



**HAL**  
open science

# Étude et réalisation de métamatériaux acoustiques architecturés

Arthur Terroir

► **To cite this version:**

Arthur Terroir. Étude et réalisation de métamatériaux acoustiques architecturés. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université de Lille, 2022. Français. NNT : 2022ULILN008 . tel-03892778

**HAL Id: tel-03892778**

**<https://theses.hal.science/tel-03892778>**

Submitted on 10 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à  
L'UNIVERSITÉ DE LILLE  
ECOLE DOCTORALE SCIENCES DE L'INGENIERIE ET DES SYSTEMES

pour obtenir le titre de  
Docteur

spécialité  
MICRO ET NANO-TECHNOLOGIES, ACOUSTIQUE ET TELECOMMUNICATIONS

par  
ARTHUR TERROIR

## ÉTUDE ET RÉALISATION DE MÉTAMATÉRIAUX ACOUSTIQUES ARCHITECTURÉS

Thèse préparée à  
L'INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE, DE MICROELECTRONIQUE ET DE NANOTECHNOLOGIE

Soutenue le 25 mars 2022 devant la commission d'examen :

Président :	J.-F. GANGHOFFER	Professeur des universités, LEM3, Nancy
Examineurs :	B. HABERT	Agence Innovation Défense – AID/DGA
Rapporteur :	T. BRUNET	Maître de conférences, I2M, Bordeaux
	P. MARECHAL	Maître de conférences, LOMC, Le Havre
Directrice :	A.-C. HLADKY	Directrice de Recherches CNRS, IEMN, Lille
Co-directeur :	J. VASSEUR	Professeur des universités, IEMN, Lille
Co-encadrant :	C. CROËNNE	Chargé de recherches CNRS, IEMN, Lille



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier ma directrice de thèse, Anne-Christine Hladky, qui m'a accordé sa confiance pour mener à bien cette thèse. Pendant ces trois années, sa disponibilité et sa bonne humeur m'ont permis de progresser dans le monde de la recherche et ont été une source de motivation pour achever cette dure tâche qu'est la thèse.

Je souhaite aussi remercier mon co-encadrant, Charles Croënne, qui par ses précieux conseils et son expertise scientifique a été d'une aide capitale durant cette thèse. Ses qualités humaines m'ont été d'un grand soutien moral et m'ont permis de garder le cap.

Un grand merci également à mon co-directeur de thèse, Jérôme Vasseur, arrivé en cours de route, qui m'a accordé une grande disponibilité et a su par son regard extérieur questionner mes travaux et apporter une vision nouvelle sur ceux-ci.

Je remercie sincèrement Thomas Brunet, maître de conférence à l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie et Pierre Maréchal, maître de conférence au Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de se pencher sur mes travaux. En premier lieu, Jean-François Ganghoffer, professeur des universités au Laboratoire d'Etudes des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, qui a accepté de présider le jury de cette thèse et dont l'apport a été essentiel. Je remercie aussi Bertrand Habert qui a porté un intérêt certain pour mes travaux et sans qui cette thèse n'aurait pas été possible.

Je souhaite remercier Samuel Forest, directeur de recherche au CNRS au Centre des matériaux de Mines ParisTech, qui a su nous apporter une aide cruciale par son expertise pour dépasser des problématiques scientifiques importantes.

Durant ces années, j'ai eu la chance d'interagir avec différentes personnes au sein de l'ISEN : Marco Miniaci, dont l'apport a été essentiel à cette thèse, Monique Pouille et Florian Allein qui m'ont accompagné, notamment sur la partie expérimentale.

Je remercie l'Agence de l'Innovation de Défense ainsi que l'école d'ingénieur ISEN-JUNIA d'avoir accepté de financer cette thèse et de m'avoir fait confiance pour mener ce projet.

Merci en particulier à mes collègues doctorants avec qui j'ai partagé ces trois années, ces épreuves et ces bons moments, je pense à Ricardo, Paul, Sarah et Laetitia.

Enfin, je tiens à remercier du plus profond de mon cœur ma famille et ma compagne qui m'ont soutenu durant cette longue période, et ce, sans jamais faillir.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>17</b>
1.1 Discrétion et furtivité acoustiques des véhicules sous-marins . . . . .	18
1.1.1 Grandeurs physiques . . . . .	18
1.1.2 Anéchoïsme et masquage . . . . .	18
1.1.3 Objectifs et contraintes . . . . .	20
1.1.4 Solutions utilisées . . . . .	21
1.2 Métamatériaux mécaniques . . . . .	22
1.2.1 Concepts des métamatériaux mécaniques . . . . .	22
1.2.2 Grandeurs physiques . . . . .	24
1.2.3 Métamatériaux mécaniques auxétiques . . . . .	25
1.2.4 Métamatériaux mécaniques non-auxétiques . . . . .	28
1.2.5 Métamatériaux mécaniques anti-auxétiques . . . . .	29
1.2.6 Revêtement acoustique alvéolaire auxétique . . . . .	30
1.3 Structure choisie . . . . .	31
1.3.1 Structure . . . . .	31
1.3.2 Paramètres effectifs . . . . .	32
1.4 Méthodes d'homogénéisation . . . . .	33
1.4.1 Généralités . . . . .	33
1.4.2 Homogénéisation numérique statique . . . . .	35
1.5 Conclusions . . . . .	38
<b>2 Homogénéisation en milieu infini</b>	<b>39</b>
2.1 Propagation dans le milieu architecturé . . . . .	40
2.1.1 Cellule élémentaire . . . . .	40
2.1.2 Propagation d'onde acoustique . . . . .	40
2.2 Choix du tenseur de rigidité effectif . . . . .	43
2.2.1 Contrainte et déformation . . . . .	44
2.2.2 Tenseur des constantes élastiques . . . . .	45
2.2.3 Composantes du tenseur de rigidité $\tilde{C}$ . . . . .	46
2.3 Propagation d'ondes dans un milieu anisotrope . . . . .	47
2.3.1 Équation du mouvement . . . . .	47
2.3.2 Équations de Christoffel . . . . .	48
2.3.3 Inversion des équations de Christoffel . . . . .	52
2.4 Homogénéisation de la structure étudiée . . . . .	56
2.5 Validation numérique des paramètres effectifs . . . . .	60
2.5.1 Courbes de dispersion . . . . .	60
2.5.2 Fréquences propres . . . . .	61

2.6	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Homogénéisation de plaque</b>	<b>65</b>
3.1	Propagation dans une plaque architecturée . . . . .	67
3.1.1	Cellule élémentaire et conditions de frontière . . . . .	67
3.1.2	Propagation d'ondes acoustiques dans la plaque . . . . .	67
3.1.3	Utilisation des paramètres effectifs en volume infini . . . . .	69
3.2	Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité scalaire . . . . .	70
3.2.1	Modèle analytique . . . . .	70
3.2.2	Approximation basse fréquence . . . . .	75
3.2.3	Validation numérique . . . . .	77
3.3	Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité matricielle . . . . .	78
3.3.1	Introduction d'une densité matricielle . . . . .	79
3.3.2	Approximation basse fréquence . . . . .	81
3.3.3	Validation numérique . . . . .	81
3.4	Validation expérimentale . . . . .	83
3.4.1	Plaques réalisées . . . . .	83
3.4.2	Mesure statique : Essais en traction . . . . .	85
3.4.3	Mesure dynamique : Vibration de plaque . . . . .	89
3.5	Conclusion . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Applications à l'acoustique sous-marine</b>	<b>98</b>
4.1	Configurations . . . . .	99
4.1.1	Objectifs . . . . .	99
4.1.2	Référence . . . . .	99
4.1.3	Géométrie des panneaux . . . . .	100
4.1.4	Matériaux . . . . .	101
4.2	Étude paramétrique en transmission . . . . .	102
4.2.1	Étude de l'armature à vide . . . . .	102
4.2.2	Étude de l'armature avec matrice de polyuréthane . . . . .	105
4.3	Étude paramétrique en anéchoïsme . . . . .	106
4.3.1	Premiers résultats . . . . .	106
4.3.2	Conclusions de l'étude paramétrique . . . . .	110
4.3.3	Résultats majeurs . . . . .	110
4.4	Conclusions . . . . .	114
	<b>Conclusion</b>	<b>116</b>
	<b>Annexes</b>	<b>120</b>
	<b>A Matériaux utilisés</b>	<b>120</b>
	<b>B Modèle de propagation dans une plaque orthorhombique avec densité matricielle</b>	<b>122</b>

# Table des figures

1.1	Réflexion et transmission d'une onde acoustique au travers d'un panneau immergé. . . . .	18
1.2	Schéma du fonctionnement du SONAR actif et des revêtements anéchoïques prévus pour la furtivité des navires. . . . .	19
1.3	Schéma du principe de calcul de coefficient d'anéchoïsme (à gauche) et de masquage (à droite) en fonction de la réflexion et transmission du panneau [5].	19
1.4	Schéma du fonctionnement du SONAR passif et des revêtements de masquage prévus pour la discrétion des navires. . . . .	20
1.5	Schéma et photo d'un revêtement de type Alberich [5]. . . . .	21
1.6	a)Revêtement à inclusions solides. b)Revêtement à inclusions solides renforcées d'une couche élastique. c)Revêtement multi-couche à inclusions solides et vides. . . . .	23
1.7	a)Schéma de la définition du coefficient de Poisson. b)Déformation de matériaux non-auxétiques (à droite) et auxétique (à gauche). . . . .	24
1.8	Classification du coefficient de Poisson. . . . .	24
1.9	Photo de mousse ré-entrante [39]. . . . .	26
1.10	a) Matériau alvéolaire hexagonal ré-entrant [51]. b) Autres motifs existants de matériaux alvéolaires ré-entrants [54, 55, 56]. . . . .	26
1.11	Structure 3D composée de cellules hexagonales ré-entrantes [58]. . . . .	27
1.12	Cellule élémentaire d'une structure trichirale [60]. . . . .	27
1.13	Cellule élémentaire d'une structure chirale avec des ligaments circulaires [63].	28
1.14	Structure penta-mode proposée par Milton et Cherkaev [64], et réalisée par Kadic et al. [65] . . . . .	29
1.15	Structure proposée par Meza et al. [67]. . . . .	29
1.16	a) Schéma d'une structure sortante présentant de forts coefficients de Poisson anti-auxétiques. b) Plaque anti-auxétique de structures sortantes alvéolaires. c) Structures 3D anti-auxétiques composées de différentes cellules unitaires sortantes. . . . .	30
1.17	Schéma d'un revêtement composé de cellules élémentaires alvéolaires avec un coefficient de Poisson négatif. . . . .	31
1.18	Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire, sortante à droite et ré-entrante à gauche, constituant le treillis du métamatériau étudié.	31
1.19	Cartographie du coefficient de Poisson issue de l'homogénéisation discrète [2] de la structure en plaque représentée sur la figure 2.1 en fonction de $\beta$ et $\nu$ . Trois zones sont identifiées : $\nu < 0$ (bleue), $0 < \nu < 0,5$ (vert) et $0,5 < \nu < 1$ (orange). . . . .	33
1.20	Schéma du processus d'homogénéisation d'un milieu architecturé en milieu effectif. . . . .	34
1.21	a) VER de la structure périodique étudiée. b) VER soumis à une déformation $\sigma_{11}$ selon la direction $x$ . . . . .	35



1.22	Schéma des conditions aux frontières appliquées pour une déformation pure $\sigma_{11}$ . En rouge, un déplacement est imposé selon $x$ et en bleu seuls les déplacements selon $x$ sont autorisés. . . . .	37
2.1	Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant le treillis du métamatériau étudié. . . . .	40
2.2	Courbes de dispersion selon la direction principale $x$ pour la cellule élémentaire : a) $\beta = -10^\circ$ b) $\beta = 10^\circ$ c) $\beta = 30^\circ$ . . . . .	41
2.3	Schéma de la déformation des modes de volume $L$ , $T1$ et $T2$ pour une propagation selon la direction principale $x$ pour la cellule unitaire $\beta = 10^\circ$ . . . . .	41
2.4	Courbes de dispersion de la structure architecturée pour $\beta = 10^\circ$ avec les pentes à l'origine décrivant la vitesse des modes. . . . .	42
2.5	Schéma du vecteur d'onde $\vec{k}$ et des deux angles $\theta$ et $\phi$ le définissant. . . . .	43
2.6	Surfaces des lenteurs des cellules élémentaires en Plexiglas, de longueur $L = 2\text{ cm}$ , de largeur de bras $e = 1.5\text{ mm}$ et d'angle géométrique $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . Les 3 modes de volume L (bleu), S1 (rouge) et S2 (vert) sont représentés. . . . .	44
2.7	Systèmes cristallins et nombres de composantes indépendantes du tenseur de rigidité $C$ [110]. . . . .	46
2.8	Angles d'incidence utilisés pour l'homogénéisation d'un matériau orthorhombique. . . . .	53
2.9	Surfaces des lenteurs avec les contributions des coefficients élastiques pour la méthode d'homogénéisation à 6 angles d'incidence. . . . .	53
2.10	Surfaces des lenteurs avec les contributions des coefficients élastiques pour la méthode d'homogénéisation à 3 angles d'incidence. . . . .	55
2.11	Composantes du tenseur de rigidité effectif de la cellule élémentaire en Plexiglas, de longueur $L = 2\text{ cm}$ , de largeur de bras $e = 1,5\text{ mm}$ , en fonction de l'angle géométrique $\beta$ . . . . .	58
2.12	Module d'Young $E_1$ , coefficient de Poisson $\nu_{12}$ et densité $\rho$ effectifs de la cellule élémentaire en Plexiglas, de longueur $L = 2\text{ cm}$ et de largeur de bras $e = 1,5\text{ mm}$ , en fonction de l'angle géométrique $\beta$ . . . . .	59
2.13	Courbes polaires du module d'Young normalisé $E$ et du coefficient de Poisson $\nu$ effectifs de la cellule élémentaire en Plexiglas dans le plan $(xy)$ obtenues par rotation du tenseur de rigidité $\tilde{C}$ . . . . .	59
2.14	Schéma de la cellule unitaire et du milieu homogène équivalent considéré pour le calcul des courbes de dispersion. . . . .	60
2.15	Courbes de dispersion selon la direction principale $x$ pour la cellule unitaire et les milieux homogènes équivalents : a) $\beta = -10^\circ$ b) $\beta = 10^\circ$ c) $\beta = 30^\circ$ . . . . .	61
2.16	Surfaces des lenteurs pour 3 cellules élémentaires (points) en Plexiglas, de longueur $L = 2\text{ cm}$ , de largeur de bras $e = 1,5\text{ mm}$ et d'angle géométrique $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ et pour les milieux effectifs correspondants (cercles). . . . .	62
2.17	Schéma du bloc architecturé et du bloc homogène équivalent considéré pour le calcul des fréquences propres . . . . .	63
2.18	Fréquences propres du bloc architecturé et erreur relative des fréquences propres du bloc homogène équivalent pour les angles $\beta = -10^\circ, \beta = 10^\circ$ et $\beta = 30^\circ$ . . . . .	63
3.1	Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant la plaque architecturée. . . . .	67
3.2	Schéma des modes de Lamb dans une plaque . . . . .	68

3.3	Courbes de dispersion selon la direction principale $x$ pour la cellule élémentaire : a) $\beta = -10^\circ$ b) $\beta = 10^\circ$ c) $\beta = 30^\circ$ . . . . .	68
3.4	Surfaces des lenteurs des cellules élémentaires en plaque : a) $\beta = -10^\circ$ b) $\beta = 10^\circ$ c) $\beta = 30^\circ$ . Les 3 modes de plaque $S0$ , $SH$ et $A0$ sont représentés. . . . .	69
3.5	Courbes de dispersion des plaques architecturées étudiées ainsi que des plaques homogènes équivalentes avec les paramètres effectifs déterminés en volume infini. . . . .	70
3.6	Modèle de plaque infinie dans le plan $(xy)$ et d'épaisseur finie $h$ (selon $z$ ). . . . .	71
3.7	Schéma du vecteur d'onde $\vec{n}$ dans la plaque. . . . .	71
3.8	Courbes de dispersion des plaques architecturées et effectives pour la configuration $\beta = 10^\circ$ . Les approximations basses fréquences des vitesses des ondes de Lamb sont représentées pour les paramètres effectifs en volume. . . . .	78
3.9	Courbes de dispersion des plaques architecturées ainsi que des plaques effectives équivalentes avec densité matricielle. . . . .	83
3.10	Surfaces des lenteurs des trois plaques étudiées. Les 2 modes de Lamb et le mode $SH$ sont représentés pour les plaques architecturées (en bleu) et pour les plaques effectives équivalentes (en rouge) avec les paramètres issus de l'homogénéisation quasi-statique à densité matricielle. . . . .	84
3.11	Schéma de la géométrie des plaques réalisées pour les mesures statiques et dynamiques. . . . .	85
3.12	Plaques réalisées pour les mesures statiques et dynamiques. . . . .	86
3.13	Photo de l'essai en traction uniaxial pour la plaque réalisée $\beta = 10^\circ$ . . . . .	87
3.14	Déformation de la plaque $\beta = 10^\circ$ au cours de l'essai en traction. . . . .	88
3.15	Résultats des mesures en traction sur les 3 plaques réalisées $\beta = -10^\circ, 10^\circ$ et $30^\circ$ . . . . .	89
3.16	Dispositif expérimental d'identification des modes de flexion des plaques. . . . .	90
3.17	Schéma de la mesure de la plaque avec les points de suspension (bleu), les points de mesure (rouge) et le point d'excitation du marteau d'impact (vert). . . . .	90
3.18	Photo du dispositif expérimental d'identification des modes de flexion des plaques suspendues avec une excitation aérienne. . . . .	91
3.19	Réponse fréquentielle du haut-parleur soumis à un signal glissant de 2 à 200 $Hz$ au niveau de la plaque ( $d_2 = 30\text{ cm}$ ). . . . .	92
3.20	Modes de flexion de la plaque architecturée obtenus expérimentalement et par simulation éléments finis. L'histogramme représente les erreurs relatives des fréquences simulées par rapport aux fréquences mesurées. Les courbes correspondent aux fréquences pour les modes de la plaque simulée. . . . .	92
3.21	Déformées des modes de flexion de la plaque architecturée obtenus expérimentalement (en bas) et par simulation éléments finis (en haut). Pour chaque mode, la déformation des plaques est présentée pour des angles $\beta = -10^\circ, 10^\circ$ et $30^\circ$ de gauche à droite. . . . .	93
3.22	Modes de flexion de la plaque architecturée et homogène obtenus par simulation éléments finis. L'histogramme représente les erreurs relatives des fréquences des modes de la plaque homogène par rapport à celles de la plaque architecturée. Les courbes correspondent aux fréquences pour les modes de la plaque architecturée. . . . .	94
3.23	Déformées des modes de flexion de la plaque architecturée (en haut) et homogène (en bas) obtenus par simulation éléments finis. Pour chaque mode, la déformation des plaques est présentée pour des angles $\beta = -10^\circ, 10^\circ$ et $30^\circ$ de gauche à droite. . . . .	95

4.1	Coefficients d'anéchoïsme, de transmission et de réflexion de la matrice de polyuréthane d'une épaisseur totale $L = 10 \text{ cm}$ . . . . .	99
4.2	Schéma des panneaux acoustiques composés d'une matrice de polymère renforcée par une armature. . . . .	100
4.3	Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant l'armature des panneaux. . . . .	100
4.4	Schéma des dimensions de la cellule unitaire en fonction du nombre de cellules de l'armature. . . . .	101
4.5	Configurations de simulation des panneaux immergés. (A gauche) Cas de la simulation en réflexion/transmission. (A droite) Cas de la simulation en anéchoïsme. . . . .	102
4.6	Schéma des panneaux acoustiques composés d'une armature à vide ou contenant une matrice de polyuréthane. . . . .	103
4.7	Transmission d'un panneau constitué de la structure à vide en fonction du nombre de cellules $N$ et de l'angle $\beta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.3. Les valeurs encadrées par des pointillés sur le graphe en bas à gauche correspondent à la courbe de transmission (en tirets rouges) de la figure 4.8. . . . .	104
4.8	Réflexion (courbes rouges) et transmission (courbes bleues) d'un panneau constitué de la structure en PLA à vide avec les paramètres : $N = 5$ , $a = 2 \text{ cm}$ , $e = 1 \text{ mm}$ et $\beta = 15^\circ$ . Les déformations du panneau pour les minima de $t$ sont représentées. . . . .	105
4.9	Coefficients de transmission, de réflexion et d'absorption d'un panneau constitué de la structure avec et sans matrice de polyuréthane et borné par des interfaces d'acier en fonction du matériau de l'armature et de l'angle $\beta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.4. . . . .	107
4.10	Coefficients d'absorption d'un panneau constitué de la structure avec une matrice de polyuréthane et borné par des interfaces d'acier ou de polyuréthane en fonction de l'angle $\beta$ . . . . .	108
4.11	Coefficient d'anéchoïsme des panneaux en fonction du nombre de cellules $N$ , de l'angle $\beta$ et des matériaux considérés. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.5. Le $C_a$ du panneau avec seulement la matrice de polyuréthane est montré en bas des différents graphiques et rappelé en haut. . . . .	109
4.12	Coefficient d'anéchoïsme des panneaux en fonction du nombre de cellules $N$ et du facteur de finesse $\eta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.6. . . . .	110
4.13	Schéma des panneaux acoustiques sélectionnés présentant de bonnes performances en anéchoïsme. . . . .	111
4.14	Coefficient d'anéchoïsme des 3 panneaux choisis pour leurs bonnes performances en anéchoïsme dans la bande $[1 - 3] \text{ kHz}$ . La référence correspond au $C_a$ de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7. . . . .	112
4.15	Coefficient d'anéchoïsme du panneau $n^\circ 1$ choisi pour sa performance en anéchoïsme en basses fréquences, $f < 3 \text{ kHz}$ . La référence correspond au $C_a$ de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7. . . . .	112
4.16	Coefficient d'anéchoïsme du panneau $n^\circ 2$ choisi pour sa performance en anéchoïsme en hautes fréquences, $f > 3 \text{ kHz}$ . La référence correspond au $C_a$ de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7. . . . .	113

4.17	Déformation des 2 premiers modes du panneau $n^{\circ}$ 2 (figure 4.16) en l'absence de coins. . . . .	113
4.18	Coefficient d'anéchoïsme du panneau $n^{\circ}$ 3 choisi pour sa performance en anéchoïsme en hautes fréquences, $f > 3 kHz$ . La référence correspond au $C_a$ de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7. . . . .	114



# Introduction

L'acoustique sous-marine, ou l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans l'eau, fait l'objet de nombreuses études ces dernières années. En particulier, la détection sous-marine se pose comme un challenge technologique important lié à de grands enjeux dans le domaine militaire. De même, dans le domaine civil, la pollution sonore sous-marine est un sujet de préoccupation, en raison de l'augmentation du trafic maritime et des installations industrielles en mer au cours du dernier siècle. Pour répondre à ces besoins, des outils de contrôle des ondes acoustiques sous-marines sont nécessaires. Différents dispositifs permettant de limiter le rayonnement acoustique des navires ou d'atténuer les échos rétrodiffusés ont donc été étudiés ces dernières décennies.

La détection sous-marine se base sur des techniques SONAR fonctionnant sur deux modes distincts, un mode actif avec une détection des objets par la réflexion qu'ils produisent après l'émission d'une onde et un mode passif par la captation des bruits environnants. Pour ne pas être détecté, un sous-marin doit alors répondre à deux contraintes : ne pas rayonner de bruit dans son environnement et limiter les réflexions (rétrodiffusions) sur sa coque extérieure. Les premières solutions ont été développées pendant la seconde guerre mondiale par la marine allemande avec l'ajout de revêtements dits « Alberich » sur certains sous-marins. Si ces revêtements étaient efficaces pour contrer les systèmes SONAR de l'époque, ils ne peuvent pas être adaptés aux systèmes actuels, en particulier en raison de l'utilisation d'ondes acoustiques de plus en plus basses fréquences.

Aujourd'hui, de nouvelles solutions sont étudiées afin de répondre à ce développement du SONAR, avec des revêtements comprenant de nouvelles technologies comme celles des métamatériaux. En particulier, de nombreuses études ont été consacrées à des revêtements avec des réseaux périodiques d'inclusions solides baptisés « cristaux phononiques ». Dans ces structures la diffraction des ondes par un réseau d'inclusions donne naissance à des bandes de fréquences où la propagation est interdite. Ces mécanismes permettent notamment l'amélioration de l'atténuation des ondes par le revêtement. Dans le cas où les inclusions sont résonantes, on parle de métamatériau. La résonance des inclusions permet d'introduire un nouveau mécanisme d'absorption lié à l'inclusion en plus de l'effet de la périodicité.

L'objet de cette thèse est d'explorer le potentiel de nouveaux métamatériaux, dits architecturés, présentant des propriétés mécaniques inhabituelles, pour des applications de furtivité sous-marine. Ces métamatériaux correspondent à des structures constituées d'une répétition périodique d'un motif élémentaire dont les caractéristiques mésoscopiques (géométrie des motifs et matériaux constitutifs) permettent de modifier les propriétés mécaniques macroscopiques et de leur donner des valeurs inhabituelles, en particulier pour le coefficient de Poisson. Ainsi les structures dites « auxétiques » présentent un coefficient de Poisson négatif, alors que les « anti-auxétiques » correspondent à des valeurs supérieures à 0,5.

Des milieux avec des coefficients de Poisson dépassant la limite supérieure isotrope peuvent être observés dans la nature pour des structures biologiques en interaction avec des ondes acoustiques. Dans le système auditif des mammifères, les cellules ciliées externes

sont dans ce cas, avec des parois cellulaires présentant un coefficient de Poisson proche de 1 [1]. Elles sont sensibles à des variations d'amplitude d'ondes ayant des fréquences comprises entre 20  $Hz$  et 20  $kHz$  dans l'eau alors que leur dimension est de quelques  $\mu m$ . Une structure avec de telles propriétés mécaniques peut être obtenue avec des métamatériaux architecturés[2]. Son potentiel pour des applications de détection sous-marine est exploré dans le cadre de cette thèse.

L'étude de cette structure est faite en volume infini dans les trois directions, ce qui permet notamment la détermination numérique de ses propriétés effectives. Cependant l'étude expérimentale de ces propriétés est difficile pour des blocs avec une épaisseur importante, les essais classiques pour la caractérisation des matériaux s'appliquant à des plaques.

Le manuscrit de thèse est divisé en quatre chapitres.

Le premier présente le contexte scientifique de la thèse. Les concepts et grandeurs de l'acoustique sous-marine sont d'abord introduits, avec les coefficients de masquage et d'anéchoïsme permettant de caractériser les revêtements sous-marins. Les objectifs de furtivité et les contraintes liées à l'application visée sont définis. Le chapitre décrit ensuite des solutions existantes qui adoptent différentes stratégies pour répondre aux problématiques de détection sous-marine. Ces stratégies consistent en l'ajout d'inclusions, solides ou non, dans une matrice de polymère absorbante. Le concept de métamatériau mécanique est présenté et une revue succincte des structures périodiques avec un motif élémentaire permettant l'obtention de coefficients de Poisson en dehors des limites classiques est faite. Finalement, une structure présentant un coefficient de Poisson anti-auxétique est choisie et plus amplement décrite. Des méthodes d'homogénéisation sont par la suite introduites pour déterminer ses propriétés mécaniques effectives.

Dans le deuxième chapitre, la propagation des ondes acoustiques dans un volume infini architecturé composé de la structure choisie est étudiée et une méthode d'homogénéisation est introduite. L'étude de la propagation des ondes dans un volume infini homogène permet de déterminer les relations entre les caractéristiques des modes se propageant et les propriétés mécaniques du matériau homogène. Ces relations sont utilisées dans le cadre de la méthode d'homogénéisation afin de remonter aux propriétés mécaniques effectives d'un matériau à partir des modes calculés numériquement par simulation éléments finis avec deux logiciels commerciaux : ATILA [3] et COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> [4]. Ces propriétés montrent la possibilité d'obtenir différents coefficients de Poisson en dehors des limites classiques, en particulier  $\nu > 0,5$ .

Le troisième chapitre porte sur la propagation des ondes dans une plaque architecturée. Le milieu effectif issu de l'homogénéisation précédente de la structure est donc étudié dans le cas de la propagation d'ondes dans des plaques d'épaisseur finie. Il est montré que le matériau effectif obtenu ne permet pas de modéliser la propagation dans la structure avec une épaisseur finie et qu'une correction de ses propriétés mécaniques est nécessaire pour obtenir une bonne modélisation de la propagation. Cette correction passe par la modification du modèle de matériau considéré pour les propriétés effectives avec l'introduction d'une densité matricielle. Finalement, l'existence des coefficients de Poisson attendus, hors des limites classiques, est mesurée sur des plaques en déformation statique avec un essai en traction. Une mesure dynamique complémentaire est faite par l'identification des modes de flexion.

Le dernier chapitre présente une application du métamatériau étudié répondant aux problématiques de la détection sous-marine avec l'étude de panneaux pour la furtivité acoustique. Des panneaux composés d'une matrice de polymère renforcée d'une armature faite du métamatériau sont étudiés par simulation éléments finis. L'inclusion de la structure précédemment étudiée dans des panneaux absorbants permet théoriquement une

amélioration de ses performances, par une modification de son comportement et de ses propriétés. Une étude paramétrique est d'abord présentée afin d'étudier le comportement des panneaux en fonction de leurs paramètres géométriques. A l'issue de cette étude, trois panneaux sont sélectionnés pour leurs performances.





# Chapitre 1

## État de l'art

Ce chapitre présente le contexte scientifique de la thèse, en particulier les notions de discrétion et de furtivité de l'acoustique sous-marine. Les solutions classiques pour l'amélioration des performances en discrétion et en furtivité des sous-marins grâce à des revêtements de coque spécifiques sont rapidement passées en revue. Le concept de métamatériau mécanique est ensuite introduit, avec des structures périodiques présentant des propriétés mécaniques inhabituelles. En particulier, des métamatériaux mécaniques présentant des coefficients de Poisson hors du commun sont étudiés. Des structures avec des coefficients de Poisson négatifs, dits auxétiques, et très positifs, dits anti-auxétiques, sont présentées. Finalement, une structure anti-auxétique est choisie pour les travaux de thèse et deux méthodes d'homogénéisation sont présentées.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Discrétion et furtivité acoustiques des véhicules sous-marins</b>	<b>18</b>
1.1.1	Grandeurs physiques . . . . .	18
1.1.2	Anéchoïsme et masquage . . . . .	18
1.1.3	Objectifs et contraintes . . . . .	20
1.1.4	Solutions utilisées . . . . .	21
<b>1.2</b>	<b>Métamatériaux mécaniques</b> . . . . .	<b>22</b>
1.2.1	Concepts des métamatériaux mécaniques . . . . .	22
1.2.2	Grandeurs physiques . . . . .	24
1.2.3	Métamatériaux mécaniques auxétiques . . . . .	25
1.2.4	Métamatériaux mécaniques non-auxétiques . . . . .	28
1.2.5	Métamatériaux mécaniques anti-auxétiques . . . . .	29
1.2.6	Revêtement acoustique alvéolaire auxétique . . . . .	30
<b>1.3</b>	<b>Structure choisie</b> . . . . .	<b>31</b>
1.3.1	Structure . . . . .	31
1.3.2	Paramètres effectifs . . . . .	32
<b>1.4</b>	<b>Méthodes d'homogénéisation</b> . . . . .	<b>33</b>
1.4.1	Généralités . . . . .	33
1.4.2	Homogénéisation numérique statique . . . . .	35
<b>1.5</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>38</b>

---

# 1.1 Discrétion et furtivité acoustiques des véhicules sous-marins

## 1.1.1 Grandeurs physiques

L'acoustique sous-marine a pour but l'étude des ondes acoustiques se propageant dans l'environnement sous-marin. En particulier, on s'intéresse à la propagation des ondes acoustiques au travers de structures immergées. La structure prend la forme d'un panneau d'épaisseur finie soumis à une onde incidente venant du milieu extérieur. Une partie de l'onde incidente est alors transmise à travers le panneau et une autre est réfléchi (figure 1.1). Les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  en amplitude sont alors définis par le rapport des pressions acoustiques respectivement réfléchies et transmises par le panneau par rapport à la pression incidente.

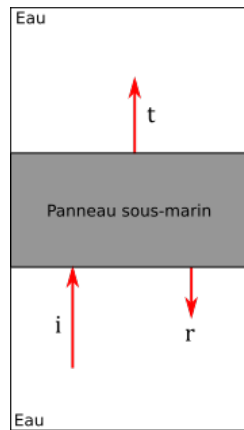


FIGURE 1.1 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique au travers d'un panneau immergé.

L'absorption, représentant la dissipation d'énergie dans le milieu, peut être définie comme :

$$A = 1 - |r|^2 - |t|^2. \quad (1.1)$$

Lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie dans le matériau, l'absorption est nulle.

Dans la suite, la discrétion et la furtivité acoustiques sont introduites avec les coefficients d'anéchoïsme et de masquage permettant de les caractériser et de mesurer la capacité d'un revêtement à contrecarrer les technologies de détection sous-marine.

## 1.1.2 Anéchoïsme et masquage

La détection sous-marine est essentiellement basée sur l'utilisation de systèmes SONAR (*SOund Navigation and Ranging*). Les ondes électromagnétiques n'étant pas adaptées à la détection sous-marine, le RADAR n'est pas utilisable et des ondes acoustiques sont utilisées avec le SONAR. Cette technologie permet la navigation, la communication ainsi que la détection des objets sous-marins à l'aide des ondes acoustiques. Deux types de détection sont à différencier, la détection active et la détection passive. Pour réduire les probabilités de détection, on utilise dans les deux cas des revêtements de coque respectivement anéchoïques et de masquage.

Le principe d'un SONAR actif est d'envoyer une onde acoustique dans l'environnement sous-marin et d'analyser les signaux rétrodiffusés, non seulement pour détecter la présence de structures diffusantes dans l'eau, mais aussi pour les localiser et les identifier

(figure 1.2). Afin de ne pas être détecté, la furtivité de l'objet est importante et consiste à ce qu'aucun écho ne soit renvoyé. La furtivité est obtenue en installant un revêtement acoustique sur la coque du navire qui a pour fonction d'absorber les ondes incidentes. Le revêtement a pour but de limiter l'émission d'échos par la coque, dans ce cas il est dit « anéchoïque » (figure 1.2). L'efficacité de tels revêtements est mesurée en considérant le rapport de la pression des ondes réfléchies et des ondes incidentes, défini comme « l'anéchoïsme ».

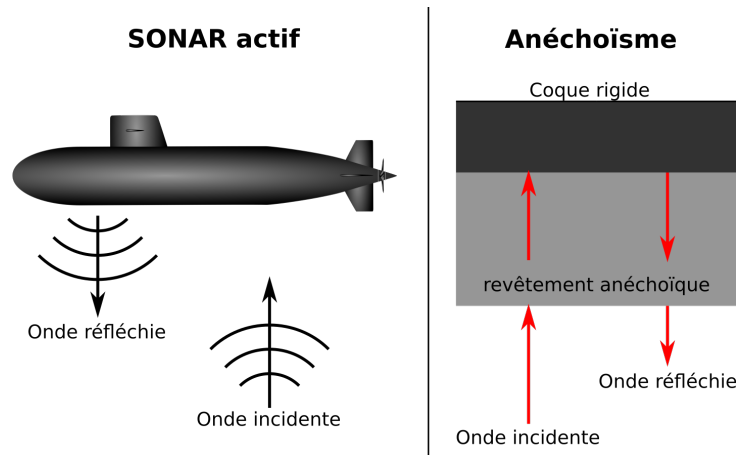


FIGURE 1.2 – Schéma du fonctionnement du SONAR actif et des revêtements anéchoïques prévus pour la furtivité des navires.

Afin de mesurer les performances en anéchoïsme des revêtements, il n'est pas toujours possible de considérer une condition de coque rigide pour le panneau, en particulier expérimentalement. Une analogie avec un panneau bordé de deux couches d'eau, avec l'une comprise entre le panneau et une condition de coque rigide, peut être faite (figure 1.3). Le coefficient d'anéchoïsme  $C_a$  peut être déduit de la réflexion  $r$  et de la transmission  $t$  du panneau [5] comme :

$$C_a = r + \frac{t^2}{1 - r}. \quad (1.2)$$

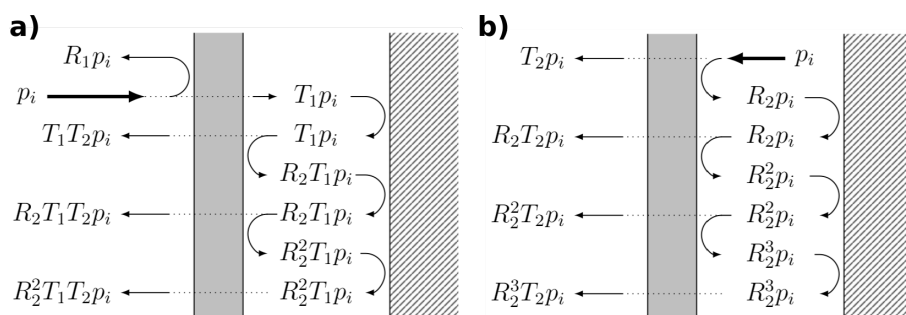


FIGURE 1.3 – Schéma du principe de calcul de coefficient d'anéchoïsme (à gauche) et de masquage (à droite) en fonction de la réflexion et transmission du panneau [5].

La détection passive se base sur l'utilisation du SONAR en fonctionnement passif, et consiste à capter les ondes acoustiques de l'environnement et à détecter les signaux caractéristiques issus des navires. Ces ondes acoustiques sont généralement produites par la vibration de la coque ou des hélices du sous-marin (figure 1.4). Dans ce cas, pour ne pas être repéré, il est nécessaire de réduire le bruit rayonné par le sous-marin, on parle de « discrétion ». Une méthode possible est d'utiliser des revêtements acoustiques, dits « de

masquage », isolant le navire de son environnement. Les performances de ces revêtements sont mesurées par le rapport des pressions rayonnées par la paroi avec et sans le revêtement (figure 1.4).

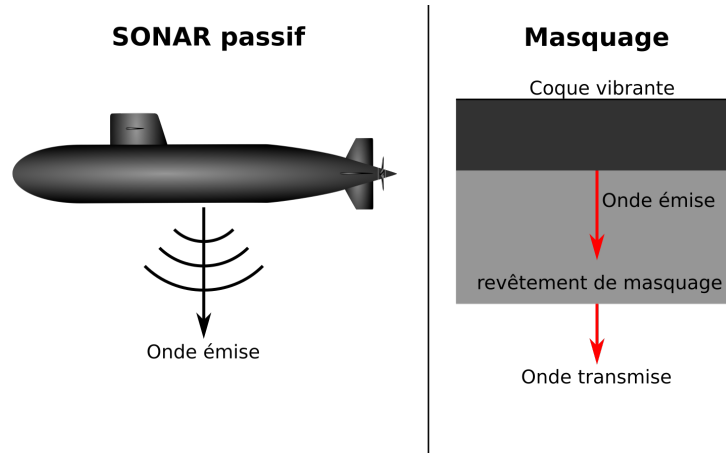


FIGURE 1.4 – Schéma du fonctionnement du SONAR passif et des revêtements de masquage prévus pour la discrétion des navires.

De manière analogue au coefficient d’anéchoïsme, le coefficient de masquage des revêtements  $C_m$  peut être calculé à partir de la réflexion  $r$  et de la transmission  $t$  [5] du revêtement comme (figure 1.3) :

$$C_m = \frac{t}{1 - r}. \quad (1.3)$$

Pour les 2 types de revêtements, les matériaux considérés doivent présenter des propriétés d’atténuation de l’énergie acoustique et doivent être compatibles avec le milieu sous-marin. En milieu sous-marin, des problématiques de pression statique se posent pour la performance des revêtements. De plus, des problématiques d’adaptation d’impédance sont aussi à prendre en compte pour les revêtements anéchoïques. Une façon d’obtenir une bonne atténuation des ondes acoustiques réfléchies et rayonnées par la structure immergée est d’utiliser une couche de matériau absorbant d’une épaisseur de quelques longueurs d’onde. Cependant, des contraintes d’épaisseur et de poids doivent être introduites de manière à assurer la flottabilité et la manœuvrabilité des navires.

### 1.1.3 Objectifs et contraintes

Plusieurs critères sont définis pour la réalisation des revêtements sous-marins liés aux objectifs de performance en anéchoïsme ainsi qu’aux contraintes de l’acoustique sous-marine :

- des bonnes performances en anéchoïsme en basse fréquence,  $f < 3 \text{ kHz}$ ,
- une faible épaisseur  $L$  et densité  $\rho$  du revêtement :  $L < 10 \text{ cm}$  et  $\rho < 1,6$ ,
- une bonne résistance à la pression statique sous-marine, avec une conservation des performances en anéchoïsme sous la pression.

Plusieurs solutions utilisées répondant partiellement ou totalement à ces contraintes sont présentées dans la suite.

## 1.1.4 Solutions utilisées

### 1.1.4.1 Alberich

Une solution historique a été utilisée durant la Seconde Guerre mondiale avec un revêtement issu de la technologie « Alberich ». Développée par H. Meyer [6], la couverture Alberich consiste en un revêtement de caoutchouc comprenant des inclusions d'air régulières de deux tailles différentes (figure 1.5). Ces deux types d'inclusions ont pour but d'améliorer la performance en absorption des revêtements pour deux fréquences correspondant aux fréquences des SONAR. Les inclusions d'air soumises à une excitation ont un mécanisme de résonance pour deux fréquences correspondant aux deux tailles, créant une dissipation dans le matériau.

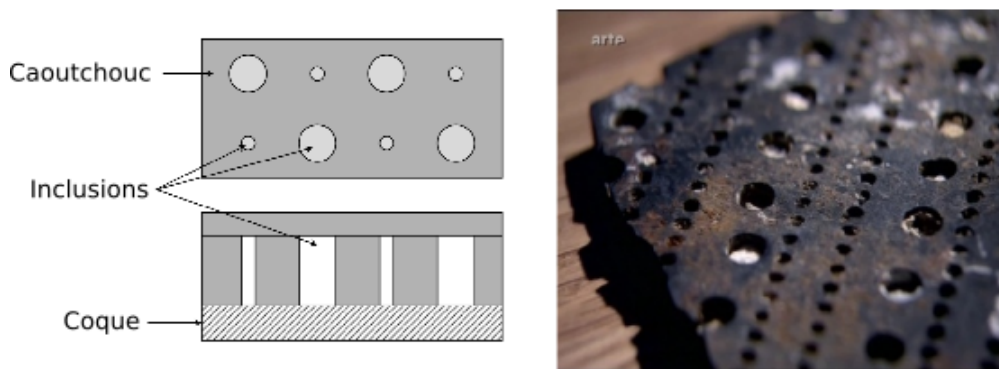


FIGURE 1.5 – Schéma et photo d'un revêtement de type Alberich [5].

Les revêtements Alberich (figure 1.5) ont d'abord été étudiés par les travaux de Hladky-Hennion et Decarpigny [7] avec une étude éléments finis de la transmission des ondes acoustiques à travers un milieu élastique immergé : des cavités cylindriques de hauteur finie sont placées de manière périodique dans le milieu. Les modes radiaux « de respiration », mis en évidence par les travaux de Gaunaud [8], et les modes de paroi « peau de tambour », étudiés par Lane [9], des cavités cylindriques sont retrouvés numériquement.

Ce type de revêtement a pu être utilisé et modifié par la suite avec l'introduction de nouvelles formes de cavités sphériques [10, 11, 12]. Le problème est cette fois-ci traité avec un modèle semi-analytique, et il est montré que la considération de cavités sphériques permet une conversion des ondes longitudinales en ondes transversales, favorisant l'atténuation dans la matrice.

Finalement, il est à noter que ces revêtements sont limités par le mécanisme de résonance de la cavité dépendant de sa taille. La modulation de leurs performances est alors limitée par l'épaisseur maximale fixée des revêtements et les contraintes de pression statique sous-marine.

### 1.1.4.2 Elastomères

Les élastomères sont largement utilisés pour des applications d'acoustique sous-marine pour leurs propriétés viscoélastiques permettant la dissipation de l'énergie vibratoire des ondes acoustiques. Un autre avantage des élastomères est que leur densité est assez proche de celle de l'eau, ce qui permet une bonne adaptation d'impédance du revêtement avec l'eau. Cette adaptation d'impédance permet une bonne transmission de l'énergie acoustique de l'onde incidente au revêtement absorbant. Une mauvaise adaptation d'impédance ne permet pas une bonne transmission de l'énergie de l'onde acoustique et donne donc une faible dissipation de celle-ci dans le revêtement. La dissipation d'énergie acoustique

dans l'élastomère est particulièrement forte pour les ondes transverses mais moindre pour les ondes longitudinales. En conséquence, les élastomères sont utilisés en tant que matrice permettant l'introduction des pertes et leurs performances sont améliorées avec l'inclusion d'éléments supplémentaires. L'introduction de diffuseurs solides [13] permet la diffusion des ondes et leur conversion d'ondes longitudinales en ondes transversales dans la matrice d'élastomère, augmentant ainsi la dissipation de l'énergie acoustique par celle-ci. L'utilisation de matériaux à gradient de propriétés permet une meilleure manipulation des ondes acoustiques [14, 15], avec une bonne adaptation d'impédance.

### 1.1.4.3 Micro-inclusionnaires

Les matériaux micro-inclusionnaires sont des élastomères comprenant des cavités microscopiques. Le but de ces micro-inclusions est de modifier les paramètres mécaniques de l'élastomère. L'ajout d'inclusions permet d'une part d'ajuster la densité globale du matériau et d'autre part de provoquer un ralentissement des ondes acoustiques dans le milieu, augmentant ainsi son absorption.

A hautes fréquences les matériaux micro-inclusionnaires peuvent être considérés comme des métamatériaux [16, 17], des matériaux en général constitués d'un motif élémentaire se répétant et permettant l'obtention de propriétés particulières. Cependant à basse fréquence la taille des inclusions micrométriques est très faible devant les longueurs d'onde observées et le matériau peut être considéré comme homogène.

De par la pression statique, les inclusions se déforment et les performances du revêtement peuvent être affectées [18].

### 1.1.4.4 Inclusions solides

Des inclusions solides peuvent aussi être considérées dans la matrice d'élastomère afin d'améliorer les performances du revêtement. L'ajout d'inclusions solides permet une meilleure résistance du matériau à la pression statique [13, 19, 20].

Dans un premier temps, des diffuseurs solides cylindriques [13] (figure 1.6) permettent la conversion des ondes longitudinales en ondes transversales facilement atténuées par la matrice d'élastomère. Dans un second temps, les performances sont accrues par l'ajout d'une couche de polymère autour du cœur solide centré [21, 5] ou non [22] (figure 1.6).

L'utilisation de plusieurs couches de diffuseurs avec leurs propres fréquences de résonance permet une absorption sur une plus large bande de fréquence [23]. De même des combinaisons d'inclusions solides et vides peuvent être considérées [24, 25] (figure 1.6). Finalement, un assemblage multi-couche de diffuseurs de motifs et de tailles multiples, obtenu par optimisation, permet aussi d'obtenir des revêtements acoustiques avec une absorption large bande [26].

## 1.2 Métamatériaux mécaniques

### 1.2.1 Concepts des métamatériaux mécaniques

Les métamatériaux sont généralement définis comme des matériaux artificiels possédant des propriétés hors du commun (« méta » signifiant « au-delà » étymologiquement). Ces matériaux sont composés d'une micro-structure, de dimension très faible devant les longueurs d'onde d'intérêt, dont le comportement permet l'obtention de ces propriétés hors du commun. Cette structuration prend souvent la forme d'un motif individuel noyé dans un milieu homogène hôte, on parle « d'inclusion ». L'ensemble est généralement

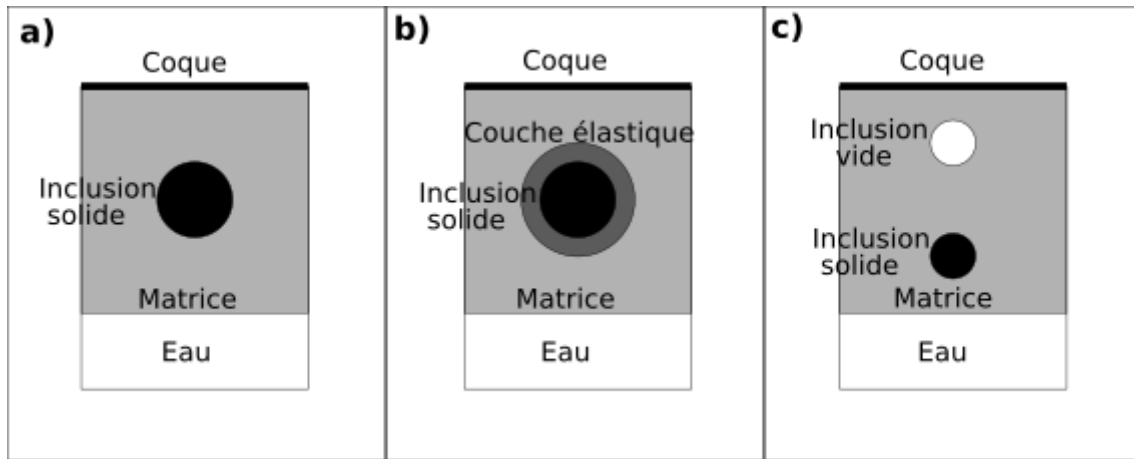


FIGURE 1.6 – a) Revêtement à inclusions solides. b) Revêtement à inclusions solides renforcées d’une couche élastique. c) Revêtement multi-couche à inclusions solides et vides.

répété de manière périodique afin de former la structuration globale, et est appelé cellule « élémentaire ». Il est à noter que la périodicité n’est pas systématique. Ces propriétés élastiques, dites hors du commun, ne sont pas conventionnelles dans la nature et peuvent prendre des valeurs négatives ou extrêmes, excédant les limites classiques.

Les métamatériaux ont d’abord été étudiés dans le cadre de l’électromagnétisme et de l’optique [27, 28] puis adaptés au cas de l’acoustique [29]. Dans le cas des métamatériaux acoustiques, les propriétés viennent généralement du comportement de l’inclusion. Ce point permet de les distinguer des cristaux phononiques, constitués d’un réseau périodique de diffuseurs acoustiques dans une matrice avec un fort contraste d’impédance, dont le comportement est dû à la périodicité de la structure [30]. Dans le cas d’une inclusion résonante, on parle alors de cristaux phononiques localement résonants [31].

Une classe spécifique de métamatériaux est abordée dans la suite : les métamatériaux mécaniques, visant à obtenir des propriétés élastiques non-usuelles dans la nature. Contrairement au cas des métamatériaux présentés précédemment, ceux-ci sont généralement étudiés en déformation statique plutôt qu’en dynamique. L’attention est notamment portée à l’obtention de coefficients de Poisson spécifiques, comme les coefficients de Poisson négatifs [32]. Des combinaisons de propriétés mécaniques sont aussi envisagées, notamment pour des matériaux restant dans le domaine élastique pour de fortes déformations avec une faible rigidité [33]. L’étude de métamatériaux mécaniques avec des coefficients de Poisson positifs, bien que moins importante que pour ceux négatifs, est aussi abordée [34]. Ces propriétés élastiques recherchées sont issues des propriétés mécaniques de la microstructure mésoscopique. La relation entre l’échelle macroscopique de la structure et l’échelle mésoscopique de la cellule élémentaire est donc importante à étudier. L’intérêt récent pour les métamatériaux mécaniques est notamment dû aux développements dans le domaine de la fabrication additive [35] avec une réalisation facilitée et plus précise des microstructures.

