



**HAL**  
open science

# Diffusion multiple dans un milieu poreux en présence d'obstacles. : Application à la caractérisation de certains matériaux composites

Adjovi Josette Kuagbenu

## ► To cite this version:

Adjovi Josette Kuagbenu. Diffusion multiple dans un milieu poreux en présence d'obstacles. : Application à la caractérisation de certains matériaux composites. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Normandie Université, 2022. Français. NNT : 2022NORMMLH05 . tel-03893428

**HAL Id: tel-03893428**

**<https://theses.hal.science/tel-03893428>**

Submitted on 11 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **MECANIQUE DES FLUIDES, ENERGETIQUE, THERMIQUE, COMBUSTION,  
ACOUSTIQUE**

Préparée au sein de l'Université Le Havre Normandie

**Diffusion multiple dans un milieu poreux en présence d'obstacles.  
Application à la caractérisation de certains matériaux composites**

Présentée et soutenue par  
**ADJOVI JOSETTE KUAGBENU**

**Thèse soutenue le 10/06/2022  
devant le jury composé de**

|                            |   |                       |
|----------------------------|---|-----------------------|
| M. FAROUK BENMEDDOUR       | MAÎTRE DE CONFERENCES (HDR),<br>UNIVERSITE POLYTECHNIQUE HAUTS DE<br>FRANCE | Rapporteur du jury    |
| M. ZINE EL ABIDDINE FELLAH | CHARGE DE RECHERCHE (HDR), AIX-<br>MARSEILLE UNIVERSITE                     | Rapporteur du jury    |
| M. CLAUDE DEPOLLIER        | PROFESSEUR DES UNIVERSITES,<br>UNIVERSITE LE MANS                           | Membre du jury        |
| M. PIERRE MARECHAL         | MAÎTRE DE CONFERENCES (HDR), Université<br>Le Havre Normandie               | Membre du jury        |
| M. FRANCOIS MARIN          | PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université<br>Le Havre Normandie                | Président du jury     |
| M. HERVÉ FRANKLIN          | PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université<br>Le Havre Normandie                | Directeur de thèse    |
| M. AMAH SENA D'ALMEIDA     | PROFESSEUR, UNIVERSITE DE LOME (TOGO)                                       | Co-directeur de thèse |

**Thèse dirigée par HERVÉ FRANKLIN (Laboratoire Ondes et Milieux Complexes) et  
AMAH SENA D'ALMEIDA (Laboratoire de mathématiques et applications)**



LABORATOIRE ONDES  
et MILIEUX COMPLEXES



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction générale</b>  | <b>4</b>  |
| <b>1 Théorie de Biot</b>  | <b>8</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 8         |
| 1.2 Rappels de mécanique des milieux poreux . . . . .               | 11        |
| 1.2.1 Energies cinétique, élastique et de dissipation . . . . .     | 12        |
| 1.2.2 Loi de comportement . . . . .                                 | 14        |
| 1.2.3 Equations du mouvement . . . . .                              | 15        |
| 1.3 Rappels d'acoustique des milieux poreux . . . . .               | 16        |
| 1.3.1 Solutions des équations du mouvement . . . . .                | 16        |
| <b>2 Diffusion d'ondes poroélastiques par un obstacle sphérique</b> | <b>22</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .  | 22        |
| 2.2 Diffusion par une sphère fluide . . . . .                       | 24        |
| 2.2.1 Déplacement et pression dans la cavité . . . . .              | 24        |
| 2.2.2 Déplacement, contraintes et pression dans le MPE . . . . .    | 24        |
| 2.2.3 Potentiels dans le MPE et dans la cavité . . . . .            | 27        |
| 2.2.4 Conditions de continuité entre le MPE et la cavité . . . . .  | 28        |
| 2.2.5 Limite de Rayleigh . . . . .                                  | 31        |
| 2.3 Diffusion par une sphère solide élastique (SE) . . . . .        | 34        |
| 2.3.1 Potentiels . . . . .  | 35        |
| 2.3.2 Conditions de continuité à l'interface MPE/SE . . . . .       | 35        |
| 2.3.3 Limite de Rayleigh . . . . .                                  | 38        |
| 2.4 Étude numérique des coefficients de diffusion . . . . .         | 40        |
| 2.4.1 Cas de la sphère fluide . . . . .                             | 42        |
| 2.4.2 Cas de la sphère élastique . . . . .                          | 43        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Théorie de la diffusion multiple en présence d'obstacles sphériques aléatoirement répartis</b> | <b>47</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 47        |
| 3.2      | Les fonctions de forme de la diffusion par une sphère . . . . .                                   | 51        |
| 3.2.1    | Cas d'une onde incidente longitudinale . . . . .  | 52        |
| 3.2.2    | Cas d'une onde incidente transversale . . . . .   | 52        |
| 3.3      | Équations de la diffusion multiple . . . . .  | 53        |
| 3.3.1    | Opérations sur les coefficients de Gaunt . . . . .  | 55        |
| 3.3.2    | Calcul des premiers coefficients $K_{nm}$ et $K_{nm}^{\alpha\beta}$ . . . . .                     | 56        |
| 3.3.3    | Formule réduite du nombre d'onde effectif en basse fréquence . . . . .                            | 56        |
| <b>4</b> | <b>Diffusion multiple dans une matrice poroélastique contenant des sphères élastiques</b>         | <b>61</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 61        |
| 4.2      | Diffusion multiple dans un MPE . . . . .  | 62        |
| 4.2.1    | Formules pour le nombre d'onde effectif rapide . . . . .  | 62        |
| 4.2.2    | Formules pour le nombre d'onde effectif lent . . . . .  | 63        |
| 4.3      | Étude numérique des nombres d'ondes effectifs longitudinaux . . . . .                             | 64        |
| 4.3.1    | Caractéristiques acoustiques du QF20 en l'absence de sphères . . . . .                            | 64        |
| 4.3.2    | Distribution de sphères en aluminium dans le QF20 . . . . .                                       | 65        |
| 4.3.3    | Distribution de sphères en epoxy dans le MPE . . . . .  | 66        |
| 4.4      | Formules explicites en très basse fréquence des nombres d'onde effectifs . . . . .                | 67        |
| 4.5      | Module et masse volumique effectifs . . . . .   | 71        |
| 4.6      | Le coefficient de diffusion du MPE effectif . . . . .   | 72        |
| 4.7      | Conclusion . . . . .  | 74        |
| <b>5</b> | <b>Étude paramétrique des nombres d'ondes effectifs rapide et lent</b>                            | <b>77</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .  | 77        |
| 5.2      | Comparaison des nombres d'ondes dans le sable de Stoll et dans le QF20 . . . . .                  | 78        |
| 5.3      | Effet de la présence de diffuseurs sur les nombres d'onde . . . . .                               | 79        |
| 5.3.1    | Cas des cavités . . . . .   | 79        |
| 5.3.2    | Cas des sphères en epoxy . . . . .  | 82        |
| 5.4      | Module et masse volumique effectif . . . . .  | 85        |
| 5.5      | Coefficient de diffusion effectif . . . . .   | 87        |

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| 5.6 Conclusion . . . . .   | 87        |
| <b>Conclusion générale</b> | <b>89</b> |

# Introduction générale

Les milieux hétérogènes aléatoires constituent de longue date un sujet de grand intérêt. L'étude de tels milieux - qui a pour objectif l'explication des comportements sous certaines sollicitations - se situe au carrefour de plusieurs disciplines allant de la science des matériaux, de l'ingénierie, de la physique, aux mathématiques appliquées. La sollicitation la plus courante car non destructive, est celle consistant à exciter les milieux hétérogènes via la propagation d'ondes mécaniques. Cette propagation génère au cours de son évolution, un phénomène dit de "diffusion multiple". La diffusion multiple d'ondes mécaniques est un phénomène extrêmement répandu, que ce soit dans la nature (biologie, géophysique), en sciences physiques ou dans l'industrie.

La diffusion multiple (Fig 1 (b)), par opposition à la diffusion simple (Fig 1 (a)), est la branche de la physique qui

- décrit les interactions entre plusieurs obstacles (plus ou moins distants entre eux) dans un milieu hétérogène traversé par une onde,
- interprète ensuite les conséquences de ces interactions à l'aide de grandeurs dites "effectives".

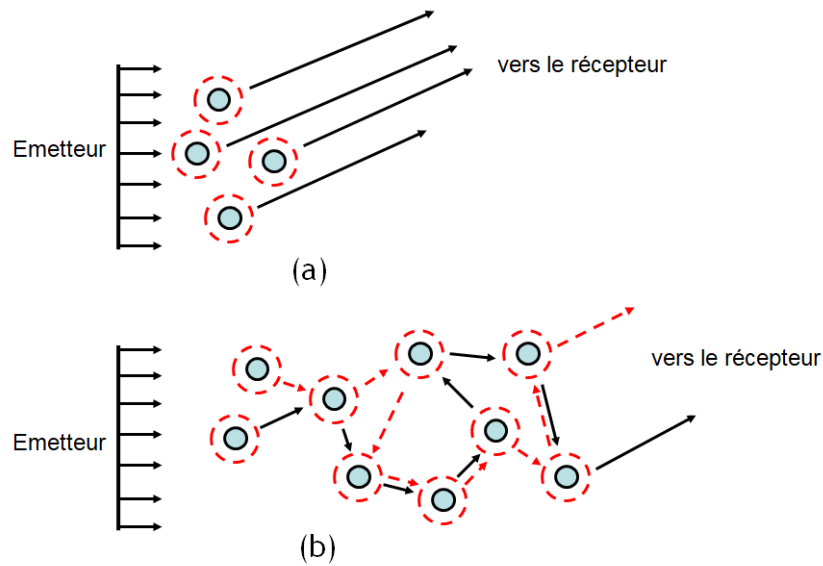


FIGURE 1 – Diffusion simple (a) et diffusion multiple (b). L'émetteur à gauche envoie une onde plane incidente sur les obstacles. Ceux-ci diffusent de façon isotrope dans toutes les directions (cercles en pointillé). Le récepteur ne recueille que les ondes issues de collisions uniques. Dans le cas (b), on a représenté (seulement) deux des processus probables (flèches continues et flèches en pointillé). L'onde incidente, une fois qu'elle a atteint un diffuseur, peut subir plusieurs collisions avant de parvenir au récepteur situé à droite de la zone où sont localisés les obstacles.

Le milieu hôte (la matrice) dans lequel sont placés les obstacles, la forme de ces derniers, les conditions aux limites obstacle-matrice, de même que les propriétés mécaniques des différents constituants sont des éléments clés.

Cette thèse est consacrée à l'étude de certains aspects de la diffusion multiple des ondes mécaniques dans un milieu poroélastique (MPE) de Biot contenant des inclusions ou des obstacles aléatoirement répartis. Les deux phases - le MPE (constituant la matrice) et les obstacles - forment un milieu hétérogène dont on veut déterminer les propriétés.

On s'est intéressé en particulier aux MPE qui, en l'absence de tout obstacle (diffuseur), supportent simultanément trois ondes : une longitudinale rapide, une longitudinale lente et une transversale. Les MPE ont fait l'objet d'études très détaillées dans le passé. Dans un milieu d'extension infinie, les trois ondes se propagent indépendamment l'une de l'autre et mettent en avant des comportements très différents. Cependant, chaque fois qu'une de ces ondes rencontre les discontinuités formées par les obstacles (bornés ou non), une conversion d'ondes prend place. Il y a diffusion de trois



ondes (rapide, lente et transversale) vers le MPE, *cf.* Fig. 2. Le type d'onde transmis dans les obstacles dépend du matériau les constituants (une seule onde longitudinale si l'obstacle est une cavité, une onde longitudinale et une onde transversale si l'obstacle est une sphère élastique, etc.). De telles conversions apportent des difficultés supplémentaires à la description de la diffusion multiple. Il est donc nécessaire de quantifier les effets induits par ces conversions.

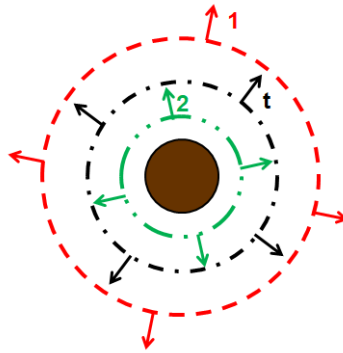


FIGURE 2 – Diffusion isotrope par un obstacle sphérique dans un milieu poroélastique. Le diffuseur situé au centre émet des ondes sphériques divergentes de trois types : rapide (en tireté rouge, noté 1), transversale (en tireté noir, noté  $t$ ) et lente (en tireté vert, noté 2).

Dans la thèse, on se limite au cas où l'onde incidente sur la région de l'espace contenant les distributions aléatoires d'obstacles est soit l'onde longitudinale rapide, soit l'onde longitudinale lente. Les obstacles sont quant à eux de forme sphérique. L'hypothèse fondamentale sous-jacente à tout nos développements est celle de la *concentration diluée* des obstacles. Cette hypothèse permet de se placer d'emblée dans le cadre de certaines théories de diffusion multiple revisitées ces dernières années. Pour nous, l'intérêt de ce choix réside essentiellement dans la disponibilité de formules analytiques explicites autorisant des généralisations et conduisant à une interprétation claire des nombres d'onde effectifs, notamment dans la limite de Rayleigh (dans laquelle les dimensions des obstacles sont petites comparées aux longueurs d'onde en jeu). C'est, d'ailleurs, cette limite de Rayleigh qui permet de se raccrocher aux résultats obtenus par de nombreux auteurs en élastostatique (milieux en absence d'ondes).

La matière traitée a été divisée de façon logique en cinq chapitres et une conclusion.

- Le chapitre 1 est un exposé succinct de la théorie de Biot. On y rappelle la loi de comportement et les équations du mouvement dans un MPE. Tous les paramètres mécaniques et physiques utilisés dans la thèse y sont décrits.
- Le chapitre 2 présente le problème de la propagation d'une onde dans un MPE contenant un seul obstacle sphérique (de type fluide ou élastique). On y calcule les coefficients de diffusion de sphères fluides et élastiques. Etant donné que l'on travaille aux basses fréquences (limite de Rayleigh), les développements limités de ces coefficients de diffusion sont fournis.
- La théorie de la diffusion multiple considérée dans cette thèse est présentée brièvement dans le chapitre 3 ; on y précise notamment l'expression du nombre d'onde effectif rapide (dans le cas d'une onde incidente rapide sur la région où se trouvent les obstacles aléatoirement distribués) et du nombre d'onde effectif lent (dans le cas d'une onde incidente lente).
- Le chapitre 4 étudie en détail les propriétés de la diffusion multiple dans un MPE particulier appelé QF20. Les obstacles sont des sphères élastiques en epoxy (matériau mou) ou en aluminium (matériau plus rigide que l'epoxy). Les simulations numériques montrent l'influence de chaque type d'obstacles sur la propagation des ondes dans le milieu hétérogène. Certaines grandeurs effectives telles que le module de rigidité à la compression, la masse volumique et la constante de diffusion sont déterminées.
- Dans le chapitre 5, on effectue une étude paramétrique. On compare les vitesses, les atténuations et les constantes de diffusion effectives pour deux type de MPE : QF20 et sable de Stoll. Les obstacles distribués aléatoirement sont, soit des cavités, soit des sphères en epoxy. Le module et la masse volumique effective ont été déterminés pour les cavités fluides dans un MPE.
- Enfin, dans la conclusion nous présentons un bref récapitulatif des résultats et quelques projets en cours.

# Chapitre 1

## Théorie de Biot

### 1.1 Introduction

Maurice A. Biot [1], [2], [3] a proposé dans les années 1950-1960 une théorie pour expliquer la propagation des ondes dans les roches saturées d'eau. Cette théorie a, depuis ce temps, vu son domaine d'application s'étendre à d'autres domaines. Elle a été ainsi utilisée pour expliquer le comportement acoustique des os [4], [5], [6]. Un tel succès tient au fait que, contrairement à d'autres théories de milieux poreux, elle prend en compte à la fois l'élasticité du squelette et le couplage entre les parties fluide et solide.

Dans sa théorie, bâtie en supposant applicables les principes de la mécanique des milieux continus *en petites déformations* aux grandeurs macroscopiques mesurables<sup>1</sup>, Biot suppose que le milieu poreux est composé de deux phases continues  $s$  et  $f$ . La phase  $s$ , poreuse, est constituée d'un solide élastique isotrope appelé la matrice ou le squelette incluant les pores occlus. La phase  $f$  est un fluide visqueux, compressible, occupant tout l'espace poreux bras morts inclus (et constitue la partie complémentaire de la partie solide).

---

1. Dans la théorie de Biot, le niveau microscopique est "ignoré".

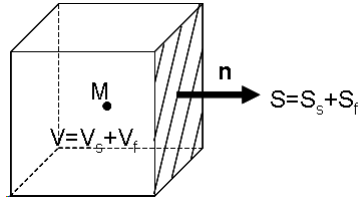


FIGURE 1.1 – Une particule élémentaire extraite du milieu poreux, de volume  $V = V_s + V_f$ , où  $V_f$  est le volume occupé par le fluide (espace des pores) et  $V_s$  celui occupé par le solide. Sur la face hachurée, la surface est  $S = S_s + S_f$  où  $S_f$  est la surface occupée par le fluide et  $S_s$  celle occupés par le solide.

Biot considère de plus que la taille des pores est suffisamment faible pour que le nombre de Reynolds  $Re$  soit petit, c'est-à-dire que  $Re = \frac{UL}{\nu} \ll 1$  où  $U$  est la vitesse de l'écoulement,  $L$  la taille caractéristique de pores (le rayon par exemple) et  $\nu = \frac{\eta}{\rho_f}$  la viscosité cinématique ( $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide et  $\rho_f$  sa masse volumique). Deux paramètres jouent un rôle fondamental, à savoir, la porosité et la tortuosité :

- soit un échantillon de milieu poreux de volume  $V$  et soit  $V_f$  le volume occupé par les pores. La porosité du milieu est définie par le quotient  $\beta = \frac{V_f}{V}$ . Si le milieu est statistiquement isotrope (cas considéré ici),  $\beta$  est une constante et on a également  $\beta = \frac{S_f}{S}$ . Si  $\beta = 0$  le milieu n'est plus poreux, mais élastique, si  $\beta = 1$  le milieu est un fluide ou un liquide.
- la tortuosité  $\tau$  des canaux doit quant à elle rendre compte de l'influence non seulement de la taille des pores mais aussi de la complexité des chemins suivis par l'écoulement du fluide.

Les paramètres  $\beta$  et  $\tau$  sont complétés par d'autres, également importants, présentés dans le Tableau 1.1.

Une autre hypothèse fondamentale de la théorie de Biot est que les longueurs d'ondes  $\lambda_{onde}$  des perturbations se propageant dans le milieu poreux saturé doivent être grandes devant la longueur caractéristique  $L_{carac}$  du volume élémentaire macroscopique représentatif du milieu poreux ( $\lambda_{onde} \gg L_{carac}$ ). La longueur d'onde est donc également grande devant la longueur caractéristique des canaux élémentaires. Sur cette base, nécessaire à une description par la mécanique des milieux continus des phénomènes étudiés, Biot a prédit la propagation de trois ondes dispersives atténuées confirmées

| Paramètres du milieu poroélastique |  |
|------------------------------------|--|
| $K_s$                              | module de rigidité à la compression des grains       |
| $K_b$                              | module de rigidité à la compression du squelette sec |
| $K_f$                              | module de rigidité à la compression du fluide        |
| $\mu$                              | module de cisaillement du squelette sec              |
| $\bar{\rho}_s$                     | masse volumique du solide des grains                 |
| $\rho_f$                           | masse volumique du fluide                            |
| $\kappa$                           | perméabilité   |
| $a_p$                              | rayon moyen des pores                                |
| $\eta$                             | viscosité dynamique du fluide                        |

TABLE 1.1 – Paramètres physiques d'un milieu poroélastique et du fluide saturant les pores.

expérimentalement par T. J. Plona [6] à partir d'échantillons de billes de verre frittées saturées par de l'eau :

1. une **onde longitudinale rapide** ; au cours de sa propagation, le squelette solide et le fluide saturant vibrent approximativement en phase. L'atténuation de cette onde résulte du frottement visqueux,
2. une **onde longitudinale lente** ; au cours de sa propagation le fluide saturant et le solide vibrent avec un certain déphasage. Comparativement à l'onde rapide, elle est fortement atténuée, et est du type diffusif aux basses fréquences,
3. une **onde transversale** ; cette dernière se propage en ayant comme support le squelette avec une contribution inertielle du fluide. Ses propriétés sont assez voisines de l'onde transversale qui se propage dans un milieu viscoélastique. Son atténuation est du même ordre de grandeur que celle de l'onde rapide.

Parmi les milieux poreux obéissant à la théorie de Biot, on peut citer :

- les sédiments marins. Leur squelette est un assemblage de grains de silice de petites tailles, soit collés entre eux (structure consolidée) soit libres avec des degrés de liberté divers (structure non consolidée). Les sédiments sont généralement saturés par un liquide (l'eau de mer ou un liquide aux propriétés proches).
- Les roches et autres matériaux géologiques saturés par un gaz ou un liquide (notamment, le sable de Stoll considéré au chapitre 5).
- Certains matériaux de construction : les bétons, les briques, ...etc (notamment, le QF20 utilisé comme filtre).



FIGURE 1.2 – Section droite d'un milieu poreux statistiquement isotrope. Les zones noires représentent l'espace des pores.

- Les matériaux poreux artificiels réalisés par frittage ou empilement de petites billes en verre ou en matériau synthétique (PMMA par exemple) de façon à former un milieu massif.

On rappelle ci-dessous, très brièvement, les principales équations régissant le modèle de Biot parfois appelé modèle de Biot-Stoll [8].

## 1.2 Rappels de mécanique des milieux poreux

Soit un milieu poreux formé de deux phases, tel que celui décrit ci-dessus. Les masses volumiques du solide constituant le squelette et du fluide saturant sont notées  $\rho_s$  et  $\rho_f$  respectivement. On note  $\vec{u}_s$  le vecteur déplacement dans la matrice solide,  $\vec{u}_f$  le vecteur déplacement dans le fluide saturant et  $\vec{w} = \beta(\vec{u}_f - \vec{u}_s)$  le vecteur déplacement du fluide par rapport au solide. L'augmentation locale de teneur en fluide est définie par  $\xi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{w}$ . On introduit aussi  $P_f$  la pression (quasiment hydrostatique) du fluide dans les pores,  $\bar{\sigma}$  (de composantes  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j=1,2,3$ ) le tenseur des contraintes<sup>2</sup> et  $\bar{\varepsilon}$  (ou  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j=1,2,3$ ) le tenseur de déformations tel que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{si,j} + u_{sj,i}). \quad (1.1)$$

Dorénavant, les points au-dessus des vecteurs indiqueront des dérivations par rapport au temps. Ainsi  $\dot{\vec{u}}_s$  et  $\ddot{\vec{u}}_s$  indiquent les dérivées première et seconde par rapport au

2. La force s'exerçant sur la surface fluide d'un volume élémentaire représentatif est  $-\beta P_f \vec{n}S$ , celle s'exerçant sur la surface solide de ce même volume est  $\bar{\sigma} \cdot \vec{n}S = (1 - \beta)\bar{\sigma} \cdot \vec{n}S$ . La force totale s'exerçant sur la particule élémentaire est donc  $(\bar{\sigma} - \beta P_f) \cdot \vec{n}S$

temps du vecteur  $\vec{u}_s$ .

### 1.2.1 Energies cinétique, élastique et de dissipation

L'énergie cinétique, l'énergie élastique de déformation et la fonction de dissipation visqueuse par unité de volume (grandeurs locales) sont trois formes d'énergie présentes dans le milieu poreux. Nous nous intéressons ici à des processus isothermes et adiabatiques.

#### Energie cinétique par unité de volume

L'énergie cinétique par unité de volume  $T$  peut s'écrire

$$T = \frac{1}{2}(\rho\dot{u}_s^2 + 2\rho_f\dot{u}_s \cdot \dot{w} + m\dot{w}^2), \quad (1.2)$$

où  $\rho = (1 - \beta)\bar{\rho}_s + \beta\rho_f$  est la masse volumique du milieu poreux. Le paramètre  $m$  a été introduit par Biot et est défini par la relation

$$m = \tau \frac{\rho_f}{\beta}, \quad \tau \geq 1, \quad (1.3)$$

où  $\tau$  est la tortuosité déjà décrite. Elle est souvent assimilée à la constante de structure. Elle tient compte du fait que le mouvement du fluide dans les pores ne suit pas toujours la direction du gradient de pression macroscopique. La formule (1.3) ci-dessus, d'origine phénoménologique, traduit donc l'existence d'une masse apparente du fluide supérieure à la masse réelle.

#### Energie élastique de déformation par unité de volume

Les scalaires  $\varepsilon_I = \epsilon_{ii}$  et  $\varepsilon_{II} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\epsilon_{ij})$  étant, respectivement, les premier et second invariants du tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$  et  $\xi$  l'augmentation locale de teneur en fluide, la densité volumique d'énergie élastique de déformation  $W = W(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \xi)$  peut s'écrire

$$2W = H\varepsilon_I^2 + M\xi^2 - 2C\varepsilon_I\xi - 4\mu\varepsilon_{II}. \quad (1.4)$$

Le choix des signes devant chaque terme du membre de droite est purement conventionnel. Les quatre constantes  $H, M, C, \mu$  sont homogènes à des modules d'élasticité;  $\mu$  est le module de cisaillement classique, tandis que  $H, M$  et  $C$  sont fonctions de

plusieurs constantes mécaniques du milieu poreux, *cf.* [8], Biot et Willis [9] :

$$H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4}{3}\mu, \quad (1.5)$$

$$M = \frac{K_s^2}{D - K_b}, \quad (1.6)$$

$$C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D - K_b}, \quad (1.7)$$

avec

$$D = K_s \left[ 1 + \beta \left( \frac{K_s}{K_f} - 1 \right) \right]. \quad (1.8)$$

Une méthode d'identification due à Berryman [10], [11] conduit aux mêmes expressions. Les constantes mécaniques  $K_s, K_f, K_b, \mu$  intervenant dans ces formules sont définies dans le Tableau 2.1, chapitre 2.

