pour que la série formelle  $z \mapsto u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1 / \varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m / \varepsilon, x_d / \varepsilon)$  donnée par (4.3.1) soit solution de (4.1.1). Dans la suite on souhaite que le coefficient (dépendant en principe de  $u^{\varepsilon, \text{app}}$ ) en facteur de la dérivée partielle par rapport à  $x_d$  dans le système obtenu soit égal à la matrice identité, afin que sa différentielle soit nulle. La propriété analogue pour la dérivée partielle en temps est cruciale dans l'analyse de [JMR95] dont on s'inspire largement. Ce choix est motivé ici par le rôle particulier que joue la variable normale  $x_d$  dans les estimations pour les équations de profil. C'est pourquoi l'on cherche à partir de maintenant à résoudre le système équivalent

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) u^{\varepsilon, \text{app}} = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B u|_{x_d=0}^{\varepsilon, \text{app}} = \varepsilon g^\varepsilon & \text{dans } \omega_T, \\ u|_{t \leq 0}^{\varepsilon, \text{app}} = 0 \end{cases}$$

où l'on pose

$$\tilde{L}(u, \partial_z) := A_d(u)^{-1} L(u, \partial_z) = \tilde{A}_0(u) \partial_t + \sum_{i=1}^{d-1} \tilde{A}_i(u) \partial_i + \partial_d,$$

où l'on a noté  $\tilde{A}_i(u) := A_d(u)^{-1} A_i(u)$  pour  $i = 0, \dots, d-1$ , avec  $A_0(u) := I$ . On s'autorise dorénavant à noter  $\partial_0 := \partial_t$ .

### Cascade BKW à l'intérieur du domaine

On peut maintenant déterminer les équations que doivent vérifier les profils  $U_k$ ,  $k \geq 1$ . On commence par écrire, pour  $i = 0, \dots, d-1$ , le développement de Taylor :

$$\tilde{A}_i(u^{\varepsilon, \text{app}}) = \tilde{A}_i(0) + \varepsilon d\tilde{A}_i(0) \cdot U_1 + \sum_{k \geq 2} \varepsilon^k \left[ d\tilde{A}_i(0) \cdot U_k + G_{k-1}^i \right],$$

où, pour  $k \geq 2$ ,  $G_{k-1}^i$  ne dépend que de  $U_1, \dots, U_{k-1}$ . Ainsi l'opérateur  $\tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z)$  s'écrit

$$(4.4.2) \quad \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) = \tilde{L}(0, \partial_z) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \tilde{L}_k(U_k, \partial_{z'}),$$

où

$$\tilde{L}_1(U_1, \partial_{z'}) := \sum_{i=0}^{d-1} d\tilde{A}_i(0) \cdot U_1 \partial_i, \quad \tilde{L}_k(U_k, \partial_{z'}) := \sum_{i=0}^{d-1} \left( d\tilde{A}_i(0) \cdot U_k + G_{k-1}^i \right) \partial_i, \quad \forall k \geq 2.$$

Pour  $k \geq 2$ , bien que l'on ne fasse apparaître que la dépendance en  $U_k$  dans les opérateurs correctifs  $\tilde{L}_k(U_k, \partial_{z'})$ , ces opérateurs dépendent également des profils  $U_1, \dots, U_{k-1}$ , via les fonctions  $G_{k-1}^i$ . L'opérateur  $\tilde{L}_1(U_1, \partial_{z'})$  dépend en revanche bien de  $U_1$  seulement.

On comprend ici l'intérêt d'avoir considéré l'opérateur modifié  $\tilde{L}(u, \partial_z)$  : il n'y a une dérivée en  $x_d$  que dans l'opérateur principal  $\tilde{L}(0, \partial_z)$ , et pas dans les opérateurs correctifs  $\tilde{L}_k(U_k, \partial_{z'})$ . On vérifie par ailleurs que l'on a

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} & \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) \left[ u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon) \right] \\ &= \left[ \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^m \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} u^{\varepsilon, \text{app}} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\psi_d} u^{\varepsilon, \text{app}} \right] \\ & \quad (z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon). \end{aligned}$$

où, pour  $j = 1, \dots, m$ , le symbole  $\tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \zeta_j)$  est défini par  $\sum_{i=0}^{d-1} \zeta_j^i \tilde{A}_i(u^{\varepsilon, \text{app}})$  avec  $\zeta_j = (\zeta_j^0, \dots, \zeta_j^{d-1})$ . On déduit du développement (4.4.2) de l'opérateur  $\tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z)$  ceux, analogues, des symboles  $\tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \zeta_j)$  pour  $j = 1, \dots, m$  :

$$(4.4.4) \quad \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \zeta_j) = \tilde{L}(0, \zeta_j) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \tilde{L}_k(U_k, \zeta_j)$$

où

$$\tilde{L}_1(U_1, \zeta_j) := \sum_{i=0}^{d-1} \zeta_j^i d\tilde{A}_i(0) \cdot U_1, \quad \tilde{L}_k(U_k, \zeta_j) := \sum_{i=0}^{d-1} \zeta_j^i \left( d\tilde{A}_i(0) \cdot U_k + G_{k-1}^i \right), \quad \forall k \geq 2.$$

Ainsi, d'après les développements (4.4.2), (4.4.3) et (4.4.4), on a un développement asymptotique

$$\begin{aligned} & \tilde{L}(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) \left[ u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \sum_{j=1}^m \tilde{L}(0, \zeta_j) \partial_{\theta_j} u^{\varepsilon, \text{app}} + \partial_{\psi_d} u^{\varepsilon, \text{app}} \right\} + \tilde{L}(0, \partial_z) u^\varepsilon + \sum_{j=1}^m \tilde{L}(U_1, \zeta_j) \partial_{\theta_j} u^{\varepsilon, \text{app}} \\ & \quad + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \left\{ \tilde{L}_k(U_k, \partial_{z'}) u^{\varepsilon, \text{app}} + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_{k+1}(U_{k+1}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} u^{\varepsilon, \text{app}} \right\}, \end{aligned}$$

où l'expression du membre de droite est évaluée en  $(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$ . L'opérateur  $L(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z)$  appliqué à  $u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$  est donc donné par la série formelle

$$(4.4.5) \quad L(u^{\varepsilon, \text{app}}, \partial_z) \left[ u^{\varepsilon, \text{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon) \right] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k W_k(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon),$$

où, si l'on substitue les variables  $\theta$  et  $\psi_d$  à  $(z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon)$  et  $x_d/\varepsilon$ , les termes  $(W_k)_{k \geq 0}$  de la série formelle (4.4.5) sont donnés par

$$(4.4.6a) \quad W_0 = \left\{ \sum_{j=1}^m \tilde{L}(0, \zeta_j) \partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d} \right\} U_1,$$

$$(4.4.6b) \quad W_1 = \left\{ \sum_{j=1}^m \tilde{L}(0, \zeta_j) \partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d} \right\} U_2 + \left\{ \tilde{L}(0, \partial_z) + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U_1, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \right\} U_1,$$

et pour  $k \geq 2$ ,

$$(4.4.6c) \quad W_k = \left\{ \sum_{j=1}^m \tilde{L}(0, \zeta_j) \partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d} \right\} U_{k+1} + \left\{ \tilde{L}(0, \partial_z) + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U_1, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \right\} U_k \\ + \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \tilde{L}_{k-l}(U_{k-l}, \partial_{z'}) + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_{k-l+1}(U_{k-l+1}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \right\} U_l.$$

On retrouve les expressions (4.4.6a) et (4.4.6b) pour le cas  $m = 1$  dans [CGW11].

Pour que la série formelle (4.3.1) soit solution de (4.1.1), on souhaite donc que la série formelle donnée par (4.4.5) soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$W_k = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

On remarque que chacune des équations  $W_k = 0$  fait intervenir l'opérateur rapide

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) := \sum_{j=1}^m \tilde{L}(0, \zeta_j) \partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d},$$

qui est un opérateur linéaire à coefficients constants, comme cela est standard en optique géométrique faiblement non-linéaire, voir [Rau12]. L'objet de la sous-partie suivante est d'étudier cet opérateur pour pouvoir réécrire les équations (4.4.6) de manière équivalente. On détermine auparavant la cascade BKW sur le bord et les conditions initiales.

### Cascade BKW sur le bord

Puisque l'on veut que la série formelle (4.3.1) vérifie la condition au bord

$$B u_{|x_d=0}^{\varepsilon, \text{app}} = \varepsilon g^\varepsilon,$$

les profils  $(U_k)_{k \geq 1}$  doivent vérifier, dans les variables  $(z', \theta)$ , les conditions au bord

$$(B U_1)_{|x_d=0, \psi_d=0} = G \\ (B U_k)_{|x_d=0, \psi_d=0} = 0, \quad k \geq 2.$$

### Conditions initiales

De même, les profils  $(U_k)_{k \geq 1}$  doivent vérifier dans les variables  $(z', \theta)$  les conditions initiales

$$(U_k)_{|t \leq 0} = 0, \quad k \geq 1.$$

#### 4.4.2 Résolution du problème rapide $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) U = H$

On cherche dans cette sous-partie à résoudre dans le cadre des séries trigonométriques formelles l'équation

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) U = H,$$

et plus précisément à déterminer, formellement, le noyau et l'image de l'opérateur  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$ . On suit dans cette sous-partie l'analyse, dans un cadre formel, de [Les07, Partie 3]. On se donne donc

$U$  de la forme

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta},$$

et de même  $H$  de la forme

$$H(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} H_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} H_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta},$$

où, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$ , la somme en  $\xi$  est dénombrable. On a alors, par définition de l'opérateur rapide  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) U(z, \theta, \psi_d) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} i \tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)) U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \{i \tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, 0)) + \partial_{\psi_d}\} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\boldsymbol{\zeta}$  désigne le  $m$ -uplet d'éléments de  $\mathbb{R}^d$  donné par  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ . Ainsi, le profil  $U$  est solution de  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) U = H$  si et seulement si, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$  et pour tout  $\xi$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$(4.4.7a) \quad i \tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)) U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) = H_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z),$$

et

$$(4.4.7b) \quad \left( i \tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, 0)) + \partial_{\psi_d} \right) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) = H_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d).$$

Pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$  et pour  $\xi$  dans  $\mathbb{R}$ , l'équation (4.4.7a) admet une solution si et seulement si  $H_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$  appartient à l'image de la matrice  $\tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi))$ , c'est-à-dire, d'après la Définition 4.1.6, au noyau  $\ker \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)}$ . D'après la Définition 4.1.6 de l'inverse partiel  $Q_\alpha$ , toute solution est alors de la forme

$$U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} = X_{\mathbf{n}, \xi} - i Q_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} A_d(0) H_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}},$$

avec  $X_{\mathbf{n}, \xi}$  un élément de  $\text{Im } \pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)}$ , et vérifie donc

$$U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} = \pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} - i Q_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} A_d(0) H_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}.$$

L'équation différentielle (4.4.7b) admet quant à elle une solution formelle pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$ . Pour  $\mathbf{n} = 0$ , la solution est formellement donnée par

$$U_{\mathbf{0}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) = - \int_{\psi_d}^{+\infty} H_{\mathbf{0}}^{\text{ev}}(z, s) ds,$$

et, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , d'après la formule de Duhamel, par

$$(4.4.8) \quad \begin{aligned} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) &= e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0) + \int_0^{\psi_d} e^{(\psi_d - s) \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) H_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, s) ds \\ &\quad - \int_{\psi_d}^{+\infty} e^{(\psi_d - s) \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} (I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) H_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, s) ds, \end{aligned}$$

en remarquant que l'on a  $i \tilde{L}(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, 0)) = -\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ . En effet, d'après l'Hypothèse 4.5, la fréquence  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}$  n'est pas glancing et le projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  est donc bien défini. La formule de

Duhamel s'applique alors séparément à  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbb{C}^N}^{\text{ev}}$  et  $(I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) U_{\mathbb{C}^N}^{\text{ev}}$ . Le premier terme à droite de l'égalité (4.4.8) est donc bien défini, et l'intégrale du second terme converge puisque, d'après la Proposition 4.5.16 montrée en appendice, la matrice  $e^{t\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  est bornée par une exponentielle décroissante pour  $t \geq 0$ . En revanche, on ne peut pas affirmer que l'intégrale du troisième terme est convergente. En effet,  $H_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}$  n'est que décroissant vers zéro à l'infini, et la matrice  $e^{t\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} (I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}))$  est simplement bornée pour  $t \leq 0$ , d'après la proposition 4.5.16. Le problème concernant l'intégrale impliquée dans la définition de  $U_{\mathbf{0}}^{\text{ev}}$  est essentiellement le même. On en déduit le résultat suivant.

**Lemme 4.4.1** ([Les07, Théorème 2.14]). *L'équation  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) U = H$  admet une solution dans le cadre des séries trigonométriques formelles si et seulement si  $\widetilde{\mathbf{E}}^i H = 0$ , et toute solution est de la forme*

$$U = \mathbf{E} U + \mathbf{Q} H,$$

où les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  et l'opérateur  $\mathbf{Q}$  sont formellement définis plus bas. En particulier, on a

$$\ker \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) = \text{Im } \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \text{Im } \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) = \ker \widetilde{\mathbf{E}}^i.$$

Si  $U$  est donné par

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta},$$

alors  $\widetilde{\mathbf{E}}^i U$  est défini comme

$$(4.4.9) \quad \widetilde{\mathbf{E}}^i U(z, \theta, \psi_d) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} \widetilde{\pi}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi) U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d},$$

$\mathbf{E} U$  comme

$$(4.4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} U(z, \theta, \psi_d) := & \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} \pi(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi) U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d} \\ & + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}, \end{aligned}$$

et  $\mathbf{Q} U$  comme

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} U(z, \theta, \psi_d) := & - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} i Q(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi) A_d(0) U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d} - \int_{\psi_d}^{+\infty} U_{\mathbf{0}}^{\text{ev}}(z, s) ds \\ & + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \left( \int_0^{\psi_d} e^{(\psi_d - s) \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, s) ds \right. \\ & \left. - \int_{\psi_d}^{+\infty} e^{(\psi_d - s) \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} (I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, s) ds \right) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}. \end{aligned}$$

On note que, pour le moment, les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  ainsi que l'opérateur  $\mathbf{Q}$  ne sont définis qu'au niveau formel. Les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , qui sont les seuls à intervenir pour le profil principal, peuvent être construits rigoureusement sur l'espace  $\mathcal{P}_{s, T}$ , et cela fera l'objet d'un paragraphe dans la partie suivante. À l'inverse, l'opérateur  $\mathbf{Q}$  ne peut pas être défini rigoureusement dans le cadre fonctionnel choisi ici (les problèmes tiennent à un contrôle de petits diviseurs, d'une manière analogue à [JMR95], ainsi qu'une absence de décroissance exponentielle pour les profils évanescents).

### 4.4.3 Système d'équations vérifié par le profil principal

D'après les expressions (4.4.6a) et (4.4.6b) des termes  $W_0$  et  $W_1$ , et en utilisant le Lemme 4.4.1 précédent on obtient le système d'équations suivant pour le profil principal  $U_1$ , que l'on note à partir de maintenant  $U$  :

$$(4.4.11a) \quad \mathbf{E}U = U$$

$$(4.4.11b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}^i \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) U + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U \right] = 0$$

$$(4.4.11c) \quad BU|_{x_d=0, \psi_d=0} = G$$

$$(4.4.11d) \quad U|_{t \leq 0} = 0.$$

Le profil principal  $U_1$  est bien polarisé, au sens où il vérifie l'équation (4.4.11a), et donc d'après l'équation (4.4.10) définissant le projecteur  $\mathbf{E}$ , seules des fréquences caractéristiques apparaissent dans son développement en série de Fourier. On verra dans la partie suivante que la partie oscillante  $U^{\text{osc}}$  du profil  $U$  vérifie le problème

$$(4.4.12a) \quad \mathbf{E}U^{\text{osc}} = U^{\text{osc}}$$

$$(4.4.12b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}^i \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) U^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(U^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U^{\text{osc}} \right] = 0$$

$$(4.4.12c) \quad B(U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = G$$

$$(4.4.12d) \quad U|_{t \leq 0}^{\text{osc}} = 0.$$

Le problème est de savoir si la condition au bord (4.4.12c) détermine à elle seule la trace  $U|_{x_d=0, \psi_d=0}^{\text{osc}}$  ou non. Cela dépend, comme dans [CGW11] et [CW17], de l'existence de triplets résonants impliquant deux fréquences rentrantes et une fréquence sortante. Une telle configuration est exclue ici par l'Hypothèse 4.7. Dans ce cas la condition au bord (4.4.12c) détermine également la trace  $U|_{x_d=0, \psi_d=0}^{\text{ev}}$ , ce qui, d'après les conditions de polarisation, permet d'obtenir immédiatement la partie évanescence du profil  $U$ .

## 4.5 Construction du profil principal

Maintenant que le système (4.4.11) que doit vérifier le profil principal  $U$  a été dérivé formellement, on peut en construire une solution  $U$ . On commence, dans une première partie, par une discussion sur les différents types de résonances qui peuvent intervenir dans le système. En particulier on fait l'hypothèse technique que les résonances dont on ne contrôle pas polynomialement l'absence de symétrie sont en nombre fini. Cette hypothèse est faite pour traiter le manque de symétrie des termes de résonance comparé au cas de [JMR95]. Dans une deuxième partie on définit rigoureusement les projecteurs apparaissant dans le système (4.4.11), et l'on prouve certains résultats de la section 4.4, en utilisant l'Hypothèse 4.6 de petits diviseurs. On poursuit alors avec les trois étapes principales de la preuve, à savoir le découplage du système (4.4.11), la dérivation d'estimations d'énergie pour des systèmes linéarisés et la construction de la solution. La première étape est réalisée en section 4.5.3, où l'on réduit le système (4.4.11) en un système pour la partie évanescence, un système pour la partie oscillante résonante et un système pour chaque mode oscillant non résonant. En écrivant l'équation (4.4.11b) mode par mode, on parvient à extraire une équation d'évolution vérifiée par la moyenne pour montrer que celle-ci est nulle. On prouve alors, au moyen d'une estimation d'énergie pour la partie oscillante sortante, que chaque mode sortant est nul. Pour obtenir cette estimation, on doit utiliser un produit scalaire défini seulement pour les profils à support compact en  $x_d$ . On doit donc montrer avant cela que

toute solution de (4.4.11) se propage à vitesse finie dans la direction normale. La preuve de ce résultat est faite après avoir introduit les outils qui y seront utilisés, en section 4.5.4. Enfin, en utilisant le fait que les modes sortants sont nuls, on peut découpler la condition au bord (4.4.11c) pour chaque mode évanescent et chaque mode rentrant, ce qui conclue le découplage du système. La dérivation d'estimation a priori sans perte de dérivée est réalisée en sections 4.5.4 et 4.5.5, la première pour les modes rentrants résonants, et la seconde pour chaque mode rentrant non résonant, c'est-à-dire des équations de type Burgers. Ces modes doivent être traités individuellement pour éviter l'apparition d'un facteur non borné par rapport à la fréquence, mais cette partie ne présente pas de difficulté supplémentaire puisqu'elle réutilise les techniques de la précédente. La dérivation d'estimations a priori pour le système linéarisé pour la partie rentrante résonante est présentée en section 4.5.4, en commençant par l'estimation  $L^2$ . Elle est obtenue en prenant, pour le produit scalaire adapté aux modes rentrants, le produit scalaire entre l'équation de propagation linéarisé et un profil modifié. Quatre termes sont alors à traiter. Le terme de transport ainsi que le terme de type Burgers (correspondant à l'auto-interaction) sont traités de manière classique (par intégration par parties et en utilisant les symétries pour les termes d'auto-interaction), tandis que l'hypothèse sur l'ensemble des résonances est utilisée pour les deux termes de résonances. Plus précisément, cette hypothèse assure que les termes de résonance (sauf pour un nombre fini d'entre-eux, qui sont traités séparément), sont tels que le manque de symétrie est contrôlé d'une telle manière que l'on peut adapter les techniques utilisées pour les termes de type Burgers. La même méthode d'estimation d'énergie, avec un produit scalaire différent, est utilisée dans cette section pour montrer la propagation à vitesse finie. Les dérivations pour les dérivées sont alors obtenues de manière classique en utilisant des estimations de commutateur. La section 4.5.6 est consacrée à la construction d'une solution. La partie oscillante est construite aux moyen des estimations d'énergie selon une procédure que l'on ne détaille pas, et qui consiste à montrer l'existence d'une solution au système linéarisé avec un schéma aux différences finies, puis l'existence de la solution recherchée avec un schéma itératif. L'unicité se déduit immédiatement des estimées d'énergie. Concernant la partie évanescente, son expression est prescrite par la condition de polarisation, et l'on montre que le profil ainsi construit appartient bien à l'espace des profils évanescents. Cela conclue la preuve du Théorème 4.3.1, et la section 4.5.7 donne une conclusion et quelques perspectives.

#### 4.5.1 Coefficient de résonance et hypothèse supplémentaire

L'ensemble suivant nous permettra dans la suite de regrouper les fréquences caractéristiques par colinéarité.

**Définition 4.5.1.** *On considère le sous ensemble de  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  noté  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  constitué de tous les  $m$ -uplets d'entiers relatifs premiers entre eux dont le premier terme non nul est positif :*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} := \left\{ (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\} \left| \begin{array}{l} n_1 \wedge \dots \wedge n_m = 1, \\ \exists k \in \{0, \dots, m-1\}, n_1, \dots, n_k = 0, n_{k+1} > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

*On vérifie que pour tout  $\mathbf{n}$  de  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , il existe un unique élément  $\mathbf{n}_0$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  et un unique entier relatif non nul  $\lambda$  tel que  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$ .*

On introduit ensuite une notation pour les relèvements en des fréquences caractéristiques réelles de fréquences au bord.

**Définition 4.5.2.** *Pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , on note  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$  l'ensemble fini des réels  $\xi$  tels que la fréquence  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)$  soit caractéristique réelle, c'est-à-dire*

$$\mathcal{C}(\mathbf{n}) := \{ \xi \in \mathbb{R} \mid (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi) \in \mathcal{C} \}.$$

On note également  $\mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})$  (resp.  $\mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})$ ) l'ensemble des réels  $\xi$  tels que la fréquence  $(\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi)$  soit caractéristique réelle rentrante (resp. sortante), c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}) = \{\xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \mid j \in \mathcal{R}(\mathbf{n} \cdot \zeta)\}, \quad \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}) = \{\xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \mid j \in \mathcal{S}(\mathbf{n} \cdot \zeta)\},$$

avec les notations de la Proposition 4.1.16.

On rappelle qu'en vertu de l'Hypothèse 4.5, il n'y a pas de fréquence glancing dans  $\mathcal{F}$ , et donc on a l'union disjointe

$$\mathcal{C}(\mathbf{n}) = \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}) \cup \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})$$

pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ . On a listé ici toutes les fréquences caractéristiques réelles, mais il existe aussi des fréquences non réelles relevées de  $\mathbf{n} \cdot \zeta$ .

*Remarque 4.5.3.* On vérifie que, d'après la Remarque 4.1.17, les ensembles  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{in}}$  et  $\mathcal{C}_{\text{out}}$  sont homogènes de degré 1. Ainsi, si  $\mathbf{n}$  appartient à  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  à  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ , et si  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$  sont tels que  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$ , alors il existe  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$  tel que  $\xi = \lambda \xi_0$ .

On introduit maintenant des notations pour les résonances.

**Définition 4.5.4.** Pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ , on note  $E(\mathbf{n}, \xi)$  le vecteur de la base  $E_1, \dots, E_N$  de  $\mathbb{C}^N$  donnée par (4.1.8) qui engendre la droite vectorielle  $\ker L(0, (\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi))$ .

*Remarque 4.5.5.* On note que, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , puisque les espaces  $\ker L(0, (\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi))$  et  $\ker L(0, (\lambda \mathbf{n} \cdot \zeta, \lambda \xi))$  sont égaux, on a  $E(\mathbf{n}, \xi) = E(\lambda \mathbf{n}, \lambda \xi)$ , c'est-à-dire que le vecteur  $E(\mathbf{n}, \xi)$  est homogène de degré 0.

La définition suivante s'inspire de [Rau12, Chapitre 11].

**Définition 4.5.6.** Soit  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q$  deux éléments de  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , et soit  $(\xi_p, \xi_q)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_p) \times \mathcal{C}(\mathbf{n}_q)$  tels que la fréquence

$$(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) + (\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q) =: (\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r)$$

est caractéristique réelle (c'est-à-dire tels qu'il y a résonance). On définit le coefficient de résonance  $\Gamma((\mathbf{n}_p, \xi_p), (\mathbf{n}_q, \xi_q))$  comme le réel vérifiant

$$\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r)} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_p, \xi_p), \mathbf{n}_q \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_q, \xi_q) = \Gamma((\mathbf{n}_p, \xi_p), (\mathbf{n}_q, \xi_q)) \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r)} E(\mathbf{n}_r, \xi_r),$$

qui existe par définition des projecteurs  $\tilde{\pi}_k$ , pour  $k = 1, \dots, N$  et d'après le Lemme 4.1.15.

*Remarque 4.5.7.* i) Puisque toutes les quantités impliquées dans la définition de  $\Gamma$  sont homogènes de degré 0 ou 1, le coefficient  $\Gamma$  est homogène de degré 1, c'est-à-dire que pour  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,  $(\xi_p, \xi_q)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_p) \times \mathcal{C}(\mathbf{n}_q)$  tels que la fréquence  $(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) + (\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q)$  est caractéristique réelle (c'est-à-dire tels qu'il y a résonance) et pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , on a

$$(4.5.1) \quad \Gamma((\lambda \mathbf{n}_p, \lambda \xi_p), (\lambda \mathbf{n}_q, \lambda \xi_q)) = \lambda \Gamma((\mathbf{n}_p, \xi_p), (\mathbf{n}_q, \xi_q)).$$

De plus, par définition et pour la même raison, on a, pour  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$ , et pour  $\lambda_1, \lambda_2$  dans  $\mathbb{Z}^*$ ,

$$(4.5.2) \quad \Gamma(\lambda_1(\mathbf{n}_0, \xi_0), \lambda_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)) = \lambda_2 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)).$$

ii) Puisque d'après la Remarque 4.1.7 les projecteurs  $\tilde{\pi}_\alpha$  sont bornés et que les vecteurs  $E(\mathbf{n}, \xi)$  sont de norme 1, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et tout  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ , on a

$$|\Gamma((\mathbf{n}, \xi), (\mathbf{n}, \xi))| \leq C \frac{|\mathbf{n}|}{|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi)} E(\mathbf{n}, \xi)|}.$$



Ainsi, d'après la minoration (4.1.36) du Lemme 4.1.22 et l'Hypothèse 4.6 de petits diviseurs, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et tout  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ , on a

$$(4.5.3) \quad |\Gamma((\mathbf{n}, \xi), (\mathbf{n}, \xi))| \leq C|\mathbf{n}|^h,$$

où  $h$  est un entier supérieur à  $(3 + a_1)/2$  avec les notations de l'Hypothèse 4.6.

- iii) La quantité  $\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_r, \zeta, \xi_r)} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_p, \xi_p), \mathbf{n}_q \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_q, \xi_q)$  étant homogène de degré 1 en  $\mathbf{n}_q$ , le coefficient de résonance  $\Gamma((\mathbf{n}_p, \xi_p), (\mathbf{n}_q, \xi_q))$  correspond formellement à une dérivée par rapport aux variables tangentielles rapides portant sur le profil associé à la fréquence  $(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q)$ .

Les coefficients  $\Gamma$  définis au dessus apparaîtront dans les calculs pour obtenir des estimations a priori sur le système (4.4.11). En particulier, lorsque ceux-ci présentent une certaine propriété de symétrie, la résonance associée est facile à contrôler dans les estimations a priori. On distingue donc maintenant les résonances qui présentent cette propriété de symétrie du reste des résonances.

**Définition 4.5.8.** On fixe une constante  $C_0 > 0$ . Soit  $\mathbf{n}_r$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ , et soit  $\xi_r$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_r)$ . On considère l'ensemble des 7-uplets  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q)$  avec  $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r$  dans  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $(\xi_p, \xi_q)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_p) \times \mathcal{C}(\mathbf{n}_q)$ ,  $(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p)$  et  $(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q)$  non colinéaires et  $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r$  premiers entre eux, qui résonnent pour donner la fréquence  $\lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r)$  de la manière suivante

$$\lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) + \lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q) = \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r),$$

et l'on écrit cet ensemble comme l'union disjointe

$$\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_r, \xi_r) \sqcup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_r, \xi_r),$$

où les ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_r, \xi_r)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_r, \xi_r)$  sont définis comme suit.

- i) L'ensemble  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_r, \xi_r)$  est constitué des 7-uplets  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q)$  vérifiant

$$(4.5.4) \quad \left| \Gamma((\lambda_p \mathbf{n}_p, \lambda_p \xi_p), (\lambda_q \mathbf{n}_q, \lambda_q \xi_q)) + \Gamma((\lambda_p \mathbf{n}_p, \lambda_p \xi_p), (-\lambda_r \mathbf{n}_r, -\lambda_r \xi_r)) \right| \leq C_0 |\lambda_p \mathbf{n}_p, \lambda_p \xi_p|$$

où  $C_0 > 0$  est la constante qui a été fixée au début et qui ne dépend pas de  $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_r, \xi_p, \xi_q, \xi_r$ . On dit que ce sont des résonances de type 1.

- ii) Les 7-uplets  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q)$  qui ne vérifient pas cette propriété forment l'ensemble des résonances de type 2 que l'on a noté  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_r, \xi_r)$ .

*Remarque 4.5.9.* i) On note que les deux ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)$  dépendent de la constante  $C_0 > 0$  fixée au départ, bien que cette dépendance ne soit pas indiquée.

- ii) D'après l'Hypothèse 4.7, on remarque que si la fréquence  $(\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi)$  est sortante (resp. rentrante), alors les deux ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)$  ne sont constitués que de septuplets correspondant à des couples de fréquences sortantes (resp. rentrantes).
- iii) On remarque que puisque les coefficients  $\Gamma$  ne sont pas symétriques, le type d'une résonance

$$\lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) + \lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q) = \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r),$$

dépend de la manière dont on l'écrit. Cependant, puisque la condition (4.5.4) est symétrique en  $(q, r)$ , la résonance

$$\lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) + \lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q) = \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r),$$

est de type 1 si et seulement si la résonance

$$\lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \zeta, \xi_p) - \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \zeta, \xi_r) = -\lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \zeta, \xi_q),$$

est de type 1.

iv) On note également que si l'on a une résonance du type

$$\lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_p) + \lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_q) = \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_r),$$

alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , la résonance suivante est aussi vérifiée

$$k \lambda_p(\mathbf{n}_p \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_p) + k \lambda_q(\mathbf{n}_q \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_q) = k \lambda_r(\mathbf{n}_r \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_r).$$

C'est pourquoi l'on choisit dans la Définition 4.5.8 de ne considérer que des triplets  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r)$  d'entiers premiers entre eux et des  $m$ -uplets  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{n}_q$  et  $\mathbf{n}_r$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ .

Cette définition nous permet de faire la dernière hypothèse de ce travail. Elle est faite pour des raisons techniques, et il n'est pas clair à ce stade si elle est nécessaire.

**Hypothèse 4.8.** *Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que les ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)$ , pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$  définis dans la Définition 4.5.8 vérifient les deux propriétés suivantes.*

a) *Les ensembles de résonances rentrantes de type 2 et sortantes de type 1 et 2,*

$$\bigcup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})}} \mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi), \quad \bigcup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})}} (\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)),$$

*sont des ensembles finis.*

b) *Pour toute fréquence rentrante  $(\mathbf{n}, \xi)$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})$  telle que l'ensemble  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  est non vide, on a la minoration*

$$(4.5.5) \quad |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} E(\mathbf{n}, \xi)| \geq \frac{1}{C_0}.$$

*Remarque 4.5.10.* i) L'auto-interaction entre deux fréquences colinéaires est toujours résonante, mais ces termes ne posent pas de problème dans la suite, car ils induisent des termes de type Burgers qu'il est très usuel de traiter dans les estimations. En revanche les résonances de type 2 se contrôlent "mal", c'est pourquoi l'on fait une hypothèse de finitude sur cet ensemble, alors que la propriété (4.5.4) vérifiée par les résonances de type 1 nous permet d'en traiter une infinité (au prix d'un contrôle uniforme). Une telle infinité de résonances apparaît irrémédiablement dans l'Exemple 4.1.1 des équations d'Euler isentropique compressible en dimension 2, et c'est là l'une des principales difficultés supplémentaires qu'on traite ici par rapport au cas monophasé de [CGW11].

ii) On sait déjà que pour tout  $(\mathbf{n}, \xi)$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}(\mathbf{n})$ , le vecteur  $\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} E(\mathbf{n}, \xi)$  est borné, d'après la remarque 4.1.7, et qu'il n'est autorisé à s'approcher de 0 que de manière contrôlée, d'après l'estimation (4.1.36) et l'Hypothèse 4.6. Dans le cas d'une infinité de résonances, c'est-à-dire pour les résonances rentrantes de type 1, il nous faut également supposer que ce vecteur ne devient pas arbitrairement petit, pour une raison technique qui sera expliquée plus bas. C'est pourquoi on fait l'hypothèse de minoration uniforme (4.5.5). Cette hypothèse exclut la possibilité qu'il existe une suite de fréquences  $(\mathbf{n}, \xi)$  telles que  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  est non vide se rapprochant de l'ensemble glancing.

On sait déjà, d'après l'Hypothèse 4.7, que les ensembles de fréquences rentrantes et sortantes  $\mathcal{F}^{\text{in}}$  et  $\mathcal{F}^{\text{out}}$  définis en (4.2.2) et (4.2.3) ne résonnent pas entre eux. On va maintenant affiner cette décomposition de l'ensemble des fréquences en ensembles qui ne résonnent pas entre eux, ce qui nous permettra ensuite de découpler les systèmes étudiés selon ces ensembles.

**Définition 4.5.11.** *On confond dans cette définition la fréquence  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)$  et le couple  $(\mathbf{n}, \xi)$ . Soit  $C_0 > 0$  la constante fixée par l'Hypothèse 4.8. On note  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  l'ensemble des fréquences sortantes*

$(\mathbf{n}, \xi)$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})$  impliquées dans des résonances, qu'elles soient de type 1 ou 2, c'est-à-dire telles que  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)$  est non vide. On a alors

$$(4.5.6) \quad \{(\mathbf{n}, \xi) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})\} = \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}} \sqcup \bigsqcup_{(\mathbf{n}, \xi) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \{(\mathbf{n}, \xi)\},$$

où les ensembles dont on fait l'union disjointe ne résonnent pas entre eux. On définit de manière analogue l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  pour les fréquences rentrantes, et on a donc la décomposition

$$(4.5.7) \quad \{(\mathbf{n}, \xi) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})\} = \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}} \sqcup \bigsqcup_{(\mathbf{n}, \xi) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \{(\mathbf{n}, \xi)\},$$

où les ensembles dont on fait l'union disjointe ne résonnent pas entre eux.

*Remarque 4.5.12.* Dans l'Hypothèse 4.8, le contrôle (4.5.5) s'applique a priori uniquement aux couples  $(\mathbf{n}, \xi)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  est non vide. Mais puisque d'après l'Hypothèse 4.8 il y a un nombre fini de résonances rentrantes de type 2, on peut supposer sans perte de généralité que cette estimation s'applique également aux couples  $(\mathbf{n}, \xi)$  tels que  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}, \xi)$  est vide mais  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}, \xi)$  est non vide, c'est-à-dire à tous les éléments de  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ . On en déduit que pour tout  $(\mathbf{n}, \xi)$  de  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , on a

$$(4.5.8) \quad |\Gamma((\mathbf{n}, \xi), (\mathbf{n}, \xi))| \leq C|\mathbf{n}|,$$

où l'on note que l'estimation précédente diffère de l'estimation (4.5.3) par un contrôle linéaire et non algébrique de degré  $h$ .

On définit enfin des projecteurs analogues à  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  qui ne sélectionnent que les fréquences résonantes rentrantes, avant de vérifier l'Hypothèse 4.8 pour l'exemple des équations d'Euler que l'on considère dans ce chapitre.

**Définition 4.5.13.** Pour toute série trigonométrique formelle  $U$  s'écrivant

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta},$$

on définit  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$   $U$  comme

$$(4.5.9) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} U(z, \theta, \psi_d) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \widetilde{\pi}_{(\lambda \mathbf{n}_0, \zeta, \lambda \xi_0)} U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d},$$

et  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U$  comme

$$(4.5.10) \quad \mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U(z, \theta, \psi_d) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \pi_{(\lambda \mathbf{n}_0, \zeta, \lambda \xi_0)} U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d}.$$

*Exemple 4.5.14.* On reprend l'Exemple 4.1.1 des équations d'Euler isentropique compressible en dimension 2, pour lequel on vérifie la dernière hypothèse de ce travail, l'Hypothèse 4.8 sur le contrôle des résonances. On reprend les notations et résultats déjà trouvés dans l'Exemple 4.1.1 et ceux qui le suivent, et notamment l'analyse des résonances faite dans l'Exemple 4.2.1, et l'on se place sous les hypothèses faites sur le nombre de Mach  $M$ . On a montré que si  $M^2$  n'est pas solution d'une équation de degré inférieur à 4 dans  $\mathbb{Q}[\delta]$ , alors les seules résonances, hors auto-interaction, qui interviennent sont celles impliquant la fréquence linéaire  $\alpha_3(\zeta)$ , qui sont en nombre infini, même à colinéarité près, et entre fréquences rentrantes. On va montrer qu'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que ces résonances vérifient la propriété (4.5.4) et telle que les fréquences  $\alpha_3(\zeta_{p,q})$  vérifient la minoration (4.5.5), ce qui nous permettra de vérifier l'Hypothèse

4.8 pour le système (4.1.4). On cherche donc en premier lieu à calculer les coefficients  $\Gamma$  pour ce type de résonance. On se donne  $(p, q)$  et  $(r, s)$  dans  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ , et l'on cherche à déterminer le coefficient

$$\Gamma((p, q), \xi_3(\zeta_{p,q}), (r, s), \xi_3(\zeta_{r,s}))$$

relatif à la résonance

$$\alpha_3(\zeta_{p,q}) + \alpha_3(\zeta_{r,s}) = \alpha_3(\zeta_{p+r, q+s}),$$

que l'on note plus succinctement  $\Gamma((p, q), (r, s))$ . Puisque, pour  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , la fréquence caractéristique réelle  $\alpha_3(\zeta) = (\tau, \eta, \xi_3(\zeta))$  vérifie  $\tau = \tau_2(\eta, \xi_3(\zeta))$ , on a

$$\begin{aligned} E((p, q), \xi_3(\zeta_{p,q})) &= E_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q})), & E((r, s), \xi_3(\zeta_{r,s})) &= E_2(\eta_{r,s}, \xi_3(\zeta_{r,s})), \\ E((p+r, q+s), \xi_3(\zeta_{p+r, q+s})) &= E_2(\eta_{p+r, q+s}, \xi_3(\zeta_{p+r, q+s})), \end{aligned}$$

où  $E_2(\eta, \xi)$  est le vecteur de la base (4.1.8) de  $\mathbb{C}^N$  donné dans cet exemple par

$$E_2(\eta, \xi) := \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Ainsi, le vecteur de la base (4.1.9) correspondant est donné par

$$A_2(V_0)^{-1} E_2(\eta, \xi) = \frac{1}{(u_0^2 - c_0^2)\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \begin{pmatrix} -\eta v_0 \\ \xi \frac{u_0^2 - c_0^2}{u_0} \\ -\eta u_0 \end{pmatrix}, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

En calculant également les vecteurs  $E_1(\eta, \xi)$  et  $E_3(\eta, \xi)$ , on détermine que le projecteur impliqué dans le coefficient  $\Gamma((p, q), (r, s))$ , qui s'écrit  $\tilde{\pi}_{((p+r, q+s) \cdot \zeta, \xi_3(\zeta_{p+r, q+s}))}$ , est donné dans cet exemple par  $\tilde{\pi}_2(\eta_{p+r, q+s}, \xi_3(\zeta_{p+r, q+s}))$  où, pour  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$\tilde{\pi}_2(\eta, \xi) = \frac{1}{u_0(u_0^2 - c_0^2)(\eta^2 + \xi^2)} \begin{pmatrix} -u_0 c_0^2 \eta^2 & -u_0^2 v_0 \eta \xi & u_0^2 v_0 \eta^2 \\ \eta \xi c_0^2 (u_0^2 - c_0^2)/v_0 & \xi^2 u_0 (u_0^2 - c_0^2) & -\eta \xi u_0 (u_0^2 - c_0^2) \\ -\eta^2 c_0^2 u_0^2/v_0 & -\eta \xi u_0^3 & u_0^3 \eta^2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que  $\tilde{\pi}_2(\eta, \xi) E_2(\eta, \xi)$  est donné par  $u_0 A_2(V_0)^{-1} E_2(\eta, \xi)$ , pour  $(\eta, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Cela affirme donc en particulier que la deuxième partie de l'hypothèse 4.8 est vérifiée, car on a la minoration uniforme

$$\begin{aligned} |\tilde{\pi}_{\alpha_3(\zeta_{p,q})} E((p, q), \xi_3(\zeta_{p,q}))| &= |\tilde{\pi}_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q})) E_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q}))| \\ &= |u_0 A_2(V_0)^{-1} E_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q}))| \geq C |E((p, q), \xi_3(\zeta_{p,q}))| = C. \end{aligned}$$

On poursuit maintenant le calcul des coefficients  $\Gamma((p, q), (r, s))$ . En calculant les différentielles  $d\tilde{A}_i(V_0)$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1(E_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q})), \zeta_{r,s}) E_2(\eta_{r,s}, \xi_3(\zeta_{r,s})) \\ = \frac{\tau_{p,q} \eta_{r,s} - \tau_{r,s} \eta_{p,q}}{\sqrt{\eta_{p,q}^2 + \tau_{p,q}^2/u_0^2} \sqrt{\eta_{r,s}^2 + \tau_{r,s}^2/u_0^2}} \begin{pmatrix} v_0 \eta_{r,s}/[u_0(u_0^2 - c_0^2)] \\ \tau_{r,s}/u_0^3 \\ \eta_{r,s}/(u_0^2 - c_0^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a utilisé ici la formule  $\xi_3(\zeta) = -\tau/u_0$ , pour  $\zeta = (\tau, \eta)$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \tilde{\pi}_2(\eta_{p+r,q+s}, \xi_3(\zeta_{p+r,q+s})) \tilde{L}_1(E_2(\eta_{p,q}, \xi_3(\zeta_{p,q})), \zeta_{r,s}) E_2(\eta_{r,s}, \xi_3(\zeta_{r,s})) \\ &= \frac{(\tau_{p,q} \eta_{r,s} - \tau_{r,s} \eta_{p,q})(\tau_{p+r,q+s} \tau_{r,s} + u_0^2 \eta_{p+r,q+s} \eta_{r,s})}{u_0^2 (u_0^2 - c_0^2) \sqrt{\eta_{p,q}^2 + \tau_{p,q}^2/u_0^2} \sqrt{\eta_{r,s}^2 + \tau_{r,s}^2/u_0^2} \sqrt{\eta_{p+r,q+s}^2 + \tau_{p+r,q+s}^2/u_0^2}} \begin{pmatrix} \eta_{p+r,q+s} v_0/u_0 \\ \tau_{p+r,q+s} (u_0^2 - c_0^2)/u_0^3 \\ \eta_{p+r,q+s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On déduit alors de la relation  $\tilde{\pi}_2(\eta, \xi) E_2(\eta, \xi) = u_0 A_2(V_0)^{-1} E_2(\eta, \xi)$ , la formule suivante pour le coefficient  $\Gamma((p, q), (r, s))$  que l'on cherchait à déterminer :

$$(4.5.11) \quad \Gamma((p, q), (r, s)) = -\frac{(\tau_{p,q} \eta_{r,s} - \tau_{r,s} \eta_{p,q})(\tau_{p+r,q+s} \tau_{r,s} + u_0^2 \eta_{p+r,q+s} \eta_{r,s})}{u_0^4 \sqrt{\eta_{p,q}^2 + \tau_{p,q}^2/u_0^2} \sqrt{\eta_{r,s}^2 + \tau_{r,s}^2/u_0^2} \sqrt{\eta_{p+r,q+s}^2 + \tau_{p+r,q+s}^2/u_0^2}}.$$

On s'attache maintenant à vérifier l'estimation (4.5.4) avec ces coefficients. On se donne  $(p, q)$ ,  $(r, s)$  et  $(t, w)$  dans  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  tels que  $(p, q) + (r, s) + (t, w) = (0, 0)$ . On vérifie alors que l'on a, en utilisant les formules  $\tau_{p,q} = c_0(p + \delta q)\eta_0$ ,  $\eta_{p,q} = (p + q)\eta_0$ ,  $p + r = -t$  et  $q + s = -w$ ,

$$\begin{aligned} & \Gamma((p, q), (r, s)) \\ &= \frac{(1 - \delta)(ps - qr)((t + \delta w)(r + \delta s) + M^2(t + w)(r + s))}{\sqrt{(p + q)^2 + (p + \delta q)^2/M^2} \sqrt{(r + s)^2 + (r + \delta s)^2/M^2} \sqrt{(t + w)^2 + (t + \delta w)^2/M^2}} \frac{\eta_0 c_0^3}{u_0^4}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $ps - qr = -(pw - qt)$ , on obtient ainsi

$$\Gamma((p, q), (r, s)) + \Gamma((p, q), (t, w)) = 0,$$

et donc l'estimation (4.5.4) est en particulier trivialement vérifiée, et l'Hypothèse 4.8 est donc satisfaite. On note que dans cet exemple, l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  est vide et l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  est donné par

$$\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}} = \{\alpha_3(\zeta) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b\}.$$

Cela vient conclure l'analyse de l'exemple des équations d'Euler isentropique compressible en dimension 2, qui, avec les paramètres que l'on a choisis, vérifient toutes les hypothèses de ce travail.

*Remarque 4.5.15.* On note que le coefficient  $\Gamma$  que l'on a trouvé correspond à celui [Rau12, (11.5.9)].

Dans la sous-partie suivante, l'on va montrer rigoureusement certains résultats sur les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , en utilisant l'Hypothèse 4.6.

#### 4.5.2 Définition rigoureuse des projecteurs $\mathbf{E}$ , $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$

Cette sous-partie s'appuie sur [JMR95, Partie 6.2]. Avant de s'intéresser aux projecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ ,  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , il nous faut montrer le résultat suivant de contrôle de projecteurs spectraux, ce qui nous permettra de définir les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$ .

**Proposition 4.5.16.** *Sous l'Hypothèse 4.6, il existe une constante  $c_1 > 0$  et un réel  $b_1$  tels que, pour tout  $\zeta$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , on a les estimations*

$$(4.5.12a) \quad \left| e^{tA(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) \right| \leq c_1 e^{-c_1 t |\zeta|^{-b_1}} \leq c_1, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(4.5.12b) \quad \left| e^{tA(\zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta) \right| \leq c_1 |\zeta|^{b_1} e^{-c_1 t |\zeta|^{-b_1}}, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(4.5.12c) \quad \left| e^{tA(\zeta)} (I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)) \right| \leq c_1 |\zeta|^{b_1}, \quad \forall t \leq 0.$$

*Preuve.* On rappelle que le projecteur  $\Pi_-^e(\zeta)$  est le projecteur de  $E_-(\zeta)$  sur la partie elliptique  $E_-^e(\zeta)$  selon la décomposition (4.1.23), quand le projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)$  est le projecteur de  $\mathbb{C}^N$  sur la partie elliptique  $E_-^e(\zeta)$  selon la décomposition (4.1.25), qui n'est défini que lorsque  $\zeta$  n'est pas glancing.

On utilise l'homogénéité de degré 1 de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  et de degré 0 des projecteurs  $\Pi_-^e(\zeta)$  et  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)$ , et la compacité de la sphère unité  $\Sigma_0$ , et l'on raisonne donc au voisinage de tout point  $\underline{\zeta}$  de  $\Sigma_0$ . On étend ensuite le résultat par homogénéité à un recouvrement fini de  $\Xi_0$  par des voisinages coniques. Puisque le projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)$  n'est défini que pour  $\zeta$  non glancing, pour les inégalités (4.5.12b) et (4.5.12c) le faisant intervenir, on ne s'intéresse qu'aux points du voisinage de  $\underline{\zeta}$  qui sont non glancing. On se donne ainsi un point  $\underline{\zeta}$  de  $\Sigma_0$  et on reprend les notations et les résultats de la preuve de la Proposition 4.1.21.

On s'intéresse d'abord à la première estimation (4.5.12a). Dans la preuve de la Proposition 4.1.21, on a construit, au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , une base continue de  $E_-(\zeta)$  associée à une matrice de changement de base régulière  $T(\zeta)$  dans laquelle la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  restreinte à  $E_-(\zeta)$  est la matrice diagonale par blocs de taille  $p \times p$  suivante,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_-(\zeta) & & & 0 \\ & i\xi_1(\zeta)I_{\omega_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\xi_{r+g}(\zeta)I_{\omega_{r+g}} \end{pmatrix},$$

constituée d'un bloc  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  de partie réelle définie négative, de blocs diagonaux  $i\xi_j(\zeta)I_{\omega_j}$ ,  $j = 1, \dots, r$  associés aux valeurs propres  $\xi_j$  rentrantes et de blocs diagonaux  $i\xi_j(\zeta)I_{\omega_j}$ ,  $j = r+1, \dots, r+g$  associés aux valeurs propres  $\xi_j$  glancing en  $\underline{\zeta}$ . Dans ce cas, d'après l'expression (4.1.35) du projecteur  $\Pi_-^e(\zeta)$  au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , l'application linéaire  $e^{t\mathcal{A}(\zeta)}\Pi_-^e(\zeta)$  de  $E_-(\zeta)$  dans lui-même est donnée dans la base associée à la matrice  $T(\zeta)$  par la matrice de taille  $p \times p$  suivante

$$\begin{pmatrix} e^{t\mathcal{A}_-(\zeta)} & & & \\ & 0 & & \\ & & e^{it\xi_{r+1}(\zeta)}\mathbb{1}_{\Delta_{r+1}(\zeta)<0}I_{\omega_{r+1}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{it\xi_{r+g}(\zeta)}\mathbb{1}_{\Delta_{r+g}(\zeta)<0}I_{\omega_{r+g}} \end{pmatrix}.$$

D'une part, le bloc  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  est de partie réelle définie négative uniformément par rapport à  $\zeta$ . D'autre part on vérifie que l'on a

$$\operatorname{Im} \xi_{r+l}(\zeta) = |\Delta_{r+l}(\zeta)|^{1/2}/2,$$

pour  $l = 1, \dots, g$ , où  $\Delta_{r+l}(\zeta)$  désigne le discriminant du polynôme caractéristique associé à la valeur propre glancing  $\xi_{r+l}$  défini dans la preuve de la Proposition 4.1.21 et représenté en Figure 4.4. Or on peut écrire, au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ ,

$$\Delta_j(\zeta) = [\tau - \tau_j^g(\eta)]e(\zeta),$$

avec  $e(\zeta) \neq 0$ , où l'on rappelle que la fonction  $\tau_j^g$  paramètre l'hypersurface de  $\Sigma_0$  d'annulation de  $\Delta_j$ . On en déduit l'estimation suivante sur  $\Delta_j$ ,

$$(4.5.13) \quad |\Delta_j(\zeta)| \geq C |\tau - \tau_j^g(\eta)| = C |\zeta - (\tau_j^g(\eta), \eta)| \geq C \operatorname{dist}(\zeta, \mathcal{G}).$$

Puisque la matrice  $T$  est régulière, donc uniformément bornée ainsi que son inverse, pour tout  $\zeta$

au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , on a d'après (4.5.13),

$$(4.5.14) \quad \left| e^{t\mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) \right| \leq C e^{-C \operatorname{dist}(\zeta, \mathcal{G})^{1/2} t}.$$

On se donne maintenant  $\zeta$  dans un voisinage conique de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi_0$  avec  $\zeta = \lambda \zeta^*$  où  $\lambda = |\zeta| \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\zeta^*$  est dans un voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ . On a alors, par homogénéité, d'après (4.5.14) et en utilisant l'Hypothèse 4.6,

$$\begin{aligned} \left| e^{t\mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) \right| &= \left| e^{\lambda t \mathcal{A}(\zeta^*)} \Pi_-^e(\zeta^*) \right| \leq C e^{-C \operatorname{dist}(\zeta^*, \mathcal{G})^{1/2} \lambda t} \\ &= C e^{-C \operatorname{dist}(\lambda \zeta^*, \mathcal{G})^{1/2} \lambda^{1/2} t} \leq C e^{-C |\zeta|^{(a_1+1)/2} t}. \end{aligned}$$

On utilise enfin la compacité de  $\Sigma_0$  pour étendre cette inégalité à tout  $\Xi_0$ , et donc obtenir l'estimation (4.5.12a) recherchée pour tout  $\zeta$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ .

Concernant l'estimation (4.5.12b), on remarque que l'on a, pour  $t \geq 0$  et pour  $\zeta$  non glancing,

$$e^{t\mathcal{A}(\zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta) = e^{t\mathcal{A}(\zeta)} \Pi_-^e(\zeta) \Pi_{\mathbb{C}^N}^-(\zeta),$$

où  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^-(\zeta)$  est le projecteur de  $\mathbb{C}^N$  sur l'espace stable  $E_-(\zeta)$  selon la décomposition (4.1.25), défini pour  $\zeta$  non glancing. On va donc contrôler le projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^-(\zeta)$  et utiliser l'estimation précédente (4.5.12a) pour conclure. On se place toujours au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$  et on suppose pour simplifier l'écriture qu'il existe en  $\underline{\zeta}$  une unique valeur propre glancing  $\underline{\xi}_g$  de multiplicité algébrique 2.

Si l'on applique également le raisonnement de la preuve de la Proposition 4.1.21 à la partie instable  $E^+(\zeta)$ , on obtient une base analytique

$$E_1(\zeta), \dots, E_N(\zeta)$$

de  $\mathbb{C}^N$  associée à une matrice de changement de base  $\tilde{T}(\zeta)$  analytique au voisinage de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Sigma_0$ , telle que dans cette base, la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  s'écrit

$$\tilde{T}(\zeta)^{-1} \mathcal{A}(\zeta) \tilde{T}(\zeta) = \operatorname{diag}(\mathcal{A}_-(\zeta), \mathcal{A}_1(\zeta), Q(\zeta), \mathcal{A}_+(\zeta), \mathcal{A}_2(\zeta)),$$

où  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  est de partie réelle définie négative,  $\mathcal{A}_1(\zeta)$  est le bloc diagonal associé aux valeurs propres rentrantes,  $\mathcal{A}_+(\zeta)$  est de partie réelle définie positive,  $\mathcal{A}_2(\zeta)$  est le bloc diagonal associé aux valeurs propres sortantes, et l'unique bloc de taille  $2 \times 2$   $Q(\zeta)$ , associé à la valeur propre glancing  $\underline{\xi}_g$ , s'écrit

$$Q(\zeta) = i \begin{pmatrix} \underline{\xi}_g + q_1(\zeta) & 1 \\ q_2(\zeta) & \underline{\xi}_g \end{pmatrix},$$

où  $q_1(\underline{\zeta}) = q_2(\underline{\zeta}) = 0$  et  $\frac{\partial q_2}{\partial \tau}(\underline{\zeta}) \neq 0$ .

On souhaite à partir de la base  $E_1, \dots, E_N$  construire une base  $F_1, \dots, F_N$  adaptée à la décomposition

$$\mathbb{C}^N = E_-(\zeta) \oplus E_+(\zeta)$$

pour  $\zeta$  non glancing. Si  $E_1(\zeta), \dots, E_{p-1}(\zeta)$  sont les  $p-1$  premiers vecteurs correspondant aux blocs  $\mathcal{A}_-(\zeta)$  et  $\mathcal{A}_1(\zeta)$  de la base de  $\mathbb{C}^N$  associée à  $T(\zeta)$ , on pose, pour  $j = 1, \dots, p-1$ ,  $F_j(\zeta) := E_j(\zeta)$ . On note que  $F_1(\zeta), \dots, F_{p-1}(\zeta)$  est ainsi une famille libre de l'espace stable  $E_-(\zeta)$ . De même on pose  $F_j(\zeta) := E_j(\zeta)$  pour  $j = p+2, \dots, N$ , où  $E_{p+2}(\zeta), \dots, E_N(\zeta)$  sont les vecteurs de la base de  $\mathbb{C}^N$  définie par  $T(\zeta)$  associés aux blocs  $\mathcal{A}_+(\zeta)$  et  $\mathcal{A}_2(\zeta)$ , qui forment une famille libre de  $E_+(\zeta)$ .

Il nous faut maintenant déterminer les vecteurs  $F_p(\zeta)$  et  $F_{p+1}(\zeta)$  qui sont les vecteurs propres stable et instable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  associés au bloc  $Q(\zeta)$ . Si  $\xi_-(\zeta), \xi_+(\zeta)$  sont les deux valeurs propres

(confondues pour  $\zeta$  glancing) stable et instable proches de la valeur propre glancing  $\underline{\xi}_g$ , alors les vecteurs propres stable et instable pour  $\mathcal{A}(\zeta)$  associés à  $\xi_-(\zeta)$  et  $\xi_+(\zeta)$  sont donnés par

$$F_p(\zeta) := E_p(\zeta) + \frac{q_2(\zeta)}{\xi_-(\zeta) - \underline{\xi}_g} E_{p+1}(\zeta), \quad F_{p+1}(\zeta) := E_p(\zeta) + \frac{q_2(\zeta)}{\xi_+(\zeta) - \underline{\xi}_g} E_{p+1}(\zeta).$$

En effet, un vecteur propre de la matrice  $\tilde{T}(\zeta)^{-1} \mathcal{A}(\zeta) \tilde{T}(\zeta)$  associé à la valeur propre  $\xi_{\pm}(\zeta)$  est donné par  ${}^t(0, \dots, 0, 1, \frac{q_2(\zeta)}{\xi_{\pm}(\zeta) - \underline{\xi}_g}, 0, \dots, 0)$ . On note que lorsque  $\zeta$  est glancing, c'est-à-dire que  $\xi_-(\zeta) = \xi_+(\zeta)$  et que  $q_2(\zeta) = 0$ , alors  $F_p(\zeta) = F_{p+1}(\zeta) = E_p(\zeta)$ .

La matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^N$  à la base  $F_1, \dots, F_N$  est ainsi donnée par le produit de  $T(\zeta)$  et de la matrice diagonale par blocs

$$P(\zeta) := \text{diag} \left( I_{p-1}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{q_2(\zeta)}{\xi_-(\zeta) - \underline{\xi}_g} & \frac{q_2(\zeta)}{\xi_+(\zeta) - \underline{\xi}_g} \end{pmatrix}, I_{N-p-1} \right).$$

On en déduit que le projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^-$  s'écrit

$$\Pi_{\mathbb{C}^N}^- = T(\zeta) P(\zeta) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P(\zeta)^{-1} T(\zeta)^{-1}.$$

La matrice  $T(\zeta)$  est analytique donc bornée ainsi que son inverse au voisinage de  $\underline{\zeta}$ . Puisque l'on a déjà montré que  $\frac{q_2(\zeta)}{\xi_-(\zeta) - \underline{\xi}_g}$  et  $\frac{q_2(\zeta)}{\xi_+(\zeta) - \underline{\xi}_g}$  sont bornés au voisinage de  $\underline{\zeta}$ , les matrices  $P(\zeta)$  et  ${}^t \text{com } P(\zeta)$  sont bornées. Il nous faut alors estimer le déterminant  $\det P(\zeta)$ . Puisque  $\xi_-(\zeta)$  et  $\xi_+(\zeta)$  sont les deux racines (éventuellement confondues) du polynôme  $\xi^2 - (2\underline{\xi}_g + q_1(\zeta))\xi + \underline{\xi}_g^2 + \underline{\xi}_g q_1(\zeta) - q_2(\zeta)$ , on a

$$(\xi_-(\zeta) - \underline{\xi}_g)(\xi_+(\zeta) - \underline{\xi}_g) = -q_2(\zeta),$$

et donc

$$\det P(\zeta) = \frac{q_2(\zeta)(\xi_-(\zeta) - \xi_+(\zeta))}{(\xi_-(\zeta) - \underline{\xi}_g)(\xi_+(\zeta) - \underline{\xi}_g)} = -(\xi_-(\zeta) - \xi_+(\zeta)).$$

On en déduit

$$|\det P(\zeta)| = |\Delta_g(\zeta)|^{1/2} \geq C \text{dist}(\zeta, \mathcal{G})^{1/2},$$

d'après l'estimation (4.5.13). Le contrôle (4.5.12b) s'ensuit de la même manière que le contrôle (4.5.12a) en utilisant l'estimation (4.5.12a) et l'Hypothèse 4.6.

Enfin, pour l'estimation (4.5.12c), si l'on reprend les notations et les résultats du point précédent, on peut écrire la matrice  $e^{t\mathcal{A}(\zeta)}(I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta))$  comme

$$e^{t\mathcal{A}(\zeta)}(I - \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\zeta)) = \tilde{T}(\zeta)^{-1} P(\zeta)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & e^{t\mathcal{A}_1(\zeta)} & & & \\ & & e^{tQ(\zeta)} \mathbb{1}_{\Delta_g(\zeta) > 0} & & \\ & 0 & & e^{t\mathcal{A}_+(\zeta)} & \\ & & & & e^{t\mathcal{A}_2(\zeta)} \end{pmatrix} P(\zeta) \tilde{T}(\zeta).$$

On remarque que les valeurs propres des matrices  $\mathcal{A}_1(\zeta)$ ,  $\mathcal{A}_2(\zeta)$  ainsi que de la matrice  $Q(\zeta)$  lorsque  $\Delta_g(\zeta) > 0$ , sont imaginaires pures, et que la matrice  $\mathcal{A}_+(\zeta)$  est de partie réelle définie positive uniformément par rapport à  $\zeta$ . Ainsi, en utilisant l'estimation sur la matrice de passage  $P(\zeta)^{-1}$  démontrée plus haut, on peut conclure quant à l'estimation (4.5.12c).  $\square$



On peut maintenant définir rigoureusement les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ . La partie concernant la partie oscillante du résultat suivant est tirée de [JMR95, Proposition 6.2.1] et [CGW11, Proposition 2.2], dont on rappelle la preuve ici. La preuve du résultat concernant la partie évanescence est plus simple et consiste à montrer qu'une certaine série converge.

**Lemme 4.5.17** ([JMR95, Proposition 6.2.1]). *Pour tout  $T > 0$  et  $s \geq 0$ , les projecteurs  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  et  $\mathbf{E}$  définis selon (4.4.9) et (4.4.10) sur l'espace des polynômes trigonométriques admettent chacun une unique extension par continuité de l'espace de profils  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  dans lui-même. De plus, pour tout  $T_0 > 0$ , la norme de ces projecteurs est uniformément bornée par rapport à  $T$  dans  $]0, T_0]$ .*

*D'autre part, pour tout  $T > 0$  et  $s \geq 0$ , le projecteur  $\mathbf{E}$  est bien défini sur l'espace  $\mathcal{P}_{s+[b_1],T}^{\text{ev}}$  et envoie cet espace dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ . Il est de plus uniformément borné par rapport à  $s$  et  $T$ . On rappelle que  $b_1$  désigne le réel intervenant dans la Proposition 4.5.16.*

*Enfin, pour tout  $T > 0$  et  $s \geq 0$ , les projecteurs  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$  définis selon (4.5.10) et (4.5.9) sur l'espace des polynômes trigonométriques admettent chacun une unique extension par continuité de l'espace de profils  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  dans lui-même. De plus, pour tout  $T_0 > 0$ , la norme de ces projecteurs est uniformément bornée par rapport à  $T$  dans  $]0, T_0]$ .*

*Preuve.* On montre d'abord le résultat pour la partie oscillante. On se donne  $U^{\text{osc}}$  un polynôme trigonométrique de la forme

$$U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d},$$

où chaque somme en  $\xi$  est finie, et on note, pour  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$ ,

$$(4.5.15) \quad U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d) := \sum_{\xi} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \xi \psi_d}.$$

D'après l'expression (4.4.10) du projecteur  $\mathbf{E}$  et puisque les projecteurs  $\pi_\alpha$  sont nuls pour toute fréquence  $\alpha$  non caractéristique, on a, pour  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$ ,

$$\mathbf{E} U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d) = \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} \pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \xi \psi_d},$$

et donc, d'après la Remarque 4.1.7 qui affirme que les projecteurs  $\pi_\alpha$  sont uniformément bornés,

$$|\mathbf{E} U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d)|^2 \leq C N \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} |U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z)|^2,$$

en utilisant le fait que l'ensemble  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$  est de cardinal au plus  $N$ . D'autre part on a, d'après (4.5.15), pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$  et  $\xi$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d) e^{-i \xi \psi_d} d\psi_d,$$

et donc par Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbf{E} U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d)|^2 \leq C N^2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R |U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d)|^2 d\psi_d.$$

On applique alors le Lemme de Fatou à la sommation en  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$  et l'intégration par rapport à  $z'$  dans  $\omega_T$  pour obtenir

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \|\mathbf{E} U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(\cdot, x_d, \psi_d)\|_{L^2(\omega_T)}^2 \leq C N^2 \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \|U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(\cdot, x_d, \psi_d)\|_{L^2(\omega_T)}^2 d\psi_d,$$

et donc

$$\|\mathbf{E}U(\cdot, x_d, \cdot, \psi_d)\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \leq C N^2 \sup_{\psi_d > 0} \|U^{\text{osc}}(\cdot, x_d, \cdot, \psi_d)\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2,$$

c'est-à-dire

$$\|\mathbf{E}U\|_{\mathcal{E}_{0,T}} \leq \sqrt{C} N \|U\|_{\mathcal{E}_{0,T}}.$$

Le projecteur  $\mathbf{E}$  admet donc une unique extension uniformément bornée de  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$ . Le résultat pour  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  pour  $s \geq 1$  s'obtient en observant que le projecteur  $\mathbf{E}$  commute avec les dérivées partielles par rapport à  $z'$  et  $\theta$ . Le même raisonnement s'applique au projecteur  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , ce qui conclut la preuve relative à la partie oscillante.