L’étude portera sur les métamatériaux mécaniques présentant des coefficients de Poisson spécifiques. Le coefficient de Poisson est défini par le rapport  $\nu$  entre la déformation transverse  $e_t$  et la déformation longitudinale  $e_l$  dans la direction de la contrainte appliquée  $\sigma$  comme  $\nu = \frac{e_t}{e_l}$  [36, 37] (figure 1.7.a).

Ce coefficient peut être reformulé en reliant les variations de forme et de taille pour un matériau isotrope comme [38] :

$$\nu = \frac{3\frac{B}{G} - 2}{6\frac{B}{G} + 2}, \quad (1.4)$$



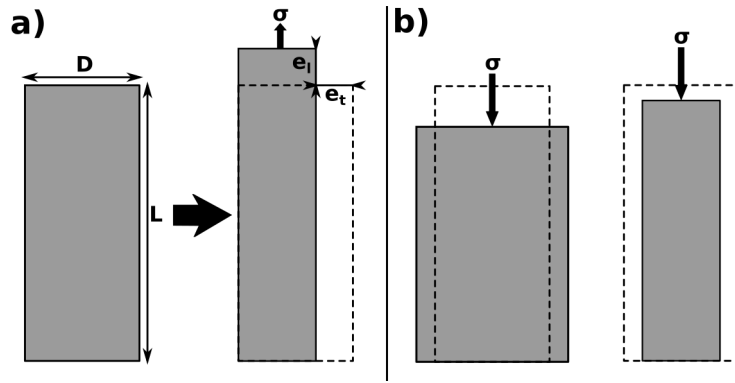


FIGURE 1.7 – a)Schéma de la définition du coefficient de Poisson. b)Déformation de matériaux non-auxétiques (à droite) et auxétiques (à gauche).

où  $B$  est le module d'élasticité isostatique et  $G$  le module de cisaillement. Les limites du coefficient de Poisson isotrope peuvent donc être définies comme  $-1 < \nu < 0,5$  en fonction du rapport  $\frac{B}{G}$ . Dans le cas de la limite haute où  $\nu = 0,5$ , le rapport  $\frac{B}{G}$  est très grand devant 1, désignant un milieu incompressible. A l'inverse dans le cas de la limite basse où  $\nu = -1$ , le rapport  $\frac{B}{G}$  est très petit devant 1, pour des matériaux très compressibles (structures ré-entrantes [32]), dits « auxétiques ». Des matériaux auxétiques isotropes sont donc possibles, par exemple pour des mousses ré-entrantes [39]. Ces mousses sont obtenues par l'application d'une compression triaxiale sur des mousses conventionnelles pendant la fabrication (cycles de chauffage et refroidissement). Après ce traitement, l'effet du coefficient de Poisson auxétique observé résulte d'un agrandissement des cellules ré-entrantes des mousses alors qu'elles sont étirées (figure 1.7.b).

Pour des structures anisotropes, le coefficient de Poisson est défini selon les directions principales du matériau et les limites isotropes ne s'appliquent alors plus, et il est possible d'obtenir des valeurs du coefficient de Poisson inhabituelles.

Finalement, les différents domaines du coefficient de Poisson sont résumés sur la figure 1.8, et des structures sont présentées dans la section suivante, d'abord auxétiques  $\nu < 0$ , puis non-auxétiques  $0 < \nu < 0,5$  et enfin anti-auxétiques  $\nu > 0,5$ .

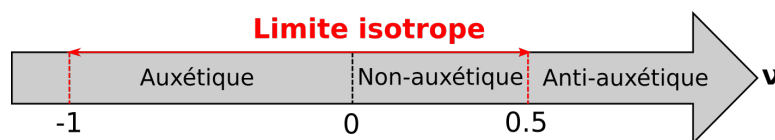


FIGURE 1.8 – Classification du coefficient de Poisson.

Afin de décrire le comportement des structures présentées dans la suite et possédant les coefficients de Poisson décrits précédemment, il est nécessaire d'abord d'introduire quelques grandeurs permettant de caractériser leurs comportements, notamment dans le domaine élastique.

## 1.2.2 Grandeurs physiques

Dans la suite, les structures abordées sont généralement anisotropes, leurs propriétés mécaniques dépendant de leur orientation de par leur architecture. La loi de Hooke de ces structures s'écrit sous forme matricielle :

$$\tilde{T} = \tilde{C}\tilde{\sigma}, \quad (1.5)$$

où  $\tilde{T}$  est le tenseur des contraintes et  $\tilde{\sigma}$  le tenseur des déformations.

Les propriétés mécaniques des matériaux correspondent donc à des tenseurs, par exemple pour la rigidité  $\tilde{C}$ . Ce dernier tenseur peut en général être exprimé en fonction de différents coefficients tels que les coefficients de Poisson et les modules d'Young, qui vont pour un matériau anisotrope dépendre des directions considérées. Dans le présent chapitre une notation simplifiée est utilisée, avec en particulier  $\nu$  pour le coefficient de Poisson et  $E$  pour le module d'Young, définis dans les directions principales d'intérêt pour les métamatériaux étudiés. La question de l'anisotropie des structures sera détaillée dans le chapitre 2 avec une notation adaptée.

Par ailleurs la raideur, ou rigidité, est définie comme la résistance d'un matériau élastique au déplacement qui lui est imposé [40]. Son expression dans le cas isotrope est :

$$k = \frac{F}{\delta}, \quad (1.6)$$

où  $F$  est la force imposée et  $\delta$  le déplacement. Sous forme matricielle, la définition de la raideur s'écrit comme la loi de Hooke (1.5).

Ensuite, la résistance du matériau est présentée comme la limite pour laquelle le matériau peut encore être considéré en zone élastique [41]. Au delà de cette force, le matériau est considéré dans sa zone plastique et les déformations deviennent irréversibles.

### 1.2.3 Métamatériaux mécaniques auxétiques

L'intérêt porté aux métamatériaux mécaniques s'est d'abord focalisé sur l'obtention de propriétés auxétiques. Ces structures de par leurs coefficients de Poisson négatifs possèdent des propriétés de déformation inhabituelles. Une revue succincte de ces structures est faite dans cette section, en fonction des types d'architecture utilisés pour obtenir des propriétés auxétiques.

#### Structures ré-entrantés

Comme dit précédemment, les premières structures auxétiques artificielles sont obtenues par les travaux de Lakes [39, 42, 43] avec sa procédure de transformation de mousse visant à former des cellules ré-entrantés (figure 1.9). Des mousses conventionnelles sont soumises à une pression pendant une alternance de cycles de chauffage et de refroidissement, ce qui permet l'obtention de cellules ré-entrantés au sein des mousses traitées. D'autres processus de fabrication ont été proposés par la suite [44, 45], pour des mousses anisotropes présentant des propriétés auxétiques [46, 47]. Des mousses auxétiques en polymères et métaux ont par la suite été étudiées par Friis et al. [48] et ont montré, en plus des propriétés auxétiques, une plus forte compliance après transformation de la mousse originale, due aux nouvelles arêtes courbes plus faciles à déformer.

Les propriétés auxétiques des mousses sont essentiellement attribuées aux changements de forme de la cellule ré-entrante, caractérisée par le rapport de compression volumique imposé lors de la fabrication [49]. Une baisse du module d'Young est aussi observée avec l'augmentation du rapport de compression volumique lors de la transformation des mousses. De plus, les mousses ré-entrantés montrent une meilleure résistance à la déformation ainsi qu'une meilleure dissipation d'énergie par rapport aux mousses conventionnelles de même densité [50].

#### Structure alvéolaire ré-entrante

Des structures auxétiques peuvent aussi être obtenues par l'utilisation de structures alvéolaires ré-entrantés. Traditionnellement, le concept de structure alvéolaire se réfère à

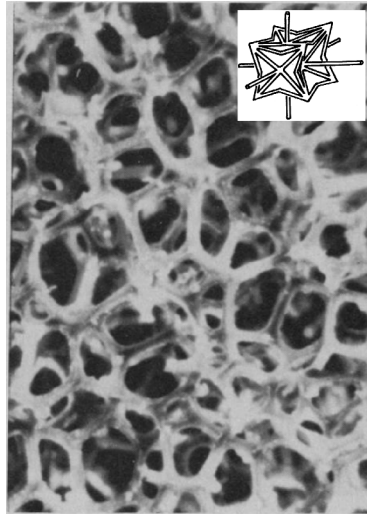


FIGURE 1.9 – Photo de mousse ré-entrante [39].

des cellules hexagonales, dans notre cas ré-entrantes, mais peut être étendu à l'ensemble des structures composées de cellules unitaires architecturées périodiques ré-entrantes.

Des propriétés auxétiques, avec  $\nu = -1$ , ont ainsi pu être obtenues pour des structures alvéolaires hexagonales ré-entrantes [51] (figure 1.10.a). De plus, ces cellules possèdent un plus grand module d'Young dans la direction transverse ainsi qu'un plus grand module de cisaillement en comparaison des structures alvéolaires classiques non ré-entrantes. Ces propriétés sont dépendantes du rapport de finesse des arêtes  $\frac{e}{l}$ , correspondant au rapport de largeur sur la longueur des arêtes. Une réduction de la largeur des arêtes  $e$  amène une baisse du module d'Young dans la direction transverse ainsi qu'une augmentation du coefficient de Poisson [52]. Finalement Yang et al. [53] ont pu montrer que l'amplitude des coefficients de Poisson négatifs était aussi dépendante du rapport de longueur  $\frac{h}{l}$ . Des motifs autres que les motifs hexagonaux permettent l'obtention de propriétés auxétiques, comme des motifs en pointe de flèche [54], de treillis carré [55] ou encore d'étoiles liées par des bras [56] (figure 1.10.b).

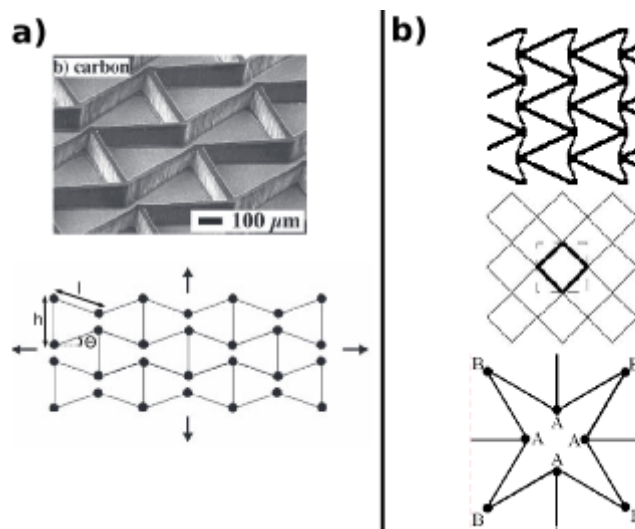


FIGURE 1.10 – a) Matériau alvéolaire hexagonal ré-entrant [51]. b) Autres motifs existants de matériaux alvéolaires ré-entrants [54, 55, 56].

Le concept de structures alvéolaires ré-entrantes auxétiques peut aussi être étendu en 3D, en reprenant les précédents motifs [57, 58] (figure 1.11). Il est montré que de telles

structures peuvent posséder une résistance à la compression bien plus élevée que celle des mousses conventionnelles [57]. Cet effet peut être amplifié avec des coefficients de Poisson plus négatifs de la structure pour une densité similaire.

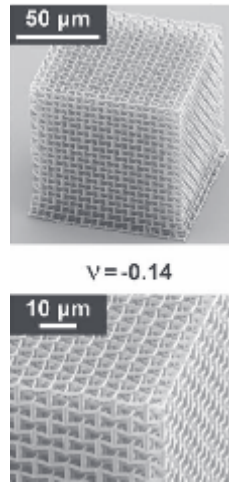


FIGURE 1.11 – Structure 3D composée de cellules hexagonales ré-entrantes [58].

### Structures chirales

Une structure chirale peut se composer de cylindres reliés par des ligaments fixés de manière tangentielle entre eux (figure 1.12). Les cylindres sont orientés dans le sens horaire ou anti-horaire [59].

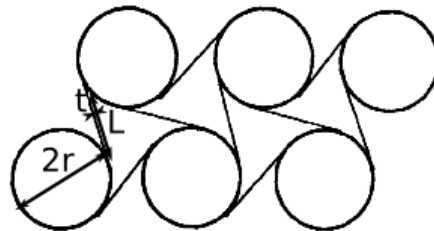


FIGURE 1.12 – Cellule élémentaire d’une structure trichirale [60].

La structure étant constituée de cylindres reliés tangentiellement par des ligaments, un degré de liberté en rotation est présent dans chaque cellule. Cette rotation résulte en un enroulement ou un déroulement de la cellule, pouvant adopter théoriquement [59] des coefficients de Poisson négatifs ou positifs supérieurs à 0,5 en fonction de la géométrie. Des coefficients de Poisson auxétiques proches de  $\nu = -1$  sont observés pour ces structures, ainsi que dans certains cas des  $\nu$  supérieurs à 0,5 avec  $\nu = 0,66$  [61]. Ces coefficients sont obtenus en particulier pour les déformations dans le plan.

Afin d’obtenir une structure périodique, la contrainte de symétrie, d’ordre  $n$ , de rotation doit être prise en compte,  $n$  correspondant au nombre de ligaments liés à chaque nœud. Il vient alors que seulement 3 structures se dégagent, trichirale, tetrachirale et hexachirale, pour  $n = 3, 4, 6$  [59].

L’avantage des structures chirales est qu’elles ne dépendent pas d’un angle structurel contrairement aux structures ré-entrantes et peuvent maintenir un coefficient de Poisson pour une plus grande déformation [62]. Les propriétés élastiques de ces structures sont dépendantes des paramètres des ligaments, avec le rapport  $L/r$  de la longueur des ligaments sur le rayon des cylindres et le rapport  $t/r$  de l’épaisseur des ligaments sur le rayon

$r$  [61]. Des ligaments courbes (figure 1.13) ont aussi été considérés [63], par opposition aux ligaments droits précédents, permettant aux structures d’obtenir des  $\nu$  très négatifs allant jusqu’à  $-17$ .

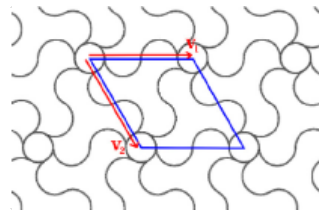


FIGURE 1.13 – Cellule élémentaire d’une structure chirale avec des ligaments circulaires [63].

On vient de présenter des structures permettant d’obtenir des coefficients de Poisson auxétiques grâce à leur architecture, soit ré-entrante, soit avec un degré de liberté interne en rotation. Ce type d’architecture peut aussi être employé pour concevoir des structures non-auxétiques, présentant des propriétés mécaniques inhabituelles.

### 1.2.4 Métamatériaux mécaniques non-auxétiques

Des métamatériaux non-auxétiques ( $0 < \nu < 0,5$ ) présentant des propriétés élastiques inhabituelles de par la présence d’une architecture en réseau de fines poutres sont présentés dans la suite. Ces réseaux permettent, grâce à leurs déformations mésoscopiques, de concevoir des structures présentant des propriétés élastiques ne se retrouvant pas dans les matériaux plus classiques ou permettant de s’affranchir de limites présentes dans ceux-ci.

#### Matériaux extrêmes

Les matériaux extrêmes, définis par Milton et Cherkaev [64], sont de par leur structuration extrêmement résistants à certains modes de déformation, tout en étant très compliants pour les autres. La structure est nommée en fonction du nombre de modes pour laquelle elle est compliante. S’il existe 1, 2, 3, 4 ou 5 modes, le matériau est alors appelé unimode, bimode, trimode, quadramode ou penta-mode.

Dans le cas d’une structure penta-mode, le matériau est très compliant pour 5 de ses 6 modes principaux, avec un grand module de rigidité  $B$  par rapport au module de cisaillement  $G$ . La traduction de ce fort module de rigidité est une conservation du volume du matériau en déformation, soit un coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$ .

Milton et Cherkaev ont proposé un design [64], réalisé en 2012 par Kadic et al. [65], constitué d’un réseau de poutres coniques (figure 1.14). Pour ces matériaux, toute déformation se propageant dans la structure doit passer par le sommet des cônes et le diamètre des cônes a peu d’influence sur la résistance du matériau en comparaison avec sa densité effective [66]. Il est alors possible de modifier la densité de la structure sans modifier sa résistance ou ses paramètres mécaniques.

Un autre usage de ces métamatériaux est de privilégier la propagation des ondes selon une direction dans le milieu.

#### Structures légères

Un des objectifs souhaités pour la réalisation de matériaux artificiels est d’obtenir des combinaisons de propriétés mécaniques généralement difficiles à obtenir simultanément.

Par exemple, une structure développée par Meza et al. [67] (figure 1.15), composée de céramique, a montré une grande résistance, avec des déformations élastiques jusqu’à 50%

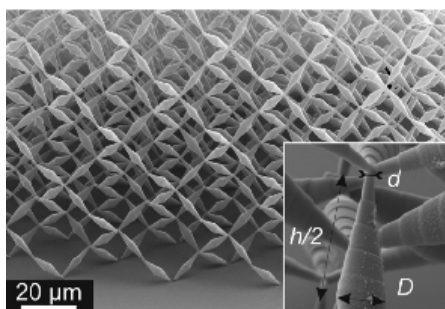


FIGURE 1.14 – Structure penta-mode proposée par Milton et Cherkaev [64], et réalisée par Kadic et al. [65]

de déformation, pour une faible densité totale. Cette structure est composée d'un réseau de tubes creux d'alumine.

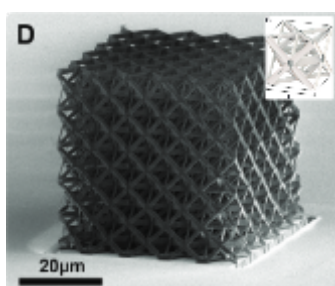


FIGURE 1.15 – Structure proposée par Meza et al. [67].

A la suite de ces travaux, Zheng et al. [68] ont conçu une structure présentant « une rigidité quasi-constante par unité de densité ». Contrairement aux matériaux conventionnels dont la rigidité chute rapidement avec la baisse de la densité, la structure présentée montre une rigidité presque constante par unité de densité bien que la densité soit divisée d'un ordre  $10^3$ , montrant ainsi un matériau à forte rigidité pour une faible densité totale.

Finalement, des structures alvéolaires 3D non ré-entrantes sont étudiées par De Jonge et al. [34]. Une structure avec une cellule formant un dodécaèdre rhombique montre un coefficient de Poisson dépassant la limite isotrope de 0,5.

Il est donc possible d'obtenir les coefficients anti-auxétiques recherchés dans le cadre de cette thèse en utilisant des métamatériaux similaires aux structures auxétiques et non-auxétiques montrées précédemment.

### 1.2.5 Métamatériaux mécaniques anti-auxétiques

Des structures présentant des coefficients de Poisson auxétiques ou non-auxétiques ont été présentées, ces propriétés sont dues à leur structuration. De manière générale les coefficients de Poisson obtenus sont contenus dans la limite isotrope  $-1 < \nu < 0,5$ . Dans certains cas, en fonction de leur géométrie, ces mêmes structures peuvent aussi présenter des coefficients de Poisson supérieurs à 0,5. De telles propriétés sont donc possibles et des structures permettant d'obtenir des coefficients de Poisson anti-auxétiques sont maintenant présentées.

Des structures présentant de telles propriétés ont déjà été présentées précédemment, pour des matériaux chiraux [59, 61] ou des structures alvéolaires dodécaédriques rhombiques [34]. De même la présence d'une compressibilité négative linéaire a pu être montrée de par la présence d'un fort coefficient de Poisson positif dans des structures alvéolaires 2D [69, 70].

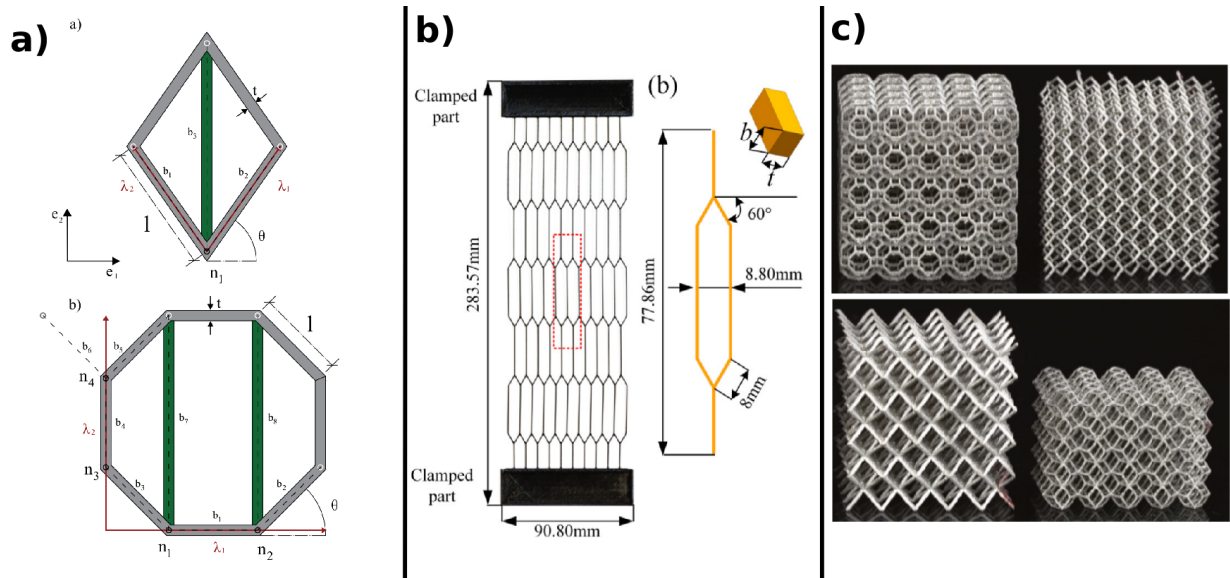


FIGURE 1.16 – a) Schéma d’une structure sortante présentant de forts coefficients de Poisson anti-auxétiques. b) Plaque anti-auxétique de structures sortantes alvéolaires. c) Structures 3D anti-auxétiques composées de différentes cellules unitaires sortantes.

Ganghoffer et al. ont pu montrer, par l’intermédiaire d’une méthode d’homogénéisation discrète, que pour des structures alvéolaires avec un angle sortant, des propriétés anti-auxétiques peuvent être obtenues [71, 2, 72] (figure 1.16.a). De faibles coefficients de Poisson anti-auxétiques compris entre 0,5 et 1 sont décrits [71, 2] mais il est possible d’obtenir des valeurs plus fortes ( $\nu \gg 1$ ) pour des cellules à motif de diamant ou d’octogone [72]. Les propriétés anti-auxétiques de ces structures dépendent, de la même manière que les structures ré-entrantes, de l’angle sortant des bras formant la cellule ainsi que des rapports de longueur de ceux-ci. L’existence de ces forts coefficients de Poisson anti-auxétiques a pu être montrée sur des plaques avec des coefficients de Poisson compris dans des domaines allant de 0,75 à 10,92 et de 2,80 à 13,79 pour des réseaux de triangles et d’alvéoles [73] (figure 1.16.b).

Plus récemment, des designs 3D de structures présentant des forts coefficients de Poisson positifs  $\nu > 1$  [74] ont été proposés (figure 1.16.c). Ces matériaux sont étudiés en particulier dans le domaine des biomatériaux pour leur meilleure faculté à remplir l’espace sous la déformation [74].

Les coefficients de Poisson très supérieurs à 0,5 sont ici étudiés afin de reproduire certaines propriétés mécaniques existantes dans la nature, en particulier dans le cas des cellules ciliées des mammifères. En effet les cellules ciliées sont une composante du système auditif des mammifères, permettant l’excitation mécanique de la membrane basilaire et améliorant ainsi son déplacement dû aux ondes se propageant dans la cochlée [1]. Ces cellules, d’une dimension allant de  $3 \mu m$  à  $8 \mu m$  [75] sont sensibles aux ondes de fréquence comprise entre  $20 Hz$  et  $20 kHz$  dans l’eau, soit des longueurs d’onde supérieures à  $7,5 cm$ . Plusieurs explications sont possibles, cependant des travaux [1] ont pu montrer que les parois de ces cellules possèdent un coefficient de Poisson proche de  $\nu = 1$ .

### 1.2.6 Revêtement acoustique alvéolaire auxétique

Récemment Ye et al. [76] ont présenté des revêtements acoustiques basés sur un métamatériau alvéolaire, pouvant être auxétique pour certaines géométries (figure 1.17). Des pertes de transmission plus grandes sont observées dans le cas des cellules alvéolaires

auxétiques que pour celles non-auxétiques.



FIGURE 1.17 – Schéma d'un revêtement composé de cellules élémentaires alvéolaires avec un coefficient de Poisson négatif.

Il est donc possible de considérer des métamatériaux mécaniques, classiquement utilisés en déformation statique, pour des applications en dynamique, dans notre cas, pour le contrôle des ondes acoustiques. Dans la suite de la thèse, l'étude porte donc sur l'utilisation de telles structures pour des revêtements acoustiques, avec des propriétés anti-auxétiques.

### 1.3 Structure choisie

Afin de reproduire les propriétés mécaniques anti-auxétiques, une structure ayant ces propriétés est choisie. Ce type de structure étant encore peu étudié, une étude de celle-ci est proposée dans la suite de la thèse pour différentes configurations.

#### 1.3.1 Structure

La structure étudiée est tirée des travaux de Dos Reis et al. [2] et se présente comme une structure ré-entrante ou sortante de 10 poutres (figure 1.18). Cette structure, dite « cellule élémentaire », est répétée de manière périodique dans le plan  $(xy)$ , formant ainsi un treillis régulier. Le milieu peut être ensuite considéré comme d'épaisseur infinie selon  $z$  pour un volume (les « poutres » adoptant alors la forme de « parois » infiniment hautes) ou d'épaisseur finie selon  $z$  pour une plaque.

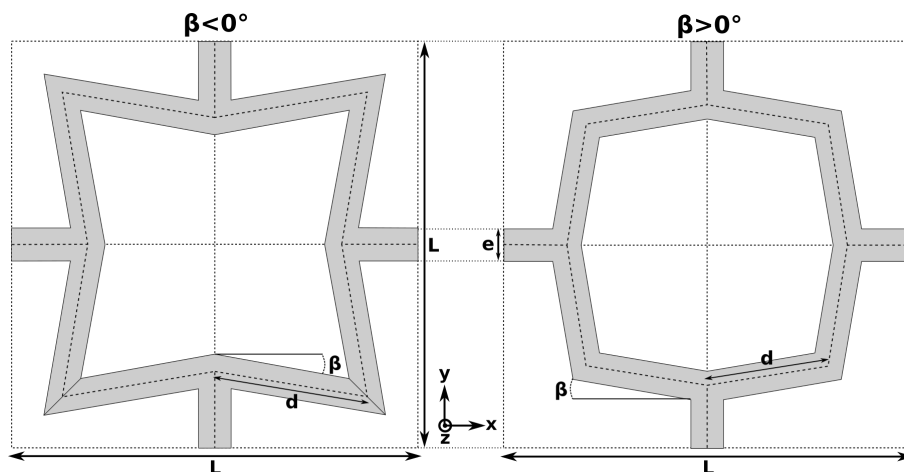


FIGURE 1.18 – Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire, sortante à droite et ré-entrante à gauche, constituant le treillis du métamatériau étudié.

La cellule élémentaire est constituée d'un réseau formée de poutres, de largeur  $e$  et de longueur  $d$ , avec un angle  $\beta$ , reliées par 4 bras extérieurs (figure 2.1). L'angle  $\beta$  correspond à l'angle introduit entre les 8 poutres internes formant un octogone. La géométrie dans le plan peut être décrite entièrement par 3 paramètres indépendants. On choisira dans la



suite la période  $L$ , la largeur de bras  $e$  et l'angle  $\beta$ . Le quatrième paramètre  $d$  peut alors être calculé avec la relation :

$$d = \frac{L}{1 + 2 \cos \beta + 2 \sin \beta}, \quad (1.7)$$

Afin d'éviter les aberrations géométriques, on s'attache à garder l'angle  $\beta$  dans l'intervalle  $[-30^\circ, 45^\circ]$ . Dans le cas de la plaque, et seulement dans ce cas, la structure possède une épaisseur  $h$  dans la direction  $z$ .

En fonction du signe de l'angle  $\beta$ , la cellule élémentaire présente soit un angle ré-entrant, soit un angle sortant, permettant la présence ou non d'un mécanisme de déformation ré-entrante au sein de chaque cellule élémentaire. Les bras de la microstructure sont faits de Plexiglas et sont entourés d'air. Les bras n'ont donc pas de contrainte extérieure de par la différence d'impédance entre les deux milieux et seules des conditions périodiques sont considérées aux frontières de la cellule élémentaire. Dans le cas de la plaque, ces conditions sont réduites aux frontières dans le plan et les frontières dans l'épaisseur sont alors considérées comme libres.

— Plexiglas :

—  $E = 2,285.10^9 \text{ Pa}$ ,

—  $\nu = 0,37$ ,

—  $\rho = 1180 \text{ kg.m}^{-3}$ ,

—  $c_{L,plexy} = 1850 \text{ m.s}^{-1}$ ,

—  $c_{T,plexy} = 840 \text{ m.s}^{-1}$ .

De par la géométrie de la cellule élémentaire, un axe de symétrie d'ordre 4 dans le plan est observé, décrivant une classe de symétrie  $4/m2/m2/m$  tetragonale pour le matériau. Comme indiqué précédemment, la microstructure de ce treillis permet théoriquement, d'après les travaux de Dos Reis et al. [2], l'obtention de propriétés mécaniques inhabituelles auxétiques ou anti-auxétiques. La cellule présente en particulier des propriétés en déformation transversale traduites par un coefficient de Poisson dans le plan  $\nu$  prenant des valeurs négatives ( $\nu < 0$ ) ou très positives ( $\nu > 0,5$ ) en fonction de la géométrie, en dehors des limites isotropes classiques  $-1 < \nu < 0,5$  [37].

### 1.3.2 Paramètres effectifs

Un modèle analytique par homogénéisation discrète a été proposé par Dos Reis et al. [2] afin de décrire les paramètres mécaniques de la cellule unitaire étudiée, dans le cas de plaques se déformant dans le plan ( $xy$ ) sans déplacement dans la direction  $z$ . Cette homogénéisation est faite par l'étude de la structure comme une somme de poutres liées entre elles [77, 78, 79, 2]. Le module d'Young et le coefficient de Poisson effectif de la structure peuvent donc être obtenus analytiquement par ce modèle d'homogénéisation [2] avec les équations 1.8 et 1.9 :

$$\tilde{\nu} = \frac{3C_b^2 - 10S_bC_b + 4\eta^2C_bS_b + 3S_b^2}{2\eta^2 + C_b^4 + \eta^2S_b^2C_b^2 + 5C_b^2 + 2\eta^2C_b^2 - 6\eta^2S_b^4 + 5S_b^2 + 2\eta^2S_b^2}, \quad (1.8)$$

$$\tilde{E} = \frac{\eta^3(C_b^4 + 2S_b^2C_b^2 + S_b^4)}{2\eta^2 + C_b^4 + \eta^2S_b^2C_b^2 + 5C_b^2 + 2\eta^2C_b^2 - 6\eta^2S_b^4 + 5S_b^2 + 2\eta^2S_b^2} E_s, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{10\eta - \frac{\eta^2}{C_b}(2 + S_b)}{(1 - 2S_b + 2C_b)^2}, \quad (1.10)$$

$$C_b = \cos(\beta), \quad S_b = \sin(\beta), \quad \eta = \frac{e}{d}. \quad (1.11)$$

D'après ce modèle analytique, les paramètres mécaniques de la structure ne dépendent que de l'angle  $\beta$  et du facteur de finesse  $\eta$  défini comme le rapport entre la largeur et la longueur des bras, et sont indépendants de la longueur de cellule  $L$  tant que les proportions géométriques sont conservées. Une cartographie de la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$  en fonction de  $\beta$  et du facteur de finesse  $\eta$  est présentée sur la figure 1.19.

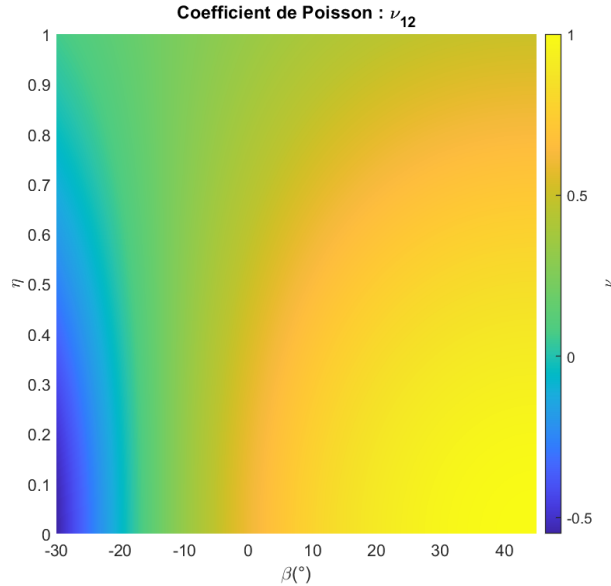


FIGURE 1.19 – Cartographie du coefficient de Poisson issue de l’homogénéisation discrète [2] de la structure en plaque représentée sur la figure 2.1 en fonction de  $\beta$  et  $\eta$ . Trois zones sont identifiées :  $\nu < 0$  (bleue),  $0 < \nu < 0,5$  (vert) et  $0,5 < \nu < 1$  (orange).

Le coefficient de Poisson du matériau dépend principalement de l’angle géométrique  $\beta$  et peut théoriquement prendre des valeurs comprises entre  $-0,5$  et  $1$ . Ces coefficients sont obtenus dans le cas où seuls les modes de déformation dans le plan sont considérés. Les paramètres mécaniques,  $E$  et  $\nu$ , calculés sont alors ceux du plan,  $E_1$  et  $\nu_{12}$ . Les modes de flexion hors du plan existent pour la plaque mais ne sont pas étudiés. De même, des contraintes géométriques liées à la méthode d’homogénéisation sont à respecter pour que les paramètres effectifs soient valides. La méthode se base sur la séparation d’échelle entre les poutres élémentaires, issues de la discrétisation de la structure, et celle-ci dans sa globalité. Ainsi le rapport  $\epsilon = d/L$  de la longueur des poutres  $d$  sur la longueur de la structure  $L$  doit être suffisamment petit pour que cette séparation d’échelle soit valide. De plus la méthode traitant de poutres fines, le facteur de finesse  $\eta$  doit aussi être suffisamment faible.

Finalement, des coefficients de Poisson supérieurs à  $0,5$  sont bien trouvés analytiquement pour cette structure, avec des angles  $\beta$  sortants, la valeur maximum atteinte étant de  $\nu = 1$  pour une structure avec  $\beta = 45^\circ$  et  $\eta = 0$ .

## 1.4 Méthodes d’homogénéisation

### 1.4.1 Généralités

Afin d’utiliser un métamatériau pour des applications recherchées, il est nécessaire de connaître son comportement. Cependant de par leur structuration complexe, il est difficile d’étudier de tels matériaux, analytiquement ou numériquement. Numériquement, cette difficulté se traduit par un coût de calcul important. Il est alors usuel de passer

par un procédé visant à décrire le milieu architecturé comme un milieu homogène effectif possédant le même comportement macroscopique. Ce procédé est appelé homogénéisation.

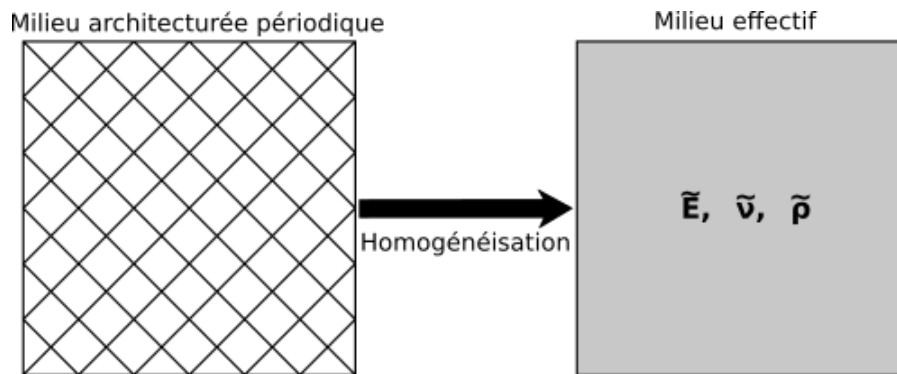


FIGURE 1.20 – Schéma du processus d’homogénéisation d’un milieu architecturé en milieu effectif.

Le milieu effectif est alors décrit par des paramètres élastiques effectifs décrivant le même comportement macroscopique que pour la structure architecturée. Pour des structures architecturées, il n’est pas nécessaire de prendre l’ensemble de la structure pour l’homogénéisation. On considère alors un volume réduit, représentatif du milieu (*Volume Élémentaire Représentatif*) permettant une homogénéisation plus simple. Le VER doit être suffisamment grand afin de contenir une structuration suffisante pour représenter le milieu, et suffisamment petit pour considérer le milieu total comme homogène. Dans le cas particulier des structures périodiques régulières, le VER est en fait la cellule élémentaire et représente le motif réduit le plus simple permettant de reconstituer la structure par répétition de celui-ci. Dans le cas d’une homogénéisation en dynamique, pour que celle-ci soit valide, l’hypothèse de grandes longueurs d’onde est souvent posée : les dimensions de la cellule élémentaire doivent être faibles devant les longueurs d’onde étudiées.

Plusieurs catégories de méthodes d’homogénéisation existent [80], à commencer par celles se basant sur les lois de Voigt et Reuss [81, 82], décrivant un milieu hétérogène multiphasique comme soumis soit à une déformation uniforme soit à une contrainte uniforme malgré la morphologie microstructurale. Ces modèles impliquent de briser l’équilibre soit des contraintes soit des champs de déformation du VER considéré. Une extension de la méthode par une formulation variationnelle présentée par Hashin et Shtrikman [83, 84] permet l’obtention des modules de rigidité ou de cisaillement. Cette méthode a pu être généralisée par la suite pour des milieux anisotropes [85].

D’autres méthodes existent se basant sur les travaux d’Eshelby [86], par exemple une méthode diluée supposant que la distribution des hétérogénéités soit suffisamment diluée pour que leurs interactions puissent être considérées comme faibles. Le problème analysé est celui d’une inclusion seule immergée dans une matrice infinie [87]. Plusieurs modèles dérivent de cette méthode, notamment le modèle de Mori-Tanaka [88, 89, 90], le modèle auto-cohérent [91, 92, 93, 94, 95] et la méthode différentielle [96, 97], et se basent sur l’hypothèse de champ moyen.

Des méthodes d’homogénéisation numériques utilisant la méthode des éléments finis ont aussi été développées [98]. Ces méthodes se basent sur l’évaluation de la relation entre la contrainte et la déformation à l’échelle macroscopique par la résolution d’un problème de conditions aux frontières du VER. La méthode a d’abord été proposée par Renard et al. [99] puis développée par la suite [100, 101, 102, 103, 104]. Le problème des conditions aux frontières du VER est résolu par l’application de conditions classiques de déplacements

ou de contraintes aux frontières. Ces méthodes sont réalisées pour une séparation d'échelle du premier ordre, à l'aide d'un développement limité de leurs variables cinématiques, et des extensions au second ordre sont introduites par la suite [105, 106, 107, 108].

Dans la suite, une méthode numérique d'homogénéisation est présentée. Cette méthode sera plus tard utilisée comme référence. C'est une méthode d'homogénéisation numérique permettant de décrire les paramètres effectifs d'un milieu à partir de sa déformation statique, obtenue par simulation éléments finis.

## 1.4.2 Homogénéisation numérique statique

La méthode d'homogénéisation utilisée comme référence est introduite. L'utilisation d'une méthode numérique en déformation statique permet d'avoir une référence complémentaire pour la méthode d'homogénéisation quasi-statique développée dans la thèse et présentée dans le chapitre 2.

Cette méthode d'homogénéisation, développée par Dirrenberger et al. [109], utilise la simulation éléments finis et se base sur l'application de conditions aux frontières sur un VER du matériau à homogénéiser dans le cas statique.

### 1.4.2.1 Volume Élémentaire Représentatif

Un volume réduit de la structure périodique est considéré, respectant les conditions du VER (figure 1.21.a). Ce volume doit correspondre aux contraintes de dimensions telles que :

$$d \ll l \ll L, \quad (1.12)$$

où  $d$  est la taille des hétérogénéités de la microstructure,  $l$  la taille du VER et  $L$  la longueur caractéristique des déformations appliquées[109]. Il est aussi nécessaire que le VER contienne une microstructure suffisante pour décrire le comportement de la structure globale.

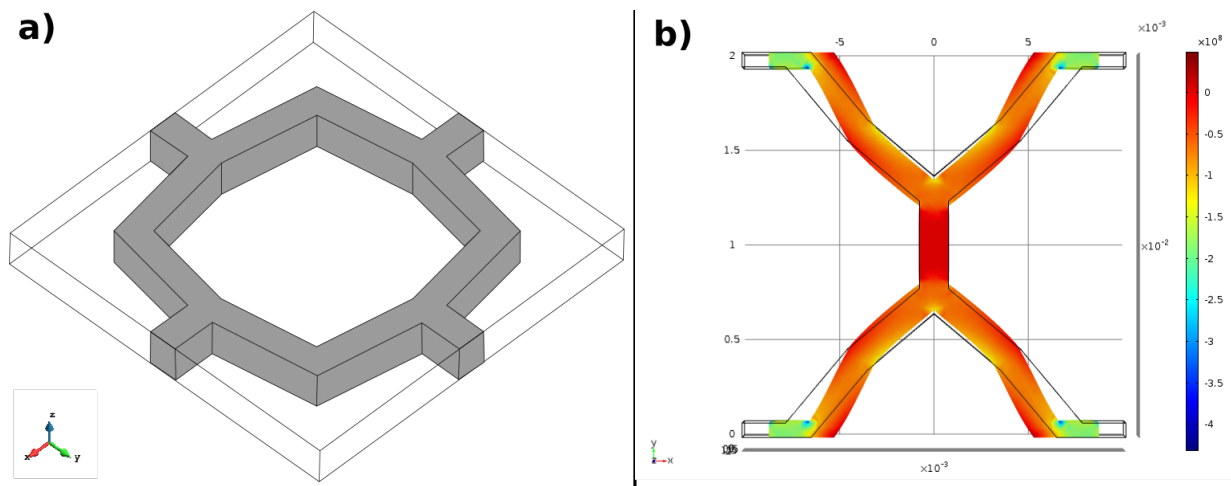


FIGURE 1.21 – a) VER de la structure périodique étudiée. b) VER soumis à une déformation  $\sigma_{11}$  selon la direction  $x$ .

### 1.4.2.2 Homogénéisation

Les propriétés effectives d'une structure, représentées par le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  ou son inverse le tenseur de souplesse  $\tilde{S}$ , peuvent être retrouvées en utilisant les équations de

l'élasticité linéaire. La loi de Hooke [110] permet de relier la déformation  $\sigma$  et la contrainte  $T$  s'appliquant au milieu comme :

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{56} & C_{46} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{13} \\ 2\sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{13} \\ 2\sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 2S_{14} & 2S_{15} & 2S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 2S_{24} & 2S_{25} & 2S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 2S_{34} & 2S_{35} & 2S_{36} \\ 2S_{14} & 2S_{24} & 2S_{34} & 4S_{44} & 4S_{45} & 4S_{46} \\ 2S_{15} & 2S_{25} & 2S_{35} & 4S_{45} & 4S_{55} & 4S_{56} \\ 2S_{16} & 2S_{26} & 2S_{36} & 4S_{56} & 4S_{46} & 4S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

En imposant une déformation  $\tilde{\sigma}$  ou une contrainte  $\tilde{T}$  au VER lors d'une simulation éléments finis, il est alors possible d'isoler et de déterminer des composantes du tenseur de rigidité effectif  $\tilde{C}$ .

Par exemple, pour une déformation imposée  $\sigma_{11}$  (figure 1.21.b), avec l'annulation des autres déformations  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ , la loi de Hooke (1.13) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{56} & C_{46} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \end{pmatrix} \sigma_{11}. \quad (1.15)$$

Il vient alors les relations linéaires suivantes :

$$T_{11} = C_{11}\sigma_{11}, \quad T_{22} = C_{12}\sigma_{11}, \quad T_{33} = C_{13}\sigma_{11}, \quad T_{23} = C_{14}\sigma_{11}, \quad T_{13} = C_{15}\sigma_{11}, \quad T_{12} = C_{16}\sigma_{11}. \quad (1.16)$$

En pratique, la déformation pure est imposée à l'aide de déplacements sur les faces selon  $x$  en considérant des conditions de déplacements en  $y$  et en  $z$  nulles sur les autres faces (figure 1.22)

En utilisant les relations 1.16, et en reproduisant le processus pour les 5 autres composantes du tenseur  $\tilde{\sigma}$ , il est possible de reconstruire le tenseur de rigidité. Suivant cette méthode, pour un cas simplifié de symétrie d'anisotropie orthorhombique (9 composantes  $C_{\alpha\beta}$  indépendantes), les composantes du tenseur de rigidité effectif s'écrivent en fonction

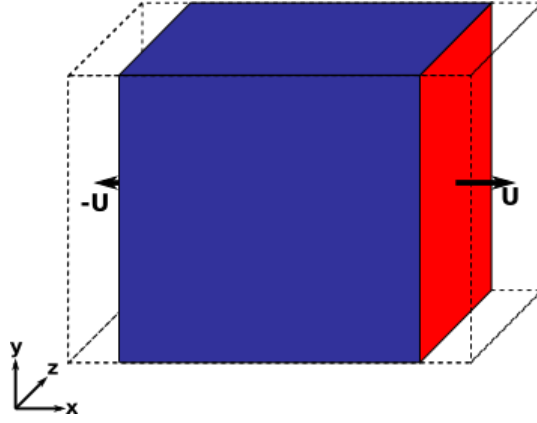


FIGURE 1.22 – Schéma des conditions aux frontières appliquées pour une déformation pure  $\sigma_{11}$ . En rouge, un déplacement est imposé selon  $x$  et en bleu seuls les déplacements selon  $x$  sont autorisés.

de la déformation  $\tilde{\sigma}$  et de la contrainte  $\tilde{T}$  :

$$C_{11} = \frac{T_{11}}{\sigma_{11}}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.17)$$

$$C_{12} = \frac{T_{22}}{\sigma_{11}}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.18)$$

$$C_{13} = \frac{T_{33}}{\sigma_{11}}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.19)$$

$$C_{22} = \frac{T_{22}}{\sigma_{22}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.20)$$

$$C_{23} = \frac{T_{33}}{\sigma_{22}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.21)$$

$$C_{33} = \frac{T_{33}}{\sigma_{33}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.22)$$

$$C_{44} = \frac{T_{23}}{\sigma_{23}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.23)$$

$$C_{55} = \frac{T_{13}}{\sigma_{13}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0, \quad (1.24)$$

$$C_{66} = \frac{T_{12}}{\sigma_{12}}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0. \quad (1.25)$$

Les coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{13}$  sont déduits des équations (1.17), (1.18) et (1.19) en appliquant une déformation pure  $\sigma_{11}$  et en calculant les contraintes  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  et  $T_{33}$ .

Les coefficients  $C_{22}$  et  $C_{23}$  sont déduit des équations (1.20) et (1.21) en appliquant une déformation pure  $\sigma_{22}$  et en calculant les contraintes  $T_{22}$  et  $T_{33}$ .

Le coefficient  $C_{33}$  est déduit de l'équation (1.22) en appliquant une déformation pure  $\sigma_{33}$  et en calculant la contrainte  $T_{33}$ .

Les coefficients  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  et  $C_{66}$  sont déduits des équations (1.23), (1.24) et (1.25) en appliquant une déformation pure  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{12}$ , et en calculant les contraintes  $T_{23}$ ,  $T_{13}$  et  $T_{12}$ .

Finalement, il est aussi possible de déterminer le tenseur de souplesse effectif de la structure, de manière analogue, en imposant cette fois-ci une contrainte au VER, sous forme d'une force aux frontières, et en mesurant la déformation résultante.

## 1.5 Conclusions

L'acoustique sous-marine présente aujourd'hui de forts enjeux autour de la furtivité et de la discrétion sous-marines. Des revêtements absorbants sont utilisés pour y répondre et permettre le camouflage de navires sous-marins face aux technologies SONAR. Plusieurs techniques sont utilisées pour améliorer le camouflage acoustique. L'usage de polymères avec des inclusions solides ou non est en particulier étudié. D'autres solutions existent, notamment avec l'usage de structures alvéolaires.

Dans cette optique d'obtenir des revêtements pour la furtivité et la discrétion acoustique, les métamatériaux mécaniques sont de bons candidats pour le contrôle des ondes avec l'introduction de propriétés effectives mécaniques inhabituelles. Des métamatériaux présentant des coefficients de Poisson hors du commun sont présentés, avec des structures possédant des coefficients de Poisson négatifs,  $\nu < 0$ , dits auxétiques, ou très positifs,  $\nu > 0,5$ , dits anti-auxétiques. Les propriétés anti-auxétiques sont retrouvées dans la nature, pour les cellules ciliées externes de l'oreille permettant l'audition chez les mammifères. Ces cellules sont sensibles à des longueurs d'onde très grandes devant leurs dimensions. Une structure est donc choisie pour reproduire ces propriétés et pour étudier son potentiel pour des applications d'acoustique sous-marine.

Finalement afin d'obtenir les propriétés effectives précédemment citées, une méthode d'homogénéisation numérique est introduite. La méthode numérique est présentée, à base de déformations statiques et sera utilisée comme référence afin de comparer les propriétés effectives déterminées par celle-ci et celles obtenues grâce à la méthode d'homogénéisation quasi-statique développée dans le chapitre 2.

# Chapitre 2

## Homogénéisation en milieu infini

Dans le chapitre 1, nous avons présenté la structure étudiée dans cette thèse nous permettant d'obtenir des propriétés anti-auxétiques. La propagation dans ces milieux ainsi que l'obtention des propriétés effectives sont maintenant abordées.

Dans ce chapitre, la propagation d'ondes dans la structure périodique est dans un premier temps présentée par le biais des courbes de dispersion et des surfaces des lentilles. Dans un second temps, un modèle de propagation en volume infini est proposé, en introduisant des notions d'élasticité statique et les grandeurs considérées (déplacement, contrainte et déformation) puis en décrivant les équations de propagation d'ondes planes dans un solide anisotrope en se basant sur les travaux de référence de Royer et Dieulesaint [110]. La méthode d'homogénéisation est ensuite introduite en reprenant les travaux de A. Balé [111], à partir de l'identification des vitesses de propagation des ondes planes dans le milieu. Enfin, la méthode d'homogénéisation est appliquée à la structure étudiée afin d'obtenir ses paramètres effectifs et en particulier son coefficient de Poisson. La validité des paramètres effectifs obtenus est vérifiée en comparant à la fois les courbes de dispersion et les fréquences propres d'un bloc de métamatériau, obtenues par simulation, d'une part de la structure homogénéisée, et d'autre part de la microstructuration complète.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Propagation dans le milieu architecturé . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1.1	Cellule élémentaire . . . . .	40
2.1.2	Propagation d'onde acoustique . . . . .	40
<b>2.2</b>	<b>Choix du tenseur de rigidité effectif . . . . .</b>	<b>43</b>
2.2.1	Contrainte et déformation . . . . .	44
2.2.2	Tenseur des constantes élastiques . . . . .	45
2.2.3	Composantes du tenseur de rigidité $\tilde{C}$ . . . . .	46
<b>2.3</b>	<b>Propagation d'ondes dans un milieu anisotrope . . . . .</b>	<b>47</b>
2.3.1	Équation du mouvement . . . . .	47
2.3.2	Équations de Christoffel . . . . .	48
2.3.3	Inversion des équations de Christoffel . . . . .	52
<b>2.4</b>	<b>Homogénéisation de la structure étudiée . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>2.5</b>	<b>Validation numérique des paramètres effectifs . . . . .</b>	<b>60</b>
2.5.1	Courbes de dispersion . . . . .	60
2.5.2	Fréquences propres . . . . .	61
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>63</b>

---



## 2.1 Propagation dans le milieu architecturé

### 2.1.1 Cellule élémentaire

Le métamatériau élastique étudié se présente sous la forme d'un réseau périodique d'un motif de base, dit cellule élémentaire, formant un treillis régulier dans le plan  $(xy)$  et infiniment épais dans la direction  $z$  (figure 2.1). La structure est présentée de manière exhaustive dans la partie 1.3.