**Remarque** : Les énergies cinétique  $T$  et potentielle de déformation  $W$  étant des formes quadratiques définies positives, on a les inégalités suivantes

$$\begin{cases} M > 0, H > 0, \\ HM - C^2 > 0, \\ \rho > 0, m > 0, \\ \rho m - \rho_f^2 > 0, \\ mH + \rho M - 2\rho_f C > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

### Dissipation d'énergie par unité de volume

La dissipation d'énergie - si l'on exclut les frictions entre les grains et la viscoélasticité propre au matériau formant les grains - est une conséquence des déplacements du fluide visqueux par rapport à la matrice poreuse. Elle dépend, en outre, de la perméabilité  $\kappa$  du milieu poreux. La fonction de dissipation volumique visqueuse  $D$  s'écrit

$$2D = \eta \frac{F(\chi)}{\kappa} \dot{w}^2, \quad (1.10)$$

En effet, afin de tenir compte du changement des lois du frottement avec la fréquence de vibration  $f$  du fluide par rapport au solide et donc de corriger la fonction de



dissipation  $D$  qui serait simplement, sans cela,  $2D = \frac{\eta}{\kappa} \dot{w}^2$ , Biot a introduit une fonction complexe  $F$  à partir de l'hypothèse de pores circulaires. Elle dépend de la quantité  $\chi = a_p \sqrt{\omega \frac{\rho_f}{\eta}}$  dans laquelle  $a_p$  est le rayon moyen des pores,  $\omega = 2\pi f$  la pulsation relative au phénomène vibratoire et  $\eta$  le coefficient de viscosité dynamique rencontré plus haut. La fonction  $F$  s'exprime

$$F(\chi) = \frac{1}{4} \frac{\chi t(\chi)}{1 + \frac{2}{i\chi} t(\chi)},$$

où

$$t(\chi) = \frac{ber'(\chi) + ibei'(\chi)}{ber(\chi) + ibei(\chi)}.$$

Dans ce qui précède,  $ber + ibei$  désigne la fonction de Kelvin et  $ber' + ibei'$  sa dérivée par rapport à l'argument. On a  $ber(x) + ibei(x) = J_0(xe^{i\frac{3\pi}{4}})$  ( $J_0$  est la fonction de Bessel cylindrique d'indice 0). Aux basses fréquences, on montre que  $F(\chi) \approx 1$ .

### 1.2.2 Loi de comportement

On suppose que les forces volumiques à distance sont nulles et que le milieu poreux est en équilibre statique. La loi de comportement du milieu poreux, reliant les contraintes  $\sigma_{ij}$  et la pression dans les pores  $P_f$  aux déformations du milieu poreux, est obtenue en dérivant la fonction  $W$  par rapport aux variables  $\varepsilon_{ij}$  (à  $\xi$  fixé) et  $\xi$  (à  $\varepsilon_{ij}$  fixé) :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_\xi = 2\mu\varepsilon_{ij} + [(H - 2\mu)\varepsilon_I - C\xi]\delta_{ij}, \\ P_f = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_{\varepsilon_{ij}} = M\xi - C\varepsilon_I. \end{cases} \quad (1.11)$$

Ci-dessus,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  et  $\delta_{ij}$  représentent des tenseurs ( $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  symbole de Kronecker).

La loi de comportement du milieu poreux se décline sous plusieurs formes dans la littérature. Ainsi, Biot (voir aussi Johnson [4], [5]) utilise dans certains de ses articles le jeu de coefficients  $P, Q, R, N$  à la place de  $H, M, C, \mu$ . Des transformations simples permettent le passage d'un quadruplet à l'autre. Une autre expression de la loi de comportement se trouve dans l'ouvrage de Bourbié, Coussy et Zinsner [14].

Robert D. Stoll [8] a étendu le modèle de Biot aux sédiments marins non consolidés

avec frictions entre les grains de silice (frottement solide). La conséquence de ces frictions est que le matériau constituant le squelette obéit alors à une loi de comportement de type viscoélastique linéaire tenant compte des irréversibilités et du comportement différé<sup>3</sup>. Les modules d'incompressibilité et de cisaillement du squelette solide, considérés comme des grandeurs réelles dans la théorie de Biot, deviennent des grandeurs complexes par ajout d'une partie imaginaire relative à un "décrément logarithmique" (principe de correspondance) [15]. Cette dernière remarque invalide les inégalités (1.9).

### 1.2.3 Equations du mouvement

Introduisons maintenant la densité lagrangienne volumique  $\mathcal{L} = T - W$  [16]. Les coordonnées généralisées  $q_i$  étant les composantes  $u_{si}$  du mouvement du solide d'une part, et les composantes  $w_i$  du mouvement relatif du fluide par rapport au solide d'autre part,  $\mathcal{L}$  dépend des  $q_i, \dot{q}_i$  et  $q_{i,j}$ . La fonction de dissipation  $D$  dépend, quant à elle, des  $\dot{q}_i$ . Les équations de Lagrange découlant de l'application du principe de Hamilton s'écrivent, dans leur forme la plus générale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,j}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (1.12)$$

En posant  $q_i = u_{si}$  dans un premier temps puis  $q_i = w_i$ , on obtient le couple d'équations où chaque ligne représente (d'après la notation indicielle) un vecteur :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{si}} \right) - \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{,i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Puisque  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{si}} \right) = \rho \ddot{u}_{si} + \rho_f \ddot{w}_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) = m \ddot{w}_i + \rho_f \ddot{u}_{si}$  et  $\frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i} = \frac{\eta}{\kappa} \dot{w}_i$ , on a en revenant à la notation vectorielle

$$\begin{cases} (H - \mu) \vec{\nabla} \varepsilon_I - C \vec{\nabla} \xi + \mu \Delta \vec{u}_s = \rho \ddot{\vec{u}}_s + \rho_f \ddot{\vec{w}}, \\ C \vec{\nabla} \varepsilon_I - M \vec{\nabla} \xi = \rho_f \ddot{\vec{u}}_s + m \ddot{\vec{w}} - \frac{\eta}{\kappa} \dot{\vec{w}}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Ces deux relations vectorielles couplées forment les équations du mouvement d'une particule du milieu poreux élastique statistiquement isotrope (on a tenu compte de

---

3. On doit alors connaître non seulement les valeurs actuelles des contraintes et des déformations mais aussi les valeurs passées.

l'approximation  $F(\chi) \approx 1$ ; dans le cas contraire, remplacer  $\frac{\eta}{\kappa}$  par  $\frac{\eta F}{\kappa}$ .

### 1.3 Rappels d'acoustique des milieux poreux

Les grandeurs relatives aux champs des déplacements intervenant dans l'Eq. (1.14) sont toutes harmoniques en temps (dépendance en  $e^{-i\omega t}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ), c'est-à-dire que

$$[\vec{u}_s, \vec{w}, \varepsilon_I, \xi] = [\vec{u}_s(\vec{x}), \vec{w}(\vec{x}), \varepsilon_I(\vec{x}), \xi(\vec{x})]e^{-i\omega t}. \quad (1.15)$$

On a donc  $\dot{\vec{w}} = -i\omega\vec{w}$ ,  $\ddot{\vec{u}}_s = -\omega^2\vec{u}_s$ ,  $\ddot{\vec{w}} = -\omega^2\vec{w}$ . Ces relations seront utilisées dans le reste de ce chapitre.

#### 1.3.1 Solutions des équations du mouvement

Le théorème de Helmholtz affirme que l'on peut décomposer les vecteurs déplacements  $\vec{u}_s$  et  $\vec{w}$  sous la forme

$$\vec{u}_s = -\vec{\nabla}\Phi_s + \vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}_s, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}_s = 0, \quad (1.16)$$

$$\vec{w} = -\vec{\nabla}\Phi_f + \vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}_f, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}_f = 0. \quad (1.17)$$

où  $(\Phi_s, \vec{\Psi}_s)$  est un couple de potentiels (scalaire, vecteur) relatifs au déplacement  $\vec{u}_s$  et  $(\Phi_f, \vec{\Psi}_f)$  un couple de potentiels (scalaire, vecteur) relatifs au déplacement  $\vec{w}$ . On introduit donc (1.16) et (1.17) dans les équations du mouvement (1.14), puis on applique aux membres du résultat obtenu l'opérateur divergence. On en déduit que

$$\begin{cases} -\rho\omega^2\Phi_s - \rho_f\omega^2\Phi_f &= H\Delta\Phi_s + C\Delta\Phi_f, \\ -\rho_f\omega^2\Phi_s - m\omega^2\Phi_f &= C\Delta\Phi_s + M\Delta\Phi_f + i\frac{\eta}{\kappa}\omega\Phi_f. \end{cases} \quad (1.18)$$

Si, à la place de l'opérateur divergence, on applique l'opérateur rotationnel on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -\rho\omega^2\vec{\Psi}_s - \rho_f\omega^2\vec{\Psi}_f &= \mu\Delta\vec{\Psi}_s, \\ -\rho_f\omega^2\vec{\Psi}_s - m\omega^2\vec{\Psi}_f &= i\frac{\eta}{\kappa}\omega\vec{\Psi}_f. \end{cases} \quad (1.19)$$

Le système (1.18), d'inconnues  $\Phi_s$  et  $\Phi_f$ , rend compte exclusivement de la propagation d'**ondes de compression** dites aussi **ondes longitudinales**. Le système (1.19)

suisant, d'inconnues  $\vec{\Psi}_s$  et  $\vec{\Psi}_f$ , rend compte exclusivement de la propagation d'**ondes de cisaillement** aussi appelées **ondes transversales**.

Considérons le cas des ondes planes homogènes, pour lesquelles nous posons

$$[\Phi_s, \Phi_f, \vec{\Psi}_s, \vec{\Psi}_f] = [A, B, \vec{C}, \vec{D}]e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.20)$$

$A$  et  $B \in \mathbb{C}$ , et  $\vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{C}^3$ . Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  vérifie les relations suivantes

$$\begin{cases} \vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', & (\vec{k}', \vec{k}'' \in \mathbb{R}^3) \\ \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2, & (k \in \mathbb{C}) \\ \vec{k}' \parallel \vec{k}''. \end{cases} \quad (1.21)$$

Le vecteur  $\vec{r}$  indique la position de l'observateur. L'introduction des potentiels sous la forme (1.20) dans les équations (1.18) et (1.19) conduit aux systèmes suivants

$$\begin{cases} A(Hk^2 - \rho\omega^2) + B(Ck^2 - \rho_f\omega^2) = 0, \\ A(Ck^2 - \rho_f\omega^2) + B(Mk^2 - m\omega^2 - i\frac{\eta}{\kappa}\omega) = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\begin{cases} \vec{C}(\mu k^2 - \rho\omega^2) - \rho_f\omega^2\vec{D} = 0, \\ \rho_f\omega^2\vec{C} + (m\omega^2 - i\frac{\eta}{\kappa}\omega)\vec{D} = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Compte-tenu de l'égalité  $m = \tau \frac{\rho_f}{\beta}$ , on introduit souvent la quantité  $\tilde{\tau} = \tau + i\frac{\eta\beta}{\kappa\rho_f\omega}$  appelée tortuosité dynamique [17] afin de simplifier les expressions. Le système homogène (1.22), d'inconnues les amplitudes scalaires  $A$  et  $B$ , n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul. Ce déterminant représente une *équation de dispersion* de degré 2 en  $k^2$  (équation bicarrée) admettant deux solutions,  $k_1^2 \in \mathbb{C}$  et  $k_2^2 \in \mathbb{C}$ . Dans un milieu poreux de type Biot, il se propage donc deux types d'ondes de compression :

- une onde longitudinale **rapide** de nombre d'onde  $k_1$  (et de vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ ; on attache l'indice 1 à celle qui arrive en premier à partir d'un point d'excitation donné au point d'observation) s'exprimant

$$k_1^2 = \omega^2 \left( \frac{-\mathfrak{d}_1 + \sqrt{\mathfrak{d}_1^2 - 4\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3}}{2\mathfrak{d}_3} \right), \quad (1.24)$$

- une onde longitudinale **lente** de nombre d'onde  $k_2$  (et de vecteur d'onde  $\vec{k}_2$ )

s'exprimant

$$k_2^2 = \omega^2 \left( \frac{-\mathfrak{d}_1 - \sqrt{\mathfrak{d}_1^2 - 4\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3}}{2\mathfrak{d}_3} \right). \quad (1.25)$$

On a posé pour simplifier

$$\begin{cases} \mathfrak{d}_1 = \rho M - 2\rho_f C + \tilde{\tau}\rho_f H/\beta, \\ \mathfrak{d}_2 = \rho_f(\rho_f - \rho\tilde{\tau}/\beta), \\ \mathfrak{d}_3 = C^2 - HM. \end{cases} \quad (1.26)$$

Considérons maintenant le système homogène (1.23) d'inconnues les vecteurs amplitudes  $\vec{C}, \vec{D}$ . Il n'admet de solutions non triviales que si son déterminant est identiquement nul. C'est une équation de dispersion de degré 1 en  $k^2$  dont l'expression est la suivante

$$\mu k^2 = \omega^2 \left( \rho - \frac{\beta\rho_f}{\tilde{\tau}} \right). \quad (1.27)$$

L'équation (1.27) montre qu'il n'existe qu'une seule onde de cisaillement ou onde **transversale** de nombre d'onde  $k_t$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_t$ . Elle se propage en ayant essentiellement pour support le squelette du milieu poreux.

**Remarque** : Les paramètres présentés ci-dessous seront utilisés dans la suite. Ils dépendent des nombres d'ondes définis plus haut et sont destinés à alléger de façon significative les équations :

- *Les coefficients de compatibilité*  $\gamma_j$ , ( $j = 1, 2, t$ ). Les potentiels scalaires  $\Phi_s$  et  $\Phi_f$  sont la superposition d'un potentiel décrivant l'onde rapide et d'un potentiel décrivant l'onde lente. Autrement dit,  $\Phi_s = \Phi_{s1} + \Phi_{s2}$  et  $\Phi_f = \Phi_{f1} + \Phi_{f2}$ , avec  $\Phi_{sj} = A_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}$ ,  $\Phi_{fj} = B_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}$  ( $j = 1, 2$ ). Les coefficients de compatibilité (relations entre amplitudes) sont alors obtenues en introduisant ces potentiels dans les équations du mouvement (1.18) :

$$\gamma_j = \frac{Hk_j^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 - Ck_j^2} \quad \left( = \frac{B_j}{A_j} \right) \quad (j = 1, 2), \quad (1.28)$$

De même, en posant  $\vec{\Psi}_s = \vec{C} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$  et  $\vec{\Psi}_f = \vec{D} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$  puis en les introduisant dans

(1.19), on obtient

$$\gamma_t = \frac{\mu k_t^2 - \rho \omega^2}{\rho_f \omega^2} \quad \left( = \frac{\vec{D}}{\vec{C}} \right). \quad (1.29)$$

— Les coefficients de compatibilité étant connus, on les introduit dans les systèmes (1.22) et (1.23). On met ainsi en évidence des *masses volumiques acoustiques ou dynamiques* représentant des quantités spécifiques à la propagation des ondes dans le milieu poreux :

$$\rho_j = (H + \gamma_j C) \frac{k_j^2}{\omega^2} \quad (j = 1, 2), \quad (1.30)$$

$$\rho_{fj} = (C + \gamma_j M) \frac{k_j^2}{\omega^2} \quad (j = 1, 2), \quad (1.31)$$

$$\rho_t = \mu \frac{k_t^2}{\omega^2}. \quad (1.32)$$

# Bibliographie

- [1] Biot M. A. , Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (2) (1956) 168 –178
- [2] Biot M. A. , Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. High-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (2) (1956) 179–191.
- [3] Biot M. A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.* 33 (4) (1962), 1482-1498.
- [4] McKelvie M. L., Palmer S. B., The interaction of ultrasound with cancellous bone, *Physics in Medicine and Biology* 36 (10) (1991), 1331-1340.
- [5] Otani T., Ultrasonic wave propagation characteristics of cancellous bone, *Clin Calcium.* 14(12) (2004) :69-75.
- [6] Wear K. A., Mechanisms of Interaction of Ultrasound With Cancellous Bone : *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control.* 67(3) (2020) pp 454-482.
- [7] Plona T. J., Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.* 36 (1980), 259
- [8] R.D. Stoll, T.-K. Kan Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.* 70 (1) (1981), 149-156.
- [9] M. A. Biot, D. G. Willis, The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.* 24 (1957), 594.
- [10] J. G. Berryman, Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media, *J. Acoust. Soc. Am.* 69 (2) (1981), 416-424.
- [11] J. G. Berryman, Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media II, *J. Acoust. Soc. Am.* 70 (2) (1981) , 1754-1756.
- [12] Johnson D. L., Hemmick, D. L, Kojima H., Probing porous media with first and second sound : I dynamic permeability, *J. Appl. Phys* 76 (1) (1994), 104-114.

- [13] Johnson D. L., Plona T. J., Kojima H., Probing porous media with first and second sound : II acoustic properties of water saturated porous media, *J. Appl. Phys* 76 (1) (1994), 115-125.
- [14] Bourbié T., Coussy O., Zinsner B., *Acoustique des milieux poreux*, Publications de l'Institut Français du Pétrole (1986)
- [15] Christensen R. M., *Theory of viscoelasticity : an introduction*, Second Edition (Dover Civil and Mechanical Engineering) (2010)
- [16] Morse P. M., Feshbach H., *Methods of theoretical physics*, Part I. McGraw-Hill book company (1953).
- [17] Johnson D. L., Koplik J., Daschen R., Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid Mech.* 176 (1987), 379-402.



## Chapitre 2

# Diffusion d'ondes poroélastiques par un obstacle sphérique

### 2.1 Introduction

On considère un milieu poroélastique (MPE) de type Biot [1] saturé par un fluide de masse volumique  $\rho_f$  (la célérité des ondes acoustiques dans le fluide est  $c_f$ ). Un obstacle de forme sphérique de rayon  $R$  est placé dans le MPE. Soit  $\theta$  l'angle dans le plan  $OX_1X_2$  entre la position  $r$  de l'observateur et la direction  $OX_2$  de l'onde incidente. Le triplet  $(r, \theta, \varphi)$  représente les coordonnées sphériques et la base orthonormée directe associée est  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

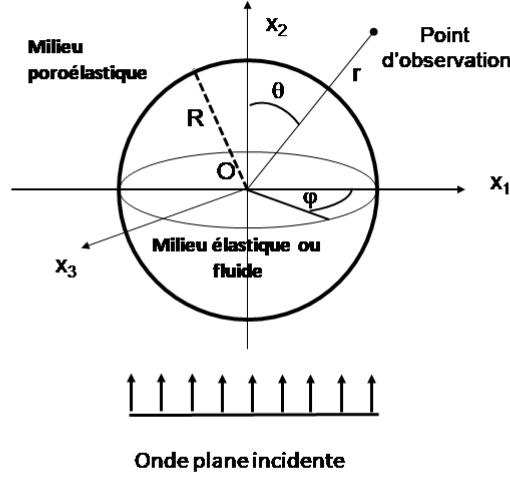


FIGURE 2.1 – Géométrie de la sphère élastique (ou de la cavité sphérique fluide) dans le milieu poroélastique.

Soit  $k_{inc} = \omega/c_{inc}$  le nombre d'onde de l'onde plane incidente se propageant du MPE vers la sphère ( $\omega$  est la pulsation,  $c_{inc}$  est une vitesse et l'indice  $inc = 1, 2, t$  rappelle la nature de l'onde incidente : rapide (1), lente (2) ou transversale ( $t$ )).

- Lorsque l'onde plane incidente rencontre une sphère fluide, elle génère trois ondes réfléchies dans le MPE (une rapide, une lente et une transversale) et une onde transmise longitudinale de nombre d'onde  $k_f = \omega/c_f$  dans la sphère,  $c_f$  étant la vitesse de phase.
- Lorsque l'onde plane incidente rencontre une sphère élastique, elle génère encore trois ondes réfléchies dans le MPE (une rapide, une lente et une transversale). Elle génère aussi dans la sphère deux ondes : l'une est longitudinale de célérité  $c_L$  et de nombre d'onde  $k_L = \omega/c_L$ , l'autre une transversale de célérité  $c_T$  et de nombre d'onde  $k_T = \omega/c_T$ .

Le problème de la diffusion d'ondes par une cible occupant un domaine borné de

l'espace  $\mathbb{R}^3$  a été examiné dans le cas où cet espace est un MPE par [8], [9] (cible de forme sphérique) et par [10] (cible de forme quelconque). L'exposé que nous en faisons ici est une extension au MPE de la présentation classique de Brill, Gaunaud et Überall [11], [12] lorsque la cavité sphérique est placée dans un milieu élastique.

## 2.2 Diffusion par une sphère fluide

### 2.2.1 Déplacement et pression dans la cavité

Le fluide (F) contenu dans la cavité sphérique est identique à celui qui sature le milieu poroélastique. Seule une onde longitudinale pouvant se propager dans un fluide parfait<sup>1</sup>, on suppose qu'il existe un potentiel scalaire  $\phi_F$  tel que le champ de déplacement des particules s'écrive

$$\vec{u}_F = \vec{\nabla}\phi_F. \quad (2.1)$$

L'équation d'Euler des fluides parfaits,  $\rho_f \frac{\partial^2 \vec{u}_F}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}P_F$ , permet alors d'écrire la pression sous la forme

$$P_F = -\rho_f \frac{\partial^2 \phi_F}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Déplacement, contraintes et pression dans le MPE

#### Déplacement

Le champ de déplacement  $\vec{u}$  du squelette du MPE est donné par

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^2 \vec{\nabla}\phi_j + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t, \quad (2.3)$$

---

1. Noter que dans la cavité le fluide est parfait, tandis que dans les pores il est visqueux. Ces deux comportements différents s'expliquent par le fait que les deux longueurs caractéristiques (le rayon moyen des pores  $a_p$  et le rayon des sphères  $R$ ) sont très différents ( $\frac{a_p}{R} \ll 1$ ).

où les  $\phi_j$  sont les potentiels scalaires des ondes longitudinales et  $\vec{\psi}_t$  le potentiel vecteur de l'onde transversale. Ils sont tels que

$$\begin{cases} \phi_j = \phi_j(r, \theta), \\ \vec{\psi}_t = \psi_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi, \\ \psi_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Les composantes du déplacement  $\vec{u}$  en coordonnées sphériques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial}{\partial r} [\sum_{j=1}^2 \phi_j + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}] + k_t^2 r \psi, \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sum_{j=1}^2 \phi_j + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi)], \\ u_\varphi = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Tous les potentiels introduits ci-dessus vérifient l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire que pour  $g \in \{\phi_j, \psi\}$ , on a  $\Delta g + k^2 g = 0$ .

Le vecteur  $\vec{w}$ , décrivant le déplacement relatif du fluide par rapport au solide, s'écrit quant à lui

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^2 \vec{\nabla} \gamma_j \phi_j + \gamma_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t. \quad (2.6)$$

On peut ainsi introduire le champ de déplacement total  $\vec{U} = \vec{u} + \vec{w}$

$$\vec{U} = \sum_{j=1}^2 \vec{\nabla} (1 + \gamma_j) \phi_j + (1 + \gamma_t) \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t, \quad (2.7)$$

dont les composantes en coordonnées sphériques sont

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) \phi_j + (1 + \gamma_t) \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right] + (1 + \gamma_t) k_t^2 r \psi, \\ U_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) \phi_j + (1 + \gamma_t) \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right], \\ U_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les coefficients  $\gamma_j$  et  $\gamma_t$  introduits ci-dessus ont déjà été définis au Chap. 1.

## Contraintes

Soit

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\theta} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

le tenseur des contraintes en coordonnées sphériques. D'après la loi de comportement du milieu poreux de Biot, cf. Chap. 1, ses composantes  $\sigma_{ij}$  s'expriment

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [(H - 2\mu)\varepsilon_I - C\xi]\delta_{ij}, \quad (2.10)$$

D'après (2.3) et (2.6), on a  $\varepsilon_I = \sum_{j=1}^2 \Delta\phi_j$ . On a aussi  $\xi = -\text{div}\vec{w} = -\sum_{j=1}^2 \gamma_j \Delta\phi_j$ , d'où

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left( \sum_{k=1}^2 \mathbb{E}_k \Delta\phi_k \right) \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

avec  $\mathbb{E}_j = H - 2\mu + \gamma_j C$ . On sait que  $\sum_{j=1}^2 \Delta\phi_j = -\sum_{j=1}^2 k_j^2 \phi_j$  car  $\phi_j$  vérifie l'équation de Helmholtz. Les composantes radiale et tangentielle du tenseur des contraintes qui seules seront utiles dans la suite, sont alors données par

$$\sigma_{rr} = -\sum_{j=1}^2 \mathbb{E}_j k_j^2 \phi_j + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \sum_{j=1}^2 \phi_j + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) + k_t^2 \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right\}, \quad (2.12)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{j=1}^2 \phi_j + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) \right] + k_t^2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\}. \quad (2.13)$$

## Pression

La pression du fluide dans les pores est, quant à elle, donnée par

$$P_f = -M\vec{\nabla} \cdot \vec{w} - C\vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (2.14)$$

En tenant compte des expressions de  $\vec{w}$  et de  $\vec{u}$  en fonction des potentiels il vient

$$P_f = \sum_{j=1}^2 (\gamma_j M + C) k_j^2 \phi_j. \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Potentiels dans le MPE et dans la cavité

Dans ce qui suit,  $j_n(h_n)$  désigne la fonction de Bessel sphérique (de Hankel sphérique de 1ère espèce), pour  $n$  entier ;  $P_n(P_n^1)$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$  (la fonction de Legendre associée de degré  $n$  et de première espèce).

#### Cas d'une onde incidente longitudinale

Le potentiel des déplacements relatif à une onde plane incidente longitudinale,  $\phi_{inc}$  ( $inc = 1$  pour l'onde rapide,  $inc = 2$  pour l'onde lente), s'écrit

$$\phi_{inc} = \phi_0 \exp[i(k_{inc}r \cos \theta - \omega t)], \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.16)$$

où  $\phi_0$  est une amplitude donnée (constante). La décomposition en série de l'exponentielle  $\exp[i(k_{inc}r \cos \theta)]$ , sur la base des fonctions de Bessel sphériques, conduit à [11] :

$$\phi_{inc} = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_{inc}r) P_n(\cos \theta), \quad (2.17)$$

où  $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \exp(-i\omega t)$ . Il en résulte :

- pour chaque onde longitudinale diffusée de la cavité vers le MPE un potentiel des déplacements de la forme

$$\phi_\alpha = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) A_n^\alpha h_n(k_\alpha r) P_n(\cos \theta), \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.18)$$

et pour l'onde transversale un potentiel de déplacement

$$\psi_t = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) B_n h_n(k_t r) P_n(\cos \theta), \quad (2.19)$$

- pour l'onde transmise dans la cavité un potentiel des déplacements s'exprimant quant à lui

$$\phi_F = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) C_n j_n(k_f r) P_n(\cos \theta). \quad (2.20)$$

Les quatre amplitudes inconnues  $A_n^1, A_n^2, B_n, C_n \in \mathbb{C}$  sont déterminées en appliquant les conditions de continuité entre le MPE et la cavité, c'est-à-dire sur le bord de la cavité située en  $r = R$ .