Concernant la partie évanescence de  $\mathbf{E}$ , il nous faut montrer que si  $U^{\text{ev}}$  de la forme

$$U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}$$

appartient à  $\mathcal{P}_{s+[\mathfrak{b}_1],T}^{\text{ev}}$ , alors  $\mathbf{E}U^{\text{ev}}$  est dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ . Par définition de la norme de  $\mathcal{E}_{s,T}$  et d'après la formule de Plancherel on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}U^{\text{ev}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 &= \sup_{x_d > 0, \psi_d > 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} \left\| e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0) \right\|_{H_+^l(\omega_T)}^2 \\ &\leq \sup_{x_d > 0, \psi_d > 0} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} c_1^2 |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}|^{2b_1} \|U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0)\|_{H_+^l(\omega_T)}^2, \end{aligned}$$

d'après l'estimation (4.5.12b) de la Proposition 4.5.16, en reprenant les notations de cette proposition. On en déduit donc l'estimation

$$\|\mathbf{E}U^{\text{ev}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \leq C \|U^{\text{ev}}\|_{\mathcal{E}_{s+[\mathfrak{b}_1],T}}.$$

On s'intéresse maintenant à la convergence vers zéro dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  du profil  $\mathbf{E}U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d)$ , pour tout  $x_d \geq 0$  fixé. Soit  $\varepsilon > 0$ . La somme

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}|^{2b_1} \|U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, x_d, 0)\|_{H_+^l(\omega_T)}^2,$$

bornée par  $C \|U^{\text{ev}}\|_{\mathcal{E}_{s+[\mathfrak{b}_1],T}}^2$ , est convergente, et donc il existe  $M > 0$  tel que

$$\sum_{|\mathbf{n}| > M} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}|^{2b_1} \|U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, x_d, 0)\|_{H_+^l(\omega_T)}^2 \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 &= \sum_{0 < |\mathbf{n}| \leq M} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} \left\| e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0) \right\|_{H_+^l(\omega_T)}^2 \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{n}| > M} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} \left\| e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0) \right\|_{H_+^l(\omega_T)}^2. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (4.5.12b) de la Proposition 4.5.16 et par construction de  $M$ , la deuxième somme du terme de droite est majoré par  $c_1^2 \varepsilon$ . Pour la première somme, d'après la même estimation

(4.5.12b), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < |\mathbf{n}| \leq M} \sum_{l=0}^s (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} \left\| e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0) \right\|_{H_+^l(\omega_T)}^2 \\ & \leq \sum_{0 < |\mathbf{n}| \leq M} \sum_{l=0}^s c_1^2 (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-l} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}|^{2b_1} e^{-2c_1 \psi_d |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}|^{-b_1}} \|U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(\cdot, 0)\|_{H_+^l(\omega_T)}^2. \end{aligned}$$

Le terme de droite est une somme finie de fonction de  $\psi_d$  convergeant vers zéro à l'infini, et donc il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $|\psi_d| > B$ , le terme de droite est majoré par  $\varepsilon$ . On obtient finalement

$$\|\mathbf{E} U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \leq (1 + c_1^2) \varepsilon,$$

pour tout  $\psi_d$  tel que  $|\psi_d| > B$ , et la convergence recherchée s'en suit. Le profil  $\mathbf{E} U^{\text{ev}}$  vérifie donc bien la Définition 4.2.4 des profils évanescents de  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ , ce qui conclut la preuve.

Concernant les projecteurs  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , la preuve est analogue à celle pour la partie oscillante des projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}$ .  $\square$

À présent que les projecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ ,  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$  sont bien définis, on peut montrer que le noyau dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  de l'opérateur rapide  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$  est bien donné par l'image du projecteur  $\mathbf{E}$ .

**Définition 4.5.18.** *Pour  $s \geq 0$  et  $T > 0$ , on note  $\mathcal{N}_{s,T}$  l'image dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  de  $\mathcal{P}_{s+[b_1],T}$  par le projecteur  $\mathbf{E}$ . On note également  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}} := \mathcal{N}_{s,T} \cap \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{ev}} := \mathcal{N}_{s,T} \cap \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ .*

**Lemme 4.5.19** ([JMR95, Lemme 6.2.3.]). *L'espace  $\mathcal{N}_{s,T}$  est le noyau dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  de l'opérateur  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$ .*

*Preuve.* Puisque  $\mathcal{N}_{s,T}$  est égal au noyau  $\ker I - \mathbf{E}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}$ , il nous faut montrer l'égalité des noyaux  $\ker I - \mathbf{E} = \ker \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}$ . On se donne  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$  dans  $\ker \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})$ , que l'on écrit

$$U(z, \theta, \psi_d) = U^*(z, \psi_d) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} U_{\mathbf{n}}(z, \psi_d) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta},$$

où  $U_{\mathbf{n}}$  se décompose dans  $\mathcal{P}_{s,T} = \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  comme  $U_{\mathbf{n}} = U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}} + U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}$ , pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ . On obtient alors les équations différentielles suivantes,

$$\partial_{\psi_d} U^* = 0, \quad \text{et} \quad (-\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + \partial_{\psi_d}) U_{\mathbf{n}} = 0, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}.$$

Ainsi, d'une part, on a  $U^*(z, \psi_d) = U^*(z)$ , qui appartient donc à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ . D'autre part, pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m$ , le profil  $U_{\mathbf{n}}$  admet la décomposition suivante, d'après la décomposition (4.1.25) de  $\mathbb{C}^N$  en sous-espaces stables de  $\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ ,

$$U_{\mathbf{n}} = \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}} + \Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}} + \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} \pi_{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}},$$

où, en utilisant les notations de la Définition 4.1.20,  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}$  (resp.  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}$ ) appartient à la partie elliptique stable (resp. instable)  $E_-^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  (resp.  $E_+^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ ), et pour  $\xi = \xi_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{C}(\mathbf{n})$ ,  $\pi_{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}}$  appartient au sous-espace  $\ker L(0, \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}))$  (on rappelle que d'après la Proposition 4.1.16, pour  $j$  dans  $\mathcal{R}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ , on a  $E_-^j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) = \ker L(0, \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}))$ , avec une propriété similaire pour  $j$  dans  $\mathcal{S}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ ). En utilisant  $\mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) = -i\widetilde{L}(0, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  et les propriétés des projecteurs  $\pi_{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)}$ , on obtient les équations différentielles suivantes

$$(4.5.16a) \quad \partial_{\psi_d} (\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}) = \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}),$$

$$(4.5.16b) \quad \partial_{\psi_d} (\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}) = \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta) (\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}),$$

$$(4.5.16c) \quad \partial_{\psi_d} (\pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}}) = i \xi (\pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}}), \quad \forall \xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n}).$$

En résolvant l'équation (4.5.16a), il vient

$$\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, 0),$$

qui tend vers zéro lorsque  $\psi_d$  croit vers l'infini, et appartient donc à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ . De la même manière, avec (4.5.16b), on a

$$\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, 0).$$

Mais puisque  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta)$  est le projecteur sur la partie elliptique instable, si  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, 0)$  est non nul, alors  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}$  n'est pas borné, et on a donc nécessairement

$$\Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}} = 0.$$

Enfin, l'équation (4.5.16c) implique, pour  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ ,

$$\pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}}(z, \psi_d) = e^{i \xi \psi_d} \pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}}(z, 0),$$

qui appartient à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ . En résumé, le profil  $U_{\mathbf{n}} = U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}} + U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}$  est donné par

$$U_{\mathbf{n}}^{\text{osc}}(z, \psi_d) = \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} \pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}}(z, 0) e^{i \xi \psi_d}, \quad U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) = e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^{e,+}(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}(z, 0),$$

et donc l'égalité  $\mathbf{E}U = U$  est clairement vérifiée.

Réciproquement, si  $U^{\text{ev}} = \mathbf{E}U^{\text{ev}}$ , on obtient immédiatement  $\mathcal{L}(\partial_{\theta}, \partial_{\psi_d}) U^{\text{ev}} = 0$ . D'autre part, si l'on suppose  $U^{\text{osc}} = \mathbf{E}U^{\text{osc}}$ , on se donne une suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  de polynômes trigonométriques convergeant dans  $\mathcal{E}_{s+\lceil b_1 \rceil, T}$  vers  $U^{\text{osc}}$ . Par continuité du projecteur  $\mathbf{E}$ , la suite de polynômes trigonométriques  $(\mathbf{E}U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  converge dans  $\mathcal{E}_{s,T}$  vers  $U^{\text{osc}}$ . Or on vérifie immédiatement que ces polynômes trigonométriques vérifient  $\mathcal{L}(\partial_{\theta}, \partial_{\psi_d}) \mathbf{E}U_{\nu}^{\text{osc}} = 0$ , et en passant à la limite on obtient alors  $\mathcal{L}(\partial_{\theta}, \partial_{\psi_d}) U^{\text{osc}} = 0$ .  $\square$

*Remarque 4.5.20.* Dans la preuve précédente, on a en particulier montré que si  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$  appartient à  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{N}_{s,T}^{\text{ev}}$ , alors le profil  $U^{\text{osc}}$  s'écrit

$$(4.5.17) \quad U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = U^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d},$$

avec, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ ,  $\pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} = U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$ , et le profil  $U^{\text{ev}}$  s'écrit

$$(4.5.18) \quad U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta}.$$

La remarque précédente nous permet de montrer le résultat suivant, faisait le lien entre la norme  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))$  d'un profil de  $\mathcal{N}_{0,T}^{\text{osc}}$  et son produit scalaire rentrant (4.2.12) avec lui même. Il sera utilisé dans la suite pour déduire d'estimations a priori sur le produit scalaire des estimations a priori sur les normes  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ . Il est l'analogue de [JMR95, Lemme 6.2.4], dans une forme plus faible (compte tenu d'un manque de symétrie dans notre cas).

**Lemme 4.5.21.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout profil  $U^{\text{osc}}$  de  $\mathcal{N}_{0,T}^{\text{osc}}$ , on a, pour*

tout  $x_d \geq 0$ ,

$$C \|U^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) \leq \langle U^{\text{osc}} | U^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) \leq \|U^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d).$$

*Preuve.* La deuxième inégalité est immédiate par définition du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{in}}$ , puisque l'on a

$$\langle U^{\text{osc}} | U^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \|U^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2(x_d, \psi_d) d\psi_d \leq \sup_{\psi_d \geq 0} \|U^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2(x_d, \psi_d).$$

D'autre part, d'après la Remarque 4.5.20, si  $U^{\text{osc}}$  appartient à  $\mathcal{N}_{0,T}^{\text{osc}}$ , alors le profil s'écrit

$$U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = U^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d},$$

où, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ , on a  $U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} = \pi_{(\mathbf{n}, \zeta, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$ . On a alors, par l'égalité de Plancherel,

$$\|U^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2(x_d, \psi_d) = \|U^*\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \left\| \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \xi \psi_d} \right\|_{L^2(\omega_T)}^2$$

et donc, puisque pour tout  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , l'ensemble  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$  est de cardinal au plus  $N$ ,

$$\begin{aligned} \|U^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2(x_d, \psi_d) &\leq \|U^*\|_{L^2(\omega_T)}^2 + N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} \|U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T)}^2(x_d) \\ &\leq C \langle U^{\text{osc}} | U^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d), \end{aligned}$$

d'après la formule (4.2.15). On obtient alors la première inégalité du Lemme 4.5.21 en passant à la borne supérieure en  $\psi_d \geq 0$ .  $\square$

### 4.5.3 Réduction du système

Dans cette partie on montre que toute solution du système (4.4.11) ne présente en fait que des modes rentrants (en particulier toute solution est à moyenne nulle), et est supportée sur un intervalle fini en  $x_d$ . On montre également que le système (4.4.11) se découple selon les parties oscillantes et évanescentes, et même, pour la partie oscillante, selon l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  des modes résonants et chacun des modes non résonants. On prouve plus précisément le résultat suivant. On rappelle que  $s_0$  est donné par  $s_0 = h + (d + m)/2$  où  $h$  est un entier supérieur à  $(3 + a_1)/2$ , qui apparaît dans l'estimation (4.5.3), avec  $a_1$  le réel de l'Hypothèse 4.6.

**Proposition 4.5.22.** *Soit  $T > 0$ , et soit  $s > s_0$ . Toute solution  $U$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  du système (4.4.11) est telle que sa partie oscillante  $U^{\text{osc}}$  ne présente que des modes rentrants. De plus, le système (4.4.11) portant sur  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  est équivalent aux systèmes découplés suivants, le premier portant sur les modes rentrants résonants,*

$$(4.5.19a) \quad \mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U_{\text{res}}^{\text{osc}} = U_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.19b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) \beta_T U_{\text{res}}^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(\beta_T U_{\text{res}}^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \beta_T U_{\text{res}}^{\text{osc}} \right] = 0$$

$$(4.5.19c) \quad (U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.19d) \quad (U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0,$$

puis le système vérifié par chaque mode rentrant non résonant, pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ ,

$$(4.5.20a) \quad \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} + \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \frac{1}{2} \partial_{\Theta} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}^2 = 0$$

$$(4.5.20b) \quad (S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})|_{x_d=0} = h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$$

$$(4.5.20c) \quad (S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})|_{t \leq 0} = 0,$$

et enfin le système portant sur la partie évanescente  $U^{\text{ev}}$ ,

$$(4.5.21a) \quad \mathbf{E} U^{\text{ev}} = U^{\text{ev}}$$

$$(4.5.21b) \quad U_{|x_d=0, \psi_d=0}^{\text{ev}} = H^{\text{ev}},$$

où, si la solution  $U^{\text{osc}}$  (qui ne présente donc que des modes rentrants et est polarisée) s'écrit

$$U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

avec  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  des fonctions scalaire, alors la partie résonante  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est donnée par

$$U_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

et les composantes scalaires par direction non résonante  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  de  $\Omega_T \times \mathbb{T}$  dans  $\mathbb{C}$ , pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , sont données par

$$S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \Theta},$$

où la fonction  $\beta_T$  de  $x_d$ , de classe  $C^\infty$ , vaut 1 sur  $[0, \mathcal{V}^* T]$  et 0 sur  $[2\mathcal{V}^* T, +\infty)$  (où  $\mathcal{V}^*$  a été défini dans le Lemme 4.1.14), et où  $H_{\text{res}}^{\text{osc}}$ ,  $h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , et  $H^{\text{ev}}$  sont déterminés à partir de  $G$  par les équations

$$(4.5.22a) \quad H_{\text{res}}^{\text{osc}}(z', \theta) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \Pi_-^{j(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0)}(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) (B_{|E_-(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta)}})^{-1} G_{\lambda \mathbf{n}_0}(z') e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta},$$

$$(4.5.22b)$$

$$h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z', \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \left\langle \Pi_-^{j(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0)}(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) (B_{|E_-(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta)}})^{-1} G_{\lambda \mathbf{n}_0}(z') \middle| E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right\rangle_{\mathbb{C}^N} e^{i \lambda \Theta},$$

$$(4.5.22c) \quad H^{\text{ev}}(z', \theta) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) (B_{|E_-(\mathbf{n} \cdot \zeta)}})^{-1} G_{\mathbf{n}}(z') e^{i \mathbf{n} \cdot \theta},$$

où, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})$ ,  $j(\mathbf{n}, \xi)$  est l'indice tel que  $\xi = \xi_{j(\mathbf{n}, \xi)}(\mathbf{n} \cdot \zeta)$ . On rappelle que les amplitudes  $G_{\mathbf{n}}$  de la fonction  $G$  ont été définies par (4.1.3), et que les projecteurs  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$  ont été introduits dans la définition 4.5.13. On note que dans ces notations, la solution  $U$  se décompose comme

$$U(z, \theta, \psi_d) = U_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) + \sum_{\substack{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \\ (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}}} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \mathbf{n}_0 \cdot \theta + \xi_0 \psi_d) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) + U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d).$$

Pour montrer le Théorème 4.3.1, il est ainsi équivalent de prouver qu'il existe des solutions  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$ ,  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $U^{\text{ev}}$  aux systèmes (4.5.19), (4.5.20) et (4.5.21).

Dans cette partie consacrée à la preuve de la Proposition 4.5.22, on se donne donc  $U$  une solution de (4.4.11) suffisamment régulière, et on commence par montrer que sa moyenne  $U^*$  est nulle, en isolant dans l'équation (4.4.11) la moyenne dont on montre qu'elle vérifie un problème aux limites hyperbolique linéaire et homogène. Pour montrer qu'il n'y a pas de modes sortants, on utilise le produit scalaire (4.2.13) pour les modes sortants, défini pour des profils à support compact en  $x_d$ . On montre donc dans un premier temps que la solution  $U$  considérée est à support compact en  $x_d$ , avant d'isoler les modes sortants de l'équation (4.4.11) pour en déduire qu'ils sont nuls. On commence par réécrire le terme de gauche de l'équation (4.4.11b).

### Réécriture de l'équation d'évolution

D'après la Remarque 4.5.20, puisque  $U$  vérifie l'équation de polarisation (4.4.11a), d'après la Remarque 4.5.20, le profil s'écrit  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$ , où

$$(4.5.23a) \quad U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = U^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sum_{\xi \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \psi_d},$$

et

$$(4.5.23b) \quad U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta},$$

avec  $\pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}} = U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$  pour tous  $\mathbf{n}, \xi$ . On réécrit alors  $U^{\text{osc}}$  pour tirer partie des colinéarités, en utilisant les notations de la Partie 4.5.1. On se donne  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , et  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$  tels que  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$ , et l'on se donne également  $\xi$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n})$ . Puisque l'ensemble  $\mathcal{C}$  est homogène de degré 1, on a  $\mathcal{C}(\mathbf{n}) = \lambda \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$ , et donc il existe  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$  tel que  $\xi = \lambda \xi_0$ . Par polarisation du profil  $U$ , l'amplitude  $U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$  appartient au noyau de  $L(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi))$ , qui est donné d'après la Définition 4.5.4 par  $\text{Vect} E(\mathbf{n}, \xi) = \text{Vect} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ . On peut donc noter

$$U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z) = \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

où  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  est une fonction scalaire de  $\Omega_T$ . Le profil  $U^{\text{osc}}$  étant supposé réel, les coefficients  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  vérifient  $\sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} = \overline{\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}}$  pour tout  $\lambda, \mathbf{n}_0$  et  $\xi_0$ . Dans ces notations, le profil  $U^{\text{osc}}$  s'écrit

$$U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = U^*(z) + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0).$$

On note que d'après l'identité (4.2.17) et puisque les vecteurs  $E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  sont de norme 1, lorsqu'il est bien défini, le produit scalaire  $\langle U^{\text{osc}} | U^{\text{osc}} \rangle_{\text{out}}(t)$  est dans ces notations donné par

$$\langle U^{\text{osc}} | U^{\text{osc}} \rangle_{\text{out}}(t) = (2\pi)^m \|U^*\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) + (2\pi)^m \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t).$$

On rappelle que le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{out}}$  n'est défini que pour les profils à support compact en  $x_d$ , mais l'on montrera que la solution de (4.4.11) est effectivement à support compact dans la direction normale avant d'utiliser ce produit scalaire.

Le projecteur  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  intervenant dans l'équation (4.4.11b) agissant seulement sur l'espace des profils oscillants, il nous faut déterminer la partie oscillante du terme  $\widetilde{L}(0, \partial_z) U + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U$ . D'une part, la partie oscillante de  $\widetilde{L}(0, \partial_z) U$  est donnée par

$$\widetilde{L}(0, \partial_z) U^{\text{osc}} = \widetilde{L}(0, \partial_z) U^* + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \widetilde{L}(0, \partial_z) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0).$$

Ces deux termes correspondent aux termes (4.5.25a) et (4.5.25b) de l'équation (4.5.25) plus bas.

D'autre part d'après le lemme 4.2.6 concernant les propriétés d'algèbre de l'espace des profils  $\mathcal{P}_{s,T}$ , la partie oscillante du terme quadratique  $\sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U$  est quant à elle donnée par

$$(4.5.24) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U^{\text{osc}} &= \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(U^*, i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_1 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_1) \\ \xi_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_2)}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_1, \xi_1), i \lambda_2 \mathbf{n}_2 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_2, \xi_2) \\ &\sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_1, \xi_1} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_2, \xi_2} e^{i (\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) \psi_d}. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.5.24) constitue le terme (4.5.25c) de l'équation (4.5.25) ci-dessous. Dans le deuxième terme du membre de droite de l'équation (4.5.24), par la présence des projecteurs  $\tilde{\pi}_\alpha$  dans le projecteur  $\tilde{\mathbf{E}}^i$ , seules les fréquences  $((\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \zeta, \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2)$  qui sont caractéristiques seront conservées.

- i) Si  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ ,  $\xi_1 = \xi_2$  et  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , la fréquence ainsi créée est nulle, donc caractéristique. Ce terme non oscillant correspond au terme (4.5.25d) de l'équation (4.5.25) plus bas.
- ii) Si  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ ,  $\xi_1 = \xi_2$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ , alors la fréquence non nulle obtenue est donnée par  $(\lambda_1 + \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta, \xi_1)$  qui est caractéristique. C'est ce que l'on appelle l'auto-interaction de la fréquence  $(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta, \xi_1)$  avec elle-même, et cela constitue le terme (4.5.25e) de l'équation (4.5.25).
- iii) Enfin, dans les cas restants, si la fréquence non nulle obtenue  $\lambda_1(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta, \xi_1) + \lambda_2(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta, \xi_2)$  est caractéristique, alors cela correspond à une résonance au sens de la Définition 4.5.8. C'est-à-dire qu'il existe  $\lambda_0$  dans  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  et  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$  tels que

$$\lambda_1(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta, \xi_1) + \lambda_2(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta, \xi_2) = \lambda_0(\mathbf{n}_0 \cdot \zeta, \xi_0),$$

et donc il existe  $\ell$  dans  $\mathbb{Z}^*$  tel que  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0) = \ell(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r)$  où le septuplet  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q)$  appartient à l'un des ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  ou  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , c'est-à-dire où  $\mathbf{n}_1 \cdot \zeta$  et  $\mathbf{n}_2 \cdot \zeta$  sont non colinéaires. Ces résonances constituent les termes (4.5.25f) et (4.5.25g) de l'équation (4.5.25).

D'après l'expression du projecteur  $\tilde{\mathbf{E}}^i$  et puisque  $\tilde{\pi}_0 = \text{Id}$ , le terme  $\tilde{\mathbf{E}}^i[\tilde{L}(0, \partial_z) U + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U]$  est donc donné par

$$(4.5.25a) \quad \tilde{\mathbf{E}}^i \left[ \tilde{L}(0, \partial_z) U + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U \right] = \tilde{L}(0, \partial_z) U^*$$

$$(4.5.25b) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \zeta, \xi_0)} \tilde{L}(0, \partial_z) E(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d},$$

qui constituent les termes de transport de la moyenne et des modes oscillants, puis les termes de résonance avec la moyenne ainsi que de résonance pour donner une fréquence nulle

$$(4.5.25c) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \zeta, \xi_0)} \tilde{L}_1(U^*, i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d}$$



$$(4.5.25d) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(-\lambda \mathbf{n}_0, -\lambda \xi_0), i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0},$$

et enfin l'auto-interaction

$$(4.5.25e) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \tilde{L}_1(E(\lambda_1 \mathbf{n}_0, \lambda_1 \xi_0), i \lambda_2 \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) \\ E(\lambda_2 \mathbf{n}_0, \lambda_2 \xi_0) \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \cdot \psi_d},$$

et les résonances de type 1 et 2

$$(4.5.25f) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \tilde{L}_1(E(\ell \lambda_p \mathbf{n}_p, \ell \lambda_q \xi_q), i \ell \lambda_q \mathbf{n}_q \cdot \zeta) \\ E(\ell \lambda_q \mathbf{n}_q, \ell \lambda_q \xi_q) \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \cdot \psi_d}$$

$$(4.5.25g) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \tilde{L}_1(E(\ell \lambda_p \mathbf{n}_p, \ell \lambda_q \xi_p), i \ell \lambda_q \mathbf{n}_q \cdot \zeta) \\ E(\ell \lambda_q \mathbf{n}_q, \ell \lambda_q \xi_q) \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \cdot \psi_d}.$$

On a utilisé ici l'homogénéité de degré 0 des projecteurs  $\tilde{\pi}_\alpha$ . Dans la suite on utilisera la Définition 4.5.6 des coefficients  $\Gamma$  pour réécrire les différents terme de (4.5.25). Dans l'équation (4.5.25), les vecteurs  $E(\mathbf{n}, \xi)$  étant homogènes de degré 0, on peut faire apparaître ou non les coefficients  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_p, \lambda_q$  et  $\ell$ . On choisit ici de les indiquer puisque ils nous seront utiles dans un calcul plus bas. On s'autorisera cependant à les enlever sans forcément le mentionner.

### La moyenne est nulle

On montre maintenant que la moyenne  $U^*$  est nulle, en isolant le système vérifié par celle-ci. D'après l'équation (4.5.25), la moyenne du terme  $\tilde{\mathbf{E}}^i (\tilde{L}(0, \partial_z) U + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(U, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U)$  est a priori donnée par

$$(4.5.26) \quad \tilde{L}(0, \partial_z) U^* + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_0, \xi_0), i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}.$$

On montre alors par le changement de variable  $\lambda = -\lambda$  que le deuxième terme de (4.5.26) est en fait nul. On a en effet

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_0, \xi_0), i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_0, \xi_0), -i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \\ &= - \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{L}_1(E(\mathbf{n}_0, \xi_0), i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{-\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} = 0. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de (4.5.26) étant nul, les termes non oscillants de (4.5.25) sont donnés par le terme  $\tilde{L}(0, \partial_z) U^*$  seulement. On déduit donc du système (4.4.11) que la moyenne  $U^*$  vérifie le

système découplé

$$\begin{cases} \tilde{L}(0, \partial_z) U^* = 0, \\ B U^*|_{x_d=0} = 0, \\ U^*|_{t \leq 0} = 0 \end{cases}$$

puisque  $G$  est à moyenne nulle. La moyenne  $U^*$  satisfait donc un problème aux limites vérifiant la condition de Lopatinskii uniforme dont l'opérateur  $\tilde{L}(0, \partial_z)$  est strictement hyperbolique. D'après [Kre70], le problème est ainsi bien posé et la moyenne  $U^*$  est donc nulle sur  $\Omega_T$ .

On note qu'à ce stade, l'équation (4.5.25) peut être découplée entre les modes rentrants et les modes sortants, grâce à l'Hypothèse 4.7 et le fait que les termes (4.5.25a), (4.5.25c) et (4.5.25d) soient nuls. La difficulté pour découpler le système tient maintenant à découpler la condition au bord, et l'on utilise pour cela le fait qu'il n'y ait pas de termes sortants. Ce fait repose à son tour sur l'annulation de la moyenne.

### Propagation à vitesse finie

On peut montrer que si  $U$  est une solution de (4.4.11) suffisamment régulière, alors elle est supportée dans un intervalle fini en  $x_d$ , et on a même plus précisément le résultat suivant.

**Lemme 4.5.23.** *Soit  $T > 0$  et  $s > s_0$ , et soit  $U$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  solution du système (4.4.11). Alors sa partie oscillante  $U^{\text{osc}}$  est nulle en dehors du dièdre  $\{(t, y, x_d) \in \Omega_T \mid 0 \leq x_d \leq \mathcal{V}^* t\}$  (voir Figure 4.7).*

La preuve de ce lemme utilise des techniques développées plus bas, et, afin de se concentrer sur la dérivation des estimations a priori, l'on reporte donc sa démonstration. On utilise le fait que la vitesse à laquelle se propage la solution  $U$  dans la direction normale est finie, d'après le Lemme 4.1.14.

D'après ce résultat, dans le système (4.4.11) et les systèmes linéarisés associés, on peut remplacer  $U^{\text{osc}}$  par  $\beta_T U^{\text{osc}}$  où  $\beta_T$  est la fonction de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{x_d}^+)$  définie dans la Proposition 4.5.22, qui vaut 1 sur  $[0, \mathcal{V}^* T]$  et 0 sur  $[2\mathcal{V}^* T, +\infty)$ . On peut ainsi utiliser dans la suite le produit scalaire (4.2.13) adapté aux modes sortants, qui n'est défini que pour les profils à support compact en  $x_d$ .

### Il n'y a pas de fréquence sortante

On cherche maintenant à déterminer les équations vérifiées par les modes sortants. D'après l'équation (4.5.25), puisque la moyenne  $U^*$  est nulle, on a

$$(4.5.27a) \quad \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.27b) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma(\lambda_1(\mathbf{n}_0, \xi_0), \lambda_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.27c) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\ell \lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \ell \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0.$$

On a utilisé le Lemme de Lax 4.1.12 pour écrire le terme (4.5.25b) comme le terme (4.5.27a), en utilisant le fait que l'on a par définition  $E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = \pi_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , et on a également utilisé la Définition 4.5.6 des coefficients  $\Gamma$  pour écrire les termes (4.5.25e) et (4.5.25g) comme (4.5.27b)

et (4.5.27c). On note qu'en vertu de l'Hypothèse 4.7, tous les modes  $U_{\mathbf{n},\xi}^{\text{osc}}$  en jeu dans l'équation (4.5.27) sont des modes sortants, et également que l'on s'est ainsi ramené à des équations scalaires, modulo un vecteur constant ne dépendant que des modes.

L'équation (4.5.27) est couplée aux conditions initiales

$$(4.5.28) \quad (U_{\mathbf{n},\xi}^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, \xi \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}).$$

On cherche donc à résoudre le problème (4.5.27), (4.5.28), et on va pour cela obtenir des estimations a priori en utilisant le produit scalaire (4.2.13). On va utiliser la décomposition (4.5.6) de la Définition 4.5.11, et traiter à part l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  des modes impliqués dans des résonances, qui, d'après l'Hypothèse 4.8, sont, à colinéarité près, en nombre fini.

*Modes non résonants.* On commence par s'intéresser aux modes qui n'entrent pas en jeu dans les résonances, c'est-à-dire qu'on se donne  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$  et  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}_0)$  tels que  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  n'appartient pas à  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$ . Les ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  sont donc vides, et ainsi, d'après l'équation (4.5.27), on a

$$(4.5.29a) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \cdot \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.29b) \quad + \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma(\lambda_1(\mathbf{n}_0, \xi_0), \lambda_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \cdot \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0.$$

On a utilisé ici l'identité (4.5.2) pour obtenir le terme (4.5.29b). On note que si l'on pose, pour  $z$  dans  $\Omega_T$  et  $\Theta$  dans  $\mathbb{T}$ ,

$$S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \Theta},$$

alors en utilisant l'identité (4.5.2) on vérifie que la fonction à valeurs réelles  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  vérifie l'équation de Burgers scalaire

$$\tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} + \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \partial_{\Theta} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} = 0,$$

que l'on pourrait résoudre classiquement. En effet on rappelle que  $\tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)}$ , défini dans le Lemme 4.1.12, est donné par

$$\tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} = \frac{-1}{\partial_{\xi} \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \partial_t + \frac{1}{\partial_{\xi} \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \nabla_{\boldsymbol{\eta} \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \cdot \nabla_y + \partial_{x_d}.$$

Si, pour  $k = 1, \dots, m$ , on a noté  $\eta_k$  les  $k - 1$  dernières coordonnées de  $\zeta_k$ , alors on note  $\boldsymbol{\eta} := (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de manière similaire à  $\boldsymbol{\zeta}$ . Dans cette notation,  $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}$  correspond aux  $d - 1$  dernières coordonnées de  $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}$ . On préfère cependant ici expliciter sur ce premier exemple simple les techniques qui seront appliquées dans la suite à des équations qui sortent du cadre des équations de Burgers.

On prend donc le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{out}}$  de l'égalité (4.5.29) avec la quantité

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \cdot \psi_d} \frac{\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)}{|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2},$$

pour obtenir

$$(4.5.30a) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \left\langle \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \left| \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \right. \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t),$$

(4.5.30b)

$$+ \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t) = 0.$$

On a utilisé l'identité (4.5.2) pour obtenir le terme (4.5.30b). On note que le produit scalaire est ici bien défini puisque  $U^{\text{osc}}$  est à support compact dans  $x_d$ . Par intégration par parties, on détermine que le terme de transport (4.5.30a) vérifie

$$2 \operatorname{Re} (4.5.30a) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \frac{-1}{\partial_\xi \tau_{k(\mathbf{n}_0, \xi_0)}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \partial_t \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) - \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2(t, 0).$$

On a noté  $k(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  l'entier entre 1 et  $N$  tel que si  $(\tau, \eta, \xi_0) := (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)$ , alors  $\tau = \tau_{k(\mathbf{n}_0, \xi_0)}(\eta, \xi_0)$ . On en déduit l'égalité suivante :

$$(4.5.31) \quad 2 \operatorname{Re} (4.5.30a) = \frac{-1}{\partial_\xi \tau_{k(\mathbf{n}_0, \xi_0)}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \frac{d}{dt} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) - \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2(t, 0).$$

On étudie maintenant le terme de type Burgers (4.5.30b), et plus précisément les sommes suivantes, dont la première,  $S$ , est donnée par

$$S := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d),$$

et, pour  $j = 1, 2$ ,

$$S_j := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_j \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d),$$

le terme (4.5.30b) étant donné par  $\Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) S_2$ . Or, d'une part, on note immédiatement que l'on a  $S = S_1 + S_2$  et  $S_1 = S_2$ . D'autre part, on a,

$$S = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \overline{\sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0}} | \overline{\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d)$$

puis, avec les changements de variable consécutifs  $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$  et  $\lambda_1 = -\lambda_1$ ,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda}} i \lambda_2 \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \overline{\sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0}} | \overline{\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_2 + \lambda_1 = \lambda}} i \lambda_2 \langle \sigma_{-\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \overline{\sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0}} | \overline{\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d) \end{aligned}$$

enfin, puisque, le profil  $U^{\text{osc}}$  étant réel, on a  $\sigma_{-\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} = \overline{\sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0}}$ , on obtient

$$S = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_2 + \lambda_1 = \lambda}} i \lambda_2 \langle \overline{\sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0}} \overline{\sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0}} | \overline{\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t, x_d)$$

$$= -\overline{S_2}.$$

On déduit donc de  $S = 2S_2$  que  $S_2 = 0$ , et que le terme (4.5.30b) est ainsi nul. Avec les égalités (4.5.30) et (4.5.31), on obtient alors

$$\frac{d}{dt} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) + \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2(t, 0) = 0,$$

et donc, avec la condition initiale (4.5.28), pour  $t \geq 0$ ,

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) + \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \int_0^t \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2(\rho, 0) d\rho = 0.$$

Puisque, la fréquence  $(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)$  étant sortante, la quantité  $\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)$  est strictement positive, on en conclut que  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  est nul pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$  et donc  $U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}$  est nul pour  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n}_0)$  tels que  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  sont vides, et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ .

*Modes résonants.* On s'intéresse alors aux modes sortants impliqués dans des résonances, c'est-à-dire les couples  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  de l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$ , qui sont couplés dans l'équation (4.5.27), du fait des résonances, et qu'il faut donc traiter ensemble. De l'équation (4.5.27), on déduit l'équation pour les modes résonants, qui contient, en plus d'un terme de transport et d'un terme d'auto-interaction de type Burgers, un terme de résonance. On a

$$(4.5.32a) \quad \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.32b) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.32c) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \\ \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0.$$

On a utilisé ici les identités (4.5.1) et (4.5.2). On définit deux profils construits à partir des modes résonants sortants, que l'on va manipuler ensuite. On pose

$$U_{\mathcal{R}_{\text{out}}}^{\text{osc}}(z, \boldsymbol{\theta}, \psi_d) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0), \\ \tilde{U}_{\mathcal{R}_{\text{out}}}^{\text{osc}}(z, \boldsymbol{\theta}, \psi_d) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0).$$

En prenant le produit scalaire sortant  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{out}}$  de l'égalité (4.5.32) avec le profil  $\tilde{U}_{\mathcal{R}_{\text{out}}}^{\text{osc}}$  on obtient

$$(4.5.33a) \quad \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2 \left\langle \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \middle| \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t)$$

$$(4.5.33b) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2 \\ \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \middle| \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t)$$

$$(4.5.33c) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \\ \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2 \\ \langle \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} | \sigma_{\ell \lambda_r, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}(t) = 0.$$

Les deux premiers termes se traitent de la même manière que pour les modes non résonants, et on a donc

$$(4.5.34) \quad 2 \operatorname{Re} (4.5.33a) = - \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \frac{|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2}{\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \frac{d}{dt} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) \\ - \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2(t, 0) \\ \leq -C \frac{d}{dt} \left\langle \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \middle| \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{out}}(t),$$

avec  $C > 0$ , en utilisant le fait que l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  est fini et que la vitesse de groupe  $\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)$  est strictement positive. D'autre part on obtient également, avec les mêmes techniques que pour les modes non résonants,  $(4.5.33b) = 0$ . On étudie enfin le terme de résonance  $(4.5.33c)$ , et l'on utilise le fait que les ensembles  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  et  $\bigcup_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} (\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0))$  sont finis pour réaliser la majoration

$$|\Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q))| |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2 \leq C,$$

où la constante  $C > 0$  est indépendante de  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_r, \xi_p, \xi_q$  et  $\xi_r$ . On obtient alors dans  $(4.5.33c)$  un terme de la forme  $\langle f * g | g \rangle$ , que l'on estime avec les inégalités de Cauchy-Schwarz, Young pour la convolution, et l'injection de  $L^2(\mathbb{T}^m)$  dans  $L^1(\mathbb{T}^m)$ , ce qui nous donne l'estimation suivante sur le terme  $(4.5.33c)$  :

$$(4.5.35) \quad |2 \operatorname{Re} (4.5.33c)| \leq C \|U_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \left\langle \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \middle| \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{out}}(t).$$

On déduit des équations  $(4.5.32)$ ,  $(4.5.34)$  et  $(4.5.35)$  l'inéquation différentielle

$$\frac{d}{dt} \left\langle \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \middle| \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{out}}(t) \leq C \|U_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \left\langle \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \middle| \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{out}}(t)$$

Les conditions initiales  $(4.5.28)$  nous assurent que  $(\tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}})|_{t=0} = 0$ , et on en déduit donc, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\left\langle \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \middle| \tilde{U}_{\mathcal{R}^{\text{out}}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{out}}(t) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(t) = 0.$$

Ainsi, pour tous  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , et pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(t, \cdot)$  est nulle, et il en est donc de même de l'amplitude sortante  $U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}$ , pour tous  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{out}}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ .

On a donc montré que si il existe un profil  $U$  suffisamment régulier solution du système  $(4.4.11)$ , alors sa moyenne  $U^*$  ainsi que tous ses modes sortants  $U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{out}}(\mathbf{n})$ , sont nuls.

### Découplage du système oscillant selon les modes résonants

Par propriété d'algèbre de l'espace de profils  $\mathcal{P}_{s,T}$ , et puisque les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}^i$  préservent la décomposition  $\mathcal{P}_{s,T} = \mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ , les équations  $(4.4.11a)$  et  $(4.4.11b)$  se découpent selon les

parties oscillante et évanescence, et il en est de même de l'équation (4.4.11d). La partie évanescence vérifie donc l'équation

$$\mathbf{E} U^{ev} = U^{ev}$$

et la partie oscillante les équations

$$\mathbf{E} U^{osc} = U^{osc}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}^i \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) U^{osc} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(U^{osc}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U^{osc} \right] = 0,$$

et l'on peut réécrire la deuxième équation, avec des notations pour  $U^{osc}$  déjà introduites, comme

$$(4.5.36a) \quad \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{in}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \widetilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.36b) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{in}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.36c) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}_{in}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0.$$

Cette équation se découple alors selon l'ensemble  $\mathcal{F}_{res}^{in}$  des modes résonants, et chacun des modes non résonants. Pour tout mode  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  de  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{in}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{res}^{in}$ , qui est donc tel que les ensembles  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  et  $\mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  sont vides, si l'on pose

$$S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \Theta},$$

alors, d'après les équations (4.5.36a) et (4.5.36b), cette fonction vérifie l'équation de Burgers scalaire

$$\widetilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} + \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \partial_{\Theta} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} = 0.$$

L'ensembles des modes résonants de  $\mathcal{F}_{res}^{in}$  vérifient d'autre part l'équation indépendante

$$\sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{res}^{in}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \widetilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \\ + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{res}^{in}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \\ + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{res}^{in}} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0,$$

que l'on peut réécrire, avec des notations déjà introduites,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{res}^{in} \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) U_{res}^{osc} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(U_{res}^{osc}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} U_{res}^{osc} \right] = 0.$$

On note que par hypothèse sur l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , tous les modes mis en jeu dans cette équation font partie de l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ . Il est par ailleurs clair que l'équation de polarisation  $\mathbf{E} U^{\text{osc}} = U^{\text{osc}}$  ainsi que la condition initiale se découpent de la même manière. Il nous faut donc, pour conclure quant à la proposition 4.5.22, établir que les conditions au bord se découpent également.

### Détermination de la trace au bord

Le fait qu'il n'y a que des modes rentrants nous permet de déterminer les traces au bord  $(U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0}$ ,  $(S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})_{x_d=0}$  et  $U_{|x_d=0, \psi_d=0}^{\text{ev}}$  à partir de la condition de bord (4.4.11c), et donc de découpler le système comme annoncé. D'après les conditions de polarisation (4.5.23a) et (4.5.23b), et puisqu'il n'y a que des fréquences rentrantes, on a, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,

$$(4.5.37) \quad B \left[ \sum_{\xi \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})} \pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z', 0) + \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z', 0, 0) \right] = G_{\mathbf{n}}(z'),$$

où les amplitudes  $G_{\mathbf{n}}$  ont été définies par (4.1.3). Pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})$ , le terme  $\pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}$  appartient à  $\ker L(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi))$  qui est inclus dans  $E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  d'après la Proposition 4.1.16, puisque la fréquence  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)$  est rentrante. De même, par définition du projecteur  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ , le terme  $\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0)$  appartient à l'espace  $E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ . Le vecteur sur lequel agit la matrice  $B$  dans (4.5.37) appartient donc à l'espace  $E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ , sur lequel la matrice  $B$  est inversible d'après l'Hypothèse 4.3 de Lopatinskii uniforme. On en déduit alors par projection sur les espaces  $E_-^j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  et  $E_-^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  les conditions au bord suivantes :

$$(4.5.38a) \quad \pi_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}, \xi)} U_{\mathbf{n}, \xi}^{\text{osc}}(z', 0) = \Pi_-^{j(\mathbf{n}, \xi)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (B|_{E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1} G_{\mathbf{n}}(z'), \quad \xi \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}),$$

$$(4.5.38b) \quad \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z', 0, 0) = \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (B|_{E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1} G_{\mathbf{n}}(z'),$$

où, pour  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n})$ ,  $j(\mathbf{n}, \xi)$  est l'indice tel que  $\xi = \xi_{j(\mathbf{n}, \xi)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ . Ainsi, d'après (4.5.38) et les conditions de polarisation (4.5.23a) et (4.5.23b), les profils  $H_{\text{res}}^{\text{osc}}$  et  $H^{\text{ev}}$  définis par (4.5.22) sont tels que  $(U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$  et  $U_{|x_d=0, \psi_d=0}^{\text{ev}} = H^{\text{ev}}$ . D'autre part, puisque l'on a, pour tout mode  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  de  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , d'après (4.5.38a),

$$(\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0})|_{z_d=0} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = \Pi_-^{j(\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0)}(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}) (B|_{E_-(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1} G_{\lambda \mathbf{n}_0},$$

et que les vecteurs  $E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  sont de norme 1, la fonction  $h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  définie par (4.5.22b) vérifie bien  $(S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})_{x_d=0} = h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$ . On vérifie enfin que les termes de bords  $H_{\text{res}}^{\text{osc}}$ ,  $h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $H^{\text{ev}}$  sont contrôlés dans  $H^s(\omega_T)$  par  $G$ . D'une part, d'après l'Hypothèse 4.3 de Lopatinskii uniforme, la matrice inverse  $(B|_{E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1}$  est uniformément bornée, voir Remarque 4.1.8. D'autre part, d'après la Proposition 4.1.21, les projecteurs  $\Pi_-^{j(\mathbf{n}, \xi)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  et  $\Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  sont uniformément bornés par rapport à  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ . D'après les expressions (4.1.3) et (4.5.22) ainsi que la formule de Plancherel, cela nous assure le contrôle en norme  $L^2(\omega_T)$  recherché. On obtient le contrôle  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  pour tout  $s \geq 0$  en utilisant le fait que les quantités  $\Pi_-^{j(\mathbf{n}, \xi)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (B|_{E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1}$  et  $\Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) (B|_{E_-(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})})^{-1}$  ne dépendent pas de  $z'$  dans  $\omega_T$  :

$$(4.5.39) \quad \|H_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \|h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T})}^2 + \|H^{\text{ev}}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \leq C \|G\|_{H^s(\omega \times \mathbb{T}^m)}^2,$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $T$  et  $s$ . Cela conclut la preuve de la Proposition 4.5.22.



#### 4.5.4 Estimation a priori du système linéarisé pour la partie oscillante résonante

D'après la Proposition 4.5.22, on peut donc se restreindre à l'étude des systèmes (4.5.19), (4.5.20) et (4.5.21). On s'intéresse dans cette partie au premier, et l'on va montrer des estimations a priori sur le système linéarisé associé, que l'on utilisera pour prouver la convergence d'un schéma itératif. On a symétrisé le système linéarisé de telle sorte que ce soit les coefficients symétriques  $\Gamma$  qui apparaissent dans les équations. On rappelle que  $s_0$  est donné par  $s_0 = h + (d + m)/2$  où  $h$  est un entier supérieur à  $(3 + a_1)/2$ , qui apparaît dans l'estimation (4.5.3), avec  $a_1$  le réel de l'Hypothèse 4.6.

**Proposition 4.5.24.** *Soit  $s > s_0$  et soient  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}}$  ne présentant que des modes rentrants résonants, et  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ , satisfaisant le système*

$$(4.5.40a) \quad \mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U_{\text{res}}^{\text{osc}} = U_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.40b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) \beta_T U_{\text{res}}^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(\beta_T V_{\text{res}}^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \beta_T U_{\text{res}}^{\text{osc}} \right] = \widetilde{\mathbf{E}}^i F_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.40c) \quad (U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.40d) \quad (U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0,$$

où  $H^{\text{osc}}$  est défini par l'équation (4.5.22a). Alors le profil  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  vérifie l'estimation a priori

$$(4.5.41) \quad \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 \leq C_1 e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + \mathcal{V}^*T e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2,$$

où  $C(V) := C_1(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2)$ , avec  $C_1 > 0$  une constante qui ne dépend que de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$  et de  $s$ . On rappelle que le réel  $\mathcal{V}^*$ , qui borne les vitesses de groupe  $\mathbf{v}_\alpha$ , a été défini dans le Lemme 4.1.14.

On se donne à partir de maintenant un entier  $s > s_0$ .

#### Réécriture du système linéarisé oscillant

Dans le système (4.5.40) qui est le linéarisé de (4.5.19) autour de  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ , on a ajouté un terme source  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  de  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ , qui nous sera utile pour déduire des estimations  $L^2$  les estimations d'ordre supérieur, ainsi que dans les schémas itératifs utilisés pour construire des solutions au système linéarisé (4.5.40) et au système (4.5.19). On a également symétrisé le terme non-linéaire, pour obtenir les coefficients  $\Gamma$  symétrisés. Pour simplifier les écritures, on omet dans la suite d'écrire la fonction  $\beta_T$ .

On reproduit maintenant l'analyse conduite dans la sous-partie précédente pour réécrire le terme à gauche de l'égalité (4.5.40b). Puisque le profil  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  vérifie la condition de polarisation (4.5.40a) et qu'il ne présente que des modes rentrants résonants, d'après la Remarque 4.5.20, celui-ci s'écrit

$$(4.5.42) \quad U_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d},$$

avec  $U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}} = \pi(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \zeta, \lambda \xi_0) U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}$  pour tous  $\mathbf{n}_0, \xi_0, \lambda$ . De même, puisque  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est dans  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}}$  avec seulement des modes rentrants résonants, on a

$$(4.5.43) \quad V_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} V_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d},$$

avec  $V_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}} = \pi(\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \lambda \xi_0) V_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}$  pour tous  $\mathbf{n}_0, \xi_0, \lambda$ . On écrit alors à nouveau, pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , puisque les profils  $U$  et  $V$  sont polarisés,

$$\begin{aligned} U_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) &= \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) E(\mathbf{n}_0, \xi_0), \\ V_{\lambda \mathbf{n}_0, \lambda \xi_0}^{\text{osc}}(z) &= \omega_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) E(\mathbf{n}_0, \xi_0). \end{aligned}$$

On note qu'ici, et d'après l'identité (4.2.15), le produit scalaire  $\langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d)$  est dans ces notations donné par

$$\langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) = (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T)}^2(x_d).$$

Puisque l'on applique le projecteur  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$  au terme source  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$ , on peut supposer sans perte de généralité que celui-ci s'écrit

$$F_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} F_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d}.$$

On note alors, pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ ,  $f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  la fonction scalaire de  $\Omega_T$  telle que

$$\widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} F_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} = f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

si bien que  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  s'écrit

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\xi \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0).$$

D'après l'estimation (4.5.5) de l'Hypothèse 4.8, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  de  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et tout  $\lambda$  de  $\mathbb{Z}^*$ , on a

$$(4.5.44) \quad \|f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \|F_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

On utilise également les coefficients  $\Gamma$  de la Définition 4.5.6. Les modes rentrants résonants vérifient l'équation couplée qui relie la partie du terme source  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}}$

$$(4.5.45a) \quad \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

et la somme d'un terme de transport,

$$(4.5.45b) \quad = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \widetilde{X}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

d'un terme d'auto-interaction,

$$(4.5.45c) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d} \widetilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

et enfin de termes de résonances de type 1,

$$(4.5.45d) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \omega_\ell \lambda_{p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0} \psi_d \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

et de type 2,

$$(4.5.45e) \quad + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \omega_\ell \lambda_{p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0} \psi_d \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0).$$

On note que dans les termes (4.5.45c), (4.5.45d) et (4.5.45e), les facteurs  $\Gamma(\lambda_1(\mathbf{n}_0, \xi_0), \lambda_2(\mathbf{n}_0, \xi_0))$  et  $\Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q))$  font porter sur le profil  $U$  une dérivée par rapport à  $\theta$ . Pour obtenir des estimations a priori sans perte de dérivée, il nous faut donc faire passer les facteurs de dérivation entièrement sur le profil  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$ , et c'est tout l'objet de la section suivante. Les termes (4.5.45c) et (4.5.45e) se traitent avec des techniques similaires à leurs analogues pour les sortants, alors que l'on a besoin de l'Hypothèse 4.8 pour traiter le terme (4.5.45d).

### Estimation $L^2$

On va montrer dans cette section le lemme suivant.

**Lemme 4.5.25.** *Soient  $s > s_0$  et  $T > 0$ , et soient  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{1,T}^{\text{osc}}$ ,  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$  et  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}}$  ne présentant que des modes rentrants résonants, satisfaisant le système (4.5.40). On a l'estimation, pour  $x_d \geq 0$ ,*

$$(4.5.46) \quad \frac{d}{dx_d} \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) \leq C \langle F_{\text{res}}^{\text{osc}} | F_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) + C \left(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}\right) \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d).$$

On s'intéresse aux profil modifié  $\tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}$  donné par

$$\tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) := \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0} \psi_d \frac{\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)}{|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2}.$$

On note que, malgré la présence d'un facteur  $|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^{-1}$  qui pourrait poser problème, le profil  $\tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est bien défini, puisque l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$  vérifie la propriété (4.5.5) qui assure que ce facteur est uniformément borné. Celui-ci a été introduit afin de compenser les facteurs  $|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|$  qui vont apparaître dans les estimations. Ce facteur n'est pas forcément uniformément borné par rapport à  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  variant dans l'ensemble (potentiellement infini) des fréquences non colinéaires  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)$  telles que  $\mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  est vide, ce qui nous a poussé à traiter celles-ci individuellement plus loin.

On prend alors le double de la partie réelle du produit scalaire de l'égalité (4.5.45) avec le profil  $\tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}$ . On obtient alors une égalité, avec d'un côté de celle-ci le terme

$$2 \operatorname{Re} \left\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}} \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right. \right\rangle_{\text{in}}(x_d),$$

que l'on estime de la manière suivante :

$$\left| 2 \operatorname{Re} \left\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}} \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right. \right\rangle_{\text{in}}(x_d) \right| = \left| 2 \operatorname{Re} \left\langle \hat{F}_{\text{res}}^{\text{osc}} \left| \hat{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right. \right\rangle_{\text{in}}(x_d) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\langle \widehat{F}_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \widehat{F}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}}^{1/2} (x_d) \left\langle \widehat{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \widehat{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}}^{1/2} (x_d) \\
(4.5.47) \quad &\leq C \langle F_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid F_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}} (x_d) + C \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}} (x_d),
\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\widehat{F}_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \frac{\widetilde{\pi}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0) E(\mathbf{n}_0, \xi_0)}{\left| \widetilde{\pi}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|},$$

et

$$\widehat{U}_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \frac{\widetilde{\pi}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0) E(\mathbf{n}_0, \xi_0)}{\left| \widetilde{\pi}(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi_0) E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|},$$

si bien que le profil  $\widehat{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est tel que son produit scalaire  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\text{in}}$  avec lui-même est égal à celui de  $U_{(\mathbf{n}_0, \xi_0)}^{\text{osc}}$  avec lui-même, et que d'après l'estimation (4.5.44), le produit scalaire de  $\widehat{F}_{\text{res}}^{\text{osc}}$  avec lui-même est majoré, à une constante multiplicative près, par celui de  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  avec lui-même. L'estimation (4.5.5) n'étant en général pas vérifiée pour les modes non résonants, l'analogie de l'estimation (4.5.47) paraît faux, et on ne peut donc pas traiter ces modes comme on le fait pour les modes résonants dans cette partie, ce qui nous pousse à se ramener pour ces premiers à des équations scalaires.

On s'intéresse maintenant aux termes de droite de l'inégalité obtenue en prenant le double de la partie réelle du produit scalaire de l'égalité (4.5.45) avec le profil  $\widetilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}}$ . L'analyse des termes correspondant aux termes (4.5.45b), (4.5.45c) et (4.5.45e) est analogue à celle faite pour les modes sortants.

Concernant le terme de transport (4.5.45b), on obtient, d'après l'identité (4.2.15), par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
(4.5.48) \quad 2 \operatorname{Re} \left\langle (4.5.45b) \mid \widetilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) &= \frac{d}{dx_d} \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}} (x_d) \\
&+ (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \frac{-1}{\partial_{\xi} \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 (T).
\end{aligned}$$

On note que puisqu'ici tous les modes sont rentrants, la quantité  $-\partial_{\xi} \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)$  est strictement positive pour tout  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , ce qui permettra d'oublier le deuxième terme à droite de l'égalité dans les estimations.

Pour le terme (4.5.45c) d'auto-interaction, on a,

$$\begin{aligned}
&\left\langle (4.5.45c) \mid \widetilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) \\
(4.5.49a) \quad &= (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.5.49b) \quad &= (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.5.49c) \quad &- (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_1 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d).
\end{aligned}$$

Or par des calculs identiques à ceux déjà conduits, on a  $(4.5.49b) = -\overline{(4.5.49a)}$ , et donc

$$2 \operatorname{Re} \left\langle (4.5.45c) \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) = \right. \\ \left. - (2\pi)^m \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_1 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d). \right.$$

On note que ce terme diffère de (4.5.49a) de par le coefficient  $\lambda_1$  au lieu de  $\lambda_2$ , ce qui fait passer la dérivée en  $\theta$  sur le coefficient  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$ . Avec la majoration (4.5.8), on obtient

$$\left| 2 \operatorname{Re} \left\langle (4.5.45c) \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) \right| \\ \leq C \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} |\lambda_1 \mathbf{n}_0| \left| \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d) \right|.$$

Le terme de droite dans l'inégalité est de la forme  $\langle fg | g \rangle$ , et on obtient donc,

$$(4.5.50) \quad \left| 2 \operatorname{Re} \left\langle (4.5.45c) \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) \right| \leq C \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}} (x_d).$$

Pour le terme (4.5.45e) des résonances de type 2, on écrit

$$\left\langle (4.5.45e) \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \\ \langle \omega_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} | \sigma_{\ell \lambda_r, \mathbf{n}_r, \xi_r} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d).$$

On majore alors, pour tous  $(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  avec  $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)$  (ce qui constitue un ensemble fini, d'après l'Hypothèse 4.8),

$$|\Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q))| \leq C |\lambda_p| |\mathbf{n}_p, \xi_p|,$$

où la constante  $C > 0$  est indépendante de  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_0, \xi_p, \xi_q$  et  $\xi_0$ . Là encore, cette majoration nous permet de faire basculer la dérivée en  $\theta$  de  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  à  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$ . On en déduit donc l'estimation

$$(4.5.51) \quad \left| 2 \operatorname{Re} \left\langle (4.5.45e) \left| \tilde{U}_{\text{res}}^{\text{osc}} \right\rangle_{\text{in}} (x_d) \right| \leq C \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \langle U_{\text{res}}^{\text{osc}} | U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}} (x_d).$$

On s'intéresse enfin au terme (4.5.45d) des résonances de type 1, que l'on traite en suivant [Rau12, Chapitre 11]. Là encore le but est de faire passer la dérivée sur le profil  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$ . On commence par paramétrer différemment l'ensemble sur lequel porte la somme (4.5.45d). On définit l'ensemble  $\mathcal{R}_1$  des 6-uplets résonants rentrants de type 1 comme

$$\mathcal{R}_1 := \left\{ \begin{array}{l} (\ell \lambda_p \mathbf{n}_p, \ell \lambda_p \xi_p, \ell \lambda_q \mathbf{n}_q, \\ \ell \lambda_q \xi_q, -\ell \lambda_r \mathbf{n}_0, -\ell \lambda_r \xi_0) \end{array} \left| \begin{array}{l} \ell \in \mathbb{Z}^*, \mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}, \xi_0 \in \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0), \\ (\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \end{array} \right. \right\}.$$

On note que si  $(\mathbf{n}_p, \xi_p, \mathbf{n}_q, \xi_q, \mathbf{n}_r, \xi_r)$  est dans  $\mathcal{R}_1$ , alors  $\mathbf{n}_p + \mathbf{n}_q + \mathbf{n}_r = 0$ , et  $\xi_p + \xi_q + \xi_r = 0$ . On note également que, d'après la Remarque 4.5.9, un 6-uplet  $(\mathbf{n}_p, \xi_p, \mathbf{n}_q, \xi_q, \mathbf{n}_r, \xi_r)$  est dans  $\mathcal{R}_1$  si et seulement si le 6-uplet symétrique  $(\mathbf{n}_p, \xi_p, \mathbf{n}_r, \xi_r, \mathbf{n}_q, \xi_q)$  est dans  $\mathcal{R}_1$ . On a, d'après l'identité (4.5.1),

$$(4.5.45d) = \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \omega_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \Gamma((\ell \lambda_p \mathbf{n}_p, \ell \lambda_p \xi_p), (\ell \lambda_q \mathbf{n}_q, \ell \lambda_q \xi_q))$$



*Preuve (Lemme 4.5.23).* On a montré que si  $U$  est solution de (4.4.11), alors, avec des notations déjà introduites, on a

$$(4.5.54a) \quad \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.54b) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \\ e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)$$

$$(4.5.54c) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \\ \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) e^{i \ell \lambda_r \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \ell \lambda_r \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) = 0.$$

Notons que malgré le fait que l'équation (4.5.54) ressemble à l'équation (4.5.36), cette dernière utilise seulement que la moyenne  $U^*$  est nulle, et fait apparaître à la fois des modes rentrants et sortants.

Pour  $0 \leq t_0 \leq T$  et  $x_d^0 \geq 0$ , on considère le domaine  $\mathcal{K}(t_0, x_d^0)$  borné en  $x_d$  donné par

$$\mathcal{K}(t_0, x_d^0) := \{ (t, y, x_d) \in \Omega_T \mid \mathcal{V}^* t \leq x_d \leq x_d^0 + \mathcal{V}^*(t_0 - t), 0 \leq t \leq t_0 \},$$

voir Figure 4.7. On va montrer que  $U^{\text{osc}}$  est nulle sur la frontière haute de ce domaine, c'est-à-dire pour  $t = t_0$  et  $\mathcal{V}^* t_0 \leq x_d \leq x_d^0$ , ce qui suffira pour obtenir le fait que  $U^{\text{osc}}$  est nulle en dehors de  $\{0 \leq x_d \leq \mathcal{V}^* t\}$  pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ . Si on prend le produit scalaire (4.2.14) de l'expression (4.5.54) avec le profil modifié

$$- \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i \lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_0 \psi_d} \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

on obtient, d'après (4.2.16),

$$(4.5.55a) \quad \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \langle X_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))} \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2$$

$$(4.5.55b) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \sigma_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))} \\ \left( - \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \right) \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2$$

$$(4.5.55c) \quad + \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{Z^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\substack{(\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \\ \xi_p, \xi_q) \in \mathcal{R}_1(\mathbf{n}_0, \xi_0) \cup \mathcal{R}_2(\mathbf{n}_0, \xi_0)}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} i \ell \Gamma(\lambda_p(\mathbf{n}_p, \xi_p), \lambda_q(\mathbf{n}_q, \xi_q)) \left( - \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \right) \\ \langle \sigma_{\ell \lambda_p, \mathbf{n}_p, \xi_p} \sigma_{\ell \lambda_q, \mathbf{n}_q, \xi_q} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))} \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2 = 0.$$

Le terme (4.5.55a) s'obtient en remarquant qu'avec les notations de la Définition 4.1.10 et du Lemme 4.1.12, on a  $(-\partial_\xi \tau_k(\boldsymbol{\eta}, \xi)) \tilde{X}_\alpha = X_\alpha$ . On s'intéresse d'abord au terme (4.5.55a). Par la

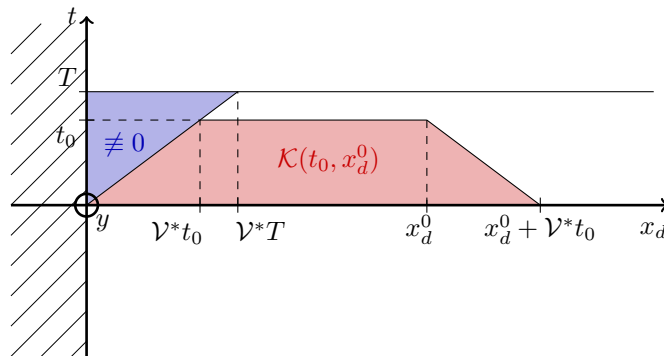


FIGURE 4.7 – Zone de propagation.

formule de Green, pour tout  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , on a

$$2 \operatorname{Re} \langle X_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))} = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial \mathcal{K}(t_0, x_d^0)} (n_t + \vec{n}_x \cdot \mathbf{v}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)}) |\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}|^2 dS,$$

où la notation  $\mathbf{v}_\alpha$  a été introduite dans la Définition 4.1.10,  $\vec{n} := (n_t, \vec{n}_x)$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial \mathcal{K}(t_0, x_d^0)$ , et  $dS$  est la mesure de surface. Le vecteur  $\vec{n}$  est donné (voir Figure 4.7), pour la frontière haute par  $\vec{n} = (1, 0, \dots, 0)$ , pour la frontière basse par  $\vec{n} = (-1, 0, \dots, 0)$ , pour la frontière latérale gauche par  $\vec{n} = (\mathcal{V}^*, 0, \dots, 0, -1)/\sqrt{1 + (\mathcal{V}^*)^2}$  et pour la frontière latérale droite par  $\vec{n} = (\mathcal{V}^*, 0, \dots, 0, 1)/\sqrt{1 + (\mathcal{V}^*)^2}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \langle X_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \mid \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))} \\ &= 2 \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [\mathcal{V}^* t_0, x_d^0])}^2(t_0) - 2 \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [0, x_d^0])}^2(0) \\ & \quad + \frac{2}{\sqrt{1 + (\mathcal{V}^*)^2}} \int_{\{(t, y, \mathcal{V}^* t), 0 \leq t \leq t_0\}} (\mathcal{V}^* - \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)) |\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}|^2 dS \\ & \quad + \frac{2}{\sqrt{1 + (\mathcal{V}^*)^2}} \int_{\{(t, y, x_d^0 + \mathcal{V}^*(t_0 - t)), 0 \leq t \leq t_0\}} (\mathcal{V}^* + \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)) |\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}|^2 dS. \end{aligned}$$

On remarque alors que l'on a d'une part  $\|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)}^2(0) = 0$  d'après la condition initiale (4.4.11d), et d'autre part, d'après le Lemme 4.1.14, que les quantités  $(\mathcal{V}^* - \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0))$  et  $(\mathcal{V}^* + \partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0))$  sont positives. Ainsi,

$$(4.5.56) \quad 2 \operatorname{Re} (4.5.55a) \geq 2 \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [\mathcal{V}^* t_0, x_d^0])}^2(t_0) |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2.$$

Les termes (4.5.55b) et (4.5.55c) se traitent quant à eux comme précédemment. Pour le terme d'auto-interaction (4.5.55b), on montre de la même manière que pour le terme (4.5.30b) qu'il vérifie

$$2 \operatorname{Re} (4.5.55b) = 0.$$

Pour le terme de résonances (4.5.55c), on utilise les mêmes techniques que pour les termes (4.5.51) et (4.5.52). D'après le Lemme 4.1.14, on peut majorer uniformément les vitesses de groupe  $(-\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0))$  pour obtenir

$$(4.5.57) \quad |2 \operatorname{Re} (4.5.55c)| \leq C \|U^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))}^2 |\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^2.$$



En remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathcal{K}(t_0, x_d^0))}^2 \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2 \\ &= \int_0^{t_0} \sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [\mathcal{V}^* t, x_d^0 + \mathcal{V}^*(t_0-t)])}^2 (t) \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2 dt, \end{aligned}$$

avec les équations (4.5.55), (4.5.56) et (4.5.57) et par le lemme de Grönwall on obtient

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \\ \xi_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_0)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [\mathcal{V}^* t_0, x_d^0])}^2 (t_0) \left| \tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0) \right|^2 = 0.$$

Ainsi, pour tout  $\mathbf{n}_0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m}$ ,  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_0)$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , la fonction  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  est nulle sur  $\{t = t_0, \mathcal{V}^* t_0 \leq x_d \leq x_d^0\}$ , et le profil  $U^{\text{osc}}$  est donc également nul sur cet ensemble, ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

### Estimation des dérivées

On revient à la preuve de l'estimation a priori, et on prouve maintenant la Proposition 4.5.24 en utilisant l'estimation (4.5.46) du Lemme 4.5.25. On se donne  $\alpha$  un multi-indice de  $\mathbb{N}^{d+m}$  tel que  $|\alpha| \leq s$ . Puisque l'opérateur  $\partial_{z', \theta}^\alpha$  commute avec les projecteurs  $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$  et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , le profil  $\partial_{z', \theta}^\alpha U^{\text{osc}}$  vérifie un système de la forme (4.5.40), avec  $\partial_{z', \theta}^\alpha G$  comme terme de bord, et  $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} [\partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}} + F_\alpha]$  comme terme source, où  $F_\alpha$  est le commutateur

$$F_\alpha := \left[ \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(V_{\text{res}}^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j}, \partial_{z', \theta}^\alpha \right] U_{\text{res}}^{\text{osc}}.$$

D'après (4.5.46) on a alors, par inégalité triangulaire,

$$(4.5.58) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx_d} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) &\leq C \langle \partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) + C \langle F_\alpha \mid F_\alpha \rangle_{\text{in}}(x_d) \\ &\quad + C \left( 1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}} \right) \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d). \end{aligned}$$

On note que d'après le Lemme 4.5.21 on a

$$\langle F_\alpha \mid F_\alpha \rangle_{\text{in}}(x_d) \leq \|F_\alpha\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d),$$

et de même

$$\langle \partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) \leq \|\partial_{z', \theta}^\alpha F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d).$$

D'autre part, par propriété d'algèbre de  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  (puisque  $s > (d+m)/2 + 1$ ), on a, d'après l'estimation de commutateur [BGS07, Proposition C.13],

$$\begin{aligned} \|F_\alpha\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) &\leq C \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) \\ &\leq C \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d). \end{aligned}$$

Enfin, on remarque que l'on a, par définition de la norme  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  et d'après le Lemme 4.5.21,

$$(4.5.59) \quad \begin{aligned} \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) &= \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d). \end{aligned}$$

En sommant les estimations (4.5.58) pour  $|\alpha| \leq s$ , on obtient donc

$$(4.5.60) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx_d} \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) &\leq C \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) \\ &+ C \left(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2\right) \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d). \end{aligned}$$

On obtient ainsi, grâce au lemme de Grönwall, l'estimation

$$(4.5.61) \quad \begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) &\leq e^{C(V)x_d} \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(0) \\ &+ \int_0^{x_d} e^{C(V)(x_d-x'_d)} \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x'_d) dx'_d, \end{aligned}$$

où  $C(V) = C(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2)$ . La trace au bord de  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est donnée par  $(U_{\text{res}}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$  où  $H_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est déterminé par l'équation (4.5.22a). La Remarque 4.1.8, la Proposition 4.1.21 et le Lemme 4.5.21 nous assurent alors que l'on a, pour  $|\alpha| \leq s$ ,

$$(4.5.62) \quad \begin{aligned} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(0) &\leq \|\partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}}(0)\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 = \|\partial_{z', \theta}^\alpha H_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \\ &\leq C \|\partial_{z', \theta}^\alpha G\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2. \end{aligned}$$

On obtient donc, avec (4.5.59), (4.5.61) et (4.5.62),

$$(4.5.63) \quad \begin{aligned} \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x_d) &\leq C e^{C(V)x_d} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \\ &+ \int_0^{x_d} e^{C(V)(x_d-x'_d)} \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\psi_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))}^2(x'_d) dx'_d. \end{aligned}$$

En utilisant la présence de la fonction  $\beta_T$  dans l'équation (4.5.40b), on peut majorer  $x_d$  par  $2\mathcal{V}^*T$  puis passer à la borne supérieure en  $x_d$  dans l'estimation (4.5.63) précédente pour obtenir l'estimation (4.5.41) désirée, ce qui conclut la preuve de la Proposition 4.5.24.