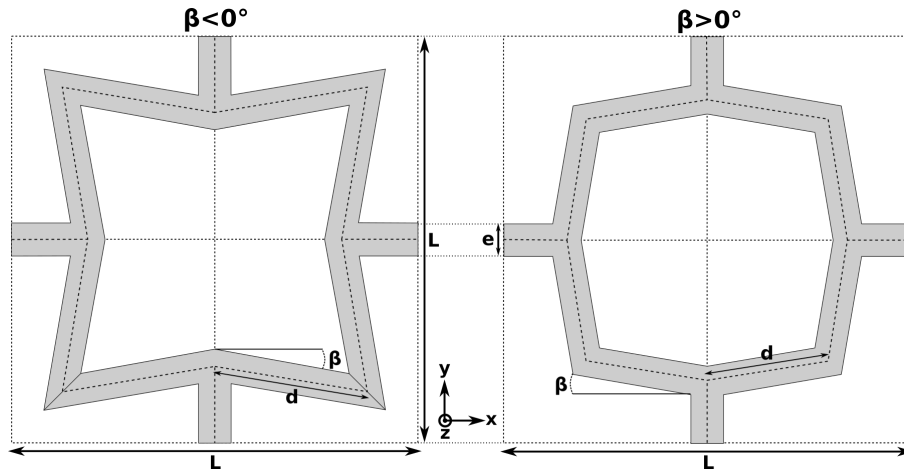


FIGURE 2.1 – Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant le treillis du métamatériau étudié.

La cellule élémentaire de périodicité  $L$  est constituée d'un réseau de poutres, de largeur  $e$  et de longueur  $d$ , avec un angle  $\beta$ . Les autres paramètres décrivant la géométrie peuvent être déduits des paramètres précédents :  $L$ ,  $e$  et  $\beta$ .

Dans ce chapitre, les bras de la microstructure sont faits de Plexiglas et sont entourés d'air.

- Plexiglas :
  - $E = 2,285.10^9 Pa$ ,
  - $\nu = 0,37$ ,
  - $\rho = 1180 kg.m^{-3}$ ,
  - $c_{L,plexy} = 1850 m.s^{-1}$ ,
  - $c_{T,plexy} = 840 m.s^{-1}$ .

Des conditions de périodicité sont appliquées dans les trois directions afin de décrire le milieu infini. La géométrie des structures étudiées dans ce chapitre est :

- Géométrie :
  - $L = 2 cm$ ,
  - $e = 1,5 mm$ ,
  - $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ .

L'étude des ondes se propageant dans le milieu est d'abord abordée avec les courbes de dispersion.

### 2.1.2 Propagation d'onde acoustique

Pour la géométrie décrite précédemment, les courbes de dispersion représentent les couples vecteurs d'onde/fréquences  $(\vec{k}, f)$  des modes se propageant dans le milieu. Les courbes de dispersion sont obtenues par simulation éléments finis des fréquences propres  $f$  de la cellule élémentaire, en appliquant les relations de Bloch-Floquet aux frontières dans les 3 directions, pour des nombres d'onde appartenant à la première zone de Brillouin.

Les courbes de dispersion des structures étudiées sont décrites sur la figure 2.2.

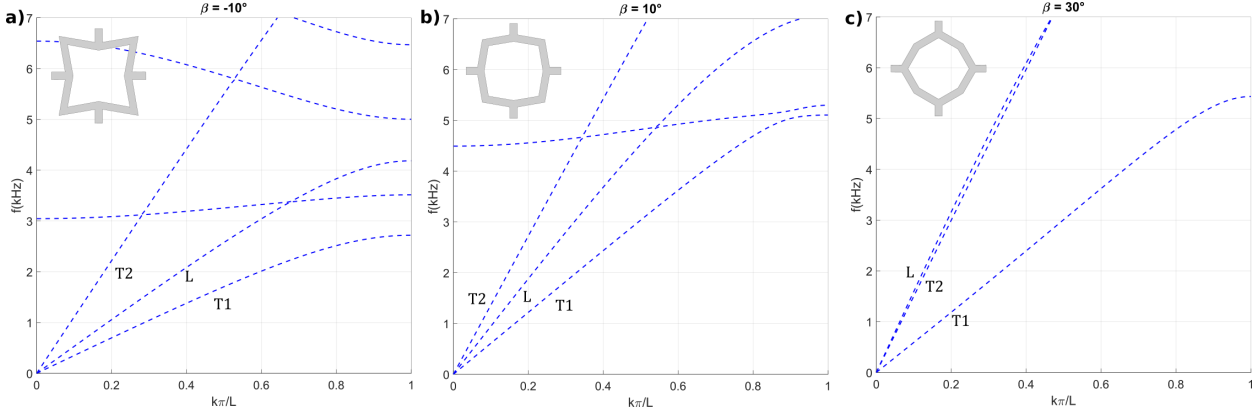


FIGURE 2.2 – Courbes de dispersion selon la direction principale  $x$  pour la cellule élémentaire : a)  $\beta = -10^\circ$  b)  $\beta = 10^\circ$  c)  $\beta = 30^\circ$ .

Pour les faibles nombres d'onde, les courbes de dispersion décrivent 3 droites représentant les 3 modes de volume longitudinal et transverses se propageant dans le milieu (figure 2.3). Ces modes correspondent à un déplacement uniforme de l'ensemble des points de la structure dans une même direction avec 3 polarisations orthogonales pour les 3 modes. Le mode longitudinal est polarisé selon la direction de propagation et les deux modes transverses ont une polarisation orthogonale à la direction de propagation.

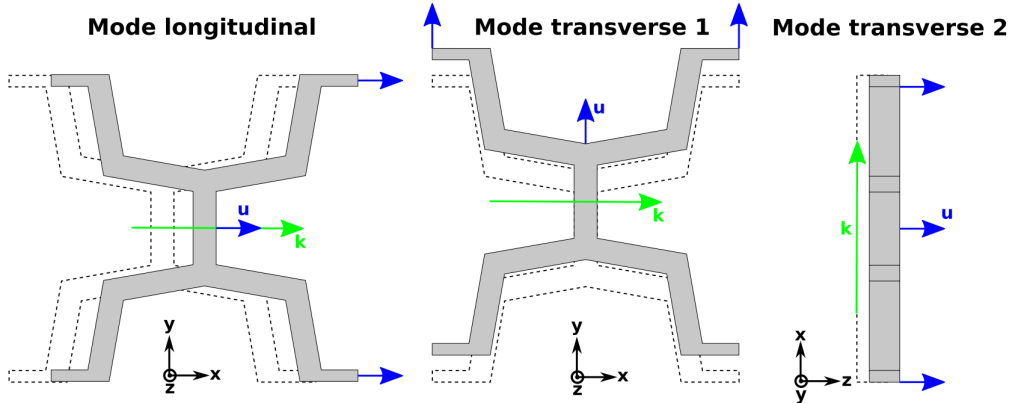


FIGURE 2.3 – Schéma de la déformation des modes de volume  $L$ ,  $T1$  et  $T2$  pour une propagation selon la direction principale  $x$  pour la cellule unitaire  $\beta = 10^\circ$ .

A grandes longueurs d'onde, il est possible d'obtenir la vitesse de phase de ces modes à partir des courbes de dispersion. Les vitesses des ondes sont déduites de la vitesse de phase des 3 premiers modes en basse fréquence. Dans ce cas, en basse fréquence, le milieu de propagation n'est pas dispersif et la vitesse de phase est constante. Les vitesses sont déterminées pour un faible nombre d'onde (1% de la zone de Brillouin dans notre cas) à partir des pentes à l'origine des trois premiers modes des ondes se propageant dans le milieu. Ces pentes permettent aussi de définir le domaine de validité en fréquence de l'homogénéisation non-dispersive avec l'écartement des courbes de dispersion aux droites décrites par les vitesses de phase à l'origine (figure 2.4). Au-delà de cette zone de validité, une homogénéisation dispersive, déterminée pour chaque fréquence est nécessaire.

Pour les modes de volume se propageant dans le milieu selon la direction principale  $x$ , les vitesses sont présentées dans le tableau 2.1 pour 3 cas particuliers :

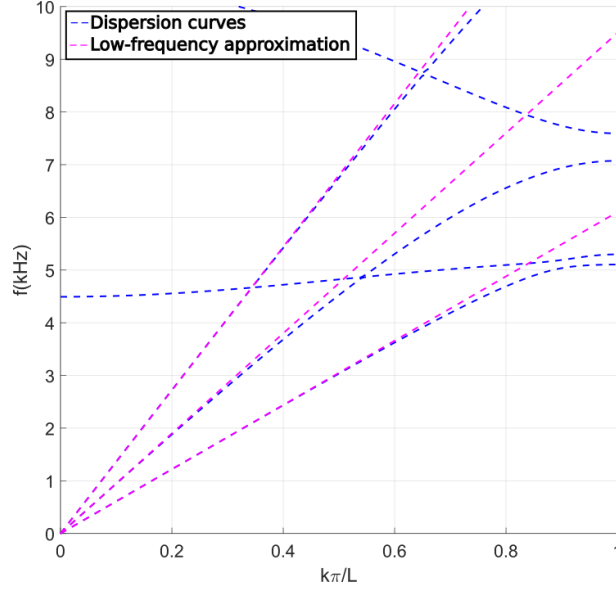


FIGURE 2.4 – Courbes de dispersion de la structure architecturée pour  $\beta = 10^\circ$  avec les pentes à l’origine décrivant la vitesse des modes.

TABLE 2.1 – Vitesses des modes de volume se propageant selon la direction  $x$

Modes	$\beta = -10^\circ (m.s^{-1})$	$\beta = 10^\circ (m.s^{-1})$	$\beta = 30^\circ (m.s^{-1})$
$L$	212	378	636
$T1$	140	243	236
$T2$	444	544	600

En comparaison aux vitesses de propagation dans le Plexiglas ( $c_{L,Plexi} = 1850 m.s^{-1}$  et  $c_{T,Plexi} = 840 m.s^{-1}$ ), les vitesses dans la structure sont réduites, en raison de la structuration choisie. Il est aussi possible de voir un changement de l’ordre des vitesses des modes de volume. Pour un matériau classique, les modes de volume suivent l’ordre décroissant suivant [110] : longitudinal (L), transverse 1 (T1) et transverse 2 (T2). Pour le métamatériau étudié, le mode T2, polarisé en  $z$ , est le plus rapide, en raison de la géométrie architecturée dans le plan  $(xy)$  et uniforme dans l’épaisseur. En fonction de l’angle  $\beta$  de la structure, le mode L est le plus dépendant de la géométrie et dans le cas  $\beta = 30^\circ$  est plus rapide que le mode T2. Finalement pour toutes les géométries, le mode T1 est le plus lent. A plus haute fréquence, des bandes interdites de Bragg apparaissent pour chacun des modes, correspondant au phénomène de diffraction de Bragg dans le milieu périodique.

Une méthode de représentation de la propagation d’onde en fonction des angles de propagation, appelée surface des lenteurs, est introduite dans la suite.

### 2.1.2.1 Surfaces des lenteurs

Une méthode de représentation de la propagation d’onde en fonction des angles de propagation est la surface des lenteurs. Le vecteur de lenteur  $\vec{L}$  est défini comme l’inverse de la vitesse des ondes tel que :

$$\vec{L} = \frac{\vec{k}}{\omega}. \quad (2.1)$$

Les lenteurs sont représentées pour les angles  $\theta$  et  $\phi$  dans les différents plans  $(xy)$ ,  $(xz)$  et  $(yz)$  (figure 2.5). Pour un milieu infini, trois courbes des lenteurs sont définies pour

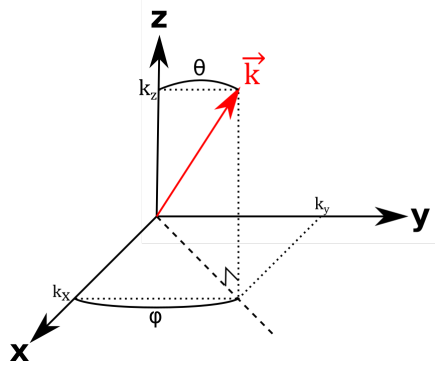


FIGURE 2.5 – Schéma du vecteur d'onde  $\vec{k}$  et des deux angles  $\theta$  et  $\phi$  le définissant.

chaque plan, correspondant aux trois ondes (longitudinale  $L$  et transverses  $T1$  et  $T2$ ).

L'intérêt d'une telle méthode est de représenter la propagation d'onde en fonction de l'angle de propagation pour un nombre d'onde donné. Il est à noter que la surface des lenteurs permet aussi d'obtenir la vitesse de groupe  $\vec{V}_g$  qui caractérise la direction du déplacement de l'énergie avec la normale à la surface de lenteurs.

La figure 2.6 présente les surfaces des lenteurs obtenues pour les 3 configurations considérées ( $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ ).  $n_i$  est la composante selon l'axe  $i$  du vecteur d'onde normé. Les surfaces des lenteurs sont issues du calcul éléments finis périodique des cellules unitaires pour un vecteur d'onde correspondant à 1% de la zone de Brillouin et pour des angles dans les 3 plans  $(xy)$ ,  $(xz)$  et  $(yz)$ .

Les surfaces des lenteurs pour les plans  $(xz)$  et  $(yz)$  présentent les mêmes valeurs de lenteur en fonction de la direction de propagation et les courbes de lenteur dans le plan  $(xy)$  décrivent une symétrie centrale d'ordre 4, ce qui confirme que la structure possède une classe de symétrie tétragonale  $4/m2/m2/m$ . La différence de vitesse de phase des modes se propageant avec une polarisation dans le plan  $(xy)$  et selon la direction  $z$  est due à la géométrie de la structure et se retrouve dans le profil aplati des courbes de lenteur pour une propagation selon  $z$ .

Avec une variation de la géométrie de la structure, pour des  $\beta$  croissants, une augmentation des vitesses de phase est observée, se traduisant par une réduction des surfaces des lenteurs. De plus pour certains angles  $\beta > 10^\circ$ , un point d'inflexion apparaît proche de  $\theta = 0^\circ$  pour l'onde longitudinale  $L$ .

Afin d'obtenir un modèle simplifié de propagation des modes dans la structure en volume, une homogénéisation est faite dans la suite. Le modèle effectif correspondant permet de décrire un milieu effectif équivalent à la structure, caractérisé par des propriétés effectives déterminées à une fréquence donnée en basses fréquences, et décrivant le comportement macroscopique de la structure. De plus, les paramètres effectifs obtenus permettent d'obtenir le coefficient de Poisson effectif  $\nu_{12}$  du métamatériau. Pour présenter le modèle d'homogénéisation quasi-statique utilisé, la propagation d'onde acoustique dans un milieu anisotrope est d'abord abordée, puis le modèle d'homogénéisation est décrit.

## 2.2 Choix du tenseur de rigidité effectif

Tout d'abord la description d'un milieu infini anisotrope est présentée en utilisant des notions d'élasticité statique. Cette partie introduit les différentes grandeurs physiques ainsi que les équations intervenant dans la déformation d'un milieu infini.

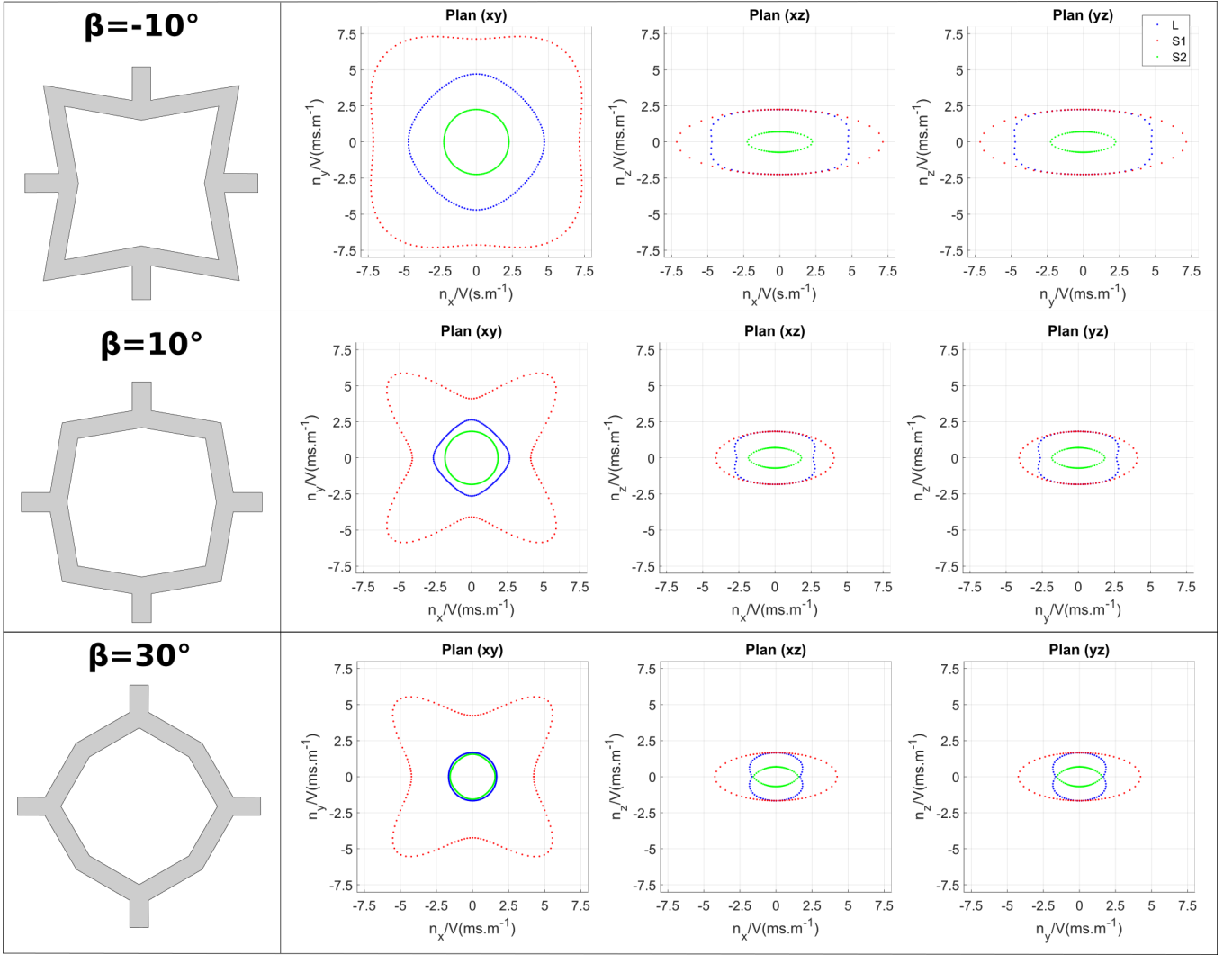


FIGURE 2.6 – Surfaces des lenteurs des cellules élémentaires en Plexiglas, de longueur  $L = 2 \text{ cm}$ , de largeur de bras  $e = 1.5 \text{ mm}$  et d'angle géométrique  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . Les 3 modes de volume L (bleu), S1 (rouge) et S2 (vert) sont représentés.

## 2.2.1 Contrainte et déformation

Les équations de l'élasticité statique permettent de décrire la déformation réversible d'un matériau soumis à l'action d'une contrainte extérieure. Pour cela deux grandeurs physiques principales sont à considérer, la déformation  $\sigma$  et la contrainte  $T$ .

Dans la suite, la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés est utilisée.

### 2.2.1.1 Déformations élastiques

Le tenseur de déformation est défini [110] par la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement et  $u_i$  sa composante selon l'axe  $x_i$ . Les indices  $i$  et  $j$  varient de 1 à 3 et correspondent aux trois directions du repère orthogonal global. Ce tenseur d'ordre 2 est symétrique, avec 6 composantes individuelles sans dimension puisqu'elles sont issues d'un rapport de distances.

Les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  correspondent à un allongement selon les directions principales ( $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ ) du repère orthogonal. Les composantes  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  correspondent à un mouvement de cisaillement.

### 2.2.1.2 Contraintes

Une action mécanique extérieure est nécessaire à la déformation du solide sous forme d'une force appliquée à la surface du matériau ou appliquée en volume. Les contraintes issues de cette déformation représentent la tension mécanique du matériau et, dans le cas de faible déformation, sont proportionnelles à celle-ci. Les éléments du tenseur des contraintes  $T_{ij}$  sont liés à ceux du tenseur des déformations par la relation suivante (loi de Hooke) :

$$T_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (2.3)$$

où  $C_{ijkl}$  sont les éléments du tenseur des constantes élastiques.

Le tenseur  $T$  d'ordre 2 est symétrique avec 6 composantes indépendantes. Les composantes  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  et  $T_{33}$  correspondent à une contrainte normale aux faces du volume élémentaire du milieu. Les composantes  $T_{12}$ ,  $T_{13}$  et  $T_{23}$  correspondent à une contrainte tangentielle.

### 2.2.2 Tenseur des constantes élastiques

Le tenseur des constantes élastiques d'ordre 4 et symétrique, comporte 36 composantes indépendantes homogènes à une pression. Les propriétés de symétrie du tenseur permettent d'introduire la notation contractée des indices ( $i,j$ ) ou notation de Voigt. Les indices ( $i,j$ ) sont réduits à 6 indices avec les contractions suivantes :

(ij)	(11)	(22)	(33)	(23)=(32)	(13)=(31)	(12)=(21)
$\alpha$	1	2	3	4	5	6

Le tenseur des constantes élastiques prend la forme suivante :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{56} & C_{46} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

La loi de Hooke (eq. 2.3) se réécrit avec la contraction des indices :

$$T_\alpha = C_{\alpha\beta}\sigma_\beta. \quad (2.5)$$

Par exemple la première composante  $T_1$  du tenseur des contraintes se développe sous la forme :

$$T_1 = C_{1\beta}\sigma_\beta = C_{11}\sigma_1 + C_{12}\sigma_2 + C_{13}\sigma_3 + C_{14}\sigma_4 + C_{15}\sigma_5 + C_{16}\sigma_6, \quad (2.6)$$

ce qui donne sans la contraction :

$$T_{11} = C_{11kl}\sigma_{kl} = C_{1111}\sigma_{11} + C_{1122}\sigma_{22} + C_{1133}\sigma_{33} + 2C_{1123}\sigma_{23} + 2C_{1113}\sigma_{13} + C_{1122}\sigma_{12}. \quad (2.7)$$

Finalement, la loi de Hooke (eq. 2.5) peut être inversée, permettant de définir le tenseur de souplesse  $\tilde{S}$  comme l'inverse du tenseur des constantes élastiques :

$$\sigma_\alpha = S_{\alpha\beta}T_\beta. \quad (2.8)$$

## 2.2.3 Composantes du tenseur de rigidité $\tilde{C}$

Dans le cas où le matériau considéré ne présente aucune symétrie, il est dit triclinique et le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  est composé de 36 composantes. Dans le cas où le matériau présente des symétries, le nombre de composantes du tenseur de rigidité est réduit comme représenté sur la figure 2.7.

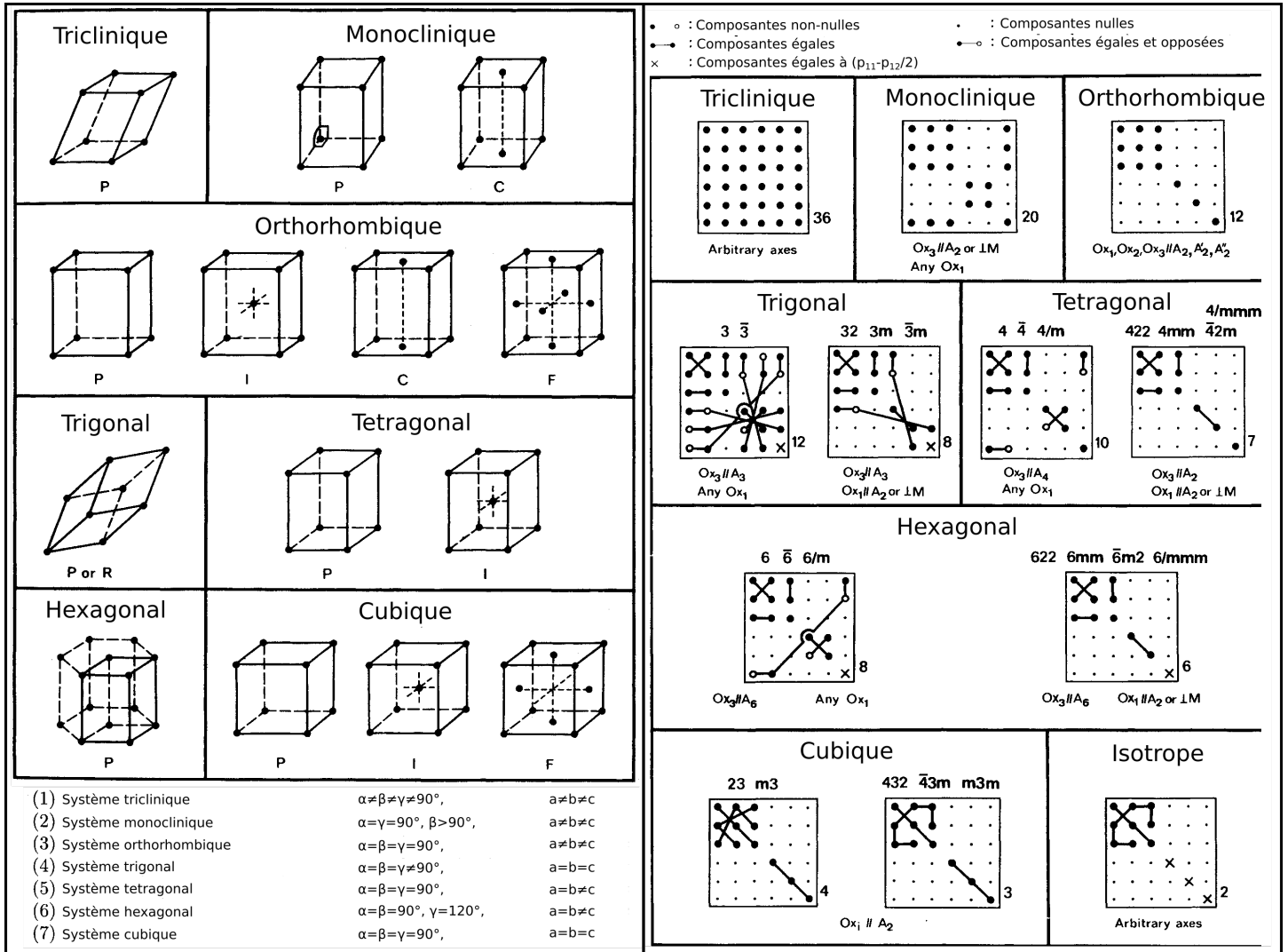


FIGURE 2.7 – Systèmes cristallins et nombres de composantes indépendantes du tenseur de rigidité  $C$  [110].

La structure étudiée (figure 2.1) étant de symétrie tétragonale, le tenseur de rigidité effectif ne comporte que 6 composantes indépendantes :  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$  et  $C_{66}$  :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Dans la section 2.1.2, pour plus de généralité, on s'intéressera plutôt au cas de la symétrie orthorhombique. Ce type de symétrie serait obtenu en choisissant une période différente dans les directions  $x$  et  $y$  pour la structure représentée en figure 2.1 (et donc une

maille rectangulaire dans le plan (x,y)). Dans ce cas, le tenseur  $\tilde{C}$  présente 9 composantes indépendantes :  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}$  et  $C_{66}$  à déterminer dans la suite.

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

## 2.3 Propagation d'ondes dans un milieu anisotrope

L'élasticité statique permet de décrire la déformation élastique du milieu infini en fonction des contraintes extérieures. Pour la propagation d'ondes planes dans un milieu infini, un champ de déplacement à travers l'ensemble du matériau est considéré. Il est défini en tout point à l'instant  $t$  comme :

$$u_i = u_i(x, t) = u_i^0 e^{j\omega(t - \frac{n_j x_j}{V})}, \quad (2.11)$$

où  $u_i^0$ ,  $V$  et  $n_j$  sont respectivement l'amplitude, la norme du vecteur vitesse de phase et la composante dans la direction  $x_j$  du vecteur unitaire de propagation  $\vec{n}$  défini comme :

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{V}. \quad (2.12)$$

Dans la suite, il est proposé de repartir des équations de l'élasticité statique afin d'obtenir l'équation de propagation et ainsi les vitesses des ondes se propageant dans le milieu.

### 2.3.1 Équation du mouvement

Afin d'obtenir l'équation de propagation des ondes planes dans le milieu, il est nécessaire d'appliquer le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.13)$$

où  $\rho$  est la densité. En intégrant la loi de Hooke (équation (2.3)), il vient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2.14)$$

En considérant le déplacement harmonique (équation (2.11)), l'équation devient :

$$\rho V^2 u_i = C_{ijkl} n_j n_k u_l. \quad (2.15)$$

L'équation (2.15), dite équation de Christoffel, peut se réécrire en introduisant le tenseur d'ordre 2 de Christoffel  $\Gamma_{il}$  :

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k. \quad (2.16)$$

Les équations de Christoffel s'écrivent finalement :

$$\rho V^2 u_i = \Gamma_{il} u_l. \quad (2.17)$$



L'équation (2.17) est une équation aux valeurs propres  $\lambda$  avec  $\lambda = \rho V^2$  et le vecteur déplacement  $\vec{u}$  comme vecteur propre. Le tenseur de Christoffel est supposé connu avec les  $C_{ijkl}$  comme entrée et les vitesses des ondes sont solutions de l'équation séculaire :

$$|\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}| = 0, \quad (2.18)$$

où  $\delta_{il}$  est le symbole de Kronecker.

Trois ondes planes se propagent dans le milieu, comme décrit dans la partie 2.1.2, avec 3 vitesses de phases et 3 polarisations orthogonales, 1 longitudinale et 2 transversales. Il est possible que la polarisation des ondes ne soit pas orthogonale au vecteur de propagation  $\vec{n}$ , dans ce cas les ondes avec les polarisations les plus proches sont dites quasi-longitudinale et quasi-transversales. Ce décalage découle soit d'une rotation du matériau en dehors de ses axes principaux, soit du choix du vecteur de propagation  $\vec{n}$  ou peut exister pour certaines symétries. Les 3 types d'onde sont représentés sur la figure 2.3.

### 2.3.2 Équations de Christoffel

Les équations de Christoffel sont maintenant développées en fonction du vecteur de propagation  $\vec{n}$ . Les paramètres mécaniques  $\rho$  et  $C_{\alpha\beta}$  ainsi que le vecteur de propagation  $\vec{n}$  sont supposés connus.

Le tenseur de propagation d'ordre 2 est symétrique et possède 6 composantes distinctes :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Dans le cas général, les 6 composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2 + 2C_{16}n_1n_2 + 2C_{15}n_1n_3 + 2C_{56}n_2n_3, \\ \Gamma_{12} &= C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + C_{45}n_3^2 + (C_{12} + C_{66})n_1n_2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_3 + (C_{46} + C_{25})n_2n_3, \\ \Gamma_{13} &= C_{15}n_1^2 + C_{46}n_2^2 + C_{35}n_3^2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_2 + (C_{13} + C_{55})n_1n_3 + (C_{36} + C_{45})n_2n_3, \\ \Gamma_{22} &= C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 + 2C_{26}n_1n_2 + 2C_{46}n_1n_3 + 2C_{24}n_2n_3, \\ \Gamma_{23} &= C_{56}n_1^2 + C_{24}n_2^2 + C_{34}n_3^2 + (C_{46} + C_{25})n_1n_2 + (C_{36} + C_{45})n_1n_3 + (C_{23} + C_{44})n_2n_3, \\ \Gamma_{33} &= C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + 2C_{45}n_1n_2 + 2C_{35}n_1n_3 + 2C_{34}n_2n_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les équations (2.20) sont obtenues pour des ondes ayant un vecteur de propagation  $\vec{n}$ , dont l'orientation est définie par deux angles  $\theta$  et  $\phi$  (cf. figure 2.5), tels que :

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta, \quad (2.21)$$

avec les angles  $\theta$  et  $\phi$  définis sur la figure 2.5.

Pour notre étude, la symétrie correspond au cas orthorhombique et les équations (2.20) deviennent :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2, \\ \Gamma_{12} &= (C_{12} + C_{66})n_1n_2, \\ \Gamma_{13} &= (C_{13} + C_{55})n_1n_3, \\ \Gamma_{22} &= C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2, \\ \Gamma_{23} &= (C_{23} + C_{44})n_2n_3, \\ \Gamma_{33} &= C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3.2.1 Propagation dans le plan ( $xy$ )

#### Cas général

Pour des ondes arbitraires se propageant dans le plan ( $xy$ ), le vecteur de propagation prend la forme ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) : (cf figure 2.5)

$$n_1 = \cos \phi, \quad n_2 = \sin \phi, \quad n_3 = 0. \quad (2.23)$$

Le système (2.22) du tenseur de propagation présente alors 4 composantes non-nulles distinctes :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11} \cos^2 \phi + C_{66} \sin^2 \phi & (C_{12} + C_{66}) \cos \phi \sin \phi & 0 \\ (C_{12} + C_{66}) \cos \phi \sin \phi & C_{66} \cos^2 \phi + C_{22} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \cos^2 \phi + C_{44} \sin^2 \phi \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Les 3 vitesses des ondes se propageant dans le milieu infini sont obtenues en résolvant l'équation séculaire (2.18). Elle peut être séparée en deux équations.

$$(\Gamma_{11} - \lambda)(\Gamma_{22} - \lambda) - \Gamma_{12}^2 = 0, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{33} - \lambda = 0. \quad (2.26)$$

La vitesse du mode transverse  $T_2$  vient directement de l'équation linéaire (2.26).

La seconde équation (2.25) est une équation du second degré dont les 2 solutions sont les vitesses des modes transverse  $T_1$  et longitudinal  $L$ . Les polarisations respectives des modes correspondent aux vecteurs propres de l'équation séculaire (2.18).

En réintroduisant les composantes issues du tenseur (2.24) dans les équations (2.25) et (2.26), les vitesses suivantes sont déduites :

$$V_{L,T1}^2 = \frac{C_{11}c^2 + C_{22}s^2 + C_{66} \pm \sqrt{(C_{11}c^2 + C_{22}s^2 + C_{66})^2 - 4[(C_{11}c^2 + C_{66}s^2)(C_{66}c^2 + C_{22}s^2) - (C_{12} + C_{66})cs]^2}}{2\rho}, \quad (2.27)$$

$$V_{T2}^2 = \frac{C_{55}c^2 + C_{44}s^2}{\rho}, \quad (2.28)$$

où  $c = \cos \phi$  et  $s = \sin \phi$ . Les vitesses de phase des modes  $L$  et  $T1$  issues de l'équation 2.27 correspondent respectivement aux racines + et -.

#### Cas particuliers

Plusieurs cas particuliers de vecteurs de propagation  $\vec{n}$  dans le plan ( $xy$ ) permettent

d'obtenir directement certaines constantes d'élasticité :

$$\vec{n} = [100] \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad (2.29)$$

$$V_{T1} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \quad (2.30)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}}, \quad (2.31)$$

$$\vec{n} = [010] \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}, \quad (2.32)$$

$$V_{T1} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \quad (2.33)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.34)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[110] \Rightarrow V_{L,T1}^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}, \quad (2.35)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{55} + C_{44}}{2\rho}}. \quad (2.36)$$

### 2.3.2.2 Propagation dans le plan ( $xz$ )

#### Cas général

Pour une onde se propageant dans le plan ( $xz$ ), le vecteur de propagation s'écrit :

$$n_1 = \sin \theta, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \cos \theta. \quad (2.37)$$

De la même façon que pour la propagation dans le plan ( $xy$ ), le tenseur de propagation se réduit à 4 composantes non-nulles différentes :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta & 0 & (C_{13} + C_{55}) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta & 0 \\ (C_{13} + C_{55}) \sin \theta \cos \theta & 0 & C_{55} \sin^2 \theta + C_{33} \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Deux équations découlent de la résolution de l'équation séculaire 2.18, une équation linéaire et une équation de degré 2 :

$$(\Gamma_{11} - \lambda)(\Gamma_{33} - \lambda) - \Gamma_{13}^2 = 0, \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{22} - \lambda = 0. \quad (2.40)$$

Les trois vitesses s'écrivent :

$$V_{L,T1}^2 = \frac{C_{11}s^2 + C_{33}c^2 + C_{55} \pm \sqrt{(C_{11}s^2 + C_{33}c^2 + C_{55})^2 - 4((C_{11}s^2 + C_{55}c^2)(C_{55}s^2 + C_{33}c^2) - ((C_{13} + C_{55})cs)^2}}{2\rho}, \quad (2.41)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{66}s^2 + C_{44}c^2}{\rho}}. \quad (2.42)$$

Les vitesses de phase des modes  $L$  et  $T1$  issues de l'équation 2.41 correspondent respectivement aux racines  $+$  et  $-$ .

### Cas particuliers

Plusieurs cas particuliers de vecteurs de propagation  $\vec{n}$  dans le plan  $(xz)$  permettent d'obtenir directement certaines constantes élastiques :

$$\vec{n} = [001] \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad (2.43)$$

$$V_{T1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.44)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}}, \quad (2.45)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[101] \Rightarrow V_{L,T1}^2 = \frac{C_{11} + C_{33} + 2C_{55} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 - 4(C_{13} + C_{55})^2}}{2\rho}, \quad (2.46)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{44} + C_{66}}{2\rho}}. \quad (2.47)$$

Les vitesses de phase des modes  $L$  et  $T1$  issues de l'équation 2.46 correspondent respectivement aux racines  $+$  et  $-$ .

### 2.3.2.3 Propagation dans le plan $(yz)$

#### Cas général

Pour une onde se propageant dans le plan  $(yz)$ , le vecteur de propagation s'écrit :

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \sin \theta, \quad n_3 = \cos \theta. \quad (2.48)$$

Le tenseur de propagation possède alors 4 composantes non-nulles différentes :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{66} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta & (C_{23} + C_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & (C_{23} + C_{44}) \sin \theta \cos \theta & C_{44} \sin^2 \theta + C_{33} \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Comme pour la propagation dans les plans  $(xy)$  et  $(xz)$ , les 3 vitesses sont solutions des deux équations suivantes :

$$(\Gamma_{22} - \lambda)(\Gamma_{33} - \lambda) - \Gamma_{23}^2 = 0, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{11} - \lambda = 0. \quad (2.51)$$

Les vitesses sont :

$$V_{L,T1}^2 = \frac{C_{22}s^2 + C_{33}c^2 + C_{44} \pm \sqrt{(C_{22}s^2 + C_{33}c^2 + C_{44})^2 - 4((C_{22}s^2 + C_{44}c^2)(C_{44}s^2 + C_{33}c^2) - ((C_{23} + C_{44})cs)^2}}{2\rho}, \quad (2.52)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{66}s^2 + C_{55}c^2}{\rho}}. \quad (2.53)$$

### Cas particuliers

Plusieurs cas particuliers de vecteurs de propagation  $\vec{n}$  dans le plan  $(yz)$  permettent d'obtenir directement certaines constantes élastiques :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[011] \Rightarrow V_{L,T1}^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}, \quad (2.54)$$

$$V_{T2} = \sqrt{\frac{C_{55} + C_{44}}{2\rho}}. \quad (2.55)$$

Les équations de Christoffel ayant été développées et les vitesses des ondes obtenues pour les 3 plans de symétrie principaux et certains cas particuliers, il est maintenant possible d'identifier les paramètres élastiques par la résolution du problème inverse, c'est-à-dire remonter au tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  à partir des vitesses des ondes.

### 2.3.3 Inversion des équations de Christoffel

#### 2.3.3.1 Position du problème

Le nombre d'inconnues du problème est lié à la symétrie du matériau et correspond au nombre de composantes indépendantes du tenseur de rigidité  $C_{\alpha\beta}$  décrit dans la partie 2.2.3. Dans le cas d'une symétrie orthorhombique le tenseur possède 9 composantes indépendantes qui sont les inconnues du problème :  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  et  $C_{66}$ .

Pour chaque angle d'incidence, 3 vitesses sont décrites par les équations de Christoffel, ce qui indique que 3 informations sont disponibles par angle d'incidence. Deux méthodes de résolution sont proposées, liées à des propagations précédemment déterminées selon des directions particulières.

#### 2.3.3.2 Détermination des constantes élastiques avec 6 angles

Avec une inversion directe des équations de Christoffel, il est possible d'obtenir l'ensemble du tenseur de rigidité  $C_{\alpha\beta}$  avec 6 angles d'incidence  $\vec{n}$ . Trois angles selon les directions principales  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont considérés tels que  $\vec{n} = [100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$  et trois angles obliques dans chaque plan tels que  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[110]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[101]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[011]$  (figure 2.8).

$$V_L^{[100]} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad (2.56)$$

$$V_{T1}^{[100]} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \quad (2.57)$$

$$V_{T2}^{[100]} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}}, \quad (2.58)$$

$$V_L^{[010]} = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}, \quad (2.59)$$

$$V_{T2}^{[010]} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.60)$$

$$V_L^{[001]} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad (2.61)$$

$$(V_{L,T1}^{[110]})^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}, \quad (2.62)$$

$$(V_{L,T1}^{[101]})^2 = \frac{C_{11} + C_{33} + 2C_{55} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 - 4(C_{13} + C_{55})^2}}{2\rho}, \quad (2.63)$$

$$(V_{L,T1}^{[011]})^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}. \quad (2.64)$$

La contribution de chaque composante du tenseur élastique dans la définition des vitesses en fonction du vecteur de propagation est résumée sur la figure 2.9.

A partir des équations précédemment citées, il est possible de déduire les constantes

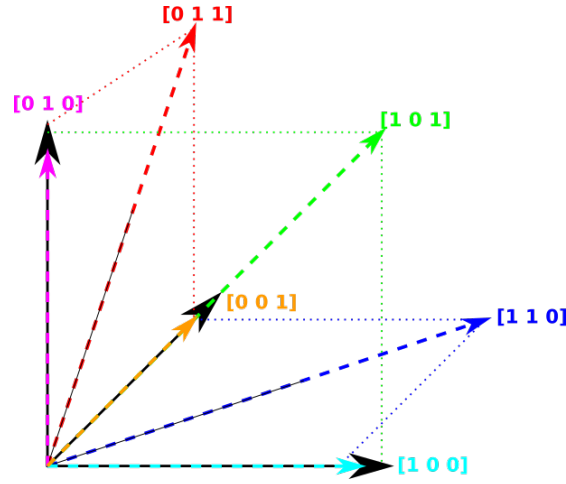


FIGURE 2.8 – Angles d’incidence utilisés pour l’homogénéisation d’un matériau orthorhombique.

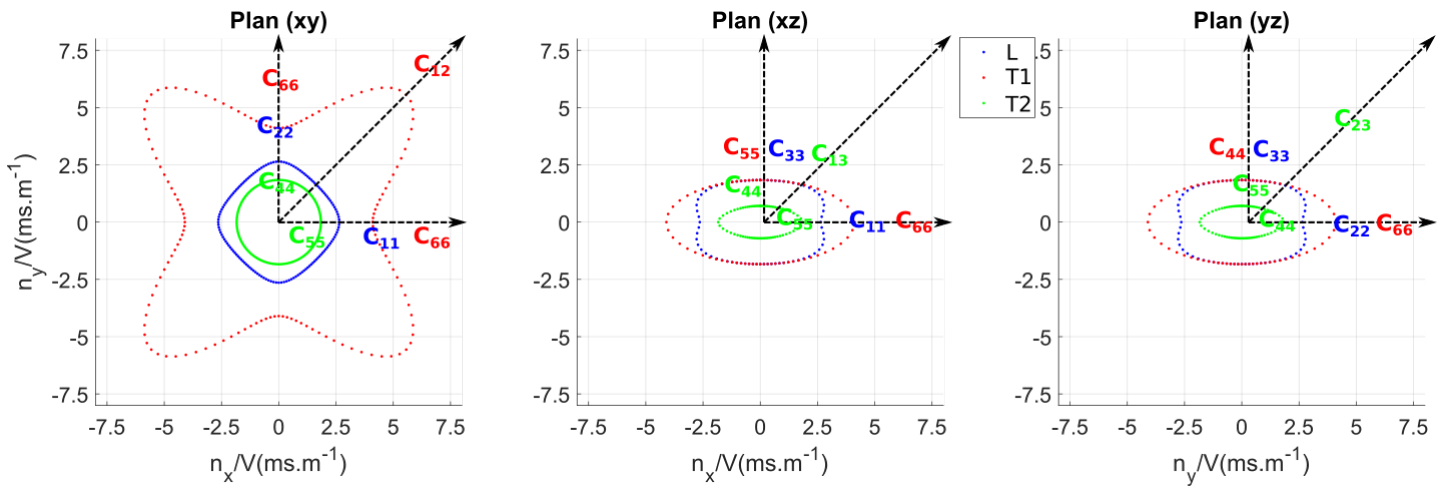


FIGURE 2.9 – Surfaces des lenteurs avec les contributions des coefficients élastiques pour la méthode d’homogénéisation à 6 angles d’incidence.

élastiques suivantes :

$$C_{11} = \rho(V_L^{[100]})^2, \quad (2.65)$$

$$C_{22} = \rho(V_L^{[010]})^2, \quad (2.66)$$

$$C_{33} = \rho(V_L^{[001]})^2, \quad (2.67)$$

$$C_{44} = \rho(V_{T2}^{[010]})^2, \quad (2.68)$$

$$C_{55} = \rho(V_{T2}^{[100]})^2, \quad (2.69)$$

$$C_{66} = \rho(V_{T1}^{[100]})^2, \quad (2.70)$$

$$C_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ \left( V_L^{[110]} \right)^2 - \left( V_{T1}^{[110]} \right)^2 \right]^2 - (C_{11} - C_{22})^2 - C_{66}}, \quad (2.71)$$

$$C_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ \left( V_L^{[101]} \right)^2 - \left( V_{T1}^{[101]} \right)^2 \right]^2 - (C_{11} - C_{33})^2 - C_{55}}, \quad (2.72)$$

$$C_{23} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ \left( V_L^{[011]} \right)^2 - \left( V_{T1}^{[011]} \right)^2 \right]^2 - (C_{22} - C_{33})^2 - C_{44}}. \quad (2.73)$$

Il est donc possible de déterminer les 9 constantes élastiques indépendantes à partir des 3 vitesses pour 6 angles d'incidence différents et de la connaissance de la densité effective  $\rho$ . 3 angles selon les directions principales  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont nécessaires pour déterminer les constantes  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  et  $C_{66}$ . Les dernières constantes de déformation transverse sont déterminées par l'obtention des vitesses pour des angles obliques dans chaque plan.

Pour l'inversion des équations de Christoffel, la densité effective est supposée connue. En pratique, on choisira une valeur égale à la densité statique moyenne de la structure architecturée.

### 2.3.3.3 Détermination des constantes élastiques avec 3 angles

Il est possible de réduire le nombre d'angles d'incidence nécessaires à 3 par des combinaisons linéaires des vitesses. Dans ce cas, seuls les angles obliques dans chaque plan sont considérés (figure 2.8) :  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[110]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[101]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[011]$ .

$$(V_{L,T1}^{[110]})^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}, \quad (2.74)$$

$$V_{T2}^{[110]} = \sqrt{\frac{C_{55} + C_{44}}{2\rho}}, \quad (2.75)$$

$$(V_{L,T1}^{[101]})^2 = \frac{C_{11} + C_{33} + 2C_{55} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 - 4(C_{13} + C_{55})^2}}{2\rho}, \quad (2.76)$$

$$V_{T2}^{[101]} = \sqrt{\frac{C_{44} + C_{66}}{2\rho}}, \quad (2.77)$$

$$(V_{L,T1}^{[011]})^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{66} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 - 4(C_{12} + C_{66})^2}}{2\rho}, \quad (2.78)$$

$$V_{T2}^{[011]} = \sqrt{\frac{C_{55} + C_{44}}{2\rho}}. \quad (2.79)$$

On constate que l'ensemble des constantes à déterminer intervient dans l'expression des vitesses pour les 3 angles d'incidence obliques  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[110]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[101]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}[011]$ . En outre 3 vitesses sont déterminées dans chacun de ces 3 plans, ce qui correspond aux 9 informations pour obtenir les 9 constantes élastiques indépendantes du tenseur de rigidité. Une seconde méthode utilisant seulement 3 angles est possible par la combinaison linéaire des termes  $(\rho V_{[i]}^{\vec{n}})^2$ .

La figure 2.10 résume les différentes contributions des coefficients élastiques  $C_{\alpha\beta}$  pour les expressions des vitesses des ondes en fonction de l'angle de propagation.

Les constantes élastiques  $C_{\alpha\beta}$  homogénéisées sont déduites des équations (2.35), (2.36),

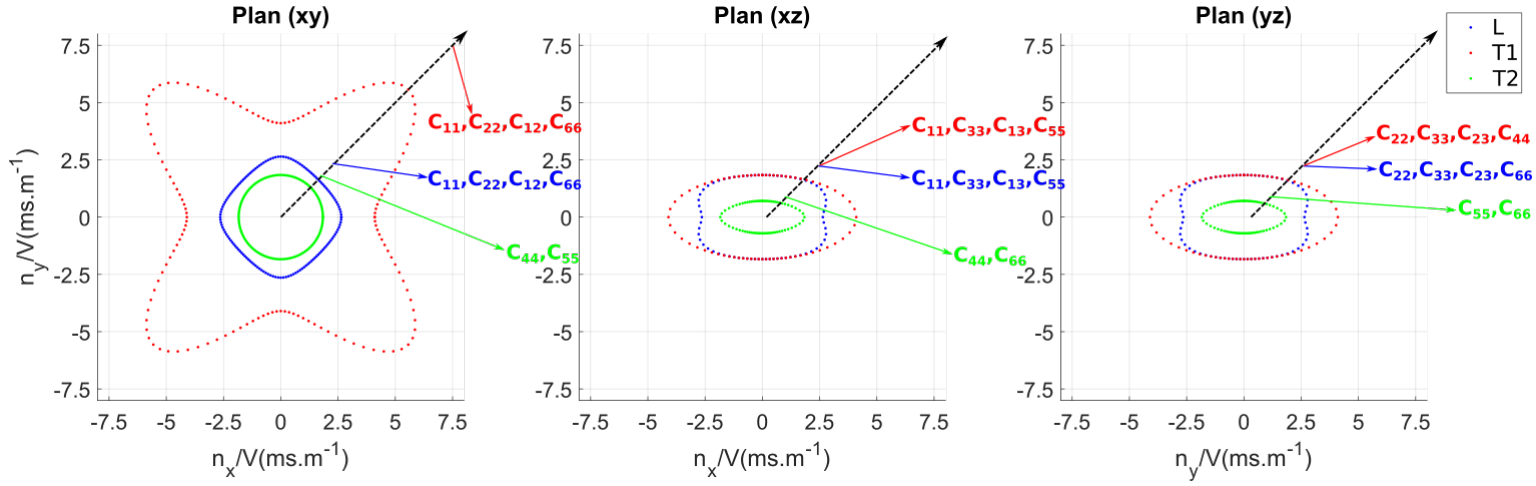


FIGURE 2.10 – Surfaces des lenteurs avec les contributions des coefficients élastiques pour la méthode d’homogénéisation à 3 angles d’incidence.