### Cas d'une onde incidente transversale

Le potentiel des déplacements relatif à une onde plane incidente transversale est donné par [12] :

$$\vec{\Psi}_{inc} = \vec{\nabla} \times (\vec{r}\psi_{inc}), \quad (2.21)$$

où  $\psi_{inc}$  est le potentiel de Debye<sup>2</sup> défini par

$$\psi_{inc} = -\tilde{\psi}_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n v_n j_n(k_t r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi. \quad (2.22)$$

avec  $\tilde{\psi}_0 = \psi_0 \exp(-i\omega t)$ ,  $\psi_0$  constante  $\in \mathbb{C}$ , et  $v_n = (\frac{2n+1}{n+1})^{\frac{1}{2}}$ . Il en résulte donc que

- les ondes diffusées par la cavité vers le MPE sont également décrites par des potentiels de Debye, de la forme

$$\phi_\alpha = -\tilde{\psi}_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n v_n A_n'^\alpha h_n(k_\alpha r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (2.23)$$

$$\psi_t = -\tilde{\psi}_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n v_n B_n' h_n(k_t r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (2.24)$$

avec  $\alpha = 1$  ou  $2$  ;

- le potentiel des déplacements à l'intérieur de la cavité fluide est, quant à lui, donné par

$$\phi_F = -\tilde{\psi}_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n v_n C_n' h_n(k_f r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi. \quad (2.25)$$

Les constantes  $A_n^1, A_n^2, B_n', C_n' \in \mathbb{C}$  sont elles-aussi déterminées en appliquant les conditions de continuité sur le bord de la cavité en  $r = R$ .

#### 2.2.4 Conditions de continuité entre le MPE et la cavité

Les conditions de continuité que l'on doit appliquer à l'interface entre le MPE et le fluide, située en  $r = R$  expriment la continuité

- du débit

$$(U_r)_{inc} + (U_r)_{diff} = u_{Fr}, \quad (2.26)$$

---

2. En toute rigueur, on devrait écrire  $\vec{\Psi}_{inc} = \vec{\nabla} \times (\vec{r}\psi_{inc}) + \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{r}\chi_{inc})]$  où  $\chi_{inc}$  est un deuxième potentiel de Debye. Dans les développements qui suivent, on ne tient pas compte de  $\chi_{inc}$ .

- de la pression

$$(P_f)_{inc} + (P_f)_{diff} = P_F, \quad (2.27)$$

- de la contrainte radiale

$$(\sigma_{rr})_{inc} + (\sigma_{rr})_{diff} = -P_F, \quad (2.28)$$

- de la contrainte tangentielle

$$(\sigma_{r\theta})_{inc} + (\sigma_{r\theta})_{diff} = 0. \quad (2.29)$$

Compte-tenu des expressions des potentiels, il s'agit de relations entre séries. Mais on montre qu'elles sont aussi valables pour tout mode  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Cas d'une onde incidente longitudinale

On suppose que l'onde incidente est longitudinale, de nombre d'onde  $k_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2$ ). Les conditions de continuité conduisent, pour chaque mode  $n$  fixé, au système de quatre équations à quatre inconnues  $A_n^1, A_n^2, B_n, C_n$  suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{n,11} & a_{n,12} & a_{n,13} & a_{n,14} \\ a_{n,21} & a_{n,22} & a_{n,23} & a_{n,24} \\ a_{n,31} & a_{n,32} & a_{n,33} & a_{n,34} \\ a_{n,41} & a_{n,42} & a_{n,43} & a_{n,44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n^1 \\ A_n^2 \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ a_{n,3} \\ a_{n,4} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Les éléments  $(a_{n,ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) de la matrice s'expriment

$$a_{n,11} = (1 + \gamma_1)x_1 h'_n(x_1) \quad (2.31)$$

$$a_{n,12} = (1 + \gamma_2)x_2 h'_n(x_2) \quad (2.32)$$

$$a_{n,13} = (1 + \gamma_t)n(n + 1)h_n(x_t) \quad (2.33)$$

$$a_{n,14} = -x_f j'_n(x_f) \quad (2.34)$$



$$a_{n,21} = \frac{\rho_{f1}}{\rho_f} h_n(x_1) \quad (2.35)$$

$$a_{n,22} = \frac{\rho_{f2}}{\rho_f} h_n(x_2) \quad (2.36)$$

$$a_{n,23} = 0 \quad (2.37)$$

$$a_{n,24} = -j_n(x_f) \quad (2.38)$$

$$a_{n,31} = [2n(n+1) - \frac{\rho_1}{\rho_t} x_t^2] h_n(x_1) - 4x_1 h'_n(x_1) \quad (2.39)$$

$$a_{n,32} = [2n(n+1) - \frac{\rho_2}{\rho_t} x_t^2] h_n(x_2) - 4x_2 h'_n(x_2) \quad (2.40)$$

$$a_{n,33} = 2n(n+1)[x_t h'_n(x_t) - h_n(x_t)] \quad (2.41)$$

$$a_{n,34} = \frac{\rho_f}{\rho_t} x_t^2 j_n(x_f) \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

$$a_{n,41} = h_n(x_1) - x_1 h'_n(x_1) \quad (2.44)$$

$$a_{n,42} = h_n(x_2) - x_2 h'_n(x_2) \quad (2.45)$$

$$a_{n,43} = x_t h'_n(x_t) + [1 - n(n+1) + \frac{x_t^2}{2}] h_n(x_t) \quad (2.46)$$

$$a_{n,44} = 0. \quad (2.47)$$

Le second membre de l'équation(2.30), est quant à lui donné par :

$$\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ a_{n,3} \\ a_{n,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1 + \gamma_\alpha) x_\alpha j'_n(x_\alpha) \\ -\frac{\rho_{f\alpha}}{\rho_f} j_n(x_\alpha) \\ [\frac{\rho_\alpha}{\rho_t} x_t^2 - 2n(n+1)] j_n(x_\alpha) + 4x_\alpha j'_n(x_\alpha) \\ -j_n(x_\alpha) + x_\alpha j'_n(x_\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

où  $\alpha = 1$  pour une onde incidente rapide et  $\alpha = 2$  pour une onde lente. Ci-dessus, on a posé par souci de simplicité  $k_\alpha R = x_\alpha$ ,  $k_t R = x_t$  et  $k_f R = x_f$ .

### Cas d'une onde incidente transversale

Lorsque l'onde incidente est transversale, on obtient une équation matricielle semblable à (2.30).

$$\begin{pmatrix} a_{n,11} & a_{n,12} & a_{n,13} & a_{n,14} \\ a_{n,21} & a_{n,22} & a_{n,23} & a_{n,24} \\ a_{n,31} & a_{n,32} & a_{n,33} & a_{n,34} \\ a_{n,41} & a_{n,42} & a_{n,43} & a_{n,44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n^{\prime 1} \\ A_n^{\prime 2} \\ B_n' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ a_{n,3} \\ a_{n,4} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Les éléments  $(a_{n,ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) de la matrice sont identiques à ceux trouvés plus haut (2.32) à (2.47). Le second membre, lui devient

$$= \begin{pmatrix} (1 + \gamma_t)n(n+1)j_n(x_t) \\ 0 \\ -2n(n+1)[x_t j_n'(x_t) - j_n(x_t)] \\ -x_t j_n'(x_t) - [1 - n(n+1) + \frac{x_t^2}{2}]j_n(x_t) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Dans la suite du mémoire, les coefficients  $A_n^1, A_n^2, B_n$  et  $A_n^{\prime 1}, A_n^{\prime 2}, B_n'$  joueront un rôle prépondérant. Afin de se conformer à l'usage, notamment en diffusion multiple, on posera dorénavant  $t_n^{\alpha 1} = A_n^1, t_n^{\alpha 2} = A_n^2, t_n^{\alpha t} = B_n$  où  $\alpha = 1, 2$  et  $t_n^{t1} = A_n^{\prime 1}, t_n^{t2} = A_n^{\prime 2}, t_n^{tt} = B_n'$ . Il y a 9 tels coefficients pour chaque mode  $n$ , notés  $t_n^{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, t$ , l'exposant  $\alpha$  précisant l'onde incidente, l'exposant  $\beta$  l'onde diffusée.

### 2.2.5 Limite de Rayleigh

La limite de Rayleigh correspond au régime où les fréquences sont suffisamment basses pour que  $|x_\alpha| = |k_\alpha R| \ll 1$ , pour  $\alpha \in \{1, 2, t, f\}$ . Les développements de Taylor des coefficients de diffusion  $t_n^{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, t$ ), pour  $x_\alpha$  voisin de zéro, et pour les modes  $n = 0, 1$  et  $2$  sont :

♣ pour  $n = 0$  (en posant pour simplifier  $\tilde{\rho}_j = \rho_{fj} - \rho_j$ , où  $\rho_{fj}$  et  $\rho_j$  sont les masses volumiques définies à la fin du chapitre 1)

$$t_0^{11} = \frac{ix_1^3}{3} \left( \frac{b_0^{11}}{d_0} - 1 \right), \quad b_0^{11} = -\frac{4\rho_{f1} x_f^2}{\rho_f x_1^2} + \frac{3(1 + \gamma_2)\tilde{\rho}_1 x_t^2}{\rho_t x_1^2}, \quad (2.51)$$

---

3. ne pas confondre avec la porosité

$$t_0^{12} = \frac{ix_1^2 x_2}{3} \frac{b_0^{12}}{d_0}, \quad b_0^{12} = \frac{4\rho_{f1}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_1^2} + \frac{3(1+\gamma_1)\tilde{\rho}_1}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_1^2} \quad (2.52)$$

$$t_0^{22} = \frac{ix_2^3}{3} \left( \frac{b_0^{22}}{d_0} - 1 \right), \quad b_0^{22} = -\frac{4\rho_{f2}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_2^2} + \frac{3(1+\gamma_1)\tilde{\rho}_2}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_2^2}, \quad (2.53)$$

$$t_0^{21} = -\frac{ix_1 x_2^2}{3} \frac{b_0^{21}}{d_0}, \quad b_0^{21} = \frac{4\rho_{f2}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_2^2} + \frac{3(1+\gamma_2)\tilde{\rho}_2}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_2^2}, \quad (2.54)$$

avec

$$b_0^{11} = -\frac{4\rho_{f1}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_1^2} + \frac{3(1+\gamma_2)\tilde{\rho}_1}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_1^2}, \quad (2.55)$$

$$b_0^{12} = \frac{4\rho_{f1}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_1^2} + \frac{3(1+\gamma_1)\tilde{\rho}_1}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_1^2}, \quad (2.56)$$

$$b_0^{21} = \frac{4\rho_{f2}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_2^2} + \frac{3(1+\gamma_2)\tilde{\rho}_2}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_2^2}, \quad (2.57)$$

$$b_0^{22} = -\frac{4\rho_{f2}}{\rho_f} \frac{x_f^2}{x_2^2} + \frac{3(1+\gamma_1)\tilde{\rho}_2}{\rho_t} \frac{x_t^2}{x_2^2}, \quad (2.58)$$

$$d_0 = 4(\gamma_2 - \gamma_1) \quad (2.59)$$

$$t_0^{1t} = -1, \quad (2.60)$$

$$t_0^{2t} = -1, \quad (2.61)$$

$$t_0^{t1} = 0, \quad (2.62)$$

$$t_0^{t2} = 0, \quad (2.63)$$

$$t_0^{tt} = -1; \quad (2.64)$$

♣♣ pour  $n = 1$ ,

$$t_1^{11} = \frac{-ix_1^3 b_1^{11}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.65)$$

$$t_1^{12} = \frac{-ix_1 x_2^2 b_1^{12}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.66)$$

$$t_1^{1t} = \frac{-ix_1 x_t^2 b_1^{1t}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.67)$$

$$t_1^{21} = \frac{-ix_2 x_1^2 b_1^{21}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.68)$$

$$t_1^{22} = \frac{-ix_2^3 b_1^{22}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.69)$$

$$t_1^{2t} = \frac{-ix_2 x_t^2 b_1^{2t}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.70)$$

$$t_1^{t1} = \frac{-ix_t x_1^2 b_1^{t1}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.71)$$

$$t_1^{t2} = \frac{-ix_t x_2^2 b_1^{t2}}{3 d_1} + O(x^5), \quad (2.72)$$

$$t_1^{tt} = \frac{-ix_t^3 b_1^{tt}}{3 d_1} + O(x^5); \quad (2.73)$$

où

$$d_1 = 2[2(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{\rho_{f1} - \rho_{f2}}{\rho_f} + (\gamma_2 - \gamma_t) \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} + (\gamma_t - \gamma_1) \frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} + \frac{\rho_{f1}\rho_2 - \rho_{f2}\rho_1}{2\rho_f\rho_t}] \quad (2.74)$$

$$b_1^{11} = -2(1 + \gamma_1) + 2(\gamma_2 - \gamma_t) \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} + (1 + \gamma_1) \frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} + \frac{\rho_2\rho_{f1} - \rho_1\rho_{f2}}{\rho_t\rho_f} + 2\frac{\rho_{f1}}{\rho_f} \quad (2.75)$$

$$b_1^{12} = 2(1 + \gamma_1) - (3\gamma_1 - 2\gamma_t + 1) \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} - 2\frac{\rho_{f1}}{\rho_f} \quad (2.76)$$

$$b_1^{1t} = -(3\gamma_1 - 2\gamma_2 + 1) \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} + (1 + \gamma_1) \frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} - \frac{\rho_1\rho_{f2} - \rho_2\rho_{f1}}{\rho_t\rho_f} \quad (2.77)$$

$$b_1^{21} = -2(1 + \gamma_2) + (3\gamma_2 - 2\gamma_t + 1)\frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} + 2\frac{\rho_{f2}}{\rho_f} \quad (2.78)$$

$$b_1^{22} = 2(1 + \gamma_2) + 2(\gamma_t - \gamma_1)\frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} - (1 + \gamma_2)\frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} + \frac{\rho_2\rho_{f1} - \rho_1\rho_{f2}}{\rho_t\rho_f} - 2\frac{\rho_{f2}}{\rho_f} \quad (2.79)$$

$$b_1^{2t} = (3\gamma_2 - 2\gamma_1 + 1)\frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} - (1 + \gamma_2)\frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} - \frac{\rho_1\rho_{f2} - \rho_2\rho_{f1}}{\rho_t\rho_f} \quad (2.80)$$

$$b_1^{t1} = -4(1 + \gamma_2) - 2\frac{\rho_{f2}}{\rho_f} + 2(1 + \gamma_t)\frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_t} \quad (2.81)$$

$$b_1^{t2} = 4(1 + \gamma_1) + 2\frac{\rho_{f1}}{\rho_f} + 2(1 + \gamma_t)\frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_t} \quad (2.82)$$

$$b_1^{tt} = 4(\gamma_1 - \gamma_2) + 2(1 + \gamma_t)\left(\frac{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1}{\rho_t}\right) + 2\left(\frac{\rho_{f1} - \rho_{f2}}{\rho_f}\right) \quad (2.83)$$

♣♣♣ pour  $n = 2$ ,  $t_2^{\alpha\beta} = O(x^5)$ . On peut négliger ces amplitudes de diffusion vis-à-vis de  $t_0^{\alpha\beta}$  et  $t_1^{\alpha\beta}$  dont les premiers termes sont eux  $O(x^3)$ .

### 2.3 Diffusion par une sphère solide élastique (SE)

On rappelle que la loi de comportement du solide élastique dont la sphère est constituée s'écrit

$$\sigma_{s,ij} = \lambda_s \varepsilon_{s,I} \delta_{ij} + 2\mu_s \varepsilon_{s,ij}, \quad (2.84)$$

où  $\lambda_s$  et  $\mu_s$  sont les coefficients de Lamé du solide,  $\varepsilon_{s,ij}$  le tenseur des déformation,  $\varepsilon_{s,I}$  la trace de  $\varepsilon_{s,ij}$  et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Soit  $\rho_s$  la masse volumique du milieu. A partir des équation de l'élastodynamique  $\rho_s \ddot{u}_{si} = \frac{\partial \sigma_{s,ij}}{\partial x_j}$ , on obtient les équations de Navier qui permettent de montrer à l'aide de la décomposition de Helmholtz du champ de déplacement  $\vec{u}_s$  dans la sphère

$$\vec{u}_s = \vec{\nabla} \phi_s + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_s, \quad (2.85)$$

qu'il existe deux types d'ondes dans un milieu élastique : une onde longitudinale et une onde transversale de vitesses respectives

$$c_L = \sqrt{(\lambda_s + 2\mu_s)/\rho_s}, \quad c_T = \sqrt{\mu_s/\rho_s}. \quad (2.86)$$

Dans ce qui précède,  $\phi_s$  est le potentiel scalaire relatif à l'onde longitudinale et  $\vec{\psi}_s$  le potentiel vecteur relatif à l'onde transversale.

Ainsi, quelle que soit la nature de l'onde incidente dans le MPE, en vertu de la conversion de modes, elle génèrera à l'intérieur de la sphère élastique une onde longitudinale de nombre d'onde  $k_L (= \frac{\omega}{c_L}) \in \mathbb{R}$  et une onde transversale de nombre d'onde  $k_T (= \frac{\omega}{c_T}) \in \mathbb{R}$  que l'on ne confondra pas avec le nombre d'onde  $k_t \in \mathbb{C}$  dans le MPE.

### 2.3.1 Potentiels

On considère une onde incidente du type défini en (2.17). Les potentiels des ondes réfléchies par la sphère en direction du MPE gardent les mêmes expressions que celles rencontrées précédemment, Eqs. (2.18) et (2.19). Dans la sphère élastique, les potentiels des déplacements introduits ci-dessus s'expriment

$$\phi_s = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) C_n^L j_n(k_L r) P_n(\cos \theta), \quad (2.87)$$

$$\psi_s = \tilde{\phi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) C_n^s j_n(k_T r) P_n(\cos \theta), \quad (2.88)$$

où  $C_n^L, C_n^s \in \mathbb{C}$ .

### 2.3.2 Conditions de continuité à l'interface MPE/SE

Les conditions de continuité à appliquer à l'interface entre le MPE et la SE, située en  $r = R$ , sont les suivantes. Elles expriment la continuité

- du déplacement radial

$$(u_r)_{inc} + (u_r)_{diff} = u_{sr}, \quad (2.89)$$

- du déplacement tangentiel

$$(u_\theta)_{inc} + (u_\theta)_{diff} = u_{s\theta}, \quad (2.90)$$

- du déplacement radial du fluide dans le poreux par rapport à la sphère élastique

$$(w_r)_{inc} + (w_r)_{diff} = 0, \quad (2.91)$$

- de la contrainte radiale

$$(\sigma_{rr})_{inc} + (\sigma_{rr})_{diff} = \sigma_{srr}, \quad (2.92)$$

- de la contrainte tangentielle

$$(\sigma_{r\theta})_{inc} + (\sigma_{r\theta})_{diff} = \sigma_{sr\theta}. \quad (2.93)$$

### Cas d'une onde incidente longitudinale

On suppose, en premier lieu, que l'onde incidente est longitudinale, de nombre d'onde  $k_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). L'application des conditions de continuité conduit alors à un système de 5 équations à 5 inconnues que l'on regroupe de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} b_{n,11} & b_{n,12} & b_{n,13} & a_{n,14} & b_{n,15} \\ b_{n,21} & b_{n,22} & b_{n,23} & b_{n,24} & b_{n,25} \\ b_{n,31} & b_{n,32} & b_{n,33} & b_{n,34} & b_{n,35} \\ b_{n,41} & b_{n,42} & b_{n,43} & b_{n,44} & b_{n,45} \\ b_{n,51} & b_{n,52} & b_{n,53} & b_{n,54} & b_{n,55} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n^1 \\ A_n^2 \\ B_n \\ C_n^L \\ C_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ b_{n3} \\ b_{n4} \\ b_{n5} \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Les éléments de la matrice sont

$$b_{n,11} = x_1 h'_n(x_1), \quad (2.95)$$

$$b_{n,12} = x_2 h'_n(x_2), \quad (2.96)$$

$$b_{n,13} = n(n+1)h_n(x_t), \quad (2.97)$$

$$b_{n,14} = -x_L j'_n(x_L), \quad (2.98)$$

$$b_{n,15} = -n(n+1)j_n(x_T), \quad (2.99)$$

$$b_{n,21} = h_n(x_1), \quad (2.100)$$

$$b_{n,22} = h_n(x_2), \quad (2.101)$$

$$b_{n,23} = h_n(x_t) + x_t h'_n(x_t), \quad (2.102)$$

$$b_{n,24} = -j_n(x_L), \quad (2.103)$$

$$b_{n,25} = -x_T j'_n(x_T) - j_n(x_T), \quad (2.104)$$

$$b_{n,31} = \gamma_1 x_1 h'_n(x_1), \quad (2.105)$$

$$b_{n,32} = \gamma_2 x_2 h'_n(x_2), \quad (2.106)$$

$$b_{n,33} = \gamma_t n(n+1) h_n(x_t), \quad (2.107)$$

$$b_{n,34} = 0, \quad (2.108)$$

$$b_{n,35} = 0, \quad (2.109)$$

$$b_{n,41} = [-\mathcal{H}_1 x_1^2 + 2\mu(n(n+1) - x_1^2)] h_n(x_1) - 4\mu x_1 h'_n(x_1), \quad (2.110)$$

$$b_{n,42} = [-\mathcal{H}_2 x_2^2 + 2\mu(n(n+1) - x_2^2)] h_n(x_2) - 4\mu x_2 h'_n(x_2), \quad (2.111)$$

$$b_{n,43} = 2\mu n(n+1) [-h_n(x_t) + x_t h'_n(x_t)], \quad (2.112)$$

$$b_{n,44} = -[-\lambda_s x_L^2 + 2\mu_s(n(n+1) - x_L^2)] j_n(x_L) + 4\mu_s x_L j'_n(x_L), \quad (2.113)$$

$$b_{n,45} = -2\mu_s n(n+1) [-j_n(x_T) + x_T j'_n(x_T)], \quad (2.114)$$

$$b_{n,51} = 2\mu [-h_n(x_1) + x_1 h'_n(x_1)], \quad (2.115)$$

$$b_{n,52} = 2\mu [-h_n(x_2) + x_2 h'_n(x_2)], \quad (2.116)$$

$$b_{n,53} = 2\mu [-x_t h'_n(x_t) + (n(n+1) - 1 - \frac{x_t^2}{2}) h_n(x_t)], \quad (2.117)$$

$$b_{n,54} = -2\mu_s [-j_n(x_L) + x_L j'_n(x_L)], \quad (2.118)$$

$$b_{n,55} = -2\mu_s [-x_T j'_n(x_T) + (n(n+1) - 1 - \frac{x_T^2}{2}) j_n(x_T)], \quad (2.119)$$

Le second membre de l'équation (2.94) est donné par :

$$\begin{pmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ b_{n3} \\ b_{n4} \\ b_{n5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_\alpha j'_n(x_\alpha) \\ -j_n(x_\alpha) \\ -\gamma_\alpha x_\alpha j'_n(x_\alpha) \\ -[-\mathcal{H}_\alpha x_\alpha^2 + 2\mu(n(n+1) - x_\alpha^2)] j_n(x_\alpha) + 4\mu x_\alpha j'_n(x_\alpha) \\ -2\mu [-j_n(x_\alpha) + x_\alpha j'_n(x_\alpha)] \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

Ci-dessus, on a posé  $\mathcal{H}_\alpha = H - 2\mu + \gamma_\alpha C$  ( $\alpha = 1, 2$ ),  $x_\alpha = k_\alpha R$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ),  $x_L = k_L R$  et  $x_T = k_T R$ .



### Cas d'une onde incidente transversale

Pour une onde incidence transversale (*cf.* Brill et Gaunaud [12] dans le cas de la matrice élastique), l'application des conditions de continuité conduit à une relation similaire à l'Eq. (2.94). Le second membre devient toutefois

$$\begin{pmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ b_{n3} \\ b_{n4} \\ b_{n5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n(n+1)j_n(x_t) \\ -j_n(x_t) - x_t j_n'(x_t) \\ -\gamma_t n(n+1)j_n(x_t) \\ -2\mu n(n+1)[-j_n(x_t) + x_t j_n'(x_t)] \\ -2\mu[-x_t j_n'(x_t) + (n(n+1) - 1 - \frac{x_t^2}{2})j_n(x_t)] \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Pour se conformer à l'usage, on introduit la lettre  $t$  pour désigner les coefficients de diffusion. Ici, le signe  $\tilde{\phantom{x}}$  est mis pour se démarquer du cas de la cavité fluide. On pose donc  $\tilde{t}_n^{\alpha 1} = A_n^1$ ,  $\tilde{t}_n^{\alpha 2} = A_n^2$ ,  $\tilde{t}_n^{\alpha t} = B_n$  où  $\alpha = 1, 2$  et  $\tilde{t}_n^{t1} = A_n'^1$ ,  $\tilde{t}_n^{t2} = A_n'^2$ ,  $\tilde{t}_n^{tt} = B_n'$ . Il y a 9 tels coefficients pour chaque mode  $n$ , notés  $\tilde{t}_n^{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, t$ , l'exposant  $\alpha$  précisant l'onde incidente, l'exposant  $\beta$  l'onde diffusée.