#### 4.5.5 Estimation a priori sur les équations de Burgers linéarisées

On montre maintenant des estimations a priori pour les équations de Burgers (4.5.20) linéarisées, qui correspondent aux modes rentrants non résonants. Ces estimations a priori nous serviront à montrer l'existence d'une solution à ces équations de Burgers. Il nous faudra cependant sommer les estimations obtenues par rapport à  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , et l'on souhaite donc obtenir des constantes indépendantes de ceux-ci. On montre dans cette partie le résultat suivant.

**Proposition 4.5.26.** *Soit  $(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , soit  $s > s_0$  et soient  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$ ,  $W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))$  à moyenne nulle, satisfaisant le problème aux limites scalaire*

$$(4.5.64a) \quad \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} + \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) W_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \partial_\Theta S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} = F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$$

$$(4.5.64b) \quad (S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})|_{x_d=0} = h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$$

$$(4.5.64c) \quad (S_{\mathbf{n}_0, \xi_0})|_{t \leq 0} = 0,$$

où  $h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  est défini par l'équation (4.5.22b). Alors la fonction  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  vérifie l'estimation a priori

$$(4.5.65) \quad \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))}^2 \leq C_1 e^{C(W)\mathcal{V}^*T} \|h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + \mathcal{V}^*T e^{C(W)\mathcal{V}^*T} \|F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))}^2,$$

où  $C(W) := C_1(1 + \|W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\Omega_T \times \mathbb{T}))}^2)$ , avec  $C_1 > 0$  une constante qui ne dépend que de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$  et de  $s$ , mais pas de  $\mathbf{n}_0, \xi_0$ . On rappelle que le réel  $\mathcal{V}^*$ , qui borne les vitesses de groupe  $\mathbf{v}_\alpha$ , a été défini dans le Lemme 4.1.14.

On commence par montrer une estimation  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T})$  analogue à l'estimation (4.5.46) pour les modes résonants, et on réécrit d'abord l'équation (4.5.64a). On écrit  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$ ,  $W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))$  comme

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda\Theta}, & W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \omega_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda\Theta}, \\ F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda\Theta}, \end{aligned}$$

avec  $\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$ ,  $\omega_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}$  des fonctions scalaires de  $\Omega_T$ . L'équation (4.5.64a) s'écrit alors

$$(4.5.66a) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} f_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda\mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda\Theta} = \tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i\lambda\Theta},$$

$$(4.5.66b) \quad + \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_2 \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} e^{i\lambda\Theta}.$$

On rappelle que  $\tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)}$ , défini dans le Lemme 4.1.12, est donné par

$$\tilde{X}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} = \frac{-1}{\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \partial_t + \frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \nabla_{\boldsymbol{\eta}} \tau_k(\eta_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0) \cdot \nabla_y + \partial_{x_d}.$$

On prend alors le double de la partie réelle du produit scalaire  $L^2(\omega_T \times \mathbb{T})$  de l'égalité (4.5.66) avec la fonction  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$ . On obtient ainsi une égalité, avec d'un côté de celle-ci le terme

$$2 \operatorname{Re} \langle F_{\mathbf{n}_0, \xi_0} | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})}(x_d),$$

que l'on estime de manière analogue au cas des fréquences résonantes rentrantes,

$$(4.5.67) \quad \left| 2 \operatorname{Re} \langle F_{\mathbf{n}_0, \xi_0} | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})}(x_d) \right| \leq C \|F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})}(x_d) + C \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})}(x_d).$$

On note ici l'intérêt de s'être ramené à des équations de Burgers scalaires pour les modes non résonants, puisque les coefficients  $|\tilde{\pi}_{(\mathbf{n}_0, \zeta, \xi_0)} E(\mathbf{n}_0, \xi_0)|^{-1}$  n'apparaissent plus, ceux-ci n'étant pas uniformément majorés pour les modes  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  non résonants.

On s'intéresse maintenant aux termes de droite de l'inégalité obtenue en prenant le double de la partie réelle du produit scalaire de l'égalité (4.5.66) avec le profil  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$ . L'analyse des termes correspondant aux termes (4.5.66a) et (4.5.66b) est analogue à celle faite pour les modes sortants et les modes rentrants non résonants.

Concernant le terme de transport (4.5.66a), on obtient, d'après l'identité (4.2.15), par inté-

gration par parties,

$$(4.5.68) \quad 2 \operatorname{Re} \langle (4.5.66a) | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) = \frac{d}{dx_d} \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) \\ - \frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)} \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T})}^2 (T).$$

On note que puisque  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  est un mode rentrant, la quantité  $-\partial_\xi \tau_k(\mathbf{n}_0, \xi_0)(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}, \xi_0)$  est strictement positive, ce qui permettra d'oublier le deuxième terme à droite de l'égalité dans les estimations.

Pour le terme (4.5.66b) d'auto-interaction, on a, par des calculs analogues à ceux déjà conduits pour les modes rentrants résonants,

$$2 \operatorname{Re} \langle (4.5.66b) | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) = \\ - (2\pi)^m \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} i \lambda_1 \Gamma((\mathbf{n}_0, \xi_0), (\mathbf{n}_0, \xi_0)) \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d).$$

Avec la majoration (4.5.3), on obtient

$$\left| 2 \operatorname{Re} \langle (4.5.66b) | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) \right| \\ \leq C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} |\lambda_1 \mathbf{n}_0|^h \left| \langle \omega_{\lambda_1, \mathbf{n}_0, \xi_0} \sigma_{\lambda_2, \mathbf{n}_0, \xi_0} | \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T)} (x_d) \right|.$$

Ici il nous faut dégrader à l'ordre  $h$  étant donné que l'on souhaite obtenir une majoration indépendante de  $\mathbf{n}_0$ , puisque l'on va sommer par rapport à  $\mathbf{n}_0$  les inégalités. On pourrait obtenir une majoration du type  $C(\mathbf{n}_0)|\lambda_1|$  au lieu de  $C|\lambda_1 \mathbf{n}_0|^h$ , mais où la constante  $C(\mathbf{n}_0)$  dépend de  $\mathbf{n}_0$ , et peut être arbitrairement grande puisque l'on traite des modes  $\mathbf{n}_0$  proches de l'ensemble glancing. Le terme de droite dans l'inégalité étant de la forme  $\langle fg | g \rangle$ , on obtient donc

$$(4.5.69) \quad \left| 2 \operatorname{Re} \langle (4.5.66b) | S_{\mathbf{n}_0, \xi_0} \rangle_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) \right| \leq C \|W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))} \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d),$$

par injection de Sobolev, l'indice de régularité  $s$  étant tel que  $s > h + (d + m)/2$ . Avec les équations (4.5.66) et (4.5.68) et les estimations (4.5.67) et (4.5.69), on obtient enfin l'inéquation différentielle

$$(4.5.70) \quad \frac{d}{dx_d} \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) \\ \leq C \|F_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d) + C \left( 1 + \|W_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))} \right) \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{L^2(\omega_T \times \mathbb{T})} (x_d).$$

Pour obtenir l'estimation  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T})$  recherchée, on réalise des estimations de commutateurs analogues à celles pour les modes rentrants résonants, que l'on ne détaille donc pas ici. On trouve enfin l'estimation (4.5.65) désirée.

Les estimation a priori (4.5.46) et (4.5.65) (pour  $s = 0$ ) ainsi que la Proposition d'équivalence des systèmes 4.5.22 nous assurent l'unicité d'une solution au système (4.4.11).

#### 4.5.6 Construction d'une solution

### Construction d'une solution oscillante au système linéarisé pour les modes rentrants résonants

Grâce à l'estimation a priori (4.5.41) de la Proposition 4.5.24 sur le système linéarisé (4.5.40), on peut construire une solution à celui-ci, et montrer ainsi le résultat suivant.

**Proposition 4.5.27.** *Soient  $s > s_0$  et  $T > 0$ , et soit  $V_{\text{res}}^{\text{osc}}$  un profil de  $\mathcal{N}_{s,T}^{\text{osc}}$  ne présentant que des modes rentrants résonants,  $F_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $G$  dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ . Alors il existe une unique solution  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  au système (4.5.40), ne présentant que des modes rentrants, et qui satisfait de plus l'estimation*

$$\|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 \leq C_1 e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + \mathcal{V}^*T e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2,$$

où  $C(V) := C_1(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2)$ , avec  $C_1 > 0$  une constante qui ne dépend que de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$ , des fréquences au bord  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , et de  $s$ .

La preuve d'un tel résultat à partir d'une estimation a priori du type (4.5.41) est donnée dans [JMR95, Théorème 6.3.3]. On en rappelle ici les idées principales.

L'unicité de la solution se déduit immédiatement de l'estimation a priori (4.5.41). Concernant l'existence, on utilise un schéma aux différences finies. Puisque les opérateurs  $\partial_{\theta_j}$  pour  $j = 1, \dots, m$  sont anti-symétriques, il nous faut considérer des opérateurs de différences finies anti-symétriques. Si on note  $e_1, \dots, e_m$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , on pose, pour toute fonction  $U$  de  $\Omega_T \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\delta_j^h U(z, \theta, \psi_d) := (U(z, \theta + he_j) - U(z, \theta - he_j))/2h,$$

pour  $j = 1, \dots, m$  et  $h > 0$ . La preuve consiste ensuite à montrer qu'il existe, pour  $h > 0$ , une unique solution  $U_h^{\text{osc}}$  au système régularisé

$$(4.5.71a) \quad \mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U_h^{\text{osc}} = U_h^{\text{osc}}$$

$$(4.5.71b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) U_h^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(V_{\text{res}}^{\text{osc}}, \zeta_j) \delta_j^h U_h^{\text{osc}} \right] = \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.71c) \quad (U_h^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.71d) \quad (U_h^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0,$$

et que cette solution vérifie l'estimation uniforme en  $h > 0$ ,

$$\|U_h^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 \leq C_1 e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + \mathcal{V}^*T e^{C(V)\mathcal{V}^*T} \|F_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2,$$

où  $C(V) := C_1(1 + \|V_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2)$ , avec  $C_1 > 0$  une constante qui ne dépend que de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$ , des fréquences au bord  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , et de  $s$ . Cette estimation uniforme permet d'extraire une suite  $(U_{h_n}^{\text{osc}})_n$  convergeant faiblement vers  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  dans  $\mathcal{E}_{s,T}$ . En passant à la limite dans le système (4.5.71) on obtient alors le résultat de la Proposition 4.5.27.

### Construction d'une solution oscillante des systèmes (4.5.19) et (4.5.20)

Ce paragraphe est consacré au résultat suivant, qui constitue une partie du Théorème 4.3.1.

**Proposition 4.5.28.** *Soit  $s > s_0$ , et  $G$  dans  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ , nulle pour  $t$  négatif. Il existe un temps  $T > 0$ , ne dépendant que de l'opérateur  $L(0, \partial_z)$ , des fréquences au bord  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , de la norme  $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$  de  $G$  et de  $s$ , tel que le système (4.5.19) et, pour  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ , le système (4.5.20), admettent des solutions  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  et  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))$ , où les fonctions  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  sont à moyenne nulle. De plus, si l'on note, pour*

$(\mathbf{n}_0, \xi_0)$  dans  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}$ ,

$$S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}(z, \Theta) =: \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda \Theta},$$

alors le profil  $U^{\text{osc}}$  défini, pour  $(z, \theta, \psi_d)$  dans  $\Omega_T \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_+$ , par

(4.5.72)

$$U^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) := U_{\text{res}}^{\text{osc}}(z, \theta, \psi_d) + \sum_{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}(z) e^{i\lambda \mathbf{n}_0 \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_0 \psi_d} E(\mathbf{n}_0, \xi_0),$$

appartient à l'espace  $\mathcal{P}_{s, T}^{\text{osc}}$ .

Lorsque l'on a un résultat d'existence d'une solution au système linéarisé avec une estimation du type (4.5.41), l'existence d'une solution au système initial s'ensuit de manière classique. On rappelle ici les grandes idées de la méthode utilisée dans [BGS07, Théorème 10.1].

On s'intéresse d'abord au système (4.5.19), et on considère le schéma itératif défini par

(4.5.73a)

$$\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} U_{\nu+1}^{\text{osc}} = U_{\nu+1}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.73b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} \left[ \tilde{L}(0, \partial_z) \beta_T U_{\nu+1}^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \tilde{L}_1(\beta_T U_{\nu}^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \beta_T U_{\nu+1}^{\text{osc}} \right] = 0$$

(4.5.73c)

$$(U_{\nu+1}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = H_{\text{res}}^{\text{osc}}$$

(4.5.73d)

$$(U_{\nu+1}^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0,$$

et initialisé à  $U_0^{\text{osc}}(\cdot, x_d, \cdot, \psi_d) := H_{\text{res}}^{\text{osc}}$ , pour tout  $x_d, \psi_d$  dans  $\mathbb{R}_+$ . La proposition 4.5.27 nous assure que la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est bien définie dans  $\mathcal{P}_{s, T}^{\text{osc}}$ . La démonstration consiste alors à montrer que la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est bornée en grande norme et contractante en petite norme, pour en déduire sa convergence faible dans l'espace de Banach  $\mathcal{P}_{s, T}^{\text{osc}}$ .

*Borné en grande norme.* D'après l'estimation (4.5.41), on a, pour  $\nu \geq 0$ ,

$$(4.5.74) \quad \|U_{\nu+1}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2 \leq C_1 e^{C(U_{\nu}^{\text{osc}}) \mathcal{V}^* T} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2,$$

où  $C(U_{\nu}^{\text{osc}}) = C_1(1 + \|U_{\nu}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2)$ . Si l'on choisit  $T > 0$  suffisamment petit de telle sorte que

$$\exp \left[ C_1(1 + 2C_1 \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2) \mathcal{V}^* T \right] \leq 2,$$

alors on montre par récurrence que la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est bornée dans  $\mathcal{E}_{s, T}$  par  $\sqrt{2C_1} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}$ . En effet l'initialisation est évidente, quitte à supposer que  $C_1 > 1/2$ , et si l'on a  $\|U_{\nu}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}} \leq \sqrt{2C_1} \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}$  pour un certain  $\nu \geq 0$ , alors d'après (4.5.74) et l'hypothèse sur  $T$ , on a

$$\begin{aligned} \|U_{\nu+1}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2 &\leq C_1 \exp \left[ C_1(1 + \|U_{\nu}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2) \mathcal{V}^* T \right] \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \\ &\leq C_1 \exp \left[ C_1(1 + 2C_1 \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2) \mathcal{V}^* T \right] \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \\ &\leq 2C_1 \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2, \end{aligned}$$

ce qui est l'estimation attendue.

*Contractant en petite norme.* On note, pour  $\nu \geq 1$ ,  $W_{\nu}^{\text{osc}} := U_{\nu}^{\text{osc}} - U_{\nu-1}^{\text{osc}}$ , qui satisfait le système

(4.5.75a)

$$\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}} W_{\nu+1}^{\text{osc}} = W_{\nu+1}^{\text{osc}}$$

$$(4.5.75b) \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} \left[ \widetilde{L}(0, \partial_z) \beta_T W_{\nu+1}^{\text{osc}} + \sum_{j=1}^m \widetilde{L}_1(\beta_T U_{\nu}^{\text{osc}}, \zeta_j) \partial_{\theta_j} \beta_T W_{\nu+1}^{\text{osc}} \right] = \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}} F_{\nu+1}$$

$$(4.5.75c) \quad (W_{\nu+1}^{\text{osc}})|_{x_d=0, \psi_d=0} = 0$$

$$(4.5.75d) \quad (W_{\nu+1}^{\text{osc}})|_{t \leq 0} = 0,$$

où  $F_{\nu+1}$  est donné par

$$F_{\nu+1} := \sum_{j=1}^m (\widetilde{L}_1(\beta_T U_{\nu-1}^{\text{osc}}, \zeta_j) - \widetilde{L}_1(\beta_T U_{\nu}^{\text{osc}}, \zeta_j)) \partial_{\theta_j} \beta_T U_{\nu}^{\text{osc}}.$$

D'après l'estimation (4.5.41) appliquée au système (4.5.75) pour  $s = 0$ , on a donc

$$\|W_{\nu+1}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \leq \mathcal{V}^* T e^{C(U_{\nu}^{\text{osc}})\mathcal{V}^* T} \|F_{\nu+1}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2.$$

On remarque d'abord que par hypothèse sur  $T$ , et puisque la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est bornée dans  $\mathcal{E}_{s,T}$  par  $\sqrt{2} C_1 \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}$ , on a, pour  $\nu \geq 0$ ,

$$(4.5.76) \quad e^{C(U_{\nu}^{\text{osc}})\mathcal{V}^* T} \leq 2.$$

On estime maintenant la norme  $\mathcal{E}_{0,T}$  de  $F_{\nu+1}$ . Par estimation de produit et choix de l'indice de régularité  $s$ , on a

$$\|F_{\nu+1}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \leq C \sum_{j=1}^m \left\| (\widetilde{L}_1(\beta_T U_{\nu-1}^{\text{osc}}, \zeta_j) - \widetilde{L}_1(\beta_T U_{\nu}^{\text{osc}}, \zeta_j)) \right\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \|U_{\nu}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2,$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, et puisque la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est bornée dans  $\mathcal{E}_{s,T}$ , on obtient alors

$$(4.5.77) \quad \|F_{\nu+1}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \leq C \|W_{\nu}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2.$$

Ainsi, d'après les estimations (4.5.76) et (4.5.77), on a

$$\|W_{\nu+1}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2 \leq C \mathcal{V}^* T \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 \|W_{\nu}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{0,T}}^2.$$

Pour  $T > 0$  suffisamment petit, la suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est donc convergente dans  $\mathcal{E}_{0,T}$ .

La suite  $(U_{\nu}^{\text{osc}})_{\nu}$  est ainsi une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$ , et converge donc vers une fonction  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  de  $\mathcal{P}_{0,T}^{\text{osc}}$ . On peut montrer, par des arguments qu'on ne rappelle pas ici, que le profil  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  est en fait dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$  et qu'il satisfait le système (4.5.19), voir [BGS07, Théorème 10.1] pour un résultat similaire.

La preuve de l'existence d'une solution au système (4.5.20) est identique, et on ne la détaille pas ici. Elle s'appuie sur un résultat d'existence d'une solution du système linéarisé (4.5.64), analogue à la Proposition 4.5.27, que l'on a pas explicité. On note cependant que le temps d'existence  $T$  est bien indépendant de  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , puisque l'estimation (4.5.65) est réalisée avec des constantes indépendantes de  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ , et puisque d'après l'estimation (4.5.39), chaque terme de bord  $h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  est contrôlé dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T})$  par  $C \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}$ , uniformément par rapport à  $(\mathbf{n}_0, \xi_0)$ .

Enfin, on montre que le profil  $U^{\text{osc}}$  défini par (4.5.72) appartient bien à  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ . En effet, d'après le Lemme 4.5.21, on a

$$\|U^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s,T}}^2 \leq C \sup_{x_d > 0} \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^{\alpha} U^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^{\alpha} U^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{x_d > 0} \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \mid \partial_{z', \theta}^\alpha U_{\text{res}}^{\text{osc}} \rangle_{\text{in}}(x_d) \\
&\quad + C \sup_{x_d > 0} \sum_{\substack{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \\ (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \|\sigma_{\lambda, \mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{H^s(\omega_T)}^2(x_d) \\
&\leq C \|U_{\text{res}}^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2 + C \sum_{\substack{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \\ (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}}} \|S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))}^2,
\end{aligned}$$

et donc, avec les estimations a priori (4.5.41) et (4.5.65) ainsi que l'estimation des termes de bord (4.5.39), on obtient

$$(4.5.78) \quad \|U^{\text{osc}}\|_{\mathcal{E}_{s, T}}^2 \leq C \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2 + C \sum_{\substack{(\mathbf{n}_0, \xi_0) \in \\ (\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^m} \times \mathcal{C}_{\text{in}}(\mathbf{n}_0)) \setminus \mathcal{F}_{\text{res}}^{\text{in}}}} \|h_{\mathbf{n}_0, \xi_0}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T})}^2 \leq C \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2.$$

### Détermination de la partie évanescence et conclusion

Pour conclure la preuve du Théorème 4.3.1, il nous faut alors montrer qu'il existe une solution  $U^{\text{ev}}$  dans  $\mathcal{P}_{s, T}^{\text{ev}}$  au système (4.5.21), où les paramètres  $s$  et  $T$  sont ceux donnés par la Proposition 4.5.28.

La condition de polarisation (4.5.21a) se traduit, d'après la Remarque 4.5.20, comme

$$U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, 0) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta},$$

et il nous faut donc, pour déterminer le profil  $U^{\text{ev}}$ , trouver les traces  $(\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}})|_{\psi_d=0}$  pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ . La condition au bord (4.5.21b) nous donne la double trace au bord, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,

$$\Pi_{\mathbb{C}^N}^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z', 0, 0) = \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) (B_{|E_-(\mathbf{n} \cdot \zeta)}^{-1}) G_{\mathbf{n}}(z').$$

On relève cette trace par rapport à  $x_d$  en utilisant une fonction  $\chi$  de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ , valant 1 en 0. C'est-à-dire que l'on pose

$$U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \chi(x_d) e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) (B_{|E_-(\mathbf{n} \cdot \zeta)}^{-1}) G_{\mathbf{n}}(z') e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}.$$

On note que, par construction, le profil  $U^{\text{ev}}$  vérifie bien la condition de polarisation (4.5.21a) ainsi que la condition au bord (4.5.21b). Il nous faut maintenant vérifier que celui-ci appartient bien à l'espace des profils évanescents  $\mathcal{P}_{s, T}^{\text{ev}}$ . On remarque en premier lieu que le profil  $U^{\text{ev}}$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}_{x_d}^+ \times \mathbb{R}_{\psi_d}^+, H_+^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))$ . En effet, d'une part, les fonctions  $G_{\mathbf{n}}$  étant nulles pour  $t$  négatif, le profil  $U^{\text{ev}}$  est bien nul pour  $t$  négatif. D'autre part, la fonction  $\chi$  étant bornée, la matrice inverse  $(B_{|E_-(\mathbf{n} \cdot \zeta)}^{-1})$  étant uniformément bornée d'après la Remarque 4.1.8, et les termes  $e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \zeta)$  étant également uniformément bornés d'après l'estimation (4.5.12a) de la Proposition (4.5.16), on a, pour  $x_d, \psi_d \geq 0$ , l'estimation

$$(4.5.79) \quad \|U^{\text{ev}}\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2(x_d, \psi_d) \leq C \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \|G_{\mathbf{n}}\|_{H^s(\omega_T)}^2 = C \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}^2.$$

On note maintenant, pour  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ ,

$$U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) := \chi(x_d) e^{\psi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi_-^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) (B_{|E_-(\mathbf{n} \cdot \zeta)}^{-1}) G_{\mathbf{n}}(z'),$$



si bien que  $U^{\text{ev}}(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(z, \psi_d) e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}$ .

On montre maintenant que le profil  $U^{\text{ev}}$  est continu par rapport à  $(x_d, \psi_d)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$ . Soit  $(x_d^0, \psi_d^0)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . On a, pour  $x_d, \psi_d \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d^0)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} &\leq \|U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} \\ &\quad + \|U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d^0)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}, \end{aligned}$$

et on cherche alors à estimer les deux termes du membre de droite de cette inégalité. Pour le premier, on a, d'après l'estimation (4.5.12a) de la Proposition (4.5.16) et la Remarque 4.1.8, pour  $\psi_d \geq 0$ ,

$$\|U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} \leq C |\chi(x_d) - \chi(x_d^0)| \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}.$$

Par continuité de  $\chi$ , il existe donc  $\delta_1 > 0$ , ne dépendant que de  $\varepsilon$ , tel que pour tout  $x_d$  tel que  $|x_d - x_d^0| < \delta_1$  et pour tout  $\psi_d \geq 0$ , on a

$$\|U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} < \varepsilon.$$

Pour le deuxième terme, on note  $M$  un entier tel que

$$\left\| \sum_{|\mathbf{n}| > M} G_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} \right\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} < \varepsilon.$$

On a alors, pour  $\psi_d \geq 0$ ,

$$(4.5.80a) \quad \begin{aligned} &\|U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d^0)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} \\ &\leq \left\| \sum_{0 < |\mathbf{n}| \leq M} [U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(y, x_d^0, \psi_d) - U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(y, x_d^0, \psi_d^0)] e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} \right\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} \end{aligned}$$

$$(4.5.80b) \quad + \left\| \sum_{|\mathbf{n}| > M} [U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(y, x_d^0, \psi_d) - U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}(y, x_d^0, \psi_d^0)] e^{i\mathbf{n} \cdot \theta} \right\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}.$$

La somme du terme (4.5.80a) étant finie et les fonctions  $U_{\mathbf{n}}^{\text{ev}}$  étant continues par rapport à  $\psi_d$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que pour tout  $\psi_d$  tel que  $|\psi_d - \psi_d^0| < \delta_2$ , on a (4.5.80a)  $< \varepsilon$ . D'autre part d'après l'estimation (4.5.12a), la Remarque 4.1.8 et puisque  $\chi$  est bornée, on a, par construction de  $M$ , pour tous  $\psi_d \geq 0$ , (4.5.80b)  $< C\varepsilon$  où  $C > 0$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ . On peut alors conclure : pour tout  $(x_d, \psi_d)$  tel que  $|(x_d, \psi_d) - (x_d^0, \psi_d^0)| < \min(\delta_1, \delta_2)$ , on a

$$\|U^{\text{ev}}(x_d, \psi_d) - U^{\text{ev}}(x_d^0, \psi_d^0)\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)} < (2 + C)\varepsilon,$$

ce qui montre la continuité désirée.

Enfin, par des arguments similaires à ceux développés pour la continuité, on montre que le profil  $U^{\text{ev}}$  tend vers 0 dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m))$  lorsque  $\psi_d$  tend vers  $+\infty$  (et donc en particulier dans  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  à  $x_d$  fixé).

On a ainsi vérifié tous les points de la Définition 4.2.4 des profils évanescents, et donc montré que le profil  $U^{\text{ev}}$  appartient à l'espace  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$  des profils évanescents.

*Remarque 4.5.29.* On a montré dans le paragraphe précédent, dans l'estimation (4.5.78), que la partie oscillante  $U^{\text{osc}}$  est contrôlée dans  $\mathcal{E}_{s,T}$  par la norme  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  du terme de bord  $G$ . D'autre part, d'après l'estimation (4.5.79), la partie évanescence  $U^{\text{ev}}$  est également contrôlée par

la norme  $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)$  de  $G$ . On note ainsi que le profil principal  $U$  vérifie

$$\|U\|_{\mathcal{P}_{s,T}} \leq C \|G\|_{H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^m)}.$$

### 4.5.7 Conclusion et perspectives

On a ainsi montré que pour  $s > h + (d + m)/2$ , il existe un temps  $T > 0$  suffisamment petit tel que les systèmes (4.5.19), (4.5.20) et (4.5.21) admettent des solutions  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$ ,  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  et  $U^{\text{ev}}$  dans  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{osc}}$ ,  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}))$  et  $\mathcal{P}_{s,T}^{\text{ev}}$ . D'après la Proposition 4.5.22, le profil  $U = U^{\text{osc}} + U^{\text{ev}}$  (où  $U^{\text{osc}}$  est défini à partir de  $U_{\text{res}}^{\text{osc}}$  et  $S_{\mathbf{n}_0, \xi_0}$  par l'équation (4.5.72)) est donc solution dans  $\mathcal{P}_{s,T}$  du système (4.4.11). Cela conclut la preuve du Théorème 4.3.1.

L'estimation (4.5.41) n'est pas une estimation douce puisque le contrôle est réalisé par une norme de  $V^{\text{osc}}$  qui n'est pas fixe par rapport à l'indice de régularité  $s$ . Il n'est a priori pas possible d'obtenir l'existence d'une solution  $U^{\text{osc}}$  de régularité infinie en considérant un terme de bord  $G$  de régularité infinie, puisqu'en l'absence d'estimation douce, le temps d'existence  $T$  d'une solution dépend a priori de l'ordre de régularité  $s$  considéré. Il a été choisi de ne pas tenter de conserver des estimations douces jusqu'à la fin de l'analyse par souci de simplification, par exemple dans l'estimation (4.5.46), mais il est cependant envisageable de parvenir à ce résultat plus précis dans des travaux ultérieurs.

On discute maintenant des possibles extensions du résultat de ce chapitre à des hypothèses moins restrictives. Dans ce chapitre, on se place sous l'Hypothèse 4.2 de stricte hyperbolicité, mais cette hypothèse semble faite pour des raisons techniques, et il est donc raisonnable d'envisager un résultat similaire sous l'hypothèse que le système étudié est hyperbolique à multiplicité constante (voir Hypothèse 1.1 dans l'introduction). De même, l'Hypothèse 4.7 assurant qu'il n'y a pas de résonance entre des fréquences rentrantes et des fréquences sortantes pourrait être levée pour autoriser des fréquences sortantes à exister à l'intérieur du domaine. C'est une situation de ce type qui est considérée dans [CGW11]. Mais dans ce cas, certains modes sortants étant possiblement non nuls, il n'est alors plus possible de déterminer au préalable les traces des modes rentrants, comme cela est fait à la Proposition 4.5.22. Cela peut également ouvrir la voie à une infinité de résonances avec des phases sortantes, compliquant le cadre fonctionnel. En effet, on a vu que le cadre fonctionnel adapté à des modes sortants, dont on peut voir les problèmes aux limites d'évolution comme des problèmes de propagation par rapport à  $x_d$ , est celui d'un contrôle uniforme par rapport à la variable normale  $x_d$ , et de Sobolev notamment par rapport au temps, quand celui adapté pour les modes sortants, vérifiant des équations d'évolution pouvant être vues comme étant à frontière libre, est un contrôle uniforme par rapport au temps, et de Sobolev par rapport à la variable normale  $x_d$ , comme cela est fait dans [JMR95]. Il se trouve donc une difficulté dans le fait de conjuguer ces deux cadres fonctionnels. L'affaiblissement de l'Hypothèse 4.3 de Kreiss-Lopatinskii uniforme est discutée au Chapitre 5 suivant, où l'on considère des problèmes aux limites faiblement stables. Concernant les fréquences glancing, l'Hypothèse 4.4 que toute les fréquences glancing sont d'ordre 2 apparaît comme cruciale, voir [Wil00]. De même, il semble compliqué de se passer de l'Hypothèse 4.5 assurant qu'il n'y a pas de fréquence glancing créée au bord.

Enfin, il se pose la question de la justification du développement d'optique géométrique que l'on a construit, c'est-à-dire de montrer que la fonction

$$z \mapsto \varepsilon U_1(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, \dots, z' \cdot \zeta_m/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$$

approche effectivement la solution exacte du système (4.1.1) sur un intervalle de temps fixe, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour ce faire, deux méthodes principales s'offrent à nous. Comme cela est fait dans [Wil96], si l'on dispose d'une solution exacte existant sur un intervalle de temps indépendant du paramètre  $\varepsilon$ , il est envisageable de montrer que cette solution exacte et la fonction définie plus haut se rapprochent lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, voir également [JMR95 ; CGW11]. Le

problème est qu'ici on ne dispose pas d'une solution exacte existant sur un intervalle de temps fixé. Une autre approche consiste à utiliser un très grand nombre de correcteurs, ce dont on ne dispose pas ici (construire des correcteurs repose sur un contrôle exact de petits diviseurs pour les modes caractéristiques, qui va plus loin que l'Hypothèse 4.6). L'un comme l'autre de ces points (obtenir un temps d'existence de la solution exacte indépendant d'épsilon et construire un grand nombre de correcteurs) ne semblent pas être à notre portée pour le moment, mais pourront être l'objet de travaux ultérieurs.

## 4.A Appendices

### 4.A.1 Fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach

Soit  $E$  un espace de Banach complexe. Dans toute cette partie on étudie des fonctions  $U$  de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ , mais on pourrait tout aussi bien obtenir les mêmes résultats avec des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$ . On note  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$  l'ensemble des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ , muni de la norme de la convergence uniforme. On étudie ici trois notions de presque-périodicité, que l'on cherche à relier. La définition suivante est celle de la presque-périodicité au sens de Bohr.

**Définition 4.A.1** ([Cor09, Définition 3.1]). *Soit  $U$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ . On dit que  $U$  est presque-périodique (ou uniformément presque-périodique) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\ell(\varepsilon) > 0$  tel que dans tout intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur  $\ell(\varepsilon)$ , il existe un réel  $\tau$  tel que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t + \tau) - U(t)\|_E < \varepsilon.$$

À  $\varepsilon > 0$  fixé, les réels  $\tau$  de la définition précédente sont appelés des  $\varepsilon$ -pseudo-périodes.

*Remarque 4.A.2.* Une fonction  $U$  périodique de période  $T$  est presque périodique. On peut en effet prendre  $\ell(\varepsilon) = T$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Proposition 4.A.3** ([Cor09, Proposition 3.16]). *Toute fonction presque périodique est uniformément continue et bornée.*

*Preuve.* Soit  $U$  une fonction presque périodique, soit  $\ell(1)$  le réel associé à  $\varepsilon = 1$  dans la Définition 4.A.1, et  $M$  un majorant de la fonction continue

$$t \mapsto \|U(t)\|_E$$

sur  $[0, \ell(1)]$ . Pour  $t$  quelconque, l'intervalle  $[-t, -t + \ell(1)]$  de longueur  $\ell(1)$  contient une 1-pseudo-période  $\tau$ , et donc

$$\|U(t)\|_E \leq \|U(t + \tau) - U(t)\|_E + \|U(t + \tau)\|_E \leq 1 + M$$

par propriété de la pseudo-période  $\tau$  et puisque  $t + \tau$  appartient à l'intervalle  $[0, \ell(1)]$ . La fonction  $U$  est ainsi bornée par  $1 + M$ .

Concernant le caractère uniformément continue, on se donne  $\varepsilon > 0$ ,  $\ell(\varepsilon) > 0$  le réel donné par la Définition 4.A.1, et  $0 < \delta < 1$  un réel tel que si  $t', t''$  appartiennent à  $[-1, 1 + \ell(\varepsilon)]$  et si  $|t' - t''| < \delta$ , on a

$$\|U(t') - U(t'')\|_E < \varepsilon,$$

qui existe par uniforme continuité de la fonction  $t \mapsto \|U(t)\|_E$  sur  $[-1, 1 + \ell(\varepsilon)]$ . On se donne maintenant  $t_1, t_2$  deux réels tels que  $|t_1 - t_2| < \delta$ , et  $\tau$  une  $\varepsilon$ -pseudo-période de l'intervalle  $[-t_1, -t_1 + \ell(\varepsilon)]$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|U(t_2) - U(t_1)\|_E &\leq \|U(t_2) - U(t_2 + \tau)\|_E + \|U(t_2 + \tau) - U(t_1 + \tau)\|_E + \|U(t_1 + \tau) - U(t_1)\|_E \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

puisque  $\tau$  est une  $\varepsilon$ -pseudo-période et que  $t_2 + \tau, t_1 + \tau$  sont dans  $[-1, 1 + \ell(\varepsilon)]$ . Cela conclut la preuve de la proposition.  $\square$

On peut montrer avec des arguments similaires le résultat suivant.

**Proposition 4.A.4** ([Cor09, Proposition 3.20]). *L'ensemble des fonctions presque périodiques est fermé dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ .*

Le résultat suivant caractérise la presque-périodicité au sens de Bohr (Définition 4.A.1), ce qui nous donne une définition équivalente de celle-ci. Pour une fonction  $U$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ , on note, pour  $h$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $U_h$  la fonction translatée de  $U$  de rapport  $h$  définie par  $U_h : t \mapsto U(t + h)$ .

**Théorème 4.A.5** ([Cor09, Théorème 3.2]). *Une fonction  $U$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$  est presque-périodique si et seulement si l'ensemble des translatées  $\{U_h, h \in \mathbb{R}\}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ .*

On en déduit aisément le résultat suivant.

**Proposition 4.A.6** ([Cor09, Proposition 3.17, 3.19]). *L'ensemble des fonctions presque-périodiques est une espace vectoriel complexe.*

On définit maintenant une troisième notion de presque-périodicité, que l'on cherchera à relier à la première.

**Définition 4.A.7.** *On appelle polynôme trigonométrique de  $E$  toute fonction  $U$  qui s'écrit comme*

$$U(t) = \sum_{k=1}^n U_k e^{i\lambda_k t},$$

où  $n \geq 1$ ,  $U_k \in E$  et  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ . On dit qu'une fonction  $U$  de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  a la propriété d'approximation (ou propriété d'approximation uniforme) si  $U$  est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

L'ensemble des fonctions ayant la propriété d'approximation étant la fermeture dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$  d'un ensemble de fonctions uniformément continues, le résultat suivant est évident.

**Proposition 4.A.8.** *Toute fonction  $U$  ayant la propriété d'approximation est uniformément continue, et l'ensemble de ces fonctions est fermé dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ .*

Un polynôme trigonométrique étant presque-périodique (puisque l'ensemble des fonctions presque-périodiques est un espace vectoriel), la Proposition 4.A.4 nous donne le résultat suivant, qui constitue un sens de l'équivalence recherchée.

**Proposition 4.A.9** ([Cor09, Proposition 3.20]). *Tout fonction  $U$  ayant la propriété d'approximation est presque-périodique.*

Pour montrer le sens réciproque de cette équivalence, il nous faut introduire la notion de moyenne d'une fonction presque périodique.

**Théorème 4.A.10** ([Cor09, Théorème 3.4]). *Pour tout fonction presque périodique  $U$ , la quantité suivante, notée  $M\{U\}$ , est bien définie dans  $E$  :*

$$M\{U\} := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R U(t) dt.$$

Il s'agit de montrer que la fonction de  $R > 0$  donc on prend la limite est de Cauchy, en utilisant la définition de la presque-périodicité.

*Remarque 4.A.11.* Si  $U$  est une fonction périodique de période  $T$ , alors on a

$$\begin{aligned} M\{U\} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R U(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \left[ k \int_0^T U(t) dt + \int_{kT}^R U(t) dt \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{k}{kT + \alpha} \int_0^T U(t) dt + \frac{1}{kT + \alpha} \int_{kT}^{kT + \alpha} U(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt \end{aligned}$$

où pour  $R > 0$  on note  $k$  la partie entière de  $R/T$  et  $\alpha := R - kT$ . Ainsi, pour une fonction périodique  $U$ , la quantité  $M\{U\}$  coïncide avec la moyenne classique  $T^{-1} \int_0^T U(t) dt$  des fonctions périodiques.

On utilise maintenant la notion de moyenne pour donner un sens au développement en série de Fourier d'une fonction presque-périodique.

**Proposition 4.A.12** ([Cor09, Proposition 4.10]). *Si  $U$  est une fonction presque périodique, alors la quantité*

$$a(\lambda, U) := M\{t \mapsto U(t) e^{-i\lambda t}\}$$

*est non nulle pour un nombre au plus dénombrable de  $\lambda$  réels.*

La preuve de cette proposition utilise des résultats d'approximation diophantienne.

**Définition 4.A.13** ([Cor09, Définition 4.2]). *Soit  $U$  une fonction presque périodique, et soit  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$  les réels tels que la quantité  $a_k := a(\lambda_k, U)$  est non nulle pour  $k \geq 1$ . On note alors*

$$U(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t},$$

*et l'on appelle la série à droite de cette équation la série de Fourier associée à  $U$ .*

La série de Fourier d'une fonction presque-périodique la caractérise complètement, comme l'assure le résultat suivant.

**Théorème 4.A.14** ([Cor09, Théorème 4.7]). *Soit  $U$  et  $V$  deux fonctions presque-périodiques. Si  $U$  et  $V$  ont la même série de Fourier, c'est-à-dire si pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  on a  $a(\lambda, U) = a(\lambda, V)$ , alors  $U = V$  dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ .*

Enfin, le résultat suivant implique en particulier la réciproque de l'équivalence recherchée.

**Théorème 4.A.15** ([Cor09, Théorème 4.8]). *Soit  $U$  une fonction presque-périodique, donnée par*

$$U(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t},$$

*alors la suite*

$$U_m(t) := \sum_{k=1}^{n(m)} r_{k,m} a_k e^{i\lambda_k t},$$

*converge uniformément vers la fonction  $U$ , où les rationnels  $r_{k,m}$  dépendent de  $k$  mais pas de  $a_k$ , et où pour  $k \geq 1$ ,  $r_{k,m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ .*

*Remarque 4.A.16.* Toute fonction presque-périodique (au sens de la Définition 4.A.1) est donc limite uniforme de polynômes trigonométriques, et vérifie ainsi la propriété d'approximation. En conclusion, étant donné une fonction continue  $U$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ , les trois définitions suivantes de la presque-périodicité sont équivalentes.

- (i) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\ell(\varepsilon) > 0$  tel que dans tout intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur  $\ell(\varepsilon)$ , il existe un réel  $\tau$  tel que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t + \tau) - U(t)\|_E < \varepsilon.$$

- (ii) L'ensemble de fonctions  $\{U_h, h \in \mathbb{R}\}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, E)$ .  
 (iii) La fonction  $U$  est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Si l'on dispose d'une structure hilbertienne, c'est-à-dire si  $X = H$  où  $H$  est un espace de Hilbert complexe, alors on a un analogue de la formule de Plancherel. On note  $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$  le produit scalaire Hilbertien de  $H$ .

**Proposition 4.A.17** ([Cor09, Remarque 4.17]). *Si  $U, V$  sont deux fonctions de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H)$  presque-périodiques données par*

$$U(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}, \quad V(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{i\lambda_k t},$$

alors la formule de Plancherel suivante est vérifiée :

$$M\{t \mapsto \langle U | V \rangle_H(t)\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle a_k | b_k \rangle_H.$$

#### 4.A.2 Exemple d'un système engendrant une infinité de fréquences sortantes

L'exemple des équations d'Euler compressible isentropique en dimension 2 que l'on a développé dans ce travail (Exemple 4.1.1 et ceux qui suivent) satisfait les hypothèses que l'on a faites, mais un autre choix de couple de fréquences au bord peut engendrer un comportement différent. On discute ici l'exemple d'un couple de fréquences au bord telle qu'il y a une infinité de résonances entre des fréquences rentrantes et des fréquences sortantes, ce qui crée potentiellement une infinité de fréquences sortantes à l'intérieur du domaine.

On reprend donc les Exemples 4.1.1 et 4.1.11 ainsi que les notations de ceux-ci, et l'on considère un réseau de fréquences au bord différent de celui donné dans l'exemple 4.2.1. On considère cette fois-ci deux fréquences au bord  $\zeta_+$  et  $\zeta_-$  données par  $\zeta_+ := (c_0 \eta_0, \eta_0)$  et  $\zeta_- := (-c_0 \eta_0, \eta_0)$ , avec  $\eta_0 > 0$ , de sorte que  $\zeta_+$  et  $\zeta_-$  sont là encore dans la zone hyperbolique  $\mathcal{H}$ . On rappelle que  $c_0 = c(v_0) > 0$  désigne la vitesse du son et que l'état d'équilibre  $V_0 = (v_0, 0, u_0)$  vérifie  $0 < u_0 < c_0$ . Le réseau de fréquences au bord  $\mathcal{F}_b$  est donc donné dans cet exemple par

$$\mathcal{F}_b = \{(c_0 \eta_0 (p - q), \eta_0 (p + q)) \mid p, q \in \mathbb{Z}\}.$$

On note de manière analogue à l'Exemple 4.2.1, pour  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\zeta_{p,q} := (\tau_{p,q}, \eta_{p,q}) := (c_0 \eta_0 (p - q), \eta_0 (p + q))$  la fréquence de  $\mathcal{F}_b$  donnée par  $p\zeta_+ + q\zeta_-$ . On commence par vérifier que ce réseau  $\mathcal{F}_b$  satisfait bien, sous certaines conditions, les Hypothèses 4.5 et 4.6.

Une fréquence  $\zeta_{p,q}$  non nulle est glancing si et seulement si  $|\tau_{p,q}| = \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$ , c'est-à-dire si et seulement si<sup>6</sup>

$$(4.A.1) \quad \left| \frac{p - q}{p + q} \right| = \sqrt{1 - M^2},$$

où l'on rappelle que le nombre de Mach  $M$  est donné par  $M := u_0/c_0$ . Si le réel  $\sqrt{1 - M^2}$  est irrationnel, il n'existe ainsi pas de relation du type (4.A.1), et donc il n'existe pas de fréquence

6. Si  $p + q = 0$ , alors  $\eta_{p,q} = 0$ , et donc  $\tau_{p,q} = 0$  d'après la relation  $|\tau_{p,q}| = \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta_{p,q}|$ , c'est-à-dire que la fréquence  $\zeta_{p,q}$  est nulle, ce qui est exclu par hypothèse.

de  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  qui soit glancing. On suppose donc que  $\sqrt{1 - M^2}$  est irrationnel, et l'Hypothèse 4.5 est alors vérifiée.

Concernant l'Hypothèse 4.6 de petits diviseurs, on vérifie que, suivant le signe et l'ordre de  $p, q$ , la distance entre la fréquence  $\zeta_{p,q}$  et l'ensemble glancing  $\mathcal{G}$  est donnée par

$$\text{dist}(\zeta_{p,q}, \mathcal{G}) = C \left| (p - q) \pm \sqrt{1 - M^2}(p + q) \right|.$$

D'après le théorème de Roth, voir [Sch91, Théorème 2A], si le réel  $\sqrt{1 - M^2}$  est algébrique (et irrationnel, ce que l'on a déjà supposé), alors  $\sqrt{1 - M^2}$  vérifie

$$\left| \sqrt{1 - M^2} - \frac{r}{s} \right| \geq C s^{-(2+\varepsilon)},$$

pour tous  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  et  $\varepsilon > 0$ . Ainsi, pour tout  $\zeta_{p,q}$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,

$$\text{dist}(\zeta_{p,q}, \mathcal{G}) \geq C(p + q)^{-3/2} \geq C|\zeta_{p,q}|^{-3/2},$$

et donc l'Hypothèse 4.6 est vérifiée.

Le réseau  $\mathcal{F}_b$  satisfait donc bien, sous les hypothèses que  $\sqrt{1 - M^2}$  est irrationnel et algébrique, les Hypothèses 4.5 et 4.6. On détaille maintenant pourquoi il ne satisfait pas l'Hypothèse 4.7. On reprend les notations de l'Exemple 4.1.11, et on détermine tout d'abord que, dans la zone hyperbolique, les valeurs propres  $i \xi_1(\zeta)$ ,  $i \xi_2(\zeta)$  et  $i \xi_3(\zeta)$ , définies par (4.1.15), sont données, pour  $\zeta = \zeta_{p,q}$  dans  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , par

$$\begin{aligned} i \xi_1(\zeta_{p,q}) &= i \eta_0 \frac{M(p - q) + \text{sign}(p - q) \sqrt{(p + q)^2 M^2 - 4pq}}{1 - M^2}, \\ i \xi_2(\zeta_{p,q}) &= i \eta_0 \frac{M(p - q) - \text{sign}(p - q) \sqrt{(p + q)^2 M^2 - 4pq}}{1 - M^2}, \\ i \xi_3(\zeta_{p,q}) &= i \eta_0 \frac{(q - p)}{M}. \end{aligned}$$

On note d'abord que là encore la valeur propre linéaire  $i \xi_3(\zeta_{p,q})$  engendre une infinité de résonances du type

$$\alpha_3(\zeta_{p,q}) + \alpha_3(\zeta_{r,s}) = \alpha_3(\zeta_{p+r, q+s}),$$

qui sont des résonances entre fréquences rentrantes. On remarque maintenant que dans les expressions de  $i \xi_1(\zeta_{p,q})$  et  $i \xi_2(\zeta_{p,q})$ , la quantité sous la racine est symétrique en  $(p, q)$ . Ainsi, étant donné  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , on a les relations suivantes

$$\xi_1(\zeta_{p,q}) + \xi_1(\zeta_{q,p}) = 0, \quad \xi_2(\zeta_{p,q}) + \xi_2(\zeta_{q,p}) = 0.$$

Puisque  $\xi_3(\zeta_{p+q, q+p}) = 0$ , les résonances suivantes sont vérifiées :

$$\alpha_1(\zeta_{p,q}) + \alpha_1(\zeta_{q,p}) = \alpha_3(\zeta_{p+q, q+p}), \quad \alpha_2(\zeta_{p,q}) + \alpha_2(\zeta_{q,p}) = \alpha_3(\zeta_{p+q, q+p}).$$

La fréquence  $\alpha_3(\zeta_{p+q, q+p})$  étant toujours rentrante, et les fréquences  $\alpha_1(\zeta_{p,q})$  et  $\alpha_1(\zeta_{q,p})$  étant toujours sortantes, on a donc une infinité de résonances où deux fréquences sortantes engendrent une fréquence rentrante. Ce type de résonance est exclu dans l'Hypothèse 4.7, et notre analyse ne s'applique donc pas à cet exemple.

### 4.A.3 Détails de certains calculs

On détaille ici comment on a obtenu l'équation (4.2.9) de l'Exemple 4.2.1 ainsi que l'expression explicite des coefficients  $C_2(p, q, r, s, \delta)$ ,  $C_4(p, q, r, s, \delta)$  et  $C_6(p, q, r, s, \delta)$ .

On cherche à trouver à caractériser la résonance

$$\alpha_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \alpha_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \alpha_3(\zeta_{p+r,q+s})$$

pour  $p, q, r, s$  dans  $\mathbb{Z}$ . On remarque d'abord que cette résonance a lieu si et seulement si la relation

$$\xi_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \xi_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \xi_3(\zeta_{p+r,q+s})$$

est vérifiée. En réduisant au même dénominateur, on établit que cette égalité est équivalente à

$$\begin{aligned} & \pm M \sqrt{(p+q)^2 M^2 + 2pq(\delta-1) + q^2(\delta^2-1)} \\ & \pm M \sqrt{(r+s)^2 M^2 + 2rs(\delta-1) + s^2(\delta^2-1)} = (p+r+\delta q+\delta s). \end{aligned}$$

On passe une première fois au carré pour trouver l'équation équivalente

$$\begin{aligned} & \pm 2M^2 \left( M^4(p+q)^2(r+s)^2 + M^2[(p+q)^2(2rs(\delta-1) + s^2(\delta^2-1)) \right. \\ & \left. + (r+s)^2(2pq(\delta-1) + q^2(\delta^2-1))] \right) \\ & + 4pqr s(\delta-1)^2 + q^2 s^2(\delta^2-1)^2 + 2(pqs^2 + rsq^2)(\delta^2-1)(\delta-1) \Big)^{1/2} \\ & = M^4 [(p+q)^2 + (r+s)^2] + M^2 [2(pq+rs)(\delta-1) + (q^2+s^2)(\delta^2-1)] \\ & - (p+r-q-s)^2. \end{aligned}$$

On obtient donc après une deuxième mise au carré l'expression (4.2.9) rappelée ici

$$(4.A.2) \quad [(p+q)^2 - (r+s)^2] M^8 + C_6(p, q, r, s, \delta) M^6 + C_4(p, q, r, s, \delta) M^4 \\ + C_2(p, q, r, s, \delta) M^2 + (p+r+\delta q+\delta s)^2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} C_6(p, q, r, s, \delta) & := 2[(p+q)^2 - (r+s)^2] (2(rs-pq)(\delta-1) + (s^2-q^2)(\delta^2-1)), \\ C_4(p, q, r, s, \delta) & := 2[(p+q)^2 + (r+s)^2] (p+r+\delta q+\delta s)^2 \\ & - [2(pq-rs)(\delta-1) + (q^2-s^2)(\delta^2-1)]^2, \\ C_2(p, q, r, s, \delta) & := 8(p+r+\delta q+\delta s)^2 [2(pq+rs)(\delta-1) + (q^2+s^2)(\delta^2-1)]. \end{aligned}$$

Si maintenant le coefficient dominant de (4.A.2) est nul, c'est-à-dire si  $(p+q)^2 = (r+s)^2$ , alors on a également  $C_6(p, q, r, s, \delta) = 0$ .

On détaille maintenant l'obtention de l'équation (4.2.10). Ici encore la résonance

$$\alpha_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \alpha_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \alpha_{1,2}(\zeta_{p+r,q+s})$$

advient si et seulement si la relation

$$\xi_{1,2}(\zeta_{p,q}) + \xi_{1,2}(\zeta_{r,s}) = \xi_{1,2}(\zeta_{p+r,q+s})$$

est vérifiée, c'est-à-dire si et seulement si l'équation

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{(p+q)^2 M^2 + 2pq(\delta-1) + q^2(\delta^2-1)} \\ & \pm \sqrt{(r+s)^2 M^2 + 2rs(\delta-1) + s^2(\delta^2-1)} \\ & = \pm \sqrt{(p+q+r+s)^2 M^2 + 2(p+r)(q+s)(\delta-1) + (q^2+s^2)(\delta^2-1)} \end{aligned}$$



est satisfaite. Une première mise au carré nous donne l'équation équivalente

$$\begin{aligned}
& 2M^2(p+q)(r+s) + 2(\delta-1)(ps+qr) + 2(\delta^2-1)qs \\
= & \pm 2 \left\{ M^4(p+q)^2(r+s)^2 + M^2 \left[ (p+q)^2(2rs(\delta-1) + s^2(\delta^2-1)) \right. \right. \\
& \left. \left. + (r+s)^2(2pq(\delta-1) + q^2(\delta^2-1)) \right] \right. \\
& \left. + 4pqrs(\delta-1)^2 + q^2s^2(\delta^2-1)^2 + 2(pqs^2 + rsq^2)(\delta-1)^2(\delta+1) \right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

puis une deuxième mis au carré, après de nombreuses simplifications nous assure que celle-ci est équivalente à l'équation (4.2.10)

$$(ps - qr)^2(1 - M^2)(\delta - 1)^2 = 0.$$

# Transverse instability of high frequency weakly stable quasilinear boundary value problems

## Outline of the current chapter

<b>5.1 Notation and assumptions</b>	<b>168</b>
5.1.1 Position of the problem . . . . .	168
5.1.2 Weak Kreiss-Lopatinskii condition . . . . .	170
5.1.3 Oscillations . . . . .	171
<b>5.2 Derivation of the system</b>	<b>179</b>
5.2.1 Ansatz and WKB cascade . . . . .	179
5.2.2 Rewriting the equations: leading profile and first corrector . . . . .	181
5.2.3 General system . . . . .	197
<b>5.3 Existence of an analytic solution</b>	<b>200</b>
5.3.1 First toy model . . . . .	201
5.3.2 Functional framework . . . . .	203
5.3.3 A Cauchy-Kovalevskaya theorem for boundary equations . . . . .	208
5.3.4 Second toy model . . . . .	210
5.3.5 Additional functional framework . . . . .	211
5.3.6 Time analyticity on the boundary and Cauchy-Kovalevskaya theorem for incoming equations . . . . .	218
<b>5.4 Instability</b>	<b>226</b>
5.4.1 Linearization around a particular solution . . . . .	226
5.4.2 Instability on toy models . . . . .	228
<b>5.5 The example of gas dynamics</b>	<b>237</b>

This chapter takes interest into the (in)-stability of multiphase geometric optics expansions for weakly stable quasilinear hyperbolic boundary value problems. The formal construction of such geometric optics expansions goes back to Majda, Artola, and Rosales, in [MR83; MR84; AM87; MA88]. In this chapter, we prove that, for toy models, this expansion can be unstable, in the sense that a small perturbation of the boundary forcing term interferes at the leading order in the asymptotic expansion.

For uniformly stable problems, the construction of a multiphase asymptotic expansion is performed, for Cauchy problems, notably in [HMR86] for the linear case, and in [JMR95] for the quasilinear one. In the case of boundary value problems, [Wil96] studies the semilinear case with multiple frequencies on the boundary, and the quasilinear case is treated in [CGW11] for

one phase on the boundary, the case of multiple phases being addressed in the present thesis in Chapter 4. In the weakly stable case, that is, when the weak Kreiss-Lopatinskii condition is satisfied, an amplification phenomenon occurs, as shown in works of Coulombel, Guès and Williams. The first rigorous construction of a geometric optics expansion in the weakly stable case is performed in [CG10] for the linear boundary value problem. Nonlinear cases are treated in [CGW14; CW14] for the semilinear case, and [CW17] for the quasilinear one. In [CGW14; CW14; CW17], the authors consider one phase on the boundary, and the present chapter intends to address the extension of [CW17] to the multiphase case. Here, allowing multiple phases on the boundary permits us to consider a particular configuration of frequencies on the boundary, which, thanks to the amplification phenomenon, will lead to an instability for the asymptotic expansion. We show however that, fixing a locus of breaking of the Kreiss-Lopatinskii condition, this configuration of frequencies creating an instability cannot happen for the example of gas dynamics. This leaves hope to justify the validity of the geometric optics expansion for the gas dynamics. This work is divided in three main parts: (i) the derivation of the equations satisfied by the profiles in the multiphase case, following [CW17]; (ii) the proof of existence of solutions to the obtained system in an analytical framework; and (iii) the proof of instability for this system, namely, that there exists a perturbation of the boundary forcing term interfering at a leading order in the expansion. The general system being out of our reach for the moment, both for existence and for instability, we treat toy models of the general system of equations for the profiles.

For the boundary value problem considered in this chapter, the boundary is assumed to satisfy the weak Kreiss-Lopatinskii condition, namely that the Kreiss-Lopatinskii condition breaks on a certain locus of the space of frequencies. More precisely, we assume here that the locus where the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied lies in the hyperbolic region (see [BGS07, Definition 2.1]). For boundary frequencies for which the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, an amplification phenomenon occurs on the boundary. The idea is to consider a particular configuration of frequencies on the boundary which will turn this amplification into a strong instability. For this purpose, we consider a boundary forcing term  $G$  oscillating at a frequency  $\varphi$ , belonging to the locus where the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, and we perturb this boundary forcing term  $G$  with a perturbation term  $H$ , oscillating at a *transverse* frequency  $\psi$  also belonging to the locus where the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, of small amplitude compared to the one of  $G$ . Then we assume that two well chosen resonance relations between  $\varphi$  and  $\psi$  exists, which will allow the perturbation  $H$  to ascend towards the leading order, through repeated amplification and resonances. We study in this chapter the possibility for such a configuration of frequencies to happen for the isentropic compressible Euler equations in space dimension 3. We prove that for a particular choice of locus where the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, the configuration of boundary frequencies considered here is impossible for the Euler system.

The derivation of equations for the amplitudes from the BKW cascade follows the one detailed in [CW17]. The main difference with the iterative process in the uniform stable case, and in particular with the derivation of equations in Chapter 4, is that, for boundary frequencies lying in the locus where the Kreiss-Lopatinski condition is not satisfied, we cannot a priori determine a boundary condition for incoming profiles. Indeed, because of the weak Kreiss-Lopatinskii condition, for such boundary frequencies, the traces of incoming profiles are expressed through an unknown scalar function. For a given order, the evolution equations satisfied by these boundary terms are derived using equations on profiles of the next order. This is where amplification occurs. The main difference with [CW17] is that, because of resonances, equations for each profiles and for boundary terms are coupled with each other. Also, in comparison with [CW17], in equations for the boundary term of a given order, there is a term involving the trace of a profile of the next order, which was proven to be zero in [CW17], because resonances were absent in that work. This results to a highly coupled system. We discuss two points about this system, the existence of a

solution to it, and creation of an instability.

The existence of a solution to the system of equations for the profiles is proven in an analytical setting. The aim is to use the abstract Cauchy-Kovalevskaya theorem, whose proof can be found in [Nir72] and [Nis77]. We use in this chapter the formulation of [BG78]. The system of equations for the profiles is made of incoming and outgoing equations for interior profiles, whose traces of incoming profiles are expressed with boundary terms that in turn satisfy coupled evolution equations on the boundary. As already mentioned, the general system is difficult to treat, so we consider two different toy models for the study of existence. Both retain only a few profiles (which are the ones of interest), and remove some couplings between equations. The first one is only constituted by coupled equations on the boundary terms, and we make this first toy model more complex into a second one by incorporating interior equations, whose traces on the boundary are given by the solutions to the equations on the boundary. For the first toy model, containing only equations on the boundary, the formulation of [BG78] can be applied, using a chain of spaces quantifying analyticity by means of the Fourier transform. The only difficulty is to show that a certain bilinear operator appearing in the equations is semilinear in the considered spaces of functions, and this is a straightforward adaptation of a result of [CW17]. For the second toy model, incorporating interior equations, the aim is to apply the Cauchy-Kovalevskaya theorem to the interior equations, seen as propagation equations in the normal direction. Therefore, we need the boundary terms, solutions to boundary equations, to be analytical with respect to all their variables: both tangential space variables and time. However, if we apply the classical Cauchy-Kovalevskaya theorem to the boundary equations, we obtain a solution analytical only with respect to tangent space variables, and not with respect to time. In unpublished lecture notes, Clément Mouhot proves a version of the Cauchy-Kovalevskaya theorem with analytic solutions, but, in this work, the analyticity is not quantified in a space of analytical functions. Therefore, we need to adapt the Cauchy-Kovalevskaya theorem to obtain analyticity with respect to all variables for solutions to boundary equations. This is done using the method of majoring series, and the phenomenon of regularization by integration in time introduced in [Uka01], see also [Mét09; Mor20]. We define for this purpose a chain of functional spaces of analytic functions, with a formulation adapted from [BG78] to the framework of majoring series, and prove the result using a fixed point theorem. We also define a chain of functional spaces suited to apply the Cauchy-Kovalevskaya theorem for interior equations, having constructed analytic boundary terms. Applying the Cauchy-Kovalevskaya theorem to interior equations in this chain of functional spaces then presents no difficulty.

To prove that there is an instability, namely, that a small perturbation  $H$  of the boundary forcing term  $G$  interferes at a leading order, since the perturbation  $H$  is small compared to  $G$ , we consider the linearized version of the general system, around the particular solution of this system when the perturbation  $H$  is zero. We obtain a linearized system with a small boundary forcing term given by  $H$ , and we prove that there exists a boundary term  $H$  such that this system admits a solution whose first order profiles are not all zero. It shows that the small perturbation  $H$  interferes at a leading order for the linearized system, which constitutes an instability. This is proven by contradiction: we assume that for all boundary terms  $H$ , all leading profiles are zero, and we contradict a certain condition by constructing the second order profiles. As for the part about existence, we work here with toy models, as the coupling of the general system of equations is too difficult to handle. The first toy model allows us to construct explicitly the solution to the linearized system, solving the considered transport equations by the method of characteristics. For the second one, the coupling is more complex, preventing us to apply the latter method, and we use a perturbation method and solve equations with a fixed point theorem.

This chapter is organized as follows. First we state the problem that we study here, make structural assumptions about it, and specify some assumptions and preliminary results about the oscillations at stake. Then, in a second part, the general system of equations for the profiles is derived, by detailing the iterative process for the leading profile and then the first corrector,

and by writing down the general system satisfied by higher order correctors. We proceed in a third part with the proof of existence of a solution to toy models of this general system. We start by detailing the obtaining of the first toy model, then defining the functional framework which will be used, specifying the toy model according to this functional framework, and applying the Cauchy-Kovalevskaya theorem for boundary equations. Then we detail how this first toy model is made more complex into a second one, we define additional functional spaces and specify the second toy model accordingly, and finally we prove existence and analyticity of solutions to boundary equations, leading to existence of solutions to interior equations, using the classical Cauchy-Kovalevskaya theorem. The fifth part is devoted to the proof of instability, first by deriving the linearization of the general system around the particular solution where the perturbation  $H$  is zero, and then by proving, for two different toy models, that an instability is created. Finally, in a sixth part, the example of isentropic compressible Euler equations in space dimension 3 is studied.

In all the chapter the letter  $C$  denotes a positive constant that may vary during the analysis, possibly without any mention being made.

## 5.1 Notation and assumptions

### 5.1.1 Position of the problem

Given a time  $T > 0$  and an integer  $d \geq 2$ , let  $\Omega_T$  be the domain  $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  and  $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$  its boundary. We denote as  $t \in (-\infty, T]$  the time variable,  $x = (y, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$  the space variable, with  $y \in \mathbb{R}^{d-1}$  the tangential variable and  $x_d \in \mathbb{R}_+$  the normal variable, and at last  $z = (t, x) = (t, y, x_d)$ . We also denote by  $z' = (t, y) \in \omega_T$  the variable of the boundary  $\{x_d = 0\}$ . For  $i = 1, \dots, d$ , we denote by  $\partial_i$  the partial derivative operator with respect to  $x_i$ . Finally we denote as  $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$  and  $\zeta \in \mathbb{R}^d$  the dual variables of  $z \in \Omega_T$  and  $z' \in \omega_T$ . We consider the following problem

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z) u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \sum_{i=1}^d A_i(u^\varepsilon) \partial_i u^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_T, \\ B u^\varepsilon|_{x_d=0} = \varepsilon^2 g^\varepsilon + \varepsilon^M h^\varepsilon & \text{on } \omega_T, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

where the unknown  $u^\varepsilon$  is a function from  $\Omega_T$  to an open set  $\mathcal{O}$  of  $\mathbb{R}^N$  containing zero,  $N \geq 1$ , the matrices  $A_j$  are smooth functions of  $\mathcal{O}$  with values in  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , the matrix  $B$  belongs to  $\mathcal{M}_{\tilde{p}, N}(\mathbb{R})$  and is of maximal rank (integer  $\tilde{p} \geq 1$  will be made precise below).

The boundary term is a superposition of a reference forcing oscillating term  $\varepsilon^2 g^\varepsilon$  (of characteristic wavelength  $\varepsilon$ ) and a smaller, transverse, oscillating term  $\varepsilon^M h^\varepsilon$  with  $M \geq 3$ , namely, for  $z' \in \omega_T$ ,

$$(5.1.2a) \quad g^\varepsilon(z') = G\left(z', \frac{z' \cdot \varphi}{\varepsilon}\right),$$

$$(5.1.2b) \quad h^\varepsilon(z') = H\left(z', \frac{z' \cdot \psi}{\varepsilon}\right),$$

where  $G, H$  are functions of the Sobolev space of infinite regularity  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ , are zero for negative time  $t$ , and with boundary frequencies  $\varphi, \psi$  given in  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  are taken linearly independent over  $\mathbb{R}$ , that is,  $\psi \notin \mathbb{R}\varphi$ . We denote by  $\zeta$  the couple  $\zeta := (\varphi, \psi)$ . In this paper we wish to place ourselves in the framework of weakly nonlinear geometric optics. Usually to obtain this framework the amplitude of the boundary forcing term must be of order

$O(\varepsilon)$ . Here, because we will assume that the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied for  $\varphi$  (and  $\psi$ ), an amplification phenomenon will happen at the boundary for this frequency, so a forcing term of amplitude of order  $O(\varepsilon^2)$  should be chosen on the boundary. This scaling has been studied in [AM87; MR83; MR84; CW17]. Note that if we set  $h^\varepsilon = 0$  in system (5.1.1), we obtain the system studied in [CW17].