(2.46), (2.47), (2.54) et (2.55) :

$$C_{44} = \rho[(V_{T2}^{[110]})^2 + (V_{T2}^{[101]})^2 - (V_{T2}^{[011]})^2], \quad (2.80)$$

$$C_{55} = \rho[(V_{T2}^{[110]})^2 + (V_{T2}^{[011]})^2 - (V_{T2}^{[101]})^2], \quad (2.81)$$

$$C_{66} = \rho[(V_{T2}^{[101]})^2 + (V_{T2}^{[011]})^2 - (V_{T2}^{[110]})^2], \quad (2.82)$$

$$C_{11} = \rho[(V_L^{[110]})^2 + (V_L^{[101]})^2 - (V_L^{[011]})^2 + (V_{T1}^{[110]})^2 + (V_{T1}^{[101]})^2 - (V_{T1}^{[011]})^2] + C_{44} - C_{55} - C_{66}, \quad (2.83)$$

$$C_{22} = \rho[(V_L^{[110]})^2 + (V_L^{[011]})^2 - (V_L^{[101]})^2 + (V_{T1}^{[110]})^2 + (V_{T1}^{[011]})^2 - (V_{T1}^{[101]})^2] - C_{44} + C_{55} - C_{66}, \quad (2.84)$$

$$C_{33} = \rho[(V_L^{[101]})^2 + (V_L^{[011]})^2 - (V_L^{[110]})^2 + (V_{T1}^{[101]})^2 + (V_{T1}^{[011]})^2 - (V_{T1}^{[110]})^2] - C_{44} - C_{55} + C_{66}, \quad (2.85)$$

$$C_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ (V_L^{[110]})^2 - (V_{T1}^{[110]})^2 \right]^2 - (C_{11} - C_{22})^2 - C_{66}}, \quad (2.86)$$

$$C_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ (V_L^{[101]})^2 - (V_{T1}^{[101]})^2 \right]^2 - (C_{11} - C_{33})^2 - C_{55}}, \quad (2.87)$$

$$C_{23} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 \left[ (V_L^{[011]})^2 - (V_{T1}^{[011]})^2 \right]^2 - (C_{22} - C_{33})^2 - C_{44}}. \quad (2.88)$$

Il a donc été montré que l’étude de la propagation des ondes en basses fréquences dans 3 directions particulières permet la détermination des paramètres effectifs d’une structure de symétrie orthorhombique. Cette homogénéisation est possible par l’hypothèse de densité statique, la densité ne pouvant être découplée des équations, et par l’hypothèse des grandes longueurs d’onde valide en basses fréquences.

### 2.3.3.4 Identification des vitesses

Les vitesses sont déterminées à partir des vitesses de phase des ondes issues des courbes de dispersion calculées par éléments finis comme décrit dans la partie 2.1.2. On rappelle que ces vitesses sont déterminées en basses fréquences. Les vitesses sont calculées pour un faible vecteur d’onde, de 1 % de la zone de Brillouin dans notre cas, permettant d’être en



basses fréquences, le milieu n'étant pas dispersif pour ce vecteur d'onde. La relation de dispersion des modes est donc linéaire et leurs pentes à l'origine permettent d'obtenir les vitesses des ondes se propageant dans le milieu. De plus ces pentes permettent aussi de définir le domaine de validité en fréquence de l'homogénéisation non-dispersive en basse fréquence avec l'écartement des courbes de dispersion aux relations de dispersion linéaire.

L'homogénéisation basée sur l'identification des vitesses des ondes en basses fréquences est dite « quasi-statique ».

## 2.4 Homogénéisation de la structure étudiée

Le modèle d'homogénéisation ayant été présenté, il est maintenant proposé de l'appliquer pour différentes géométries de la cellule étudiée (figure 2.1).

La cellule présente une classe de symétrie  $4/m2/m2/m$  tetragonale de par la présence d'un axe de symétrie centrale d'ordre 4. Le tenseur de rigidité effectif  $\tilde{C}$  issu de l'homogénéisation contient 6 constantes élastiques indépendantes nécessaires à la description complète du milieu :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Pour cette classe de matériau, il est possible de réduire le nombre d'angles d'incidence nécessaire à l'homogénéisation grâce à l'équivalence entre les axes  $x$  et  $y$ . En effet les vitesses calculées dans les plans  $(xz)$  et  $(yz)$  sont nécessairement identiques dans ce cas et les informations sur les plans  $(xy)$  et  $(xz)$  sont donc suffisantes. Les géométries retenues sont les mêmes que pour la partie 2.1.1 :

- Matériau : Plexiglas (Tableau A.1 en annexe).
- Géométrie :
  - $L = 2 \text{ cm}$ ,
  - $e = 1,5 \text{ mm}$ ,
  - $\beta = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ .

Comme décrit dans la procédure d'homogénéisation quasi-statique (avec 3 angles d'incidence), il est possible d'identifier les vitesses de propagation à partir des surfaces des lenteurs pour les différentes géométries afin de déterminer les paramètres effectifs du milieu effectif. Deux des différentes vitesses issues des surfaces des lenteurs sont résumées dans le tableau 2.2 pour 3 cas parmi les 6 étudiés.

TABLE 2.2 – Vitesses des modes de volume pour deux des trois directions exploitées dans la méthode de détermination des constantes élastiques.

Modes	$\beta = -10^\circ (m.s^{-1})$		$\beta = 10^\circ (m.s^{-1})$		$\beta = 30^\circ (m.s^{-1})$	
	[110]	[101]	[110]	[101]	[110]	[101]
$L$	227	1043	432	1091	668	1168
$T1$	114	330	127	425	135	526
$T2$	444	330	545	425	600	456

Les composantes du tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  issues de l'homogénéisation quasi-statique sont présentées sur la figure 2.11 en fonction de l'angle  $\beta$ .

Une méthode statique issue des travaux de Dirrenberger [109], présentée dans la partie 1.4.2 et nommée ici « homogénéisation statique », est utilisée afin de vérifier la validité des paramètres effectifs pour trois valeurs de  $\beta$  parmi les 6 précédemment considérées.. Pour cette méthode, l'identification des paramètres effectifs est faite avec des excitations mécaniques élémentaires statiques, ne mettant pas en jeu la densité dans l'homogénéisation. Une comparaison des résultats issus de l'homogénéisation quasi-statique avec cette méthode permet donc de vérifier l'hypothèse de densité choisie pour l'homogénéisation quasi-statique.

Le contraste de vitesse de propagation dans la direction hors plan  $z$  est retrouvé avec la valeur très supérieure par rapport à  $C_{11}$  de la constante élastique  $C_{33}$ , décrivant la compression selon la direction  $z$ . La même dynamique est observée pour les constantes  $C_{44}$  et  $C_{66}$  décrivant respectivement la torsion dans les directions  $z$  et  $x$  ou  $y$ .

Avec l'augmentation de l'angle  $\beta$ , une augmentation de la rigidité dans le plan  $(xy)$  est observée, avec une augmentation significative des constantes élastiques  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{13}$ . A l'inverse, une diminution de  $C_{33}$  est observée dans ce cas, d'où un assouplissement de la structure. Un bon accord entre les deux modèles quasi-statique et statique est observé pour les constantes élastiques liées à la compression. L'hypothèse de densité statique est donc valide dans le domaine fréquentiel étudié et les paramètres élastiques issus de la dispersion correspondent aux paramètres déduits de la déformation statique de la cellule. Un écart plus important est observé pour les constantes élastiques de torsion, particulièrement pour  $C_{66}$ , qui semble plus difficile à déterminer par la méthode quasi-statique.

Il est important de noter que les constantes élastiques effectives déterminées par le modèle d'homogénéisation quasi-statique ne sont pas uniques. Pour chaque hypothèse de densité fixée lors de l'homogénéisation, un ensemble unique de constantes correspondantes existe. A l'inverse le modèle statique est basé sur la déformation statique du volume élémentaire et ne dépend pas de la densité de la structure, ce qui permet donc de valider l'ensemble des constantes.

Les paramètres mécaniques,  $\nu$  et  $E$ , peuvent être déterminés à partir du tenseur de rigidité, avec le tenseur de souplesse  $S$  défini comme l'inverse du tenseur  $C$  :

$$\tilde{S} = \tilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Les coefficients de Poisson et modules d'Young présentés sur la figure 2.12 sont les paramètres mécaniques dans le plan  $(xy)$  correspondant aux propriétés effectives théoriquement anti-auxétiques pour les angles  $\beta > 0^\circ$ . Le coefficient de Poisson hors-plan  $\nu_{13}$  correspond au coefficient de Poisson du matériau composant la cellule unitaire soit :  $\nu_{13} = \nu_{plexiglas} = 0,37$ . De manière comparable aux constantes élastiques précédemment citées, un bon accord est observé entre les paramètres effectifs issus des modèles statique et quasi-statique. Le coefficient de Poisson effectif obtenu par homogénéisation pour les géométries étudiées prend des valeurs supérieures à 0,5 pour des angles  $\beta > -10^\circ$ . Pour une géométrie avec une largeur de bras  $e = 1,5 \text{ mm}$ , le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  est compris entre 0,4 et 0,95 en fonction de  $\beta$ . Pour des largeurs plus faibles, il est possible d'obtenir des coefficients de Poisson d'un maximum de  $\nu_{12} = 1$  pour un angle  $\beta$  sortant, et des coefficients de Poisson négatifs pour un angle  $\beta$  ré-entrant. La structure présente une forte compressibilité se traduisant par un module d'Young dans le plan  $E_1$  présentant un rapport  $E_s = \frac{E_1}{E_{Plexy}}$  compris entre  $5,3 \cdot 10^{-3}$  et  $7,4 \cdot 10^{-3}$ .

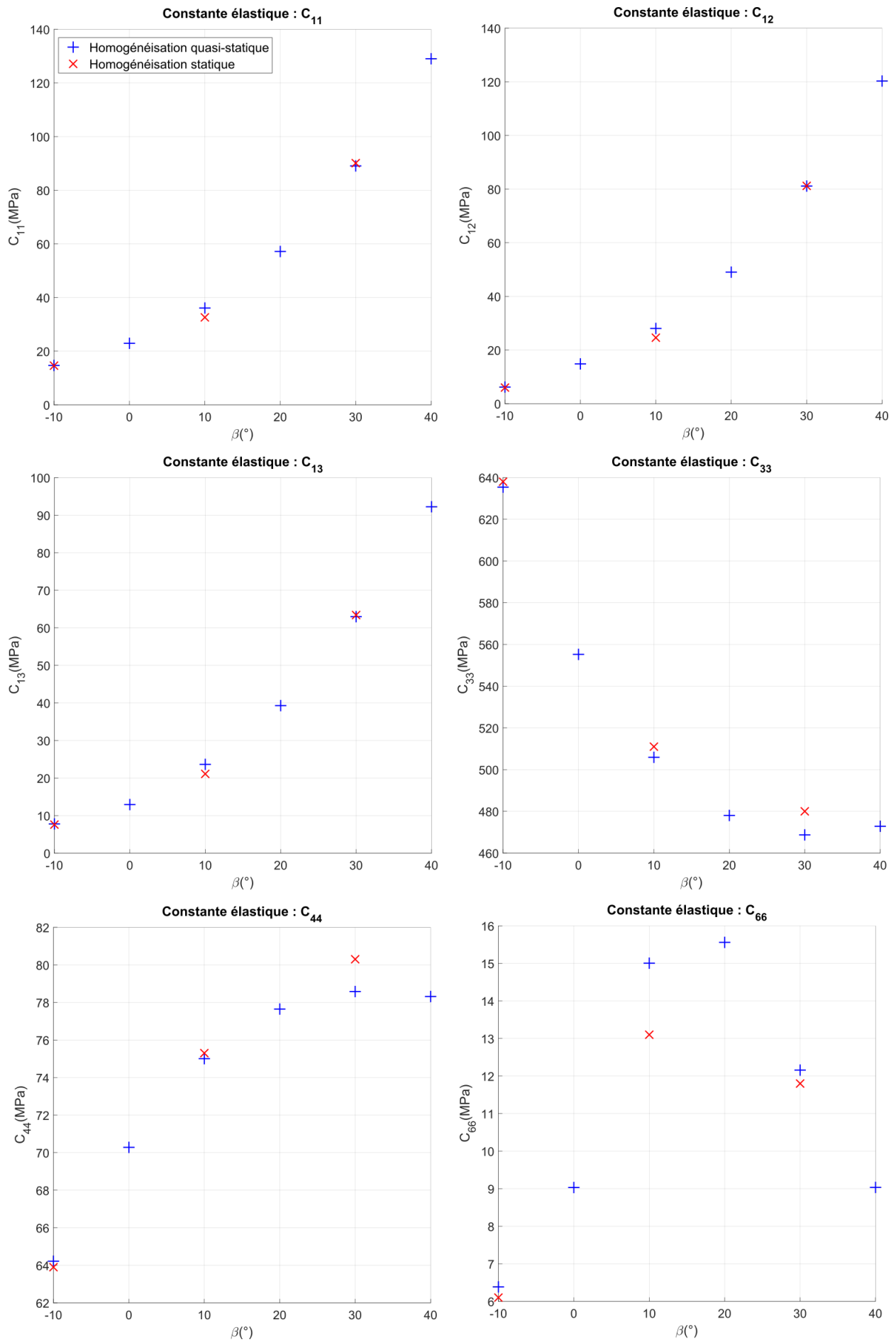


FIGURE 2.11 – Composantes du tenseur de rigidité effectif de la cellule élémentaire en Plexiglas, de longueur  $L = 2cm$ , de largeur de bras  $e = 1,5mm$ , en fonction de l'angle géométrique  $\beta$ .

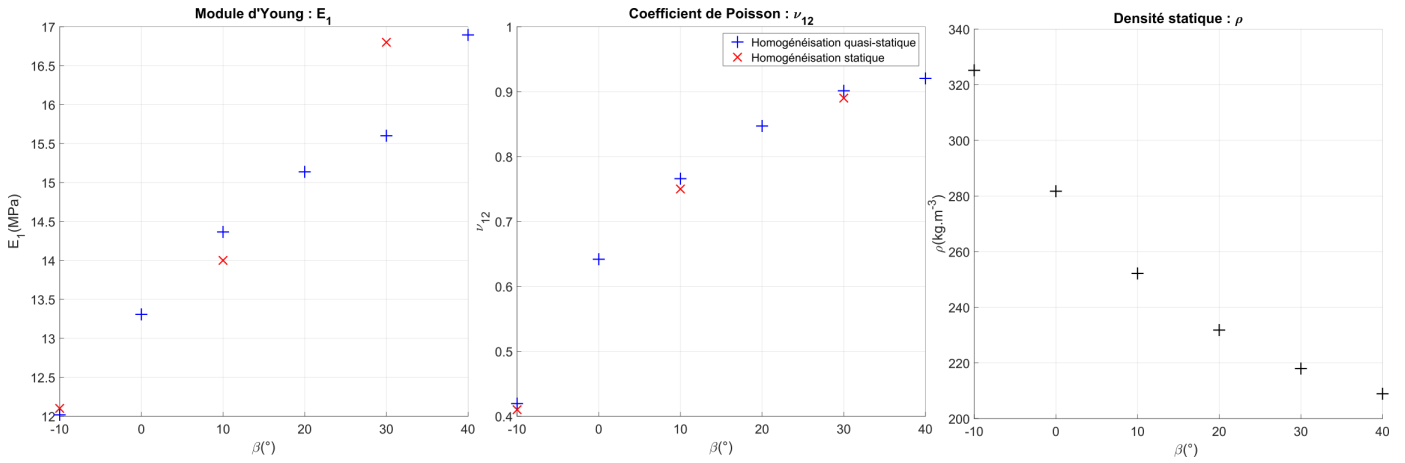


FIGURE 2.12 – Module d'Young  $E_1$ , coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et densité  $\rho$  effectifs de la cellule élémentaire en Plexiglas, de longueur  $L = 2 \text{ cm}$  et de largeur de bras  $e = 1,5 \text{ mm}$ , en fonction de l'angle géométrique  $\beta$ .

Par rotation de la cellule élémentaire, se traduisant par une rotation du tenseur de rigidité effectif  $\tilde{C}$ , il est possible de représenter les paramètres mécaniques effectifs précédents en fonction de l'orientation de la cellule dans le plan  $(xy)$  (figure 2.13) pour les angles de la cellule élémentaire  $\beta = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$  et  $40^\circ$ .

Les coefficients de Poisson  $\nu > 0,5$  sont retrouvés pour une rotation de la structure selon ses directions principales avec une diminution du coefficient de Poisson pour une rotation de  $\frac{\pi}{4}$ . De même une plus forte compressibilité est observée selon les directions principales et une rigidité plus forte selon les diagonales. Les courbes polaires des paramètres effectifs sont aussi obtenues par la méthode d'homogénéisation statique en introduisant une rotation dans la déformation dans le plan  $(xy)$  pour l'angle  $\beta = 10^\circ$  et concordent avec les courbes obtenues mais ne sont pas ici présentées.

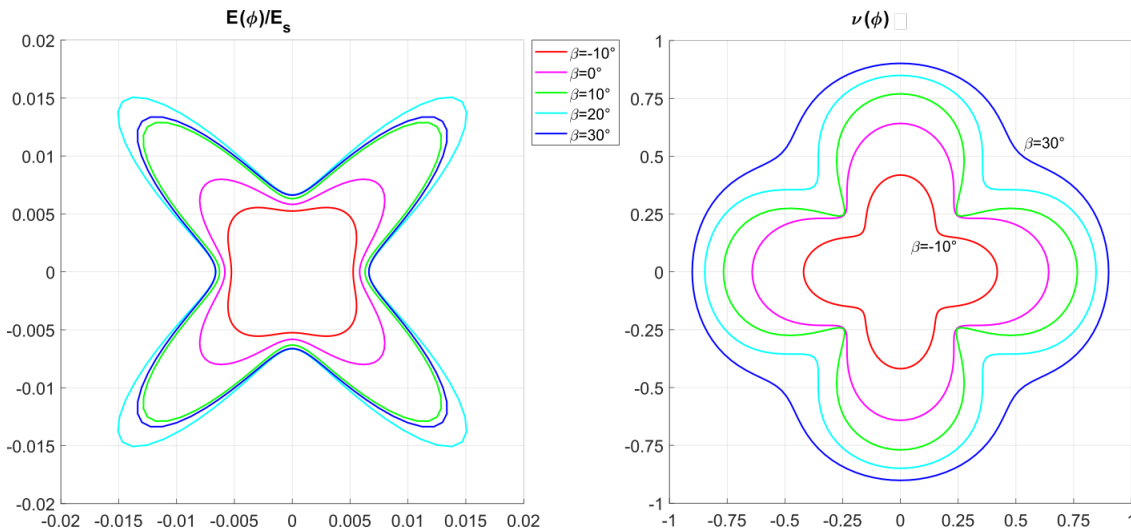


FIGURE 2.13 – Courbes polaires du module d'Young normalisé  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  effectifs de la cellule élémentaire en Plexiglas dans le plan  $(xy)$  obtenues par rotation du tenseur de rigidité  $\tilde{C}$ .

Les paramètres effectifs obtenus pour l'homogénéisation des différentes structures choisies résultent d'une homogénéisation quasi-statique, donc faite dans un domaine basses

fréquences proche des conditions de déformation statique, ce qui est confirmé par la validation par une méthode d'homogénéisation statique. Afin d'étudier les limites de validité des paramètres effectifs, deux démarches de validation sont faites dans la suite.

## 2.5 Validation numérique des paramètres effectifs

Les paramètres effectifs de la structure ayant été trouvés, une validation numérique est faite pour des matériaux effectifs équivalents. Une première vérification est effectuée par la comparaison des courbes de dispersion pour une cellule élémentaire et pour un matériau homogène équivalent ayant les paramètres effectifs déterminés. Une seconde validation est effectuée par la comparaison des fréquences propres de blocs, obtenues par simulation éléments finis, constitués d'un réseau de cellules unitaires et d'un matériau homogène équivalent. Les blocs correspondent à un réseau fini de cellules élémentaires d'épaisseur infinie.

### 2.5.1 Courbes de dispersion

Les courbes de dispersion décrites sur la figure 2.2 pour les 3 géométries  $\beta = -10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $30^\circ$  sont comparées aux courbes de dispersion d'un bloc homogène équivalent (figure 2.14) ayant les propriétés effectives issues des homogénéisations quasi-statique et statique. Le modèle éléments finis a pour paramètres un volume homogène de même dimension que la géométrie de la structure architecturée. Les matériaux considérés sont définis par les tenseurs de rigidité effectifs  $\tilde{C}$  statique et quasi-statique, ainsi que la densité statique  $\tilde{\rho}$ . Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 2.15.

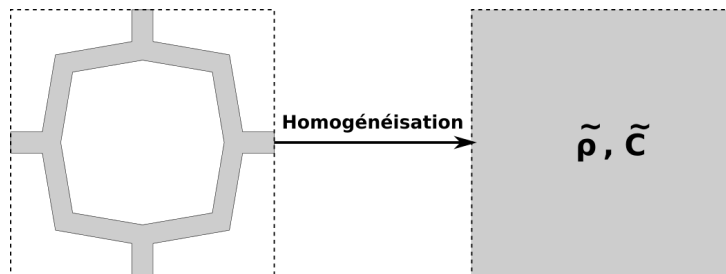


FIGURE 2.14 – Schéma de la cellule unitaire et du milieu homogène équivalent considéré pour le calcul des courbes de dispersion.

Les courbes de dispersion pour les cellules homogènes issues des deux modèles d'homogénéisation quasi-statique et statique présentent 3 modes de volume  $L$ ,  $T1$  et  $T2$ . Pour ces modes les courbes de dispersion présentent bien une vitesse de phase constante. De même, on note bien qu'aucune bande interdite de Bragg n'est présente pour les milieux homogènes contrairement aux courbes de dispersion de la géométrie architecturée.

La zone de validité des paramètres effectifs est définie comme le domaine de fréquence pour lequel les modes se propageant dans le milieu architecturé peuvent être décrits avec des constantes effectives. Ce domaine est déterminé par la différence entre les courbes de dispersion des modes de volume des milieux homogènes effectifs et les courbes de dispersion des ondes se propageant dans la structure avec une erreur relative  $\epsilon$  inférieure à 5 % soit :

$$\epsilon = \frac{f_{\text{homogene}} - f_{\text{architecturee}}}{f_{\text{architecturee}}} < 5 \%. \quad (2.91)$$

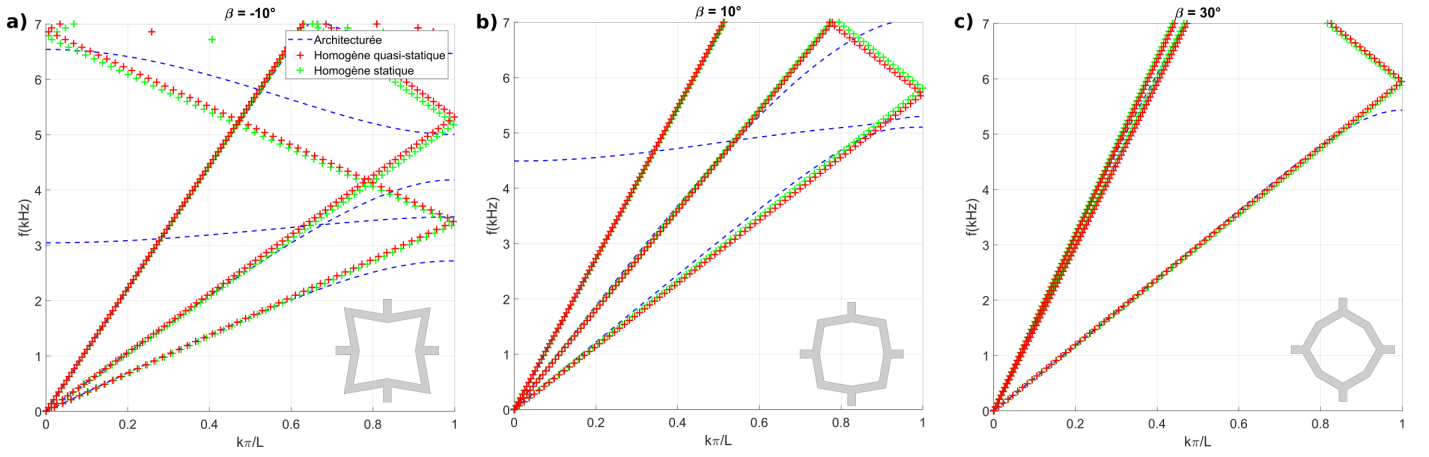


FIGURE 2.15 – Courbes de dispersion selon la direction principale  $x$  pour la cellule unitaire et les milieux homogènes équivalents : a)  $\beta = -10^\circ$  b)  $\beta = 10^\circ$  c)  $\beta = 30^\circ$ .

Avec ce critère, les paramètres effectifs sont valides pour les fréquences maximales  $f = 2300, 3400, 5500 \text{ Hz}$ , respectivement pour les géométries  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . Dans ce domaine de fréquence, les courbes de dispersion pour les milieux homogènes effectifs correspondent aux courbes de dispersion du milieu architecturé et les paramètres effectifs issus de l’homogénéisation quasi-statique permettent donc de décrire la propagation d’onde dans le milieu.

En s’intéressant aux surfaces des lenteurs (figure 2.16) à 1 % de la zone de Brillouin, il est possible de voir l’évolution de la validité des paramètres effectifs en propagation en fonction de l’angle de propagation. Le même accord entre les lenteurs pour la simulation microstructurée et pour les deux milieux effectifs est observé selon les directions principales et les autres angles de propagation. Les paramètres effectifs déterminés sont donc valides pour tous les angles de propagation.

Une seconde validation numérique est faite dans la suite en utilisant le calcul éléments finis des fréquences propres de blocs architecturés et de blocs homogènes effectifs.

## 2.5.2 Fréquences propres

Une validation complémentaire en fréquences propres est proposée dans la suite. Les fréquences propres, obtenues par simulation éléments finis, d’un bloc constitué d’un réseau de  $25 \times 10$  cellules unitaires, infiniment épaisses selon  $z$ , sont comparées aux fréquences propres d’un bloc homogène équivalent ayant les propriétés effectives,  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{C}$ , de la cellule unitaire homogénéisée. Pour cette partie, seules trois géométries sont retenues (voir figure 2.17) :

- Matériau : Plexiglas (Tab. A.1).
- Géométrie :
  - $25 \times 10$  cellules,
  - $L = 2 \text{ cm}$ ,
  - $e = 1,5 \text{ mm}$ ,
  - $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ .

Les blocs homogènes effectifs présentent les mêmes dimensions que les plaques architecturées ( $25 \times 10$  cellules), d’épaisseur infinie. De par l’étude du bloc d’épaisseur infinie, les modes étudiés sont considérés en déformation plane et la structure est seulement soumise à des modes dans le plan  $(xy)$ . Dans notre cas, les 4 premiers modes sont observés pour la comparaison des fréquences propres des différents blocs. Les déformées de ces modes sont représentées sur la figure 2.18. Pour chacun des modes, l’erreur relative entre

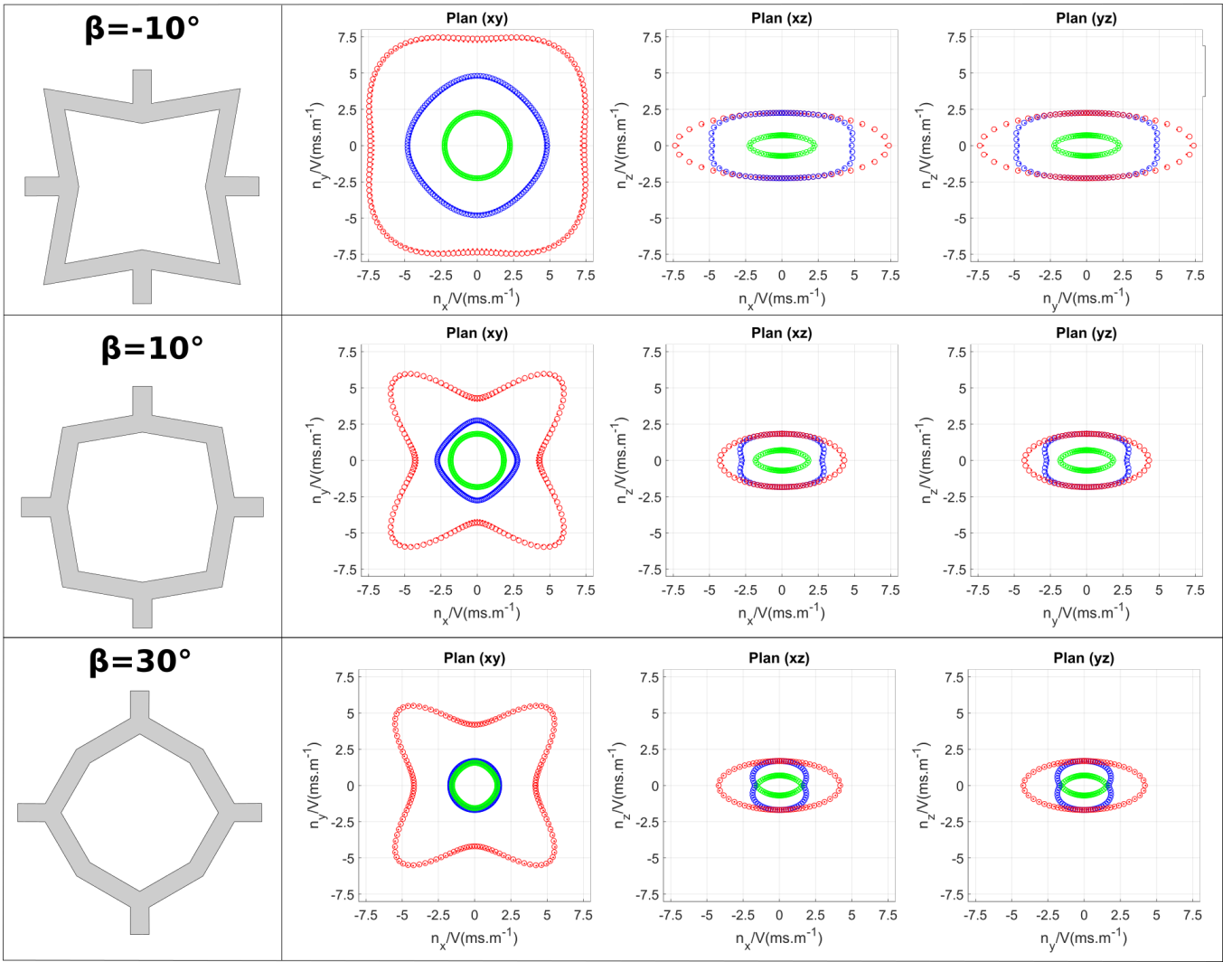


FIGURE 2.16 – Surfaces des lenteurs pour 3 cellules élémentaires (points) en Plexiglas, de longueur  $L = 2 \text{ cm}$ , de largeur de bras  $e = 1,5 \text{ mm}$  et d'angle géométrique  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$  et pour les milieux effectifs correspondants (cercles).

la fréquence propre du bloc homogène et la fréquence pour le milieu architecturé est calculée. Il en résulte que pour les 4 premiers modes, une erreur relative inférieure à 4 % est obtenue entre les fréquences propres des plaques architecturées et homogènes effectives dans une gamme de fréquences comprises entre 100 et 500  $\text{Hz}$  pour les 3 blocs avec un angle  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . Les modes suivants ne sont pas présentés car les déformées sont plus difficilement identifiables. Conformément aux résultats obtenus pour la validation à partir des courbes de dispersion, dans ce domaine de fréquences, les propriétés du milieu architecturé sont bien modélisées par le milieu homogène avec les propriétés effectives. Un meilleur accord global est observé pour le bloc avec  $\beta = 10^\circ$ . Une augmentation des fréquences des modes est observée, de manière similaire aux courbes de dispersion, pour des  $\beta$  plus grands, due principalement à la diminution de la densité.

Les fréquences des modes observés sont bien inférieures aux fréquences décrites par le domaine fréquentiel de validité déterminé par la validation en courbes de dispersion, de  $f = 2300, 3400, 5500 \text{ Hz}$ .

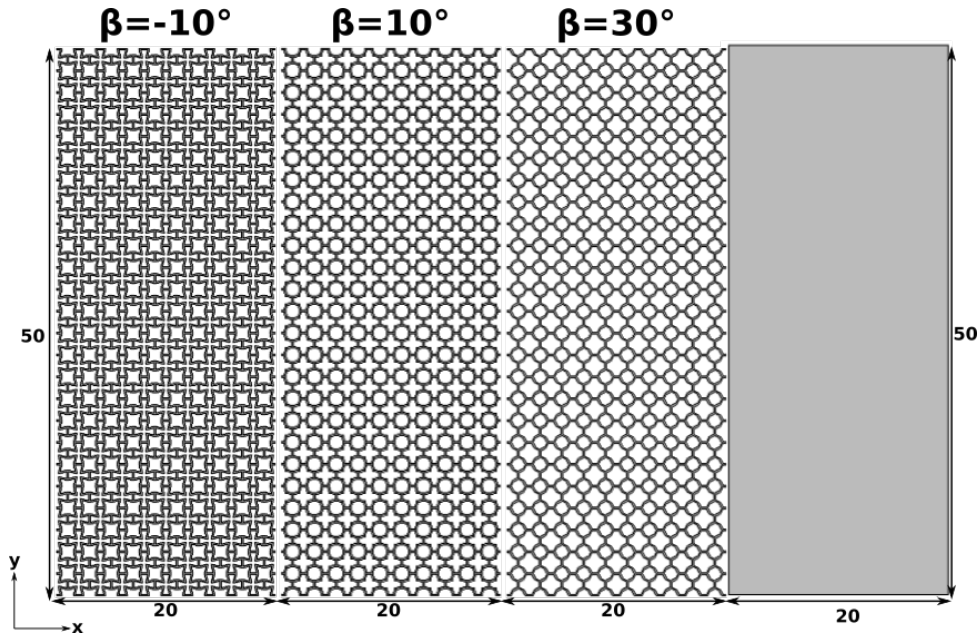


FIGURE 2.17 – Schéma du bloc architecturé et du bloc homogène équivalent considéré pour le calcul des fréquences propres

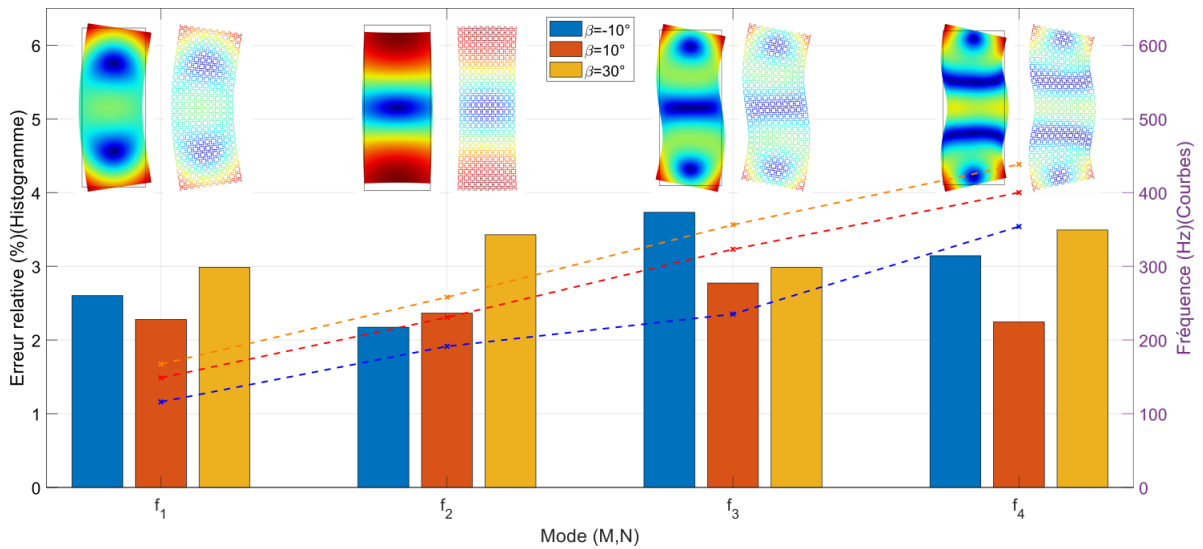


FIGURE 2.18 – Fréquences propres du bloc architecturé et erreur relative des fréquences propres du bloc homogène équivalent pour les angles  $\beta = -10^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$  et  $\beta = 30^\circ$ .

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode robuste pour déterminer les constantes effectives d'une structure architecturée sous forme d'un bloc a été proposée, méthode basée sur l'étude de la propagation des ondes dans la structure, à l'aide des courbes de dispersion.

Nous avons étudié la propagation des ondes dans un milieu anisotrope à partir des relations d'élasticité statique reliant la contrainte  $T_{ij}$  et la déformation  $\sigma_{ij}$  et mettant en jeu les éléments du tenseur de rigidité  $C_{\alpha\beta}$ . La structure étudiée présente une anisotropie avec une symétrie de type tétragonal. Dans ce cas le tenseur de rigidité de la structure est composé de 6 composantes indépendantes. En utilisant une inversion des équations de Christoffel, il est possible de retrouver le tenseur de rigidité effectif d'une structure en connaissant sa densité et les vitesses des ondes se propageant dans le milieu pour 3 angles d'incidence. Un modèle d'homogénéisation quasi-statique est décrit, utilisant cette



méthode, pour des basses fréquences.

Finalement, le comportement des ondes se propageant dans la structure supposée anti-auxétique a été étudié. Les courbes de dispersion décrivent un ralentissement des ondes se propageant dans le milieu ainsi qu'un changement de l'ordre des vitesses tel que  $V_{T2} > V_L > V_{T1}$ . L'application du modèle d'homogénéisation quasi-statique développé permet de déterminer les paramètres effectifs de la structure. Ceux-ci présentent une forte compressibilité ainsi que les propriétés anti-auxétiques recherchées ( $0,5 < \nu < 1$ ) pour des angles géométriques sortants  $\beta < 0^\circ$ . Les paramètres effectifs trouvés par homogénéisation quasi-statique correspondent aux paramètres effectifs trouvés par la méthode d'homogénéisation statique de référence. Ce modèle est donc validé par comparaison avec un modèle d'homogénéisation statique décrit dans les travaux de Dirrenberger et al. [109] et utilisant des excitations élémentaires sur un volume représentatif.

Une validation numérique des paramètres effectifs a pu être faite en dispersion pour des milieux homogènes et architecturés et en fréquences propres pour des blocs homogènes et architecturés. Les paramètres effectifs sont validés en propagation dans un domaine de fréquences tel que  $f < 2300 \text{ Hz}$ ,  $f < 3400 \text{ Hz}$  et  $f < 5500 \text{ Hz}$  pour les géométries respectives  $\beta = -10^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 10^\circ$  et une période  $L = 2 \text{ cm}$ . De plus, l'étude des modes de vibration de blocs a montré que pour les 4 premiers modes, une erreur relative inférieure à 5 % entre les fréquences des blocs architecturés et homogènes est présente. Les paramètres effectifs sont donc validés numériquement dans un domaine basses fréquences.

Enfin, les différences entre le modèle d'homogénéisation statique et le modèle quasi-statique sont discutées. Le modèle statique permet d'identifier les paramètres effectifs à partir d'excitations mécaniques élémentaires. Les équations mises en jeu ne dépendent pas de la densité et les paramètres effectifs obtenus permettent de valider l'hypothèse de densité choisie dans le modèle quasi-statique.

Pour des applications de furtivité sous-marine, la structure ne sera pas considérée seule mais entourée d'une matrice de polymère permettant l'introduction de pertes et la tenue de la pression hydrostatique. Elle sera donc soumise à des contraintes externes supplémentaires lors de sa déformation et ses propriétés effectives s'en trouveront modifiées. Les propriétés effectives de la structure pour des applications de furtivité sous-marine devront donc être déterminées avec une homogénéisation quasi-statique prenant en compte la matrice de polymère. La méthode décrite dans ce chapitre pourra être utilisée dans ce cas.

# Chapitre 3

## Homogénéisation de plaque

Dans le chapitre précédent, l'étude du volume infini a été abordée, permettant d'introduire une méthode d'homogénéisation décrivant des paramètres effectifs d'une structure architecturée en volume.

Dans le cadre d'une validation expérimentale des paramètres effectifs anti-auxétiques de la structure, la mesure de plaques permet une détermination plus simple de ceux-ci que pour des volumes, par l'intermédiaire d'essais en traction et de l'identification de leurs modes propres de flexion. Les paramètres effectifs considérés précédemment sont extraits à partir de résultats de simulations pour des volumes infinis (conditions de périodicité dans les 3 directions). Il est donc nécessaire d'abord d'étudier la propagation des ondes dans une plaque effective avec ces paramètres, en utilisant le modèle proposé par Nayfeh et al. [112]. Cependant, le changement de conditions aux limites, en passant du volume à la plaque, ne permet plus de modéliser la propagation des ondes avec les paramètres effectifs précédents. Un nouveau modèle de matériau effectif est alors à considérer afin de modéliser la propagation dans une plaque effective, dans notre cas par l'introduction d'une densité matricielle en s'appuyant sur les travaux de Zhu et al. [113]. Finalement, l'existence et la validité des paramètres effectifs anti-auxétiques peuvent être vérifiées expérimentalement sur des plaques réalisées par fabrication 3D, avec 2 types de mesure, statique par un essai en traction, et dynamique par l'identification des modes propres de flexion.

### Sommaire

---

<b>3.1 Propagation dans une plaque architecturée . . . . .</b>	<b>67</b>
3.1.1 Cellule élémentaire et conditions de frontière . . . . .	67
3.1.2 Propagation d'ondes acoustiques dans la plaque . . . . .	67
3.1.3 Utilisation des paramètres effectifs en volume infini . . . . .	69
<b>3.2 Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité   scalaire . . . . .</b>	<b>70</b>
3.2.1 Modèle analytique . . . . .	70
3.2.2 Approximation basse fréquence . . . . .	75
3.2.3 Validation numérique . . . . .	77
<b>3.3 Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité   matricielle . . . . .</b>	<b>78</b>
3.3.1 Introduction d'une densité matricielle . . . . .	79
3.3.2 Approximation basse fréquence . . . . .	81
3.3.3 Validation numérique . . . . .	81
<b>3.4 Validation expérimentale . . . . .</b>	<b>83</b>
3.4.1 Plaques réalisées . . . . .	83

3.4.2	Mesure statique : Essais en traction . . . . .	85
3.4.3	Mesure dynamique : Vibration de plaque . . . . .	89
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>96</b>

---

## 3.1 Propagation dans une plaque architecturée

### 3.1.1 Cellule élémentaire et conditions de frontière

Les plaques étudiées correspondent, comme pour les blocs dans le chapitre 2, à un réseau périodique 2D de cellules élémentaires. La géométrie de la cellule élémentaire est la même que dans la partie 2.1.1 (figure 3.1). Dans le cas de la plaque architecturée, les conditions aux frontières sont différentes du cas de volume infini. Pour les limites dans les directions  $x$  et  $y$ , des conditions périodiques sont toujours utilisées, mais on passe à des conditions libres pour la direction  $z$ . On modélise ainsi une plaque d'étendue infinie, et d'épaisseur finie, notée  $h$ .

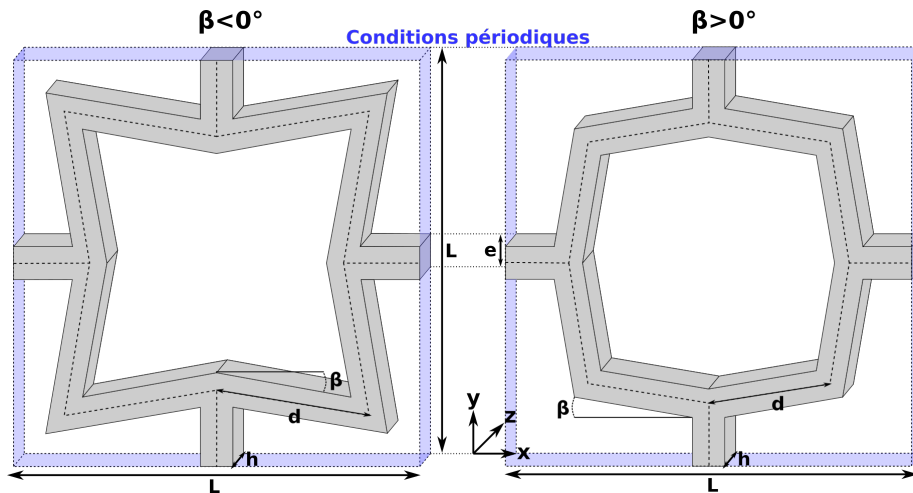


FIGURE 3.1 – Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant la plaque architecturée.

La plaque est faite de Plexiglas dont les propriétés sont données ci-dessous :

- Plexiglas :
  - $E = 2,285 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ,
  - $\nu = 0,37$ ,
  - $\rho = 1180 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,
  - $c_{L,plexy} = 1850 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
  - $c_{T,plexy} = 840 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Trois géométries sont présentées dans ce chapitre pour l'étude de la propagation d'onde dans la plaque architecturée ainsi que pour les études numérique et expérimentale de la vibration et de la déformation de la plaque. Les paramètres géométriques sont les suivants pour les 3 plaques :

- $L = 2 \text{ cm}$ ,
- $e = 1,5 \text{ mm}$ ,
- $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ ,
- $h = 2 \text{ mm}$ .

### 3.1.2 Propagation d'ondes acoustiques dans la plaque

Une plaque de matériau élastique est assimilable à un guide d'onde plan supportant un ensemble de modes de polarisations et de fréquences de coupure différentes. A basse fréquence, seuls trois modes existent. Deux de ces modes appartiennent à la famille des « modes de Lamb », pour lesquels le champ est inclus dans le plan défini par la direction de propagation et la normale à la plaque. En raison de leur nature respectivement symétrique

et antisymétrique (figure 3.2) par rapport au plan central de la plaque, ils sont indiqués par les sigles  $S0$  (mode de « compression ») et  $A0$  (mode de « flexion »). Le troisième mode (très similaire à un mode transverse dans un milieu infini) est le mode transverse horizontal  $SH$ . Pour ce dernier, la polarisation est normale au plan de polarisation des modes de Lamb.

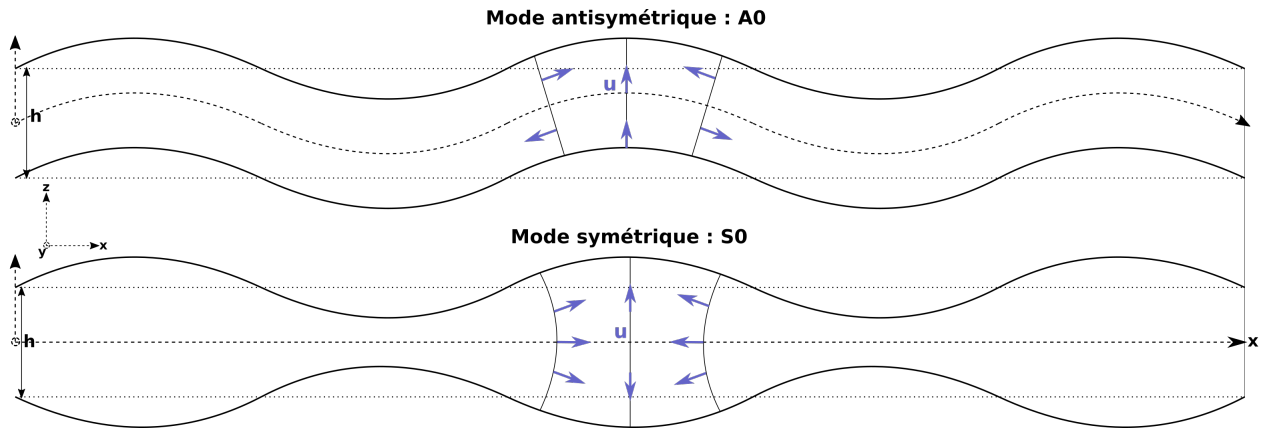


FIGURE 3.2 – Schéma des modes de Lamb dans une plaque

Les modes de Lamb, contrairement aux modes de volume étudiés dans la partie 2, sont dispersifs en basses fréquences, et présentent des vitesses de groupe dépendant de la fréquence. Le mode antisymétrique présente une forte dispersion avec des courbes de dispersion quadratiques en basse fréquence, alors que les modes symétrique et transverse horizontal peuvent s'approcher comme ayant des relations de dispersion linéaires en basse fréquence.

La propagation des ondes dans la plaque architecturée est décrite par les courbes de dispersion obtenues par simulation éléments finis. Les courbes de dispersion correspondantes sont représentées sur la figure 3.3.

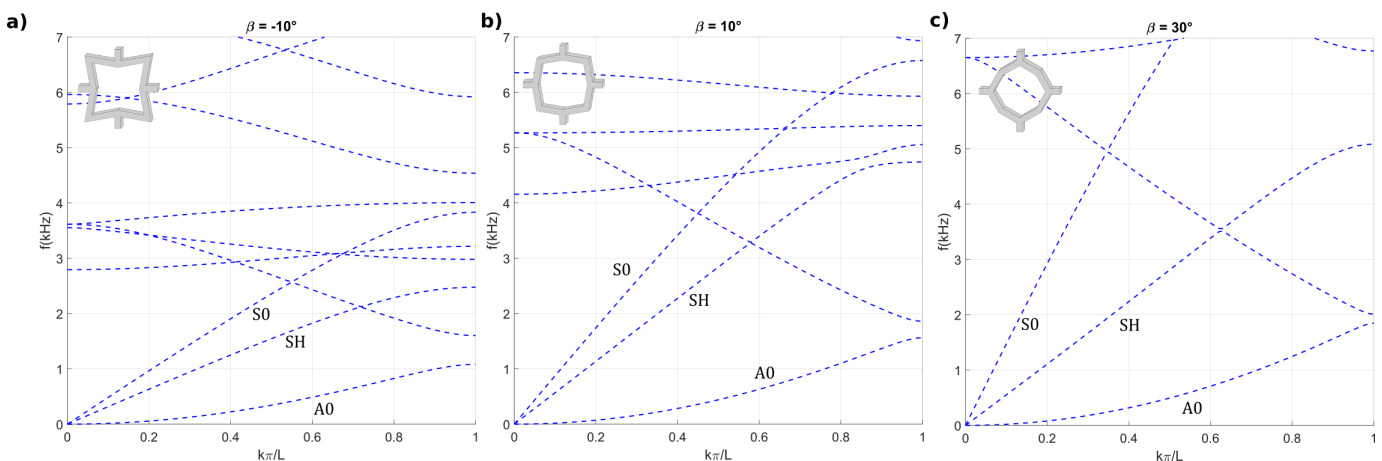


FIGURE 3.3 – Courbes de dispersion selon la direction principale  $x$  pour la cellule élémentaire : a)  $\beta = -10^\circ$  b)  $\beta = 10^\circ$  c)  $\beta = 30^\circ$ .

On voit que le mode  $A0$  dépend peu de l'angle  $\beta$ , contrairement aux modes  $S0$  et  $SH$  pour lesquels on constate une rapide augmentation de la vitesse lorsque  $\beta$  augmente, à basses fréquences. Il est rappelé que pour le cas du milieu infini, seul le mode longitudinal  $L$  a une forte variation de sa vitesse de phase avec  $\beta$ , à l'inverse des modes transverse  $T1$  et  $T2$ .