### 2.3.3 Limite de Rayleigh

On introduit à partir d'ici les quantités suivantes (homogènes à des modules d'élasticité élevés au carré)

$$a = \mu(5\lambda_s + 4\mu + 6\mu_s), \quad (2.122)$$

$$b = (\mathcal{H}_2 + 2\mu)(\mu - \mu_s), \quad (2.123)$$

$$c = (\mathcal{H}_1 + 2\mu)(\mu - \mu_s), \quad (2.124)$$

$$d = (\mathcal{H}_2 + 2\mu)(2\mu + 3\mu_s), \quad (2.125)$$

$$e = (\mathcal{H}_1 + 2\mu)(2\mu + 3\mu_s), \quad (2.126)$$

$$f = \mu(\mu - \mu_s), \quad (2.127)$$

$$h = \lambda_s(2\mu + 3\mu_s) + 2\mu_s(4\mu + \mu_s), \quad (2.128)$$

et les quantités sans dimension

$$\gamma_{21} = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_{t1} = \gamma_t - \gamma_1, \quad \gamma_{2t} = \gamma_2 - \gamma_t. \quad (2.129)$$

Aux basses fréquences, les développements asymptotiques des coefficients de diffusion  $\tilde{t}_n^{\alpha\beta}$  sont

♣ pour le mode  $n = 0$  :

$$\tilde{t}_0^{11} = \frac{ix_1^3}{3} \left( \frac{b_0^{11}}{d_0} - 1 \right), \quad b_0^{11} = -6\gamma_2 c, \quad (2.130)$$

$$\tilde{t}_0^{12} = \frac{ix_1^2 x_2}{3} \frac{b_0^{12}}{d_0}, \quad b_0^{12} = 6\gamma_1 c, \quad (2.131)$$

$$\tilde{t}_0^{22} = \frac{ix_2^3}{3} \left( \frac{b_0^{22}}{d_0} - 1 \right), \quad b_0^{22} = 6\gamma_1 b, \quad (2.132)$$

$$\tilde{t}_0^{21} = -\frac{ix_1 x_2^2}{3} \frac{b_0^{21}}{d_0}, \quad b_0^{21} = 6\gamma_2 b, \quad (2.133)$$

$$\tilde{t}_0^{1t} = \tilde{t}_0^{2t} = \tilde{t}_0^{t1} = -1; \tilde{t}_0^{t2} = \tilde{t}_0^{tt} = 0, \quad (2.134)$$

$$d_0 = 2(\gamma_1 - \gamma_2)[3\lambda_s(\mu - \mu_s) + 4\mu^2 - 2\mu_s(\mu + \mu_s)], \quad (2.135)$$

♣♣ pour le mode  $n = 1$  :

$$\tilde{t}_1^{11} = \frac{-ix_1^3 b_1^{11}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{12} = \frac{-ix_1 x_2^2 b_1^{12}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{1t} = \frac{-ix_1 x_t^2 b_1^{1t}}{3 d_1}, \quad (2.136)$$

$$\tilde{t}_1^{21} = \frac{-ix_2 x_1^2 b_1^{21}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{22} = \frac{-ix_2^3 b_1^{22}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{2t} = \frac{-ix_2 x_t^2 b_1^{2t}}{3 d_1}, \quad (2.137)$$

$$\tilde{t}_1^{t1} = \frac{-ix_1^2 x_t b_1^{t1}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{t2} = \frac{-ix_2^2 x_t b_1^{t2}}{3 d_1}, \quad \tilde{t}_1^{tt} = \frac{-ix_t^3 b_1^{tt}}{3 d_1}, \quad (2.138)$$

avec

$$d_1 = 4\gamma_{21} a \frac{x_t^2}{x_T^2} + 8\gamma_{t1} b \frac{x_2^2}{x_T^2} + 8\gamma_{2t} c \frac{x_1^2}{x_T^2} + 8\gamma_{21} f \frac{x_t^2}{x_L^2} + 2\gamma_{t1} d \frac{x_2^2}{x_L^2} + 2\gamma_{2t} e \frac{x_1^2}{x_L^2}, \quad (2.139)$$

$$b_1^{11} = 2\gamma_1 a \frac{x_t^2}{x_T^2} + 4\gamma_1 b \frac{x_2^2}{x_T^2} + 8\gamma_{2t} c \frac{x_1^2}{x_T^2} + 4\gamma_1 f \frac{x_t^2}{x_L^2} + \gamma_1 d \frac{x_2^2}{x_L^2} + 2\gamma_{2t} e \frac{x_1^2}{x_L^2} - 2\gamma_{2t} h, \quad (2.140)$$

$$b_1^{12} = -2\gamma_1 a \frac{x_t^2}{x_T^2} + 4(2\gamma_t - 3\gamma_1) c \frac{x_1^2}{x_T^2} - 4\gamma_1 f \frac{x_t^2}{x_L^2} + (2\gamma_t - 3\gamma_1) e \frac{x_1^2}{x_L^2} - 2\gamma_{t1} h, \quad (2.141)$$

$$b_1^{1t} = 4\gamma_1 b \frac{x_2^2}{x_T^2} + 4(2\gamma_2 - 3\gamma_1) c \frac{x_1^2}{x_T^2} + \gamma_1 d \frac{x_2^2}{x_L^2} + (2\gamma_2 - 3\gamma_1) e \frac{x_1^2}{x_L^2} - 2\gamma_{21} h, \quad (2.142)$$

$$b_1^{21} = 2\gamma_2 a \frac{x_t^2}{x_T^2} - 4(2\gamma_t - 3\gamma_2) b \frac{x_2^2}{x_T^2} + 4\gamma_2 f \frac{x_t^2}{x_L^2} - (2\gamma_t - 3\gamma_2) d \frac{x_2^2}{x_L^2} - 2\gamma_{2t} h, \quad (2.143)$$

$$b_1^{22} = -2\gamma_2 a \frac{x_t^2}{x_T^2} - 4\gamma_2 c \frac{x_1^2}{x_T^2} + 8\gamma_{t1} b \frac{x_2^2}{x_T^2} - 4\gamma_2 f \frac{x_t^2}{x_L^2} - \gamma_2 e \frac{x_1^2}{x_L^2} + 2\gamma_{t1} d \frac{x_2^2}{x_L^2} - 2\gamma_{t1} h, \quad (2.144)$$

$$b_1^{2t} = -4\gamma_2 c \frac{x_1^2}{x_T^2} + 4(3\gamma_2 - 2\gamma_1) b \frac{x_2^2}{x_T^2} - \gamma_2 e \frac{x_1^2}{x_L^2} + (3\gamma_2 - 2\gamma_1) d \frac{x_2^2}{x_L^2} - 2\gamma_{21} h, \quad (2.145)$$

$$b_1^{t1} = 8\gamma_t b \frac{x_2^2}{x_T^2} + 4\gamma_2 a \frac{x_t^2}{x_T^2} + \gamma_t d \frac{x_2^2}{x_L^2} + 8\gamma_2 f \frac{x_t^2}{x_L^2} - 4\gamma_{2t} h, \quad (2.146)$$

$$b_1^{t2} = -8\gamma_t c \frac{x_1^2}{x_T^2} - 4\gamma_1 a \frac{x_t^2}{x_T^2} - \gamma_t e \frac{x_1^2}{x_L^2} - 8\gamma_1 f \frac{x_t^2}{x_L^2} - 4\gamma_{t1} h, \quad (2.147)$$

$$b_1^{tt} = 8\gamma_t (b \frac{x_2^2}{x_T^2} - c \frac{x_1^2}{x_T^2}) + 4\gamma_{21} a \frac{x_t^2}{x_T^2} + 2\gamma_t (d \frac{x_2^2}{x_L^2} - e \frac{x_1^2}{x_L^2}) + 8\gamma_{21} f \frac{x_t^2}{x_L^2} - 4\gamma_{21} h; \quad (2.148)$$

♣♣♣ pour  $n = 2$ ,  $\tilde{t}_2^{\alpha\beta} = O(x^5)$ . On peut négliger ces amplitudes de diffusion vis-à-vis de  $\tilde{t}_0^{\alpha\beta}$  et  $\tilde{t}_1^{\alpha\beta}$  dont les premiers termes sont eux  $O(x^3)$ .

## 2.4 Étude numérique des coefficients de diffusion

Les données relatives au MPE (le QF20 ®) et au liquide de saturant (l'eau) sont rappelées dans le Tableau 2.1. Celles des matériaux élastiques constituant les sphères sont présentées dans le Tableau 4.2. Les calculs ont été effectués avec le logiciel Matlab.

| Paramètres     | Unités                             | Valeurs (QF20)         |
|----------------|------------------------------------|------------------------|
| $K_s$          | Pa                                 | $3.66 \times 10^{10}$  |
| $K_b$          | Pa                                 | $947 \times 10^9$      |
| $K_f$          | Pa                                 | $2.22 \times 10^9$     |
| $\mu$          | Pa                                 | $7.63 \times 10^9$     |
| $\bar{\rho}_s$ | kg. m <sup>-3</sup>                | 2760                   |
| $\rho_f$       | kg. m <sup>-3</sup>                | 1000                   |
| $\beta$        | -                                  | 0.402                  |
| $\kappa$       | m <sup>2</sup>                     | $1.68 \times 10^{-11}$ |
| $a_p$          | m                                  | $3.26 \times 10^{-5}$  |
| $\eta$         | kg.m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> | $1.14 \times 10^{-3}$  |
| $\tau$         | -                                  | 1.89                   |

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres physiques du milieu poroélastique QF-20 et de l'eau saturant les pores.

La figure 2.2 montre l'évolution des nombres d'onde sans dimension  $|x_\alpha|$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) en fonction de la fréquence. Aux fréquences supérieures à 38 kHz, on a  $|x_2| > 1$ ,

| Paramètres pour la sphère              | Unités             | Aluminium | Epoxy |
|--|--------------------|-----------|-------|
| $\rho_s$ masse volumique               | kg m <sup>-3</sup> | 2761      | 1180  |
| $c_L$ célérité de l'onde longitudinale | m.s <sup>-1</sup>  | 6363      | 2540  |
| $c_T$ célérité de l'onde transversale  | m.s <sup>-1</sup>  | 3161      | 1160  |

TABLE 2.2 – Valeurs des paramètres physiques constituant les sphères élastiques.

contrairement à ce qui est requis ( c'est-à-dire  $|x_\alpha| \ll 1$ ). Cependant, comme cela a déjà été souligné [14], il arrive bien souvent qu'en physique les prédictions tirées d'une théorie bâtie pour les basses fréquences concordent avec les résultats expérimentaux obtenus à des fréquences plus élevées. C'est la raison pour laquelle nous estimons utile d'aller ici jusqu'à  $f_{max} = 50$  kHz (bien qu'en approchant cette valeur, les divergences deviennent non négligeables entre certaines des formules exactes des coefficients de diffusion et celles résultant des développements de Taylor autour de  $\omega = 2\pi f = 0$ ). Pour remplir la condition  $|x_2| \ll 1$ , il faudrait ne considérer que les fréquences  $f < 10$  kHz, ce qui est trop restrictif (noter qu'à  $x_2$  fixé, des sphères plus petites que celles considérées ici permettent l'utilisation de fréquences plus élevées). En résumé, l'intervalle de fréquence retenu pour les calculs sera  $0 < f < f_{max} = 50$  kHz.

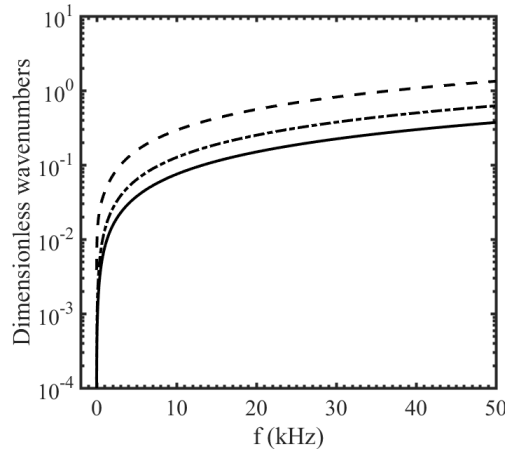


FIGURE 2.2 – Evolution des modules des nombres d'ondes  $|x_1| = |k_1 R|$  (courbe continue),  $|x_2| = |k_2 R|$  (courbe en tireté) et  $|x_t| = |k_t R|$  (courbe en point-tiré) en fonction de la fréquence. Le rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m.

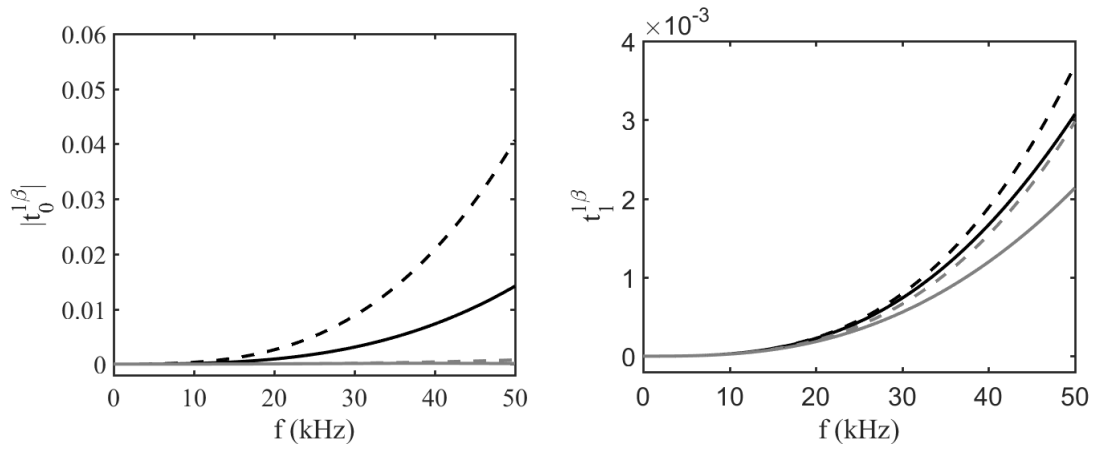


FIGURE 2.3 – Onde rapide incidente sur une sphère fluide de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m. Evolution des modules des coefficients de diffusion  $t_n^{1\beta}$  en fonction de la fréquence  $f$  (MHz) pour le mode  $n = 0$  (à gauche) et le mode  $n = 1$  (à droite). Couleur noire :  $\beta = 1$ , couleur grise :  $\beta = 2$ . Le tracé des formules approchées est en tireté.

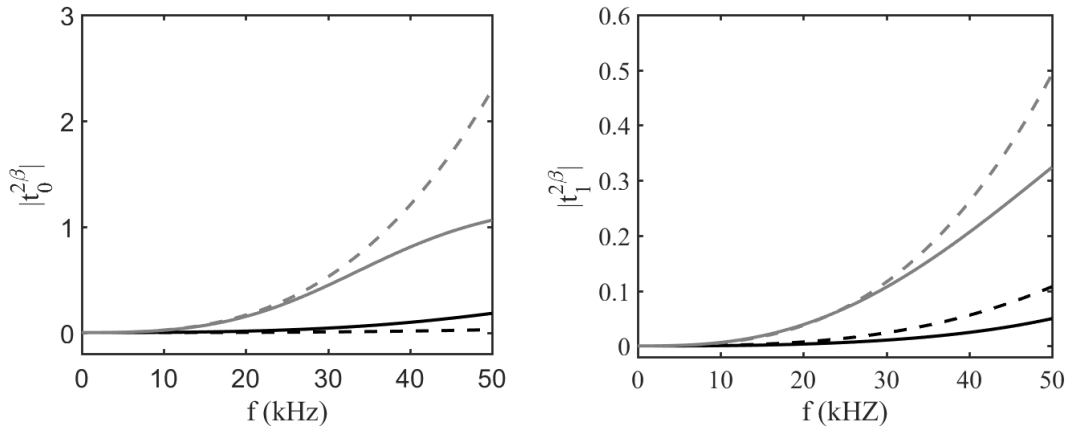


FIGURE 2.4 – Onde lente incidente sur une sphère fluide de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m. Evolution des modules des coefficients de diffusion  $t_n^{2\beta}$  en fonction de la fréquence  $f$  (MHz) pour le mode  $n = 0$  (à gauche) et le mode  $n = 1$  (à droite). Couleur noire :  $\beta = 1$ , couleur grise :  $\beta = 2$ . Le tracé des formules approchées est en tireté.

#### 2.4.1 Cas de la sphère fluide

Seuls les cas des ondes diffusées rapides et lentes sont illustrés ici. La figure 2.3 présente l'évolution du module des coefficients de diffusion  $t_0^{11}$ ,  $t_0^{12}$  (figure de gauche) et  $t_1^{11}$ ,  $t_1^{12}$  (figure de droite) en fonction de la fréquence pour une sphère fluide de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m.

La figure 2.4 présente, quant à elle, le module des coefficients de diffusion  $t_0^{21}$ ,  $t_0^{22}$  (figure de gauche) et  $t_1^{21}$ ,  $t_1^{22}$  (figure de droite) en fonction de la fréquence pour la même

sphère fluide de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m.

En se basant sur les échelles verticales, on constate que les divergences entre formules exactes et approchées sont plus grandes dans le cas de l'onde lente incidente que dans le cas de l'onde incidente rapide.

### 2.4.2 Cas de la sphère élastique

La figure 2.5 présente le module des coefficients de diffusion  $t_0^{11}$ ,  $t_0^{12}$  (figure de gauche) et  $t_1^{11}$ ,  $t_1^{12}$  (figure de droite) en fonction de la fréquence pour une sphère élastique de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m.

La figure 2.6 présente, quant à elle, le module des coefficients de diffusion  $t_0^{21}$ ,  $t_0^{22}$  (figure de gauche) et  $t_1^{21}$ ,  $t_1^{22}$  (figure de droite) en fonction de la fréquence pour la même sphère élastique de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m.

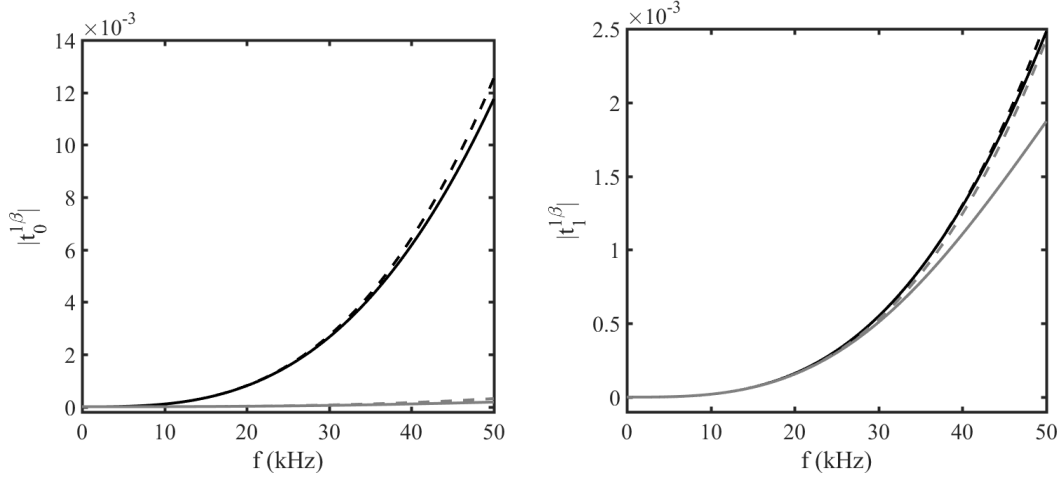


FIGURE 2.5 – Onde rapide incidente sur une sphère élastique (aluminium) de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m. Evolution des modules des coefficients de diffusion  $t_n^{1\beta}$  en fonction de la fréquence  $f$  (MHz) pour le mode  $n = 0$  (à gauche) et le mode  $n = 1$  (à droite). Couleur noire :  $\beta = 1$ , couleur grise :  $\beta = 2$ . Le tracé des formules approchées est en tireté.

En se basant encore sur les échelles verticales, on constate que les divergences entre formules exactes et approchées sont plus grandes dans le cas de l'onde lente incidente que dans le cas de l'onde incidente rapide, et que ces divergences deviennent significatives au fur et à mesure que la fréquence augmente. Ceci paraît normal, puisque les développements limités de certaines fonctions de Bessel sont effectués sous l'hypothèse que  $|x_2| \ll 1$  (or cela n'est pas exact :  $|x_2|$  est proche de 1 dès que  $f > 25-30$  kHz). Les conditions pour être dans la limite de Rayleigh ne sont pas toutes vérifiées.

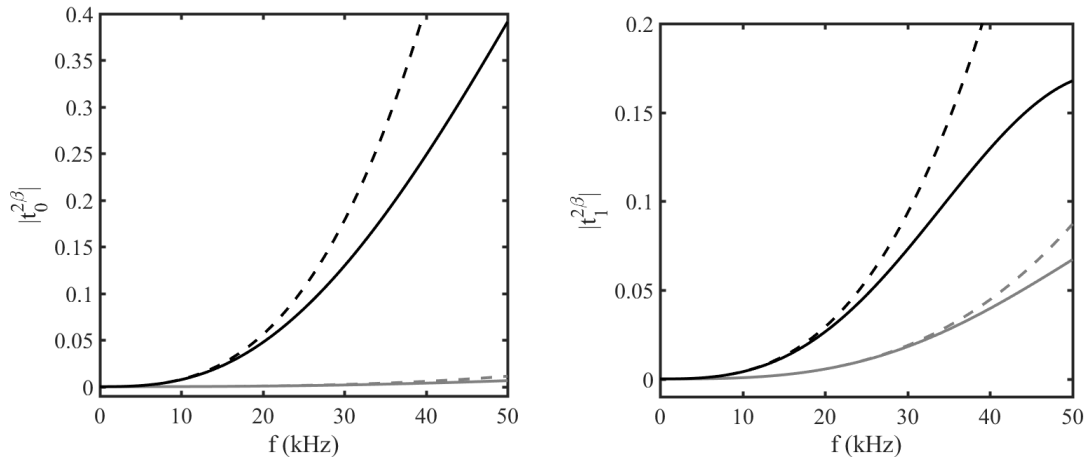


FIGURE 2.6 – Onde lente incidente sur une sphère élastique (aluminium) de rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m. Evolution des modules des coefficients de diffusion  $t_n^{2\beta}$  en fonction de la fréquence  $f$  (MHz) pour le mode  $n = 0$  (à gauche) et le mode  $n = 1$  (à droite). Couleur noire :  $\beta = 1$ , couleur grise :  $\beta = 2$ . Le tracé des formules approchées est en tireté.

Les développements limités des coefficients de diffusion, plutôt que leurs formules exactes, sont cependant utiles pour obtenir des formules plus faciles à manipuler afin de parvenir aux nombres d'onde effectifs dans la limite statique. En particulier, les paramètres les plus influents de chaque milieu - MPE saturé par un fluide et milieu élastique constituant les sphères - peuvent être mis en évidence.

# Bibliographie

- [1] Biot M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (1956) 168 –191
- [2] Faran J. J. Jr., Sound scattering by cylinders and spheres, *J. Acoust. Soc. Am.* 23 (1951) 405-416
- [3] Ying C. F., Truell R., Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.* 27 (1956), 1086-1097
- [4] Pao Y. H., Mow C. C., Scattering of a plane compressional wave by a spherical obstacle, *J. Appl. Phys.* 34 (1963), 493-499
- [5] Einspruch R., Witterholt E., Truell R., Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, *J. Appl. Phys.* 31 (1960), 806-818
- [6] Meyer E., Brendel K., Tamm K., Pulsation oscillations of cavities in rubber, *J. Acoust. Soc. Am.* 30 (1958), 1116-1124
- [7] Sessarego J. P., Sageloli J., Guillermin R., Uberall H., Scattering by an elastic sphere embedded in an elastic isotropic medium, *J. Acoust. Soc. Am.* 104 (5) (1998), 2836-2844
- [8] J. G. Berryman, Scattering by a spherical inhomogeneity in a fluid-saturated porous medium, *J. Math. Phys.*, 26 (6) (1985), pp. 1408-1419
- [9] C. Zimmerman and Stern, Scattering of plane compressional waves by spherical inclusions in a poroelastic medium, *J. Acoust. Soc. Am.* 94 (1) (1993) 527-536
- [10] S. G. Kargl and R. Lim, A transition-matrix formulation of scattering in homogeneous, saturated porous media, *J. Acoust. Soc. Am.* 94 (3) (1993) 1527-1550
- [11] Brill D., Gaunard G. C., Uberall H., Theory of resonance scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media, *J. Acoust. Soc. Am.* 63 (1978) 1700-1701



- [12] Brill D., Gaunard G., Uberall H., Resonance theory of elastic shear wave scattering from spherical fluid obstacles in solids, *J. Acoust. Soc. Am* 67,414(1980) 415-416
- [13] Lim R., Lopes J. L., Hackman R. H., Todoroff D. G., Scattering by objects buried in underwater sediments : Theory and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.* 93 (1993) 1762-1783
- [14] Derode A., Mamou V., Tourin A., Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium, *Phys. Rev. E* 74 (2006), 036606.

## Chapitre 3

# Théorie de la diffusion multiple en présence d'obstacles sphériques aléatoirement répartis

### 3.1 Introduction

Des progrès importants ont été réalisés au cours des dernières décennies en vue de comprendre les propriétés dynamiques des matériaux composites formés d'une matrice solide contenant des obstacles de petites tailles. Les matériaux composites sont présents partout dans la nature (roches, végétaux, monde animal,...), mais aussi dans de nombreux produits manufacturés de l'industrie (bâtiment, notamment). Si le cas des matrices élastiques permettant la propagation de deux ondes (une longitudinale et une transversale) a fait l'objet d'une grande attention, il n'en va pas de même des matrices poroélastiques supportant trois ondes dont les propriétés se révèlent plus complexes à basse fréquence. Une bonne compréhension du comportement des matériaux composites à matrices poroélastiques peut présenter de l'intérêt pour l'industrie (conception de matériaux ayant des spécificités précises). Cette compréhension peut aussi être utile pour l'analyse de phénomènes dynamiques en géophysique et l'élaboration de méthodes d'inspection.

On considère donc ici, un milieu hétérogène formé d'une distribution aléatoire de sphères (élastiques ou fluides) identiques placées dans une matrice solide poroélastique.

On ne sait rien pour le moment sur ce milieu hétérogène, en dehors du fait que (i) le milieu poroélastique (MPE) constituant cette matrice supporte trois ondes : deux longitudinales et une transversale (ii) le fluide dans les cavités supporte une onde longitudinale et le solide élastique une onde longitudinale et une onde transversale.

Il est bien connu que, lorsque chacune des ondes mentionnées ci-dessus rencontre le milieu hétérogène, elle subit de nombreuses réflexions sur les obstacles (collisions), mais est également réfractée dans ces obstacles avant d'être restituée totalement dans le MPE. Il s'agit du phénomène que l'on appelle **diffusion multiple**. Une représentation schématique du régime de diffusion simple versus le régime de diffusion multiple est illustrée dans la Figure 1. La diffusion simple n'est envisageable que dans le cas où le nombre de sphères par unité de volume est faible (en pratique, il faut que la fraction volumique de sphères soit inférieure à 20%). Dans le régime de diffusion simple, l'onde incidente n'interagit qu'une seule fois avec le milieu aléatoire avant d'être recueillie (écran à l'infini). Dans le régime de diffusion multiple, l'onde incidente interagit un grand nombre de fois avec les obstacles avant de sortir de l'échantillon et être recueillie à l'infini<sup>1</sup>.