To simplify the equations and computations we assume that the coefficients are affine maps, that is, for  $j = 1, \dots, d$ ,

$$A_j(u) = A_j(0) + dA_j(0) \cdot u.$$

We make the following structural and classical assumption on the boundary.

**Assumption 5.1** (noncharacteristic boundary). *The boundary is noncharacteristic, that is, matrix  $A_d(0)$  is invertible.*

To simplify the equations and the computations we will study here the case  $M = 3$ , but there is no apparent obstacle to generalize this analysis to any integer  $M \geq 4$ . For the same purpose we choose to work with the particular case of 3-dimensional vectors ( $N = 3$ ) since it is sufficient in this analysis to create instabilities.

In this paper we study a geometric optics asymptotic expansion for system (5.1.1), namely, we look for an approximate solution to (5.1.1) in the form of a formal series

$$(5.1.3) \quad u^{\varepsilon, \text{app}}(z) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n U_n \left( z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon} \right),$$

where the collection of phases  $\Phi$  will be made precise later. The approximate solution is expected to be of order  $O(\varepsilon)$  because of the weakly nonlinear framework. The aim is to show that, with a well chosen configuration of frequencies, there is an instability in this asymptotic expansion, in the sense that, despite its small amplitude order  $O(\varepsilon^3)$ , the perturbation  $\varepsilon^3 h^\varepsilon$  may interfere at the leading order, i.e. in the construction of the leading profile  $U_1$ . In addition to this instability, we will study well-posedness for a toy model associated with the equations for the profiles, and the possibility for such a frequency configuration to occur in the case of Euler equations in space dimension 3.

We start by making a series of structural assumptions on system (5.1.1) and detailing the configuration of frequencies considered here.

The following definition introduces the notion of characteristic frequency.

**Definition 5.1.1.** *For  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ , the symbol  $L(0, \alpha)$  associated with  $L(0, \partial_z)$  is defined as*

$$L(0, \alpha) := \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0).$$

*Then we define its characteristic polynomial as  $p(\tau, \eta, \xi) := \det L(0, (\tau, \eta, \xi))$ . We say that  $\alpha \in \mathbb{R}^{1+d}$  is a characteristic frequency if it is a root of the polynomial  $p$ .*

The following assumption, called *strict hyperbolicity* (see [BGS07, Definition 1.2]), is made. Assumptions of hyperbolicity, whether strict or with constant multiplicity, are very usual, see e.g. [Wil96; CGW11; JMR95], and related to the structure of the problem. Assumption of hyperbolicity with constant multiplicity, which is more general than Assumption 5.2 of strict hyperbolicity below, is sometimes preferred like in [CGW11; JMR95]. We chose here to work with the latter for technical reasons. Recall that we placed ourselves in the particular case where the size of the system is  $N = 3$ .

**Assumption 5.2** (strict hyperbolicity). *There exist real functions  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ , analytic with respect to  $(\eta, \xi)$  in  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , such that for all  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  and for all  $\tau \in \mathbb{R}$ , the following factorisation is verified*

$$p(\tau, \eta, \xi) = \det \left( \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0) \right) = \prod_{k=1}^3 (\tau - \tau_k(\eta, \xi)),$$

where the eigenvalues  $-\tau_k(\eta, \xi)$  of the matrix  $A(\eta, \xi) := \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi A_d(0)$  are therefore simple.

### 5.1.2 Weak Kreiss-Lopatinskii condition

We define the following space of frequencies

$$\begin{aligned} \Xi &:= \{ \zeta = (\sigma = \tau - i\gamma, \eta) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} \mid \gamma \geq 0 \}, \\ \Sigma &:= \{ \zeta \in \Xi \mid \tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^2 = 1 \}, \\ \Xi_0 &:= \{ \zeta \in \Xi \mid \gamma = 0 \}, \\ \Sigma_0 &:= \Xi_0 \cap \Sigma. \end{aligned}$$

We also define the matrix valued symbol which we get when applying the Laplace-Fourier transform to the operator  $L(0, \partial_z)$ . For all  $\zeta = (\sigma, \eta) \in \Xi$ , let

$$\mathcal{A}(\zeta) := -i A_d(0)^{-1} \left( \sigma I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j(0) \right).$$

The Hersh lemma ([Her63]) ensures that for  $\zeta$  in  $\Xi \setminus \Xi_0$ , the matrix  $\mathcal{A}(\zeta) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  has no eigenvalue of zero real part, and that the stable subspace associated with the eigenvalues of negative real part, denoted by  $E_-(\zeta)$ , is of constant dimension, denoted  $p$ . Furthermore, the integer  $p$  is obtained as the number of positive eigenvalues of the matrix  $A_d(0)$ . We denote by  $E_+(\zeta)$  the unstable subspace  $\mathcal{A}(\zeta)$  associated with eigenvalues of positive real part, which is of dimension  $3 - p$ .

In [Kre70] (see also [CP82] and [BGS07]) it is shown that the stable and unstable subspaces  $E_{\pm}$  extend continuously to the whole space  $\Xi$  in the strictly hyperbolic case (Assumption 5.2). We still denote by  $E_{\pm}$  the extensions to  $\Xi$ . The *hyperbolic region*, denoted by  $\mathcal{H}$ , is defined as the set of frequencies  $\zeta$  such that matrix  $\mathcal{A}(\zeta)$  has only purely imaginary eigenvalues.

The following assumption is very structural to the problem (see for example [CG10, Assumption 2.5]), and is the one which allows amplification on the boundary, and thus instability.

**Assumption 5.3** (weak Kreiss-Lopatinskii condition).

- For all  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ ,  $\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}$ .
- The set  $\Upsilon := \{ \zeta \in \Sigma_0 \mid \ker B \cap E_-(\zeta) \neq \{0\} \}$  is nonempty and included in the hyperbolic region  $\mathcal{H}$ .
- There exist a neighborhood  $\mathcal{V}$  of  $\Upsilon$  in  $\Sigma$ , a real valued  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\kappa$  defined on  $\mathcal{V}$ , a basis  $E_1(\zeta), \dots, E_p(\zeta)$  of  $E_-(\zeta)$  and a matrix  $P(\zeta) \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  which are of class  $\mathcal{C}^\infty$  with respect to  $\zeta \in \mathcal{V}$  such that, for all  $\zeta$  in  $\mathcal{V}$ ,

$$B(E_1(\zeta) \cdots E_p(\zeta)) = P(\zeta) \text{diag}(\gamma + i\kappa(\zeta), 1, \dots, 1).$$

*Remark 5.1.2.* First point of Assumption 5.3, requiring that  $\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}$  for all  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , implies in particular that  $\tilde{p}$ , the rank of  $B$ , equals  $p$ , the dimension of  $E_-(\zeta)$ . These two equal integers will be denoted by  $p$  in the following. Assumption 5.5 below sets furthermore the integer  $p = \tilde{p}$  to be equal to 2.

The so-called *Kreiss-Lopatinskii condition* is the first point of Assumption 5.3 that stands in  $\Xi \setminus \Xi_0$ , and the next two points detail how this condition breaks on the boundary  $\Xi_0$  of  $\Xi$  (for the *uniform Kreiss-Lopatinskii condition* to hold, equality  $\ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}$  is assumed to be satisfied everywhere in  $\Xi$ , see [Kre70]). The second point asserts that the Kreiss-Lopatinskii condition breaks only in the hyperbolic region  $\mathcal{H}$ , and the third one ensures that when it breaks, the space  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is of dimension 1, and that the default of injectivity of  $B$  on  $E_-(\zeta)$  is parameterize by the  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\kappa$ . In particular,  $\kappa$  must be zero on  $\Upsilon$ , and nonzero on  $\Sigma_0 \setminus \Upsilon$ .

Together with Assumptions 5.1 and 5.2, Assumption 5.3 ensures that for all  $\varepsilon > 0$ , system (5.1.1) is weakly well-posed locally in time (which depends on  $\varepsilon$ ). A proof of a similar result, for characteristic free boundary problems can be found in [CS08]. Indeed, the three assumptions 5.1, 5.2 and 5.3 are stable under small perturbations around the equilibrium, see [BGS07, Section 8.3].

### 5.1.3 Oscillations

The notion of incoming, outgoing and glancing frequencies is now introduced.

**Definition 5.1.3.** *Let  $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$  be a characteristic frequency, and  $k$  the integer between 1 and 3 such that  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . The group velocity  $\mathbf{v}_\alpha \in \mathbb{R}^d$  associated with  $\alpha$  is defined as*

$$\mathbf{v}_\alpha := \nabla_{\eta, \xi} \tau_k(\eta, \xi).$$

We shall say that  $\alpha$  is *glancing* (resp. *incoming*, *outgoing*) if  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  is zero (resp. negative, positive). When  $\alpha$  is not glancing, the vector field  $X_\alpha$  associated with  $\alpha$  is defined as

$$(5.1.4) \quad X_\alpha := \frac{-1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \left( \partial_t - \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_x \right) = \frac{-1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)} \left( \partial_t - \nabla_\eta \tau_k(\eta, \xi) \cdot \nabla_y - \partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \partial_{x_d} \right).$$

Lax lemma, see Lemma 5.1.10 below, ensures that these constant coefficients scalar transport operators  $X_\alpha$  appear naturally in the equations satisfied by the profiles arising in weakly nonlinear asymptotic expansions (see [Rau12]).

We describe now a decomposition of the stable subspace  $E_-(\zeta)$  for  $\zeta \in \Xi_0$ , that uses strict hyperbolicity (Assumption 5.2).

**Proposition 5.1.4** ([Wil96], Proposition 3.4). *Consider  $\zeta = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ . We denote by  $i\xi_j(\zeta)$  for  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$  the distinct complex eigenvalues of the matrix  $\mathcal{A}(\zeta)$ , and if  $\xi_j(\zeta)$  is real, we shall denote by  $\alpha_j(\zeta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$  the associated real characteristic frequency. If  $\xi_j(\zeta)$  is real, we also denote by  $k_j$  the integer between 1 and 3 such that  $\tau = \tau_{k_j}(\eta, \xi_j(\zeta))$ . Then the set  $\{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\}$  decomposes as the disjoint union*

$$(5.1.5) \quad \{1, 2, \dots, \mathcal{M}(\zeta)\} = \mathcal{G}(\zeta) \cup \mathcal{I}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{O}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta),$$

where the sets  $\mathcal{G}(\zeta)$ ,  $\mathcal{I}(\zeta)$ ,  $\mathcal{P}(\zeta)$ ,  $\mathcal{O}(\zeta)$  and  $\mathcal{N}(\zeta)$  correspond to indexes  $j$  such that respectively  $\alpha_j(\zeta)$  is glancing,  $\alpha_j(\zeta)$  is incoming,  $\text{Im}(\xi_j(\zeta))$  is positive,  $\alpha_j(\zeta)$  is outgoing and  $\text{Im}(\xi_j(\zeta))$  is negative.

Then the following decomposition of  $E_-(\zeta)$  holds

$$(5.1.6) \quad E_-(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{R}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta),$$

where for each index  $j$ , the subspace  $E_-^j(\zeta)$  is precisely described as follows.

- i) If  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ , the space  $E_-^j(\zeta)$  is the generalized eigenspace  $\mathcal{A}(\zeta)$  associated with the eigenvalue  $i\xi_j(\zeta)$ .
- ii) If  $j \in \mathcal{R}(\zeta)$ , we have  $E_-^j(\zeta) = \ker L(0, \alpha_j(\zeta))$ , which is of dimension 1.



iii) If  $j \in \mathcal{G}(\zeta)$ , we denote by  $n_j$  the algebraic multiplicity of the imaginary eigenvalue  $i\xi_j(\zeta)$ . For small positive  $\gamma$ , the multiple eigenvalue  $i\xi_j(\tau, \eta)$  splits into  $n_j$  simple eigenvalues, denoted by  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$ ,  $k = 1, \dots, n_j$ , all of nonzero real part. We denote by  $\mu_j$  the number (independent of  $\gamma > 0$ ) of the eigenvalues  $i\xi_j^k(\tau - i\gamma, \eta)$  of negative real part. Then  $E_-^j(\zeta)$  is of dimension  $\mu_j$  and is generated by the vectors  $w$  satisfying  $[\mathcal{A}(\zeta) - i\xi_j(\zeta)]^{\mu_j} w = 0$ . Furthermore, if  $n_j$  is even,  $\mu_j = n_j/2$  and if  $n_j$  is odd,  $\mu_j$  is equal to  $(n_j - 1)/2$  or  $(n_j + 1)/2$ .

Likewise, the unstable subspace  $E_+(\zeta)$  decomposes as

$$(5.1.7) \quad E_+(\zeta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{G}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{S}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\zeta)} E_+^j(\zeta),$$

with similar description of the subspaces  $E_+^j(\zeta)$ . In particular, if the set  $\mathcal{G}(\zeta)$  is empty, then

$$\mathbb{C}^3 = E_-(\zeta) \oplus E_+(\zeta).$$

For  $\zeta \in \Xi_0$ , we denote by  $\mathcal{C}(\zeta)$  the set of indices such that  $\alpha_j(\zeta)$  is real characteristic, that is

$$\mathcal{C}(\zeta) := \mathcal{I}(\zeta) \cup \mathcal{O}(\zeta) \cup \mathcal{G}(\zeta).$$

**Definition 5.1.5.** A frequency  $\zeta$  in  $\Xi_0$  is said to be *glancing* if there exists  $j = 1, \dots, \mathcal{M}(\zeta)$  such that  $\alpha_j(\zeta)$  is glancing, i.e. if  $\mathcal{G}(\zeta)$  is nonempty, *hyperbolic* if  $\mathcal{A}(\zeta)$  has only purely imaginary eigenvalues, that is if  $\mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta)$  is empty and *mixed* if  $\mathcal{P}(\zeta) \cup \mathcal{N}(\zeta)$  is nonempty. We shall denote by  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{EH}$ ) the set of glancing (resp. hyperbolic, mixed) frequencies.

**Definition 5.1.6.** For  $\zeta \in \Xi_0$  not glancing, according to Proposition 5.1.4, we have the following decomposition of  $\mathbb{C}^3$ :

$$\mathbb{C}^3 = \bigoplus_{j \in \mathcal{O}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(\zeta)} E_+^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{I}(\zeta)} E_-^j(\zeta) \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta).$$

In that case we denote by  $\Pi^e(\zeta)$  the projection from  $\mathbb{C}^3$  on the stable elliptic component  $E_-^e(\zeta) := \bigoplus_{j \in \mathcal{P}(\zeta)} E_-^j(\zeta)$  according to this decomposition.

The following result is adapted from [CG10, Lemma 3.2] to the case of mixed frequencies.

**Lemma 5.1.7.** For all  $\zeta \in \Xi_0$  nonglancing, the following decompositions hold

$$(5.1.8a) \quad \mathbb{C}^3 = \bigoplus_{j \in \mathcal{C}(\zeta)} \ker L(0, \alpha_j(\zeta)) \oplus F_\zeta$$

$$(5.1.8b) \quad \mathbb{C}^3 = \bigoplus_{j \in \mathcal{C}(\zeta)} A_d(0) \ker L(0, \alpha_j(\zeta)) \oplus A_d(0) F_\zeta,$$

where  $F_\zeta$  is the generalized eigenspace of  $\mathcal{A}(\zeta)$  associated with the eigenvalues of nonzero real part. Furthermore, if we denote by  $P_j(\zeta)$  and  $P_{F_\zeta}$  (resp.  $Q_j(\zeta)$  and  $Q_{F_\zeta}$ ) the projectors associated with the decomposition (5.1.8a) (resp. (5.1.8b)), then we have

$$(5.1.9) \quad \text{Im } L(0, \alpha_j(\zeta)) = \ker Q_j(\zeta),$$

for all  $j$ .

In [CG10], the result is proven only for frequencies  $\zeta$  hyperbolic, and the proof is slightly simpler using directly the diagonalizability of matrix  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Here the matrix is only block-diagonalizable, and we have to deal with eigenvalues of nonzero real part.

*Proof.* The two decompositions come from the block-diagonalizability of matrix  $\mathcal{A}(\zeta)$ , the fact that  $\zeta$  is not glancing and the invertibility of matrix  $A_d(0)$ . Indeed, for any nonglancing frequency  $\zeta \in \Xi_0$ , there exists therefore an invertible matrix  $T(\zeta)$  such that  $T(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)T(\zeta)^{-1}$  is the block diagonal matrix

$$T(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)T(\zeta)^{-1} = \text{diag}(i\xi_1(\zeta), \dots, i\xi_{m_\zeta}(\zeta), \mathcal{A}_\pm(\zeta))$$

where the  $\xi_j(\zeta)$  are real scalars, and the spectrum of the block  $\mathcal{A}_\pm(\zeta)$  is contained in  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ . The proof decomposes in two main steps. First we construct a sequence of diagonalizable matrix converging toward  $\mathcal{A}(\zeta)$ , in order to be able to adapt the method used in [CG10]. Then using projectors defined for this sequence of matrix, analogous to  $P_j(\zeta)$  and  $Q_j(\zeta)$ , we are able to prove relation (5.1.9), using diagonalizability.

*Step 1.* We consider a sequence  $(\mathcal{A}_\pm^k(\zeta))_{k \geq 0}$  of diagonalizable matrices converging toward  $\mathcal{A}_\pm(\zeta)$ . For  $k \geq 0$ , we denote by  $\tilde{T}_k(\zeta)$  the invertible matrix such that

$$\tilde{T}_k(\zeta)\mathcal{A}_\pm^k(\zeta)\tilde{T}_k(\zeta)^{-1} = \text{diag}(i\lambda_1, \dots, i\lambda_{3-m_\zeta}).$$

We also denote by  $T_k(\zeta)$  the block diagonalizable matrix

$$T_k(\zeta) := \text{diag}(I_{m_\zeta}, \tilde{T}_k(\zeta)),$$

and we finally define, for  $k \geq 0$  the matrix  $\mathcal{A}^k(\zeta)$  as

$$\mathcal{A}^k(\zeta) := T(\zeta)T_k(\zeta)\text{diag}(i\xi_1(\zeta), \dots, i\xi_{m_\zeta}(\zeta), i\lambda_1, \dots, i\lambda_{3-m_\zeta})T_k(\zeta)^{-1}T(\zeta)^{-1}.$$

Note that the sequence  $(\mathcal{A}^k(\zeta))_{k \geq 0}$  is by definition a sequence of diagonalizable matrices which converges toward  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Using this diagonalizability we get the two following decompositions of  $\mathbb{C}^3$ , for  $k \geq 0$ :

$$(5.1.10a) \quad \mathbb{C}^3 = \bigoplus_{j=1}^{m_\zeta} \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\xi_j(\zeta)I) \oplus \bigoplus_{j=1}^{3-m_\zeta} \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I)$$

$$(5.1.10b) \quad = \bigoplus_{j=1}^{m_\zeta} A_d(0) \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\xi_j(\zeta)I) \oplus \bigoplus_{j=1}^{3-m_\zeta} A_d(0) \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I).$$

First we note that, by definition of the matrix  $\mathcal{A}^k(\zeta)$ , the eigenspace  $\ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\xi_j(\zeta)I)$  is equal to  $\ker L(0, \alpha_j(\zeta))$  and that

$$\bigoplus_{j=1}^{3-m_\zeta} \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I) = F_\zeta.$$

Thus we define the projectors  $P_\pm^{k,j}(\zeta)$  (resp.  $Q_\pm^{k,j}(\zeta)$ ) on  $\ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I)$  (resp.  $A_d(0) \ker(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I)$ ) associated with the decomposition (5.1.10a) (resp. (5.1.10b)). According to the previous remark we then have

$$(5.1.11a) \quad I = P_1(\zeta) + \dots + P_{m_\zeta}(\zeta) + P_\pm^{k,1}(\zeta) + \dots + P_\pm^{k,3-m_\zeta}(\zeta)$$

$$(5.1.11b) \quad = Q_1(\zeta) + \dots + Q_{m_\zeta}(\zeta) + Q_\pm^{k,1}(\zeta) + \dots + Q_\pm^{k,3-m_\zeta}(\zeta).$$

*Step 2.* For  $j_0$  between 1 and  $m_\zeta$ , analogously to  $L(0, \alpha_{j_0}(\zeta))$ , we define

$$L_k(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) := iA_d(0)(\mathcal{A}^k(\zeta) - i\xi_{j_0}(\zeta)I).$$

By definition and since the following relation is satisfied

$$L(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) = iA_d(0)(\mathcal{A}(\zeta) - i\xi_{j_0}(\zeta)I),$$

the sequence  $(L_k(0, \alpha_{j_0}(\zeta)))_{k \geq 0}$  converges to  $L(0, \alpha_{j_0}(\zeta))$ . We consider  $L_k(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) X$  an element of  $\text{Im } L_k(0, \alpha_{j_0}(\zeta))$  with  $X \in \mathbb{C}^3$ , and the aim is to prove that it belongs to  $\ker Q_{j_0}(\zeta)$ . The latter is a closed space, so, since the sequence  $(L_k(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) X)_{k \geq 0}$  converges to  $L(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) X$ , it will follow that  $\text{Im } L(0, \alpha_{j_0}(\zeta)) \subset \ker Q_{j_0}(\zeta)$  and the conclusion then infers because of equality of dimension of the two spaces.

We have, by definition of the projectors  $P_j(\zeta)$  and  $P_{\pm}^{k,j}(\zeta)$  and because of the decomposition (5.1.11a),

$$\begin{aligned} L_k(\alpha_{j_0}(\zeta)) X &= iA_d(0)(\mathcal{A}_k(\zeta) - i\xi_{j_0}(\zeta)I) \left\{ \sum_{j=1}^{m_\zeta} P_j(\zeta) X + \sum_{j=1}^{3-m_\zeta} P_{\pm}^{k,j}(\zeta) X \right\} \\ &= iA_d(0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{m_\zeta} (i\xi_j(\zeta) - i\xi_{j_0}(\zeta)) P_j(\zeta) X + iA_d(0) \sum_{j=1}^{3-m_\zeta} (i\lambda_j(\zeta) - i\xi_{j_0}(\zeta)) P_{\pm}^{k,j}(\zeta) X, \end{aligned}$$

and the last term belongs to

$$\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{m_\zeta} A_d(0) \ker (\mathcal{A}^k(\zeta) - i\xi_j(\zeta)I) \oplus \bigoplus_{j=1}^{3-m_\zeta} A_d(0) \ker (\mathcal{A}^k(\zeta) - i\lambda_j I) = \ker Q_{j_0}(\zeta),$$

concluding the proof.  $\square$

The interest is now made on the frequencies created on the boundary and then lifted inside the domain. Recall that we considered a quasi-periodic boundary forcing term of frequencies  $\varphi/\varepsilon$  and  $\psi/\varepsilon$ , with  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . In the following we will make restricting assumptions on  $\varphi$  and  $\psi$  in order to obtain a particular frequency configuration, eventually creating an instability.

By nonlinear interaction, frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  on the boundary create the following lattice of frequencies on the boundary:

$$\mathcal{F}_b := \varphi \mathbb{Z} \oplus \psi \mathbb{Z}.$$

To avoid the complications induced by the glancing modes, we assume that there is no glancing frequency in  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ . This is a common assumption, see [CG10; CGW11].

**Assumption 5.4.** *We have*

$$(\mathcal{F}_b \setminus \{0\}) \cap \mathcal{G} = \emptyset.$$

To parameterize  $\mathcal{F}_b$  we introduce the following subset of  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2} := \left\{ (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \left| \begin{array}{l} n_1 \wedge n_2 = 1, \\ n_1 > 0 \text{ or } n_1 = 0, n_2 > 0 \end{array} \right. \right\},$$

of couples of coprime integers of which the first nonzero term is positive. Then, each frequency  $\zeta := n_1 \varphi + n_2 \psi$  of  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  is parameterized in a unique way by  $\mathbf{n}_0 := (n_1^0, n_2^0) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  such that  $(n_1, n_2) = \lambda (n_1^0, n_2^0)$ .

In the following, we will allow ourselves to alternate without mentioning it between the following representations of a frequency of  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ :  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  in  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  such that  $\zeta = n_1 \varphi + n_2 \psi$  and  $\mathbf{n}_0 = (n_1^0, n_2^0)$  in  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $\lambda$  in  $\mathbb{Z}^*$  such that  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$ .

Because of the hyperbolicity of the system, boundary frequencies  $\zeta$  of  $\mathcal{F}_b$  are lifted into frequencies  $(\zeta, \xi)$  inside the domain, which must be characteristic frequencies due to polarization

conditions. Furthermore, frequencies  $(\zeta, \xi)$  with  $\text{Im } \xi < 0$  are excluded to obtain bounded solutions, and we have already discarded glancing frequencies by Assumption 5.4. Therefore, the set  $\mathcal{F}$  of frequencies inside the domain is given by

$$\mathcal{F} := \{0\} \cup \{(\zeta, \xi_j(\zeta)) \mid \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}, j \in \mathcal{C}(\zeta) \cup \mathcal{P}(\zeta)\}.$$

The following assumption details the configuration of frequencies which is assumed to hold in order to create an instability. It is a generalization to our case of [CW17, Assumptions 1.7 and 1.9], where the only frequency of the problem,  $\varphi$ , was supposed to be nonresonant, hyperbolic, and in  $\Upsilon$ . Assumption 5.5 below requires in particular that frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  are nonresonant<sup>1</sup>, hyperbolic, and in  $\Upsilon$ . We additionally assume two resonances between frequencies lifted from  $\varphi$  and  $\psi$  to hold, which will eventually allow us to create an instability.

**Assumption 5.5.** *There exists a frequency  $\nu$  in  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  defined by*

$$\lambda_\varphi \varphi + \lambda_\psi \psi + \nu = 0$$

*with coprime integers  $\lambda_\varphi, \lambda_\psi$  such that  $(-\lambda_\varphi, -\lambda_\psi)$  is in  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ , and such that the following conditions hold.*

- i.) Frequencies  $\varphi, \psi$  and  $\nu$  are in the hyperbolic region  $\mathcal{H}$ .*
- ii.) Frequencies lifted from  $\varphi, \psi, \nu$ , denoted by  $\varphi_j, \psi_j, \nu_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  are such that  $\varphi_j, \psi_j, \nu_j$ ,  $j = 1, 3$  are incoming frequencies and  $\varphi_2, \psi_2, \nu_2$  are outgoing frequencies.*
- iii.) We have  $\mathcal{F}_b \cap \Upsilon = \{\varphi, -\varphi, \psi, -\psi\}$  (so in particular we have  $\varphi, \psi \in \Upsilon$  and  $\nu \in \Xi_0 \setminus \Upsilon$ ).*
- iv.) The following two resonances hold:*

$$(5.1.12a) \quad \lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_1 + \nu_2 = 0,$$

$$(5.1.12b) \quad \lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0.$$

- v.) There is no other resonance between frequencies inside the domain. More precisely, if there exists a resonance relation of the form*

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 = 0,$$

*with  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$  and  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$  noncolinear, then, there exists  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , such that up to a renumbering,  $\lambda_1 = \lambda \lambda_\varphi$ ,  $\lambda_2 = \lambda \lambda_\psi$ ,  $\lambda_3 = \lambda$  and  $(\alpha_1 = \varphi_1, \alpha_2 = \psi_1$  and  $\alpha_3 = \nu_2)$  or  $(\alpha_1 = \varphi_3, \alpha_2 = \psi_2$  and  $\alpha_3 = \nu_2)$ .*

Frequencies lifted inside from frequencies  $\varphi, \psi$  and  $\nu$  are depicted in Figure 5.1. There is an amplification in the lifting of  $\varphi$  and  $\psi$  because these frequencies are in the region  $\Upsilon$  where the Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, in contrast to  $\nu$ . Amplification arise since, for a frequency in  $\Upsilon$ , there is an ascent of small amplitudes toward higher one, namely, a boundary source term of order  $O(\varepsilon^{n+1})$  occurs in the equations for the profile of order  $O(\varepsilon^n)$ . Therefore, when amplification occurs, inside profiles lifted from boundary terms of order  $O(\varepsilon^{n+1})$  are one order higher, namely  $O(\varepsilon^n)$ .

*Remark 5.1.8.* — Point i.) of Assumption 5.5 asserts that each frequency  $\varphi, \psi$  and  $\nu$  is lifted into three real characteristic frequencies inside the domain.

- Point ii.) of Assumption 5.5 implies in particular that the integer  $p$ , which is the rank of  $B$  and the dimension of the stable subspace  $E_-(\zeta)$  for  $\zeta$  in  $\Xi$ , is equal to 2.
- In relations (5.1.12), the numeration of the frequencies occurring in the resonances (5.1.12) is arbitrary. For the first resonance (5.1.12a), each of the two incoming frequencies lifted from

---

1. In the sense that two frequencies lifted from  $\varphi$  cannot resonate with each other, and the same for  $\psi$ .

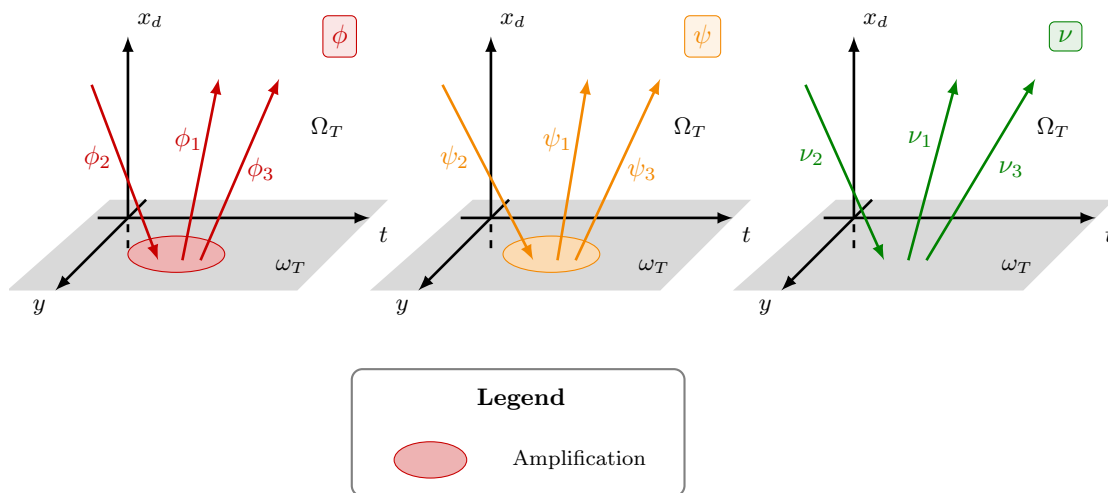


Figure 5.1 – Frequencies lifted from  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$ .

$\varphi$  and  $\psi$  can be chosen. It sets the numbering of the frequencies lifted from  $\varphi$  and  $\psi$ . Next, for the second resonance (5.1.12b), there is no choice, the incoming frequency lifted from  $\varphi$  which occurs in the resonance must be the one which did not occur in the first one,  $\varphi_3$  in our fixed numbering, since we already required that  $\lambda_\varphi \varphi_1 + \nu_2 = -\lambda_\psi \psi_1$ , and  $\psi_2$  is the only outgoing frequency associated with  $\psi$ .

- We choose a numbering of  $\alpha_j(\zeta)$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  such that, for any  $j = 1, 2, 3$ , we have

$$\alpha_j(\zeta) = \zeta_j,$$

where the  $\zeta_j$  are the hyperbolic frequencies defined in Assumption 5.5.

- The condition  $(-\lambda_\varphi, -\lambda_\psi) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  is not restrictive and only relies on permuting the notation for  $\varphi$  and  $\psi$  or  $-\varphi$  and  $\varphi$ . It is made to simplify notation in the following.

A useful notation is now introduced for the resonances.

**Definition 5.1.9.** For  $\zeta \in \{\varphi, \psi, \nu\}$ , and  $j = 1, 2, 3$ , the set  $\mathcal{R}(\zeta, j)$  is defined as the set of quadruples  $(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2)$  in  $\{\varphi, \psi, \nu\}^2 \times \{1, 2, 3\}^2$  such that the following resonance holds

$$\lambda_\zeta \alpha_j(\zeta) + \lambda_{\zeta_1} \alpha_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2) = 0,$$

where we have denoted  $\lambda_\nu := 1$ .

For example, we have, according to Assumption 5.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varphi, 1) &= \{(\psi, \nu, 1, 2), (\nu, \psi, 2, 1)\}, & \mathcal{R}(\varphi, 2) &= \emptyset, & \mathcal{R}(\varphi, 3) &= \{(\psi, \nu, 3, 2), (\nu, \psi, 2, 3)\}, & \text{and} \\ \mathcal{R}(\nu, 2) &= \{(\varphi, \psi, 1, 1), (\varphi, \psi, 3, 2), (\psi, \varphi, 1, 1), (\psi, \varphi, 2, 3)\}. \end{aligned}$$

We conduct now a formal discussion on how the configuration of frequencies  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  and  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  and the two resonances (5.1.12) are expected to create an instability, as represented in Figure 5.2. First, the boundary profiles  $\varepsilon^2 g^\varepsilon$  and  $\varepsilon^3 h^\varepsilon$  of frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  in (5.1.1) create, because of the amplification due to the breaking of Kreiss-Lopatinskii condition for those frequencies, incoming interior profiles of frequencies  $\varphi_1$ ,  $\varphi_3$ , and  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  of orders respectively  $O(\varepsilon)$  and  $O(\varepsilon^2)$ . Then because of the resonance relation (5.1.12a), the profiles associated with  $\varphi_1$  and  $\psi_1$  resonate to create a profile of outgoing frequency  $\nu_2$  and of order  $O(\varepsilon^2)^2$ . This profile

2. One of the quadratic term in the equations has a factor  $1/\varepsilon$  in front of it, because the product  $A_i(u^\varepsilon) \partial_i u^\varepsilon$  involves a derivative which counts as  $1/\varepsilon$  for oscillating wave packets at frequency of order  $1/\varepsilon$ .

interacts, through resonance relation (5.1.12b), with the one of frequency  $\varphi_3$  and of order  $O(\varepsilon)$ , which is lifted from the boundary forcing term  $\varepsilon^2 g^\varepsilon$ . This resonance leads to a profile of frequency  $\psi_2$  and amplitude  $O(\varepsilon^2)$ , which is an outgoing profile, so a reflection and thus an amplification occur. Indeed, it creates a boundary profile of frequency  $\psi$  and order  $O(\varepsilon^2)$ : we obtain instability. Indeed, this boundary profile creates, through amplification on the boundary for  $\psi$ , a profile of frequency  $\psi_1$  and order  $O(\varepsilon)$ , which is one order higher than the profile of frequency  $\psi_1$  we started with. Iterating this process leads to an explosion.

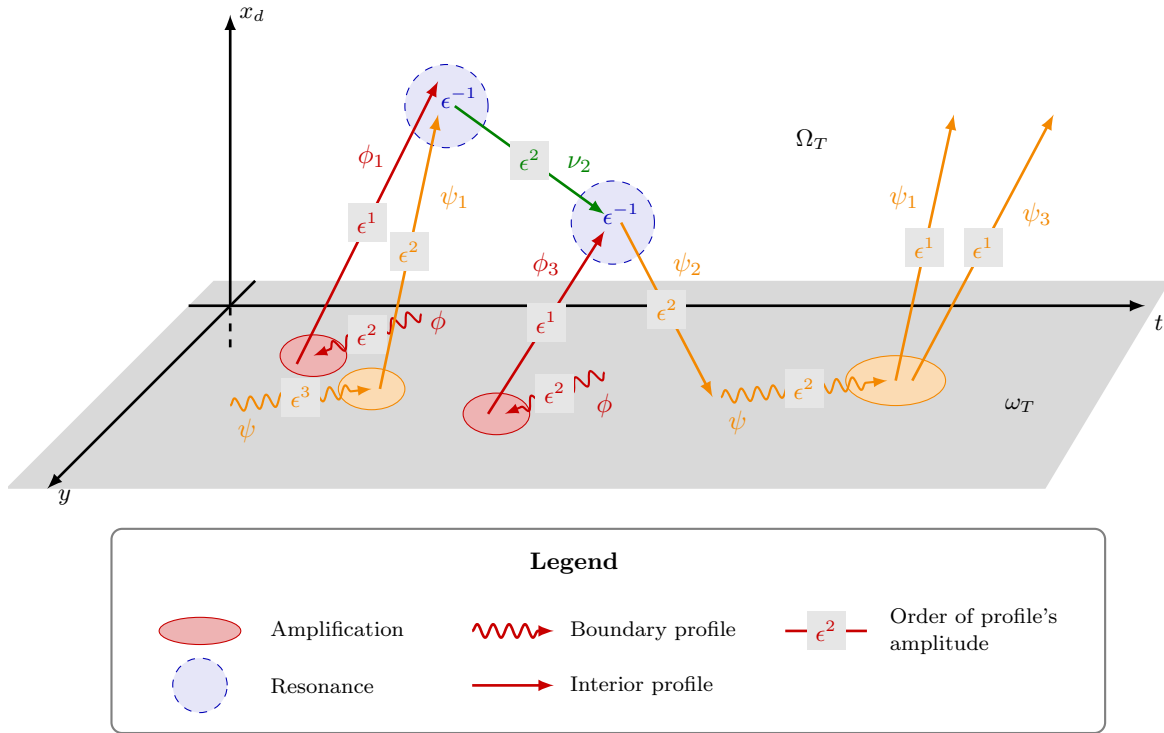


Figure 5.2 – Creation of instability through amplification.

We make now a small divisors assumption, which is adapted from [CW17, Assumption 1.9]. This assumption is needed only for frequencies for which the uniform Kreiss-Lopatinskii condition is not satisfied, so, in our case, for  $\varphi$  and  $\psi$ . Analogously to [CW17, Assumption 1.9], it requires a polynomial control of the determinant of the symbol associated with combinations of incoming frequencies, using the fact that frequencies lifted from  $\varphi$  do not resonate, and the same for  $\psi$ . The formulation is simpler than the one of [CW17, Assumption 1.9] since in our case there is only two incoming frequencies, so the only possibility for a combination of it is  $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3$ , with  $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ , and the same for  $\psi$ .

**Assumption 5.6.** *There exists a constant  $C > 0$  and a real positive number  $m_0$  such that, for  $\zeta = \varphi, \psi$ , for all  $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ ,*

$$|\det L(0, \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_3 \zeta_3)| \geq C |(\lambda_1, \lambda_3)|^{-m_0}.$$

Finally, we define several vectors associated with the previously introduced eigenspaces. For  $\zeta$  in  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ , we denote by  $r_{\zeta,j}$  a unit column vector of the one dimensional space  $\ker L(0, \alpha_j(\zeta))$ , and  $\ell_{\zeta,j}$  a row vector such that

$$(5.1.13) \quad \ell_{\zeta,j} L(0, \alpha_j(\zeta)) = 0$$

with the following normalization: for all  $\zeta$  in  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and for all  $j, j'$  in  $\mathcal{C}(\zeta)$ , we have

$$(5.1.14) \quad \ell_{\zeta, j'} A_d(0) r_{\zeta, j} = \delta_{j'}^j.$$

The projectors  $P_j(\zeta)$ ,  $Q_j(\zeta)$  (defined in Lemma 5.1.7) and the vectors  $r_{\zeta, j}$  and  $\ell_{\zeta, j}$  are chosen to be homogeneous of degree 0 with respect to  $\zeta$ . Accordingly, we define the partial inverses  $R_{\zeta, j}$ , which satisfy, for  $\zeta$  in  $\mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  represented by  $\mathbf{n}_0, \lambda$  in  $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}^*$ ,

$$(5.1.15) \quad R_{\zeta, j} L(0, \alpha_j(\zeta)) = L(0, \alpha_j(\zeta)) R_{\zeta, j} = \lambda (I - P_{\zeta, j}).$$

Consider  $\zeta \in \Upsilon$ . Assumption 5.3 asserts that the space  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is one dimensional, so we denote by  $e_\zeta$  a unit vector in this space. Now, since, according to the same assumption,  $\Upsilon$  is included in the hyperbolic region  $\mathcal{H}$  and because of Proposition 5.1.4, we can decompose  $e_\zeta$  as

$$(5.1.16) \quad e_\zeta = \sum_{j \in \mathcal{I}(\zeta)} e_{\zeta, j},$$

with  $e_{\zeta, j} \in \text{Span } r_{\zeta, j}$  for  $j \in \mathcal{I}(\zeta)$ . We also denote by  $b_\zeta$  a vector of  $\mathbb{C}^2$  such that

$$(5.1.17) \quad B E_-(\zeta) = \{X \in \mathbb{C}^2 \mid b_\zeta \cdot X = 0\},$$

that is, a nonzero vector of  $\ker {}^t B|_{E_-(\zeta)}$ , which is of dimension 1. Notation  $b_\zeta \cdot X$  refers to the complex scalar product in  $\mathbb{C}^2$ .

Using vectors  $r_{\zeta, j}$  and  $\ell_{\zeta, j}$ , we have the following lemma, analogous to the one of [Lax57]. The proof of this particular result can be found in [CGW11], and is recalled here for the sake of clarity.

**Lemma 5.1.10** ([CGW11, Lemma 2.11]). *For  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ , we have*

$$\ell_{\zeta, j} L(0, \partial_z) r_{\zeta, j} = X_{\alpha_j(\zeta)},$$

where  $X_{\alpha_j(\zeta)}$  is the vector field defined in Definition 5.1.3.

*Proof.* Denote by  $k$  the integer between 1 and 3 such that, if  $\alpha_j(\zeta) = (\tau, \eta, \xi)$ , then  $\tau = \tau_k(\eta, \xi)$ . Since  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ , the frequency  $\zeta$  is not glancing, so, according to definition 5.1.3, we have  $\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi) \neq 0$ . Therefore, according to the implicit function theorem, the function  $\zeta' \mapsto \xi_j(\zeta')$  is differentiable near  $\zeta$ . Indeed,  $\xi_j$  is such that, if  $\zeta' = (\tau', \eta')$ ,

$$(5.1.18) \quad \tau_k(\eta', \xi_j(\tau', \eta')) - \tau' = 0.$$

Therefore<sup>3</sup>, seen as a function of  $\zeta$ , the vector  $r_{\zeta, j}$  is also differentiable with respect to  $\zeta$ . Differentiating relation (5.1.18) even proves the following relations:

$$(5.1.19) \quad \partial_\tau \xi_j(\tau, \eta) = \frac{1}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)}, \quad \partial_{\eta_p} \xi_j(\tau, \eta) = \frac{-\partial_{\eta_p} \tau_k(\eta, \xi)}{\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)}, \quad \forall p = 1, \dots, d-1.$$

Now, differentiating the relation

$$L(0, (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))) r_{\zeta, j} = 0$$

with respect to  $\tau$  and  $\eta_p$ ,  $p = 1, \dots, d-1$ , and multiplying on the left by  $\ell_{\zeta, j}$ , gives

$$\ell_{\zeta, j} r_{\zeta, j} + \partial_\tau \xi_j(\tau, \eta) \ell_{\zeta, j} A_d(0) r_{\zeta, j} = 0,$$

---

3. Here we extend the definition of  $r_{\zeta, j}$  to any frequency  $\zeta$  in  $\Xi \setminus \mathcal{G}$ .

and, for  $p = 1, \dots, d-1$ ,

$$\ell_{\zeta,j} A_p(0) r_{\zeta,j} + \partial_{\eta_p} \xi_j(\tau, \eta) \ell_{\zeta,j} A_d(0) r_{\zeta,j} = 0.$$

With relations (5.1.19), the result follows.  $\square$

The following result could be seen as an analogue to Lax lemma, for the boundary. Indeed, it asserts that a certain operator appearing in the boundary equations is actually a linear transport operator with constant velocity. The result is due to [CG10], and its technical proof is not recalled here.

**Lemma 5.1.11** ([CG10, Proposition 3.5]). *Let  $\zeta = \varphi, \psi$ , and recall that  $\kappa$  is the scalar function of the weak Kreiss-Lopatinskii condition, see Assumption 5.3. Then, there exists a nonzero real scalar  $\beta_\zeta$  such that*

$$b_\zeta \cdot B \left( R_{\zeta,1} L(0, \partial_z) e_{\zeta,1} + R_{\zeta,3} L(0, \partial_z) e_{\zeta,3} \right) = \beta_\zeta \left( \partial_\tau \kappa(\zeta) \partial_t + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\eta_j} \kappa(\zeta) \partial_{x_j} \right).$$

Moreover, the coefficient  $\partial_\tau \kappa(\zeta)$  is equal to 1.

*Remark 5.1.12.* In particular, the previous result ensures that the operator  $b_\zeta \cdot B (R_{\zeta,1} L(0, \partial_z) e_{\zeta,1} + R_{\zeta,3} L(0, \partial_z) e_{\zeta,3})$  is tangent to the boundary.

## 5.2 Derivation of the system

This section is devoted to the derivation of the general system studied in this article. We start by detailing the ansatz we choose here, and by displaying the WKB cascade associated with system (5.1.1). Then we proceed by trying to decouple this cascade for the profiles.

### 5.2.1 Ansatz and WKB cascade

The ansatz for each amplitude  $U_n$  of (5.1.3) must allow to consider both oscillating modes (associated with characteristic frequencies  $\alpha_j(\zeta)$  for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ ) and evanescent modes (associated with evanescent frequencies  $\alpha_j(\zeta)$  for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and  $j \in \mathcal{P}(\zeta)$ ). We define at this purpose the following spaces of profiles. We denote by  $\mathbb{T}$  the one-dimensional torus.

**Definition 5.2.1.** *The space of evanescent profiles  $\mathcal{P}_T^{\text{ev}}$  is defined as the set of functions  $U^{\text{ev}}$  of  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_{\chi_d}^+, H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{T}^2))$  which converge to zero as  $\chi_d$  goes to infinity.*

*The space of oscillating profiles  $\mathcal{P}_T^{\text{osc}}$  is defined as the set of formal trigonometric functions in  $\chi_d$  with values in the Sobolev space  $H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{T}^2)$ , that is, formal series*

$$U^{\text{osc}}(z, \theta_1, \theta_2, \chi_d) = \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_\xi^{\text{osc}}(z, \theta_1, \theta_2) e^{i\xi \chi_d},$$

with  $U_\xi^{\text{osc}} \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{T}^2)$  for  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Finally,  $\mathcal{P}_T$  is defined as the direct sum

$$\mathcal{P}_T := \mathcal{P}_T^{\text{osc}} \oplus \mathcal{P}_T^{\text{ev}}.$$

The ansatz is the following: we look for an approximate solution

$$u^{\varepsilon, \text{app}}(z) := v^\varepsilon \left( z, \frac{z' \cdot \varphi}{\varepsilon}, \frac{z' \cdot \psi}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right)$$



where the formal series  $v^\varepsilon$  is given by

$$(5.2.1) \quad v^\varepsilon(z, \theta_1, \theta_2, \chi_d) := \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n U_n(z, \theta_1, \theta_2, \chi_d),$$

where, for  $n \geq 1$ ,  $U_n$  belongs to  $\mathcal{P}_T$ .

Formally plugging ansatz (5.2.1) in system (5.1.1), we obtain the following WKB cascade<sup>4</sup> (see [CW17]) for the profiles  $(U_n)_{n \geq 1}$ :

$$(5.2.2a) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U_1 = 0$$

$$(5.2.2b) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U_2 + L(0, \partial_z) U_1 + \mathcal{M}(U_1, U_1) = 0$$

$$(5.2.2c) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U_{n+1} + L(0, \partial_z) U_n + \sum_{k=1}^n \mathcal{M}(U_{n-k+1}, U_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{N}(U_{n-k}, U_k) = 0,$$

where (5.2.2c) should hold for any  $n \geq 2$ . In (5.2.2), the fast operator  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d})$  and the quadratic operators  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{N}$  are defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) &:= L(0, \varphi) \partial_{\theta_1} + L(0, \psi) \partial_{\theta_2} + A_d(0) \partial_{\chi_d}, \\ \mathcal{M}(u, v) &:= L_1(u, \varphi) \partial_{\theta_1} v + L_1(u, \psi) \partial_{\theta_2} v + dA_d(0) \cdot u \partial_{\chi_d} v \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} dA_k(0) \cdot u (\varphi_k \partial_{\theta_1} + \psi_k \partial_{\theta_2}) v + dA_d(0) \cdot u \partial_{\chi_d} v, \\ \mathcal{N}(u, v) &:= L_1(u, \partial_z) v := \sum_{k=1}^d dA_k(0) \cdot u \partial_k v, \end{aligned}$$

where we have denoted by, for  $X$  in  $\mathbb{C}^3$  and  $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$L(0, \zeta) := L(0, (\zeta, 0)) = \sum_{k=1}^{d-1} \zeta_k A_k(0), \quad L_1(X, \zeta) := \sum_{k=1}^{d-1} \zeta_k dA_k(0) \cdot X.$$

The boundary and initial conditions of (5.1.1) reads (recall that  $M = 3$ )

$$(5.2.3a) \quad B(U_1)|_{x_d, \chi_d=0}(z', \theta_1, \theta_2) = 0, \quad B(U_2)|_{x_d, \chi_d=0}(z', \theta_1, \theta_2) = G(z', \theta_1)$$

$$(5.2.3b) \quad B(U_3)|_{x_d, \chi_d=0}(z', \theta_1, \theta_2) = H(z', \theta_2), \quad B(U_n)|_{x_d, \chi_d=0}(z', \theta_1, \theta_2) = 0, \quad \forall n \geq 4,$$

and

$$(5.2.4) \quad (U_n)|_{t \leq 0} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

The aim is now to decouple cascade (5.2.2). First we use polarization equation (5.2.2a) to obtain the form of the leading profile  $U_1$ , and proceed to show that the mean value  $U_1^*$  of  $U_1$  is zero using evolution equation (5.2.2b). Then we need to determine the oscillating part of  $U_1$ . Equation (5.2.2b) leads to a transport equations for each mode. When the equation is outgoing (that is, when the frequency is outgoing), the transport equation can be solved with a source term eventually depending on other leading profiles, due to resonances. When it is incoming (i.e. when the frequency is incoming), we need to determine a boundary condition from first equation of (5.2.3a). Two cases may occur. If the associated boundary frequency  $\zeta$  is not in  $\Upsilon$ , that is, for  $\zeta \neq \varphi, \psi$ , we can write boundary condition (5.2.3a) for  $\zeta$  as  $BX = F$ , where source term  $F$

4. We have used here the assumption that coefficients  $A_j$  are affine maps.

depends on the trace of the outgoing leading profile for this boundary frequency  $\zeta$ , and where  $X$  (containing traces of incoming leading profiles) belongs to  $E_-(\zeta)$ . Since  $B$  is invertible on  $E_-(\zeta)$  according to Assumption 5.3 and the fact that  $\zeta \notin \Upsilon$ , this boundary condition  $BX = F$  leads to a boundary condition for traces of incoming leading profiles. The second case is more complicated. If  $\zeta \in \Upsilon$ , that is, if  $\zeta = \varphi, \psi$ , matrix  $B$  is no longer invertible on  $E_-(\zeta)$ . Therefore, boundary condition  $BX = F$  cannot be inverted, and leads to both a compatibility condition (which we shall see will over-determine the system), and expressions for traces of incoming leading profiles for  $\varphi$  and  $\psi$  depending on unknown scalar functions  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$ . Then, to determine these functions  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$ , we need investigate first corrector  $U_2$ .

According to equation (5.2.2b), the first corrector  $U_2$  is not polarized. But this equation allows us to determine a formula for its nonpolarized part, depending on the leading profiles. We write second equation of boundary condition (5.2.3a) with these expressions for the nonpolarized parts which leads to equations on the traces of the nonpolarized parts, and therefore, equations on the traces of leading profiles, namely  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$ . However, the system of equations obtained is still not closed, since equations on  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$  involve traces of the first corrector  $U_2$ .

The next step is to obtain equations on the polarized part of the first corrector  $U_2$ , which is achieved using equation (5.2.2c) for  $n = 3$ . Once again, depending on the frequency, we obtain incoming or outgoing transport equations with source term depending on leading profile and first corrector. For incoming equations, when the associated frequency  $\zeta$  is not in  $\Upsilon$ , boundary condition (5.2.3a) can be inverted to obtain a closed system. Otherwise, when  $\zeta$  belongs to  $\Upsilon$ , the same arguments as for the leading profiles leads to compatibility conditions (that are these time always satisfied by previous construction) and expressions for traces of incoming first corrector profiles for  $\varphi$  and  $\psi$  depending on unknown scalar functions  $a_\varphi^2$  and  $a_\psi^2$ .

Investigating the nonpolarized part of the second corrector  $U_3$  leads, in its turn, to equations on  $a_\varphi^2$  and  $a_\psi^2$ , depending once again on trace of the second corrector  $U_2$ , preventing to close the system. This method applies recursively to any order.

## 5.2.2 Rewriting the equations: leading profile and first corrector

This subsection is devoted to the almost-decoupling of the cascade (5.2.2), (5.2.3) and (5.2.4). The computations are, for the most part of it, formal. Except for the leading profile, we will not detail the obtaining of formulas for the evanescent part, as it will not be interesting for the instability analysis, since all three frequencies  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$  are hyperbolic.

### Leading profile

We start by deriving the polarization condition for  $U_1$  from (5.2.2a), recalling the analysis of [Les07]. If we write  $U_1$  in  $\mathcal{P}_T$  as

$$\begin{aligned} U_1(z, \theta, \chi_d) &= U_1^{\text{osc}}(z, \theta, \chi_d) + U_1^{\text{ev}}(z, \theta, \chi_d) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \chi_d} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} U_{\mathbf{n}}^{1, \text{ev}}(z, \chi_d) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta}, \end{aligned}$$

equation (5.2.2a) reads

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} iL(0, (\mathbf{n} \cdot \zeta, \xi)) U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}}(z) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \xi \chi_d} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \{iL(0, \mathbf{n} \cdot \zeta) + A_d(0) \partial_{\chi_d}\} U_{\mathbf{n}}^{1, \text{ev}}(z, \chi_d) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta} = 0. \end{aligned}$$

Therefore, on one hand, for the oscillating part, we get  $L(0, (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)) U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}} = 0$  for every  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  and  $\xi \in \mathbb{R}$ , so, if  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \xi)$  is noncharacteristic,  $U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}} = 0$  and if  $\xi = \xi_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$  for some  $j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})$ , we find that  $U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}}$  belongs to  $\ker L(0, \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) = \text{Span } r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j}$ . Thus we write

$$U_{\mathbf{n}, \xi}^{1, \text{osc}} = \sigma_{\mathbf{n}_0, j, \lambda}^1 r_{\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}, j},$$

if  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$  with  $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , and where  $\sigma_{\mathbf{n}_0, j, \lambda}^1$  is a scalar function of  $\Omega_T$ . On the other hand, for the evanescent part, we get  $U_0^{1, \text{ev}} = 0$ , and, for  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$U_{\mathbf{n}}^{1, \text{ev}}(z, \chi_d) = e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{1, \text{ev}}(z, 0).$$

In short, polarization equation (5.2.2a) asserts that  $U_1$  reads

$$(5.2.5) \quad U_1(z, \theta, \chi_d) = U_1^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1(z) e^{i \lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \chi_d} r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) U_{\mathbf{n}}^{1, \text{ev}}(z, 0) e^{i \mathbf{n} \cdot \theta}.$$

We start by showing that the mean value  $U_1^*$  is zero, using equation (5.2.2b). The oscillating part of  $L(0, \partial_z) U_1 + \mathcal{M}(U_1, U_1)$  is given by  $L(0, \partial_z) U_1^{\text{osc}} + \mathcal{M}(U_1^{\text{osc}}, U_1^{\text{osc}})$  and according to (5.2.5) and the expression of the quadratic operator  $\mathcal{M}$ , the latter reads

$$(5.2.6a) \quad L(0, \partial_z) U_1^* + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L(0, \partial_z) \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1 e^{i \lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \chi_d} r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j}$$

$$(5.2.6b) \quad + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1(U_1^*, i \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j} \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1 e^{i \lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \chi_d}$$

$$(5.2.6c) \quad + \sum_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{\substack{j_1 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta}) \\ j_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\zeta})}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^*} L_1(r_{\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta}, j_1}, i \lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\zeta})) r_{\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\zeta}, j_2} \\ \sigma_{\mathbf{n}_1, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\mathbf{n}_2, j_2, \lambda_2}^1 e^{i(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta}) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\zeta})) \chi_d},$$

where, for  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  and  $X \in \mathbb{C}^3$ , we have denoted

$$L_1(X, \alpha) := \sum_{k=1}^d \alpha_k dA_k(0) \cdot X.$$

We now isolate the nonoscillating terms in (5.2.6), to obtain a system satisfied by the mean value  $U_1^*$ . In equation (5.2.6), the terms in the sums in (5.2.6a) and (5.2.6b) are always oscillating since  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ . As for them, the terms in the sum in (5.2.6c) are not oscillating if and only if  $\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 = 0$  and  $\lambda_1 \xi_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta}) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\zeta}) = 0$ , that is, if  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_2$  and  $j_1 = j_2$ . Therefore, we deduce from (5.2.6) that we have

$$(5.2.7) \quad L(0, \partial_z) U_1^* + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1(r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j}, -i \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})) r_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}, j} \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1 \sigma_{\mathbf{n}, j, -\lambda}^1 = 0.$$

By a change of variable  $\lambda = -\lambda$  we prove that the second term in the left-hand side of (5.2.7) is actually zero, so we have the following linear constant coefficient equation

$$L(0, \partial_z) U_1^* = 0.$$

With the following boundary and initial conditions obtained from (5.2.3a) and (5.2.4),

$$B(U_1^*)|_{x_d, \chi_d=0} = 0, \quad (U_1^*)|_{t \leq 0} = 0,$$

we get that the mean value  $U_1^*$  satisfies a system which is weakly well-posed, see [Cou05], with zero source term, boundary forcing term and initial term, so the mean value  $U_1^*$  is zero.

Since  $U_1^*$  is zero, equation (5.2.2b) now reads, for each nonzero characteristic mode  $\lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)$ , with  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$(5.2.8) \quad i L(0, \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)) U_{\mathbf{n}, \xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)}^{2, \text{osc}} + L(0, \partial_z) \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1 r_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j} \\ + \sum_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, j_1, j_2, \lambda_1, \lambda_2)} L_1(r_{\mathbf{n}_1 \cdot \zeta, j_1}, i \lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta)) r_{\mathbf{n}_2 \cdot \zeta, j_2} \sigma_{\mathbf{n}_1, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\mathbf{n}_2, j_2, \lambda_2}^1 = 0,$$

where the sum is over the set of 6-tuples  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, j_1, j_2, \lambda_1, \lambda_2)$  in  $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2})^2 \times \mathcal{C}(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta) \times \mathcal{C}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta) \times (\mathbb{Z}^*)^2$  such that  $\lambda_1 \alpha_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta) = \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)$ . There are two possibilities for that to happen.

- Either frequencies  $\lambda_1 \alpha_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta)$  and  $\lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta)$  are colinear (therefore colinear to  $\alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)$ ), that is to say  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$  and  $j_1 = j_2 = j$ . This is called *self-interaction* of frequency  $\alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)$  with itself. Note that the obtained frequency  $\lambda_1 \alpha_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta)$  is then always real characteristic.
- Or frequencies  $\lambda_1 \alpha_{j_1}(\mathbf{n}_1 \cdot \zeta)$  and  $\lambda_2 \alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2 \cdot \zeta)$  are noncolinear, in which case a true resonance in the sense of Assumption 5.5 occurs, namely (5.1.12a) or (5.1.12b). For example, if  $\alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) = \psi_2$  (i.e. if  $\mathbf{n} = (0, 1)$  and  $j = 2$ ), then according to Assumption 5.5, it implies that  $\lambda = k \lambda_\psi$  for some  $k \in \mathbb{Z}^*$  and, up to a permutation,  $\mathbf{n}_1 = (1, 0)$ ,  $j_1 = 3$ ,  $\lambda_1 = -k \lambda_\psi$  and  $\mathbf{n}_2 = (-\lambda_\varphi, -\lambda_\psi)$ ,  $j_2 = 2$ ,  $\lambda_2 = -k$ .

Recall that, for a frequency  $\lambda \zeta = \lambda \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  with  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we alternate from the representations  $\lambda \zeta$  and  $(\lambda, \mathbf{n})$ , so we shall denote

$$\sigma_{\zeta, j, \lambda}^1 := \sigma_{\mathbf{n}, j, \lambda}^1, \quad \forall j = 1, 2, 3, \forall \lambda \in \mathbb{Z}^*.$$

According to the previous analysis, we can now write the system satisfied by the leading profiles. For example, for  $\psi_2$  which is involved in resonance (5.1.12b), multiplying equation (5.2.8) for  $\mathbf{n} = (0, 1)$  and  $j = 2$  by the vector  $\ell_{\psi, 2}$  cancels the first term of (5.2.8), according to (5.1.13). Thus we obtain, for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$\ell_{\psi, 2} L(0, \partial_z) r_{\psi, 2} \sigma_{\psi, 2, \lambda}^1 + \ell_{\psi, 2} L_1(r_{\psi, 2}, \psi_2) r_{\psi, 2} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i \lambda_2 \sigma_{\psi, 2, \lambda_1}^1 \sigma_{\psi, 2, \lambda_2}^1 \\ + \mathbb{1}_{\lambda = k \lambda_\psi} \ell_{\psi, 2} \left\{ L_1(r_{\varphi, 3}, -\nu_2) r_{\nu, 2} + L_1(r_{\nu, 2}, -\lambda_\varphi \varphi_3) r_{\varphi, 3} \right\} i k \sigma_{\varphi, 3, -k \lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu, 2, -k}^1 = 0.$$

In the left-hand side of the previous equation, the first term, the transport one, corresponds to the second term of the left-hand side of (5.2.8), the second one, the Burgers type term corresponds to the self-interaction part of the third term of the left-hand side of (5.2.8), while the last one, the resonant term, corresponds to the resonance part of the third term of the left-hand side of (5.2.8). This splitting between transport, self-interaction and resonance terms can be generalized to any frequency. For  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ ,  $j = 1, 2, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we have

$$(5.2.9a) \quad X_{\alpha_j(\zeta)} \sigma_{\zeta, j, \lambda}^1 + D_{\zeta, j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i \lambda_2 \sigma_{\zeta, j, \lambda_1}^1 \sigma_{\zeta, j, \lambda_2}^1 \\ + \mathbb{1}_{\lambda = k \lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} J_{\zeta_2, j_2}^{\zeta_1, j_1} i k \sigma_{\zeta_1, j_1, -k \lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k \lambda_{\zeta_2}}^1 = 0,$$

and for other frequencies  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$(5.2.9b) \quad X_{\alpha_j(\zeta)} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 + D_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 = 0.$$

We have denoted, for  $\zeta \in \mathcal{F}_b$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ , the vector field  $X_{\alpha_j(\zeta)}$  and the self-interaction coefficient  $D_{\zeta,j}$  as

$$(5.2.10a) \quad X_{\alpha_j(\zeta)} := \ell_{\zeta,j} L(0, \partial_z) r_{\zeta,j}, \quad D_{\zeta,j} := \ell_{\zeta,j} L_1(r_{\zeta,j}, \alpha_j(\zeta)) r_{\zeta,j},$$

and, for  $(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \in \mathcal{R}(\zeta, j)$  (in the case  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ ), the resonance coefficient  $J_{\zeta_2, j_2}^{\zeta_1, j_1}$  as

$$(5.2.10b) \quad J_{\zeta_2, j_2}^{\zeta_1, j_1} := \ell_{\zeta,j} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2}.$$

According to the Lax Lemma 5.1.10, the operator  $\ell_{\zeta,j} L(0, \partial_z) r_{\zeta,j}$  of (5.2.10a) is equal to the vector field (5.1.4) which has already been denoted by  $X_{\alpha_j(\zeta)}$ , so the notation is coherent. In the following, for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ , we denote by  $X_{\zeta,j}$  the vector field  $X_{\alpha_j(\zeta)}$  and  $\mathbf{v}_{\zeta,j} := \mathbf{v}_{\alpha_j(\zeta)}$  the velocity vector associated with it.

For all frequencies  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}$  with  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  except for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ , and for all  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ , since the frequency  $\alpha_j(\zeta)$  does not occur in any resonance, if we denote by  $\sigma_{\zeta,j}^1$  the series

$$\sigma_{\zeta,j}^1(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^1(z) e^{i\lambda\Theta},$$

then, according to (5.2.9b), we have the Burgers type equation

$$(5.2.11) \quad X_{\zeta,j} \sigma_{\zeta,j}^1 + D_{\zeta,j} \sigma_{\zeta,j}^1 \partial_\Theta \sigma_{\zeta,j}^1 = 0,$$

along with the initial condition  $(\sigma_{\zeta,j}^1)_{t=0} = 0$ , which is a nonlinear scalar transport equation in the half space  $\Omega_T$ . If the frequency  $\alpha_j(\zeta)$  is outgoing, i.e. if the last component of  $\mathbf{v}_{\zeta,j}$  is positive, there is no need for a boundary condition, so we deduce from (5.2.11) that  $\sigma_{\zeta,j}^1$  is zero. Therefore, for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we have  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 = 0$ . The same arguments can be applied for the outgoing frequency  $\varphi_2$  since there is no resonance for it.

If  $\alpha_j(\zeta)$  is incoming we need in this case a boundary condition to determine the trace of  $\sigma_{\zeta,j}^1(z, \Theta)$  at  $x_d = 0$ . From boundary condition (5.2.3a) for the frequency  $\lambda\zeta$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , writing of  $U_1^1$  (5.2.5) and the fact that all outgoing frequencies for  $\zeta$  have been proved to be zero, we deduce that

$$(5.2.12) \quad B \sum_{j \in \mathcal{I}(\zeta)} (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\zeta,j} + B \Pi^e(\zeta) (U_{\lambda\zeta}^{1,\text{ev}})_{|x_d, \chi_d=0} = 0.$$

Since  $\lambda\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \Upsilon$  (because for now we consider  $\zeta \neq \varphi, \psi$ ) and, according to decomposition (5.1.6) of the stable subspace  $E_-(\zeta)$ , the vector in (5.2.12) to which matrix  $B$  applies lies in  $E_-(\lambda\zeta)$ , on which  $B$  is invertible, according to Assumption 5.3. Therefore we deduce from the previous equation (5.2.12), using vectors  $\ell_{\zeta,j}$ , that

$$(5.2.13) \quad (\sigma_{\zeta,j}^1)_{|x_d=0} = 0, \quad \forall j \in \mathcal{I}(\zeta).$$

Along with (5.2.11) we get  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 = 0$  for all  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . We have therefore proven that for all frequencies  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta}$  with  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  except for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ , and for all  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we have

$$\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 = 0.$$

In the same way we deduce from (5.2.12), using decomposition (5.1.6),

$$(U_{\lambda\zeta}^{1,\text{ev}})_{|x_d, \chi_d=0} = 0,$$

so, according to (5.2.5), we can set the evanescent part  $U^{1,\text{ev}}$  of  $U^1$  to be zero.