Contrairement au cas de la propagation dans un milieu infini, les modes de Lamb n'étant pas des modes de volume, il n'est plus possible de décrire les 3 vitesses de phase des courbes à l'origine comme des vitesses de phase constantes pour un nombre  $k$  suffisamment faible. Les vitesses de phase des modes transverse  $SH$  et symétrique  $S0$  peuvent encore être considérées comme constantes en basses fréquences mais le mode de Lamb anti-symétrique  $A0$  est a priori dispersif et possède une vitesse dépendant de la fréquence en basses fréquences.

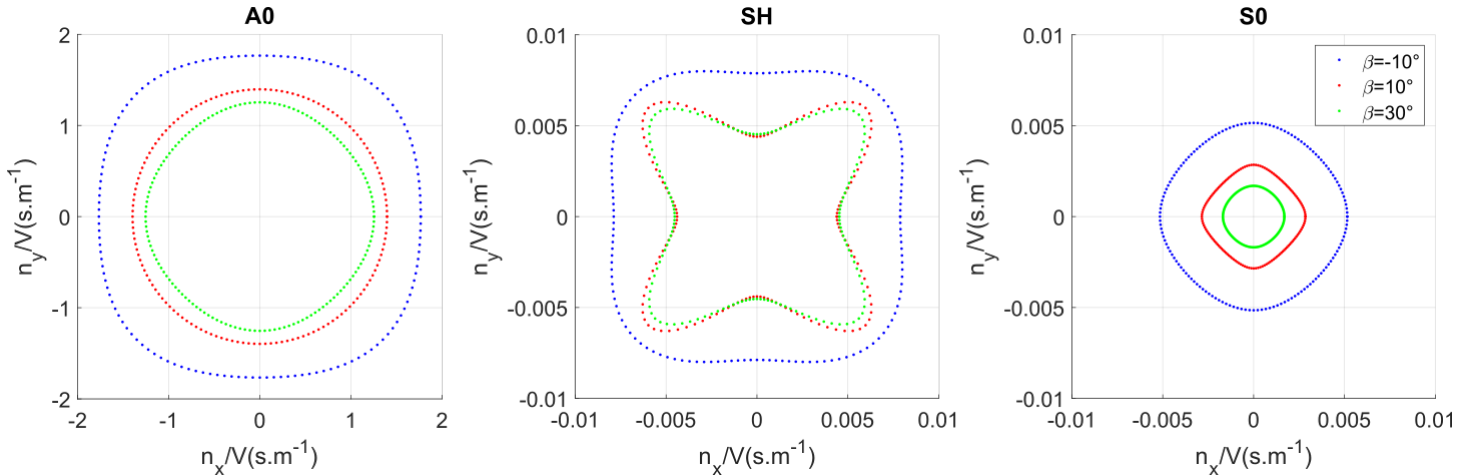


FIGURE 3.4 – Surfaces des lenteurs des cellules élémentaires en plaque : a)  $\beta = -10^\circ$  b)  $\beta = 10^\circ$  c)  $\beta = 30^\circ$ . Les 3 modes de plaque  $S0$ ,  $SH$  et  $A0$  sont représentés.

Les effets dus à la périodisation de la cellule sont bien visibles à plus haute fréquence avec des bandes interdites de Bragg pour chaque mode apparaissant sur les courbes de dispersion.

Les surfaces des lenteurs dans le plan  $(xy)$  pour les 3 plaques sont représentées sur la figure 3.4 pour un nombre d'onde réduit  $\frac{k\pi}{L} = 0,01$ . Les profils de lenteurs trouvés pour les modes de Lamb dans la plaque présentent la même symétrie tétragonale  $4/m2/m2/m$  que pour ceux calculés pour le volume.

### 3.1.3 Utilisation des paramètres effectifs en volume infini

Afin de confirmer la validité des paramètres effectifs précédemment déterminés par l'homogénéisation en volume dans le cas de la propagation des ondes dans une plaque, une comparaison des courbes de dispersion de la plaque architecturée et de la plaque effective avec ces paramètres est faite. Les paramètres effectifs déterminés avec l'homogénéisation de volume infini dans la partie 2 sont utilisés pour calculer les courbes de dispersion pour le cas d'une plaque effective équivalente à la plaque architecturée. Les courbes de dispersion pour les plaques architecturées et homogènes sont représentées sur la figure 3.5. Pour la plaque effective, la périodicité  $L$  n'a pas de sens, celle-ci étant une plaque homogène infinie dans le plan  $(xy)$ .

Plusieurs observations sont à faire : premièrement l'accord des modes symétriques  $S0$  et transverses  $SH$  est limité en basse fréquence avec une erreur maximale de 16,7 % entre les courbes de la plaque avec  $\beta = -10^\circ$  architecturée et homogène pour une fréquence de 2 kHz. Cette erreur est plus faible pour les plaques avec un angle  $\beta$  positif,  $\beta = 10^\circ$  et  $30^\circ$ . Une seconde observation est que la vitesse pour le mode  $A0$  est globalement nettement plus faible pour la plaque homogène que pour la plaque architecturée.

Afin de comprendre les différences de modélisation du mode antisymétrique  $A0$  pour la plaque effective, il est nécessaire de recourir à l'étude de la propagation dans des plaques.

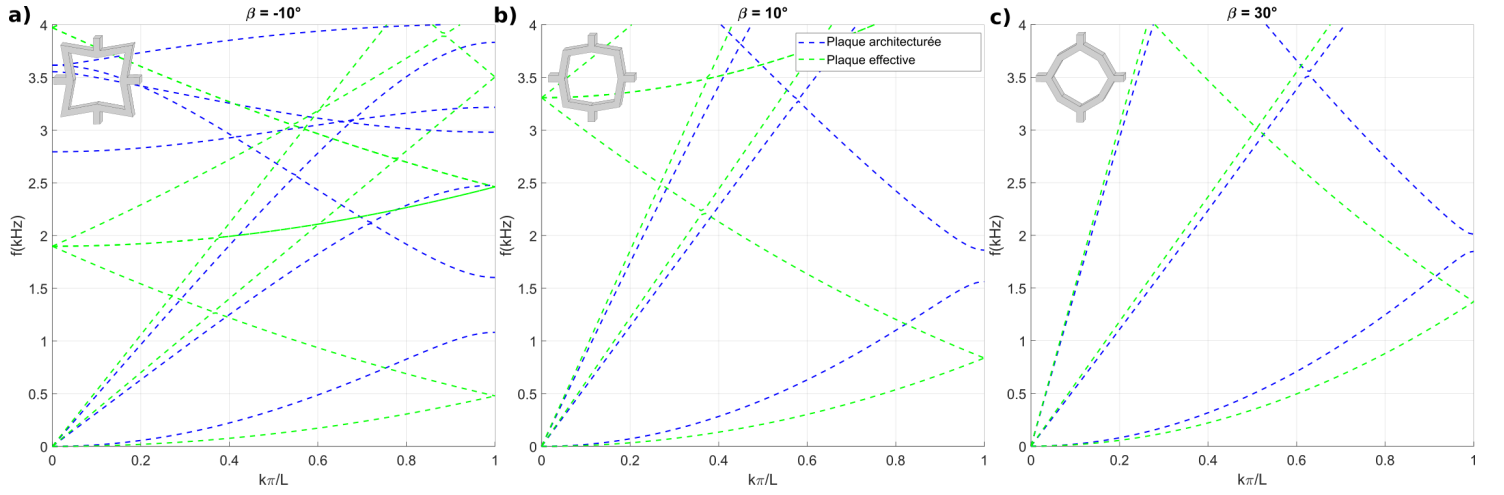


FIGURE 3.5 – Courbes de dispersion des plaques architecturées étudiées ainsi que des plaques homogènes équivalentes avec les paramètres effectifs déterminés en volume infini.

Un modèle analytique proposé par Nayfeh et al. [112] est utilisé dans la suite afin de décrire les modes de flexion et de compression correspondant aux modes de Lamb dans la plaque.

## 3.2 Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité scalaire

Dans la suite, la notation d'Einstein, ou convention de sommation d'Einstein, sur la sommation des indices répétés est utilisée.

Afin de décrire la propagation d'onde dans une plaque, les grandeurs physiques mises en jeu sont la contrainte  $T_{ij}$  et la déformation  $\sigma_{kl}$ . La relation constitutive reliant ces deux grandeurs est rappelée :

$$T_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (3.1)$$

### 3.2.1 Modèle analytique

#### 3.2.1.1 Position du problème

La plaque considérée (figure 3.6) est de dimension infinie dans le plan  $(xy)$  et d'épaisseur finie  $h$  dans la direction  $z$  et de densité  $\rho$ . Les faces de coordonnées  $z = -\frac{h}{2}$  et  $z = \frac{h}{2}$  sont considérées comme libres.

De manière analogue au chapitre 2, bien que la structure étudiée soit de classe tétragonale  $4/m2/m2/m$ , pour plus de généralité, la plaque considérée est de classe de symétrie orthorhombique  $2/m2/m2/m$ , orientée selon ses axes principaux. Afin de considérer la propagation d'onde dans la plaque pour le cas général avec n'importe quel angle de propagation, une rotation du tenseur de rigidité en dehors de ses axes principaux est faite.

L'angle de propagation  $\phi$  de l'onde dans le plan  $(xy)$  (figure 3.7) est introduit par une rotation du tenseur de rigidité comme :

$$C'_{ijkl} = \beta_{im}\beta_{jn}\beta_{ko}\beta_{lp}C_{mnop} \quad (3.2)$$

où  $\beta_{ij}$  est le cosinus de l'angle entre les axes  $x_i$  et  $a_j$ . La base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  correspond à la base pour laquelle l'onde se propage et la base  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  correspond à la base des directions

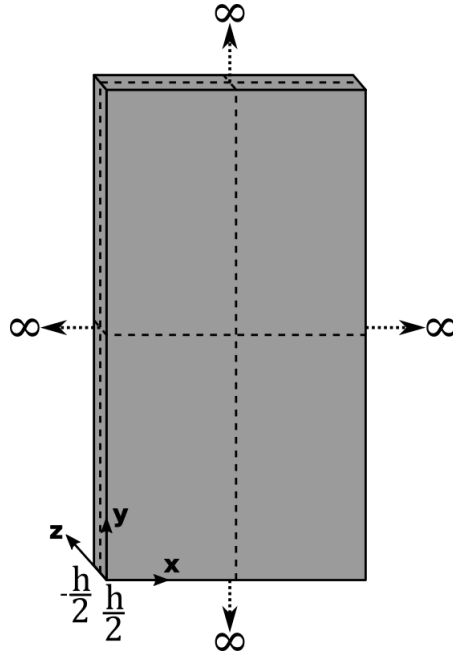


FIGURE 3.6 – Modèle de plaque infinie dans le plan  $(xy)$  et d'épaisseur finie  $h$  (selon  $z$ ).

principales du matériau.

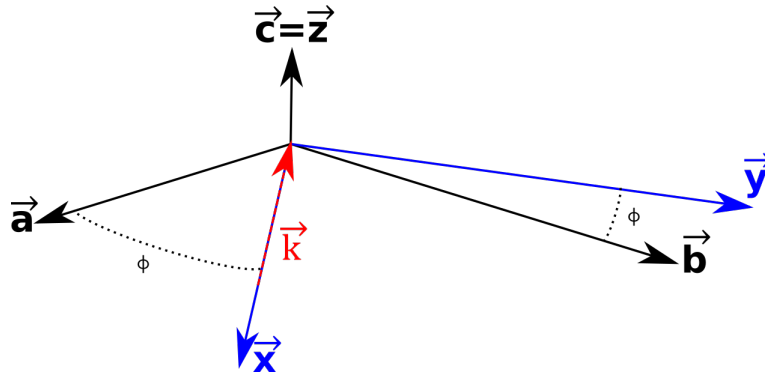


FIGURE 3.7 – Schéma du vecteur d'onde  $\vec{n}$  dans la plaque.

Avec ce type de rotation autour de l'axe  $\vec{c}$  uniquement, les termes non nuls de la matrice de rigidité pour une structure à symétrie orthorhombique sont les suivants :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Les ondes se propagent dans la plaque selon la direction  $x$  et ont pour nombre d'onde  $k_x$  selon  $x$  et un nombre d'onde  $k_z$  à déterminer selon la direction  $z$ . Le problème est normalisé en introduisant le nombre d'onde de propagation  $\xi = k_x$  et le rapport de nombre d'onde  $p = \frac{k_z}{k_x}$  est alors défini.

$$u_j = U_j e^{i\xi(x+pz-ct)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

où  $c$  est  $\frac{\omega}{\xi}$  et  $U_j$  la polarisation.



### 3.2.1.2 Problème de propagation d'ondes dans la plaque

L'équation de propagation (3.5) permet de décrire la propagation des ondes :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

La relation constitutive (3.1) peut se réécrire en considérant l'expression de la déformation en fonction du déplacement :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.6)$$

La relation constitutive (3.1) devient :

$$T_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (3.7)$$

En introduisant l'expression (3.7) dans l'équation de propagation (3.5), il est possible d'obtenir trois équations couplées ( $i = 1, 2, 3$ ) :

$$K_{mn}(p)U_n = 0, \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Ces trois équations dépendent du rapport  $p$  et des composantes du tenseur de propagation  $K$  d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} K_{11}(p) &= C_{11} + C_{55}p^2 - \rho c^2, \\ K_{12}(p) &= C_{16} + C_{45}p^2, \\ K_{13}(p) &= (C_{13} + C_{55})p, \\ K_{22}(p) &= C_{66} + C_{44}p^2 - \rho c^2, \\ K_{23}(p) &= (C_{36} + C_{45})p, \\ K_{33}(p) &= C_{55} + C_{33}p^2 - \rho c^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'existence d'une solution non-triviale pour les déplacements  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  permet d'obtenir une équation polynomiale de degré 6 reliant la vitesse de phase  $c$  et le rapport  $p$  à partir du déterminant de l'équation (3.8). Cette équation possède 6 solutions en  $p$ .

$$A_1 p^6 + A_2 p^4 + A_3 p^2 + A_4 = 0. \quad (3.10)$$

Les coefficients  $A_j$  sont détaillés ci-dessous :

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{33}C_{44}C_{55} - C_{33}C_{45}^2, \\ A_2 &= C_{33}C_{44}C_{55} - C_{13}^2C_{44} + 2C_{13}C_{36}C_{45} - 2C_{13}C_{44}C_{55} + 2C_{13}C_{45}^2 \\ &\quad - 2C_{16}C_{33}C_{45} + C_{33}C_{55}C_{66} - C_{36}^2C_{55} \\ &\quad - (C_{33}C_{44} + C_{33}C_{55} + C_{44}C_{55} - C_{45}^2)\rho c^2, \\ A_3 &= C_{11}C_{33}C_{66} - C_{11}C_{36}^2 - 2C_{11}C_{36}C_{45} + C_{11}C_{44}C_{55} - C_{11}C_{45}^2 \\ &\quad - C_{13}^2C_{66} + 2C_{13}C_{16}C_{36} + 2C_{13}C_{16}C_{45} - 2C_{13}C_{55}C_{66} \\ &\quad - C_{16}^2C_{33} + 2C_{16}C_{36}C_{55} \\ &\quad - (C_{11}C_{33} + C_{11}C_{44} - C_{13}^2 - 2C_{13}C_{55} - 2C_{16}C_{45} + C_{33}C_{66} - C_{36}^2 \\ &\quad - 2C_{36}C_{45} + C_{44}C_{55} - C_{45}^2 + C_{55}C_{66})\rho c^2 - (C_{33} + C_{44} + C_{55})\rho^2 c^4, \\ A_4 &= C_{11}C_{55}C_{66} - C_{16}^2C_{55} - (C_{11}C_{55} + C_{11}C_{66} - C_{16}^2 + C_{55}C_{66})\rho c^2 \\ &\quad - (C_{11} + C_{55} + C_{66})\rho^2 c^4 - \rho^3 c^6. \end{aligned}$$

L'équation 3.10 possède 6 solutions en  $p$  respectant la condition de parité induite par les puissances paires du polynôme. Ainsi, en notant les solutions  $p_q$ , on a :

$$p_{(2q)} = -p_{(2q-1)}, \quad q = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Chacune des 3 paires de solutions correspond à la relation entre la vitesse  $c$  et les nombres d'onde  $k_z$  et  $k_x$ , par l'intermédiaire du rapport  $p$ , pour l'ensemble des 3 modes symétrique, antisymétrique et transverse se propageant. Ces solutions permettent donc de décrire les relations de dispersion des modes se propageant. Le déplacement peut être défini pour chacune des 6 solutions comme :

$$u_{jq} = U_{jq} e^{i\xi(x+p_q z-ct)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad q = 1, \dots, 6, \quad (3.12)$$

où  $q$  est l'indice des solutions  $p_q$ .

Pour chaque solution  $p_q$ , les déplacements et les contraintes sont normalisés en fonction du déplacement  $u_1$  (éq. 3.4) afin de simplifier le problème, en introduisant les coefficients  $R_q = \frac{U_{2q}}{U_{1q}}$ ,  $S_q = \frac{U_{3q}}{U_{1q}}$  tels que :

$$(u_1, u_2, u_3) = \sum_{q=1}^6 (1, R_q, S_q) U_{1q} e^{i\xi(x+p_q z-ct)}, \quad (3.13)$$

$$(T_{33}, T_{13}, T_{23}) = \sum_{q=1}^6 i\xi(H_{1q}, H_{2q}, H_{3q}) U_{1q} e^{i\xi(x+p_q z-ct)}, \quad (3.14)$$

où les coefficients  $H_{iq}$  sont définis comme :

$$\begin{aligned} H_{1q} &= C_{13} + C_{36}R_q + C_{33}p_q S_q, \\ H_{2q} &= C_{55}(p_q + S_q) + C_{45}p_q R_q, \\ H_{3q} &= C_{45}(p_q + S_q) + C_{44}p_q R_q, \end{aligned} \quad (3.15)$$

et les rapports  $R_q$  et  $S_q$  :

$$\begin{aligned} R_q &= \frac{U_{2q}}{U_{1q}} = \frac{K_{11}(p_q)K_{23}(p_q) - K_{12}(p_q)K_{13}(p_q)}{K_{13}(p_q)K_{22}(p_q) - K_{12}(p_q)K_{23}(p_q)}, \\ S_q &= \frac{U_{3q}}{U_{1q}} = \frac{K_{11}(p_q)K_{23}(p_q) - K_{12}(p_q)K_{13}(p_q)}{K_{12}(p_q)K_{33}(p_q) - K_{13}(p_q)K_{23}(p_q)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalement, les conditions libres sur les faces de la plaque en  $z = -\frac{h}{2}$  et  $z = \frac{h}{2}$  sont prises en compte, la contrainte normale est nulle sur ces faces :

$$\forall x \forall y, \quad T_{zz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = T_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = T_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = 0. \quad (3.17)$$

Avec l'introduction de la contrainte décrite précédemment par l'équation (3.14), la condition (3.17) d'annulation des contraintes normales s'écrit comme :

$$\sum_{q=1}^6 i\xi(H_{1q}, H_{2q}, H_{3q}) U_{1q} e^{i\xi(x+p_q z-ct)} = 0, \quad z = \pm \frac{h}{2}. \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) prend une forme matricielle, et l'équation de dispersion est décrite par l'annulation du déterminant de cette matrice :

$$\begin{vmatrix} H_{11}E_1 & H_{12}E_2 & H_{13}E_3 & H_{14}E_4 & H_{15}E_5 & H_{16}E_6 \\ H_{21}E_1 & H_{22}E_2 & H_{23}E_3 & H_{24}E_4 & H_{25}E_5 & H_{26}E_6 \\ H_{31}E_1 & H_{32}E_2 & H_{33}E_3 & H_{34}E_4 & H_{35}E_5 & H_{36}E_6 \\ H_{11}E_1^{-1} & H_{12}E_2^{-1} & H_{13}E_3^{-1} & H_{14}E_4^{-1} & H_{15}E_5^{-1} & H_{16}E_6^{-1} \\ H_{21}E_1^{-1} & H_{22}E_2^{-1} & H_{23}E_3^{-1} & H_{24}E_4^{-1} & H_{25}E_5^{-1} & H_{26}E_6^{-1} \\ H_{31}E_1^{-1} & H_{32}E_2^{-1} & H_{33}E_3^{-1} & H_{34}E_4^{-1} & H_{35}E_5^{-1} & H_{36}E_6^{-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.19)$$

où  $E_q = e^{i\xi(p_q \frac{h}{2})}$  et  $q = 1, \dots, 6$ . L'annulation du déterminant permet d'obtenir l'équation de dispersion des modes de Lamb. Le déterminant peut se factoriser, ce qui amène à définir 2 équations de dispersion découplées :

$$\begin{aligned} H_{11}D_1 \tan\left(\frac{\xi p_1 h}{2} + \phi\right) + H_{13}D_3 \tan\left(\frac{\xi p_3 h}{2} + \phi\right) + H_{15}D_5 \tan\left(\frac{\xi p_5 h}{2} + \phi\right) &= 0, \\ D_1 = H_{23}H_{35} - H_{33}H_{25}, \quad D_3 = H_{31}H_{25} - H_{21}H_{35}, \quad D_5 = H_{21}H_{33} - H_{31}H_{23}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec  $\phi = 0$  pour les modes antisymétriques et  $\phi = \frac{\pi}{2}$  pour les modes symétriques.

L'équation générale de dispersion des ondes dans une plaque anisotrope dont le matériau est tourné hors de ses directions principales est déterminée pour les modes symétriques et antisymétriques. Le problème se simplifie dans le cas où l'on considère que le matériau constituant la plaque est orienté selon ses directions principales.

### 3.2.1.3 Cas particulier : $\vec{x} = \vec{a}$

Dans le cas où le matériau est orienté selon ses directions principales le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  est :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Avec cette simplification du tenseur de rigidité, l'équation polynomiale (3.10) admet 3 paires de racines explicites :

$$\begin{aligned} p_{1,3} = -p_{2,4} &= \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3}}{2A_1}, \\ p_5 = -p_6 &= \sqrt{\frac{\rho c^2 - C_{66}}{C_{55}}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{33}C_{55}, \\ A_2 &= C_{55}(C_{55} - \rho c^2) + C_{33}(C_{11} - \rho c^2) - (C_{13} + C_{55})^2, \\ A_3 &= (C_{55} - \rho c^2)(C_{11} - \rho c^2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le rapport de nombre d'onde  $p_5$  permet de décrire la relation de dispersion pour le mode transverse horizontal  $SH$ . De plus les rapports  $R_q$  et  $S_q$  se simplifient et il est possible de voir que  $R_q$  s'annule, traduisant une polarisation purement selon  $z$  des modes symétriques et anti-symétriques de la plaque.

Les nouvelles composantes du tenseur  $K$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_{11}(p_q) &= C_{11} + C_{55}p_q^2 - \rho c^2, \\ K_{12}(p_q) &= 0, \\ K_{13}(p_q) &= (C_{13} + C_{55})p_q, \\ K_{22}(p_q) &= C_{66} + C_{44}p_q - \rho c^2, \\ K_{23}(p_q) &= 0, \\ K_{33}(p_q) &= C_{55} + C_{33}p_q^2 - \rho c^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

La simplification des équations (3.16) donne :

$$\begin{aligned} R_q &= 0, q = 1, \dots, 4, \\ S_q &= \frac{\rho c^2 - C_{11} - C_{55}p_q^2}{(C_{13} + C_{55})p_q}, q = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Finalement, en considérant les simplifications induites par la modification du tenseur  $\tilde{C}$ , l'équation de dispersion (3.20) se réécrit sous la forme de 3 équations découplées pour chaque mode  $SH$ ,  $S0$  et  $A0$ .

$$H_{35} = C_{44}p_5 = 0, \quad (3.26)$$

$$H_{11}H_{23}\tan\left(\frac{\xi p_1 h}{2} + \phi\right) - H_{13}H_{21}\tan\left(\frac{\xi p_3 h}{2} + \phi\right) = 0, \quad (3.27)$$

avec  $\phi = 0$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$  pour les modes antisymétrique et symétrique respectivement.

La vitesse du mode  $SH$  vient directement de la relation de dispersion (3.26) :

$$c_{SH} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}. \quad (3.28)$$

La vitesse  $c_{SH}$  est identique à celle du mode transverse horizontal se propageant dans un volume infini. L'expression (3.27) ne possède pas de solution explicite permettant de décrire la vitesse de phase et les courbes de dispersion des modes antisymétrique et symétrique. Il est proposé dans la suite de faire un développement limité à basse fréquence de l'équation (3.27) afin de décrire la propagation des ondes de Lamb dans la limite des grandes longueurs d'onde.

### 3.2.2 Approximation basse fréquence

Les deux modes  $S0$  et  $A0$  sont décrits dans la suite par une approximation basse fréquence. Le mode  $S0$  est obtenu par un développement limité à l'ordre 1 de l'équation de dispersion (3.27) avec  $\phi = \frac{\pi}{2}$  et le mode  $A0$  par un développement limité à l'ordre 3 de la même équation avec  $\phi = 0$ .

#### 3.2.2.1 Mode $S0$ ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ )

L'équation de dispersion (3.27) est réécrite afin de pouvoir faire un développement des tangentes et d'obtenir une équation dépendant de  $p_q$ .

$$H_{11}H_{23}\cotan\left(\frac{\xi p_1 h}{2}\right) - H_{13}H_{21}\cotan\left(\frac{\xi p_3 h}{2}\right) = 0. \quad (3.29)$$

L'approximation basse fréquence est faite par un développement limité à l'ordre 1 s'écrivant :

$$\cotan(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + o(\varepsilon^2), \quad (3.30)$$

avec le paramètre  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{\xi p_{1,3} h}{2} \ll 1. \quad (3.31)$$

De cette façon l'équation de dispersion (3.29) se simplifie en faisant ressortir les solutions  $p_1$  et  $p_3$  :

$$H_{11}H_{23}p_3 - H_{13}H_{21}p_1 = 0. \quad (3.32)$$

En introduisant les expressions des coefficients (3.15) dans l'équation de dispersion simplifiée (3.32), il apparaît après développement :

$$[-C_{33}C_{55}(\rho c^2 - C_{11}) - C_{13}(C_{13}(C_{13} + C_{55}) + C_{33}(\rho c^2 - C_{11}))](p_3^2 - p_1^2) = 0. \quad (3.33)$$

Les solutions imposent que la partie gauche de l'équation s'annule et la vitesse de phase du mode  $S0$  peut être décrite par une approximation basse fréquence comme :

$$\rho c_{S0}^2 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}. \quad (3.34)$$

Le développement de l'équation de dispersion (3.27) étant à l'ordre 1, l'approximation basse fréquence décrit une relation de dispersion linéaire où la vitesse est donc constante.

### 3.2.2.2 Mode $A0$ ( $\phi = 0$ )

La courbe de dispersion du mode  $A0$  (figure 3.3) décrit une parabole, un développement à l'ordre supérieur est nécessaire afin d'obtenir une vitesse dépendant de la fréquence. Le développement limité est fait à l'ordre 3 afin de faire apparaître une relation de dispersion quadratique pour le mode  $A0$  :

$$\tan(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3} + o(\varepsilon^5). \quad (3.35)$$

De la même façon que pour le mode symétrique  $S0$ , il est possible de réécrire l'équation de dispersion (3.27) avec l'approximation basse fréquence (3.35) :

$$H_{11}H_{23}(3 + \zeta^2 p_1^2)p_1 - H_{13}H_{21}(3 + \zeta^2 p_3^2)p_3 = 0, \quad (3.36)$$

avec  $\zeta = \frac{\xi h}{2}$ .

L'équation se transforme en polynôme du second degré en  $\rho\psi^2$  en développant les racines  $p_i$  (équation 3.22) et les coefficients  $H_{iq}$  (équation 3.15), où  $\psi = \frac{\omega h}{2}$  :

$$\begin{aligned} \rho^2\psi^4 + B_1\rho\psi^2 + B_2 &= 0, \\ B_1 &= 3C_{33} + (2C_{13} + C_{33})\zeta^2, \\ B_2 &= (C_{13}^2 - C_{11}C_{33})\zeta^4. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La racine positive de l'équation (3.37) correspond à l'équation de dispersion pour le mode  $A0$ . Dans notre cas, l'équation de dispersion du mode antisymétrique  $A0$  est :

$$\rho\psi^2 = \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2}}{2}. \quad (3.38)$$

On ne retient que la solution positive pour  $\rho\psi^2$ . La racine s'écrit avec un signe +, compte-tenu des constantes élastiques de la structure décrivant  $C_{13}^2 < C_{11}C_{33}$ .

Dans ce cas la vitesse n'est toujours pas explicite avec la présence du terme  $\sqrt{B_1^2 - 4B_2}$ . Un second développement limité de ce terme est proposé à l'ordre 2 sous la forme :

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + o(\varepsilon^3). \quad (3.39)$$

Le terme  $\sqrt{B_1^2 - 4B_2}$  est d'abord réécrit :

$$\begin{aligned} B_1\sqrt{1 - \frac{4B_2}{B_1^2}} &= B_1\sqrt{1 + \varepsilon} \\ &= 3C_{33}\sqrt{1 + \frac{1}{9C_{33}^2}[6C_{33}(2C_{13} + r_{xz}C_{33})\zeta^2 + C_{33}(4r_{xz}C_{13} + r_{xz}^2C_{33} + 4C_{11})\zeta^4]}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec  $r_{xz} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{zz}}$ .

L'équation de dispersion (3.38) est simplifiée en utilisant le développement limité (3.39), pour des  $\zeta \ll 1$ , où seuls les termes d'ordre 4 ou moins en  $\zeta$  sont conservés pour obtenir une équation parabolique. L'équation de dispersion simplifiée en basses fréquences s'écrit :

$$\rho c_{A0}^2 = \frac{1}{3} \left( C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \zeta^2. \quad (3.41)$$

A partir d'un modèle de propagation dans des plaques, les vitesses des ondes ont pu être décrites pour une plaque orthorombique. La vitesse du mode  $SH$  est constante. L'expression de la vitesse du mode  $SH$  (3.28) est la même que dans le cas du volume infini (équation (2.30)). La relation de dispersion est linéaire. Les vitesses des modes  $A0$  et  $S0$  sont obtenues en utilisant une approximation basses fréquences. Les deux modes dépendent des mêmes constantes élastiques,  $C_{11}$ ,  $C_{13}$  et  $C_{33}$ , et seule la dépendance en fréquence est différente avec une vitesse du mode  $S0$  constante (équation (3.34)) et une vitesse du mode  $A0$  dispersive (équation (3.41)).

Un modèle analytique de propagation d'onde de Lamb dans une plaque a été proposé. On va maintenant procéder à une validation numérique du modèle ainsi qu'une vérification des paramètres effectifs déterminés dans la partie 2.

### 3.2.3 Validation numérique

Les approximations basses fréquences des vitesses des ondes de Lamb se propageant dans la plaque sont résumées ci-dessous :

$$c_{SH}^2 = \frac{C_{66}}{\rho}, \quad (3.42)$$

$$c_{S0}^2 = \left( C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \frac{1}{\rho}, \quad (3.43)$$

$$c_{A0}^2 = \frac{1}{3\rho} \left( C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \zeta^2, \quad (3.44)$$

$$\zeta = \frac{\xi h}{2}. \quad (3.45)$$

Pour la configuration  $\beta = 10^\circ$  de la plaque étudiée dans la partie 3.1, les courbes de dispersion issues des approximations basses fréquences des vitesses des ondes de Lamb sont calculées et représentées sur la figure 3.8.

Sur la figure 3.8, 3 courbes sont présentées :

- les courbes de dispersion de la plaque architecturée issues de la simulation éléments finis,
- les courbes de dispersion de la plaque homogène simulée par éléments finis, avec les propriétés effectives déterminées au chapitre 2,
- les courbes de dispersion issues du développement basse fréquence du modèle analytique avec les mêmes propriétés effectives.

Les courbes de dispersion des plaques effectives sont d'abord comparées. Les courbes de dispersion de la plaque effective issues de la simulation concordent avec celles de la plaque effective issues de l'approximation basse fréquence du modèle analytique. Pour les mêmes paramètres mécaniques de plaque, les deux modèles décrivent donc les mêmes courbes de dispersion. Ainsi, les courbes issues de la simulation permettent une validation du modèle analytique développé et des approximations basses fréquences en découlant.

Les courbes de dispersion de la plaque architecturée sont maintenant comparées à celles de la plaque effective issues de la simulation. Une faible différence entre les courbes

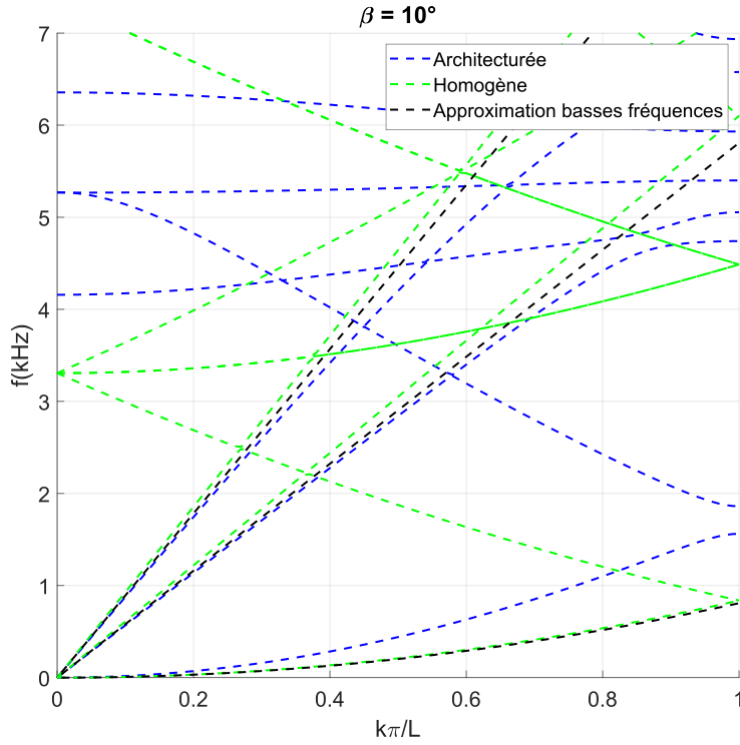


FIGURE 3.8 – Courbes de dispersion des plaques architecturées et effectives pour la configuration  $\beta = 10^\circ$ . Les approximations basses fréquences des vitesses des ondes de Lamb sont représentées pour les paramètres effectifs en volume.

de dispersion des deux plaques est observée pour des fréquences  $f < 2 \text{ kHz}$  pour les modes  $S0$  et  $SH$ , cette différence devenant plus importante pour des fréquences supérieures. Une différence plus forte que celle observée précédemment est visible pour le mode  $A0$  dès les basses fréquences. Cet écart entre les deux courbes est dû aux propriétés effectives de la plaque considérée, issues de l'homogénéisation quasi-statique en volume du chapitre 2. Les approximations basses fréquences des modes symétrique  $S0$  (éq. 3.34) et antisymétrique  $A0$  (éq. 3.41) montrent la même contribution des constantes du tenseur de rigidité en  $(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}})$ . Cette différence n'est donc pas due aux constantes élastiques et la modification de celles-ci pour faire concorder les deux courbes de dispersion du mode  $A0$  introduirait donc une plus grande erreur pour les modes  $SH$  et  $S0$ . Afin de dissocier les deux modes, et de pouvoir faire concorder les courbes de dispersion du mode  $A0$  sans influencer sur les modes  $S0$  et  $SH$ , il est nécessaire de modifier le paramètre mécanique restant dans l'expression des relations de dispersion, c'est à dire la densité. Avec l'introduction d'une densité matricielle, il est possible de dissocier ces deux modes sans modifier le tenseur de rigidité.

### 3.3 Propagation d'onde dans une plaque anisotrope à densité matricielle

La propagation des ondes de Lamb dans une plaque anisotrope avec une densité matricielle est décrite dans les travaux de Zhu et al. [113], cette méthode est présentée dans la suite.

### 3.3.1 Introduction d'une densité matricielle

Pour décrire les nouveaux paramètres de la plaque, le tenseur de rigidité de symétrie orthorhombique est conservé, seule la densité statique scalaire est remplacée par une densité dynamique matricielle décrite comme un tenseur diagonal d'ordre 2 avec 3 composantes indépendantes selon ses directions principales :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Dans ce cas, chaque composante  $\rho_{ii}$  correspond à la densité dans la direction  $x_i$  pour la propagation d'onde dans la plaque. Pour une plaque dont le matériau est orienté en dehors de ses directions principales, la densité devient un tenseur symétrique avec 6 composantes distinctes tel que :

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Les expressions des composantes du tenseur de propagation se trouvent modifiées par rapport aux expressions (3.9). On obtient :

$$\begin{aligned} K_{11}(p) &= C_{11} + C_{55}p^2 - \rho_{xx}c^2, \\ K_{12}(p) &= C_{16} + C_{45}p^2 - \rho_{xy}c^2, \\ K_{13}(p) &= (C_{13} + C_{55})p - \rho_{xz}c^2, \\ K_{22}(p) &= C_{66} + C_{44}p^2 - \rho_{yy}c^2, \\ K_{23}(p) &= (C_{36} + C_{45})p - \rho_{yz}c^2, \\ K_{33}(p) &= C_{55} + C_{33}p^2 - \rho_{zz}c^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

De même l'expression polynomiale (3.10) présente des coefficients modifiés sans la propriété de parité précédemment observée. Soit :

$$A_1p^6 + A_2p^4 + A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0, \quad (3.49)$$

avec les coefficients  $A_i$  détaillés en annexe B.

L'équation de dispersion est finalement issue de l'annulation du déterminant de la matrice (3.19) réécrite par la modification des racines  $p_i$  et des composantes du tenseur de propagation  $K_{ij}$  issu de l'introduction de la densité matricielle.

#### 3.3.1.1 Cas particulier : $\vec{x} = \vec{a}$ et $\vec{z} = \vec{c}$

Afin d'obtenir des expressions explicites, la propagation de l'onde est considérée selon la direction principale  $\vec{a}$  du matériau, soit  $\vec{x} = \vec{a}$ . De plus la classe de symétrie de celui-ci est augmentée, avec une classe tétragonale  $4/m2/m2/m$ , dans le même but. Dans ce cas la densité prend la forme d'une matrice diagonale :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Avec la disparition des termes non-diagonaux de la matrice densité, l'équation polynomiale (3.49) devient un polynôme de degré 2 avec les nouveaux coefficients  $A'_i$  et 6 racines



$p_q$  peuvent être explicitées :

$$p_{1,3} = -p_{2,4} = \sqrt{\frac{-A'_2 \pm \sqrt{A'_2{}^2 - 4A'_1 A'_3}}{2A'_1}}, \quad (3.51)$$

$$p_5 = -p_6 = \sqrt{\frac{\rho_{xx}c^2 - C_{66}}{C_{55}}},$$

avec :

$$\begin{aligned} A'_1 &= C_{33}C_{55}, \\ A'_2 &= C_{55}(C_{55} - \rho_{zz}c^2) + C_{33}(C_{11} - \rho_{xx}c^2) - (C_{13} + C_{55})^2, \\ A'_3 &= (C_{55} - \rho_{zz}c^2)(C_{11} - \rho_{xx}c^2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Comme pour le cas de la plaque à densité scalaire les rapports  $R_q$  et  $S_q$  se simplifient. Les nouvelles composantes du tenseur  $K$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_{11}(p_q) &= C_{11} + C_{55}p_q^2 - \rho_{xx}c^2, \\ K_{12}(p_q) &= 0, \\ K_{13}(p_q) &= (C_{13} + C_{55})p_q, \\ K_{22}(p_q) &= C_{66} + C_{44}p_q - \rho_{xx}c^2, \\ K_{23}(p_q) &= 0, \\ K_{33}(p_q) &= C_{55} + C_{33}p_q^2 - \rho_{zz}c^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

La simplification de  $R_j$  et  $S_j$  s'écrit :

$$\begin{aligned} R_q &= 0, \\ S_q &= \frac{\rho_{xx}c^2 - C_{11} - C_{55}p_q^2}{(C_{13} + C_{55})p_q}, \quad q = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Finalement, comme dit précédemment, l'équation de dispersion prend une forme similaire à l'équation (3.27), avec différentes composantes de la densité. Pour le cas de la propagation dans une plaque avec densité matricielle selon la direction principale  $x$  :

$$H_{35}(H_{11}H_{23}\tan(\frac{\xi p_1 h}{2} + \phi) - H_{13}H_{21}\tan(\frac{\xi p_3 h}{2} + \phi)) = 0, \quad (3.55)$$

avec  $\phi = 0$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$  pour les modes antisymétriques et symétriques respectivement. La relation de dispersion du mode transverse  $SH$  vient de manière directe avec :

$$H_{35} = C_{44}p_5 = 0, \quad (3.56)$$

La vitesse du mode  $SH$  est donc obtenue en imposant l'annulation de la racine  $p_5$ , on en déduit :

$$c_{SH} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho_{xx}}}. \quad (3.57)$$

L'expression (3.57) est la même que celle obtenue pour la plaque avec densité scalaire si l'on remplace la densité  $\rho$  par la densité dans la direction d'intérêt,  $\rho_{xx}$ .

De manière analogue au cas de la plaque avec densité scalaire, l'approximation basses fréquences de la relation de dispersion des modes symétrique  $S0$  et antisymétrique  $A0$  est obtenue.

### 3.3.2 Approximation basse fréquence

Les approximations basses fréquences des relations de dispersion des modes  $S0$  et  $A0$  sont obtenues à partir des développements limités à l'ordre 1 et à l'ordre 3 de l'équation de dispersion (3.55) comme décrit dans la partie 3.2.2. La méthode étant la même pour les deux relations de dispersion des modes  $S0$  et  $A0$ , le détail du calcul n'est pas présenté ici et seules les expressions résultantes sont données.

$$\rho_{xx}c_{S0}^2 = (C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}), \quad (3.58)$$

$$\rho_{zz}c_{A0}^2 = \frac{1}{3}(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}})\zeta^2, \quad (3.59)$$

$$\zeta = \frac{\xi h}{2}. \quad (3.60)$$

Comme observé précédemment pour le mode  $SH$ , les expressions (3.58) et (3.59) des relations de dispersion des modes  $S0$  et  $A0$  dans la plaque à densité matricielle correspondent aux relations équivalentes (3.34) et (3.41) pour la plaque avec densité scalaire en considérant différents termes de la matrice densité. Plus précisément, le mode symétrique  $S0$  dépend de la densité  $\rho_{xx}$  et le mode antisymétrique  $A0$  de la densité  $\rho_{zz}$ .

Les courbes de dispersion des modes  $SH$  et  $S0$  présentent un bon accord entre la plaque architecturée et effective à densité scalaire. Ces modes dépendent de la composante  $\rho_{xx}$  de la matrice densité. Il est considéré pour le modèle de plaque effective à densité matricielle que la composante  $\rho_{xx}$  est égale à la densité statique.

$$\rho_{xx} = \rho_s. \quad (3.61)$$

La composante  $\rho_{zz}$  est alors déterminée à partir des relations de dispersion des modes  $A0$  et  $S0$  (3.58) et (3.59) :

$$\rho_{zz} = \frac{\xi^2 h^2 c_{S0}^2}{12c_{A0}^2} \rho_{xx} \quad (3.62)$$

Il est possible de considérer un angle de rotation  $\phi = 45^\circ$ . En reprenant la même méthode que pour la propagation selon la direction  $\vec{a}$ , on obtient alors les vitesses suivantes :

$$\rho_{xx}c_{SH}^2 = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}), \quad (3.63)$$

$$\rho_{xx}c_{S0}^2 = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{66}) - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad (3.64)$$

$$\rho_{zz}\psi_{A0}^2 = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{66}) - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}]\zeta^4, \quad (3.65)$$

$$\psi = \frac{\omega h}{2}, \quad \zeta = \frac{\xi t}{2}. \quad (3.66)$$

Dans ce cas, des vitesses similaires aux vitesses selon la direction principale  $\vec{a}$  sont observées, avec une composante élastique modifiée :  $C'_{11} = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{66})$ .

Dans la suite une validation numérique du modèle de plaque effective avec densité matricielle est proposée.

### 3.3.3 Validation numérique

Le modèle de plaque effective considéré a pour propriétés mécaniques le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  issu de l'homogénéisation en volume infini et la densité matricielle précédemment

décrite :

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Les modèles éléments finis des logiciels commerciaux ne permettant pas l'intégration d'une densité matricielle, un modèle est développé afin de prendre en compte cette dernière.

Le problème résolu est un problème aux valeurs propres avec la pulsation  $\omega$  fixée. Il est posé sous la forme de la formulation faible de l'équation d'équilibre suivante, prenant la forme de l'addition d'un terme d'inertie  $\tilde{M}$  et d'un terme de raideur  $\tilde{K}$  :

$$\tilde{K} + \tilde{M} = 0, \quad (3.68)$$

avec le terme d'inertie mettant en jeu la matrice densité  $\tilde{\rho}$  et la dérivée seconde du déplacement  $\ddot{u}$  :

$$\tilde{M} = \tilde{\rho}\ddot{u} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Le terme de raideur dépend de la déformation  $\sigma$  et du tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  et s'écrit :

$$\tilde{K} = \tilde{\sigma}\tilde{T} = \tilde{\sigma}\tilde{C}\tilde{\sigma}, \quad (3.70)$$

avec la déformation :  $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ .

Finalement la forme faible de l'équation d'équilibre (3.68) permettant la résolution du problème s'écrit :

$$\tilde{\sigma}\tilde{C}\tilde{\sigma} + \tilde{\rho}\ddot{u} = 0, \quad (3.71)$$

Les composantes du tenseur de densité sont résumées dans le tableau 3.1. La densité  $\rho_{xx}$  est la densité statique  $\rho_{xx} = \rho_s$ .

TABLE 3.1 – Composantes de la densité matricielle pour les angles  $\beta = -10^\circ, 10^\circ$  et  $30^\circ$ .

$kg.m^{-3}$	$\beta = -10^\circ$	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 30^\circ$
$\rho_{xx}$	322	252	225
$\rho_{zz}$	31,2	49,2	101

La densité  $\rho_{zz}$  est déterminée avec l'expression (3.62) en utilisant les vitesses obtenues pour la plaque architecturée pour le même nombre d'onde  $\xi$  que pour l'homogénéisation en volume infini.

Les courbes de dispersion, numériques et analytiques, de la plaque effective sont d'abord comparées. Pour les 3 plaques, les courbes de dispersion des plaques effectives issues des approximations basses fréquences avec densité matricielle présentent un très bon accord avec celles issues de la simulation éléments finis, l'erreur maximale observée étant de 2 % pour le mode  $A0$  avec  $\beta = -10^\circ$ , en limite de première zone de Brillouin. Comme pour le cas du modèle à densité scalaire, les courbes de dispersion numériques permettent de valider le modèle analytique avec densité matricielle ainsi que les approximations basses fréquences qui en découlent.

On s'intéresse maintenant aux courbes de dispersion numériques des modes  $S0$  et  $SH$  des plaques architecturées et effectives, pour les 3 angles  $\beta$ . Pour les modes  $SH$  et  $S0$  de la plaque effective, les courbes de dispersion ne sont pas modifiées par l'introduction de la densité matricielle et les différences observées entre les courbes de la plaque architecturée et de la plaque effective sont les mêmes que pour le cas de la densité scalaire (figure 3.5).

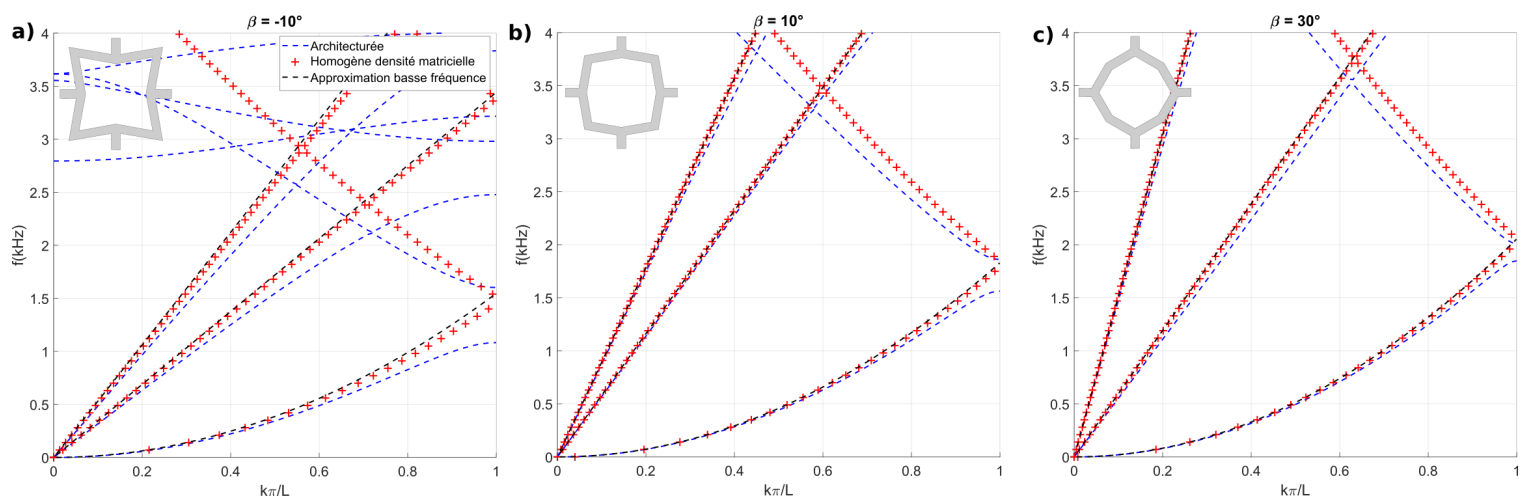


FIGURE 3.9 – Courbes de dispersion des plaques architecturées ainsi que des plaques effectives équivalentes avec densité matricielle.

Finalement, la comparaison des courbes de dispersion numériques du mode  $A0$  entre les plaques architecturée et effective est abordée. Il est d’abord visible que l’introduction d’une densité matricielle permet de modifier les courbes de dispersion du mode  $A0$  pour la plaque effective. Un meilleur accord entre les courbes de dispersion des plaques architecturées et des plaques effectives est alors observé, pour des fréquences apparaissant avant le premier repliement du mode.

Les surfaces des lenteurs, issues de la simulation éléments finis, pour les 3 plaques architecturées et effectives sont représentées sur la figure 3.10 pour un nombre d’onde  $\frac{k\pi}{L} = 0,01$ .

Pour les modes  $S0$  et  $SH$ , un bon accord entre le cas effectif et le cas architecturé est observé en fonction de l’angle d’incidence, avec une erreur constante et faible pour les différents angles.

Dans le cas du mode  $A0$ , l’accord est bon selon les directions principales pour lesquelles la correction en densité est faite mais une différence plus grande est observée pour des angles de propagation en dehors de ces directions. Une erreur jusqu’à 18,4 % est présente pour le mode  $A0$  se propageant dans la plaque  $\beta = -10^\circ$  avec un angle de  $45^\circ$ . La correction de la densité  $\rho_{zz}$  permet donc d’obtenir un modèle d’homogénéisation selon une direction de propagation donnée, mais un écart est observé avec le cas architecturé pour des angles d’incidence différents.

Par une validation numérique, il a été montré que le modèle effectif à densité matricielle permet de modéliser la propagation dans la plaque selon la direction  $x$ , cependant il est nécessaire d’en obtenir une validation expérimentale.