---

1. Ces interactions constituent des "collisions".

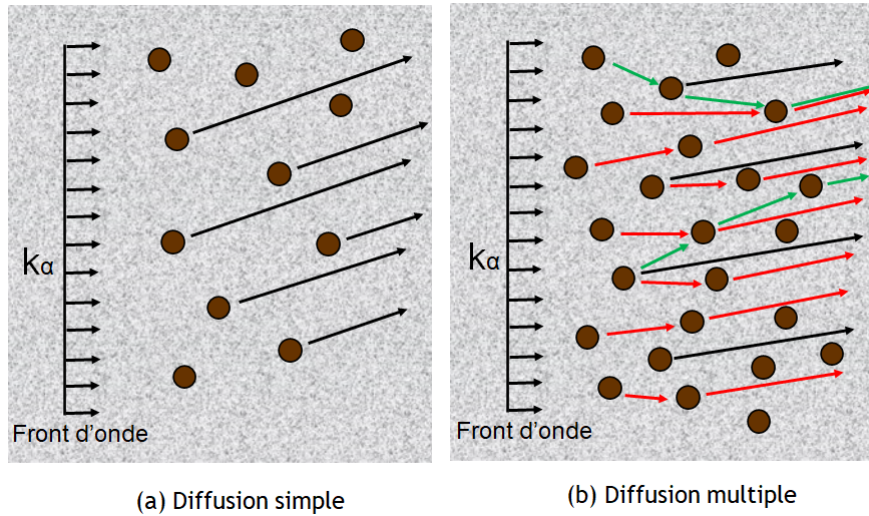


FIGURE 3.1 – Représentation schématique du régime de diffusion simple en (a) et du régime de diffusion multiple en (b) où seuls les trajets les plus élémentaires sont esquissés (1 seule collision : flèche noire, 2 collisions : flèches rouges, 3 collisions : flèches vertes). Dans chaque cas, le milieu est constitué d'une matrice (fluide, élastique ou poroélastique) contenant une distribution aléatoire de sphères.  $k_\alpha$  est le nombre d'onde de l'onde plane incidente sur la zone d'hétérogénéité. Bien que les longueurs de chemin soient distribuées de façon aléatoire avant la sortie de l'échantillon, les phases associées ne se moyennent pas à zéro, permettant de détecter un champ non nul. Toutefois, ce champ est beaucoup moins intense que celui pouvant être généré par des obstacles ordonnés.

A l'issue d'un processus de moyennage complexe, les interactions multiples entre les sphères donnent naissance à une onde effective (ou cohérente) du même type  $\alpha$  que l'onde incidente<sup>2</sup>. Les nombres d'ondes associés effectifs  $\zeta_\alpha$  dépendent à la fois de la fraction volumique des sphères - le nombre de sphères par unité de volume est noté  $n_0$  - de leurs propriétés et des propriétés de la matrice poroélastique. Le milieu effectif (celui dans lequel se propage l'onde effective) devient dispersif avec des caractéristiques physiques propres (vitesse de phase, par exemple).

2. Pour une distribution aléatoire d'obstacles, les interférences sont plus ou moins destructives et donnent lieu à des champs d'amplitude faibles. Pour une distribution ordonnée des obstacles, il existe des interférences constructives autorisant des champs de grandes amplitudes.

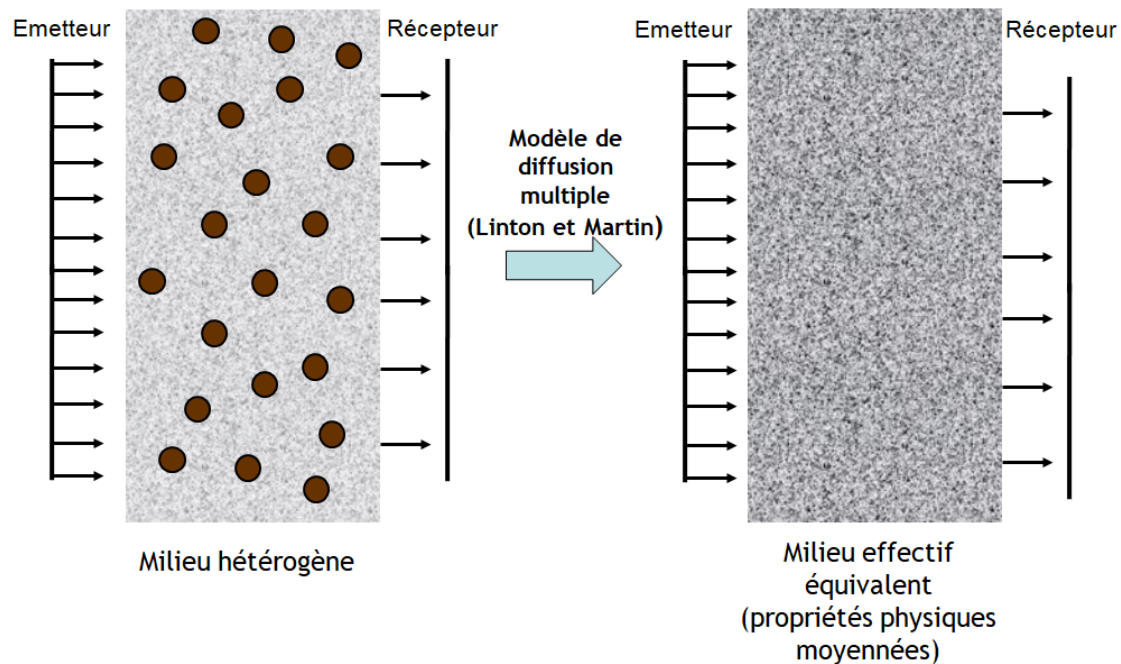


FIGURE 3.2 – (a) un échantillon du milieu hétérogène constitué d’une matrice (fluide, élastique ou poroélastique) contenant une distribution aléatoire de sphères. (b) le même échantillon vu comme un milieu effectif suite au processus de diffusion multiple : ses propriétés physiques, tel par exemple le nombre d’onde effectif  $\zeta_\alpha$ , où  $\alpha$  désigne le type de l’onde incidente sur le milieu hétérogène sont le résultat d’une technique de moyennage appelée QCA (quasi crystalline Approximation) et attribué à Lax.

Les effets de la diffusion multiple sur la propagation des ondes cohérentes - le milieu hôte supportant soit un (cas fluide), deux (cas élastique) ou trois (cas poroélastique) types d’ondes - ont soulevé de nombreuses questions dans le passé. Les tentatives pour y répondre ont conduit à des formules célèbres pour les nombres d’ondes cohérents et à la question sous-jacente de l’obtention des paramètres représentant les milieux effectifs.

La diffusion multiple dans les fluides où seule une onde longitudinale se propage a été étudiée par de nombreux auteurs au cours des 75 dernières années [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [5], [12], [13]. On peut aussi citer les travaux sur l’absorption du son par les particules en suspension dans l’air de Epstein et Cahart [14] et d’Allegra et Hawley [15], connus sous le nom de formulation ECAH, la première à examiner le cas des milieux thermo-visco-élastiques.

Dans le cas de milieux hôtes élastiques supportant deux ondes, on peut citer les articles de Kuster et Toksöz [6] sur la propagation des ondes sismiques dans les milieux biphasés, de Norris [7], et de Aristégui et Angel [8] sur les composites contenant une concentration diluée d'inclusions sphériques, et enfin de Varadan *et al.* [19] sur les matériaux composites renforcés de fibres. On peut également noter les travaux de Watt *et al.* [20], Chen *et al.* [21] et de Christensen [9] sur les propriétés élastiques des matériaux composites (recherche de modules effectifs) dans le cas statique (phénomènes indépendants de la fréquence).

Parmi les formules les plus connues exprimant les nombres d'onde cohérents figurent<sup>3</sup>

1. la formule de l'ISA (Independent Scattering Approximation) [1]
2. la formule de Waterman and Truell (WT) [3]

Elles sont toutes les deux dérivées de la QCA (Quasi Cristalline Approximation) de Lax [2], et ont été appliquées à des problèmes où la matrice est soit fluide, soit élastique. Leurs formules sont rappelées dans une note de bas de page (cf. section 3.2).

En 2005, Linton et Martin(LM) ont réexaminé et appliqué à l'acoustique la formule de Lloyd et Berry [5] mise au point pour expliquer certains aspects de la diffusion multiple en électromagnétisme. Ils ont considéré des sphères aléatoirement distribuées dans un fluide [9] puis ultérieurement remplacé les sphères par des cylindres [10]. La formule de Lloyd et Berry peut être vue comme une amélioration de la formule [3] de WT dans le cas de faibles concentrations. Des extensions des travaux de LM sont disponibles dans le cas de cylindres dans une matrice élastique [23] et de sphères dans un milieu thermo-visco-élastique [11]. Ce dernier cas, le modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN) peut être vu comme une extension de la formulation ECAH mentionnée ci-dessus, permettant de tenir compte des événements de diffusion multiple d'ordre supérieur à un.

### 3.2 Les fonctions de forme de la diffusion par une sphère

Le principe du calcul de ces fonctions de forme est détaillé dans les travaux de Ying et Truell [16], Sessarego [13], Gaunaud et Überall [27], ainsi que Brill et Gaunaud

---

3. Voir note en sec. 3.2.

[28]. Nous rappelons ces fonctions ci-dessous. Elles jouent un rôle fondamental dans les théories de la diffusion multiple<sup>4</sup>.

### 3.2.1 Cas d'une onde incidente longitudinale

Nous nous référons aux ondes longitudinales incidentes à l'aide de la lettre  $\alpha$  ( $\alpha = 1$  pour l'onde longitudinale rapide,  $\alpha = 2$  pour l'onde longitudinale lente). L'onde diffusée par la sphère est, quant à elle, repérée par la lettre  $\beta$  ( $= 1, 2$  ou  $t$ ,  $t$  indiquant une onde transversale). Les fonctions de forme de la diffusion  $\alpha \leftrightarrow \beta$  sont notées

$$f^{\alpha\beta}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) t_n^{\alpha\beta} P_n(\cos\theta). \quad (3.1)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $t_n^{\alpha\beta}$  représente le coefficient de diffusion,  $P_n(\cos\theta)$  le polynôme de Legendre de degré  $n$  [14] et  $\theta$  l'angle de diffusion ( $\theta = 0$  pour la diffusion vers l'avant et  $\theta = \pi$  pour la rétrodiffusion).

### 3.2.2 Cas d'une onde incidente transversale

Dans ce cas, l'onde incidente est repérée par la lettre  $\alpha = t$ . Les fonctions de forme de la diffusion  $t \leftrightarrow \beta$  (où  $\beta = 1, 2$  ou  $t$ ) s'écrivent

$$f^{t\beta}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} t_n^{t\beta} P_n^1(\cos\theta) \cos\phi. \quad (3.2)$$

Ici,  $\phi$  désigne l'angle des coordonnées sphériques déjà introduit dans le chapitre 2 et  $P_n^1(\cos\theta) = \sin\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$  la fonction de Legendre associée du premier type [14]. Dans l'expression ci-dessus, la série commence à  $n = 1$ , ce qui indique que les coefficients de diffusion  $t_0^{t\beta}$  sont exclus des phénomènes de propagation.

---

4. Pour s'en convaincre, rappelons deux formules célèbres, couramment utilisées. Celle de Foldy (ou de l'ISA)  $\zeta_\alpha^2 = k_\alpha^2 + 4\pi n_0 f^{\alpha\alpha}(0)$  et celle de Waterman et Truell  $\zeta_\alpha^2 = k_\alpha^2 + 4\pi n_0 f^{\alpha\alpha} + \frac{4\pi^2 n_0^2}{k_\alpha^2} ([f^{\alpha\alpha}(0)]^2 - [f^{\alpha\alpha}(\pi)]^2)$ . La formule de Foldy est une approximation de la diffusion multiple par plusieurs obstacles autant de fois que possible, mais jamais plus d'une fois du même obstacle. Les corrélations entre les obstacles sont négligées. L'ISA consiste donc à ne considérer que les événements d'ordre le plus bas en  $n_0$ . Le progrès apporté par Waterman et Truell consiste à prendre aussi en compte la rétrodiffusion  $f(\pi)$  (toutefois au deuxième ordre.)

### 3.3 Équations de la diffusion multiple

Nous considérons le cas des faibles concentrations de diffuseurs sphériques et des basses fréquences. De plus, nous nous intéressons à la formule de Linton et Martin (LM) pour la diffusion multiple par des sphères distribuées aléatoirement dans un fluide [9], étendue ensuite au cas d'une matrice hôte viscoélastique [11] par Luppé, Conoir, Norris (LCN). Lorsque l'onde incidente sur l'ensemble de sphères disposées aléatoirement dans le MPE est du type longitudinal, le carré du nombre d'onde effectif  $\zeta_\alpha$  qui en résulte, s'exprime

$$\frac{\zeta_\alpha^2}{k_\alpha^2} = 1 + \frac{n_0}{k_\alpha^2} \delta_1^\alpha + \frac{n_0^2}{k_\alpha^2} (\delta_2^{\alpha,0} + \delta_2^{\alpha,c}) + O\left(\frac{n_0^3}{k_\alpha^2}\right), \quad (3.3)$$

où  $k_\alpha$  est le nombre d'onde de l'onde plane incidente (c'est-à-dire, le nombre d'onde en l'absence de diffuseurs). L'expression ci-dessus est issue de développements asymptotiques par rapport à  $n_0$ , le nombre de sphères par unité de volume. Elle suppose de faibles concentrations de diffuseurs (en anglais : *dilute case*), si bien que, les termes d'ordre  $n_0^3$  et les suivants décrivant les ordres plus élevés d'interactions entre les sphères, sont négligés. Dans l'Eq. (3.3), on a :

$$\delta_1^\alpha = \frac{4\pi}{ik_\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) t_n^{\alpha\alpha}, \quad (3.4)$$

$$\delta_2^{\alpha,0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{k_\alpha}\right)^4 \sum_{n,m=0}^{+\infty} K_{nm} t_n^{\alpha\alpha} t_m^{\alpha\alpha}, \quad (3.5)$$

$$\delta_2^{\alpha,c} = -\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{k_\alpha}\right)^4 \sum_{n=0, m=0}^{+\infty} \sum_{\beta \neq \alpha} L^{\alpha\beta} K_{nm}^{\alpha\beta} t_n^{\beta\alpha} t_m^{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

où

$$L^{\alpha\beta} = \frac{2k_\alpha^3}{k_\beta(k_\alpha^2 - k_\beta^2)}, \quad (3.7)$$

$$K_{nm} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2n+1)(2m+1)} \sum_q q \sqrt{2q+1} G(n, 0; m, 0; q), \quad (3.8)$$



et

$$K_{nm}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2n+1)(2m+1)} \sum_q \left(\frac{k_\alpha}{k_\beta}\right)^q \sqrt{2q+1} G(n, 0; m, 0; q). \quad (3.9)$$

Dans l'expression de  $\delta_2^{\alpha,c}$ , on peut noter la présence de coefficients de diffusion  $t_n^{\alpha t}$  et  $t_n^{t\alpha}$ , due à la prise en compte des ondes transversales transmises de sphère à sphère durant le processus de diffusion multiple<sup>5</sup>.

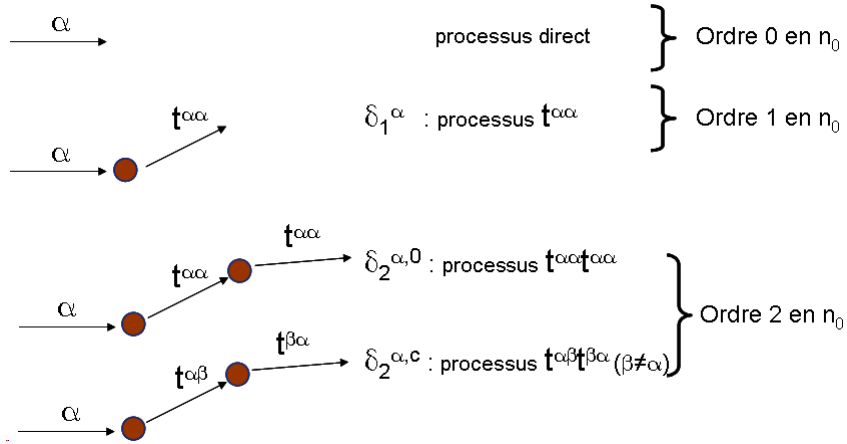


FIGURE 3.3 – Processus de diffusion. L'onde plane incidente de type  $\alpha$  arrive sur les obstacles par la gauche. On a représenté les quatre processus comptabilisés dans le nombre d'onde effectif  $\zeta_\alpha$ . De haut en bas : zéro collision de la part de l'onde incidente, processus comportant une collision, processus comportant deux collisions avant de parvenir à l'observateur situé à droite de la zone où sont localisés les obstacles. Lorsqu'il y a deux collisions, on doit prendre en compte non seulement les diffusions  $\alpha \leftrightarrow \alpha$  mais aussi  $\alpha \leftrightarrow \beta$  pour tenir compte de la conversion des ondes.

Dans  $K_{nm}$  et  $K_{nm}^{\alpha\beta}$ , la notation  $G(n, 0; m, 0; q)$  indique la coefficient de Gaunt [15]. La sommation sur l'entier  $q$  va de  $|n - m|$  à  $n + m$  par pas de deux, avec  $m + n + q$  pair. Quelques indications pour le calcul de ces coefficients<sup>6</sup> sont données ci-dessous.

5. On peut remarquer que dans le cas dit "de diffusion faible"  $\left|\frac{n_0 f(\theta)}{k^2}\right|$  dans les formules de LM et de WT se réduisent à celle de Foldy.

6. La présence des coefficients de Gaunt dans les formules a pour origine un changement de systèmes de coordonnées pour le repérage des positions des obstacles et l'utilisation d'un théorème d'addition.

### 3.3.1 Opérations sur les coefficients de Gaunt

Soient  $m, n, q, \mu, \nu$  des entiers naturels. Les coefficients de Gaunt  $G$  sont définis par (cf. [15], [31])

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^{m+\mu} \mathcal{S} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & -m - \mu \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

où

$$\mathcal{S} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)}{4\pi}}, \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^s s! \sqrt{(2s-2n)!(2s-2\nu)!(2s-2q)!}}{(s-n)!(s-\nu)!(s-q)! \sqrt{(2s+1)!}}, \quad 2s = n + \nu + q, \quad (3.12)$$

et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n & \nu & n + \nu \\ m & \mu & -m - \mu \end{pmatrix} &= (-1)^{n+\nu+m+\mu} \sqrt{\frac{(2n)!(2\nu)!}{(2n+2\nu+1)!}} \\ &\times \sqrt{\frac{(n+\nu-m-\mu)!(n+\nu+m+\mu)!}{(n+m)!(n-m)!(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### Propriétés

Les propriétés suivantes du coefficient de Gaunt seront utilisées plus loin pour le calcul des  $K_{nm}$  et  $K_{nm}^{\alpha\beta}$  :

1. Lorsque l'on pose  $q = n + \nu$  dans la formule (3.12), il vient

$$\begin{pmatrix} n & \nu & n + \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{n+\nu} (n+\nu)!}{n!\nu!} \sqrt{\frac{(2n)!(2\nu)!}{(2n+2\nu+1)!}}. \quad (3.14)$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (3.15)$$

## 2. Relations de symétrie

$$\begin{aligned} G(n, m; \nu, \mu; q) &= G(\nu, \mu; n, m; q) \\ &= G(n, -m; \nu, -\mu; q) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$= (-1)^m G(n, m; q, -m - \mu; \nu) \quad (3.17)$$

$$= (-1)^\mu G(q, -m - n; \nu, \mu; n). \quad (3.18)$$

3. Pour  $q = 0$  et  $\mu = -m$ , il vient

$$G(n, m; n, -m; 0) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{4\pi}}. \quad (3.19)$$

### 3.3.2 Calcul des premiers coefficients $K_{nm}$ et $K_{nm}^{\alpha\beta}$

A partir des propriétés précédentes et des formules (3.8) on obtient

$$K_{00} = 0, \quad (3.20)$$

$$K_{01} = \frac{3}{16\pi^2}, \quad (3.21)$$

$$K_{10} = K_{01}, \quad (3.22)$$

$$K_{11} = \frac{3}{4\pi^2}. \quad (3.23)$$

De même, à partir de (3.9) on trouve

$$K_{00}^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi^2}, \quad (3.24)$$

$$K_{01}^{\alpha\beta} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{k_\alpha}{k_\beta} \quad (\equiv K_{10}^{\alpha\beta}), \quad (3.25)$$

$$K_{11}^{\alpha\beta} = \frac{3}{16\pi^2} [1 + 2(\frac{k_\alpha}{k_\beta})^2]. \quad (3.26)$$

### 3.3.3 Formule réduite du nombre d'onde effectif en basse fréquence

Aux basses fréquences, compte-tenu des développements limités des coefficients de diffusion, il n'est pas nécessaire de retenir tous les termes des séries simples et doubles

du nombre d'onde effectif. On a simplement, en ne retenant que les premiers termes

$$\delta_1^\alpha = \frac{4\pi}{ik_\alpha} [t_0^{\alpha\alpha} + 3t_1^{\alpha\alpha} + \dots], \quad (3.27)$$

$$\delta_2^{\alpha,0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{k_\alpha}\right)^4 [2K_{01}t_0^{\alpha\alpha}t_1^{\alpha\alpha} + K_{11}t_1^{\alpha\alpha}t_1^{\alpha\alpha} + \dots], \quad (3.28)$$

$$\delta_2^{\alpha,c} = -\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{k_\alpha}\right)^4 \sum_{\beta \neq \alpha} L^{\alpha\beta} \left[ K_{00}^{\alpha\beta} t_0^{\beta\alpha} t_0^{\alpha\beta} + K_{01}^{\alpha\beta} (t_0^{\beta\alpha} t_1^{\alpha\beta} + t_1^{\beta\alpha} t_0^{\alpha\beta}) + K_{11}^{\alpha\beta} t_1^{\beta\alpha} t_1^{\alpha\beta} + \dots \right]. \quad (3.29)$$

On est en mesure de présenter, avec cette forme réduite du nombre d'onde effectif, une étude analytique suffisamment détaillée du phénomène de diffusion multiple. L'intérêt particulier placé dans l'étude en basse fréquence réside dans le fait que l'on va pouvoir déduire, dans la limite statique, des grandeurs effectives pour le milieu composite. C'est l'objectif du chapitre suivant.

# Bibliographie

- [1] L. L. Foldy, The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers, *Phys. Rev.* 67 (1945), 107-119
- [2] M. Lax, Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems, *Phys. Rev.* 85 (4) (1952) 621-629
- [3] P. C. Waterman and R. Truell, Multiple scattering of waves, *J. Math. Phys.* 2 (4) (1961) 512- 537
- [4] J. G. Fikioris and P. C. Waterman, Multiple scattering of waves II. "Hole corrections" in the scalar case, *J. Math. Phys.* 5 (10) (1964), 1413-1420.
- [5] P. Lloyd and M. V. Berry, Wave propagation through an assembly of spheres. IV. Relations between different multiple scattering theories, *Proc. Phys. Soc. London* 91 (1967) 678- 688
- [6] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Oxford University Press, Oxford, 1978)
- [7] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena* (Academic, New York, 1995).
- [8] L. Tsang, J. A. Kong and K. H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves, Vol. 1 : Theory and Applications* (Wiley, New-York, 2000).
- [9] C. M. Linton and P. A. Martin, Multiple scattering by multiple spheres : A new proof of the Lloyd-Berry formula for the effective wavenumber, *SIAM J. Appl. Math.* 66 (5) (2006) 1649-1668
- [10] C. M. Linton and P. A. Martin, Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : Second-order corrections for the effective wavenumber, *J. Acoust. Soc. Am.* 117(6), (2005) pp 3413–3423

- [11] P. A. Martin, A. Maurel, and W. J. Parnell, Estimating the dynamic effective mass density of random composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(2), pp 571-577, August 2010.
- [12] W. J. Parnell and I. D. Abrahams, Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab, *Waves in Random and Complex Media*, 20 (2010), pp. 678-701, <https://doi.org/10.1080/17455030.2010.510858>.
- [13] A. L. Gower, M. J. A. Smith, W. J. Parnell, and I. D. Abrahams Reflection from a multi-species material and its transmitted effective wavenumber. *Proc. R. Soc. A*, 474(2212) :20170864, April 2018
- [14] P. S. Epstein and R. R. Cahart, The absorption of sound in suspensions and emulsions. I. Water fog in air, *J. Acoust. Soc. Am.* 25 (1953), 553-565
- [15] J. R. Allegra and S. A. Hawley, Attenuation of sound in suspensions and emulsions : Theory and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.* 51 (1972), 1545-1564
- [16] G. T. Kuster and M. Nafi Toksöz, Velocity and attenuation of seismic waves in two phase media : part I. Theoretical formulation, *Geophysics* 39 (5) (1974) 587-606
- [17] A. N. Norris, Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites, *Int. J. Engng. Sci.* 24 (8) (1986) 1271-1282
- [18] C. Aristégui and Y. Angel, Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering, *Wave Motion* 44 (2007), 153-164
- [19] V. K. Varadan, Y. Ma and V. V. Varadan, Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber reinforced composite materials, *J. Acoust. Soc. Am.* 80 (1986) 333-339
- [20] J. P. Watt, G. F. Davies and R. J. O'Connell, The elastic properties of Composite Materials, *Reviews of Geophysics and Space Physics* 14(4) (1976), 541-563
- [21] H-S Chen and A. Acrivos, The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non dilute concentrations, *Int. J. Solids Structures* 14 (1978), 349-364.
- [22] R. M. Christensen, *Mechanics of composite materials*, Wiley, New-York, 1979.

- [23] J. M. Conoir and A. N. Norris, Effective wave numbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers, *Wave Motion* 47 (2010) 183–197
- [24] F. Luppé, J. M. Conoir and A. N. Norris, Effective wave numbers from thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers, *J. Acoust. Soc. Am.* 131 (2012) 1113-1120
- [25] C. F. Yin and R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.* 27 (9) (1956) 1086-1097
- [26] J.-P. Sessarego, Jean Sageloli and R. Guillermin, Scattering by an elastic sphere in an elastic isotropic medium, *J. Acoust. Soc. Am.* (1998) 104 (5) 2836–2844
- [27] G. C. Gaunaud and H. Überall, Resonance effects and the ultrasonic effective properties of particulate composites, *J. Acoust. Soc. Am.* (1983) 74 (1) 305–313
- [28] D. Brill, G. Gaunaud and H. Überall, Resonance theory of elastic shear-wave scattering from spherical fluid obstacles in solids, *J. Acoust. Soc. Am.* 67 (2) (1980) 414-424
- [29] M. Abramowicz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover New-York, 1974
- [30] Y-L Xu, Fast evaluation of the Gaunt coefficients, *Mathematics of Computation*, 65 (216) (1996) 1601-1612
- [31] P. A. Martin, *Multiple Scattering : Interaction of Time Harmonic Waves with N Obstacles* (Cambridge University Press, New York, 2006)

## Chapitre 4

# Diffusion multiple dans une matrice poroélastique contenant des sphères élastiques

### 4.1 Introduction

On considère une distribution aléatoire de sphères élastiques identiques placées dans une matrice poroélastique saturée par un liquide visqueux. Le milieu poroélastique obéit à la théorie de Biot [2] [3], [4]. Le rayon des inclusions sphériques est supposé très grand devant le rayon moyen des pores.