We now need to determine boundary conditions for the incoming frequencies  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  and  $\nu_j$  for  $j = 1, 3$  as well. For the frequency  $\nu$  we obtain, in the same fashion as before, since  $\nu$  is in the hyperbolic region  $\mathcal{H}$ , for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$B \left( (\sigma_{\nu,1,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,1} + (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,2} + (\sigma_{\nu,3,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,3} \right) = 0,$$

so, for  $j = 1, 3$ , according to the normalization (5.1.14),

$$(\sigma_{\nu,j,\lambda}^1)_{|x_d=0} = -\ell_{\nu_j} A_d(0) (B_{|E_-(\nu)})^{-1} B (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,2}.$$

We denote by  $\mu_{\nu,j}$ , for  $j = 1, 3$ , the coefficient

$$(5.2.14) \quad \mu_{\nu,j} := -\ell_{\nu_j} A_d(0) (B_{|E_-(\nu)})^{-1} B r_{\nu,2},$$

so that, for  $j = 1, 3$ , we have

$$(5.2.15) \quad (\sigma_{\nu,j,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,j} = \mu_{\nu,j} (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\nu,2}.$$

For  $\varphi$  we have, in a similar manner, since  $\sigma_{\varphi,2,\lambda}^1$  is zero for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$B \left( (\sigma_{\varphi,1,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\varphi,1} + (\sigma_{\varphi,3,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\varphi,3} \right) = 0,$$

for every  $\lambda$  in  $\mathbb{Z}^*$ , so, according to (5.1.6), the vector in factor of  $B$  in the left-hand side belongs to  $\ker B \cap E_-(\varphi)$ . But since  $\varphi$  is in  $\Upsilon$ , the latter space is of dimension 1 and reads  $\text{Span } e_\varphi$ , so there exists a scalar function  $a_{\varphi,\lambda}$  of  $\omega_T$  such that,

$$(\sigma_{\varphi,1,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\varphi,1} + (\sigma_{\varphi,3,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\varphi,3} = a_{\varphi,\lambda}^1 e_\varphi.$$

Therefore, according to decomposition (5.1.16) of  $e_\zeta$ , for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.16) \quad (\sigma_{\varphi,j,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\varphi,j} = a_{\varphi,\lambda}^1 e_{\varphi,j}.$$

Finally the case of the phase  $\psi$  gather the two previous ones. We have, for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$B \left( (\sigma_{\psi,1,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,1} + (\sigma_{\psi,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,2} + (\sigma_{\psi,3,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,3} \right) = 0.$$

In particular, because of (5.1.6), it implies

$$B (\sigma_{\psi,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,2} \in \text{Im } B_{|E_-(\psi)} = \left( \ker {}^t B_{|E_-(\psi)} \right)^\perp.$$

Therefore, according to the definition of  $b_\psi$ , the following necessary condition follows:

$$b_\psi \cdot B (\sigma_{\psi,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,2} = 0.$$

But since the scalar  $b_\psi \cdot B r_{\psi,2}$  is not zero<sup>5</sup>, we necessarily have

$$(5.2.17) \quad (\sigma_{\psi,2,\lambda}^1)_{|x_d=0} = 0.$$

When it is satisfied we can write, in the same way as for  $\varphi$ , for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.18) \quad (\sigma_{\psi,j,\lambda}^1)_{|x_d=0} r_{\psi,j} = a_{\psi,\lambda}^1 e_{\psi,j},$$

with  $a_{\psi,\lambda}$  a scalar function of  $\omega_T$ .

At this point we have obtained a constant coefficient equation for  $U_1^*$ , and transport equations (5.2.9a) and (5.2.11), associated with (when incoming) boundary conditions (5.2.13), (5.2.15), (5.2.16) and (5.2.18), but the last two ones are expressed through scalar functions  $a_{\zeta,\lambda}^1$  which are still to be determined, so the system is not closed at this stage. Also note that condition (5.2.17) might raise an issue of over-determination of the system.

To determine the equations satisfied by coefficients  $a_{\varphi,\lambda}^1$  and  $a_{\psi,\lambda}^1$ , we need to study the nonpolarized part of the first corrector  $U_2$ .

### Nonpolarized part of the first corrector

For the first corrector we no longer have a polarization condition such as (5.2.2a), so noncharacteristic modes may appear through quadratic interaction of characteristic modes. Thus the first corrector  $U_2$  reads

$$\begin{aligned} U_2(z, \theta, \chi_d) = & U_2^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}}(z) e^{i \lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i \lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \chi_d} \\ & + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\mathbf{n},\lambda}^{2,\text{ev}}(z, \chi_d) e^{i \lambda \mathbf{n} \cdot \theta} + U^{2,\text{nc}}(z, \theta, \chi_d), \end{aligned}$$

where  $U_2^*$  is the mean value of  $U_2$  and  $U^{2,\text{nc}}$  corresponds to the noncharacteristic modes. According to (5.2.2b), the noncharacteristic part  $U^{2,\text{nc}}$  satisfies (since there are only characteristic modes in  $L(0, \partial_z) U_1$ ),

$$(5.2.19) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U^{2,\text{nc}} = - \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \\ \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{NR}}} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} i \lambda_2 \sigma_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^1 e^{i(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\zeta_2)) \chi_d},$$

where  $\mathcal{NR}$  denotes the set of 6-tuples  $(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \lambda_1, \lambda_2)$  such that the frequency

$$\lambda_1 \alpha_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2)$$

is noncharacteristic (which is such that there is no resonance). Note that in (5.2.19), only occur the boundary frequencies  $\varphi, \psi$  and  $\nu$ , since for all the others, the first profile is zero. Since all frequencies in  $U^{2,\text{nc}}$  are noncharacteristic, equation (5.2.19) determine  $U^{2,\text{nc}}$  totally. Indeed, for each mode of noncharacteristic frequency  $\lambda_1 \alpha_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2)$  with  $(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{NR}$ , the operator  $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d})$  reads  $i L(0, \lambda_1 \alpha_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2))$ , which is an invertible matrix.

Since for every boundary frequency  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$ , the oscillating profile  $\sigma_{\zeta, j, \lambda}^1$  is zero for  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  and since there is no resonances generating these frequencies, according to (5.2.2b), the profile  $U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2,\text{osc}}$  satisfies

$$L(0, \alpha_j(\zeta)) U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2,\text{osc}} = 0,$$

5. the linear form  $b_\psi \cdot B$  is not uniformly zero and is already zero on two of the three vectors  $r_{\psi,1}, r_{\psi,2}$  and  $r_{\psi,3}$  constituting a basis of  $\mathbb{C}^3$ , so cannot be on the third one

so it is polarized, and we denote by  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$  the scalar function of  $\Omega_T$  such that

$$U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}} = \sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 r_{\zeta,j}.$$

With the same arguments as for the leading profile, we get the following polarization condition for the evanescent part:  $U_0^{2,\text{ev}} = 0$ , and, for  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$U_{\mathbf{n}}^{2,\text{ev}}(z, \chi_d) = e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{2,\text{ev}}(z, 0).$$

Therefore,  $U_2$  reads as the more precise following way,

$$(5.2.20) \quad U_2(z, \theta, \chi_d) = U_2^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \chi_d} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{2,\text{ev}}(z, 0) e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} + U^{2,\text{nc}}(z, \theta, \chi_d).$$

Writing down boundary equation (5.2.3a) for  $U_2$  will lead to equations on boundary terms  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$ . Thus we need to determine the nonpolarized part of the amplitudes associated with frequencies lifted from  $\varphi, \psi, \nu$ . For  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \{\varphi, \psi, \nu\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , from polarization equation (5.2.2a), we get, (using the notation  $U_{\zeta,j,\lambda}^{2,\text{osc}} := U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}}$ ),

$$iL(0, \alpha_j(\zeta)) U_{\zeta,j,\lambda}^{2,\text{osc}} = -L(0, \partial_z) \sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 r_{\zeta,j} - L_1(r_{\zeta,j}, \alpha_j(\zeta)) r_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 \\ - \mathbb{1}_{\lambda = k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} ik \left\{ L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} \right. \\ \left. + L_1(r_{\zeta_2, j_2}, \lambda_{\zeta_1} \alpha_{j_1}(\zeta_1)) r_{\zeta_1, j_1} \right\} \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^1.$$

Then we multiply this equation on the left by the partial inverse  $R_{\zeta,j}$  to obtain, according to relation (5.1.15),

$$(5.2.21) \quad i\lambda (I - P_{\zeta,j}) U_{\zeta,j,\lambda}^{2,\text{osc}} = \\ - R_{\zeta,j} L(0, \partial_z) \sigma_{\zeta,j,\lambda}^1 r_{\zeta,j} - R_{\zeta,j} L_1(r_{\zeta,j}, \alpha_j(\zeta)) r_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 \\ - R_{\zeta,j} \mathbb{1}_{\lambda = k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} ik \left\{ L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} \right. \\ \left. + L_1(r_{\zeta_2, j_2}, \lambda_{\zeta_1} \alpha_{j_1}(\zeta_1)) r_{\zeta_1, j_1} \right\} \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^1.$$

We now write the boundary conditions for the first corrector  $U_2$ , for the frequencies  $\varphi$  and  $\psi$ .

Note that since  $\varphi$  is in the hyperbolic region, the stable elliptic component  $E_-^e(\varphi)$  is zero, so  $\Pi^e(\varphi)$  is also zero. Therefore, boundary condition (5.2.3a) for mode  $\varphi$  reads, according to equation (5.2.20),

$$(5.2.22) \quad B P_{\varphi,1} (U_{\varphi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B P_{\varphi,3} (U_{\varphi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \\ + B (I - P_{\varphi,1}) (U_{\varphi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B (I - P_{\varphi,3}) (U_{\varphi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \\ + B (U_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B (U_{\varphi,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d, \chi_d=0} = G_\lambda,$$



where we have expanded the source term  $G$  in Fourier series as

$$G(z', \Theta) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} G_\lambda(z') e^{i\lambda\Theta},$$

and where we have denoted by  $U_{\varphi, \lambda}^{2, \text{nc}}$  the sum of all the terms of  $U^{2, \text{nc}}$  of which the trace on the boundary of the associated frequency is equal to  $\lambda\varphi$ , namely,

$$U_{\varphi, \lambda}^{2, \text{nc}} = - \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \\ \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{NR} \\ \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 = \lambda\varphi}} L(0, \lambda_1 \alpha_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2))^{-1} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} \lambda_2 \sigma_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^1 e^{i(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\zeta_2)) \chi_d}.$$

We investigate now which frequencies occur in this sum. If we denote by, for  $i = 1, 2$ ,  $\zeta_i = \mathbf{m}_i \varphi + \mathbf{n}_i \psi$  with  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ , since there are only frequencies lifted from  $\varphi, \psi, \nu$  in  $\mathcal{NR}$ , we necessarily have  $(\mathbf{m}_i = 1$  and  $\mathbf{n}_i = 0)$  or  $(\mathbf{m}_i = 0$  and  $\mathbf{n}_i = 1)$  or  $(\mathbf{m}_i = \lambda_\varphi$  and  $\mathbf{n}_i = \lambda_\psi)$ . In this notation, the condition  $\lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 = \lambda\varphi$  is equivalent to

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 = \lambda \\ \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases}$$

and using that  $\lambda_\varphi, \lambda_\psi$  are coprime integers, we find that this system admits the following solutions

$$\begin{cases} (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) = (1, 0) \\ (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) = (1, 0) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) = (0, 1) \\ (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) = (\lambda_\varphi, \lambda_\psi) \\ (\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = k(\lambda_\varphi, -\lambda_\psi, 1) \end{cases}, \quad \text{and} \quad \begin{cases} (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) = (\lambda_\varphi, \lambda_\psi) \\ (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) = (0, 1) \\ (\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = k(\lambda_\varphi, 1, -\lambda_\psi) \end{cases}.$$

Selecting only 6-tuples of  $\mathcal{NR}$ , we obtain that  $U_{\varphi, \lambda}^{2, \text{nc}}$  is equal to

$$(5.2.23) \quad U_{\varphi, \lambda}^{2, \text{nc}} = \mathbf{1}_{\lambda = k\lambda_\varphi} \sum_{\substack{j_1, j_2 = 1, 2, 3 \\ (j_1, j_2) \neq (2, 1), (2, 2)}} L(0, k\nu_{j_1} - \lambda_\psi k\psi_{j_2})^{-1} \{ \lambda_\psi L_1(r_{\nu, j_1}, \psi_{j_2}) r_{\psi, j_2} \\ - L_1(r_{\psi, j_2}, \nu_{j_1}) r_{\nu, j_1} \} k \sigma_{\nu, j_1, k}^1 \sigma_{\psi, j_2, -\lambda_\psi k}^1 e^{ik\lambda_\varphi \theta_1} e^{i(k\xi_{j_1}(\nu) - \lambda_\psi k\xi_{j_2}(\psi)) \chi_d} \\ - \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} L(0, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_3)^{-1} \{ \lambda_1 L_1(r_{\varphi, 3}, \varphi_1) r_{\varphi, 1} \\ + \lambda_2 L_1(r_{\varphi, 1}, \varphi_3) r_{\varphi, 3} \} \sigma_{\varphi, 1, \lambda_1}^1 \sigma_{\varphi, 3, \lambda_2}^1 e^{i\lambda \theta_1} e^{i(\lambda_1 \xi_1(\varphi) + \lambda_2 \xi_3(\varphi)) \chi_d}.$$

Since the vectors  $P_{\varphi, 1}(U_{\varphi, 1, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0}$  and  $P_{\varphi, 3}(U_{\varphi, 3, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0}$  in (5.2.22) are respectively in  $E_-^1(\varphi)$  and  $E_-^3(\varphi)$ , by definition (5.1.17) of  $b_\varphi$ , we have

$$b_\varphi \cdot B P_{\varphi, 1}(U_{\varphi, 1, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0} = b_\varphi \cdot B P_{\varphi, 3}(U_{\varphi, 3, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0} = 0.$$

So if we take the scalar product of  $b_\varphi$  with equality (5.2.22) multiplied by  $i\lambda$ , using (5.2.21), (5.2.23) and the boundary conditions (5.2.16) for the leading profile associated with  $\lambda\varphi$ , we get the amplitude equation

$$(5.2.24) \quad X_\varphi^{\text{Lop}} a_{\varphi, \lambda}^1 + D_\varphi^{\text{Lop}} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 a_{\varphi, \lambda_1}^1 a_{\varphi, \lambda_2}^1 + i\lambda \sum_{\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda} \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_3) a_{\varphi, \lambda_1}^1 a_{\varphi, \lambda_3}^1 \\ + \mathbf{1}_{\lambda = k\lambda_\varphi} \Gamma_1^{\varphi, k} ik a_{\psi, -k\lambda_\psi}^1 (\sigma_{\nu, 2, -k}^1)|_{x_d=0} = i\lambda b_\varphi \cdot B(U_{\varphi, 2, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0} - i\lambda b_\varphi \cdot G_\lambda,$$

with

$$(5.2.25a) \quad X_\varphi^{\text{Lop}} := b_\varphi \cdot B \left( R_{\varphi,1} L(0, \partial_z) e_{\varphi,1} + R_{\varphi,3} L(0, \partial_z) e_{\varphi,3} \right),$$

$$(5.2.25b) \quad D_\varphi^{\text{Lop}} := b_\varphi \cdot B \left( R_{\varphi,1} L_1(e_{\varphi,1}, \varphi_1) e_{\varphi,1} + R_{\varphi,3} L_1(e_{\varphi,3}, \varphi_3) e_{\varphi,3} \right),$$

$$(5.2.25c) \quad \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_3) := b_\varphi \cdot B L(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3)^{-1} \left\{ \lambda_1 L_1(e_{\varphi,3}, \varphi_1) e_{\varphi,1} + \lambda_3 L_1(e_{\varphi,1}, \varphi_3) e_{\varphi,3} \right\},$$

$$(5.2.25d) \quad \Gamma^\varphi := b_\varphi \cdot B R_{\varphi,1} \left( L_1(e_{\psi,1}, -\nu_2) r_{\nu,2} + L_1(r_{\nu,2}, -\lambda_\psi \psi_1) e_{\psi,1} \right) \\ + \lambda_\psi b_\varphi \cdot B \sum_{\substack{j_1=1,3, j_2=1,2,3 \\ (j_1, j_2) \neq (1,2)}} \mu_{\nu, j_2} L(\nu_{j_2} - \lambda_\psi \psi_{j_1})^{-1} \left\{ L_1(r_{\psi, j_1}, \nu_{j_2}) r_{\nu, j_2} \right. \\ \left. - L_1(r_{\nu, j_2}, \psi_{j_1}) r_{\psi, j_1} \lambda_\psi \right\}.$$

Equation (5.2.24) differs from the analogous one of [CW17, equation (2.19)] by the two terms  $\mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\varphi} \Gamma^\varphi ik a_{\psi, -k\lambda_\psi}^1 (\sigma_{\nu,2,-k}^1)_{|x_d=0}$  and  $i\lambda b_\varphi \cdot B (U_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0}$ . The first one appears here because of the resonances, and the second one wasn't in [CW17] because profiles  $U_{\varphi,2,\lambda}^2$  were zero<sup>6</sup>. Computing  $L(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_3)^{-1}$  on  $r_{\varphi,2}$  leads to the following alternative expression for  $\gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_3)$ :

$$\gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_3) = b_\varphi \cdot B r_{\varphi,2} \frac{i\lambda_1 \ell_{\varphi,2} E_{3,1}^\varphi + i\lambda_3 \ell_{\varphi,2} E_{1,3}^\varphi}{\lambda_1 (\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)) + \lambda_3 (\xi_3(\varphi) - \xi_2(\varphi))},$$

where we have denoted

$$E_{3,1}^\varphi := L_1(e_{\varphi,3}, \varphi_1) e_{\varphi,1}, \quad E_{1,3}^\varphi := L_1(e_{\varphi,1}, \varphi_3) e_{\varphi,3}.$$

This rewriting, which can be found in [CW17], will be useful in the following to study the bilinear operator associated with the symbol  $\gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$  of (5.2.25c). Finally, according to Lemma 5.1.11, the operator  $X_\varphi^{\text{Lop}}$  is actually equal to the tangential vector field

$$\beta_\varphi \left( \partial_t + \nabla_\eta \kappa(\varphi) \cdot \nabla_y \right),$$

which we still denote by  $X_\varphi^{\text{Lop}}$ .

Similarly, for  $\psi$  we have

$$(5.2.26) \quad B P_{\psi,1} (U_{\psi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B P_{\psi,3} (U_{\psi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \\ + B (I - P_{\psi,1}) (U_{\psi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B (I - P_{\psi,3}) (U_{\psi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \\ + B (U_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B (U_{\psi,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d, \chi_d=0} = 0,$$

where the vector  $U_{\psi,\lambda}^{2,\text{nc}}$  is given by

$$(5.2.27) \quad U_{\psi,\lambda}^{2,\text{nc}} = \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \sum_{\substack{j_1=1,3, j_2=1,2,3 \\ (j_1, j_2) \neq (1,2), (3,2)}} L(0, k\nu_{j_2} - \lambda_\varphi k\varphi_{j_1})^{-1} \left\{ \lambda_\varphi L_1(r_{\nu, j_2}, \varphi_{j_1}) r_{\varphi, j_1} \right. \\ \left. - L_1(r_{\varphi, j_1}, \nu_{j_2}) r_{\nu, j_2} \right\} k \sigma_{\nu, j_2, k}^1 \sigma_{\varphi, j_1, -\lambda_\varphi k}^1 e^{ik\lambda_\varphi \theta_1} e^{i(k\xi_{j_2}(\nu) - \lambda_\varphi k\xi_{j_1}(\varphi))\chi_d}$$

6. Note that here, with a more precise analysis, we could also show that every profile  $U_{\varphi,2,\lambda}^n$  is zero, since frequency  $\varphi_2$  does not occur in any resonance. We choose however to not detail it, in order to simplify the whole analysis, and since  $U_{\psi,2,\lambda}^n$  will not be zero, and proving that  $U_{\varphi,2,\lambda}^n$  would not simplify the solving of the equations

$$- \sum_{\substack{j_1, j_2=1,2,3 \\ j_1 \neq j_2}} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} L(0, \lambda_1 \psi_{j_1} + \lambda_2 \psi_{j_2})^{-1} L_1(r_{\psi, j_1}, \psi_{j_2}) r_{\psi, j_2} \lambda_2 \\ \sigma_{\psi, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\psi, j_2, \lambda_2}^1 e^{i\lambda \theta_2} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\psi) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\psi)) \chi_d}.$$

If we take the scalar product of  $b_\psi$  with equality (5.2.26) multiplied by  $i\lambda$ , using (5.2.21), (5.2.23) and the boundary conditions (5.2.26) for the leading profile associated with  $\lambda\psi$ , we get the second amplitude equation

$$(5.2.28) \quad X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi, \lambda}^1 + v_\psi \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 a_{\psi, \lambda_1}^1 a_{\psi, \lambda_2}^1 + i\lambda \sum_{\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda} \gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_3) a_{\psi, \lambda_1}^1 a_{\psi, \lambda_3}^1 \\ + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik (\sigma_{\nu, 2, k})|_{x_d=0} a_{\varphi, -\lambda_\varphi k}^1 = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi, 2, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0}.$$

with, using once again Lemma 5.1.11,

$$(5.2.29a) \quad X_\psi^{\text{Lop}} := b_\psi \cdot B \left( R_{\psi, 1} L(0, \partial_z) e_{\psi, 1} + R_{\psi, 3} L(0, \partial_z) e_{\psi, 3} \right) \\ = \beta_\psi \left( \partial_t + \nabla_{\eta} \kappa(\psi) \cdot \nabla_y \right),$$

$$(5.2.29b) \quad v_\psi := b_\psi \cdot B \left( R_{\psi, 1} L_1(e_{\psi, 1}, \psi_1) e_{\psi, 1} + R_{\psi, 3} L_1(e_{\psi, 3}, \psi_3) e_{\psi, 3} \right),$$

$$(5.2.29c) \quad \gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_3) := b_\psi \cdot B L(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_3 \psi_3)^{-1} \{ \lambda_1 L_1(e_{\psi, 3}, \psi_1) e_{\psi, 1} + \lambda_3 L_1(e_{\psi, 1}, \psi_3) e_{\psi, 3} \}$$

$$(5.2.29d) \quad \Gamma^\psi := b_\psi \cdot B R_{\psi, 1} \left( L_1(e_{\varphi, 1}, -\nu_2) r_{\nu, 2} + L_1(r_{\nu, 2}, -\lambda_\varphi \varphi_1) e_{\varphi, 1} \right) \\ + \lambda_\psi b_\psi \cdot B \sum_{\substack{j_1=1,3, j_2=1,2,3 \\ (j_1, j_2) \neq (1,2), (3,2)}} \mu_{\nu, j_2} L(\nu_{j_2} - \lambda_\varphi \varphi_{j_1})^{-1} \{ L_1(e_{\varphi, j_1}, \nu_{j_2}) r_{\nu, j_2} \\ - \lambda_\varphi L_1(r_{\nu, j_2}, \varphi_{j_1}) e_{\varphi, j_1} \}.$$

Again, comparing to [CW17, equation (2.19)], equation (5.2.28) features two additional terms  $\mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik (\sigma_{\nu, 2, k})|_{x_d=0} a_{\varphi, -\lambda_\varphi k}^1$  and  $i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi, 2, \lambda}^2)|_{x_d, \chi_d=0}$  for the same reason. The is no boundary forcing term here because the one for  $\psi$  is of order  $O(\varepsilon^3)$ . In the same way as for  $\varphi$  we have

$$\gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_3) = b_\psi \cdot B r_{\psi, 2} \frac{i\lambda_1 \ell_{\psi, 2} E_{3,1}^\psi + i\lambda_3 \ell_{\psi, 2} E_{1,3}^\psi}{\lambda_1 (\xi_1(\psi) - \xi_2(\psi)) + \lambda_3 (\xi_3(\psi) - \xi_2(\psi))},$$

where we have denoted

$$E_{3,1}^\psi := L_1(e_{\psi, 3}, \psi_1) e_{\psi, 1}, \quad E_{1,3}^\psi := L_1(e_{\psi, 1}, \psi_3) e_{\psi, 3}.$$

In conclusion, in this paragraph, we have determined the nonpolarized part of the first corrector, with (5.2.21), and the evolution equations (5.2.24) and (5.2.28) satisfied by  $a_{\varphi, \lambda}^1$  and  $a_{\psi, \lambda}^1$ . However, the obtained system of equation is still not closed since equations (5.2.24) and (5.2.28) involve traces of the first corrector  $U_2$ , of which the polarized part is still undetermined.

Therefore we proceed inductively, by deriving equations for the polarized part of the first corrector  $U_2$ , and then studying the nonpolarized part of the second corrector  $U_3$ , in order to obtain evolution equations on the boundary terms for the polarized part of  $U_2$ .

### Polarized part of the first corrector

For  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  with  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ , for  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we decompose the profile  $U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2, \text{osc}}$  as  $U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2, \text{osc}} = P_{\zeta, j} U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2, \text{osc}} + (I - P_{\zeta, j}) U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2, \text{osc}}$ . Recall that the nonpolarized part  $(I - P_{\zeta, j}) U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{2, \text{osc}}$

is given by (5.2.21), so it remains to determine the polarized part, which is written as

$$P_{\zeta,j} U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}} = \sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 r_{\zeta,j},$$

with  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$  a scalar function on  $\Omega_T$ . We start by determining the mean value  $U_2^*$ , as in the general case of a corrector  $U_n$ , the mean value  $U_n^*$  appears in equations for the polarized components. According to equation (5.2.2b),  $U_2^*$  satisfies the equation

$$\begin{aligned} L(0, \partial_z) U_2^* + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1(r_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j}, -i \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)) r_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j} \left( \sigma_{\mathbf{n},j,\lambda}^1 \sigma_{\mathbf{n},j,-\lambda}^2 + \sigma_{\mathbf{n},j,\lambda}^2 \sigma_{\mathbf{n},j,-\lambda}^1 \right) \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1((I - P_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j}) U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{2,\text{osc}}, -i \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)) \sigma_{\mathbf{n},j,-\lambda}^1 r_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1(\sigma_{\mathbf{n},j,\lambda}^1, -i \lambda \alpha_j(\mathbf{n} \cdot \zeta)) (I - P_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j}) U_{\mathbf{n},j,-\lambda}^{2,\text{osc}} r_{\mathbf{n} \cdot \zeta, j} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} L_1(U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{1,\text{osc}}, \partial_z) U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{1,\text{osc}} = 0. \end{aligned}$$

The change of variable  $\lambda = -\lambda$  shows that the second term in first line of previous equation is zero. Boundary and initial condition (5.2.3a) and (5.2.4) as well as writing (5.2.20) for  $U_2$  leads to the following boundary and initial condition for  $U_2^*$ :

$$B(U_2^*)|_{x_d=0} = G_0 - B(U_0^{2,\text{nc}})|_{x_d, \chi_d=0}, \quad B(U_2^*)|_{t \leq 0} = 0,$$

where  $G_0$  is the mean value of the forcing term  $G$  and  $U_0^{2,\text{nc}}$  is the sum of all terms of  $U^{2,\text{nc}}$  of which the trace on the boundary has zero frequency. According to expressions (5.2.21) of the nonpolarized parts and (5.2.19) of  $U^{2,\text{nc}}$ , the mean value  $U_2^*$  satisfies an initial boundary value problem which is weakly well posed and of which the source and boundary terms depend only on the leading profile  $U_1$  (with possibly a first order derivative applied to it).

We consider now modes  $\lambda \alpha_j(\zeta)$  with  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . Recall that it has been proven in the previous part that for these modes, the profile  $U_{\mathbf{n},j}^{2,\text{osc}}$  is polarized, that is

$$U_{\mathbf{n},j}^{2,\text{osc}} = \sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 r_{\zeta,j}.$$

Since there is no resonance generating frequency  $\alpha_j(\zeta)$ , since the mean value  $U_1^*$  is zero and since profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1$  are also zero, the terms  $\mathcal{M}(U_1, U_2)$ ,  $\mathcal{M}(U_2, U_1)$ , and  $\mathcal{N}(U_1, U_1)$  contain no term of frequency  $\alpha_j(\zeta)$ . Therefore, analogously as for the leading profile, multiplying equation (5.2.2c) for  $n = 3$  on the left by  $\ell_{\zeta,j}$  leads to the following system of transport equations for the scalar functions  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$ :

$$(5.2.30a) \quad X_{\alpha_j(\zeta)} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 = 0, \quad (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2)|_{t \leq 0} = 0.$$

When frequency  $\alpha_j(\zeta)$  is outgoing, transport equation (5.2.30a) leads to  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 = 0$ . When frequency  $\alpha_j(\zeta)$  is incoming, according to boundary condition (5.2.3a) and decomposition (5.2.20) of  $U_2$ , since  $\zeta$  is not in  $\Upsilon$ , since  $G$  does not contain any oscillation in  $\zeta$  and since the outgoing profile  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$ ,  $j \in \mathcal{O}(\zeta)$ , is zero, we have

$$(5.2.30b) \quad (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2)|_{x_d=0} = -\ell_{\zeta,j} A_d(0) (B|_{E_-(\zeta)})^{-1} B(U_{\zeta,\lambda}^{2,\text{nc}})|_{x_d, \chi_d=0},$$

where  $U_{\zeta,\lambda}^{2,\text{nc}}$  is the sum of all terms of  $U^{2,\text{nc}}$  of which the trace on the boundary is  $\lambda \zeta$ . It is fully determined by (5.2.19), and thus depends only on  $(\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1)|_{x_d=0}$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ . Therefore, if the

traces  $(\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1)_{|x_d=0}$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  are determined, system (5.2.30) allows us to construct the profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$ , for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$  and  $j \in \mathcal{I}(\zeta)$ .

We now take interest into modes  $\varphi_j, \bar{\psi}_j$  and  $\nu_j$  for  $j = 1, 2, 3$ . Applying  $\ell_{\zeta,j}$  to equation (5.2.2c) for  $n = 3$  leads to the following equation for  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$ ,

(5.2.31)

$$\begin{aligned}
& X_{\zeta,j} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^2 + D_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} i\lambda \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} ik \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^2 \\
&= -\ell_{\zeta,j} L(0, \partial_z) (I - P_{\zeta,j}) U_{\zeta,j,\lambda}^2 - \ell_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} L_1((I - P_{\zeta,j}) U_{\zeta,j,\lambda_1}^2, \zeta_j) r_{\zeta,j} i\lambda_2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 \\
&\quad - \ell_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} L_1(r_{\zeta,j}, \zeta_j) (I - P_{\zeta,j}) U_{\zeta,j,\lambda_2}^2 i\lambda_2 \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 \\
&\quad - \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} \ell_{\zeta,j} ik \left\{ L_1(r_{\zeta_1, j_1}, -\lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) (I - P_{\zeta_2, j_2}) U_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^2 \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \right. \\
&\quad \left. + L_1((I - P_{\zeta_2, j_2}) U_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^2, -\lambda_{\zeta_1} \alpha_{j_1}(\zeta_1)) r_{\zeta_1, j_1} \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \right\} \\
&\quad - \ell_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} L_1(\sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 r_{\zeta,j}, \partial_z) \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 r_{\zeta,j} \\
&\quad - \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} \ell_{\zeta,j} L_1(\sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 r_{\zeta_1, j_1}, \partial_z) \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^1 r_{\zeta_2, j_2}.
\end{aligned}$$

Note that the source term on the right-hand side of equation (5.2.31) only depends on the leading profile  $U_1$ , according to formula (5.2.21) for nonpolarized parts, with possibly second order derivatives applied to it (since in the expression of the nonpolarized part, first order derivatives are applied to  $U_1$ ).

For the incoming frequencies  $\varphi_1, \varphi_3$  and so on, boundary conditions must be determined to solve the above transport equations (5.2.31). We have already seen that boundary equation (5.2.3a) for  $U_2$  reads, for mode  $\lambda\varphi$ , as (5.2.22). From this boundary condition, according to decomposition (5.1.6) of  $E_-(\zeta)$  and relation (5.1.17) defining the vector  $b_\varphi$ , we get the following necessary solvability condition

$$\begin{aligned}
b_\varphi \cdot \left( B(I - P_{\varphi,1}) (U_{\varphi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B(I - P_{\varphi,3}) (U_{\varphi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \right. \\
\left. + B(U_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} + B(U_{\varphi,\lambda}^{2,nc})_{|x_d, \chi_d=0} \right) = b_\varphi \cdot G_\lambda,
\end{aligned}$$

which is satisfied as soon as the scalar functions  $a_{\varphi,\lambda}$  satisfy the evolution equation (5.2.24), since these two equations are different writings of the same one. Thus we obtain, for  $j = 1, 3$ , in a similar manner than for the leading profile,

$$(5.2.32) \quad (\sigma_{\varphi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\varphi,j} = a_{\varphi,\lambda}^2 e_{\varphi,j} + \tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2,$$

with  $a_{\varphi,\lambda}^2$  a scalar function defined on  $\omega_T$  and where, for  $j = 1, 3$ , we have denoted by  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2$  the function

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2 := \ell_{\varphi,j} \cdot A_d(0) (B|_{E_-(\varphi)})^{-1} \left( G_\lambda - B(I - P_{\varphi,1}) (U_{\varphi,1,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \right. \\
\left. - B(I - P_{\varphi,3}) (U_{\varphi,3,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} - B(I - P_{\varphi,2}) (U_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d, \chi_d=0} \right)
\end{aligned}$$

$$- B (\sigma_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\varphi,2} - B (U_{\varphi,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} r_{\varphi,j}.$$

In the same way, for  $\psi$ , from (5.2.26), the following condition must be satisfied:

$$b_\psi \cdot \left( B (I - P_{\psi,1}) (U_{\psi,1,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\psi,3}) (U_{\psi,3,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ \left. + B (U_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (U_{\psi,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right) = 0,$$

and it is the case when  $a_{\psi,\lambda}$  verify equation (5.2.28). Therefore, for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.33) \quad (\sigma_{\psi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\psi,j} = a_{\psi,\lambda}^2 e_{\psi,j} + \tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2,$$

with  $a_{\psi,\lambda}^2$  a scalar function of  $\omega_T$ , and where we have denoted by  $\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2$  the function

$$\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2 := -\ell_{\psi,j} \cdot A_d(0) (B_{|E_-(\psi)})^{-1} \left( B (I - P_{\psi,1}) (U_{\psi,1,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ \left. + B (I - P_{\psi,3}) (U_{\psi,3,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\psi,2}) (U_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ \left. - B (\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\psi,2} + B (U_{\psi,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right).$$

Note that expressions (5.2.32) and (5.2.33) of incoming traces  $(\sigma_{\varphi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}$  and  $(\sigma_{\psi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}$  for  $j = 1, 3$  is respectively coupled to the outgoing trace  $(\sigma_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0}$  and  $(\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0}$  through terms  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2$  and  $\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2$ .

Finally, for amplitudes associated with the boundary phase  $\nu$ , we need to write a boundary condition for the first corrector. Boundary condition (5.2.3a) for  $U_2$  reads

$$B P_{\nu,1} (U_{\nu,1,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B P_{\nu,3} (U_{\nu,3,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \\ + B (I - P_{\nu,1}) (U_{\nu,1,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\nu,3}) (U_{\nu,3,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \\ + B (U_{\nu,2,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (U_{\nu,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} = 0,$$

where  $U_{\nu,\lambda}^{2,\text{nc}}$  is the sum of all the terms of  $U^{2,\text{nc}}$  of which the trace on the boundary of the associated frequency is equal to  $\lambda\nu$ , which is fully determined by (5.2.19). Therefore, since  $\nu \in \mathcal{F}_b \setminus \Upsilon$ , we get, for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.34) \quad (\sigma_{\nu,j,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\nu,j} = \mu_{\nu,j} (\sigma_{\nu,2,\lambda}^2)_{|x_d=0} r_{\nu,2} + \tilde{F}_{\nu,j,\lambda}^2,$$

where  $\mu_{\nu,j}$  has been defined in equation (5.2.14) and where we have denoted by  $\tilde{F}_{\nu,j,\lambda}^2$  the function

$$\tilde{F}_{\nu,j,\lambda}^2 := -\ell_{\nu,j} \cdot A_d(0) (B_{|E_-(\nu)})^{-1} \left( B (I - P_{\nu,1}) (U_{\nu,1,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ \left. + B (I - P_{\nu,3}) (U_{\nu,3,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\nu,2}) (U_{\nu,2,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0} + B (U_{\nu,\lambda}^{2,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right).$$

In the same way as for the leading profile, we need to investigate the nonpolarized part of the second corrector to find equations on  $a_{\varphi,\lambda}^2$  and  $a_{\psi,\lambda}^2$ .

### Nonpolarized part of the second corrector

We follow the same analysis as for the first corrector. With similar arguments we get that the second corrector  $U_3$  reads

$$(5.2.35) \quad U_3(z, \theta, \chi_d) = U_3^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}}(z) e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \chi_d} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{3, \text{ev}}(z, 0) e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} + U^{3, \text{nc}}(z, \theta, \chi_d),$$

with  $U_3^*$  the mean value of  $U_3$ ,  $U^{3, \text{nc}}$  the noncharacteristic terms, and where, for  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , profile  $U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}}$  decomposes as

$$U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}} = \sigma_{\zeta, j, \lambda}^3 r_{\zeta, j} + (I - P_{\zeta, j}) U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}},$$

with  $\sigma_{\zeta, j, \lambda}^3$  a scalar function of  $\Omega_T$ . Furthermore, according to (5.2.2c) for  $n = 2$ , the noncharacteristic part  $U^{3, \text{nc}}$  is given by

$$(5.2.36) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U^{3, \text{nc}} = \\ - \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \\ \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{NR}}} \left( L_1(U_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^{1, \text{osc}}, i\lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2)) U_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^{2, \text{osc}} + L_1(U_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^{2, \text{osc}}, i\lambda_2 \alpha_{j_2}(\zeta_2)) U_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^{1, \text{osc}} \right. \\ \left. + L_1(U_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^{1, \text{osc}}, \partial_z) U_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^{1, \text{osc}} \right) e^{i(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\zeta_2)) \chi_d},$$

where the set  $\mathcal{NR}$  of nonresonant frequencies has already been defined. Since all frequencies in  $U^{3, \text{nc}}$  are noncharacteristic, equation (5.2.36) totally determines  $U^{3, \text{nc}}$ . Note that opposite to what was done for the first corrector, this is no longer true that in  $U^{3, \text{nc}}$  there are only profiles of modes  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  and  $\nu_j$ , since now second order profiles  $\sigma_{\zeta, j, \lambda}^2$  for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$  are possibly nonzero.

For the same reason, profiles  $U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}}$  for  $\mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$  are not necessarily polarized. Therefore we derive now the nonpolarized part for each frequency  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . Multiplying equation (5.2.2c) for  $n = 2$  and frequency  $\lambda \alpha_j(\zeta)$  on the left by the partial inverse  $R_{\zeta, j}$  leads to the relation

$$(5.2.37) \quad i\lambda (I - P_{\zeta, j}) U_{\mathbf{n}, j, \lambda}^{3, \text{osc}} = \\ - R_{\zeta, j} L(0, \partial_z) \sigma_{\zeta, j, \lambda}^2 r_{\zeta, j} - R_{\zeta, j} L_1(r_{\zeta, j}, \alpha_j(\zeta)) r_{\zeta, j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda \sigma_{\zeta, j, \lambda_1}^1 \sigma_{\zeta, j, \lambda_2}^2 \\ - R_{\zeta, j} \mathbb{1}_{\lambda = k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, -\lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} ik \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^2 \\ - R_{\zeta, j} \partial_z \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, U_2^*),$$

where notation  $\partial_z \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2)$  refers to quadratic terms involving the leading profile  $U_1$ , the nonpolarized parts of the first corrector  $U_2$  and the mean value  $U_2^*$ , with possibly first order derivative in front of it. The key point is that since the leading profile is polarized and since the mean value  $U_1^*$  is zero, all the terms involving a profile  $\sigma_{\zeta', j', \lambda'}^2$  depend only on leading order polarized profiles  $\sigma_{\zeta'', j'', \lambda''}^1$ , and not on  $(I - P) U_2$  or  $U_2^*$ . We now write the boundary conditions for the second corrector, for the frequencies  $\varphi$  and  $\psi$ , which will lead to equations on the amplitudes  $a_\varphi^2$  and  $a_\psi^2$ .

For  $\varphi$  we have, according to boundary condition (5.2.3b) and writing (5.2.35) of  $U_3$ , since the

elliptic component  $E_-^e(\varphi)$  of the stable subspace  $E_-(\zeta)$  is zero,

$$(5.2.38) \quad \begin{aligned} & B P_{\varphi,1} (U_{\varphi,1,\lambda}^3)_{|x_d,\chi_d=0} + B P_{\varphi,3} (U_{\varphi,3,\lambda}^3)_{|x_d,\chi_d=0} \\ & + B (I - P_{\varphi,1}) (U_{\varphi,1,\lambda}^3)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\varphi,3}) (U_{\varphi,3,\lambda}^3)_{|x_d,\chi_d=0} \\ & + B (U_{\varphi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} + B (U_{\varphi,\lambda}^{3,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} = 0, \end{aligned}$$

where  $U_{\varphi,\lambda}^{3,\text{nc}}$  is the sum of all the terms of  $U^{3,\text{nc}}$  of which the trace on the boundary of the associated frequency is equal to  $\lambda\varphi$ , namely, according to expression (5.2.36) of  $U^{3,\text{nc}}$ ,

$$(5.2.39) \quad \begin{aligned} U_{\varphi,\lambda}^{3,\text{nc}} &= \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\varphi} \sum_{\substack{j_1,j_2=1,2,3 \\ (j_1,j_2) \neq \\ (2,1),(2,2)}} L(0, k\nu_{j_1} - \lambda_\psi k\psi_{j_2})^{-1} \{ \lambda_\psi L_1(r_{\nu,j_1}, \psi_{j_2}) r_{\psi,j_2} - L_1(r_{\psi,j_2}, \nu_{j_1}) r_{\nu,j_1} \} \\ & \quad k \{ \sigma_{\nu,j_1,k}^1 \sigma_{\psi,j_2,-\lambda_\psi k}^2 + \sigma_{\nu,j_1,k}^2 \sigma_{\psi,j_2,-\lambda_\psi k}^1 \} e^{ik\lambda_\varphi\theta_1} e^{i(k\xi_{j_1}(\nu) - \lambda_\psi k\xi_{j_2}(\psi))\chi_d} \\ & - \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} L(0, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_3)^{-1} \{ \lambda_1 L_1(r_{\varphi,3}, \varphi_1) r_{\varphi,1} + \lambda_2 L_1(r_{\varphi,1}, \varphi_3) r_{\varphi,3} \} \\ & \quad \{ \sigma_{\varphi,1,\lambda_1}^1 \sigma_{\varphi,3,\lambda_2}^2 + \sigma_{\varphi,1,\lambda_1}^2 \sigma_{\varphi,3,\lambda_2}^1 \} e^{i\lambda\theta_1} e^{i(\lambda_1\xi_1(\varphi) + \lambda_2\xi_3(\varphi))\chi_d} \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, (P U_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*), \end{aligned}$$

where the notation  $\partial_z \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, (P U_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*)$  refers to quadratic terms in  $U_1$ , the nonpolarized part of  $U_2$ , the polarized part of  $U_2$  of which the associated modes are different from  $\lambda\varphi_j$ ,  $\lambda\psi_j$  and  $\lambda\nu_j$ , and the mean value  $U_2^*$ , with possibly one derivative in front of it. Once again, the key point here is that since  $U_1$  is polarized and of zero mean value, and since only the profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  are nonzero, in  $U_{\varphi,\lambda}^{3,\text{nc}}$ , every term involving  $\sigma_{\zeta,j,\lambda'}^2$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ , is a quadratic term with a profile  $\sigma_{\zeta',j',\lambda''}^1$  for  $\zeta' = \varphi, \psi, \nu$ .

Similarly as for the leading profile, taking the scalar product of  $b_\varphi$  with equation (5.2.38) multiplied by  $i\lambda$ , using (5.2.37), (5.2.39) and expression of traces (5.2.32), (5.2.33) and (5.2.34), we get

$$(5.2.40) \quad \begin{aligned} & X_\varphi^{\text{Lop}} a_{\varphi,\lambda}^2 + D_\varphi^{\text{Lop}} i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^2 + i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2) (a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^2 + a_{\varphi,\lambda_1}^2 a_{\varphi,\lambda_2}^1) \\ & + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\varphi} \Gamma^\varphi i k \left\{ (\sigma_{\nu,2,-k}^1)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^2 + (\sigma_{\nu,2,-k}^2)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^1 \right\} \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\varphi^2, (\tilde{F}_\varphi^2, a_\varphi^1), (\tilde{F}_\psi^2, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\varphi^2)_{|x_d=0}, a_\varphi^1), ((\sigma_\psi^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right] \\ & = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\varphi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, (P U_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*)_{|x_d,\chi_d=0}, \end{aligned}$$

where  $X_\varphi^{\text{Lop}}$ ,  $D_\varphi^{\text{Lop}}$ ,  $\gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$  and  $\Gamma^\varphi$  have already been defined in (5.2.25), and where

$$\partial_{z,\theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\varphi^2, (\tilde{F}_\varphi^2, a_\varphi^1), (\tilde{F}_\psi^2, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\varphi^2)_{|x_d=0}, a_\varphi^1), ((\sigma_\psi^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right]$$

refers to linear terms in  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2$  for  $j = 1, 2$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , and quadratic terms in  $(\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2, a_{\varphi,\lambda}^1)$ ,  $(\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2, (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0})$ ,  $((\sigma_{\varphi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}, a_{\varphi,\lambda}^1)$  or  $((\sigma_{\psi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0})$  for  $j = 1, 2$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , with, for all these terms, possibly one derivative in front of them. Recall that terms  $\tilde{F}_\varphi^2$  and  $\tilde{F}_\psi^2$  depend on the traces  $(\sigma_{\varphi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0}$  and  $(\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0}$ .



For phase  $\psi$  we have the following boundary condition

$$(5.2.41) \quad \begin{aligned} & B P_{\psi,1} (U_{\psi,1,\lambda}^3)_{|x_d, \chi_d=0} + B P_{\psi,3} (U_{\psi,3,\lambda}^3)_{|x_d, \chi_d=0} \\ & + B (I - P_{\psi,1}) (U_{\psi,1,\lambda}^3)_{|x_d, \chi_d=0} + B (I - P_{\psi,3}) (U_{\psi,3,\lambda}^3)_{|x_d, \chi_d=0} \\ & + B (U_{\psi,2,\lambda}^3)_{|x_d, \chi_d=0} + B (U_{\psi,\lambda}^{3,nc})_{|x_d, \chi_d=0} = H_\lambda, \end{aligned}$$

where we have expanded  $H$  in Fourier series as

$$H(z', \Theta) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} H_\lambda(z') e^{i\lambda\Theta},$$

and  $U_{\psi,\lambda}^{3,nc}$  is the sum of all the terms of  $U^{3,nc}$  of which the trace on the boundary of the associated frequency is equal to  $\lambda\psi$ , that is,

$$(5.2.42) \quad \begin{aligned} U_{\psi,\lambda}^{3,nc} &= \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \sum_{\substack{j_1=1,3, j_2=1,2,3 \\ (j_1, j_2) \\ \neq (1,2), (3,2)}} L(k\nu_{j_2} - \lambda_\varphi k \varphi_{j_1})^{-1} \{ \lambda_\varphi L_1(r_{\nu, j_2}, \varphi_{j_1}) r_{\varphi, j_1} - L_1(r_{\varphi, j_1}, \nu_{j_2}) r_{\nu, j_2} \} \\ & k \{ \sigma_{\nu, j_2, k}^1 \sigma_{\varphi, j_1, -\lambda_\varphi k}^2 + \sigma_{\nu, j_2, k}^2 \sigma_{\varphi, j_1, -\lambda_\varphi k}^1 \} e^{ik\lambda_\varphi \theta_1} e^{i(k\xi_{j_2}(\nu) - \lambda_\varphi k \xi_{j_1}(\varphi))\chi_d} \\ & - \sum_{\substack{j_1, j_2=1,2,3 \\ j_1 \neq j_2}} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} L(\lambda_1 \psi_{j_1} + \lambda_2 \psi_{j_2})^{-1} L_1(r_{\psi, j_1}, \psi_{j_2}) r_{\psi, j_2} \lambda_2 \{ \sigma_{\psi, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\psi, j_2, \lambda_2}^2 \\ & + \sigma_{\psi, j_1, \lambda_1}^2 \sigma_{\psi, j_2, \lambda_2}^1 \} e^{i\lambda \theta_2} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\psi) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\psi))\chi_d} \\ & + \partial_{z, \theta} \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, (P U_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*). \end{aligned}$$

If we take the scalar product of  $b_\psi$  with the equality (5.2.41) multiplied by  $\lambda$ , using (5.2.37), (5.2.39) and expression of traces (5.2.32), (5.2.33) and (5.2.34), we get the amplitude equation

$$(5.2.43) \quad \begin{aligned} & X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi,\lambda}^2 + D_\psi^{\text{Lop}} i\lambda \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} a_{\psi,\lambda_1}^1 a_{\psi,\lambda_2}^2 + i\lambda \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} \gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_2) (a_{\psi,\lambda_1}^1 a_{\psi,\lambda_2}^2 + a_{\psi,\lambda_1}^2 a_{\psi,\lambda_2}^1) \\ & + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik \{ (\sigma_{\nu,2,k}^1)_{|x_d=0} a_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^2 + (\sigma_{\nu,2,k}^2)_{|x_d=0} a_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^1 \} \\ & + \partial_{z, \theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\psi^2, (\tilde{F}_\psi^2, a_\psi^1), (\tilde{F}_\varphi^2, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\psi^2)_{|x_d=0}, a_\psi^1), ((\sigma_\varphi^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right] \\ & = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^{3,osc})_{|x_d, \chi_d=0} - i\lambda b_\psi \cdot H_\lambda \\ & + \partial_{z, \theta} \text{ terms in } (U_1, (I - P) U_2, (P U_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*)_{|x_d, \chi_d=0}, \end{aligned}$$

where  $X_\psi^{\text{Lop}}$ ,  $D_\psi^{\text{Lop}}$ ,  $\gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_2)$ , and  $\Gamma^\psi$  have already been defined in (5.2.29), and where

$$\partial_{z, \theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\psi^2, (\tilde{F}_\psi^2, a_\psi^1), (\tilde{F}_\varphi^2, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\psi^2)_{|x_d=0}, a_\psi^1), ((\sigma_\varphi^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right]$$

refers to linear terms in  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2$  for  $j = 1, 2$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , and quadratic terms in  $(\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^2, a_{\psi,\lambda}^1)$ ,  $(\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^2, (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0})$ ,  $((\sigma_{\psi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}, a_{\psi,\lambda}^1)$  or  $((\sigma_{\varphi,j,\lambda}^2)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2,\lambda}^1)_{|x_d=0})$  for  $j = 1, 2$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , with, for all these terms, possibly one derivative in front of them.

Note that equations (5.2.40) and (5.2.43) can be seen as linearizations around the trace of the leading profile  $U_1$  of equations (5.2.24) and (5.2.28). This is usual in weakly nonlinear geometric optics, where equations for the leading profile are nonlinear, and equations for higher order are

linearizations of the former equations around the leading profile  $U_1$ . Again, the obtained system of equations is still not closed since traces of the second corrector  $U_3$  appear in amplitude equations (5.2.40) and (5.2.43).

With the obtained equations, can have the intuition on how lower terms ascent toward higher order terms, eventually leading to an instability. In equation (5.2.43) for amplitudes  $a_{\psi,\lambda}^2$ , the boundary forcing term  $H$  occurs, and therefore this forcing term ascents to first corrector profiles  $\sigma_{\psi,j,\lambda}^2$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  through boundary conditions (5.2.33). Eventually, because of the resonances (5.1.12) leading to resonances terms in transport equations (5.2.31) for first corrector profiles, the boundary term  $H$  arises in profiles  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^2$  for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . In their turn, these profiles  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^2$  for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  interfere in amplitude equation (5.2.28) for  $a_{\psi,\lambda}^1$ , for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , because of the trace  $(U_{\psi,2,\lambda}^2)|_{x_d, \xi_d=0}$ . Then this reasoning can be applied recursively to obtain that the boundary forcing term  $H$  interferes in leading profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^1$ , for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ ,  $j = 1, 2, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ .

### 5.2.3 General system

The above arguments can be extended recursively to any corrector  $U_n$ ,  $n \geq 3$ . Doing so we get that the  $n$ -th profile  $U_n$  reads

$$(5.2.44) \quad U_n(z, \theta, \chi_d) = U_n^*(z) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{n})} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}} e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} e^{i\lambda \xi_j(\mathbf{n} \cdot \zeta) \chi_d} \\ + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} e^{\chi_d \mathcal{A}(\mathbf{n} \cdot \zeta)} \Pi^e(\mathbf{n} \cdot \zeta) U_{\mathbf{n}}^{n,\text{ev}}(z, 0) e^{i\lambda \mathbf{n} \cdot \theta} + U^{n,\text{nc}}(z, \theta, \chi_d),$$

with  $U_n^*$  the mean value of  $U_n$ ,  $U^{n,\text{nc}}$  the noncharacteristic terms, and where, for  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , the oscillating profile  $U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}}$  decomposes as

$$U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}} = \sigma_{\zeta,j,\lambda}^n r_{\zeta,j} + (I - P_{\zeta,j}) U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}}$$

with  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n$  a scalar function defined on  $\Omega_T$ . According to equation (5.2.2c) for  $n - 1$  and since  $U_1$  is polarized and of zero mean value,  $U^{n,\text{nc}}$  is determined by the formula

$$(5.2.45) \quad \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\chi_d}) U^{n,\text{nc}} = - \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2, \\ \lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{NR}}} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} i\lambda \sigma_{\zeta_1, j_1, \lambda_1}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, \lambda_2}^{n-1} \\ e^{i(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2) \cdot \theta} e^{i(\lambda_1 \xi_{j_1}(\zeta_1) + \lambda_2 \xi_{j_2}(\zeta_2)) \chi_d} \\ + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-2}, (I - P) U_{n-1}, U_{n-1}^*),$$

where notation  $\partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-2}, (I - P) U_{n-1}, U_{n-1}^*)$  refers to quadratic terms involving the profiles  $U_1, \dots, U_{n-2}$ , the nonpolarized parts of the corrector  $U_{n-1}$  and the mean value  $U_{n-1}^*$ , with possibly first order derivatives in front of it. As for it, for  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$  and  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , the nonpolarized part  $(I - P_{\zeta,j}) U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}}$  of  $U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}}$  is given by

$$(5.2.46) \quad i\lambda (I - P_{\zeta,j}) U_{\mathbf{n},j,\lambda}^{n,\text{osc}} = \\ - R_{\zeta,j} L(0, \partial_z) \sigma_{\zeta,j,\lambda}^{n-1} r_{\zeta,j} - R_{\zeta,j} L_1(r_{\zeta,j}, \alpha_j(\zeta)) r_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^1 \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^{n-1} \\ - R_{\zeta,j} \mathbb{1}_{\lambda = k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta,j)}} L_1(r_{\zeta_1, j_1}, -\lambda_{\zeta_2} \alpha_{j_2}(\zeta_2)) r_{\zeta_2, j_2} ik \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^{n-1} \\ - R_{\zeta,j} \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-2}, (I - P) U_{n-1}, U_{n-1}^*).$$

This formula is obtained by multiplying equation (5.2.2c) for  $n - 1$  by the partial inverse  $R_{\zeta,j}$ , using that  $U_1$  is polarized and of zero mean value.

We specify now equations satisfied by the mean value  $U_n^*$  and the polarized components  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n$ . Since  $U_1$  is polarized and of zero mean value, equations (5.2.2c), (5.2.3b) for  $n$  and (5.2.4) lead to the following system for the mean value  $U_n^*$ :

$$(5.2.47) \quad \begin{cases} L(0, \partial_z) U_n^* = \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P) U_n) \\ B(U_n^*)|_{x_d=0} = \mathbb{1}_{n=3} H_0 - B(U_0^{n,\text{nc}})|_{x_d, \chi_d=0} \\ B(U_n^*)|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

where  $U_0^{n,\text{nc}}$  refers to the sum of all terms of  $U^{n,\text{nc}}$  of which the trace on the boundary is of zero frequency.

For a frequency  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0, \varphi, \psi, \nu\}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , multiplying equation (5.2.2c) by  $\ell_{\zeta,j}$  leads to, since all harmonics  $\sigma_{\zeta,j,\lambda'}^1$ ,  $\lambda' \in \mathbb{Z}^*$  are zero and since  $U_1$  is polarized and of zero mean value,

$$(5.2.48a) \quad X_{\alpha_j(\zeta)} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^n = \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P) U_n, U_n^*)$$

$$(5.2.48b) \quad (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n)|_{t \leq 0} = 0,$$

with initial condition (5.2.4), and, if  $j \in \mathcal{I}(\zeta)$ , boundary condition (5.2.3b) gives, since  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \Upsilon$ ,

$$(5.2.48c) \quad (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n)|_{x_d=0} = -\ell_{\zeta,j} A_d(0) (E_-(\zeta))^{-1} B(U_{\zeta,\lambda}^{n,\text{nc}})|_{x_d, \chi_d=0}.$$

Finally, for  $\zeta = \mathbf{n} \cdot \zeta \in \{\varphi, \psi, \nu\}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , multiplying equation (5.2.2c) by  $\ell_{\zeta,j}$  gives, with the same arguments,

$$(5.2.49a) \quad \begin{aligned} X_{\zeta,j} \sigma_{\zeta,j,\lambda}^n + D_{\zeta,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda \sigma_{\zeta,j,\lambda_1}^n \sigma_{\zeta,j,\lambda_2}^1 + \mathbb{1}_{\lambda = k\lambda_\zeta} \sum_{\substack{(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \\ \in \mathcal{R}(\zeta, j)}} J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} ik \sigma_{\zeta_1, j_1, -k\lambda_{\zeta_1}}^1 \sigma_{\zeta_2, j_2, -k\lambda_{\zeta_2}}^n \\ = \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P) U_n, U_n^*), \end{aligned}$$

where the notation are defined by (5.2.10). Equation (5.2.49a) is coupled with the following initial condition,

$$(5.2.49b) \quad (\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n)|_{t \leq 0} = 0.$$

It remains to determine the traces on the boundary of the corresponding incoming frequencies. The trace of the amplitudes associated with the boundary phase  $\varphi$  on the boundary is given by, for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.50a) \quad (\sigma_{\varphi,j,\lambda}^n)|_{x_d=0} r_{\varphi,j} = a_{\varphi,\lambda}^n e_{\varphi,j} + \tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^n,$$

with  $a_{\varphi,\lambda}^n$  a scalar function defined on  $\omega_T$  and

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^n &:= -\ell_{\varphi,j} \cdot A_d(0) (B|_{E_-(\varphi)})^{-1} \left( B(I - P_{\varphi,1}) (U_{\varphi,1,\lambda}^{n,\text{osc}})|_{x_d, \chi_d=0} \right. \\ &\quad + B(I - P_{\varphi,3}) (U_{\varphi,3,\lambda}^{n,\text{osc}})|_{x_d, \chi_d=0} + B(I - P_{\varphi,2}) (U_{\varphi,2,\lambda}^{n,\text{osc}})|_{x_d, \chi_d=0} \\ &\quad \left. + B(\sigma_{\varphi,2,\lambda}^n)|_{x_d=0} r_{\varphi,2} + B(U_{\varphi,\lambda}^{n,\text{nc}})|_{x_d, \chi_d=0} \right) r_{\varphi,j}. \end{aligned}$$

For  $\psi$  we have, for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.50b) \quad (\sigma_{\psi,j,\lambda}^n)_{|x_d=0} r_{\psi,j} = a_{\psi,\lambda}^n e_{\psi,j} + \tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^n,$$

with  $a_{\psi,\lambda}^n$  a scalar function of  $\omega_T$  and

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^n := & -\ell_{\psi,j} \cdot A_d(0) (B_{|E_-(\psi)})^{-1} \left( -\mathbf{1}_{n=3} H_\lambda + B (I - P_{\psi,1}) (U_{\psi,1,\lambda}^{n,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ & + B (I - P_{\psi,3}) (U_{\psi,3,\lambda}^{n,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\psi,2}) (U_{\psi,2,\lambda}^{n,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} \\ & \left. + B (\sigma_{\psi,2,\lambda}^n)_{|x_d=0} r_{\psi,2} + B (U_{\psi,\lambda}^{n,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right) r_{\psi,j}. \end{aligned}$$

Note that  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^n$  and  $\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^n$ , for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  depends respectively on the traces  $(\sigma_{\varphi,2,\lambda}^n)_{|x_d=0}$  and  $(\sigma_{\psi,2,\lambda}^n)_{|x_d=0}$ . Finally, for  $\nu$ , we have for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.2.50c) \quad (\sigma_{\nu,j,\lambda}^n)_{|x_d=0} r_{\nu,j} = \mu_{\nu,j} (\sigma_{\nu,2,\lambda}^n)_{|x_d=0} r_{\nu,j} + \tilde{F}_{\nu,j,\lambda}^n,$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\nu,j,\lambda}^n := & -\ell_{\nu,j} \cdot A_d(0) (B_{|E_-(\nu)})^{-1} \left( B (I - P_{\nu,1}) (U_{\nu,1,\lambda}^n)_{|x_d,\chi_d=0} \right. \\ & \left. + B (I - P_{\nu,3}) (U_{\nu,3,\lambda}^n)_{|x_d,\chi_d=0} + B (I - P_{\nu,2}) (U_{\nu,2,\lambda}^n)_{|x_d,\chi_d=0} + B (U_{\nu,\lambda}^{n,\text{nc}})_{|x_d,\chi_d=0} \right) r_{\nu,j}. \end{aligned}$$

Coefficients  $\mu_{\nu,j}$  have been introduced in (5.2.14).

Scalar functions  $a_{\varphi,\lambda}^n$  and  $a_{\psi,\lambda}^n$  satisfy the following equations, which are derived using boundary condition (5.2.3b) and formulas (5.2.45) and (5.2.46),

(5.2.51a)

$$\begin{aligned} & X_\varphi^{\text{Lop}} a_{\varphi,\lambda}^n + D_\varphi^{\text{Lop}} i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^n + i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2) (a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^n + a_{\varphi,\lambda_1}^n a_{\varphi,\lambda_2}^1) \\ & + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\varphi} \Gamma^\varphi ik \left\{ (\sigma_{\nu,2,-k}^1)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^n + (\sigma_{\nu,2,-k}^n)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^1 \right\} \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\varphi^n, (\tilde{F}_\varphi^n, a_\varphi^1), (\tilde{F}_\psi^n, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\varphi^n)_{|x_d=0}, a_\varphi^1), ((\sigma_\psi^n)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right] \\ & = i\lambda b_\varphi \cdot B (U_{\varphi,2,\lambda}^{n+1,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P) U_n, (P U_n)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_n^*)_{|x_d,\chi_d=0}, \end{aligned}$$

and

(5.2.51b)

$$\begin{aligned} & X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi,\lambda}^n + D_\psi^{\text{Lop}} i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} a_{\psi,\lambda_1}^1 a_{\psi,\lambda_2}^n + i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \gamma_\psi(\lambda_1, \lambda_2) (a_{\psi,\lambda_1}^1 a_{\psi,\lambda_2}^n + a_{\psi,\lambda_1}^n a_{\psi,\lambda_2}^1) \\ & + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik \left\{ (\sigma_{\nu,2,k}^1)_{|x_d=0} a_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^n + (\sigma_{\nu,2,k}^n)_{|x_d=0} a_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^1 \right\} \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\psi^n, (\tilde{F}_\psi^n, a_\psi^1), (\tilde{F}_\varphi^n, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\psi^n)_{|x_d=0}, a_\psi^1), ((\sigma_\varphi^n)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right] \\ & = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^{n+1,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} - \mathbf{1}_{n=3} b_\psi \cdot H_\lambda \\ & + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P) U_n, (P U_n)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_n^*)_{|x_d,\chi_d=0}, \end{aligned}$$

where the notation have been defined in (5.2.25) and (5.2.29). These two equations come with

the following initial conditions

$$(5.2.51c) \quad (a_{\varphi,\lambda}^n)|_{t \leq 0} = 0, \quad (a_{\psi,\lambda}^n)|_{t \leq 0} = 0.$$

The system of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) is highly coupled. In all equations for the corrector of order  $n$ , there are terms depending on  $U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P)U_n, (PU_n)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_n^*$ , but this is not a big issue, since, if the lower order correctors  $U_1, \dots, U_{n-1}$  are constructed,  $(I - P)U_n, (PU_n)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_n^*$  can be determined with (5.2.46), (5.2.47) and (5.2.48). The terms inducing coupling which seem the most problematic are the terms  $\lambda b_\psi \cdot B(U_{\varphi,2,\lambda}^{n+1,osc})|_{x_d, \chi_d=0}$  and  $\lambda b_\psi \cdot B(U_{\psi,2,\lambda}^{n+1,osc})|_{x_d, \chi_d=0}$  in (5.2.51a) and (5.2.51b) which couple evolution equations for  $a_{\varphi,\lambda}^n$  and  $a_{\psi,\lambda}^n$  (and therefore evolution equations for the corrector  $U^n$  of order  $n$ ), with the corrector of one order higher,  $U^{n+1}$ . In equations (5.2.51) there are also traces of profiles of order  $n$ , which prevents to solve this equations (having determined lower order correctors) before solving the evolution equations for  $U^n$ .

In addition to being highly coupled, system of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) seems also over-determined. Indeed, condition (5.2.17) imposing that the *outgoing* leading profile  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^1$  is of zero trace on the boundary gives one more boundary condition than the two boundary conditions prescribed by the structure of the problem. Therefore, this is not clear at all that the system of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) admits a solution satisfying the additional condition (5.2.17).

### 5.3 Existence of an analytic solution

In this section we focus on the well-posedness of (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51). Both because of the high coupling of the system, and the over-determination of it, we choose to concentrate on a toy model and try to prove well-posedness for it. This toy model should focus on the profiles associated with frequencies  $\varphi_j, \psi_j$  and  $\nu_j$ , because on one hand it greatly reduces the number of equations, and therefore complexity of the system and of the functional framework, and on the other hand because it seems that, due to amplification and resonances, equations on the profiles associated with  $\varphi_j, \psi_j$  and  $\nu_j$  carry the main difficulties of system of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49) and (5.2.51). Indeed, we already pointed out that if profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^n$  for  $n \geq 1, \zeta = \varphi, \psi, \nu, j = 1, 2, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  are determined, system (5.2.47)-(5.2.48) becomes upper triangular, and could be studied in a rather classical way, see for example Chapter 4. Since we wish to study toy models of the system (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) in an analytical setting, the initial conditions in (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49) and (5.2.51), requiring that the profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}$  and their boundary terms  $a_{\zeta,\lambda}$  are zero for negative times  $t$  are not suited for analytic functions, since it would imply that these profiles and boundary terms are zero everywhere. Therefore, in the toy models, we modify, in a non equivalent way, these boundary conditions into conditions requiring that the solutions are zero at  $t = 0$ , which are now adapted for analytic functions.

We start by describing a first toy model, very simple, which concentrate on boundary equations, and detail the functional framework which will be used to prove well-posedness of it, and proceed with the proof. Then we describe a second toy model, more elaborate, which incorporates interior (incoming) equations, introduce additional functional framework, make some specifications on the toy model with regard to the functional framework, and state the main result, before proceeding by proving it.