## 3.4 Validation expérimentale

### 3.4.1 Plaques réalisées

Dans le cadre de la validation expérimentale des propriétés effectives, 3 plaques sont réalisées, correspondant à 3 configurations différentes :

- Matériau : Plexiglas (Tab. A.1).
- Géométrie :
  - $L = 2 \text{ cm}$ ,
  - $e = 1,5 \text{ mm}$ ,

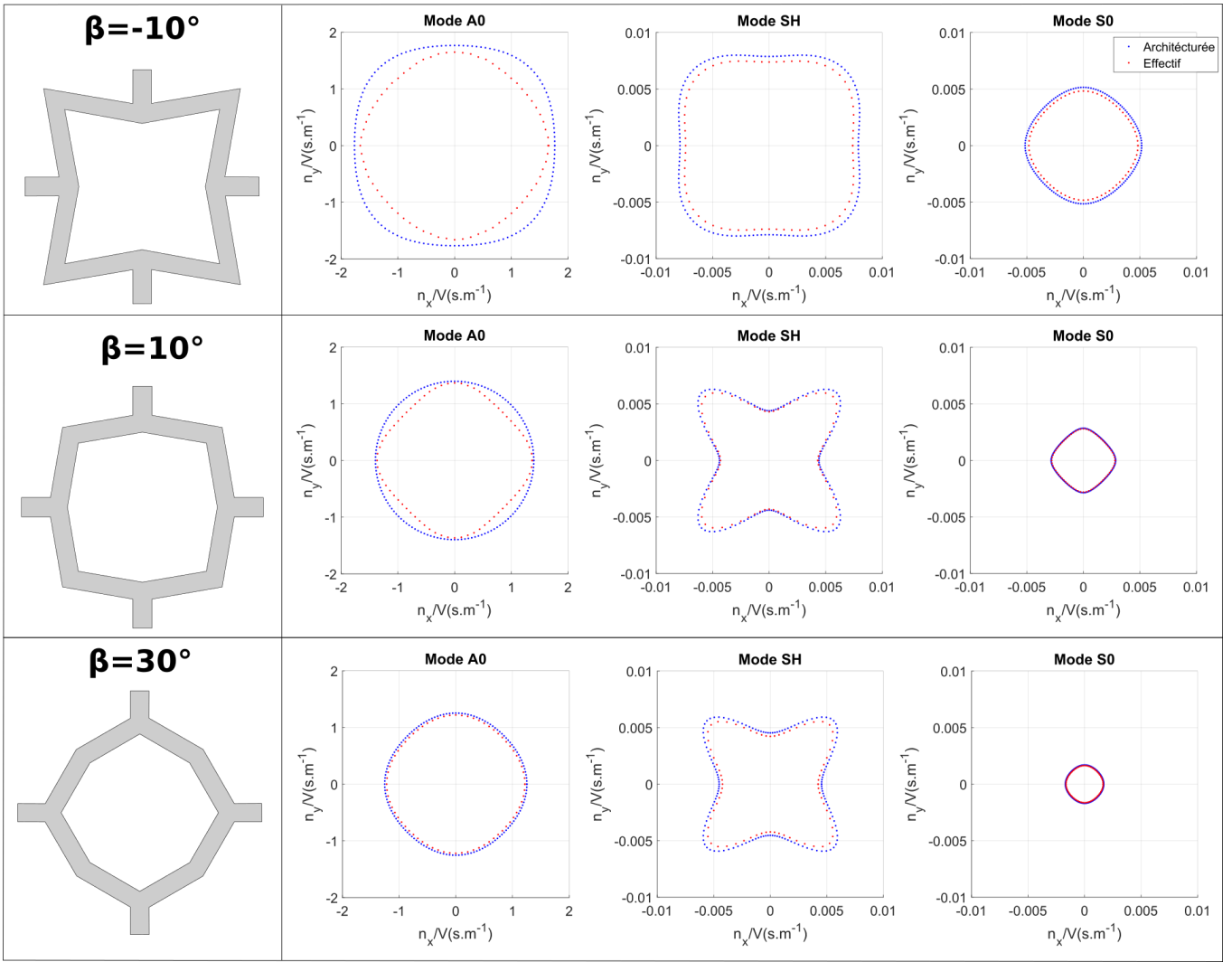


FIGURE 3.10 – Surfaces des lenteurs des trois plaques étudiées. Les 2 modes de Lamb et le mode  $SH$  sont représentés pour les plaques architecturées (en bleu) et pour les plaques effectives équivalentes (en rouge) avec les paramètres issus de l’homogénéisation quasi-statique à densité matricielle.

—  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ .

Ces plaques sont constituées de 2 parties : une partie architecturée constituée d’un réseau de  $25 \times 10$  cellules unitaires avec les configurations décrites précédemment et une partie homogène destinée à supporter les 2 mors de serrage aux extrémités de dimensions différentes. La géométrie des plaques est représentée sur la figure 3.11. Les dimensions de chaque plaque sont de  $630 \times 200 \times 2 \text{ mm}$ .

Les plaques architecturées sont réalisées par usinage de plaques de plexiglas de  $2 \text{ mm}$  d’épaisseur. La fabrication est faite en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique du Solide et des Structures de l’Université de Trente, Italie, de même que les essais en traction présentés dans la suite. Les trois plaques sont représentées sur la figure 3.12.

Les trois plaques considérées pour la validation expérimentale présentent trois valeurs de  $\beta$  différentes, choisies afin de décrire plusieurs cas de coefficients de Poisson d’intérêt dans le domaine  $\nu = [0, 1]$ . Les coefficients de Poisson pour ces 3 configurations déterminés par l’homogénéisation en volume infini sont  $\nu = 0, 4, 0, 75$  et  $0, 9$  pour les angles respectifs  $\beta = -10^\circ, 10^\circ$  et  $30^\circ$ .

Deux types de caractérisation sont considérés pour les plaques, une caractérisation statique avec des essais de traction et une caractérisation dynamique vibratoire avec

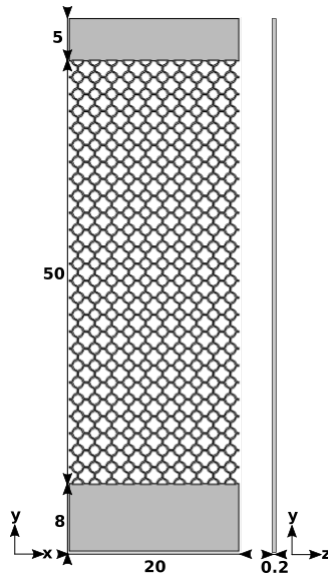


FIGURE 3.11 – Schéma de la géométrie des plaques réalisées pour les mesures statiques et dynamiques.

l'identification des modes propres des plaques.

### 3.4.2 Mesure statique : Essais en traction

#### 3.4.2.1 Dispositif expérimental

Les mesures statiques sont des essais en traction des plaques architecturées. Les plaques sont encastrées dans des mors appliquant une force sur les parties homogènes. Pendant l'essai de traction, la plaque est filmée avec une caméra haute résolution (figure 3.13).

Durant l'essai, une extrémité de la plaque est fixée et l'autre est soumise à un déplacement uniaxial imposé. La plaque subit une déformation uniaxiale progressive au cours de l'essai jusqu'à une déformation maximale  $\sigma_{max} = 8\%$  et est supposée en contrainte plane. Durant l'essai, 10 points centraux de la plaque sont suivis (figure 3.14) afin d'obtenir la déformation de la plaque en son centre. Dans cette zone, la plaque est supposée ne pas subir de contraintes tangentielles liées à la présence des mors. Ainsi la déformation de la plaque observée dans cette zone est considérée comme uniaxiale, dans la direction de traction, et correspond à la déformation attendue pour un essai de traction parfait où le matériau est libre de se déformer. De plus la force de réaction de la plaque soumise à une déformation est mesurée au niveau du mors en déplacement.

Conjointement à la mesure en traction de plaque, une simulation éléments finis est faite reprenant les mêmes conditions que l'expérience afin de comparer les coefficients de Poisson expérimentaux et numériques. Les plaques simulées sont les mêmes que les plaques fabriquées (figure 3.11) et les conditions appliquées à leurs extrémités sont celles de l'essai en traction, avec une extrémité encastrée et un déplacement imposé pour l'autre. La déformation transversale de la plaque est calculée aux deux extrémités selon la largeur en  $x$  et à la moitié de sa longueur en  $y$ .

#### 3.4.2.2 Détermination du coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson est déterminé en considérant un essai en traction plane et en mesurant les déformations transverses et longitudinales des points suivis de la plaque. Pour le calcul du coefficient de Poisson de la plaque, la contrainte de ces points est considérée

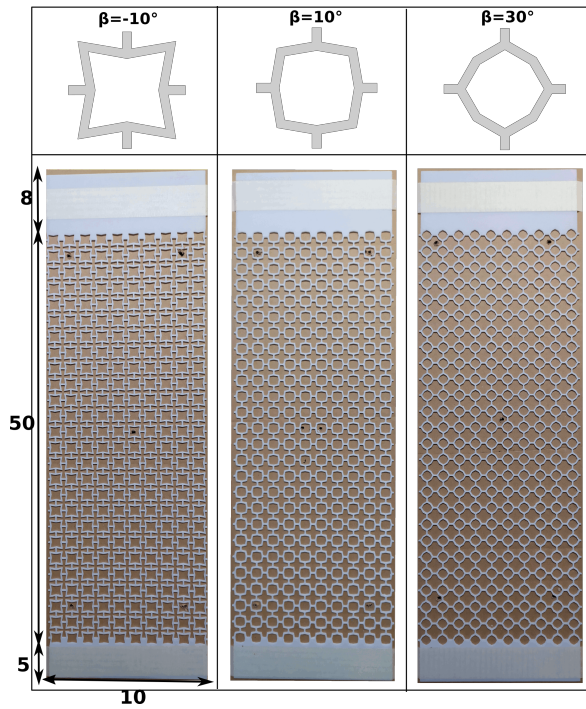


FIGURE 3.12 – Plaques réalisées pour les mesures statiques et dynamiques.

comme homogène et les contraintes tangentielles sont supposées nulles. Dans ce cas, le coefficient de Poisson est défini par le rapport de déformation en chaque point comme :

$$\nu = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}}. \quad (3.72)$$

La plaque  $\beta = 10^\circ$  est représentée sur la figure 3.14 au repos et pour une déformation maximale  $\sigma_{max} = 8\%$ . Le déplacement des points suivis est aussi représenté entre deux états de déformation.

Les déplacements des points de la zone utile sont suivis au cours de l'essai, et les déformations sont calculées afin de déterminer le coefficient de Poisson en fonction de la déformation imposée.

Dans la suite, les résultats obtenus pour les 3 plaques réalisées sont présentés et comparés aux résultats numériques et analytiques obtenus dans les parties précédentes.

### 3.4.2.3 Comparaison des coefficients de Poisson

Les résultats expérimentaux obtenus pour les 3 plaques en traction sont présentés sur la figure 3.15.

Il apparaît sur les courbes d'hystérésis, représentant la force de réaction en fonction de la déformation, que les plaques présentent une plastification, la déformation lors du retour à l'état de repos n'étant pas nulle. Les propriétés mécaniques des plaques sont donc modifiées après déformation.

Les résultats obtenus en traction sont comparés aux coefficients de Poisson numériques et analytiques déterminés dans les parties précédentes. Plusieurs coefficients de Poisson sont considérés :

- les coefficients de Poisson expérimentaux issus de l'essai en traction nommés « expériences »,
- les coefficients de Poisson numériques issus de l'homogénéisation quasi-statique en volume infini nommés « simulation quasi-statique »,

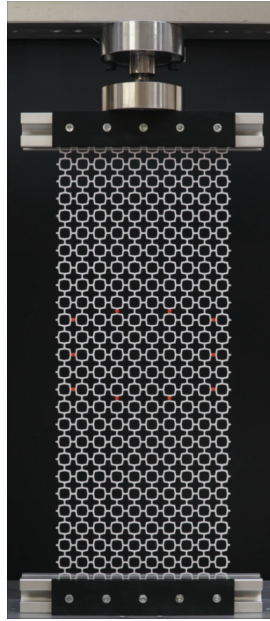


FIGURE 3.13 – Photo de l’essai en traction uniaxial pour la plaque réalisée  $\beta = 10^\circ$ .

- les coefficients de Poisson numériques issus de la simulation éléments finis de l’essai en traction appelés « simulation statique »,
- les coefficients de Poisson analytiques décrits par la méthode d’homogénéisation discrète [2] nommés « analytique ».

L’ensemble des coefficients de Poisson est résumé dans le tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Comparaison des coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et des erreurs relatives.

$\beta$	Analytique	Simulation		Expériences
		Statique	Quasi-statique	
$-10^\circ$	0,31 (-39,22 %)	0,45 (-11,76 %)	0,40 (-21,57 %)	0,51
$10^\circ$	0,74 (-12,94)	0,90 (+5,88 %)	0,75 (-11,76 %)	0,85
$30^\circ$	0,91 (-2,15 %)	1,09 (+17,20 %)	0,90 (-3,23 %)	0,93

Tout d’abord, des propriétés anti-auxétiques sont bien observées expérimentalement pour les 3 plaques réalisées, avec des coefficients de Poisson mesurés de  $\nu = 0,51, 0,85, 0,93$  pour les angles  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . En particulier, un coefficient de Poisson proche de la limite classique  $\nu = 0,5$  est observé pour la plaque  $\beta = -10^\circ$ . Des valeurs plus fortes proches de 0,9 sont observées pour les deux autres plaques.

Il est aussi possible de voir qu’il existe une dépendance du coefficient de Poisson avec la déformation imposée (figure 3.15). Finalement on observe que la déformation de la plaque (figure 3.14) lors de l’essai en traction ne décrit pas une zone utile parfaite. Des contraintes tangentielles sont observées dans la zone utile, avec les deux extrémités latérales de la plaque ne présentant pas une ligne droite mais courbe.

Les erreurs relatives des coefficients de Poisson calculés par rapport aux coefficients de Poisson mesurés sont aussi présentées dans le tableau 3.2. Les coefficients de Poisson calculés par l’homogénéisation quasi-statique sont significativement inférieurs aux coefficients de Poisson mesurés, avec une erreur plus grande pour l’angle  $\beta$  négatif de  $-21\%$ . Cette différence vient de la géométrie de la plaque, qui ne permet pas un essai en traction parfait avec des contraintes tangentielles non nulles dans la zone utile.

Cette hypothèse est confirmée par la différence observée entre les coefficients de Poisson mesurés lors de l’essai en traction et ceux calculés par la simulation statique du même



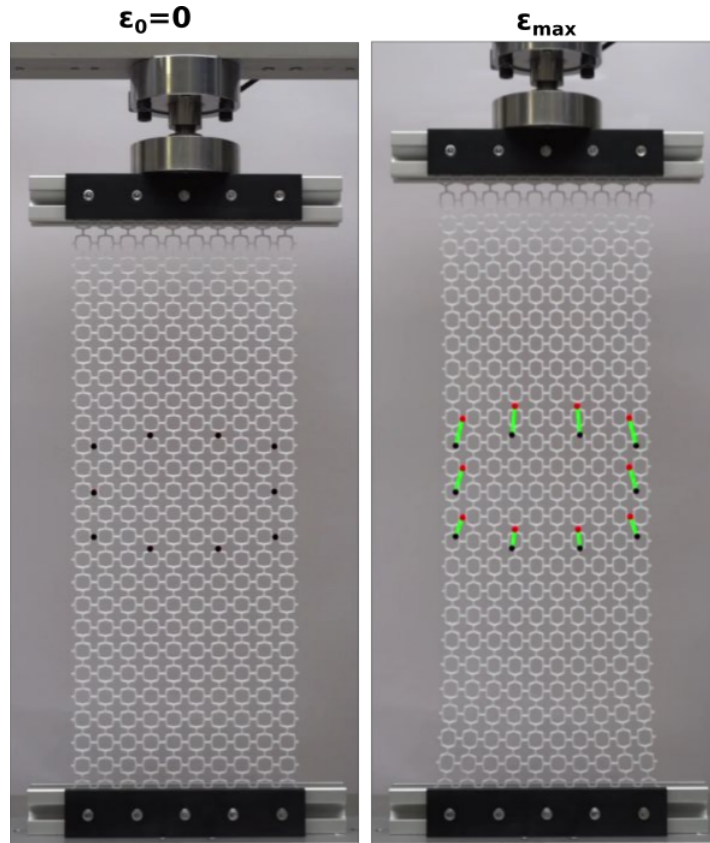


FIGURE 3.14 – Déformation de la plaque  $\beta = 10^\circ$  au cours de l'essai en traction.

essai. Seuls les points mesurés sont différents entre les deux cas, ce qui indique que la différence de valeurs dépend de la position des points de mesure dans la zone utile, des contraintes tangentielles sont donc bien présentes.

On s'intéresse maintenant aux coefficients de Poisson analytiques. Pour la plaque  $\beta = -10^\circ$ , une forte erreur de 40 % est visible par rapport au coefficient mesuré. Cette erreur peut être expliquée par la géométrie de la cellule élémentaire. La cellule élémentaire présente des bras à section rectangulaire d'une épaisseur  $h = 2 \text{ mm}$  et d'une largeur de bras  $e = 1,5 \text{ mm}$ , ce qui ne correspond pas aux hypothèses de poutre de section carrée du modèle analytique. De plus, pour des angles  $\beta$  négatifs la longueur  $d$  des poutres est plus faible que pour les angles positifs, induisant ainsi un facteur de finesse  $\eta$  plus grand, en dehors du domaine de validité du modèle.

Finalement, il est globalement observé un bon accord entre les coefficients de Poisson calculés et mesurés pour les plaques avec  $\beta = 10^\circ$  et  $30^\circ$ , présentant des propriétés anti-auxétiques. Cependant cet accord est moins bon pour la plaque avec  $\beta = -10^\circ$ .

En conclusion, il est mis en évidence que les structures étudiées en plaque permettent l'obtention de propriétés anti-auxétiques avec des coefficients de Poisson  $\nu > 0,5$ . La valeur du coefficient de Poisson est contrôlable par la géométrie choisie et il est observé des  $\nu$  proches de la limite classique  $\nu = 0,5$  ainsi que des  $\nu$  proches de 1.

Dans la suite, on se propose de mesurer les modes de flexion des plaques fabriquées afin de les comparer à ceux pouvant être calculés à partir des propriétés effectivement obtenues.

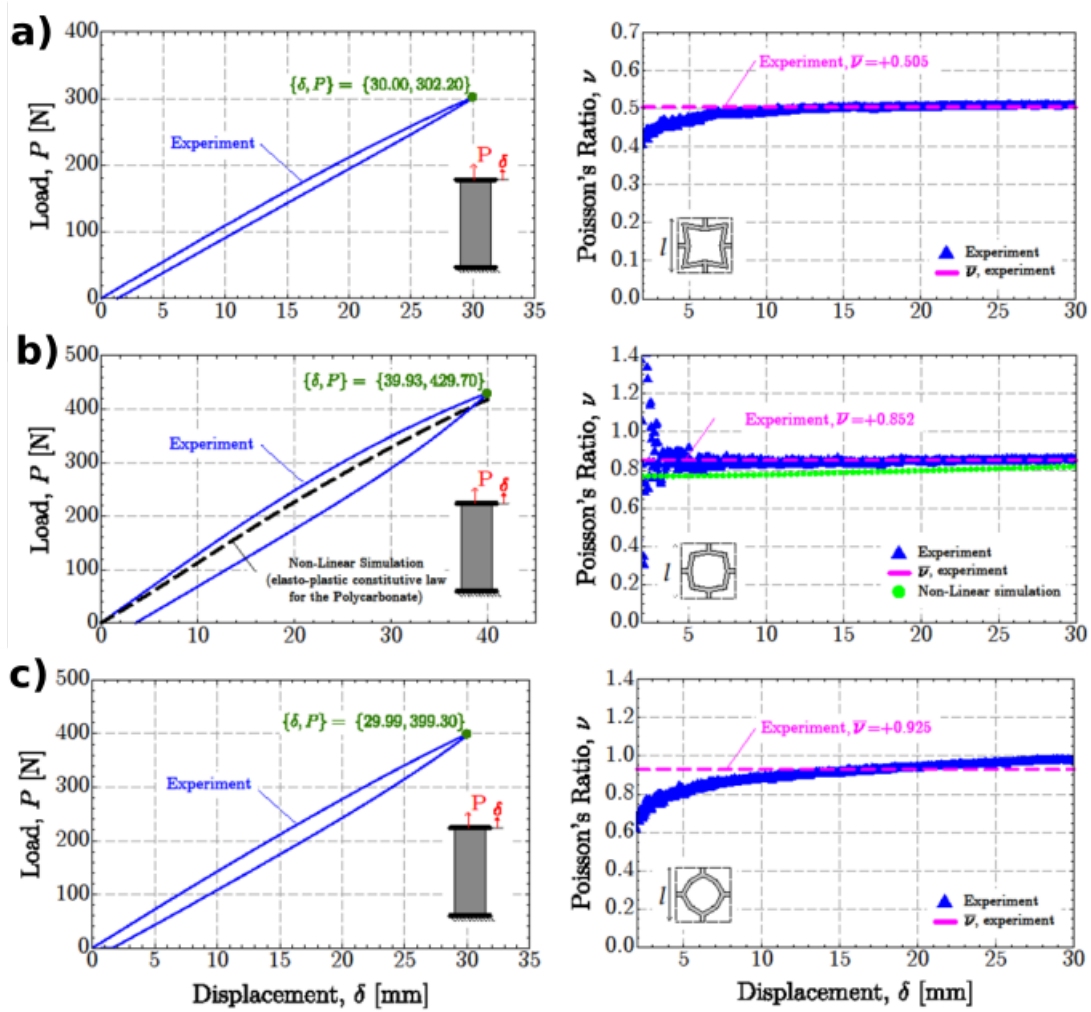


FIGURE 3.15 – Résultats des mesures en traction sur les 3 plaques réalisées  $\beta = -10^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $30^\circ$ .

### 3.4.3 Mesure dynamique : Vibration de plaque

Dans cette section, les modes propres de flexion des plaques précédemment présentées dans la partie 3.4.1 sont étudiés. De nouvelles plaques identiques aux précédentes sont fabriquées, ces dernières ayant subi des déformations plastiques lors des essais en traction. Les modes de flexion sont mesurés pour des plaques suspendues excitées par 2 types de sources différentes, mécanique et aérienne. Les modes obtenus expérimentalement sont comparés aux modes de flexion de plaques libres équivalentes, architecturées et effectives, obtenus par simulation éléments finis. Les dispositifs de mesure sont présentés dans la suite.

#### 3.4.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif de mesure, en fonction du type d'excitation, est représenté sur la figure 3.16.

Afin de se rapprocher des conditions libres, les plaques sont suspendues horizontalement en 5 points (fig. 3.17) par des fils de nylon à un cadre fixe. Leurs déplacements hors-plan sont mesurés pour un maillage de 155 points uniformément répartis à l'aide d'un vibromètre laser à balayage placé à une distance  $d_1 = 1\text{ m}$  de la plaque. Le vibromètre à balayage, de marque Polytec modèle PSV-400, permet de mesurer la vitesse de plusieurs points de manière séquentielle et d'en déduire leurs déplacements hors-plan.

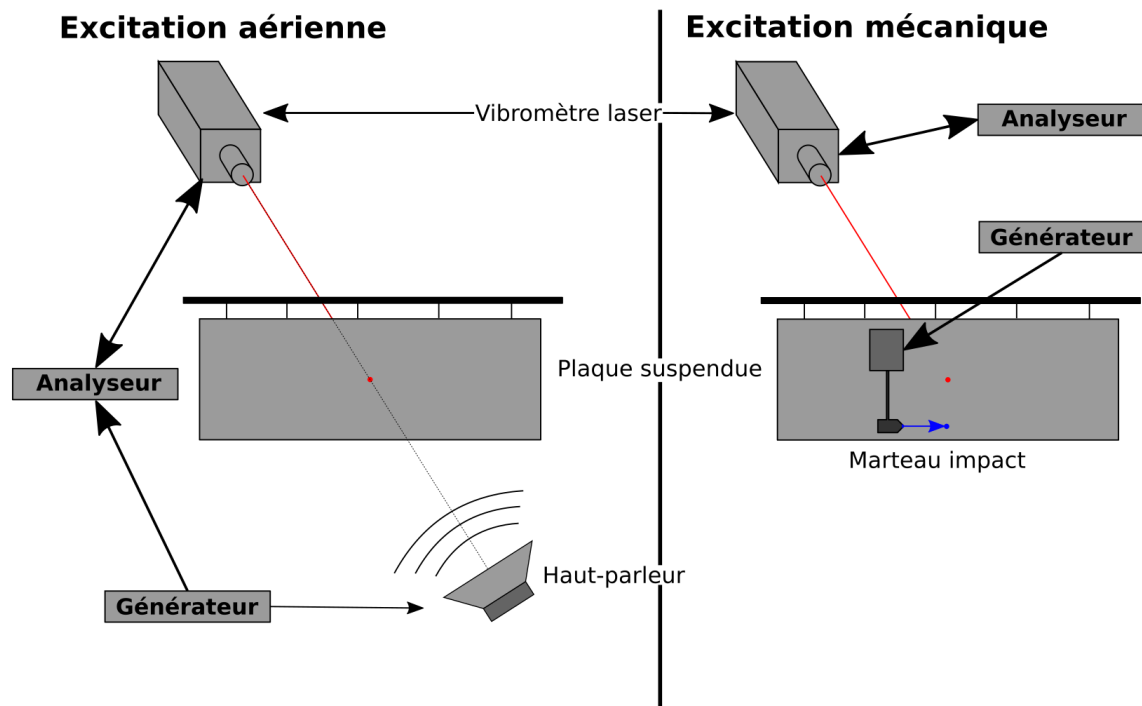


FIGURE 3.16 – Dispositif expérimental d’identification des modes de flexion des plaques.

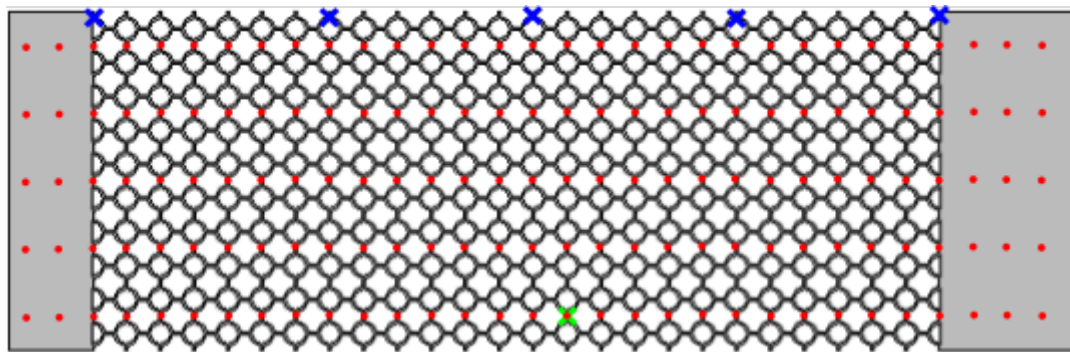


FIGURE 3.17 – Schéma de la mesure de la plaque avec les points de suspension (bleu), les points de mesure (rouge) et le point d’excitation du marteau d’impact (vert).

Deux types d’excitation de la plaque sont considérés : une excitation aérienne avec un haut-parleur (figure 3.18) et une excitation mécanique avec un marteau d’impact. Ces 2 types d’excitation sont utilisés afin de mesurer les modes de flexion pour 2 bandes de fréquences différentes. Pour l’excitation aérienne, un générateur produit un signal glissant de  $2\text{ Hz}$  à  $200\text{ Hz}$  diffusé à travers un haut-parleur situé à une distance  $d_2 = 30\text{ cm}$  de la plaque. La pression émise par le haut-parleur est mesurée au niveau de la plaque à l’aide d’un microphone (SCHOEPS MK 4) et la réponse fréquentielle calculée est présentée sur la figure 3.19.

On peut voir que le haut-parleur utilisé émet difficilement en-dessous de  $5\text{ Hz}$ , sa bande passante à  $-10\text{ dB}$  démarrant vers  $48\text{ Hz}$ .

Afin de pouvoir exciter les modes de flexion dont les fréquences sont inférieures à  $50\text{ Hz}$ , un second type d’excitation mécanique est utilisé avec un marteau d’impact automatique. Le marteau d’impact impose un déplacement à un point donné de la plaque (fig. 3.17). Pour les 14 premiers modes identifiés expérimentalement, les 5 premiers modes sont issus de l’excitation mécanique et les 9 suivants de l’excitation aérienne.

Finalement, l’évolution temporelle de la vitesse et du déplacement de chaque point du



FIGURE 3.18 – Photo du dispositif expérimental d’identification des modes de flexion des plaques suspendues avec une excitation aérienne.

maillage est mesurée, et une analyse fréquentielle est faite. Dans la suite, les 14 premiers modes de flexion des plaques sont mesurés, présentés et comparés aux modes issus de la simulation éléments finis pour des plaques effectives et architecturées.

### 3.4.3.2 Comparaison des fréquences propres

Dans un premier temps les modes de flexion mesurés pour les 3 plaques  $\beta = -10^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $30^\circ$  sont comparés aux modes obtenus en simulation pour la plaque architecturée. Pour chaque mode, les erreurs relatives des fréquences des modes simulés par rapport aux fréquences des modes mesurés sont représentées sur la figure 3.20 avec les déformations observées dans les différents cas sur la figure 3.21.

Il est à noter que tous les modes de flexion présentés dans le cas numérique ne sont pas identifiés expérimentalement pour toutes les plaques. Les modes sont indexés selon la notation  $(m, n)$ , où  $m$  est le nombre de lignes nodales parallèles à l’axe  $x$  et  $n$  est le nombre de lignes nodales parallèles à l’axe  $y$ .

Un bon accord est observé pour les modes de flexion à partir du mode  $(4, 0)$ , avec une erreur inférieure à 10 %. A l’inverse des grandes différences peuvent apparaître pour les modes inférieurs. Ces différences sont dues aux conditions de suspension imposées aux plaques qui ne permettent pas d’obtenir des modes de flexion complètement libres et induisent une contrainte supplémentaire modifiant principalement les premiers modes. L’influence des suspensions est visible sur la déformée des plaques architecturées (figure 3.21) des 5 premiers modes avec des nœuds de déplacement non-uniformes contrairement aux déplacements attendus en plaque libre. De plus, avec l’augmentation en fréquence des modes, il est possible de voir à travers les nœuds de déplacement que les contraintes tangentielles s’exerçant sur la plaque ne sont pas nulles. De manière globale, il est observé un meilleur accord pour les plaques avec un plus grand angle  $\beta$ , comme déjà observé lors des essais en traction.

Dans un second temps les modes de flexion des 3 plaques effectives  $\beta = -10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $30^\circ$  sont comparés avec les modes de la plaque architecturée aussi issus de la simulation. Pour chaque mode, les erreurs relatives des fréquences des modes des plaques effectives par rapport à celles des plaques architecturées sont représentées sur la figure 3.22 avec les déformations observées dans les différents cas sur la figure 3.23.

Contrairement à la comparaison des fréquences propres de la plaque architecturée

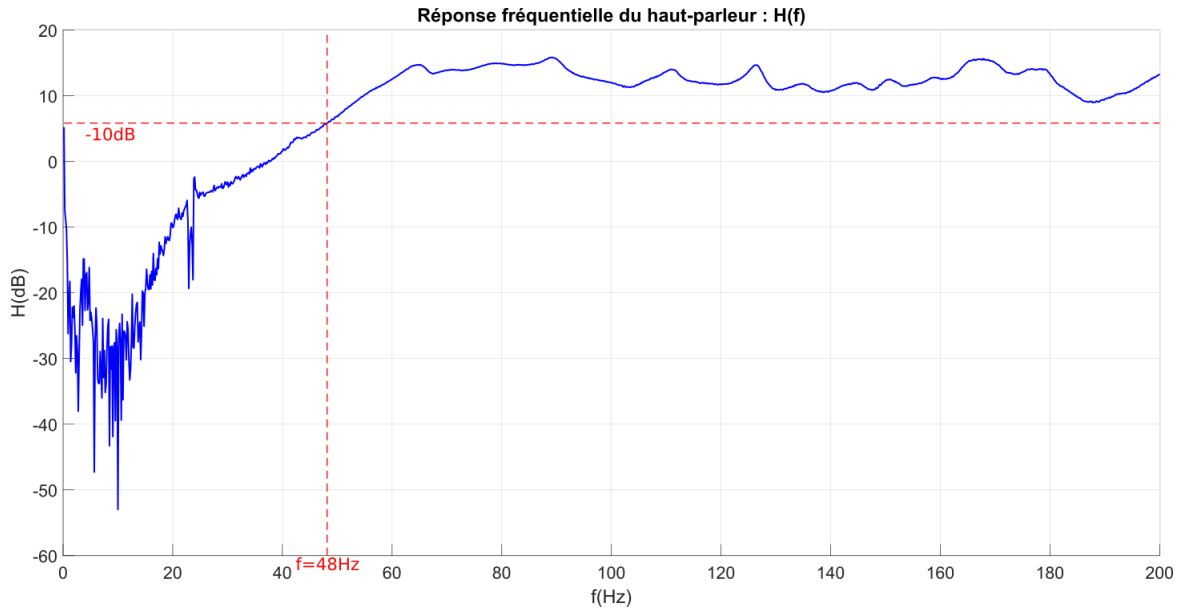


FIGURE 3.19 – Réponse fréquentielle du haut-parleur soumis à un signal glissant de 2 à 200  $Hz$  au niveau de la plaque ( $d_2 = 30\text{ cm}$ ).

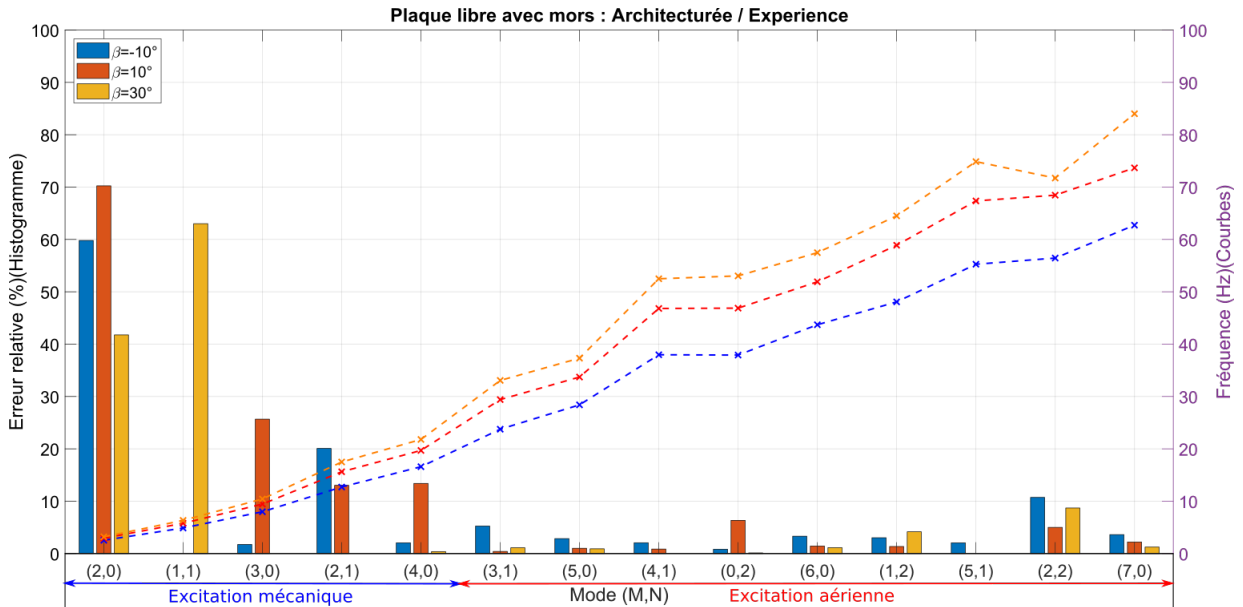


FIGURE 3.20 – Modes de flexion de la plaque architecturée obtenus expérimentalement et par simulation éléments finis. L’histogramme représente les erreurs relatives des fréquences simulées par rapport aux fréquences mesurées. Les courbes correspondent aux fréquences pour les modes de la plaque simulée.

mesurées et calculées, un accord moins bon est observé entre les fréquences des modes des plaques architecturée et effective, l’erreur la plus élevée étant supérieure à 50 %. En particulier, une forte différence est observée pour les modes de flexion purement selon  $x$  de type  $(n,0)$ , où  $n = 1, \dots, 7$ . A l’inverse, un meilleur accord est observé pour les modes de flexion selon  $y$ , notamment pour les modes  $(0,2)$  et  $(1,2)$ . Il est possible de voir que la déformation des plaques homogènes ne permet pas de retrouver les contraintes tangentielles présentes pour la plaque architecturée à plus haute fréquence. On peut en conclure que les paramètres effectifs, issus de l’homogénéisation en volume corrigée avec la densité matricielle en plaque, ne permettent pas de retrouver les fréquences des modes de

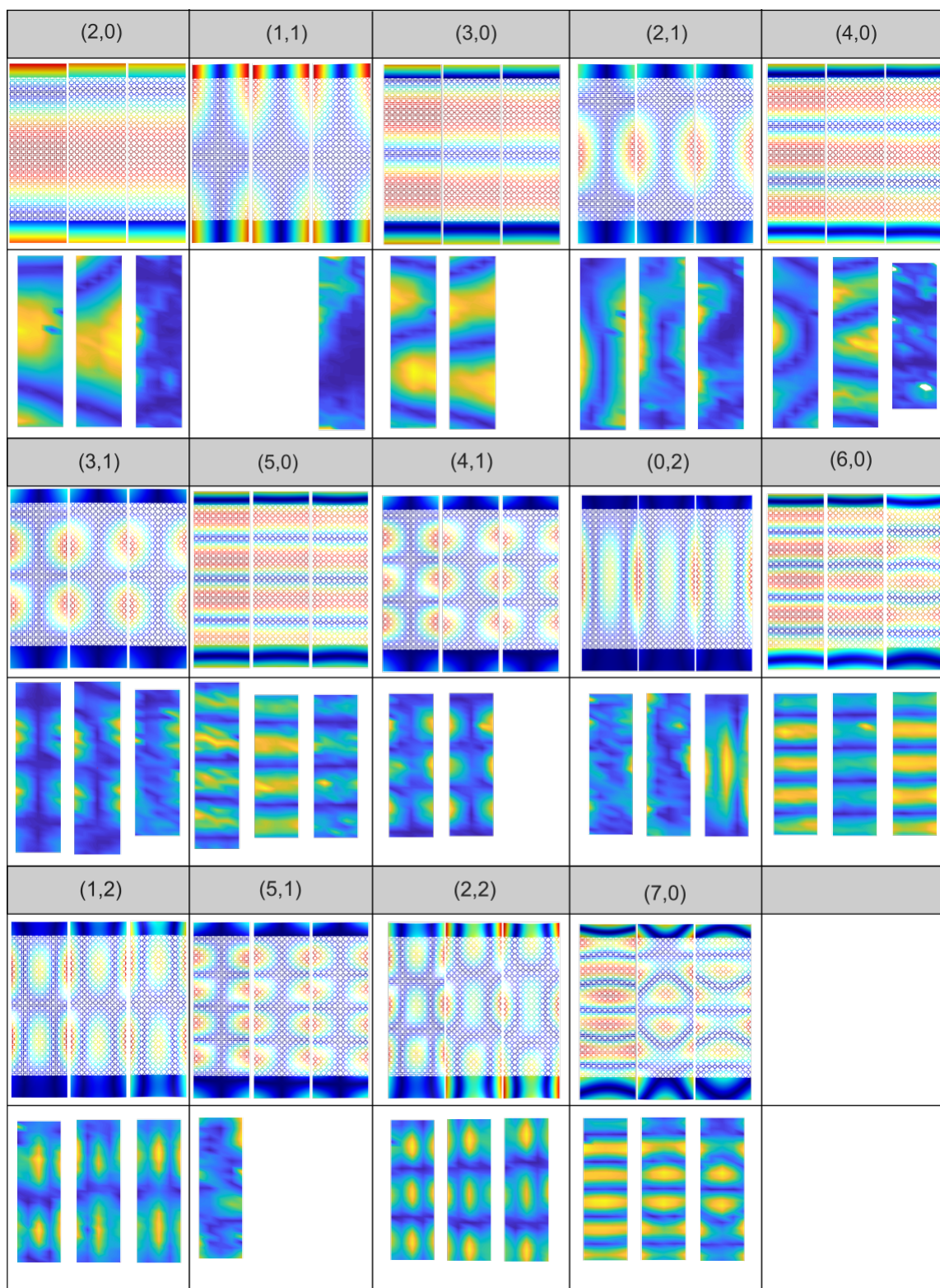


FIGURE 3.21 – Déformées des modes de flexion de la plaque architecturée obtenus expérimentalement (en bas) et par simulation éléments finis (en haut). Pour chaque mode, la déformation des plaques est présentée pour des angles  $\beta = -10^\circ, 10^\circ$  et  $30^\circ$  de gauche à droite.

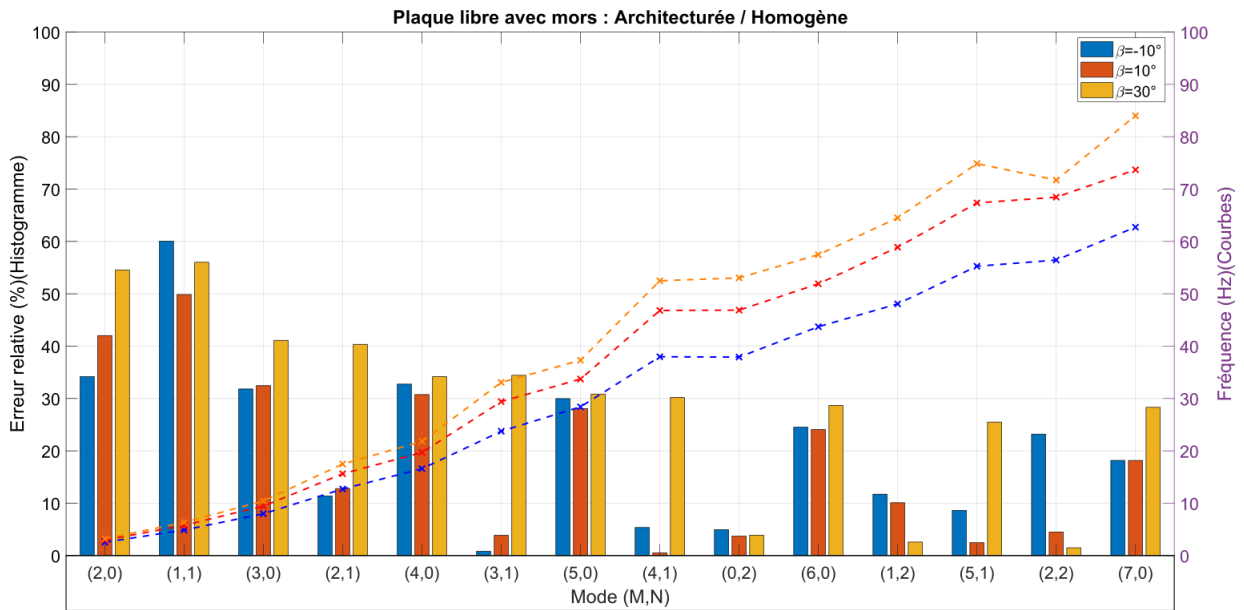


FIGURE 3.22 – Modes de flexion de la plaque architecturée et homogène obtenus par simulation éléments finis. L’histogramme représente les erreurs relatives des fréquences des modes de la plaque homogène par rapport à celles de la plaque architecturée. Les courbes correspondent aux fréquences pour les modes de la plaque architecturée.

flexion des plaques architecturées. De fortes différences sont observées pour la déformation et la fréquence des modes de flexion des plaques homogènes et architecturées. En basses fréquences de forts écarts en fréquence sont observés ( $\epsilon > 30\%$ ) pour les modes inférieurs au mode (4,0). En haute fréquence l’écart relatif est plus faible ( $\epsilon < 30\%$ ). De même, les champs de déformation des modes sont assez différents entre le cas effectif et le cas architecturé. L’écart observé pourrait s’expliquer par la non-unicité de la solution. Si l’on exploite uniquement les équations (3.58) à (3.66), il n’est pas possible de déterminer séparément  $C_{13}$  et  $C_{33}$ . C’est pourquoi il pourrait être envisagé d’étudier la propagation des ondes dans la plaque selon un autre angle, par exemple  $30^\circ$ , pour identifier la contribution de chacun de ces coefficients séparément.

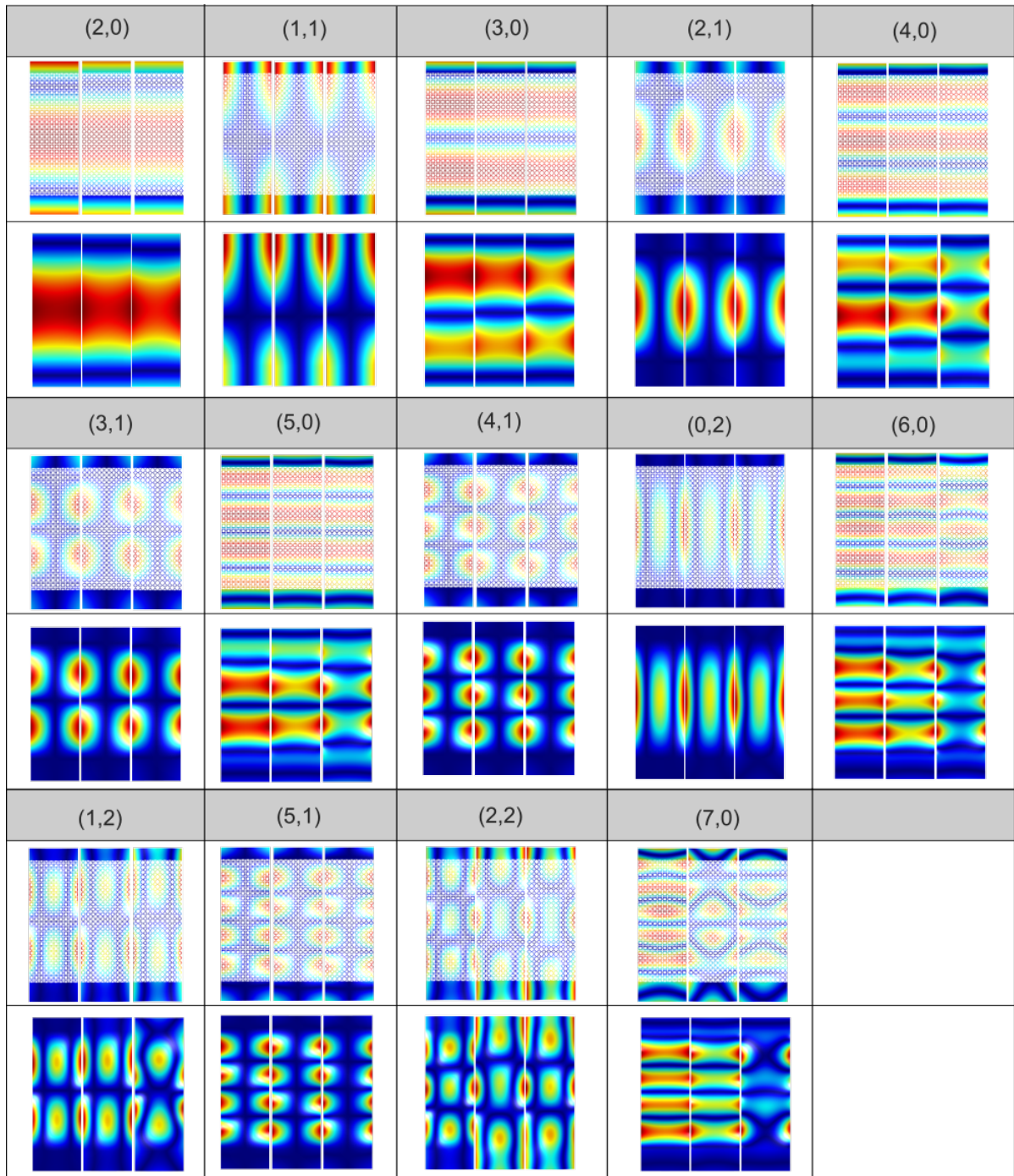


FIGURE 3.23 – Déformées des modes de flexion de la plaque architecturée (en haut) et homogène (en bas) obtenus par simulation éléments finis. Pour chaque mode, la déformation des plaques est présentée pour des angles  $\beta = -10^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $30^\circ$  de gauche à droite.



### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'homogénéisation de plaque a été présenté et des mesures en plaque ont été faites afin de mettre en évidence les propriétés anti-auxétiques de la structure étudiée.

Dans un premier temps, la propagation des ondes dans une plaque anisotrope à densité scalaire est présentée en reprenant les relations d'élasticité statique, mettant en jeu le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$ , utilisées pour la propagation en volume, avec pour le cas de la plaque des conditions libres aux frontières. Les mêmes paramètres mécaniques sont considérés pour la propagation en plaque et pour la propagation en volume, avec 9 composantes indépendantes du tenseur de rigidité. Les équations de dispersion des ondes de Lamb  $A0$  et  $S0$  et du mode transverse horizontal  $SH$  sont retrouvées avec une approximation basses fréquences. Une bonne modélisation des modes symétrique  $S0$  et transverse  $SH$  de la plaque architecturée est obtenue avec la plaque effective alors qu'un écart est constaté pour le mode anti-symétrique ( $A0$ ).

Dans un second temps la densité scalaire est remplacée par une densité anisotrope dans le modèle de propagation d'onde afin de corriger le modèle de propagation en plaque effective. Selon la même méthode que pour le cas de plaque à densité scalaire, les équations de dispersion analytiques sont obtenues pour les ondes se propageant dans une plaque anisotrope à densité matricielle. L'introduction de la densité anisotrope modifie la propagation du mode antisymétrique de Lamb avec une nouvelle composante de la densité  $\rho_{zz}$ . Une validation numérique a été faite en comparant les courbes de dispersion de la plaque architecturée avec celles de la plaque effective basée sur les paramètres issus du modèle d'homogénéisation corrigés avec une densité matricielle. La modélisation et la correction introduites sont valides uniquement dans la direction de propagation où a été faite la correction pour une fréquence choisie.

Finalement, une validation expérimentale a été présentée, pour 2 conditions, statique et dynamique, sur 3 plaques réalisées avec différents angles  $\beta = -10^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ . Un essai en traction a permis de montrer l'existence de propriétés anti-auxétiques pour les 3 plaques, les coefficients de Poisson mesurés étant respectivement  $\nu_{12} = 0,51, 0,83, 0,93$ . Un assez bon accord entre les coefficients de Poisson mesurés et les coefficients de Poisson attendus par la simulation ainsi que par l'homogénéisation est observé. Un meilleur accord est observé pour la plaque avec un plus grand angle  $\beta = 30^\circ$  et donc un plus grand coefficient de Poisson  $\nu_{12} = 0,93$ . Une surestimation des coefficients de Poisson mesurés est cependant présente, principalement liée à la géométrie des plaques, permettant l'existence de contraintes tangentielles durant l'essai. Les paramètres effectifs identifiés avec les modèles utilisés permettent donc de modéliser la plaque architecturée en contrainte plane.

Une identification des modes de flexion des plaques a été faite dans un second temps et a permis de montrer que ces paramètres ne permettent de modéliser la plaque architecturée, dans le cas des modes de flexion hors plan, que de manière limitée. Un décalage en fréquences existe entre les modes de la plaque architecturée et ceux de la plaque effective, bien que les modes de flexion dans la direction de la largeur des plaques soient mieux modélisés que ceux orientés suivant leur longueur.

Pour améliorer le modèle homogène, une première étape consisterait à vérifier si le terme  $C_{13}^2/C_{33}$  apparaît pour toutes les expressions des vitesses quel que soit l'angle de propagation dans le plan. Si ce n'est pas le cas une méthode d'extraction de toutes les composantes du tenseur de rigidité à partir des vitesses pour la plaque pourrait être développée, indépendamment des résultats obtenus pour le volume. Dans le cas contraire, les expressions des vitesses étant insuffisantes, une option pourrait être de recourir aux résul-

tats modaux, par exemple en essayant d'accorder les modes de la plaque finie architecturée et ceux de la plaque homogène par des méthodes d'optimisation numériques.