Lorsqu'une onde longitudinale (rapide ou lente) rencontre une sphère, cette dernière, en réponse, ré-émet en direction du milieu poroélastique trois ondes de nature différente : une onde rapide, une onde lente et une onde transversale. Ce problème de diffusion par un seul obstacle sphérique dans un milieu poroélastique a été étudié dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous y avons examiné en détail la diffusion par une sphère fluide puis élastique. Les développements limités en basse fréquence ont permis d'obtenir des approximations des coefficients de diffusion.

L'objectif de ce chapitre consiste en l'identification, à partir d'une onde incidente rapide ou lente sur le milieu aléatoire décrit ci-dessus, de certaines de ses propriétés effectives à basse fréquence. Le travail se déroule de la façon suivante :



- En se basant sur le travail fait au chapitre 3, nous détaillons, dans la section 4.2, les équations de diffusion multiple dans le cas d'une matrice hôte poroélastique. Les formules générales permettant de calculer les nombres d'onde effectifs rapide et lent, sont alors posées.
- Dans la section 4.3, des simulations numériques menées en considérant des sphères en aluminium et en epoxy placées dans du QF20 saturé en eau permettent de vérifier la cohérence des approximations proposées. Les nombres d'ondes effectifs, rapide et lent, sont calculés et les vitesses et atténuations résultantes sont comparées à celles du milieu poroélastique sans diffuseurs.
- Dans la section 4.4, des expressions basses fréquences plus simples que celles de la section 4.2 sont fournies. Elles sont destinées à expliciter des approximations des nombres d'onde à la limite statique.
- L'étape ci-dessus permet ensuite, dans la section 4.5, d'extraire le module et la masse volumique effectifs dans le cas d'une onde rapide incidente sur le milieu aléatoire.
- Enfin, dans la section 4.6, on met en évidence un coefficient de diffusion effectif dans le cas d'une onde lente incidente.

## 4.2 Diffusion multiple dans un MPE

### 4.2.1 Formules pour le nombre d'onde effectif rapide

Compte-tenu des approximations obtenues pour les  $t_n^{\alpha\beta}$  au chapitre 2, en fonction des  $b_n^{\alpha\beta}$  et  $d_n$  ( $n = 0, 1$ ), les expressions approchées de  $\delta_1^1$ ,  $\delta_2^{1,0}$  et de  $\delta_2^{1,c}$  fournies dans le chapitre 3 deviennent

$$\frac{n_0}{k_1^2} \delta_1^1 = \mathfrak{E} \left[ \frac{b_0^{11}}{d_0} - 1 - 3 \frac{b_1^{11}}{d_1} \right], \quad (4.1)$$

$$\frac{n_0^2}{k_1^2} \delta_2^{1,0} = \mathfrak{E}^2 \left[ 3 \left( 1 - \frac{b_0^{11}}{d_0} \right) \frac{b_1^{11}}{d_1} + 6 \left( \frac{b_1^{11}}{d_1} \right)^2 \right], \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{n_0^2}{k_1^2} \delta_2^{1,c} &= -\frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \times \left\{ L^{12} \left[ \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^3 \frac{b_0^{21} b_0^{12}}{d_0^2} + 3 \frac{k_1}{k_2} \left( - \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^4 \frac{b_0^{21} b_1^{12}}{d_0 d_1} + \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \frac{b_1^{21} b_0^{12}}{d_1 d_0} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3 \left( 1 + 2 \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^3 \frac{b_1^{12} b_1^{21}}{d_1^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - L^{1t} \left[ \left( 1 + 2 \left( \frac{k_1}{k_t} \right)^2 \right) \left( \frac{k_t}{k_1} \right)^3 \frac{b_1^{1t} b_1^{t1}}{d_1^2} \right] \right\}, \quad (4.3) \end{aligned}$$

où

$$L^{1\beta} = \frac{2k_1^3}{k_\beta(k_1^2 - k_\beta^2)} \quad (\beta = 2, t). \quad (4.4)$$

La constante  $\mathfrak{C} = n_0(4\pi R^3/3)$  représente la **fraction de volume occupée par les sphères**<sup>1</sup> (exprimée en %). Lorsque cette fraction de volume  $\mathfrak{C}$  est faible, la formule du nombre d'onde effectif, valable uniquement au premier ordre en  $\mathfrak{C}$  (les contributions venant de  $\delta_2^{1,c}$  sont alors ignorées), peut être mise sous la forme

$$\frac{\zeta_1^2}{k_1^2} = [1 - 3\mathfrak{C}\frac{b_1^{11}}{d_1}][1 + \mathfrak{C}(\frac{b_0^{11}}{d_0} - 1)]. \quad (4.5)$$

Cette forme factorisée permettra, plus loin, d'extraire la masse volumique et le module effectifs du milieu composite [5]. On peut noter, cependant, qu'elle contient le terme  $3\mathfrak{C}^2(1 - \frac{b_0^{11}}{d_0})\frac{b_1^{11}}{d_1}$  présent dans  $\frac{n_0^2}{k_1^2}\delta_2^{1,0}$  (mais qui n'est qu'une partie des informations venant des interactions de type  $1 \leftrightarrow 1$ ).

#### 4.2.2 Formules pour le nombre d'onde effectif lent

Dans le cas d'une onde lente incidente sur la distribution aléatoire de sphères, on obtient les expressions suivantes

$$\frac{n_0}{k_2^2}\delta_1^2 = \mathfrak{C}[\frac{b_0^{22}}{d_0} - 1 - 3\frac{b_1^{22}}{d_1}], \quad (4.6)$$

$$\frac{n_0^2}{k_2^2}\delta_2^{2,0} = \mathfrak{C}^2[3(1 - \frac{b_0^{22}}{d_0})\frac{b_1^{22}}{d_1} + 6(\frac{b_1^{22}}{d_1})^2], \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{n_0^2}{k_2^2}\delta_2^{2,c} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{C}^2\{L^{21}[(\frac{k_1}{k_2})^3\frac{b_0^{12}b_0^{21}}{d_0^2} + 3\frac{k_2}{k_1}((\frac{k_1}{k_2})^4\frac{b_0^{12}b_1^{21}}{d_0d_1} - (\frac{k_1}{k_2})^2\frac{b_1^{12}b_0^{21}}{d_1d_0}) \\ &\quad - 3(1 + 2(\frac{k_2}{k_1})^2)(\frac{k_1}{k_2})^3\frac{b_1^{12}b_1^{21}}{d_1^2}] \\ &\quad - L^{2t}[(1 + 2(\frac{k_2}{k_t})^2)(\frac{k_t}{k_2})^3\frac{b_1^{2t}b_1^{t2}}{d_1^2}]\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

où

$$L^{2\beta} = \frac{2k_2^3}{k_\beta(k_2^2 - k_\beta^2)} \quad (\beta = 1, t). \quad (4.9)$$

De la même manière que dans la section précédente, on serait tenté de factoriser le nombre d'onde effectif lent et d'écrire une formule de concentration valable au premier

---

1. en anglais : particle volume fraction

ordre en  $\mathfrak{C}$  similaire à Eq. (4.5). Ici cependant, le problème vient de la différence de comportement de l'onde lente vis-à-vis de l'onde rapide.

La factorisation du nombre d'onde effectif ne se justifie que lorsque l'on peut extraire deux grandeurs effectives à partir d'une même formule, en l'occurrence, le module et la masse volumique. Au vu du comportement des termes  $b_0^{22}$  et  $b_1^{22}$  aux très basses fréquences, cf. chapitre 2, il n'est possible d'extraire qu'une seule grandeur effective à partir du nombre d'onde effectif lent.

### 4.3 Étude numérique des nombres d'ondes effectifs longitudinaux

Les données du MPE (QF20® de Filtros), du fluide saturant (eau) et du milieu élastique constituant les sphères (aluminum et epoxy) sont fournies dans les tableaux 2.1 et 2.2 du chapitre 2. Noter qu'ici aussi, les calculs ont été effectués à partir de programmes construits avec le logiciel Matlab®.

#### 4.3.1 Caractéristiques acoustiques du QF20 en l'absence de sphères

Précisons pour la suite que les vitesses  $\frac{\omega}{\text{Re}(k_\alpha)}$  et les atténuations  $\frac{\text{Im}(k_\alpha)}{\text{Re}(k_\alpha)}$  dans le MPE sont représentées en fonction de la fréquence par des lignes continues dans les figures qui suivent, voir par exemple les figures 4.1 et 4.2.

Pour les vitesses de l'onde rapide et de l'onde lente, on note les limites en basse fréquence suivantes : 3313 m/s et 0 m/s ; la vitesse de l'onde de cisaillement est de 1928 m/s (la courbe n'est pas présentée ici). Les trois vitesses augmentent lorsque la fréquence augmente, en passant de 0 à 50 kHz. La dispersion des ondes est plus importante dans la plage de fréquence 0,30 à 30kHz.

L'onde rapide et l'onde de cisaillement s'atténuent sensiblement moins que l'onde lente. Au cours de la propagation de l'onde rapide, le squelette solide et le fluide saturant vibrent presque en phase. Lors de la propagation de l'onde lente, le mouvement du fluide dans les pores subit un déphasage par rapport à celui du squelette solide. De plus, en basse fréquence, l'onde lente se caractérise par une **atténuation non nulle** (le rapport  $\text{Im}(k_2)/\text{Re}(k_2)$  est proche de 1), ce qui montre bien son **caractère diffusif**. Il est utile de noter également que, lorsque la fréquence augmente, l'atténuation de l'onde lente diminue et tend vers 0. La fréquence d'amortissement maximal de l'onde rapide

et de l'onde de cisaillement est proche de 2 kHz. Elle dépend des paramètres physiques du squelette, alors que le phénomène d'amortissement lui-même est principalement dû au frottement du fluide dans les pores.

### 4.3.2 Distribution de sphères en aluminium dans le QF20

Examinons maintenant l'effet (sur les ondes incidentes longitudinales) d'une distribution aléatoire de sphères d'aluminium placée dans le MPE (rayon  $R = 4 \times 10^{-3}$  m, fraction de volume occupée par les sphères  $\mathfrak{C} = 20\%$ ). Les résultats des calculs sont présentés dans les figures 4.1 et 4.2. Ils ont été obtenus en utilisant les approximations de la section 3.1 pour l'onde rapide (Eq. 4.1 et les deux suivants) et de la section 3.2 pour l'onde lente (Eq. 4.6 et les suivantes). Sur ces figures

- la courbe en tiré illustre la contribution au nombre d'onde effectif du seul premier ordre en concentration  $\delta_1^1$ ,
- la courbe en pointillé illustre la contribution au nombre d'onde effectif en incluant le deuxième ordre en concentration sans toutefois la conversion de mode  $\delta_2^{1,0}$
- la courbe en pointillé-tiré illustre le nombre d'onde effectif prenant en compte, en plus du cas précédent, la conversion de mode (c'est-à-dire le second ordre complet en concentration)  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$ .

Pour les vitesses de phase, on note donc que les conversions de mode peuvent contribuer significativement à toute fréquence. Ainsi, l'inclusion de sphères métalliques dans le QF20 provoque des modifications sensibles des caractéristiques de l'onde rapide : en considérant l'expression complète du nombre d'onde effectif, la vitesse de phase augmente d'environ 160 m/s pour les fréquences inférieures à 1 kHz ; l'atténuation passe de 0,0086 (absence de sphères) à environ 0,0079 avec les sphères.

La vitesse de phase de l'onde effective lente n'est, quant à elle, sensible à la présence de sphères qu'à partir de 1kHz (Fig. 4.2). Les différents ordres de concentration ne jouent pas un rôle particulier dans la gamme de fréquences 0-50 kHz (la même remarque vaut pour l'atténuation). La vitesse de phase obtenue après des approximations lourdes (les développements limités des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques sont assez nombreux) devrait en principe être manipulée avec précaution. Or, on voit qu'elle ne diffère significativement de la vitesse des ondes lentes dans le QF20 (calcul exact en l'absence de sphères) qu'à partir de 1 kHz.

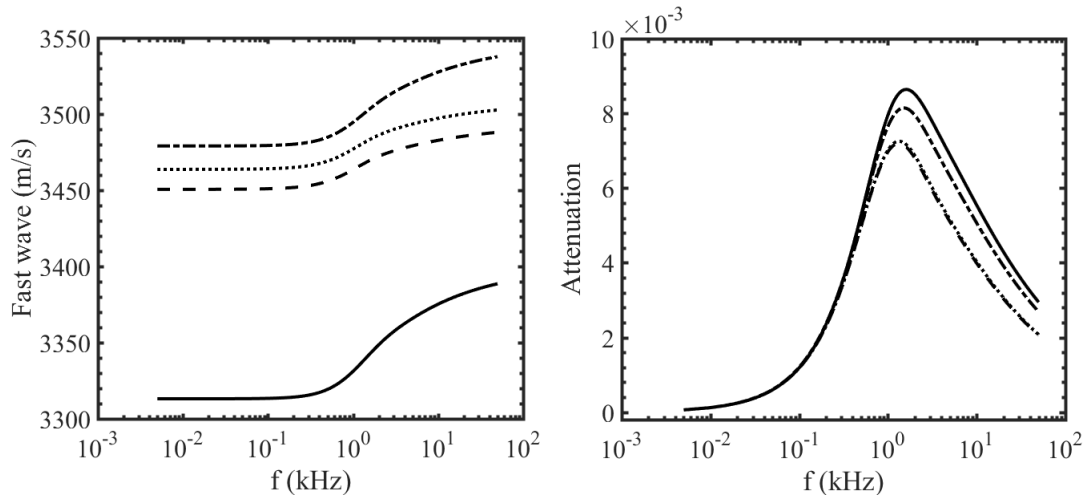


FIGURE 4.1 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde rapide dans un milieu poroélastique (QF20) saturé par l'eau.

1. Matrice poroélastique sans sphères (courbe solide)
2. Matrice poroélastique contenant une distribution aléatoire de sphères en aluminium de rayons  $R = 4 \times 10^{-3} \text{m}$ . La fraction de volume occupée par les sphères est égale à  $\mathfrak{C} = 20\%$ . Calculs intégrant
  - seulement le premier ordre en concentration  $\delta_1^1$  (courbe en tireté),
  - le premier ordre en concentration et seulement le terme  $\delta_2^{1,0}$  du second ordre en concentration (courbe en pointillé),
  - le premier ordre en concentration et tout le second ordre en concentration soit  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$  (courbe en pointillé-tireté).

### 4.3.3 Distribution de sphères en epoxy dans le MPE

Le rayon des sphères et la fraction volumique des particules  $\mathfrak{C}$  restant inchangés, les résultats obtenus en remplaçant l'aluminium par l'epoxy, matériau plus mou<sup>2</sup> sont illustrés dans les figures 4.3 et 4.4. Une comparaison avec la Fig. 4.1 montre l'influence du matériau constituant les sphères sur les nombres d'onde effectifs. La présence de sphères en epoxy abaisse à la fois la vitesse effective rapide et son atténuation. Pour les sphères molles donc, il faut noter que le terme  $\delta_2^{1,c}$  ne contribue pas de manière significative, comparativement à  $\delta_2^{1,0}$ .

Pour l'onde effective lente, le changement de matériau dans les sphères n'affecte ni la vitesse ni l'atténuation (les changements par rapport au cas des sphères en aluminium sont infimes).

---

2. en anglais : soft material

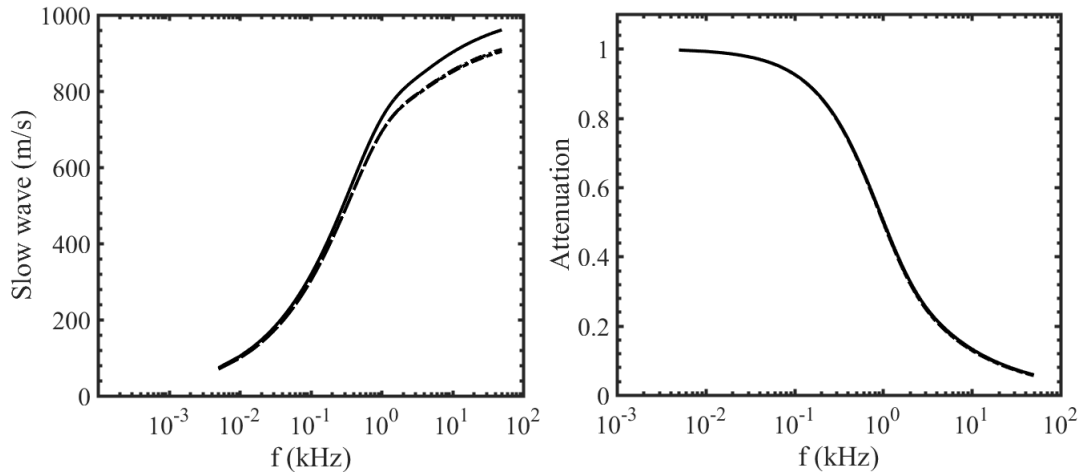


FIGURE 4.2 – Vitesses de phase et atténuations de l’onde lente dans un milieu poroélastique (QF20) saturé par l’eau.

1. Matrice poroélastique sans sphères (courbe solide)
2. Matrice poroélastique contenant une distribution aléatoire de sphères en aluminium de rayons  $R = 4 \times 10^{-3} \text{m}$ . La fraction de volume occupée par les sphères est égale à  $\mathfrak{C} = 20\%$ . Calculs intégrant
  - seulement le premier ordre en concentration  $\delta_1^1$  (courbe en tireté),
  - le premier ordre en concentration et seulement le terme  $\delta_2^{1,0}$  du second ordre en concentration (courbe en pointillé),
  - le premier ordre en concentration et tout le second ordre en concentration soit  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$  (courbe en pointillé-tireté).

#### 4.4 Formules explicites en très basse fréquence des nombres d’onde effectifs

A la fin de la sec. 4.2, des formules ont été trouvées pour les différents termes constitutifs des nombres d’onde effectifs rapide et lent. Ces formules sont exprimées en termes de grandeurs sans dimension  $x_\alpha$  et  $\gamma_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, t$  dépendant de la fréquence angulaire  $\omega$ ). Leur intérêt, comme on a pu le voir, réside dans le fait que l’on dispose de formules qui, à défaut d’être simples, constituent une étape intermédiaire de calcul et sont, de plus, valides dans le domaine fréquentiel où les ondes sont dispersives. A présent, l’objectif est d’établir des formules des nombres d’ondes effectifs proches de la limite statique - les effets dispersifs sont alors exclus - afin d’extraire des grandeurs effectives décrivant le MPE effectif. Dans cette seconde étape de calculs, on tient compte des développements basse fréquence des nombres d’onde  $k_\alpha$  et des coefficients  $\gamma_\alpha$ . Rappelons d’abord que lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , c’est-à-dire  $\omega \ll \omega_c$  où  $\omega_c = \frac{\eta}{\rho_f \kappa}$  ( $= 67,85$

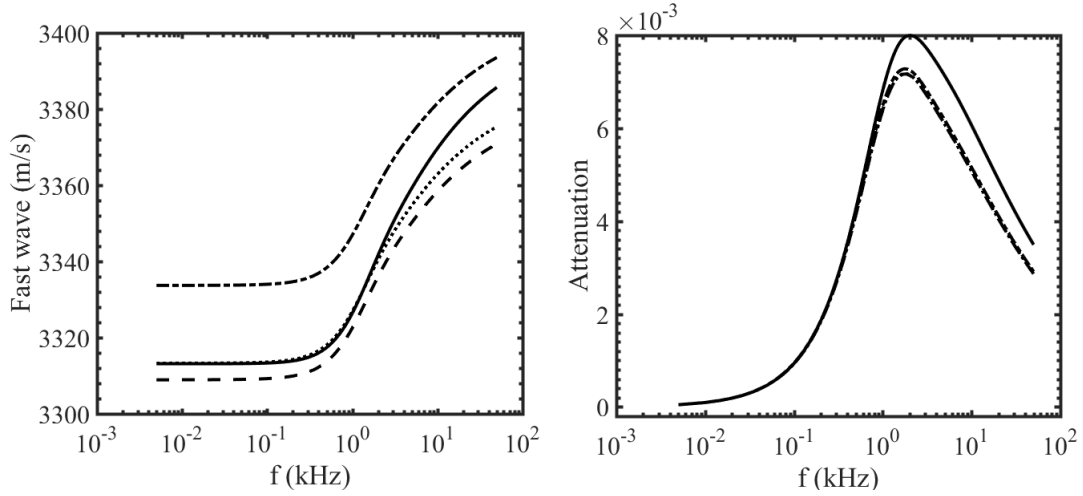


FIGURE 4.3 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde rapide dans un milieu poroélastique (QF20) saturé par l'eau.

1. Matrice poroélastique sans sphères (courbe solide)
2. Matrice poroélastique contenant une distribution aléatoire de sphères en epoxy de rayons  $R = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$ . La fraction de volume occupée par les sphères est égale à  $\mathfrak{C} = 20\%$ . Calculs intégrant
  - seulement le premier ordre en concentration  $\delta_1^1$  (courbe en tireté),
  - le premier ordre en concentration et seulement le terme  $\delta_2^{1,0}$  du second ordre en concentration (courbe en pointillé),
  - le premier ordre en concentration et tout le second ordre en concentration soit  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$  (courbe en pointillé-tireté).

kHz avec les données sur le QF20) représente une fréquence caractéristique du MPE sans sphères, nous obtenons  $k_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{H} + O(\omega^3)$ ,  $k_2^2 = \omega \epsilon - \omega^2 \left( \frac{mH + \rho M - 2\rho_f C}{C^2 - HM} + \frac{\rho}{H} \right) + O(\omega^3)$ ,  $k_t^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} + O(\omega^3)$  [4], où :

$$\epsilon = \frac{i\omega_c \rho_f H}{HM - C^2}. \quad (4.10)$$

Il s'ensuit que  $\gamma_1 = O(\omega)$ ,  $\gamma_2 = -\frac{H}{C} + \left( \frac{\rho}{C\epsilon} - \frac{H\rho_f}{C^2\epsilon} \right) \omega + O(\omega^2)$ ,  $\gamma_t = O(\omega)$ . A partir de là,  $\mathcal{H}_1 = H - 2\mu + O(\omega)$ ,  $\mathcal{H}_2 \approx -2\mu + \left( \frac{\rho}{\epsilon} - \frac{H\rho_f}{C\epsilon} \right) \omega + O(\omega^2)$ . Les constantes  $H$ ,  $M$  et  $C$  sont détaillées dans le chapitre 1. A la lumière de ce qui précède, on obtient les approximations suivantes pour les quantités  $b, c, d, e$ , de la section 2.3.3 du chapitre 2

$$b = \omega \left( 1 - \frac{H\rho_f}{C\rho} \right) \frac{\rho}{\epsilon} (\mu - \mu_s) + O(\omega^2), \quad c = H(\mu - \mu_s) + O(\omega), \quad (4.11)$$

$$d = \omega \left( 1 - \frac{H\rho_f}{C\rho} \right) \frac{\rho}{\epsilon} (2\mu + 3\mu_s) + O(\omega^2), \quad e = H(2\mu + 3\mu_s) + O(\omega), \quad (4.12)$$

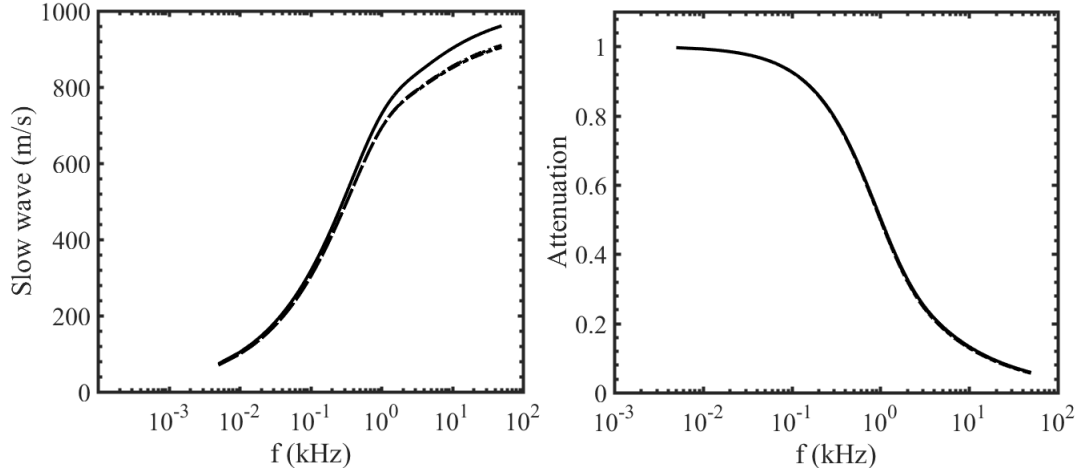


FIGURE 4.4 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde lente dans un milieu poroélastique (QF20) saturé par l'eau.