### 5.3.1 First toy model

For the first toy model, we focus only on boundary equations (5.2.51). In these equations, terms

$$X_\varphi^{\text{Lop}} a_{\varphi,\lambda}^n, \quad D_\varphi^{\text{Lop}} i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^n \quad \text{and} \quad i\lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2) (a_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^n + a_{\varphi,\lambda_1}^n a_{\varphi,\lambda_2}^1)$$

as well as the analogous ones for  $\psi$  appear in the chosen first toy model, and the last one is rewritten as a semilinear term. On the contrary, terms

$$\mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\varphi} \Gamma^\varphi ik \left\{ (\sigma_{\nu,2,-k}^1)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^n + (\sigma_{\nu,2,-k}^n)_{|x_d=0} a_{\psi,-k\lambda_\psi}^1 \right\},$$

$$\partial_{z,\theta} \text{ terms in } \left[ \tilde{F}_\varphi^n, (\tilde{F}_\varphi^n, a_\varphi^1), (\tilde{F}_\psi^n, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}), ((\sigma_\varphi^n)_{|x_d=0}, a_\varphi^1), ((\sigma_\psi^n)_{|x_d=0}, (\sigma_{\nu,2}^1)_{|x_d=0}) \right]$$

and the analogous ones for  $\psi$  are removed in the toy model, since they involved traces of outgoing interior profiles (recall that  $\tilde{F}_{\varphi,j,\lambda}^n$  and  $\tilde{F}_{\psi,j,\lambda}^n$  depend respectively on  $(\sigma_{\varphi,j,\lambda}^n)_{|x_d=0}$  and  $(\sigma_{\psi,j,\lambda}^n)_{|x_d=0}$ ). For the same reasons, terms

$$i\lambda b_\varphi \cdot B(U_{\varphi,2,\lambda}^{n+1,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} \quad \text{and} \quad i\lambda b_\psi \cdot B(U_{\psi,2,\lambda}^{n+1,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0}$$

are not kept. Finally, source terms

$$\partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, \dots, U_{n-1}, (I-P)U_n, (PU_n)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_n^*)_{|x_d,\chi_d=0}$$

involves quadratic terms in the traces of profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^k$  for  $1 \leq k \leq n$ ,  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ ,  $j \in \mathcal{C}(\zeta)$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , with possibly derivatives of order up to  $n$  in front of it. They are simplified in three ways: we keep only traces of profiles associated with boundary frequencies  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$ , we express traces only through functions  $a_{\zeta,\lambda}^k$  for  $\zeta = \varphi, \psi$ , and we choose only first order derivatives in  $\Theta$  (but we shall see in the following that considering derivatives in  $y$  would present no additional difficulty). Finally, boundary terms  $G$  and  $H$  are represented by functions  $H_\zeta^n$ , belonging to a space specified later on. Multiplying equations (5.2.51) by  $e^{i\lambda\Theta}$  for  $\Theta \in \mathbb{T}$  a periodic variable therefore leads to the following toy model amplitude equations

$$(5.3.1a) \quad X_\varphi^{\text{Lop}} a_\varphi^n + D_\varphi^{\text{Lop}} \partial_\Theta (a_\varphi^1 a_\varphi^n) + \mathbf{w}_\varphi \mathbb{F}_\varphi^{\text{per}} [\partial_\Theta a_\varphi^1, \partial_\Theta a_\varphi^n] = H_\varphi^n + K_\varphi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\varphi^k a_\psi^{n-k}),$$

$$(5.3.1b) \quad X_\psi^{\text{Lop}} a_\psi^n + D_\psi^{\text{Lop}} \partial_\Theta (a_\psi^1 a_\psi^n) + \mathbf{w}_\psi \mathbb{F}_\psi^{\text{per}} [\partial_\Theta a_\psi^1, \partial_\Theta a_\psi^n] = H_\psi^n + K_\psi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\psi^k a_\varphi^{n-k}),$$

where, for  $\zeta = \varphi, \psi$ , we have denoted by  $a_\zeta^n$  the function of  $\omega_T \times \mathbb{T}$  defined as

$$a_\zeta^n(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} a_{\zeta,\lambda}^n(z) e^{i\lambda\Theta},$$

where, for  $\zeta = \varphi, \psi$ , the bilinear operator  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}$  is defined as

$$(5.3.2) \quad \mathbb{F}_\zeta^{\text{per}} [a, b] := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_3=\lambda \\ \lambda_1\lambda_3 \neq 0}} \frac{i a_{\lambda_1} b_{\lambda_3}}{\lambda_1 \delta_\zeta^1 + \lambda_3 \delta_\zeta^3} e^{i\lambda\Theta},$$

with  $\delta_\zeta^1$  and  $\delta_\zeta^3$  scalars defined as

$$\delta_\zeta^1 := \frac{\xi_1(\zeta) - \xi_2(\zeta)}{\xi_3(\zeta) - \xi_1(\zeta)}, \quad \delta_\zeta^3 := \frac{\xi_3(\zeta) - \xi_2(\zeta)}{\xi_3(\zeta) - \xi_1(\zeta)},$$

and where  $\mathbf{w}_\varphi, \mathbf{w}_\psi, K_\varphi^{\text{Lop}}, K_\psi^{\text{Lop}} \in \mathbb{R}$ . Here we have used analysis of [CW17, Section 3.1] to rewrite terms involving the  $\gamma_\zeta(\lambda_1, \lambda_3)$  coefficients in (5.2.51) as  $\mathbf{w}_\varphi \mathbb{F}_\varphi^{\text{per}}[\partial_\Theta a_\varphi^1, \partial_\Theta a_\varphi^n]$ , up to changing definition of the coefficients  $D_\zeta^{\text{Lop}}$ . Note that since  $\varphi$  and  $\psi$  are nonresonant, the denominators in equation (5.3.2) defining  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}$  are nonzero. Up to changing all notation by a harmless multiplicative constant, we can assume that, for  $\zeta = \varphi, \psi$ , vector fields  $X_\zeta^{\text{Lop}}$  read

$$(5.3.3) \quad X_\zeta^{\text{Lop}} = \partial_t - \mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y,$$

with  $\mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}} \in \mathbb{R}^{d-1}$ . Equations (5.3.1) are coupled with the initial conditions

$$(5.3.4) \quad (a_\varphi^n)|_{t=0} = 0, \quad (a_\psi^n)|_{t=0} = 0.$$

Again, these initial conditions (5.3.4) are not the same as (5.2.51c), and are written in this (non equivalent) form to be suited for the analytical framework. Note that equations (5.3.1) are quasilinear for  $a_\varphi^1, a_\psi^1$  when  $n = 1$ , and linear for  $a_\varphi^n, a_\psi^n$  when  $n \geq 2$ . As we will prove later that terms  $\mathbb{F}_\varphi^{\text{per}}[\partial_\Theta a_\varphi^1, \partial_\Theta a_\varphi^n]$  and  $\mathbb{F}_\psi^{\text{per}}[\partial_\Theta a_\psi^1, \partial_\Theta a_\psi^n]$  are semilinear, equations (5.3.1) are transport equations, with a Burgers type term (when  $n = 1$ ), a semilinear term, a source term and a convolution type term. System of equations (5.3.1), (5.3.4) is a simplification of system (5.2.51) for which we propose to set up the analytical tools to solve it.

The aim is to solve system (5.3.1)-(5.3.4) with the following Cauchy-Kovalevskaya theorem. First proofs of this kind of result are due to [Nir72] and then [Nis77], and the proof of the following formulation goes back to [BG78].

**Theorem 5.3.1** ([BG78]). *Let  $(B_r)_{r_0 \leq r \leq r_1}$  be a decreasing sequence of Banach spaces (with  $0 \leq r_0 \leq r_1 \leq 1$ ), i.e. such that, for  $r_0 \leq r' < r \leq r_1$ ,*

$$B_r \subset B_{r'}, \quad \|\cdot\|_{r'} \leq \|\cdot\|_r.$$

*Let  $T, R, C$  and  $M$  be positive real numbers, and consider a continuous function  $F$  from  $[-T, T] \times \{u \in B_r \mid \|u\|_r < R\}$  to  $B_{r'}$  for every  $r_0 \leq r' < r \leq r_1$  which satisfies*

$$(5.3.5) \quad \sup_{|t| \leq T} \|F(t, u) - F(t, v)\|_{r'} \leq \frac{C}{r - r'} \|u - v\|_r$$

*for all  $r_0 \leq r' < r \leq r_1$ ,  $|t| < T$ , and for all  $u, v$  in  $B_r$  such that  $\|u\|_r \leq R$ ,  $\|v\|_r \leq R$ , and*

$$(5.3.6) \quad \sup_{|t| \leq T} \|F(t, 0)\|_r \leq \frac{M}{r_1 - r},$$

*for every  $r_0 \leq r < r_1$ .*

*Then there exists a real number  $\delta$  in  $(0, T)$  and a unique function  $u$ , belonging to  $\mathcal{C}^1((-\delta(r_1 - r), \delta(r_1 - r)), B_r)$  for every  $r_0 \leq r \leq r_1$ , satisfying*

$$\sup_{|t| < \delta(r_1 - r)} \|u(t)\|_r < R,$$

and the system

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) & \text{for } |t| < \delta(r_1 - r) \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

We therefore need to define a chain of Banach spaces of analytic functions adapted to our problem (5.3.1).

### 5.3.2 Functional framework

#### Functional spaces

For a function  $u$  of  $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ , the symbol  $\widehat{u}$  refers to the Fourier transform of  $u$ , with the following convention

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(y) e^{-i\xi \cdot y} dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

For a complex vector  $X$ , notation  $|X|$  refers to the norm  $\sqrt{X \cdot X^*}$ , and we denote by  $\langle \cdot \rangle$  the Japanese bracket, that is, for a complex vector  $X$ ,

$$\langle X \rangle := (1 + |X|^2)^{1/2}.$$

We set  $d^*$  to be an integer such that  $d^* > \widetilde{m}_0 + 2 + (d + 1)/2$ , where  $\widetilde{m}_0$  is the nonnegative real number of Lemma 5.3.7. The following definition quantifies analyticity by means of an exponential decay of the Fourier transform.

**Definition 5.3.2.** For  $s \in (0, 1)$ , the space  $Y_s$  is defined as the space of all functions  $u$  of  $L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T})$  such that, if their Fourier series expansion in  $\Theta$  reads

$$u(y, \Theta) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} u_\lambda(y) e^{i\lambda\Theta},$$

then

$$\|u\|_{Y_s}^2 := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{2s|\langle \lambda, \xi \rangle|} \langle \langle \lambda, \xi \rangle \rangle^{2d^*} |\widehat{u}_\lambda(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

The following results make precise how  $y$  and  $\Theta$  derivatives act on  $Y_s$ , and assert that  $Y_s$  is a Banach algebra.

**Lemma 5.3.3.** There exists  $C > 0$  such that, for  $0 \leq s' < s \leq 1$ , for  $u$  in  $Y_s$ , functions  $\nabla_y u$  and  $\partial_{\Theta} u$  belong to  $Y_{s'}$ , and we have

$$(5.3.7) \quad \|\nabla_y u\|_{Y_{s'}} \leq \frac{C}{s - s'} \|u\|_{Y_s} \quad \text{and} \quad \|\partial_{\Theta} u\|_{Y_{s'}} \leq \frac{C}{s - s'} \|u\|_{Y_s}.$$

*Proof.* We prove the estimate for  $\nabla_y u$ , the one for  $\partial_{\Theta} u$  being similar. We have, by definition of the  $Y_{s'}$ -norm,

$$\begin{aligned} \|\nabla_y u\|_{Y_{s'}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{2s'|\langle \lambda, \xi \rangle|} \langle \langle \lambda, \xi \rangle \rangle^{2d^*} |\xi|^2 |\widehat{u}_\lambda(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{C^2}{(s - s')^2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{2s|\langle \lambda, \xi \rangle|} \langle \langle \lambda, \xi \rangle \rangle^{2d^*} |\widehat{u}_\lambda(\xi)|^2 d\xi = \frac{C^2}{(s - s')^2} \|u\|_s^2, \end{aligned}$$

since  $|\xi|^2 \exp(2s'|\xi|) \leq C^2 \exp(2s|\xi|)/(s - s')^2$  for  $\xi$  in  $\mathbb{R}^d$ , with  $C > 0$  independent of  $s, s'$  and  $\xi$ , which reads precisely  $C = 2e^{-1}$ .  $\square$



**Lemma 5.3.4.** *For  $s \in (0, 1)$ , the space  $Y_s$  is a Banach algebra, up to a positive constant, that is, there exists  $C > 0$  (independent of  $s$ ), such that for  $u, v$  in  $Y_s$ , the function  $uv$  belongs to  $Y_s$  and we have*

$$\|uv\|_{Y_s} \leq C \|u\|_{Y_s} \|v\|_{Y_s}.$$

*Proof.* Let  $s$  be in  $(0, 1)$ , and consider  $u, v$  in  $Y_s$ . We have,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{2s|\langle \lambda, \xi \rangle|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*} |\widehat{(uv)}_\lambda(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{2s|\langle \lambda, \xi \rangle|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_\mu(\eta) \widehat{v}_{\lambda-\mu}(\xi - \eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*}}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*} \langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta \right) \\ & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} e^{2s|\langle \mu, \eta \rangle|} \langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*} |\widehat{u}_\mu(\eta)|^2 e^{2s|\langle \lambda - \mu, \xi - \eta \rangle|} \langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^{2d^*} |\widehat{v}_{\lambda-\mu}(\xi - \eta)|^2 d\eta d\xi \\ &\leq C \|u\|_{Y_s}^2 \|v\|_{Y_s}^2, \end{aligned}$$

by Cauchy-Schwarz inequality, if  $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*}}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*} \langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta$  is bounded uniformly with respect to  $(\lambda, \xi)$ . We conclude by making the proof of this latter result.

For  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$  and  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ , we have

$$|\langle \lambda, \xi \rangle|^2 \leq 2|\langle \mu, \eta \rangle|^2 + 2|\langle \lambda - \mu, \xi - \eta \rangle|^2$$

so

$$\langle (\lambda, \xi) \rangle^2 \leq 2\langle (\mu, \eta) \rangle^2 + 2\langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^2,$$

and

$$\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*} \leq 2^{d^*+1} \langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*} + 2^{d^*+1} \langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}$$

Therefore, by a change of variables  $(\eta, \mu) = (\xi - \eta, \lambda - \mu)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*}}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*} \langle (\lambda - \mu, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta \leq 2^{d^*+2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta \leq C 2^{d^*+2}$$

with  $C$  depending only on  $d^*$ , since  $d^*$  is such that  $d^* > d/2$ .  $\square$

As we work with sequences of functions  $(a_\varphi^n)_{n \geq 1}$  and  $(a_\psi^n)_{n \geq 1}$ , we define a functional space accordingly. We also specify the norm chosen on the product space, since we will work with couples of sequences.

**Definition 5.3.5.** *For  $s \in (0, 1)$ , the space  $\mathbf{Y}_s$  is defined as the set of sequences  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $Y_s$  such that*

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{Y}_s}^2 := \sum_{n \geq 1} e^{2sn} \langle n \rangle^{2d^*} \|a_n\|_{Y_s}^2 < +\infty.$$

For  $s \in (0, 1)$ , the norm on the product space  $\mathbf{Y}_s^2$  is defined, for  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{Y}_s^2$ , as

$$\|(\mathbf{a}, \mathbf{b})\|_{\mathbf{Y}_s^2}^2 := \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{Y}_s}^2 + \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{Y}_s}^2.$$

The space  $\mathbf{Y}_s$  satisfies analogous properties as the ones of Lemmas 5.3.3 and 5.3.4 (with the convolution on sequences for product), but they will not be used directly.

### Specifications on the toy model

We are now able to precise some properties of the toy system (5.3.1), (5.3.4).

Boundary source terms  $H_\varphi^n, H_\psi^n$  for  $n \geq 1$  are taken such that, defining  $\mathbf{H} := (\mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_\psi) := (H_\varphi^n, H_\psi^n)_{n \geq 1}$ , function  $\mathbf{H}$  is in  $\mathcal{C}([-T, T], Y_1^2)$ . In the statement 5.3.9 below of existence and uniqueness for system (5.3.1), (5.3.4), there will be an additional assumption on  $\mathbf{H}$ , requiring that there exists  $M > 0$  such that, for  $0 \leq s < 1$ ,

$$\sup_{|t| < T} \|\mathbf{H}\|_{Y_s^2} \leq \frac{M}{1-s}.$$

This assumption on  $\mathbf{H}$  is stronger than requiring  $H$  and  $G$  of (5.1.1) to be in  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ , as it imposes analyticity with respect to space variables, but with bound on the norm increasing with regularity. We denote by  $\gamma_0 > 0$  a positive constant such that, for  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$(5.3.8a) \quad |\mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0, \quad |D_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0, \quad |\mathbf{w}_\zeta| \leq \gamma_0^{1/2} \quad \text{and} \quad |K_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0,$$

and, for  $s \in (0, 1)$ , for  $u, v$  in  $Y_s$ , and for  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$(5.3.8b) \quad \left\| \mathbb{F}_\zeta^{\text{per}} [\partial_\Theta u, \partial_\Theta v] \right\|_{Y_s} \leq \gamma_0^{1/2} \|u\|_{Y_s} \|v\|_{Y_s}.$$

All estimates relies on the fact that scalars  $D_\zeta^{\text{Lop}}, \mathbf{w}_\zeta$  and  $K_\zeta^{\text{Lop}}$ , vectors  $\mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}}$  and operators  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}$  are in finite number. As for it, estimate (5.3.8b) asserting that the operator  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}$ , composed with derivation in  $\Theta$ , acts as a semilinear operator, is a result of [CW17, Theorem 3.1]. The proof in our case is a straightforward adaptation to our functional framework of the one of [CW17], which we detail here.

**Proposition 5.3.6** ([CW17, Theorem 3.1]). *There exists a constant  $C > 0$  such that for  $s \in [0, 1]$ , for  $u, v$  in  $Y_s$  and  $\zeta = \varphi, \psi$ , we have*

$$(5.3.9) \quad \left\| \mathbb{F}_\zeta^{\text{per}} [\partial_\Theta u, \partial_\Theta v] \right\|_{Y_s} \leq C \|u\|_{Y_s} \|v\|_{Y_s}.$$

*Proof.* The result relies on the following lemma, which constitutes a reformulation of the small divisors Assumption 5.6. Its proof is the same as the one in [CW17], and is recalled here for the sake of completeness.

**Lemma 5.3.7** ([CW17, Lemma 3.2]). *There exists a constant  $C > 0$  and a real number  $\tilde{m}_0$  such that, for  $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ , and for  $\zeta = \varphi, \psi$ , we have*

$$(5.3.10) \quad \frac{1}{|\lambda_1 \delta_\zeta^1 + \lambda_3 \delta_\zeta^3|} \leq C \min(|\lambda_1|^{\tilde{m}_0}, |\lambda_3|^{\tilde{m}_0}).$$

*Proof.* Without loss of generality, we consider  $\zeta = \varphi$ . The aim is to use the bound of Assumption 5.6. Using equality  $L(0, \varphi_2) r_{\varphi,2} = 0$ , we get,

$$L(0, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3) r_{\varphi,2} = \left[ \lambda_1 (\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)) + \lambda_3 (\xi_3(\varphi) - \xi_2(\varphi)) \right] A_d(0) r_{\varphi,2},$$

so the quantity  $\lambda_1 (\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)) + \lambda_3 (\xi_3(\varphi) - \xi_2(\varphi))$  is nonzero since otherwise  $r_{\varphi,2}$  would be a nonzero vector in the kernel of  $L(0, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3)$ , contradicting Assumption 5.5 asserting that  $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3$  is never characteristic for  $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ . Therefore we have

$$\frac{1}{\left| \lambda_1 (\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)) + \lambda_3 (\xi_3(\varphi) - \xi_2(\varphi)) \right|} \leq C \left\| L(0, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3)^{-1} \right\|,$$

with a constant  $C > 0$  independent on  $\lambda_1, \lambda_3$ . Using Assumption 5.6 and a polynomial bound on the transpose of the comatrix, we get that there exists a nonnegative real number  $\tilde{m}_0$  such that

$$\frac{1}{\left| \lambda_1 (\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)) + \lambda_3 (\xi_3(\varphi) - \xi_2(\varphi)) \right|} \leq C |(\lambda_1, \lambda_3)|^{\tilde{m}_0},$$

with a new constant  $C > 0$  independent on  $\lambda_1, \lambda_3$ . Up to changing constant  $C > 0$ , we obtain,

$$(5.3.11) \quad \frac{1}{\left| \lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3 \right|} \leq C |(\lambda_1, \lambda_3)|^{\tilde{m}_0}.$$

To get the formulation of (5.3.11) with a minimum, we see that two cases may occur. Either  $|\lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3| > |\delta_\varphi^1|$ , and in this case, with  $C \geq 1/|\delta_\varphi^1|$ , we have

$$\frac{1}{\left| \lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3 \right|} \leq \frac{1}{|\delta_\varphi^1|} \leq C \leq C |\lambda_1|^{\tilde{m}_0}$$

since  $\tilde{m}_0 \geq 0$ . In the other case, if  $|\lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3| \leq |\delta_\varphi^1|$ , we have

$$|\lambda_3| \leq \frac{1}{|\delta_\varphi^3|} |\lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3| + \frac{1}{|\delta_\varphi^3|} |\lambda_1 \delta_\varphi^1| \leq 2 \frac{|\delta_\varphi^1|}{|\delta_\varphi^3|} |\lambda_1|,$$

so, up to changing constant  $C$ , estimate (5.3.11) rewrites

$$\frac{1}{\left| \lambda_1 \delta_\varphi^1 + \lambda_3 \delta_\varphi^3 \right|} \leq C |\lambda_1|^{\tilde{m}_0}.$$

Applying the same arguments for  $\lambda_3$  leads to the aimed estimate (5.3.10).  $\square$

The proof of Proposition 5.3.6 also relies on the following technical result, whose formulation is the one of [CW17]. Its proof is an immediate adaptation of a result of [RR82], and is not recalled here.

**Lemma 5.3.8** ([RR82, Lemma 1.2.2], [CW17, Lemma 3.3]). *Let  $\mathbb{K} : \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  be a locally integrable measurable function such that, either*

$$\sup_{(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} |\mathbb{K}(\xi, \lambda, \eta, \mu)|^2 d\eta < +\infty,$$

or

$$\sup_{(\eta, \mu) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} |\mathbb{K}(\xi, \lambda, \eta, \mu)|^2 d\xi < +\infty.$$

Then the map

$$(f, g) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}(\xi, \lambda, \eta, \mu) f(\xi - \eta, \lambda - \mu) g(\eta, \mu) d\eta$$

is bounded on  $L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z})$  with values in  $L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z})$ .

We now proceed with the proof of Proposition 5.3.6, and we consider without loss of generality  $\zeta = \varphi$ . For  $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$  and for  $u, v$  in  $Y_s$ , the Fourier transform of the  $\lambda$ -th term of the Fourier series expansion of  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}[\partial_\Theta u, \partial_\Theta v]$  is given by

$$\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}[\widehat{\partial_\Theta u}, \widehat{\partial_\Theta v}]_\lambda(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{Z} \\ \mu \neq 0, \lambda}} \frac{\mu(\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)\delta_\varphi^1 + \mu\delta_\varphi^3} \widehat{u}_{\lambda - \mu}(\xi - \eta) \widehat{v}_\mu(\eta) d\eta.$$

Therefore, to obtain inequality (5.3.9), we have to estimate the quantity

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu) \widehat{u_{\lambda-\mu}}(\xi - \eta) \widehat{v_\mu}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi,$$

where we have denoted, for  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbf{F}(\lambda, \mu) := \begin{cases} \frac{\mu(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)\delta_\varphi^1 + \mu\delta_\varphi^3} & \text{if } \mu \neq 0, \lambda \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and we will do it using Lemma 5.3.8. We consider two nonnegative functions  $\chi_1, \chi_2$  on  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  such that  $\chi_1 + \chi_2 \equiv 1$  and

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) &= 0 & \text{if } \langle (\eta, \mu) \rangle \geq (2/3) \langle (\xi, \lambda) \rangle \\ \chi_2(\xi, \lambda, \eta, \mu) &= 0 & \text{if } \langle (\eta, \mu) \rangle \leq (1/3) \langle (\xi, \lambda) \rangle. \end{aligned}$$

We first consider the quantity

$$(5.3.12a) \quad \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu) \widehat{u_{\lambda-\mu}}(\xi - \eta) \widehat{v_\mu}(\eta) d\eta,$$

rewritten as

$$(5.3.12b) \quad \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{\chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu)}{e^{s|(\lambda-\mu, \xi-\eta)|} \langle (\lambda-\mu, \xi-\eta) \rangle^{d^*} e^{s|(\mu, \eta)|} \langle (\mu, \eta) \rangle^{d^*}} \\ \times \left( e^{s|(\lambda-\mu, \xi-\eta)|} \langle (\lambda-\mu, \xi-\eta) \rangle^{d^*} \widehat{u_{\lambda-\mu}}(\xi - \eta) \right) \left( e^{s|(\mu, \eta)|} \langle (\mu, \eta) \rangle^{d^*} \widehat{v_\mu}(\eta) \right) d\eta.$$

We have

$$e^{2s|(\lambda, \xi)|} \leq e^{2s|(\mu, \eta)|} e^{2s|(\lambda-\mu, \xi-\eta)|},$$

and, on the support of  $\chi_1$ ,

$$\langle (\lambda-\mu, \xi-\eta) \rangle \geq \langle (\lambda, \xi) \rangle - \langle (\mu, \eta) \rangle \geq \frac{1}{3} \langle (\lambda, \xi) \rangle,$$

so

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu)}{e^{s|(\lambda-\mu, \xi-\eta)|} \langle (\lambda-\mu, \xi-\eta) \rangle^{d^*} e^{s|(\mu, \eta)|} \langle (\mu, \eta) \rangle^{d^*}} \right|^2 d\eta \leq C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\mathbf{F}(\lambda, \mu)}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{d^*}} \right|^2 d\eta.$$

Using Lemma 5.3.7 we get

$$\left| \frac{\mu(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)\delta_\varphi^1 + \mu\delta_\varphi^3} \right| = \frac{1}{|\delta_\varphi^1|} \left| \mu - \frac{\delta_\varphi^3 \mu^2}{(\lambda-\mu)\delta_\varphi^1 + \mu\delta_\varphi^3} \right| \leq C |\mu|^{\tilde{m}_0+2},$$

so

$$\begin{aligned} \sup_{(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu)}{e^{s|(\lambda-\mu, \xi-\eta)|} \langle (\lambda-\mu, \xi-\eta) \rangle^{d^*} e^{s|(\mu, \eta)|} \langle (\mu, \eta) \rangle^{d^*}} \right|^2 d\eta \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{|\mu|^{2(\tilde{m}_0+2)}}{\langle (\mu, \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta < +\infty, \end{aligned}$$

since we chose  $d^* > \tilde{m}_0 + 2 + (d+1)/2$ . Applying Lemma 5.3.8 to the quantity in (5.3.12) we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \chi_1(\xi, \lambda, \eta, \mu) e^{s|(\lambda, \xi)|} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{d^*} \mathbf{F}(\lambda, \mu) \widehat{u_{\lambda-\mu}}(\xi - \eta) \widehat{v_\mu}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ & \leq C \|u\|_{Y_s}^2 \|v\|_{Y_s}^2. \end{aligned}$$

Applying similar arguments for  $\chi_2$  leads to the analogous estimate for  $\chi_2$ , and combining estimates for  $\chi_1$  and  $\chi_2$  gives the sought one (5.3.9), concluding the proof.  $\square$

We are now able to prove well-posedness for system (5.3.1), (5.3.4), using Theorem 5.3.1, with the above properties.

### 5.3.3 A Cauchy-Kovalevskaya theorem for boundary equations

System (5.3.1), (5.3.4) reads

$$(5.3.13) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{a} = \mathbf{F}(t, \mathbf{a}) := L \mathbf{a} - \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \mathbb{F}^{\text{per}}(\partial_\Theta \mathbf{a}, \partial_\Theta \mathbf{a}) + \mathbf{H} + \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}), \\ \mathbf{a}(0) = 0, \end{cases}$$

where  $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\psi) := (a_\varphi^n, a_\psi^n)_{n \geq 1}$ , and, if  $\mathbf{c} := (c_\varphi^n, c_\psi^n)_{n \geq 1}$ ,

$$\begin{aligned} L \mathbf{a} &:= (\mathbf{v}_\varphi^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y a_\varphi^n, \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y a_\psi^n)_{n \geq 1}, \\ \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= (D_\varphi^{\text{Lop}} a_\varphi^1 c_\varphi^n, D_\psi^{\text{Lop}} a_\psi^1 c_\psi^n), \\ \mathbb{F}^{\text{per}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= (\mathbf{w}_\varphi \mathbb{F}_\varphi^{\text{per}}[a_\varphi^1, c_\varphi^n], \mathbf{w}_\psi \mathbb{F}_\psi^{\text{per}}[a_\psi^1, c_\psi^n])_{n \geq 1}, \\ \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= \left( K_\varphi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\varphi^k c_\psi^{n-k}), K_\psi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\varphi^k c_\psi^{n-k}) \right)_{n \geq 1}. \end{aligned}$$

System (5.3.13) is now in the right shape to apply Theorem 5.3.1, and we prove the following result.

**Proposition 5.3.9.** *For  $M_0 > 0$ , there exists  $\delta \in (0, T)$  such that for all  $\mathbf{H}$  in  $\mathcal{C}([-T, T], \mathbf{Y}_1^2)$  satisfying, for  $0 < s < 1$ ,*

$$(5.3.14) \quad \sup_{|t| < T} \|\mathbf{H}(t)\|_{Y_s^2} \leq \frac{M_0}{1-s},$$

*system (5.3.13) admits a unique solution  $\mathbf{a}$  in  $\mathcal{C}^1((-\delta(1-s), \delta(1-s)), \mathbf{Y}_s^2)$  for every  $0 < s \leq 1$ .*

The key estimates to prove this result are the following. These are classical, and their proof is recalled here for the sake of completeness.

**Lemma 5.3.10.** *There exists a constant  $C > 0$  such that for  $0 < s' < s \leq 1$ , for  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  in  $\mathbf{Y}_s^2$ , the following estimates hold*

$$(5.3.15a) \quad \|\|L \mathbf{b}\|\|_{\mathbf{Y}_{s'}^2} \leq \frac{C \gamma_0 \|\|\mathbf{b}\|\|_{\mathbf{Y}_s^2}}{s - s'},$$

$$(5.3.15b) \quad \|\|\partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\|\|_{\mathbf{Y}_{s'}^2} \leq \frac{C \gamma_0 \|\|\mathbf{b}\|\|_{\mathbf{Y}_s^2} \|\|\mathbf{c}\|\|_{\mathbf{Y}_s^2}}{s - s'},$$

$$(5.3.15c) \quad \left\| \mathbb{F}^{\text{per}}(\partial_{\Theta} \mathbf{b}, \partial_{\Theta} \mathbf{c}) \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \leq C \gamma_0 \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \left\| \mathbf{c} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2},$$

$$(5.3.15d) \quad \left\| \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \right\|_{\mathbf{Y}_{s'}^2} \leq \frac{C \gamma_0 \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \left\| \mathbf{c} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2}}{s - s'}.$$

*Proof.* First, estimate (5.3.15a) follows directly from estimate (5.3.8a) and Lemma 5.3.3 since  $L$  is a linear combination of a bounded vector and a first order derivative. For the second one (5.3.15b), we have, according to Lemma 5.3.4, for  $\zeta = \varphi, \psi$  and  $n \geq 1$ ,

$$\left\| D_{\zeta}^{\text{Lop}} b_{\zeta}^1 c_{\zeta}^n \right\|_{Y_s} \leq C \gamma_0 \left\| b_{\zeta}^1 \right\|_{Y_s} \left\| c_{\zeta}^n \right\|_{Y_s} \leq C \gamma_0 \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \left\| c_{\zeta}^n \right\|_{Y_s}.$$

Therefore, according to Lemma 5.3.3,

$$\left\| \partial_{\Theta} D_{\zeta}^{\text{Lop}} b_{\zeta}^1 c_{\zeta}^n \right\|_{Y_{s'}^2} \leq \frac{C}{s - s'} \left\| D_{\zeta}^{\text{Lop}} b_{\zeta}^1 c_{\zeta}^n \right\|_{Y_s} \leq \frac{C \gamma_0}{s - s'} \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \left\| c_{\zeta}^n \right\|_{Y_s}.$$

Multiplying by  $e^{2sn} \langle n \rangle^{2d^*}$  and summing over  $n \geq 1$  and  $\zeta = \varphi, \psi$  gives the estimate (5.3.15b) for the  $\mathbf{Y}_s^2$ -norm. With (5.3.8b), the proof of (5.3.15c) is analogous but simpler since the operator is semilinear. Finally, for (5.3.15d), according to Lemmas 5.3.3 and 5.3.4, we have, for  $n \geq 1$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\Theta} (b_{\varphi}^k c_{\psi}^{n-k}) \right\|_{Y_{s'}^2} \leq \frac{C}{s - s'} \sum_{k=1}^{n-1} \left\| b_{\varphi}^k \right\|_{Y_s} \left\| c_{\psi}^{n-k} \right\|_{Y_s}.$$

Thus, by Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n \geq 1} e^{2s'n} \langle n \rangle^{2d^*} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\Theta} (b_{\varphi}^k c_{\psi}^{n-k}) \right\|_{Y_{s'}^2}^2 \\ & \leq \frac{C^2}{(s - s')^2} \sum_{n \geq 1} e^{2sn} \langle n \rangle^{2d^*} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \left\| b_{\varphi}^k \right\|_{Y_s} \left\| c_{\psi}^{n-k} \right\|_{Y_s} \right)^2 \\ & \leq \frac{C^2}{(s - s')^2} \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle n \rangle^{2d^*}}{\langle k \rangle^{2d^*} \langle n-k \rangle^{2d^*}} \right) \\ & \quad \times \sum_{k=1}^{n-1} e^{2sk} \langle k \rangle^{2d^*} \left\| b_{\varphi}^k \right\|_{Y_s}^2 e^{2s(n-k)} \langle n-k \rangle^{2d^*} \left\| c_{\psi}^{n-k} \right\|_{Y_s}^2 \\ & \leq \frac{C^2}{(s - s')^2} \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2}^2 \left\| \mathbf{c} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2}^2, \end{aligned}$$

since  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle n \rangle^{2d^*}}{\langle k \rangle^{2d^*} \langle n-k \rangle^{2d^*}}$  is bounded uniformly with respect to  $n \geq 1$ , and the result follows.  $\square$

We proceed with proof of Proposition 5.3.9, which essentially amounts to verify assumptions of Theorem 5.3.1.

*Proof* (Proposition 5.3.9). We apply Theorem 5.3.1 to system (5.3.31) with the scale of Banach spaces  $(\mathbf{Y}_s^2)_{0 < s \leq 1}$ . First note that assumption (5.3.6) is satisfied as soon as assumption (5.3.14) for  $\mathbf{H}$  is verified. Next we take interest into continuity assumption for  $\mathbf{F}$  and assumption (5.3.5). For  $0 < s' < s \leq 1$ , and for  $t, t' \in (-T, T)$  and  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  in  $\mathbf{Y}_s^2$ , we have,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t, \mathbf{b}) - \mathbf{F}(t', \mathbf{c}) &= \mathbf{L}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ &\quad - \mathbb{F}^{\text{per}}(\partial_{\Theta} \mathbf{b}, \partial_{\Theta}(\mathbf{b} - \mathbf{c})) - \mathbb{F}^{\text{per}}(\partial_{\Theta}(\mathbf{b} - \mathbf{c}), \partial_{\Theta} \mathbf{c}) + \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}(t') \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c})$$

so, according to estimates of Lemma 5.3.10,

$$(5.3.16) \quad \begin{aligned} & \left\| \mathbf{F}(t, \mathbf{b}) - \mathbf{F}(t', \mathbf{c}) \right\|_{\mathbf{Y}_{s'}^2} \\ & \leq \left\| \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}(t') \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} + C \gamma_0 \left( 1 + 3 \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} + 3 \left\| \mathbf{c} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} \right) \frac{\left\| \mathbf{b} - \mathbf{c} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2}}{s - s'}. \end{aligned}$$

Therefore, since  $\mathbf{H}$  is continuous from  $[-T, T]$  to  $\mathbf{Y}_1^2$ , if we set  $R > 0$  (which is therefore arbitrary), we both get, from (5.3.16), continuity of  $\mathbf{F}$  from  $[-T, T] \times \left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{Y}_s^2 \mid \left\| \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{Y}_s^2} < R \right\}$  to  $\mathbf{Y}_{s'}^2$ , and (setting  $t' = t$ ) estimate (5.3.5), with constant  $C$  given by  $C \gamma_0 (1 + 6R)$ . Theorem 5.3.1 therefore applies here and gives the sought result.  $\square$

Here we used that system (5.3.1), (5.3.4) presents quadratic nonlinearities, but, using the same arguments, other types of nonlinearities could also be treated.

### 5.3.4 Second toy model

We now refine the previous toy model by incorporating interior equations in it. According to remarks from the introduction of this section, in the new chosen toy model, we remove the coupling with profiles of frequencies different from  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  and  $\nu_j$ , which were appearing in (5.2.49a) in terms  $\partial_{z,\theta}$  terms in  $(U_1, \dots, U_{n-1}, (I - P)U_n, U_n^*)$ . The latter terms are also simplified since they carry derivatives of order higher than one<sup>7</sup>, and we keep only first order derivatives in  $\Theta$  (once again, considering derivatives in  $y$  presents no additional difficulty). They are therefore represented through terms of the form

$$\sum_{\zeta_1, \zeta_2 = \varphi, \psi, \nu} \sum_{j_1, j_2 = 1, 3} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{y, \Theta} (\sigma_{\zeta_1, j_1}^k \sigma_{\zeta_2, j_2}^{n-k}).$$

We also remove couplings with outgoing frequencies  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$ , as incoming equations will be solved seen as propagation in the normal variable equations, a form which is not suited to solve outgoing equations. Finally, we multiply equations (5.2.49) by  $e^{i\lambda\Theta}$  for  $\Theta \in \mathbb{T}$  a periodic variable. It leads to the following toy interior evolution equations, for  $n \geq 1$ ,  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ ,

$$(5.3.17) \quad \begin{aligned} X_{\zeta, j} \sigma_{\zeta, j}^n + D_{\zeta, j} \partial_{\Theta} (\sigma_{\zeta, j}^n \sigma_{\zeta, j}^1) + \sum_{\substack{\zeta_1, \zeta_2 \in \{\varphi, \psi, \nu\} \\ j_1, j_2 \in \{1, 3\}}} \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} [\sigma_{\zeta_1, j_1}^1, \sigma_{\zeta_2, j_2}^n] \\ = K_{\zeta, j} \sum_{\substack{\zeta_1, \zeta_2 \in \{\varphi, \psi, \nu\} \\ j_1, j_2 \in \{1, 3\}}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\Theta} (\sigma_{\zeta_1, j_1}^k \sigma_{\zeta_2, j_2}^{n-k}), \end{aligned}$$

where we have defined  $\sigma_{\zeta, j}^n$ , a function of  $\Omega_T \times \mathbb{T}$ , as

$$\sigma_{\zeta, j}^n(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\zeta, j, \lambda}^n(z) e^{i\lambda\Theta},$$

and where  $K_{\zeta, j} \in \mathbb{R}$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ . For  $(\zeta_1, \zeta_2, j_1, j_2) \in \{\varphi, \psi, \nu\}^2 \times \{1, 3\}^2$ , the bilinear operator  $\mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2}$  is defined as

$$(5.3.18) \quad \mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} [\sigma, \tau] = J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda} \tau_{\lambda} e^{i\lambda\Theta},$$

7. In expression (5.2.46) of nonpolarized parts, there are already derivatives.

with some coefficients  $J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2}$ . Similarly as for the boundary equations, up to changing all notation by a harmless multiplicative constant, according to expression (5.1.4) of vector field  $X_{\zeta, j}$ , it can be assumed to read

$$X_{\zeta, j} = \partial_t - \mathbf{v}_{\zeta, j} \cdot \nabla_x,$$

where vector  $\mathbf{v}_{\zeta, j}$  has been defined in Definition 5.1.3. Recall last component of each vector  $\mathbf{v}_{\zeta, j}$  is positive. Equation (5.3.17) is not provided with an initial condition, as we will see it as a propagation in the normal variable equation.

For boundary conditions for profiles  $\sigma_{\zeta, j}^n$ ,  $j = 1, 3$ , the coupling terms in  $(\sigma_{\zeta, 2}^n)_{|x_d=0}$  (appearing in terms in  $\tilde{F}_{\zeta, j, \lambda}^n$  for boundary conditions for profiles associated with  $\varphi$  and  $\psi$ ) are not kept, since it would require trace estimates to solve interior equations, and we do not have such estimates in our possession. Terms in  $\tilde{F}_{\zeta, j, \lambda}^n$  also convey first order derivatives of lower order terms  $a_{\zeta}^1, \dots, a_{\zeta}^{n-1}$ . For the functional framework chosen later, these derivatives are an issue, and since coupling with lower order terms  $a_{\zeta}^1, \dots, a_{\zeta}^{n-1}$  will be expressed in evolution equations for  $a_{\zeta}^n$ , terms  $\tilde{F}_{\zeta, j, \lambda}^n$  are only represented in the toy equations by boundary terms  $g_{\zeta, j}^n$ , belonging to one of the spaces defined later on. This lead to the following toy boundary conditions, for  $j = 1, 3$ ,

$$(5.3.19a) \quad (\sigma_{\varphi, j}^n)_{|x_d=0} = (e_{\varphi, j} \cdot r_{\varphi, j}) a_{\varphi}^n + g_{\varphi, j}^n, \quad (\sigma_{\psi, j}^n)_{|x_d=0} = (e_{\psi, j} \cdot r_{\psi, j}) a_{\psi}^n + g_{\psi, j}^n,$$

$$(5.3.19b) \quad (\sigma_{\nu, j}^n)_{|x_d=0} = g_{\nu, j}^n,$$

where, for  $\zeta = \varphi, \psi$ , we have denoted by  $a_{\zeta}^n$  the function of  $\Omega_T \times \mathbb{T}$  defined as

$$a_{\zeta}^n(z, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} a_{\zeta, \lambda}^n(z) e^{i\lambda \Theta}.$$

Finally, equations for boundary terms  $a_{\varphi}^n$  and  $a_{\psi}^n$  are the same as for the first toy model, namely,

$$(5.3.20a) \quad X_{\varphi}^{\text{Lop}} a_{\varphi}^n + D_{\varphi}^{\text{Lop}} \partial_{\Theta} (a_{\varphi}^1 a_{\varphi}^n) + \mathbf{w}_{\varphi} \mathbb{F}_{\varphi}^{\text{per}} [\partial_{\Theta} a_{\varphi}^1, \partial_{\Theta} a_{\varphi}^n] = H_{\varphi}^n + K_{\varphi}^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\Theta} (a_{\varphi}^k a_{\psi}^{n-k}),$$

$$(5.3.20b) \quad X_{\psi}^{\text{Lop}} a_{\psi}^n + D_{\psi}^{\text{Lop}} \partial_{\Theta} (a_{\psi}^1 a_{\psi}^n) + \mathbf{w}_{\psi} \mathbb{F}_{\psi}^{\text{per}} [\partial_{\Theta} a_{\psi}^1, \partial_{\Theta} a_{\psi}^n] = H_{\psi}^n + K_{\psi}^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\Theta} (a_{\psi}^k a_{\varphi}^{n-k}),$$

coupled with the initial conditions

$$(5.3.21) \quad (a_{\varphi}^n)_{|t=0} = 0, \quad (a_{\psi}^n)_{|t=0} = 0.$$

The strategy to solve the above system of equations (5.3.17), (5.3.19), (5.3.20) and (5.3.21) is to apply a Cauchy-Kovalevskaya theorem such as Theorem 5.3.1 to interior system (5.3.17), (5.3.19), seen as a propagation equation in the normal variable. In order to do that, we need the boundary terms in (5.3.19) to be analytical with respect to all variables (even with respect to time). For the first toy model, in Proposition 5.3.9, we obtained only continuity with respect to time. Therefore we need to refine this result to obtain analyticity with respect to all variables. In the next part we define functional spaces which will be used for this purpose.

### 5.3.5 Additional functional framework

#### Functional spaces

We define two different types of spaces, which all are spaces of functions defined on  $\omega_T \times \mathbb{T}$ , analytical with respect to all variables  $(t, y, \Theta)$ . The first ones, which will be denoted by  $E_{\rho}$  and



$\mathbf{E}_\rho$ , will be used to solve boundary equations (5.3.20)-(5.3.21), which will be viewed as a fixed point problem in  $\mathbf{E}_\rho$ . The second one, denoted by  $X_r, \mathbf{X}_r$ , are the one fitted for interior system (5.3.17)-(5.3.19), where equation (5.3.17) will be seen as a differential equation with values in  $\mathbf{X}_r$ . Features and relations of this spaces are summarized in Figure 5.3. In addition to defining the functional spaces, we have to describe action of differentiation on it, and to prove that every function of  $\mathbf{E}_\rho$  is in  $\mathbf{X}_r$ .

Previously introduced spaces  $Y_s, s \in (0, 1)$ , are used to defined spaces  $E_\rho, \rho \in (0, 1)$ . If  $I \subset \mathbb{R}$  is an interval and  $E$  a Banach space, we denote by  $C^\omega(I, E)$  the space of analytic functions from  $I$  to  $E$ .

**Definition 5.3.11.** For  $\rho \in (0, 1)$ , the space  $\tilde{E}_\rho$  is defined as

$$\tilde{E}_\rho := \bigcap_{s \in (0,1)} C^\omega\left(\left(-\rho(1-s), \rho(1-s)\right), Y_s\right).$$

In the next definition we use the *Catalan numbers* (see [Com74]), defined by, for  $n \geq 0$ ,

$$\mathfrak{C}_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

They satisfy, for  $n \geq 0$ ,

$$(5.3.22) \quad \sum_{i=0}^n \mathfrak{C}_i \mathfrak{C}_{n-i} = \mathfrak{C}_{n+1}.$$

The Catalan numbers appear in the power series expansion of  $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ :

$$(5.3.23) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{(n+1)! \mathfrak{C}_n}{4^n} x^n, \quad \forall |x| < 1.$$

Next definition takes inspiration from the method of majoring series, see for example [Joh91, Chapter II], since, in this formalism, it requires for a function to admit a dilatation of  $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$  as a majoring series.

**Definition 5.3.12.** For  $\rho \in (0, 1)$ , the space  $E_\rho$  is defined as the set of functions  $a$  of  $\tilde{E}_\rho$  such that there exists  $M > 0$  such that for all  $s \in (0, 1)$  and  $\nu \in \mathbb{N}$ ,

$$(5.3.24) \quad \|\partial_t^\nu a(0)\|_{Y_s} \leq \frac{M}{(1-s)^{\nu+1}} \frac{(\nu+1)! \mathfrak{C}_\nu}{(4\rho)^\nu}.$$

The infimum of all  $M$  satisfying condition (5.3.24) is denoted by  $\|a\|_{E_\rho}$ .

If  $a$  is in  $E_\rho$  for some  $\rho \in (0, 1)$ , then, for  $s \in (0, 1)$ , for  $|t| < \rho(1-s)$ , by expanding  $a$  in power series with respect to  $t$  at 0, using estimate (5.3.24) and the power series expansion of  $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ , we get

$$\|a(t)\|_{Y_s} \leq \frac{\|a\|_{E_\rho}}{1-s} \left(1 - \frac{|t|}{\rho(1-s)}\right)^{-1/2}.$$

We find here the formulation of [BG78].

Since we work with couples of sequences of functions, we define a space accordingly, and we specify the norm used on the product space.

**Definition 5.3.13.** For  $\rho \in (0, 1)$ , the space  $\mathbf{E}_\rho$  is defined as the set of sequences  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $E_\rho$  such that

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{E}_\rho}^2 := \sum_{n \geq 1} e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*} \|a_n\|_{E_\rho}^2 < +\infty.$$

For  $\rho \in (0, 1)$ , the norm on the product space  $\mathbf{E}_\rho^2$  is defined, for  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{E}_\rho^2$ , as

$$\|(\mathbf{a}, \mathbf{b})\|_{\mathbf{E}_\rho^2}^2 := \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{E}_\rho}^2 + \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho}^2.$$

Spaces  $E_\rho$  and  $\mathbf{E}_\rho$  are not normed algebras, and neither do they satisfy a derivation property such as (5.3.7). Indeed, for a function  $a$  of  $E_\rho$  with  $\rho \in (0, 1)$ , we have, by Lemma 5.3.3, for  $0 < s' < s < 1$ ,

$$\|\partial_t^\nu \partial_\Theta a(0)\|_{Y_{s'}} \leq \frac{1}{s - s'} \|\partial_t^\nu a(0)\|_{Y_s} \leq \frac{1}{s - s'} \frac{\|a\|_{E_\rho}}{(1 - s)^{\nu+1}} \frac{(\nu + 1)! \mathfrak{C}_\nu}{(4\rho)^\nu}.$$

To obtain an estimate for (5.3.24), it seems that we should have the existence of  $C > 0$  such that for all  $0 < s' < s < 1$  and  $\nu \geq 0$ ,

$$\frac{1}{(s - s')(1 - s)^{\nu+1}} \leq \frac{C}{(1 - s')^{\nu+1}},$$

which is false. However, as we shall see later, estimating  $t \mapsto \int_0^t \partial_\Theta a(s) ds$  instead of  $\partial_\Theta a$  could solve the problem. This is what is referred to as *regularization by integration in time*, see [Uka01; Mor20]. These spaces seem well suited to prove existence of solutions to boundary system (5.3.20), analytical with respect to all variables, but the absence of above mentioned properties prevents to apply a Cauchy-Kovalevskaya theorem with these spaces for interior system. This is why we need to define other, more appropriate spaces.

Spaces for interior equations are spaces in  $(t, y, \Theta)$  variables since interior equations will be seen as propagation equation in  $x_d$ , valued in these spaces. In the following,  $H^{d^*}$  denotes the Sobolev space  $H^{d^*}(\mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_\Theta)$  of regularity  $d^*$ . Recall that  $d^*$  has been chosen such that  $d^* > \tilde{m}_0 + 2 + (d + 1)/2$ , where  $\tilde{m}_0$  is the real nonnegative number of Lemma 5.3.7. The next definition is based on the classical way to characterize analytic functions. For a  $(d + 1)$ -tuple  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ , notation  $\alpha!$  refers to  $\alpha! := \alpha_0! \cdots \alpha_d!$ .

**Definition 5.3.14.** Consider  $\rho \in (0, 1)$ . For  $r \in (0, 1)$ , the space  $X_r$  is defined as the set of smooth functions  $a$  of  $(t, y, \Theta) \in [-\rho/2, \rho/2] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}$  with values in  $\mathbb{C}$  such that there exists  $M > 0$  such that for every  $\alpha$  in  $\mathbb{N}^{d+1}$ ,

$$\|\partial_{t,y,\Theta}^\alpha a(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}} \leq \frac{M\alpha!}{r^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)}.$$

The infimum of such  $M > 0$  is denoted by  $\|a\|_{X_r}$ .

Note that in the previous definition, the space  $X_r$  depends on the fixed constant  $\rho \in (0, 1)$ , but we chose not to include this dependence in the notation since in the following  $\rho$  will be fixed. The time interval of the form  $[-\rho/2, \rho/2]$  is required because, in the following, functions of  $X_r$  will come from functions of  $E_\rho$ , which are defined on time intervals  $(-\rho(1 - s), \rho(1 - s))$  for  $s \in (0, 1)$ , so we choose arbitrarily  $s = 1/2$ . Analogously as for  $E_\rho$ , we define a space for sequences of  $X_r$ .

**Definition 5.3.15.** For  $r \in (0, 1)$ , the space  $\mathbf{X}_r$  is defined as the set of sequences  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $X_r$  such that

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r}^2 := \sum_{n \geq 1} e^{2rn} \langle n \rangle^{2d^*} \|a_n\|_{X_r}^2 < +\infty.$$

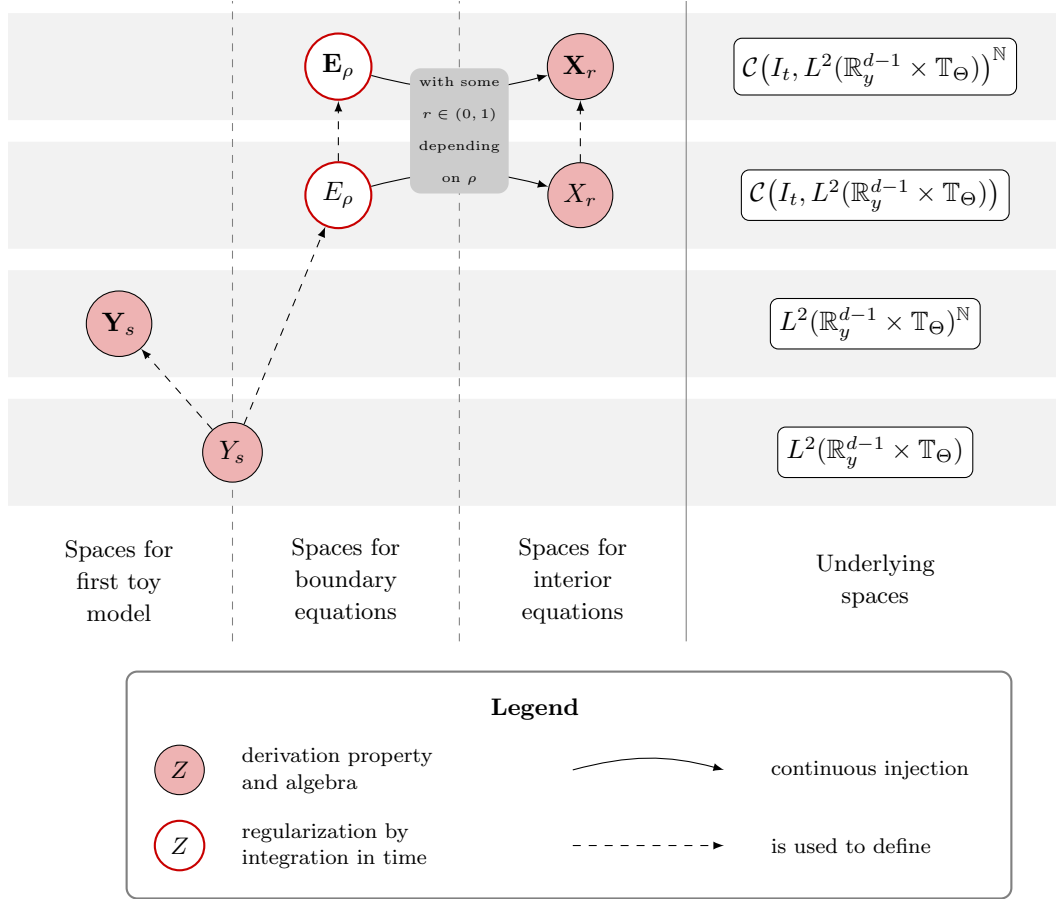


Figure 5.3 – Features of functional spaces and links between them

For  $r \in (0, 1)$ , the norm on the product space  $\mathbf{X}_r^6$  is defined, for  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6) \in \mathbf{X}_r^6$ , as

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^6}^2 := \|\mathbf{a}_1\|_{\mathbf{X}_r}^2 + \dots + \|\mathbf{a}_6\|_{\mathbf{X}_r}^2.$$

The following result asserts that, for every  $\rho \in (0, 1)$ , there exists  $r \in (0, 1)$  such that space  $\mathbf{E}_\rho$  is continuously injected in  $\mathbf{X}_r$ , with a constant independent of  $\rho$ . The proof is recalled here for the sake of clarity.

**Lemma 5.3.16.** *There exists  $C > 0$ , such that, for  $\rho \in (0, 1)$ , if  $\mathbf{a}$  is in  $\mathbf{E}_\rho$  then there exists  $r \in (0, 1)$  such that  $\mathbf{a}$  belongs to  $\mathbf{X}_r$  (for the same  $\rho$ ) and, furthermore,*

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r} \leq C \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{E}_\rho}.$$

*Proof.* Let  $\mathbf{a} = (a^n)_{n \geq 1}$  be in  $\mathbf{E}_\rho$  for some  $\rho \in (0, 1)$ . For  $\alpha = (\alpha_0, \alpha', \beta) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}, \beta)$  in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{d-1} \times \mathbb{N}$ , we have, for  $s \in (0, 1)$  and  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|\partial_{t,y,\Theta}^\alpha a^n(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{d-1}^{2\alpha_{d-1}} \lambda^{2\beta} \langle (\xi, \lambda) \rangle^{2d^*} \left| \partial_t^{\alpha_0} \widehat{a}_\lambda^n(0, \xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha'!^2 \beta!^2}{s^{2(|\alpha'| + \beta)}} e^{2s|(\xi, \lambda)|} \langle (\xi, \lambda) \rangle^{2d^*} \left| \partial_t^{\alpha_0} \widehat{a}_\lambda^n(0, \xi) \right|^2 d\xi \\ &= \frac{\alpha'!^2 \beta!^2}{s^{2(|\alpha'| + \beta)}} \|\partial_t^{\alpha_0} a^n(0)\|_{Y_s}^2, \end{aligned}$$

using the inequality

$$\frac{(s\xi)^{\alpha'}(s\lambda)^\beta}{\alpha'!\beta!} \leq e^{s|(\xi,\lambda)|}.$$

Since  $a^n$  is in  $E_\rho$  (because  $\mathbf{a}$  is in  $\mathbf{E}_\rho$ ), we therefore have

$$\left\| \partial_{t,y,\Theta}^\alpha a^n(0, \cdot, \cdot) \right\|_{H^{d^*}} \leq \frac{\alpha'!\beta!}{s^{|\alpha'|+\beta}} \frac{\|a^n\|_{E_\rho} (\alpha_0 + 1)! \mathfrak{C}_{\alpha_0}}{(1-s)^{\alpha_0+1} (4\rho)^{\alpha_0}} \leq \frac{\alpha'!\beta!}{s^{|\alpha'|+\beta}} \frac{C \|a^n\|_{E_\rho} \alpha_0!}{(1-s)^{\alpha_0+1} (3\rho)^{\alpha_0}}$$

using  $(\alpha_0 + 1) \mathfrak{C}_{|\alpha_0|}/(4\rho)^{\alpha_0} \leq C/(3\rho)^{\alpha_0}$ . Finally, we have, if  $s \leq \min(\rho, 2/3)$ ,

$$\left\| \partial_{t,y,\Theta}^\alpha a^n(0, \cdot, \cdot) \right\|_{H^{d^*}} \leq \frac{\alpha!}{s^{|\alpha|}} \frac{C \|a^n\|_{\mathbf{E}_\rho}}{3} \leq \frac{C \|a^n\|_{\mathbf{E}_\rho} \alpha!}{s^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)},$$

with  $s' < s$ , because  $s'^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1) \leq C s^{|\alpha|}$ . Therefore,

$$(5.3.25) \quad \|a^n\|_{X_{s'}} \leq C \|a^n\|_{E_\rho},$$

with a constant  $C$  which does not depend on  $n \geq 1$ . Therefore, multiplying inequality (5.3.25) by  $e^{2s'n} \langle n \rangle^{2d^*}$  and summing over  $n \geq 1$  leads to

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_{s'}} \leq C \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{E}_\rho},$$

so  $\mathbf{a}$  belongs to  $\mathbf{X}_r$  with  $r < \min(\rho, 2/3)$  which depends only on  $\rho$ , concluding the proof.  $\square$

Following results state that partial derivatives with respect to  $t, y, \Theta$  act on  $\mathbf{X}_r$  in the same way as partial derivatives with respect to  $y, \Theta$  act on  $Y_s$ , and that spaces  $\mathbf{X}_r$  satisfy an algebra property. For the sake of completeness, we recall the proof of these classical results.

**Lemma 5.3.17.** *There exists  $C > 0$  such that, for  $0 \leq r' < r \leq 1$ , for  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{X}_r$  and for  $e_j$  in  $\mathbb{N}^{d+1}$  with  $|e_j| = 1$ , function  $\partial_{t,y,\Theta}^{e_j} \mathbf{a}$  belongs to  $\mathbf{X}_{r'}$  and satisfies*

$$\left\| \partial_{t,y,\Theta}^{e_j} \mathbf{a} \right\|_{\mathbf{X}_{r'}} \leq \frac{C}{r-r'} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r}.$$

*Proof.* In the same way as for the previous Lemma 5.3.16, proving the estimate for the space  $X_r$  leads to the one for  $\mathbf{X}_r$  and the associate result, by multiplying by  $e^{2s'n} \langle n \rangle^{2d^*}$  and summing over  $n \geq 1$ . Let  $a$  be in  $X_r$ . Without loss of generality, we make the proof for  $e_j = e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . For  $\alpha = (\alpha_0, \alpha', \beta)$  in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{d-1} \times \mathbb{N}$ , we have, by definition of  $X_r$ -norm,

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{t,y,\Theta}^\alpha \partial_{t,y,\Theta}^{e_0} a(0, \cdot, \cdot) \right\|_{H^{d^*}} &\leq \|a\|_{X_r} \frac{(\alpha + e_0)!}{r^{|\alpha|+1} (|\alpha + e|^{2d+1} + 1)} \\ &= \|a\|_{X_r} \frac{\alpha!}{(r')^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)} \frac{(|\alpha|^{2d+1} + 1)}{(|\alpha + e|^{2d+1} + 1)} (\alpha_0 + 1) \frac{(r')^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|+1}}. \end{aligned}$$

Since  $(|\alpha|^{2d+1} + 1)/(|\alpha + e|^{2d+1} + 1)$  is bounded uniformly with respect to  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$  and since

$$(\alpha_0 + 1) \frac{(r')^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|+1}} \leq (|\alpha| + 1) \frac{(r')^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|+1}} \leq \frac{1}{r-r'},$$

the result follows.  $\square$

**Lemma 5.3.18.** *For  $r \in (0, 1)$ , spaces  $X_r$  and  $\mathbf{X}_r$  are Banach algebras (the latter for the convolution on sequences), up to a positive constant, that is, there exists  $C > 0$  (independent of*

$r \in (0, 1)$ ), such that for  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  in  $\mathbf{X}_r$ , the function  $\mathbf{ab}$  belongs to  $\mathbf{X}_r$  and we have

$$\|\mathbf{ab}\|_{\mathbf{X}_r} \leq C \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r} \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{X}_r},$$

and the analogous estimate for  $X_r$ .

*Proof.* We make the proof for spaces  $X_r$ , and the result for  $\mathbf{X}_r$  follows using the same arguments as in the proof of Lemma 5.3.4. Let  $r$  be in  $(0, 1)$  and consider  $a, b$  in  $X_r$ . We need to show that there exists  $C > 0$  such that for all  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ , we have

$$\|\partial_{t,y,\Theta}^\alpha (ab)(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}} \leq \frac{C \|a\|_{X_r} \|b\|_{X_r} \alpha!}{r^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)}$$

So consider  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ . We have, since  $d^* > d/2$ , so  $H^{d^*}$  is an algebra,

$$\begin{aligned} \|\partial_{t,y,\Theta}^\alpha (ab)(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}} &\leq C \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial_{t,y,\Theta}^\beta a(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}} \|\partial_{t,y,\Theta}^{\alpha-\beta} b(0, \cdot, \cdot)\|_{H^{d^*}} \\ &\leq C \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\|a\|_{X_r} \beta!}{r^{|\beta|} (|\beta|^{2d+1} + 1)} \frac{\|b\|_{X_r} (\alpha - \beta)!}{r^{|\alpha-|\beta||} (|\alpha - \beta|^{2d+1} + 1)} \\ &= \frac{C \|a\|_{X_r} \|b\|_{X_r} \alpha!}{r^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)} \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{(|\alpha|^{2d+1} + 1)}{(|\beta|^{2d+1} + 1) (|\alpha - \beta|^{2d+1} + 1)}, \end{aligned}$$

and the result follows since  $\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{(|\alpha|^{2d+1} + 1)}{(|\beta|^{2d+1} + 1) (|\alpha - \beta|^{2d+1} + 1)}$  is bounded uniformly with respect to  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ .  $\square$

We summarize the main features of the functional spaces introduced in this section in Figure 5.3. The concept of *regularization by integration in time* is detailed below, in Lemma 5.3.21.

### Specifications on the toy model and main result

In view of the functional spaces defined above, we are able to make precise the toy system (5.3.17)-(5.3.19)-(5.3.20)-(5.3.21).

Boundary terms  $g_{\zeta,j}^n$  appearing in (5.3.19) are taken such that, if we define  $\mathbf{g}_{\zeta,j} := (g_{\zeta,j}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , then function  $\mathbf{g}_{\zeta,j}$  is in  $\mathbf{X}_1$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ . Analogously, source terms  $H_\zeta^n$  of boundary equations (5.3.20) are taken such that, defining  $\mathbf{H}_\zeta := (H_\zeta^n)_{n \geq 1}$ , sequence  $\mathbf{H}_\zeta$  is in  $\mathbf{E}_1$  for  $\zeta = \varphi, \psi$ . Once again, assumption on  $\mathbf{H}_\zeta$  imposing it to be analytical with respect to all its variables is stronger than requiring  $H$  and  $G$  to be in  $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ . We also denote by  $\gamma_0 > 0$  a positive constant such that, for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ ,

$$(5.3.26a) \quad |\mathbf{v}_{\zeta,j}| \leq \gamma_0, \quad |D_{\zeta,j}| \leq \gamma_0 \quad \text{and} \quad |K_{\zeta,j}| \leq \gamma_0,$$

for  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$(5.3.26b) \quad |\mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0, \quad |D_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0, \quad |\mathbf{w}_\zeta| \leq \gamma_0^{1/2}, \quad \text{and} \quad |K_\zeta^{\text{Lop}}| \leq \gamma_0,$$

for  $r \in (0, 1)$  and for  $\sigma, \tau$  in  $X_r$ , for  $\zeta_1, \zeta_2 = \varphi, \psi, \nu$  and  $j_1, j_2 = 1, 3$ ,

$$(5.3.26c) \quad \left\| \mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} [\sigma, \tau] \right\|_{X_r} \leq \gamma_0 \|\sigma\|_{X_r} \|\tau\|_{X_r},$$

and, for  $s \in (0, 1)$ , for  $u, v$  in  $Y_s$ , and for  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$(5.3.26d) \quad \left\| \mathbb{F}_\zeta^{\text{per}} [\partial_\Theta u, \partial_\Theta v] \right\|_{Y_s} \leq \gamma_0^{1/2} \|u\|_{Y_s} \|v\|_{Y_s}.$$

All estimates relies on the fact that scalars  $D_{\zeta,j}$ ,  $K_{\zeta,j}$ ,  $D_{\zeta}^{\text{Lop}}$ ,  $\mathbf{w}_{\zeta}$  and  $K_{\zeta}^{\text{Lop}}$ , vectors  $\mathbf{v}_{\zeta,j}$  and  $\mathbf{v}_{\zeta}^{\text{Lop}}$  and operators  $\mathbb{J}_{\zeta_2,j_2}^{\zeta_1,j_1}$  and  $\mathbb{F}_{\zeta}^{\text{Per}}$  are indexed by finite sets. Estimate (5.3.26d) is the result of Proposition 5.3.6, and (5.3.26c) is the result of the following lemma.