# Chapitre 4

## Applications à l'acoustique sous-marine

Afin de répondre aux problématiques de la furtivité sous-marine soulevées dans le chapitre 1, des revêtements acoustiques anéchoïques sont conçus à partir du métamatériau étudié dans les chapitres 2 et 3. Des panneaux acoustiques basés sur une armature constituée du métamatériau, d'abord à vide, puis dans une matrice de polymère sont donc étudiés dans ce chapitre. Une étude paramétrique est faite pour comprendre le comportement des panneaux ainsi que pour identifier l'influence du matériau et des paramètres géométriques de l'armature sur ses performances. Finalement des revêtements, issus de l'étude paramétrique, présentant des bonnes performances en anéchoïsme pour différents domaines de fréquences sont choisis et présentés.

### Sommaire

---

<b>4.1 Configurations</b>	<b>99</b>
4.1.1 Objectifs	99
4.1.2 Référence	99
4.1.3 Géométrie des panneaux	100
4.1.4 Matériaux	101
<b>4.2 Étude paramétrique en transmission</b>	<b>102</b>
4.2.1 Étude de l'armature à vide	102
4.2.2 Étude de l'armature avec matrice de polyuréthane	105
<b>4.3 Étude paramétrique en anéchoïsme</b>	<b>106</b>
4.3.1 Premiers résultats	106
4.3.2 Conclusions de l'étude paramétrique	110
4.3.3 Résultats majeurs	110
<b>4.4 Conclusions</b>	<b>114</b>

---

## 4.1 Configurations

### 4.1.1 Objectifs

Les objectifs et contraintes pour la réalisation de panneaux acoustiques présentés dans la partie 1.1.3 sont rappelés ici :

- de bonnes performances en anéchoïsme en basse fréquence,  $f < 3 \text{ kHz}$ ,
- une épaisseur  $L$  maximale de  $10 \text{ cm}$  et une densité  $\rho$  du revêtement inférieure à  $1,6$ ,
- une bonne résistance à la pression statique sous-marine, avec une conservation des performances en anéchoïsme sous la pression.

Les différents coefficients  $r$ ,  $t$  et  $C_a$  sont calculés pour des fréquences comprises entre  $0$  et  $15 \text{ kHz}$ , correspondant aux fréquences d'intérêt.

### 4.1.2 Référence

La figure 4.1 présente les coefficients d'anéchoïsme  $C_a$ , de transmission  $t$  et de réflexion  $r$  d'un panneau de  $10 \text{ cm}$  d'épaisseur constitué d'une unique couche de polyuréthane (tableau 4.1). Ce matériau servira de matrice pour les panneaux présentés dans la suite. Les caractéristiques du polyuréthane sont issues des travaux de P. Méresse [5].

Matériaux	$E(GPa)$	$\nu$	$\rho(kg.m^{-3})$	$E'(GPa)$	$\nu'$	$V_L(m.s^{-1})$	$V_T(m.s^{-1})$
Polyuréthane	$1,465.10^{-2}$	0,495	1000	$1,465.10^{-3}$	$2,475.10^{-2}$	703	69

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques du polyuréthane.

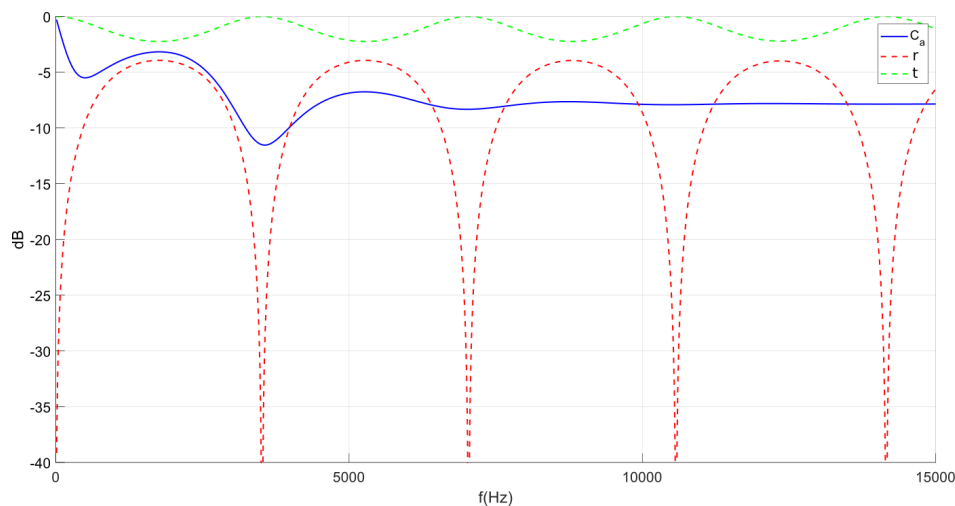


FIGURE 4.1 – Coefficients d'anéchoïsme, de transmission et de réflexion de la matrice de polyuréthane d'une épaisseur totale  $L = 10 \text{ cm}$ .

Des minima de réflexion sont observés pour des fréquences  $f = [3510, 7035, 10575, 14175] \text{ Hz}$ . Pour ces fréquences, l'épaisseur du panneau est égale à un multiple entier de la demi-longueur d'onde acoustique dans le polyuréthane (fréquences de résonance en épaisseur). Pour chaque résonance, le coefficient de réflexion très faible serait susceptible d'améliorer les performances en anéchoïsme (matériau adapté en impédance), mais cet effet est largement compensé par le maximum de transmission qui l'accompagne (l'essentiel du signal atteindra la coque et sera réfléchi). En pratique, l'amélioration des performances

en anéchoïsme à proximité des résonances en épaisseur est négligeable dès la deuxième résonance.

### 4.1.3 Géométrie des panneaux

La géométrie des panneaux acoustiques étudiés est représentée sur la figure 4.2.

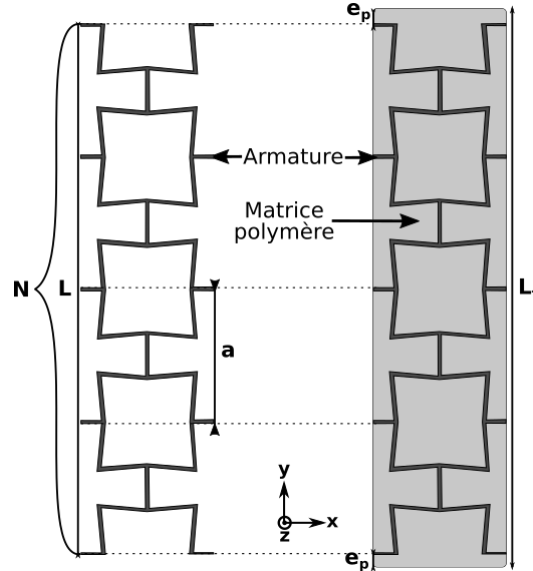


FIGURE 4.2 – Schéma des panneaux acoustiques composés d'une matrice de polymère renforcée par une armature.

Les panneaux considérés sont constitués d'une armature renforcée ou non d'une matrice de polymère d'une longueur totale  $L_t = 10 \text{ cm}$  selon la direction  $y$ , les cellules élémentaires sont présentées sur la figure 4.3.

$$L_t = L + 2e_p, \quad (4.1)$$

où  $e_p$  est l'épaisseur des interfaces autour de la structure.

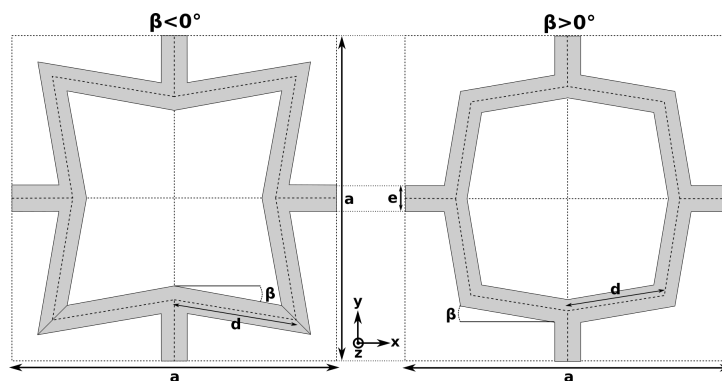


FIGURE 4.3 – Schéma et paramètres géométriques de la cellule élémentaire constituant l'armature des panneaux.

Les panneaux sont de dimensions infinies selon les directions  $x$  et  $z$ . Des conditions périodiques sont prises en compte dans la direction  $x$  pour le calcul éléments finis et l'hypothèse de déformation plane est appliquée selon  $z$ . Selon la direction  $y$ , l'armature est composée d'un réseau de  $N$  cellules élémentaires. L'épaisseur des panneaux étant de longueur fixe  $L_t = 10 \text{ cm}$  de par les contraintes liées à l'application visée, la périodicité

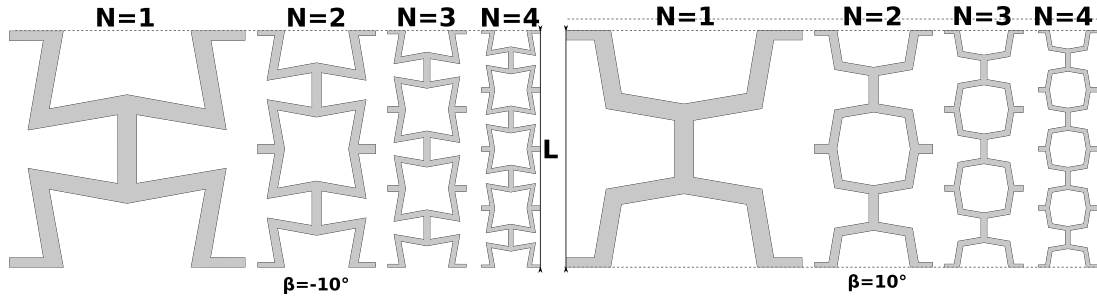


FIGURE 4.4 – Schéma des dimensions de la cellule unitaire en fonction du nombre de cellules de l'armature.

de la cellule élémentaire  $a$  dépend du nombre de cellules  $N$  et de l'épaisseur  $e_p$  entourant l'armature (figure 4.4) comme :

$$a = \frac{L}{N} = \frac{L_t - 2e_p}{N}. \quad (4.2)$$

Les paramètres géométriques de la cellule, déjà présentés dans la partie 1.1.3 sont rappelés sur la figure 4.3. Elle est constituée d'un assemblage de bras, a une périodicité  $a$ , et est caractérisée par la largeur des bras  $e$  et l'angle géométrique  $\beta$  formé entre eux. Les autres paramètres géométriques de la structure sont déduits des paramètres précédents. L'épaisseur des panneaux  $L_t$  étant fixée, la périodicité  $a$  est conditionnée par le nombre de cellules  $N$  avec l'équation 4.2. De plus pour le reste de l'étude paramétrique, la largeur de bras  $e$  est fixée pour la structure comme  $a/20$ , et dépend donc indirectement de  $N$ . Finalement la géométrie des panneaux peut être décrite par les 2 paramètres indépendants  $N$  et  $\beta$ .

Dans la suite, pour le cas général où la longueur de l'interface  $e_p$  n'est pas précisée, elle est considérée comme étant l'épaisseur des bras de l'architecture  $e_p = e$ .

Les autres paramètres géométriques peuvent être retrouvés à partir de ceux-ci.

Deux types de problèmes sont étudiés (figure 4.5), d'une part la transmission d'une onde acoustique à travers un panneau acoustique entouré de couches d'eau et d'autre part la réflexion d'une onde acoustique par un panneau fixé sur un support rigide et avec une couche d'eau sur l'autre face (anéchoïsme). Dans le cas du bloc immergé en réflexion/transmission, l'onde incidente  $I$  se déplace selon les  $y$  croissants et rentre en contact avec le panneau en  $y = 0$ . Les ondes réfléchiées  $r$  et transmises  $t$  sont déterminées respectivement en  $y < 0$  et  $y > 0$ . Dans le cas du problème en anéchoïsme, une condition de paroi rigide est introduite en  $y = L_t$ . Le coefficient de réflexion correspond alors directement au coefficient d'anéchoïsme.

#### 4.1.4 Matériaux

Les matériaux considérés pour la conception et l'étude des panneaux sont présentés dans le tableau 4.2.

La matrice de polymère permettant l'introduction de pertes est faite de polyuréthane. Les propriétés mécaniques du polyuréthane sont proches de celles de l'eau afin d'obtenir une bonne adaptation d'impédance. Des pertes de 10 % et 5 % sont introduites sur les parties complexes du module d'Young  $E'$  et du coefficient de Poisson  $\nu'$ , respectivement [5]. L'armature peut être constituée de polymère ou de métal, considérés sans pertes pour les simulations.

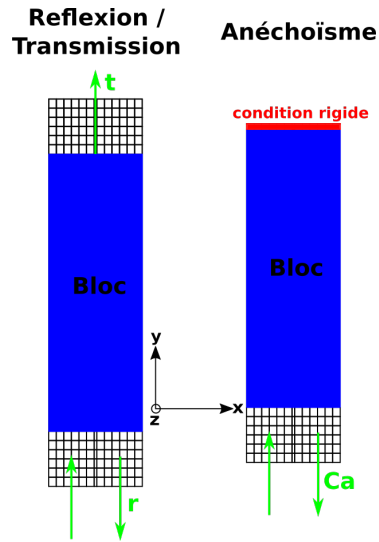


FIGURE 4.5 – Configurations de simulation des panneaux immergés. (A gauche) Cas de la simulation en réflexion/transmission. (A droite) Cas de la simulation en anéchoïsme.

Matériaux	$E(GPa)$	$\nu$	$\rho(kg.m^{-3})$	$E'(GPa)$	$\nu'$	$V_L(m.s^{-1})$	$V_T(m.s^{-1})$
PLA	2,2	0,35	1040	0	0	1842	885
Aluminium	74	0,344	2780	0	0	6430	3150
Titane	105	0,33	410	0	0	5873	2958
Acier	210	0,285	7800	0	0	5900	3236
Polyuréthane	$1,465.10^{-2}$	0,495	1000	$1,465.10^{-3}$	$2,475.10^{-2}$	703	69

TABLE 4.2 – Propriétés mécaniques des matériaux constituant l'armature des panneaux.

Le comportement des panneaux à base de cellules décrites précédemment est donc étudié par l'intermédiaire d'une étude paramétrique basée sur des simulations éléments finis.

## 4.2 Étude paramétrique en transmission

Afin de comprendre le comportement des panneaux anéchoïques et de pouvoir améliorer leurs performances, une étude paramétrique est faite. La structure seule, dite « à vide », est d'abord étudiée en fonction de sa géométrie afin d'identifier ses modes de déformation. L'ajout d'une matrice de polyuréthane introduit des contraintes extérieures à la structure, modifie les modes existants et permet l'existence de nouveaux modes. Cette influence de la matrice de polyuréthane sur la structure est donc étudiée.

### 4.2.1 Étude de l'armature à vide

La réflexion et la transmission acoustiques à travers des panneaux immergés constitués de l'architecture à vide et de différents matériaux (tableau 4.2) sont présentées. Pour simplifier l'interface avec laquelle l'onde incidente rentre en contact au niveau des surfaces externes du panneau, des interfaces en acier sont considérées aux bornes du panneau (figure 4.6).

Le coefficient de transmission  $t$  est calculé en fonction du nombre de cellules  $N$  et de l'angle  $\beta$  (figure 4.7). Le calcul étant sans pertes dans ce cas, le module du coefficient de

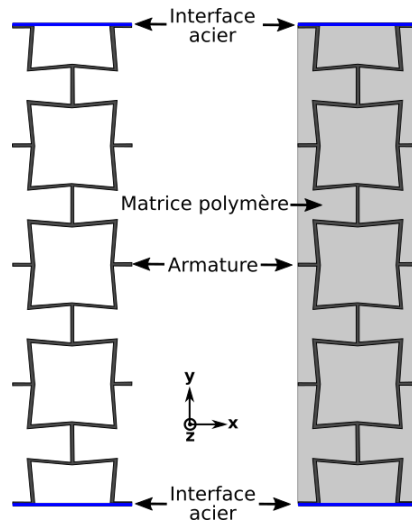


FIGURE 4.6 – Schéma des panneaux acoustiques composés d'une armature à vide ou contenant une matrice de polyuréthane.

réflexion peut être déduit par :

$$|r|^2 = 1 - |t|^2. \quad (4.3)$$

La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.3 :

Matériau	$N$	$a(\text{cm})$	$e(\text{mm})$
PLA	1	10	5
	2	5	2,5
Aluminium	3	3,33	1,66
Acier	4	2,5	1,25
	5	2	1

TABLE 4.3 – Paramètres géométriques des panneaux pour l'étude de l'armature à vide.

Le comportement de la structure dépend en premier lieu du nombre de cellules. Pour rappel, ce nombre fixe indirectement la périodicité du réseau, l'épaisseur totale étant fixe. Un décalage vers les hautes fréquences des minima de transmission est donc observé avec l'augmentation du nombre de cellules. Le nombre de minima de transmission dépend du nombre de cellules de l'architecture. La nature des modes permettant ces minima de transmission est montrée dans les inserts de la figure 4.8 pour l'exemple du matériau PLA et des paramètres géométriques  $N = 5$ ,  $a = 2$  cm,  $e = 1$  mm et  $\beta = 15^\circ$ .

Les modes permettant des minima du coefficient de transmission correspondent à des modes de compression de la structure. Le premier minimum du coefficient de transmission pour une fréquence de  $775$  Hz correspond à une déformation uniforme de l'ensemble de la structure. Les modes suivants impliquent des déformations locales des cellules élémentaires, dues à la présence de coudes dans le réseau. Finalement le dernier minimum du coefficient de transmission observé correspond à un mode avec une déformation localisée sur la première cellule, montrant que pour les modes à plus hautes fréquences seule une partie de la structure se déforme.

Dans le cas des panneaux avec une armature métallique, les modes observés décrivent des minima de  $t$  plus faibles et décalés vers les hautes fréquences par rapport aux panneaux avec l'armature en PLA, en raison de la rigidité plus grande de la structure.



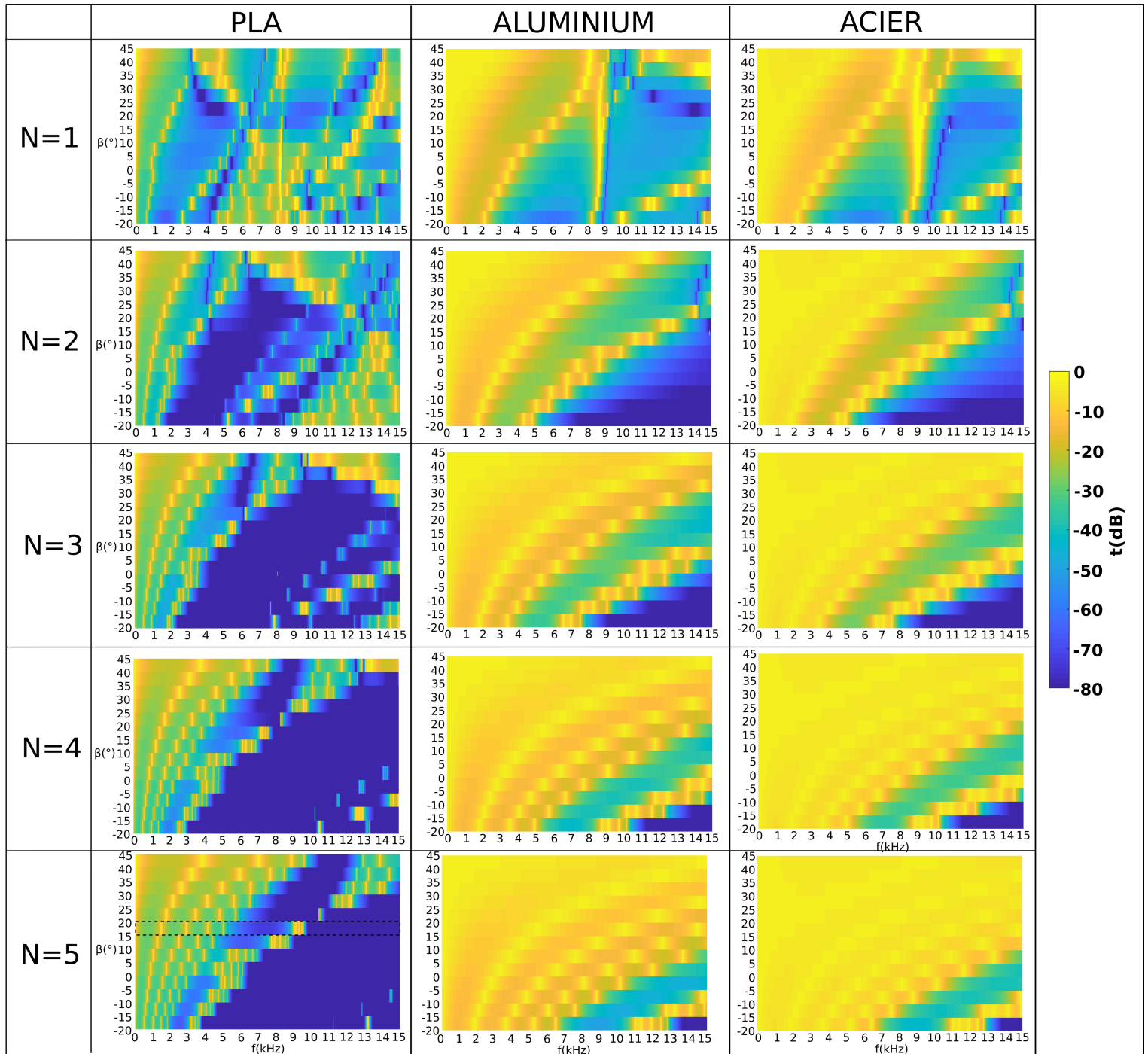


FIGURE 4.7 – Transmission d'un panneau constitué de la structure à vide en fonction du nombre de cellules  $N$  et de l'angle  $\beta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.3. Les valeurs encadrées par des pointillés sur le graphe en bas à gauche correspondent à la courbe de transmission (en tirets rouges) de la figure 4.8.

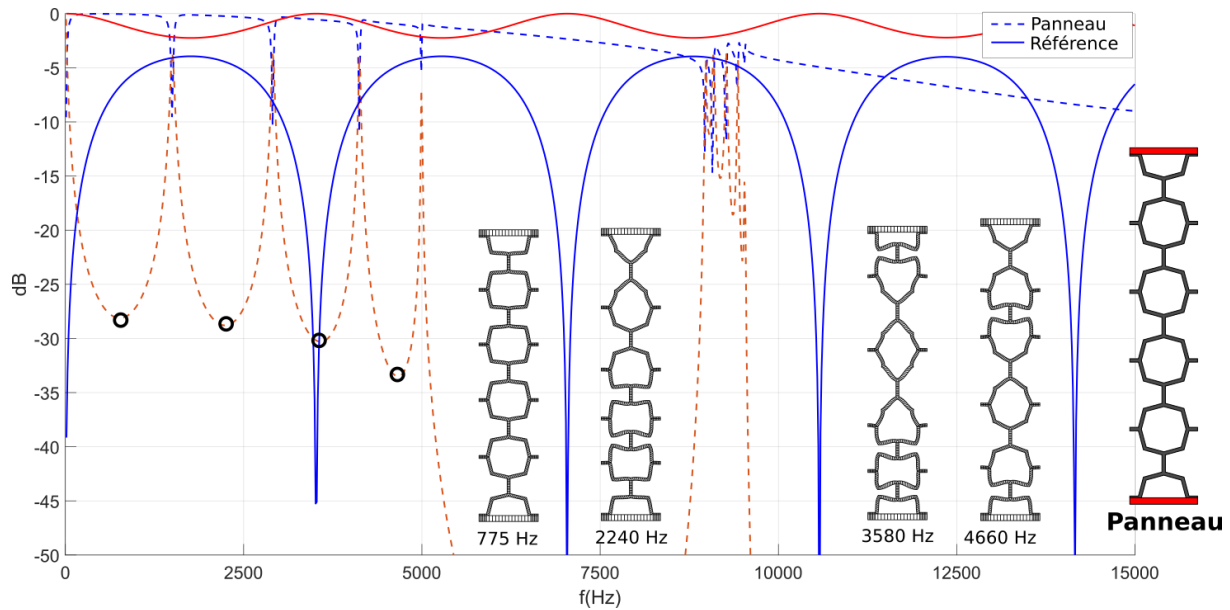


FIGURE 4.8 – Réflexion (courbes rouges) et transmission (courbes bleues) d’un panneau constitué de la structure en PLA à vide avec les paramètres :  $N = 5$ ,  $a = 2$  cm,  $e = 1$  mm et  $\beta = 15^\circ$ . Les déformations du panneau pour les minima de  $t$  sont représentées.

La faible transmission globale visible sur la figure 4.7 est due au fort contraste d’impédance entre le milieu extérieur et le panneau, l’architecture considérée étant constituée d’un réseau de minces bras entourés d’air. L’intégration de la matrice de polyuréthane va donc fortement modifier les résonances de la structure.

#### 4.2.2 Étude de l’armature avec matrice de polyuréthane

Les panneaux étudiés consistent en un bloc de polyuréthane, renforcé d’une structure ayant pour but d’améliorer les performances en absorption. Les modes de déformation de la structure en l’absence de matrice ayant été identifiés, l’influence de la matrice de polyuréthane sur ces modes est maintenant abordée.

La matrice de polyuréthane introduit une contrainte extérieure s’appliquant sur la structure, réduisant sa liberté de mouvement. L’importance de cette contrainte est liée au contraste d’impédance entre la structure et la matrice, et dépend donc des matériaux considérés. De plus la structure présentant des alvéoles octogonales, des modes de cavité peuvent apparaître.

Comme pour le cas de la structure à vide, des interfaces d’acier sont considérées aux bornes du panneau afin de simplifier le problème. Plusieurs matériaux sont cette fois-ci considérés afin de mesurer l’importance du contraste d’impédance entre la structure et la matrice. La géométrie des panneaux considérés est décrite dans le tableau 4.4.

Matériau	$N$	$a$ (cm)	$e$ (mm)
PLA	5	2	1
Aluminium			
Acier			

TABLE 4.4 – Paramètres géométriques des panneaux pour l’étude de l’influence de la matrice de polyuréthane.

Les coefficients de transmission des panneaux sont présentés en figure 4.9.

La présence d'une matrice de polyuréthane modifie de manière significative les coefficients de réflexion et de transmission des panneaux. Une atténuation des minima du coefficient de transmission dus aux modes de la structure est visible en particulier pour les panneaux avec une armature en PLA. De plus, pour ces mêmes panneaux, la dépendance de la fréquence des minima de transmission à la géométrie (ici l'angle  $\beta$ ) est moins forte, indiquant que l'architecture joue un rôle moins important dans les minima de  $t$  du panneau à ces fréquences.

Pour les structures métalliques, les premiers modes du panneau à vide permettant une faible transmission sont fortement atténués avec l'introduction de la matrice. Un décalage vers les basses fréquences des modes est aussi observé. Une dépendance plus forte des fréquences des pics de transmission à la géométrie est visible pour les deux structures métalliques que pour la structure plastique, indiquant qu'un contraste d'impédance plus élevé est nécessaire pour conserver l'influence de la microstructure.

Finalement, il est à noter que les interfaces d'acier du panneau, comme dit précédemment, induisent une forte réflexion des ondes incidentes de par la rupture d'impédance avec le milieu extérieur, ce qui amène une moins bonne absorption par rapport aux panneaux avec une interface de polyuréthane (figure 4.10), en particulier pour des fréquences supérieures à  $2\text{ kHz}$ . La discontinuité du coefficient d'absorption pour les plaques avec une interface de polymère et des angles  $\beta = 5^\circ$  et  $10^\circ$  est due à des problématiques de simulation. Ainsi, dans la suite, ces interfaces sont supprimées.

L'armature a donc été étudiée seule ou avec une matrice de polyuréthane. Il est maintenant nécessaire de replacer les panneaux dans leurs conditions d'utilisation. Dans la suite, l'étude porte sur des panneaux basés sur les structures précédemment étudiées, avec une structure immergée dans une matrice de polyuréthane fixée à une coque rigide. On s'intéresse donc aux coefficients d'anéchoïsme  $C_a$ .

## 4.3 Étude paramétrique en anéchoïsme

### 4.3.1 Premiers résultats

Dans cette partie le coefficient d'anéchoïsme des panneaux précédemment étudiés est déterminé. On s'intéresse en particulier à l'influence de la microstructure sur les performances en anéchoïsme des panneaux, en fonction de sa géométrie et du matériau la constituant. Plusieurs matériaux polymères ou métalliques sont étudiés (tableau 4.2). Les deux études précédentes ont montré que la géométrie de l'architecture, paramétrée par l'angle  $\beta$  et le nombre de cellules  $N$ , avait une influence sur la fréquence et l'atténuation des minima de  $r$  et  $t$ , même en présence de la matrice de polyuréthane. Une étude sur les paramètres géométriques  $\beta$  et  $N$  est donc reprise, ces 2 paramètres permettant de définir la cellule élémentaire.

Le coefficient d'anéchoïsme, représenté sur la figure 4.11 pour le cas de plusieurs panneaux dont la géométrie est décrite dans le tableau 4.5, est calculé en fonction du matériau de l'armature.

Tout d'abord, de par la présence des interfaces de polyuréthane, un mode de corps rigide de la structure dans la matrice est observé correspondant au premier minimum de  $C_a$  situé entre 1 et 3  $\text{kHz}$  pour les panneaux à 1 cellule et 2 et 4  $\text{kHz}$  pour les panneaux à 2, 3 et 4 cellules. Ce minimum d'anéchoïsme est lié au mode de compression de la matrice de polyuréthane, présent aussi pour le panneau fait de la matrice de polyuréthane seule. Pour la structure en PLA, le faible contraste d'impédance entre le polymère de la structure et celui de la matrice ne permet pas aux modes de structure d'exister et seule une faible

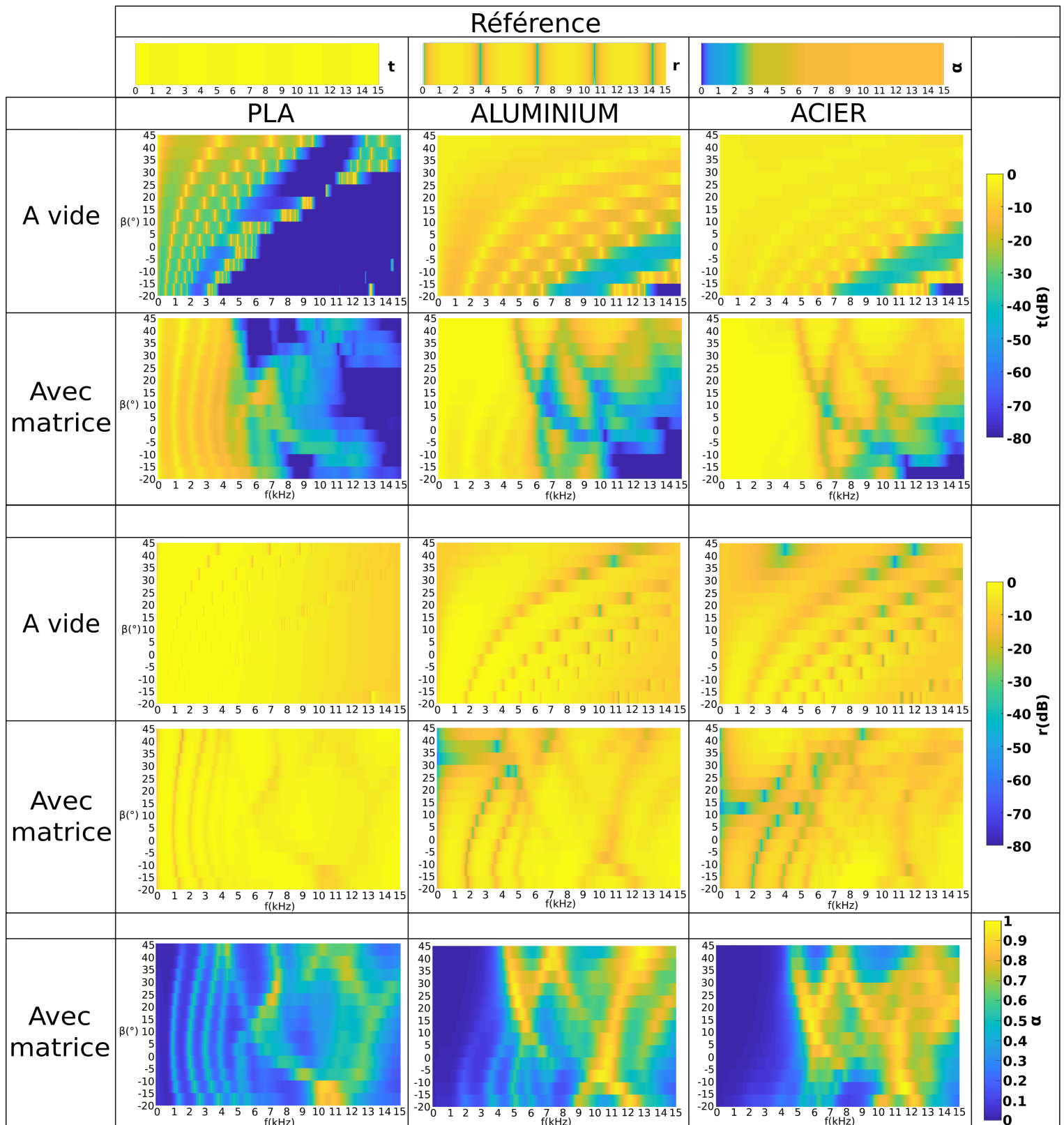


FIGURE 4.9 – Coefficients de transmission, de réflexion et d'absorption d'un panneau constitué de la structure avec et sans matrice de polyuréthane et borné par des interfaces d'acier en fonction du matériau de l'armature et de l'angle  $\beta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.4.

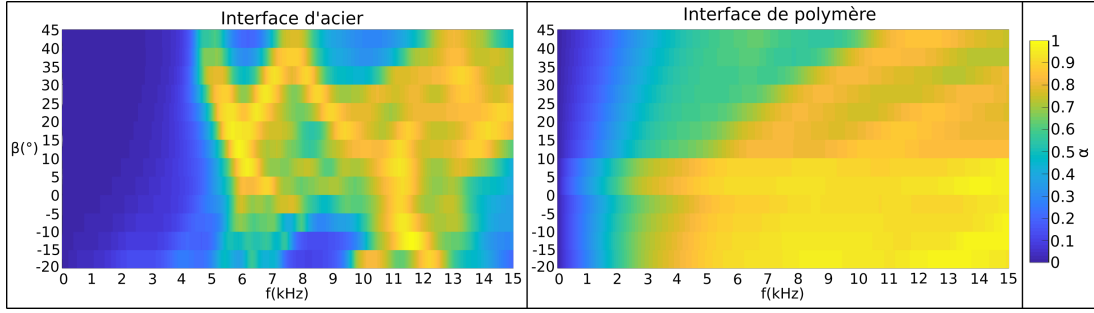


FIGURE 4.10 – Coefficients d’absorption d’un panneau constitué de la structure avec une matrice de polyuréthane et borné par des interfaces d’acier ou de polyuréthane en fonction de l’angle  $\beta$ .

$N$	$a(\text{cm})$	$e(\text{mm})$
1	10	5
2	5	2,5
3	3,33	1,66
4	2,5	1,25

TABLE 4.5 – Paramètres géométriques des panneaux pour l’étude de l’influence du nombre de cellules  $N$  et du matériau de la structure

modification de la fréquence du minimum de  $C_a$  présent pour la matrice seule est observée. Une plus grande modification de ce mode est visible pour les structures métalliques, en fréquence et en amplitude, en raison d’un ajout de masse à la matrice de polyuréthane plus important. Il est à noter que la fréquence de ce minimum de  $C_a$  est faiblement sensible aux variations de l’angle  $\beta$ , montrant que la microstructure n’est pas sollicitée pour ce mode.

Ensuite, des modes de structure liés à la compression de l’armature sont présents à plus haute fréquence pour les armatures métalliques. Ils sont à l’origine d’un ensemble de minima d’anéchoïsme, dont le nombre est lié à  $N$ . La fréquence de ces modes varie par ailleurs fortement en fonction du nombre de cellules  $N$  et de l’angle  $\beta$ . La dépendance de la fréquence de ces modes en fonction du nombre de cellules vient du fait que le panneau a une épaisseur fixe  $L_t$ . La dimension des cellules est donc inversement proportionnelle à leur nombre et la fréquence de ces modes est décalée vers les hautes fréquences avec l’augmentation du nombre de cellules. La fréquence de ces modes dépend aussi de l’angle  $\beta$  de la cellule élémentaire, avec un minimum de fréquence pour des cellules ré-entrantes et un maximum pour un  $\beta$  proche de  $\beta = 20^\circ$ . La microstructure influence donc les performances en anéchoïsme du panneau en permettant ici de moduler la fréquence du second minimum de  $C_a$ .

Finalement, en comparant les minima de  $C_a$  de la structure en aluminium et de la structure en acier, on peut voir que plus la densité  $\rho$  du matériau est grande, plus la fréquence du premier minimum de  $C_a$ , correspondant à un mode de corps rigide, est faible. Cependant, une plus grande densité s’accompagnant d’un module d’Young plus grand, les fréquences du second minimum de  $C_a$ , correspondant au mode de structure, sont à l’inverse plus élevées.

L’influence de l’épaisseur des bras de la cellule élémentaire sur le coefficient d’anéchoïsme (figure 4.12) est maintenant étudiée en prenant comme nouveau paramètre le facteur de finesse  $\eta$ , pour un panneau dont la structure est en acier et les paramètres

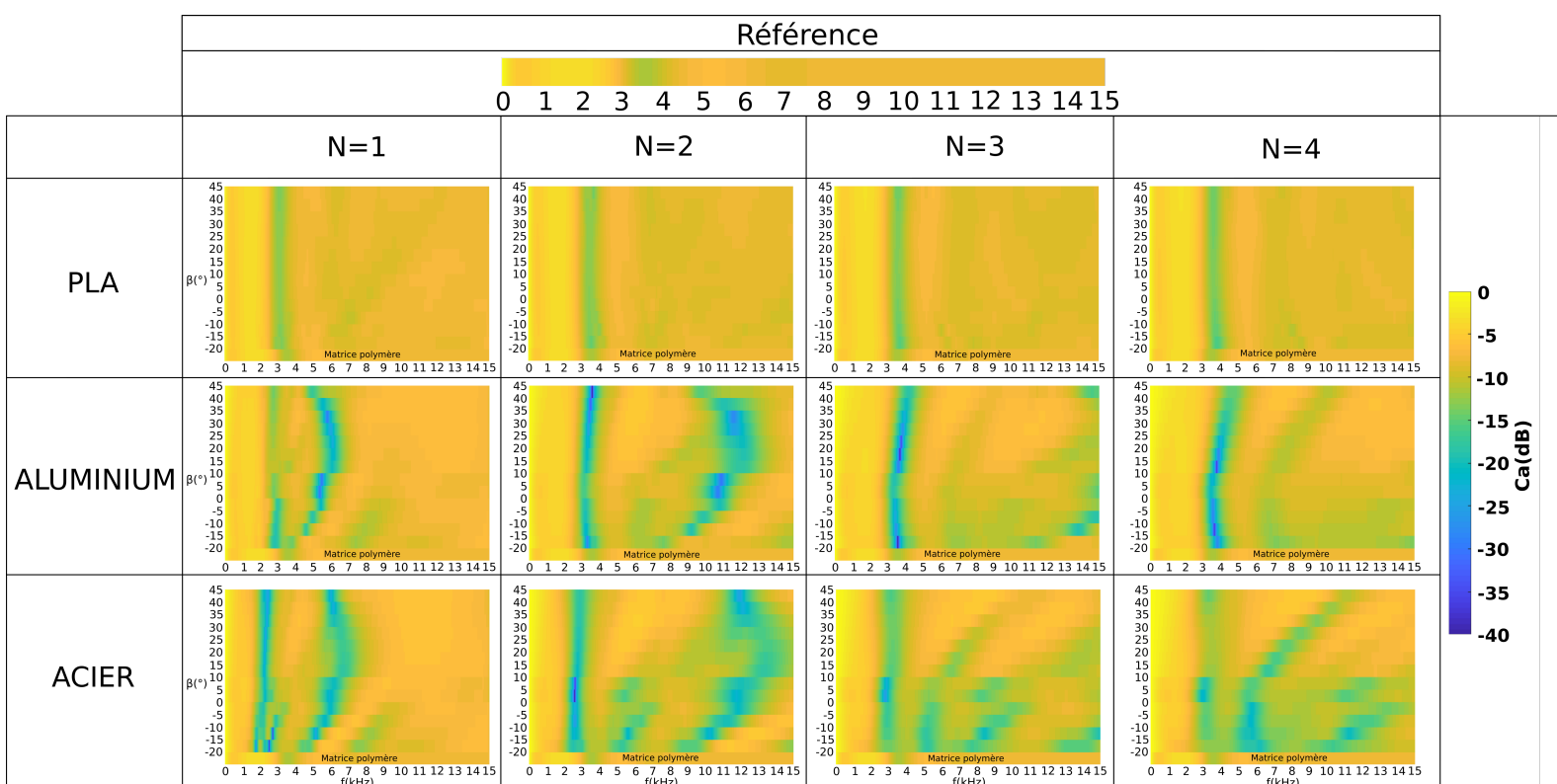


FIGURE 4.11 – Coefficient d’anéchoïsme des panneaux en fonction du nombre de cellules  $N$ , de l’angle  $\beta$  et des matériaux considérés. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.5. Le  $C_a$  du panneau avec seulement la matrice de polyuréthane est montré en bas des différents graphiques et rappelé en haut.

géométriques sont décrits dans le tableau 4.6. Cette étude est paramétrée par le nombre de cellules  $N$  et le facteur de finesse  $\eta = e/d$ , et est faite à  $\beta$  constant.  $d$  étant fixé à partir de la connaissance de la période  $a$  (cf. équation 4.2), le choix d’un facteur de finesse spécifique revient à choisir une largeur de bras adaptée.

Matériau	$N$	$a$ (cm)	$\beta$ (°)
Acier	1	10	15
	2	5	
	3	3,33	

TABLE 4.6 – Paramètres géométriques des panneaux pour l’étude de l’influence du facteur de finesse  $\eta$ .

Le calcul du coefficient d’anéchoïsme en fonction de  $\eta$  permet de confirmer les observations précédentes. Tout d’abord la fréquence du premier minimum d’anéchoïsme diminue avec l’augmentation du facteur de finesse  $\eta$ , indiquant que ce mode est un mode de corps rigide dépendant de la dimension de la structure et de sa masse. Ensuite, la fréquence des minima de  $C_a$  supérieurs augmente avec des facteurs de finesse  $\eta$  plus grands, ceci étant lié à la résistance à la déformation plus grande de la structure avec des bras plus épais. Il est aussi à noter que, avec l’augmentation de la largeur des bras de la structure, la densité totale du panneau est augmentée. La matrice de polyuréthane prend aussi une fraction volumique plus faible de celui-ci, réduisant ainsi les performances globales en absorption du panneau. Finalement, pour la structure à 1 cellule, le second mode d’absorption est

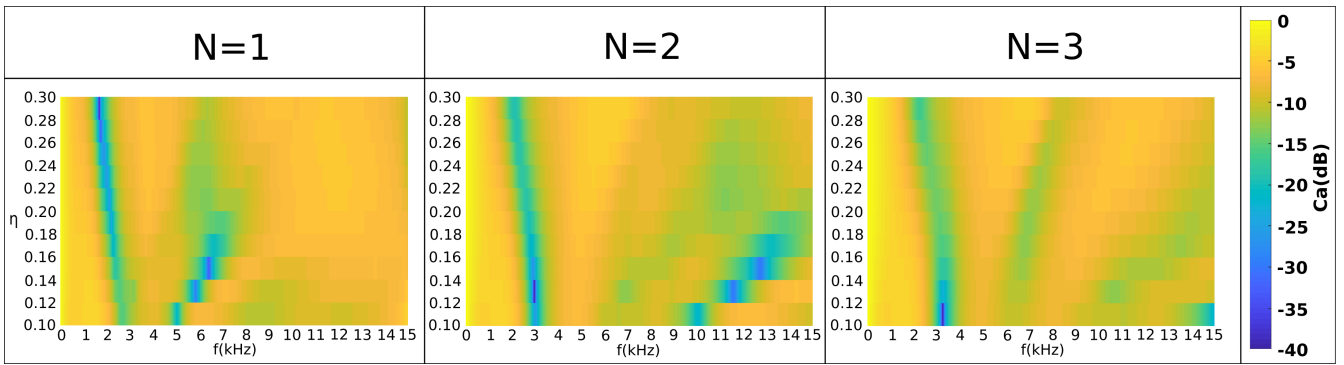


FIGURE 4.12 – Coefficient d’anéchoïsme des panneaux en fonction du nombre de cellules  $N$  et du facteur de finesse  $\eta$ . La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.6.

complètement atténué pour  $\eta = 0, 3$ . Dans ce cas la structure ajoutée à la matrice de polyuréthane n’agit plus que comme une masse permettant un mode de corps rigide.

### 4.3.2 Conclusions de l’étude paramétrique

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de l’étude paramétrique en anéchoïsme précédente.

Tout d’abord, les modes permettant des minima d’anéchoïsme introduits par la structure correspondent à des modes de compression de la structure ainsi qu’à un mode de corps rigide. Le mode de corps rigide ne dépend pas de la microstructure et seule la dimension et la masse de la structure permettent une modulation de la fréquence du minimum de  $C_a$ . À l’inverse, les modes de compression dépendent fortement de la microstructure et sont modulables par la géométrie de celle-ci.

Ensuite, l’influence des paramètres géométriques de la structure est identifiée. Plus le nombre de cellules dans le panneau est élevé, plus ce dernier présente des bandes de bonnes performances en anéchoïsme dans la bande  $[5 - 15] \text{ kHz}$ . Pour des panneaux avec 1 ou 2 cellules, de meilleures performances sont observées dans la bande  $[1 - 3] \text{ kHz}$ .

Il est aussi observé que le choix du matériau de l’armature est important, afin d’assurer un contraste d’impédance suffisamment important entre la matrice de polyuréthane et la structure. Le matériau influe sur la densité, la rigidité de la structure ainsi que sur les minima d’anéchoïsme.

Finalement, l’influence de la géométrie des cellules élémentaires est déterminée, avec des fréquences plus faibles des minima de  $C_a$  pour un angle  $\beta$  négatif (cellule ré-entrante). Avec une augmentation de la largeur des bras de la cellule, il est aussi observé une baisse en fréquence du mode de corps rigide et une augmentation pour les modes de compression de la structure.

Le comportement des panneaux proposés ayant été étudié et les paramètres dont dépendent ses minima de  $C_a$  identifiés, des panneaux montrant des performances en anéchoïsme améliorées par rapport à la matrice de polyuréthane seule sont présentés dans la suite.

### 4.3.3 Résultats majeurs

Cette section présente les résultats de simulation pour 3 configurations sélectionnées pour leurs bonnes performances en anéchoïsme parmi l’ensemble des cas simulés. La figure 4.13 donne un aperçu des géométries, qui correspondent aux paramètres indiqués dans le tableau 4.7.

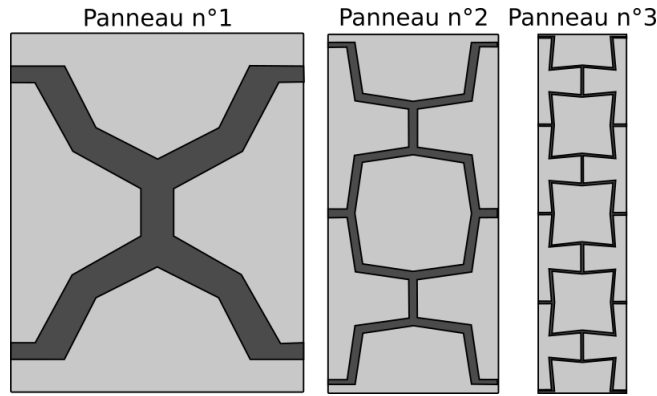


FIGURE 4.13 – Schéma des panneaux acoustiques sélectionnés présentant de bonnes performances en anéchoïsme.

Panneaux n°	Matériau	$N$	$\beta(^{\circ})$	$e(\text{mm})$
1	Aluminium	1	45	9,16
2	Titane	2	10	2,4
3	Acier	4	-5	0,6

TABLE 4.7 – Paramètres géométriques des panneaux choisis présentant de bonnes performances en anéchoïsme pour différentes fréquences.

Les 3 structures choisies présentent des performances en anéchoïsme améliorées par rapport à la matrice de polyuréthane seule, pour différents domaines de fréquences sélectionnés. Un premier panneau ( $n^{\circ}1$ ) est choisi pour ses performances en anéchoïsme à basse fréquence, pour  $f < 2 \text{ kHz}$ . Les deux autres panneaux sont considérés pour leurs performances à plus hautes fréquences, pour  $f > 2 \text{ kHz}$ . Les coefficients d'anéchoïsme des 3 structures sont présentés sur la figure 4.14.

#### 4.3.3.1 Panneau 1

Conformément aux observations faites lors de l'étude paramétrique, le minimum de  $C_a$  avec la fréquence la plus faible ( $1,7 \text{ kHz}$ ) est obtenu pour un panneau à 1 cellule. De plus, la structure présente une forte largeur de bras  $e = 9,16 \text{ mm}$ , induisant une faible déformation de la microstructure (figure 4.15) pour les premiers minima de  $C_a$ .

Une dégradation du coefficient d'anéchoïsme est visible pour la structure à 1 cellule par rapport à la matrice de polyuréthane seule, notamment pour des fréquences entre 3 et 10  $\text{kHz}$ . Un mode de structure est observé à plus haute fréquence, pour  $f = 13215 \text{ Hz}$ , montrant un fort minimum de  $C_a$ .

#### 4.3.3.2 Panneau 2

Pour les deux autres panneaux présentés le premier minimum de  $C_a$  est présent autour de 3  $\text{kHz}$  et il est plus nettement marqué que pour le panneau 1. Par ailleurs, contrairement au panneau 1, on n'observe pas de dégradation des performances en anéchoïsme en dehors des résonances, vis-à-vis du panneau de référence. Pour le panneau 2, la microstructure joue un rôle plus important avec une forte compression de la structure à une fréquence  $f = 3 \text{ kHz}$  (figure 4.16). Les bras de cette structure lui permettent une plus grande souplesse et réduisent ainsi la dégradation des minima d'anéchoïsme liés à la matrice de polyuréthane.