1. Matrice poroélastique sans sphères (courbe solide)
2. Matrice poroélastique contenant une distribution aléatoire de sphères en epoxy de rayons  $R = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$ . La fraction de volume occupée par les sphères est égale à  $\mathfrak{C} = 20\%$ . Calculs intégrant
  - seulement le premier ordre en concentration  $\delta_1^1$  (courbe en tireté),
  - le premier ordre en concentration et seulement le terme  $\delta_2^{1,0}$  du second ordre en concentration (courbe en pointillé),
  - le premier ordre en concentration et tout le second ordre en concentration soit  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$  (courbe en pointillé-tireté).

et pour les différences entre coefficients de compatibilité  $\gamma_{21} = \gamma_2 - \gamma_1, \gamma_{t1} = \gamma_t - \gamma_1, \gamma_{2t} = \gamma_2 - \gamma_t$

$$\gamma_{21} = \frac{-H}{C} + O(\omega), \quad \gamma_{t1} = O(\omega), \quad \gamma_{2t} = \frac{-H}{C} + O(\omega). \quad (4.13)$$

Par conséquent, lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , pour le mode  $n = 0$

$$\frac{b_0^{11}}{d_0} \rightarrow \frac{3H}{3\lambda_s + 4\mu + 2\mu_s}, \quad (4.14)$$

et

$$\left( \frac{b_0^{12}}{d_0}, \frac{b_0^{21}}{d_0}, \frac{b_0^{22}}{d_0} \right) \rightarrow (0, 0, 0), \quad (4.15)$$

tandis que pour le mode  $n = 1$

$$\left( \frac{b_1^{11}}{d_1}, \frac{b_1^{12}}{d_1}, \frac{b_1^{1t}}{d_1} \right) \rightarrow \left( \frac{\rho - \rho_s}{3\rho}, 0, \frac{\rho - \rho_s}{3\rho} \right), \quad (4.16)$$



$$\left(\frac{b_1^{21}}{d_1}, \frac{b_1^{22}}{d_1}, \frac{b_1^{2t}}{d_1}\right) \rightarrow \left(\frac{\rho - \rho_s}{3\rho} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{H\rho_f}{C\rho}\right), -\frac{1}{2}, -\frac{\rho + 2\rho_s}{6\rho} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H\rho_f}{C\rho}\right)\right), \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{b_1^{t1}}{d_1}, \frac{b_1^{t2}}{d_1}, \frac{b_1^{tt}}{d_1}\right) \rightarrow 2\left(\frac{\rho - \rho_s}{3\rho}, 0, \frac{\rho - \rho_s}{3\rho}\right), \quad (4.18)$$

et

$$L^{1t} \rightarrow \frac{2(\mu/H)^{\frac{3}{2}}}{(\mu/H)^2 - 1}. \quad (4.19)$$

Pour les différents termes  $\delta$ , nécessaires pour construire le nombre d'onde effectif rapide, Eqs. (4.1) et suivantes, on a en première approximation

$$n_0\delta_1^1 = \omega^2 \frac{\rho}{H} \mathfrak{C} \left[ \frac{3H}{3\lambda_s + 2\mu_s + 4\mu} - 1 - \frac{\rho - \rho_s}{\rho} \right], \quad (4.20)$$

$$n_0^2\delta_2^{1,0} = \omega^2 \frac{\rho}{H} \mathfrak{C}^2 \left[ \left(1 - \frac{3H}{3\lambda_s + 2\mu_s + 4\mu}\right) \frac{\rho - \rho_s}{\rho} + \left(\frac{\rho - \rho_s}{3\rho}\right)^2 \right], \quad (4.21)$$

$$n_0^2\delta_2^{1,c} = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\rho}{H} \mathfrak{C}^2 L^{1t} \left(1 + 2\frac{\mu}{H}\right) \left(\frac{H}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho - \rho_s}{3\rho}\right)^2. \quad (4.22)$$

Pour les termes  $\delta$  nécessaires pour construire le nombre d'onde effectif lent, Eqs. (4.6) et suivantes, on obtient en première approximation

$$n_0\delta_1^2 = \frac{1}{2}\omega\epsilon\mathfrak{C}, \quad (4.23)$$

$$n_0^2\delta_2^{2,0} = \frac{-5}{4}\omega\epsilon\mathfrak{C}^2, \quad (4.24)$$

$$n_0^2\delta_2^{2,c} = O(\omega^2). \quad (4.25)$$

Pour l'onde rapide, les termes " $\delta$ " dépendent à la fois des paramètres du MPE et des sphères. De plus,  $\delta_2^{1,c}$  est du même ordre (en  $\omega^2$ ) que  $\delta_2^{1,0}$  ce qui montre qu'en basse fréquence, les conversions de mode  $1 \leftrightarrow 2$  et  $1 \leftrightarrow t$  sont des phénomènes notables pour le nombre d'onde effectif rapide.

Pour l'onde lente, les premiers termes du développement des " $\delta$ " ne dépendent que du MPE à travers le paramètre  $\epsilon$ . Le premier terme non nul obtenu pour  $\delta_2^{2,c}$  est  $O(\omega^2)$ , Eq. (4.25); il montre que les conversions de mode  $2 \leftrightarrow 1$  et  $2 \leftrightarrow t$  entre les ondes ont très peu d'influence en basse fréquence ( $|\delta_2^{2,c}| \ll |\delta_2^{2,0}|$ ).

## 4.5 Module et masse volumique effectifs

Écrivons le rapport des nombres d'ondes rapides sous la forme  $\frac{\zeta_1^2}{k_1^2} = \frac{\zeta_1^2 \omega^2}{\omega^2 k_1^2}$ . Pour  $\omega \ll \omega_c$ , admettons aussi que  $\zeta_1^2$  suit une loi similaire à  $k_1^2$  c'est-à-dire  $\zeta_1^2 = \frac{\omega^2 \rho_{1,e}}{H_{1,e}}$  où  $\rho_{1,e}$  et  $H_{1,e}$  désignent, respectivement, la masse volumique et le module effectifs. Ainsi,  $\frac{\zeta_1^2}{k_1^2} = \frac{\rho_{1,e}}{\rho} \frac{H}{H_{1,e}}$ . En identifiant à l'Eq. (4.5), on trouve

$$\rho_{1,e} = \rho(1 - 3\mathfrak{C} \frac{b_1^{11}}{d_1}) = (1 - \mathfrak{C})[(1 - \phi)\bar{\rho}_s + \phi\rho_f] + \mathfrak{C}\rho_s, \quad (4.26)$$

et

$$\frac{H}{H_{1,e}} = 1 + \mathfrak{C}(\frac{b_0^{11}}{d_0} - 1) = 1 + \mathfrak{C}(\frac{3H}{3\lambda_s + 2\mu_s + 4\mu} - 1). \quad (4.27)$$

Cette dernière expression peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{1}{H_{1,e}} = \frac{1 - \mathfrak{C}}{H} + \frac{\mathfrak{C}}{\lambda_s + \frac{2}{3}\mu_s + \frac{4}{3}\mu}. \quad (4.28)$$

► Pour une matrice à faible porosité ( $\phi \rightarrow 0$ ), on a  $\rho \rightarrow \bar{\rho}_s$ ,  $H \rightarrow \bar{K}_s + \frac{4}{3}\bar{\mu}_s$  ( $K_b \rightarrow \bar{K}_s$ ,  $\mu \rightarrow \bar{\mu}_s$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ ). Par conséquent,

$$\frac{\rho_{1,e}}{\rho} \rightarrow \frac{\rho_{el,e}}{\bar{\rho}_s} = 1 - \mathfrak{C} \frac{\bar{\rho}_s - \rho_s}{\bar{\rho}_s}, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{H_{1,e}} \rightarrow \frac{1}{H_{el,e}} = \frac{1 - \mathfrak{C}}{\bar{K}_s + \frac{4}{3}\bar{\mu}_s} + \frac{\mathfrak{C}}{K_s + \frac{4}{3}\bar{\mu}_s}, \quad (4.30)$$

où  $\rho_{el,e}$  et  $H_{el,e} \equiv K_{el,e} + \frac{4}{3}\mu_{el,e}$  représentent des grandeurs effectives pour la distribution des sphères élastiques dans un MPE (les quantités barrées sont pour la matrice). Pour  $\rho_s < \bar{\rho}_s$ , on obtient  $\rho_{1,e}/\rho_s < 1$ , soit un milieu effectif moins dense que le milieu hôte élastique. Dans l'Eq. (4.30), on note l'absence du module de cisailment  $\mu_s$  de la sphère. Ainsi, deux phases (matrice et sphère) égales par leurs modules d'incompressibilité mais différentes par leurs modules de cisailment conduisent à un module effectif identique. Si, dans le membre de gauche de l'Eq. (4.30),  $\mu_{el,e} = \bar{\mu}_s$ , la formule qui en résulte est à rapprocher de l'estimation de Kuster-Tökösz pour deux constituants avec les fractions  $\mathfrak{C}$  et  $1 - \mathfrak{C}$ , cf. Eq. (19) de la Réf. [17].

► Pour une matrice à porosité élevée ( $\phi \rightarrow 1$ ), nous avons  $\rho \rightarrow \rho_f$ ,  $H \rightarrow K_f$

( $K_b \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow 1$ ) à partir desquelles sont tirées les limites suivantes :

$$\frac{\rho_{1,e}}{\rho} \rightarrow \frac{\rho_{liq,e}}{\rho_f} = 1 - \mathfrak{C} \frac{\rho_f - \rho_s}{\rho_f}, \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{H_{1,e}} \rightarrow \frac{1}{H_{liq,e}} = \frac{1 - \mathfrak{C}}{K_f} + \frac{\mathfrak{C}}{K_s}, \quad (4.32)$$

où  $\rho_{liq,e}$  et  $H_{liq,e} \equiv K_{liq,e}$  définissent la masse volumique effective et le module effectif pour la distribution de sphères élastiques dans un liquide. L'équation (4.32) est typique de la moyenne de Reuss [9], que l'on trouve en supposant que la contrainte en chaque point du milieu effectif est égale à la contrainte macroscopique appliquée à l'échantillon.

## 4.6 Le coefficient de diffusion du MPE effectif

Dans un MPE homogène sans sphères, les conditions qui favorisent une onde lente de forte amplitude sont les suivantes : continuité des deux phases (fluide et solide), fréquence acoustique élevée, perméabilité aux fluides élevée et faible viscosité [?], [?]. En basse fréquence (où  $\omega \ll \omega_c$ ), l'onde lente correspond à un mode de propagation de type diffusif ( régi par une équation de diffusion à coefficient de diffusivité hydraulique). Ayant ces faits à l'esprit, nous traitons maintenant le cas du nombre d'onde effectif lent. En tenant compte des résultats de la section 4.4, on trouve que

$$\zeta_2^2 = \frac{i\omega}{\chi} \left( 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{C} - \frac{5}{4}\mathfrak{C}^2 \right), \quad (4.33)$$

où

$$\chi = i\epsilon^{-1} = \frac{HM - C^2}{\omega_c \rho_f H}. \quad (4.34)$$

Ce résultat suggère un processus de diffusion dans le domaine temporel régi par l'équation aux dérivées partielles

$$\mathcal{D}_e \vec{\nabla}^2 \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau}, \quad (4.35)$$

où  $\phi_2$  est un potentiel de déplacement pour l'onde lente (avec dépendance du temps en  $e^{-i\omega\tau}$ ) et où

$$\mathcal{D}_e = \frac{i\omega}{\zeta_2^2} = \frac{\chi}{1 + \frac{1}{2}\mathfrak{C} - \frac{5}{4}\mathfrak{C}^2}, \quad (4.36)$$

est le coefficient de diffusion effectif. La condition de stabilité mécanique  $HM - C^2 \geq 0$  impose  $\mathcal{D}_e > 0$ . D'autre part, puisque  $\mathfrak{C} < \frac{2}{5}$  (correspondant au cas "dilué" observé dans ce chapitre), le coefficient de diffusion effectif  $\mathcal{D}_e < \mathcal{D}_e(\mathfrak{C} = 0) = \chi$ , c'est-à-dire que la présence de sphères élastiques dans la matrice poroélastique abaisse le coefficient de diffusion (l'expression de  $\mathcal{D}_e(\mathfrak{C} = 0)$  a été donnée par Berryman, voir l'équation (73) de la référence [4]).

On doit noter que le cas des "sédiments mous" pour lequel  $HM - C^2 \approx 0$  donne  $\mathcal{D}_e \approx 0$ . C'est une valeur également obtenue pour les squelettes à haute porosité où  $H \approx M \approx C$ .

Si le squelette de la matrice poroélastique est constitué de grains sphériques réguliers, la perméabilité est généralement approchée par la formule de Kozeny-Carman  $\kappa = \frac{\phi a_p^2}{20}$  où  $a_p = \frac{\phi d_g}{3(1-\phi)}$  est le paramètre de taille de pore correspondant aux grains sphériques de diamètre  $d_g$ . Dans ces conditions, pour un milieu infiniment rigide ( $H \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow \frac{K_f}{\phi}$ ) on a

$$\mathcal{D}_e \rightarrow \mathcal{D}_e^{rig} = \frac{K_f a_p^2}{20\eta} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\mathfrak{C} - \frac{5}{4}\mathfrak{C}^2}. \quad (4.37)$$

Ainsi,  $\mathcal{D}_e^{rig}$  tend vers zéro quand le rayon moyen des pores tend vers zéro.

A partir de l'Eq. (4.33) on trouve, en ne retenant que les valeurs positives pour la partie réelle que

$$\zeta_2 = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi} \left(1 + \frac{1}{2}\mathfrak{C} - \frac{5}{4}\mathfrak{C}^2\right)}. \quad (4.38)$$

Ce résultat montre que l'onde lente est rapidement amortie à l'intérieur du MPE effectif. L'amortissement dépend de la concentration. La distance à laquelle l'amplitude est réduite de  $e$  fois est

$$\Delta_e = \sqrt{\frac{2\chi}{\omega \left(1 + \frac{1}{2}\mathfrak{C} - \frac{5}{4}\mathfrak{C}^2\right)}}. \quad (4.39)$$

C'est une profondeur de pénétration effective. Avec les données du Tableau 1, on obtient  $\Delta_e = 0,045$  m pour  $f = 10$  kHz et  $\mathfrak{C} = 20\%$  à comparer avec la profondeur de peau visqueuse  $d_s = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} = 4.2 \times 10^{-6}$  m. Puisque  $\mathfrak{C} = n_0(4\pi R^3/3)$ , plus la taille des diffuseurs est grande, plus  $\Delta_e$  est petit pour un nombre fixe de sphères par unité de volume.

Pour conclure cette section, nous pouvons noter l'absence de contribution du terme  $\delta_2^{2,c}$  relatif aux conversions d'onde. Un tel résultat tient au fait que nous n'avons considéré dans les développements que les termes ayant les puissances en  $\omega$  les plus basses.

Des calculs plus précis prenant en compte des puissances plus élevées devraient permettre d'introduire les effets des conversions.

## 4.7 Conclusion

Dans un MPE obéissant à la théorie de Biot, il est reconnu que les ondes rapide et lente ont des comportements très différents. L'onde rapide est propagative à toutes les fréquences, tandis que l'onde lente est diffusive aux très basses fréquences, ne devenant propagative que lorsque la fréquence est suffisamment grande.

En présence de diffuseurs sphériques répartis aléatoirement dans le MPE, et à basse fréquence, les comportements des ondes rapide et lente subsistent tout en étant influencés par la présence des diffuseurs. À partir de la formule du nombre d'onde effectif de Luppé, Conoir et Norris (LCN) que nous appliquons au cas poroélastique, nous avons obtenu des expressions pour les nombres d'onde effectifs rapide et lent à basse fréquence. D'une part, l'analyse de l'onde effective rapide a permis de mettre en évidence l'importance des conversions de modes (qui dépendent du matériau de la sphère) et d'extraire le module et la masse volumique effective du MPE effectif. D'autre part, l'analyse de l'onde lente a permis d'extraire un coefficient de diffusion effectif fonction de la fraction volumique des particules (jusqu'au second ordre) et d'estimer une profondeur de pénétration dans le MPE effectif. A basse fréquence, les propriétés physiques des sphères ont très peu d'influence sur les propriétés effectives de l'onde lente.

# Bibliographie

- [1] A. Kuagbenu, H. Franklin and A. d’Almeida, Fast and slow effective waves across dilute random distributions of elastic spheres in a poroelastic medium, *Ultrasonics* (2021)
- [2] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (1956) 168 –178
- [3] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (1956) 179 –191
- [4] J. G. Berryman, Elastic wave propagation in fluid saturated porous media, *J. Acoust. Soc. Am.* 69 (2) (1981) 416-424
- [5] P. A. Martin, A. Maurel, and W. J. Parnell, Estimating the dynamic effective mass density of random composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(2), pp 571-577, August 2010.
- [6] G. T. Kuster and M. Nafi Toksöz, Velocity and attenuation of seismic waves in two phase media : part I. Theoretical formulation, *Geophysics* 39 (5) (1974) 587-606
- [7] A. N. Norris, Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites, *Int. J. Engng. Sci.* 24 (8) (1986) 1271-1282
- [8] C. Aristégui and Y. Angel, Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering, *Wave Motion* 44 (2007), 153-164
- [9] R. M. Christensen, *Mechanics of composite materials*, Wiley, New-York, 1979.
- [10] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen, Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media, *Phys. Rev. E* 70, 026609 (2004)

- [11] F. Luppé, J. M. Conoir and A. N. Norris, Effective wave numbers from thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers, *J. Acoust. Soc. Am.* 131 (2012) 1113-1120
- [12] D. L. Johnson, T. J. Plona and H. Kojima, Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media, *J. Appl. Phys.* 76(1) (1994) 115-125
- [13] J.-P. Sessarego, Jean Sageloli and R. Guillermin, Scattering by an elastic sphere in an elastic isotropic medium *J. Acoust. Soc. Am.* (1998) 104 (5) 2836–2844
- [14] M. Abramowicz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover New-York, 1974
- [15] Y-L Xu, Fast evaluation of the Gaunt coefficients, *Mathematics of Computation*, 65 (216) (1996) 1601-1612
- [16] C. F. Yin and R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.* 27 (9) (1956) 1086-1097
- [17] J. G. Berryman, Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions, *J. Acoust. Soc. Am.* 68(6) (1980) 1809-1819
- [18] R. D. Stoll and T.-K. Kan, Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.* 70 (1) (1981) 149-156
- [19] R. J. S. Brown and J. Korringa, On the dependence of the elastic properties of a porous rock on the compressibility of the pore fluid, *Geophysics* (1975) 40 (4) 608–616
- [20] Plona T. J., Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.* 36 (1980), 259

## Chapitre 5

# Étude paramétrique des nombres d'ondes effectifs rapide et lent

### 5.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous présentons une étude essentiellement numérique des nombres d'ondes effectifs rapide et lent. Il s'agit, d'une certaine manière de la deuxième partie du travail entamé dans le chapitre 4. On compare maintenant les propriétés de la diffusion multiple dans deux MPE (le QF20 et le sable de Stoll). Les diffuseurs répartis aléatoirement - tous identiques - sont soit des cavités remplies du même fluide que celui de la saturation, soit des sphères élastiques en epoxy. On examine plus particulièrement deux effets : celui du type de MPE et celui (pour chaque MPE) de la porosité sur le comportement des ondes effectives (étude des cas limites où la porosité est faible ( $\beta \rightarrow 0$ ) et forte ( $\beta \rightarrow 1$ )). D'un point de vue pratique, les combinaisons présentée sont

1. QF20/cavités : il s'agit d'un modèle utile pour l'études des défauts thermiques dans les bétons. Sous l'effet de la chaleur, il apparaît des (micro-)craquelures qui évoluent en terme de fraction volumique et de taille dans le MPE. La très grande majorité des travaux antérieurs sur le sujet a eu lieu en supposant une matrice élastique.
2. QF20/sphères solides : ce modèle est encore utile pour l'étude des bétons mais aussi des os
3. sable de Stoll/cavités : Certains sédiments marins hétérogènes comportent des



espaces vides répartis aléatoirement formant un deuxième réseaux de pores de tailles beaucoup plus grandes que les pores de la matrice.

4. sable de Stoll/sphères : modèle de sédiment marin hétérogène contenant des obstacles de tailles finie aléatoirement répartis.

## 5.2 Comparaison des nombres d'ondes dans le sable de Stoll et dans le QF20

On commence par considérer des MPE sans aucun diffuseur. Les nombres d'onde des ondes rapide, lente et transversale, représentés par les quantités sans dimension  $x_\alpha = k_\alpha a_p$ , avec  $\alpha = 1, 2, t$  sont donnés en fonction de la fréquence (remarquer que pour le QF20, des courbes ont déjà été fournies dans le chapitre 4). On ajoute ici le cas du sable de Stoll (Figure 5.1) dont les paramètres se trouvent dans le tableau :5.1. Un milieu comme le sable de Stoll se distingue du QF20 par le fait qu'il est "mou" et que les grains le constituant ne sont pas nécessairement assemblés de manière cohésive les uns autres, contrairement au QF20.

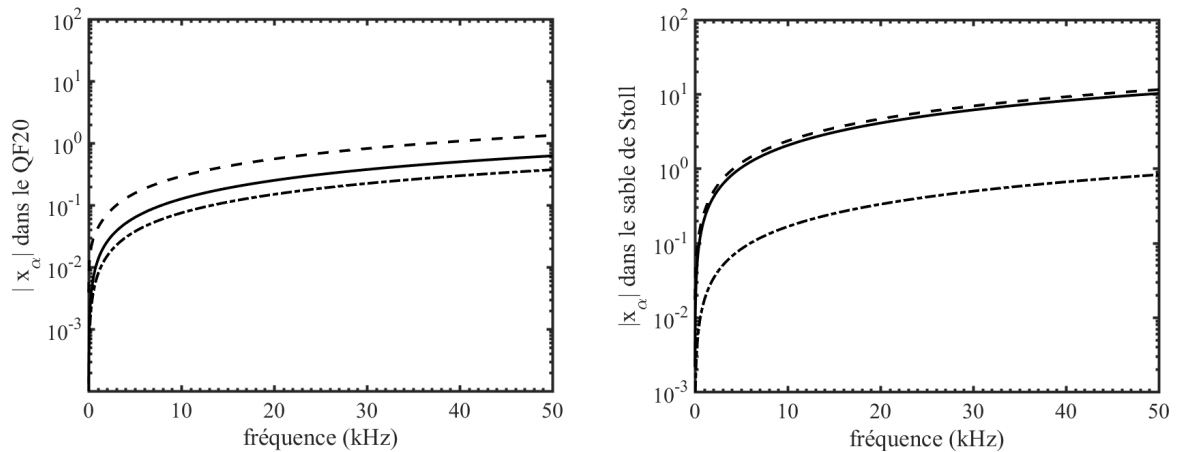


FIGURE 5.1 – Évolution en fonction de la fréquence des modules des nombres d'ondes  $x_t$  (courbe continue),  $x_2$  (courbe en tireté) et  $x_1$  (courbe en point-tiré) dans le sable de Stoll (a) et dans le QF20 (b).

Dans le cas du sable de Stoll, on constate que seul  $|x_1|$  est inférieur à 1 dans l'intervalle  $1 < f < 50$  kHz. Les autres modules,  $|x_2|$  et  $|x_t|$ , dépassent 1 seulement lorsque la fréquence est au delà de 5 kHz. Ceci montre que les développements limités effectués

dans les chapitres 2 et 4 doivent être utilisés avec certaines précautions (notamment, le domaine fréquentiel dans lequel on effectue les études doit être précisé).

| Paramètres     | Unités                             | QF20                   | sable de Stoll        |
|----------------|------------------------------------|------------------------|-----------------------|
| $K_s$          | Pa                                 | $3,66 \times 10^{10}$  | $3,6 \times 10^{10}$  |
| $K_b$          | Pa                                 | $9,47 \times 10^9$     | $4,36 \times 10^7$    |
| $K_f$          | Pa                                 | $2,22 \times 10^9$     | $2,0 \times 10^9$     |
| $\mu$          | Pa                                 | $7,63 \times 10^9$     | $2,61 \times 10^7$    |
| $\bar{\rho}_s$ | kg. m <sup>-3</sup>                | 2760                   | 2650                  |
| $\rho_f$       | kg. m <sup>-3</sup>                | 1000                   | 1000                  |
| $\beta$        | -                                  | 0,402                  | 0,47                  |
| $\kappa$       | m <sup>2</sup>                     | $1,68 \times 10^{-11}$ | $5,0 \times 10^{-11}$ |
| $a_p$          | m                                  | $3,26 \times 10^{-5}$  | $10^{-5}$             |
| $\eta$         | kg.m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> | $1,14 \times 10^{-3}$  | $1,14 \times 10^{-3}$ |
| $\tau$         | -                                  | 1,89                   | 3                     |

TABLE 5.1 – Paramètres du QF20 et du sable de Stoll.

### 5.3 Effet de la présence de diffuseurs sur les nombres d'onde

Toutes les courbes des vitesses et des atténuations sont obtenues dans le domaine fréquentiel situé entre 0 et 50kHz, c'est-à-dire aux basses fréquences.

#### 5.3.1 Cas des cavités

En l'absence de diffuseurs, les vitesses  $c_{\alpha ph} = \omega/Re(k_\alpha)$  et atténuations  $\mathcal{A}_\alpha = Im(k_\alpha)/Re(k_\alpha)$  des ondes rapide ( $\alpha = 1$ ) et lente ( $\alpha = 2$ ) dans le MPE sont représentés par des traits continus noirs sur les figures (5.2) et (5.3).

En présence des cavités dans le MPE, on a représenté les vitesses et les atténuations jusqu'au second ordre en concentration, c'est-à-dire que l'on a tenu compte de  $\delta_2^{1,0} + \delta_2^{1,c}$ . Les courbes en vert pointillé sont obtenues avec des  $t_n^{\alpha\beta}$  exacts. Celles en rouge tireté illustrent le cas où les  $t_n^{\alpha\beta}$  sont approchés (*cf.* formules pour les cavités fluides du chapitre 2).

#### Onde rapide

Aux très basses fréquences (inférieures à 0.1 kHz), on observe que la vitesse de phase  $c_{1ph}$  de l'onde rapide, figure 5.2, est d'environ 3313 m/s dans le QF20 et de 1475 m/s dans le sable. Dans les deux cas de MPE, en présence de cavités fluides (rayon

$R = 4.10^{-3}\text{m}$ , fraction volumique  $\mathfrak{C} = 20\%$ ), la vitesse de l'onde effective  $v_{1eff} < c_{1ph}$ . Lorsque la fréquence augmente, tandis que  $v_{1eff}$  et  $c_{1ph}$  se rejoignent pour le QF20, elles restent différentes pour le sable mais toujours avec  $v_{1eff} < c_{1ph}$ .

L'atténuation  $\mathcal{A}_1$  de l'onde rapide dans le QF20, figure 5.2, quant à elle, présente une caractéristique bien connue des milieux amortisseur d'ondes : elle est croissante de 0 à 1 kHz, atteint une amplitude maximale de 0.0075 à environ 2 kHz puis décroît. Dans le milieu effectif (présence de cavités), cette atténuation notée alors  $\mathcal{A}_{1eff}$  suit le même comportement avec toutefois une augmentation de l'amplitude maximale puisque celle passe de 0,0075 à plus de 1,015. La position fréquentielle du pic reste inchangée. Lorsque le MPE est du sable de Stoll, on n'observe aucune différence de comportement entre l'absence de cavité et la présence de celles-ci aux fréquences inférieures à 20kHz. Ceci montre que l'atténuation des ondes est optimale dans le sable de Stoll mais pas dans le QF20 où elle peut être modifiée en rendant ce milieu hétérogène.

Ces premiers calculs nous donnent aussi l'occasion de vérifier la validité des approximations que nous avons obtenues au chapitre 2 pour les coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$ . On constate que la courbe rouge (tireté) et la courbe verte se confondent presque parfaitement, justifiant en partie la validité des grandeurs effectives qui seront déduites plus loin.