**Lemma 5.3.19.** *There exists a constant  $C > 0$  such that, for  $r \in (0, 1)$ , for  $\sigma, \tau$  in  $X_r$ ,  $\zeta_1, \zeta_2$  in  $\{\varphi, \psi\}$  and  $j_1, j_2$  in  $\{1, 3\}$ , we have*

$$(5.3.27) \quad \left\| \mathbb{J}_{\zeta_1,j_1}^{\zeta_2,j_2}[\sigma, \tau] \right\|_{X_r} \leq C \|\sigma\|_{X_r} \|\tau\|_{X_r}.$$

*Proof.* Without loss of generality, we make the proof for  $\zeta_1 = \zeta_2 = \varphi$  and  $j_1 = j_2 = 1$ . Recall that  $\mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}$  is defined by (5.3.18) as

$$\mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}[\sigma, \tau] = J_{\varphi,1}^{\varphi,1} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sigma_{\lambda} \tau_{\lambda} e^{i\lambda\Theta}.$$

For  $\alpha = (\alpha', \alpha_d)$  in  $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ , we want to estimate in  $H^{d^*}$  the following function

$$(5.3.28) \quad \partial_{t,y,\Theta}^{\alpha} \mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}[\sigma, \tau](0, \cdot, \cdot) = J_{\varphi,1}^{\varphi,1} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \sum_{\beta' \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta'} (i\lambda)^{\alpha_d} \partial_{t,y}^{\beta'} \sigma_{\lambda}(0, \cdot) \partial_{t,y}^{\alpha' - \beta'} \tau_{\lambda}(0, \cdot) e^{i\lambda\Theta}.$$

We prove now an intermediate result. For every function  $u, v$  defined on  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}$ , whose Fourier series expansions read

$$u(y, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} u_{\lambda}(y) e^{i\lambda\Theta}, \quad v(y, \Theta) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} v_{\lambda}(y) e^{i\lambda\Theta},$$

we have,

$$(5.3.29) \quad \begin{aligned} & \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} u_{\lambda}(y) v_{\lambda}(y) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widehat{u}_{\lambda}(\eta) \widehat{v}_{\lambda}(\xi - \eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*}}{\langle (\lambda, \eta) \rangle^{2d^*} \langle (\lambda, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta \right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle (\lambda, \eta) \rangle^{2d^*} |\widehat{u}_{\lambda}(\eta)|^2 \langle (\lambda, \xi - \eta) \rangle^{2d^*} |\widehat{v}_{\lambda}(\xi - \eta)|^2 d\eta d\xi \\ &\leq C \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} u_{\lambda}(y) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^{d^*}}^2 \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} v_{\lambda}(y) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^{d^*}}^2, \end{aligned}$$

with a constant  $C > 0$  independent on  $u$  and  $v$ , since  $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\langle (\lambda, \xi) \rangle^{2d^*}}{\langle (\lambda, \eta) \rangle^{2d^*} \langle (\lambda, \xi - \eta) \rangle^{2d^*}} d\eta$  is bounded uniformly with respect to  $(\lambda, \xi)$ . We have, according to (5.3.28),

$$(5.3.30) \quad \begin{aligned} & \left\| \partial_{t,y,\Theta}^{\alpha} \mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}[\sigma, \tau](0, \cdot, \cdot) \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ &\leq (J_{\varphi,1}^{\varphi,1})^2 \sum_{\beta' \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta'} \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} (i\lambda)^{\alpha_d} \partial_{t,y}^{\beta'} \sigma_{\lambda}(0, \cdot) \partial_{t,y}^{\alpha' - \beta'} \tau_{\lambda}(0, \cdot) e^{i\lambda\Theta} \right\|, \end{aligned}$$

so, applying inequality (5.3.29) to quantity (5.3.30) we get

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{t,y,\Theta}^\alpha \mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}[\sigma, \tau](0, \dots) \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ & \leq C (J_{\varphi,1}^{\varphi,1})^2 \sum_{\beta' \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta'} \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (i\lambda)^{\alpha_d} \partial_{t,y}^{\beta'} \sigma_\lambda(0, y) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ & \quad \times \left\| (y, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \partial_{t,y}^{\alpha' - \beta'} \tau_\lambda(0, y) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ & = C (J_{\varphi,1}^{\varphi,1})^2 \sum_{\beta' \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta'} \left\| \partial_{t,y,\Theta}^{(\beta', \alpha_d)} \sigma(0, \dots) \right\|_{H^{d^*}}^2 \left\| \partial_{t,y,\Theta}^{(\alpha' - \beta', 0)} \tau(0, \dots) \right\|_{H^{d^*}}^2. \end{aligned}$$

Therefore, by definition of the  $X_r$ -norm,

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{t,y,\Theta}^\alpha \mathbb{J}_{\varphi,1}^{\varphi,1}[\sigma, \tau](0, \dots) \right\|_{H^{d^*}}^2 \\ & \leq C \sum_{\beta' \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta'} \frac{\|\sigma\|_{X_r} \beta'! \alpha_d!}{r^{|\beta'| + \alpha_d} (|\beta', \alpha_d|^{2d+1} + 1)} \frac{\|b\|_{X_r} (\alpha' - \beta')!}{r^{|\alpha' - \beta'|} (|\alpha' - \beta'|^{2d+1} + 1)} \\ & = \frac{C \|a\|_{X_r} \|b\|_{X_r} \alpha!}{r^{|\alpha|} (|\alpha|^{2d+1} + 1)} \sum_{\beta' \leq \alpha'} \frac{(|\alpha|^{2d+1} + 1)}{(|\beta', \alpha_d|^{2d+1} + 1) (|\alpha' - \beta'|^{2d+1} + 1)}, \end{aligned}$$

and the result follows since  $\sum_{\beta' \leq \alpha'} \frac{(|\alpha|^{2d+1} + 1)}{(|\beta', \alpha_d|^{2d+1} + 1) (|\alpha' - \beta'|^{2d+1} + 1)}$  is bounded uniformly with respect to  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ .  $\square$

The rest of the section is devoted to the proof of the following existence and uniqueness result.

**Theorem 5.3.20.** *For every  $M_0, M_1 > 0$ , there exist  $0 < r_1 < 1$  and  $\delta > 0$  such that for every  $\mathbf{g}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^6$  and  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_1^2$  satisfying respectively  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{E}_1^2} < M_0$  and  $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}_{r_1}^6} < M_1$ , system of equations (5.3.17), (5.3.19), (5.3.20) and (5.3.21) admits a unique solution given by  $\sigma$  in  $\mathcal{C}^1((-\delta(r_1 - r), \delta(r_1 - r)), \mathbf{X}_r^6)$  for each  $0 < r < r_1$  and  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^2$ , where we have denoted  $\sigma := (\sigma_{\varphi,1}^n, \sigma_{\varphi,3}^n, \sigma_{\psi,1}^n, \sigma_{\psi,3}^n, \sigma_{\nu,1}^n, \sigma_{\nu,3}^n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{g} := (\mathbf{g}_{\varphi,1}, \mathbf{g}_{\varphi,3}, \mathbf{g}_{\psi,1}, \mathbf{g}_{\psi,3}, \mathbf{g}_{\nu,1}, \mathbf{g}_{\nu,3})$  and  $\mathbf{H} := (\mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_\psi)$ .*

To prove this result, we will start by proving existence for boundary system (5.3.20)-(5.3.21), with the Banach fixed point theorem applied in a closed ball of  $\mathbf{E}_\rho^2$  for some  $\rho \in (0, 1)$ . We will therefore have a solution  $\mathbf{a}$  of (5.3.20)-(5.3.21) analytical both with respect to space and time. The strategy is to write equations (5.3.20) as a fixed point, by the change of variables  $\mathbf{b} := \partial_t \mathbf{a}$ , to obtain a problem like the one of [BG78]. This will allow us to prove that the operator at stake is a contraction, using the phenomenon of regularization by integration in time. Then we proceed with the existence of solution for interior system (5.3.17)-(5.3.19), by applying a classical Cauchy-Kovalevskaya result, in  $\mathbf{X}_r^6$  for some  $r \in (0, 1)$ . For this purpose, equations (5.3.17) will be seen as propagation equations in the normal variable. Verifying assumptions of Theorem 5.3.1 for interior equations presents no difficulty. Finally Lemma 5.3.16 will be used to assert that the obtained solution  $\mathbf{a}$  of (5.3.20)-(5.3.21) in  $\mathbf{E}_\rho^2$  is actually in  $\mathbf{X}_r^2$  for some  $r \in (0, 1)$ .

### 5.3.6 Time analyticity on the boundary and Cauchy-Kovalevskaya theorem for incoming equations

#### Existence and time analyticity for boundary equations

This part is devoted to solving boundary system (5.3.20)-(5.3.21). The goal is to obtain solutions which are analytical not only with respect to  $(y, \Theta)$  but also with respect to time. In

the same way as for the first toy model, system (5.3.20)-(5.3.21) can be displayed in the form

$$(5.3.31) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{a} = L \mathbf{a} - \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \mathbb{F}^{\text{per}}(\partial_\Theta \mathbf{a}, \partial_\Theta \mathbf{a}) + \mathbf{H} + \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}), \\ \mathbf{a}(0) = 0, \end{cases}$$

where  $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\psi) := (a_\varphi^n, a_\psi^n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{H} := (\mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_\psi)$ , and, if  $\mathbf{c} := (c_\varphi^n, c_\psi^n)_{n \geq 1}$ ,

$$\begin{aligned} L \mathbf{a} &:= (\mathbf{v}_\varphi^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y a_\varphi^n, \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y a_\psi^n)_{n \geq 1}, \\ \mathbf{D}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= (D_\varphi^{\text{Lop}} a_\varphi^1 a_\varphi^n, D_\psi^{\text{Lop}} a_\psi^1 a_\psi^n)_{n \geq 1}, \\ \mathbb{F}^{\text{per}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= (\mathbf{w}_\varphi \mathbb{F}_\varphi^{\text{per}}[a_\varphi^1, c_\varphi^n], \mathbf{w}_\psi \mathbb{F}_\psi^{\text{per}}[a_\psi^1, c_\psi^n])_{n \geq 1}, \\ \mathbf{K}^{\text{Lop}}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &:= \left( K_\varphi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\varphi^k c_\psi^{n-k}), K_\psi^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (a_\varphi^k c_\psi^{n-k}) \right)_{n \geq 1}. \end{aligned}$$

Setting  $\mathbf{b} := \partial_t \mathbf{a}$ , system (5.3.31) is equivalent to

$$(5.3.32) \quad \begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= L \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma - \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad - \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) + \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) + \mathbf{H}(t), \end{aligned}$$

with  $\mathbf{a}(t) = \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma$ . The aim is to solve equation (5.3.32) with a fixed point theorem in  $\mathbf{E}_\rho^2$ , so we start by proving the following key estimates, which will allow us to prove contraction for the operator at stake.

Estimates (5.3.33a), (5.3.33b) and (5.3.33d) below constitute what we call *regularization by integration in time*, where composing derivation in  $(y, \Theta)$  with integration in time leads to no loss of regularity. This phenomenon was introduced by [Uka01], and can also be found in [Mét09; Mor20].

**Lemma 5.3.21.** *There exists  $C > 0$  such that for  $\rho \in (0, 1)$ , for  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$ , the following estimates hold*

$$(5.3.33a) \quad \left\| \left\| t \mapsto L \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right\| \right\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \leq C \rho \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2},$$

$$(5.3.33b) \quad \left\| \left\| t \mapsto \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right) \right\| \right\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \leq C \rho^2 \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{E}_\rho^2},$$

$$(5.3.33c) \quad \left\| \left\| t \mapsto \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right) \right\| \right\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \leq C \rho^2 \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{E}_\rho^2},$$

$$(5.3.33d) \quad \left\| \left\| t \mapsto \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right) \right\| \right\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \leq C \rho^2 \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{E}_\rho^2}.$$

*Proof.* First note that since  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  are in  $\mathbf{E}_\rho^2$ , functions which we wish to estimate are in  $(\tilde{E}_\rho^{\text{N}^*})^2$ . In all this proof, we denote

$$\mathbf{b} := (\mathbf{b}_\varphi, \mathbf{b}_\psi) := (b_\varphi^n, b_\psi^n)_{n \geq 1}, \quad \mathbf{c} := (\mathbf{c}_\varphi, \mathbf{c}_\psi) := (c_\varphi^n, c_\psi^n)_{n \geq 1}.$$

For  $\nu \geq 1$  and  $s \in (0, 1)$ , we define  $s_\nu := s + \frac{1}{\nu+1}(1-s)$  which is such that  $s_\nu > s$  and satisfy, for



$\nu \geq 1$ ,

$$(5.3.34) \quad \frac{1-s}{s_\nu-s} = \nu+1 \quad \text{and} \quad \frac{1-s}{1-s_\nu} = 1 + \frac{1}{\nu}.$$

We proceed with the proof of estimate (5.3.33a) dealing with function  $\mathbf{V} := L \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma$ , and we denote  $\mathbf{V} := (\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\psi) := (V_\varphi^n, V_\psi^n)_{n \geq 1}$ . According to Definition 5.3.12, the aim is to estimate, for  $s \in (0, 1)$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $\zeta = \varphi, \psi$  and  $n \geq 1$ , the  $Y_s$ -norm of  $\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)$ . Fix  $s \in (0, 1)$ ,  $\zeta = \varphi, \psi$  and  $n \geq 1$ , and recall that

$$V_\zeta^n(t) = \mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y \int_0^t b_\zeta^n(\sigma) d\sigma.$$

Therefore we have  $V_\zeta^n(0) = 0$  and, for  $\nu \geq 1$ ,

$$\partial_t^\nu V_\zeta^n(0) = \mathbf{v}_\zeta^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y \partial_t^{\nu-1} b_\zeta^n(0),$$

so, for  $s \in (0, 1)$ , using (5.3.7) with  $0 < s < s_\nu \leq 1$ , estimate (5.3.26a) and definition (5.3.24) of  $E_\rho$ -norm,

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)\|_{Y_s} &\leq \gamma_0 \|\nabla_y \partial_t^{\nu-1} b_\zeta^n(0)\|_{Y_s} \leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \|\partial_t^{\nu-1} b_\zeta^n(0)\|_{Y_{s_\nu}} \\ &\leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \frac{1}{(1-s_\nu)^\nu} \frac{\nu! \mathfrak{C}_{\nu-1}}{(4\rho)^{\nu-1}} \|b_\zeta^n\|_{E_\rho}. \end{aligned}$$

Therefore, using relations (5.3.34),

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)\|_{Y_s} &\leq C \gamma_0 \|b_\zeta^n\|_{E_\rho} \frac{1}{(1-s)^{\nu+1}} \frac{(\nu+1) \nu! \mathfrak{C}_{\nu-1}}{(4\rho)^{\nu-1}} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \\ &\leq C \rho \gamma_0 \|b_\zeta^n\|_{E_\rho} \frac{(\nu+1)! \mathfrak{C}_\nu}{(1-s)^{\nu+1} (4\rho)^\nu}, \end{aligned}$$

so that  $\|V_\zeta^n\|_{E_\rho} \leq C \rho \gamma_0 \|b_\zeta^n\|_{E_\rho}$ . Since this estimate is independent of  $n, \zeta$ , multiplying it by  $e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*}$  and summing over  $n \geq 1$  leads to the analogous one for  $\mathbf{E}_\rho^2$ , which reads as (5.3.33a).

For  $\mathbf{V} := \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right)$  which we decompose in  $(\tilde{E}_\rho^{\mathbb{N}^*})^2$  as  $\mathbf{V} := (\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\psi) := (V_\varphi^n, V_\psi^n)_{n \geq 1}$ , with, for  $n \geq 1$  and  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$V_\zeta^n := \partial_\Theta D_\zeta^{\text{Lop}} \int_0^t b_\zeta^1(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^t c_\zeta^n(\sigma) d\sigma,$$

for  $n \geq 1$  and  $\zeta = \varphi, \psi$ , we compute  $V_\zeta^n(0) = \partial_t V_\zeta^n(0) = 0$ , and for  $\nu \geq 2$ ,

$$\partial_t^\nu V_\zeta^n(0) = D_\zeta^{\text{Lop}} \partial_\Theta \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \partial_t^{\mu-1} b_\zeta^1(0) \partial_t^{\nu-\mu-1} c_\zeta^n(0).$$

Therefore, for  $s \in (0, 1)$ , using (5.3.7) with  $0 < s < s_\nu \leq 1$  and estimates (5.3.26a) and (5.3.24), we have

$$\|\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)\|_{Y_s} \leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \|\partial_t^{\mu-1} b_\zeta^1(0)\|_{Y_{s_\nu}} \|\partial_t^{\nu-\mu-1} c_\zeta^n(0)\|_{Y_{s_\nu}}$$

$$\leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \frac{\|b_\zeta^1\|_{E_\rho} \|c_\zeta^n\|_{E_\rho}}{(4\rho)^{\nu-2}} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \frac{\mu! \mathfrak{C}_{\mu-1}}{(1-s_\nu)^\mu} \frac{(\nu-\mu)! \mathfrak{C}_{\nu-\mu-1}}{(1-s_\nu)^{\nu-\mu}}.$$

Again with relations (5.3.34) we get

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)\|_{Y_s} &\leq \frac{C \gamma_0 (\nu+1)}{1-s} \frac{\|b_\zeta^1\|_{E_\rho} \|c_\zeta^n\|_{E_\rho}}{(4\rho)^{\nu-2}} \frac{\nu!}{(1-s)^\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathfrak{C}_{\mu-1} \mathfrak{C}_{\nu-\mu-1} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \\ &\leq C \rho^2 \gamma_0 e \|b_\zeta^1\|_{E_\rho} \|c_\zeta^n\|_{E_\rho} \frac{(\nu+1)!}{(1-s)^{\nu+1} (4\rho)^\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathfrak{C}_{\mu-1} \mathfrak{C}_{\nu-\mu-1}. \end{aligned}$$

We can conclude using (5.3.22):

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathfrak{C}_{\mu-1} \mathfrak{C}_{\nu-\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{\nu-2} \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{C}_{\nu-2-\mu} = \mathfrak{C}_{\nu-1} \leq \mathfrak{C}_\nu.$$

Last inequality follows from relation (5.3.22) and  $\mathfrak{C}_0 = 1$ .

The proof of estimate (5.3.33c) for  $\mathbf{V} := \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right)$  follows the same argument as the previous one, but it is simpler since, according to (5.3.26d),  $\mathbb{F}_\zeta^{\text{per}}(\partial_\Theta \mathbf{a}, \partial_\Theta \mathbf{a})$  acts as a semilinear term in  $\mathbf{a}$ . It is therefore omitted.

Finally, we take interest into  $\mathbf{V} := \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right)$  which we decompose in  $(\tilde{E}_\rho^{\mathbb{N}^*})^2$  as  $\mathbf{V} =: (\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\psi) =: (V_\varphi^n, V_\psi^n)_{n \geq 1}$ , with, for  $n \geq 1$  and  $\zeta = \varphi, \psi$ ,

$$V_\zeta^n := K_\zeta^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta (b_\zeta^k, c_\zeta^{n-k})$$

For  $n \geq 1$  and  $\zeta = \varphi, \psi$ , we compute  $V_\zeta^n(0) = \partial_t V_\zeta^n(0) = 0$ , and for  $\nu \geq 2$ ,

$$\partial_t^\nu V_\zeta^n(0) = K_\zeta^{\text{Lop}} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_\Theta \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \partial_t^{\mu-1} b_\zeta^k(0) \partial_t^{\nu-\mu-1} c_\zeta^{n-k}(0),$$

so, for  $s \in (0, 1)$ , using (5.3.26b) and (5.3.7) with  $0 < s < s_\nu \leq 1$  and then (5.3.24),

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\nu V_\zeta^n(0)\|_{Y_s} &\leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \|\partial_t^{\mu-1} b_\zeta^k(0)\|_{Y_{s_\nu}} \|\partial_t^{\nu-\mu-1} c_\zeta^{n-k}(0)\|_{Y_{s_\nu}} \\ &\leq \frac{C \gamma_0}{s_\nu - s} \frac{1}{(4\rho)^{\nu-2}} \sum_{k=1}^{n-1} \|b_\zeta^k\|_{E_\rho} \|c_\zeta^{n-k}\|_{E_\rho} \\ &\quad \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \frac{\mu! \mathfrak{C}_{\mu-1}}{(1-s_\nu)^\mu} \frac{(\nu-\mu)! \mathfrak{C}_{\nu-\mu-1}}{(1-s_\nu)^{\nu-\mu}} \\ &\leq C \rho^2 \gamma_0 \frac{(\nu+1)! \mathfrak{C}_\nu}{(1-s)^{\nu+1} (4\rho)^\nu} \sum_{k=1}^{n-1} \|b_\zeta^k\|_{E_\rho} \|c_\zeta^{n-k}\|_{E_\rho}, \end{aligned}$$

using (5.3.22) as before. Therefore we get

$$\|V_\zeta^n\|_{E_\rho} \leq C \rho^2 \gamma_0 \sum_{k=1}^{n-1} \|b_\varphi^k\|_{E_\rho} \|c_\psi^{n-k}\|_{E_\rho},$$

so that, multiplying by  $e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*}$  and summing over  $n \geq 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_{\zeta=\varphi,\psi} \sum_{n \geq 1} e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*} \|V_\zeta^n\|_{E_\rho}^2 \\ & \leq C^2 \rho^4 \gamma_0^2 \sum_{\zeta=\varphi,\psi} \sum_{n \geq 1} e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \|b_\varphi^k\|_{E_\rho} \|c_\psi^{n-k}\|_{E_\rho} \right)^2 \\ & \leq C^2 \rho^4 \gamma_0^2 \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle n \rangle^{2d^*}}{\langle k \rangle^{2d^*} \langle n-k \rangle^{2d^*}} \right) \\ & \quad \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\rho k} \langle k \rangle^{2d^*} \|b_\varphi^k\|_{E_\rho}^2 e^{2\rho(n-k)} \langle n-k \rangle^{2d^*} \|c_\psi^{n-k}\|_{E_\rho}^2, \end{aligned}$$

using Cauchy-Schwarz inequality. Therefore, since  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle n \rangle^{2d^*}}{\langle k \rangle^{2d^*} \langle n-k \rangle^{2d^*}}$  is bounded uniformly with respect to  $n \geq 1$ , we get

$$\|\mathbf{V}\|_{\mathbf{E}_\rho^2}^2 = \sum_{\zeta=\varphi,\psi} \sum_{n \geq 1} e^{2\rho n} \langle n \rangle^{2d^*} \|V_\zeta^n\|_{E_\rho}^2 \leq C^2 \rho^4 \gamma_0^2 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2}^2 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{E}_\rho^2}^2,$$

which is the sought inequality (5.3.33d).  $\square$

We are now in place to prove existence for (5.3.32) (which is equivalent to (5.3.31)) in the space  $\mathbf{E}_\rho^2$ , of analytic functions with respect to  $(t, y, \Theta)$ . We follow here the method of [Uka01; Mor20].

**Proposition 5.3.22.** *For every  $M_0 > 0$ , there exists  $\rho \in (0, 1)$  such that for every  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$  satisfying  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} < M_0$ , equation (5.3.32) admits a unique solution  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$ .*

*Proof.* In all this proof, for  $R > 0$ ,  $B_\rho(0, R)$  denotes the closed ball of  $\mathbf{E}_\rho^2$  centered at 0 and of radius  $R$ . For  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$ , we denote

$$\begin{aligned} F(\mathbf{H}, \mathbf{b}) & := L \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma - \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) \\ & \quad - \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) + \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma \right) + \mathbf{H}, \end{aligned}$$

so that solving (5.3.32) amounts to find a fixed point of  $F(\mathbf{H}, \cdot) : \mathbf{b} \mapsto F(\mathbf{H}, \mathbf{b})$ . Therefore, we will prove that there exist  $R > 0$  and  $\rho \in (0, 1)$  such that for every  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$  satisfying  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} < M_0$ , the map  $F(\mathbf{H}, \cdot)$  is a contraction from the complete space  $B_\rho(0, R)$  to itself.

Consider  $M_0 > 0$  and  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$  such that  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} < M_0$ . First we need to show that there exist  $\rho \in (0, 1)$  and  $R > 0$  such that  $F(\mathbf{H}, \cdot)$  maps  $B_\rho(0, R)$  to itself. Lemma 5.3.21 asserts that  $F(\mathbf{H}, \cdot)$  is well defined from  $\mathbf{E}_\rho^2$  to itself and that it satisfies, for  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{E}_\rho^2$ ,

$$\|F(\mathbf{H}, \mathbf{b})\|_{\mathbf{E}_\rho^2} \leq C \rho \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2} + C \rho^2 \gamma_0 \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{E}_\rho^2}^2 + M_0,$$

for a new positive constant  $C > 0$  independent on  $\rho$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $M_0$  and  $\mathbf{b}$ . Therefore, setting  $R := 2M_0$ ,

for  $0 < \rho < C(\gamma_0, M_0)$ , with

$$C(\gamma_0, M_0) := \min \left( [4C\gamma_0]^{-1}, [8C\gamma_0 M_0]^{-1/2} \right),$$

the application  $F(\mathbf{H}, \cdot)$  maps the ball  $B_\rho(0, R)$  to itself.

Now we need to show that this map is a contraction, for  $\rho < C(M_0, \gamma_0)$  small enough. We compute, for  $0 < \rho < C(M_0, \gamma_0)$  and for  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  in  $B_\rho(0, R)$ ,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{H}, \mathbf{b}) - F(\mathbf{H}, \mathbf{c}) &= \\ &L \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma - \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma \right) \\ &- \partial_\Theta \mathbf{D}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right) - \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma \right) \\ &- \mathbb{F}^{\text{per}} \left( \partial_\Theta \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma, \partial_\Theta \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right) + \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t \mathbf{b}(\sigma) d\sigma, \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma \right) \\ &+ \mathbf{K}^{\text{Lop}} \left( \int_0^t (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\sigma) d\sigma, \int_0^t \mathbf{c}(\sigma) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Therefore using estimates of Lemma 5.3.21 and the fact that  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  are in  $B_\rho(0, R)$ , we get,

$$\begin{aligned} \| \| F(\mathbf{H}, \mathbf{b}) - F(\mathbf{H}, \mathbf{c}) \| \|_{\mathbf{E}_\rho^2} &\leq C \rho \gamma_0 \left( 1 + \rho (\| \mathbf{b} \|_{\mathbf{E}_\rho^2} + \| \mathbf{c} \|_{\mathbf{E}_\rho^2}) \right) \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \|_{\mathbf{E}_\rho^2} \\ &\leq C \rho \gamma_0 (1 + \rho R) \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \|_{\mathbf{E}_\rho^2}, \end{aligned}$$

up to changing the constant  $C > 0$  in every line. Thus, for  $\rho < \tilde{C}(\gamma_0, M_0)$ , with

$$\tilde{C}(\gamma_0, M_0) := \min \left( [4\gamma_0 M_0]^{-1}, [8\gamma_0 M_0^2]^{-1/2}, [2C\gamma_0(1 + 2M_0)]^{-1} \right),$$

the map  $F(\mathbf{H}, \cdot)$  is a contraction from  $B_\rho(0, R)$  to itself.

Since  $B_\rho(0, R)$  is a closed subspace of the Banach space  $\mathbf{E}_\rho^2$ , the Banach fixed-point theorem gives a unique solution to (5.3.32).  $\square$

### A Cauchy-Kovalevskaya theorem for incoming interior equations

The aim is now to prove existence of solution to (5.3.17)-(5.3.19) with the Cauchy-Kovalevskaya type Theorem 5.3.1 using the chain of Banach spaces  $(\mathbf{X}_r)_{r \in (0,1)}$ .

We start by writing system (5.3.17)-(5.3.19) in a form suited to apply Theorem 5.3.1. Up to multiplying (5.3.17) by a nonzero constant (which is the  $x_d$ -component of  $-\mathbf{v}_{\zeta,j}$ ), system (5.3.17)-(5.3.19) can be written as

$$(5.3.35) \quad \begin{cases} \partial_{x_d} \boldsymbol{\sigma} = L \boldsymbol{\sigma} - \partial_\Theta \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \partial_\Theta \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \partial_\Theta \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \\ \boldsymbol{\sigma}|_{x_d=0} = \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{g}, \end{cases}$$

where  $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_{\varphi,1}, \boldsymbol{\sigma}_{\varphi,3}, \boldsymbol{\sigma}_{\psi,1}, \boldsymbol{\sigma}_{\psi,3}, \boldsymbol{\sigma}_{\nu,1}, \boldsymbol{\sigma}_{\nu,3}) := (\sigma_{\varphi,1}^n, \sigma_{\varphi,3}^n, \sigma_{\psi,1}^n, \sigma_{\psi,3}^n, \sigma_{\nu,1}^n, \sigma_{\nu,3}^n)_{n \geq 1}$ , function  $\mathbf{a}$  is the solution to (5.3.20)-(5.3.21), function  $\tilde{\mathbf{a}}$  is defined from  $\mathbf{a}$  by  $\tilde{\mathbf{a}} := ((e_{\varphi,1} \cdot r_{\varphi,1}) \mathbf{a}_\varphi, (e_{\varphi,3} \cdot r_{\varphi,3}) \mathbf{a}_\varphi, (e_{\psi,1} \cdot r_{\psi,1}) \mathbf{a}_\psi, (e_{\psi,3} \cdot r_{\psi,3}) \mathbf{a}_\psi, 0, 0)$ , boundary term  $\mathbf{g}$  is defined as  $\mathbf{g} := (\mathbf{g}_{\varphi,1}, \dots, \mathbf{g}_{\nu,3})$ , and, if  $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{\varphi,1}^n, \dots, \tau_{\nu,3}^n)_{n \geq 1}$ ,

$$L \boldsymbol{\sigma} := (\mathbf{v}_{\varphi,1} \cdot \nabla_{t,y} \boldsymbol{\sigma}_{\varphi,1}, \dots, \mathbf{v}_{\nu,3} \cdot \nabla_{t,y} \boldsymbol{\sigma}_{\nu,3}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &:= (D_{\varphi,1} \sigma_{\varphi,1}^n \tau_{\varphi,1}^1, \dots, D_{\nu,3} \sigma_{\nu,3}^n \tau_{\nu,3}^1)_{n \geq 1}, \\ \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &:= \left( \sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \{\varphi, \psi, \nu\}} \sum_{j_1, j_2 \in \{1,3\}} \mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} [\sigma_{\zeta_1, j_1}^1, \tau_{\zeta_2, j_2}^n] \right)_{\substack{\zeta = \varphi, \psi, \nu \\ j = 1, 3 \\ n \geq 1}}, \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &:= \left( K_{\zeta, j} \sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \{\varphi, \psi, \nu\}} \sum_{j_1, j_2 \in \{1,3\}} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{\zeta_1, j_1}^k \sigma_{\zeta_2, j_2}^{n-k} \right)_{\substack{\zeta = \varphi, \psi, \nu \\ j = 1, 3 \\ n \geq 1}}, \end{aligned}$$

with new<sup>8</sup>  $\mathbf{v}_{\zeta, j}$ ,  $D_{\zeta, j}$ ,  $K_{\zeta, j}$  and  $\mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2}$ , satisfying the same assumptions as the old ones (5.3.26a) and (5.3.26c). Note that there exists a constant  $C > 0$  such that for any  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{X}_r^2$ , we have  $\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{\mathbf{X}_r^6} \leq C \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2}$ .

For  $N_0 > 0$ , denote by  $\tilde{F}$  the function of  $[-N_0, N_0] \times \mathbf{X}_r^6$  defined by, for  $|x_d| \leq N_0$  and  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}_r^6$ ,

$$\tilde{F}(x_d, \boldsymbol{\sigma}) := L \boldsymbol{\sigma} - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}),$$

and set  $\boldsymbol{\sigma}^0 := \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{g}$ . Now system (5.3.35) is equivalent to the following one, with  $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0$ ,

$$(5.3.36) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\tau}'(x_d) = \tilde{F}(x_d, \boldsymbol{\tau}(x_d) + \boldsymbol{\sigma}^0) \\ \boldsymbol{\tau}(0) = 0, \end{cases}$$

which is, with  $F(x_d, \boldsymbol{\tau}(x_d)) := \tilde{F}(x_d, \boldsymbol{\tau}(x_d) + \boldsymbol{\sigma}^0)$  for  $|x_d| < N_0$ , in the right form to apply Theorem 5.3.1. Note that the operator  $F$  actually does not depend on  $x_d$ , so all suprema in  $x_d$  in assumptions of Theorem 5.3.1 may be removed below when verifying the assumptions of this theorem on our particular problem (5.3.36). We will therefore omit to indicate the dependency in  $x_d$  of  $F$  and simply write  $F(\boldsymbol{\tau})$ . It remains to check the assumption of Theorem 5.3.1 to obtain existence of solutions to (5.3.36). The key estimates to do so are the following ones.

**Lemma 5.3.23.** *There exists  $C > 0$  such that for  $0 \leq r' < r \leq 1$ , for  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$  in  $\mathbf{X}_r^6$ , the following estimates hold*

$$(5.3.37a) \quad \|\|L \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_{r'}^6} \leq \frac{C \gamma_0}{r - r'} \|\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_r^6}$$

$$(5.3.37b) \quad \|\|\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{X}_r^6} \leq C \gamma_0 \|\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_r^6} \|\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{X}_r^6}$$

$$(5.3.37c) \quad \|\|\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{X}_r^6} \leq C \gamma_0 \|\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_r^6} \|\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{X}_r^6}$$

$$(5.3.37d) \quad \|\|\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{X}_r^6} \leq C \gamma_0 \|\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_r^6} \|\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{X}_r^6}.$$

*Proof.* Estimate (5.3.37a) follows directly from Lemma 5.3.17 and assumption (5.3.26a) on  $\mathbf{v}_{\zeta, j}$ , for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ , and  $j = 1, 3$ . As for them, estimates (5.3.37b) and (5.3.37c) rely on the algebra property of  $X_r$  and assumptions (5.3.26a) and (5.3.26c) on  $D_{\zeta, j}$  and  $\mathbb{J}_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2}$ . Finally, estimate (5.3.37d) is proven using assumption (5.3.26a) on  $K_{\zeta, j}$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$ , and  $j = 1, 3$ , and the same arguments used to prove algebra property of  $\mathbf{X}_r$ .  $\square$

The main result of this part is the following one, which, along with Proposition 5.3.22, will prove Theorem 5.3.20.

**Proposition 5.3.24.** *Consider  $0 < r_1 < 1$ , and  $\mathbf{a}$  a solution to system (5.3.20)-(5.3.21) given in  $\mathbf{X}_{r_1}^2$ . Then, for every  $M_1 > 0$ , the following existence and uniqueness result holds: there exists*

8. Due to the fact that we multiplied equation (5.3.17) by a nonzero coefficient to obtain a propagation equation in the normal variable.

$\delta > 0$  such that for every  $\mathbf{g}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^6$  satisfying  $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}_{r_1}^6} < M_1$ , system (5.3.36) admits a unique solution in  $\mathcal{C}^1((-\delta(r_1 - r), \delta(r_1 - r)), \mathbf{X}_r^6)$  for each  $r \in (0, r_1)$ .

*Proof.* The aim is to apply Theorem 5.3.1 with the scale of Banach spaces  $(\mathbf{X}_r^6)_{0 < r \leq r_1}$ . Fix now a constant  $M_1 > 0$  as well as<sup>9</sup>  $R > 0$ , and consider  $\mathbf{g}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^6$  such that  $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}_{r_1}^6} < M_1$ . We will now verify assumptions (5.3.5) and (5.3.6). We compute that for  $\boldsymbol{\tau}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^6$ , we have

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\tau}) = & L\boldsymbol{\tau} + L\boldsymbol{\sigma}^0 - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}^0) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0) \\ & - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}^0) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0) \\ & + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}^0) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau}) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0). \end{aligned}$$

Therefore,

$$F(0) = L\boldsymbol{\sigma}^0 - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^0),$$

so, using Lemmas 5.3.17 and 5.3.23, we get that there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $0 < r' < r < r_1$ ,

$$\|F(0)\|_{\mathbf{X}_{r'}^6} \leq \frac{C\gamma_0}{r-r'} \left( \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{X}_r^6} + \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{X}_r^6}^2 \right) \leq \frac{C\gamma_0}{r-r'} \left( \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{X}_r^6} + \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{X}_r^6}^2 \right),$$

and then, using the fact that  $\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{\mathbf{X}_r^6} \leq C\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2}$  and  $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}_{r_1}^6} < M_1$ ,

$$\|F(0)\|_{\mathbf{X}_{r'}^6} \leq \frac{C\gamma_0}{r-r'} \left( \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2} + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2}^2 + M_1 + M_1^2 \right),$$

so assumption (5.3.6) is satisfied with  $M := C\gamma_0(\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2} + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2}^2 + M_1 + M_1^2)$ .

On the other hand, we have, for  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}$  in  $\mathbf{X}_r^6$ ,

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\tau}) - F(\boldsymbol{\omega}) = & L(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) \\ & - \partial_{\Theta} \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}^0) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) \\ & - \partial_{\Theta} \mathbb{J}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}^0) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}) \\ & + \partial_{\Theta} \mathbf{K}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}^0). \end{aligned}$$

Therefore, using Lemmas 5.3.17 and 5.3.23, we get that there exists  $C > 0$  such that for all  $0 < r' < r < r_1$ , for each  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}$  in  $\left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}_r^6 \mid \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{X}_r^6} < R \right\}$ ,

$$\begin{aligned} \|F(\boldsymbol{\tau}) - F(\boldsymbol{\omega})\|_{\mathbf{X}_{r'}^6} & \leq C\gamma_0 \left( 1 + \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{X}_r^6} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{X}_r^6} + \|\boldsymbol{\sigma}^0\|_{\mathbf{X}_r^6} \right) \frac{\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{X}_r^6}}{r-r'} \\ & \leq \frac{C\gamma_0(1 + R + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2} + M_1)}{r-r'} \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{X}_r^6}. \end{aligned}$$

This estimate asserts that both the continuity property of  $F$  and assumption (5.3.5) with  $C := C\gamma_0(1 + R + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}_r^2} + M_1)$  are satisfied. We can therefore apply Theorem 5.3.1 which gives the sought result.  $\square$

Proof of Theorem 5.3.20 is now straightforward. Fix two positive constants  $M_0$  and  $M_1$ . Proposition 5.3.22 asserts the existence of  $\rho_1 \in (0, 1)$  such that for all  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{E}_1^2$  satisfying  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{E}_1^2} < M_0$ , there exists a solution  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{E}_{\rho_1}^2$  to system (5.3.20)-(5.3.21). Then, Lemma 5.3.16 ensures that there exists  $r_1$  (depending only on  $\rho_1$ ), such that the solution  $\mathbf{a}$  to (5.3.20)-(5.3.21) is in  $\mathbf{X}_{r_1}$ . Proposition 5.3.24 gives the existence of  $\delta > 0$  such that for every  $\mathbf{g}$  in  $\mathbf{X}_{r_1}^6$  satisfying

9. Constant  $R$  takes part only in the proof, and can be chosen arbitrarily large.

$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}_{r_1}^6} < M_1$ , there exists a solution  $\sigma$  in  $\mathcal{C}^1((-\delta(r_1 - r), \delta(r_1 - r)), \mathbf{X}_r^6)$ , for each  $r \in (0, r_1)$ , to system (5.3.17)-(5.3.19). This is precisely the statement of Theorem 5.3.20.

To make the toy model (5.3.17), (5.3.19), (5.3.20) and (5.3.21) more complicated and closer to the general system (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51), several aspects could be incorporated in the former one. Outgoing equations associated with boundary frequencies  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$  could be integrated in interior equations (5.3.17). It raises mainly an issue of functional framework, as we solved incoming equations (5.3.17) as propagation equations in the normal variable, which is not a framework suited for outgoing equations. Then it would be possible to incorporate traces of outgoing profiles in boundary conditions (5.3.19) and boundary evolution equations (5.3.20). For that we would need trace estimates for the chosen functional framework. In a more distant perspective, we could integrate profiles associated with boundary frequencies different from  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$  in interior equations (5.3.17) and boundary equations (5.3.20), which would require a total change of the functional framework, since we would have to work with almost-periodic functions. We could also consider derivatives of order higher than one in source terms of these equations (5.3.17) and (5.3.20).

## 5.4 Instability

This section is devoted to the proof of instability. More precisely, the aim is to show that the perturbation  $H$  in (5.1.1) interferes at a leading order in the asymptotic expansion (5.2.1). This is not the case in general, where the perturbation  $\varepsilon^3 h^\varepsilon$  only interferes at order  $\varepsilon^2$  and higher, see [MA88]. As the perturbation  $\varepsilon^3 h^\varepsilon$  of  $\varepsilon^2 g^\varepsilon$  in (5.1.1) is small, we will work with the linearized system of system (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51), around the particular solution when the perturbation is zero. To simplify even more the computations we will prove instability on toy models of the linearized system. The first part of the section focuses on deriving the linearized system for the profiles.

### 5.4.1 Linearization around a particular solution

If the perturbation  $H$  is uniformly zero in (5.1.1), then we are brought back to the case of [CW17], and the solution obtained in the mentioned work is thus a solution to our cascade of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) in this particular case. Therefore, according to [CW17], we have the following result.

**Proposition 5.4.1** ([CW17, Theorem 1.10]). *Let  $T_0 > 0$ , and consider  $G$  in  $\mathcal{C}^\infty((-\infty, T_0], H^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}))$ , zero for negative times  $t$ , and  $H \equiv 0$ . Then there exists  $T \in (0, T_0]$  and unique sequences of functions  $(\bar{U}_n^*)_{n \geq 0}$ , and  $(\bar{\sigma}_{\zeta, j, \lambda}^n)_{n \geq 0}$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 2, 3$  in  $\mathcal{C}^\infty((-\infty, T_0], H^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}))$  and sequences  $(\bar{a}_{\zeta, \lambda}^n)_{n \geq 1}$  for  $\zeta = \varphi, \psi$  in  $\mathcal{C}^\infty((-\infty, T_0], H^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}))$ , solution of the cascade of equations (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51).*

Note that Theorem 5.3.20 constitute a version of Proposition 5.4.1 in the case where  $H$  is possibly nonzero, but only on a toy model of system (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51), and with a different functional framework. Note also that since  $H$  is zero, we have, for  $n \geq 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , for the solution of Proposition 5.4.1,

$$(5.4.1) \quad \bar{\sigma}_{\zeta, j, \lambda}^n = 0 \quad \text{for } \zeta \neq \varphi \text{ and } j \in \mathcal{C}(\zeta), \quad \text{and} \quad \bar{a}_{\psi, \lambda}^n = 0.$$

The aim of this part is to derive the linearization of system (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) around the particular solution of Proposition 5.4.1. Schematically, in order to study the general problem of the form  $\mathcal{F}(u) = (G, H, 0, \dots)$ , we linearize this problem around

the particular solution  $\bar{u}$  of  $\mathcal{F}(\bar{u}) = (G, 0, 0, \dots)$  to obtain the linearized problem  $d\mathcal{F}(\bar{u}) \cdot u = (0, H, 0, \dots)$ . We will also simplify the linearized system during its derivation, since for some profiles it is easy to show that they are zero.

We only detail the linearized equations for the order we are interested in, which are first and second orders, and only for profiles of interest, that is,  $\sigma_{\psi,1,\lambda}^n$ ,  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^n$ ,  $\sigma_{\nu,2,\lambda}^n$  and  $a_{\psi,\lambda}^n$ , for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  and  $n = 1, 2$ . Here, opposite to the formulation of (5.2.49), we write down each equation separately, as they are now different since  $\bar{\sigma}_{\zeta,j,\lambda}^n$  is zero for  $\zeta \neq \varphi$ . We also adopt a new color code for these equations.

For the leading profile, starting from equations (5.2.9), we get, for the phases  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$ , and for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$(5.4.2a) \quad X_{\psi,1} \sigma_{\psi,1,\lambda}^1 + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,1} ik \bar{\sigma}_{\varphi,1,-k\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu,2,-k}^1 = 0,$$

$$(5.4.2b) \quad X_{\psi,2} \sigma_{\psi,2,\lambda}^1 + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,3} ik \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu,2,-k}^1 = 0,$$

$$(5.4.2c) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2,\lambda}^1 + J_{\psi,1}^{\varphi,1} i\lambda \bar{\sigma}_{\varphi,1,-\lambda\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\psi,1,-\lambda\lambda_\psi}^1 + J_{\psi,2}^{\varphi,3} i\lambda \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\psi,2,-\lambda\lambda_\psi}^1 = 0.$$

In equations (5.4.2a) and (5.4.2b), if  $\lambda \notin \lambda_\psi \mathbb{Z}$ , no resonance happens, but if  $\lambda = k\lambda_\psi$  for some  $k \in \mathbb{Z}^*$ , then, for example for the phase  $\psi_1$ , the resonance  $k\lambda_\varphi \varphi_1 + k\lambda_\psi \psi_1 + k\nu_2 = 0$  occurs. This explains the presence of factors  $\mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi}$  in equations (5.4.2a) and (5.4.2b). We also have, for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , the transport equation

$$(5.4.3) \quad X_{\varphi,j} \sigma_{\varphi,j,\lambda}^1 + D_{\varphi,j} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} i\lambda_2 \bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda_1}^1 \sigma_{\varphi,j,\lambda_2}^1 = 0.$$

As for them, the linearized equations for boundary terms  $a_\varphi^1$  and  $a_\psi^1$  read

$$(5.4.4) \quad X_\varphi^{\text{Lop}} a_{\varphi,\lambda}^1 + v_\varphi \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} i\lambda_2 \bar{a}_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^1 + \lambda \sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \gamma_\varphi(\lambda_1, \lambda_2) (\bar{a}_{\varphi,\lambda_1}^1 a_{\varphi,\lambda_2}^1 + a_{\varphi,\lambda_1}^1 \bar{a}_{\varphi,\lambda_2}^1) = 0,$$

and

$$(5.4.5) \quad X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi,\lambda}^1 + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik (\sigma_{\nu,2,k}^1)_{|x_d=0} \bar{a}_{\varphi,-\lambda\lambda_\varphi}^1 = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d,\chi_d=0}.$$

There is no term in  $G$  in equation (5.4.4) since we linearized around the solution given by Proposition 5.4.1 corresponding to the source term  $H = 0$  and we study the influence of a small source term  $H$  on the leading amplitudes  $\sigma^1$ .

Equations for the boundary phase  $\varphi$  are decoupled from the others, they can therefore be solved, using for example [CW17, Theorem 1.10]. From (5.4.4), along with the initial condition  $(a_{\varphi,\lambda}^1)_{|t \leq 0} = 0$ , we obtain  $a_{\varphi,\lambda}^1 = 0$  for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . Using boundary condition (5.2.16) as well as initial condition  $(\sigma_{\varphi,j,\lambda}^1)_{|t \leq 0} = 0$ , we also get  $\sigma_{\varphi,j,\lambda}^1 = 0$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ . Summing up, we have

$$(5.4.6) \quad \sigma_{\varphi,\lambda,j}^1 = 0, \quad a_{\varphi,\lambda}^1 = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}^*, \forall j = 1, 3.$$

The other frequencies  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$  are totally coupled through equations (5.4.2) and (5.4.5), and we need to determine the function  $a_\psi^1$  on the boundary and thus the outgoing amplitude  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^2$ .

In the same way as for the leading profile, for the first corrector, starting from (5.2.31), we get, for the phases  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$ ,

$$(5.4.7a) \quad X_{\psi,1} \sigma_{\psi,1,\lambda}^2 + \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,1} ik (\bar{\sigma}_{\varphi,1,-k\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu,2,-k}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi,1,-k\lambda_\varphi}^2 \sigma_{\nu,2,-k}^1) \\ = \text{terms in } (U_1, (I - P) U_2),$$



$$(5.4.7b) \quad X_{\psi,2} \sigma_{\psi,2,\lambda}^2 + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,3} ik \left( \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu,2,-k}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^2 \sigma_{\nu,2,-k}^1 \right) \\ = \text{terms in } (U_1, (I-P)U_2),$$

$$(5.4.7c) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2,\lambda}^2 + J_{\psi,1}^{\varphi,1} i\lambda \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1,-\lambda\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\psi,1,-\lambda\lambda_\psi}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi,1,-\lambda\lambda_\varphi}^2 \sigma_{\psi,1,-\lambda\lambda_\psi}^1 \right) \\ + J_{\psi,2}^{\varphi,3} i\lambda \left( \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\psi,2,-\lambda\lambda_\psi}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda\lambda_\varphi}^2 \sigma_{\psi,2,-\lambda\lambda_\psi}^1 \right) = \text{terms in } (U_1, (I-P)U_2),$$

where *terms in*  $(U_1, (I-P)U_2)$  refer to quadratic terms in  $U_1$  or the nonpolarized parts of  $U_2$ , both of them for frequencies  $\zeta_j$ , with  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ , terms which therefore will be zero if the corresponding profiles are zero. Equations on other profiles  $\sigma_{\zeta,j,\lambda}^2$ , for  $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{\psi, \nu\}$  and  $(\zeta, j) = (\psi, 3), (\nu, 1), (\nu, 3)$ , are not of interest so we do not write them.

For the boundary term  $a_\psi^2$ , we have, according to (5.2.43),

$$(5.4.8) \quad X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi,\lambda}^2 + \tilde{X}_\psi^{\text{Lop}} (\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0} \\ + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} \Gamma^\psi ik \left\{ (\sigma_{\nu,2,k}^1)_{|x_d=0} \bar{a}_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^2 + (\sigma_{\nu,2,k}^2)_{|x_d=0} \bar{a}_{\varphi,-\lambda_\varphi k}^1 \right\} \\ = i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0} - i\lambda b_\psi \cdot H_\lambda \\ + \partial_{z,\theta} \text{ terms in } (U_1, (I-P)U_2, (PU_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*)_{|x_d,\chi_d=0}.$$

Again, here, equations for  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$  are coupled. As the coupling is difficult to handle, especially with the term  $i\lambda b_\psi \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})_{|x_d,\chi_d=0}$ , we will simplify equations (5.4.7) and (5.4.8) to reduce the coupling, in order to study instability.

We have obtained the system (5.4.2), (5.4.5), (5.4.7) and (5.4.8), which is the linearization of system of equations (5.2.49) and (5.2.51), around the particular solution of (5.2.47), (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) and (5.2.51) of Proposition 5.4.1 for which the boundary term  $H$  is zero.

## 5.4.2 Instability on toy models

The aim of this section is to show that the system (5.1.1) considered in this article is unstable, namely that a small perturbation  $H$  in the boundary term may interfere up to the leading order. More precisely we prove that there exists a boundary term  $H$  such that, for toy models of the linearized system (5.4.2), (5.4.5), (5.4.7) and (5.4.8), the leading perturbations  $\sigma_{\psi,j,\lambda}^1$  and  $\sigma_{\nu,j,\lambda}^1$  are not all zero. For this purpose, we argue by contradiction and assume that for every boundary term  $H$ , all amplitudes  $\sigma_{\psi,j,\lambda}^1$  and  $\sigma_{\nu,j,\lambda}^1$ , for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  are zero. Then we seek for a contradiction. In particular, according to (5.2.18), it implies that  $a_{\psi,\lambda}^1 = 0$  for all  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ .

Recall that we have shown above that for the linearized system, profiles  $\sigma_{\varphi,j,\lambda}^1$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  are zero. Therefore, all leading profiles of frequencies  $\zeta_j$ ,  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$  are zero. Furthermore, according to formula (5.2.21) giving the nonpolarized parts of the first corrector, the nonpolarized parts of  $U_2$  for frequencies  $\zeta_j$ ,  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$  are consequently also zero. We can also show in a similar manner, that the mean value  $U_2^*$  and the polarized parts of frequencies different from  $\zeta_j$ ,  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$ , are also zero.

Therefore, equation (5.4.5) now reads

$$(5.4.9) \quad (\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)_{|x_d=0} = 0,$$

since  $U_{\psi,2,\lambda}^2$  is polarized,  $a_{\psi,\lambda}^1$  is zero for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  and the scalar  $b_\psi \cdot B r_{\psi,2}$  is nonzero. Equation (5.4.9) is the condition which we wish to contradict.

The general linearized equations (5.4.2), (5.4.5), (5.4.7) and (5.4.8) being too difficult to handle at this stage of comprehension, two toy models are investigated.

### First toy model

We focus first on a very simple toy model, for which computations can be easily followed through the end, and reflect the general idea of the instability mechanism. In equations (5.4.7), most of the resonant terms, which couple the equations, are removed. We also use that both leading profiles and nonpolarized parts of  $U_2$  of frequencies  $\zeta_j$  for  $\zeta = \varphi, \psi, \nu$  and  $j = 1, 3$  are zero. We retain at the end, for phases  $\psi_1, \psi_2$  and  $\nu_2$ , the incoming evolution equation

$$(5.4.10a) \quad X_{\psi,1} \sigma_{\psi,1,\lambda}^2 = 0,$$

and the two outgoing evolution equations with resonance terms

$$(5.4.10b) \quad X_{\psi,2} \sigma_{\psi,2,\lambda}^2 + \mathbf{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,3} ik \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\nu,2,-k}^2 = 0,$$

$$(5.4.10c) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2,\lambda}^2 + J_{\psi,1}^{\varphi,1} i\lambda \bar{\sigma}_{\varphi,1,-\lambda\lambda_\varphi}^1 \sigma_{\psi,1,-\lambda\lambda_\psi}^2 = 0.$$

As for the boundary amplitudes  $a_{\psi,\lambda}^2$  for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , we remove all traces of first or second profile, and, as usual,  $i\lambda b_\psi \cdot B(U_{\psi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})|_{x_d, \chi_d=0}$ , and we use that terms of  $\partial_{z,\theta}$  terms in  $(U_1, (I - P)U_2, (PU_2)_{\zeta \neq \varphi, \psi, \nu}, U_2^*)|_{x_d, \chi_d=0}$  are zero to retain the simple forced transport equation

$$(5.4.11) \quad X_\psi^{\text{Lop}} a_{\psi,\lambda}^2 = -i\lambda b_\psi \cdot H_\lambda.$$

According to above remarks, boundary condition (5.2.33) for the incoming amplitude  $\sigma_{\psi,1,\lambda}^2$  now reads

$$(5.4.12) \quad (\sigma_{\psi,1,\lambda}^2)|_{x_d=0} r_{\psi,1} = a_{\psi,\lambda}^2 e_{\psi,1}.$$

Although system (5.4.10), (5.4.11) and (5.4.12) is coupled, it is in an upper triangular form, so it can be solved using explicit formulas, since we are in presence of transport equations with constant coefficients. This is made precise now, with the proof of the following result.

**Theorem 5.4.2.** *There exists a boundary term  $H$  in  $L^2((-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_{\theta_2})$  such that, if the sequence  $(\sigma_{\psi,1,\lambda}^2, \sigma_{\psi,2,\lambda}^2, \sigma_{\nu,2,\lambda}^2)_{\lambda \in \mathbb{Z}^*}$  of tuples of  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{x_d}^+, L^2((-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1}))$  and the sequence  $(a_{\psi,\lambda}^2)_{\lambda \in \mathbb{Z}^*}$  of  $L^2((-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1})$  are solutions to the system (5.4.10), (5.4.11) and (5.4.12), then the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda_\psi}^2)|_{x_d=0}$  is nonzero.*

*Proof.* We consider any boundary term  $H$  in  $L^2((-\infty, T]_t \times \mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_{\theta_2})$ , and we look for an expression of the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda}^2)|_{x_d=0}$  of the associated solution of (5.4.10), (5.4.11) and (5.4.12).

First of all, the transport equation (5.4.11) on the boundary  $\{x_d = 0\}$  can be solved to find

$$a_{\psi,\lambda}^2(t, y) = \int_0^t -i\lambda b_\psi \cdot H_\lambda(s, y - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(t-s)) ds,$$

recalling the notation<sup>10</sup>

$$X_\psi^{\text{Lop}} = \partial_t + \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} \cdot \nabla_y.$$

According to boundary condition (5.4.12), it follows, with notation<sup>11</sup>

$$X_{\psi,1} = \partial_t - \mathbf{v}_{\psi,1} \cdot \nabla_x =: \partial_t - \mathbf{v}'_{\psi,1} \cdot \nabla_y + \partial_{x_d},$$

10. Without lost of generality, we have set  $\beta_\psi = 1$  in Lemma 5.1.11, to simplify the equations.

11. We assumed here that, with notation of Definition 5.1.3,  $-1/\partial_\xi \tau_k(\eta, \xi)$  is equal to 1.

using the incoming transport equation (5.4.10a),

$$\sigma_{\psi,1,\lambda}^2(t, y, x_d) = -\mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} i\lambda p_{\psi,1} b_\psi \cdot H_\lambda \left( s, y + x_d (\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(t-s) \right) ds,$$

with a coefficient  $p_{\psi,1} \in \mathbb{R}$  such that  $e_{\psi,1} = p_{\psi,1} r_{\psi,1}$ . To simplify notation, the coefficient  $p_{\psi,1}$  will be omitted in the following. Thus, with notation <sup>12</sup>

$$X_{\nu,2} = \partial_t - \mathbf{v}_{\nu,2} \cdot \nabla_x =: \partial_t - \mathbf{v}'_{\nu,2} \cdot \nabla_y - \partial_{x_d},$$

according to the outgoing transport equation (5.4.10c), we have

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu,2,\lambda}^2(t, y, x_d) &= - \int_0^t J_{\psi,1}^{\varphi,1} i\lambda \bar{\sigma}_{\varphi,1,-\lambda\lambda_\varphi}^1(s, x + \mathbf{v}_{\nu,2}(t-s)) \mathbb{1}_{x_d \leq 2s-t} \\ &\quad \times \int_0^{2s-x_d-t} i\lambda \lambda_\psi b_\psi \cdot H_{-\lambda\lambda_\psi} \left( \tau, y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(t-s) \right. \\ &\quad \left. + (x_d + t - s) (\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(s-\tau) \right) d\tau ds. \end{aligned}$$

In the same way, with similar notation, the outgoing transport equation (5.4.10b) leads to

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi,2,\lambda}^2(t, y, x_d) &= \int_0^t \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,3} ik \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^1(s, x + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s)) \\ &\quad \times \int_0^s J_{\psi,1}^{\varphi,1} ik \bar{\sigma}_{\varphi,1,k\lambda_\varphi}^1(\tau, x + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) + \mathbf{v}_{\nu,2}(s-\tau)) \mathbb{1}_{x_d \leq 2\tau-t} \\ &\quad \times \int_0^{2\tau-x_d-t} ik \lambda_\psi b_\psi \cdot H_{k\lambda_\psi} \left( \sigma, y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(s-\tau) + \mathbf{v}'_{\psi,2}(t-s) \right. \\ &\quad \left. + (x_d + t - \tau) (\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(\tau-\sigma) \right) d\sigma d\tau ds. \end{aligned}$$

The trace of  $\sigma_{\psi,2,\lambda}^2$  on the boundary  $\{x_d = 0\}$  is therefore given by

$$\begin{aligned} (5.4.13) \quad \sigma_{\psi,2,\lambda}^2(t, y, 0) &= -i \int_0^t \int_0^s \int_0^{2\tau-t} \mathbb{1}_{\lambda=k\lambda_\psi} J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} k^3 \lambda_\psi \bar{\sigma}_{\varphi,3,-k\lambda_\varphi}^1(s, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s)) \\ &\quad \times \bar{\sigma}_{\varphi,1,k\lambda_\varphi}^1(\tau, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) + \mathbf{v}_{\nu,2}(s-\tau)) \\ &\quad \times b_\psi \cdot H_{k\lambda_\psi} \left( \sigma, y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(s-\tau) + \mathbf{v}'_{\psi,2}(t-s) \right. \\ &\quad \left. + (t-\tau) (\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(\tau-\sigma) \right) d\sigma d\tau ds. \end{aligned}$$

We justify now why there is a choice of a boundary term  $H$  such that this trace is nonzero. We take interest into the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda_\psi}^2)|_{x_d=0}$ , which is given by formula (5.4.13) with  $\lambda = \lambda_\psi$  and therefore  $k = 1$ , namely,

$$\begin{aligned} (5.4.14) \quad \sigma_{\psi,2,\lambda_\psi}^2(t, y, 0) &= -i \int_0^t \int_0^s \int_0^{2\tau-t} J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} \lambda_\psi \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda_\varphi}^1(s, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s)) \\ &\quad \times \bar{\sigma}_{\varphi,1,\lambda_\varphi}^1(\tau, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) + \mathbf{v}_{\nu,2}(s-\tau)) \\ &\quad \times b_\psi \cdot H_{\lambda_\psi} \left( \sigma, y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(s-\tau) + \mathbf{v}'_{\psi,2}(t-s) \right. \\ &\quad \left. + (t-\tau) (\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(\tau-\sigma) \right) d\sigma d\tau ds. \end{aligned}$$

We start by constructing  $\bar{\sigma}_{\varphi,1,\lambda_\varphi}^1$  and  $\bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda_\varphi}^1$  suited for our purpose. It is proven in [CW17,

12. See footnote 11.

section 2.2] that  $\bar{a}_{\varphi,\lambda}^1$ , solution to equation (5.2.51a) in the particular case where  $H$  is zero, is the solution to the following equation, for  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$

$$(5.4.15) \quad X_{\varphi}^{\text{Lop}} \bar{a}_{\varphi,\lambda}^1 + D_{\varphi}^{\text{Lop}} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 \bar{a}_{\varphi,\lambda_1}^1 \bar{a}_{\varphi,\lambda_2}^1 + i\lambda \sum_{\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda} \gamma_{\varphi}(\lambda_1, \lambda_3) \bar{a}_{\varphi,\lambda_1}^1 \bar{a}_{\varphi,\lambda_3}^1 = -i\lambda b_{\varphi} \cdot G_{\lambda}.$$

We set  $G_{\lambda} = 0$  for  $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{\lambda_{\varphi}, -\lambda_{\varphi}\}$  and  $G_{\lambda_{\varphi}}, G_{-\lambda_{\varphi}}$  real, non-negative, and equal to one on the set  $[1/2, 2]_t \times [-(h+2)\mathbf{V}, (h+2)\mathbf{V}]_y^{d-1}$ , where we have denoted  $\mathbf{V} := |\mathbf{v}_{\varphi}^{\text{Lop}}|$  and with  $h \geq 1$ . Solving the transport equation (5.4.15), we get  $\bar{a}_{\varphi,\lambda}^1 = 0$  for  $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{\lambda_{\varphi}, -\lambda_{\varphi}\}$  and  $\bar{a}_{\varphi,\lambda_{\varphi}}^1, \bar{a}_{\varphi,-\lambda_{\varphi}}^1$  real, non-negative, and greater than 1/2 on the set  $[1, 2]_t \times [-(h+1)\mathbf{V}, (h+1)\mathbf{V}]_y^{d-1}$ . Now we know that, according to the condition (5.4.1) on profiles  $\bar{\sigma}_{\zeta,j,\lambda}^1$  for  $\zeta = \psi, \nu, j = 1, 2, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , there are no resonance terms in the evolution equation (5.2.9a) for  $\bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda}^1$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , so these profiles  $\bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda}^1$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  satisfy the following incoming transport equation

$$(5.4.16a) \quad X_{\varphi,j} \bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda}^1 + D_{\varphi,j} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} i\lambda_2 \bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda_1}^1 \bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda_2}^1 = 0,$$

with the following boundary condition (5.2.16)

$$(5.4.16b) \quad (\bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda}^1)|_{x_d=0} r_{\varphi,j} = \bar{a}_{\varphi,\lambda}^1 e_{\varphi,j}.$$

Solving system (5.4.16) seen as a transport propagation equation in the normal direction, with notation<sup>13</sup>

$$X_{\varphi,j} =: \partial_t - \mathbf{v}'_{\varphi,j} \cdot \nabla_y + \partial_{x_d},$$

we get  $\bar{\sigma}_{\varphi,j,\lambda}^1 = 0$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{\lambda_{\varphi}, -\lambda_{\varphi}\}$ , and that  $\bar{\sigma}_{\varphi,1,\lambda_{\varphi}}^1, \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda_{\varphi}}^1$  are real, non-negative, and larger than  $A/2$  on the set  $[1 + \mathbf{V}/(2\mathbf{w}), 2 + \mathbf{V}/(2\mathbf{W})]_t \times [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y \times [0, \mathbf{V}/\mathbf{W}]_{x_d}$ , where  $A := \min(|e_{\varphi,1} \cdot r_{\varphi,1}|, |e_{\varphi,3} \cdot r_{\varphi,3}|)$ ,  $\mathbf{w} := \min(|\mathbf{v}'_{\varphi,1}|, |\mathbf{v}'_{\varphi,3}|)$  and  $\mathbf{W} := \max(|\mathbf{v}'_{\varphi,1}|, |\mathbf{v}'_{\varphi,3}|)$ .

Now that  $\bar{\sigma}_{\varphi,1,\lambda_{\varphi}}^1$  and  $\bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda_{\varphi}}^1$  have been constructed appropriately, we make precise a suitable choice of boundary term  $H$ . We denote  $\mathbf{t} := 1 + \mathbf{V}/(2\mathbf{w})$  and  $\mathbf{T} := 2 + \mathbf{V}/(2\mathbf{W})$ , and we set the integer  $h$  such that

$$h \geq \frac{8(\mathbf{T} - \mathbf{t})}{\mathbf{V}} \max\left(|\mathbf{v}'_{\psi,2}|, |\mathbf{v}'_{\nu,2}|, |\mathbf{v}'_{\psi,1}|, |\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}}|\right).$$

We also take the boundary term  $H$  such that  $b_{\psi} \cdot H_{\lambda_{\psi}}$  is pure imaginary, and such that its imaginary part is of the sign of  $J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} \lambda_{\psi}$  and of modulus one on  $[\mathbf{t}, \mathbf{T}]_t \times [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y$ , namely,

$$b_{\psi} \cdot H_{\lambda_{\psi}} = i \text{sign}\left(J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} \lambda_{\psi}\right) \quad \text{on} \quad [\mathbf{t}, \mathbf{T}]_t \times [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y.$$

Then we note that, according to (5.4.14), the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda_{\psi}}^2)|_{x_d=0}$  satisfies, for  $t \in [\mathbf{t}, \mathbf{T}]$  and  $y \in [-h\mathbf{V}/2, h\mathbf{V}/2]$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi,2,\lambda_{\psi}}^2(t, y, 0) &\geq -i \int_{\mathbf{t}}^t \int_{\mathbf{t}}^s \int_{\mathbf{t}}^{2\tau-t} J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} \lambda_{\psi} \bar{\sigma}_{\varphi,3,-\lambda_{\varphi}}^1(s, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s)) \\ &\quad \times \bar{\sigma}_{\varphi,1,\lambda_{\varphi}}^1(\tau, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) + \mathbf{v}_{\nu,2}(s-\tau)) \\ &\quad \times b_{\psi} \cdot H_{\lambda_{\psi}}(\sigma, y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(s-\tau) + \mathbf{v}'_{\psi,2}(t-s) \\ &\quad + (t-\tau)(\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}}(\tau-\sigma)) d\sigma d\tau ds \\ &\geq |J_{\nu,2}^{\varphi,3} J_{\psi,1}^{\varphi,1} \lambda_{\psi}| \frac{A^2}{4}, \end{aligned}$$

13. See footnote 11.

since, for  $\mathbf{t} \leq \sigma \leq 2\tau - t$ ,  $\mathbf{t} \leq \tau \leq s \leq t \leq \mathbf{T}$  and  $y \in [-h\mathbf{V}/2, h\mathbf{V}/2]$ , according to the assumption on  $h$ , we have  $\sigma, \tau, s \in [\mathbf{t}, \mathbf{T}]$  and

$$\begin{aligned} y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) &\in [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y \times [0, \mathbf{V}/\mathbf{W}]_{x_d}, \\ y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s) + \mathbf{v}_{\nu,2}(s-\tau) &\in [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y \times [0, \mathbf{V}/\mathbf{W}]_{x_d}, \\ y + \mathbf{v}'_{\nu,2}(s-\tau) + \mathbf{v}'_{\psi,2}(t-s) \\ + (t-\tau)(\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}}(\tau-\sigma) &\in [-h\mathbf{V}, h\mathbf{V}]_y, \end{aligned}$$

because  $\mathbf{T} - \mathbf{t} \leq \mathbf{V}/2\mathbf{W}$ , up to shrinking  $\mathbf{w}$ .