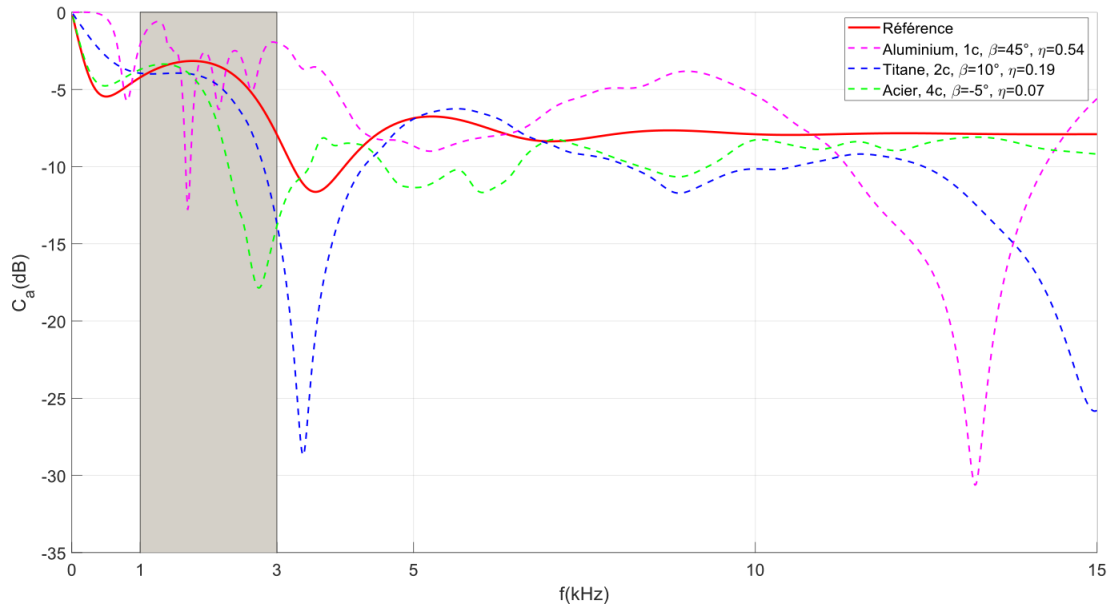


FIGURE 4.14 – Coefficient d’anéchoïsme des 3 panneaux choisis pour leurs bonnes performances en anéchoïsme dans la bande  $[1 - 3] \text{ kHz}$ . La référence correspond au  $C_a$  de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7.

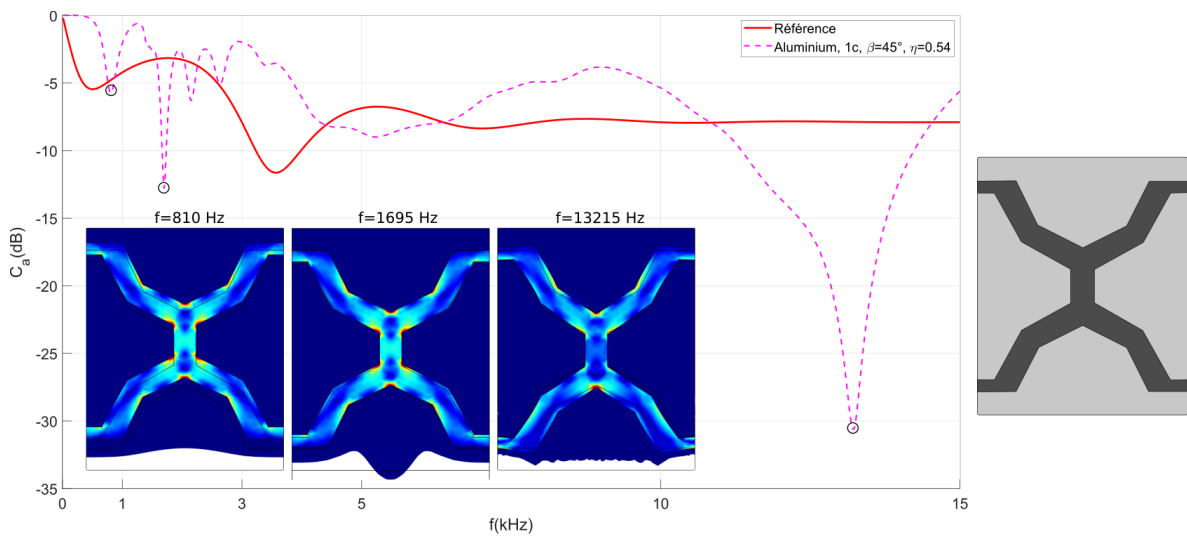


FIGURE 4.15 – Coefficient d’anéchoïsme du panneau  $n^\circ 1$  choisi pour sa performance en anéchoïsme en basses fréquences,  $f < 3 \text{ kHz}$ . La référence correspond au  $C_a$  de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7.

Il est possible de voir sur la figure 4.16 que les coins de la structure ont une forte influence dans la déformation de celle-ci. Dans le cas où ces coins sont supprimés (figure 4.17), les deux premiers modes sont décalés vers les basses fréquences,  $f = [2550, 5610] \text{ Hz}$ , mais ce décalage s’accompagne d’une dégradation des performances au niveau des minima de  $C_a$ .

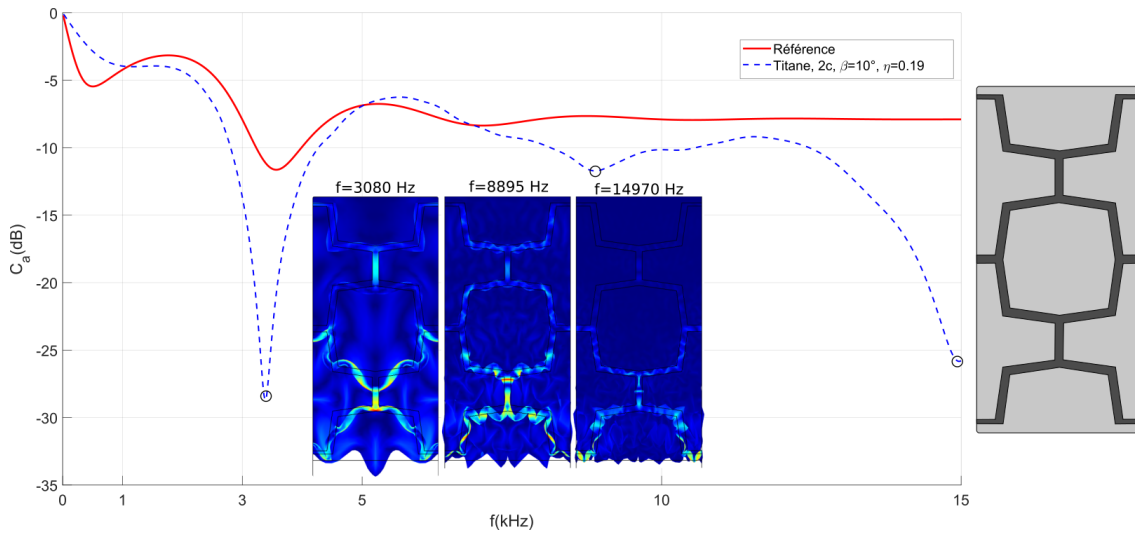


FIGURE 4.16 – Coefficient d’anéchoïsme du panneau  $n^{\circ}$  2 choisi pour sa performance en anéchoïsme en hautes fréquences,  $f > 3 \text{ kHz}$ . La référence correspond au  $C_a$  de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7.

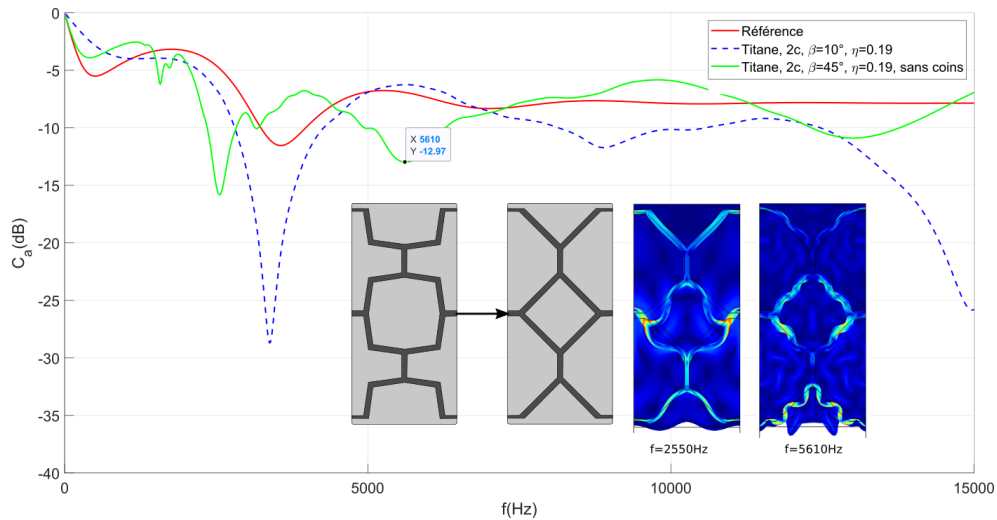


FIGURE 4.17 – Déformation des 2 premiers modes du panneau  $n^{\circ}$  2 (figure 4.16) en l’absence de coins.

### 4.3.3.3 Panneau 3

Le comportement du panneau  $n^{\circ}$  3 (figure 4.18) est assez similaire à celui du  $n^{\circ}$  2. Une faible dégradation des performances en anéchoïsme vis-à-vis du polyuréthane est visible en hautes fréquences et un minimum d’absorption est observé autour de  $3 \text{ kHz}$ . Ce minimum, bien que à plus basses fréquences que pour le panneau 2, présente une plus faible amplitude. Il est cependant à noter que seul le panneau 3 ne présente quasiment aucune dégradation du  $C_a$  de la matrice de polyuréthane pour des fréquences très faibles, inférieures à  $500 \text{ Hz}$ .

Finalement, il est observé pour des fréquences  $f > 10 \text{ kHz}$  sur les figures 4.15 et 4.16 que la déformation du panneau est localisée dans la première demi-cellule de celui-ci.

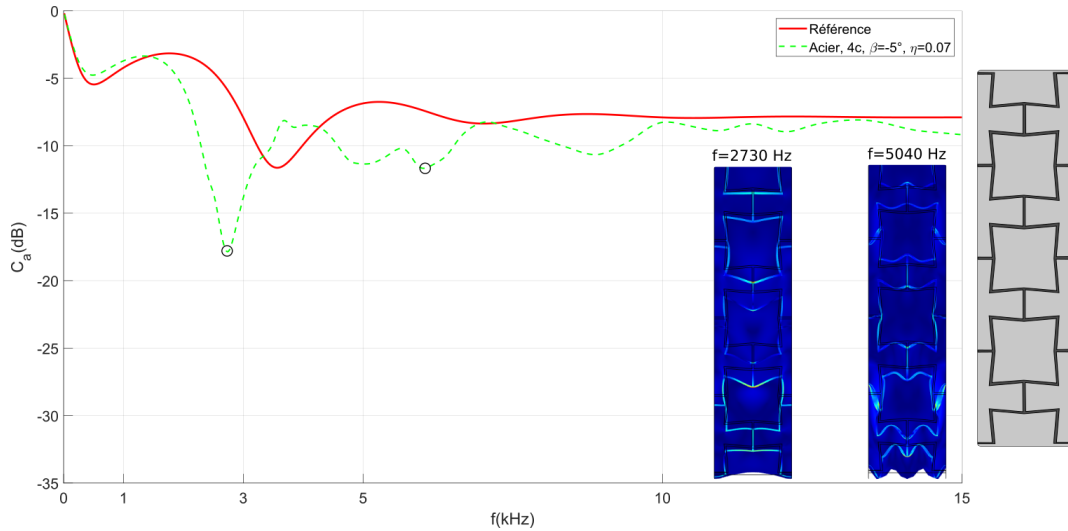


FIGURE 4.18 – Coefficient d’anéchoïsme du panneau  $n^{\circ}$  3 choisi pour sa performance en anéchoïsme en hautes fréquences,  $f > 3 \text{ kHz}$ . La référence correspond au  $C_a$  de la matrice de polyuréthane seule. La géométrie des panneaux est décrite dans le tableau 4.7.

## 4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, des panneaux, à vide, puis constitués d’une matrice de polyuréthane ont été présentés. Ils permettent l’amélioration des performances en anéchoïsme de par la présence d’une armature composée du métamatériau étudié. Ces panneaux satisfont les contraintes liées à l’application visée. Ils doivent en particulier respecter une épaisseur maximum  $L_t = 10 \text{ cm}$  et avoir une densité totale  $\rho < 1,6$ , en plus de ne pas comporter d’inclusions d’air. Ensuite, les panneaux doivent respecter les critères de performances fixés, avec une amélioration des performances dans le domaine  $[300 - 3000] \text{ Hz}$  par rapport à la matrice de polyuréthane seule, ainsi qu’une dégradation minimale des performances à plus hautes fréquences.

Une étude paramétrique a montré que l’intégration d’une armature faite du métamatériau pouvait permettre une amélioration des performances du panneau. Tout d’abord, l’armature permet un décalage vers les basses fréquences,  $f < 3 \text{ kHz}$ , et une plus grande atténuation du mode de compression de la matrice par l’ajout d’une masse liée à la structure. Ce mode dépend de la masse et de la densité de la structure mais ne met pas en jeu la déformation de la microstructure et donc ne dépend pas de ses paramètres géométriques. De plus, plus l’armature est dense plus le mode est renforcé et déplacé vers les basses fréquences.

Ensuite, des modes de compression de l’armature permettent une amélioration des performances à plus hautes fréquences,  $f > 5 \text{ kHz}$ . Ces modes dépendent de la déformation de la microstructure, et sont donc conditionnés par les paramètres géométriques de la cellule, l’angle  $\beta$  et la largeur de bras  $e$ , ainsi que par le nombre de cellules  $N$  et le matériau choisi. Pour des angles  $\beta$  négatifs (cellules ré-entrantes), les minima d’anéchoïsme correspondant aux modes de compression présentent des fréquences plus faibles. Enfin, l’augmentation du nombre de cellules constituant l’armature permet de déplacer les minima de  $C_a$  vers les hautes fréquences.

Grâce à ces deux types de modes, des minima de  $C_a$  à  $-30 \text{ dB}$  peuvent être atteints conjointement à hautes ( $f > 5 \text{ kHz}$ ) et basses fréquences ( $f < 3 \text{ kHz}$ ). Il est à noter que des conditions sont à respecter pour que ces deux modes existent : le contraste d’impédance entre l’armature et la matrice de polyuréthane doit être suffisamment fort et la cellule élémentaire doit avoir une largeur de bras suffisamment faible pour que l’armature puisse

se déformer.

Finalement, 3 panneaux sont choisis à l'issue de l'étude paramétrique. Ces panneaux montrent de bonnes performances en anéchoïsme pour différents domaines de fréquence. Dans un premier cas, des améliorations sont observées en basses fréquences, pour un panneau à 1 cellule en aluminium, avec des minima de  $C_a$  pour des basses fréquences  $f < 2 \text{ kHz}$ , accompagnées d'une dégradation pour les bandes  $[2-4] \text{ kHz}$  et  $[5-10] \text{ kHz}$ .

Dans un second cas, une amélioration globale est observée, sans dégradation des performances de la matrice de polyuréthane et avec de fort minima de  $C_a$  à  $-15 \text{ dB}$  autour de  $3 \text{ kHz}$  pour des panneaux avec une armature en acier ou en titane, avec respectivement 4 ou 2 cellules.

Il est donc possible d'améliorer les performances d'un polymère absorbant par l'ajout de la structure proposée, sans dégradation dans la bande de fréquence d'intérêt. Cependant, afin d'obtenir des minima de  $C_a$  à des fréquences inférieures à  $2 \text{ kHz}$ , des dégradations des performances aux plus hautes fréquences sont inévitables. Alternativement, des moyens complémentaires pourraient être couplés à l'armature afin de déplacer les premiers minima de  $C_a$  vers les basses fréquences, par l'ajout de trous cylindriques dans la structure par exemple.

# Conclusion

Dans cette thèse, une structure possédant des propriétés anti-auxétiques pour des applications de discrétion acoustique a été étudiée. Des méthodes d'homogénéisation ont été développées afin de caractériser numériquement cette structure, sous forme de volume infini ou de plaque d'épaisseur finie. De plus, une caractérisation expérimentale de la structure a été présentée afin de mettre en évidence ses propriétés anti-auxétiques. Finalement, des applications de furtivité sous-marine ont été explorées avec la conception de panneaux constitués d'un bloc absorbant de polymère renforcé par la structure.

Dans le premier chapitre, le contexte scientifique de la thèse a été présenté. Des solutions existantes employées pour contrecarrer la détection des navires sous-marins par des systèmes SONAR sont introduites. La stratégie de ces solutions se base sur l'ajout d'inclusions résonantes solides dans des polymères absorbants. A l'inverse, dans cette thèse une nouvelle stratégie pour la furtivité et la discrétion sous-marine, bio-inspirée, cherchant à reproduire les propriétés anti-auxétiques des cellules ciliées externes de l'audition des mammifères a été développée.

Dans le second chapitre, l'étude de la propagation dans des volumes infinis architecturés a été abordée. Des outils de modélisation ont été développés afin d'étudier la propagation des ondes dans la structure, sous forme de volume infini. Les modes de propagation des ondes ont été obtenus par la simulation éléments finis de la cellule élémentaire de la structure. Cependant, dans certains cas, la complexité du problème ne permet pas une résolution complète de celui-ci. Un modèle d'homogénéisation quasi-statique a été alors présenté, permettant d'assimiler la structure à un milieu homogène dit « effectif ». Le modèle d'homogénéisation quasi-statique permet de décrire les propriétés mécaniques effectives de la structure, le tenseur de rigidité  $\tilde{C}$  et la densité  $\rho$  effectifs, à partir des relations de dispersion des modes. Ces relations permettent classiquement d'obtenir les couples nombre d'onde-fréquence  $(k, f)$  des modes se propageant dans un matériau dont les propriétés mécaniques sont connues, et permettent ainsi la détermination des propriétés mécaniques effectives du matériau si les couples  $(k, f)$  peuvent être calculés, par simulation éléments finis. Les paramètres effectifs déterminés permettent de modéliser la propagation des trois premiers modes, longitudinal et transverses, de la structure avec un matériau effectif. Ces paramètres effectifs dépendent de la géométrie de la structure, et correspondent à des coefficients de Poisson allant de 0,4 à 0,95 pour les géométries choisies. Des propriétés anti-auxétiques sont donc observables pour les coefficients de Poisson calculés par la méthode quasi-statique, et ces valeurs peuvent être vérifiées avec la méthode d'homogénéisation statique utilisée en référence. De même, les paramètres effectifs sont vérifiés dans le cas d'un volume de dimensions finies par la comparaison numérique des modes propres de blocs architecturés, de  $25 \times 10$  cellules élémentaires et d'épaisseur infinie, par rapport à ceux d'un bloc effectif équivalent.

La propagation des ondes dans des volumes infinis a été abordée, mais ceux-ci sont difficiles à caractériser. L'étude de plaques est alors indiquée, ce qui a été fait dans le troisième chapitre. L'étude de plaque permet une caractérisation plus simple que pour des blocs épais, avec des essais en traction et l'identification des modes de flexion. L'étude de

la propagation des ondes dans une plaque architecturée a alors été abordée. Les propriétés effectives déterminées en volume ont été reprises dans le cas de la plaque mais il apparaît qu'une correction est nécessaire pour avoir une bonne modélisation de la propagation. En effet, une densité scalaire ne permet pas une bonne modélisation de tous les modes se propageant dans la plaque et il est nécessaire d'introduire une densité de forme matricielle. La validité des nouveaux paramètres effectifs avec une densité matricielle corrigée est restreinte aux basses fréquences et pour des angles d'incidence proches de celui pour lequel la correction a été faite. La modélisation des modes de propagation reste moins bonne dans le cas de la plaque, après correction des paramètres effectifs, que dans le cas des volumes infinis architecturés.

Une caractérisation de trois plaques architecturées a été faite par la suite, en statique avec un essai en traction, et en dynamique avec une identification des modes de flexion. Les coefficients de Poisson issus de l'essai en traction montrent l'existence de propriétés anti-auxétiques pour les trois plaques avec  $\nu = 0,51, 0,83$  et  $0,93$ . Ces coefficients de Poisson présentent un bon accord avec les coefficients de Poisson attendus par la méthode d'homogénéisation quasi-statique et présentent une plus grande différence avec ceux attendus par la méthode analytique, la structure ne respectant pas toutes les hypothèses de celle-ci. Il est à noter que la géométrie des plaques réalisées pour la caractérisation induit des contraintes tangentielles dans la zone de mesure et donc que les coefficients de Poisson ne sont pas mesurés par un essai en traction parfait. Cependant pour la mesure dynamique, les modes de flexion des plaques effectives identifiés numériquement et des plaques architecturées identifiés expérimentalement ne correspondent pas. Les propriétés effectives issues de l'homogénéisation en volume ne permettent pas de modéliser les modes de flexion des plaques architecturées et la correction introduite par la densité matricielle ne permet qu'un accord partiel. Les propriétés effectives semblent donc peu représentatives du comportement lorsque l'on s'éloigne trop du cas de la structure infiniment épaisse et une homogénéisation propre à la plaque semble nécessaire. Des pistes d'amélioration sont proposées en identifiant différemment les paramètres hors plan.

Finalement, des applications de la structure étudiée à la détection sous-marine sont présentées dans le chapitre 4. Afin de répondre aux objectifs de furtivité sous-marine fixés, la conception de panneaux anéchoïques a été abordée par l'intégration de la structure dans un panneau de polymère absorbant, présentant de bonnes performances en anéchoïsme. La conception de panneaux sous-marins répond aux objectifs suivants :

- une amélioration des performances en anéchoïsme à basse fréquence ( $f < 3 \text{ kHz}$ ),
- la structure ne doit pas dégrader les performances de la matrice à plus haute fréquence.

De plus, des contraintes de conception sont à prendre en compte, avec une densité maximum  $\rho = 1,6$  et une épaisseur inférieure à  $10 \text{ cm}$  pour les panneaux. L'ajout de l'armature a pour effet de modifier le comportement du panneau initial et d'améliorer ses performances en anéchoïsme pour certaines bandes de fréquences. Deux bandes de fréquences ressortent en particulier dans le domaine étudié, liées à deux mécanismes distincts. Une première bande apparaît en basses fréquences avec l'amplification du premier mode de compression de la matrice de polymère, ce mécanisme étant dû à la masse ajoutée par l'armature. Ce mécanisme peut être amplifié et déplacé vers les basses fréquences en considérant une armature plus épaisse, se rapprochant d'une masse ajoutée. Une seconde bande est présente à haute fréquence avec les modes de résonance de la structure amplifiant les pertes dans le panneau. Ces modes sont quant à eux plus importants pour des structures fines, fortement déformables.

Enfin, il a été montré que pour l'intégration de structures métalliques à un panneau de polymère, de nettes améliorations des performances en anéchoïsme du panneau initial

sont visibles en basses fréquences et en hautes fréquences sans dégradation en dehors de ces bandes.

Au terme de ces recherches, deux grands axes se dégagent pour la suite des travaux.

Le premier axe de recherche concerne l'amélioration du modèle d'homogénéisation de plaque pour la structure qui, bien que présentant une modélisation correcte de la propagation avec les propriétés effectives déterminées, est limité par la fréquence et l'angle d'incidence considéré pour la procédure de correction. L'étude de plaques a cependant permis de mettre en évidence expérimentalement l'existence des coefficients de Poisson anti-auxétiques recherchés. De plus, pour les applications d'acoustique sous-marine, la structure a vocation à être utilisée sous forme de blocs et non de plaques, ce qui réduit l'importance des limitations mises en évidence.

Le second axe de recherche concerne la conception de panneaux anéchoïques. Même si des panneaux présentant de bonnes performances en anéchoïsme ont pu être obtenus, la fréquence des premiers pics d'anéchoïsme reste à la limite supérieure du domaine ciblé.

Une première stratégie consiste à ajouter de nouveaux mécanismes d'absorption complémentaires pour améliorer les performances en basses fréquences des panneaux. L'inclusion de trous dans la structure est une possibilité, permettant aux différentes cavités du panneau, séparées par la structure, de communiquer et d'amplifier l'effet de la résonance des modes. De plus, l'ajout de trous permet aussi une modification de la densité et de la raideur des bras de la structure, ce qui influe sur ses modes.

Dans ce manuscrit, le cas de panneaux à base de structures architecturées anti-auxétiques a été étudié en vue d'évaluer leurs performances pour l'anéchoïsme. Une autre stratégie serait d'évaluer les propriétés de panneaux comportant des structures hiérarchiques anti-auxétiques, en particulier l'évolution de la transmission en basses fréquences. Cette étude, inspirée de dispositifs bio-mimétiques, est le cœur de l'ERC PO-SEIDON [114], portée par M. Miniaci et acceptée le 10 Janvier 2022.





# Annexe A

## Matériaux utilisés

Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans la thèse sont présentées dans le tableau A.1 avec : le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , la densité  $\rho$  et les vitesses longitudinale et transverse  $V_L$  et  $V_T$ . Des pertes sont considérées dans le polyuréthane avec l'introduction d'une partie imaginaire au module d'Young  $E''$  et au coefficient de Poisson  $\nu''$ .

TABLE A.1 – Propriétés mécaniques des matériaux utilisés

Matériaux	$E(GPa)$	$\nu$	$\rho(kg.m^{-3})$	$E''(GPa)$	$\nu''$	$V_L(m.s^{-1})$	$V_T(m.s^{-1})$
Plexiglas	2,285	0,37	1180	0	0	1850	840
PLA	2,2	0,35	1040	0	0	1842	885
Aluminium	74	0,344	2780	0	0	6430	3150
Acier	210	0,285	7800	0	0	5900	3236
Polyuréthane	$1,465.10^{-2}$	0,495	1000	$1,465.10^{-3}$	$2,475.10^{-2}$	703	69



## Annexe B

# Modèle de propagation dans une plaque orthorhombique avec densité matricielle

L'équation polynomiale de degré 6 (3.49) permet d'obtenir les solutions  $p_q$  des modes de Lamb pour une plaque orthorhombique à densité matricielle.

$$A_1 p^6 + A_2 p^4 + A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0, \quad (\text{B.1})$$

avec les coefficients  $A_i$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{33}C_{44}C_{55} - C_{33}C_{45}^2, \\ A_2 &= 2C_{13}C_{45}^2 - C_{13}^2C_{44} - C_{36}^2C_{55} + C_{11}C_{33}C_{44} + 2C_{13}C_{36}C_{45} - 2C_{16}C_{33}C_{45} \\ &\quad - 2C_{13}C_{44}C_{55} + C_{33}C_{55}C_{66} - C_{33}C_{44}c^2\rho_{xx} + 2C_{33}C_{45}\rho_{xy}c^2 + C_{45}^2\rho_{zz}c^2 \\ &\quad - C_{33}C_{55}\rho_{yy}c^2 - C_{44}C_{55}\rho_{zz}c^2, \\ A_3 &= 2(C_{13}C_{44}\rho_{xz} - C_{45}^2\rho_{xz} - C_{13}C_{45}\rho_{yz} - C_{36}C_{45}\rho_{xz} + C_{36}C_{55}\rho_{yz} \\ &\quad + C_{44}C_{55}\rho_{xz})c^2, \\ A_4 &= 2C_{13}C_{16}C_{36} - C_{16}^2C_{33} - C_{11}C_{45}^2 - C_{13}^2C_{66} - C_{11}C_{36}^2 + 2C_{13}C_{16}C_{45} \\ &\quad - 2C_{11}C_{36}C_{45} + 2C_{16}C_{36}C_{55} + C_{11}C_{33}C_{66} + C_{11}C_{44}C_{55} - 2C_{13}C_{55}C_{66} \\ &\quad + C_{13}^2\rho_{yy}c^2 + C_{36}^2\rho_{xx}c^2 + C_{45}^2\rho_{xx}c^2 - C_{11}C_{33}\rho_{yy}c^2 - 2C_{13}C_{36}\rho_{xy}c^2 \\ &\quad + 2C_{16}C_{33}\rho_{xy}c^2 - C_{11}C_{44}\rho_{zz}c^2 - 2C_{13}C_{45}\rho_{xy}c^2 + 2C_{16}C_{45}\rho_{zz}c^2 \\ &\quad + 2C_{13}C_{55}\rho_{yy}c^2 + 2C_{36}C_{45}\rho_{xx}c^2 - 2C_{36}C_{55}\rho_{xy}c^2 - C_{33}C_{66}\rho_{xx}c^2 \\ &\quad - C_{44}C_{55}\rho_{xx}c^2 - C_{55}C_{66}\rho_{zz}c^2 \\ &\quad - C_{33}\rho_{xy}^2c^4 - C_{44}\rho_{xz}^2c^4 - C_{55}\rho_{yz}^2c^4 + C_{33}\rho_{xx}\rho_{yy}c^4 + C_{44}\rho_{xx}\rho_{zz}c^4, \\ A_5 &= C_{16}C_{45}\rho_{xz} + C_{16}C_{55}\rho_{yz} - C_{13}C_{66}\rho_{xz} - C_{55}C_{66}\rho_{xz} - C_{11}C_{36}\rho_{yz} \\ &\quad + C_{16}C_{36}\rho_{xz} - C_{11}C_{45}\rho_{yz} + C_{13}\rho_{xz}\rho_{yy}c^2 - 2(C_{13}C_{16}\rho_{yz}c^2 \\ &\quad - C_{13}\rho_{xy}\rho_{yz}c^2 + C_{36}\rho_{xx}\rho_{yz}c^2 - C_{36}\rho_{xy}\rho_{xz}c^2 + C_{45}\rho_{xx}\rho_{yz}c^2 \\ &\quad - C_{45}\rho_{xy}\rho_{xz}c^2 - C_{55}\rho_{xy}\rho_{yz}c^2 + C_{55}\rho_{xz}\rho_{yy}c^2), \\ A_6 &= C_{11}C_{55}C_{66} - C_{16}^2C_{55} - C_{55}\rho_{xy}^2c^4 - C_{66}\rho_{xz}^2c^4 \\ &\quad + C_{16}^2\rho_{zz}c^2 - C_{11}C_{55}\rho_{yy}c^2 + 2C_{16}C_{55}\rho_{xy}c^2 - C_{11}C_{66}\rho_{zz}c^2 \\ &\quad - C_{55}C_{66}\rho_{xx}c^2 - C_{11}\rho_{yz}^2c^4 + C_{11}\rho_{yy}\rho_{zz}c^4 - 2C_{16}\rho_{xy}\rho_{zz}c^4 \\ &\quad + 2C_{16}\rho_{xz}\rho_{yz}c^4 + C_{55}\rho_{xx}\rho_{yy}c^4 + C_{66}\rho_{xx}\rho_{zz}c^4 + \rho_{xx}\rho_{yz}^2c^6 \\ &\quad + \rho_{xz}^2\rho_{yy}c^6 + \rho_{xy}^2\rho_{zz}c^6 - \rho_{xx}\rho_{yy}\rho_{zz}c^6 - 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}c^6. \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] J. A. TOLOMEO, C. R. STEELE et C. HOLLEY : Mechanical properties of the lateral cortex of mammalian auditory outer hair cells. *Biophysical Journal*, 71:421–429, 1996.
- [2] F. DOS REIS et J.F. GANGHOFFER : Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization. *Comp. mat. Sc.*, 51:314–321, 2012.
- [3] *ATILA, Finite-Element Software Package for the analysis of 2D & 3D structures based on smart materials*. 2010.
- [4] *COMSOL Multiphysics® v. 5.5. www.comsol.com. COMSOL AB, Stockholm, Sweden*.
- [5] P. MÉRESSE : *Matériaux absorbants à structure périodique et inclusions résonantes pour l'acoustique sous-marine*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1, France, 2015.
- [6] H. MEYER : Sound absorption and sound absorbers in water. Rapport technique, U.S Bureau of Ships, 1950.
- [7] A.-C. HLADKY-HENNION et J.-N. DECARPIGNY : Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a doubly periodic structure using the finite element method 2006 : Application to alberich anechoic coatings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 90(6):3356, 3367, 1991.
- [8] G. GAUNAURD : One-dimensional model for acoustic absorption a viscoelastic medium containing short cylindrical cavities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 62(2):298–307, 1977.
- [9] R. LANE : Absorption mechanisms for waterborne sound in alberich anechoic layers. *Ultrasonics*, 19, 1981.
- [10] S. M. IVANSSON : Sound absorption by viscoelastic coating with periodically distributed cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(6):3558–3567, 2006.
- [11] S. M. IVANSSON : Numerical design of alberich anechoic coatings with superellipsoidal cavities of mixed sizes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(4):1974–1984, 2008.
- [12] S. M. IVANSSON : Anechoic coatings obtained from two- and three-dimensional monopole resonance diffraction gratings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4):2622–2637, 2012.
- [13] M. K. HINDERS, B. A. RHODES et T. M. FANG : Particle-loaded composites for acoustic anechoic coatings. *Journal of Sound and Vibration*, 185(2):219–246, 1995.

- [14] Y. FENG, J. QIAO et L. LI : Acoustic behavior of composites with gradient impedance. *Materials and Design*, 193:108870, 2020.
- [15] C. J. NAIFY, T. P. MARTIN, C. N. LAYMAN, M. NICHOLAS, A. L. THANGAWNG, D. C. CALVO et G. J. ORRIS : Underwater acoustic omnidirectional absorber. *Applied Physics Letters*, 104(7):073505, 2014.
- [16] G. LEPERT, C. ARISTÉGUI, O. PONCELET, T. BRUNET, C. AUDOLY et P. PARNEIX. : Determination of the effective mechanical properties of inclusionary materials using bulk elastic waves. *Proceedings of 12th Anglo-French Physical Acoustics Conference (AFPAC2013)*, 16-18 January, 2013, Fréjus, France.
- [17] T. BRUNET, A. MERLIN, B. MASCARO, K. ZIMNY, J. LENG, O. PONCELET, C. ARISTÉGUI et O. MONDAIN-MONVAL. : Soft 3d acoustic metamaterial with negative index. *Nature Materials*, 14(4):384–388, 2014.
- [18] S. BERETTI. : Réponse acoustique d'élastomères micro-inclusionnaires soumis à la pression d'immersion. *Proceedings of 10ème Congrès Français d'Acoustique*, 12-16 April:4694–4704, 2010, Lyon, France.
- [19] G. S. SHARMA, A. SKVORTSOV, I. MACGILLIVRAY et N. KESSISSOGLU : Acoustic performance of periodic steel cylinders embedded in a viscoelastic medium. *Journal of Sound and Vibration*, 443:652–665, 2019.
- [20] Y. GU, H. ZHONG, B. BAO, Q. WANG et J. WU : Experimental investigation of underwater locally multi-resonant metamaterials under high hydrostatic pressure for low frequency sound absorption. *Applied Acoustics*, 172:107605, 2021.
- [21] H. ZHAO, Y. LIU, J. WEN, D. YU et X. WEN : Tri-component phononic crystals for underwater anechoic coatings. *Physics Letters A*, 367(3):224–232, 2007.
- [22] K. SHI, G. JIN, R. LIU, T. YE et Y. XUE : Underwater sound absorption performance of acoustic metamaterials with multilayered locally resonant scatterers. *Results in Physics*, 12:132–142, 2019.
- [23] H. MENG, J. WEN, H. ZHAO et X. WEN : Optimization of locally resonant acoustic metamaterials on underwater sound absorption characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 331(20):4406–4416, 2012.
- [24] G. S. SHARMA, A. SKVORTSOV, I. MACGILLIVRAY et N. KESSISSOGLU : Sound absorption by rubber coatings with periodic voids and hard inclusions. *Applied Acoustics*, 143:200–210, 2019.
- [25] G. JIN, K. SHI, T. YE, J. ZHOU et Y. YIN : Sound absorption behaviors of metamaterials with periodic multi-resonators and voids in water. *Applied Acoustics*, 166:107351, 2020.
- [26] L. ROUX : *Acoustic Metamaterials for Underwater Applications : Homogenisation Theory, Design Optimisation and Experimental Characterisation*. Thèse de doctorat, Université de Lille1, France, 2021.
- [27] V. M. SHALAEV : Optical negative-index metamaterials. *Nature Photonics*, 1:41–48, 2007.

- [28] H. CHEN, C. CHAN et P. SHENG : Transformation optics and metamaterials. *Nat. Mater.*, 9:387–396, 2010.
- [29] M.-H LU, L. FENG et Y.-F. CHEN : Phononic crystals and acoustic metamaterials. *Materials Today*, 12(12):34–42, 2009.
- [30] M.-H. LU, L. FENG et Y.-F. CHEN : Phononic crystals and acoustic metamaterials. *Materials today*, 12(12):34–42, 2009.
- [31] C. CROËNNE, E. LEE, H. HU et J. PAGE : Band gaps in phononic crystals : Generation mechanisms and interaction effects. *AIP Advances*, 1(4):041401, 2011.
- [32] H. M. A. KOLKEN et A. A. ZADPOOR : Auxetic mechanical metamaterials. *RSC adv.*, 7:5111, 2017.
- [33] F. S. L. BOBBERT, K. LIETAERT, A. A. EFTEKHARI, B. POURAN, S. M. AHMADI, H. WEINANS et A. A. ZADPOOR : Additively manufactured metallic porous biomaterials based on minimal surfaces : A unique combination of topological, mechanical, and mass transport properties. *Acta Biomater.*, 53:572–584, 2017.
- [34] C. P. de JONGE, H. M. A. KOLKEN et A. A. ZADPOOR : Non-auxetic mechanical metamaterials. *Materials*, 12(4):635, 2019.
- [35] L. YANG, O. HARRYSSON, D. CORMIER, H. WEST, H. GONG et B. STUCKER : Additive manufacturing of metal cellular structures : Design and fabrication. *JOM*, 67(3):608–615, 2015.
- [36] S. D. POISSON : *Traité de Mécanique 2*. Société Belge de librairie, 1811.
- [37] G. N. GREAVES, A. L. GREER, R. S. LAKES et T. ROUXEL : Poisson’s ratio and modern materials. *Nature materials*, 10:823–837, 2011.
- [38] J.-P. POIRIER : *Introduction to the Physics of the Earth’s Interior*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [39] R. S. LAKES : Foam structures with a negative poisson’s ratio. *Nat. Mater.*, 235:1038–1040, 1987.
- [40] F. BAUMGART : Stiffness—an unknown world of mechanical science? *Injury*, 31:14–84, 2000.
- [41] J. PELLEG : *Mechanical Properties of Materials*. Springer, Dordrecht, 2013.
- [42] S. BURNS : Negative poisson’s ratio materials. *Science*, 238:551, 1987.
- [43] S. BURNS : Negative poisson’s ratio materials : response. *Science*, 238:551, 1987.
- [44] N. CHAN et K. EVANS : Fabrication methods for auxetic foams. *J. Mater. Sci.*, 32(22):5945–5953, 1997.
- [45] F. QUADRINI, D. BELLISARIO, L. CIAMPOLI, G. COSTANZA et L. SANTO : Auxetic epoxy foams produced by solid state foaming. *Journal of Cellular Plastics*, 52(4):441–454, 2016.
- [46] N. CHAN et K. EVANS : The mechanical properties of conventional and auxetic foams. part i : compression and tension. *J. Cell. Plast.*, 35(2):130–165, 1999.

- [47] N. CHAN et K. EVANS : The mechanical properties of conventional and auxetic foams. part ii : shear. *J. Cell. Plast.*, 35(2):166–183, 1999.
- [48] E. FRIIS, R. LAKES et J. PARK : Negative poisson’s ratio polymeric and metallic foams. *J. Mater. Sci.*, 23(12):4406–4414, 1988.
- [49] J. CHOI et R. LAKES : Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative poisson’s ratio. *Int. J. Mech. Sci.*, 37(1):51–59, 1995.
- [50] R. LAKES et K. ELMS : Indentability of conventional and negative poisson’s ratio foams. *J. Compos. Mater.*, 27(12):1193–1202, 1993.
- [51] H. MITSCHKE, J. SCHWERDTFEGER, F. SCHURY, M. STINGL, C. KÖRNER et R. F. SINGER : Finding auxetic frameworks in periodic tessellations. *Adv. Mater.*, 23: 2669–2674, 2011.
- [52] J. WHITTY, F. NAZARE et A. ALDERSON : Modelling the effects of density variations on the in-plane poisson’s ratios and young’s moduli of periodic conventional and re-entrant honeycombs – part 1 : Rib thickness variations. *Cell. Polym.*, 21(2):69–98, 2002.
- [53] D. YANG, S. LEE et F. HUANG : Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative poisson’s ratio using the finite element method. *Elem. Anal. Des.*, 39(3):187–205, 2003.
- [54] U. D. LARSEN, O. SIGNUND et S. BOUWSTA : Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson’s ratio. *Microelectromech. Syst.*, 6(2):99–106, 1997.
- [55] N. GASPAR, X. REN, C. W. SMITH, J. GRIMA et K. E. EVANS : Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Mater.*, 53(8):2439–2445, 2005.
- [56] J. N. GRIMA, R. GATT, A. ALDERSON et K. EVANS : On the potential of connected stars as auxetic systems. *Mol. Simul.*, 31(13):925–935, 2005.
- [57] L. YANG, O. HARRYSSON, H. WEST et D. CORMIER : Compressive properties of ti-6al-4v auxetic mesh structures made by electron beam melting. *Acta Mater.*, 60(8):3370–3379, 2012.
- [58] T. BÜCKMANN, N. STENGER, M. KADIC, J. KASCHKE, A. FRÖLICH, T. KENNERKNECHT, C. EBERL, M. THIEL et M. WEGENER : Tailored 3d mechanical metamaterials made by dip-in direct-laser-writing optical lithography. *Adv. Mater.*, 24(20):2710–2714, 2012.
- [59] J. N. GRIMA, R. GATT et P. S. FARRUGIA : On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures. *Phys. Status Solidi B*, 245(3):511–520, 2008.
- [60] R. LAKES : Deformation mechanisms in negative poisson’s ratio materials : structural aspects. *J. Mater. Sci.*, 26(9):2287–2292, 1991.
- [61] A. ALDERSON, K. ALDERSON, D. ATTARD, K. EVANS, R. GATT, J. GRIMA, W. MILLER, N. RAVIRALA, C. SMITH et K. ZIED : Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and antichiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Compos. Sci. Technol.*, 70(7):1042–1048, 2010.



- [62] D. PRALL et R. LAKES : Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of  $-1$ . *Int. J. Mech. Sci.*, 39(3):305–314, 1997.
- [63] J. DIRRENBERGER, S. FOREST, D. JEULIN et C. COLIN : Homogenization of periodic auxetic materials. *Procedia Eng.*, 10:1847–1852, 2011.
- [64] G. W. MILTON et A. V. CHERKAEV : Which elasticity tensors are realizable? *J. Eng. Mater. Technol.*, 117:483–493, 1995.
- [65] M. KADIC, T. BÜCKMANN, N. STENGER, M. THIEL et M. WEGENER : On the practicability of pentamode mechanical metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, 100:191901, 2012.
- [66] M. KADIC, T. BÜCKMANN, R. SCHITTNY, P. GUMBSCH et M. WEGENER : Pentamode metamaterials with independently tailored bulk modulus and mass density. *Phys. Rev. Appl.*, 2:054007, 2014.
- [67] L.R. MEZA, S. DAS et J.R. GREER : Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices. *Science*, 345:1322–1326, 2014.
- [68] X. ZHENG, H. LEE, T. H. WEISGRABER, M. SHUSTEFF, J. DEOTTE, E. B. DUOSS, J. D. KUNTZ, M. M. BIENER, Q. GE et J. A. JACKSON : Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials. *Science*, 344:1373–1377, 2014.
- [69] J. N. GRIMA, D. ATTARD, R. CARUANA-GAUCI et R. GATT : Negative linear compressibility of hexagonal honeycombs and related systems. *Scr. Mater.*, 65:565–568, 2011.
- [70] J. N. GRIMA, R. CARUANA-GAUCI, D. ATTARD et R. GATT : Three-dimensional cellular structures with negative poisson's ratio and negative compressibility properties. *Proc. R. Soc. A.*, 468:3121–3138, 2012.
- [71] M. ASSIDI, F. DOS REIS et J.-F. GANGHOFFER : Equivalent mechanical properties of biological membranes from lattice homogenization. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4(8):1833–1845, 2011.
- [72] N. KARATHANASOPOULOS, H. REDA et J.-F. GANGHOFFER : Designing two-dimensional metamaterials of controlled static and dynamic properties. *Computational Materials Science*, 138:323–332, 2017.
- [73] B. LING, K. WEI, Z. WANG, X. YANG, Z. QU et D. FANG : Experimentally program large magnitude of poisson's ratio in additively manufactured mechanical metamaterials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 173:105466, 2020.
- [74] H. M. A. KOLKEN, C. P. de JONGE, T. van der SLOTEN, A. FONTECHA GARCIA, B. POURAN, K. WILLEMSSEN, H. WEINANS et A. A. ZADPOOR : Additively manufactured space-filling meta-implants. *Acta Biomaterialia*, 125:345–357, 2021.
- [75] A. WRIGHT : Dimensions of the cochlear stereocilia in man and the guinea pig. *Hearing Research*, 13:89–98, 1984.
- [76] H. F. YE, M. TAO et W. Z. ZHANG : Modeling and sound insulation performance analysis of two honeycomb-hole coatings. *Journal of physics. Conference series*, 1016(1):12001, 2018.

- [77] D. CAILLERIE, A. MOURAD et A. RAOULT : Discrete homogenization in graphene sheet modeling. *Journal of Elasticity*, 84:33–68, 2006.
- [78] F. DOS REIS : *Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques, Applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2010.
- [79] F. DOS REIS et J.-F. GANGHOFFER : Discrete homogenization of architected materials. *Technische Mechanik*, 30:85–109, 2010.
- [80] S. SAEB, P. STEINMANN et A. JAVILI : Aspects of computational homogenization at finite deformations : a unifying review from reuss’ to voigt’s bound. *Applied Mechanics Reviews*, 68(5), 2016.
- [81] W. VOIGT : Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen der Physik*, 274(12):573–587, 1889.
- [82] A. REUSS : Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle . *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9(1):49–58, 1929.
- [83] Z. HASHIN et S. SHTRIKMAN : A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140, 1963.
- [84] Z. HASHIN et S. SHTRIKMAN : A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 33(10):3125–3131, 1962.
- [85] G. W. MILTON et R. V. KOHN : Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(6):597–629, 1988.
- [86] J. D. ESHELBY et R. E. PEIERLS : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396, 1957.
- [87] P. KANOUTÉ, D. P. BOSO, J. L. CHABOCHE et B. A. SCHREFLER : Multiscale methods for composites : A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(1):31S–75, 2009.
- [88] T. MORI et K. TANAKA : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- [89] Y. BENVENISTE : A new approach to the application of mori-tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2):147–157, 1987.
- [90] H. A. LUO et G. J. WENG : On eshelby’s inclusion problem in a three-phase spherically concentric solid, and a modification of mori-tanaka’s method. *Mechanics of Materials*, 6(4):347–361, 1987.
- [91] R. HILL : A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222, 1965.
- [92] B. BUDIANSKY : On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):223–227, 1965.

- [93] L. J. WALPOLE : On the overall elastic moduli of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(4):235–251, 1969.
- [94] J. R. WILLIS : Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(3):185–202, 1977.
- [95] N. LAWS : On the thermostatics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21(1):9–17, 1973.
- [96] A. N. NORRIS : A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials*, 4(1):1–16, 1985.
- [97] R. MCLAUGHLIN : A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 15(4):237–244, 1977.
- [98] M. G. D. GEERS, V. G. KOUZNETSOVA et W. BREKELMANS : Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(7):2175–2182, 2010.
- [99] J. RENARD et M. F. MARMONIER : Etude de l’initiation de l’endommagement dans la matrice d’un matériau composite par une méthode d’homogénéisation. *La Recherche aérospatiale*, (6):43–51, 1987.
- [100] J. M. GUEDES et N. KIKUCHI : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83(2):143–198, 1990.
- [101] H. MOULINEC et P. SUQUET : A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157(1-2):69–94, 1998.
- [102] C. MIEHE, J. SCHRÖDER et J. SCHOTTE : Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(3):387–418, 1999.
- [103] F. FEYEL et J.-L. CHABOCHE : Fe2 multiscale approach for modelling the elasto-viscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3):309–330, 2000.
- [104] V. KOUZNETSOVA, W. A. M. BREKELMANS et F. P. T. BAAIJENS : An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational mechanics*, 27(1):37–48, 2001.
- [105] V. KOUZNETSOVA, M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS : Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International journal for numerical methods in engineering*, 54(8):1235–1260, 2002.
- [106] V. G. KOUZNETSOVA, M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS : Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51):5525–5550, 2004.

- [107] V. G. KOUZNETSOVA, M. GEERS et W. A. M. BREKELMANS : Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4), 2004.
- [108] L. KACZMARCZYK, C. J. PEARCE et N. BIĆANIĆ : Scale transition and enforcement of rve boundary conditions in second-order computational homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(3):506–522, 2008.
- [109] J. DIRRENBERGER : *Propriétés effectives de matériaux architecturés*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Français, 2012.
- [110] E. DIEULESAINT et D. ROYER : *Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal*. Masson et cie, 1974.
- [111] A. BALÉ : *Homogénéisation et caractérisation de matériaux multiphasiques piézo-électriques (composites de connectivité 1-3 et céramiques texturées) pour transducteurs ultrasonores sans plomb*. Thèse de doctorat, Université de Tours, France, 2019.
- [112] A. H. NAYFEH et D. E. CHIMENTI : Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *Journal of applied mechanics*, 56:881, 1989.
- [113] R. ZHU, X. N. LIU, G. L. HUANG, H.-H. HUANG et C. T. SUN : Microstructural design and experimental validation of elastic metamaterial plates with anisotropic mass density. *Physical Review B*, 86(14):144307, 2012.
- [114] M. MINIACI : Erc poseidon, 2021.

## Résumé

Dans le cadre de l'acoustique sous-marine, la détection de bâtiments est aujourd'hui un sujet largement étudié. Les revêtements de coques permettent d'échapper à cette détection mais il est nécessaire d'améliorer leurs performances pour suivre le développement des systèmes SONAR, en particulier pour les basses fréquences.

Les métamatériaux sont utilisés dans ce but pour leurs propriétés de filtrage fréquentiel et de résonance locale. Cependant une autre stratégie consiste à s'intéresser aux métamatériaux architecturés permettant l'obtention de propriétés mécaniques hors du commun, par exemple un coefficient de Poisson anti-auxétique, c'est-à-dire supérieur à 0,5.

Dans cette thèse, une structure permettant d'obtenir de tels coefficients de Poisson est étudiée, dans le cas de volumes infinis puis adaptée au cas de plaques d'épaisseur finie, par des outils numériques basés sur la simulation éléments finis. Une méthode d'homogénéisation dans la limite des grandes longueurs d'onde est développée à partir des outils numériques en exploitant les courbes de dispersion et est utilisée pour obtenir les propriétés effectives de la structure aussi bien en volume qu'en plaque. Dans le cas de la plaque, le modèle est adapté afin de prendre en compte une densité matricielle. La structure en plaque est ensuite caractérisée en statique par des essais en traction et en dynamique par l'identification des modes de flexion. Ces tests permettent de mettre en évidence les limites de validité du modèle d'homogénéisation. Enfin, des revêtements sont conçus à partir de la structure architecturée pour répondre aux objectifs de performances fixés, notamment en basses fréquences, pour la furtivité sous-marine. Plusieurs panneaux sont alors proposés.

## Abstract

In the framework of underwater acoustics, detection of submerged vehicles is widely studied. Hull coatings are used to avoid such detection. Due to the enhancement of SONAR system low frequency performance, hull coatings must be improved.

Acoustic metamaterials can be useful for this purpose thanks to their stop-band effect and local resonances. Alternatively, other types of metamaterials can be explored. A novel approach consists in exploring architected metamaterials allowing outstanding mechanical properties, such as anti-auxetic Poisson's ratios greater than 0.5.

In this thesis, a structure exhibiting anti-auxetic Poisson's ratios is studied using the finite element method. The study is conducted on the one hand for infinite volumes and on the other hand for finite thickness plates. An homogenization method is developed to obtain the effective properties of the structure in the low frequency domain using numerical tools based on the structure's dispersion curves. The effective properties are determined for both infinite volumes and finite plates. Those determined in the case of plates are adapted in order to take into account an anisotropic density. The plates are then characterized experimentally using two methods. First a static characterization is performed through a tensile test. Then a dynamic characterization through an identification of the flexural modes is conducted. Those measurements allow to define limits of validity for the homogenization model. Finally, hull coatings based on the architected structure are designed in order to reach the performance objectives for underwater stealth, mainly in low frequency. Several panels are then proposed.