### Onde lente

Comme on a pu le constater dans le chapitre précédent, le comportement de l'onde lente est très différent de celui de l'onde rapide, cf. ici la figure 5.3. On observe que, lorsque la fréquence passe de 0 à 50 kHz, la vitesse de phase  $c_{2ph}$  de l'onde lente croît de façon monotone, passant de 0 m/s à 1000 m/s dans le QF20 et de 0 m/s à 110 m/s dans le sable. Dans les deux cas de MPE (QF20 ou sable), en présence de cavités fluides (rayon  $R = 4.10^{-3}$  m, fraction volumique  $\mathfrak{C} = 20\%$ ) on a  $v_{2eff} \approx c_{2ph}$  à toute fréquence. On peut aussi observer que les atténuations  $\mathcal{A}_2$  en l'absence cavité et  $\mathcal{A}_{2eff}$  en présence de cavités sont quasiment identiques, décroissantes monotones de 1 à 0 lorsque la fréquence croît de 0 à 50kHz. Ces remarques montrent qu'à basse fréquence, la présence des cavités (les courbes noire et verte se confondent) influe peu sur l'onde lente. Ici aussi, on peut vérifier la validité des approximations que nous avons obtenues pour les  $t_n^{\alpha\beta}$ , la courbe en rouge tireté et la courbe verte se confondant presque parfaitement sur tout le domaine fréquentiel étudié.

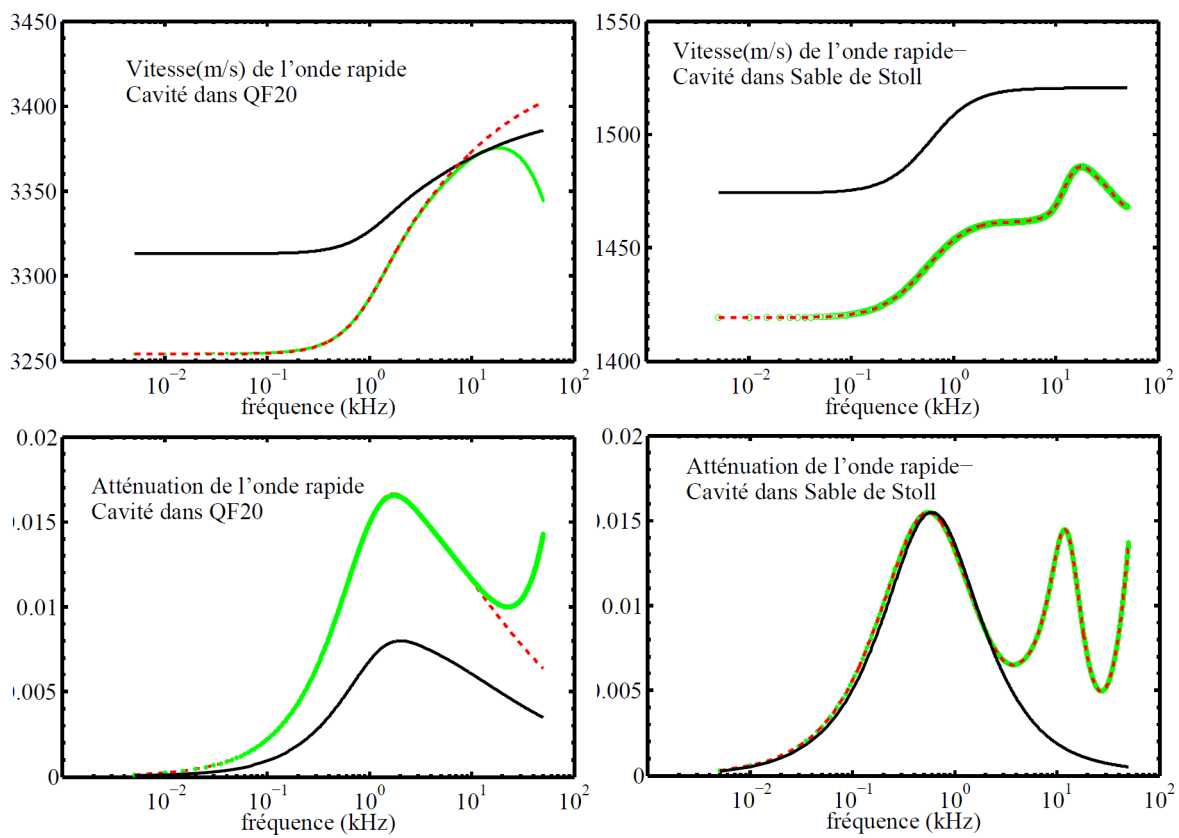


FIGURE 5.2 – Vitesse et atténuation de l'onde rapide en l'absence de cavités (courbe noire continue), en présence de cavités (courbe verte). La courbe en rouge tireté est obtenue en utilisant les formules approchées des coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$  dans le nombre d'onde effectif.

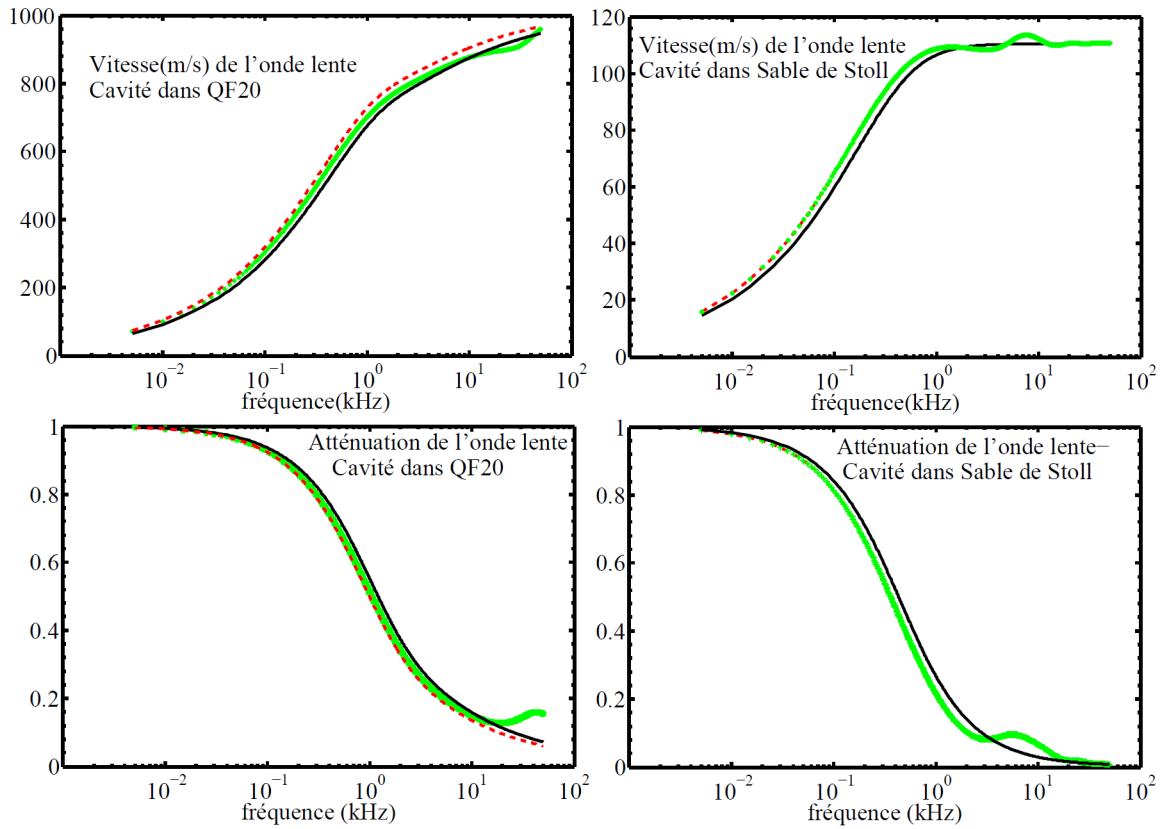


FIGURE 5.3 – Vitesse et atténuation de l’onde lente en l’absence de cavités (courbe noire continue), en présence de cavités (courbe verte). La courbe en rouge tireté est obtenue en utilisant les formules approchées des coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$  dans le nombre d’onde effectif.

### 5.3.2 Cas des sphères en epoxy

En l’absence de sphères dans le MPE, les vitesses et les atténuations des ondes rapide et lente ( $\alpha = 2$ ) sont encore représentées par des traits continus noirs dans les figures (5.4) et (5.5).

En présence de sphères dans le MPE, on a ici aussi calculé les vitesses et les atténuations jusqu’au second ordre en concentration. Gardant le même code de couleur que dans la section précédente, on notera que les courbes en vert pointillé sont obtenues avec des  $t_n^{\alpha\beta}$  exacts. Celles en rouge tireté illustrent le cas où les  $t_n^{\alpha\beta}$  sont approchés (*cf.* formules pour les sphères élastiques du chapitre 2).

### Onde rapide

On peut observer, figure 5.4 que dans les deux cas de MPE, en présence de sphères en epoxy (rayon  $R = 4.10^{-3}\text{m}$ , fraction volumique  $\mathfrak{C} = 20\%$ ), la vitesse de l'onde effective  $v_{1eff} > c_{1ph}$ . C'est une situation inverse de celle où les sphères sont des cavités. En ce qui concerne l'atténuation, on note que  $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_{1eff}$  quelque soit le MPE, QF20 ou sable de Stoll cf. figure 5.4. Ceci montre que l'atténuation de l'onde rapide est maximale dans les deux milieux poreux en l'absence de sphères en epoxy.

On constate par ailleurs que la courbe rouge (tireté) et la courbe verte sont plus proches dans le cas du QF20 que dans celui du sable de Stoll. Dans ce dernier cas, la validité des développements limités des coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$  reste toute relative.

### Onde lente

Les remarques faites dans la section précédente à propos de l'onde lente restent valables ici, cf. figure 5.5. Dans les deux cas de MPE (QF20 ou sable), en présence des sphères en epoxy (rayon  $R = 4.10^{-3}$  m, fraction volumique  $\mathfrak{C} = 20\%$ ) on peut considérer que  $v_{2eff} \approx c_{2ph}$  à toute fréquence. On peut aussi observer que les atténuations  $\mathcal{A}_2$  en l'absence de sphères et  $\mathcal{A}_{2eff}$  en présence de sphères sont quasiment identiques, décroissantes monotones de 1 à 0 lorsque la fréquence croît de 0 à 50kHz. Ces remarques montrent qu'en basse fréquence, la présence des sphères en epoxy influe peu, dans ces nouveaux exemples de milieux hétérogènes, sur l'onde lente.

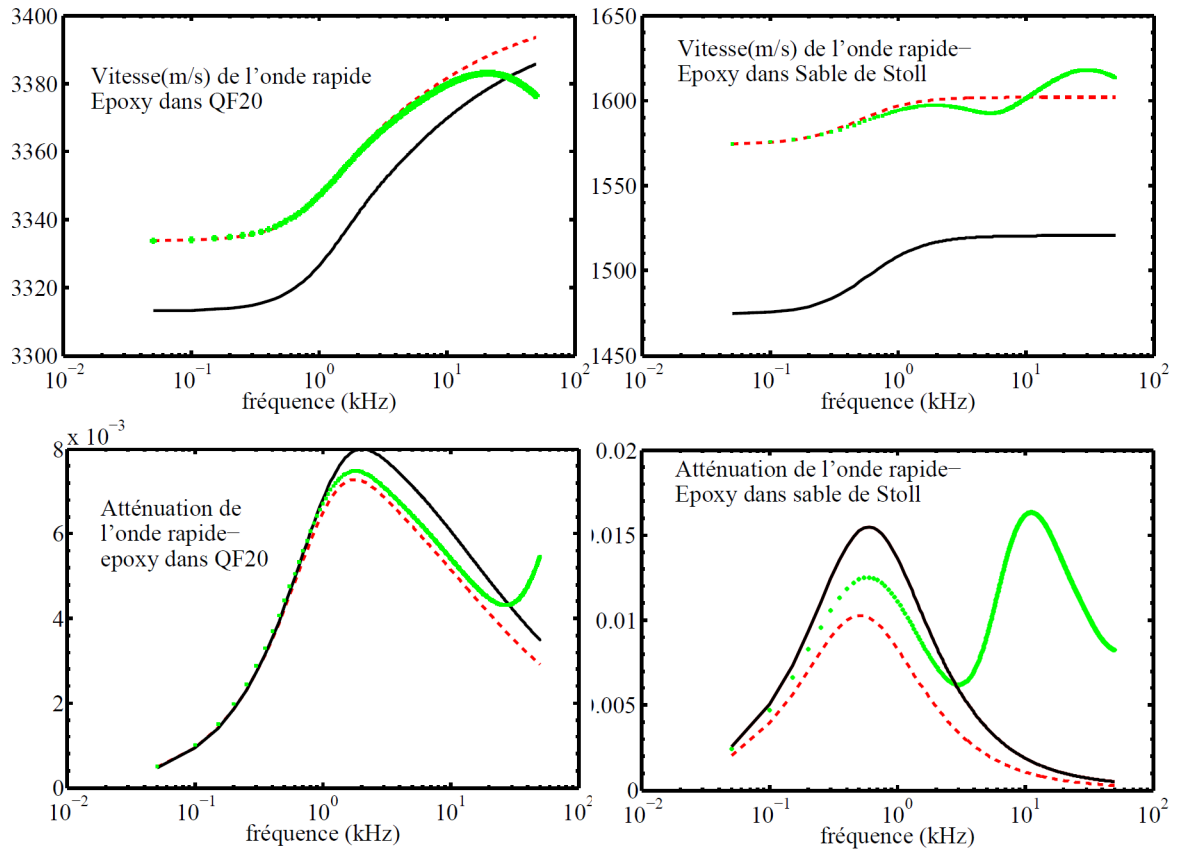


FIGURE 5.4 – Vitesse et atténuation de l'onde rapide en l'absence de sphères en epoxy (courbe noire continue), en présence de sphères (courbe verte). La courbe en rouge tireté est obtenue en utilisant les formules approchées des coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$  dans le nombre d'onde effectif.

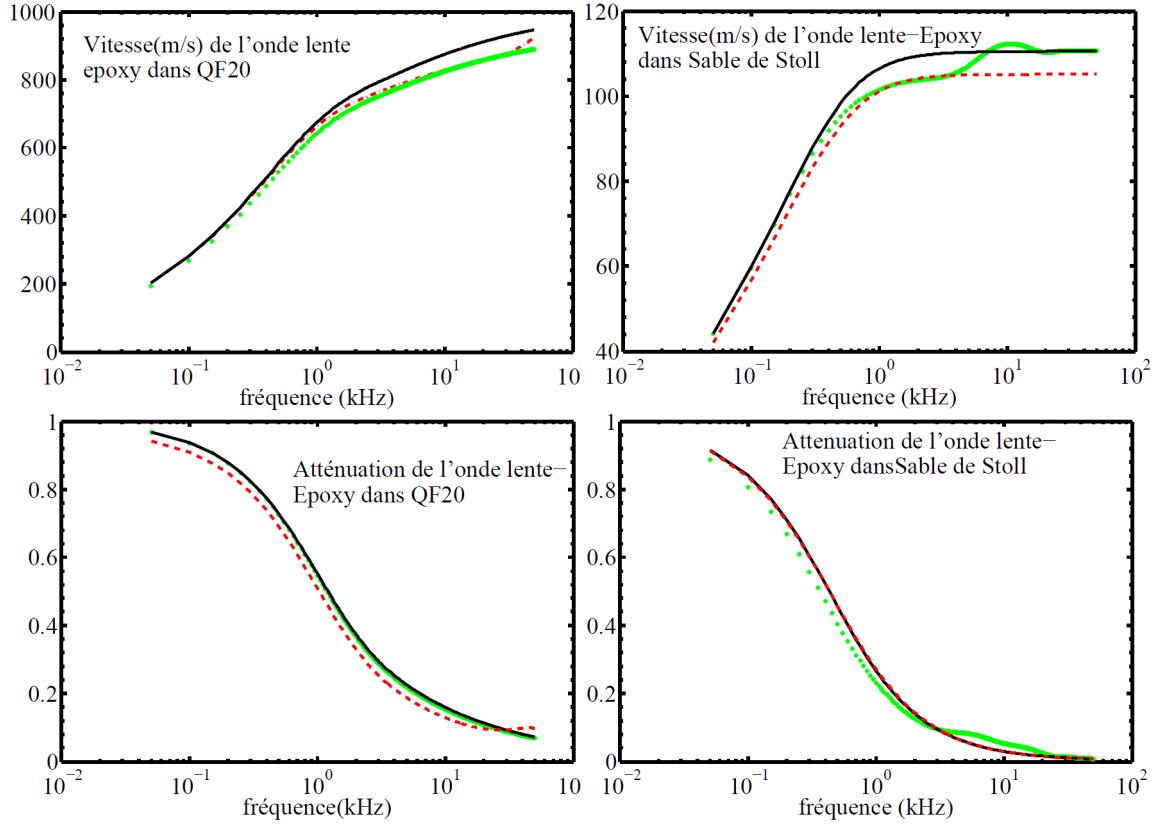


FIGURE 5.5 – Vitesse et atténuation de l'onde lente en l'absence de sphères en epoxy (courbe noire continue), en présence de sphères (courbe verte). La courbe en rouge tireté est obtenue en utilisant les formules approchées des coefficients  $t_n^{\alpha\beta}$  dans le nombre d'onde effectif.

## 5.4 Module et masse volumique effectif

On rappelle qu'en basse fréquence, où  $\omega \mapsto 0$ , les nombres d'onde du MPE sont donnés par  $k_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{H} + O(\omega^3)$ ,  $k_2^2 = \omega \epsilon - \omega^2 \left( \frac{mH + \rho M - 2\rho_f C}{C^2 - HM} + \frac{\rho}{H} \right) + O(\omega^3)$ ,  $k_t^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} + O(\omega^3)$ , cf. chapitre 4, où :

$$\epsilon = \frac{i\omega_c \rho_f H}{HM - C^2}. \quad (5.1)$$



Il s'ensuit que  $\gamma_1 = O(\omega)$ ,  $\gamma_2 = -\frac{H}{C} + (\frac{\rho}{C\epsilon} - \frac{H\rho_f}{C^2\epsilon})\omega + O(\omega^2)$ ,  $\gamma_t = O(\omega)$ . Quant au fluide,  $k_f^2 = \frac{\omega^2}{c_f^2}$ . Les masses volumiques approchées sont :

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \rho - \frac{C}{H}\rho_f, \quad \rho_t = \rho, \quad \rho_{f1} = \frac{C}{H}\rho \\ \rho_{f2} = -i\frac{H}{C}\frac{\omega_c}{\omega}\rho_f \quad \tilde{\rho}_1 = (\frac{C}{H} - 1)\rho \quad \tilde{\rho}_2 = \frac{H}{c}\rho_f - \rho - i\frac{H}{C}\frac{\omega_c}{\omega}\rho_f. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Rappelons les expressions du module et de la masse volumique effectifs obtenus dans le chapitre 4 :

$$\rho_{eff} = \rho(1 - 3\mathfrak{C}\frac{N_1^{11}}{d_1}), \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{H_{eff}} = \frac{1}{H}[1 + \mathfrak{C}(\frac{N_0^{11}}{d_0} - 1)]. \quad (5.4)$$

Compte tenu des expressions approchées ci-dessus, on obtient pour le mode n=0,

$$\frac{N_0^{11}}{d_0} = \frac{C}{\rho c_f^2}, \quad (5.5)$$

et pour le mode n=1,

$$\frac{N_1^{11}}{d_1} = \frac{\rho - \rho_f}{3\rho}. \quad (5.6)$$

Le module effectif prend donc la forme :

$$\frac{1}{H_{eff}} = \frac{1 - \mathfrak{C}}{H} + \frac{\mathfrak{C}}{H\frac{\rho c_f^2}{C}}. \quad (5.7)$$

La masse volumique effective, quant à elle, donnée par :

$$\rho_{eff} = (1 - \mathfrak{C})\rho + \mathfrak{C}\rho_f, \quad (5.8)$$

où, on le rappelle,  $\rho = (1 - \beta)\bar{\rho}_s + \beta\rho_f$ . Lorsque l'on fait tendre  $\beta$  vers 0 (matrice élastique),  $\rho$  tend vers  $\bar{\rho}_s$  donc  $\rho_{eff} = (1 - \mathfrak{C})\bar{\rho}_s + \mathfrak{C}\rho_f$ , formule déjà obtenue au chapitre 4 dans le cas des sphères élastiques.

## 5.5 Coefficient de diffusion effectif

Le coefficient de diffusion  $D_e$  décrite dans le chapitre 4 est déterminé par calcul numérique en fonction de la concentration en sphères puis de la fréquence sur la figure (5.6). On remarque que celui du QF20 est plus élevé que le sable de Stoll.

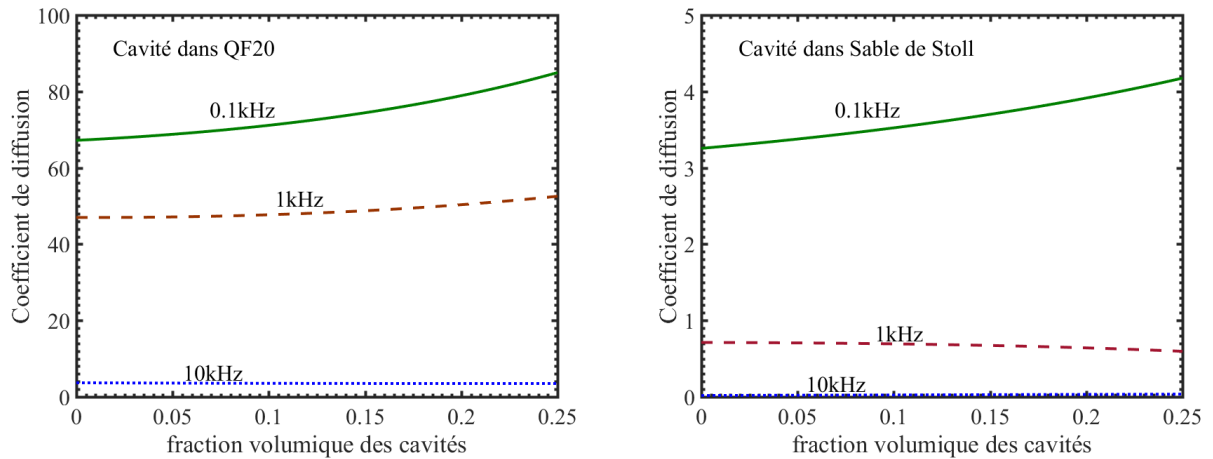


FIGURE 5.6 – Coefficients de diffusion des cavités dans le QF20(a) et le sable de Stoll(b) en fonction de la fraction volumique des cavité

## 5.6 Conclusion

Au long de ce chapitre des comparaison ont été faites entre le QF20 et le sable de Stoll, on remarque que les vitesses les atténuation sont plus élevés dans le cas du QF20 que le sable de Stoll. L'étude de la diffusion multiple pour les cas limites de porosité nous ont permis de comparer nos résultats à ceux de la littérature.

# Bibliographie

- [1] A. Kuagbenu, H. Franklin and A. d’Almeida, Fast and slow effective waves across dilute random distributions of elastic spheres in a poroelastic medium, *Ultrasonics* (2021)
- [2] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (1956) 168 –191
- [3] R. D. Stoll and T.-K. Kan, Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.* 70 (1) (1981) 149-156
- [4] Johnson D. L., Hemmick, D. L, Kojima H., Probing porous media with first and second sound : I dynamic permeability, *J. Appl. Phys* 76 (1) (1994), 104-114.
- [5] Johnson D. L., Plona T. J., Kojima H., Probing porous media with first and second sound : II acoustic properties of water saturated porous media, *J. Appl. Phys* 76 (1) (1994), 115-125.
- [6] Plona T. J., Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.* 36 (1980), 259
- [7] J.-F. Chaix, V. Garnier and G. Corneloup, Ultrasonic wave propagation in heterogeneous solid media : Theoretical analysis and experimental validation, *Ultrasonics* 44 (2006) 200-210
- [8] H. W. Chung, Ultrasonic testing of concrete after exposure to high temperatures, *NDT Int.* 18 (1995) 275-278
- [9] P. E. Grattan-Bellew, Micro-structural investigation of deteriorated Portland cement concrete, *Construct. Build. Mat.* 10 (1996) 3-16
- [10] P. Anugonda, J. S. Wiehn and J. A. Turner, Diffusion of ultrasound in concrete, *Ultrasonics* 39 (2001) 429-435

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons dans un premier temps rappelé la théorie de Biot (car on s'intéresse au MPE de Biot) avant de passer à l'étude en basses fréquences de la diffusion multiple dans un milieu poreux en présence d'obstacles de forme sphérique (élastiques ou fluides). Deux cas d'ondes planes incidentes sur ce milieu hétérogène ont été traités : (i) onde longitudinale rapide (ii) onde longitudinale lente. Dans les deux cas, des résultats importants ont été dégagés concernant les milieux hétérogènes :

- vitesses de phase et atténuations effectives rapides et lentes,
- constante de diffusion effective,
- grandeurs effectives, modules et masses volumiques, dans la limite statique (fréquence nulle).

Les simulations numériques pour plusieurs combinaisons de matériaux ont permis de corroborer nos développements analytiques. Les résultats peuvent être appliqués à d'autres matériaux du même type que ceux considérés tout au long de l'étude. Les applications potentielles de ce travail devraient concerner les composites et les métamatériaux particuliers. L'utilisation d'une matrice poroélastique (MPE) à la place d'une matrice élastique a également pour effet d'introduire une absorption basse fréquence, et de s'intéresser au phénomène de la propagation par diffusion dans un milieu hétérogène. La présente étude propose par ailleurs une alternative à l'utilisation de matrices viscoélastiques. Les matériaux viscoélastiques ont des propriétés fixes alors qu'un milieu poroélastique peut subir des transformations agissant sur ses caractéristiques acoustiques : modification de la porosité (donc de la perméabilité) via un processus d'invasion ou d'érosion, modification des diffuseurs par un processus chimique, modification du fluide saturant. En effet, les matrices poroélastiques (dont, en plus le squelette peut être réalisé avec un matériau viscoélastique) pourraient permettre l'avènement de nouveaux types de métamatériaux aux performances acoustiques mo-

difiables à volonté.

Comme perspective, le cas où l'onde incidente sur le MPE en présence des sphères est transversale fera l'objet d'une étude afin de compléter la caractérisation du milieu effectif par la détermination des coefficients de Lamé. On pourra également reprendre l'étude en supposant des milieux hétérogènes polydisperses (sphères de tailles différentes) ou en considérant des inclusions sphériques elles-mêmes poreuses.