It concludes the proof of Theorem 5.4.2 since we proved that there exists a choice of  $H$  such that the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda\psi}^2)_{|x_d=0}$  is nonzero.  $\square$

Theorem 5.4.2, stating that the trace  $(\sigma_{\psi,2,\lambda\psi}^2)_{|x_d=0}$  is nonzero, contradicts the condition (5.4.9), so instability is proven. Indeed, we have assumed that for all boundary terms  $H$ , the associated amplitudes  $\sigma_{\psi,j,\lambda}^1$  and  $\sigma_{\nu,j,\lambda}^1$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  are zero, and, for the toy model equations (5.4.10), (5.4.11) and (5.4.12), we found a contradiction. Therefore, for this toy model, there exists a boundary term  $H$  such that the leading profiles  $\sigma_{\psi,j,\lambda}^1$  and  $\sigma_{\nu,j,\lambda}^1$  for  $j = 1, 3$  and  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  are not all zero. It proves that the boundary term  $H$  may interfere at the leading order, which constitutes an instability.

## Second toy model

The second toy model that we shall consider features additional resonance coupling terms which add difficulties. This time we keep the formulation of toy models of section 5.3 and multiply equations (5.4.7) and (5.4.8) by  $e^{i\lambda\Theta}$ , to obtain, for the phases  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\nu_2$ , the incoming evolution equation with a resonance term

$$(5.4.17a) \quad X_{\psi,1} \sigma_{\psi,1}^2 + \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \sigma_{\nu,2}^2) = 0,$$

and the two outgoing evolution equations with resonance terms

$$(5.4.17b) \quad X_{\psi,2} \sigma_{\psi,2}^2 + \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3}(\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\nu,2}^2) = 0,$$

$$(5.4.17c) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2}^2 + \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \sigma_{\psi,1}^2) + \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3}(\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2) = 0,$$

where operators  $\mathbb{J}_{\zeta_2, j_2}^{\zeta_1, j_1}$  have been defined in (5.3.18), and equations on the boundary are kept as in the first toy model (5.4.11) and (5.4.12), namely,

$$(5.4.18) \quad X_{\psi}^{\text{Lop}} a_{\psi}^2 = -b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H,$$

$$(5.4.19) \quad (\sigma_{\psi,1}^2)_{|x_d=0} r_{\psi,1} = a_{\psi}^2 e_{\psi,1}.$$

Note that this time, the toy model features all resonance terms of the general equations.

The obtained system is no longer triangular since additional resonance terms in (5.4.17) relatively to (5.4.10) couple each equation with the others, so we cannot solve it as a sequence of transport equations as before. We use a perturbation method and solve equations (5.4.17) with a fixed point theorem. We start by solving (5.4.18) as a transport equation, and then we deduce, using the incoming transport equations (5.4.17a) and boundary condition (5.4.19), an expression of  $\sigma_{\psi,1}^2$  depending on  $\sigma_{\nu,2}^2$ . We use this expression in (5.4.17c) to obtain an equation in  $\sigma_{\nu,2}^2$  with a source term depending only on  $\sigma_{\psi,2}^2$ . This equation is solved with a fixed point method, using that the source term depending on  $\sigma_{\nu,2}^2$  is “small”, in a convenient topology, comparing to the

transport term, and we get an expression of  $\sigma_{\nu,2}^2$  depending on  $\sigma_{\psi,2}^2$ . This expression is finally used in (5.4.17b) which is solved with the same fixed point method. The result is the following.

**Theorem 5.4.3.** *There exists a boundary term  $H$  in  $\mathcal{C}([0, T]_t, H^\infty(\mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_{\theta_2}))$  such that, if  $\sigma_{\psi,1}^2, \sigma_{\psi,2}^2, \sigma_{\nu,2}^2$  in  $\mathcal{C}^1([0, T]_t, H^\infty(\mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{R}_{x_d}^+ \times \mathbb{T}_\Theta))$  and  $a_\psi^2$  in  $\mathcal{C}^1([0, T]_t, H^\infty(\mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{T}_\Theta))$  are solutions to the system (5.4.17), (5.4.18) and (5.4.19), then the trace  $(\sigma_{\psi,2}^2)|_{x_d=0}$  is nonzero.*

*Proof.* Similarly as for the first toy model, from equation (5.4.18), reusing previous notation, we get

$$a_\psi^2(t, y) = - \int_0^t b_\psi \cdot \partial_\Theta H_\lambda(s, y - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(t-s)) ds.$$

Then system (5.4.17a), (5.4.19) seen as a transport equation with a source term depending on  $\sigma_{\nu,2}^2$ , leads to

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi,1}^2(t, y, x_d) &= -\mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_\psi \cdot \partial_\Theta H(s, y + x_d(\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(t-s)) ds \\ &\quad + \int_{\max(0, t-x_d)}^t \partial_\Theta \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \sigma_{\nu,2}^2)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s)) ds. \end{aligned}$$

Therefore, equation (5.4.17c) now reads

$$(5.4.20a) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2}^2 + \partial_\Theta \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3}(\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2)$$

$$(5.4.20b) \quad - \partial_\Theta \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_\psi \cdot \partial_\Theta H(s, y + x_d(\mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_\psi^{\text{Lop}}(t-s)) ds \right]$$

$$(5.4.20c) \quad + \partial_\Theta \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \int_{\max(0, t-x_d)}^t \partial_\Theta \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \sigma_{\nu,2}^2)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s)) ds \right] = 0.$$

This is a transport equation but with a perturbation term (5.4.20c) depending on the unknowns  $\sigma_{\nu,2,\lambda}^2$ . It is solved using the following result. For  $s \in [0, +\infty)$ , we denote by  $H^s$  the Sobolev space  $H^s(\mathbb{R}_y^{d-1} \times \mathbb{R}_{x_d}^+ \times \mathbb{T}_\Theta)$  of regularity  $s$ , and  $H^\infty := \bigcap_{s \geq 0} H^s$ .

**Lemma 5.4.4.** *There exists  $T > 0$  such that, for any function  $f$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^\infty)$ , the transport equation*

$$(5.4.21a) \quad X_{\nu,2} \sigma_{\nu,2}^2 + \partial_\Theta \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \int_{\max(0, t-x_d)}^t \partial_\Theta \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \sigma_{\nu,2}^2)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s)) ds \right] = f(t, x),$$

$$(5.4.21b) \quad (\sigma_{\nu,2}^2)|_{t=0} = 0,$$

admits a unique solution  $\sigma_{\nu,2}^2$  in  $\mathcal{C}^1([0, T], H^\infty)$ .

If, for  $f$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^\infty)$  we denote by  $\Psi f$  the solution  $\sigma_{\nu,2}^2$  of (5.4.21) in  $\mathcal{C}^1([0, T], H^\infty)$ , then, for any  $s \geq 0$ , there exists  $C_s > 0$  such that for  $f$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ , we have

$$(5.4.22) \quad \|\Psi f\|_{\mathcal{C}([0, T_s], H^s)} \leq C_s T \|f\|_{\mathcal{C}([0, T_s], H^s)}.$$

Before proving Lemma 5.4.4, we prove the following preliminary result, asserting that the operators  $u \mapsto \partial_\Theta \mathbb{J}_{\zeta,k}^{\varphi,j}[\bar{\sigma}_{\varphi,j}^1, u]$  for  $(j, \zeta, k) \in \{(1, \psi, 1), (1, \nu, 2), (3, \nu, 2), (3, \psi, 2)\}$  are bounded from  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$  to itself, for  $s \in [0, +\infty)$ .

**Lemma 5.4.5.** *For  $s \in [0, +\infty)$  and  $\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1 \in \mathcal{C}([0, T], H^\infty)$ , there exists  $C_s > 0$  such that for  $u$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ , functions  $\partial_\Theta \mathbb{J}_{\zeta,k}^{\varphi,j}[\bar{\sigma}_{\varphi,j}^1, u]$  for  $(j, \zeta, k) \in \{(1, \psi, 1), (1, \nu, 2), (3, \nu, 2), (3, \psi, 2)\}$  belong*

to  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$  and satisfy

$$(5.4.23) \quad \left\| \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\zeta, k}^{\varphi, j} [\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, u] \right\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)} \leq C_s \|u\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)}.$$

*Proof.* We make the proof for the operator  $u \mapsto \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1} [\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, u]$ , namely,  $(j, \zeta, k) = (1, \psi, 1)$ . According to the expression (5.3.18) of the operator  $\mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1}$ , we want to estimate, for  $t \in [0, T]$ , the following quantity:

$$\left\| \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1} [\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, u](t) \right\|_{H^s} = \left\| (x, \Theta) \mapsto J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \lambda \bar{\sigma}_{\varphi, 1, \lambda}^1(t, x) u_{\lambda}(t, x) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^s}.$$

Using the same proof as the one of estimate (5.3.29), we get

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1} [\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, u](t) \right\|_{H^s} \\ & \leq \left\| (x, \Theta) \mapsto J_{\zeta_1, j_1}^{\zeta_2, j_2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} \lambda \bar{\sigma}_{\varphi, 1, \lambda}^1(t, x) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^s} \left\| (x, \Theta) \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^*} u_{\lambda}(t, x) e^{i\lambda\Theta} \right\|_{H^s} \\ & \leq C \|\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1(t)\|_{H^{s+1}} \|u(t)\|_{H^s}, \end{aligned}$$

which, taking the supremum in  $t \in [0, T]$ , leads to the sought estimate (5.4.23), since  $\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1$  is in  $\mathcal{C}([0, T], H^{s+1})$  according to Proposition 5.4.1. This is sufficient since we do not seek here for a tame estimate.  $\square$

*Proof* (Lemma 5.4.4). From now on we fix an integer  $s \geq 0$ , and the aim is to use the Banach fixed point theorem in the Banach space  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ . For  $v$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ , we denote by  $\Phi v$  the solution in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$  of

$$\begin{cases} X_{\nu, 2} u + v = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

which is therefore given by

$$\Phi v(t, x, \Theta) = - \int_0^t v(s, x + \mathbf{v}_{\nu, 2}(t-s), \Theta) ds.$$

Note that  $\Phi$  is continuous from  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$  to itself, and satisfies

$$(5.4.24) \quad \|\Phi v\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)} \leq T \|v\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)}.$$

Now, if  $\sigma_{\nu, 2}^2$  is a solution to (5.4.21), it is in this notation a fixed point of the map  $\mathbf{F}$ , where, for  $w$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ ,  $\mathbf{F}(w)$  is defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w) : (t, x, \Theta) \mapsto & \Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, \int_{\max(0, t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu, 2}^{\varphi, 1} (\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, w)(s, x + \mathbf{v}_{\psi, 1}(t-s), \Theta) ds \right] (t, x, \Theta) \\ & - \Phi f(t, x, \Theta). \end{aligned}$$

We derive now an estimate on the difference  $\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w')$  for  $w, w'$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ . By linearity of the operators, we have

$$\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w') = \Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi, 1}^{\varphi, 1} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, \int_{\max(0, t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu, 2}^{\varphi, 1} (\bar{\sigma}_{\varphi, 1}^1, w - w')(s, x + \mathbf{v}_{\psi, 1}(t-s), \Theta) ds \right].$$

Therefore, according to estimates (5.4.24) and (5.4.23), we have

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w')\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \\
& \leq C_s T \left\| \int_{\max(0,t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, w - w')(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s), \Theta) ds \right\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \\
& \leq C_s T^2 \left\| \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, w - w') \right\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \\
& \leq C_s^2 T^2 \|w - w'\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)}.
\end{aligned}$$

Therefore, for  $T > 0$  small enough,  $\mathbf{F}$  is a contraction of  $\mathcal{C}([0,T],H^s)$ , and the Banach fixed point theorem therefore gives a unique solution  $\Psi f$  in  $\mathcal{C}([0,T],H^s)$ . By linearity of system (5.4.21), the solution  $\Psi f$  may be extended to any time interval, so the time of existence  $T$  does not depend on the regularity  $s \in [0, +\infty)$ . Finally, using equation (5.4.21a), we obtain

$$\begin{aligned}
(5.4.25) \quad \partial_t \Psi f(t, x, \Theta) &= f(t, x, \Theta) + \mathbf{v}_{\nu,2} \cdot \nabla_x \Psi f(t, x, \Theta) \\
&\quad - \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1}[\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \int_{\max(0,t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \Psi f)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s), \Theta) ds](t, x, \Theta)
\end{aligned}$$

so  $\partial_t \Psi f$  belongs to  $\mathcal{C}([0,T],H^\infty)$  and therefore  $\Psi f$  is actually in  $\mathcal{C}^1([0,T],H^\infty)$ . We have proven the first part of Lemma 5.4.4.

The interest is now made on the boundedness of  $\Psi$ . We have, since  $\Psi f = \mathbf{F}(\Psi f)$ ,

$$\begin{aligned}
\Psi f(t, x, \Theta) &= \Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1}[\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \int_{\max(0,t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \Psi f)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s), \Theta) ds](t, x, \Theta) \\
&\quad - \Phi f(t, x, \Theta),
\end{aligned}$$

and therefore, using estimates (5.4.24) and (5.4.23), we have, for  $s \in [0, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned}
\|\Psi f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} &\leq C_s T \left\| \int_{\max(0,t-x_d)}^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,1}(\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \Psi f)(s, x + \mathbf{v}_{\psi,1}(t-s), \Theta) ds \right\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \\
&\quad + T \|f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \\
&\leq C_s^2 T^2 \|\Psi f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} + T \|f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)}.
\end{aligned}$$

Thus, for  $T$  small enough (depending on  $s \in [0, +\infty)$ ), we have

$$(5.4.26) \quad \|\Psi f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)} \leq C T \|f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^s)}.$$

Once again, by linearity of system (5.4.21), the estimate (5.4.26) is propagated to the whole interval  $[0, T]$ , which concludes the proof.  $\square$

Returning to (5.4.20) and using Lemma 5.4.4, by linearity, the solution  $\sigma_{\nu,2}^2$  of equation (5.4.20) reads

$$\begin{aligned}
(5.4.27) \quad \sigma_{\nu,2}^2 &= \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \mathbf{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H \left( s, y + x_d (\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}}(t-s), \Theta \right) ds \right) \\
&\quad - \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3}(\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2).
\end{aligned}$$

We proceed now with equation (5.4.17b) which now reads, according to the expression (5.4.27)



of  $\sigma_{\nu,2}^2$ ,

$$(5.4.28) \quad \begin{aligned} & X_{\psi,2} \sigma_{\psi,2}^2 - \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2) \right] \\ &= -\partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H \left( s, y + x_d (\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} (t-s) \right) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

This equation is solved using the same method as the one of Lemma 5.4.4. For  $v$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^{\infty})$ , we still denote by  $\Phi v$  the solution in  $\mathcal{C}([0, T], H^{\infty})$  of

$$\begin{cases} X_{\psi,2} u + v = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

and we recall that it satisfies, for  $s \in [0, +\infty)$ ,

$$(5.4.29) \quad \|\Phi v\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)} \leq T \|v\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)}.$$

Now,  $\sigma_{\psi,2}^2$  is a solution to (5.4.28) if and only if it is a fixed point of the map  $\mathbf{F}$  of  $\mathcal{C}([0, T], H^{\infty})$  given by

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : w \mapsto & -\Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, w) \right] + \Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \right. \right. \\ & \left. \left. \mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H \left( s, y + x_d (\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} (t-s), \Theta \right) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

For  $w, w'$  in  $\mathcal{C}([0, T], H^{\infty})$ , the difference  $\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w')$  is given by

$$\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w') = \Phi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, w' - w) \right].$$

Therefore, for  $s \in [0, +\infty)$ , according to estimates (5.4.23) and (5.4.22), we have

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(w) - \mathbf{F}(w')\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)} &\leq C_s T \left\| \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, w' - w) \right\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)} \\ &\leq C_s T^2 \|w - w'\|_{\mathcal{C}([0, T], H^s)}, \end{aligned}$$

so, for  $T > 0$  small enough,  $\mathbf{F}$  is a contraction of  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$ . The Banach fixed point theorem therefore gives a unique solution  $\sigma_{\psi,2}^2$  to (5.4.28) in  $\mathcal{C}([0, T], H^s)$  for  $s \in [0, +\infty)$ , that reads,

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi,2}^2(t, x) &= \Phi \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2) \right] \\ & - \Phi \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mathbb{1}_{x_d \leq t} \int_0^{t-x_d} b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H \left( s, y + x_d (\mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} + \mathbf{v}'_{\psi,1}) - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} (t-s), \Theta \right) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

Therefore, according to the expression of  $\Phi$  and taking the trace in  $x_d = 0$ , we have

$$(5.4.30) \quad \begin{aligned} & (\sigma_{\psi,2}^2)|_{x_d=0}(t, y) - \Phi \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2) \right]|_{x_d=0}(t, y) \\ &= \int_0^t \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} \left[ \bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,1}^{\varphi,1} \left( \bar{\sigma}_{\varphi,1}^1, \int_0^t b_{\psi} \cdot \partial_{\Theta} H \left( s, y - \mathbf{v}_{\psi}^{\text{Lop}} (t-s) \right) ds \right) \right] \end{aligned}$$

$$(s, y + \mathbf{v}_{\psi,2}(t-s)) ds.$$

Using similar arguments as the one of Theorem 5.4.2, we can construct profiles  $\bar{\sigma}_{\varphi,1}^1$  and  $\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1$  and choose a boundary term  $H$  such that the right-hand side of equation (5.4.30) is nonzero. Therefore, we obtain

$$(5.4.31) \quad \mathbf{C} := \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} - \Phi \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} [\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2)]_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}))} > 0.$$

Now note that, using the exact same arguments as the one used to prove estimates (5.4.22), (5.4.23) and (5.4.29), we can prove that these estimates (5.4.22), (5.4.23) and (5.4.29) still hold for the traces, in  $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}))$ . Therefore, we get

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\leq \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} + \left\| \Phi \mathbb{J}_{\nu,2}^{\varphi,3} [\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2)]_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} \\ &\leq \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} + CT \left\| \Psi \partial_{\Theta} \mathbb{J}_{\psi,2}^{\varphi,3} (\bar{\sigma}_{\varphi,3}^1, \sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} \\ &\leq \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} + CT^2 \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} \\ &= (1 + CT^2) \left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)}. \end{aligned}$$

In conclusion, we obtain that the norm  $\left\| (\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0} \right\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{T}))}$  is positive, so, for  $T$  sufficiently small, the trace  $(\sigma_{\psi,2}^2)_{|x_d=0}$  is nonzero, which is the sought result, concluding the proof.  $\square$

In the same manner as for the first toy model, Theorem 5.4.3 proves that an instability is created for the toy model (5.4.17), (5.4.18) and (5.4.19).

Once again, as in section 5.3, it is conceivable to consider a more complex toy model than (5.4.17), (5.4.18) and (5.4.19), by integrating, in the equations (5.4.17), coupling terms with profiles  $\sigma_{\zeta,j}$  with  $\zeta \neq \varphi, \psi, \nu$ . What seems to be a further step is to add, in equation (5.4.18), terms involving the traces of interior profiles. Among these terms, the one that seems to raise the most difficult issue is  $i\lambda b_{\psi} \cdot B (U_{\psi,2,\lambda}^{3,\text{osc}})_{|x_d, \chi_d=0}$ , since it couples equation (5.4.18) on the first corrector with the second corrector  $U^3$ .

## 5.5 The example of gas dynamics

We study here the example of three dimensional compressible isentropic Euler equations. The aim is to determine whether or not the configuration of frequencies considered in this chapter can happen for this system. For  $\mathcal{C}^1$  solutions, away from vacuum, the equations read

$$(5.5.1) \quad \begin{cases} \partial_t V^\varepsilon + A_1(V^\varepsilon) \partial_1 V^\varepsilon + A_2(V^\varepsilon) \partial_2 V^\varepsilon + A_3(V^\varepsilon) \partial_3 V^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_T, \\ B V_{|x_3=0}^\varepsilon = \varepsilon^2 g^\varepsilon + \varepsilon^M h^\varepsilon & \text{on } \omega_T, \\ V_{|t=0}^\varepsilon = 0, \end{cases}$$

with  $V^\varepsilon = (v^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$ , where  $v^\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  represents the fluid volume, and  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$  its velocity, and where the functions  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  are defined on  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$  as

$$(5.5.2) \quad A_j(V) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j & -v^t e_j \\ -c(v)^2/v e_j & \mathbf{u}_j I_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),$$

where  $e_j$  is the  $j$ -th vector of the canonical basis, with  $c(v) > 0$  representing the sound velocity in the fluid, depending on its volume  $v$ . We study here a perturbation of this system around the equilibrium  $V_0 := (v_0, 0, 0, u_0)$  with  $v_0 > 0$  a fixed volume and  $(0, 0, u_0)$  an incoming subsonic velocity, that is, such that  $0 < u_0 < c(v_0)$ . We denote by  $c_0 := c(v_0)$  the sound velocity in a fluid of the fixed volume  $v_0$ .

In order to study the possibility of existence of a configuration of frequencies satisfying Assumption 5.5, we need to determine a matrix  $B$  satisfying Assumption 5.3. For which we need to know the dimension of the stable subspace  $E_-(\zeta)$ , and construct a basis of it.

Although it will not be used in this part, we derive the expression of various quantities related to hyperbolicity of the Euler system. For  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , the matrix  $A(\eta, \xi) := \eta_1 A_1(V_0) + \eta_2 A_2(V_0) + \xi A_3(V_0)$  associated with the system (5.5.1) is given by

$$A(\eta, \xi) = \begin{pmatrix} u_0 \xi & -v_0 {}^t \eta & -v_0 \xi \\ -c_0^2/v_0 \eta & u_0 \xi I_2 & 0 \\ -c_0^2/v_0 \xi & 0 & u_0 \xi \end{pmatrix},$$

so the polynomial  $p$  defined as  $p(\tau, \eta, \xi) := \det(\tau I_4 + A(\eta, \xi))$  reads

$$p(\tau, \eta, \xi) = (\tau + \xi u_0)^2 ((\tau + \xi u_0)^2 - c_0^2(|\eta|^2 + \xi^2)).$$

Thus the matrix  $A(\eta, \xi)$  admits a double eigenvalue  $-\tau_2(\eta, \xi)$  and two simple eigenvalues  $-\tau_1(\eta, \xi)$  and  $-\tau_3(\eta, \xi)$  given by

$$\tau_1(\eta, \xi) = -\xi u_0 - c_0 \sqrt{|\eta|^2 + \xi^2}, \quad \tau_2(\eta, \xi) = -\xi u_0, \quad \tau_3(\eta, \xi) = -\xi u_0 + c_0 \sqrt{|\eta|^2 + \xi^2}.$$

Note that since  $-\tau_2(\eta, \xi)$  is a double eigenvalue, the Euler system is not strictly hyperbolic, but hyperbolic with constant multiplicity. Despite this difference with Assumption 5.2, we study this system since Assumption 5.2 seems to be a technical assumption.

Now to determine the expression of the stable subspace  $E_-(\zeta)$ , we need to study the eigenvalues of the matrix

$$\mathcal{A}(\tau, \eta) := -i A_3(V_0)^{-1} (\tau I + \eta_1 A_1(V_0) + \eta_2 A_2(V_0)).$$

We determine that in this case, the hyperbolic region<sup>14</sup> is given by

$$\mathcal{H} := \left\{ (\tau, \eta) \mid |\tau| > \sqrt{c_0^2 - u_0^2} |\eta| \right\}.$$

Then, for  $(\tau, \eta)$  in  $\mathcal{H}$ , the eigenvalues of  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  are given by

$$(5.5.3a) \quad i \xi_1(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 - \text{sign}(\tau) c_0 \sqrt{\tau^2 - |\eta|^2} (c_0^2 - u_0^2)}{c_0^2 - u_0^2},$$

$$(5.5.3b) \quad i \xi_2(\tau, \eta) := i \frac{\tau u_0 + \text{sign}(\tau) c_0 \sqrt{\tau^2 - |\eta|^2} (c_0^2 - u_0^2)}{c_0^2 - u_0^2},$$

$$(5.5.3c) \quad i \xi_3(\tau, \eta) := i \frac{-\tau}{u_0},$$

where  $\text{sign}(x) := x/|x|$  for  $x \neq 0$ . The eigenvalue  $i \xi_3$  is double, when the two others are simple. We determine that, if we denote  $\alpha_j(\tau, \eta) := (\tau, \eta, \xi_j(\tau, \eta))$ , the frequency  $\alpha_2(\tau, \eta)$  is outgoing when frequencies  $\alpha_1(\tau, \eta)$  and  $\alpha_3(\tau, \eta)$  are incoming. Since  $i \xi_3(\tau, \eta)$  is a double eigenvalue, the dimension  $p$  of the stable subspace  $E_-(\zeta)$  is therefore equal to 3. This could also have been

14. That is, the region where  $\mathcal{A}(\tau, \eta)$  has only pure imaginary eigenvalues and is diagonalizable.

determined by the number of positive eigenvalues of  $A_3(V_0)$ .

The interest is now made on a basis for  $E_-(\zeta)$ , which, according to (5.1.6), can be constructed with eigenvectors of  $\mathcal{A}(\zeta)$  associated with incoming frequencies. We determine that the eigenvectors associated with eigenvalues  $i \xi_1(\zeta)$  and  $i \xi_3(\zeta)$  are respectively given by

$$\lambda \begin{pmatrix} |(\eta, \xi_2(\tau, \eta))| v_0 \\ c_0 \eta \\ c_0 \xi_2(\tau, \eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

with  $\lambda \in \mathbb{R}$  and where  $\mathbf{a}$  is any vector satisfying  $\mathbf{a} \cdot (\eta, \xi_3(\tau, \eta)) = 0$ . For  $\mathbf{a}$  we can choose for example the two linearly independent vectors  $(\tau \eta, |\eta|^2 u_0)$  and  $(c_0 \eta_2, -c_0 \eta_1, 0)$  to obtain the following basis of the stable subspace  $E_-(\zeta)$ :

$$r_1(\zeta) := \begin{pmatrix} |(\eta, \xi_2(\tau, \eta))| v_0 \\ c_0 \eta \\ c_0 \xi_2(\tau, \eta) \end{pmatrix}, \quad r_3^1(\zeta) := \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \eta \\ |\eta|^2 u_0 \end{pmatrix}, \quad r_3^2(\zeta) := \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \eta_2 \\ -c_0 \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

We look now for a matrix  $B$ , of size  $3 \times 4$ , satisfying the weak Kreiss-Lopatinskii condition 5.3. More precisely, we want a matrix  $B$  such that  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is nonzero on the specific frequency  $\tau = c_0 |\eta|$ . Note that here we make a restrictive choice, about the locus where  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  should be nontrivial. This choice is made since it makes the following computations easier. Since every quantity is homogeneous of degree 1, we can make the computations for  $|\eta| = 1$ . For  $\tau = c_0 |\eta|$  we have  $\xi_2(\tau, \eta) = 0$ , so, denoting  $\eta = (\cos \theta, \sin \theta)$ , basis  $\{r_1(\zeta), r_3^1(\zeta), r_3^2(\zeta)\}$  reads

$$r_1(\zeta) = \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \cos \theta \\ c_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3^1(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \cos \theta \\ c_0 \sin \theta \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad r_3^2(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \sin \theta \\ -c_0 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The condition that  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is trivial is equivalent to the three vectors  $B r_1(\zeta), B r_3^1(\zeta), B r_3^2(\zeta)$  being linearly dependent. To study this condition, we write  $B$  in column as

$$B = (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4),$$

and, since  $B$  has to be of rank 3, we can assume that column  $b_4$  is a linear combination of the three linearly independent vectors  $b_1, b_2, b_3$  which we chose to be the canonical basis of  $\mathbb{R}^3$ . We write  $b_4 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$ , with  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ . In this notation, the linear dependence of  $B r_1(\zeta), B r_3^1(\zeta), B r_3^2(\zeta)$  is equivalent to

$$v_0 c_0^2 = \mu_1 u_0 c_0^2 \quad \text{and} \quad \mu_2 v_0 c_0 \cos \theta = \mu_3 v_0 c_0 \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{T},$$

so  $\mu_1 = v_0/u_0$  and  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ . Multiplying  $B$  by a nonzero constant we obtain

$$B = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & v_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \end{pmatrix},$$

which gives an example of a matrix  $B$  for which  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is nonzero, and actually of dimension 1, on  $\tau = c_0 |\eta|$ .

We investigate now if  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is nontrivial only on  $\tau = c_0 |\eta|$ . At this purpose we introduce a practical tool, the Lopatinskii determinant (see [BGS07, section 4.2.2]), denoted by  $\Delta(\sigma, \eta)$  for  $(\sigma, \eta) \in \Xi$ . It is a scalar function such that its zeros are exactly the frequencies for which  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is nontrivial. Its construction can be found in [BGS07, section 4.6.1]. If we

write  $E_-(\sigma, \eta)$  as<sup>15</sup>

$$E_-(\sigma, \eta) = \ell(\sigma, \eta)^\perp,$$

the Lopatinskii determinant is given by the following block determinant:

$$\Delta(\sigma, \eta) = \begin{vmatrix} B \\ \ell(\sigma, \eta) \end{vmatrix}.$$

Calculations made in [BGS07, section 14.3.1] show that, for  $(\sigma, \eta) \in \Xi$ , we can choose

$$\ell(\sigma, \eta) := (a, -v_0 u_0 {}^t\eta, v_0 \sigma)$$

with

$$a := u_0 \sigma - \xi_- (c_0^2 - u_0^2),$$

$\xi_-$  being the root of negative real part of the following dispersion relation

$$(\sigma + u_0 \xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + |\eta|^2) = 0.$$

Thus the Lopatinskii determinant is given by

$$\Delta(\sigma, \eta) := \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & v_0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ a & -v_0 u_0 \eta_1 & -v_0 u_0 \eta_2 & v_0 \sigma \end{vmatrix} = v_0^3 [u_0 \sigma - a] = v_0^3 \xi_- (c_0^2 - u_0^2).$$

It is zero if and only if  $\xi_-$  is zero, and this is the case only when  $\sigma$  is real (i.e. for  $(\sigma, \eta) = (\tau, \eta) \in \Xi_0$ ) and  $\tau = c_0 |\eta|$ . Therefore  $\ker B \cap E_-(\zeta)$  is nontrivial only on  $\tau = c_0 |\eta|$ , and thus matrix  $B$  satisfies Assumption 5.3, with

$$\Upsilon := \{(\tau, \eta) \mid \tau = c_0 |\eta|\}.$$

Now that we have determined a boundary condition  $B$  suited for our problem, we take interest into oscillations. Thus we consider two hyperbolic frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  on the boundary which will satisfy our assumptions. First, according to Assumption 5.5, frequencies  $\varphi$  and  $\psi$  must be zeros of the Lopatinskii determinant, thus satisfy  $\tau = c_0 |\eta|$ . If we still take  $|\eta| = 1$ , it leads to consider

$$\varphi := (c_0, \cos \theta_\varphi, \sin \theta_\varphi) \quad \text{and} \quad \psi := (c_0, \cos \theta_\psi, \sin \theta_\psi),$$

with  $\theta_\varphi, \theta_\psi \in [0, 2\pi)$ . An immediate computation then gives

$$\xi_1(\varphi) = \xi_1(\psi) = 0, \quad \xi_2(\varphi) = \xi_2(\psi) = \frac{2M}{1-M^2}, \quad \xi_3(\varphi) = \xi_3(\psi) = -\frac{1}{M},$$

with  $M := u_0/c_0 \in (0, 1)$  being the Mach number. Therefore, in order to have no resonances between frequencies lifted from  $\varphi$  and no resonances between frequencies lifted from  $\psi$ , it is sufficient to assume  $M^2$  irrational.

We now look for a boundary frequency  $\nu := -\lambda_\varphi \varphi - \lambda_\psi \psi$  with  $\lambda_\varphi, \lambda_\psi \in \mathbb{Z}^*$ , which satisfies Assumption 5.5. Frequency  $\nu$  reads

$$\nu = (-c_0(\lambda_\varphi + \lambda_\psi), -\lambda_\varphi \cos \theta_\varphi - \lambda_\psi \cos \theta_\psi, -\lambda_\varphi \sin \theta_\varphi - \lambda_\psi \sin \theta_\psi).$$

First we determine in which case  $\nu$  is not in  $\Upsilon$ . If we denote  $\nu = (\tau, \eta)$ , we have

$$\tau^2 = c_0^2(\lambda_\varphi + \lambda_\psi)^2 \quad \text{and} \quad c_0^2 |\eta|^2 = c_0^2(\lambda_\varphi^2 + \lambda_\psi^2) + 2c_0^2 \lambda_\varphi \lambda_\psi \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi),$$

---

15. Notation  $^\perp$  refers to the orthogonal complement relatively to the complex scalar product.

so, according to the description of  $\Upsilon$ , frequency  $\nu$  is not in  $\Upsilon$  if and only if  $\theta_\varphi \neq \theta_\psi$ . Generalizing this to any frequency  $\zeta = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$  asserts that  $\mathcal{F}_b \cap \Upsilon = \{\varphi, -\varphi, \psi, -\psi\}$  as required by Assumption 5.5. This assumption also demands  $\nu$  to be in the hyperbolic region. We have, if we still denote  $\nu = (\tau, \eta)$ ,

$$\tau^2 - |\eta|^2(c_0^2 - u_0^2) = u_0^2(\lambda_\varphi + \lambda_\psi)^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi(c_0^2 - u_0^2)[1 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)],$$

so the hyperbolicity condition  $\tau^2 - |\eta|^2(c_0^2 - u_0^2) > 0$  reads

$$(5.5.4) \quad M^2(\lambda_\varphi + \lambda_\psi)^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi(1 - M^2)[1 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] > 0,$$

which is satisfied for example when  $\lambda_\varphi$  and  $\lambda_\psi$  are positive.

We take interest now in resonance assumptions (5.1.12a) and (5.1.12b). We compute

$$\begin{aligned} \xi_1(\nu) &= \frac{-M(\lambda_\varphi + \lambda_\psi)}{1 - M^2} \\ &\quad + \frac{\text{sign}(\lambda_\varphi + \lambda_\psi) \sqrt{2\lambda_\varphi\lambda_\psi[1 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] + M^2[\lambda_\varphi^2 + \lambda_\psi^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)]}}{1 - M^2} \\ \xi_2(\nu) &= \frac{-M(\lambda_\varphi + \lambda_\psi)}{1 - M^2} \\ &\quad - \frac{\text{sign}(\lambda_\varphi + \lambda_\psi) \sqrt{2\lambda_\varphi\lambda_\psi[1 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] + M^2[\lambda_\varphi^2 + \lambda_\psi^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)]}}{1 - M^2} \\ \xi_3(\nu) &= \frac{\lambda_\varphi + \lambda_\psi}{M}. \end{aligned}$$

Recalling Remark 5.1.8 about the numbering of frequencies, we need to check the four possibilities for the couple of resonance, namely,

$$(5.5.5a) \quad \lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_1 + \nu_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0,$$

$$(5.5.5b) \quad \lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_3 + \nu_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0,$$

$$(5.5.5c) \quad \lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_1 + \nu_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0,$$

$$(5.5.5d) \quad \lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_1 + \nu_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0.$$

— Since  $\xi_1(\varphi) = \xi_1(\psi) = 0$ , relation  $\lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_1 + \nu_2 = 0$  implies that  $\xi_2(\nu) = 0$ , and therefore  $\lambda_\varphi + \lambda_\psi = 0$  which is impossible, since it contradicts condition (5.5.4).

— We determine that  $\lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_3 + \nu_2 = 0$  is equivalent to

$$2M^2\lambda_\varphi\lambda_\psi[2 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] + M^4[\lambda_\psi^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] - \lambda_\psi^2 = 0$$

and

$$(5.5.6) \quad (\lambda_\varphi + \lambda_\psi)(\lambda_\varphi M^2 - \lambda_\psi) \geq 0.$$

The corresponding second resonance is  $\lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0$ , which is equivalent to

$$2M^2\lambda_\varphi\lambda_\psi[2 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] + M^4[\lambda_\varphi^2 + 2\lambda_\varphi\lambda_\psi \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] - \lambda_\varphi^2 = 0$$

and

$$(5.5.7) \quad (\lambda_\varphi + \lambda_\psi)(\lambda_\psi M^2 - \lambda_\varphi) \geq 0.$$

Now conditions (5.5.6) and (5.5.7) are incompatible, so the configuration of resonances (5.5.5a)

is impossible.

- The case of (5.5.5c) is analogous, and is not detailed here.
- Finally, if for the first resonance we have  $\lambda_\varphi \varphi_3 + \lambda_\psi \psi_3 + \nu_2 = 0$ , then the second one must be  $\lambda_\varphi \varphi_1 + \lambda_\psi \psi_2 + \nu_2 = 0$ , which is equivalent to

$$[1 - \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] + M^2[1 + \cos(\theta_\varphi - \theta_\psi)] = 0 \quad \text{and} \quad (\lambda_\varphi + \lambda_\psi)(\lambda_\psi - \lambda_\varphi) \geq 0.$$

First equation rewrites

$$\cos(\theta_\varphi - \theta_\psi) = \frac{1 + M^2}{1 - M^2},$$

which cannot be satisfied by  $M^2 \in (0, 1)$ . Thus the fourth possibility (5.5.5d) is also impossible.

Therefore, in this case, a situation like the one described in Assumption 5.5 **cannot happen**.

To conclude as for the Euler system, we need to have a discussion about where we have made a choice which puts us in a particular case. The above analysis about frequencies  $\varphi$ ,  $\psi$  and  $\nu$  does not depend on  $B$ , but only on the location of cancellation of the Lopatinskii determinant. Thus the only restrictive choice we made is to choose this location as  $\tau = c_0 |\eta|$ . Therefore, for the compressible isentropic Euler equations in space dimension 3, in this particular case, the configuration of frequencies considered in this chapter which leads to an instability cannot happen.

We have considered here the Euler system in space dimension 3, since, in space dimension 2, the condition  $\tau = c |\eta|$  leads to  $\tau = \pm c \eta$ , preventing to obtain a transverse oscillation. We could also consider the shock problem for the Euler equations, which is the original problem of Majda and Rosales in [MR83; MR84].

# Conclusion

On résume ici les deux contributions de cette thèse.

## Développement asymptotique multiphase pour des problèmes aux limites quasi-linéaires fortement stables

Dans le Chapitre 4, on a construit le premier terme d'un développement asymptotique pour un problème aux limites quasi-linéaire dont le terme de forçage au bord oscille à une fréquence élevée, de longueur d'onde d'ordre  $O(\varepsilon)$ , et d'amplitude d'ordre  $O(\varepsilon)$ . La multiplicité des phases au bord engendre, à l'intérieur du domaine pour la solution approchée, un ensemble infini de fréquences qui n'est, en général, pas finiment engendré. Cela nous contraint à considérer un cadre de fonctions presque-périodiques, et l'on adapte donc le cadre fonctionnel utilisé dans [JMR95] pour le problème de Cauchy au cas des problèmes aux limites. On choisit donc des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, avec un contrôle uniforme par rapport aux variables normales lentes et rapides, et de Sobolev pour les variables tangentielles lentes et rapides.

Une étude BKW formelle nous fournit la cascade d'équations vérifiée par les profils, que l'on découple de manière classique. Les outils et résultats de cette partie faisant intervenir le profil principal sont ensuite rendus rigoureux. On obtient alors un système découplé pour le profil principal, dont on montre qu'il en existe une solution à l'aide d'estimations a priori sans perte de dérivée. Pour cela on commence par découpler le système obtenu pour le profil principal, en montrant d'abord que la moyenne est nulle. On isole ensuite les modes sortants, en utilisant l'Hypothèse 4.7 assurant qu'il n'y a pas de résonance entre des fréquences rentrantes et sortantes. Des estimations d'énergies, obtenues à l'aide d'un produit scalaire tirant partie de l'évolution en temps, nous permettent de prouver que ces modes sortants sont nuls. On peut donc découpler les conditions au bord pour les modes rentrants, et donc obtenir un système pour les modes évanescents, un système pour les modes rentrants résonants, et un système pour chaque mode rentrant non résonant. On montre alors des estimations d'énergie sur les systèmes oscillants, à l'aide cette fois-ci d'un produit scalaire tirant partie de la propagation par rapport à la variable normale. Pour le système associé aux modes résonants, les termes de transport et de type Burgers sont aisés à traiter, mais les termes de résonance, de part leur manque de symétrie par rapport au cas de [JMR95], présentent des difficultés. On surmonte cette difficulté en faisant une hypothèse sur l'ensemble des résonances, qui énonce que les résonances dont le manque de symétrie n'est pas contrôlé polynomialement sont en nombre fini, permettant de les traiter à part dans les estimations. Les estimations a priori ainsi obtenues permettent de construire des solutions aux systèmes oscillants, et donc, avec le profil évanescent construit à travers la condition de polarisation, d'obtenir un profil principal du développement asymptotique. Au cours de l'analyse on étudie l'exemple des équations d'Euler isentropiques compressibles en dimension deux d'espace, et l'on montre qu'il existe des configurations de ce système satisfaisant les hypothèses menant au résultat du chapitre.



### Instabilité de développements d'optique géométrique multiphase pour des problèmes aux limites quasi-linéaires faiblement stables

Dans le Chapitre 5, on s'intéresse à des développements d'optique géométrique pour des problèmes aux limites faiblement stables, dont le terme de bord est toujours donné par une fonction quasi-périodique oscillant suivant plusieurs phases planes de fréquence d'ordre  $O(1/\varepsilon)$ . Cette fois-ci on considère pour ce terme de forçage au bord une fonction périodique  $G$  de fréquence dans le lieu d'annulation du déterminant de Lopatinskii et d'amplitude d'ordre  $O(\varepsilon^2)$ , que l'on perturbe par une fonction  $H$  périodique selon une fréquence transverse également dans le lieu d'annulation du déterminant de Lopatinskii, et de petite amplitude  $O(\varepsilon^M)$ , avec  $M \geq 3$ , relativement à celle de  $G$ .

Une analyse formelle telle que celle conduite dans [CW17] nous permet d'obtenir le système d'équations vérifiées par les profils du développement asymptotique. En raison de l'amplification au bord due à la mise en défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme au bord, ce système est hautement couplé. La première partie du chapitre s'intéresse alors à l'existence de solutions à ce système, constitué d'équations couplées à l'intérieur, dont les termes de bord vérifie des équations couplées au bord. La complexité du système nous pousse à montrer le caractère bien posé sur des "modèles jouet". Le premier de ces modèles n'est constitué que de certaines équations au bord, dont on a réduit le couplage. Celles-ci sont résolues classiquement dans un espace de fonctions analytiques à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevskaya. La principale difficulté réside dans le fait de montrer qu'un certain opérateur impliqué dans ces équations est semi-linéaire, ce qui est fait en adaptant une preuve de [CW17]. Le deuxième modèle jouet intègre les équations à l'intérieur, que l'on souhaite résoudre à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevskaya. Il faut donc que les solutions des équations au bord soient analytiques par rapport à toutes leurs variables. On raffine pour cela le théorème de Cauchy-Kovalevskaya en s'inspirant des espaces fonctionnels utilisés dans [BG78] et à l'aide des séries majorantes et du phénomène de régularisation par intégration en temps.

Dans une deuxième partie, on souhaite montrer qu'il peut se créer de l'instabilité dans le développement asymptotique, au sens où la petite perturbation  $H$  du terme de bord  $G$  peut intervenir à l'ordre principal dans le développement asymptotique. On travaille pour cela avec le système général linéarisé autour de la solution particulière non perturbée, c'est-à-dire pour laquelle  $H$  est nul. On montre qu'il existe un terme de bord  $H$  tel que le profil principal de la solution de ce système linéarisé est non nul, et l'on procède par l'absurde en supposant que tout terme de bord  $H$  donne lieu à des profils principaux nuls. Là encore la complexité du problème justifie que l'on considère des modèles jouet. Pour le premier modèle jouet, on en construit explicitement la solution à l'aide de la méthode des caractéristiques, ce qui nous permet de trouver une contradiction. Pour le deuxième, dont le couplage interdit cette méthode, on utilise une méthode perturbative à l'aide de points fixes, ce qui mène également à une contradiction.

On conclut ce chapitre avec l'exemple des équations d'Euler isentropiques compressibles en dimension trois d'espace. On montre que pour un choix particulier de lieu d'annulation du déterminant de Lopatinskii, la configuration particulière de fréquences que l'on a considéré dans ce chapitre, dont on a vu qu'elle peut créer des instabilités dans le développement asymptotique, ne peut pas arriver pour le système d'Euler considéré.

# Bibliographie

- [AM87] Miguel ARTOLA et Andrew J. MAJDA. « Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets. I. The basic kink modes ». In : *Phys. D* 28.3 (1987), p. 253-281.
- [BB31] Abram BESICOVITCH et Harald BOHR. « Almost periodicity and general trigonometric series ». In : *Acta Math.* 57.1 (1931), p. 203-292.
- [Ben14] Antoine BENOIT. « Geometric optics expansions for linear hyperbolic boundary value problems and optimality of energy estimates for surface waves ». In : *Differential Integral Equations* 27.5-6 (2014), p. 531-562.
- [Ben15] Antoine BENOIT. « Problèmes aux limites, optique géométrique et singularités ». Theses. Université de Nantes, juin 2015.
- [BG+02] Sylvie BENZONI-GAVAGE, Frédéric ROUSSET, Denis SERRE et Kevin ZUMBRUN. « Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary-value problems ». In : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 132.5 (2002), p. 1073-1104.
- [BG78] Mohamed S. BAOUENDI et Charles GOULAOUIC. « Le théorème de Nishida pour le problème de Cauchy abstrait par une méthode de point fixe ». In : *Équations aux dérivées partielles (Proc. Conf., Saint-Jean-de-Monts, 1977)*. T. 660. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1978, p. 1-8.
- [BGS07] Sylvie BENZONI-GAVAGE et Denis SERRE. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*. Oxford Mathematical Monographs. First-order systems and applications. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, p. xxvi+508.
- [Boh25a] Harald BOHR. « Zur theorie der fast periodischen funktionen ». In : *Acta Math.* 45.1 (1925). I. Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen, p. 29-127.
- [Boh25b] Harald BOHR. « Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen ». In : *Acta Math.* 46.1-2 (1925). II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variablen ; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen, p. 101-214.
- [Boh26] Harald BOHR. « Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen ». In : *Acta Math.* 47.3 (1926). III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen, p. 237-281.
- [CB64] Yvonne CHOQUET-BRUHAT. « Ondes asymptotiques pour certaines équations aux dérivées partielles nonlinéaires ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 258 (1964), p. 3809-3812.
- [CG10] Jean-François COULOMBEL et Olivier GUÈS. « Geometric optics expansions with amplification for hyperbolic boundary value problems : linear problems ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 60.6 (2010), p. 2183-2233.
- [CGW11] Jean-François COULOMBEL, Olivier GUES et Mark WILLIAMS. « Resonant leading order geometric optics expansions for quasilinear hyperbolic fixed and free boundary problems ». In : *Comm. Partial Differential Equations* 36.10 (2011), p. 1797-1859.
- [CGW14] Jean-Francois COULOMBEL, Olivier GUÈS et Mark WILLIAMS. « Semilinear geometric optics with boundary amplification ». In : *Anal. PDE* 7.3 (2014), p. 551-625.

- [Chi91] Jamel CHIKHI. « Sur la réflexion des oscillations pour un système à deux vitesses ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 313.10 (1991), p. 675-678.
- [Com74] Louis COMTET. *Advanced combinatorics*. enlarged. The art of finite and infinite expansions. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974, p. xi+343.
- [Cor09] Constantin CORDUNEANU. *Almost periodic oscillations and waves*. Springer, New York, 2009, p. viii+308.
- [Cou02] Jean-François COULOMBEL. « Stabilité multidimensionnelle d'interfaces dynamiques. Application aux transitions de phase liquide-vapeur. » Theses. Ecole normale supérieure de Lyon, déc. 2002.
- [Cou05] Jean-François COULOMBEL. « Well-posedness of hyperbolic initial boundary value problems ». In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 84.6 (2005), p. 786-818.
- [CP82] Jacques CHAZARAIN et Alain PIRIOU. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. T. 14. Studies in Mathematics and its Applications. Translated from the French. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982, p. xiv+559.
- [CS08] Jean-François COULOMBEL et Paolo SECCHI. « Nonlinear compressible vortex sheets in two space dimensions ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 41.1 (2008), p. 85-139.
- [CW13] Jean-François COULOMBEL et Mark WILLIAMS. « Nonlinear geometric optics for reflecting uniformly stable pulses ». In : *J. Differential Equations* 255.7 (2013), p. 1939-1987.
- [CW14] Jean-François COULOMBEL et Mark WILLIAMS. « Amplification of pulses in nonlinear geometric optics ». In : *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 11.4 (2014), p. 749-793.
- [CW17] Jean-François COULOMBEL et Mark WILLIAMS. « The Mach stem equation and amplification in strongly nonlinear geometric optics ». In : *Amer. J. Math.* 139.4 (2017), p. 967-1046.
- [Fri54] Kurt Otto FRIEDRICHS. « Symmetric hyperbolic linear differential equations ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 7 (1954), p. 345-392.
- [GM84] Sybren R. de GROOT et Peter MAZUR. *Nonequilibrium thermodynamics*. Reprint of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1984, p. x+510.
- [Guè93] Olivier GUÈS. « Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilineaires ». In : *Asymptotic Anal.* 6.3 (1993), p. 241-269.
- [Her15] Matthew HERNANDEZ. « Resonant leading term geometric optics expansions with boundary layers for quasilinear hyperbolic boundary problems ». In : *Comm. Partial Differential Equations* 40.3 (2015), p. 387-437.
- [Her63] Reuben HERSH. « Mixed problems in several variables ». In : *J. Math. Mech.* 12 (1963), p. 317-334.
- [HMR86] John K. HUNTER, Andrew MAJDA et Rodolpho ROSALES. « Resonantly interacting, weakly nonlinear hyperbolic waves. II. Several space variables ». In : *Stud. Appl. Math.* 75.3 (1986), p. 187-226.
- [Hör90] Lars HÖRMANDER. *An introduction to complex analysis in several variables*. Third. T. 7. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xii+254.
- [Ika68] Mitsuru IKAWA. « Mixed problems for hyperbolic equations of second order ». In : *J. Math. Soc. Japan* 20 (1968), p. 580-608.
- [JMR93] Jean-Luc JOLY, Guy MÉTIVIER et Jeffrey RAUCH. « Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves ». In : *Duke Math. J.* 70.2 (1993), p. 373-404.

- [JMR94] Jean-Luc JOLY, Guy MÉTIVIER et Jeffrey RAUCH. « Coherent nonlinear waves and the Wiener algebra ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 44.1 (1994), p. 167-196.
- [JMR95] Jean-Luc JOLY, Guy MÉTIVIER et Jeffrey RAUCH. « Coherent and focusing multi-dimensional nonlinear geometric optics ». In : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 28.1 (1995), p. 51-113.
- [Joh91] Fritz JOHN. *Partial differential equations*. fourth. T. 1. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1991, p. x+249.
- [JR92] Jean-Luc JOLY et Jeffrey RAUCH. « Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 330.2 (1992), p. 599-623.
- [Kil22] Corentin KILQUE. « Weakly Nonlinear Multiphase Geometric Optics for Hyperbolic Quasilinear Boundary Value Problems : Construction of a Leading Profile ». In : *SIAM J. Math. Anal.* 54.2 (2022), p. 2413-2507.
- [Kre59] Heinz-Otto KREISS. « Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzeugen ». In : *Math. Scand.* 7 (1959), p. 71-80.
- [Kre70] Heinz-Otto KREISS. « Initial boundary value problems for hyperbolic systems ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), p. 277-298.
- [Lax57] Peter D. LAX. « Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems ». In : *Duke Math. J.* 24 (1957), p. 627-646.
- [Les07] Vincent LESCARRET. « Wave transmission in dispersive media ». In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 17.4 (2007), p. 485-535.
- [Lop53] Yaroslav B. LOPATINSKIĬ. « On a method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations ». In : *Ukrain. Mat. Ž.* 5 (1953), p. 123-151.
- [Lop70] Yaroslav B. LOPATINSKIĬ. « The mixed Cauchy-Dirichlet type problem for equations of hyperbolic type ». In : *Dopovīdi Akad. Nauk Ukraïn. RSR Ser. A* 1970 (1970), p. 592-594, 668.
- [MA88] Andrew J. MAJDA et Miguel ARTOLA. « Nonlinear geometric optics for hyperbolic mixed problems ». In : *Analyse mathématique et applications*. Gauthier-Villars, Montrouge, 1988, p. 319-356.
- [Maj83] Andrew MAJDA. « The stability of multidimensional shock fronts ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 41.275 (1983), p. iv+95.
- [Mar10] Alice MARCOU. « Rigorous weakly nonlinear geometric optics for surface waves ». In : *Asymptot. Anal.* 69.3-4 (2010), p. 125-174.
- [Mét00] Guy MÉTIVIER. « The block structure condition for symmetric hyperbolic systems ». In : *Bull. London Math. Soc.* 32.6 (2000), p. 689-702.
- [Mét09] Guy MÉTIVIER. « The mathematics of nonlinear optics ». In : *Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. V*. Handb. Differ. Equ. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009, p. 169-313.
- [Mil58] John W. MILES. « On the disturbed motion of a plane vortex sheet ». In : *J. Fluid Mech.* 4 (1958), p. 538-552.
- [Mor20] Baptiste MORISSE. « On hyperbolicity and Gevrey well-posedness. Part one : the elliptic case ». In : *Ann. H. Lebesgue* 3 (2020), p. 1195-1239.
- [MR83] Andrew MAJDA et Rodolfo ROSALES. « A theory for spontaneous Mach stem formation in reacting shock fronts. I. The basic perturbation analysis ». In : *SIAM J. Appl. Math.* 43.6 (1983), p. 1310-1334.

- [MR84] Andrew MAJDA et Rodolfo ROSALES. « A theory for spontaneous Mach-stem formation in reacting shock fronts. II. Steady-wave bifurcations and the evidence for breakdown ». In : *Stud. Appl. Math.* 71.2 (1984), p. 117-148.
- [MZ05] Guy MÉTIVIER et Kevin ZUMBRUN. « Hyperbolic boundary value problems for symmetric systems with variable multiplicities ». In : *J. Differential Equations* 211.1 (2005), p. 61-134.
- [Nir72] L. NIRENBERG. « An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem ». In : *J. Differential Geometry* 6 (1972), p. 561-576.
- [Nis77] Takaaki NISHIDA. « A note on a theorem of Nirenberg ». In : *J. Differential Geometry* 12.4 (1977), 629-633 (1978).
- [Ral71] James V. RALSTON. « Note on a paper of Kreiss ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 24.6 (1971), p. 759-762.
- [Rau12] Jeffrey RAUCH. *Hyperbolic partial differential equations and geometric optics*. T. 133. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, p. xx+363.
- [RR82] Jeffrey RAUCH et Michael REED. « Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension ». In : *Duke Math. J.* 49.2 (1982), p. 397-475.
- [Sar65] Leonard SARASON. « On hyperbolic mixed problems ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 18 (1965), p. 310-334.
- [Sch91] Wolfgang M. SCHMIDT. *Diophantine approximations and Diophantine equations*. T. 1467. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1991, p. viii+217.
- [Ser00] Denis SERRE. *Systems of conservation laws. 2*. Geometric structures, oscillations, and initial-boundary value problems, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon. Cambridge University Press, Cambridge, 2000, p. xii+269.
- [Ser05] Denis SERRE. « Solvability of hyperbolic IBVPs through filtering ». In : *Methods Appl. Anal.* 12.3 (2005), p. 253-266.
- [Ser99] Denis SERRE. *Systems of conservation laws. 1*. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, p. xxii+263.
- [ST88] Monique SABLÉ-TOUGERON. « Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2 ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 101.3 (1988), p. 261-292.
- [Tay79] Michael E. TAYLOR. « Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon ». In : *Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977)*. T. 48. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Dekker, New York, 1979, p. 273-291.
- [Uka01] Seiji UKAI. « The Boltzmann-Grad limit and Cauchy-Kovalevskaya theorem ». In : t. 18. 2. Recent topics in mathematics moving toward science and engineering. 2001, p. 383-392.
- [Wil00] Mark WILLIAMS. « Boundary layers and glancing blow-up in nonlinear geometric optics ». In : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 33.3 (2000), p. 383-432.
- [Wil02] Mark WILLIAMS. « Singular pseudodifferential operators, symmetrizers, and oscillatory multidimensional shocks ». In : *J. Funct. Anal.* 191.1 (2002), p. 132-209.
- [Wil96] Mark WILLIAMS. « Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems ». In : *Comm. Partial Differential Equations* 21.11-12 (1996), p. 1829-1895.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ix</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte général, motivations et résultats . . . . .	1
1.1.1 Systèmes de lois de conservation . . . . .	1
1.1.2 Problèmes aux limites . . . . .	3
1.1.3 Asymptotique haute fréquence et optique géométrique . . . . .	3
1.1.4 Résultats . . . . .	4
1.2 Problème de Cauchy linéaire et développements asymptotiques . . . . .	5
1.2.1 Caractère bien posé et hypothèse d'hyperbolicité . . . . .	5
1.2.2 Développement d'optique géométrique . . . . .	7
1.3 Problèmes aux limites et conditions de bord . . . . .	11
1.3.1 Nombre de conditions au bord . . . . .	11
1.3.2 Analyse des modes normaux . . . . .	12
1.3.3 Description des sous-espaces stables . . . . .	15
1.4 Optique géométrique multiphasée et cadre fonctionnel . . . . .	20
1.4.1 Cas non-linéaire monophasé : fonctions quasi-périodiques . . . . .	21
1.4.2 Cas semi-linéaire multiphasé : algèbres de Wiener . . . . .	25
1.4.3 Problème de Cauchy quasi-linéaire multiphasé : fonctions presque-périodiques au sens de Bohr . . . . .	27
1.4.4 Adaptation aux problèmes aux limites quasi-linéaires multiphasés . . . . .	30
1.5 Résolution d'EDP dans des espaces analytiques : théorèmes de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	32
1.5.1 Théorème de Cauchy-Kovalevskaya classique . . . . .	32
1.5.2 Analyticité en temps dans le théorème de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	35
1.6 Organisation du manuscrit . . . . .	38
<b>2 Construction et justification d'un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites linéaire</b>	<b>41</b>
2.1 Notations et hypothèses . . . . .	42
2.2 Ansatz et résultat principal . . . . .	45
2.3 Détermination des équations . . . . .	46
2.4 Résolution des équations . . . . .	48
2.4.1 Résolution des équations pour le profil principal . . . . .	48
2.4.2 Résolution des équations du premier correcteur . . . . .	49

2.4.3	Profils d'ordre supérieur et résultat . . . . .	51
2.5	Justification du développement d'optique géométrique . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Développement d'optique géométrique multiphasée pour un problème aux limites semi-linéaire</b>	<b>53</b>
3.1	Notations et hypothèses . . . . .	54
3.1.1	Stricte hyperbolicité . . . . .	54
3.1.2	Condition de Lopatinskii uniforme . . . . .	55
3.1.3	Cadre fonctionnel . . . . .	57
3.2	Ansatz et équations de profil . . . . .	59
3.2.1	Position du problème . . . . .	59
3.2.2	Obtention des équations de profil . . . . .	60
3.2.3	Résultat principal . . . . .	62
3.3	Résolution des équations de profil . . . . .	62
3.3.1	Résultats sur les espaces fonctionnels . . . . .	62
3.3.2	Résolution des équation associées à chaque mode . . . . .	64
3.3.3	Existence d'un profil linéaire . . . . .	66
3.3.4	Existence d'un profil semi-linéaire . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Existence d'un développement d'optique géométrique multiphasée pour des problèmes aux limites hyperboliques quasi-linéaires</b>	<b>73</b>
4.1	Notations et hypothèses . . . . .	76
4.1.1	Position du problème . . . . .	76
4.1.2	Stricte hyperbolicité . . . . .	78
4.1.3	Condition de Lopatinskii uniforme et quelques résultats préliminaires . . . . .	81
4.2	Cadre fonctionnel . . . . .	98
4.2.1	Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine . . . . .	98
4.2.2	Espaces de profils . . . . .	104
4.2.3	Produits scalaires sur l'espace des profils oscillants . . . . .	105
4.3	Ansatz et résultat principal . . . . .	107
4.4	Étude BKW formelle . . . . .	108
4.4.1	Cascade d'équations pour les profils . . . . .	108
4.4.2	Résolution du problème rapide $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})U = H$ . . . . .	110
4.4.3	Système d'équations vérifié par le profil principal . . . . .	113
4.5	Construction du profil principal . . . . .	113
4.5.1	Coefficient de résonance et hypothèse supplémentaire . . . . .	114
4.5.2	Définition rigoureuse des projecteurs $\mathbf{E}$ , $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ , $\mathbf{E}_{\text{res}}^{\text{in}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{res}}^{\text{in}}$ . . . . .	120
4.5.3	Réduction du système . . . . .	128
4.5.4	Estimation a priori du système linéarisé pour la partie oscillante résonante . . . . .	140
4.5.5	Estimation a priori sur les équations de Burgers linéarisées . . . . .	149
4.5.6	Construction d'une solution . . . . .	151
4.5.7	Conclusion et perspectives . . . . .	157
4.A	Appendices . . . . .	158
4.A.1	Fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach . . . . .	158
4.A.2	Exemple d'un système engendrant une infinité de fréquences sortantes . . . . .	161
4.A.3	Détails de certains calculs . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Transverse instability of high frequency weakly stable quasilinear boundary value problems</b>	<b>165</b>
5.1	Notation and assumptions . . . . .	168
5.1.1	Position of the problem . . . . .	168
5.1.2	Weak Kreiss-Lopatinskii condition . . . . .	170

---

5.1.3	Oscillations . . . . .	171
5.2	Derivation of the system . . . . .	179
5.2.1	Ansatz and WKB cascade . . . . .	179
5.2.2	Rewriting the equations: leading profile and first corrector . . . . .	181
5.2.3	General system . . . . .	197
5.3	Existence of an analytic solution . . . . .	200
5.3.1	First toy model . . . . .	201
5.3.2	Functional framework . . . . .	203
5.3.3	A Cauchy-Kovalevskaya theorem for boundary equations . . . . .	208
5.3.4	Second toy model . . . . .	210
5.3.5	Additional functional framework . . . . .	211
5.3.6	Time analyticity on the boundary and Cauchy-Kovalevskaya theorem for incoming equations . . . . .	218
5.4	Instability . . . . .	226
5.4.1	Linearization around a particular solution . . . . .	226
5.4.2	Instability on toy models . . . . .	228
5.5	The example of gas dynamics . . . . .	237
	<b>Conclusion</b>	<b>243</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>245</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>249</b>





## COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Optique géométrique multiphasée pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation », écrit par Corentin KILQUE, achevé le 12 juillet 2022, composé au moyen du système de préparation de document  $\text{\LaTeX}$  et de la classe `yathesis` dédiée aux thèses préparées en France.

Résumé

Cette thèse porte sur des développements d'optique géométrique multiphasée, pour des problèmes aux limites hyperboliques et quasi-linéaires, c'est-à-dire des développements asymptotiques de solutions approchées de ces systèmes, pour lesquels le terme de bord oscille à une fréquence élevée suivant plusieurs phases planes au bord. On se place dans un cadre faiblement non-linéaire, c'est-à-dire que le terme de bord est d'ordre  $O(\varepsilon)$  quand les fréquences sont d'ordre  $O(1/\varepsilon)$ .

Dans une première partie, on s'intéresse à un problème aux limites satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, et l'on construit pour ce problème le premier terme d'un développement BKW pour la solution approchée. La multiplicité des fréquences au bord engendre, à l'intérieur du domaine, un nombre infini dénombrable de fréquences, nous contraignant à utiliser un cadre de fonctions presque-périodiques, ici au sens de Bohr. La principale difficulté de ce travail réside dans le défaut de symétrie dans le système vérifié par le profil principal, et l'occurrence d'une infinité de résonances (à l'inverse du cas d'une seule phase étudié précédemment). Le profil principal est alors obtenu comme la solution d'un problème quasi-linéaire, qui est résolu à l'aide d'estimations a priori sans perte de dérivée. Les hypothèses de cette partie sont illustrées avec l'exemple des équations d'Euler compressibles isentropiques en dimension deux d'espace. La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'instabilité de développements d'optique géométrique pour des problèmes aux limites faiblement stables, où le terme de forçage au bord subit une perturbation de petite amplitude, oscillant suivant une fréquence transversale. Puisque les fréquences au bord appartenant au lieu d'annulation du déterminant de Lopatinskii, les amplifications au bord donnent lieu à un système hautement couplé d'équations pour les profils. Un modèle jouet de ce système est résolu dans un cadre de fonctions analytiques, à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevskaya, et d'une version de celui-ci assurant l'analyticité en temps et en espace. On montre ensuite que, à travers les résonances et les amplifications, une configuration particulière de fréquences au bord peut donner lieu à une instabilité, c'est-à-dire que la petite perturbation au bord peut intervenir à l'ordre principal dans le développement asymptotique. On étudie enfin la possibilité qu'une telle configuration de fréquences au bord existe pour l'exemple des équations d'Euler compressibles isentropiques en dimension trois d'espace.

**Mots clés :** optique géométrique, systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles, problèmes aux limites, limite haute fréquence, fonctions analytiques, condition au bord, instabilité.

---

MULTIPHASE GEOMETRIC OPTICS FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

Abstract

This thesis deals with multiphase geometric optics expansions, for hyperbolic quasilinear boundary value problems, that is, asymptotic expansions of approximate solutions for these systems, for which the forcing boundary term oscillate at high frequency with multiple planar phases on the boundary. The framework is weakly nonlinear, namely the boundary term is of order  $O(\varepsilon)$ , when the frequencies are of order  $O(1/\varepsilon)$ . In a first part, interest is made on a boundary value problem satisfying the uniform Kreiss-Lopatinskii condition, and the first term of a WKB expansion is constructed for this problem. The multiple frequencies on the boundary generate a countable infinite number of phases inside the domain, and we therefore use an almost periodic functional framework, here in the sense of Bohr. The major difficulties of this work are the lack of symmetry in the leading profile equation and the occurrence of infinitely many resonances (opposite to the simple phase case studied earlier). The leading profile is constructed as the solution of a quasilinear problem, which is solved using a priori estimates without loss of derivatives. The assumptions of this work are illustrated with the example of isentropic Euler equations in space dimension two.

The second part is devoted to the study of instabilities for geometric optics expansions of weakly stable problems, where the forcing boundary term is perturbed by a small amplitude oscillating function, of transverse frequency. Since the boundary frequencies lie in the locus where the Lopatinskii determinant is zero, the amplifications on the boundary give rise to a highly coupled system of equations for the profiles. A toy model of this system is solved in an analytical framework, using the Cauchy-Kovalevskaya theorem as well as a version of it ensuring analyticity in space and time for the solution. Then it is proven that, through resonances and amplification, a particular configuration for the phases may create an instability, in the sense that the small perturbation on the boundary may interfere at the leading order in the asymptotic expansion. Finally we study the possibility for such a configuration of frequencies to happen for the isentropic Euler equations in space dimension three.

**Keywords:** geometric optics, hyperbolic systems of partial differential equations, boundary value problems, high frequency asymptotic, analytic functions, boundary conditions, instability.